АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 123

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. V

Сборник работ под редакцией
Л. Д. ФАДДЕЕВА

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1983

В сборнике публикуются работы, выполненные в Семинаре по теории представлений групп и алгебр и ее приложениям (руководители – А.М.Вершик и М.А.Семенов-Тян-Шанский). Работы подразделяются на несколько циклов: теория представлений групп Ли; интегрируемые системы и их связи с бесконечномерными группами и алгебрами Ли; теория представлений симметрических групп; дискретные группы; операторные алгебры; комбинаторика и выпуклый анализ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ
И МЕХАНИКА. У

Записки научных семинаров Ленинградского отделения
ордена Ленина Математического института им.В.А.Стеклова
Том I23

Утверждено к печати
Ленинградским отделением ордена Ленина Математического
института им. В.А.Стеклова АН СССР

ИБ № 20375

Подписано к печати 31.I2.82. М-I3739.
Формат 60х90 I/I6. Бумага офсетная № I. Печать офсетная.Печ.л.I4.5=
= I4,5 усл.печ.л.Усл.кр.-отт.I4.62.Уч.-изд.л.I4,09. Тираж 2050.
Изд. № 8596. Тип.зак. № 2126 . Цена 2 р.20 к.

Издательство „Наука" . Ленинградское отделение.
I99I64, Ленинград, В-I64, Менделеевская лин., I

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография
издательства „Наука"
I99034, Ленинград, В-34, 9 линия, I2

Д $\frac{1702050000-504}{042\ (02)-83}$ 5-82, кн.2

А.М.Вершик

МЕТАГОНАЛЬНАЯ И МЕТАПЛЕКТИЧЕСКАЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГРУППЫ.

I. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И МЕТАГОНАЛЬНАЯ ГРУППА

Содержание:

§ 0. Введение

В этой работе мы подробно изучаем несколько замечательных бесконечномерных групп и их алгебр Ли, и в первую очередь бесконечномерную метагональную группу и алгебру Ли – одномерное центральное расширение группы (соответственно алгебры Ли) ортогональных операторов, у которых антилинейная часть есть оператор Гильберта – Шмидта. Эта группа, а также параллельная ей метаплектическая группа были фактически открыты И.Сигалом [I] и исследованы Д.Шейлом[2] и Д.Шейлом и Ф.Стайнспрингом [3]. После этого ряд исследователей, в первую очередь А.Вейль [4] детально изучили конечномерную метаплектическую группу, Лере [5] , Костант [6], Гийемин и Стернберг [7] вскрыли глубокие связи ее с теорией дифференциальных операторов, индексом Маслова, квантованием и др. Бесконечномерная метаплектическая группа и ее аналог, который мы назвали метагональной группой, оставались до последнего времени плохо понятыми. Всплеск интереса к ним возник после того, как была оценена их роль в теории так называемых алгебр Каца-Муди. А именно, почти одновременно и независимо Кац-Петерсон [8], Френкель [9], Мива и др. [I0], Г.Сигал [II], а также чуть иначе Фейгин и Фукс [I2] (для алгебры Вирасоро) поняли, что наиболее естественная модель так называемого фундаментального модуля – простейшего представления алгебр Каца-Муди – дается в терминах спинорного представления (более точно, представления метагональной группы) и что первоначальная модель в бозонном фоковском пространстве Леповского – Вильсона [I3], Каца и др. [I4 , I5] – более громоздка. Г.Сигал [II] и Френкель [9] осознали важность одновременного сопоставления этих двух моделей, которое приводит к известному физикам бозон-фермионному соответствию, и к ряду комбинаторных тождеств. После этого, работы Шейла и Стайнспринга [2,3], где были лишь в самых общих чертах описаны упоминавшиеся группы, снова стали предметом внимания, но уже в другом контексте, о чем мы скажем несколько слов.

Широко известен механизм появления проективности унитарных представлений, связанный с группой Гейзенберга; именно, он возникает в простейших моделях квантования.С переходом к центральному расширению как раз и связано появление постоянной Планка. Для бесконечномерных групп, в частности, групп токов, такой способ получения проективных представлений использован в [16] стр.333 формула (2); он связан с общей формулой Араки - Вудса (см.[17]) для факторизуемых операторов. Совершенно новым явилось то обстоятельство, что эффективным источником проективных представлений (с непрерывным центром, но уже только в бесконечномерном случае могут служить группы автоморфизмов канонических коммутационных и антикоммутационных соотношений, т.е. метаплектическая и метагональная группы.

В частности, проективное представление группы и алгебры токов окружности (т.е. представление алгебры Каца-Муди) нельзя естественным образом, как предполагалось некоторыми авторами "пропустить" через группу Гейзенберга, необходимо использовать одну из "метагрупп". Новый механизм следует популярной алгебраической схеме: если имеется группа автоморфизмов алгебры (например, алгебры Клиффорда) или группы (например, группы Гейзенберга), и эти автоморфизмы переводят некоторое представление (фоковское фермионное или бозонное) в себя, то в пространстве представления возникает проективное, вообще говоря, представление этой группы автоморфизмов.

Напомним, что в конечномерной ситуации проективное представление ортогональной группы автоморфизмами клиффордовой алгебры привело Картана (I913) к открытию спинорной группы. Спинорное представление связывается в математике с именами Брауэра - Г. Вейля, в физике - Йордана - Вигнера - Паули. Спинорная группа двулистно накрывает ортогональную группу. Гораздо позже И.Сигал [I], Г.Макки и др. обнаружили двулистное накрытие симплектической группы - группы автоморфизмов группы Гейзенберга. А.Вейль ([4]), обративший внимание на ее роль в арифметике, рассматривает S^1-накрытие симплектической группы, называет ее метаплектической и доказывает сводимость S^1-расширения к $\mathbb{Z}_2$. Почему-то этой традиции (рассматривать S^1-расширение) не было для ортогональной группы; это S^1-расширение, редуцирующееся к спинорной группе, мы называем **метагональной** группой[ж)].

В этой статье мы показываем, как в бесконечномерной ситуации неустранимым образом появляется S^1-накрытие симплектической и ортогональной группы. Наш план состоит в том, что уже в конечномерном случае заготавливаются тривиализуемые, но не тривиальные S^1-расширения соответствующих групп, которые при $n \longrightarrow \infty$ переходят уже в нетривиализуемые S^1-расширения: метаплектическую и метагональную группы. Вопросу о том, как эти группы используются для получения центральных расширений групп токов и др. будет посвящена другая работа.

Для наглядности приведем схему:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Метагональная группа} \\
{} \arrow[dddd, "S^1"'] & MO(2n,\mathbb{R}) \\
& \cup \\
& \text{Спинорная группа} \\
& Spin(2n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"] \\
{} & SO(2n,\mathbb{R}) \\
& \text{Ортогональная группа}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \text{Метаплектическая группа} \\
{} \arrow[dddd, "S^1"'] & M_p(n,\mathbb{R}) \\
& \cup \\
& \text{Спинсимплектическая группа} \\
& Sp_2(n,\mathbb{R}) \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"] \\
{} & Sp(n,\mathbb{R}) \\
& \text{Симплектическая группа}
\end{tikzcd}$$

В бесконечномерном случае

$$\begin{tikzcd}
MO(H) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & GL_J(H) \arrow[r, phantom, "\supset"] & M_p(H) \arrow[d] \\
O_J(H) \arrow[r, phantom, "\supset"] & U(H) \arrow[r, phantom, "\subset"] & Sp_J(H)
\end{tikzcd},$$

J - оператор комплексной структуры.

[ж)] А.Вейль пишет: "Хотя этот результат (редуцируемость метаплектической группы к $\mathbb{Z}_2$ - А.В.) нам не понадобится, он является ответом на столь естественный вопрос, что нам показалось невозможным его опустить". Несколько слов о терминологии. Представление (проективное) симплектической группы иногда называют представлением А.Вейля. Некоторые авторы (Гийемин - Стернберг [7], Костант [6]) называют метаплектической группой двулистное (а не S^1) накрытие S_p. Лере [5] придерживается терминологии А.Вейля. Мы также сохраняем этот термин для S^1-расширения; а $\mathbb{Z}_2$-расширение предлагаем называть спинсимплектической группой (ср. Б.Костант: "Симплектические спиноры" [6]. См.также [18]).

Заметим еще, что ряд авторов (Плимен [19], Де-ля-Харп [20] [21] и др.) изучали собственно бесконечномерную спинорную группу. Она определена как $\mathbb{Z}_2$-расширение ортогональной группы "единица плюс ядерный оператор". Но это расширение представляет меньший интерес, так как не продолжается (как $\mathbb{Z}_2$-расширение) до группы "единица плюс гильберт -шмидтовский оператор". Четкое понимание геометрии нужного расширения и расслоения имеется в важной работе Г.Сигала [22]. Новое, что, на наш взгляд, содержится в настоящей статье, это, во-первых, аппроксимационная модель, проясняющая смысл конечномерного представления и дающая полное описание геометрии расслоения : $MO(H) \xrightarrow{S^1} O_J(H)$ (§§ 3,4) и, во-вторых, систематическая теория замечательного 2-коцикла α, связанного с комплексным гильбертовым пространством (§I). Важную роль сыграло наблюдение авторов [I0] об универсальности для алгебр Каца-Муди этого коцикла в некоторой конкретной модели (околодиагональных матриц). Видимо, все известные сейчас проективные представления бесконечномерных групп пропускаются либо через группу Гейзенберга, либо, что особенно интересно, через метагональную или метаплектическую группу. Иначе говоря, 2-коцикл α является универсальным для широкого класса групп. Наша теория полностью охватывает и симплектический случай, однако в остальных параграфах мы сосредотачиваем внимание лишь на ортогональной группе, надеясь описать столь же подробно метаплектический случай особо.

В разное время автор обсуждал вопросы, связанные с алгебрами токов и центральными расширениями с И.Френкелем, Д.Фуксом, Б.Фейгиным, И.Бернштейном, М.Семеновым-Тян-Шанским. Всем им - благодарность автора.

§ I. Основной 2-коцикл на алгебре Ли почти линейных операторов

I. Группы и алгебры Ли. Пусть $\mathbb{H}$ - комплексное гильбертово пространство конечной или счетной размерности. Через $H^R = H$ обозначим его овеществление. Пусть $<\cdot,\cdot>$ - скалярное произведение в $\mathbb{H}$, $<\cdot,\cdot>_R = \mathrm{Re}<\cdot,\cdot>$, $<\cdot,\cdot>_I = \mathrm{Im}<\cdot,\cdot>$. Форма $<\cdot,\cdot>_R$ превращает H^R в вещественное гильбертово (эвклидово) пространство, а $<\cdot,\cdot>_I$ - в симплектическое пространство, поскольку $<\cdot,\cdot>$ - положительно определена, а $<\cdot,\cdot>$ - кососимметрична и невырождена в H^R.

Обозначим через $O(H)$ ортогональную группу, а $Sp(H)$ -

симплектическую группу в H – их элементы есть обратимые линейные преобразования H, сохраняющие соответствующие формы. Если $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}=n$, то $O(H)=O(2n,\mathbb{R})$, $Sp(H)=Sp(H)$ Отметим, что

$$O(H)\cap Sp(H)=U(\mathbb{H}),$$

где справа стоит унитарная группа комплексного пространства $\mathbb{H}$ (В конечномерном случае – $O(2n)\cap Sp(n)\simeq U(n)$). Действительно, элементы пересечения и только они сохраняют скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть J – оператор умножения на мнимую единицу в $\mathbb{H}$ (оператор комплексной структуры), $J\in U(\mathbb{H})$. Заметим, что $\langle x,y\rangle_I=\langle x,J_y\rangle_{\mathbb{R}}$, $J^2=-Id$. Ясно, что элементы $U(\mathbb{H})$ коммутируют с J; обратно, всякий элемент $O(H)$ или $Sp(H)$, коммутирующий с J – принадлежит $U(\mathbb{H})$, поскольку элемент, коммутирующий с J есть комплексно-линейное преобразование, сохраняющее одну из форм, а следовательно, и вторую, т.е. все скалярные произведения, как видно из формулы.

Обозначим через $GL(H)$ группу всех вещественно-линейных операторов, а $GL(\mathbb{H})$ – комплексно-линейных (мы будем называть их просто линейными). Тогда

$$GL(\mathbb{H})=\{g\in GL(H): gJ=J_g\}.$$

Наконец, $GL^0(H)$, $GL^1(H)$, $GL^2(H)$ – подгруппы в $GL(H)$, состоящие из операторов вида $\lambda Id+a$, где $\lambda\in\mathbb{C}$ и a соответственно конечномерный, ядерный или гильберт-шмидтов оператор в H. Соответственно обозначаются группы O^i, U^i, Sp^i, где $O^i=O(H)\cap GL^i$ $i=0,1,2$.

Основную роль для нас играют вещественно-линейные операторы, "почти" сохраняющие комплексную структуру, т.е. почти коммутирующие с J. Полезно различать три степени малости коммутатора:

$$GL_i(\mathbb{H})=\{g\in GL(H);\quad gJ^{-1}g^{-1}J\in GL^i\}$$

$i=0,1,2$ (см. выше).

К тем же группам приводит условие $[g,J]\in\gamma^i$, где $[\,,\,]$ – линейный коммутатор, а γ^i, $i=0,1,2$ – идеал конечномерных, ядерных, гильберт-шмидтовских операторов. Действительно, $gJ-J_g=(-gJg^{-1}J^{-1}-I)Jg$ и т.к. γ^i – идеал, то скобки правой части лежат в γ^i, т.е. $gJg^{-1}J\in GL^i$ Обозначим также

$$O_i = GL_i \cap O, \quad Sp_i = GL_i \cap Sp, \quad i = 0, 1, 2.$$

Наиболее важные группы GL_2, O_2 и Sp_2 обозначим GL_J, $O_J(\mathbb{H}), Sp_J(\mathbb{H})$ и назовем группами почтилинейных операторов.

Малыми буквами $- o(H), sp(H)$ и т.д. будут обозначаться алгебры Ли (вообще говоря, неограниченных операторов), соответствующие всем этим группам. Топологии – слабые в обычной двойственности.

Теория представлений групп GL^0, O^0, U^0 и др. (они обозначаются также $GL(\infty), O(\infty), U(\infty)$ и т.д.), т.е. индуктивных пределов локально-компактных групп, сейчас интенсивно развивается; известны для ряда из них списки характеров, реализации фактор-представлений и т.д. см., например, [23, 24, 25]. Наиболее содержательные из них продолжаются, как правило, на соответствующие ядерные группы $- GL^1, O^1, U^1$ и т.д. Всякое дальнейшее продолжение, если не говорить о тензорных представлениях, распространяющихся на группу всех обратимых операторов (унитарных, если речь идет об унитарных представлениях) всегда связано с нетривиальной задачей.

Предметом настоящей статьи, в частности, является явное построение такого представления, которое, хотя и как проективное, продолжается с группы O^1 и Sp^1 на группы $O_J(\mathbb{H})$ и $Sp_J(\mathbb{H})$ соответственно.

2. <u>Разложение операторов на линейную и антилинейную часть, основной коцикл.</u>

Оператор $\mathcal{A}$ из $gl(H)$ называется антилинейным, если $\mathcal{A}J = -J\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}\lambda h = \bar{\lambda}\mathcal{A}h$, где $h \in H$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.I. Линейное пространство $gl(H)$ есть прямая сумма линейных пространств $gl(\mathbb{H})$ -линейных и $gla(\mathbb{H})$ -антилинейных операторов.

Разложение

$$gl(H) = gl(\mathbb{H}) \oplus gla(\mathbb{H})$$

задает $gl(H)$ структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A} \in gl(H)$.

Тогда

$$A = \frac{1}{2}(A - JAJ) + \frac{1}{2}(A + JAJ),$$

при этом $J(A-JAJ)=JA+AJ=(A-JAJ)J$.

Итак, оператор $A-JAJ$ - коммутирует с J и, следовательно, линеен, а $A+JAJ$ - антикоммутирует с J, т.е. антилинеен.

Далее, $gl(\mathbb{H})$ есть подалгебра Ли в $gl(H)$ (подстилающая подалгебра), рассмотрим градуировку $\bar{0}-gl(\mathbb{H})$, $\bar{1}-gla(\mathbb{H})$; тогда, очевидно, $gl(H)$ относительно этой градуировки образует $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру Ли. Обычным образом, можно ввести теперь структуру супералгебры Ли в $gl(H)$, но нам не понадобится.

В конечномерном случае это алгебра серии $Q(n)$ (см.[26]). Будем обозначать операторы $\frac{1}{2}(A+JAJ)=A_a$, $\frac{1}{2}(A-JAJ)=A_c$, проекторы $A\longrightarrow A_a$, $A\longrightarrow A_c$ через P_a и P_c - соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.2.

1) $P_a[A,B]=[A_c,B_a]+[A_a,B_c]$

2) $P_c[A,B]=[A_a,B_a]+[A_c,B_c]$

3) $[A,J]=2A_aJ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1,2) $[A,B]=[A_c,B_a]+[A_a,B_c]+[A_a,B_a]+[A_c,B_c]$

при этом первые два слагаемых - антилинейны, а вторые - линейны. Например,

$$J[A_a,B_c]=JA_cB_c-JB_cA_a=-A_aBJ+B_cA_aJ=$$

$$=-[A_a,B_c]J.$$

3) $[A,J]=[A_c,J]+[A_a,J]=A_aJ-JA_a=2A_aJ$.

Рассмотрим соотношения, связанные со следом.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.3. Для любого оператора $A\in\gamma^1$ имеют место формулы:

1) $\mathrm{tr}\,AJ=\mathrm{tr}\,A_cJ$

2) $\mathrm{tr}\,A_aJ=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathrm{tr}\,AJ=\mathrm{tr}(A_a+A_c)J$ то достаточно установить второе соотношение. Имеем:

$A_aJ=-JA_a$, но $\mathrm{tr}\,A_aJ=\mathrm{tr}\,JA_a$, т.к. $A_a\in\gamma^1$.

Поэтому $\operatorname{tr} A_a J = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(A_a J + J A_a) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(J A_a - J A_a) = 0$.

СОГЛАШЕНИЕ. Удобно считать, что $\operatorname{tr} CJ$ всегда, когда C антилинеен, даже, если C - не ядерный, это оправдано утверждением I.3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если H - овеществление комплексного пространства $\mathbb{H}$ и J - оператор умножения на i (как вещественный оператор), то для комплексно-линейного оператора $A \in \gamma^1$ имеет место формула $\operatorname{tr} AJ = 2\operatorname{tr} \operatorname{Im} A$, где $\operatorname{Im} A$ - мнимая часть комплексно-линейного оператора $A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$. Действительно, для одномерного комплексного пространства это так:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad Az = (a+bi)z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\operatorname{tr} AJ = -2b = -2 \operatorname{Im} \operatorname{tr} A$. По линейности, соотношение продолжается на все γ^1. Для косоэрмитовых операторов, (для которых $\operatorname{Im} \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A$) можно написать $\operatorname{tr} AJ = -i \operatorname{tr} A$.

УТВЕРЖДЕНИЕ I.4. Пусть $A, B \in gl(H)$ и $A_a, B_a \in \gamma^2$. Тогда $\alpha(A,B) \equiv \operatorname{tr}[A_a, B_a] J = 2\operatorname{tr} A_a B_a J = \operatorname{tr} A[B,J] =$
$= \operatorname{tr} B[J,A]$.

Если при этом A, $B \in \gamma^2$, то дополнительно

$$\alpha(A,B) = \operatorname{tr}[A,B]J = \operatorname{tr}[A,B]_c J.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $A_a, B_a \in \gamma^2$, то $[A_a, B_a] \in \gamma^1$. Поэтому следы в первой группе равенств существуют. Далее, т.к. $A_a J = -J A_a$, то

$$\operatorname{tr}[A_a, B_a] J = \operatorname{tr}(A_a B_a J - B_a A_a J) = \operatorname{tr}(A_a B_a J + B_a J A_a) =$$
$$= \operatorname{tr} A_a B_a J + \operatorname{tr} B_a J A_a = \operatorname{tr} A_a B_a J + \operatorname{tr} A_a B_a J = 2\operatorname{tr} A_a B_a J.$$

По утверждению 2 и 3) имеем, учитывая соглашение,

$$\operatorname{tr} A[B,J] = 2\operatorname{tr} A B_a J = 2\operatorname{tr} A_c B_a J + 2\operatorname{tr} A_a B_a J = 2\operatorname{tr} A_a B_a J$$

$$\operatorname{tr} B[J,A] = 2\operatorname{tr} B J A_a = 2\operatorname{tr} B_a J A_a = 2\operatorname{tr} A_a B_a J.$$

Пусть $A, B \in \gamma^2$, тогда по утверждениям 3 и I имеем

$$\mathrm{tr}[A,B]J = \mathrm{tr}[A,B]_c J = \mathrm{tr}[A_a,B_a]J + \mathrm{tr}[A_c,B_c]J,$$

но, если $C, \mathcal{D} \in \gamma^2$, то $\mathrm{tr}\, C\mathcal{D} = \mathrm{tr}\, \mathcal{D}C$. (Это следует из совпадения непрерывных линейных функционалов $X \longmapsto \mathrm{tr}\, CX$ и $X \longmapsto \mathrm{tr}\, XC$ на всюду плотном в γ^2 множестве ядерных операторов C и из ограниченности их на γ^2).

Поэтому $\mathrm{tr}[A_c,B_c]J = \mathrm{tr}\, A_c B_c J - \mathrm{tr}\, B_c A_c J =$

$$= \mathrm{tr}\, A_c B_c J - \mathrm{tr}\, B_c J A_c = \mathrm{tr}\, A_c B_c J - \mathrm{tr}\, A_c B_c J = 0.$$

Утверждение полностью доказано.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Для произвольных операторов последнее равенство утверждения 4, вообще говоря, неверно

$$\mathrm{tr}[A,B]J \neq \mathrm{tr}\, A[B,J].$$

даже если обе части конечны. Причина этого в том, что $\mathrm{tr}\, ABJ$ и $\mathrm{tr}\, BAJ$ могут быть бесконечны или неопределены и, в то же время, разность их - конечна и не равна правой части.

Алгебру Ли $gl_J(H)$, введенную в п.I, можно рассматривать как подмножество $gl(H)$

$$gl_J(H) = \{A \in gl(H);\ A_a \in \gamma_2\}^{*)}$$

ТЕОРЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.I. Отображение

$$\alpha : gl_J(H) \times gl_J(H) \longrightarrow \mathbb{R},$$

определенное формулами утверждения 4:

$$\alpha(A,B) = \mathrm{tr}[A_a,B_a]J = \ldots$$

задает непрерывный вещественный 2-коцикл на алгебре Ли почти линейных операторов.

Этот коцикл

I) Обращается в нуль на $gl(H)$;

---

*) Малость антилинейной части в определениях $gl_i(H)\ i=0,1,2$, напоминает аналогичную малость мнимой части в определениях теории несамосопряженных операторов; эта связь прослеживается далее (см. замечание ниже).

2) когомологичен нулю на γ^1 -алгебре Ли ядерных операторов;

3) некогомологичен нулю на γ^2-алгебре Ли всех операторов Гильберта - Шмидта; $(\dim H=\infty)$

4) некогомологичен нулю на $g_0(H)$ -алгебре Ли всех операторов с конечномерной антилинейной частью;

5) когомологичен нулю, если $\dim H<\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Корректность задания, билинейность и кососимметричность α вытекает из утверждения 4:

$$\alpha(A,B)=2\mathrm{tr}\,A_aB_aJ=-2\mathrm{tr}\,A_aJB_a=-2\mathrm{tr}\,B_aA_aJ=\alpha(B,A) .$$

Коцикличность, т.е. тождество

$$\alpha(A,[B,C])+\alpha(B,[c,A])+\alpha(C,[A,B])=0$$

проверяется непосредственно по формулам для α и утверждениям I и 3. Впрочем, оно может быть проверено непосредственно для $A,B,C\in\gamma^1$ и далее продолжено по непрерывности.

Далее, если A или B комплексно линейны, то A_a или B_a есть нуль и $\alpha(A,B)=0$. Пусть $A,B\in\gamma^1$, тогда по утверждению 4

$$\alpha(A,B)=\mathrm{tr}\,[A,B]\,J\overset{def}{=\!=}\beta([A,B]),$$

где $\beta(C)=\mathrm{tr}\,CJ$, β - определено на γ^1 .

Таким образом, β есть коцепь (линейный функционал на алгебре Ли γ^1) и $\alpha=\partial\beta$. (Заметим, что β не определен на γ^2). Этим доказаны пункты I), 2). Для доказательства 3), 4) необходимо заметить, что если бы $\alpha=\partial\tilde{\beta}$ на γ^2 или $gl_0(H)$, то ограничение $\tilde{\beta}$ на γ^1 должно быть пленкой для α и, следовательно, $\beta-\tilde{\beta}$ есть линейный функционал, на γ^1 , аннулирующий все скобки $[A,B]$; единственный такой функционал -„tr" т.е.

$$(\beta-\tilde{\beta})(c)=\lambda\,\mathrm{tr}\,c\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$\tilde{\beta}(c)=\mathrm{tr}\,c(\lambda I-J) .$$

Но никакой функционал $\tilde{\beta}$ такого вида не допускает непрерывного продолжения на алгебры, упомянутые в п.3 и 4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что α есть формальная кограница для β , но β существует (т.е. конечен) не на всей алгебре. Отсюда видно, что α – коцикл, и видно, что тривиализующая пленка "исчезает" при переходе от ядерных операторов к более широкой алгебре. Далее мы увидим, как это проявляется при аппроксимации групп конечномерными.

Ситуация подобного "исчезновения" (точнее, разрыва) пленки характерна для теории когомологий бесконечномерных групп и алгебр Ли.

Определим с помощью коцикла α одномерное центральное расширение алгебры Ли gl_J :

$$\widehat{gl}_J = gl_J \oplus \mathbb{R},$$

скобка определена соотношением

$$[(A,\lambda),(B,\mu)] = ([A,B],\alpha(A,B)).$$

ТЕОРЕМА 2. Алгебра Ли $\widehat{gl}_J$ есть нетривиальное центральное расширение gl_J . Его ограничение γ^1 , $gl(\mathbb{H})$ изоморфно прямому произведению соответствующей алгебры на $\mathbb{R}$, а ограничение на γ^2 и на gl^0 – не изоморфно прямому произведению.

Доказательство сводится к ссылке на теорему I и на известные связи расширений алгебр Ли групп и вторых когомологий (см., например, семинар "Софус Ли", М. 1969).

Алгебры $\widehat{O}_J$, $\widehat{Sp}_J$, $\widehat{gl}_0$ суть ограничения расширения $\widehat{gl}_J$ на O_J , Sp_J , gl_0 соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коцикл α инвариантен относительно группы комплексно-линейных операторов.

Действительно, если $g \in GL(\mathbb{H})$, то $\alpha(gAg^{-1}, gBg^{-1}) = 2 tr (gAg^{-1})_a (gAg^{-1})_a J = 2 tr\, g A_a B_a g^{-1} J = 2 tr\, A_a B_a g^{-1} J g = 2 tr\, A_a B_a J = \alpha(A,B)$.

Поэтому в расширении $\widehat{gl}_J$ действует группа $GL(\mathbb{H})$.

Продолжим нашу аналогию с теорией несамосопряженных операторов и введем любопытную алгебру Ли и ее центральное расширение, видимо, не рассматривавшееся ранее.

Пусть $u(\mathbb{H})$ алгебра Ли косоэрмитовых операторов и j – оператор сопряжения в $\mathbb{H}$, т.е. вещественно линейный оператор, определяемый условием

$$\langle jx, jy \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

нетрудно проверить, что всякий косоэрмитов оператор антикоммутирует с j :

$$<Aj\,x,x> = <jx,\ A^{*}x> = -<jx, j^{2}Ax> = -\overline{<x, jAx>} = -<jAx, x>.$$

Обозначим через $\mathfrak{u}_j$ алгебру Ли линейных операторов с гильберто-шмидтовской вещественной частью:

$$\mathfrak{u}_j = \{ v \in \mathfrak{gl}(\mathbb{H}) : \mathrm{Re}\, v \in \gamma^{2} \} .$$

Введем на этой алгебре 2-коцикл θ :

$$\theta(v,w) = \mathrm{tr}(\mathrm{Re}\, v : \mathrm{Re}\, w \cdot jJ)$$

или

$$\theta(v,w) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\mathrm{Re}\, v, \mathrm{Re}\, w]\, jJ .$$

Это – коцикл, он тривиален на γ^{1} , но не тривиален на γ^{2} и на $\mathfrak{u}_j$. Он определяет полезное центральное расширение алгебры почти косоэрмитовых операторов и, соответственно, группы почти унитарных операторов. Мы рассмотрим эту группу особо в другом месте. Как заметил Б.Л.Фейгин, прием, состоящий в образовании 2-коцикла из ситуации, связанной с операторами Гильберта–Шмидта близок к одной работе М.Г.Крейна и И.Ц.Гохберга.

Чтобы описать центральное расширение групп, отвечающее построенным нами алгебрам, мы поступим следующим образом. Мы опишем представление этой группы (и алгебры). Такой путь отвечает общепринятому построению спинорной и метаплектической группы. Подчеркнем еще раз, что наше построение приведет к новой бесконечномерной группе.

§ 2. Клиффордова алгебра и структуры в ней

Теория клиффордовых алгебр, включая и бесконечномерные пространства, изложена во многих учебниках и руководствах. Их роль в K-теории стала ясной после работы Атьи – Ботта – Шапиро [27]. Для нужд математической физики требуется несколько меньшая информация о них, чем для K-теории; см. [27,28], т.к. достаточно ограничиться четномерными квадратичными формами над полем $\mathbb{C}$. Мы приведем кратко нужные факты в несколько измененной, по сравнению с обычной, форме.

1. Клиффордова алгебра. Пусть H - вещественное гильбертово пространство четной или счетной размерности. Введем в H симплектическую структуру, т.е. зададим невырожденную кососимметрическую билинейную форму ω. Поскольку скалярное произведение в H позволяет отождествить H и сопряженное пространство $H' \equiv \mathrm{Hom}^c_{\mathbb{R}}(H; \mathbb{R})$, форма ω задает автоморфизм $J : H \to H$, $\omega(x,y) = \langle x, Jy \rangle$ Очевидно, $J^2 = -Id$. Будем считать, что J - изометрия. Тогда J определяет комплексную структуру на H. Однако, поскольку в дальнейшем будет фигурировать комплексификация H, т.е. $H^{\mathbb{C}}$, то мы будем рассматривать J как оператор симплектической, а не комплексной структуры *).

Введем нормированную алгебру $\mathfrak{Z}(H)$ над $\mathbb{C}$ с инволюцией и единицей, порождаемую над $\mathbb{C}$ своим подпространством $b(H)$, изометричным гильбертову пространству H, при этом будем считать выполненными соотношения

$$1)\quad b(h)^* = b(h) \qquad h \in H$$

$$2)\quad b(h_1)b(h_2) + b(h_2)b(h_1) = \langle h_1, h_2 \rangle I .$$

Нетрудно проверить, что отображение $b : H \to b(H)$ есть в действительности мономорфизм на образ, т.е. что соотношение 2) не приводит к факторизации H.

Вещественная часть этой алгебры есть в точности (по определению) клиффордова алгебра $C(H)$, порожденная квадратичным пространством $(H, \langle\, , \rangle)$, сама же комплексная алгебра $\mathfrak{Z}(H)$ есть клиффордова алгебра, отвечающая комплексификации: $C(H^{\mathbb{C}})$ со скалярным произведением:

$$\langle\langle h_1 + ih_2, f_1 + if_2 \rangle\rangle = \langle h_1, f_1 \rangle + \langle h_2, f_2 \rangle + i(\langle h_2, f_1 \rangle - \langle h_1, f_2 \rangle) .$$

---

*) Обычно в теории канонических антикоммутационных соотношений считают, что H есть комплексное гильбертова пространство со структурой, задаваемой оператором J. Скалярное произведение определяется формулой

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, P_x y \rangle + i \langle x, P_{Jx} y \rangle ,$$

где P_z - проектор на прямую $\{\lambda z \;, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Заметим, что любые две из трех структур - эвклидова, комплексная, симплектическая - однозначно определяют третью.

Заметим, что обычно клиффордова алгебра строится по билинейной (или квадратичной), а не полуторалинейной форме. Однако для операторов a, a^+ (см.далее) удобно скалярное произведение. Отметим также, что пока мы не пользовались структурой J в H. Алгебра $\mathfrak{Z}(H)$ является $\mathbb{Z}_+$-градуированной алгеброй; градуировка задается условием, корректность которого легко проверить: $\deg \mathbb{C} = 0$, $\deg H^{\mathbb{C}} = 1$, мономы от $b(h)$ степени k (с учетом соотношения 2)) имеют градуировку k. Если в H выбрать базис $\{h_i\}$, то линейный базис над $\mathbb{C}$ в $\mathfrak{Z}(H)$ образуют мономы вида

$$b(h_{i_1})\, b(h_{i_2}) \dots b(h_{i_k})$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad k = 1, 2 \dots .$$

Линейную (над $\mathbb{C}$) оболочку мономов степени k (т.е. k-тое подпространство относительно градуировки) обозначим $\mathfrak{Z}(H)_k$. Любой ортогональный оператор в пространстве H задает автоморфизм $\mathfrak{Z}(H)$ как нормированной $*$-алгебры с инволюцией; эти автоморфизмы называют автоморфизмами Боголюбова. Обозначим группу всех таких автоморфизмов $\mathrm{Bog}\, \mathfrak{Z}(H)$; она изоморфна группе $O(H)$; легко видеть, что эти (и только эти) автоморфизмы сохраняют градуировку и действуют в $\mathfrak{Z}(H)_1 = H^{\mathbb{C}} = H + iH$ как вещественные унитарные операторы.

В конечномерном случае (см.далее) алгебра $\mathfrak{Z}(H)$ изоморфна алгебре $M_{2n}\mathbb{C}$, где $n = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} H$ (напомним, что $\dim H$ - четна); см. [27,28]. Имеется много моделей для $\mathfrak{Z}(H)$. Легко доказывается

ЛЕММА. Если $H = H_1 \oplus H_2$, то

$$\mathfrak{Z}(H) = \mathfrak{Z}(H_1) \otimes \mathfrak{Z}(H_2)$$

(тензорное произведение градуированных алгебр с инволюцией над $\mathbb{C}$).

По теореме Шевалле (см. [27]) тензорные произведения можно понимать как произведение $\mathbb{Z}_2$-градуированных алгебр (супералгебр).

ЛЕММА. Пусть $\dim_{\mathbb{R}} H = 2$, тогда $\mathfrak{Z}(H) = M_2\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если e_1, e_2 - базис в H, то сопоставляя e_1, матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а e_2 - $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ мы удовлетворим соотношению $ef + fe = \langle f, e \rangle I$, $e, f = e_1, e_2$ (см.п.3).

СЛЕДСТВИЕ $\mathfrak{Z}(H) \simeq \bigotimes_1^{1/2 \dim H} M_2\mathbb{C}$.

Другая модель $\mathfrak{A}(H)$ связана со структурой скрещенного произведения групповой алгебры группы $\Sigma \ \mathbb{Z}_2$ естественно, действующей автоморфизмами на коммутативной алгебре $C(\Pi\,\mathbb{Z}_2)$. Мы не останавливаемся на этом подробно.

Оператор J вносит в $\mathfrak{A}(H)$ новую структуру и превращает $\mathfrak{A}(H)$ в так называемую алгебру канонических антикоммутационных соотношений (КАС); а именно, он позволяет разбить на пары операторы из $b(H) \simeq H$ и, тем самым, определить в $H^{\mathbb{C}} = \mathfrak{A}(H)_1$ операторы рождения и уничтожения. Положим для каждого $h \in H$

$$a(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b(h) - ib(Jh)) \in H^{\mathbb{C}} = \mathfrak{A}(H)_1$$

$$a(h)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(b(h) + ib(Jh)) .$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Система элементов $a(\cdot)$, $a(\cdot)^*$ порождает $\mathfrak{A}(H)$ как алгебру над $\mathbb{C}$, при этом выполнены соотношения:

$$a(h)a(h') + a(h')a(h) = 0$$

$$a(h)a(h')^* + a(h')^* a(h) = \langle\langle h, h' \rangle\rangle I ,$$

где $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ скалярное произведение в $H^{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что для

$$b(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a(h) + a(h)^*)$$

$$b(Jh) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a(h)^* - a(h)) .$$

Соотношения (0) получаются прямой проверкой. Обратим внимание на соотношения

$$a(Jh) = \frac{1}{\sqrt{2}}(b(Jh) - ib(J^2 h)) = \frac{i}{\sqrt{2}}(b(h) + ib(Jh) =$$

$$= i\,a(h)$$

$$a(Jh)^* = -i\,a(h)^* .$$

Иначе говоря, $h \mapsto a(h)$ осуществляет изоморфизм пространства H, снабженного комплексной структурой J, и его образа в $H^{\mathbb{C}}$, а $h \mapsto a(h)^*$ то же относительно структуры $-J$.

Элементы $a(h)^*$ в представлении называются операторами рождения, а $a(h)$ – уничтожения. Обозначим $\mathfrak{A}(H)$ с введенной структурой $\mathfrak{A}(H, J)$. Всякий ортогональный автоморфизм (H, J) (т.е. унитарный оператор в пространстве H, наделенном комплексной структурой) продолжается до автоморфизма – это собственная часть группы $Bog\,\mathfrak{A}(H)$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Можно рассмотреть C^* -оболочку алгебры $\mathfrak{A}(H)$, обычно ее называют алгеброй КАС. Ничто не мешает в дальнейшем обходиться без пополнений *).

2. При заданном H множество всех структур J (ортогонально-симплектических или комплексных) есть однородное пространство $O(H)/U(H)$. Разумеется, все структуры $\mathfrak{A}(H, J)$ при разных J изоморфны, но этот изоморфизм не всегда продолжается на представления $\mathfrak{A}(H)$ и это обстоятельство существенно для дальнейшего.

3. Алгебра $\mathfrak{A}(H)$ имеет $\mathbb{Z}_2$ -градуировку (четность в $\mathbb{Z}_+$-градировке), которая превращает обычным образом $\mathfrak{A}(H)$ в супералгебру. Можно трактовать $\mathfrak{A}(H)$ как грассманову алгебру $\Lambda^* H^{\mathbb{C}}$ известной заменой умножения на внешнее умножение. При этом $\mathfrak{A}(H)_k = \Lambda^k H^{\mathbb{C}}$ - k-тая внешняя степень, $k \in \mathbb{Z}_+$.

4. Штермер заметил, что при $\dim H = \infty$ четная подалгебра в $\mathfrak{A}(H)$ изоморфна $\mathfrak{A}(H)$. Это позволяет ввести в $\mathfrak{A}(H)$ градуировку по $\sum \mathbb{Z}_2$, которую, видимо, не рассматривали.

5. Выделение в H оператора $\bar{j}$ сопряжения относительно J (выбор лагранжева подпространства) фиксирует в $\mathfrak{A}(H)$ новую инволюцию (см.§ 3).

2. <u>Спинорная группа</u>. Классический способ построения спинорной группы (и сходным образом, метаплектической) состоит в указании ее как подгруппы, лежащей в клиффордовой алгебре. Этот же способ используется и в случае бесконечномерных алгебр. А именно, пусть $\mathfrak{A}(H)$ - клиффордова алгебра над $\mathbb{C}$, построенная выше. Пусть $\mathfrak{A}(H)_1$ - подпространство градуировки I, т.е. множество $\{\lambda b(h)\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $h \in H$. Тогда группа, натянутая на элементы $\mathfrak{A}(H)_1$ единичной нормы, (они обратимы в силу соотношений на $b(h)$) обозначается $Pin(H)$, а ее четная часть - $Spin(H) = P_{in}(H) \cap \mathfrak{A}_{\bar 0}(H)$ — спинорная группа (это связная компонента единицы в $P_{in}(H)$).

---

*) Имеется обширная литература по C^*-алгебре КАС, упомянем здесь работы [29 , 30], где имеется список литературы.

См. [28]. Поскольку для $u \in \mathrm{Spin}(H)$ автоморфизм $\sigma_u : \sigma_u x = u x u^{n}$, $x \in \mathfrak{A}(H)$ сохраняет градуировку, то он есть унитарный оператор (вещественный, т.к. сохраняет инволюцию) в $H^{\mathbb{C}}$. Более того, σ_n есть двумерное вращение в H, и потому группа, натянутая на σ'_n в H, есть $SO(2\infty)$ (Обозначение $SO(2\infty)$ подчеркивает, что H есть симплектическое (или комплексное) пространство относительно J), т.е. группа всех конечномерных вращений H с определителем I. При этом ядро отображения $u \longrightarrow \sigma_u$ состоит из $\{e, -e\}$, т.е.

$$e \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(H) \longrightarrow SO(2\infty) \longrightarrow e$$

точная последовательность.

ЗАМЕЧАНИЕ. Расслоение $\mathrm{Spin} \longrightarrow SO$ не является тривиальным, т.к. Spin - односвязна, а $SO(2\infty)$ - нет. Однако оно тривиально над подгруппой $U(\infty) \subset SO(2\infty)$ операторов, коммутирующих с J (унитарных в (H, J)). Имеется ряд работ [I9,20,2I], где подробно исследуются продолжения этого расслоения на операторы вида "единица плюс ядерный". Такое продолжение возможно, так как последние операторы содержатся в C^*-оболочке $\mathfrak{A}(H)$ (теорема Блаттнера). Однако, дальнейшее продолжение, нужное нам, так получить нельзя: необходимо изменить действие - см. § 3.

Рассмотрим алгебру Ли, ассоциированную с $\mathfrak{A}(H)$. Компонента $\mathfrak{A}(H)_2$ является ее подалгеброй Ли; она отвечает алгебре Ли группы $\mathrm{Spin}\, H$ или $SO(H)$; это доказывается в точности так же, как в случае $\dim H < \infty$. Заметим, что $\mathfrak{A}(H)_2 \cong H^{\mathbb{C}} \wedge H^{\mathbb{C}}$.

Для дальнейшего нам нужны следующие соотношения: пусть $\dim_{\mathbb{C}} H = n (=2k)$

$$U(n) \subset O(2n) \xleftarrow{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Spin}(2n) \subset \mathfrak{A}(H) = M_{2^n}\mathbb{C}$$

при

$$U(\infty) \subset O(2\infty) \xleftarrow{\mathbb{Z}_2} \mathrm{Spin}(H) \subset \mathfrak{A}(H)$$

Последнее соотношение есть в естественном смысле предельное по n для вложений: $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$, $O(2n) \hookrightarrow O(2n+2)$,

$\mathrm{Spin}(2n) \subset \mathrm{Spin}(2n+2) = \mathrm{Spin}\,(2n) \otimes I$. Последнее вложение есть ограничение вложения $M_{2^n}\mathbb{C} \subset M_{2^n}\mathbb{C} \otimes M_{2^n}\mathbb{C} = M_{2^{n+1}}\mathbb{C}$ (тензорное умножение на единичную матрицу второго порядка).

§ 3. Фоковское представление и метагональная алгебра Ли в конечномерном случае

В этом параграфе мы дадим конечномерный вариант основной конструкции построения проективного представления.

I. Фоковское пространство. Клиффордова алгебра $\mathfrak{Z}(H)$ для $\dim H = 2k = n$ есть, как мы видели, $M_{2^k}\mathbb{C}$, а фоковское представление – это единственное (с точностью ддо эквивалентности) представление этой алгебры в $\mathbb{C}^{2^k}$. Поэтому матричная реализация клиффордовой алгебры дает фоковское представление. Мы остановимся на некоторых формулах, нужных в дальнейшем.

Прежде всего, выпишем вложение H в $\mathfrak{Z}(H) = M_{2^k}\mathbb{C}$. Напомним, что H снабжено симплектической структурой J . Выберем лагранжево подпространство $H_1 \subset H$, т.е. максимальное подпространство, где форма $\langle Jx, y\rangle$ обращается в нуль, оно имеет размерность, равную k . Тогда $H = H_1 \oplus JH_1$; пусть $\{e_1, \ldots e_k\}$ – ортонормированный базис в H_1 ; присоединив к нему векторы $Je_1, \ldots Je_k$, мы получим ортонормированный базис в H . Сопоставим теперь элементу e_r матрицу в $\mathbb{C}^{2^k}$

$$\pi(e_r) = \sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0 \otimes \ldots \otimes \sigma_0$$

(k – сомножителей), а элементу $Je_r \equiv e_{k+r}$ – матрицу

$$\pi(Je_r) = \sigma_3 \otimes \ldots \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_0 \otimes \ldots \otimes \sigma_0$$

матрицы σ_1 и σ_2 стоят на r-м месте; здесь

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрицы Паули.

Комплексная линейная оболочка $\pi(e_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$ есть подпространство в $\mathfrak{Z}(H)_1 = H^{\mathbb{C}}$.Проверка соотношений (см. § 2; у нас через "π" фактически обозначено "b") сводится к проверке по одному сомножителю, т.е. для $M_2\mathbb{C}$; все матрицы – эрмитовы, и $[\pi(e_s), \pi(e_t)]_+ = \delta_{st}$ Тем самым, построена явно матричная реализация $\mathfrak{Z}(H)$; ее образ есть вся $M_{2^k}\mathbb{C}$.

Отметим, что $\mathfrak{D}(H)=\sum_{k=0}^{n}\oplus\,\mathfrak{D}(H)_k$

$$\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathfrak{D}(H)\right)_k=C_n^k\ .$$

Поскольку в $H^{\mathbb{C}}$ (и в H) имеется симплектическая структура, то можно ввести операторы a^* и a

$$a^*_r=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3\otimes\ .\ .\ .\otimes\sigma_3\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_0\otimes\ldots\otimes\sigma_0\ ,$$

$$a_r=\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3\otimes\cdots\otimes\sigma_3\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\sigma_0\otimes\ldots\otimes\sigma_0\ .$$

Обозначим линейную оболочку операторов a^*_r через A^+ , а операторов a_r через A $r=1,\ldots k$, $\dim_{\mathbb{C}}A=\dim_{\mathbb{C}}A^+=k=\frac{n}{2}$. Прямая проверка доказывает

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Матрицы, соответствующие H , являются эрмитовыми; iH – косоэрмитовыми, H_1+iH_1 – симметрическими, $JH+iJH$ – кососимметрическими, A – верхнетреугольными, A^+ – нижнетреугольными, H_1 – эрмитовыми симметрическими и т.д. При замене H_1 на другое лагранжево подпространство изменится понятие симметричности (но не эрмитовости). Таким образом, фиксация H_1 (или, иначе, оператора симплектического сопряжения) фиксирует в $\mathfrak{D}(H)$ вторую инволюцию – транспонирование.

Обозначим для краткости $\mathbb{C}^{2k}=\mathcal{H}$ и выделим в $\mathcal{H}$ некоторый вектор Ω , $\|\Omega\|=1$ *). Назовем $\mathcal{H}$ как $\mathfrak{D}(H)$ -модуль фоковским (фермионным, конечномерным) пространством, а – вакуумом. Снабдим $\mathcal{H}$ градуировкой

$$\mathcal{H}_0=\{\lambda\Omega,\ \lambda\in\mathbb{C}\},\ \mathcal{H}_1=A^+\mathcal{H}_0\ ,\ \ldots\ \mathcal{H}_r=A^+\mathcal{H}_{r-1},\ r=1\ldots k.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Подпространство $\mathcal{H}_r$ попарно ортогональны в смысле обычного скалярного произведения в $\mathcal{H}$; $\dim\mathcal{H}_r=C_k^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $a_r\Omega=0$, $r=1,\ldots k$, т.к. $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ – см. выше;

Имеем

$$\langle a^*_{r_1}\ldots a^*_{r_t}\Omega\ ,\ \Omega\rangle=\langle a^*_{r_2}\ldots a^*_{r_t}\Omega\ ,\ a_{r_1}\Omega\rangle=0$$

---

*) Если считать, что в $\mathbb{C}^{2k}$ фиксирован базис, в котором выписаны матрицы Паули, то Ω с точностью до множителя определен однозначно: $\Omega=(1,0,\ldots 0)$. Инвариантный способ см.далее.

откуда следует ортогональность $\mathcal{H}_t$ и Ω . Аналогично, $\mathcal{H}_t \perp \mathcal{H}_{t'}$ при $t \neq t'$. Из соотношений $(\circ)$ следует формула для размерности.

Удобно представлять себе $\mathcal{H}$ как полную внешнюю степень $\Lambda^* \mathcal{H}_1$ - сумму внешних степеней $\mathcal{H}_1 = H_1 + i H_1$. Обратим внимание, что лишь наличие оператора J позволяет построить (через операторы рождения) градуировку в $\mathcal{H}$. Разные J определяют различные (но изоморфные) градуировки. В бесконечномерном случае фиксация J также выделяет фоковское представление, при этом различным отвечают неэквивалентные (вообще говоря) представления; они называются квазисвободными. (см. [29]).

Клиффордова алгебра содержит алгебру Ли ортогональной группы $SO(2k)$ в качестве подпространства $\mathfrak{A}(H)_2$ - см.§ 2. Обозначим каноническое вложение

$$\pi : SO(2k) \longrightarrow \mathfrak{A}(H)_2$$

(Можно показать, что $\mathfrak{A}(H)_2$ есть в точности комплексификация образа $\pi(SO(2k))$; проверка хорошо известна,(см., например, [31]). Экспонента алгебры $\pi(SO(2k))$ есть группа $Spin(2k)$, содержится в $\mathfrak{A}(H)$ и имеет представление в $\mathbb{C}^{2^k}$.

Рассмотрим элемент $g \in Spin(2k)$ и автоморфизм $x \longrightarrow g x g^{-1}$, он оставляет инвариантным $\mathfrak{A}(H)_1$ и определяет унитарный вещественный оператор в $H^{\mathbb{C}}$ (напомним, что этот гомоморфизм $Spin(2k) \longrightarrow SO(2k)$ определяет $\mathbb{Z}$ -накрытие $SO(2k)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Всякий элемент $g \in Spin(2k)$, лежащий в прообразе $U(k) \subset O(2k)$, относительно проекции $Spin(2k) \longrightarrow SO(2k)$ и только такой элемент, действует в фоковском пространстве, сохраняя градуировку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u - унитарный оператор в H (т.е. $uJ = Ju$). Тогда $\sigma_u(A^+) = A^+$ и $\sigma_u A = A$ (см.обозначения ранее), поскольку

$$\sqrt{2}\ \sigma_u(a(h)) = u(b(h) + i b(Jh))u^{-1} = b(uh) + i b(uJh) =$$

$$= b(uh) + i b(Jh) = \sqrt{2}\ a(uh).$$

Пусть $\bar{u}$ лежит в прообразе $u \in U(k)$, тогда $\bar{u}\Omega = \lambda u \Omega$, т.к.

$$\{c\Omega\} = \bigcap_h \ker a(h), \quad \bar{u}\,(\ker a(h)) = \ker a(uh),$$

а тогда

$$\bar{u}\, a^*(h)\,\Omega = a^*(uh)\,\Omega,$$

т.е. $\bar{u}\,\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1$ и т.д.

Обратно, если $uJ \neq Ju$, то существует такой вектор $h \in H$, что $ua(h)u^{-1} \neq a(uh)$ и $uA^+u^{-1} \neq A^+$, а тогда и $u\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_1$.

СЛЕДСТВИЕ. I) Вакуумный вектор с точностью до множителя однозначно определяется как инвариантный вектор в $\mathcal{H}$ относительно $\tilde{U}(k) \subset Spin(2k)$, где $\tilde{U}(k)$ - прообраз $U(k)$ относительно проекции $Spin(2k) \longrightarrow SO(2k)$.

2) Ограничение расслоения $Spin(2k) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} SO(2k)$ на подгруппу $U(k)$ есть прямое произведение

$$\tilde{U}(k) = U(k) \times \mathbb{Z}_2 .$$

Действительно, подалгебра Лк, отвечающая $U(k)$ в $\mathfrak{A}(H)_2$ порождает в $\mathfrak{A}(H)$ группу (подгруппу группы $Spin\, 2k$)), не содержащую элемента -I. В самом деле, если $v \in U(k)$, то $\pi(v)\Omega = \Omega$ и

$$(v - \langle \pi(v)\Omega, \Omega\rangle) I = 0$$

тогда $\left[\exp\{v - \langle \pi(v)\Omega, \Omega\rangle\}\right]\Omega = \Omega$, т.е. среди экспонент нет элемента -I. Напомним, что прообраз элемента $e \in SO(2k)$ есть $\{\pm 1\} \in Spin(2k)$ и в силу связности $Spin\,2k$ существуют подгруппы, содержащие -I, но они входят в $\tilde{U}(k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $v \in \tilde{\mathcal{U}}(k)$, выше мы показали, что

$$v\Omega = \lambda(v)\,\Omega,$$

отсюда

$$\lambda(v) = \langle v\Omega, \Omega\rangle .$$

Этот функционал играет далее ключевую роль.

2. Проективное представление $SO(2k)$ и метагональная группа. В этом пункте мы с помощью введенного выше функционала

λ определим проективное представление алгебры Ли $so(2k)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $v \in \mathcal{B}(H)_2 = spin(2k) = so(2k)$

Имеет место формула (π – фоковское представление, Ω – вакуумный вектор).

$$\lambda(v) \equiv \langle \pi(v)\Omega, \Omega \rangle = i\,\mathrm{tr}\, vJ. \qquad (*)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим действие v в H_1 в сумму двумерных (вещественных) инвариантных подпространств. В силу линейности $(*)$, достаточно проверить формулу для двумерного подпространства. В этом случае вещественный базис в двумерном комплексном пространстве $H = \mathbb{C}$ обозначим $e_1, e_2 = Je_1 = ie_1, e_3,$ $e_4 = Je_3 = ie_3$. (Мы изменили для удобства номера элементов базиса; в обозначениях начала параграфа $Je_1 = e_3$, а не e_2). Если $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ – вектор, то отражение от плоскости, ортогональной ему (в смысле вещественной эвклидовой структуры), есть элемент $SO(2k) = SO(4)$, которому отвечает $\pi(v)$ – элемент $\mathcal{B}(H) = M_4\mathbb{C}$; легко подсчитать, что в принятом базисе

$$\pi(v) = \begin{pmatrix} 0 & v_1+iv_2 & v_3+iv_4 & 0 \\ v_1-iv_2 & 0 & 0 & -v_3+iv_4 \\ v_3-iv_4 & 0 & 0 & v_1+iv_2 \\ 0 & v_3+iv_4 & v_1-iv_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $E_{\alpha\beta}$ – генератор вращения в двумерной вещественной плоскости (α,β), $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$. Рассматривая $\pi(e_1)\ldots\pi(e_4)$ и попарно перемножая их, получим следующие матрицы

$$\pi(E_{12}) = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \pi(E_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(E_{14}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi(E_{23}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(E_{24})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \pi(E_{34})=\begin{pmatrix}-i&0&0&0\\0&-i&0&0\\0&0&i&0\\0&0&0&i\end{pmatrix}$$

Поэтому, $\langle\pi(E_{\alpha\beta})\Omega\,,\Omega\rangle=\begin{cases}-i & E_{\alpha\beta}=E_{3,2},\,E_{3,4}\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$

(напомним, что $\Omega=(3,0,0,0)$. Видно, что лишь вращения в комплексной плоскости (в смысле комплексной структуры J) дают ненулевой вклад в рассматриваемое состояние. С другой стороны,

$$\operatorname{tr} E_{\alpha\beta}J=\begin{cases}1 & E_{\alpha\beta}=E_{12},\,E_{34}\ ,\\ 0 & \text{в остальных случаях}\ ,\end{cases}$$

поскольку $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$; см. замечание к утверждению I.3.

Совпадение ответов доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из вычисления видно, что Ω не является инвариантом для $\pi(u(k))$, а лишь собственным вектором; соответствующее собственное число равно $i\operatorname{tr} v J$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метагональным представлением назовем проективное представление $SO(2k)$ в $\mathbb{C}^{2^k}$, определяемое формулой

$$\begin{gathered}\pi'\,:\,so(2k)\longrightarrow M_{2^k}\mathbb{C}=\mathcal{L}(H)\,,\\ \pi'(v)=\pi(v)-\langle\pi(v)\Omega\,,\Omega\rangle\, I\ ,\end{gathered}\tag{I}$$

где $\pi(v)$ - фоковское (спинорное) представление, а Ω - вакуумный вектор (т.е. - единственный собственный вектор для всей алгебры $\pi(u(k)$), I - единичный оператор в $\mathbb{C}^{2^k}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Представление π' является проективным на алгебре Ли $so(2k)$; соответствующий 2-коцикл

$$\alpha(A,B)=\operatorname{tr}[A,B]J$$

Этот коцикл когомологичен нулю, пленка есть коцепь: $C\mapsto\operatorname{tr}CJ$. Коцикл α совпадает с коциклом из§I. Доказательство

$$\pi'([A,B])-[\pi'(A),\pi'(B)]=-\pi([A,B])\Omega,\Omega\rangle i=\operatorname{tr}[A,B]J$$

ЗАМЕЧАНИЯ I. Если A - антилинейный оператор в H, т.е. $AJ=-JA$, то $\pi'(A)=\pi(A)$, т.к. $\operatorname{tr} AJ=0$ (см.утверждение I.3).

2. Если A - косоэрмитов оператор, то

$$\pi'(A)=\pi(A)+i\operatorname{tr}A\cdot I$$

поскольку $\operatorname{tr}AJ=-i\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}A$ для таких (комплексно линейных) операторов. Напомним, что след слева берется в вещественном пространстве. В частности, если $A\in su(k)$, то $\pi(A)=\pi'(A)$.

ТЕОРЕМА 3. Ограничение представления π' в пространстве $\mathcal{H}=\mathbb{C}^{2^k}$ на подалгебру $u(k)\subset so(2k)$ совпадает с полной внешней степенью натурального представления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже отмечали, что $\pi(u(k))$ сохраняет градуировку в $\mathcal{H}=\Lambda^*\mathcal{H}_1$. Пусть $v\in u(k)$ и $v=\sum_1^k E_{i,k+i}$, где $E_{i,k+i}$ генератор вращения в i-той комплексной прямой. Найдем выражение для $\pi'(v)$. Прежде всего,

$$\pi'(v)\Omega)=\pi(v)\Omega-\langle\pi(v)\Omega,\Omega\rangle\Omega=\langle\pi(v)\Omega,\Omega\rangle\Omega-$$

$-\pi(v)\Omega,\Omega\rangle\Omega=0$. Поскольку $\pi(v)\Omega=\lambda(v)\Omega$. Поэтому Ω - инвариант представления π' на $u(k)$ (но не π !). Подсчитаем теперь спектр $\pi'(v)$ в одночастичном подпространстве $\mathcal{H}_1$. Пусть $h_s\in H$ и $vh_s=\lambda_s h_s$. Тогда $\langle\pi(E_{i\,k+i})a^*(h_s),a^*(h_s)\rangle=$

$$=\langle(\sigma_3\otimes\dots\otimes\sigma_3\otimes e_r\otimes I')a^*(h_s),a^*(h_s)\rangle=\begin{cases}-1 & r\neq s\\ 1 & r=s\end{cases}$$

здесь I' - единичный оператор в соответствующем пространстве. Поэтому

$$\langle\pi(v)a^*(h_s),a^*(h_s)\rangle=\sum_r\lambda_r\langle\pi(E_r)a^*(h_s),a^*(h_s)\rangle=$$

$$=-\sum_r\lambda_r+\lambda_s=-\sum_{r\neq s}\lambda_r.$$

Наконец, $\pi'(v)a^*(h_s)=\pi(v)a^*(h_s)-\langle\pi(v)\Omega,\Omega\rangle a^*(h_s)=$

$$=-\sum_{r\neq s}\lambda_r a^*(h_s)+\sum_r\lambda_r=\lambda_s a^*(h_s)$$

, т.е. $\pi'(v)$ действует в $\mathcal{H}_1$ также как v в $H^{\mathbb{C}}$. Дальнейшая проверка аналогична, спектры в $\mathcal{H}_k$ совпадают со спектрами внешних степеней. Мы не останавливаемся на этом.

СЛЕДСТВИЕ. Представление π' линейно (т.е. не проективно) на $u(k)$.

Это можно усмотреть и непосредственно, т.к. $\langle\pi([v,w]\Omega,\Omega\rangle$ есть характер алгебры Ли $u(k)+\{\lambda I\}$. Напомним, что $\pi\neq\pi'$ на $u(k)$ см. выше. В то же время, хотя на антилинейной части $so(2k)$ представления π и π' совпадают, в целом π' проективно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метагональной алгеброй Ли $mo(2k)$ назовем алгебру Ли, являющейся как линейное пространство суммой $SO(2k)$ и $\{\lambda I;\lambda\in\mathbb{R}\}$ со скобкой

$$[(v,\lambda),(v',\lambda')]=([v,v'],\ \mathrm{tr}\,[v,v']J).$$

Из предыдущего вытекает теорема.

ТЕОРЕМА 4. Представление π' есть линейное представление $mo(2k)$ в $\mathbb{C}^{2k}$.

$$\pi'(I)=I,\ \pi'(v)=\pi(v)+\langle\pi(v)\Omega,\Omega\rangle I,\ v\in so(2k).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Метагональной группой $MO(2k)$ назовем экспоненту $\pi'(mo(2k))$ в представлении π'.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Метагональная группа есть центральное расширение $SO(2k)$ с центром S^1; метагональная алгебра Ли есть одномерное (вещественное) центральное расширение алгебры Ли $so(2k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидна связность $MO(2k)$, но так как $-1\in MO(2k)$, то центр не есть $\mathbb{R}$, следовательно, он есть S^1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Расслоение $MO(2k)\xrightarrow{S^1}SO(2k)$ редуцируется (в топологическом смысле) к $\mathbb{Z}_2$.

Действительно, имеем включения,

$$\begin{tikzcd}
Spin(2k) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "\mathbb{Z}_2"'] & MO(2k) \arrow[d, "S^1"] \\
& SO(2k)
\end{tikzcd}$$

из которых следует, что расслоение имеет двулистное сечение.

Обозначим через $\widetilde{SO}(2k)$ образ алгебры $SO(2k)$ при вложении π' в $mo(2k)$. Мы уже упоминали, что $\widetilde{so}(2k)$ - не подалгебра, так как π' – лишь инъективное представление. Поэтому

$$\begin{tikzcd}
so(2k) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, leftrightarrow] & mo(2k) \arrow[d] \\
 & so(2k)
\end{tikzcd}$$

и $\widetilde{so}(2k)$ есть сечение, не являющееся подалгеброй. Его существенность будет видна из того, что при $n \longrightarrow \infty$ прямое слагаемое $(mo(2k) = so(2k) + \lambda \cdot I)$ исчезает, а сечение $\widetilde{so}(2k)$ – сходится к некоторому пределу. Однопараметрические подгруппы, отвечающие $\widetilde{so}(2k)$, не замкнуты, вообще говоря, в $MO(2k)$ и заполняют тор $S^1 \times T^k$ всюду плотно.

Над $u(k)$ ($U(k)$, соответственно) расслоения тривиальны и $\widetilde{u}(k) \subset \widetilde{su}(2k)$ есть образ гомоморфизма $u(k)$ в $mo(2k)$. Точнее, $\widetilde{su}(2k) = su(2k)$, а центры в $\widetilde{u}(k)$ и $u(k)$ в $mo(2k)$ отличаются. Подытожим результаты § 3.

I. Конечномерная метагональная алгебра Ли $mo(2k)$ есть тривиализуемое, но нетривиальное одномерное расширение ортогональной алгебры Ли $so(2k)$.

2. Метагональная алгебра Ли имеет каноническое линейное представление π' в фоковском пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2^k}$, это представление подалгебры Ли $so(2k) \subset mo(2k)$ является проективным и отличается от спинорного на центре унитарной алгебры $u(k) \subset so(2k)$, а на ортогональном дополнении к этому центру – совпадает со спинорным. Его ограничение на $u(k)$ есть полная внешняя степень натурального представления $u(k)$; (а ограничение спинорного представления на $u(k)$ тем самым не является внешней степенью натурального).

3. Соответствующий расширению 2-коцикл совпадает с коциклом, введенным в § I.

4. Метагональная группа Ли $MO(2k)$ есть S^1-центральное расширение группы $SO(2k)$, содержащее группу $Spin(2k)$ в качестве двулистного сечения S^1-расслоения.

В следующем параграфе мы перейдем к пределу по n во введенных здесь группах, алгебрах и представлениях, получим уже нетривиализуемое расширение бесконечномерных групп и кратко рассмотрим их представление.

§ 4. Бесконечномерная метагональная группа

Используя анализ конечномерного фоковского пространства и построение метагональной группы, проведенные в § 3, перейдем к бесконечномерному случаю.

I. Фермионное фоковское пространство. Имеется много моделей этого пространства (полная внешняя степень одночастичного пространства, т.е. пополненная бесконечномерная грассманова алгебра форм; L^2 по продакт-мере на произведении двоеточий и др.[*]) Наиболее прозрачный способ получить такое пространство – перейти к пределу в конечномерной модели.

Рассмотрим прямой предел клиффордовых алгебр $C^{2k} \simeq M_{2^k}\mathbb{C} = \overset{k}{\underset{1}{\otimes}} M_{2^k}\mathbb{C}$ и их неприводимых модулей $\mathbb{C}^{2^k} = \overset{n}{\underset{1}{\otimes}} \mathbb{C}$ с естественными вложениями: $a \longrightarrow a \otimes \mathrm{I}$ в первом и $x \longrightarrow x \otimes (1,0)$ во втором случае. Предел алгебр – $\overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} M_2\mathbb{C}$ и "неполное" по фон Нейману тензорное произведение $\overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} \mathbb{C}^2$ (с примыканием к вакуумному вектору $\Omega = (1,0)^{\otimes\infty}$) – есть искомые алгебра и ее модуль. Пополнение по C^* -норме дает C^*-алгебру (алгебру КАС), которая совпадает с C^*-оболочкой алгебры $\mathfrak{J}(H)$, $dim\, H = \infty$, построенной в § 2, а пополнение $\overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} \mathbb{C}^2$ по гильбертовой норме, рассматриваемое как $\mathfrak{J}(H)$ -модуль и есть бесконечномерное фермионное фоковское пространство $\mathcal{H}$. Мы определим представление бесконечномерной метагональной алгебры Ли и метагональной группы в фоковском пространстве.

Алгебра Ли фактически уже определена в § I как $\mathbb{R}$-расширение алгебры Ли O_J . Однако, мы еще раз вернемся к этому вопросу и применим аппроксимацию.

2. Построение алгебры $mo(2\infty)$, и группы $MO(2\infty)$. Прежде всего вложим алгебры и группы

$$mo\ (2k) \subset mo\ (2k+2)$$

$$MO\ (2k) \subset MO\ (2k+2) \qquad (*\ *)$$

$$Spin\ (2k) \subset Spin\ (2k+2)$$

в соответствии с вложением клиффордовых алгебр. Корректность проверяется непосредственно:

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.I. Вложения $(*\ *)$ согласованы с вложением клиффордовых алгебр, иначе говоря, следующая диаграмма коммутативна

---

[*] См. [33].

$$\begin{tikzcd}
M_{2^k}\mathbb{C} \arrow[r] & M_{2^{k+1}}\mathbb{C} \\
mo\,(2k) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cup"] & mo\,(2k+2). \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

СЛЕДСТВИЕ. Определены индуктивные пределы $mo\,(2\infty)$, $MO\,(2\infty)$, $Spin\,(2\infty)$ и их действия в фоковском пространстве $\mathcal{H}$.

Операторы для $mo\,(2\infty)$ в $\mathcal{H}$ конечномерны, а для $MO\,(2\infty)$ и $Spin(2\infty)$ имеют вид: единица плюс конечномерный.

Алгебра Ли $SO\,(2\infty)$ вложена в $mo(2\infty)$ как подалгебра; соответствующее представление в $\mathcal{H}$ обозначим $\pi: SO(2\infty)\mapsto \mathfrak{b}(H)$ оно есть предел представлений $\pi_k: SO\,(2k)\to M_{2^k}\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 4.1. (Блаттнер, Шейл-Стайнспринг). Представление продолжается с алгеброй Ли $SO\,(2\infty)$ как подалгебры Ли операторов в H на алгебру Ли $SO^1(H)\subset \gamma^1$ ядерных кососимметрических операторов. Тем самым, спинорное представление группы $SO(2\infty)$(точнее, представление $Spin\,(2\infty)$) продолжается на группу ортогональных операторов вида $I+\gamma^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что существует предел $\lim\limits_k \pi_k(a_k)\,\Omega_k$, где Ω_k - вакуумный вектор в $\mathbb{C}^{2^k}$, $a_k\in SO(2k)$ π_k- спинорное представление, и $\lim\limits_k a_k = a$, где a -ядерный оператор. Но по формуле $(*)$ теоремы 2 § 3

$$\langle \pi(a)\,\Omega\,,\ \Omega\rangle = \operatorname{tr} a\,.$$

Тем самым, если $\operatorname{tr} a$ существует, то сферическая функция и представление определены на элементе a. Экспонента SO^1 есть группа $Spin^1(2\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наше доказательство конструктивно и потому показывает, что представление π не определено, вообще говоря, на неядерных косоэрмитовых операторах.

Замечательным образом, пределы π' существуют в гораздо более широкой области.

Будем рассматривать π'_k как представление $mo\,(2k)$, их ограничения на $SO\,(2k)$- как проективные представления.

ТЕОРЕМА 4.2. Представление $\lim\limits_k \pi'_k$ есть представление $mo\,(2\infty)$(соотв., проективное представление $SO\,(2\infty)$); оно продолжается по непрерывности на центральное расширение алгебры Ли $O_J\,(H)$ см. § I, т.е. на метагональную алгебру $mo(H)$. Экспонента этой алгебры есть S^1 -центральное расширение группы $O_J\,(H)$ (метагональная группа $MO(H)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что (§ 3)

$$\pi'_{k}(a_{k})=\pi_{k}(a_{k})-\langle\pi_{k}(a_{k})\Omega_{k},\ \Omega_{k}\rangle I.$$

Прежде всего, если a_k - косоэрмитов, то π'_k есть полная внешняя степень (§ 3) и поэтому π' определен для любого косоэрмитов оператора в H. Пусть ℓ - антилинейный оператор тогда $\pi'(\ell)=\pi(\ell)$ (см.§ 3); поэтому, представление π' определено подпространстве на тех антилинейных операторов, скобка любых двух из которого (она уже - линейный оператор) попадает в множество косоэрмитовых операторов из области определения представления π ; но последнее по теореме 4.I определено на ядерных операторах, следовательно антилинейные операторы из области определения π' - являются операторами Гильберта-Шмидта.

СЛЕДСТВИЕ. Ограничение π' на линейную часть (косоэрмитовы операторы) есть полная внешняя степень натурального представления.

ЗАМЕЧАНИЕ. Уточнение теоремы 4.I состоит, таким образом, в том, что и представление π продолжается на антилинейные операторы Гильберта - Шмидта; поэтому область задания π - операторы вида "ядерный косоэрмитов (линейный) + гильберт-шмидтовский антилинейный. Для завершения доказательства нужно заметить, что центр групп $MO(2k)$ есть S^1 и, по той же причине, центр экспоненты алгебры $mo(H)$ есть S^1. Само существование экспоненты как множества операторов в $\mathcal{H}$ вытекает из конструктивного описания алгебры $mo(H)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.I. Алгебра Ли $mo(H)$ не является прямой суммой центра и подалгебры. Группа $MO(H)$ как главное расслоение со слоем S^1 над $O_J(H)$ не редуцируется ни к какой собственной подгруппе S^1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение сводится к доказательству нетривиальности коцикла. Но этот коцикл, как мы видели, совпадает с коциклом α из § I, следовательно достаточно применить теорему I.I, дающую полную информацию о нетривиальности коцикла на различных подалгебрах. Если бы расслоение $MO(H)\xrightarrow{S^1}O_J(H)$ редуцировалось к замкнутой, и тем самым, конечной собственной подгруппе, то существовало бы конечнолистное сечение расслоения, являющееся подгруппой (см.[28]), а тогда алгебра Ли была бы прямой суммой.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Расслоение $MO(H)\xrightarrow{S^1}O_J(H)$ не имеет непрерывного сечения (т.е. нетривиально топологически).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что группа непрерывных когомологий $H^2_{alg}(O_J(H);\, S^1) = 0$, т.к. в этом случае из тривиальности расслоения вытекала бы тривиальность расширения с помощью непрерывного 2-коцикла, а по утверждению 4.I расширение нетривиально. Однако, достаточно заметить, что расслоение топологически нетривиально уже при ограничении на $SO(n)$, т.к. содержит спинорное расслоение (со слоем $\mathbb{Z}_2$). Метод вычисления $H^2_{alg}(G\,;\,S^1)$ удобен при доказательстве нетривиальности ограничения нашего расслоения на группы токов, на чем мы остановимся в другом месте.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что расслоение не имеет даже конечнолистных непрерывных сечений (не обязательно групповых). Здесь тоже удобно воспользоваться аппроксимацией $MO(2n) \xrightarrow{S^1} SO(2n)$.

Однако, ограничение расслоения над $U(H)$ – тривиально, а над $O^1(H)$ – имеет двулистное сечение $Spin^1(H)$.

Отметим еще одно любопытное обстоятельство. Так как по теореме Пале-Шварца [32] гомотопический тип $O^\infty(H)$ (единица плюс компактный оператор) таков же как и $O(\infty)$ (и, конечно, $O'(H)$, $O^2(H)$ и т.п.), то даже над $O^\infty(H)$ и, тем более над $O^2(H)$, существует спинорное расслоение. Однако оно не погружается в $MO(H)$ и, быть может, вообще не имеет как группа, унитарных представлений.

Интересный пример топологически нетривиального расслоения, являющегося S^1-центральным расширением бесконечномерной – таков

$$U(H) \xrightarrow{S^1} U(H)/S^1 ,$$

где $U(H)$ группа всех унитарных операторов гильбертова пространства, S^1 – ее центр. По теореме Кюйпера [32] группа $U(H)$ стягиваема и, поэтому это расслоение S^1 универсально, правда, его база не является CW -комплексом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal I.E. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom (1). Mat.-Fys. Medd.Danske Vid.selsk. 1959, v.31, N 12, 1-39.
2. Shale D. Linear symmetries of free boson fields Trans. Am.Math.Soc. 1962, v.103, pp.149-167.
3. Shale D., Stinespring F. Spinor representations of Infinite Orthogonal Groups. J.Math.Mech.1965,v.14, p.315-322.

4. Weil A. Sur certains groupes d'operateurs unitaires Acta Math. 1964, v.111, pp.143-211 (см. сб. "Математика", 1969, 13:5).

5. Лере Ж. Лагранжев анализ и квантовая механика. М., Мир, 1981.

6. Kostant B. Symplectic spinors. Symposia math., 14, L., AP, 1974, p.139-152.

7. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М. Мир. 1981.

8. Kac V.G., Peterson D.H. Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups. Proc.Nat.Acad.Sci.USA. 1981, v.78, pp.3308-3317.

9. Frenkel I.B. Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory. J.Func.Anal.1981, v.44, pp.259-327.

10. Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Transformation groups for solution equations. RIMS. Kyoto Univ. 1981, prep. N 362.

11. Segal G. Jacobi's identity and isomorphism between a symmetric algebra and exterior algebra. Prep. 1980.

12. Фейтин Б.Л., Фукс Д.Б. Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро. Функц.анал. 1982, т.16, № 2, стр.47-63.

13. Lepowsky J., Wilson R.L. Construction of the Affine Lie Algebra $A_1^{(1)}$, Commun.Math.Phys. 1978, v.62, p.43-53.

14. Kac V.G., Kazhdan D.A., Lepowsky J. and Wilson R.L. Realization of the basic representations of the Eucledean Lie algebras. Adv. in Math. 1981, v.42, pp.83-112.

15. Frenkel I.B., Kac V.D. Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models. Invent.Math. 1980, v.62, pp.23-66.

16. Gelfand I.M., Graev M.I., Vershik A.M. Representations of the group of wmooth mappings of a manifold into a compact Lie group. Compos.Math. 1977, v.35, pp.299-334.

17. Guichardet A. Symmetric Hilbert spaces and related topics. Lect.Notes in Math. 1972, N 261.

18. Kashiwara M., Vergne M. On the Segal-Shale-Weil Representations and harmonic polynomials. Inv.math. 1978, v.44, pp.1-47.

19. Plymen R.J. Some recent results on infinite-dimensional spin groups. Adv.Math.Suppl.Studies.1979, v.6, pp.159-171.

20. De la Harpe P. The Clifford algebra and the Spinor Group of a Hilbert Space. Compos: Math. 1972, v.25, pp.245-261.

21. De la Harpe P., Plymen R. Automorphic group representations a new proof of Blattner's theorem. J. Lond,Math.Soc. 1979, v.19, pp.509-522.

22. Segal G. Unitary representations of some Infinite Dimensional Groups.Comm.Math.Phys. 1981, v.80,pp.301-342.

23. Stratila S., Voiculescu D. Representations of AF -algebras and of the group $U(\infty)$. Lecture Notes in Math. 1975, v.486.

24. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. Функц.анал.I98I,т.I5, вып.4, стр.I5-27.

25. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры бесконечной ортогональной группы. ДАН, I982, т.267, № I.

26. Kac V.G. Lie superalgebras. Adv.in Math. 1977, v.26, pp.8-96.

27. Каруби М. К-теория. Введение. М. "Мир", I98I.

28. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М., "Мир", I970.

29. Powers R., Stormer E. Free states of the canonical anticommutation relations. Comm.math.Phys. 1970, v.16, pp.1-33.

30. Hugenholtz N., Kadison R. Automorphisms and Quasi-Free States of CAR-algebra. Comm.math.Phys. 1975, v.43, pp.181-195. (Перевод, Математика, I5:3).

3I. Желобенко Д.М. Компактные группы Ли и их представления. М: "Наука", I970.

32. Атья М. Введение в К-теорию. М. Мир. I969.

33. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М., "Наука", I965.

34. Frenkel I.B. Spinor representations of affine Lie algebras. Proc.Nat.Acad.Sci. USA, 1980, v.77, p.6303-6306.

35. Blattner R. Quantization and representation theory. Proc.Symp.Pure Math.A.M.S., v.26, Providence, R.I., 1974, p 145-165.

36. Blattner R. The meta-linear geometry of non-real polarizations. in: Differential Geometrical methods in Physics, Lecture Notes in Math., 1976, v.570, p.11-45

Г.Я.Гительсон

ПОЛУКОНЕЧНЫЕ ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ $U(\infty)$

I°. В работах [I-5, 7-I2] изучалась теория представлений локально-конечных групп и AF -алгебр. В [2-5] для этого использовался новый метод, основанный на прямом предельном переходе (эргодический метод). С помощью этого метода заново вычислены конечные и полуконечные характеры группы $\mathfrak{S}(\infty)$ [2,3] , доказана полнота списка конечных характеров группы $U(\infty)$[4] , приведенного ранее в (II) (см.также [8]).

С помощью того же метода мы получаем в этой работе список всех полуконечных характеров $U(\infty)$. Отметим, что, если полуконечные характеры группы $\mathfrak{S}(\infty)$ получаются индуцированием характера $\mathcal{X}_{\mu}\times\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ с подгруппы $\mathfrak{S}(n)\times\mathfrak{S}(\infty)$, то для $U(\infty)$ они устроены проще, а именно: любое фактор-представление π типа II_{∞} разлагается в тензорное произведение фактор-представлений типа II_1 и I_{∞} .

2°. Напомним, что группа $U(\infty)$ получается как индуктивный предел групп $U(n)$ с естественным вложением. Групповую алгебру группы $U(n)$ будем обозначать $L^1(U(n))$; $C^*(U(n))$ есть C^* - оболочка $L^1(U(n))$. По определению положим

$$C^*(U(\infty))=C^*-\lim_{n}\mathrm{ind}\, C^*(U(n)). \qquad (\mathrm{I})$$

Когда мы будем говорить о сходимости характеров, всегда подразумевается поэлементная сходимость на группе. Характер на $C^*(U(\infty))$ называется полуконечным, если его идеал конечности плотен в $C^*(U(\infty))$.

Сигнатурой ${}_n\alpha$ называют последовательность n невозрастающих целых чисел $\{{}_n\alpha_j\}_{j=1}^{n}$, или опуская индекс n .

$${}_n\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n),\ \alpha_i\geqslant\alpha_{i+1},\ \alpha_i\in\mathbb{Z}$$

Если $\alpha_n>0$, то ${}_n\alpha$ называют диаграммой Юнга. Она будет обозначаться у нас буквами $\mu,\nu\dots$. Число клеток в k -й строке сигнатуры ${}_n\alpha$ обозначается ${}_n{}^*\alpha_k$. Весом сигнатуры называют общее число клеток в ней

$$|{}_n\alpha|=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|. \qquad (2)$$

Классические результаты теории представлений группы $U(n)$ можно найти в [6] . Здесь отметим самое главное. Между характерами $U(n)$ и сигнатурами ${}_n\alpha$ существует взаимнооднозначное соответствие, что позволяет их отождествлять. Операция сопряжения характеров соответствует изменению сигнатуры ${}_n\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n)$ на $\overline{{}_n\alpha}=(-\alpha_n, -\alpha_{n-1}, \dots -\alpha_1)$.

Характером всегда понимается неразложимый след, для конечного случая нормируемый условием $\chi(\mathrm{Id})=\dim\chi$.

Если $g\in U(n)$ (соответственно $g\in C^*(U(\infty))$), то через $\{{}_g\gamma_i\}_{i=1}^{n}$ (соответственно $\{{}_g\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$) обозначим собственные числа матрицы g .

Пусть возрастающая последовательность характеров ${}_n\chi$ групп $U(n)$ стремится к характеру χ группы $U(\infty)$. Тогда [10] полным инвариантом ядра характера χ является пара бесконечных сигнатур $\{{}_\chi W, {}_\chi L\}$:

$$ {}_\chi W=(W_1, W_2, W_3, \dots), {}_\chi L=(L_1, L_2, L_3, \dots) $$

где W_i и L_i определяются как пределы

$$ \begin{aligned} &W_j=\lim_n {}_n\alpha_j\,,\ L_j=\lim {}_n\alpha_{n+1-j} \\ &W_\infty=\lim_j W_j\,,\ L_\infty=\lim_j L_j \end{aligned} \qquad (3) $$

заметим, что

$$ W_j\in\mathbb{Z}\cup\infty \quad L_j\in\mathbb{Z}\cup-\infty, $$

$$ W_j\geqslant W_{j+}\geqslant L_{j+1}\geqslant L_j \quad ; $$

обозначим

$$ r_W=\sup\{j: W_j=\infty\},\ r_L=\sup\{j: L_j=-\infty\} \qquad (4) $$

Там, где это не будет вызывать недоразумений, мы будем опускать индексы n, g и χ .

3°. Нами существенно будут использованы теоремы, относящиеся к теории представлений группы $U(\infty)$. Приведем их в следующей форме:

ТЕОРЕМА об аппроксимации (Вершик, Керов [4]).

Всякий полуконечный характер χ группы $U(\infty)$ может быть получен как предел характеров ${}_n\chi$ групп $U(n)$

ТЕОРЕМА о частотах (Вершик, Керов [5] , Войкулеску [11] , Эдреи [13]).

Пусть дана возрастающая последовательность характеров $\{{}_n\chi\}_{n=1}^{\infty}$ групп $U(n)$ с сигнатурами ${}_n\alpha$. Следующие условия эквивалентны:

а) Существует полуконечный характер χ группы $U(\infty)$, что $\chi = \lim_n {}_n\chi$

б) Существуют конечные пределы (частоты):

$$a_k^+ = \lim_n (|{}_n\alpha_k| + {}_n\alpha_k)/2n$$
$$a_k^- = \lim_n (|{}_n\alpha_{n+1-k}| - {}_n\alpha_{n+1-k})/2n$$
$${}^*a_k^\pm = \lim {}_n{}^*\alpha_{\pm k}/n$$
$$\theta^+ = \lim_n \sum_{i:\alpha_i>0} {}_n\alpha_i/n$$
$$\theta^- = \lim_n \sum_{i:\alpha_i>0} {}_n\alpha_i/n$$
$$k = 1, 2, \dots \qquad (5)$$

Если к тому же известно, что χ конечен, то

$$\chi(U) = \exp(\lambda^+ \mathrm{Sp}(U-I) + \lambda^- \mathrm{Sp}(U^*-I) \cdot$$
$$\cdot \det \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(I + {}^*a_i^+(U-I))(I + {}^*a_i^-(U^*-I))}{(I - a_i^+(U-I))(I - a_i^-(U^*-I))} \qquad (6)$$

где $a_i^\pm$, ${}^*a_i^\pm$, $\theta^\pm$ – те же что и в (5), а

$\lambda^\pm = \theta^\pm - \sum_{i=1}^{\infty}(a_i^\pm + {}^*a_i^\pm)$ – индекс дефекта.

ТЕОРЕМА о сигнатурах (Войкулеску [II], Бойер [8]). Пусть χ – полуконечный характер группы $U(\infty)$, а $\{W, L\}$ $W = (W_1, W_2, \dots)$, $L = (L_1, L_2, \dots)$ – пара его бесконечных сигнатур (см. (3),(4)).

χ является характером типа

I) I_1 тогда и только тогда, когда $W_1 = L_1$.

2) II_1 тогда и только тогда, когда
$W_{\tau_W+1} = W_\infty$, $L_{\tau_L+1} = L_\infty$, $W_1 > L_1$

3) I_∞ тогда и только тогда, когда
$W_\infty = L_\infty$, $0 < W_1 - L_1 < \infty$

4) II_∞ тогда и только тогда, когда

$L_\infty, -W_\infty \neq \infty$, $W_{\tau_W+1} - W_\infty + L_\infty - L_{\tau_L+1}$

4°. Задача описания полуконечных характеров полностью решается следующими двумя теоремами.

Обозначим через $S_\mu(x_1, x_2, \dots)$ – функцию Шура диаграммы μ .

ТЕОРЕМА I. Всякий полуконечный характер χ группы $U(\infty)$ типа I_∞ параметризуется тройкой (μ^+, μ^-, m) , где $m \in \mathbb{Z}$, а μ^+, μ^- - диаграммы Юнга. При этом

I) $\chi_{\mu^+,\mu^-,m} = \chi_{\mu^+,0,0} \otimes \chi_{0,\mu^-,0} \otimes \chi_{0,0,m}$

2) Характеры $\chi_{\mu^+,0,0}, \chi_{0,\mu^-,0}, \chi_{0,0,m}$ задаются формулами:

$$\chi_{\mu,0,0}(g) = \overline{\chi_{0,\mu,0}(g)} = S_\mu(g\gamma_1, g\gamma_2, \ldots\ldots) ,$$

$$\chi_{0,0,m}(g) = \det g^m$$

Существует плотный в $C^*(U(\infty))$ идеал I_{μ^+,μ^-} , на котором характер $\chi_{\mu^+,\mu^-,m}$ конечен.

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем, для краткости, если это не будет вызывать недоразумений, мы будем обозначать через χ_μ характер $\chi_{\mu,0,0}$ и через χ_m характер $\chi_{0,0,m}$. Нужно, однако, помнить, что m всегда обозначает целое число, а μ - диаграмму Юнга.

ТЕОРЕМА 2. Для любого полуконечного характера χ типа II_∞ существует единственное разложение его в тензорное произведение

$$\chi = \chi_I \otimes \chi_{II}$$

где χ_{II} - конечный характер типа II_1 , имеющий те же частоты, что и χ (см.(5)), а

$$\chi_I = \chi_{\mu^+} \otimes \overline{\chi_{\mu^-}}$$

причем $\mu_i^+ = W_{r_W+i} - W_\infty, \mu_i^- = L_\infty - L_{r_L+i}$ (см.(3)).

5^0. Для доказательства этих теорем нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА I (об отщеплении клетки).

Пусть возрастающая последовательность характеров $\{{}_n\chi\}_{n=N}^\infty$ групп $U(n)$ с сигнатурами ${}_n\alpha$ удовлетворяет одному из эквивалентных условий теоремы о частотах и определяет пару бесконечных сигнатур $\{W, L\}$, причем $r_W, W_\infty < \infty$,

$$W = (\infty, \infty, \ldots \infty, W_\infty + \mu_1, W_\infty + \mu_2, \ldots W_\infty + \mu_l, W_\infty, W_\infty \ldots),$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_l)$- диаграмма Юнга.

Пусть возрастающая последовательность характеров $\{{}_n\Psi\}_{n=N}^\infty$ имеет сигнатуры ${}_n\beta$ вида

$${}_n\beta = {}_n\alpha + (\underbrace{0,0,\ldots 0}_{p},1,0,\ldots 0) - \varepsilon_1(\underbrace{0,0,\ldots 0}_{{}^*\alpha_k},1,0,\ 0)$$

$$-\varepsilon_2(\underbrace{0,0,\ldots 0}_{m},1,0,0,\ldots 0),$$

причем $m \leq r_W < p \leq r_W + m,\ k < W_\infty,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0,1,\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 1$

Тогда $\dfrac{\dim_n \chi}{\dim_n \psi} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другими словами, сигнатура ${}_n\beta$ получается из сигнатуры ${}_n\alpha$ добавлением одной клетки к диаграмме μ и убавлением, возможно, из бесконечно растущих строк или столбцов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 0$.

Воспользуемся формулой Вейля для размерности характера группы. Опуская индексы n и χ у сигнатур, получим

$$\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \psi} = \prod_{t \neq p} \left(\frac{\alpha_t - \alpha_p - p - t}{\alpha_t - \alpha_p - 1 + p - t} \right) \cdot \frac{\alpha_p - k + 1 + {}^*\alpha_k - p}{\alpha_p - k + 2 + {}^*\alpha_k - p}$$

$$\cdot \prod_{t \neq {}^*\alpha_k, p} \left(\frac{\alpha_t - k + {}^*\alpha_k - t}{\alpha_t - k + 1 + {}^*\alpha_k - t} \right) = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$$

Очевидны оценки $\frac{1}{2} \leq P_2 \leq 1$

Следовательно,

$$\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \psi} \leq P_1 \cdot P_3$$

Оценим P_1 и P_3

$$\ln P_1 = \sum_{t \neq p} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_t - \alpha_p - 1 + p - t}\right) = \sum_{t < p} \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha_t - \alpha_p - 1 + p - t}\right)$$

$$\sum_{t > p} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha_p + 1 - \alpha_t + t - p}\right) \leq 2^p + \sum_{t > p} \left(1 - \frac{1}{t - p}\right) \leq 2^p - \ln \frac{n}{p}$$

Следовательно, $P_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\ln P_3 = \sum_{\substack{t < {}^*\alpha_k \\ t \neq p}} \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha_t - k + 1 + {}^*\alpha_k - t}\right) + \sum_{t > {}^*\alpha_k} \ln\Bigg(1 +$$

$$+ \frac{1}{k - \alpha_t - 1 + t - {}^*\alpha_k}\Bigg) \leq \sum_{\substack{t < {}^*\alpha_k \\ t \neq p}} \ln\left(1 - \frac{1}{{}^*\alpha_k - t}\right) + \sum_{t > {}^*\alpha_k} \ln\left(1 + \frac{1}{t - {}^*\alpha_k}\right) - T$$

Из условия следует, что ${}^*\alpha_K \sim {}^*a_K^+ \cdot n$ поэтому

$$T \sim \int_1^{(1-{}^*a_K^+)n} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \int_1^{{}^*a_K^+ \cdot n} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)dx \sim$$

$$\sim \ln n + \ln(1-{}^*a_K^+) - \ln n + \ln {}^*a_K^+ = 0(1)$$

получили $\ln P_3 \leqslant \mathrm{const}$

Перемножая получим $\dfrac{\dim_n \chi}{\dim_n \Psi} = 0\left(\frac{1}{n}\right)$

б). $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0$

Так же как и в а) имеем:

$$\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \Psi} = \prod_{t=p}\left(\frac{\alpha_p-\alpha_t+t-p}{\alpha_p-1-\alpha_t+t-p}\right)\cdot\frac{\alpha_m-\alpha_p+p-m+1}{\alpha_m-\alpha_p+p-m+2}\cdot$$

$$\prod_{t\neq p,l}\left(\frac{\alpha_m-\alpha_t+t-m}{\alpha_m-\alpha_t-1+t-m}\right) = S_1\cdot S_2\cdot S_3$$

Но $S_2 < 1$, поэтому

$$\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \Psi} \leqslant S_1 S_3$$

Заметим, что $S_1 = P_1$, следовательно, $S = 0\left(\frac{1}{n}\right)$. С другой стороны,

$$\ln S_3 = \sum_{t<m} \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_t-\alpha_m+1+m-t}\right) + \sum_{t>m} \ln\left(1+\frac{}{\alpha_m-\alpha_t+t-m-1}\right)$$

$$\leqslant 2^l + \sum_{m<t<r_W} \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_m-\alpha_t}\right) + \sum_{t>r_m} \ln\left(1+\frac{}{\alpha_m+t}\right)$$

Опять воспользуемся условием (4): $\alpha_m \sim a_m^+ \cdot n$, следовательно, $S_3 = 0(1)$ и $\dim_n \chi / \dim_n \Psi = 0\left(\frac{1}{n}\right)$

в). $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$$\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \Psi} = \prod_{t\neq p}\left(\frac{\alpha_p-\alpha_t+t-p}{\alpha_p+1-\alpha_t+t-p}\right) = R$$

Так как $R = P_1$

$R = O(\frac{1}{n})$.

Следовательно, $\frac{\dim_n \chi}{\dim_n \Psi} = O(\frac{1}{n})$.

ЛЕММА 2. Пусть дана сигнатура ${}_n\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ и x_λ - число таких i, что $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Тогда

$$n - x_\lambda < 2\sqrt{|{}_n\lambda|}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x_\lambda = 0$ лемма очевидна. Если $x_\lambda \geqslant 1$, то существует i такое, что $\lambda_i = \lambda_{i+1}$. Рассмотрим сигнатуру ${}_{n-1}\check{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \check{\lambda}_i, \dots \lambda_n)$. Имеем $x_{\check{\lambda}} = x_\lambda - 1$, $|\check{\lambda}| = |\lambda| - |\lambda_i|$. Следовательно $n - 1 - x_{\check{\lambda}} = n - x_\lambda$, получили спуск по x_λ. Эта редукция и доказывает лемму.

6°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Вначале докажем разложение

$$\chi_{\mu^+,\mu^-,m} = \chi_{\mu^+} \otimes \overline{\chi}_{\mu^-} \otimes \chi_m,$$

а затем вычислим χ_μ.

По теореме о сигнатуре п.Ш любой полуконечный характер типа I_∞ получается как предел $\chi_{\mu^+,\mu^-,m} = \lim_n {}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,m}$, где $\mu^\pm$ диаграммы Юнга, $m \in \mathbb{Z}$, и характеру ${}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,m}$ группы $U(n)$ отвечает сигнатура

$${}_n\lambda = (m+\mu_1, m+\mu_2, \dots m+\mu_{l^+}, m, \dots m, m-\mu_{l^-}, m-\mu_{l^- -1}, \dots m-\mu_1)$$

Заметим сразу, что ${}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,m} = {}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,0} \otimes {}_n\chi_{0,0,m}$ и ${}_n\chi_{0,0,m}(U) = \det U^m$, $U \in U(n)$

Рассмотрим произведение

$$M = {}_n\chi_{\mu^+,0,0} \otimes {}_n\chi_{0,\mu^-,0}, \quad n > |\mu^+| + |\mu^-|$$

По теореме о разложении тензорного произведения неприводимых характеров группы $U(n)$ ([6] , § 77), получим

$$M = \sum_{\substack{\nu^+<\mu^+ \\ \nu^-<\mu^-}} C_{\nu^+,\nu^-} \, {}_n\chi_{\nu^+,\nu^-,0}$$

причем $|C_{\nu^+,\nu^-}| \leqslant |\mu^+|! + |\mu^-|! = O(1)$

Воспользуемся леммой об отщеплении клетки. В нашем случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \tau_W = \tau_L = U_\infty = L_\infty = 0$.

$${}_n\chi_{\mu^+,0,0} \otimes {}_n\chi_{0,\mu^-,0} = {}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,0} + \dim {}_n\chi_{\mu^+,\mu^-,0} \cdot O(\tfrac{1}{n})$$

Переходя к пределу, получим

$$\chi_{\mu^+,\mu^-,0} = \chi_{\mu^+,0,0} \otimes \chi_{0,\mu^-,0}$$

Теперь вычислим характер χ_{μ} с помощью перехода к пределу во второй формуле Вейля.

Обозначим через ${}_{n}\sigma_{K}$ – характер группы $U(n)$ с сигнатурой $(K,0,0,\dots 0)$

Тогда для всех $U \in U(n)$

$$ {}_{n}\sigma_{K}(U-I) = \sum_{\substack{K_i \geqslant 0 \\ \Sigma K_i = K}} \left({}_{U}\gamma_1 \cdot {}_{U}\gamma_2 \cdots {}_{U}\gamma_n - 1 \right)$$

Пусть U такое, что

$$ {}_{n}\sigma_{K}(U-I) = \sum_{\substack{K_j \geqslant 0 \\ \Sigma K_i = K}} {}_{U-I}\gamma_1 \cdot {}_{U-I}\gamma_2 \cdots {}_{U-I}\gamma_n$$

Разности таких U порождают идеал ${}_{n}I_{K} \subset C^*(U(n))$. В качестве идеала конечности возьмем $I_{\mu} = \bigcup_{1}^{\infty} {}_{n}I_{\mu}$, ${}_{n}I_{\mu} = \bigcap_{i,j=1}^{\ell} {}_{n}I_{\mu_i - i + j}$

Действительно, для $g \in \bigcup_{n=1}^{\infty} {}_{n}I_{K}$ можно определить функцию

$$\sigma_K(g) = \lim_{n} {}_{n}\sigma_K(g) = \sum_{\substack{K_i \geqslant 0 \\ \Sigma K_i = K}} {}_{g}\gamma_1^{K_1} \cdot {}_{g}\gamma_2^{K_2} \cdots$$

и следовательно для $g \in {}_{m}I_{\mu}$

$$ {}_{\mu}\chi(g) = \lim_{n} {}_{n}\chi_{\mu,0,0} = \begin{vmatrix} \sigma_{\mu_1}(g) \dots\dots\dots \sigma_{\mu_1+\ell-1}(g) \\ \\ \sigma_{\mu_\ell-\ell+1}(g) \dots\dots \sigma_{\mu_\ell}(g) \end{vmatrix} =$$

$$= S_{\mu}\left({}_{g}\gamma_1 \cdot {}_{g}\gamma_2 \cdot \dots\dots\dots \right) \tag{9}$$

Перемножая получим общую формулу:

$$\chi_{\mu^+,\mu^-,m}(g) = \det g^m \cdot S_{\mu^+}({}_{g}\gamma_1 \dots)\, \overline{S_{\mu^-}({}_{g}\gamma_1 \dots)},\ g \in I_{\mu^+} \cap I_{\mu^-} = I_{\mu^+,\mu^-}.$$

Что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Идеал I_{μ^+,μ^-} можно расширить, если потребовать лишь, чтобы элемент $g \in C^*(U(n))$ удовлетворял равенству (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. По теореме о сигнатуре, всякий полуконечный характер χ типа II_{∞} группы $U(\infty)$ имеет, с точностью до сопряжения, вид как в условии леммы об отщеплении клетки.

Пусть $\chi = \lim {}_{n}\chi$, где ${}_{n}\chi$ – характер группы $U(n)$

с сигнатурой ${}_n\alpha$. Определим характер $\widetilde{\chi}_{\mathrm{II}}$ с сигнатурой $\widetilde{{}_n\alpha}$

$$\widetilde{{}_n\alpha}_k = \begin{cases} {}_n\alpha_k, & k > r_w + l \vee k < r_w \\ {}_n\alpha_k, - \mu^+_{k-r_w}, & r_w < k \leqslant r_w + l \quad \mu^+ = \mu \end{cases}$$

Как и в доказательстве теоремы I, воспользуемся теоремой ([6], § 77) о разложении тензорного произведения характеров

$$_n\chi_{\mu^+,0,0} \otimes {}_n\widetilde{\chi}_{\mathrm{II}} = \sum_{{}_n\widetilde{\alpha} < {}_n\beta \leqslant \alpha + (\underbrace{\mu_1, \mu_1, \dots \mu, 0, \dots 0}_{\alpha_{w_\infty}}, \mu_1, \dots)} {}_{r_w}C_{n\beta} \cdot {}_n\chi_{n\beta,0,0}$$

По теореме о частотах $|{}_n\alpha| = 0(n)$, поэтому по лемме 2 число ступенек в сигнатуре ${}_n\alpha$ не превосходит $0(\sqrt{n})$ и значит число слагаемых не больше, чем $0(\sqrt{n})$. Заметим также, что как и в теореме I, $C_{v,\beta} = 0(1)$. Следовательно по лемме 1 :

$$_n\chi_\mu \otimes {}_n\widetilde{\chi}_{\mathrm{II}} = {}_n\chi + \dim {}_n\chi \cdot 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

и переходя к пределу по n

$$\chi = \chi_\mu \otimes \widetilde{\chi}_{\mathrm{II}} .$$

Точно также выделяем сомножитель $\overline{\chi_{\mu^-}}$. В результате

$$\chi = \chi_{\mathrm{I}} \otimes \chi_{\mathrm{II}} = \chi_{\mu^+} \otimes \chi_{\mu^-} \otimes \chi_{\mathrm{II}}$$

Что и требовалось доказать.

Объединяя теорему о частотах и теоремы I и II, получим утверждение:

ТЕОРЕМА. Полуконечный характер группы $U(\infty)$ параметризуется восьмёркой $(\mu^+, \mu^-, a^+, a^-, {}^*a^+, {}^*a^-, \lambda^+, \lambda^-)$, где $\mu^\pm$ – диаграммы Юнга, $a^\pm, {}^*a^\pm \in l^1_+$, $\lambda^\pm \in \mathbb{R}_+$ и

$$\chi_{\mu^\pm a^\pm, {}^*a^\pm, \lambda^\pm} = \chi_{\mu^+} \otimes \overline{\chi}_{\mu^-} \otimes B_{a^+} \otimes \overline{B}_{a^-} \otimes F_{*a^+} \otimes \overline{F}_{*a^-} \otimes R_{\lambda^+} \otimes \overline{R}_{\lambda^-}$$

где $R_\lambda = e^{\lambda \operatorname{Sp}(U-I)}$ – характер регулярной серии, $U \in U(\infty)$

$B_a = \Pi \det \frac{1}{1 - a_k(U-I)}$ – характер бозонной серии, $U \in U(\infty)$

$F_a = \Pi \det (1 + a_k(U-I))$ – характер фермионной серии, $U \in U(\infty)$

$\chi_\mu = S_\mu({}_g\gamma_1, {}_g\gamma_2, \dots)$ – характер серии бесконечных тензоров, $g \in I_\mu$.

В заключении я хочу выразить благодарность А.М.Вершику за постановку задачи и внимание к работе и С.В.Керова за указание на ошибку в первоначальном варианте теоремы I.

Литература

1. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга. - Докл.АН, 1977, т.233, № 6, с.1024-1027.
2. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор-представления группы $\mathfrak{S}(\infty)$. - Докл.АН, 1981, т.257, № 5.
3. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. - Функц.анал., 1981, т.16, № 4, с.15-27.
4. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор-представления унитарной группы. Докл.АН, 1982, т.267,
5. Вершик А.М., Керов С.В. Proc.OAGR,Romania 1982.
6. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. М., 1970.
7. Brattelly O. Inductive limits of finite dimensional AF -algebras. - Trans AMS, 1972, v.171, p.195-234.
8. Boyer P. Infinite traces on AF-algebras and characters of $U(\infty)$. - Preprint
9. Elliott G.H. On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras. J.-Algebra, 1976, v.38, p.29-44.
10. Strătilăs S., Voiculescu D. Representation of AF-algebras and group $U(\infty)$. - Lecture Notes Math., 1975, N 486.
11. Voiculescu D. Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$. - J.Math. pures et appl., 1976, v.55, p.1-20.
12. Thoma E. Die unserlegraren, positiv-defuniten klassenfunctionen der absählbar unendlichen, simmetrischen Gruppe. - Math Z, 1964, v.85, p.40-61.
13. Edrei A. On the generating function of a doubly - infinite, totally positive sequence. Trans AMS, 1953, v.74, p.367-383.

С.И.Карпушев

УСЛОВНО ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ И ФОРМУЛА ЛЕВИ-ХИНЧИНА

Условно положительно определенные функции широко используются в последнее время в работах по теории когомологий со значениями в унитарных представлениях и теории мультипликативного интеграла представлений [I-5] . Важной задачей является получение интегрального представления для условно положительно определенных функций, аналогичного классическому представлению Леви-Хинчина. Разными авторами такие представления были получены для специальных классов групп и условно положительно определенных функций [6] , [7] . В этой работе продолжается изучение конуса всех условно положительно определенных функций, начатое в [5] в связи с теорией когомологии. Основной результат состоит в доказательстве обобщенной формулы Леви-Хинчина для условно положительно определенных функций на группе Ли. Мы используем теорию Шоке для получения обобщения формулы Леви-Хинчина. Впервые такой подход использовал Иогансон [8] для получения классической формулы Леви-Хинчина (см.приложение в [9]). В связи с вопросами теории мультипликативного интеграла геометрический подход предложен А.М.Вершиком.

Содержание работы.

В § I собраны предварительные сведения и определения. В § 2 подробно изучается геометрия конуса условно положительно определенных функций на группах, не имеющих аддитивных характеров и доказаны основные теоремы (теоремы I-3). В § 3 эти результаты обобщаются на случай произвольной группы Ли. В § 4 разбираются примеры, часть из которых, возможно, является новыми. В § 5 обсуждаются связи теории условно положительно определенных функций с теорией представлений.

§ I. Состояния и условно положительно определенные функции.

Пусть G - локально-компактная группа, $\mathcal{E}_0(G)$ - множество всех непрерывных положительно определенных (п.о.) функций φ на G , таких, что $\varphi(e)\leqslant 1$ снабженное слабой $(L^\infty(G), L^1(G))$ топологией. Множество $\mathcal{E}_0(G)$ является выпуклым компактом в слабой топологии. Обозначим через $\mathcal{E}(G)$ подмножество в $\mathcal{E}_0(G)$ состояний, т.е. п.о. функций, нормированных условием $\varphi(e)=1$, а через $\mathcal{P}=\mathcal{P}(G)$ – множество чистых состояний, т.е. совокупность крайних точек компакта $\mathcal{E}_0(G)$, отличных от нуля. Слабая топология на $\mathcal{E}(G)$ совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах, которая называется далее сильной. Подробнее см. [10] .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Непрерывная функция $\psi: G \to \mathbb{C}$ называется условно положительно определенной (у.п.о.), если $\psi(g)=\overline{\psi(g^{-1})}$ и для любого набора $g_1,\dots,g_n \in G$ и $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = 0$ выполняется неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \psi(g_j^{-1} g_i) \geqslant 0$.

У.п.о. функцию ψ будем называть нормированной, если $\psi(e)=0$. Пусть φ – п.о. функция. Тогда функция $\psi(g)=\varphi(g)-\varphi(e)$ является нормированной у.п.о. функцией. Функции такого вида будем называть тривиальными. Имеет место простой критерий тривиальности у.п.о. функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. [11] У.п.о. функция является тривиальной тогда и только тогда, когда она ограничена. Для доказательства потребуются следующие леммы.

ЛЕММА I. [12] Пусть G локально-компактная группа и $\varphi \in \mathcal{E}(G)$. Предположим, что существует $\delta > 0$, такое, что $\operatorname{Re}\varphi(g) \geqslant \delta > 0$ для всех $g \in G$. Тогда в разложении функции φ по чистым $\varphi = \int\limits_{\mathcal{P}(G)} d\mu$ тривиальная функция $\mathbb{1}(g) \equiv 1$ имеет ненулевой вес, т.е. $\mu(\mathbb{1})>0$. Доказательство см. в [12] .

ЛЕММА 2. Пусть ψ – у.п.о. функция. Предположим, что $\psi(g)=\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(\varphi_n(g)-1)$ $(\varphi_n \in \mathcal{E}(G),\ \lambda_n \to \infty)$ и функция ψ ограничена. Тогда, начиная с некоторого n, в разложении φ_n по чистым $\varphi_n = \int\limits_{\mathcal{P}(G)} d\mu_n$ тривиальная функция $\mathbb{1}$ имеет ненулевой вес.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(g)=\lambda_n(\varphi_n(g)-1)+\alpha_n(g)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Начиная с некоторого номера n, функция $\varphi_n = 1 + \frac{1}{\lambda_n}(\psi - \alpha_n)$ отделена от нуля, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{Re}\varphi_n(g) \geqslant \delta > 0$ $(g \in G)$. По лемме I имеем $\mu_n(\mathbb{1})>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ I. Необходимость условия очевидна. Пусть функция ψ ограничена и $\varphi_t = \exp t\psi$. Тогда функция φ_t отделена от нуля для всех t и по лемме I в разложении $\varphi_t = \int\limits_{\mathcal{P}(G)} d\mu_t$ по крайним точка $\mathbb{1}$ имеет ненулевой вес, т.е. $\lambda_t = \mu_t(\mathbb{1}) > 0$. Положим $\varphi_t^{(1)} = \frac{1}{1-\lambda_t} \int\limits_{\mathcal{P}\setminus\mathbb{1}} d\mu_t$. Тогда $\varphi_t = \lambda_t \cdot \mathbb{1} + (1-\lambda_t)\varphi_t^{(1)}$ и $\psi = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi_t - 1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\lambda_t}{t}(\varphi_t^{(1)}-1)$. Отметим, что функция $\varphi_t^{(1)}$ не содержит $\mathbb{1}$ в разложении по чистым. Можно считать, что существует предел $\lim\limits_{t\to 0} \lambda_t = \lambda$. Если $\lambda \neq 1$, то $\psi = (1-\lambda)\lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi_t^{(1)}-1}{t}$ и по лемме 2 функция ψ неограничена, следовательно, $\lambda=1$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\lambda_t}{t} = \gamma$. Если $\gamma = \infty$, то функция $\psi = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\lambda_t}{t}(\varphi_t^{(1)}-1)$ неограничена по лемме 2 и, следовательно, $\gamma<\infty$. Таким образом имеем $\psi=\gamma(\varphi-1)$, где $\varphi=\lim\limits_{t\to 0}\varphi_t^{(1)}$ и $\gamma=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\lambda_t}{t}$.

СЛЕДСТВИЕ. В обозначениях доказательства предложения I имеем

$$\mu_t(\mathbb{1})=1-\gamma t+{}_{o}(t).$$

Непрерывные у.д.о. функции образуют выпуклый конус, который обозначим через $CL(G)$. Подконус нормированных у.п.о. функций обозначим через $CL(G)$. Конусы $\widetilde{CL}(G)$ и $GL(G)$ замкнуты в сильной топологии. Основная роль конуса $CL(G)$ вскрывается простым предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Конус $CL(G)$ является касательным конусом к пространству $\mathcal{E}(G)$ в точке $\mathbb{1}$.

Доказательство см. в [2], [5].

СЛЕДСТВИЕ. Тривиальные у.п.о. функции плотны в $CL(G)$.

Нам потребуется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\psi\in CL(G)$, то выполняются неравенства

I. $|\psi(h^{-1}g)-\psi(g)-\psi(h^{-1})|^2\leqslant \operatorname{Re}\psi(g)\operatorname{Re}\psi(h)$.

2. $\operatorname{Re}\psi(gh)+\operatorname{Re}\psi(gh^{-1})+2\operatorname{Re}\psi(h)\leqslant\operatorname{Re}\psi(g)$

3. $|\psi(gh)|\leqslant|\psi(g)|+|\psi(h)|+\sqrt{\operatorname{Re}\psi(g)\operatorname{Re}\psi(h)}$.

Доказательство см. в [5].

§ 2. Компактно порожденные группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется компактно порожденной, если существует компактное множество $K\subset G$ такое, что $G=\bigcup\limits_n K^n$.

В этот класс групп входят все связные локально компактные группы. в частности, связные группы Ли, дискретные группы с конечным числом образующих и другие. Зафиксируем какой-либо порождающий компакт $K\subset G$. Можно считать, что мера Хаара компакта равна 1. Положим $C_0=\{\psi\in\widetilde{CL}(G):\psi(e)\leqslant 0,\ \operatorname{Re}\int\limits_K\psi(g)\,dg=-1\}$. Легко видеть, что множество C_0 является основанием конуса $\widetilde{CL}(G)$. Следующая лемма является основной.

ЛЕММА 3. Пусть G компактно порожденная группа. Существует константа N такая, что $\sup\limits_{\psi\in C_0}\sup\limits_{g\in K}|\operatorname{Re}\psi(g)|\leqslant N$.

Доказательство имеется в [5].

Морфизм $\gamma: G\to R$ будем называть аддитивным характером. Далее под G понимается связная группа Ли или дискретная группа с конечным числом образующих.

ЛЕММА 4. Если группа G не имеет аддитивных характеров, то существует константа M такая, что $\sup\limits_{\varphi\in C_0}\sup\limits_{g\in K}|\operatorname{Im}\varphi(g)|\leq M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть G дискретная группа с конечным числом образующих $g_1,\dots,g_n$. Предположим, что существует последовательность $\varphi_K\in C_0$, такая что $\sup\limits_{1\leq i\leq n}|\operatorname{Im}\varphi_K(g_i)|=M_K\to\infty$. Тогда последовательность функций $\frac{\varphi_K}{M_K}$ относительно компакта в $GL(G)$ в силу леммы 3, неравенства $\sup\limits_{K}\sup\limits_{i}\left|\frac{\operatorname{Im}\varphi_K(g_i)}{M_K}\right|\leq 1$ и третьего неравенства из предложения 3. Следовательно, существует подпоследовательность $\frac{\varphi_{K_i}}{M_{K_i}}$, имеющая предел $\varphi_0\in CL(G)$, отличный от нуля, так как $\sup\limits_{1\leq i\leq n}\left|\frac{\varphi_K(g_i)}{M_K}\right|=1$ для всех K. Функция φ_0 является чисто мнимой, так как $\left|\frac{\operatorname{Re}\varphi_K(g_i)}{M_K}\right|\leq\frac{N}{M_K}\to 0$. по лемме 3, т.е. φ_0 нетривиальный аддитивный характер на G, что противоречит условию.
б) Пусть G - связная группа Ли, $\varphi\in C_0$ и $f=\operatorname{Im}\varphi$. Тогда из предложения 3 и леммы 3 следует, что $|f(gh)-f(g)-f(h)|^2\leq\operatorname{Re}\varphi(g)\operatorname{Re}\varphi(h)\leq$ $\leq N^2$ для всех $g,h\in K$. Рассмотрим группу $H^2(G)=Z^2(G)/B^2(G)$ вторых когомологий на G со значениями в единичном представлении в R, где $Z^2(G)$ $(B^2(G))$ - группа (тривиальных) 2 - коциклов на G со значениями в единичном представлении, снабженная топологией равномерной сходимости на компактах (см. [3]). Известно, что в этом случае группа $H^2(G)$ конечномерна (см. [3] , следствие 7.3, стр.224) и топология в $H^2(G)$ отделима (там же, предложение 2.4, стр.188). Следовательно, подпространство $B^2(G)$ замкнуто в $Z^2(G)$. Это означает, что кограничное отображение $\delta: f\to\delta f(g,h)=f(gh)-f(g)-f(h)$ взаимно однозначно (G не имеет аддитивных характеров) и имеет замкнутый образ. По теореме об открытом отображении оператор δ обратим, так как пространство $Z^2(G)$ полно и метризуемо. Следовательно, поскольку множество $\{\delta f: f=\operatorname{Im}\varphi,\varphi\in C_0\}$ ограничено в $Z^2(G)$, то и множество $\{f: f=\operatorname{Im}\varphi,\varphi\in C_0\}$ - ограничено, т.е. существует константа M такая, что $\sup\limits_{\varphi\in C_0}\sup\limits_{g\in K}|\operatorname{Im}\varphi(g)|\leq M$.

СЛЕДСТВИЕ. Существует ограниченная на каждом компакте в G положительная функция f_0 такая, что для любой $\varphi_0\in C_0$ выполняется неравенство $|f(g)|\leq f_0(g)$ для любого $g\in G$.

В этом параграфе мы будем считать, что группа G не имеет аддитивных характеров. В этом случае геометрия конуса $CL(G)$ наиболее простая, так как он не содержит прямых. Введем в конусе $\widetilde{CL}(G)$ новую топологию, которую будем называть слабой. Рассмотрим пространства $L^1_{f_0}(G)=\{f:\int|f(g)|f_0(g)\,dg<\infty\}$ и $L^\infty_{f_0}(G)=\{h: \operatorname{es\,sup}\left|\frac{h(g)}{f_0(g)}\right|<\infty\}$. Пространство $L^\infty_{f_0}(G)$ является сопряженным к $L^1_{f_0}(G)$, и спаривание задается, как обычно, формулой

$\langle f,h\rangle=\int f(g)\,h(g)\,dg$. По следствию из леммы 4 конус $\widetilde{CL}(G)$ вкладывается в пространство $L^{\infty}_{f_0}(G)$. Топологию на $\widetilde{CL}(G)$, порожденную двойственностью $(L^{\infty}_{f_0}(G), L^{1}_{f_0}(G))$ будем называть слабой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Конус $\widetilde{CL}(G)$ замкнут в $L^{\infty}_{f_0}(G)$ в слабой топологии. Доказательство проводится точно также, как и для п.о. функций (см., например, в [5] , [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Основание C_0 компактно в слабой топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, множество C_0 выпукло и ограничено. Множество C_0 слабо замкнуто, так как функционал $\ell(\varphi)=-\mathrm{Re}\int_K\varphi(g)\,dg$ непрерывен, а условие $\varphi(e)\leqslant 0$ эквивалентно для у.п.о. функций условию $\mathrm{Re}\,\varphi(g)\leqslant 0$, так как $\mathrm{Re}\,\varphi(g)\leqslant\varphi(e)$. По теореме Банаха множество C_0 слабо компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. На множестве $C_0\cap CL(G)$ слабая топология эквивалентна сильной.

Доказательство см. в [5] .

ТЕОРЕМА I. Пусть G - связная группа Ли, не имеющая аддитивных характеров. Тогда конус $CL(G)$ имеет компактное в слабой топологии основание.

Доказательство прямо следует из предложений 5 и 6.

У.п.о. функцию будем называть чистой, если она лежит на экстремальном луче конуса

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Множество чистых тривиальных у.п.о. функций из C_0 плотно в множестве $ex\,C_0$ всех экстремальных точек C_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию из предложения 2 тривиальные у.п.о. функции всюду плотны в C_0 в сильной, а значит, и в слабой топологии. Следовательно, замыкание выпуклой оболочки тривиальных чистых у.п.о. функций из C_0 совпадает с C_0 . Отсюда уже следует, что множество всех экстремальных точек из C_0 лежит в замыкании тривиальных экстремальных у.п.о. функций из C_0 (см. [I3] стр.I3).

Среди чистых экстремальных у.п.о. функций из C_0 есть лишь одна не нормированная функция $\varphi_0(g)\equiv -1$; все остальные лежат в $CL(G)$. Из предложений 6 и 7 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G - связная группа Ли, не имеющая характеров. Тогда всякая чистая нетривиальная у.п.о. функция равномерно на компактах аппроксимируется чистыми тривиальными у.п.о. функциями.

Применяя теорему Шоке о разложении (см. [I3]) к основанию C_0 , получаем теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть G - связная группа Ли, не имеющая аддитивных характеров, и $\varphi\in CL(G)$. Тогда функция φ единственственным образом представима в виде $\psi=\psi_0+\psi_1$, причем I) существует конечная мера γ_0, сосредоточенная на множестве $\mathcal{P}(G)\setminus\mathbb{1}$, такая что $\psi_1(g)=\int_{\mathcal{P}(G)\setminus\mathbb{1}}(\varphi(g)-1)\,p(\varphi)\,d\nu_1(\varphi)$, где $p(\varphi)=|1-\int_K\varphi(g)\,dg|^{-1}$, 2) существует конечная мера ν_0, сосредоточенная на множестве нетривиальных экстремальных точек основания C_0 и представляющая ψ_0. Функция ψ_0 имеет интегральное представление $\psi_0(g)=\lim_{n\to\infty}\int_{U_n}(\varphi(g)-1)\,d\nu_n(\varphi)$, где $\{U_n\}$- база окрестностей точки $\mathbb{1}$ в $\mathcal{P}(G)$, а $\{\nu_n\}$ последовательность конечных мер, такая что $\operatorname{supp}\nu_n\subset U_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что функция ψ принадлежит основанию C_0. По теореме Шоке [I3] существует конечная мера ν, сосредоточенная на $ex\,C_0$ и такая, что $\psi=\int_{ex\,C_0}d\nu$. Функция $\psi_0(g)\equiv-1$ имеет нулевой вес, так как функция ψ нормированная. Положим $ex\,C_0=B_0\cup B_1$, где B_1 - множество тривиальных у.п.о. функций из $ex\,C_0$ и $B_0=ex\,C_0\setminus B_1$. Положим $\psi_i=\int_{B_i}d\nu$ $(i=1,2)$. Если $\chi\in B_1$, то $\chi(g)=p(\varphi)(\varphi(g)-1)$ и $\varphi\in\mathcal{P}(G)$. Обозначим через ν_1 проекцию меры $\nu|_{B_1}$ на $\mathcal{P}(G)$. Тогда $\psi_1=\int_{\mathcal{P}(G)}(\varphi-1)\,p(\varphi)\,d\nu_1$. Обозначим через $C_{on}(B_0)$ замкнутый выпуклый конус, порожденный множеством B_0 (функции из $C_{on}(B_0)$ называются существенно нетривиальными). Тогда для любой окрестности U_n точки $\mathbb{1}$ в $\mathcal{P}(G)$ конус $C_{on}(U_n)$, порожденный U_n, содержит конус $C_{on}(B_0)$. Действительно, в силу теоремы 2 каждая точка из B_0 является касательным вектором к $\mathcal{P}(G)$ в точке $\mathbb{1}$. Значит, для всякого n существует тривиальная функция ψ_n вида $\psi_n=\int_{U_n}(\varphi-1)\,d\nu_n(\varphi)$, которая аппроксимирует ψ_0.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Теорема 2 означает, что всякая чистая нетривиальная у.п.о. функция есть производная семейства чистых состояний, идущих в $\mathbb{1}$. Это доказывает гипотезу А.М.Вершика [5]. Для групп, имеющих аддитивные характеры это, вообще говоря, не так. 2. Теоремы I и 2 были доказаны в [5] для вещественных у.п.о. функций на произвольной компактно порожденной группе. Теорема 3 (вместе с доказательством) остается справедливой для вещественных у.п.о. функций на произвольной компактно порожденной группе. Для вещественных сферических у.п.о. функций на полупростой группе Ли теорема 3 была доказана Ганголли [7] другими методами и без указания нормировки $p(\varphi)$.

§ 3. Обобщенная формула Леви-Хинчина. Общий случай.

Пусть G - произвольная связная группа Ли. Обозначим через $A(G)$ пространство аддитивных характеров G, т.е. морфизмов $\chi: G\to R$. Множество $G_0=\{g\in G:\chi(g)=0,\ \chi\in A(G)\}$ является замкнутым нормальным делителем в G. Имеет место точная последовательность $1\to G_0\to G\to R^n\to 0$, причем группа G_0 уже не имеет аддитивных характеров. Выберем в пространстве $A(G)$ базис $\chi_1,\dots,\chi_n$. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, а $\mathfrak{g}_0\subset\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G_0. Выберем в дополнении к $\mathfrak{g}_0$ в $\mathfrak{g}$ базис $X_1,\dots,X_n$, двойственный к $\chi_1,\dots,\chi_n$, т.е. такой, что $\chi_i(\exp X_j)=\delta_{ij}$. Обозначим через K_0 порождающий компакт группы G_0 и будем считать, что мера Хаара (относительно G_0) компакта K_0 равна 1. Тогда множество $K=K_0\cup\{\exp tX_i, t\in[0,1], i=1,\dots,n\}$ есть порождающий компакт для G. Более того, для достаточно больших m множество K^m является компактной окрестностью в G. Положим $\ell_0(\psi)=\mathrm{Re}\int_{K^m}\psi(g)\,dg$, $\int_0 \mathrm{Im}\,\psi(\exp tX_j)\,dt=s_j(\psi)$ $(j=1,\dots,n)$ и $C=\{\psi\in\widetilde{CL}(G):\psi(e)\leqslant 0,\ \ell_0(\psi)=-1,\ s_i(\psi)=0, i=1,\dots,n\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если $\psi\in\widetilde{CL}(G)$, то существуют числа $\lambda_i\in R$ $(i=0,1,\dots,n)$ такие, что функция $\lambda_0\psi+i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\chi_j\in C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $\lambda_0=|\sum_{i=1}^{n}\ell_i(\psi)|^{-1}$ и $\lambda_i=-2\lambda_0 s_i(\psi)$ $(i=1,\dots,n)$.

ЛЕММА 5. Существует константа M такая, что

$$\sup_{\psi\in C}\sup_{g\in K}|\psi(g)|\leqslant M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3 и 4 следует, что существует константа M_0 такая, что $\sup_{\psi\in C}\sup_{g\in K_0}|\psi(g)|\leqslant M_0$. Из работы Иогансо на [8], где эта лемма доказана для $G=R$, следует, что существуют константы M_i такие, что $\sup_{t\in[0,1]}|\psi(\exp tX_i)|\leqslant M_i$. Для завершения доказательства достаточно положить $M=\sup_{0\leqslant i\leqslant n}M_i$.

СЛЕДСТВИЕ. Существует ограниченная на каждом компакте G положительная функция f_0 такая, что для любой $\psi\in CL(G)$ существует $c\in R$ такая, что $|\psi(g)|\leqslant cf_0(g)$ для всех $g\in G$.

Точно также, как и в § 2 рассмотрим пространства $L^1_{f_0}(G)$ и $L^\infty_{f_0}(G)$ и введем в конусе $\widetilde{CL}(G)$ слабую топологию, порожденную двойственностью $(L^\infty_{f_0}(G), L^1_{f_0}(G))$. Следующие утверждения аналогичны предположениям 4–7 из § 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Конус $\widetilde{CL}(G)$ слабо замкнут в $L^\infty_{f_0}(G)$ Множество C является слабо выпуклым компактом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Множество экстремальных точек из C вида $\psi(g)=\lambda(\varphi(g)-1-i\chi(g))$ $(\varphi\in\mathcal{E}(G),\chi\in A(G))$ плотно в множестве $\mathrm{ex}\,C$ всех экстремальных точек в слабой топологии.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – связная группа Ли. Имеет место разложение конуса $\widetilde{CL}(G)$ в прямую сумму $\widetilde{CL}(G)=L_0\oplus L_1$, где конус L_0 естественно изоморфен пространству аддитивных характеров $A(G)$, а конус L_1 имеет компактное в слабой топологии основание

Также, как и в § 2, применяя к конусу $\widetilde{CL}(G)$ теорему Шоке, получаем интегральное представление для у.п.о. функций.

ТЕОРЕМА 5. (обощенная формула Леви-Хинчина) Пусть G – связная группа Ли и $\psi \in CL(G)$. Тогда функция ψ единственным образом представима в виде $\psi = i\chi + \psi_0 + \psi_1$, причем I) $\chi \in A(G)$ и $\lambda(\psi - i\chi) \in C$, 2) существует конечная мера ν_1 , сосредоточенная на множестве $\mathcal{P}(G) \setminus 1$ такая, что $\psi_1(g) = \int_{\mathcal{P}\setminus 1} [\varphi(g) - 1 - i\chi(\varphi, g)] p(\varphi)\, d\nu_1(\varphi)$, где $p(\varphi) = |\ell_0(\varphi - 1)|^{-1}$, а $\chi(\varphi, g) = \sum_{i=1}^{n} 2 s_i(\varphi - 1)\chi_i(g)$,
3) существует конечная мера, сосредоточенная на множестве нетривиальных точек из C и представляющая ψ_0. функция ψ_0 допускает представление в виде $\psi_0(g) = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} [\varphi(g) - 1 - i\chi(\varphi, g)]\, d\nu_n(\varphi)$, где $\{U_n\}$- база окрестностей точки 1 в $\mathcal{P}(G)$ и $\{\nu_n\}$ последовательность конечных мер такая, что $\mathrm{supp}\, \nu_n \subset U_n$. Каждая нетривиальная экстремальная функция из C равномерно аппроксимируется тривиальными экстремальными функциями вида $\psi(g) = [\varphi(g) - 1 - i\chi(\varphi, g)]\, p(\varphi)$.

ОБОБЩЕНИЕ. Инвариантные у.п.о. функции. Пусть $H \subset G$ замкнутая подгруппа. У.п.о. функция ψ на G называется H - сферической, если $\psi(h_1 g h_2) = \psi(g)$ для всех $g \in G, h_1, h_2 \in H$. Конус всех H - сферических у.п.о. функций обозначим через $\widetilde{CL}(G)$. У.п.о. функция ψ называется центральной, если она постоянна на классах сопряженных элементов в G . Конус всех центральных у.п.о. функций обозначим через $\widetilde{CL}_c(G)$. Оба конуса $\widetilde{CL}_H(G)$ и $\widetilde{CL}_c(G)$ замкнуты в $\widetilde{CL}(G)$ и для них справедливы все результаты § 2. Более того, в некоторых случаях, эти результаты остаются верными для групп, не являющихся компактно порожденными (см.пример 4 в § 4).

§ 4. Примеры

I. Рассмотрим классический случай $G = R$ [8] . Известно, что чистые состояния на G имеют вид $\varphi_t(x) = e^{itx}$ $(t, x \in R)$. Вычисляя нормирующие множители $p(t)$ и $s(t)$, получим $p(t) = |1 - \int_0^1 \cos tx\, dx|^{-1} = \frac{t}{t - \sin t}$ и $s(t) = 2\int_0^1 \sin tx\, dx = \frac{2(1-\cos t)}{t}$. Заметим, что при $t \to 0$ $p(t)$ эквивалентно $\frac{6(1+t^2)}{t^2}$ и $s(t)$ эквивалентно $\frac{t}{1+t^2}$. Заменив в теореме 5 множители $p(t)$ и $s(t)$ на эквивалентные, получим классическую формулу Леви-Хинчина $\varphi(x) = iax - \frac{bx^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+t^2}) \frac{1+t^2}{t^2}\, d\nu(t)$ $(a \in R, b \geqslant 0)$. Гауссовская компонента $\psi_0(x) = -\frac{x^2}{2}$ вычисляется из предложения I0 как предел $\psi_0(x) = \lim_{t\to 0} (\varphi_t(x) - 1 - \frac{itx}{1+t^2}) \frac{1+t^2}{t^2}$.

2. Если $G = R^n (n > 1)$, то чистые состояния задаются формулой

$\varphi_b(x)=e^{i\langle b,x\rangle}$, где $b,x\in R^n$ и $\langle b,x\rangle=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. Нормирующие множители вычисляются также, как и в примере I. Получим $p(b)=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i-\sin b_i}{b_i}\right|^{-1}$ и $s_i=\frac{2(1-\cos b_i)}{b_i}$. Заменив $p(b)$ и $s_i(b)$ на эквивалентные при $b\to 0$, получим классическую формулу

$$\psi(x)=i\langle a,x\rangle-\frac{b|x|^2}{2}+\int_{R^n}\left[e^{i\langle b,x\rangle}-1-\frac{i\langle b,x\rangle}{1+|b|^2}\right]\frac{1+|b|^2}{|b|^2}\,d\nu(b),$$

где $a\in R^n$, $b\geq 0$ и $|x|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. Пусть G группа движений n - мерного евклидова пространства R^n $(n>1)$ и $H=SO(n)$ - подгруппа вращений в R^n. Получим интегральное представление для H - сферических у.п.о. функций на G. Для простоты рассмотрим случай $n=2$. Будем записывать элементы группы G с помощью углов Эйлера $g=g(r,\varphi,\alpha)$, где α - угол поворота, а r и φ - модуль и аргумент вектора сдвига [I4]. Известно, что чистые сферические функции задаются формулой $\varphi_t(g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{itr\cos(\psi-\varphi)}\,d\psi=J_0(tr)$, где J_0 - функция Бесселя. Пространство двойных классов смежности $H\backslash G/H$ есть луч $l=(0,\infty)$, а проекция меры Хаара на l равна $r\,dr$. Нормировка $p(t)$ задается формулой $p(t)=\int_0^1(J_0(tr)-1)\,r\,dr\sim\frac{1+t^2}{t^2}$ при $t\to 0$. По теореме 3 для сферических у.п.о. функций имеем представление

$$\varphi(g)=\psi(r)=-ar^2+\int_0^\infty(J_0(tr)-1)\frac{1+t^2}{t^2}\,d\nu(t)\qquad(a>0).$$

Формулы Леви-Хинчина для сферических у.п.о. функций на классических группах получены Ганголли другими методами [7].

4. Рассмотрим группу S_∞ всех финитных подстановок натурального ряда. Группа S_∞ не является компактно порожденной, однако, можно описать все центральные у.п.о. функции на S_∞. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots)$, $\beta=(\beta_1,\dots)$, $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\dots$, $\beta_1\geq\beta_2\geq\dots\geq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i+\beta_i)\leq 1$. Известно, что каждая неразложимая центральная п.о. функция имеет вид $\varphi_{\alpha,\beta}(\sigma)=\prod_{n\geq 2}s_n^{r_n(\sigma)}$, где $s_n=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^n+(-1)^n\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^n$ и $r_n(\sigma)$ - число циклов длины n в подстановке σ. [I5]. Набор чисел $\{r_n(\sigma)\}$ является единственным инвариантом класса сопряженных элементов в S_∞. Отметим, что все инволюции $\sigma=(ij)$ лежат в одном классе сопряженных элементов и порождают группу S_∞. Рассмотрим множество $C=\{\psi\in\widetilde{CL}_c(S_\infty):\psi(i,j)=-1\}$. Легко видеть, что множество C является основанием в конусе $\widetilde{CL}_c(S_\infty)$ всех центральных у.п.о. функций на S_∞. Аналог леммы 3 в этом случае очевиден. В качестве функции f_0 можно взять, например, функцию $f_0(\sigma)=n^2$, если $\sigma\in S_n\backslash S_{n-1}$ так как в этом случае подстановку σ можно разложить в произведение менее n^2 транспозиций. Для конуса $\widetilde{CL}_c(S_\infty)$ остаются верными все результаты § 2. В частности, легко показать, что

конус $\widetilde{CL}_c(S_\infty)$ имеет единственный нетривиальный экстремальный луч, порожденный функцией $\psi_0(\sigma)=-\sum\limits_n \chi_n(\sigma)n$ – число подвижных элементов. Формула Леви–Хинчина в этом случае имеет вид $\psi(\sigma)= =-a\sum\limits_n \chi_n(\sigma)\cdot n+\int(\varphi_{\alpha,\beta}-1)\frac{1}{|\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2-\beta_i^2-1|}\,d\nu(\alpha,\beta)$, где ν конечная мера, сосредоточенная на множестве наборов (α,β) без массы в точке $\alpha_0=(1,0,\ldots)$, $\beta_0=(0,\ldots,0,\ldots)$.

§ 5. Коциклы со значениями в унитарных представлениях и условно положительно определенные функции.

Пусть π – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H. Отображение $\beta: G\to H$ называется 1-коциклом, если $\beta(g_1g_2)=\beta(g_1)+\pi(g_1)\beta(g_2)$ для всех $g_1,g_2\in G$. Коциклы вида $\beta(g)=\pi(g)h-h\ (h\in H)$ называются тривиальными. Обозначим через $Z^1(G,\pi)$ – группу 1 – коциклов на G со значениями в π, а через $B^1(G,\pi)$ – подгруппу тривиальных коциклов. Фактогруппа $H^1(G,\pi)=Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi)$ называется группой первых когомологий на G со значениями в π. Коцикл $\beta: G\to H$ называется тотальным, если множество $\{\beta(g),\ g\in G\}$ тотально в H. Два коцикла $\beta_i: G\to H_i\ (i=1,2)$ называются эквивалентными, если существует унитарный оператор $A\in \mathrm{Hom}_G(H_1,H_2)$ такой, что $A\beta_1=\beta_2$. Пусть $\beta: G\to H$ 1 – коцикл со значениями в π. Легко проверить, что функция $\psi_\beta(g)=-\frac{\|\beta(g)\|^2}{2}$ является нормированной у.п.о. функцией, а функция $s_\beta(g,h)=\mathrm{Im}\langle\beta(g),\beta(h^{-1})\rangle$ является эрмитовым 2-коциклом на G со значениями в единичном представлении в R. Предположим, что 2-коцикл s_β тривиален (коцикл β в этом случае называется правильным), т.е. существует функция $f_\beta: G\to R$ такая, что $s_\beta(g,h)=f(gh)-f(g)-f(h)$. Тогда функция $\varphi_\beta=\psi_\beta+if_\beta$ является у.п.о. функцией. Ядро кограничного отображения $\delta: f\to\delta f(g,h)=f(gh)-f(g)-f(h)$ состоит из аддитивных характеров группы G. Существует замечательное соответствие между I-коциклами на G со значениями в унитарных представлениях и у.п.о. функциями.

ТЕОРЕМА 6. Соответстствие $\beta\to\psi_\beta+if_\beta$ является взаимно однозначным между классами эквивалентных тотальных правильных I-коциклов и нормированными у.п.о. функциями, определенными с точностью до аддитивного характера. При этом тривиальным коциклам в неприводимых представлениях – чистые у.п.о. функции.

Доказательство использует обобщение конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала. Рассмотрим векторное пространство дискретных мер на G нулевой массы $H_0=\{\mu:\mu=\sum c_i\delta_{g_i},\ g_i\in G,\ c_i\in C,\ \sum\limits_i c_i=0\}$ со скалярным произведением, задаваемым формулой $\langle\mu,\mu'\rangle=\sum c_i\bar{c}_j\psi(g_j^{-1}g_i)$

($\mu = \sum c_i \delta_{g_i}$, $\mu' = \sum c_i' \delta_{g_i}$, $\mu, \mu' \in H_0$) . Действие группы G на H_0 имеет вид $\pi_\psi(g)\delta_h = \delta_{g^{-1}h}$, а функция $\beta_\psi(g) = \delta_g - \delta_e$ является I-коциклом на G со значениями в π_ψ и отвечает у.п.о. функции ψ (см. [3-5]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Наиболее просто это соответствие выглядит для вещественных I-коциклов, т.е. для которых $S_\beta \equiv 0$. Во многих вопросах теории когомологий достаточно рассматривать лишь вещественные коциклы (см. [5]).

Следующие утверждения, используя соответствие, задаваемое теоремой 6, прямо следуют из уже доказанных утверждений § I-3. Из предложения I вытекает хорошо известный критерий тривиальности I-коцикла со значениями в унитарном представлении [3] , [I6] , [II] .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ П. Коцикл $\beta : G \to H$ в унитарном представлении π тривиален тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. $\sup\limits_{g \in G} \|\beta(g)\| < \infty$.

Следующая важная в теории когомологий теорема прямо следует из теоремы 2, верной для вещественных у.п.о. функций на произвольной компактно порожденной группе [5] .

ТЕОРЕМА 6. ([5]) Пусть $\beta : G \to H$ - нетривиальный I-коцикл на компактно порожденной группе G со значениями в унитарном неприводимом представлении π . Тогда существует последовательность тривиальных I-коциклов β_n со значениями в неприводимых представлениях π_n , действующих в пространствах H_n , такая, что

$$\|\beta(g)\| = \lim_{n \to \infty} \|\pi_n(g)h_n - h_n\| = \lim_{n \to \infty} \|\beta_n(g)\| \qquad (h_n \in H_n)$$

Литература

I. Araki H. Factorisoble representations of current algebra. - Publ.Res.Inst.Math.Sci., Kyoto Univ., 1970, v.5, p.361-422.

2. Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И. Представления группы SL(2,R), где R - кольцо функций. - Усп.матем.наук, I973, т.28, № 5, с.83-I28.

3. Guichardet A. Cohomologie des Groupes topologiges et des algèbres de Lie-Textes Math., n.2, Paris, 1980.

4. Delorme P. cohomologie des groupss localement compacts et produits tensoriels continus de réprésentations, Thése de 3me cycle, Paris, 1975.

5. Вершик А.М., Карпушев С.И. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно

положительно определенные функции. - Матем.сб., I982, № I2

6. Parthasarathy K.R., Schmidt K. Positive definite Kernels,Continious Tensor Products and Central limit theorems of probability theory.- Lect Notes Math., 1972,v.272.
7. Gangolli R. Positive definite kernels on homogeneous spaces. - Annales IHES, 1967, v.111, N 2.
8. Johansen S. An application of extreme-point methods to the representation of infinitely divisible distributions. Z.Wahrscheinlichkeits theorie verw.Geb., 1966, N5,p.304-316.
9. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложение случайных величин и векторов. М., I972.
10. Диксмье Ж. C^*- алгебры и их представления. М., I974.
11. Карпушев С.И. О неприводимости мультипликативного интеграла. - Вестник ЛГУ, I98I, № 7, с.37-42.
12. Каждан Д.А. О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп. - Функц.анализ, I967, т.I, № I, с.7I-74.
13. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке. М., I968.
14. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., I965.
15. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор представления бесконечной симметрической группы. - Докл.АН СССР, I98I, т.257, № 5, с.389-392.
16. Johnson B. Cohomology in Banach algebras. - Memoirs Am.Math. Soc., 1972, v.127.

А.И.Бобенко

УРАВНЕНИЕ ЛАНДАУ-ЛИФШИЦА. ПРОЦЕДУРА "ОДЕВАНИЯ". ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ.

I. Уравнение Ландау-Лифшица

$$\vec{S}_t=[\vec{S}\times\vec{S}_{xx}]+[\vec{S}\times J\vec{S}],\quad S_1^2+S_2^2+S_3^2=1, \qquad (I)$$

$$J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,J_3),\quad J_1<J_2<J_3$$

описывает нелинейную динамику анизотропного ферромагнетика в отсутствие внешнего поля.

Е.К.Склянин [I] и А.Е.Боровик [2], независимо друг от друга, установили, что уравнение (I) является условием совместности системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=U\Psi,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial t}=V\Psi,\quad U=-i\sum_{\alpha=1}^{3}S_\alpha w_\alpha(u)\sigma_\alpha,$$

$$V=2iw_1(u)w_2(u)w_3(u)\sum_{\alpha=1}^{3}S_\alpha\sigma_\alpha w_\alpha^{-1}(u)-i\sum_{\alpha=1}^{3}w_\alpha(u)\sigma_\alpha[\vec{S}\times\vec{S}_x]_\alpha,$$

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

$$w_1(u)=\rho\frac{1}{\mathrm{sn}(u,k)},\quad w_2(u)=\rho\frac{\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)},\quad w_3(u)=\rho\frac{\mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{sn}(u,k)},$$

$$k=\sqrt{\frac{J_2-J_1}{J_3-J_1}},\quad \rho=\frac{1}{2}\sqrt{J_3-J_1},\quad w_\alpha^2-w_\beta^2=-\frac{1}{4}(J_\alpha-J_\beta).$$

Е.К.Склянин также показал, что уравнение (I) описывает вполне интегрируемую гамильтонову систему, и вычислил бесконечную серию коммутирующих интегралов движения. Однако, до последнего времени точные решения уравнения Ландау-Лифшица удавалось получать либо прямыми методами, совсем не использующими алгоритма метода обратной задачи [3, 4], либо методами, использующими этот алгоритм лишь частично. Что касается последнего, то мы имеем ввиду работу [5], где строятся многосолитонные решения уравнения (I) по методу Хироты и работу [6], где те же решения находятся при помощи теории свободных фермионных полей.

Трудности в применении метода обратной задачи к уравнению (I) были связаны с отсутствием точной постановки той матричной задачи Римана, которая должна была бы отвечать эллиптическому пучку (2). Требуемая формулировка задачи Римана была найдена совсем недавно А.В.Михайловым и исследована им, а также Ю.А.Родиным, в работах [7], [8]. В частности, А.В.Михайловым был предложен алгоритм получения солитонных решений уравнения Ландау-Лифшица.

В настоящей работе мы, отталкиваясь от сформулированной А.В. Михайловым задачи Римана, развиваем альтернативную, к предложенной в [7], процедуру "одевания". Предлагаемый нами метод, представляет собой перенос на случай тора методики, первоначально разработанной для рациональных пучков в статьях [9], [10] и отличающейся, на наш взгляд, большой простотой и наглядностью. Отметим еще, что наш подход позволяет легко выделить и проклассифицировать все элементарные возбуждения, отвечающие полностью анизотропной модели ферромагнетика (I).

Как и в рациональном случае, процедура одевания для рассматриваемой нами задачи Римана тесно связана с преобразованиями Дарбу для уравнения Ландау-Лифшица. Общей теории этих преобразований для эллиптических пучков посвящена недавняя работа И.В.Чередника [II]. Существенное отличие методов работы [II] от предлагаемого нами элементарного подхода состоит в нетривиальном использовании идей алгебраической геометрии. Последнее обстоятельство, являясь безусловно выигрышным с общетеоретической точки зрения, сильно усложняет конкретные вычисления решений уравнения (I) по методу И.В.Чередника.

2. Мы начнем с формулировки регулярной задачи Римана для уравнения (I).

ТЕОРЕМА МИХАЙЛОВА. Пусть $\Psi(u)$ - двоякопериодическая ($4K$, $4iK'$ - периоды эллиптических функций Якоби модуля k), голоморфная вне точек $\{0\}$ ($\{u\} = \{u, u+2K, u+2iK', u+2K+2iK'\}$) обратимая матричная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\Psi(u) \underset{k\to\infty}{=} (\Phi + \Phi_1 k^{-1} + \ldots) \exp(-ikx\sigma_3 + 2ik^2 t\sigma_3) \qquad (3)$$

асимптотическое разложение при $u \sim 0$ / k^{-1} - локальный параметр.

$$\sigma_3 \Psi(u+2K)\sigma_3 = \Psi(u) \qquad (4)$$

$$\sigma_1 \Psi(u+2iK)\sigma_1 = \Psi(u) \qquad (5)$$

$\det \Psi(u)$ не зависит от x и t. (6)

(Отметим, что из редукций (4-5) следует, что функция $\Psi(u)$ имеет существенные особенности во всех точках $\{0\}$).

На торе задана система контуров Γ_i и матрицы сопряжения $G_i(u)$,

$$\Psi_-(u)=\Psi_+(u)G_i(u)\Big|_{u\in\Gamma_i} \text{ - задача сопряжения на } \Gamma_i \qquad (7)$$

Контура Γ_i и матрицы $G_i(u)$ должны быть подобраны так, чтобы условие (7) не противоречило редукциям (4-5).

Тогда условиями (3-7) функция Ψ определяется однозначно, а $\vec{S}=(S_1,S_2,S_3)$ такой, что

$$\sum_{\alpha} S_\alpha \sigma_\alpha=\Phi\sigma_3\Phi^{-1}, \qquad (8)$$

является решением уравнения Ландау-Лифшица (I). В том случае, если выполняется еще и редукция

$$\sigma_2\overline{\Psi(\bar{u})}\sigma_2=\Psi(u) \qquad (9)$$

вектор $\vec{S}$ имеет вещественные координаты.

Сформулируем теперь постановку задачи Римана с нулями [ж)]. В этом случае допускаются нули $\det\Psi(u)$ в фиксированных (не зависящих от x и t) точках $u_1,\ldots,u_{8N}$, причем функция $\Psi(u)$ в окрестности u_i должна иметь вид:

$$\Psi(u)\underset{u\sim u_i}{=}\hat{\Psi}(u)\begin{pmatrix}u-u_i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}C_i, \qquad (I0)$$

где C_i - обратимая матрица, не зависящая от x,t,u, $\hat{\Psi}(u)$ голоморфна и обратима в окрестности u_i . Условие (3) теперь заменяется на требование

$$\Psi(u)\underset{k\to\infty}{=}(\Phi+\Phi_1k^{-1}+\ldots)\exp(-ikx\sigma_3+2itk^2\sigma_3)k^N, \qquad (II)$$

гарантирующее равенство числа нулей и полюсов $\det\Psi$ . .

3. Опишем метод "одевания". Пусть у нас существует функция $\Psi_0(u)$, удовлетворяющая свойствам (3-9) или (4-II) (в дальнейшем это будет функция

$$\Psi_0(u)=\exp(-ix\sigma_3w_3(u)+2itw_1(u)w_2(u)\sigma_3),$$

отвечающая $\vec{S}=(0,0,1)$, хотя предлагаемым методом можно "одевать" любое затравочное решение). Новое решение задачи (4-II) будем искать в виде $\Psi=f(u,x,t)\Psi_0$, где f - матричнозначная функция, удовлетворяющая двум условиям:

[ж)] Начиная с этого места, мы перестаем следовать А.В.Михайлову и обращаемся к трактовке нулей $\det\Psi$ как "регулярных особенностей Ψ - функции" в духе работы [I0] .

а) она удовлетворяет редукциям (4-5, 9),

б) ее матричные элементы имеют полюса только в точках существенных особенностей функции Ψ_0, причем полюса M-го порядка.

Эти условия задают следующий вид функции $f/M=1/$:

$$f=(iaw_1(u)\sigma_1+ibw_2(u)\sigma_2+icw_3(u)\sigma_3+d), \qquad (12)$$

где a, b, c и d - вещественнозначные функции x и t, которые мы найдем из условия выполнения соотношений (10).

Условие (10) можно переписать (см. [10]) в более удобном виде

$$\Psi(u_i)\begin{pmatrix}1\\ c_i\end{pmatrix}=0, \qquad (13)$$

где c_i не зависит от x, t, u. Теперь посмотрим в каких точках расположены нули $\det\Psi=\det f$. Пусть $\det\Psi(u_0)=0$, тогда из редукций (4-5) следует, что $\{u_0\}$ - нули $\det\Psi$. Кроме того, прямо из вида (12) следует, что $\det f$ - четная функция по u поэтому $\{-u_0\}$ - также нули $\det\Psi$. Таким образом, мы знаем все 8 нулей функции $\det\Psi$. Для справедливости разложений (10) в точках $\{u_0\}$, $\{-u_0\}$ необходимо потребовать, чтобы

$$\Psi(u_0)\begin{pmatrix}1\\ A\end{pmatrix}=0,\ \Psi(-u_0)\begin{pmatrix}1\\ B\end{pmatrix}=0. \qquad (14)$$

Система (14) представляет собой линейную однородную систему из четырех уравнений относительно четырех неизвестных - a, b, c, d. Ранг этой системы, в силу четности $\det f$ равен 3. Тем самым, система (14) полностью определяет интересующие нас три величины a/d, b/d, c/d. Конкретные вычисления, связанные с системой (14), никакой проблемы, разумеется, не представляют.

Из равенств (8) и (12) следуют выражения для координат вектора $\vec{S}$:

$$S_1=\frac{2ca}{c^2+a^2+b^2},\ S_2=\frac{2bc}{c^2+a^2+b^2},\ S_3=\frac{c^2-a^2-b^2}{c^2+a^2+b^2}. \qquad (15)$$

Отметим, что теперь нам для получения выражений для $\vec{S}(x,t)$ не требуется заботиться о выполнении условия (6), т.к. его всегда можно выполнить простой перенормировкой Ψ - функции, относительно которой вектор $\vec{S}$ инвариантен.

Для того, чтобы выполнялась редукция (9), гарантирующая вещественность $\vec{S}$, необходимо потребовать, чтобы множество нулей $\det\Psi$ было инвариантно относительно комплексного сопряжения. Это условие позволяет найти все возможные положения нулей (отметим сразу, что в случае $\operatorname{Im} u_0 = 0$ нельзя получить вещественных a, b, c, d).

Случай I. $\operatorname{Im} u_0 = K_1' - K'$; $w_1(u_0) \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} w_2(u_0) = \operatorname{Re} w_3(u_0) = 0$.

I) Положим $B = 0, A = \pm i e^{\rho}$, $\rho \in \mathbb{R}$. Из равенств (I4, I5) получаем хорошо известные (см. [I]) выражения для солитона и антисолитона

$$S_1 = \pm \frac{2iw_2(u_0)}{\sqrt{J_2 - J_1}\, \operatorname{ch}(\xi x - \tau t - \Delta)}, \quad S_2 = \mp \frac{2w_1(u_0)}{\sqrt{J_2 - J_1}\, \operatorname{ch}(\xi x - \tau t - \Delta)},$$
$$S_3 = \operatorname{th}(\xi x - \tau t - \Delta), \quad \xi = 2iw_3(u_3), \quad \tau = 4iw_1(u_0)w_2(u_0). \qquad (I6)$$

2) $A = iA_0, B = iB_0$; $A_0, B_0 \in \mathbb{R}$, $A_0 B_0 < 0$.

В этом случае получаем решение с нулевым импульсом, описывающее процесс столкновения двух солитонов

$$S_1 = \pm \frac{2\mathcal{D}\, \operatorname{sh}\tau(t-t_0)\, \operatorname{sh}\xi(x-x_0)}{\operatorname{sh}^2\xi(x-x_0) + E^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)}$$

$$S_2 = \mp \frac{2E\, \operatorname{ch}\tau(t-t_0)\, \operatorname{sh}\xi(x-x_0)}{\operatorname{sh}^2\xi(x-x_0) + E^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)} \qquad (I7)$$

$$S_3 = \frac{\operatorname{sh}^2\xi(x-x_0) - E^2 - F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)}{\operatorname{sh}^2\xi(x-x_0) + E^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)},$$

где $E = \frac{w_3}{w_2}(u_0), \mathcal{D} = \frac{iw_3}{w_1}(u_0), F = \frac{1}{2}\sqrt{J_2 - J_1}\, \frac{w_3}{w_1 w_2}(u_0)$.

3) $A = iA_0, B = iB_0$; A_0; $B_0 \in \mathbb{R}$, $A_0 B_0 > 0$

Это столкновение солитона с антисолитоном

$$S_1 = \pm \frac{2\mathcal{D}\, \operatorname{ch}\tau(t-t_0)\, \operatorname{ch}\xi(x-x_0)}{\operatorname{ch}^2\xi(x-x_0) + \mathcal{D}^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)}$$

$$S_2 = \mp \frac{2E\, \operatorname{sh}\tau(t-t_0)\, \operatorname{ch}\xi(x-x_0)}{\operatorname{ch}^2\xi(x-x_0) + \mathcal{D}^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)} \qquad (I8)$$

$$S_3 = \frac{\operatorname{ch}^2\xi(x-x_0) - \mathcal{D}^2 - F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)}{\operatorname{ch}^2\xi(x-x_0) + \mathcal{D}^2 + F^2 \operatorname{sh}^2\tau(t-t_0)}.$$

Решения, отвечающие двум другим возможным положениям нулей Ψ - функции, будут бризерами. Приведем для них окончательные выражения.

Случай П. $\mathrm{Re}\,u_0 = K, -K; w_1(u_0), w_2(u_0) \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}\,w_3(u_0) = 0, \overline{A}B = 1$.

$$S_1 = -\frac{2H\sin\omega(t-t_0)\,\mathrm{ch}\,\xi(x-x_0)}{\mathrm{ch}^2\xi(x-x_0)+H^2+K^2\cos^2(t-t_0)},$$

$$S_2 = -\frac{2G\cos\omega(t-t_0)\,\mathrm{ch}\,\xi(x-x_0)}{\mathrm{ch}^2\xi(x-x_0)+H^2+K^2\cos^2\omega(t-t_0)}, \tag{I9}$$

$$S_3 = \frac{\mathrm{ch}^2\xi(x-x_0)-H^2-K^2\cos^2\omega(t-t_0)}{\mathrm{ch}^2\xi(x-x_0)+H^2+K^2\cos^2\omega(t-t_0)},$$

где $H = \frac{iw_3}{w_1}(u_0), G = \frac{iw_3}{w_2}(u_0), K = \frac{\sqrt{J_2-J_1}}{2}\ \frac{iw_3}{w_1w_2}(u_0)$,

$\xi = 2iw_3(u_0), \omega = 4w_1w_2(u_0)$.

Случай Ш. $\mathrm{Re}\,u_0 = 0, 2K; \mathrm{Re}\,w_1(u_0) = \mathrm{Re}\,w_2(u_0) =$

$= \mathrm{Re}\,w_3(u_0) = 0, \ \overline{A}B = -1$.

$$S_1 = -\frac{2L\cos\omega(t-t_0)\,\mathrm{sh}\,\xi(x-x_0)}{\mathrm{sh}^2\xi(x-x_0)+L^2+N^2\sin^2\omega(t-t_0)},$$

$$S_2 = \frac{2M\sin\omega(t-t_0)\,\mathrm{sh}\,\xi(x-x_0)}{\mathrm{sh}^2\xi(x-x_0)+L^2+N^2\sin^2\omega(t-t_0)}, \tag{20}$$

$$S_3 = \frac{\mathrm{sh}^2\xi(x-x_0)-L^2-N^2\sin^2\omega(t-t_0)}{\mathrm{sh}^2\xi(x-x_0)+L^2+N^2\sin^2\omega(t-t_0)},$$

где $L = \frac{w_3}{w_1}(u_0), M = \frac{w_3}{w_2}(u_0), N = \frac{i\sqrt{J_2-J_1}}{2}\ \frac{w_3}{w_2w_1}(u_0)$,

$\xi = 2iw_3(u_0), \omega = 4w_1w_2(u_0)$

4. До сих пор мы рассматривали одевание, связанное с добавлением 8 нулей задачи Римана. Очевидно, если мы хотим добавить $8n$ нулей, то следует применить вышеописанную процедуру n раз с различными $A_1,\ldots,A_n, B_1,\ldots,B_n$. Таким образом, мы сможем получить n - солитонное решение ($\mathrm{Re}\,A_k = B_k = 0, k=1,\ldots,n$), а также решения, описывающие взаимодействие различных элементарных

возбуждений, рассмотренных в п.3. Отметим, что нули соответствующей задачи Римана нельзя выбирать произвольно, а все они должны лежать на описанном наборе прямых.

Построение множества нулей, не разбивающегося на рассмотренные в п.3 подмножества возможно при "двухсолитонном одевании" (случай полюса f в $\{0\}$ порядка $M=2$). Остановимся на этом эффекте подробнее. Здесь

$$f(u,x,t)=i\sigma_1(aw_1(u)+bw_2(u)w_3(u))+i\sigma_2(cw_2(u)+ dw_1(u)w_3(u))+i\sigma_3(ew_3(u)+fw_1(u)w_2(u))+(g+hw_3^2(u)), \tag{21}$$

требование вещественности всех функций сохраняется. Сохраняется и условие четности $\det f$ по u , из которого следует, что

$$ab+cd+ef=0. \tag{22}$$

Тогда, если u_1 и u_2 - два нуля задачи Римана, то $\{u_1\},\{u_2\},\{-u_1\}$, $\{-u_2\}$ также нули - всего 16 нулей. Условия

$$\Psi(u_1)\begin{pmatrix}1\\A_1\end{pmatrix}=0,\ \Psi(u_1)\begin{pmatrix}1\\A_2\end{pmatrix}=0,\ \Psi(-u_1)\begin{pmatrix}1\\B_1\end{pmatrix}=0,\ \Psi(-u_2)\begin{pmatrix}1\\B_2\end{pmatrix}=0 \tag{23}$$

гарантируют нам вид (10) для функции $\Psi(u)$ в нулях $\det\Psi(u)$. Решая уравнения (22-23) мы и получим выражения для функций b, d, f, h , и, как следствие, для

$$S_1=\frac{2(dh+bf)}{h^2+f^2+d^2+b^2},\quad S_2=\frac{2(bh-df)}{h^2+f^2+d^2+b^2},\quad S_3=\frac{h^2+f^2-d^2-b^2}{h^2+f^2+d^2+b^2} \tag{24}$$

Для выполнения редукции (9) необходимо, чтобы множество нулей $\{u_1\},\{u_2\},\{-u_1\},\{-u_2\}$ было инвариантно относительно комплексного сопряжения. Это приводит либо к условиям на u_1 и u_2 , которые были описаны в П.3, либо к равенству

$$\{\bar{u}_1\}\cup\{-\bar{u}_1\}=\{u_2\}\cup\{-u_2\}.$$

Легко получить в последнем случае и ограничения на A_1, A_2, B_1, B_2, например, если $u_2=\bar{u}_1$, то $A_1\bar{A}_2=-1$, $B_1\bar{B}=-1$. Таким образом, получаемое решение будет характеризоваться тремя произвольными комплексными параметрами u_1, A_1, B_1 . Очевидно, что ввиду произвольности u_1 , его нельзя получить двукратным применением "одевания", описанного в П.3.

Покажем теперь, как получить решение, описывающее бризер с ненулевым импульсом. Для этого следует положить, например,

$$u_1=u_0,\ u_2=\overline{u}_0+2iK',\ B_2=B_1=0,\ A_2=-\overline{A}_1.$$

Тогда система уравнений (22-23) даст следующие выражения для коэффициентов b, d, f и h:

$$\begin{aligned}
&b=-w_1(u_0)\overline{e_u}-\overline{w_1(u_0)}e_u,\\
&d=i(\overline{w_2(u_0)}e_u-w_2(u_0)\overline{e_u}),\\
&f=e_u\overline{e_u}(w_3(u_0)+\overline{w_3(u_0)}),\\
&h=i(w_1(u_0)\overline{w_2(u_0)}+\overline{w_1(u_0)}w_2(u_0)-e_u\overline{e_u}(w_1(u_0)w_2(u_0)+\\
&\quad+w_1(u_0)w_2(u_0)))(w_3(u_0)-\overline{w_3(u_0)})^{-1},
\end{aligned}\tag{25}$$

где $e_u=\exp\{-ixw_3(u_0)+2itw_1(u_0)w_2(u_0)-\rho-i\varphi\}$.
Подставляя (25) в (24) мы и получим выражение для бризера с ненулевым импульсом.

Общий случай $B_1\neq 0, B_2\neq 0$ отвечает решению, описывающему взаимодействие двух бризеров.

5. Таким образом, мы рассмотрели все элементарные возбуждения, и у нас возникла некая их классификация. Сравним ее с предложенной в работе I классификацией по нулям аналитической функции $a(u)$ (см. [I]), расположенным в прямоугольнике $\Pi=\{u: 0<\operatorname{Im}u<2K', 0\leqslant\operatorname{Re}u<2K\}$. Солитону отвечает ноль u_0 функции $a(u)$, лежащий на прямой $\operatorname{Im}u_0=K'$, а бризер характеризуется парой нулей

$$u_{1,2}=u_b\pm i\theta+iK',\ 0<\theta<K',\ 0\leqslant u_b<2K,$$

расположенных симметрично относительно прямой $\operatorname{Im}u=K'$.

Мы во всех случаях получили и явные выражения для ψ - функции, поэтому, естественно, не составляет никакого труда вычисление коэффициента $a(u)$. Для односолитонного решения (I6) получаем следующее выражение:

$$a(u)=-\sqrt{\frac{(w_3(u)-w_3(u_0))(w_2(u)w_1(u_0)-w_1(u)w_2(u_0))}{(w_3(u)+w_3(u_0))(w_2(u)w_1(u_0)+w_1(u)w_2(u_0))}}.$$

У этой функции единственный простой ноль в точке $u_0\in\Pi$. Решениям (I7-20) отвечают два нуля: $u_1=u_0\in\Pi$ и $u_2\in\{-u_2\}\cap\Pi$, но в случае двухсолитонных решений (I7, I8) они расположены на прямой

$\Im m\, u = K'$, а для бризеров (I9, 20) они симметричны относительно этой прямой. Решение, описываемое формулами (24, 25) является бризером с ненулевым импульсом по классификации Е.К.Склянина, т. к. соответствующий коэффициент $a(u)$ имеет нули в точках $u_0, \overline{u}_0 + 2iK' \in \Pi$.

Отметим, наконец, что зная нули коэффициента $a(u)$, отвечающего решениям (I7-20, 24, 25), мы легко можем вычислить импульс и энергию этих решений по формулам, которые содержатся в работе [I].

Автор благодарен А.Р.Итсу за постановку задачи и руководство работой и А.В.Михайлову за сообщение полученных им результатов до их публикации.

Литература

I. Sklyanin E.K. LOMI preprint, 1979, E-3-79.

2. Боровик А.Е. Письма в ЖЭТФ, I978, т.28, № I0, с.629-632.

3. Иванов В.А., Косевич А.М., Бабич И.М. Письма в ЖЭТФ, I979, т.29, № I2, с.777-780.

4. Бабич И.М., Косевич А.М. ЖЭТФ, I982, т.82, № 4, с.I277-I286.

5. Богдан М.М., Ковалев А.С. Письма в ЖЭТФ, I980, т.3I, с.453.

6. Date E., Jimbo M., Kashiware M., Miwa T. Preprint RIMS - 395, 1982.

7. Michailov A.V. Phys.Lett.A., 1982, vol.92, N 2, c.111.

8. Rodin Ju.L. Lett. in Math.Phys., 1982, v.6, c.511.

9. Date E. Proc.Jap.Acad., 1979, v.55, Ser.A, N 8.

I0. Jimbo M., Miwa T., Ueno K. Preprint RIMS-319, 1980

11. Чередник И.В. Известия АН СССР, I982, т.46, с.6II.

П.П.Кулиш, А.Г.Рейман

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ

Полиномиальным пучком мы называем линейный оператор $\mathcal{L} = \partial/\partial x - \mathcal{U}(x,\lambda)$, в котором матричный потенциал $\mathcal{U}(x,\lambda)$ – полином по λ с коэффициентами, зависящими от x : $\mathcal{U}(x,\lambda) = \sum\limits_{0\leq k\leq N} u_k(x)\lambda^k$. С оператором $\mathcal{L}$ связана серия эволюционных уравнений, находящихся в инволюции друг с другом. Эти уравнения записываются как условие коммутативности (условие нулевой кривизны) $[\mathcal{L},\mathcal{M}] = 0$, где $\mathcal{M} = \partial/\partial t - V(x,\lambda)$. Матричный потенциал V также полиномиален по λ и выражается через $\mathcal{U}$.

В ряде недавних работ [1–3,6] исследовалась гамильтонова структура таких уравнений. Мы хотим подчеркнуть, что связанный с ними гамильтонов формализм содержится в теоретико-групповой схеме, предложенной А.Г.Рейманом и М.А.Семеновым-Тян-Шанским [4,7]. В данной заметке мы, в целях популяризации этой схемы, излагаем ее на примере полиномиальных пучков, не стремясь к полной общности и по возможности избегая алгебраических тонкостей. Показано, что упомянутая гамильтонова структура задается скобкой Кириллова на орбитах коприсоединенного действия подходящей функциональной алгебры Ли. Предъявлен набор инвариантов, с помощью которых вычисляются эти орбиты. В заключение приводится вывод общей формулы для $\mathcal{M}$- операторов, полученной Л.А.Тахтаджяном и Л.Д.Фаддеевым [8].

Всюду в дальнейшем под "орбитой" подразумевается орбита коприсоединенного действия. Предполагается, что читатель имеет некоторое представление о гамильтоновой механике на орбитах.

Вычет в точке $\lambda = 0$ обозначается Res. Все потенциалы периодичны по x с периодом 1; соответственно, все интегралы по x берутся по отрезку [0,1].

1. Построение интегрируемых уравнений

Основные моменты теоретико-групповой интерпретации уравнений Захарова-Шабата, предложенной в [7], состоят в следующем.

1. Условие нулевой кривизны – гамильтоново уравнение по скобке Березина-Кириллова.

2. Фазовое пространство системы–орбита.

3. Гамильтонианы – инварианты коприсоединенного (т.е. калибровочного) действия.

4. Решение уравнений сводится к решению задачи факторизации

(задачи Римана).

Напомним общую схему, следуя работе [4] .

Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – пространство, сопряженное к $\mathfrak{g}$, Ad^* (ad^*) – коприсоединенное представление группы G (алгебры $\mathfrak{g}$) в $\mathfrak{g}^*$.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ как векторное пространство (но не как алгебра Ли) является прямой суммой двух своих подалгебр: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$. Тогда $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_+^* \oplus \mathfrak{g}_-^*$, где $\mathfrak{g}_\pm^* = \mathfrak{g}_\mp^\perp$. Пусть $G_\pm$ – связные подгруппы, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{g}_\pm$.

На $\mathfrak{g}^*$ имеется естественная скобка Пуассона – скобка Березина-Кириллова. Введем на $\mathfrak{g}^*$ вторую скобку Пуассона, положив ее равной разности скобок Березина-Кириллова для $\mathfrak{g}_+^*$ и $\mathfrak{g}_-^*$. Обозначим $I(\mathfrak{g})$ алгебру Ad^*- инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$.

ТЕОРЕМА I. I) Функции из $I(\mathfrak{g})$ находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона на $\mathfrak{g}^*$.

2) Пусть $F \in I(\mathfrak{g})$. Положим $M(L) = \nabla F(L), M(L) = = M_+ - M_-, M_\pm \in \mathfrak{g}_\pm, L \in \mathfrak{g}^*$. Уравнения движения, задаваемые гамильтонианом F относительно второй скобки Пуассона на $\mathfrak{g}^*$, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} L = ad^* M_+ \cdot L = ad^* M_- \cdot L .$$

3) Пусть $\exp tM(L) = g_+(t) g_-^{-1}(t)$, где $g_\pm(t)$ – гладкие функции со значениями в подгруппах $G_\pm$. Решение указанных уравнений движения имеет вид

$$L(t) = Ad^* g_+(t) \cdot L = Ad^* g_-(t) \cdot L .$$

Вторую скобку Пуассона в $\mathfrak{g}^*$ можно сузить на орбиты, являющиеся прямым произведением орбит подалгебр $\mathfrak{g}_\pm$ в $\mathfrak{g}_\pm^*$. Орбиты – инвариантные многообразия гамильтоновых уравнений.

Покажем, как в рамках изложенной схемы реализуются уравнения с полиномиальным пучком. Не стремясь к общности, положим $\mathfrak{g} = sl(n, C)$. Обозначим $\mathfrak{g}^S$ алгебру Ли $\mathfrak{g}$ -значных гладких функций на окружности S , параметризованной отрезком [0,I] . Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли формальных рядов Лорана с коэффициентами из $\mathfrak{g}^S$: $U \in \mathcal{G}$, если $U(x,\lambda) = \sum_{-\infty \le k \le N(U)} u_k(x) \lambda^k$. Для того, чтобы оператор ad^* , задающий уравнения движения, содержал дифференцирование по x , произведем центральное расширение алгебры $\mathcal{G}$. Фиксируем целое число p и положим для $U, V \in \mathcal{G}$

$$(U,V)_p = \mathrm{Res}\, \lambda^{-p-1} \int tr\, U(x,\lambda) V(x,\lambda)\, dx . \qquad (I)$$

Центральное расширение $\hat{\mathfrak{g}}$ задается новой скобкой Ли

$$[U,V]_p = [U,V] + (U, \frac{\partial}{\partial x} V)_p C , \qquad (2)$$

где C – генератор центра.

Скалярное произведение (1) позволяет отождествить $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$, а $\hat{\mathfrak{g}}^*$ с $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$. При этом двойственными друг другу оказываются подпространства $\mathfrak{g}^s \lambda^k$ и $\mathfrak{g}^s \lambda^{p-k}$. Коприсоединенное действие алгебры $\mathfrak{g}$ в $\hat{\mathfrak{g}}^*$ имеет вид

$$ad^* V (U \oplus c) = c \frac{\partial}{\partial x} V + [V, U] , \quad c \in \mathbb{C} . \qquad (3)$$

Гамильтонианы – инварианты этого действия – являются инвариантами матрицы монодромии оператора $c\, \partial/\partial x - U$.

Далее, укажем разбиение алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ на две подалгебры. Оно определяется следующим разбиением алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$:

$$\mathfrak{g}_+ = \{ \sum_{k \geqslant 0} U_k \lambda^k \} , \quad \mathfrak{g}_- = \{ \sum_{k<0} U_k \lambda^k \} .$$

Скалярное произведение (I) позволяет отождествить $\mathfrak{g}_+^*$ с $\{ \sum_{k \leqslant p} U_k \lambda^k \}$, $\mathfrak{g}_-^*$ с $\{ \sum_{k>p} U_k \lambda^k \}$. Выпишем скобку Пуассона на $\mathfrak{g}_\pm^*$. Для $V \in \mathfrak{g}$ обозначим $V_k(x)$ линейную функцию от $U(x,\lambda)$: $V_k(x)(U) = tr(V U_k(x))$.

Тогда

$$\{ V_i(x), W_j(y) \} = [V,W]_{i+j-p}(x) \delta(x-y) + c\, tr(V,W) \delta_{i+j,p} \delta'(x-y) . \qquad (4)$$

В дальнейшем будем считать, что $c=1$.

Действие центра алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ в $\hat{\mathfrak{g}}^*$ тривиально. Поэтому задачу факторизации (пункт 3 теоремы I) достаточно решать в группе, отвечающей алгебре $\mathfrak{g}$, т.е. в группе G матричнозначных функций $g(x,\lambda)$ гладких по x и аналитических по λ при $\lambda \neq 0$ с условием $\det g(x,\lambda) = 1$. Теперь мы можем переформулировать теорему I в применении к полиномиальному пучку.

ТЕОРЕМА I. Пусть U лежит в $\mathfrak{g}_-^*$, $U = \sum_{k>p} U_k \lambda^k$

I) Функционалы, определенные как инварианты матрицы монодромии оператора $\mathcal{L} = \partial/\partial x - U$, находятся в инволюции по скобке Пуассона (4).

2) Пусть F – такой функционал, $M(U) = \nabla F(U)$, $M(U) = M_+ - M_-$, $M_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$. Уравнения движения в $\mathfrak{g}_-^*$, задаваемые гамильтонианом F, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial}{\partial x} M_\pm + [M_\pm, u]$$

3) Пусть $\exp tM(u) = g_+(t) g_-^{-1}(t)$ – решение задачи Римана в группе токов G. Решение уравнений движения получается "одеванием" с помощью $g_\pm(t)$:

$$u(t) = \frac{\partial}{\partial x} g_\pm(t) g_\pm(t)^{-1} + g_\pm(t) u g_\pm(t)^{-1} .$$

2. Орбиты

Основой вычисления орбит служит следующая лемма (эта лемма суммирует рассуждения из [9]).

ЛЕММА I. Пусть A – коммутативная алгебра с невырожденной инвариантной билинейной формой: $(ab, c) = (a, bc)$. Отождествим с помощью этой формы пространство $(\mathfrak{g} \otimes A)^*$ с $\mathfrak{g}^* \otimes A$. Тогда, если F – инвариантный полином на $\mathfrak{g}^*$, F_A – полином на $\mathfrak{g}^* \otimes A$, получающийся из F расширением кольца скаляров до A, то F_A – инвариантен.

Перейдем к орбитам, отвечающим полиномиальному пучку. Коприсоединенное действие подалгебр $\mathfrak{g}_\pm$ в $\mathfrak{g}_\pm^*$ получается из (3) применением операции проектирования $P_\pm$ из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}_\pm^*$:

$$ad_\pm^* V \cdot u = P_\pm\left(\frac{\partial}{\partial x} V + [V \cdot u]\right).$$

Подпространства $\mathfrak{g}_+^N = \left\{\sum_{p-N<k\leq p} u_k \lambda^k, u_k \in \mathfrak{g}\right\}$ при $N > p$ и $\mathfrak{g}_-^N = \left\{\sum_{p<k\leq p+N} u_k \lambda^k, u_k \in \mathfrak{g}\right\}$ при $N \geq -1-p$ инвариантны и распадаются на орбиты. Мы рассмотрим случай $p = -1$. Он замечателен тем, что $P_\pm(\mathfrak{g}_\mp) = 0$, и поэтому

$$ad_\pm^* V \cdot u = P_\pm([V, u]) .$$

Соответственно, в скобке (4) исчезает второе слагаемое. Здесь x входит как параметр, и задача свелась к определению конечномерных орбит алгебр матричных полиномов $\tilde{\mathfrak{g}}_+ = \{\sum_{k\geq 0} u_k \lambda^k, u_k \in \mathfrak{g}\}$, $\tilde{\mathfrak{g}}_- = \{\sum_{k<0} u_k \lambda^k, u_k \in \mathfrak{g}\}$ в подпространствах

$$\mathfrak{g}_\pm^N = \left\{\sum_{\substack{+:\ -N\leq k<0 \\ -:\ 0\leq k\leq N}} u_k \lambda^k, u_k \in \mathfrak{g}\right\} .$$

Применим к этой задаче лемму I. Для этого заметим, что эффективно в $\mathfrak{g}_\pm^N$ действуют фактор-алгебры $\mathfrak{g} \otimes A_\pm^N$, где

$$A_+^N = \mathbb{C}[\lambda]/\lambda^N \mathbb{C}[\lambda] , \quad A_-^N = \lambda^{-1}\mathbb{C}[\lambda^{-1}]/\lambda^{-N-1}\mathbb{C}[\lambda^{-1}] .$$

При этом $\mathfrak{g}_\pm^N = (\mathfrak{g} \otimes A_\pm^N)^*$. Мы попадаем в условия леммы; осталось предъявить невырожденную инвариантную форму на $A_\pm^N$:

$(a,b)_\pm = \operatorname{Res}(\lambda^{\mp N} ab)$. Теперь мы можем переформулировать лемму I применительно к матричным полиномам:

ЛЕММА I$'$. Пусть F – полиномиальный инвариант матрицы. Разложим $F(u(\lambda)\lambda^{\pm N})$ по степеням λ:

$$F(u(\lambda)\lambda^{\pm N}) = \sum_k F_k^{\pm}(u)\lambda^k .$$

Тогда полиномы F_k^+ при $k<N$ – инварианты в $\mathfrak{g}_+^N$, а F_k^- при $k \geqslant -N$ – инварианты в $\mathfrak{g}_-^N$.

Кроме того, в $\mathfrak{g}_-^N$ инвариантом является также старший коэффициент u_{N-1}.

3. Примеры

В этом разделе $\mathfrak{g} = sl(2,\mathbb{C})$. Пусть $p=-1$, тогда $\mathfrak{g}_+^N = \left\{ \sum_{k=-N}^{-1} u_k\lambda^k \right\}$, $\mathfrak{g}_-^N = \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} u_k\lambda^k \right\}$ и скобка (4), записанная в координатах $\{h_i, e_i, f_i\}$, $u_i = \begin{pmatrix} h_i & e_i \\ f_i & -h_i \end{pmatrix}$, имеет вид

$$\{h_i(x), e_j(y)\} = 2e_{i+j+1}(x)\delta(x-y),$$
$$\{h_i(x), f_j(y)\} = -2f_{i+j+1}(x)\delta(x-y),$$
$$\{e_i(x), f_j(y)\} = h_{i+j+1}(x)\delta(x-y).$$

Остальные скобки равны нулю.

Выпишем уравнения, задающие орбиты. Кольцо инвариантов алгебры $sl(2)$ порождено полиномом $F(u) = -\det u$. Если $u(\lambda) = \begin{pmatrix} h(\lambda), & e(\lambda) \\ f(\lambda), & -h(\lambda) \end{pmatrix}$, то $-\det u(\lambda) = h^2(\lambda) + e(\lambda)f(\lambda)$. Тогда в разложении $-\det u(\lambda) = \sum_k F_k(u)\lambda^k$ при $k<-N$ $(k \geqslant N)$ полиномы F_k – инварианты в $\mathfrak{g}_+^N$ (в $\mathfrak{g}_-^N$).

Например, при $u \in \mathfrak{g}_-^N$, $u(\lambda) = \sigma_3\lambda^{N-1} + \sum_{k=0}^{N-2} u_k\lambda^k$ (напомним, что u_{N-1} постоянен на орбите), из условий $F_k(u) = c_{k-N+1}$ получим систему рекуррентных уравнений

$$h_{N-1} = 1, \quad 2h_{N-2} = c_{N-2}, \tag{5}$$
$$2h_{N-1-\ell} = c_{N-1-\ell} - \sum_{k=1}^{\ell-1}\left(e_{N-1-k}f_{N-1+k-\ell} + h_{N-1-k}h_{N-1+k-\ell}\right),$$

которые позволяют выразить диагональные элементы $u(\lambda)$ через внедиагональные и инварианты орбиты.

Скобки Пуассона функций $\{h_i, e_i, f_i\}$ на орбите те же, что и во всем пространстве $\mathfrak{g}_\pm^N$.

Орбита в $\mathfrak{g}_-^2$, проходящая через точку $A\lambda + B$, состоит из матриц $u(\lambda) = A\lambda + B + \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} = [A, V]$. Положив $A = \sigma_3$, $B = 0$, получаем фазовое пространство нелинейного уравнения Шредингера: $u = \begin{pmatrix} 0 & e \\ f & 0 \end{pmatrix}, \{e(x), f(y)\} = \delta(x-y)$. На этом примере видно, что инварианты леммы I достаточны для выделения орбиты в том случае, когда старший коэффициент u_{N-1} – матрица с попарно различными собственными значениями.

Орбита в $\mathcal{G}_+^1$, проходящая через точку $A\lambda^{-1}$ состоит из матриц вида $gAg^{-1}\lambda^{-1}$, $g \in SL(2, C)$. Эта орбита является фазовым пространством магнетика.

Пусть теперь $p=0$; $\mathcal{G}_+^N = \{\sum_{k=-N+1}^{0} u_k \lambda^k\}, \mathcal{G}_-^N = \{\sum_{k=1}^{N} u_k \lambda^k\}$. В прежних обозначениях имеем

$$\{h_0(x), h_0(y)\} = 2\delta'(x-y),$$

$$\{h_i(x), e_j(y)\} = 2e_{i+j}(x)\delta(x-y),$$

$$\{h_i(x), f_j(y)\} = -2f_{i+j}(x)\delta(x-y),$$

$$\{e_i(x), f_j(y)\} = h_{i+j}(x)\delta(x-y) + \delta_{i+j,0}\delta'(x-y)$$

Остальные скобки равны нулю.

Орбита в $\mathcal{G}_+^0$ состоит из тех потенциалов $\mathcal{U}$, для которых матрица монодромии оператора $\partial/\partial x - \mathcal{U}$ лежит в фиксированном классе сопряженности. Пространство $\mathcal{G}_-^1$ распадается на одноточечные орбиты. Орбита в $\mathcal{G}_+^0 \oplus \mathcal{G}_-^1$ вида $\{\mathcal{U} + \sigma_3\lambda\}$ соответствует уравнению НШ со второй гамильтоновой структурой:

$$\{h(x), h(y)\} = 2\delta'(x-y),$$

$$\{e(x), f(y)\} = h(x)\delta(x-y) + \delta'(x-y) \quad \text{и т.д.}$$

При этом $\operatorname{tr} T(\lambda)|_{\lambda=0}$ – орбитный инвариант.

4. Гамильтонианы и $\mathcal{M}$ – операторы

Рассмотрим полиномиальный пучок с $u(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{U}_k(x)\lambda^k$, $u_N(x) = A$ – постоянная диагональная матрица с попарно различными собственными значениями. Параметр p в общей схеме положим равным – I.

ЛЕММА 2. I) Существует калибровочное преобразование $\varphi \in G_-$, $\varphi = \exp V, V \in \mathcal{G}_-$, $\varphi(x,\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)\lambda^{-k}$ такое, что

$$Ad^*\varphi \cdot \mathcal{U} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi^{-1} + \varphi\,\mathcal{U}\varphi^{-1} = \mathcal{D},$$

где $\mathcal{D}(x,\lambda) = \sum_{k=-N}^{\infty} \mathcal{D}_k(x)\lambda^{-k}$ – диагональная матрица, $\mathcal{D}_{-N} = A$

2) $\mathcal{D}_+ = \sum_{k=0}^{N} \mathcal{D}_{-k}\lambda^k$ принадлежит той же орбите в $\mathcal{G}_-^{N+1}$,

что и потенциал u, и однозначно определяется этой орбитой.

Матрица монодромии для исходного потенциала $u(x,\lambda)$ определяется как значение при $x=1$ полной системы решений уравнения $\partial/\partial x\, T(x,\lambda)=u(x,\lambda)T(x,\lambda), T(0,\lambda)=1$. Она имеет вид $T(1,\lambda)=\varphi^{-1}(1,\lambda)\exp\int\mathcal{D}(x,\lambda)dx\,\varphi(0,\lambda)$ и в силу периодичности потенциала $u(x,\lambda)$ подобна матрице монодромии $T(\lambda)$ для потенциала $\mathcal{D}(x,\lambda)$. В соответствии с теоремой I, гамильтонианами будут симметрические функции собственных значений $\mu_1(\lambda),\dots,\mu_n(\lambda)$ матрицы $T(\lambda)$. Однако нам удобнее брать не симметрические функции от $\{\mu_k\}$, а сами собственные значения, так что гамильтонианы будут ветвями алгебраической функции от инвариантов, однозначными на орбитах. Формулировки теорем I и I$'$ сохраняются в этом случае без изменений.

Фиксируем коэффициенты $c_1,\dots,c_n$ и положим

$$H^c(u,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}c_k\log\mu_k(\lambda)=\sum_{m=-N}^{\infty}H^c_m(u)\lambda^{-m},$$

$$H^c_m(u)=\operatorname{tr} c\int\mathcal{D}_m(x)\,dx=(c\lambda^{m-1},\mathcal{D})_{-1}.$$

Уравнение движения, порожденное H^c_m, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\frac{\partial}{\partial x}M^e_{m\pm}+[M^e_{m\pm},u], \qquad (6)$$

где $M^c_{m\pm}$ – компоненты в $\mathcal{G}_\pm$ градиента гамильтониана H^c_m: $M^c_m=\nabla H^c_m$.

Вычислим $M^c_m(u)$. Пусть $Ad^*\varphi\cdot u=\mathcal{D}$, $\varphi\in G_-$.

Так как H^c_m инвариантен относительно преобразований $\varphi\in G_-$, то

$$\nabla H^c_m(u)=\nabla H^c_m(Ad^*\varphi^{-1}\mathcal{D})=Ad\,\varphi^{-1}\nabla H^c_m(\mathcal{D})=\varphi^{-1}\nabla H^c_m(\mathcal{D})\varphi.$$

Поскольку $\nabla H^c_m(\mathcal{D})=C\lambda^{m-1}$, то

$$M^c_m(u)=\varphi^{-1}c\lambda^{m-1}\varphi=M^c\cdot\lambda^{m-1},\quad M^c=\varphi^{-1}C\varphi.$$

Рассмотрим производящую функцию $\mathcal{M}$ – операторов $M^c(\lambda,\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}M^c_{m+}\mu^{-m}$. Имеем $M^c=\sum_{k=0}^{\infty}m_k\lambda^{-k}$,

$$M^c(\lambda,\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}m_k\lambda^{m-k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}m_k\mu^{-k-1}\sum_{m=k+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{m-k-1}$$

$$M^c(\lambda,\mu) = \frac{1}{\mu-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} m_k \mu^{-k} = \frac{1}{\mu-\lambda} M^c(\mu).$$

Для задачи с периодическими граничными условиями эта формула была получена в [8] с использованием формализма классической r-матрицы [5]. Этот формализм позволяет записать скобки Пуассона коэффициентных функций пучка $\partial/\partial x - u(\lambda)$ в компактной форме

$$\{u(x,\lambda) \overset{\otimes}{,} u(y,\mu)\} = [r(\lambda-\mu), u(x,\lambda)\otimes I + I\otimes u(x,\mu)]\,\delta(x-y), \qquad (7)$$

где $r(\lambda) = \mathcal{P}_n\lambda^{-1}$, а $\mathcal{P}_n$ – оператор перестановки в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$. Можно использовать формулу (7) в качестве исходной для определения скобок и найти те же орбитные инварианты (5).

В силу того, что $M^c(\lambda) = \nabla H^c(u,\lambda)$, верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} H^c(u,\lambda) = \int tr\left(M^c(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}u(\lambda)\right) dx. \qquad (8)$$

Таким образом, гамильтонианы H^c_m выражаются через коэффициенты разложения матрицы $M^c(\lambda)$ по степеням λ. Обозначим

$$h(\lambda) = tr\left(M^c(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}u(\lambda)\right). \qquad (9)$$

Легко выписать закон сохранения в дивергентной форме по отношению к эволюции, задаваемой уравнением (6).

$$\frac{\partial}{\partial t} h(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} tr\left(M^c(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} M^c_{m+}\right). \qquad (10)$$

Обозначим через $\mathfrak{h}$ подалгебру диагональных матриц в $sl(n)$. Пусть $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}\otimes\mathbb{C}[\lambda]$ – алгебра полиномов с коэффициентами из $\mathfrak{h}$. Каждому полиному $A\in\tilde{\mathfrak{h}}$ можно сопоставить гамильтониан $H^A(u) = (A,\mathcal{D})_{-1}$ – линейную комбинацию гамильтонианов $H^{e_k}_m$, где $(e_k)_{ab} = \delta_{ak}\delta_{bk}$, $k=1,\dots,n$. Такие гамильтонианы находятся в инволюции друг с другом и уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t^A} u = \frac{\partial}{\partial x} M^A_+ + [M^A_+, u], \qquad (11)$$

где M^A_+ – проекция $M^A = \nabla H^A$ на $\mathcal{G}_+$.

Фиксируем $C\in\tilde{\mathfrak{h}}$ и положим

$$h^A(\lambda) = tr(M^c(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} M^A_+(\lambda)) . \qquad (I2)$$

Следующее соотношение продолжает формулу (I0)

$$\frac{\partial}{\partial t^B} h^A(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t^A} h^B(\lambda) . \qquad (I3)$$

Оно легко проверяется, если учесть, что $\frac{\partial}{\partial t^A} M^B = [M^A_+, M^B]$. $[\partial/\partial t^A - M^A_+ , \partial/\partial t^B - M^B_+] = 0$.

Пусть $u(t^A, \lambda)$, $A \in \tilde{\mathfrak{j}}$ – совместное решение всех уравнений вида (II). Тогда можно рассматривать линейное отображение $B \mapsto h^B(u(t^A, \lambda))$ как I-форму на группе $\tilde{H} = \exp \tilde{\mathfrak{j}}$. Соотношение (I3) означает замкнутость этой формы и можно ввести ее первообразную T, $h = dT$ или $h^A = \partial/\partial t^A T$.

В докладе Флашки и Ньюэлла [2] анонсирована связь между T и τ -функцией Хироты.

Приведем в заключение другую трактовку эволюции градиента $M^c(\lambda)$, ограничившись для простоты случаем $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$, $C = \sigma_3$. Соответствующая серия уравнений для $M = M^{\sigma_3}(\lambda)$ имеет вид

$$\partial/\partial t_n M = [M_n, M] , \qquad (I4)$$

где $M_n(\lambda) = P_+(M(\lambda)\lambda^n)$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\lambda, \lambda^{-1}]]$ – алгебра матричных рядов Лорана, $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}_+ + \tilde{\mathfrak{g}}_-$, где $\tilde{\mathfrak{g}}_+ = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[\lambda]$, $\tilde{\mathfrak{g}}_- = \mathfrak{g} \otimes \lambda^{-1}\mathbb{C}[[\lambda^{-1}]]$.

Разложение $M(x,\lambda) = \sum_{k \geqslant 0} m_k(x)\lambda^{-k}$ позволяет считать $M(x,\lambda)$ при фиксированном x элементом пространства $\tilde{\mathfrak{g}}^*_+$. Применяя теорему I к алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, получаем следующее .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При фиксированном x уравнения (I4) являются гамильтоновыми уравнениями на $\tilde{\mathfrak{g}}^*_+$ с гамильтонианами

$$F_n(M) = \frac{1}{2} \mathrm{Res}\, \lambda^{n-1} tr(M(\lambda))^2 .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если коэффициенты $\mathcal{D}_N, \dots, \mathcal{D}_0$ в лемме 2 не зависят от x, $\mathcal{D}_k = \begin{pmatrix} d_k & 0 \\ 0 & -d_k \end{pmatrix}$, то $\partial/\partial x = \sum_{k=0}^{N} d_{-k}\, \partial/\partial t_k$.

Литература

1. Faddeev L.D. Proceedings of the "École d'Été de Physique Theorique", Les Houches, North Holland, 1982.

2. Flaschka H., Newell A. Lie-algebraic structure of solitary waves. Proceedings of the conference "Solitons'82", Edinburgh, 1982.
3. Gerdjikov V., Ivanov M. The quadratic bundle of general formand the nonlinear evolution equations. Preprints E-2-82-545, E-2-82-595, JINR, Dubna, 1982.
4. Reyman A., Semenov-Tian-Shansky M. Reduction of Hamiltomian systems, affine Lie algebras and Lax equations. Invent.Math., 1981, v.63, p.423.
5. Kulish P., Sklyanin E. Quantum spectral transform method. Recent developments. Lecture Notes in Physics, 1982, v.151, p.61.
6. Гаджиев И., Герджиков В., Иванов М. Гамильтоновы структуры нелинейных эволюционных уравнений, связанных с полиномиальным пучком. Зап.науч.скмин.ЛОМИ, I982, т.I20, с.55.
7. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных. Докл.АН СССР, I980, т.25I, с.I3I0.
8. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Простая связь геометрического и гамильтонова представлений интегрируемых нелинейных уравнений. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I982, т.II5, с.264.
9. Трофимов В.В. Вполне интегрируемые геодезические потоки левоинвариантных метрик на группах Ли, связанные с коммутативными градуированными алгебрами с двойственностью Пуанкаре. Докл.АН СССР, I982, т.263, с.8I2.

М.А.Семенов-Тян-Шанский

КЛАССИЧЕСКИЕ r-МАТРИЦЫ И МЕТОД ОРБИТ

Классические r-матрицы ввел впервые Е.К.Склянин в работе [I] : отправляясь от понятий, возникших в квантовом методе обратной задачи [2] . Они позволяют экономно записывать скобки Пуассона основных динамических переменных интегрируемых систем.

В работах [3] , [4] в основу классификации r-матриц положено функциональное уравнение, которому они удовлетворяют - так называемое тождество Янга-Бакстера. Существует и другой, более геометрический подход к классификации интегрируемых систем, основанный на методе орбит Кириллова-Костанта. Этот подход был предложен в работах М.Адлера и Б.Костанта [5] , [6] и распространен на уравнения нулевой кривизны А.Рейманом и автором [7] . Метод Адлера-Костанта является, по существу, геометрической версией метода одевающих преобразований, или метода задачи Римана. (Это обстоятельство не разъяснено в достаточной мере в имеющейся литературе; поэтому ниже мы остановимся на нем более подробно). В методе r- матрицы задача Римана основательно замаскирована. Одно из основных наблюдений предлагаемой работы - объяснение связи между этими подходами (см.ниже формулу (9)). Мы опишем также обобщение метода r-матрицы на неультралокальные операторы Лакса (т.е. на случай, когда основные скобки Пуассона содержат производные от δ-функции). Вопрос о таком обобщении был поставлен еще в [I] .

Я глубоко благодарен Е.К.Склянину, Н.Ю.Решетихину и Л.Д.Фаддееву за многочисленные полезные обсуждения.

§ I. Геометрия лаксовых уравнений

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}$ - ее подалгебры. Предположим, что как линейное пространство $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ - прямая сумма алгебр Ли $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ удобно снабдить $\mathfrak{g}_0$ скобкой Ли равной разности скобок Ли на $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Для функций на двойственном пространстве и любой алгебре Ли $\mathfrak{f}$ определена каноническая скобка Пуассона

$$\{\varphi,\psi\}(f) = f([d\varphi_f, d\psi_f]), \quad \varphi,\psi \in C^{\infty}(\mathfrak{f}^*). \qquad (I)$$

Скобка (I) называется скобкой Кириллова или Березина-Кириллова;

как выяснилось недавно, она была впервые определена самим Ли.[16] Так как двойственные пространства алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ изоморфны, в пространстве $C^\infty(\mathfrak{g}^*) \approx C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ задано две скобки Пуассона – скобки Кириллова алгебр $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0$.

Пусть $I \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ – кольцо $ad^*\mathfrak{g}$ – инвариантов. Как известно, функции из I центральны относительно скобки Кириллова алгебры $\mathfrak{g}$. Интерес представляет их поведение относительно скобки, связанной с $\mathfrak{g}_0$.

ТЕОРЕМА I. Функции из I коммутируют относительно скобки Кириллова алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

Пусть G – присоединенная группа алгебры Ли $\mathfrak{g}$, A, B – – ее подгруппы, соответствующие подалгебрам $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, G_0 = A \times B$. Следующее предложение уточняет теорему I:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Траектории динамической системы определяемой гамильтонианом $h \in I$ на $\mathfrak{g}_0^*$, лежат в пересечении Ad^*G– и Ad^*G_0 – орбит.

ПОЯСНЕНИЕ. В силу определения скобки (I) траектория динамической системы с любым гамильтонианом не сходит с Ad^*G_0 –орбиты: вектор скорости касателен к орбите начальной точки траектории. Так как $h \in I$ и все функции из I в инволюции, траектория остается на поверхности уровня кольца I. Поверхность уровня I состоит, вообще говоря, из нескольких Ad^*G –орбит. Предложение 2 утверждает, что траектория останется всегда на орбите начальной точки.

Зафиксируем Ad^*G_0 – орбиту $\mathcal{O}_0 \subset \mathfrak{g}_0^*$ в типичной ситуации динамическая система, определяемая функцией $h \in I$ на $\mathcal{O}_0$, вполне интегрируема, причем пересечения $\mathcal{O}_0$ с Ad^*G – орбитами – это в точности лиувиллевские торы для нашей динамической системы. (См.ниже предложение 5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для конечномерных алгебр Ли полная интегрируемость встречается довольно редко. Наиболее интересные примеры связаны с бесконечномерными алгебрами [8], [9]. Геометрической картине движения, описанной выше, соответствуют эквивалентные формы записи уравнений движения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Уравнения движения на $\mathfrak{g}_0^*$, определяемые гамильтонианом $h \in I$ допускают эквивалентные формы записи

$$\frac{dL}{dt} = ad^*_{\mathfrak{g}_0} dh(L) \cdot L, \qquad L \in \mathfrak{g}_0^*, \tag{2}$$

$$\frac{dL}{dt} = ad^*_{\mathfrak{g}} M_+ \cdot L = ad^*_{\mathfrak{g}} M_- \cdot L; \tag{3}$$

здесь $dh(L)=M_+-M_-$ – разложение вектора $dh(L)\in\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ – компоненты. Формула (I) соответствует гамильтоновой записи уравнений движения; формула (3) – это обобщенная лаксова форма (см.ниже п^0.3). Геометрический смысл предложения 3 ясен: в силу (2) вектор скорости касается Ad^*G_0 -орбиты; в силу (3) он касается также и Ad^*G -орбиты точки L.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 допускают следующую глобализацию ([8] , [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть кривые $a(t)$, $b(t)$ – решения задачи факторизации

$$\exp t\,dh(L)=a(t)b(t)^{-1},\quad a\in A,\ b\in B. \tag{4}$$

Траектория системы (2), выходящая из точки $L\in\mathfrak{g}_0^*$, дается формулой

$$L(t)=\mathrm{Ad}^*_G\,a(t)\cdot L=\mathrm{Ad}^*_G\,b(t)\cdot L. \tag{5}$$

В типичных примерах задача факторизации (4) есть матричная задача Римана [8] . Поэтому предложение 4 указывает на тесную связь нашей геометрической картины с методом одевающих преобразований Захарова-Шабата [IO] . Эту связь можно сделать более ясной, переформулировав предложение 4 следующим образом.

Зафиксируем точку $L\in\mathfrak{g}^*$ и пусть $\mathcal{O}_L=\mathrm{Ad}^*G\cdot L$, ${}^0\mathcal{O}_L=\mathrm{Ad}^*G_0\cdot L$. Пусть $G^L\subset G$ – централизатор L в G, $G_L=\mathrm{cent}\,G^L$ – его центр. Если $x\in\mathcal{O}_L\cap{}^0\mathcal{O}_L$, $x\in\mathrm{Ad}^*_G\,g\cdot L$, $h\in G_L$, то пусть

$$ghg^{-1}=a(x,h)\,b(x,h)^{-1},\quad a\in A,\ b\in B \tag{6}$$

– факторизация элемента $ghg^{-1}\in G_x$ (т.к. G_L центральна G^L, то элемент ghg^{-1} определен корректно).
Пусть

$$h\cdot x=\mathrm{Ad}^*_G\,a(x,h)\cdot x. \tag{7}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Формула (7) задает групповое действие $G_L\times\mathcal{O}_L\cap{}^0\mathcal{O}_L\to\mathcal{O}_L\cap{}^0\mathcal{O}_L$. Поток динамической системы (2) – однопараметрическая подгруппа группы G_L с генератором $dh(L)$.

Действие группы G_L в точности соответствует одевающим преобразованиям в смысле [IO] . (Разумеется, полная группа одевающих преобразований значительно шире, но она действует уже не в фазовом пространстве, а в главном расслоении над ним - ср., например, [II] , [I2]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Задача факторизации(4),(5) разрешима, вообще говоря, не при всех $t \in \mathbb{C}$. Это соответствует тому, что поток, связанный с (I), не всегда полон. Поэтому формула (7) задает действие только в окрестности единицы в G_L.

Предложение 5 оправдывает сделанное выше замечание о лиувиллевских торах системы (2). Полная интегрируемость системы (2) эквивалентна, грубо говоря, транзитивности G_L в пересечении орбит (См.примеры в [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема I (в чуть меньшей общности) была доказана впервые Б.Костантом [6] и неоднократно передоказывалась. Простейшее доказательство предложения 4 (из которого легко следуют все предыдущие утверждения) дано в [8] , [9] . Связь с одевающими преобразованиями аккуратно сформулирована здесь впервые.

§ 2. Классические r-матрицы

Напомню, что r - матрица появляется при вычислении скобок Пуассона матричных элементов лаксова оператора друг с другом. При этом удобна тензорная запись, введенная в [I] по аналогии с квантовым случаем [2] . Типичная формула имеет вид

$$\left[L(\lambda) \overset{\otimes}{,} L(\mu) \right\} = \left[r(\lambda,\mu), L(\lambda)\otimes 1 + 1\otimes L(\mu) \right]. \qquad (8)$$

Мы выведем аналогичную формулу в рамках геометрической картины, обсужденной в § I. При этом мы уточним смысл левой и правой части (8). Пока читатель, незнакомый с предметом, может рассматривать формулу (8) как своеобразную анаграмму.

Условимся об обозначениях.

Пусть $S(\mathfrak{g}_0)$ - симметрическая алгебра $\mathfrak{g}_0$. В силу канонического изоморфизма $S(\mathfrak{g}_0) \simeq P(\mathfrak{g}_0^*)$ формула (I) задает в $S(\mathfrak{g}_0)$ скобку Пуассона. Если $X \in S(\mathfrak{g}_0)\otimes V$, $Y \in S(\mathfrak{g}_0)\otimes W$ обозначим $\{X \overset{\otimes}{,} Y\}_{\mathfrak{g}_0}$ образ $X\otimes Y$ при отображении

$$(S(\mathfrak{g}_0)\otimes V)\otimes(S(\mathfrak{g}_0)\otimes W) \to S(\mathfrak{g}_0)\otimes V\otimes W:$$

$$(a\otimes b)\otimes(c\otimes d) \mapsto \{a,c\}_{\mathfrak{g}_0}\otimes b\otimes d.$$

Определим билинейные спаривания

$$c_{21}, c_{12} : (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*)\otimes\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^* :$$

$$c_{12}((a\otimes f)\otimes g) = ad^*_{\mathfrak{g}}\, a\cdot g\otimes f,$$

$$c_{21}((a\otimes f)\otimes g) = f\otimes ad^*_{\mathfrak{g}}\, a\cdot g.$$

Нам удобно будет пользоваться также специальными обозначениями для отображений

$$c_{ik}(\mathcal{U},\cdot) \quad \text{и} \quad c_{ik}(\cdot, f).$$

Положим

$$ad^*_{12}\,\mathcal{U}\cdot f = c_{12}(\mathcal{U}\otimes f), \qquad \mathcal{U}\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*,\ f\in\mathfrak{g}^*,$$

$$\Lambda_f\,\mathcal{U}_{12} = c_{12}(\mathcal{U}, f).$$

Аналогичные отображения определим и для алгебры $\mathfrak{g}_0$:

$${}^0c_{12}((a\otimes f)\otimes g) = ad^*_{\mathfrak{g}_0}\, a\cdot g\otimes f,$$

$${}^0ad^+\,\mathcal{U}\cdot f = {}^0c_{12}(\mathcal{U}\otimes f),$$

$${}^0\Lambda_f\,\mathcal{U}_{12} = {}^0c_{12}(\mathcal{U}\otimes f).$$

Определим еще отображение

$$\hbar_2 : (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*)\otimes\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^* : (a\otimes f)\otimes c \mapsto f(c)\,a.$$

Пусть $S : \mathfrak{g}_0^* \to \mathfrak{g}^*$ – тождественное отображение, $P_{\mathfrak{a}}$, $P_{\mathfrak{b}}$ – проектор на $\mathfrak{a}$ параллельно $\mathfrak{b}$ (соответственно, на $\mathfrak{b}$ параллельно $\mathfrak{a}$. Мы будем рассматривать S как элемент $\mathfrak{g}_0\otimes\mathfrak{g}^* \subset S(\mathfrak{g}_0)\otimes\mathfrak{g}^*$, а $P_{\mathfrak{a}}, P_{\mathfrak{b}}$ – как элементы $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$. Положим

$$r = \frac{1}{2}(P_{\mathfrak{a}} - P_{\mathfrak{b}}). \qquad (9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.

$$\{S \overset{\otimes}{,} S\}_{\mathfrak{g}_0} = ad^*_{21}\, r\cdot S - ad^*_{12}\, r\cdot S. \qquad (I0)$$

Доказательство состоит в несложном вычислении, которое мы опускаем.

Формула (9) дает геометрическую интерпретацию r-матрицы и объясняет ее связь с задачей факторизации. Неформально говоря, с любой хорошо поставленной задачей Римана можно связать r-матрицу – полуразность соответствующих ядер Коши; тем самым, метод r-матрицы может претендовать на ту же общность, что и метод одевающих преобразований. Аккуратное проведение этой идеи непросто; в настоящей работе мы ограничимся разбором частных случаев. Мы отложим обсуждение более сложных примеров, когда S в формуле (I0) уже не есть тождественное отображение, до § 4.

По первому аргументу $S \in \mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}^*$ – линейный функционал на $\mathfrak{g}_0^*$. Применяя обе части (I0) к $L \in \mathfrak{g}_0^*$, получаем специализацию формулы (I0)

$$ {}^{\circ}ad_{21} S \cdot L = -{}^{\circ}ad_{12} S \cdot L = ad^*_{21} r \cdot L - ad^*_{12} r \cdot L . \tag{II}$$

Связь с формулами (2),(3) и геометрической схемой § I очевидна.

Для иллюстрации r-матричного формализма выведем уравнения движения для гамильтониана h.

Полиномиальная функция $h \in P(\mathfrak{g}^*)$ задает отображение $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow S(\mathfrak{g}_0)$. Пусть $h(S)$-образ S при этом отображении. Дифференциал $dh(S) \in S(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}$. Имеем

$$\begin{gathered} \{h(S), \overset{1}{S}\} = tr_2 \overset{2}{d}h(S) \{\overset{2}{S} \underset{,}{\otimes} \overset{1}{S}\} = ad^* M \cdot S - \\ - tr_2 r_{21} \, ad^*_{\mathfrak{g}} dh(S) \cdot S, \\ M = tr_2 r_{12} \overset{2}{d}h(S) \in S(\mathfrak{g}_0) \otimes \mathfrak{g}. \end{gathered} \tag{I2}$$

В частности, если $h \in I$, то $ad^*_{\mathfrak{g}} dh(S) \cdot S = 0$ и

$$\{h(S), S\} = ad^*_{\mathfrak{g}} M \cdot S . \tag{I3}$$

Применяя обе части равенства (I3) к $L \in \mathfrak{g}_0^*$, получаем лаксово уравнение движения в форме (3). Формула (I2) для M-оператора впервые получена (в частном случае) в работе [I]. В силу (9) она эквивалентна обычной: в обозначениях (3)

$$M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-), \quad ad^+ M_+ \cdot L = ad^* M_- \cdot L .$$

Если алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна, так что $ad^* \approx ad$ и $r_{12} = -r_{21}$, формула (9) переходит в более привычную формулу типа (7). Ниже мы увидим, что в неультралокальном случае пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ важно различать. Так как r – матрица (8)-элемент $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*$, а не $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, как обычно, тождество Янга-Бакстера для r видоизменяется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Оператор $ad^* r$ удовлетворяет тождеству

$$ad^*_{23} r \circ ad^*_{12} r - ad_{32} r \cdot ad^*_{13} r + [ad^*_{13} r, ad^*_{12} r] = 0$$

Равенство (I3) – простое следствие тождества Якоби для скобки Ли на $\mathfrak{g}_0$. Для полупростых $\mathfrak{g}$ оно эквивалентно стандартному ([3] , [4]).

§ 3. Алгебры токов

В соответствии с [7] основной пример алгебры Ли, приводящей к уравнениям нулевой кривизны, состоит в следующем. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}} \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$, $\mathfrak{g} = C^{\infty}(S', \mathfrak{g})$. У алгебры $\mathfrak{g}$ существует семейство 2-коциклов

$$\omega_p(X,Y) = \int dx \frac{d\lambda}{2\pi i} \lambda^{-p} B(X(x,\lambda), \frac{dY}{dx}(x,\lambda)) \tag{15}$$

(здесь B – форма Киллинга на $\bar{\mathfrak{g}}$). Пусть ${}^p\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathbb{C}$ – соответствующие центральные расширения. Приведем $\mathfrak{g}$ в двойственность с собой при помощи скалярного произведения

$$(X,Y) = \int dx \frac{dt}{2\pi i} B(X(x,\lambda), Y(x,\lambda)).$$

Тогда ${}^p\hat{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g} + \mathbb{C}$, коприсоединенное представление ${}^p\hat{\mathfrak{g}}$ дается формулой

$$ad^* M (L,e) = (\lambda^p e \frac{dM}{dx} + [M,L], \circ). \tag{I6}$$

т.е. представляет собой калибровочное преобразование, связанное с заменой переменных в линейном дифференциальном уравнении

$$\lambda^p e \frac{d\varphi}{dx} = L\varphi. \tag{I7}$$

Параметр e имеет смысл заряда. Не ограничивая общности, можно считать $e=1$. Пусть $T(\lambda)$ – матрица монодромии уравнения (I7). Как показано в [7] , кольцо инвариантов алгебры ${}^p\mathfrak{g}$ порождено функционалами от ее собственных значений.

Алгебра $\mathfrak{g}=\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{C}[\lambda,\lambda^{-1}]$ допускает стандартное разложение на 2 подалгебры, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_+=\bar{\mathfrak{g}}\otimes\mathbb{C}[\lambda]$, $\mathfrak{g}_-=\bar{\mathfrak{g}}\otimes\lambda^{-1}\mathbb{C}[\lambda^{-1}]$. При $p\geqslant 0$ сужение коцикла ω_p на подалгебру $\mathfrak{g}_-=C^\infty(S^1,\mathfrak{g}_-)$ равно нулю; поэтому подалгебра ${}^p\hat{\mathfrak{g}}$ тоже расщепляется. Случай $p=0$ особенно интересен: сужение коцикла ω_0 на подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$ равно нулю; поэтому скобка Кириллова алгебры $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_\pm+\mathfrak{g}_-$ – ультралокальна.

Пусть $\{e_a\}$ – базис в $\mathfrak{g}_-$, ортонормированный относительно скалярного произведения B, $t=\sum_a e_a\otimes e_a$. Элементы $e_a^n=e_a\cdot\lambda^n$, $n\in\mathbb{Z}$, образуют базис в $\mathfrak{g}$, согласованных с разложением на подалгебры $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$. Двойственный базис $f_a^n= =e_a\lambda^{-n-1}$. Проекторы $P_+=\sum_{n\geqslant 0}e_a^n\otimes f_a^{-n}$, $P_-= =\sum_{n<0}e_a^n\otimes f_a^{-n}$ представляют собой просто ядра Коши, связанные с внутренностью и внешностью круга, $P_\pm=\pm\frac{t}{\lambda-\mu\mp i0}$. Таким образом,

$$r=\frac{1}{2}(P_+-P_-)=v.p.\frac{t}{\lambda-\mu}\,. \tag{I8}$$

На связь r -матрицы (I8) с аффинными алгебрами Ли впервые обратил внимание Н.Ю.Решетихин. r – матрица для алгебры $\mathfrak{g}$ есть

$$r(\lambda,x,\mu,y)=v.p.\frac{t}{\lambda-\mu}\,\delta(x-y). \tag{I8 }$$

Выпишем основное соотношение (I0) для данного случая, пользуясь формулой (I6) для оператора $ad^*_{{}^p\hat{\mathfrak{g}}}$:

$$\{S(\lambda,x),S(\mu,y)\}_{{}^p\hat{\mathfrak{g}}_0}=\left[\frac{t}{\lambda-\mu},S(\lambda,x)\otimes 1+1\otimes S(\mu,y)\right]\delta(x-y)+ \\ +\frac{t}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{\mu^p}-\frac{1}{\lambda^p}\right)\delta'(x-y). \tag{I9}$$

Для алгебры ${}^0\hat{\mathfrak{g}}$, отвечающей коциклу ω_p с $p=0$ члены с δ -функцией сокращаются, и мы получаем формулу (8), характерную для ультралокального случая. Важно заметить, однако, что именно члены с δ' -функцией позволяют проинтегрировать соотношение (I9) и получить скобки Пуассона для матрицы монодромии уравнения (I7): суть дела в том, что правая часть формулы (I9) – инфинитезимальное каноническое преобразование.

Дифференциальное уравнение

$$\lambda^p e\frac{d\varphi}{dy}=S(z,x;\lambda,y)\varphi \tag{20}$$

нуждается в некоторых комментариях: для алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ $S \in \mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}$; соответственно, решение $\psi_S \in \widehat{S}(\mathfrak{g}_0) \otimes G$, т.е. принадлежат по первому аргументу (пополненной) симметрической алгебре $\mathfrak{g}_0$. Определено естественное спаривание $\widehat{S}(\mathfrak{g}_0) \otimes \otimes G \times \mathfrak{g}_0^* \longrightarrow G$: если $L \in \mathfrak{g}_0^*$, то $\psi[L]$ совпадает с решением уравнения (I6). Как обычно, мы полагаем $T_S = \psi_S(2\pi)\,\psi_S(0)^{-1}$; при этом $T_S[L] = T_L$ - матрица монодромии уравнения (I7).

Вычислим скобки Пуассона $\{T(\lambda) \overset{\otimes}{,} S(\mu)\}_{\mathfrak{g}_0}$.

Для аккуратной формулировки нужно заметить, что по первому аргументу $\{T(\lambda) \overset{\otimes}{,} S(\mu)\}$ - элемент касательного пространства к группе G в точке T [*]; удобно писать все формулы в алгебре Ли группы G , т.е. в касательном пространстве к единице. Пусть $l_g : \mathfrak{g} \longrightarrow T_g G$ - дифференциал левого сдвига.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.

$$l_{T^{-1}}\{T \overset{\otimes}{,} S(\mu,x)\} = ad^*_{\mathfrak{g}} M \cdot S(\mu,x), \quad M = (\mathrm{Ad} \quad)\text{ч}. \tag{2I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулами (I2), выбрав T_S в качестве гамильтониана. Дифференциал dT_S вычисляется, как обычно, методом "вариации произвольной постоянной". Мы определим его формулой

$$\delta T_S = \int dy\, tr_2\, dT_S\,(1 \otimes \delta S(y))$$

Легко проверить, что

$$dT_S = l_T\,(1 \otimes \mathrm{Ad}\,\varphi)\,t. \tag{22}$$

Дифференциал удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dx} + [1 \otimes S . Y] = 0,$$

в силу которого второе слагаемое в формуле (I2) равно нулю.

Переход от формулы (2I) к скобкам Пуассона для матриц монодромии очевиден в силу следующей простой леммы.

ЛЕММА 9. Пусть $\delta S = ad^* M \cdot S$; тогда

$$\delta T_S = M(2\pi)\,T_S - T_S\,M(0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (22) для вариация матри-

---

[*] Бурбакист заметил бы, что речь идет о точке над кольцом $\widehat{S}(\mathfrak{g}_0)$

цы монодромии – полная производная. Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.

$$l_T^{-1}\otimes l_{T'}^{-1}\,\{T\overset{\otimes}{,}T'\}_{{}^{\rho}\hat{\mathfrak g}_0}=\frac{1}{2}(\lambda^{\rho}+\mu^{\rho})(r-\mathrm{Ad}\,T\otimes\mathrm{Ad}\,T'\cdot r). \qquad (23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неультралокальные скобки Пуассона приводят к различным осложнениям, примером которых может служить формула (23). Пусть φ, ψ – функционалы на алгебре ${}^{\rho}\hat{\mathfrak g}^*$. По определению их скобка Кириллова есть $\{\varphi,\psi\}(L)=(\Lambda_L d\varphi, d\psi)$, где $d\varphi, d\psi$ – дифференциалы функционалов φ, ψ, $(\ ,\ )$ – скалярное произведение в алгебре токов, $\Lambda_L=\lambda^{\rho}\frac{d}{dx}+ad\,L$ – кососимметричный линейный дифференциальный на окружности с периодическими граничными условиями. Функционал φ назовем гладким, если $d\varphi$ принадлежит области определения Λ_L. Нетрудно убедиться, что матрица монодромии не есть гладкий функционал (из-за нарушения граничных условий). При $\rho\neq 0$ матрица монодромии не есть гладкий функционал и на ${}^{\rho}\hat{\mathfrak g}_0^*$. В силу этого формула (23) – скобка Пуассона двух негладких функционалов – обладает при $\rho\neq 0$ патологическими свойствами – например, для нее не выполнено тождество Якоби. Указанная трудность является серьезным препятствием при переносе квантового метода обратной задачи на неультралокальный случай. Заметим еще, что спектральные инварианты матрицы монодромии – гладкие функционалы; поэтому формула (23), как обычно, приводит к инволютивности соответствующих интегралов движения.

§ 4. Редукция и r-матрицы

Чтобы получить по схеме § 3 конкретные динамические системы, нужно зафиксировать орбиту алгебры ${}^{\rho}\hat{\mathfrak g}_0$. Довольно часто эти орбиты оказываются слишком большими – связанные с ними нелинейные уравнения содержат слишком много независимых функций. Два основных метода понижения размерности фазового пространства – гамильтонова редукция и переход к неподвижным подалгебрам автоморфизмов (редукция в смысле А.В.Михайлова [12]). Ниже мы рассмотрим поведение r-матриц при этих редукциях.

1. Гамильтонова редукция. Основные примеры гамильтоновой редукции в рамках схемы § 1 см. в [13] , [14]). Здесь мы добавим к ним простое замечание: при редукции r-матрица не изменяется.

Мы сохраняем обозначения §§ 1,2. Чтобы избежать громоздких общих формулировок, будем рассматривать в основном элементарный пример редукции из [13] . Более интересный пример из [14] можно разобрать аналогично.

Зафиксируем орбиту $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_0^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подгруппа $H \subset G$ называется калибровочной (на $\mathcal{O}$) если сужения операторов $Ad_G^* h$ и $Ad_{G_0}^* h$, $h \in H$, на $\mathcal{O}$ совпадают. В этом случае гамильтонианы h_X, $X \in \mathfrak{h}$, тоже совпадают, и поэтому отображения моментов $\mu, {}^\circ\mu : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ согласованы на $\mathcal{O}$.

Вместо индивидуальной орбиты полезно бывает рассматривать целые семейства.

ПРИМЕР [I3]. Пусть ${}^1\mathfrak{g} = C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$; C – та же, что и в § 3. Зафиксируем регулярный элемент $\mathfrak{T}$ в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Элемент $\lambda^{-1}J$ – характер (одноточечная орбита) алгебры $\mathfrak{g}_+$. Пусть $\bar{H}$ – централизатор J в конечномерной группе $\bar{G}$, отвечающей алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, $H = C^\infty(S^1, \bar{H})$. Пусть $\mathcal{M}_J = \mathfrak{g}_-^* + \lambda^{-1}J \subset \mathfrak{g}^*$. Тогда H – калибровочная группа на $\mathcal{M}_J$.

Группа H коммутирует с гамильтонианами из I; поэтому ее полезно исключить посредством гамильтоновой редукции. Модель приведенного фазового пространства удобно строить, когда действие группы H допускает сечение. (Это выполнено в обоих примерах [I3], [I4]). В нашем примере пусть сечение Σ состоит из функций на окружности, постоянный член которых (по λ) принимает значения в $\mathfrak{h}^\perp$. (Стоит заметить, что действие группы H проективное: $\{h_X, h_Y\} = \omega_1(X, Y)$).

Нам удобно будет переписать основную формулу (10) в эквивалентных обозначениях, введенных в начале § 2:

$$\{S \overset{\otimes}{,} S\} = \Lambda_S r_{12} - \Lambda_S r_{21}. \tag{24}$$

Оператор Λ_S задает скобку Кириллова на $\mathfrak{g}^*$.

После редукции формула принимает вид

$$\{S \overset{\otimes}{,} S\}_{\circ D} = \Lambda_S^D r_{12} - \Lambda_S^D r_{21}; \tag{25}$$

здесь $\{\,,\}_{\circ D}$ – скобка Дирака на Σ, полученная редукцией из $\{\ \}_{\mathfrak{g}_0}$, Λ_S^D – оператор, задающий скобку Дирака, построенную по скобке Кириллова на $\mathfrak{g}^*$. Геометрический характер формулы (24) при редукции полностью сохранился.

2. Редукция по Михайлову. Пусть Γ – группа автоморфизмов $\mathfrak{g}$, оставляющая инвариантными подалгебры $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}^\Gamma \subset \mathfrak{g}$ – подалгебра инвариантов, $\pi_\Gamma : \mathfrak{g}^* \to (\mathfrak{g}^\Gamma)^*$ – естественная проекция. Пусть $S_\Gamma = \pi_\Gamma \circ S$, $S_\Gamma : \mathfrak{g}_0^* \to (\mathfrak{g}^\Gamma)^*$. Оператор

S_Γ сопоставляет точке фазового пространства автоморфный лаксов оператор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ

$$\{S_\Gamma \overset{\otimes}{,} S_\Gamma\}_0 = ad^*_{12} r_\Gamma \cdot S_\Gamma - ad^*_{21} r_\Gamma \cdot S_\Gamma ,$$

$$r_\Gamma = \sum_\gamma (1 \otimes \gamma) r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $S \in \mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}^*$. Группа Γ , очевидно, действует в $\mathfrak{g}^*$. Имеем:

$$\{S^{\gamma_1} \overset{\cdot}{\otimes} S^{\gamma_2}\} = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \{S ,\otimes S\} = ad^*_{12} r^{\gamma_1 \otimes \gamma_2} S^{\gamma} - ad^*_{21} r^{\gamma' \otimes \gamma} S^{\gamma'}$$

По предположению, подалгебры $\mathfrak{a}$, в инвариантны относительно Γ , поэтому $r^{\gamma \otimes \gamma} = r$. Теперь для вывода (25) достаточно сделать замену переменной суммирования.

Формула (25) интересна в следующем отношении: обычно, следуя [3] , [4] , используют (8) для определения скобки Пуассона. При этом уравнение Янга-Бакстера превращается в условие согласованности. Классификация его решений рассматривается и как классификация соответствующих скобок Пуассона. Из (25) видно, что разные r - матрицы могут быть связаны с одинаковыми скобками Пуассона.

К сожалению, условие инвариантности разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ исключает интересные случаи групп дробно-линейных преобразований. Пусть $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{g}} \otimes A(S^1)$, Γ - фуксова группа, сохраняющая единичную окружность. Очевидно, подалгебры $\mathfrak{g}_\pm \subset \mathfrak{g}$ функций, регулярных в круге (вне круга) инвариантны относительно Γ ; очевидно, $\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{g}_- = \overline{\mathfrak{g}}$; чтобы сделать подалгебры непересекающимися, нужно условие нормировки, однако Γ - инвариантного условия не существует. С этим связано то, что r - матрица

$$r(\lambda, \mu) = v.p. \frac{t}{\lambda - \mu} d\mu$$

инвариантна относительно одновременных дробно-линейных преобразований λ и μ только с точностью до одномерного оператора

$$r^{\gamma \otimes \gamma} = r + c_\gamma \qquad c_\gamma : A(S^1) \rightarrow \mathbb{C} .$$

$$c_\gamma f = \frac{c}{2\pi i} \int \frac{f(\lambda)}{c\lambda + d} d\lambda , \qquad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Поэтому непосредственная область применимости предложения ограничена следующими случаями:

1. Γ - группа многоугольника
2. Γ - решетка ранга 1 в $\mathbb{C}$.

Усреднение по конечным группам приводит к r - матрицам цепочек Тоды [4] в рациональной параметризации; усреднение по решеткам приводит к тригонометрическим r - матрицам работы [4], отвечающим $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \emptyset$. (Стоит подчеркнуть, что для общих тригонометрических r -матриц работы [4] геометрическая реализация неизвестна. В частности, неизвестно, существуют ли для них аналоги кирилловских орбит).

ЗАМЕЧАНИЕ. На роль усреднения в связи с r-матрицами впервые обратили внимание Л.Д.Фаддеев и Н.Ю.Решетихин[17].

§ 5. Эпилог

Мы видели, что специальные r-матрицы (9) выделены своей связью с одевающими преобразованиями. Оказывается, что эта связь сохраняется и для квадратичных скобок Пуассона, введенных в[18]. Подробное изложение этого сюжета выходит за рамки данной статьи. Здесь я ограничусь очень сжатыми формулировками.

Пусть $\bar{G} = GL(n)$; мы рассматриваем $\bar{G}$ как аффинную алгебраическую группу. Пусть $\bar{A}$ - аффинное кольцо $\bar{G}$, $G=\bar{G}[\lambda, \lambda^{-1}]$ - группа точек $\bar{G}$ над $\mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$, $A = \bar{A} \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$. Кольцо A можно снабдить структурой алгебры Ли, задав на образующих скобку Пуассона, которую мы, как обычно, запишем в тензорных обозначениях:

$$\{L(\lambda) \overset{\otimes}{,} L(\mu)\} = [r(\lambda,\mu), L(\lambda) \otimes L(\mu)] \qquad (26)$$

Тождество Якоби для скобки (26) вытекает из уравнений Янга-Бакстера для r (второе условие более сильное [19]). Скобка (26) задает на G структуру группы Гамильтона-Ли. (Эквивалентно: копроизведение в A - гомоморфизм алгебр Ли, см. [19]). Хорошо известно, что относительно скобок (26) центральные функции на находятся в инволюции. Оказывается, что для r -матрицы (18) динамика, определяемая центральной функцией на G, задается одевающим преобразованием.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I2. Пусть h - центральная функция на G. Уравнения движения на G, задаваемые гамильтонианом h относительно скобки Пуассона (26),(I8), имеют лаксов вид $L = [M_\pm, L]$, $M_\pm = \pm P_\pm(\Phi \cdot L)$, $\Phi = \mathrm{grad}\, h(L)$. Их решение дается формулой $L(t) = a(t) L(0) a(t)^{-1}$, где $\exp t\Phi L(\lambda) = a(t) b(t)^{-1}$ - решение задачи факторизации (ср.§ I).

Для разностных систем описанное лаксово уравнение - это уравнение Новикова для матрицы монодромии. Описание динамики в отдельных узлах решетки также не вызывает трудностей.

Аналогичное утверждение, видимо, имеет место, когда лаксов оператор и r-матрица подчинены условиям автоморфности типа рассмотренных в § 4. Общие r-матрицы не приводят к разумной задаче одевания.

В заключение укажем на нерешенные вопросы.

I. Связь с одевающими преобразованиями дает основание полагать, что r-матричная формулировка существует всегда, когда есть хорошо поставленная задача Римана для одевающих преобразований. Известны примеры задач Римана для лаксовых операторов, автоморфных относительно довольно общих групп, не сводящихся к (I) и (2); r- матрица для такой задачи не может быть получена усреднением.

2. Основные коммутационные соотношения квантового метода обратной задачи

$$L \otimes L' = R(L' \otimes L)R^{-1}$$

геометрически означают примерно то же, что и (I0): коммутации в квантовом пространстве („$\mathfrak{g}_0$") отвечает линейное преобразование во вспомогательном пространстве („$\mathfrak{g}^*$") . В связи с этим возникает вопрос об R-матричной формулировке квантового варианта схемы Адлера-Костанта [6] , [I5] .

Литература

I. Склянин Е.К. Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I980, т.95, с.55-I28.

2. Фаддеев Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - Препринт ЛОМИ Р-2-79, Л., I979, 57 с.

3. Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга-Бакстера. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I980, т.95, с.I29-I60.

4. Белавин А.А., Дринфельд В.Г. О решениях классического уравнения Янга-Бакстера для простых алгебр Ли. - Функц.анализ, I982, т.I6, в.3, с.I-29.

5. Adler M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for Kertecreg-de Vries type equations, Inventiones mathe., 1979, v.50, p.219-248.

6. Kostant B. Quantisation and representation theory. In: Proc. of the Research Sympasium on Representations of Lie group Oxford 1977, London Math.Soc.Lecture Notes Series, 1979, v.34,

7. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных, Докл.АН СССР, 1980, т.251, № 6.

8. Reyman A.G., Seemenov-Tian-Shansky M.A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II, Inventiones math., 1981, v.63, p.423-432.

9. Рейман А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли, Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.3-54.

10. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния II.Функц.анализ,1979,т.13,в.3, с.13-22.

11. Date E. et al. Transformation groups for soliton equations. - RIMS preprint - 394 Kyoto, 1982.

12. Mikhailov A.V. The reduction problem and the inverse scattering method, Physica D., 1981, v.3D, p.73-117.

13. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Семейство гамильтоновых структур, иерархия гамильтонианов и редукция для матричных дифференциальных операторов первого порядка. - Функц.анализ. 1980, т.11, в.2, с.77-78.

14. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. Докл.АН СССР, 1981, т.258, стр.11-14.

15. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. Reduction of Hamiltonian systems ... I, Inventiones math., 1979, v.54, p.81-100.

16. Lie S. Theorie der Transformations gruppen, III Abschn., Kap.25, § 115, F.(75). Lpz., 1893.

17. Faddeev L.D. Proc. of the "Ecole d'Eté de Physique Théorique", Les Houches. North Holland, 1982.

18. Склянин Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга-Бакстера. - Функц.анализ, 1982, т.16, в.4, с.27-34.

19. Дринфельд В.Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга-Бакстера. - Докл.АН СССР, 1982, т.267, № 5, с.1035-1041.

Д.А.Лейтес, М.А.Семенов-Тян-Шанский

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ

0. Схема построения интегрируемых систем, связанных с алгебрами Ли, была предложена Б.Костантом и М.Адлером. Подробное изложение ее усовершенствованного варианта и литературу см. в [I] (см.также статью М.А.Семенова-Тян-Шанского в настоящем сборнике). В предлагаемой заметке мы обсудим перенос схемы Адлера--Костанта на супералгебры Ли. Технические средства для такого обобщения и для построения примеров известны из структурной теории простых супералгебр Ли. Более серьезными являются психологические трудности: нелегко представить себе, что означает дифференциальное уравнение на окольцованном пространстве с нильпотентными в структурном пучке (а именно такое определение обычно используется при работе с супермногообразиями).

В настоящей заметке мы принимаем полностью элементарную точку зрения: вместо суперобъектов (супергрупп, супермногообразий) мы рассматриваем связанные с ними обычные объекты (Группы Ли, многообразия и др.). "Язык точек", позволяющий перейти к такому описанию вводится в п.I. (По необходимости, изложение здесь более алгебраизовано, т.к. нужно установить связь с "неэлементарными" определениями из [2]). Способ построения теоретико-множественных моделей объектов с нильпотентами в структурном пучке ("функтор точек") хорошо известен в алгебраической геометрии. Специфика задачи заставляет нас рассматривать сразу целый набор теоретико-множественных моделей, а не одну, как обычно.

I. Пусть $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \mathcal{O})$ - супермногообразие [2] . (В этой работе мы рассматриваем только алгебраические супермногообразия над $\mathbb{C}$). Для любой коммутативной супералгебры C определим множество $\mathcal{M}(C) = \mathcal{M}or(C, \mathcal{M})$. Морфизму супермногообразий $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ отвечает отображение множеств $\alpha(C) : \mathcal{M}(C) \longrightarrow \mathcal{N}(C)$; при этом морфизму $\varphi : C \longrightarrow C'$ соответствует такие отображения $\varphi^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(C') \longrightarrow \mathcal{M}(C)$, $\varphi^{N} : \mathcal{N}(C') \longrightarrow \mathcal{N}(C)$, что $\varphi^{\mathcal{M}} \alpha(C) = \alpha(C') \varphi^{\mathcal{N}}$. Супермногообразие $\mathcal{G}$ - супергруппа тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{G}(C)$ - группы и отображения $\varphi^{\mathcal{G}}$, $\varphi \in \mathcal{M}or(C, C')$ - гомоморфизмы групп.

Действием a супергруппы $\mathcal{G}$ на супермногообразии $\mathcal{M}$ называется набор действий $a(C) : \mathcal{G}(C) \times \mathcal{M}(C) \longrightarrow \mathcal{M}(C)$, согласованный с заменами $\varphi : C \longrightarrow C'$.

ПРИМЕРЫ. I. Линейное супермногообразие размерности (n,m) $\mathcal{V}^{n,m} = (V_{\bar 0}, O_{V_0} \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda(V_{\bar 1}))$, где $V_{\bar 0}, V_{\bar 1}$ – линейные пространства размерности n, m, соответственно. Пусть $V = V_{\bar 0} \otimes V_{\bar 1}$ – $\mathbb{Z}_2$ – градуированное пространство. Тогда $\mathcal{V}(C) = (V \otimes_{\mathbb{C}} C)_{\bar 0}$.

2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar 0} \oplus \mathfrak{g}_{\bar 1}$ – супералгебра Ли над $\mathbb{C}$. Тогда $\mathfrak{g}(C) = (\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} C)_{\bar 0}$; очевидно, $\mathfrak{g}(C)$ наделена (канонической) структурой алгебры Ли над $\mathbb{C}$. Коприсоединенные представления алгебр Ли $\mathfrak{g}(C)$ согласованы с морфизмами $\varphi : C \longrightarrow C'$ и задают представление супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в смысле приведенного выше определения.

3. Супергруппа $\mathcal{G}\mathcal{L}(p|q)$ представляет функтор, который коммутативной супералгебре C сопоставляет группу $GL(p|q;C)$ четных обратимых матриц порядка (p,q) с элементами из C.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для данного супермногообразия $\mathcal{M}$ достаточно вместо произвольной коммутативной супералгебры C рассмотреть достаточно большую алгебру Грассмана Λ. Для каждого супермногообразия число переменных в Λ свое, поэтому удобно не фиксировать его, а считать "очень большим". Уточним, в каком смысле супермногообразие определяется своими Λ – точками.

ЛЕММА. Пусть $\alpha, \beta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ – морфизмы супермногообразий, $\alpha(n), \beta(n) : \mathcal{M}(\Lambda(n)) \longrightarrow \mathcal{N}(\Lambda(n))$ – соответствующие отображения множеств (i) Если $\dim \mathcal{M} = (p,q)$, $n \geqslant q$, то из $\alpha(n) = \beta(n)$ следует $\alpha = \beta$. (ii) Пусть набор отображений $\tilde{\alpha}(n) : \mathcal{M}(\Lambda(n)) \longrightarrow \mathcal{N}(\Lambda(n))$ определен при $n \geqslant q$ и каждому гомоморфизму $\varphi : \Lambda(n) \longrightarrow \Lambda(n')$ соответствует отображение множеств $\varphi^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(\Lambda(n')) \longrightarrow \mathcal{M}(\Lambda(n))$, $\varphi^{\mathcal{N}} : \mathcal{N}(\Lambda(n')) \longrightarrow \mathcal{N}(\Lambda(n))$, такие, что $\varphi^{\mathcal{M}} \tilde{\alpha}(n) = \tilde{\alpha}(n') \varphi^{\mathcal{N}}$. Тогда существует морфизм супермногообразий $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ такой, что $\alpha(n) = \tilde{\alpha}(n)$.

Использование языка Λ – точек позволяет почти полностью изгнать из рассмотрения суперобъекты. Например, схема Адлера-Костанта для супералгебр Ли – это обычная схема, применяемая к специальному классу алгебр Ли – Λ – точкам супералгебр Ли. Структурная теория супералгебр Ли используется для описания разложения на подалгебры, построения инвариантов коприсоединенного действия, орбит и т.п.

Удобство языка Λ – точек по сравнению с классическим языком окольцованных пространств отчетливо видно при рассмотрении действия супергрупп на супермногообразиях. Орбиты такого действия доставляют примеры объектов, которые хочется считать подсупермногообразиями, но которые не являются таковыми (не являются окольцованными пространствами).

ПРИМЕР. Рассмотрим $SO(n)$ - орбиты в стандартном n -мерном представлении. Будем теперь считать пространство представления $(0,n)$ -мерным (а действие группы понимать, например, на языке Λ - точек, описанном выше). Тогда все орбиты, кроме тривиальной, вообще не имеют точек над $\mathbb{C}$!

G - супермногообразием назовем подфунктор функтора из категории CSA коммутативных супералгебр в категорию множеств $Sets$, представленного супермногообразием [*]. Таким образом, орбита, не являющаяся супермногообразием, будет G - супермногообразием.

Возможность перенесения всех дифференциально-геометрических конструкций на G -супермногообразия неясна. Это не приводит к трудностям при изучении дифференциальных уравнений: в соответствии с нашим общим подходом мы рассматриваем только обычные дифференциальные уравнения на множестве Λ - точек. Для G -супермногообразий множество Λ - точек - хорошо определенное обычное многообразие. (Например, если речь идет об орбите коприсоединенного действия, это обычная орбита группы G_Λ). При этом возникают следующие вопросы: о "функториальности" динамики, т.е. о связи решений дифференциального уравнения в разных Λ -оболочках и о представимости различных функторов в наших категориях. К счастью, эти вопросы не важны при элементарном исследовании дифференциальных уравнений.

Важно заметить, что всякое дифференциальное уравнение на $\mathfrak{g}^*_\Lambda$ при помощи разложений по базису в Грассмановой алгебре может быть сведена к системе дифференциальных уравнений, такой, что все уравнения, кроме подстилающих (т.е. связанных с четной частью супералгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ суть линейные неавтономные уравнения [4] .(Ср.примеры суперцепочек Тоды в статье [II]). Та-

---

[*] По-видимому, именно такие объекты имеются в виду в работе [3] . Нам не удалось придать точный смысл трудным определениям этой работы (не исключено, что автор имеет в виду не G -супермногообразия, а просто любые функторы $CSA \longrightarrow Sets$. Бессмысленность такого определения видна уже для обычных многообразий).

ким образом, переход к супералгебрам Ли не слишком увеличивает наши возможности: новые нелинейные уравнения - расширения старых с помощью линейных неавтономных уравнений. Такой механизм хорошо знаком специалистам по методу обратной задачи. Оправдание суперизации схемы Адлера - Костанта - в ее геометрическом характере и возможности бескоординатной трактовки довольно сложных систем (которые в координатах, связанных с базисом в Λ, не так-то просто даже выписать).

2.Для применения схемы Адлера - Костанта и алгебрам Ли $\mathfrak{g}_\Lambda$ нам нужны следующие объекты.

(I)Разложение $\mathfrak{g}_\Lambda$ в линейную сумму двух подалгебр Ли. Мы будем рассматривать естественные разложения, порожденные разложением супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейную сумму двух подсупералгебр Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$. При этом имеем, очевидно, $\mathfrak{g}_\Lambda = \mathfrak{a}_\Lambda + \mathfrak{b}_\Lambda$.

(2) Описание орбит алгебры $(\mathfrak{g}_\Lambda)_0 = (\mathfrak{g}_0)_\Lambda = \mathfrak{a}_\Lambda \oplus \mathfrak{b}_\Lambda$

(3) Описание инвариантов коприсоединенного действия алгебры $\mathfrak{g}_\Lambda$.

Пусть $\mathfrak{g}$ - контраградиентная простая супералгебра Ли. Примеры таких супералгебр над $\mathbb{C}$ доставляют классические конечномерные супералгебры Ли и ассоциированные с их внешними автоморфизмами бесконечномерные супералгебры Ли - аналоги алгебр Каца--Муди, см. [5], а также сжатия некоторых из них и супералгебры Ли струнных теорий $\mathcal{W}(2)$, $\mathcal{Y}(2)$, $\mathcal{K}(n)$ при $0 \leq n \leq 3$, см. [6]. Разложения супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ в сумму подсупералгебр Ли канонически связаны с ее $\mathbb{Z}$-градуировками. Отметим, что в отличие от алгебр Ли у простых конечномерных супералгебр Ли есть несколько неэквивалентных систем простых корней и, следовательно, существенно разные главные $\mathbb{Z}$ - градуировки. Все $\mathbb{Z}$ - градуировки перечислены в [7].

При описании инвариантов конечномерных простых супералгебр Ли полезно отождествить супералгебру с ее двойственным пространством (в том случае, когда такое отождествление возможно). Список инвариантных полиномов на конечномерных простых супералгебрах Ли см. в [8]. По большей части, они имеют вид $\mathrm{str}\, \rho(X)^n$ или $\mathrm{otr}\, \rho(X)^n$ для некоторого представления ρ, где str - суперслед [2], а $\mathrm{otr}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, B$ - нечетный, или странный след. На супералгебрах Ли серий W, S, $S\Pi$ инвариантных полиномов, кроме констант, нет.

Следует особо остановиться на супералгебрах $\mathfrak{q}(n)$. Для них инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{q}(n)$ нечетно; поэтому канонический изоморфизм $\mathfrak{q} \simeq \mathfrak{q}^*$, индуцированный этой формы – это оператор $\mathbb{T}$ смены четности. При этом скобка Кириллова на $\mathfrak{g}^*$ переходит в так называемую скобку Бютан или нечетную скобку

$$\{f,g\}(X)=(X(\mathbb{T}([\mathbb{T}df_X,\mathbb{T}dg_X])),$$

$$f,g\in E(\mathfrak{g})\overset{\mathrm{def}}{=}S(\mathbb{T}(\mathfrak{g})),\ X\in\mathfrak{g}.$$

Переход от инвариантов супералгебры Ли к инвариантам коприсоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}_\Lambda$ очевиден в силу следующего простого утверждения.

ЛЕММА. Пусть $\varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$ – инвариантный полином на двойственном пространстве к супералгебре Ли $\mathfrak{g}$. Для $X\in\mathfrak{g}_\Lambda$, $\varepsilon\in\Lambda$ пусть $\varphi_\varepsilon(X)=\int_\Lambda\varepsilon\varphi(X)$. Тогда φ_ε – инвариантный полином на $\mathfrak{g}^*_\Lambda$; а отображение $\Lambda\times I(\mathfrak{g}^*)\longrightarrow I(\mathfrak{g}^*_\Lambda)$: $(\varepsilon,\varphi)\longmapsto\varphi_\varepsilon$ сюрьективно.

Примеры простейших интегрируемых систем, связанных с конечномерными простыми супералгебрами, приведены в работе Р.Ю.Кирилловой, публикуемой в этом сборнике. Более интересны системы, связанные с бесконечномерными простыми супералгебрами Ли и двумеризованные системы типа рассмотренных в [9] . Рассмотрение этих систем в духе метода Адлера – Костанта использует центральное расширение супералгебры токов (для обычных алгебр токов двумеризация описана в [10]). Наиболее важной задачей является при этом отбор интересных уравнений.

Литература

I. Рейман А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.3–54.

2. Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. – УМН, 1980, т.35, в.I, с.3–57.

3. Rogers A. A global theory of supermanifolds. – J.Math. Phys., 1980, v.21, p.1352–1365. Рж. Мат., 1980, 12А582.

4. Шандер В.Н. Теорема Лиувилля на супермногообразиях. – Функц.анализ,1983, т.17, в.I.

5. Лейтес Д.А., Серганова В.В., Фейгин Б.Л. Супералгебры Каца–Муди. – В кн.: Труды П-го международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике. М., 1983.

6. Лейтес Д.А., Фейгин Б.Л. Новые супералгебры Ли струнных теорий. – В кн.: "Труды II-го международного семинара "Теоретико-групповые методы в физике". М., 1983.

7. Серганова В.В. Автоморфизмы простых конечномерных супералгебр Ли. – Изв.АН СССР, сер.матем., 1983, т.47, № 3.

8. Сергеев А. Инвариантные полиномы на простых супералгебрах Ли. Докл.АН НРБ, 1983, т.115, № 1.

9. Olshanetski M. Supersymmetric two-dimensional Toda lattice. – Preprint ITEP, 1982, Moscow: ITEP, 1982.

10. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения – Докл.АН СССР, 1980, т.251, № 6.

11 Кириллова Р.Ю. Явные решения для суперизованных цепочек Тоды, Зап.науч.семин.ЛОМИ, наст.сб.

Р.Ю.Кириллова

ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ СУПЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

0. В настоящей работе рассматриваются одномерные незамкнутые цепочки Тобы, построенные по системам простых корней простых супералгебр Ли $sl(m|n), osp(m|2n), q(n)$. Необходимые сведения см. в [1] , [5] . Мы будем следовать обобщению "схемы Адлера-Костанта" на супералгебры Ли, описанному в [2] . Решения для цепочек Тоды, связанных с супералгебрами $sl(m|n), osp(m|2n)$ выражены через "суперминоры" экспоненты матрицы, зависящей от начальных данных. Для классической незамкнутой цепочки Тоды, связанной с алгеброй Ли $sl(n)$, решения в аналогичных терминах выписаны в [7] . Мы исследуем также полноту потоков и поведение системы при $t \to \infty$.

Интегрируемость цепочек Тоды, связанных с $sl(n|m)$ и с $osp(m|2n)$ вытекает из сильной общей теоремы Шандера [4] , Случай цепочки, связанной с $q(n)$, не охватывается этой теоремой. В настоящей работе интегрируемость этой системы доказана: предъявлены интегралы в инволюции и выписаны явные решения.

Я благодарна Д.А.Лейтесу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А.Г.Рейману и М.А.Семенову-Тян-Шанскому за полезные обсуждения.

1. Пусть Λ - грассманова алгебра с конечным числом образующих, $E(\Lambda) = (E \otimes \Lambda)_{\bar 0}$ - грассманова оболочка линейного суперпространства E , $G(\Lambda)$ - группа Ли, которую функтор, представимый супергруппой G , сопоставляет коммутативной супералгебре Λ ; например,

$$SL(m|n)(\Lambda)=\left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Mat(m,n;\Lambda)_{\bar 0}\ ;\ Ber\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=1\right\},$$

$$OSp(m|2n)(\Lambda)=\left\{X\in SL(m|2n)(\Lambda);\ {}^{st}XB_{m,2n}X=B_{m,2n}\right\},$$

где

$$B_{m,2n}=\begin{pmatrix}\sigma_m&0&0\\0&0&1_n\\0&-1_0&0\end{pmatrix},\quad \sigma_m=\begin{pmatrix}0&\dots&1\\&\cdot^{\cdot^{\cdot}}&\\1&&0\end{pmatrix},\ \sigma_m\in Mat(m)\ .$$

Пусть $\mathfrak{g}$ - супералгебра Ли супергруппы Ли G .

Мы будем отождествлять $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ при помощи формы Киллинга $\langle X,Y\rangle = \mathrm{str}\, X\cdot Y$ для $\mathfrak{sl}(m|n)$ и $\mathfrak{osp}(m|2n)$, а для $\mathfrak{q}(n)$ и $\pi(\mathfrak{q}(n))^*$ при помощи нечетной формы $\langle X,Y\rangle = \mathrm{otr}\, XY$, где $\mathrm{otr}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\, B$. (Здесь π - функтор смены четности). Каждая система П простых корней супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ задает на $\mathfrak{g}$ $\mathbb{Z}$ - градуировку и, тем самым, разложение $\mathfrak{g}$ как линейного суперпространства на две подалгебры, $\mathfrak{g} = \mathfrak{N}_+ + \mathfrak{g}_-$, где $\mathfrak{N}_+ = \sum_{i>0} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_- = \sum_{i\leq 0} \mathfrak{g}_i$. В группе $G(\Lambda)$ этим подалгебрам соответствуют связные подгруппы $N_+(\Lambda)$ и $Q_-(\Lambda)$. В соответствии с этим разложением на $\mathfrak{g}$ вводится новая структура супералгебры Ли со скобкой

$$[a_1+b_1,\, a_2+b_2]_0 = [a_1,a_2]-[b_1,b_2],\ a_1,a_2\in\mathfrak{N}_+,\ b_1,b_2\in\mathfrak{g}_- .$$

Скобка Пуассона на пространстве $\mathfrak{g}_0(\Lambda)^*$ задается стандартной формулой $\{\varphi,\psi\}(\xi) = \langle \xi, [d\varphi(\xi), d\psi(\xi)]_0\rangle$. Эта скобка невырождена на орбитах коприсоединенного представления группы $G_0(\Lambda) = N_+(\Lambda)\times Q_-(\Lambda)$.

Под суперизованной обобщенной цепочкой Тоды мы будем понимать (обычную) гамильтонову систему, которая для каждой грассмановой алгебры Λ задается гамильтонианом $h = \frac{1}{2}\langle L,L\rangle$ на орбите $f + \mathcal{O}_e$ элемента $f + e$, где $f = \sum_{\alpha\in\Pi} c_\alpha\cdot e_\alpha \in \mathfrak{g}_0(\Lambda)$ характер на алгебре Ли $\mathfrak{N}_+(\Lambda)$, $e = \sum_{\alpha\in\Pi} d_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{g}_0^*(\Lambda)$. При этом предполагается, что подстилающие элементы $\tilde{f}, \tilde{e}$ отличны от 0, а коэффициенты c_α, d_α при корневых векторах $e_{-\alpha}$, e_α, соответствующих нечетным корням α в системе простых корней П, можно включить в систему образующих алгебры Λ. Уравнения движения имеют Лаксов вид $L = [L, L_+]$. Здесь " + " обозначает проекцию на $\mathfrak{N}_+(\Lambda)$.

$\mathfrak{g}_-(\Lambda)$.

2. Для $\mathfrak{sl}(m|n)$, $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ и $\mathfrak{osp}(2m+1|2n)$ каждая система простых корней задается некоторым подмножеством τ во множестве индексов $I = \{1,\dots,m+n\}$. Мы полагаем $p(i) = \bar{0}$, если $i\in I\setminus\tau$, $p(i) = \bar{1}$, если $i\in\tau$, $p(-i) = p(i)$ и $p(0) = \bar{0}$. Множество I таким образом, разбито на отрезки, состоящие из последовательных индексов одной и той же четности. Через m_i (соответственно, n_j) обозначается длина i-ого "четного" соответственно, j-ого "нечетного" отрезка.

ТЕОРЕМА 2.I. Гамильтоновы системы, перечисленные в таблице I являются вполне интегрируемыми. Интегралы движения имеют вид $\mathrm{otr}\, L^k$ для $\mathfrak{q}(n)$, $\mathrm{str}\, L^k$ для $\mathfrak{sl}(m|n)$, $\mathfrak{osp}(m|2n)$.

Решения даются формулами из таблицы 2. Нумерация в таблице

2 соответствует нумерации в таблице I.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ собственные значения матрицы $L(0)$. Для $sl(m|n)$ и $osp(m|2n)$ они являются четными элементами грассмановой алгебры, для $q(n)$ – произвольными. Тогда решения для суперизованных цепочек Тоды являются рациональными выражениями от $\exp t\lambda_1, \dots, \exp t\lambda_k$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под собственными значениями матрицы A мы понимаем элементы (они определены неоднозначно) диагональной матрицы D, к которой можно привести матрицу A, если все собственные значения подстилающей матрицы $\tilde{A}$ различны: $A = C^{-1}DC$.

Из формул, приведенных в таблице 2, видно, что аналитические выражения для решений могут быть получены, если явно вычислены элементы матрицы $\exp tL(0)$. Можно показать, что вычисление последней сводится к вычислению блочнодиагональной матрицы $\exp tL(0)$, , которая вычисляется, если ее блоки имеют порядок 2 или I. Пример.

Супералгебра Ли	Схема Дынкина	Матрица	Уравнения движения	Алгебра Ли	Гамильтониан Н
$sl(2\|1)$	$\bigcirc\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\otimes$	$\begin{pmatrix} p_1 & a & 0 \\ 1 & p_2 & \alpha \\ 0 & \xi & p_1+p_2 \end{pmatrix}$	$\dot{p}_1 = -a$ $\dot{p}_2 = a + \xi\alpha$ $\dot{a} = (p_1 - p_2)a$ $\dot{\alpha} = -p_1\alpha$	$gl(2)$	$\frac{1}{2}\left[p_1^2 + p_2^2 - (p_1+p_2)^2\right] +$ $+ a + \alpha\xi$

Решения имеют вид:

$$a(t) = \frac{a}{\left(ch\frac{tc}{2} - \frac{p}{c} sh\frac{tc}{2}\right)^2} + \frac{a}{d}\xi\alpha \cdot \frac{\frac{s_2}{c^2} t\left(p\,ch\frac{tc}{2} - c\,sh\frac{tc}{2}\right) + f(t)}{\left(ch\frac{tc}{2} - \frac{p}{a} sh\frac{tc}{2}\right)^3},$$

$$f(t) = -ch^3\frac{tc}{2} + \left(1 + \frac{s_i + 4s_2}{c^2}\right) ch\frac{tc}{2} sh^2\frac{tc}{2} + \frac{(2p-q)c^2 - ps_1}{c^3} sh\frac{tc}{2} ch^2\frac{tc}{2} -$$

$$- \frac{p^2 q + 2p_1 c^2}{c^3} sh^3\frac{tc}{2} + e^{-tq/2}\left[\frac{a - p_2^2}{d} ch^2\frac{tc}{2} + \left(\frac{s_2}{d} + \frac{p^2}{c^2}\right) sh^2\frac{tc}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{2p_2 s_2}{cd} ch\frac{tc}{2} sh\frac{tc}{2}\right] + \frac{p_2}{d}\left(c\,sh\frac{tc}{2} - p\,ch\frac{tc}{2}\right);$$

$$\alpha(t) = \alpha e^{-tq/2}\left(ch\frac{tc}{2} - \frac{p}{c} sh\frac{tc}{2}\right);$$

$$p_1(t) = p_1 - \frac{2\frac{a}{c} \cdot sh\frac{tc}{2}}{ch\frac{tc}{2} - \frac{p}{c} sh\frac{tc}{2}} - \frac{a}{d}\xi\alpha\left[\frac{e^{-tq/2} \cdot \frac{1}{d}\left(p_2\left(ch\frac{tc}{2} - e^{tq/2}\right) - \frac{s_2}{c} sh\frac{tc}{2}\right)}{\left(ch\frac{tc}{2} - \frac{p}{c} sh\frac{tc}{2}\right)^2}\right. +$$

$$+\left(\frac{p_1}{c^2}(\operatorname{ch} tc-1)-\frac{s_1}{2c^3}\operatorname{sh} tc+\frac{s_2}{c^2}t\right)\left(\operatorname{ch}\frac{tc}{2}-\frac{p}{c}\operatorname{sh}\frac{tc}{2}\right)^{-2}\Bigg];$$

$$p_2(t)=p_2+\frac{2\frac{a}{c}\cdot\operatorname{sh}\frac{tc}{2}}{\operatorname{ch}\frac{tc}{2}-\frac{p}{c}\cdot\operatorname{sh}\frac{tc}{2}}+\frac{a}{d}\xi\alpha\left(\frac{p_1}{c^2}(\operatorname{ch} tc-1)-\frac{s_1}{2c^3}\operatorname{sh} tc+\frac{s_2}{c^2}t\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{tc}{2}-\frac{p}{c}\operatorname{sh}\frac{tc}{2}\right)^{-2}+\xi\alpha\frac{e^{-tq/2}}{d}\left[p_2\left(\operatorname{ch}\frac{tc}{2}-e^{tq/2}\right)-\frac{s_2}{c}\operatorname{sh}\frac{tc}{2}\right]\left[\frac{a}{d\left(\operatorname{ch}\frac{tc}{2}-\frac{p}{c}\operatorname{sh}\frac{tc}{2}\right)^2}+1\right].$$

Здесь

$$a=a(0),\quad \alpha=\alpha(0),\quad p_1=p_1(0),\quad p_2=p_2(0),$$

$$p=p_1-p_2,\ q=p_1+p_2,\ c=\sqrt{p^2+4a},\ d=a-p_1p_2,\ s_1=pp_1+2a,\ s_2=pp_2-2a.$$

3. Пополнение потоков и поведение систем при $t\to\pm\infty$. Введем следующие обозначения: $\widetilde{G}^\tau$ – связная подгруппа в подстилающей группе $\widetilde{G}$ рассматриваемой супергруппы G, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}^\tau$, с системой корней которой связана подстилающая система (см. таблицу I), $G^\tau(\Lambda)=\pi^{-1}(\widetilde{G}^\tau)$, где $\pi: G(\Lambda)\to\widetilde{G}$ естественная проекция на подстилающую подгруппу, $\mathfrak{g}^\tau(\Lambda)$ – алгебра Ли группы $G^\tau(\Lambda)$, $N_+^\tau=N_+(\Lambda)\cap G^\tau(\Lambda)$, $Q_-^\tau(\Lambda)=Q_-(\Lambda)\cap G^\tau(\Lambda)$, $\mathcal{N}_-^\tau(\Lambda)=(\mathcal{N}_+^\tau(\Lambda))^*$, $\mathfrak{g}_+^\tau(\Lambda)=(\mathfrak{g}_-^\tau(\Lambda))^*$.

Поток суперизованной цепочки Тоды лежит на орбите элемента $f+e\in\mathfrak{g}^\tau(\Lambda)$ в коприсоединенном представлении группы $G_0^\tau(\Lambda)=N_+^\tau(\Lambda)\times Q_-^\tau(\Lambda)$. Следуя работе [3], рассмотрим действие группы $G_0^\tau(\Lambda)$ на $G^\tau(\Lambda)$, определенное формулой

$$(n,q)g=ngq^{-1}.$$

Здесь $n\in N_+^\tau(\Lambda)$, $q\in Q_-^\tau(\Lambda)$, $g\in G^\tau(\Lambda)$. Это действие продолжается до пуассоновского действия группы $G_0^\tau(\Lambda)$ на кокасательном расслоении $T^*G^\tau(\Lambda)$. Отображение момента $\Phi: T^*G^\tau(\Lambda)\to\mathcal{N}_-^\tau(\Lambda)\oplus\mathfrak{g}_+^\tau(\Lambda)$, соответствующее рассматриваемому действию имеет вид [3]

$$\Phi(g,\xi)=\mathrm{Pr}_{\mathcal{N}_-^\tau(\Lambda)}\xi\oplus\mathrm{Pr}_{\mathfrak{g}_+^\tau(\Lambda)}(-\mathrm{Ad}\,g^{-1}\xi),$$

где $g\in G^\tau(\Lambda)$, $\xi\in(\mathfrak{g}^\tau(\Lambda))^*$, а кокасательное расслоение $T^*G^\tau(\Lambda)$ отождествлено с $G^\tau(\Lambda)\times(\mathfrak{g}^\tau(\Lambda))^*$ с помощью правых сдвигов. Для $f\in\mathcal{N}_-^\tau(\Lambda)$, $c\in\mathfrak{g}_+^\tau(\Lambda)$ обозначим $\mathcal{M}_{f,c}=\Phi^{-1}(f\oplus c)$. Пусть $Q_c^\tau(\Lambda)$ – стационарная подгруппа элемента c.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Пусть элемент $f\in\mathcal{N}_-^\tau(\Lambda)$ таков, что подстилающий элемент $\widetilde{f}\in\mathcal{N}$ является главным нильпотентным. Тогда

$\mathcal{M}_{f,c}$ - гладкое подмногообразие в $T^*G^\tau(\Lambda)$.

Группа $N_-^\tau(\Lambda)\times Q_c^\tau(\Lambda)$ действует на $\bar{\mathcal{M}}_{f,c}$ свободно и собственно, так что определено факторма многообразие

$$\bar{\mathcal{M}}_{f,c} = N_+^\tau(\Lambda) \setminus M_{f,c} / Q_c^\tau(\Lambda) .$$

Согласно лемме 2.2 работы [3] орбита $\mathcal{O}_c$ вкладывается в качестве открытой области в приведенное многообразие $\bar{\mathcal{M}}_{f,c}$

ТЕОРЕМА 3.I. Дополнение $\bar{\mathcal{M}}_{f,c} \setminus \mathcal{O}_c$ является объединением подмногообразий меньшей размерности и поток суперизованной цепочки Тоды трансверсален к этим многообразиям.

ТЕОРЕМА 3.2. Поток суперизованной цепочки Тоды полон тогда и только тогда, когда полон подстилающий поток.

СЛЕДСТВИЕ 3.I. Пусть P - система простых корней алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^\tau$, θ - автоморфизм Картана (минус супертраспонирование в $\tilde{\mathfrak{g}}^\tau$. Тогда, если элементы f и e таковы, что $\tilde{e} = \sum_{\alpha\in P} e_\alpha$, $\tilde{f} = -\theta\tilde{e}$, то поток суперизованной цепочки Тоды на орбите элемента $f+e$ полон.

Цепочка Тоды, связанная с супералгеброй Ли $\mathfrak{g}(n)$, во многом аналогична классической цепочке Тоды. В частности, если удовлетворяются условия, сформулированные в следствии 3.I, то можно ввести замену координат $a_i = e^{x_i} e^{-x_{i+1}}$. Тогда уравнения примут вид

$$\ddot{x}_i = c_{i-1} e^{x_{i-1}} e^{-x_i} - e^{x_i} e^{-x_{i+1}} c_i , \qquad (I)$$

где предполагаются формальные граничные условия $x_0 = -\infty, x_{n+1} = +\infty$. Рассматриваемую систему, таким образом, можно представлять себе как механическую систему из n точек в пространстве, размерность которого равна размерности грассмановой алгебры Λ. Расписывая уравнения (I) по компонентам разложения по базису в грассмановой алгебре Λ получим

$$\ddot{x}_i^{(\alpha)} = e^{x_{i-1}^{(0)} - x_i^{(0)}} \left[x_{i-1}^{(\alpha)} - x_i^{(\alpha)} + P_i(x_{i-1}^{(\beta)}, x_i^{(\beta)}) \right] + \qquad (2)$$
$$+ e^{x_{i+1}^{(0)} - x_i^{(0)}} \left[x_{i+1}^{(\alpha)} - x_i^{(\alpha)} + Q_i(x_{i+1}^{(\beta)}, x_i^{(\beta)}) \right] .$$

Здесь $\alpha = (\alpha_k)$, $\beta = (\beta_\ell)$ - мультииндексы, $|\beta| < |\alpha|$, P_i, Q_i - некоторые многочлены степени меньшей $|\alpha|$. Уравнения (2) позволяют интерпретировать цепочку Тоды, связанную с супералгеброй Ли $\mathfrak{g}(n)$ как систему, состоящую из нескольких подсистем X_α, каждая из которых представляет собой систему частиц на "уровни" соответствующие стандартной $\mathbb{Z}$ - градуировке в грассмановой алгебре$(\deg \xi_i = 1)$. Взаимодействие частиц на i - ом уровне зависит от состояния систем на уровнях, меньших i - ого.

ТЕОРЕМА 3.3. При $t \to \pm\infty$, $\dot{x}_i^{(\alpha)} \to const$, то есть в далеком прошлом и в далеком будущем поведение частиц близко к поведению свободных частиц.

Для цепочек Тоды, связанных с супералгебрами Ли $sl(m|n)$ и $osp(m|2n)$ тоже можно предложить некую механическую интерпретацию. Рассмотрим для примера цепочку Тоды для $sl(m,n)$, в случае, когда в системе простых корней только один корень нечетный. Рассмотрения в остальных случаях аналогичны, но более громоздки. Матрица L в таком случае имеет вид

$$L=\begin{bmatrix} p_1 & a_1 & & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & a_{m-1} & & & \\ & & 1 & p_m & \alpha & & \\ & & & \xi & q_1 & b_1 & \\ & & & & 1 & \ddots & b_{n-1} \\ & 0 & & & & 1 & q_n \end{bmatrix}.$$

Здесь p_i , q_j a_i , b_j - четные элементы грассмановой алгебры, α , ξ - нечетные. Из формул (I) Таблицы 2 видно, что $\alpha(t)$ пропорционально $\alpha(0) = \alpha_0$. Поэтому можно ввести следующую замену координат

$$a_i = e^{x_i - x_{i+1}} , \quad \alpha = e^{x_n - y_1}\alpha_0 , \quad b_j = e^{y_j - y_{j+1}} .$$

Тогда гамильтониан, рассматриваемой системы запишется в виде

$$H = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m} p_i^2 - \sum_{j=1}^{n} q_j^2\Big) + \sum_{i=1}^{m-1} e^{x_i - x_{i+1}} - \\ - \sum_{j=1}^{n-1} e^{y_j - y_{j+1}} + \alpha_0 \xi e^{x_n - y_1} ,$$

а уравнения движения примут вид

$$\ddot{x}_1 = - e^{x_1 - x_2} , \quad \ddot{x}_i = e^{x_{i-1} - x_i} - e^{x_i - x_{i+1}} ,$$

$$\ddot{x}_m = e^{x_{m-1} - x_m} + \gamma e^{x_m - y_1} , \ \ddot{y}_1 = \gamma e^{x_m - y_1} - e^{y_1 - y_2} , \ \ddot{y}_n = - e^{y_{n-1} - y_n} .$$

Здесь $\gamma = \xi\alpha_0$.

Их можно рассматривать либо как уравнения движения системы из $(n+m)$ частиц на плоскости, либо как уравнения движения четырех систем $X^{(0)}, Y^{(0)}, X^{(1)}, Y^{(1)}$, расположенных на двух уровнях-нулевом и первом. Система частиц на нулевом уровне - это подстилающая система. Она представляет собой две невзаимодействующие цепочки Тоды $X^{(0)}$ и $Y^{(0)}$. Уравнения движения для системы на первом уровне имеют вид

$$\ddot{x}_1^{(1)} = -e^{x_1^{(0)}-x_2^{(0)}}(x_1^{(1)}-x_2^{(1)}),$$

$$\ddot{x}_2^{(1)} = e^{x_1^{(0)}-x_2^{(0)}}(x_1^{(1)}-x_2^{(1)}) - e^{x_2^{(0)}-x_3^{(0)}}(x_2^{(1)}-x_3^{(1)}),$$

$$\cdots$$

$$x_m^{(1)} = e^{x_{m-1}^{(0)}-x_m^{(0)}}(x_{m-1}^{(1)}-x_m^{(1)}) + e^{x_m^{(0)}-y_1^{(0)}},$$

$$y_1^{(1)} = e^{x_{m-1}^{(0)}-y_1^{(0)}} - e^{y_1^{(0)}-y_2^{(0)}}(y_1^{(1)}-y_2^{(1)}),$$

$$y_n^{(1)} = e^{y_{n-1}^{(0)}-y_n^{(0)}}(y_{n-1}^{(1)}-y_n^{(1)}).$$

Таким образом, системы $X^{(1)}$ и $Y^{(1)}$ уже не являются замкнутыми. Подстилающая матрица $\tilde{L}(0)$ является блочно-диагональной

$$\tilde{L}(0) = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ - собственные числа матрицы L_1, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ - собственные числа матрицы L_2. Поведение системы на первом уровне при $t \to \pm\infty$ зависит от взаимного расположения отрезков $[\lambda_1, \lambda_m]$ и $[\mu_1, \mu_n]$ и описывается следующей теоремой

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_{i+1}, \mu_j < \lambda_m < \mu_{j+1}$. Тогда при $t \to \pm\infty$ первые i частиц в системе $X^{(1)}$ и последние $(n-j)$ частиц в системе $Y^{(1)}$ ведут себя как свободные. Координаты остальных частиц имеют следующую асимптотику

$$x_k \sim e^{(\lambda_k-\mu_1)t} \qquad \text{при } k = i+1, \ldots, m,$$

$$y_l \sim e^{(\lambda_m-\mu_l)t} \qquad \text{при } l = 1, \ldots, j.$$

Пусть $\mu_j < \lambda_1 < \mu_{j+1}$, $\lambda_i < \mu_n < \lambda_{i+1}$. Тогда при $t \to -\infty$ первые $(m-i)$ частиц в системе $X^{(1)}$ и последние j частиц в системе $Y^{(1)}$ являются свободными. Координаты остальных частиц имеют следующую асимптотику

$$x_k \sim e^{(\lambda_{m-k+1}-\mu_n)t} \qquad \text{при } k = m-i+1, \ldots, m,$$

$$y_l \sim e^{(\lambda_1-\mu_{n-l+1})t} \qquad \text{при } l=1,\dots,j\ .$$

Как известно [6] , при $t \to \pm\infty$ частицы в подстилающей системе ведут себя как свободные, причем $\dot{x}_i \to \lambda_i$, $\dot{y}_j \to \mu_j$ при $t \to +\infty$ и $\dot{x}_i \to \lambda_{m-i+1}$, $\dot{y}_j \to \mu_{n-j+1}$ при $t \to -\infty$. При $t \to +\infty$ частицы на нулевом уровне выстроены в порядке возрастания скоростей, а при $t \to -\infty$ – в порядке убывания. Таким образом, если при $t \to \pm\infty$ система $X^{(0)}$ расположена левее системы $Y^{(0)}$, то все частицы на первом уровне свободны. Если же система $X^{(0)}$ "наезжает" на систему $Y^{(0)}$, то те частицы, которые "лежат" над областью "перекрытия", за короткое время "улетают" в бесконечность.

Доказательство теоремы 2.I следует из обобщения на суперслучай [2] теоремы I работы [3] с учетом того, что нижние "суперминоры", используемые в формулах, сохраняются при умножении слева на верхнетреугольную матрицу с единицами по диагонали.

Предложение 3.I при помощи $\mathbb{Z}$ - градуировки в грассмановой алгебре Λ сводится к предложению 3.3.I работы [3] .

Теорема 3.I следует из предложения 3.3.2 работы [3] и того, что ограничение $\pi|\mathcal{M}_{f,c}$ на многообразие уровня момента $\mathcal{M}_{f,c}$ естественной проекции π на подстилающее пространство является регулярным отображением.

Теорема 3.2 следует из того, что в компонентах разложения по базису в грассмановой алгебре все уравнения, кроме подстилающего, могут рассматриваться как линейные неавтономные уравнения,

Теорема 3.3 следует из того, что в силу следствия 2.I при $t \to \pm\infty$ $a_i^{(\alpha)}$, $p_i^{(\alpha)}$ имеют асимптотику вида:

$$a_i^{(\alpha)} \sim c_i^{(\alpha)} t^{k_i^{(\alpha)}} e^{\lambda_i^{(\alpha)} t} ,$$
$$p_i^{(\alpha)} \sim b_i^{(\alpha)} t^{e_i^{(\alpha)}} e^{\mu_i^{(\alpha)} t} .$$

Подставляя такую асимптотику в уравнения движения, получим, что $\lambda_i < 0$, т.е. $a_i \to 0$ и, следовательно, $p_i \to const$

Теорема 3.4 доказывается тем же методом, что и теорема 3.3.

ОБОЗНАЧЕНИЯ В ТАБЛИЦАХ. В таблице I для каждой системы простых корней рассматриваемых супералгебр выписаны общий вид матрицы L , лежащей на орбите $f + \mathcal{O}_e$, гамильтониан и уравнения движения системы и указана алгебра Ли $\tilde{\mathfrak{g}}^{\tau}$, с системой корней которой связана подстилающая система возникающей супергамильтоновой системы, e_{ij} обозначает матрицу с элементами $(e_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Строки и столбцы матриц нумеруются от I до n для $\mathfrak{q}(n,\Lambda)$, от I до $(m+n)$ для $\mathfrak{sl}(m|n)$ и от $-(m+n)$ до $(m+n)$ для

$osp(2m|2n)$ и $osp(2m+1|2n)$, причем для $osp(2m|2n)$ индекс 0 пропускается. Алгебра Ли $q(n,\Lambda)$ реализована как алгебра Ли $(n\times n)$- матриц с элементами из грассмановой алгебры Λ, не имеющими, вообще говоря, определенной четности. На элементы матриц наложены следующие ограничения

$$\sum_{i=1}^{m+n} (-1)^{p(i)} p_i = 0 \qquad \text{для } sl(m|n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i)_{\bar 1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i = 0 \qquad \text{для } q(n).$$

Здесь $(\quad)_{\bar 1}$ означает нечетную компоненту, $\sim$ - подстилающий элемент.

Четности элементов матриц, перечисленных в таблице I вычисляются по формулам:

$$p(a_i) = p(c_i) = \begin{cases} p(i) + p(i+1) & \text{в строке 2} \\ p(i-1) + p(i) & \text{в строках 3, 4} \\ & \text{и в строке 5 при } i \geqslant 2 \end{cases}$$

$p(a_1) = p(a_2)$ в строке 5, и $p(p_i) = \bar 0$ в строках 2-5.

В формулах таблицы 2 используются следующие обозначения

$$\Delta_i^{(\bar 0)} = \mathrm{Ber}\left(M^{i,i+1,\dots,m+n}_{i,i+1,\dots,m+n}\right),$$

$$\Delta_i^{\bar 1} = \mathrm{Ber}\left(P\left(\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{i,i+1,\dots,m+n}\right)\right),$$

$$\Delta_{j,i}^{\bar 0} = \mathrm{Ber}\left(\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{j,i+1,\dots,m+n}\right),$$

$$\Delta_{j,i}^{\bar 1} = \mathrm{Ber}\left(P\left(\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{j,i+1,\dots,m+n}\right)\right).$$

Здесь $\mathcal{M}^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_k}$ - матрица размера $k\times k$ с элементами

$$\left(\mathcal{M}^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}\right)_{rs} = \left[\exp tL(0)\right]_{i_r, i_s},$$

$P(\mathcal{M})$ - матрица, получающаяся из матрицы $\mathcal{M}$ заменой четностей строк и столбцов на противоположные.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $p(i) \neq p(j)$, то матрица $\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{j,i+1,\dots,m+n}$ не является четной. Однако, если $p(i) = \bar 0$, то березиниан можно вычислить по обычной формуле. В этом случае его значение нечетно. Если $p(i) = \bar 1$, то березиниан матрицы $\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{j,i+1,\dots,m+n}$

неопределен, но в таком случае определен березиниан матрицы $P(\mathcal{M}^{i,i+1,\dots,m+n}_{j,i+1,\dots,m+n})$.

Таблица I

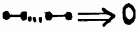
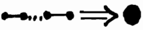
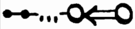
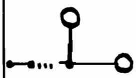
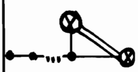
№ п.п.	Супералгебра Ли g	Схема Дынкина	Матрица L
I	$q(n)$		$\sum\limits_i p_i e_{ii} + c_i e_{i+1,i} + a_i e_{i,i+1}$
2	$sl(m,n)$		
3	$osp(2m+1,2n)$	 	$\sum\limits_i \{p_i(e_{ii}-e_{-i,-i})+c_i[e_{i,i-1}-(-1)^{p(i-1)[p(i)+1]}e_{-i+1,-i}]+$ $+a_i[e_{i-1,i}-(-1)^{p(i)[p(i-1)+1]}e_{-i,-i+1}]\}$
4	$osp(2m,2n)$	 	$\sum\limits_{1\leq i\leq m+n} p_i(e_{ii}-e_{-i,-i})+a_1e_{-1,1}+c_1e_{1,-1}+$ $+\sum\limits_{2\leq i\leq m+n} c_i[e_{i,i-1}-(-1)^{p(i-1)[p(i)+1]}e_{-i+1,i}]+$ $+\sum\limits_{2\leq i\leq m+n} a_i[e_{i-1,i}-(-1)^{p(i)[p(i-1)+1]}e_{-i,-i+1}]$
5	$osp(2m,2n)$	 	$\sum\limits_{1\leq i\leq m+n} p_i(e_{ii}-e_{-i,-i})+a_1(e_{-1,2}-e_{-2,1})+c_1(e_{2,-1}-e_{1,-2})+$ $+\sum\limits_{2\leq i\leq m+n} c_i[e_{i,i-1}-(-1)^{[p(i)+1]p(i-1)}e_{-i+1,i}]+$ $+\sum\limits_{2\leq i\leq m+n} a_i[e_{i-1,i}-(-1)^{p(i)[p(i-1)+1]}e_{-i,-i+1}]$

Таблица I (продолжение)

№ п.п	Уравнения движения	Алгебра Ли g^c	Гамильтониан
I	$\dot p_1 = -a_1 c_1$ $\dot p_i = c_{i-1} a_{i-1} - a_i c_i$ $2 \le i \le n-1$ $\dot p_n = c_{n-1} a_{n-1}$ $\dot a_i = p_i a_i - a_i p_i + 1$	$sl(n)$	$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{\bar 0} p_i^{\bar 1} + a_i^{\bar 0} c_i^{\bar 1} + a_i^{\bar 1} c_i^{\bar 0}$
2	$\dot p_1 = -a_1 c_1$ $\dot p_2 = c_{i-1} a_{i-1} - a_i c_i, 2 \le i \le n-1$ $\dot p_n = c_{n-1} a_{n-1}$ $\dot a_i = (p_i - p_{i+1}) a_i$	$\underset{j}{\oplus} gl(m_i) \underset{j}{\oplus} gl(n_j) / <1>$	$\sum\limits_{i=1}^{m+n} (-1)^{p(i)} \left[\frac{1}{2} p_i^2 + a_i c_i\right]$
3	$\dot p_i = c_i a_i - a_{i+1} c_{i+1}$ $1 \le i \le m+n-1$ $\dot p_{m+n} = c_{m+n} a_{m+n}$ $a_1 = -p_1 a_1$ $\dot a_i = (p_{i-1} - p_i) a_i, 2 \le i \le m+n$	$gl(m_1) \oplus \ldots \oplus gl(m_{k-1}) \oplus$ $\oplus O(2m_k+1)$ $\oplus gl(n_1) \oplus \ldots \oplus gl(ne)$ $\underset{i}{\oplus} gl(m_i) \underset{j}{\oplus} gl(n_j)$	$\sum\limits_{i=1}^{m+n} \left[(-1)^{p(i)} p_i^2 + 2(-1)^{p(i-1)} a_i c_i\right]$
4	$\dot p_i = c_i a_i - a_{i+1} c_{i+1}$ $1 \le i \le m+n-1$ $\dot p_{m+n} = c_{m+n} a_{m+n}$ $\dot a_1 = -2 p_1 a_1$ $\dot a_i = (p_{i-1} - p_i) a_i$ $i = 2, \ldots, m+n$	$gl(m_1) \oplus \ldots \oplus gl(m_k) \oplus$ $\oplus gl(n_1) \oplus \ldots \oplus gl(n_{e-1}) \oplus$ $\oplus sp(2n_e)$	$\sum\limits_{i=1}^{m+n} (-1)^{p(i)} p_i^2 + 2 \sum\limits_{i=2}^{m+n} (-1)^{p(i-1)} a_i c_i - a_1 c_1$
5	$\dot p_1 = -c_1 a_1 - a_2 c_2$ $\dot p_2 = c_1 a_1 + c_2 a_2 - a_3 c_3$ $\dot p_i = c_{i+1} a_{i+1} - a_i c_i, i = 3, \ldots, m+n$ $\dot a_1 = -(p_1 + p_2) a_1$ $\dot a_i = (p_{i-1} - p_i) a_i$ $i = 2, \ldots, m+n$	$gl(m_1) \oplus \ldots \oplus gl(m_{k-1}) \oplus$ $\oplus O(2m_k) \oplus gl(n_1) \oplus \ldots \oplus$ $\oplus gl(n_e)$	$\sum\limits_{i=1}^{m+n} (-1)^{p(i)} p_i^2 + 2 \sum\limits_{i=3}^{m+n} (-1)^{p(i-1)} a_i c_i +$ $+ 2(a_1 c_1 + a_2 c_2)$

Таблица 2. Решения систем из таблицы I.

I) $a_i(t) = y_{ii}\, a_i(0)\, y^{-1}_{i+1,i+1}$,

$$p_1(t) = y_{11}\, p_1(0)\, y^{-1}_{11} - y_{11}\, a_1(0)\, y^{-1}_{22}\, y_{21}\, y^{-1}_{11},$$

$$p_i(t) = y_{ii}\, p_i(0)\, y^{-1}_{ii} + y_{i,i-1}\, a_{i-1}(0)\, y^{-1}_{ii} - y_{ii}\, a_i(0)\, y^{-1}_{i+1,i+1}\, y_{i+1,i}\, y^{-1}_{ii},$$
$$(2 \leq i \leq n-1)$$

$$p_n(t) = y_{nn}\, p_n(0)\, y^{-1}_{nn} + y_{n,n-1}\, a_{n-1}(0)\, y^{-1}_{nn}.$$

Здесь $y_{ij} = N^{i}_{n-i+1,\, n-j+1}$, а элементы N^{k}_{ij} выражаются через элементы матрицы $\exp tL(0)$ по рекуррентным формулам

$$N^{1}_{ij} = [\exp tL(0)]_{n-i+1,\, n-j+1},$$

$$N^{k+1}_{ij} = N^{k}_{ij} - N^{k}_{ik} (N^{k}_{kk})^{-1} N^{k}_{kj}.$$

2)

$$a_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{p(i)}_{i}\, \Delta^{p(i)}_{i+2}}{[\Delta^{p(i)}_{i+1}]^2}\, a_i(0), & \text{если } p(a_i) = \overline{0}, \\[2ex] \dfrac{\Delta^{p(i)}_{i}}{\Delta^{p(i)}_{i+2}}\, a_i(0), & \text{если } p(a_i) = \overline{1} \end{cases}$$

$$p_1(t) = p_1(0) - a_1(0) \cdot \frac{\Delta^{p(1)}_{1,2}}{\Delta^{p(1)}_{1}},$$

$$p_i(t) = p_i(0) + \frac{\Delta^{p(i)}_{i-1,i}}{\Delta^{p(i)}_{i}}\, a_{i-1}(0) - a_i(0)\, \frac{\Delta^{p(i+1)}_{i,i+1}}{\Delta^{p(i+1)}_{i+1}}$$

$$2 \leq i \leq m+n-1 \qquad (I)$$

при

$$p_{m+n}(t) = p_{m+n}(0) + \frac{\Delta^{p(m+n)}_{m+n-1,\, m+n}}{\Delta^{p(m+n)}_{m+n}}\, a_{m+n-1}(0) \qquad (0)$$

3)

$$a_1(t) = \frac{\Delta^{p(1)}_{2}}{\Delta^{p(1)}_{1}}\, a_1(0),$$

$$a_i(t) = \begin{cases} \dfrac{\Delta^{p(i)}_{i-1} \cdot \Delta^{p(i)}_{i+1}}{[\Delta^{p(i)}_{i}]^2}\, a_i(0), & \text{если } p(a_i) = \overline{0}, \\[2ex] \dfrac{\Delta^{p(i)}_{i+1}}{\Delta^{p(i)}_{i-1}}\, a_i(0), & \text{если } p(a_i) = \overline{1} \end{cases} \qquad (2)$$

при $2 \leq i \leq m+n$.

$$p_i(t)=p_i(0)+\frac{\Delta^{p(i)}_{i-1,i}}{\Delta^{p(i)}_i}a_i(0)-a_{i+1}(0)\frac{\Delta^{p(i+1)}_{i,i+1}}{\Delta^{p(i+1)}_{i+1}} \tag{3}$$

при $1\leq i\leq m+n-1$,

$$p_{m+n}(t)=p_{m+n}(0)+\frac{\Delta^{p(m+n)}_{m+n-1,m+n}}{\Delta^{p(m+n)}_{m+n}}a_{m+n}(0) \tag{4}$$

4)

$$a_1(t)=\left(\frac{\Delta^{\bar{0}}_1}{\Delta^{\bar{0}}_2}\right)^2 a_1(0).$$

При $2\leq i\leq m+n$ $a_i(t)$ вычисляется по формуле (2)

$$p_1(t)=p_1(0)+\frac{\Delta^{\bar{1}}_{-1,1}}{\Delta^{\bar{1}}_1}a_1(0)-a_2(0)\frac{\Delta^{p(2)}_{1,2}}{\Delta^{p(2)}_2}.$$

При $2\leq i\leq m+n-1$ $p_i(t)$ вычисляется по формуле (3); $p_{m+n}(t)$ вычисляется по формуле (4).

5)

$$a_1(t)=\frac{\Delta^{\bar{0}}_3}{\Delta^{\bar{0}}_1}a_1(0),$$

$$a_2(t)=\frac{\Delta^{\bar{0}}_1\,\Delta^{\bar{0}}_3}{(\Delta^{\bar{0}}_2)^2}a_2(0)+\frac{\Delta^{\bar{0}}_{-1,1}\,\Delta^{\bar{0}}_3}{(\Delta^{\bar{0}}_2)^2}a_1(0),$$

если $p(a_1)=p(a_2)=\bar{0}$;

$$a_1(t)=\frac{(\Delta^{\bar{0}}_2)^2}{\Delta^{\bar{0}}_1\,\Delta^{\bar{0}}_3}a_1(0),$$

$$a_2(t)=\frac{\Delta^{\bar{0}}_1}{\Delta^{\bar{0}}_3}a_2(0)+\frac{\Delta^{\bar{0}}_{-1,1}}{\Delta^{\bar{0}}_3}a_1(0),$$

если $p(a_1)=p(a_2)=\bar{1}$,

При $3\leq i\leq m+n$ $a_i(t)$ вычисляется по формуле (2).

$$p_1(t)=p_1(0)-\frac{\Delta^{\bar{0}}_{-2,0}}{\Delta^{\bar{0}}_1}a_1(0)-\frac{\Delta^{\bar{0}}_{-1,1}}{\Delta^{\bar{0}}_1}a_1(0)\frac{\Delta^{p(2)}_{1,2}}{\Delta^{p(2)}_2}-a_2(0)\frac{\Delta^{p(2)}_{1,2}}{\Delta^{p(2)}_2},$$

$$p_2(t)=p_2(0)+\frac{\Delta^{p(2)}_{1,2}}{\Delta^{p(2)}_2}a_2(0)-a_3(0)\frac{\Delta^{p(3)}_{2,3}}{\Delta^{p(3)}_3}+\frac{\Delta^{p(2)}_{-1,2}}{\Delta^{p(2)}_2}a_1(0).$$

При $3\leq i\leq m+n-1$ $p_i(t)$ вычисляется по формуле (3); $p_{m+n}(t)$ вычисляется по формуле (4).

Литература

I. Лейтес Д.А., Введение в теорию супермногообразий. - УМН., I980, т.35, I, с.3-57.

2. Лейтес Д.А., Семенов-Тян-Шанский М.А. Интегрируемые системы и супералгебры Ли. - Зап.научн.семин. ЛОМИ, наст.сб.

3. Рейман А.Г. Интегрируемые системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I980, т.95, с.3-54.

4. Шандер В.Н. Теорема Лиувилля на супермногообразиях. - Функц.анализ, I983, т.I7, вып.I.

5. Кас V.G. Lie superalgebras - Advances in Math., 1977, v.26, p.8-96.

6. Moser J. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential - an integrable system. - Lect.Notes in Phys., I980, v.38.

7. Olshanetsky M.A. Perelomov A.M. Explicit solutions of the classical generalized Toda models.- Inventiones math., 1979, v.54.

Н.Ю.Решетихин

ТОЧНО-РЕШАЕМЫЕ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НА ЦЕПОЧКЕ СВЯЗАННЫЕ С КЛАССИЧЕСКИМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

§ I. Введение

Первым примером квантовой точно-решаемой системы на цепочке была изотропная модель Гайзенберга [I,2] . Она описывает взаимодействующую цепочку атомов спина $1/2$. Гамильтониан модели Гайзенберга инвариантен относительно группы $SU(2)$.

В [3] была установлена и развита в квантовом методе обратной задачи [4,5] связь между точно-решаемыми квантовыми системами на цепочке и решениями уравнения Янга-Бакстера. Это уравнение на матрицу $R^{ij}_{kl}(u)$ зависящую от некоторого параметра u, $i,j,k,l=1\dots n$. Оно имеет вид:

$$R^{i_1 i_2}_{k_1 k_2}(u) R^{k_1 i_3}_{j_1 k_3}(u+v) R^{k_2 k_3}_{j_2 j_3}(v) = R^{i_2 i_3}_{k_2 k_3}(v) R^{i_1 k_3}_{k_1 j_3}(u+v) R^{k_1 k_2}_{j_1 j_2}(u). \qquad (I)$$

Введем обозначения $R_{12}(u)$, $R_{13}(u)$, $R_{23}(u)$ для матриц действующих в $V\otimes V\otimes V$ $(V=\mathbb{C}^n)$, таких, что

$$R_{12}(u)^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} = R^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(u)\,\delta^{i_3}_{j_3},\quad R_{13}(u)^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} = R^{i_1 i_3}_{j_1 j_3}(u)\,\delta^{i_2}_{j_2}, \quad \text{и т.д..}$$

Используя эти обозначения уравнение (I) можно записать более компактно

$$R_{12}(u) R_{13}(u+v) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u+v) R_{12}(u). \qquad (2)$$

Будем говорить, что выполняются соотношения Янга-Бакстера, если в пространстве $V_1\otimes V_2\otimes V_3$, $(V_i=\mathbb{C}^{n_i})$ заданы три матрицы $R_{12}(u)$, $R_{13}(u)$, $R_{23}(u)$ такие, что

$$R_{12}(u)^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} = R^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}(u)\,\delta^{i_3}_{j_3},\ R_{13}(u)^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} = T^{i_1 i_3}_{j_1 j_3}(u)\,\delta^{i_2}_{j_2},\ R_{23}(u)^{i_1 i_2 i_3}_{j_1 j_2 j_3} = W^{i_2 i_3}_{j_2 j_3}(u)\,\delta^{i_1}_{j_1}$$

и они удовлетворяют (2). Такие матрицы будем называть R -матрицами.

Важным классом решений (2) являются G - инвариантные R -матрицы. Это такие R -матрицы, которые действуют в произведении двух представлений некоторой группы G и инвариантны относительно ее диагонального действия:

$$R_{12}(u) = T_1(g)\otimes T_2(g) R_{12}(u) T_1(g^{-1})\otimes T_2(g^{-1}), \qquad (3)$$

где T_i - представление G в V_i. Такие R -матрицы будем снабжать сверху индексами, обозначающими какое представление G действует в V_i : $R_{12}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(u)$.

В настоящей работе вычисляются собственные значения G-инвариантных трансфер-матриц (§ 3) в случае, когда G - классическая группа Ли. План статьи следующий. В § 2 приведены известные G-инвариантные решения уравнения (I), действующие в произведении двух фундаментальных представлений. В § 3 по ним построены квантовые точно-решаемые модели на цепочке и вычислен спектр соответствующих трансфер-матриц. В § 4 обсуждается связь с теорией представлений.

Автор благодарен Л.Д.Фаддееву, А.А.Кириллову, П.П.Кулишу, Е.К.Склянину за многочисленные интересные обсуждения.

§ 2. G-инвариантные R-матрицы

Если G - классическая группа Ли, то наиболее просто устроены R -матрицы действующие в произведении пространств фундаментальных представлений G. В настоящем параграфе будут перечислены основные такие R-матрицы

a. $G = SU(n)$.

Матрица $R_{12}^{(1,1)}(u)$ действующая в тензорном произведении двух векторных представлений $SU(n)$ $(V_1 = V_2 \equiv \mathbb{C}^n)$ имеет вид:

$$R_{12}^{(1,1)}(u) = u + P_{12}, \tag{2.I}$$

P_{12} - матрица перестановки в $V_1 \otimes V_2$. Если e_i - базис в $\mathbb{C}^n$, то $P_{12}\, e_i \otimes e_j = e_j \otimes e_i$.

Все остальные фундаментальные представления $SU(n)$ являются антисимметричными степенями векторного представления. Если через $V_{(1\dots\ell)}$ обозначить пространство ℓ-го фундаментального представления $SU(n)$

$$V_{(1\dots\ell)} = P^-_{1\dots\ell}\, V_1 \otimes \dots \otimes V_\ell\, , \tag{2.2}$$

то

$$R^{(1,m)}_{a,(1\dots m)}(u) = P^-_{1\dots\ell}\, R^{(1,1)}_{a1}(u)\, R^{(1,1)}_{a2}(u-1) \dots R^{(1,1)}_{am}(u-m+1)\, P^-_{1\dots m}\, . \tag{2.3}$$

Эта матрица действует в прямом произведении $V_a \otimes V_{(1\dots m)}, V_a \equiv \mathbb{C}^n$. Ее можно записать непосредственно через генераторы $SU(n)$:

$$R^{(1,m)}_{a,(1\dots m)}(u) = u + e_{ij} \otimes P_{ji}\, .$$

К настоящему времени имеется достаточно большое количество $SU(n)$ -инвариантных матриц [6,7] , отвечающих разным представлениям $SU(n)$, но мы не будем на них останавливаться.

b. $G = SO(n)$.

Решение уравнения (I), действующее в произведении двух векторных представлений $SO(n)$ найдено в [8]

$$R_{12}^{(v,v)}(u) = u(u+2-n)I - 2(u+2-n)P_{12} + 2uK_{12} . \qquad (2.4)$$

Здесь P_{12} - матрица перестановки в $V_1 \otimes V_2$ $(V_1 = V_2 \equiv \mathbb{C}^n)$, $K_{12} = P_{12}^{t_2}$, t_2 обозначает транспонирование в пространстве V_2 .

В работе [9] была найдена R-матрица, действующая в произведении векторного представления V на спинорное представление S

$$R_{12}^{(s,v)}(u) = \left(u - \frac{n-2}{2}\right) I \otimes I + \sigma_{ij} \otimes e_{ji} . \qquad (2.5)$$

Здесь σ_{ij} - генераторы $SO(n)$ в спинорном представлении

$$\sigma_{ij} = \gamma_i \gamma_j - \delta_{ij} , \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij} . \qquad (2.6)$$

Они действуют в первом пространстве. Базисные матрицы e_{ji} $((e_{ji})_{kl} = \delta_{jk}\delta_{il})$ действуют во втором пространстве.

При $n = 2k$ спинорное представление распадается на два представления с разной спиральностью $S = S_+ \oplus S_-$. Проекторы на $S_\pm$ имеют вид: $P_\pm = \frac{1 \pm \Gamma}{2}$, $\Gamma = (i)^{n/2}\gamma_1 \ldots \gamma_n$. В соответствии с этим матрица $R^{(s,v)}$ распадается в $R^{(+,v)}$ и $R^{(-,v)}$.

R -матрица, действующая в произведении $S \otimes S$ имеет довольно сложный вид [9] и мы не будем ее здесь приводить.

c. $G = Sp(2n)$

$Sp(2n)$- инвариантная R-матрица, действующая в произведении двух векторных представлений $Sp(2n)$ найдена в [10] *):

$$R_{12}(u) = u(u+2n+2)I + (u+2n+2)P_{12} - 2u\tilde{K}_{12} . \qquad (2.8)$$

Здесь P_{12} - матрица перестановки в $V_1 \otimes V_2$ $(V_i \equiv \mathbb{C}^{2n})$. Матрица $\tilde{K}_{12}$ имеет следующий вид:

---

*) К такому виду матрица (2.8) приведена Е.К.Склянинным.

$$\tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k & 0 \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (2.9)$$

Блочная структура определяется разбиением $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Матрица K действует в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, $K = P^t$, где P - матрица перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, t - обозначает транспонирование во втором пространстве.

§ 3. Квантовые системы связанные с G-инвариантными R-матрицами.

В этом параграфе по R-матрицам приведенным выше будут построены квантомеханические системы на конечной цепочке.

Рассмотрим набор линейных пространств $V_1, V_2, \dots, V_N$. Будем говорить, что V_k является пространством состояний k-го узла цепочки. Полное пространство состояний будет тензорным произведением V_k по всем узлам:

$$\mathcal{H} = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_N . \qquad (3.I)$$

Введем еще одно вспомогательное пространство V_a. В произведении $V_a \otimes \mathcal{H}$ построим матрицу монодромии [4,5] :

$$T_a(u) = R_{a1}(u) \dots R_{aN}(u) . \qquad (3.2)$$

Индексы внизу обозначают пространства, в которых матрица действует нетривиально. Если $R_{ak}(u)$ удовлетворяет (I), то

$$R_{ab}(u) T_a(u+v) T_b(v) = T_b(v) T_a(u+v) R_{ab}(u) . \qquad (3.3)$$

След матрицы монодромии по пространству V_a принято называть трансфер-матрицей

$$t_{\bar{a}}(u) = tr_a T_a(u) . \qquad (3.4)$$

Индекс $\bar{a}$ указывает на представлении группы G, которое действует в V_a.

Из (3.3) следует коммутативность семейства трансфер-матриц:

$$[t_{\bar{a}}(u), t_{\bar{b}}(w)] = 0 . \qquad (3.5)$$

Это свойство трансфер-матриц позволяет рассматривать их как производящие функции для интегрируемых квантовых систем с пространством состояний $\mathcal{H}$ [4,5] .

Простейшие примеры таких систем соответствуют случаю, когда V_a , как линейное пространство равно V_k и является пространством векторного представления группы G . В этом случае, если гамильтониан системы выбрать в виде:

$$H = \frac{d}{du} \ln t(u) \Big|_{u=0} , \tag{3.6}$$

он будет локальным

$$H = \sum_{n=1}^{N} H_{n,n+1} , \quad H_{N,N+1} \equiv H_{N,1} . \tag{3.7}$$

С физической точки зрения это означает, что взаимодействуют только соседние узлы. Для $H_{\ell,\ell+1}$ имеем:

$$G = SU(n) , H_{\ell,\ell+1} = P_{\ell\ell+1} , \tag{3.8}$$

$$G = SO(n) \ , H_{\ell,\ell+1} = \frac{4-n}{2(n-2)} I - \frac{1}{n-2} (P_{\ell,\ell+1} - K_{\ell,\ell+1}) , \tag{3.9}$$

$$G \quad S_p(2n) , H_{\ell,\ell+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} I + \frac{1}{2(n+1)} (P_{\ell,\ell+1} - \widetilde{K}_{\ell,\ell+1}) . \tag{3.10}$$

Нетрудно убедиться, что во всех трех случаях $H_{\ell,\ell+1}$ можно представить в виде:

$$H_{\ell,\ell+1} = c_1 + c_2 \lambda_\ell^\mu \otimes \lambda_{\ell+1}^\nu K_{\mu\nu} . \tag{3.11}$$

Здесь λ_ℓ^μ - генераторы G в векторном представлении в ℓ узле, аналогично $\lambda_{\ell+1}^\nu$, $K_{\mu\nu}$ - матрица Киллинга для G .

Из (3.6) следует, что для вычисления спектра H достаточно найти собственные значения соответствующих трансфер-матриц. Ниже приведено решение этой задачи для R -матриц перечисленных в § 2.

a. $G = SU(n)$.

Это наиболее хорошо изученный случай. Спектр гамильтониана (3.II) при $n=2$ был найден Г.Бете [2] , а при произвольном n Садерландом [II] . Для произвольного n собственные значения и собственные векторы трансфер-матрицы $t(u)$ при $V_a = V_k \equiv \mathbb{C}^n$ были найдены в [I2] . Результаты [I2] легко обобщаются на случай, когда V_k равно пространству любого фундаментального представления $SU(n)$.

Чтобы построить собственные векторы трансфер-матрицы представим матрицу монодромии (3.2) с $V_a = \mathbb{C}^n$ в блочном виде [I4,15]

$$T_a(u)=R^{(1,\ell)}_{a1}(u)\dots R^{(1,\ell)}_{aN}(u)=\begin{pmatrix}A(u)&B(u)\\ C(u)&\mathcal{D}(u)\end{pmatrix}. \qquad (3.12)$$

Матричная структура относится к пространству V_a . Матрица A имеет размер $(n-\ell)\times(n-\ell)$, $B-(n-\ell)\times\ell$, $C-\ell\times(n-\ell)$, $\mathcal{D}-\ell\times\ell$, матричные элементы $A, B, C, \mathcal{D}$ – операторы в $\mathcal{H}$ (пространство V_k как линейное пространство равно ℓ-ой антисимметрической степени $\mathbb{C}^n$ (2.2)).

Пусть $|0\rangle_k$ – старший вектор в пространстве V_k . Рассмотрим вектор:

$$|0\rangle=|0\rangle_1\otimes\dots\otimes|0\rangle_N\,. \qquad (3.13)$$

На нем матрица монодромии имеет блочную структуру:

$$A_{ij}(u)|0\rangle=\delta_{ij}(u+1)^N|0\rangle\,, \qquad (3.14)$$

$$C_{ij}(u)|0\rangle=0\,, \qquad \mathcal{D}_{ij}(u)|0\rangle=u^N\delta_{ij}|0\rangle\,.$$

Подействуем на $|0\rangle$ m_1 операторами B_{ij} :

$$|w_1^{(1)}\dots w_1^{(m_1)},F,G\rangle=B_{i_1j_1}(w_1^{(1)})\dots B_{im,jm}(w_1^{(m_1)})|0\rangle\times$$
$$\times F_{j_1\dots j_{m_1}}G_{i_1\dots i_{m_1}}\,. \qquad (3.15)$$

Определим новые трансфер-матрицы $t_F(u)$ и $t_G(u)$, такие, что $t_F(u)$ действует в пространстве

$$\mathcal{H}_F=\tilde V_1\otimes\dots\otimes\tilde V_{m_1}\,, \quad \tilde V_i=\mathbb{C}^\ell \qquad (3.16)$$

и имеет вид:

$$t_F(u)=\mathrm{tr}_a\tilde R^{(1,1)}_{a1}(u-w_1^{(1)})\dots\tilde R^{(1,1)}_{am_1}(u-w_1^{(m_1)})\,. \qquad (3.17)$$

Здесь $\tilde R^{(1,1)}_{ak}(u)=u+\tilde{\mathcal{P}}_{ak}$, $\tilde{\mathcal{P}}_{ak}$ – матрица перестановки в $\tilde V_a\otimes\tilde V_k$, тривиально действующая в остальных $\tilde V_m$, $(\tilde V_a=\mathbb{C}^\ell)$.

Трансфер-матрицу $t_G(u)$ определим по аналогичной формуле:

$$t_G(u)=\mathrm{tr}_a\tilde{\tilde R}^{(1,1)}_{a1}(w_1^{(1)}-u)\dots\tilde{\tilde R}^{(1,1)}_{am_1}(w_1^{(m_1)}-u) \qquad (3.18)$$
$$\tilde{\tilde R}^{(1,1)}_{ak}(u)=u+\tilde{\tilde{\mathcal{P}}}_{ak}\,.$$

Она действует в пространстве

$$\mathcal{H}_G = \overset{\approx}{V}_1 \otimes \ldots \otimes \overset{\approx}{V}_{m_1}\,, \quad \overset{\approx}{V}_a = \overset{\approx}{V}_k \equiv \mathbb{C}^{n\ell}\,. \tag{3.I9}$$

В (3.I8) $\overset{\approx}{\mathcal{P}}_{ak}$ – перестановка в $\overset{\approx}{V}_a \otimes \overset{\approx}{V}_k$.

ТЕОРЕМА I. Для того, чтобы вектор (3.I5) был собственным вектором следа матрицы монодромии (3.I2) необходимо и достаточно, чтобы F был собственным вектором матрицы (3.I7), G был собственным вектором (3.I8), а числа $w_1^{(j)}$ удовлетворяли уравнениям:

$$\left(\frac{w_1^{(j)}+1}{w_1^{(j)}}\right)^N = (-1)^{m_1-1} \quad \frac{\Lambda_G(w_1^{(j)})}{\Lambda_F(w_1^{(j)})}\,, \tag{3.20}$$

где $\Lambda_F(u)$ – собственное значение (3.I7) на F , $\Lambda_G(u)$ – собственное значение (3.I8) на G .

Доказательство производится непосредственным вычислением. Используя результаты [I2] легко найти векторы F, G и Λ_F, Λ_G

Окончательно, получаем, что собственный вектор зависит от $n-1$ набора чисел $\{u_k^{(j)}\}_{j=1}^{m_k}$, $k=1,\ldots,n-1$. Соответствующее собственное значение имеет вид:

$$\Lambda(u) = u^N\Big(H(2u+\ell+1) + \sum_{i=1}^{\ell-1} G_i(2u+\ell+1)\Big) + (u+1)^N \sum_{i=\ell}^{n-1} G_i(2u+\ell+1). \tag{3.2I}$$

Функции H, G_i определяются наборами $\{u_k\}$:

$$H(u) = \prod_{u_1} \frac{u-iu_1+1}{u-iu_1-1}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_k(u) = \prod_{u_k} \frac{u-iu_k-2-k}{u-iu_k-k} \prod_{u_{k+1}} \frac{u-iu_{k+1}-k+1}{u-iu_{k+1}-k-1}\,, \tag{3.22}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_{n-1}(u) = \prod_{u_{n-1}} \frac{u-iu_{n-1}-1-n}{u-iu_{n-1}+1-n}\,.$$

Числа $\{u_k\}$ являются решениями системы уравнений:

$$1 = \prod_{u_1' \neq u_1} \frac{u_1-u_1'+2i}{u_1-u_1'-2i} \prod_{u_2} \frac{u_1-u_2-i}{u_1-u_2+i}\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 = \prod_{u_{k-1}} \frac{u_k-u_{k-1}-i}{u_k-u_{k-1}+i} \prod_{u_k' \neq u_k} \frac{u_k-u_k'+2i}{u_k-u_k'-2i} \prod_{u_{k-1}} \frac{u_k-u_{k-1}-i}{u_k-u_{k-1}+i}\,, \tag{3.23}$$

$$\left(\frac{u_\ell+i}{u_\ell-i}\right)^N=\prod_{u_{\ell-1}}\frac{u_\ell-u_{\ell-1}-i}{u_\ell-u_{\ell+1}+i}\prod_{u'_\ell\neq u_\ell}\frac{u_\ell-u'_\ell+2i}{u_\ell-u'_\ell-2i}\prod_{u_{\ell\ 1}}\frac{u_\ell-u_{\ell+1}-i}{u_\ell-u_{\ell+1}+i}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$1=\prod_{u_{n-2}}\frac{u_{n-1}-u_{n-2}-i}{u_{n-1}-u_{n-2}+i}\prod_{u'_{n-1}\neq u_{n-1}}\frac{u_{n-1}-u'_{n-1}+2i}{u_{n-1}-u'_{n-1}-2i} .$$

Пространство $\mathcal{H}$, как пространство представления $SU(n)$ разлагается в сумму неприводимых компонент $\mathcal{D}_\lambda$ с весом $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$

$$\mathcal{H} = \oplus\sum_{\lambda,\,\alpha}\mathcal{D}_\lambda^{(\alpha)} . \tag{3.24}$$

Индекс α разделяет представления, входящие с неединичной кратностью.

Несложно показать, что построенный выше собственный вектор трансфер-матрицы является старшим вектором в представлении $\mathcal{D}_\lambda$ с $\lambda = (N+m_2-2m_1, \dots, m_{k-1}+m_{k+1}-2m_k, \dots, m_{n-2}-2m_{n-1})$. Причем решения системы (3.23) с одинаковыми числами $m_1, \dots, m_{n-1}$ разделяют кратные представления. Нетривиальной задачей является доказательство полноты системы векторов (3.I5), для этого нужно доказать, что число решений системы (3.23) с фиксированными $m_1, \dots$ $\dots, m_{n-1}$ равно кратности n_λ для соответствующего веса λ в разложении (3.24).

в. $G = SO(n)$.

Метод, использованный в предыдущем пункте для построения собственных векторов трансфер-матриц в этом случае непосредственно не применим. Матричная структура (2.4) приводит к серьезным трудностям комбинаторного характера. Однако собственные значения $SO(n)$ -инвариантных трансфер-матриц

$$t_v^{(v)}(u) = tr_a\, R_{a1}^{(v,v)}(u) \dots R_{aN}^{(v,v)}(u) , \tag{3.25}$$

$$t_s^{(v)}(u) = tr_a\, R_{a1}^{(s,v)}(u) \dots R_{aN}^{(s,v)}(u) . \tag{3.26}$$

можно вычислить, используя метод функциональных уравнений; это сделано в [I3] . Аналогичным образом можно вычислить собственные значения трансфер-матрицы, действующей в произведении N спинорных представлений

$$t_v^{(s)}(u) = tr_a R_{a1}^{(v,s)}(u) \dots R_{aN}^{(v,s)}(u). \qquad (3.27)$$

Приведем, для сравнения, все три ответа.

Чтобы компактно записать собственные значения $t_s^{(v)}(u)$, введем функции:

$$\tau_1(u)\{W_+\}\{W_-\} = \prod_{W_+} \frac{u - iW_+ + 1}{u - iW_+ - 1},$$

. . . .

$$\tau_k(u|\{u_1\}\dots\{u_{k-1}\}\{W_+\}\{W_-\}) = \prod_{u_1} \frac{u - iu_1 + 1}{u - iu_1 - 1} \overline{\tau_{k-1}(-u+1)\{u_2\}\dots\{u_{k-1}\}\{W_+\}\{W_-\}} +$$

$$+ \tau_{k-1}(u+1)\{u_2\}\dots\{u_{k-1}\}\{V+s\}\{V-s\}, \qquad (3.28)$$

$$\sigma_1(u|\{W\}) = \prod_W \frac{u - iW}{u - iW - 1}$$

. . . .

$$\sigma_k(u|\{u_1\}\dots\{u_{k-1}\}\{W\}) = \prod_{u_1} \frac{u - iu_1 + 1}{u - iu_1 - 1} \overline{\sigma_{k-1}(-u+1|\{u_2\}\dots\{u_{k-2}\}\{W\})} + \sigma_{k-1}(u+1)\{u_2\}\dots\{u_{k-2}\} \cdot \{W\}).$$

Здесь $\{u_k\}$ обозначает набор $\{u_k^{(j)}\}_{j=1}^{m_k}$, аналогично $\{W_\pm\}$ $\{W\}$, $\{V_\pm\} = \{W_\pm\}$ для нечетных k, $\{V_\pm\} = \{W_\mp\}$ для четных k.

Собственные значения $t_s^{(v)}$ просто выражаются через эти функции:

$$n=2k+1, \Lambda_s^{(v)}(u) = \prod_{j=1}^{N} (u - \frac{n}{2} - v_j) \sigma_k(u - \frac{n-2}{2} | \{v\}\{u_1\}\dots\{u_{k-1}\}\{W\}) \Big|_{v_j=0} \qquad (3.29)$$

$$n=2k, \Lambda_\pm^{(v)}(u) = \prod_{j=1}^{N} (u - \frac{n}{2} - v_j) \tau_k(u - \frac{n-2}{2} | \{v\}\{u_1\}\dots\{u_{k-2}\}\{W_+\}\{W_-\} \Big|_{v_j=0}. \qquad (3.30)$$

Собственные значения трансфер-матриц $t_v^{(v)}$ и $t_v^{(s)}$ имеют следующий вид:

$$\Lambda_v^{(v)}(u) = u^N (u+4-n)^N F(u) + (u-2)^N (u+2-n)^N H(u) +$$
$$+ u^N (u+2-n)^N \sum_{i=1}^{n-2} G_i(u), \qquad (3.31)$$

$$n=2k, \Lambda_v^{(s)}(u) = (u - \frac{n}{2} + 2)^N (F(u) + \sum_{i=k}^{2k-2} G_i(u)) + \qquad (3.32)$$

$$+ (u - \frac{n}{2})^N (H(u) + \sum_{i=1}^{k-1} G_i(u)),$$

$$n=2k+1,\ \Lambda_V^{(s)}(u)=\left(u-\frac{n}{2}+2\right)^N\left(F(u)+\sum_{i=k+1}^{2k-2}G_i(u)\right)+$$

$$+\left(u-\frac{n}{2}+1\right)^N G_k(u)+\left(u-\frac{n}{2}\right)^N\left(H(u)+\sum_{i=1}^{k-1}G_i(u)\right)\ . \tag{3.33}$$

При $n=2k+1,\ H,\ G_1,\ldots,G_{k-1}$, такие же, что и в (3.I3) $(\{u_k\}\equiv\{w\})$, для остальных получаем

$$F(u)=\overline{H}(-u+n-2),\quad G_\ell(u)=\overline{G_{n-\ell-1}(-u+n-2)}\ , \tag{3.34}$$

$$G_k(u)=\prod_w\frac{u-iw-2-k}{u-iw-k}\cdot\frac{u-iw-k-1}{u-iw-k+1}\ . \tag{3.35}$$

Для $n=2k,\ F,\ H$ и $G_1\ldots G_{k-3},G_{2k-2}\ldots G_{k+2}$ имеют тот же вид

$$C_{k-2}(u)=\prod_{u_{k-2}}\frac{u-iu_{k-2}-k}{u-iu_{k-2}-k+2}\prod_{w_+}\frac{u-iw_+-k+3}{u-iw_+-k+1}\prod_{w_-}\frac{u-iw_--k+3}{u-iw_--k+1}=\overline{G_{k+1}(-u+n-2)} \tag{3.36}$$

$$G_{k-1}(u)=\prod_{w_+}\frac{u-iw_+-k+2}{u-iw_+-k+1}\prod_{w_-}\frac{u-iw_--k-1}{u-iw_--k+1}=\overline{G_k(-u-n+2)}\ . \tag{3.37}$$

Числа $\{u_\ell\},\{w_\pm\},\{w\}$ являются решениями системы алгебраических уравнений. Обозначим через $S_\ell(u)=(u+i\ell)/(u-i\ell)$, тогда для $n=2k+1$ система имеет вид:

$$S_1(u_1)^{N_1}=\prod_{u_1'\neq u_1}S_2(u_1-u_1')\prod_{u_2}S_{-1}(u_1-u_2)\ ,$$

$$1=\prod_{u_{\ell-1}}S_{-1}(u_\ell-u_{\ell-1})\prod_{u_\ell'\neq u_\ell}S_2(u_\ell-u_\ell')\prod_{u_{\ell+1}}S_{-1}(u_\ell-u_{\ell+1})\ , \tag{3.38}$$

$$S_{1/2}(w)^{N_2}=\prod_{u_{k-1}}S_{-1}(w-u_{k-1})\prod_{w'\neq w}S_1(w-w')\ .$$

Здесь $N_1=N$, $N_2=0$, если $V_k\equiv\mathbb{C}^n$ и $N_1=0,\ N_2=N$, если $V_k\equiv S$. Для $n=2k$ первые $k-3$ уравнения те же, что и в (3.38), а последние отличаются:

$$1=\prod_{u_{k-3}} S_{-1}(u_{k-2}-u_{k-3})\prod_{u'_{k-2}\neq u_{k-2}} S_{2}(u_{k-2}-u'_{k-2})\prod_{w_+} S_{-1}(u_{k-2}-w_+)\prod_{w_-} S_{-1}(u_{k-2}-w_-), \qquad (3.39)$$

$$S_1(w_\pm)^{N_\pm}=\prod_{u_{k-2}} S_{-1}(w_\pm-u_{k-2})\prod_{w'_\pm\neq w_\pm} S_2(w_\pm-w'_\pm).$$

Здесь снова $N_1=N,\ N_\pm=0$, если $V_k=\mathbb{C}^n$ и $N_1=0,\ N_-=0(N_-=N)$, $N_+=N(N_+=0)$, если $V_k\equiv S^+(V_k\equiv S^-)$.

Как и в случае унитарной группы собственные подпространства трансфер-матриц, отвечающее собственным значениям (3.3I)-(3.33), являются неприводимыми компонентами в разложении

$$\mathcal{H}=\oplus\sum_{\alpha,\lambda}\mathcal{D}_\lambda^{(k)}. \qquad (3.40)$$

В случае $SO(n=2k)$ весовой вектор, отвечающий (3.3I)-(3.33) имеет вид $\lambda=(N+m_2-2m_1,\dots,m_{\ell-1}+m_{\ell+1}-2m_\ell,\dots$

$m_{k-3}+m_++m_--2m_{k-2},m_{k-2}-2m_+,m_{k-2}-2m_-)$ для $SO(n=2k+1)$

$\lambda=(N+m_2-2m_1,\dots,m_{\ell-1}+m_{\ell+1}-2m_\ell,\dots,m_{k-2}+2m_3-2m_{k-1}$, $2m_{k-1}-2m_3)$.

с. $G=S_p(2n)$.

Решение уравнения Янга-Бакстера с $S_p(2n)$ -симметрией имеет структуры весьма сходную с $SO(n)$- инвариантным решением. Поэтому при построении собственных векторов (в столь явной форме как это сделано для $SU(n)$-инвариантных трансфер-матриц) возникают аналогичные трудности.

Тем не менее методы работы [I3] и в этом случае позволяют вычислить собственные значения трансфер-матрицы

$$t(u)=\mathrm{tr}_a R_{a1}(u)\dots R_{aN}(u). \qquad (3.4I)$$

Они имеют следующий вид:

$$\Lambda(u)=(u+2)^N(u+2n+2)^N H(u)+u^N(u+2n+2)^N\sum_{i=1}^{2n-2}G_i(u)+$$
$$+u^N(u+2n+4)^N F(u). \qquad (3.42)$$

Функции $H,G_1,\dots,G_{n-2}$ имеют тот же вид, что и в (3.I3), а $F(u)=\overline{H}(-u-2n-2)$, $G_\ell(u)=\overline{G_{2n-1-\ell}(-u-2n-2)}$

$$G_{n-1}(u)=\prod_{u_{n-1}}\frac{u-iu_{n-1}+n+1}{u-iu_{n-1}+n-1}\prod_{u_n}\frac{u-iu_n+n-3}{u-iu_n+n+1}\ . \qquad (3.43)$$

Числа $\{u_\ell\}$ определяются из следующей системы уравнений

$$S_1(u_1)^N=\prod_{u_1'\neq u_1}S_2(u_1-u_1')\prod_{u_2}S_{-1}(u_1-u_2)$$

. . . .

$$1=\prod_{u_{n-2}}S_{-1}(u_{n-1}-u_{n-2})\prod_{u_{n-1}'\neq u_{n-1}}S_2(u_{n-1}-u_{n-1}')\prod_{u_n}S_{-2}(u_{n-1}-u_n) \qquad (3.44)$$

$$1=\prod_{u_{n-1}}S_2(u_n-u_{n-1})\prod_{u_n'\neq u_n}S_4(u_n-u_n').$$

При разложении $\mathcal{H}$ на неприводимые компоненты собственное подпространство матрицы (3.4I), отвечающее собственному значению (3.42) является неприводимой компонентой со старшим весом $\lambda=$ $=(N+m_2-2m_1,\ldots,m_{\ell+1}+m_{\ell-1}-2m_\ell,\ldots,m_{n-2}+m_n-2m_{n-1},m_{n-1}-m_n)$.

§ 4. Обсуждение результатов

I. Результаты предыдущих параграфов естественно согласуются с изоморфизмами классических групп. Эти изоморфизмы проявляются в том, что соответствующие R-матрицы, а следовательно и собственные значения трансфер-матриц совпадают.

а. $SO(3)\simeq SU(2)/Z_2$. Совпадение соответствующих R-матриц и собственных значений трансфер-матриц отмечалось в [5].

в. $SO(4)\simeq SU(2)\times SU(2)$. Действительно, несложно убедиться, что матрица (2.4) при $n=4$ с точностью до замены аргумента распадается в тензорное произведение двух матриц (2.I). Проще всего в этом убедиться, сравнив их собственные значения. Этот факт соответствует тому, что векторное представление является произведением двух спинорных; а каждое спинорное представление $SO(4)$ изоморфно фундаментальному представлению $SU(2)$

с. $SO(5)\simeq Sp(4)$. Спинорное представление группы $SO(5)$ изоморфно векторному представлению $Sp(4)$. $SO(5)$-инвариантная R-матрица в спинорном представлении содержатся в [9], несложно убедиться, что она совпадает с (2.8) при $n=2$.

d. $SO(6)\sim SU(4)$. Группа $SO(6)$ имеет три фундаментальных представления, S^+ и S^- - спинорные представления размерности 4, и V - векторное представление размерности 6. У $SU(4)$ так же три фундаментальных представления, векторное V_1, размерности 4 и его антисимметричные степени $V_2=V_1\cap V_1$

размерности 6 и $V_3 = V_1 \wedge V_1 \wedge V_1$ размерности 4. Следствием изоморфизма групп являются изоморфизмы $S^+ \simeq V_1$, $S^- \simeq V_3$, $V \simeq V_2$. Соответствующие R-матрицы совпадают.

2. При построении собственных векторов в $SU(n)$-инвариантном магнетике использовалась определенная иерархическая структура, связанная с естественными вложениями:

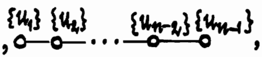
$$SU(n) \supset SU(n-1) \supset \ldots \supset SU(2). \qquad (4.I)$$

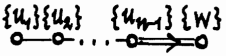
В окончательном ответе она проявилась в том, что уравнение на числа $\{u_k\}$ включает числа $\{u_{k+1}\}$ и $\{u_{k-1}\}$. Аналогичные структуры имеются и в уравнениях на наборы $\{u_\ell\}$ $\{w_\pm\}$ $\{w\}$ в случае $SO(n)$ и $Sp(2n)$. Они связаны с естественными вложениями:

$$\begin{gathered} SO(2n) \supset SO(2n-2) \supset \ldots \supset SO(4) \\ SO(2n+1) \supset SO(2n-1) \supset \ldots \supset SO(3) \\ Sp(2n) \supset Sp(2n-2) \supset \ldots \supset Sp(4) \end{gathered} \qquad (4.2)$$

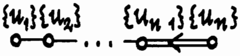
Явное проявление этих вложений в структуре собственных значений трансфер-матриц должно помочь при явном построении соответствующих собственных векторов.

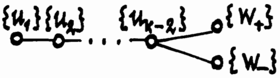
Уравнения (3.23),(3.38),(3.39),(3.44) по своей структуре напоминают также диаграммы Дынкина для этих групп:

$A_{n-1}(SU(n))$,


, $B_k(SO(2k+1))$,


,

$C_k(Sp(2n))$,


, $D_k(SO(2k))$,


3. Результаты § 3 позволяют сформулировать интересную комбинаторную задачу. Найти число решений систем (3.23),(3.38), (3.39),(3.44) при фиксированных числах m_i. Это важно для доказательства полноты системы соответствующих собственных векторов. Эта задача решена А.А.Кирилловым.

4. Как было видно в предыдущем параграфе, задача диагонализации семейства трансфер-матриц в пространстве (3.I) в определенном смысле эквивалентна задаче разложения $\mathcal{H}$ на неприводимые компоненты относительно действия группы G. Причем, использованный метод регулярен по числу узлов цепочки (по числу перемножае-

мых пространств) и является вполне осмысленным при $N \to \infty$ [16].

Литература

1. Heisenberg W. Zeitschrift für Physik, 1928, v.49, N 9-10, p.619.
2. Bethe H., Zeitschrift für Physik, 1931, v.71, N 3-4, p.205.
3. Baxter R.J., Ann.Phys., 1972, v.70, p.323.
4. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. - УМН, 1979, т.34, в.5, с.13.
5. Kulish P.P., Sklyanin E.K., Lect.Not.Phys., 1982, v.151, p.61.
6. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. - Lett.Math.Phys., 1981, v.5, N 5, p.393.
7. Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. - Зап.науч.семин. ЛОМИ, т.121, с.92.
8. Zamolodchikov A.B. and Al.B. - Ann. of Phys., 1979, v.120, p.253.
9. Shankar R., Witten E. - Nucl.Phys., 1978, v.B141, p.394.
10. Berg B., Karowski M., Kurak V., Weisz P. - Nucl.Phys., 1975, v.B134, p.125.
11. Sutherland B. Phys.Rev. B, 1975, v.12, N 9, p.3795.
12. Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. - ЖЭТФ, 1981, т.80, № 1, с.214.
13. Решетихин Н.Ю. - ЖЭТФ, 1983, № 2.
14. Тахтаджян Л.А. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1981, т.101, с.158.
15. Кулиш П.П - Докл.АН СССР, 1980, т.255, № 3, с.323.
16. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. - Зап. науч. семин.ЛОМИ, 1981, т.109, с.134.

А.М.Вершик, С.В.Керов

K-ФУНКТОР (ГРУППА ГРОТЕНДИКА) БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

§ 0. Введение. Постановка вопроса; структуры в K°-функторе

Категория проективных модулей комплексной групповой алгебры конечной группы исчерпывает категорию всех модулей над этой алгеброй и, поэтому, ее группа Гротендика (K°-функтор), т.е. абелева группа всех классов виртуальных проективных модулей с отмеченным элементом ("регулярным представлением") - изоморфна аддитивной группе виртуальных характеров и несет, тем самым, информацию обо всех представлениях алгебры (группы). Для бесконечных и, в частности, локально-конечных групп проективные модули над групповой алгеброй, вообще говоря, составляют лишь очень малую часть всех модулей, поэтому могло бы показаться, что K°-функтор в этом случае не дает достаточных сведений о группе и ее представлениях. Иногда это действительно так, например, K°-функтор групповой C^*-алгебры свободной группы с двумя образующими - всего лишь $\mathbb{Z}$, см.[I5]. Тем интереснее, что для локально-конечных групп и, в частности, для группы $\mathfrak{S}_\infty$ - финитных подстановок натурального ряда, K°-функтор содержит богатейшую информацию о группе, ее представлениях, следах и т.д., достаточную, например, для того, чтобы восстановить однозначно групповую алгебру. Более точно; отображение функторов

$$\mathbb{C}[G] \longmapsto K^\circ(G)$$

сопоставляющее комплексной групповой алгебре ее K°-функтор, как абелеву группу с отмеченной подполугруппой истинных проективных модулей и отмеченным элементом - одномерным свободным модулем, - это отображение есть эквивалентность функторов $\mathbb{C}[\cdot]$ и $K^\circ(\cdot)$. Это утверждение, являющееся перефразировкой более общей теоремы об AF -алгебрах [7], делает важной задачу вычисления K°-функторов локально-конечных групп.

Частью исследований теории бесконечной симметричной группы $\mathfrak{S}_\infty$ (см. [I],[2]) которые авторы ведут последние годы, является полное вычисление $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$, которое приводится в настоящей работе. Оказалось, что $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ и многочисленные структуры в нем играют центральную роль во взаимосвязи вопросов, связанных с группой $\mathfrak{S}_\infty$. При этом запас структур на $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ богаче, чем для допредельных групп $K^\circ(\mathfrak{S}_n)$; например, $K^\circ(\mathfrak{S}_n)$ не является кольцом, как $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$.

Опишем кратко результаты статьи. Основной результат состоит в явном описании $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ и указании конуса истинных модулей. Прежде всего, в $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ имеется естественная структура кольца. Это обстоятельство выделяет в классе локально-конечномерных алгебр важный подкласс, не рассматривавшийся ранее и отмеченный впервые авторами в [2]. К нему относятся групповые алгебры индуктивных пределов некоторых классических групп.

Поэтому для ответа удобно использовать спектр $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ как кольца и, в частности, положительный спектр (максимальные идеалы, положительные на конусе). Оказывается, $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ есть кольцо функций от формальных бесконечных рядов одной переменной; положительный спектр составляют некоторые специальные ряды, которые сходятся в единичном круге и имеют вид, приведенный в §§I-2. Однако, конус истинных модулей в $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ вовсе не совпадает с конусом неотрицательных функций на положительном спектре, а является лишь его частью. Точное его описание есть основной результат статьи (см. § 6). Общий характер ответа приведен ниже во введении; он требует привлечения не только значений функций, но и их струй, а именно, значений в точке некоторых специальных дифференциальных операторов, вычисленных на данной функции.

Перечислим теперь основные структуры и свойства $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$.

I) <u>Предел</u>. $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ есть индуктивный предел $K^\circ(\mathfrak{S}_n)$ в категории упорядоченных абелевых групп с отмеченным элементом.

2) <u>Порядок</u>. Подполугруппа истинных модулей K°_+ определяет на абелевой группе $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ порядок со свойством Рисса (так называется свойство интерполяции, чуть более слабое, чем аксиома решеток:

$$\forall\ a_1,\dots,a_n \ \text{и}\ b_1,\dots,b_m,\ b_j \leqslant a_i,$$
$$i=1,\dots,n\ ,\ j=1,\dots,m.$$

существует c : $b_j \leqslant c \leqslant a_i$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$.

Явное описание K°_+ см.ниже.

3) $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ есть кольцо относительно умножения "кружочком" (индуцирование с тензорного произведения). Как кольцо $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ изоморфно фактор-кольцу кольца $\mathcal{A}$ симметрических полиномов от бесконечного числа переменных по идеалу, порожденному элементом $1-\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$.

Наиболее важный базис в кольце симметрических полиномов - базис функций Шура, и всякий элемент кольца может быть описан вектором коэффициентов разложения по этому базису. Однако при факторизации это разложение не единственно. Кольцо $\mathfrak{A}$ и $K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ - градуированы по степеням.

4) Спектр. Кольцо $K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ удобно реализовать как кольцо полиномов (уже любых) от основных симметрических функций исходных переменных, т.е. как кольцо полиномов от бесконечных последовательностей комплексных чисел, понимаемых как коэффициенты формальных степенных рядов. Разумеется, максимальный спектр кольца этим не исчерпывается, однако среди этих элементов полностью содержится положительный спектр.*

5) Положительный спектр. Он состоит из рядов, сходящихся в $\mathcal{D}_1$ и имеющих вид

$$e^{\gamma z}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+\beta_i z}{1-a_i z},\ \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > 0,\ \beta_1 > \beta_2 > \ldots > 0,$$

$$\sum \alpha_i + \sum \beta_i + \gamma = 1.$$

Это утверждение есть теорема Тома [I4], доказанная также в [I], где дан новый смысл вероятностных коэффициентов α_i и β_j. (Положительный спектр состоит, по определению, из точек максимального спектра, положительных на K°_{+}).

Другая интерпретация положительного спектра - группа дивизоров на прямой (см.приложение). Заметим тут же, что в [4] отмечено, что, фактически, аналитическое доказательство теоремы Тома содержалось в работах 50-х г.г. по вполне положительным функциям.

6) Следы. Точки положительного спектра есть линейные положительные функционалы на $K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ и, тем самым, следы на $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, т.е. конечные неразложимые характеры на группе $\mathfrak{S}_\infty$ (именно эту задачу - об отыскании характеров на $\mathfrak{S}_\infty$ - и решал Тома).

7) Полуконечные следы на $K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ вычислены в § 4; они нужны для описания K°_{+}.

8) Порядковые идеалы в $K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ (т.е. подгруппы, содержащие с каждым элементом все меньшие в смысле K°_{+}) являются одновременно мультипликативными идеалами, однако весьма специального вида. Каждый такой идеал $H \subset K^{\circ}(\mathfrak{S}_\infty)$ есть снова упорядоченная подгруппа относительно $K^{+}_{H} = H \cap K^{\circ}_{+}$.

9) Описание K°_{+}. Общая теорема, сформулированная в [2], гласит:

$$K^0_+ = \bigcup_H K^H_{++}$$

где K^H_{++} есть множество всех элементов K^H_+, положительных на положительном спектре кольца K^H, а H пробегает совокупность всех порядковых идеалов. Поэтому задача явного описания K^0_+ свелась к описанию положительного спектра K^H для всех порядковых идеалов H. Замечательным образом, всякая точка положительного спектра K^H, т.е. всякий конечный след на K^H, продолжается до полуконечного следа на K^0 и задача сводится к описанию последних см.7). Эта задача сложнее, чем задача о конечных следах.

I0) <u>Скалярное произведение</u>. Если базис функций Шура рассматривать, как ортонормированный базис, то кольцо снабжается скалярным произведением. В некотором естественном смысле градуированное кольцо $\mathcal{A}$ с этим скалярным произведением есть решетка в т.н. фоковском пространстве (см. приложение В), а скалярное произведение может быть задано с помощью гауссовой меры.

II) <u>Дифференциальные операторы Шура</u>. Если e_λ есть функция Шура, то сопряженный к оператору умножения на e_λ в смысле скалярного произведения, есть дифференциальный оператор Шура E_λ; он корректно определен на некоторых идеалах в фактор-кольце, т.е. в K^0. В терминах E_λ дается окончательное описание положительных элементов - K^0_+.

I2) <u>Граф Юнга</u>. Основным техническим инструментом при изучении K^0 служит граф Юнга $\mathcal{Y}$, вершины которого есть диаграммы Юнга, т.е. неприводимые представления, а дуги определяются теоремой ветвления, см.[I]. Группа $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ есть $\sum \mathbb{Z}$ (сумма по диаграммам с n клетками); $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ есть прямой предел таких групп, т.е. целочисленные функции на $\mathcal{Y}$ с некоторым отождествлением. Идеалы (порядковые) в K^0 могут быть описаны в терминах порядковых идеалов $\mathcal{Y}$, как частично-упорядоченного множества.

Перечисленные вопросы подробно изучены в настоящей работе; в заключение мы коснемся бегло вопроса, не затронутого в работе.

В работах [I,2] мы описали явно фактор-представления группы $\mathfrak{S}_\infty$ отвечающие конечным характерам и дали интерпретацию параметрам характеров. Какова связь этих представлений и $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$?

Прежде всего, отметим, что проективные модули не снабжены канонически никакой положительной формой, поэтому их нельзя рассматривать как унитарные представления априори. Несложное свойство $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ состоит в том, что всякий проективный модуль кратен подмодулю одномерного свободного модуля, т.е. регулярного представления. Если регулярное представление $\mathfrak{S}_\infty$ рассматривать, как унитарное, то проективные модули станут унитарными представлениями, квазиэквивалентными регулярному*).

В этом принципиальное отличие от привычных случаев (конечные, компактные группы): образ $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ во всех проективных модулях изоморфен $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, т.е. все проективные представления - точны. Тем удивительнее, что сама категория проективных модулей имеет столь интересную группу Гротендика.

Чрезвычайно интересно описать различные пополнения $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$, которые, повидимому, должны отвечать группам Гротендика, других категорий модулей на $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$.

§ I. Описание $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ как абелевой группы. Умножение в $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$

I.I. Обозначим через

$$a_n = a_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{1\le i_1<\dots<i_n} x_{i_1}\dots x_{i_n} \qquad (I)$$

элементарные симметрические функции от бесконечного числа аргументов, $n = 1, 2, \dots$. Совокупность этих функций алгебраически независима и порождает кольцо $\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$ -симметрических функций от переменных $x_1, \dots x_n, \dots$ (см.[5]). Кольцо $\mathcal{A}$ имеет естественную градуировку $\mathcal{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ по степеням, в которой $a_n \in \mathcal{A}_n$.

Отметим другие полезные базисы в кольце $\mathcal{A}$. Суммы Ньютона

$$s_n = s_n(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \qquad (2)$$

также алгебраически независимы и порождают над полем $\mathbb{Q}$ кольцо $\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Особенно важную роль для дальнейшего играют функции Шура

$$e_\lambda = \sum_{\rho\vdash n} \chi^\lambda_\rho \frac{s_\rho}{c_\rho} \qquad (3)$$

где λ, $\rho = (1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots)$ - разбиение n,

$$s_\rho = s_1^{\rho_1} s_2^{\rho_2} \dots, \quad c_\rho = 1^{\rho_1}\rho_1!\, 2^{\rho_2}\rho_2! \dots,$$

---

*) Напомним, что квазиэквивалентность двух представлений означает отсутствие дизъюнктных подпредставлений. Для представления конечных групп квазиэквивалентность π_1 и π_2 означает, что $\pi_1 = \sum k_i \lambda^i$ и $\pi_2 = \sum m_i \lambda^i$, где λ^i -некоторые неприводимые представления, А $k_i > 0$, $m_i > 0$.

χ_ρ^λ – значение неприводимого характера χ^λ группы $\mathfrak{S}_n$ на классе подстановок с ρ_k циклами длины k, $k = 1, 2 \dots$. Функции Шура e_λ, $\lambda \vdash n$ образуют аддитивный базис в подгруппе $\mathfrak{A}_n$ функций степени n. Подробнее об этом см.[5,6,13].

1.2. Для конечной или локально конечной группы G определим $K^\circ(G)$, как группу Гротендика категории $\mathcal{P}(G)$ конечно-порожденных проективных модулей над групповой алгеброй $\mathbb{C}[G]$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ группу подстановок первых n натуральных чисел, $n = 1, 2, \dots$. Удобно ввести также тривиальную группу $\mathfrak{S}_0 = \{e\}$. Группа $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ определяется, как группа финитных подстановок натурального ряда.

Группа $K^\circ(\mathfrak{S}_n)$ для $\mathfrak{S}_n$, как и для всякой конечной группы, свободно порождается классами эквивалентности неприводимых представлений. Пусть $\mathcal{Y}_n$ – множество диаграмм Юнга с n клетками. Стандартные конструкции (см.[6]) сопоставляют диаграмме $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ неприводимое представление π_λ группы $\mathfrak{S}_n$ с характером χ^λ.

Соответствие $\lambda \longmapsto [\pi_\lambda]$ параметризует классы неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_n$, так что

$$K^\circ(\mathfrak{S}_n) \cong \mathcal{F}_n \tag{4}$$

где $\mathcal{F}_n$ – абелева группа целозначных функций на $\mathcal{Y}_n$.

<u>Предложение</u>. Естественному вложению симметрических групп $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$ отвечает гомоморфизм групп Гротендика φ_n :

$$K^\circ(\mathfrak{S}_n) \longrightarrow K^\circ(\mathfrak{S}_{n+1}) \quad \text{, при котором}$$

$$\varphi_n[\pi] = [\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi].$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для конечной группы G группа $K^\circ(G)$ изоморфна группе характеров $Ch(G)$. Однако, в отличие от K°, функтор Ch контравариантен : гомоморфизмам групп он сопоставляет ограничение представлений, а не индуцирование.

1.3. Если $\mathfrak{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ – прямая сумма всех симметрических групп (группы $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}_1$ содержат только единицу), то

$$K^\circ(\mathfrak{S}) \cong \sum_{n=0}^{\infty} K^\circ(\mathfrak{S}_n). \tag{5}$$

Эта группа, в силу (4), отождествляется с группой финитных функций на множестве всех диаграмм $\mathcal{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n$.

Пусть π', π'' – представления групп $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{S}_n$. Определим представление $\pi' \circ \pi''$ группы $\mathfrak{S}_{m+n}$, как индуцированное с подгруппы $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{m+n}$:

$$\pi' \circ \pi'' - \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} \pi' \otimes \pi'' \qquad (6)$$

Класс эквивалентности для $\pi' \circ \pi''$ зависит только от классов представлений π', π''. Тем самым, на группе $K^0(\mathfrak{S})$ определено умножение. Оно превращает $K^0(\mathfrak{S})$ в градуированное коммутативное кольцо с единицей.

I.4. Следующий классический факт восходит к Фробениусу и к Шуру:

<u>Теорема</u> (ср.[8, I2]). Соответственно $\pi_\lambda \mapsto e_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Y}$, устанавливает изоморфизм колец

$$K^0(\mathfrak{S}) \cong \mathfrak{A} \qquad (7)$$

Заметим, что кольцо $\mathfrak{A}$ обладает рядом других важных структур, например, структурой алгебры Хопфа и λ -кольца (см.[5,II, I2]).

I.5. Перейдем к вычислению K^0 -функтора группы $\mathfrak{S}_\infty$. Оно основано на непрерывности K^0 -функтора:

$$K^0(\mathfrak{S}_\infty) = \varinjlim K^0(\mathfrak{S}_n) \qquad (8)$$

непосредственно вытекающей из определения группы $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ (см.[7]).

Равенство (8) можно понимать, как предельное соотношение и для других структур, в частности, конус истинных модулей есть предел конусов в $K^0(\mathfrak{S}_n)$; это дает способ вычисления этих структур (см.I.7). Наиболее интересно, что в $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ появляются и новые структуры, которых нет в $K^0(\mathfrak{S}_n)$ - например, умножение.

Естественные вложения $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_\infty$ индуцируют гомоморфизм аддитивных групп $\varphi : K^0(\mathfrak{S}) \to K^0(\mathfrak{S}_\infty)$.

Пусть $\mathfrak{J}$ - идеал в $K^0(\mathfrak{S})$, порожденный разностями

$$\left[\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi_\lambda\right] - [\pi_\lambda], \ \lambda \in \mathbb{Y}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

ТЕОРЕМА. Гомоморфизм φ порождает изоморфизм аддитивных групп

$$K^0(\mathfrak{S}_\infty) \cong K^0(\mathfrak{S})/\mathfrak{J}. \qquad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идеал $\mathfrak{J}$ содержится в ядре φ, так как

$$\varphi([\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi]) = \varphi[\pi].$$

Операция индуцирования на $\mathfrak{S}_{n+1}$ с подгруппы $\mathfrak{S}_n$ — специальный случай умножения (6): $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi = \pi \circ \delta$, где δ — единичное представление группы $\mathfrak{S}_1$. Образующими идеала $\mathcal{J}$ служат разности $[\pi]\circ[\delta]-[\pi]$. Получаем, что

$$K(\mathfrak{S})/\mathcal{J} \cong \varinjlim K^0(\mathfrak{S}_n) \cong K^0(\mathfrak{S}_\infty),$$

что и требовалось доказать.

I.6. Пусть $(s_1-1)\mathcal{A}$ — идеал кольца $\mathcal{A}$, порожденный $(s_1-1)\in\mathcal{A}$ и $\mathcal{R} = \mathcal{A}/_{(s_1-1)\mathcal{A}}$ — факторкольцо ($\mathcal{R}$ удобно воспринимать, как кольцо симметрических функций на гиперплоскости $\{(x_1, x_2, \dots): \sum x_i = 1\}$. Из теорем I.4, I.5 получаем

СЛЕДСТВИЕ: $K^0(\mathfrak{S}_\infty) \cong \mathcal{R}$.

I.7. Приведем другое описание группы $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$, типовое для группы Гротендика AF -алгебры.

Множество $\mathcal{Y}$ всех диаграмм Юнга упорядочено по включению. Оно описывает правило ветвления для неприводимых представлений симметрических групп:

$$\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}} \pi_2 = \bigoplus_{\Lambda:\lambda\nearrow\Lambda} \pi_\Lambda \qquad (10)$$

(мы пишем $\lambda\nearrow\Lambda$, если λ накрывает Λ, т.е. $\lambda\subset\Lambda$ и $|\Lambda| = |\lambda|+1$). Диаграмма Хассе частично упорядоченного множества $\mathcal{Y}$ называется графом Юнга (см. I). Она определяет прямой спектр абелевых групп $\mathcal{F}_0 \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\Psi} \dots \xrightarrow{\Psi} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\Psi} \dots$ с вложениями $(\Psi_n f_n)(\Lambda) = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} f_n(\lambda)$, $f_n \in \mathcal{F}_n$. В соответствии с определением индуктивного предела элемент группы $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}_n$ представляет собой функцию f, определенную п.в. на графе Юнга $\mathcal{Y}$ и удовлетворяющую "индуктивному" условию согласования

$$f(\Lambda) = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} f(\lambda).$$

Из (8) следует, что $K^0(\mathfrak{S}_\infty) \cong \mathcal{F}$.

§ 2. Конечные следы на $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$

2.I. В группе Гротендика $K^0(G)$ локально конечной группы имеется выделенный конус $K^0_+(G)$, состоящий из классов истинных G -модулей. Этот конус превращает $K^0(G)$ в упорядоченную группу. Структура порядка в $K^0(G)$ содержит почти всю информацию о групповой алгебре группы G , см.[7]. Конус в группе $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty) = \varinjlim K^\circ(\mathfrak{S}_n)$ совпадает с индуктивным пределом конусов в группах $K^\circ(\mathfrak{S}_n)$, $n=1,2,\dots$; в реализации на графе Юнга он состоит из функций $f \in \mathcal{F}$, неотрицательных для п.в. $\lambda \in \mathcal{Y}$.

2.2. Конечным следом на группе $K^\circ(G)$ мы называем сохраняющее порядок линейное отображение $M : K^\circ(G) \longrightarrow \mathbb{R}$. Согласно общей теории AF -алгебр (см.[7]), следы на группе $K^\circ(G)$ взаимно-однозначно связаны со следами нагрупповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$.

2.3. По следствию I.6 группа $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty) \cong \mathfrak{R}$ обладает структурой коммутативного кольца с единицей. Умножение в кольце $\mathfrak{R}$ согласовано с порядком, а мультипликативная единица является сильной порядковой единицей. Из более общей теоремы 6 в [2] вытекает

ТЕОРЕМА. Неразложимые конечные следы на группе $\mathfrak{R}$ мультипликативны:

$$M(PQ) = M(P)M(Q)$$

при всех $P, Q \in \mathfrak{R}$.

Естественное продолжение $\widetilde{M}$ следа M с факторкольца $\mathfrak{R} \cong \mathcal{A}/_{(s_1-1)\mathcal{A}}$ на $\mathcal{A}$ характеризуется как положительный (на базисе функций Шура $\{e_\lambda\}$, $\lambda \in \mathcal{Y}$) функционал $\widetilde{M} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$, для которого $\widetilde{M}(s_1 P) = \widetilde{M}(P)$ при всех $P \in \mathcal{A}$. Для неразложимого следа M это равносильно условию $\widetilde{M}(s_1) = 1$.

Таким образом, неразложимые следы образуют подмножество в максимальном спектре комплексной алгебры $\mathcal{A}_\mathbb{C} = \mathcal{A} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$.

2.4. Гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ полностью задается своими значениями $\varphi(a_n)$, $n = 1,2,\dots$ на базисе элементарных симметрических функций (или значениями $\varphi(s_n)$, $n = 1,2,\dots$ на базисе сумм Ньютона).

Соответствие $\varphi \longrightarrow \{\varphi(s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ задает биекцию

$$\mathrm{Max}\,\mathcal{A}_\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^\infty$$

максимального спектра $\mathrm{Max}\,\mathcal{A}_\mathbb{C} \cong \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ с пространством последовательностей $\mathbb{C}^\infty$.

Часто удобнее иметь дело с производящими функциями этих последовательностей (формальными рядами):

$$R_\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(a_k) z^k = e^{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\varphi(s_n)}{n} z^n} \qquad (II)$$

В наиболее важном случае положительных гомоморфизмов (см. ниже) ряды R_φ, определяют мероморфные функции и задаются своими нулями и полюсами.

2.5. Обозначим через Δ множество наборов (α, β, γ) из двух невозрастающих последовательностей

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0, \quad \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$$

и числа $\gamma \geqslant 0$, для которых $\sum \alpha_k + \sum \beta_k + \gamma = 1$.

С каждым набором $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$ связан неразложимый след $M = M_{\alpha,\beta}$, производящая функция которого равна

$$R_{\alpha,\beta}(z) = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_k z}{1 - \beta_k z} . \tag{I2}$$

ТЕОРЕМА (Тома [I4]). Следы $M_{\alpha,\beta}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$ неразложимы и исчерпывают список всех неразложимых нормированных следов на упорядоченной группе $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$.

В этой формулировке параметры Тома α, β описывают нули и полюса функции $R_{\alpha,\beta}$. В [I] изложено другое доказательство этой теоремы, содержащее иную, чем в [I4], интерпретацию параметров α, β, γ.

2.6. Элементы кольца $\mathcal{R}$ определяются своими значениями на границе Тома Δ. Например,

$$S_n(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n + (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^n \tag{I3}$$

при $n \geqslant 2$ $(S_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv 1)$. Значения функций Шура $e_\lambda = e_\lambda(\alpha, \beta, \gamma)$ на границе Тома получаются из формулы Фробениуса (3). Прямое вероятностное определение этих функций дано в [3].

В приложении А элементы кольца $\mathcal{R}$ охарактеризованы, как функции специального вида от двух наборов переменных $\alpha = (\alpha_1 \alpha_2, \ldots)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$.

2.7. Укажем описание следов для $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ в терминах графа Юнга $\mathcal{Y}$. Функцию m от диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}$ со значениями в $[0, \infty]$ назовем распределением на графе $\mathcal{Y}$ если выполняется "проективное" условие согласования

$$m(\lambda) = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} m(\Lambda). \tag{ПС}$$

Между следами M на $K^{\circ}(\mathfrak{S}_{\infty})$ и конечными распределениями m на графе Юнга имеется биективное соответствие, при котором $m(\lambda) = M(e_{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{Y}$, так что неразложимым следам отвечают распределения $M_{\alpha,\beta}$

$$m_{\alpha,\beta}(\lambda) = e_{\lambda}(\alpha, \beta, \gamma) \qquad (14)$$

где $\lambda \in \mathbb{Y}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Delta$.

§ 3. Порядковые идеалы группы $K^{\circ}(\mathfrak{S}_{\infty})$.

3.1. Назовем гранью в конусе $\mathcal{R}_+ \cong K^{\circ}_+(\mathfrak{S}_{\infty})$ любой подконус H_+ в $\mathcal{R}_+$, содержащий вместе с каждым своим элементом все меньшие:

$$0 \leq Q \leq P, \ P \in H_+ \implies Q \in H_+ .$$

Порядковым идеалом в $\mathcal{R}$ называется подгруппа H , порожденная некоторой гранью H_+ в $\mathcal{R}$: $H = H_+ - H_+$. Порядковые идеалы можно охарактеризовать как порядковые подгруппы (т.е. подгруппы, порожденные своими положительными элементами), удовлетворяющие еще условию

$$P_1 \leq Q \leq P_2 ; \ P_1, P_2 \in H \implies Q \in H.$$

Порядковые идеалы в $\mathcal{R}$ соответствуют двусторонним замкнутым идеалам в алгебре $C^*(\mathfrak{S}_{\infty})$, см. [1].

3.2. Идеалом графа $\mathbb{Y}$ называется подмножество $\mathcal{J} \subset \mathbb{Y}$, содержащее вместе с каждой вершиной все последующие:

$$\lambda \nearrow \Lambda , \ \lambda \in \mathcal{J} \implies \Lambda \in \mathcal{J}.$$

Идеал называется насыщенным, если любая вершина $\lambda \in \mathbb{Y}$, для которой $\Lambda \in \mathcal{J}$ при всех $\lambda \nearrow \Lambda$, содержится в $\mathcal{J}$. Любой идеал можно насытить, добавив к нему конечное число вершин; ниже мы все идеалы в $\mathbb{Y}$ считаем насыщенными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Соответствие $H \mapsto \mathcal{J} = \{\lambda \mid e_{\lambda} \in H\}$ устанавливает сохраняющую включение биекцию между порядковыми идеалами в $\mathcal{R}$ и (насыщенными) идеалами графа $\mathbb{Y}$.

3.3. Идеал называется примитивным, если его нельзя получить, как собственное пересечение двух идеалов. Эквивалентное описание: примитивные идеалы имеют вид $\mathcal{J} = \{\lambda \mid m(\lambda) = 0\}$, где m - неразложимое распределение на $\mathbb{Y}$. Каждый идеал можно представить, как пересечение примитивных идеалов.

Напомним описание примитивных идеалов графа Юнга в [1].

Они параметризуются бесконечными диаграммами $I \subset \mathbb{N}^2$. Идеал $\mathcal{J}(I) = \{\mu \mid \mu \not\subset I\}$ состоит из диаграмм Юнга μ, не содержащихся в I . Множество бесконечных диаграмм в $\mathbb{N}^2$ обозначим через $\mathcal{Y}_\infty$.

Будем называть основными диаграммы вида $I = \mathbb{N}^2$ или $I = I_{k,\ell}$, где $I_{k,\ell}$ – объединение k строк и ℓ столбцов в $\mathbb{N}^2$, $k^2 + \ell^2 \neq 0$. Ядрами конечных неразложимых распределений на $\mathcal{Y}$ служат примитивные идеалы основных диаграмм.

3.4. Если $I \neq \mathbb{N}^2$ – собственная диаграмма, обозначим через I_0 подмножество ее клеток с бесконечными крюками и через $\nu_{\text{сдв.}}$ – с конечными. Тогда I_0 – основная диаграмма, $\nu_{\text{сдв.}}$ – сдвиг диаграммы Юнга ν . Пусть также λ – наименьшая диаграмма Юнга, содержащая $\nu_{\text{сдв.}}$ (см.рис. I).

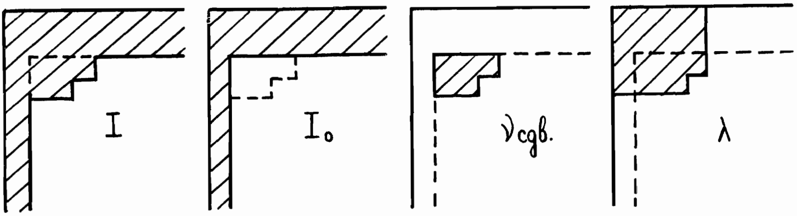


Рис.I

3.5. При работе с порядковыми идеалами необходима осторожность. Например, пересечение семейства таких идеалов может иметь слишком мало положительных элементов и не быть порядковой подгруппой. Примером может служить группа размерностей (см.[7]) графа на рис.2. Для функции f , значения которой указаны на

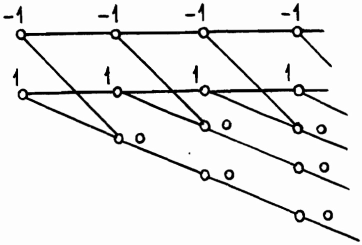


Рис.2

рисунке, не существует минимального, содержащего ее порядкового идеала в группе размерностей.

Заметим, что для положительных элементов минимальный порядковый идеал в K° существует всегда (пересечение). Мы покажем, что в группе $\mathcal{R} \cong K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ это верно для всех (а не только для положительных) элементов.

3.6. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{J}$ – идеал в графе Юнга $\mathcal{Y}$, H – соответствующий порядковый идеал в $\mathcal{R}$ и $P=\sum_{\mu\vdash m} c_\mu e_\mu \in \mathcal{A}_m$. Обозначим через $\widetilde{P}$ образ элемента $P \in \mathcal{A}$ в факторкольце $\mathcal{R}$. Тогда, если $\widetilde{P}\in H$, то $\widetilde{e}_\mu \in H$ при всех $\mu \vdash m$, для которых $c_\mu \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S_m = S_m(P)$ – носитель P на m-ом этаже $\mathcal{Y}_m$, $S_m=\{\mu\vdash m \mid c_\mu \neq 0\}$. Для $\lambda,\mu\in S_m$ будем писать $\lambda \xrightarrow{r} \mu$, если μ можно получить из λ переносом некоторых клеток в первую строку; аналогично, $\lambda \xrightarrow{c} \mu$ означает, что перенося клетки в первый столбец, можно из λ получить μ.

Пусть E_m^+ (естественно, E_m^-) состоит из тех $\lambda\in S_m$ для которых ни при каком $\mu \in S_m$ неверно, что $\lambda \xrightarrow{r} \mu$ (соответственно, $\lambda \xrightarrow{c} \mu$).

Через λ^r, λ^c обозначим диаграммы Юнга, получаемые из $\lambda\in\mathcal{Y}_m$ посредством добавления $(n-m)$ клеток в первую строку (соответственно, в первый столбец).

Элементу $P\in\mathcal{A}_m$ отвечает функция $f\in\mathcal{F}$, определенная и согласованная в смысле (ИС), начиная с m-ого этажа. Для нас важно, что $f(\lambda^r)=P(e_\lambda)\neq 0$ при $\lambda\in E_m^+$ и $f(\lambda^c)= = P(e_\lambda)=0$ для $\lambda\in E_m^-$.

Пусть n настолько велико, что $P\in H_n = H\cap K^\circ(\mathfrak{S}_n)$. Поскольку H_n – порядковый идеал в конечнопорожденной решетке $\mathcal{R}_n \cong K^\circ(\mathfrak{S}_n)$, получаем, что $S_n=S_n(P)\subset \mathcal{J}_n=\mathcal{J}\cap\mathcal{Y}_n$; в частности, $\lambda^r\in\mathcal{J}_n$ для $\lambda\in E_m^+$ и $\lambda^c\in\mathcal{J}_n$ для $\lambda\in E_m^-$.

Пусть диаграмма Юнга $\Lambda\in\mathcal{Y}_n$ содержит $\mu\in E_m^+$. Существует диаграмма $\lambda_+\in E_m^+$, для которой $\mu \xrightarrow{r} \lambda_+$ (возможно, $\lambda_+=\mu$). Поскольку $\lambda_+^r \in \mathcal{J}_n$, получаем, что $\lambda_+^r\cup\Lambda\in\mathcal{J}$; аналогично $\lambda_-^c\cup\Lambda\in\mathcal{J}$ для некоторой диаграммы $\lambda_-\in E_m^-$. Но любая достаточно большая диаграмма Юнга, содержащая Λ, непременно содержит либо $\lambda_+^r\cup\Lambda$, либо $\lambda_-^c\cup\Lambda$ и, поэтому, лежит в $\mathcal{J}$. Отсюда следует, что и Λ лежит в $\mathcal{J}$ (насыщенность), а поэтому и $\lambda\in\mathcal{J}_m$, что и требовалось доказать.

3.7. СЛЕДСТВИЕ. В упорядоченной группе $\mathcal{R}\cong K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ для каждого элемента существует минимальный порядковый идеал, его содержащий.

3.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Каждый порядковый идеал H в группе $\mathfrak{R}$ является также идеалом в $\mathfrak{R}$ в кольцевом смысле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in H_+$ и $Q \in \mathfrak{R}_+$. Существует натуральное n, при котором $Q \leq n \cdot 1$. Но тогда $0 \leq PQ \leq \leq nP \in H_+$ и $PQ \in H_+$. Произвольные элементы $P \in H$, $Q \in \mathfrak{R}$ можно записать в виде $P = P_+ - P_-$, $Q = Q_+ - Q_-$ где $P_\pm \in H_+$, $Q_\pm \in \mathfrak{R}_+$ и предложение следует из рассмотренного случая.

Это предложение, а также теоремы 2.3 и 5.6 справедливы для произвольных колец Рисса с единицей (см.[2]).

§ 4. Полуконечные следы на $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$.

4.I. Определим полуконечный след на группе Гротендика $K^\circ(G)$ локально конечной группы G, как такой аддитивный функционал

$$\Phi : K^\circ_+(G) \longrightarrow [0, +\infty],$$

что любой элемент $P \in K^\circ_+(G)$ представим в виде $P = \sup P_n$, $P_n \in H^\Phi_+$, где $H^\Phi_+ = \{ Q \in K^\circ_+(G) \mid \Phi(Q) < \infty \}$. Мы будем отождествлять след Φ с его продолжением по линейности на порядковый идеал $H^\Phi = H^\Phi_+ - H^\Phi_+$. Полуконечные следы на $K^\circ(G)$ биективно соответствуют полуконечным следам на групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$ (см.[I]). Полуконечные следы на $K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ можно также описать, как распределения на графе Юнга $\mathcal{Y}$, бесконечные вне непустого порядкового идеала в $\mathcal{Y}$.

Множество неразложимых конечных и полуконечных следов на $\mathfrak{R} \cong K^\circ(\mathfrak{S}_\infty)$ обозначим через $\mathcal{T}$.

4.2. Рассмотрим стандартное скалярное произведение на $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, относительно которого базис функций Шура $\{e_\nu\}$, $\nu \in \mathcal{Y}$ ортонормален. В приложении В дано другое его описание.

Дифференциальные операторы на $\mathcal{A}_\mathbb{C}$ (с постоянными коэффициентами) можно определить, как операторы, сопряженные к операторам умножения (ср.[5]). Обозначим через E_ν оператор в $\mathcal{A}_\mathbb{C}$, сопряженный к умножению на функцию Шура e_ν :

$$(E_\nu(P), Q) = (P, e_\nu \cdot Q)$$

при всех $P, Q \in \mathcal{A}$. Отсюда получаем, что

$$E_\nu(e_\lambda) = \sum_\mu g^\lambda_{\mu\nu} e_\mu ;$$

где $g^\lambda_{\mu\nu}$ – структурные константы умножения в базисе функций Шура; их значения задаются комбинаторным правилом Литтлвуда-Ричардсона ([5], стр.68). Например, $E_{(1)} e_\Lambda = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} e_\lambda$.

Заметим, что операторы E_ν определены именно на кольце $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ и не переносятся на факторкольцо $\mathfrak{R}_{\mathbb{C}} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}/(s_1-1)\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что

$$E_\nu(s_1 P) = s_1 E_\nu(P) + \sum_{\sigma:\sigma\nearrow\nu} E(P). \qquad (I5)$$

4.3. Пусть $M \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ - положительный характер кольца $\mathcal{A}$, для которого $M(s_1) = 1$, а ν - непустая диаграмма Юнга. Определим функционал M^ν на $\mathcal{A}$, полагая

$$M^\nu(P) = M(E_\nu P) \qquad (I6)$$

для $P \in \mathcal{A}$. Очевидно, что $M^\nu(e_\mu) > 0$ при всех $\mu \in \mathbb{Y}$, однако функционал M^ν не допускает факторизацию на $\mathfrak{R} = \mathcal{A}/(s_1-1)\mathcal{A}$.

ЛЕММА. Предположим,что для $P \in \mathcal{A}$ $M^\sigma(P) = 0$ при всех $\sigma \subsetneqq \nu$. Тогда $M^\nu(s_1^n P) = M^\nu(P)$, $n = 1, 2, \ldots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из формулы (I5). Заметим,что $M^\sigma(s_1 P) = 0$ при всех $\sigma \subsetneqq \nu$.

4.4. Пусть H_M^ν - порядковый идеал в $\mathfrak{R}$, порожденный функциями Шура e_μ, для которых $M^\sigma(e_\mu) = 0$ при всех $\sigma \subsetneqq \nu$. След M^ν корректно определен на H_M^ν.

Согласно теореме 2.5 $M = M_{\alpha,\beta}$ для некоторого $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Delta$. Если число ненулевых частот $\alpha i, \beta j$ бесконечно или $\gamma > 0$, то след M - точный на R_+, то есть $M(e_\mu) > 0$ при всех $\mu \in \mathbb{Y}$. Отсюда следует, что $H_M^\nu = \{0\}$ для любой непустой диаграммы Юнга $\nu \neq \emptyset$. Напротив, если $\gamma = 0$ и среди частот $\alpha i, \beta j$ отличны от нуля только $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_e$ то носитель следа M в графе Юнга $\mathbb{Y}$ задается собственной основной диаграммой $I_0 = I_{k,e}$:

$$\{\mu \mid M(e_\mu) > 0\} = \{\mu \mid \mu \subset I_{k,e}\}$$

В этом случае идеал H_M^ν нетривиален и соответствует (по предложению п.3.2) примитивному идеалу с диаграммой $I = I_0 \cup \nu_{\text{сдв}} = I_{ke}^\nu$ где $\nu_{\text{сдв}}$ - сдвиг диаграммы ν на вектор (k, e) в $\mathbb{N}^2$. (см. обозначения в п.3.4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть M - след на группе $R \cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$, не являющийся точным и ν - непустая диаграмма Юнга. Тогда формула

$$M^{\nu}_{\alpha,\beta}(l_\mu) = (E_\nu\, l_\mu)(\alpha_1,\dots,\alpha_k;\beta_1,\dots,\beta_l;0) \tag{I7}$$

определяет след на примитивном идеале H^{ν}_{M} с диаграммой $I^{\nu}_{k,l} \in \mathcal{Y}_\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что для диаграммы Юнга μ $\nu \subseteqq \mu \subset \subset I^{\nu}_{k,l}$. Тогда формулу (I7) можно упростить:

$$M^{\nu}_{\alpha,\beta}(l_\mu) = l_{\mu\cap I_0}(\alpha_1,\dots,\alpha_k;\beta_1,\dots,\beta_l;0).$$

Действительно, из правила Литтлвуда-Ричардсона следует, что если $\mu \subset I_0$ и $g^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$, то $g^{\lambda}_{\mu\nu} = 1$. В противном случае $\mu \not\subset I_0$ и $M(l_\mu) = 0$.

4.5. Каждый непустой порядковый идеал H в группе $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ всюду плотен (в смысле монотонной сходимости), а каждый конечный след на H допускает продолжение до конечного или полуконечного следа на $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$.

ЛЕММА. Пусть m – конечное распределение на идеале $\{\Lambda \mid \lambda \subseteqq \Lambda\}$. Тогда m продолжается до конечного или полуконечного распределения $\tilde{m}$ на графе Юнга $\mathcal{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является переформулировкой в терминах распределений леммы 2 из [2]. Можно указать явную формулу для продолжения: если $\mu \in \mathcal{Y}$, то

$$\tilde{m}(\mu) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\Lambda \vdash n \\ \Lambda \supseteqq \lambda}} \dim(\mu,\Lambda)\, m(\Lambda), \tag{I8}$$

где $\dim(\mu,\Lambda)$ – число таблиц на косой диаграмме $\Lambda\setminus\mu$, см. [I3].

4.6. Пусть I, $I_0 = I_{k,l} \in \mathcal{Y}_\infty$, $\nu,\lambda \in \mathcal{Y}$ – те же, что в п.3.4 и $m = m_{\alpha,\beta}$ – неразложимое нормированное распределение (I4) на $\mathcal{Y}$ с носителем I_0 (т.е. $m(\mu) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \subset I_0$). Положим

$$m(\Lambda) = m^{\nu}_{\alpha,\beta}(\Lambda) = \sum_{\mu} g^{\Lambda}_{\mu\nu}\, m_{\alpha,\beta}(\mu) \tag{I9}$$

для диаграмм Юнга $\Lambda \supseteqq \lambda$ и пусть $\tilde{m}^{\nu}_{\alpha,\beta}$ – продолжение распределения $m^{\nu}_{\alpha,\beta}$ на весь граф $\mathcal{Y}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Носитель и идеал конечности распределения $\tilde{m}^{\nu}_{\alpha,\beta}$ имеют следующий вид:

I) $\tilde{m}^{\nu}_{\alpha,\beta}(\Lambda) \neq 0 \iff \Lambda \subset I^{\nu}_{k,l}$

2) $\tilde{m}^{\nu}_{\alpha,\beta}(\Lambda) < \infty \iff \lambda \subseteqq \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) следует из правила Литтлвуда-Ричардсона (см. [5]): если $\lambda \subseteqq \Lambda \subset I$, то

$$M^{\nu}_{\alpha,\beta}(\lambda) = M_{\alpha,\beta}(E_{\nu}\,\ell_{\lambda}) = M_{\alpha,\beta}(\ell_{\lambda\cap I_0}) > 0$$

если же $\Lambda \not\subset I$, то либо $g^{\Lambda}_{\mu\nu} = 0$, либо $\mu \not\subset I_0$ и $M(\ell_{\mu}) = 0$.

2) Достаточно рассмотреть специальный случай, когда μ содержится в $I^{\nu}_{k,\ell}$ и содержит все клетки диаграммы λ , кроме одной. Отсутствующую клетку обозначим через a ; она лежит в ν_{cgb} . Пусть диаграмма μ^{a} получается присоединением к Λ клетки a . Тогда $\mu^{a} \supseteqq \lambda$, $0 < m^{\nu}(\mu^{a}) < \infty$ и $m^{\nu}(\mu^{a}) = \sum_{\pi \vdash n} \dim(\mu^{a},\pi)\, m^{\nu}(\pi) > 0$. Но $\dim(\mu,\pi) = \geqq (n-k)\dim(\mu,\pi)$, где $k = |\mu|$, $n = |\pi|$; поэтому получаем

$$\widetilde{m}^{\nu}(\mu) = \sum_{\pi \vdash n} \dim(\mu,\pi)\; m^{\nu}(\pi) \geqslant$$

$$\geqslant (n-k) \sum_{\pi \vdash n} \dim(\mu^{a},\pi)\, m^{\nu}(\pi) = (n-k)\, m^{\nu}(\mu)$$

и $\widetilde{m}^{\nu}(\Lambda) = \infty$, т.к. n можно взять произвольно большим.

4.7. Напомним описание следов M^{ν} , приведенное в [I] . Пусть $T(I)$ – пространство таблиц, заполняющих бесконечную диаграмму $I \in \mathbb{Y}_{\infty}$ и T^{ν} – счетное множество всех стандартных таблиц на диаграмме ν_{cgb} с произвольными натуральными элементами. Имеется естественное "коумножение" $\delta : T(I) \to T(I_0) \times T^{\nu}$, сопоставляющее таблице $t \in T(I)$ пару таблиц $(\bar{t}, v_t)$ (см. [I] , § 6). Отображение δ является циллиндрическим вложением; удобно отождествить $T(I)$ с подмножеством $\delta(T(I)) \subset T(I_0) \times T^{\nu}$. Обозначая через m_{ν} считающую меру на T^{ν} определим, следуя [I] , меру M^{ν} на $T(I)$, как ограничение меры $M \times m_{\nu}$ на $\delta(T(I))$. Теорема 5 из [I] показывает, что это определение равносильно приведенному выше.

§ 5. Полнота списка полуконечных характеров.

5.I. ЛЕММА. Пусть m – неразложимое распределение на графе Юнга $\mathbb{Y}$. Тогда существует бесконечная диаграмма $I \in \mathbb{Y}_{\infty}$, для которой условия $m(\mu) \neq 0$ и $\mu \subset I$ равносильны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что ядро неразложимого следа φ на групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\infty}]$, связанного с распределением m – примитивный идеал. Описание примитивных идеалов алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_{\infty}]$ с помощью бесконечных диаграмм указано в [I] .

Диаграмму I будем называть носителем распределения m . Точность следа, связанного с m равносильна тому, что $I = \mathbb{N}^2$.

5.2. ЛЕММА. Пусть m - неразложимое распределение на $\mathcal{Y}$ с носителем $I \neq \mathbb{N}^2$. Используя обозначения п.3.4, имеем:

$$\{\mu \mid 0 < m(\mu) < \infty\} = \{\mu \mid \lambda \leqq \mu \subset I\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\subset$ доказывается так же, как п.2) в предложении 4.6 (с заменой $\tilde{m}$ на m).

Для доказательства противоположного включения $\supset$ используем лемму 2 из [I] : если таблица $t=(t_1,t_2,\ldots)\in T$ имеет предельные частоты α,β,γ , то

$$\frac{\dim(\lambda,t_n)}{\dim(\mu,t_n)} = \frac{\dim(\lambda_0,t_n^{(0)})}{\dim(\mu_0,t_n^{(0)})} \longrightarrow \frac{l_{\lambda_0}(\alpha,\beta,\gamma)}{l_{\mu_0}(\alpha,\beta,\gamma)}, \qquad (20)$$

где $\lambda \leqq \mu \subset I$ и $\lambda_0=\lambda\cap I_0,\ \mu_0=\mu\cap I_0,\ t_n^{(0)}=t_n\cap I_0$. Знаменатель в правой части (20) - ненулевой. Выбирая таблицу t так, чтобы

$$\frac{m(\lambda)}{m(\mu)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dim(\lambda,t_n)}{\dim(\mu,t_n)}$$

(это можно сделать по следствию 2 из [I]), получаем, что $m(\lambda) < \infty$, откуда $\varphi(\Lambda) < \infty$ при всех $\lambda \leqq \Lambda$.

5.3. СЛЕДСТВИЕ. Если $I \in \mathcal{Y}_\infty$ - основная диаграмма (т.е. $\nu = \lambda = \varnothing$), то любое распределение m с носителем I конечно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Это следствие и лемма 5.2 основаны на простом комбинаторном факте: если $\varkappa$ - вытянутая в несколько строк косая диаграмма с n клетками (см.рис.3), то добавление клетки (a) увеличивает размерность в n раз, тогда как добавление клетки (b) мало меняет размерность диаграммы $\varkappa$ (т.е. число таблиц на ней).

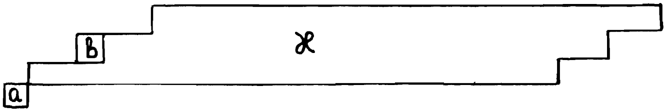


Рис.3

5.4. ТЕОРЕМА. (о полноте списка полуконечных характеров). Пусть φ - неразложимое полуконечное распределение на графе Юнга $\mathcal{Y}$. Тогда существует конечное распределение m и непустая диаграмма Юнга ν , для которых $\varphi(\mu) = m^\nu(\mu)$.

на идеале конечности $\{\mu \mid \varphi(\mu) < \infty\}$ распределения φ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 5.2. существует собственная бесконечная диаграмма $I \in \mathbb{Y}_\infty$, для которой

$$\{\mu \mid 0 < \varphi(\mu) < \infty\} = \{\mu \mid \lambda \subseteq \mu \subset I\}.$$

Зададим распределение m на идеале $\{\mu_0 \mid \lambda_0 \subseteq \mu_0 \subset I_0\}$ полагая $m(\mu_0) = \varphi(\mu_0 \cup \nu_{cgb})$. По лемме 4.5 распределение m продолжается до распределения на подграфе $\mathbb{Y}(I_0) = \{\mu_0 \mid \mu_0 \subset I_0\}$, которое, по следствию 5.3, конечно. Таким образом m - распределение из списка Тома и $\varphi(\mu) = m(\mu_0)$ для таких диаграмм Юнга μ, что $\lambda \subseteq \mu \subset I$. Замечание 4.4 завершает доказательство теоремы.

5.5. Из описания неразложимых следов на $\mathcal{R} \cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ видно, что тип соответствующего следа на групповой алгебре зависит только от его ядра.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ср. [9]). РПусть φ - точный неразложимый след на алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, ядро которого соответствует диаграмме $I \in \mathbb{Y}_\infty$. Тогда

1) Если I имеет только одну бесконечную строку или только один бесконечный столбец, то φ - след типа $\underline{I}$ (типа $\underline{I}_\infty$, если $I \neq I_{1,0}$, $I_{0,1}$).

2) Если I - основная диаграмма, то φ - след конечного типа ($\underline{II}_1$, если $I \neq I_{1,0}, I_{0,1}$).

3) в остальных случаях φ - след типа $\underline{II}_\infty$.

5.6. Неразложимые следы на группе размерностей $\mathcal{R} \cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ обладают важным свойством мультипликативности, аналогичным теореме 2.3 для конечных следов.

ТЕОРЕМА. Пусть φ - неразложимый полуконечный след на $\mathcal{R} \cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ с идеалом конечности H. Тогда существует положительный гомоморфизм $M \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, для которого

$$\varphi(PQ) = M(P) \cdot \varphi(Q) \tag{21}$$

при всех $P \in \mathcal{R}$, $Q \in H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В кольце $\mathcal{R} = \mathcal{A}/(s_1 - 1)\mathcal{A}$ выполняется тождество $\sum_{\lambda \vdash n} \dim\lambda \cdot l_\lambda = 1$, откуда $\varphi(Q) = \sum_{\lambda \vdash n} \dim\lambda \cdot \varphi(l_\lambda Q)$. Поскольку $\varphi(\cdot)$ неразложим, а $\varphi(l_\lambda \cdot)$ - положительный функционал на H, подчиненный φ, найдется такое число a_λ, что $\varphi(l_\lambda Q) = a_\lambda \cdot \varphi(Q)$, $Q \in H$. Для любого $P = \sum_{\lambda \vdash n} a_\lambda l_\lambda^\lambda \in \mathcal{A}$ положим $M(P) = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda a_\lambda$. Нетрудно проверить, что (21) выполняется, причем M - положительный гомоморфизм кольца $\mathcal{R}$.

§ 6. Конус положительных элементов в $\mathfrak{R}\cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$.

6.1. Характеризация конуса $\mathfrak{R}_+\cong K^0_+(\mathfrak{S}_\infty)$ основана на применении к графу Юнга общей теоремы о положительности ([2] , теорема 4).

ТЕОРЕМА. Следующие условия на $P\in\mathfrak{R}$ равносильны:

1) $P\in\mathfrak{R}_+$

2) существует минимальный порядковый идеал H в $\mathfrak{R}$, содержащий P и $\Phi(P)>0$ для всех (неразложимых) следов $\Phi\in\mathfrak{T}$ конечных на H .

ЗАМЕЧАНИЕ. По лемме 3.6 минимальный порядковый идеал в $\mathfrak{R}$ среди всех порядковых идеалов, содержащих P , существует для всех $P\in\mathfrak{R}$. Мы умышленно привели более общую формулировку условия 2),избыточную для графа Юнга, поскольку излагаемое ниже элементарное доказательство легко переносится на случай общего графа ветвления с конечными этажами.

Если H - порядковый идеал в $\mathfrak{R}$, положим $K^H_{++}=\{P\in H\mid \Phi(P)>0$ для всех конечных следов на $H\}$. Теорема означает, что $K^{\mathfrak{R}}_+=K^0_+=\bigcup\limits_H K^H_{++}$, объединение по всем порядковым идеалам H в $\mathfrak{R}$.

6.2. ЛЕММА. Следующие условия на $f\in\mathfrak{F}$ (п.1.7) равносильны:

1) $f(\lambda)\geqslant 0$ для почти всех $\lambda\in\mathbb{Y}$

2) для любой таблицы $t=(t_1,\ldots,t_n,\ldots)\in T$ $f(t_n)\geqslant 0$ начиная с некоторого места.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(\Lambda)<0$, то $f(\lambda)<0$ для некоторой диаграммы λ, $\lambda\uparrow\Lambda$. Считая, что f определена, начиная с m - ого этажа, получаем цепь $\Lambda_m,\Lambda_{m+1},\ldots,\Lambda_n=\Lambda$, в которой $f(\Lambda_k)$ при всех $m\leqslant k\leqslant n$.

Предположим, что условие 1) нарушается. Тогда на сколь угодно далеких этажах $\mathbb{Y}_n$ найдутся диаграммы $\Lambda^{(n)}$ с $f(\Lambda^{(n)})<0$. Выберем цепь $t^{(n)}=(t^{(n)}_1,\ldots,t^{(n)}_n,\ldots)$, проходящую через $\Lambda^{(n)}=t^{(n)}_n$ так, чтобы значения $f(t^{(n)}_k)$, $m\leqslant k\leqslant n$ были отрицательны. В силу компактности пространства таблиц T , существует предельная для последовательности $\{t^{(n)}\}$ таблица $t=(t_1,\ldots,t_n,\ldots)\in T$. Для всех $n\geqslant m$ получаем $f(t_n)<0$ и условие 2) также нарушается. Очевидно также, что из 1) следует 2).

Заметим, что лемма остается справедливой, если все неравенства в ней заменить на строгие.

6.3. Пусть $\mathfrak{J}$ - идеал графа Юнга $\mathbb{Y}$. Последовательность

$t=(t_1,\dots,t_n,\dots)$ диаграмм Юнга из $\mathcal{J}$ назовем регулярной относительно $\mathcal{J}$, если предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dim(\lambda,t_n)}{\dim t_n}=m(\lambda) \tag{22}$$

существует для любой диаграммы $\lambda\in\mathcal{J}$.

ЛЕММА. Каждая возрастающая цепочка диаграмм $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots\in\mathcal{J}$ содержит последовательность, регулярную относительно $\mathcal{J}$. Числа $m(\lambda)$ в (22) задают распределение m на графе $\mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выбора подпоследовательности достаточно применить диагональный процесс. Второе утверждение сводится к несложной проверке условия (ПС) из п.2.7.

6.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. (ср. [IO], лемма 4.I). Предположим, что носитель функции $f\in\mathcal{F}$ содержится в идеале $\mathcal{J}$ графа Юнга $\mathcal{Y}$ и $m(f)>0$ для всех конечных распределений m на графе $\mathcal{J}$ Тогда $f(\lambda)>0$ для п.в. $\lambda\in\mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой возрастающей цепочки диаграмм $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\dots\in\mathcal{J}$ получаем

$$\underline{\lim}\,\frac{f(\lambda_n)}{\dim\lambda_n}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(\lambda_{n_k})}{\dim\lambda_{n_k}}=m(f)>0\ ,$$

где λ_{n_k}, $k=1,2,\dots$ - регулярная подпоследовательность, реализующая нижний предел, m - соответствующее распределение По лемме 6.2 $f(\lambda)\geqslant 0$ для почти всех $\lambda\in\mathcal{J}$.

6.5. Доказательство теоремы 6.I приведем в терминах распределений на графе $\mathcal{Y}$. Пусть $\mathcal{J}$ - минимальный идеал в графе $\mathcal{Y}$, содержащий носитель f, $f(\lambda)=P(\ell_\lambda),\lambda\in\mathcal{Y}$. Согласно лемме 3.6 такой идеал существует для всех $P\in\mathcal{R}$. Поскольку $f(\lambda)>0$ для п.в. $\lambda\in\mathcal{J}$, для любого распределения m на $\mathcal{J}$, $m(f)>0$ так что из I) следует 2).

Обратно, если $m(f)>0$ для всех неразложимых конечных распределений m на графе $\mathcal{J}$, то, по теореме Шоке, $m(f)>0$ для всех конечных распределений на $\mathcal{J}$. По предложению 6.4 получаем, что из 2) следует I).

6.6. Назовем точки (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')\in\Delta$ родственными, если носители I', I'' соответствующих следов M', M'' совпадают. Граница Тома распадается на классы родственных точек, которые мы будем называть гранями:

$$\Delta=\Delta_\infty\cup\bigcup_{k,\ell}\Delta_{k,\ell}\ ,$$

где $\Delta_\infty=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta$ / носитель $(M_{\alpha,\beta})=\mathbb{N}^2\}$,

$$\Delta_{k,l}=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta \quad / \text{ носитель } (M_{\alpha,\beta})=I_{k,l}\}$$

(в последнем случае имеется ровно k ненулевых α - частот и ровно l ненулевых β - частот; $\gamma=0$).

Перейдем к описанию конуса $\mathcal{R}_+\cong K^0_+(\mathfrak{S}_\infty)$ в группе $\mathcal{R}\cong K^0(\mathfrak{S}_\infty)$.

6.7. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Конус $\mathcal{R}_+$ содержит те и только те функции $P\in\mathcal{R}$, для которых на всех гранях $\Gamma\subset\Delta$ выполняется условие (П):

если $E_\nu P\not\equiv 0$ на грани Γ и

$$E_\sigma P\equiv 0 \text{ на } \Gamma \text{ при всех } \sigma\subsetneqq\nu, \qquad \text{(П)}$$

то $(E_\nu P)(\alpha,\beta,\gamma)>0$ для $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Gamma$.

Иначе говоря, младшие среди отличных от нуля на данной грани производные должны быть положительны на этой грани.

Заметим, что для $P\neq 0$ условие (П) на плотной грани $\Gamma=\Delta_\infty$ означает просто, что

$$P(\alpha,\beta,\gamma)>0$$

при всех $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $M^\nu(l_\mu)<\infty$ равносильно тому, что $M^\sigma(l_\mu)=0$ при всех $\sigma\subsetneqq\nu$. С учетом леммы 3.6 получаем, что требование $M_{\alpha,\beta}(P)<\infty$ для $P=\sum_\mu c_\mu l_\mu$ и $M^\sigma_{\alpha,\beta}(l_\mu)=0$ при всех $\sigma\subsetneqq\nu$, $c_\mu\neq 0$ также равносильны. Последнее, в свою очередь эквивалентно условию $M^\sigma_{\alpha',\beta'}(P)=0$ при всех $\sigma\subsetneqq\nu$ и всех $(\alpha',\beta',\gamma')\in\Delta$, родственных (α,β,γ). Теорема 6.7 вытекает теперь из общей теоремы 6.I.

6.8. Дадим более детальное описание условий положительности для $P=\sum_\mu c_\mu l_\mu$. Основное требование состоит в том, что $P(\alpha,\beta,\gamma)\geq 0$ для $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Delta_\infty$. Отсюда еще не следует, что $P\in\mathcal{R}_+$.

Обозначим через $\Lambda_S=\bigcap_{\mu\in S}\mu$ пересечение всех диаграмм Юнга μ, для которых $c_\mu\neq 0$. Клеткам $(k,l)\neq(0,0)$ из Λ_S отвечают грани $\Gamma=\Delta_{k,l}$, на которых P равен нулю. Таких граней лишь конечное число.

Если $(k,l)\in\Lambda_S$, $(k,l)\neq(0,0)$, обозначим через $\Pi^{k,l}_S$ подмножество минимальных по включению диаграмм во множестве $\{\lambda\setminus I_{k,l} \mid \lambda\in S\}$. Тогда дополнительные условия положительности на грани $\Gamma=\Delta_{k,l}$ таковы:

$$(E_\nu P)(\alpha,\beta,0)>0 \text{ для } \nu_{\text{сдв}}\in\Pi^{k,l}_S,\ (\alpha,\beta,0)\in\Delta_{k,l}.$$

Эти условия анонсированы в [2] , там же приведен пример.

Приложения.

А. СИММЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ДИВИЗОРЫ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

А.I. Пусть $\mathfrak{D}_0$ - группа дивизоров конечной степени в $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\mathfrak{D} = \{d \mid \sum \left|\frac{d_x}{x}\right| < \infty\}$ - группа суммируемых дивизоров, $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}$. Через d_x мы обозначаем порядок дивизора d в точке $x \in \mathbb{R}^*$.

Суммируемые дивизоры образуют кольцо относительно умножения в $\mathbb{R}^*$. Группа $\mathfrak{D}$ имеет также естественную структуру λ - кольца в котором операции Адамса (см [5]) имеют вид

$$(\psi_n d)_x = d_{x^n} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Функции Шура ℓ_λ , $\lambda \subset \mathcal{Y}$ отвечает операция

$$(\ell_\lambda d)_x = \sum \prod_{(i,j)\in\lambda} d_{x_{ij}} \quad ,$$

где сумма берется по всем смешанным λ - таблицам с элементами из $\mathbb{R}^*$, см. [3] .

А.2. Симметрический многочлен из кольца $\mathfrak{A}$ можно понимать как функцию от мультимножества переменных $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Чтобы охарактеризовать элементы из $\mathfrak{A}$, как функции от параметров Тома (α,β,γ) (п.2.6), удобно рассматривать их, как многочлены от произвольных дивизоров (а не только мультимножеств).

Сопоставим паре последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$, произведение

$$R_{\alpha,\beta}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+\beta_k z}{1-\alpha_k z}$$

и его дивизор $d = d(\alpha,\beta)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочлен от пары последовательностей аргументов $f(\alpha;\beta)$ называется симметрическим, если он зависит только от дивизора $d(\alpha,\beta)$ этой пары.

Пример: $s_n(\alpha;\beta) = \sum \alpha_i^n + (-1)^{n+1} \sum \beta_i^n =$
$$= \sum_{x\in\mathbb{R}^*} \frac{d_x(\alpha,\beta)}{x^n} \quad .$$

Используя результаты [3] можно выписать явные формулы для функций Шура от дивизора $d \in \mathfrak{D}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Коэффициенты Тейлора для $R_{\alpha,\beta}(z)$ - симметрические многочлены. Они алгебраически независимы и порождают над кольцом всех симметрических многочленов от пары последовательностей аргументов (с целыми коэффициентами).

В. ГАУССОВА МЕРА НА СПЕКТРЕ КОЛЬЦА $\mathfrak{A}$.

В.I. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, как кольцо многочленов $\mathbb{C}[S_1, S_2, \dots]$ от сумм Ньютона.

Пусть $\mathcal{L} \subset \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ – подпространство многочленов первой степени от $S_1, S_2, \dots$. Относительно введенного в 4.2 скалярного произведения на $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ базис $\{S_1, S_2, \dots\}$ в $\mathcal{L}$ ортогонален и $\|S_n\|^2 = n$. Для $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k S_k \in \mathcal{L}$ имеем

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 k .$$

Пусть $\mathcal{M}$ – гауссова мера в сопряженном к $\mathcal{L}$ пространстве последовательностей $\mathbb{C}^{\infty} \cong \operatorname{Max} \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ с характеристической функцией

$$\varphi(\xi) = e^{-1/2 \|\xi\|^2}.$$

Нетрудно проверить, что для $c = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$

$$d\mathcal{M}(c) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} e^{-c_n^2/n} dc_n .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Вложение кольца $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{C}^{\infty}, \mathcal{M})$ при котором $S_n \longmapsto S_n(c) = c_n$ является изометрическим.

В.2. Для ограниченной последовательности $c \in \mathbb{C}^{\infty}$ дельта-функция δ_c задает ограниченный линейный функционал $P \longmapsto P(c)$ на $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$. В этом случае существует элемент $k_c \in \mathcal{L}_2(\mathbb{C}^{\infty}, \mathcal{M})$, представляющий этот функционал: $P(c) = (P, k_c)$ для $P \in \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$. Скалярное произведение двух δ – функций

$$K(x, y) = (k_x, k_y)$$

называется производящим ядром функционального предгильбертова пространства $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$.

Сопоставим точке $(\alpha, \beta, 0)$ из границы Тома Δ элемент $c^{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}^{\infty}$, для которого $c_n^{\alpha,\beta} = S_n(\alpha, \beta, 0)$, $n = 1, 2, \dots$, см.п.2.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Сужение производящего ядра на границу Тома имеет вид:

$$K(c^{\alpha,\beta}, c^{a,b}) = \prod_{i,j} \frac{(1+\alpha_i b_j)(1+a_i \beta_j)}{(1+\alpha_i a_j)(1-\beta_i b_j)} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\beta_1=\beta_2=\dots=b_1=b_2=\dots=0$, получаем важное в теории симметрических функций соотношение (см. [13], следствие 7.2):

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Y}} \ell_\lambda(\alpha)\,\ell_\lambda(a) = K(c^{\alpha,0}, c^{a,0}) = \prod_{i,j}(1-\alpha_i a_j)^{-1}.$$

Литература

1. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. - Функц.анализ, 1981, т.15 с.15-27
2. **Kerov S.V., Vershik A.M. Characters, factor-representations and K -functor of the infinite symmetric group, - Proc.Int.Conf. on Operator Algebras and Group Representations 1980.**
3. **Kerov S.V., Vershik A.M. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson-Schensted-Knuth algorithm.**
4. Вершик А.М., Керов С.В. Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы. - Докл. АН СССР, 1982, т.267, № 1.
5. **Macdonald I.G. Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford, 1979.**
6. **James G.D. The representation theory of the symmetric - group. Lecture Notes in Math., v.682, Berlin, 1978.**
7. **Effros E.G. Dimensions and C^* -algebras. - Conference Board Math.Sci., 1981, v.46**
8. **Combinatoire et Representation du Groupe Symétrique. - Lect. Notes in Math. 1977, v.579**
9. **Boyer P. Infinite traces on AF-algebras and characters of $\mathcal{U}(\infty)$ Preprint**
10. **Goodearl K., Handelman D. Rank functions and K_0 of regular rings. - J.Pure Appl.Alg., 1976, v.7, p.195-216.**
11. **Knutson D. λ-rings and the representation theory of the symmetric group. - Lect.Notes Math., 1973, v.308**
12. **Zelevinsky A.V. Representations of Finite Classical Groups. - Lect.Notes Math., 1981, v.869**
13. **Stanley R.P. Theory and applications of plane partitions: part 1, - Stud.Appl.Math., 1971, v.50, p.167-188.**

14. Thoma E. Die unzerlegbaren, Ppositiv-definiten Klassenfunktionen der absählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe.- Math.Z., 1964, v.85, p.40-61.

15. Choi Man-Duen. The full C^*-algebra of the free group on two generators, - Pacif.J.Math., 1980, v.87, p.41-48

А.М.Вершик, А.Б.Грибов, С.В.Керов

ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ РАЗМЕРНОСТИ ТИПИЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Данные о поведении размерностей неприводимых представлений симметрической группы высокой степени немногочисленны: (I), (2), (3). Возможны две различные постановки вопроса:

I.Какова характерная размерность неприводимого представления, т.е. какова размерность тех неприводимых представлений, которые составляют массивную в смысле меры Планшереля, часть? ((4), (5)). Это - статистическая постановка вопроса;

2) Каковы рекордные размерности, например, наибольшая размерность, или наименьшие размерности в возрастающем порядке и т.д. ((I), (2), (3)) - это индивидуальные свойства представлений,

Первая задача возникла в связи с асимптотической теорией представлений классических групп, (см.(4)). Разумеется, само существование правильной асимптотики в обеих постановках надлежит установить.

В этой заметке мы приводим данные, полученные с помощью ЭВМ, подтверждающие одну гипотезу, относящуюся к первому вопросу. Гипотеза выдвинута в качестве уточнения результатов (4), (5) о предельной форме типичной диаграммы Юнга. Она состоит в следующем:

$$\lim_{n} \mu_n \left\{ \Lambda : -\log \frac{\dim \Lambda^2}{n!} - h\sqrt{n} + 0(\sqrt{n}) \right\} = 1 \qquad (\text{ж})$$

здесь μ_n - мера Планшереля на множестве неприводимых представлений (вероятность представления Λ равна $\mu_n(\Lambda) = \frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}$, где $\dim\Lambda$ - его размерность). Гипотезу следует рассматривать, как предположение об асимптотической равнораспределенности вероятностей типичных представлений ("теорема Шеннона"), а константу h как энтропию меры Планшереля. Из соображений (4) следует, что, если h существует, то $h \leqslant 2{,}57$, (оценка вытекает из формулы Эйлера-Харди-Рамануджана); проблема состоит в доказательстве существования предела (ж) и того, что $h > 0$

Ниже мы приводим таблицы, подсчитанные для симметрических групп $б_n$ с n = 400, 500, 625, 900, I600. Вычисления были организованы следующим образом: находились (с помощью алгорифма Робинсона-Шенстенда-Кнута) случайные диаграммы Юнга с планшерелевской статистикой и подсчитывалось выражение $h(\Lambda) =$

$-\frac{1}{\sqrt{n}}\log\frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}$ - см. таблицу. Удивительным образом, среднее значение $h(\Lambda)$ увеличивается с ростом n, что (ввиду ограниченности h) делает несомненным существование ненулевого предела $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times$ $\times\log\frac{(\dim\Lambda)^2}{n!}=h$ (по мере μ_n). Заметим, что уже при $n\geqslant 400$ имеется хорошее согласование случайных диаграмм с предельной диаграммой, найденной в (4), (6), следовательно, область значений $n\geqslant 400$, по-видимому, может быть отнесена к области, где включается асимптотика. Об этом же свидетельствует убывание дисперсий. (см.таблицы). Таким образом, полученные данные подтверждают гипотезу о том, что размерность типичного неприводимого представления симметрической группы имеет вид:

$$\dim\Lambda=\sqrt{n!}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}h\sqrt{n}+0(\sqrt{n})\right.$$

где $0 < h < 2{,}57$.

Литература

1. Brack Baer R. Natural sorting over permutation spaces. - Math.Comp., 1968, v.22, p.385-410.
2. Rasala R. The minimal degrees of characters of S_n. - Journ. of Algebra 1977, v.45, p.132-181
3. McKay J. The Largest Degrees of Irreducible Characters of Symmetric Group.-Math Comp.1978, v.32, p.624-631.
4. Вершик А.М., Керов С.В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма диаграмм Юнга. ДАН СССР 233 № 6, 1024-27.
5. Logan B., Shepp L. A variational problem for Random Young Tableaux. - Adv.in Math., 1977, v.26, p.206-222.

Приложение: таблицы №№ 1-5.

Таблица № I. n = 400; 7I диаграмма, ЭВМ "МИНСК-34" (С.В.Керов)

Значения $h(\Lambda)$	I,3	I,35	I,40	I,45	I,50	I,55	I,60	I,65	I,70	I,75	I,80	I,85	I,90	I,95	2,0	2,05	▨	Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале	▨	I	0	0	4	6	I2	I3	I0	6	6	6	2	2	I	I	I	I,6296387	0,I6

Таблица № 2, n = 500; 98 диаграмм, ЭВМ "МИНСК 34" (С.В.Керов)

Значения $h(\Lambda)$	I,4	I,45	I,5	I,55	I,6	I,65	I,7	I,75	I,8	I,85	I,9	I,95	2,00	2,05	▨	Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале	▨	8	8	8	II	I7	II	I5	4	7	3	3	I	0	2	I,659	0,I5

Таблица № 3. n = 625, 3I диаграмма, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы ~I,25 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,4	I,45	I,50	I,55	I,60	I,65	I,70	I,75	I,80	I,85	I,90	I,95		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале	▨	0	4	4	2	3	6	6	I	2	2	I	▨	I,670	0,I2

Таблица № 4. n = 900; I55 диаграмм, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы~2 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,42	I,45	I,48	I,5I	I,54	I,57	I,60	I,63	I,66	I,69	I,72	I,75	I,78	I,8I	I,84	I,87	I,9	I,93	I,96		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале	▨	I	0	2	4	6	II	I6	20	I4	I7	I7	I6	7	I0	3	5	I	2	▨	I,698	0,I0

Таблица № 5. n = I600; I4 диаграмм, ЭВМ "ОДРА I204" (А.Б.Грибов)
Время обработки одной диаграммы ~5 мин.

Значения $h(\Lambda)$	I,55	I,6	I,65	I,7	I,75	I,8	I,85	I,9		Среднее значение $h(\Lambda)$	Среднеквадратическое отклонение
Число диаграмм в интервале	▨	I	I	2	3	3	4	0	▨	I,737	0,077

А.Е.Березный

ДИСКРЕТНЫЕ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ

Введение.

В настоящей работе рассматривается предложенный А.М.Вершиком класс групп с субэкспоненциальным ростом (см. определение в § I) и доказывается ряд его свойств. В частности, показывается (§ 2), что разрешимые группы содержатся в этом классе (теорема I) и, что он замкнут относительно расширений некоторого типа (теорема 2). Рассматривается ряд примеров групп, для которых вычисляется точная асимптотика роста коэффициентов гоша (§ 3). Основные результаты были сформулированы в [2] .

§ I. Предварительные сведения.

Напомним определение ряда Голода-Шафаревича (кратко: гоша – см. [I, 2]) группы G над кольцом.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, χ -аддитивная функция на категории конечно порожденных R -модулей со значениями в $\mathbb{Z}$, причем $\chi(R)=1$. Обозначим групповую алгебру группы G над R через $R[G]$ и через Δ – ядро пополняющего гомоморфизма:

$$R[G]\longrightarrow R, \quad (G\ni g\longrightarrow 1\in R).$$

Пусть

$$\Delta_n=\Delta_n(G)=\Delta^n/\Delta^{n+1}, \quad \Delta_R(G)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\Delta_n(G)$$

– соответствующая фильтрация $\{\Delta^n\}$ на $R[G]$ градуированная R -алгебра.

Обозначим $a_n=a_n(G)=\chi(\Delta_n)$, тогда ряд гоша для над R (относительно χ) есть формальный ряд:

$$\gamma_R(T)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nT^n.$$

Пусть $G=\delta_1 G\supset\delta_2 G\supset\delta_3 G\supset\dots$ – ряд из размерных подгрупп в группе G , где n -ая размерная подгруппа есть по определению:

$$\delta_n G = \{g \in G \mid g-1 \in \Delta^n\}.$$

Тогда

$$\delta_R(G) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \delta^n G \otimes_{\mathbb{Z}} R , \quad (\delta^n G = \delta_n G / \delta_{n+1} G)$$

есть градуированная R -алгебра Ли относительно операции, индуцированной коммутированием в группе G. Эту алгебру естественно назвать присоединенной алгеброй Ли (дискретной) группы G над R. По существу почти все результаты данной работы формулируются и доказываются на уровне таких алгебр Ли.

Имеется естественное вложение $\delta_R(G)$ в $\Delta_R(G)$, при котором $\delta_n G \ni g \longrightarrow (g-1) \in \Delta^n$. Это вложение сохраняет градуировку и является гомоморфизмом алгебры Ли в ассоциативную алгебру и, поэтому, продолжается до гомоморфизма универсальной обертывающей $U\delta_R(G)$ в $\Delta_R(G)$.

Легко видеть, что элементы вида $g_\alpha - 1$, где $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ -система образующих G, порождают $\Delta_R(G)$ как алгебру с единицей, поэтому гомоморфизм $U\delta_R(G)$ в $\Delta_R(G)$ -эпиморфизм. Этот эпиморфизм сохраняет градуировку, откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \leq \prod_{n=1}^{\infty} (1-T^n)^{-b_n}, \quad b_n = b_n(G) = \chi(\delta^n G \otimes_{\mathbb{Z}} R) \qquad (I)$$

(неравенство покоэффициентное).

Правая часть неравенства (I) - это производящая функция для размерностей однородных компонент в $U\delta_R(G)$. Этого неравенства нам будет достаточно для оценки гоша сверху. Для случая поля характеристики 0 имеется теорема Квилена (см. [3]) о том, что гомоморфизм $U\delta_R(G)$ в $\Delta_R(G)$ -изоморфизм, откуда следует, что в этом случае (I) - равенство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (А.М.Вершик). Группа G называется субэкспоненциальной (над R), если выполнено следующее условие: для всякой конечно порожденной подгруппы $H \subseteq G$

$$a(H) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln a_n(H) = 0 .$$

Очевидным следствием определения является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс субэкспоненциальных групп замкнут относительно перехода к подгруппам и факторподгруппам.

ЛЕММА I. Для любых двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству (I):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \leq \prod_{n=1}^{\infty} (1-T^n)^{-b}$$

имеет место неравенство

$$A = \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln a_n \leq \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln b_n = B ,$$

а в случае равенства в соотношении (I), $A = B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n T^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1-T^n)^{-b_n} , \quad A' = \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln a_n .$$

Нужно доказать, что $A' \leq B$. Для этого введем функцию

$$f(u) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-e^{-nu})^{-b_n}, \quad u = v + iw, \ (v, w \in R), \ v > B \geq 0 .$$

Легко проверить, что

$$\left| 1 - e^{-nu} \right|^{-1} \leq (1 - e^{-nv})^{-1} ,$$

откуда $| f(u) | \leq f(v)$.

Применяя к $f(u)$ интегральную формулу Коши, имеем:

$$a'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v + iw)\, e^{n(v+iw)} dw \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} | f(v + iw) | e^{nv} dw \leq f(v) e^{nv} .$$

Т.е. для любого $v > B$ $\ln a'_n \leq nv + \ln f(v)$.

Положим

$$\varphi(v) = -\frac{d}{dv} \ln f(v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot b_n}{e^{nv} - 1}$$

$\varphi(v)$ – гладкая монотонная функция из $(B, +\infty)$ на $(0, +\infty)$, значит,

$$\forall n > 0 \quad \exists_1 \, v(n) > B \qquad \varphi(v(n)) = n ,$$

причем, $v(n) \longrightarrow B + 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $v_0 = v(n) + \varepsilon$. Имеем

$$\frac{1}{n}\ln f(v)=\frac{1}{n}\left[\ln f(v_0)-\int\limits_{v_0}^{v(n)}\varphi(t)dt\right]=O\left(\frac{1}{n}\right)+\int\limits_{v(n)}^{v_0}\frac{\varphi(t)\,dt}{\varphi(v(n))}.$$

Поскольку $0<\varphi(t)<\varphi(v(n))=n$ при $t>v(n)$, то

$$0<\int\limits_{v(n)}^{v_0}\frac{\varphi(t)\,dt}{\varphi(v(n))}\leqslant\varepsilon,\quad \frac{1}{n}\ln a'_n\leqslant v(n)+O\left(\frac{1}{n}\right)+\varepsilon\longrightarrow B+\varepsilon.$$

Откуда $A'\leqslant B+\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Осталось заметить, что если в (I) имеет место равенство, то $a_n\geqslant b_n$, откуда $A\geqslant B$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\lim n^{-1}\ln b_n=0$, то $\lim n^{-1}\ln a_n=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В задаче Харди-Рамануджана [5] $b_n=1$ для всех n, $a_n=p(n)$, где $p(n)$ – функция разбиений, которая имеет асимптотику

$$p(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}n}\right).$$

На этом примере видно насколько быстрее может быть рост a_n, чем рост b_n:

$$\frac{1}{n}\ln b_n\equiv 0,\quad \frac{1}{n}\ln a_n\sim\frac{c}{\sqrt{n}}.$$

В задачах о субэкспоненциальности следствие к лемме I позволяет вместо последовательности $\{a_n\}$ рассматривать $\{b_n\}$, которую значительно легче вычислить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для колец характеристики 0 (т.е. для колец R таких, что $R\supseteq\mathbb{Z}$) b_n есть ранг *) n-го фактора нижнего центрального ряда в группе G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\gamma_n G$ n-й член нижнего центрального ряда в группе G,

$$\sqrt{\gamma_n G}=\{g\in G\mid \exists k\geqslant 1\ g^k\in\gamma_n G\}$$

– изолятор $\gamma_n G$. Тогда [3]:

$$\gamma_n G\subseteq\delta_n G\subseteq\sqrt{\gamma_n G}. \tag{2}$$

---

*) здесь ранг конечно порожденной абелевой группы – это число образующих ее максимальной свободной абелевой подгруппы.

Эти вложения индуцируют гомоморфизмы

$$\alpha_n : \gamma_n G/\gamma_{n+1} G \longrightarrow \delta_n G/\delta_{n+1} G$$

абелевых групп, причем, как видно из включений (2), $\ker \alpha_n$ и $\operatorname{coker} \alpha_n$ – абелевы группы кручения, откуда

$$\operatorname{rang} \gamma_n G/\gamma_{n+1} G = \operatorname{rang} \delta_n G/\delta_{n+1} G = b_n(G)$$

ч.т.д. Аналогично, для поля характеристики $p > 0$ достаточно знать размерности факторов p-центрального ряда в группе (см. [3, II]).

Далее в качестве R будем предполагать любое поле характеристики 0 .

§ 2. Теоремы о субэкспоненциальных группах.

ТЕОРЕМА I. Разрешимые группы субэкспоненциальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $G \longrightarrow H$ -эпиморфизм групп, то и $\Delta_R(G) \longrightarrow \Delta_R(H)$ -эпиморфизм, значит, достаточно проверить, что свободные разрешимые (конечно порожденные) группы субэкспоненциальны.

Пусть $G(k,q)$ – свободная разрешимая группа ступени k с q образующими, $q \geqslant 2$,

$$a_n^{(k)} = a_n(G(k,q)) , \quad b_n^{(k)} = b_n(G(k,q)) .$$

Согласно [9, IO] при $n \geqslant 2^k$

$$b_n^{(k+1)} = b_n^{(k)} + q a_{n-1}^{(k)} - a_n^{(k)}$$

в наших обозначениях, откуда индукцией по k применяя лемму I, имеем субэкспоненциальность роста $b_n^{(k+1)}$, т.к. $b_n^{(2)}$ -полином (степени $q-1$). Теорема доказана. Более точные оценки см. в § 3.

Класс субэкспоненциальных групп замкнут относительно подгрупп и факторгрупп и включает в себя абелевы группы.

В [2] был сформулирован результат (теорема 2) о том, что класс субэкспоненциальных групп замкнут относительно расширений. В этом направлении мы докажем здесь лишь более слабый результат (см.теорему 2 ниже).

ЛЕММА 2 (критерий субэкспоненциальности). Пусть G -конечно порожденная группа, такая, что:

$$a(G) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln a_n(G) = 0, \quad \gamma_\omega G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \gamma_n G = e.$$

Тогда и для всякой конечно порожденной подгруппы $H \subseteq G$

$$a(H) = \overline{\lim} \frac{1}{n} \ln a_n(H) = 0,$$

т.е. G - субэкспоненциальная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму вложений

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] & \gamma_n H \cap \gamma_k G \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \gamma_n H \cap \gamma_{k-1} G \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \cdots \arrow[r] & \gamma_n H \cap \gamma_1 G \arrow[d, dotted] \\
\cdots \arrow[r] & \gamma_1 H \cap \gamma_k G \arrow[r] & \gamma_1 H \cap \gamma_{k-1} G \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \gamma_1 H \cap \gamma_1 G
\end{tikzcd}$$

Поскольку $\gamma_\omega G = e$, каждый горизонтальный ряд дает фильтрацию на $\gamma_n H$, доходящую до e. Обозначим

$$A_{n,k} = \gamma_n H \cap \gamma_k G, \quad \bar{A}_{n,k} = A_{n,k} / (A_{n+1,k} \cdot A_{n,k+1}).$$

Так как ранг абелевой группы не меняется при переходе к градуированной абелевой группе, полученной из нее с помощью доходящей до e фильтрации, то, в силу предложения,

$$b_n(H) = \operatorname{rang} \gamma_n H / \gamma_{n+1} H = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{rang} \bar{A}_{n,k}.$$

Но $\bar{A}_{n,k}$ есть подфактор $\gamma_k G / \gamma_{k+1} G$, поэтому

$$\operatorname{rang} \bar{A}_{n,k} \leq b_k(G).$$

Поскольку число образующих в H конечно, и $\gamma_\omega G = e$, существует такое q, что все образующие H принадлежат $G \setminus \gamma_{q+1} G$. Группа $\gamma_n H / \gamma_{n+1} H$ порождена коммутаторами веса n от этих образующих, а

$$\bigoplus_{n,k=1}^{\infty} \bar{A}_{n,k}$$

есть биградуированная алгебра Ли (операция Ли индуцирована коммутированием в G), порожденная образами этих образующих в $\bar{A}_{1,1}, \ldots, \bar{A}_{1,q}$;

$$\bigoplus_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{1,k}$$

- градуированная абелева группа с конечным числом однородных образующих, вес которых не превышает q , поэтому

$$\bar{A}_{1,k} = 0 \ , \ k > q$$

и, следовательно,

$$\bar{A}_{n,k} = 0 \ , \ k > nq$$

$$b_n(H) = \sum_{k=1}^{nq} \operatorname{rang} \bar{A}_{n,k} \leq \sum_{k=1}^{nq} b_k(G) \ .$$

Теперь легко получаем, что

$$\frac{1}{n} \ln b_n(H) \leq \frac{1}{n} \ln (nq \cdot b_{nq}(G)) = \frac{\ln nq}{n} + q \cdot \frac{1}{nq} \ln b_{nq}(G) \to 0,$$

т.е. $\lim n^{-1} \ln b_n(H) = 0$, а по лемме I и $\lim n^{-1} \ln a_n(H) = 0.$ Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что нормальный делитель N в группе G почти конечно порожден, если существует конечно порожденная подгруппа M в G , такая, что

$$N \subseteq \bigcup_{g \in G} g^{-1} M g \ . \qquad (3)$$

Если G конечно порождена, то будем называть G почти конечно порожденным расширением. В общем случае, если G не конечно порождена, то будем называть ее локально почти конечно порожденным расширением (расширением с локально почти конечно порожденным ядром N), если для любой конечно порожденной подгруппы $G_1 \subseteq G$ условие (3) выполнено для $N_1 = N \cap G$ с некоторой конечно порожденной подгруппой $M_1 \subset N$;

$$N_1 \subseteq \bigcup_{g \in G_1} g^{-1} M_1 g \ .$$

В конечно порожденной группе G такую подгруппу M_1 можно, очевидно, выбрать одну для всех подгрупп $G_1 \subset G$ сразу.

ЛЕММА 3. Пусть группа G есть расширение N с помощью H , т.е. $G/N = H$, причем нормальный делитель N в G почти конечно порожден в указанном выше смысле, т.е. существует конечно порожденная подгруппа M с условием (3).

Тогда из $b(H) = 0$ и $b(M) = 0$ следует $b(G) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим проекции

$$p_n : \gamma_n G/\gamma_{n+1} G \longrightarrow \gamma_n H/\gamma_{n+1} H$$

$$\ker p_n = N \cap \gamma_n G(\mathrm{mod}\,\gamma_{n+1} G \equiv M \cap \gamma_n G(\mathrm{mod}_{\gamma_{n+1}} G)\,,$$ т.к.

$$g^{-1}Mg \cap \gamma_n G = g^{-1}(M \cap \gamma_n G)g \equiv M \cap \gamma_n G(\mathrm{mod}\,\gamma_{n+1} G)$$

ввиду того, что $\gamma_n G/\gamma_{n+1} G$ лежит в центре группы $G/\gamma_{n+1} G$. Имеем теперь

$$\mathrm{rang}\ker p_n \leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{rang}\,\gamma_k(M)/\gamma_{k+1}(M) = \sum_{k=1}^{n} b_k(M)$$

$$b_n(G) = b_n(H) + \mathrm{rang}\ker p_n \leq b_n(H) + \sum_{k=1}^{n} b_k(M)\,.$$

Откуда легко получить

$$b(G) = \overline{\lim}\,\frac{1}{n}\ln b_n(G) = 0\,.$$

Лемма доказана. Аналогично доказывается

ЛЕММА 4. Пусть A и B - две конечно порожденные группы. Если $b(A) = 0$ и $b(B) = 0$, то $b(W) = 0$, где $W = A\,\mathrm{wr}\,B$ - прямое сплетение A и B (см. определение в [12]).

ТЕОРЕМА 2. Класс субэкспоненциальных групп замкнут относительно локально почти конечно порожденных расширений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G/K = H$ - локально почти конечно порожденное расширение групп H и K. Надо доказать, что для всякой конечно порожденной подгруппы $G_1 \subset G$ $b(G_1) = 0$.

По определению существует $M \subset K$, для которой выполнено условие (3) для расширения

$$1 \longrightarrow G_1 \cap K = N \longrightarrow G_1 \longrightarrow H_1 \longrightarrow 1\,,$$

где H_1 - образ G_1 при проекции $G \longrightarrow H$. Так как свойство субэкспоненциальности является локальным свойством, то $b(M) = b(H_1) = 0$ и остается применить лемму 4.

Теорема доказана.

§ 3. Примеры субэкспоненциальных групп и уточнение оценки гоша.

Субэкспоненциальные группы характеризуются тем, что для их конечно порожденных подгрупп функция

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{n}\ln a_n$$

стремится к 0 при $n \to \infty$.

Представляет интерес более точное вычисление скорости убывания $\varepsilon(n)$. Нижеследующие примеры предложил рассмотреть в этой связи А.М.Вершик.

Пример I. Пусть $H = H(k)$ - свободная абелева группа с k образующими, обозначим

$$G = \mathbb{Z} \operatorname{wr} H = H \wedge\!\cdot\, \mathbb{Z}[H]$$

- сплетение H с $\mathbb{Z}$, т.е. скрещенное произведение группы на аддитивную группу своей групповой алгебры, причем H действует на $\mathbb{Z}[H]$ с помощью операторов T_g , $g \in H$:

$$T_g(u) = ug \qquad u \in \mathbb{Z}[H],$$

т.е. сдвигами. Пусть $g_1, \dots, g_k$ - свободные образующие в H , тогда соответствие $g_i \to 1 + x_i$ задает вложение [I3]

$$\mathbb{Z}[H] \to \mathbb{Z}[[x_1, \dots, x_k]] .$$

При этом операторы T_g становятся операторами умножения на $1 + x_i$, а коммутирование $(g_i, 0) \in H$ с элементами из $\mathbb{Z}[H]$ - это просто умножение на x_i , откуда получаем, что при $n \geq 2$ $\gamma_n G / \gamma_{n+1} G$ изоморфна аддитивной группе форм степени n от $x_1, \dots, x_k$, т.е.

$$b_n(G) = \binom{n+k-1}{k-1}$$

-это полином степени $k-1$ от n .

Напомним, что для любого $v > 0$

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{n} \ln a_n \leq v + \frac{1}{n} \ln f(v)$$

(см.доказательство леммы I).

Для получения наилучшей оценки естественно выбрать такое значение v , при котором достигается минимум правой части (он существует и единственен). Это значение v определяется из условия:

$$-\frac{d}{dv} \ln f(v) = n .$$

Пример 2. Свободные разрешимые группы.

а) Пусть $G = G(k)$ - свободная разрешимая группа ступени I с $k+1$ образующими. Тогда (см. [9, 10])

$$b_n(G)\sim cn^k$$

(здесь и далее буквой c будем обозначать некоторые положительные константы), откуда ясно, что для разрешимых групп ступени I b_n не может расти быстрее, чем полином.

Имеем здесь (см. [5]):

$$n=n(v)\sim\frac{c}{v^{k+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nv)^k}{e^{nv}-1}v\sim\frac{c}{v^{k+1}}\int\limits_0^{\infty}\frac{z^k\,dz}{e^z-1}\sim\frac{c'}{v^{k+1}}$$

$$\frac{d}{dv}\ln f(v)\sim-\frac{c}{v^{k+1}}, \qquad v\sim cn^{-\frac{1}{k+1}}$$

$$\ln f(v)\sim\frac{c}{v^k}\sim cnv$$

$$\varepsilon(n)\leqslant\frac{1}{n}\ln f(v)+v\sim cn^{-\frac{1}{k+1}}$$

б) Для свободной разрешимой группы ступени 2 с $k+1$ образующими с помощью теоремы I (см. [9, 10]) из примера а) получаем: $\ln b_n\sim cn^{k/(k+1)}$

$$n=n(v)\sim\frac{1}{v}\int\limits_0^{\infty}\frac{\exp(z^\alpha/v^\alpha)}{e^z-1}\,dz=\frac{1}{v}\psi(v),$$

где $\alpha=k/(k+1)$. Для $\psi(v)$ имеем

$$\psi'(v)\sim-\frac{c}{v^{\alpha+1}}\psi(v), \qquad \ln\psi(v)\sim\frac{c}{v^\alpha}$$

$$v\sim c(\ln n)^{-1/\alpha}, \qquad \frac{1}{n}\ln f(v)\sim cv$$

$$\varepsilon(n)\leqslant\frac{c}{\ln^{1+\frac{1}{k}}n},$$

т.е. $\varepsilon(n)$ убывает не медленнее, чем $c/\ln^{1+\frac{1}{k}}n$.

в) Для разрешимых групп ступени 3

$$\frac{1}{n}\ln b_n\sim\frac{c}{\ln^\beta n} \qquad \beta=1+\frac{1}{k}\geqslant 1$$

и далее, аналогично примеру б),

$$n(v)\sim\frac{1}{v}\psi(v), \qquad \psi'(v)\sim-\frac{c}{v^2\ln^\beta v^{-1}}\psi(v)$$

$$\ln \psi(v) \sim \frac{c}{v}, \quad v \sim \frac{c}{\ln n}, \quad \varepsilon(n) \leq \frac{c}{\ln n}.$$

Для ступеней разрешимости больше 3 по индукции имеем отсюда $\varepsilon(n) \leq c/\ln n$, т.е. для разрешимых групп $\varepsilon(n)$ не может убывать медленнее, чем $c/\ln n$. Примеры еще более медленного убывания $\varepsilon(n)$ нужно строить другими средствами.

Сведем полученные оценки в таблицу:

ступень разрешимости	0 (абелевы)	I	2	3	4 и более
b_n	0	cn^k	$e^{cn^{\frac{k}{k+1}}}$	$e^{cn/\ln^{1+k^{-1}} n}$	$e^{cn/\ln n}$
a_n	cn^k	$e^{cn^{\frac{k}{k+1}}}$	$e^{cn/\ln^{1+k^{-1}} n}$	$e^{cn/\ln n}$	$e^{cn/\ln n}$
$\varepsilon(n)$	$k \cdot \frac{\ln n}{n}$	$cn^{-\frac{1}{k+1}}$	$\frac{c}{\ln^{1+\frac{1}{k}} n}$	$\frac{c}{\ln n}$	$\frac{c}{\ln n}$

А.М.Вершик высказал гипотезу о том, что аменабельные группы субэкспоненциальны; это подтверждается многочисленными примерами, кроме того ряд свойств класса аменабельных групп и класса субэкспоненциальных групп сходны. В частности, результаты § 2 позволяют проверить субэкспоненциальность известных примеров аменабельных групп, в т.ч. и заданных как расширения.

Еще одно указание на близость этих классов - сходство асимптотик, вычисленных в таблице выше, с вычисленными в [I3] асимптотиками вероятностей возвращения в единицу случайных блужданий на группах примера I.

Пример Ольшанского [4] показывает, что существуют не аменабельные группы, которые являются, однако, субэкспоненциальными из-за очень бедной структуры подгрупп (все подгруппы циклические) Однако, для групп с достаточным числом подгрупп (например, с условием $\gamma_\omega G = e$) нет контрпримеров и к обратному утверждению.

Литература.

I. Кон П. В кн. „Свободные кольца и их связи", М., I975, с.II6-II9.

2. Березный А.Е. - УМН, I980, т.35, № 5, с.225-226.

3. Залесский А.Е., Михалев А.В. Групповые кольца. - В кн.: Современные проблемы математики, 1973, т.2, с.5-113.
4. Ольшанский А.Ю. - УМН, 1980, т.35, № 4, с.199-200.
5. Постников А.Г. Введение в аналитическую теорию чисел, М., 1971.
6. Плоткин Б.И. - УМН, 1977, т.32, № 5, с.3-68.
7. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах, М., 1973.
8. Вершик А.М. - В кн.: "Инвариантные средние на топологических группах". М., 1973, с.122-135.
9. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Н., 1977.
10. Соколов В.Г. - Алгебра и логика, 1969, т.8, № 3, с.367-372.
11. **Lazard M. Publ.Math. IHES, 1965, N 26.**
12. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп, М., 1977.
13. Вершик А.М., Кайманович В.А. Докл.АН СССР, 1979, т.249, № 1, с.15-18.
14. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, М., 1976.

В.А.Кайманович

ПРИМЕРЫ НЕКОММУТАТИВНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕЙ-ВЫХОД

Настоящая работа посвящена исследованию ряда примеров, иллюстрирующих разнообразие ситуаций, возникающих в теории границ случайных блужданий на неабелевых группах. Работа тесно примыкает к обзору [17] (см. также [4]), где приводятся основные факты этой теории, полученные за последнее время.

Напомним некоторые определения. Пусть G – счетная дискретная группа, μ – невырожденная вероятностная мера на G (т.е. $\operatorname{supp}\mu$ порождает G как полугруппу). Однородный марковский процесс $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ с пространством состояний G, начальным распределением δ_e (e – единица G) и переходными вероятностями $p(g|h)=\mu(h^{-1}g)$ называется (правым) случайным блужданием на G, заданным мерой μ. Через (G^{∞}, P^{μ}) обозначим пространство траекторий $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ блуждания (G,μ) с заданной обычным образом вероятностной мерой P^{μ}.

Границей-выход блуждания (G,μ) называется фактор-пространство (Γ,ν) пространства траекторий блуждания, отвечающее его хвостовой σ-алгебре. Граница (Γ,ν) канонически снабжается структурой измеримого G-пространства. Подчеркнем, что для абелевых групп Γ всегда одноточечна. Существует целый ряд других определений (стационарная граница, граница Пуассона и т.д.), приводящих к тому же пространству (Γ,ν), которое ниже будет называться просто границей блуждания (G,μ) [4,17]. С помощью этих определений могут быть получены различные критерии тривиальности (=одноточечности) границы [3,4,7,17]. До последнего времени число исследованных групп было невелико. В данной работе исследуется несколько новых типов примеров, опровергающих некоторые старые предположения о соотношениях границы, аменабельности и роста группы.

В § 1 рассматривается группа $G_k = \mathbb{Z}^k \leftthreetimes \sum_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}_2$ – аддитивная группа конфигураций на $\mathbb{Z}^k$ (со сложением $\operatorname{mod} 2$), расширенная естественным действием $\mathbb{Z}^k$. Мы устанавливаем эффективный критерий тривиальности границы для финитных мер на группах G_k и показываем, что на G_1 существует нефинитная мера, граница для которой нетривиальна несмотря на тривиальность границы для противоположной меры.

В § 2 строятся примеры мер с нетривиальной границей на аффинной группе двоично-рациональной прямой.

В § 3 и 4 приводятся примеры случайных блужданий с нетривиальной границей на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$ и на разрешимой локально-конечной группе равномерно полиномиального роста.

Подчеркнем, что в этой работе мы не преследуем цели полного описания границы, а ограничиваемся лишь установлением ее тривиальности или нетривиальности.

Идея привлечения групп G_K и $\mathfrak{S}_\infty$ для построения нетривиальных примеров в теории случайных блужданий и других ситуациях (см. [I,2,6,9]) была предложена А.М.Вершиком в связи с общей программой исследования мер на группах. Автор также благодарен ему за постоянные поддержку и внимание.

§ I. Расширенные группы конфигураций (группы G_K)

I. Случайные блуждания на группах G_K .

Пусть $\mathbb{Z}^K = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{Z}$ – K-мерная целочисленная решетка, $\mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2) = \sum_{\mathbb{Z}^K} \mathbb{Z}_2$ – прямая сумма изоморфных копий группы $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, заиндексированных элементами $\mathbb{Z}^K$ (т.е. группа финитных $\mathbb{Z}_2$ -значных функций на $\mathbb{Z}^K$). Удобно также говорить о $\mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2)$ как об аддитивной группе финитных конфигураций на $\mathbb{Z}^K$ с операцией поточечного сложения $\mathrm{mod}\ 2$. Через $f(x)$ будем обозначать значение конфигурации $f \in \mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2)$ на элементе $x \in \mathbb{Z}^K$, а через $\mathrm{supp}\, f$ – носитель конфигурации f :

$$\mathrm{supp}\, f = \{x \in \mathbb{Z}^K : f(x) \neq 0\} \qquad (I)$$

Через G_K обозначим группу $G_K = \mathbb{Z}^K \leftthreetimes \mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2)$ – полупрямое произведение группы $\mathbb{Z}$ на группу $\mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2)$, в которой $\mathbb{Z}^K$ действует сдвигами. Элементы G_K будем записывать как упорядоченные пары $g = (x, f)$,где $x \in \mathbb{Z}^K$, $f \in \mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2)$. Тогда групповая операция в G_K запишется следующим образом:

$$(x_1, f_1)(x_2, f_2) = (x_1 + x_2, f_1 + x_1 f_2), \qquad (2)$$

где xf – результат действия x на f :

$$(xf)(y) = f(y-x) \quad x, y \in \mathbb{Z}^K, f \in \mathrm{fun}(\mathbb{Z}^K, \mathbb{Z}_2) \qquad (3)$$

Все группы G_K разрешимы ступени 2, конечно порождены и имеют экспоненциальный рост.

Пусть теперь μ – некоторая вероятностная мера на G_K, через $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{\infty}$ будем обозначать набор приращений случайного блуждания, заданного мерой μ (т.е. все (x_i, f_i) независимы и имеют распределение μ), тогда

$$(y_n, \varphi_n) = (x_1, f_1) \cdot \ldots \cdot (x_n, f_n) \quad - \tag{4}$$

n-я координата траектории случайного блуждания, заданного мерой μ. Из определения (2) групповой операции в G_K вытекают следующие соотношения, выражающие последующую координату траектории случайного блуждания через предыдущую и соответствующее приращение:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + x_{n+1} \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + y_n f_{n+1} \end{cases} \tag{5}$$

2. Нетривиальность границы для финитных мер.

Рассмотрим произвольную финитную невырожденную меру μ на группе G $(K \geqslant 3)$. Поскольку всякое невырожденное случайное блуждание на $\mathbb{Z}^K$ при $K \geqslant 3$ невозвратно [10], то y_n покидает любое конечное подмножество $\mathbb{Z}^K$ для почти всех траекторий $\{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания (G_K, μ). Мера μ финитна, а потому для достаточно больших n носитель конфигурации $y_n f_{n+1}$ не пересекается с любым наперед заданным подмножеством решетки $\mathbb{Z}^K$. Таким образом, значения конфигураций φ_n в любой фиксированной точке $z \in \mathbb{Z}^K$ почти наверное стабилизируются по n. Иными словами, конфигурации φ_∞ п.н. поточечно сходятся к некоторой (уже нефинитной) конфигурации . Тем самым для всякого $z \in \mathbb{Z}^K$ соответствующее множество траекторий случайного блуждания

$$A = \left\{ \{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty} : \lim_{n} \varphi_n(z) = 0 \right\} \tag{6}$$

является хвостовым. Нетривиальность A очевидно следует из невырожденности меры μ. Таким образом, $\Gamma(G_K, \mu)$ нетривиальна. Нами доказана

ТЕОРЕМА I.I. Пусть μ – финитная невырожденная вероятностная мера на группе G_K $(K \geqslant 3)$, тогда граница $\Gamma(G_K, \mu)$ случайного блуждания, заданного мерой μ, – нетривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве теоремы по существу использовались только невозвратность блуждания $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на $\mathbb{Z}^k$ и конечность множества $\bigcup \operatorname{supp} f$, где объединение берется по всем элементам $(x, f) \in \operatorname{supp} \mu$.

3. Критерий тривиальности границы.

Дадим теперь простое достаточное условие тривиальности границы на группах G_k. Следующая полезная лемма принадлежит Фюрстенбергу [13]:

ЛЕММА 1.1. Пусть подгруппа $G^{\circ} \subset G$ является множеством возврата для случайного блуждания на G, заданного мерой μ. Определим на G° вероятностную меру μ° следующим образом: $\mu^{\circ}(g)$ есть вероятность того, что после выхода блуждания из единицы e первое возвращение в G° произойдет в точке $g \in G^{\circ}$. Тогда границы $\Gamma(G, \mu)$ и $\Gamma(G^{\circ}, \mu^{\circ})$ канонически изоморфны как пространства с мерой. В частности, тривиальность $\Gamma(G, \mu)$ равносильна тривиальности $\Gamma(G^{\circ}, \mu^{\circ})$.

ТЕОРЕМА 1.2. Если мера μ на группе G_k такова, что индуцированное ею блуждание на $\mathbb{Z}^k$ возвратно, то граница $\Gamma(G_k, \mu)$ тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие теоремы означает, что подгруппа $G_k^{\circ} = \{(x, f) \in G_k : x = 0\}$ является возвратной для блуждания (G_k, μ). Но подгруппа G_k° абелева, т.е. граница любого блуждания на ней тривиальна в силу теоремы Шоке-Дени [12]. На основании леммы получаем, что $\Gamma(G_k, \mu)$ тривиальна.

Доказанная теорема в сочетании с теоремой 1.1 позволяет получить необходимое и достаточное условие тривиальности границы для финитных мер на группах G_k.

ТЕОРЕМА 1.3. Случайное блуждание, заданное финитной мерой μ на группе G_k, имеет тривиальную границу тогда и только тогда, когда проекция блуждания на $\mathbb{Z}^k$ возвратна. В частности, для симметричных финитных мер μ граница $\Gamma(G_k, \mu)$ тривиальна при $k = 1, 2$ и нетривиальна при $k \geqslant 3$.

4. Граница для нефинитных мер.

Из теоремы 1.3 вытекает, что для финитных мер μ на группе G_k имеется следующая альтернатива: или 1) граница $\Gamma(G_k, \mu)$ тривиальна, или 2) для почти всех траекторий $\{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания (G_k, μ) конфигурации φ_n поточечно сходятся и $\Gamma(G_k, \mu)$ нетривиальна. Таким образом, для финитных мер тривиальность или нетривиальность границы полностью определяется наличием или отсутствием стабилизации последовательностей $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ $(z \in \mathbb{Z}^k)$. Для нефинитных мер ситуация сложнее, и здесь возникают примеры иного хвостового поведения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. На группе G_1 существует (нефинитная) вероятностная мера μ такая, что граница $\Gamma(G_1,\mu)$ нетривиальна, тем не менее, для п.в. траекторий $\{(y_n,\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$ и всех $z\in\mathbb{Z}$ последовательность $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ не стабилизируется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на группе G_1 следующую меру:

$$
\begin{aligned}
&\mu(1,0)=\frac{1}{8}\\
&\mu(-1,0)=\frac{3}{8}\\
&\mu(0,\delta_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}\\
&\mu(0,\delta_0+\delta_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mu(0,\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Очевидно, что проекция $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания (G_1,μ) на $\mathbb{Z}$ невозвратна и $y_n \xrightarrow[n]{} -\infty$. При этом, поскольку скачки на $\mathbb{Z}$ осуществляются не более чем на единицу, то, уходя на $-\infty$, последовательность $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ пройдет через все точки 0,-I,-2,... . Кроме того, по определению меры μ

$$\mu\{(x,f): f(k)=1\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\frac{1}{2(k+2)(k+3)}+\ldots\right)=\frac{1}{2(k+1)} \qquad (8)$$

Поскольку, как видно из (5), $\varphi_{n+1}(z)=\varphi_n(z)+f_{n+1}(z-y_n)$,

то в силу леммы Бореля-Кантелли получаем, что равенство $f_{n+1}(z-y_n)=1$ п.н. выполняется бесконечное число раз, т.е. последовательность $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ не стабилизируется.

С другой стороны, разность $\varphi_n(1)-\varphi_n(0)$ уже стабилизируется п.н. Действительно, из определения меры μ получаем, что $\varphi_n(1)-\varphi_n(0)\neq\varphi_{n+1}(1)-\varphi_{n+1}(0)$ лишь в том случае, когда $f_{n+1}=\delta_0+\ldots+\delta_{-y_n}$, но вероятность этого события составляет $1/(2(-y_n+1)(-y_n+2))(y_n<0)$. Легко показать, что для почти всех траекторий $\sum\limits_{y_n<0}\frac{1}{|y_n|^2}<\infty$, а потому разность $\varphi_n(1)-\varphi_n(0)$ с вероятностью I меняет свое значение конечное число раз, т.е. стабилизируется. Тем самым $\Gamma(G_1,\mu)$ нетривиальна.

ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с задачей полного описания границы для групп G_k возникает следующий вопрос. Пусть $\{A_i\}$ – возрастающая последовательность конечных подмножеств, исчерпывающая $\mathbb{Z}^k$.

Через $\varphi|_A$ будем обозначать сужение конфигурации φ на конечное подмножество $A \subset \mathbb{Z}^k$. Легко видеть, что случайный процесс $\{(y_n, \varphi_n|_A)\}_{n=0}^{\infty}$, где $\{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ – исходное случайное блуждание, является марковским. Верно ли, что хвостовые множества, определяемые финальным поведением траекторий $\{(y_n, \varphi_n|_{A_i})\}_{n=0}^{\infty}$ образуют базис всей хвостовой σ-алгебры случайного блуждания (G_K, μ) ?

5. Граница для противоположных мер.

Энтропийный критерий тривиальности границы утверждает [4,17], что для мер μ с конечной энтропией $H(\mu)$ на счетной группе G граница $\Gamma(G, \mu)$ тривиальна тогда и только тогда, когда энтропия $h(G,\mu)$ группы с мерой обращается в 0. Легко видеть, что если мера $\check{\mu}$ противоположна мере μ (т.е. $\check{\mu}(g) = \mu(g^{-1})$ $\forall g \in G$), то $h(G,\mu) = h(G,\check{\mu})$, следовательно границы $\Gamma(G,\mu)$ и $\Gamma(G,\check{\mu})$ тривиальны или нетривиальны одновременно.

С другой стороны, тривиальность $\Gamma(G, \mu)$ равносильна сходимости сверток меры μ к левоинвариантному среднему на G, а тривиальность $\Gamma(G, \check{\mu})$ – сходимости сверток меры $\check{\mu}$ к левоинвариантному среднему, или, что то же самое, сходимости сверток меры μ к правоинвариантному среднему [4,17]. Таким образом, для мер μ с конечной энтропией сходимость последовательности сверток μ_n меры μ к левоинвариантному среднему равносильна сходимости к правоинвариантному среднему.

Следующий пример (отчасти навеянный одним примером из книги М.Розенблатта [18], на которую автору указал Б.А.Рубштейн) показывает, что если отказаться от условия конечности энтропии $H(\mu)$, то эта равносильность теряется.

ТЕОРЕМА I.4. Существуют разрешимая группа G и невырожденная вероятностная мера μ на ней такие, что граница $\Gamma(G,\mu)$ нетривиальна, а граница $\Gamma(G, \check{\mu})$ тривиальна, т.е. последовательность сверток меры μ сходится к правоинвариантному среднему на G, не являющемуся левоинвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на группе $G = G_1$ меру μ, заданную следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(1,0) &= \tfrac{3}{8} \\ \mu(-1,0) &= \tfrac{1}{8} \\ \mu(0,\delta_0) &= \varepsilon_0 \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\mu(0,\delta_1)=\mu(0,\delta_0+\delta_1)=\frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$\mu(0,\delta_2)=\mu(0,\delta_1+\delta_2)=\mu(0,\delta_0+\delta_2)=\mu(0,\delta_0+\delta_1+\delta_2)=\frac{\varepsilon_2}{4}$$

. . . .

$$\mu(0,\delta_n)=\ldots=\mu(0,\delta_0+\ldots+\delta_n)=\frac{\varepsilon_n}{2^n}$$

. . . .

где положительные числа ε_n выбраны так, что $\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n=\frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n\,\varepsilon_n=\infty$. Очевидно, мера μ невырожденна, и $H(\mu)=\infty$.

Покажем, что $\Gamma(G,\mu)$ нетривиальна. По выбору μ для почти всех траекторий $\{(y_n,\varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания (G,μ) имеем $y_n\longrightarrow\infty$. Поскольку мера μ сосредоточена на конфигурациях, нагружающих только положительную полуось $\mathbb{Z}$, то конфигурации φ_n поточечно сходятся п.н., и следовательно $\Gamma(G,\mu)$ нетривиальна.

Перейдем теперь к доказательству тривиальности $\Gamma(G,\check{\mu})$. Заметим прежде всего, что в силу определения групповой операции в G_1

$$(x,f)^{-1}=(-x,(-x)f) \tag{10}$$

а потому

$$\begin{aligned}&\check{\mu}(1,0)=\frac{1}{8}\\&\check{\mu}(-1,0)=\frac{3}{8}\\&\check{\mu}(0,f)=\mu(0,f)\qquad\forall f\in \mathrm{fun}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)\end{aligned} \tag{11}$$

Докажем сначала, что для почти всех траекторий $\{(y_n,\varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания $(G,\check{\mu})$ и всех конфигураций $f\in \mathrm{fun}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$ выполнено соотношение

$$\lim_{n}\frac{\check{\mu}_n(y_n,f+\varphi_n)}{\check{\mu}_n(y_n,\varphi_n)}=1 \tag{12}$$

(здесь $\check{\mu}_n$ - n-кратная свертка меры $\check{\mu}$). Зафиксируем $f\in \mathrm{fun}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$. Поскольку $\operatorname{supp} f$ конечен, то найдется $m>0$ такое, что $f(x)=0$ для всех $|x|\geqslant m$ (т.е. $\operatorname{supp} f\subset [-m+1,m-1]$). Рассмотрим траекторию $\{(y_n,\varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания $(G,\check{\mu})$. Очевидно,

$$(y_n,\varphi_n)=(x_1,f_1)\cdot\ldots\cdot(x_n,f_n)=(y_n,f_1+y_1f_2+\ldots+y_{n-1}f_n) \tag{13}$$

где (x_i, f_i) – приращения случайного блуждания. Вероятность p_0 того, что $f_n|_{[m,\infty)} \neq 0$ составляет $p_0 = \sum_{i=m}^{\infty} \varepsilon_i$ в силу определения меры μ, аналогично, вероятность p_k того, что $(-k)f_n|_{[m,\infty)} = 0$ составляет $p_k = \sum_{i=m+k}^{\infty} \varepsilon_i$. Случайное блуждание $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на $\mathbb{Z}$, уходя на $-\infty$, проходит через все точки 0,-I,-2,..., но

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=m+k}^{\infty} \varepsilon_i = \sum_{k=m}^{\infty} (k-m+1)\varepsilon_k = \infty \tag{I4}$$

по выбору $\{\varepsilon_k\}$. Таким образом в силу леммы Бореля-Кантелли для почти всех траекторий $\{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ найдется бесконечно много k таких, что $y_{k-1} f_k|_{[m,\infty)} = 0$ (т.е. $(y_k - y_{k-1})|_{[m,\infty)} \neq 0$).

Рассмотрим теперь следующее преобразование в пространстве траекторий случайного блуждания. Выберем наименьшее k такое, что $y_{k-1} \leqslant -m$ и $y_{k-1} f_k|_{[m,\infty)} \neq 0$, и заменим приращение f_k на $f_k' = f_k + (-y_{k-1})f$, т.е. $y_{k-1} f_k' = y_{k-1} f_k + f$, все же остальные приращения оставим без изменения. Полученную так траекторию обозначим через $\{(y_n', \varphi_n')\}_{n=0}^{\infty}$ Преобразование $\{(y_n, \varphi_n)\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{(y_n', \varphi_n')\}_{n=0}^{\infty}$ определено п.в., взаимно однозначно и в силу определения μ и $\check{\mu}$ сохраняет меру в пространстве траекторий. Кроме того, очевидно,

$$(y_n', \varphi_n') = (y_n, f + \varphi_n) = (0, f)(y_n, \varphi_n) \tag{I5}$$

для всех $n \geqslant k$. Отсюда уже непосредственно следует соотношение (I2).

Пусть теперь F – некоторая ограниченная $\check{\mu}$ – гармоническая функция на G. Через g обозначим элемент $(0, f) \in G$. Тогда

$$F(e) = \sum_h F(h) \check{\mu}_n(h) \tag{I6}$$

и

$$F(g) = \sum_h F(gh) \check{\mu}_n(h) = \sum_h F(h) \check{\mu}_n(g^{-1}h) \tag{I7}$$

Вычитая (I7) из (I6), получаем

$$F(e) - F(g) = \sum_h F(h)(\check{\mu}_n(h) - \check{\mu}_n(g^{-1}h)) \tag{I8}$$

В силу ограниченности F и (I2) правая часть (I8) стремится к нулю по n, т.е. $F(e)=F(q)$. Аналогично доказывается, что $F(x,f)=F(x,0)$ для любого элемента $(x,f)\in G$, т.е. функция $F'(x)\equiv F(x,f)$ гармонична на абелевой группе $\mathbb{Z}$. В силу теоремы Шоке-Дени отсюда вытекает постоянство F. Таким образом на G нет нетривиальных ограниченных $\check{\mu}$ - гармонических функций, т.е. $\Gamma(G,\check{\mu})$ одноточечна. Теорема доказана.

§ 2. Аффинная группа

Опираясь на приведенные выше результаты, рассмотрим теперь группу $G=\mathrm{aff}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ матриц вида $\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, где $p=2^k$, $q=\frac{m}{2^n}$ (k,m,n - целые числа) с операцией матричного умножения - аффинную группу двоично-рациональной прямой $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Группа G изоморфна полупрямому произведению группы $\mathbb{Z}\cong\left\{\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ на группу $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cong\left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2^n} \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, разрешима ступени 2, имеет экспоненциальный рост и может быть задана образующими $a=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и $b=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ и соотношением $b^2a=ab$. Существенным для нас является то, что группа G есть гомоморфный образ группы $\widetilde{G}=\mathbb{Z}\leftthreetimes\mathrm{fun}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ при каноническом гомоморфизме $\pi:\widetilde{G}\longrightarrow G$

$$\pi(x,f)=\begin{pmatrix} 2^x & \sum\limits_k 2^k f(k) \\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{I}$$

Таким образом, изучение границ случайных блужданий на группе G может быть сведено к изучению границ группы $\widetilde{G}$ и их поведения при гомоморфизме π. Точнее, если $\widetilde{\mu}$ - какой-нибудь прообраз меры μ на $\widetilde{G}$, то граница $\Gamma(G,\mu)$ есть фактор-пространство границы $\Gamma(\widetilde{G},\widetilde{\mu})$ по разбиению на эргодические компоненты относительно действия ядра

$$\mathrm{Ker}\,\pi=\left\{(x,f)\in\widetilde{G}:\ x=0,\ \sum_k f(k)\,2^k=0\right\} \tag{2}$$

гомоморфизма π [7]. Теория же случайных блужданий на группе $\widetilde{G}$ близка теории случайных блужданий на группе $G_1=\mathbb{Z}\wedge\mathrm{fun}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$.

ТЕОРЕМА 2.I. Для всякой симметричной финитной меры μ на группе $G=\mathrm{aff}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ граница $\Gamma(G,\mu)$ тривиальна, но существуют нефинитная симметричная и финитная несимметричная меры на

G с нетривиальными границами.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму:

ЛЕММА 2.I. Пусть случайное блуждание $(\mathbb{Z},\mu)$ на $\mathbb{Z}$, заданное некоторой невырожденной вероятностной мерой μ, невозвратно, тогда для почти всех траекторий $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ блуждания $(\mathbb{Z},\mu)$ сумма $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|y_n|}$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в действительности конечен интеграл $\int \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|y_n|} d\,\mathbb{P}^{\mu}(y)$, где $\mathbb{P}^{\mu}$ – каноническая мера в пространстве траекторий $y=\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ блуждания $(\mathbb{Z},\mu)$. Действительно,

$$\int \sum_{n} 2^{-|y_n|} d\,\mathbb{P}^{\mu}(y) = \sum_{n} \int 2^{-|y_n|} d\,\mathbb{P}^{\mu}(y) =$$

$$= \sum_{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} \mu_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} \sum_{n} \mu_n(k) = \qquad (3)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} \theta(k)$$

где $\theta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(k)$ – ядро функции Грина случайного блуждания $(\mathbb{Z},\mu)$. Поскольку в силу невозвратности функция θ ограниченна [I0], то сумма $\sum_{k} 2^{-|k|}\theta(k)$ конечна. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2.I. I) Пусть μ – симметричная финитная мера на группе G, тогда проекция случайного блуждания (G,μ) на подгруппу $\left\{\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, изоморфную $\mathbb{Z}$, возвратна. Поскольку группа $\left\{\begin{pmatrix} 1 & \frac{m}{2^n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ абелева, то в силу леммы I.I (ср.доказательство теоремы I.2) граница $\Gamma(G,\mu)$ тривиальна.

2) Перейдем теперь к построению мер μ на G с нетривиальной границей. Положим

$$\mu\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \mu\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{4}$$

$$\mu\left\{\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\mu'(k) \qquad (4)$$

где μ' – некоторая вероятностная мера на $\mathbb{Z}$. Очевидно, симметричность (или финитность) μ равносильна симметричности (или финитности) μ'. Выберем теперь μ' симметричной нефинитной или финитной несимметричной так, чтобы определяемое ею блуждание на $\mathbb{Z}$ было невозвратным. Пусть $\tilde{\mu}$ – прообраз меры μ на $\tilde{G}$:

$$\tilde{\mu}(0,\sigma_0)=\tilde{\mu}(0,-\sigma_0)=\frac{1}{4}$$

$$\tilde{\mu}(k,0)=\mu\begin{pmatrix}2^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\mu'(k) \tag{5}$$

В силу невозвратности случайного блуждания $(\mathbb{Z},\mu')$ получаем, что для почти всех траекторий $\{(y_n,\varphi_n)\}_{n=0}^{\infty}$ случайного блуждания $(\tilde{G},\tilde{\mu})$ функции φ_n поточечно сходятся к некоторой (нефинитной) функции φ_∞ (и, следовательно, $\Gamma(\tilde{G},\tilde{\mu})$ нетривиальна). В силу леммы 2.I сумма $\sum\limits_{k<0}\varphi_\infty(k)2^k$ почти наверное конечна. Поскольку действие $\operatorname{Ker}\pi$ на $\Gamma(\tilde{G},\tilde{\mu})$ не изменяет величины

$$\Big[\sum_{k<0}\varphi_\infty(k)\,2^k\Big] \tag{6}$$

($[x]$ обозначает целую часть числа x), то получаем, что на $\Gamma(\tilde{G},\tilde{\mu})$ существует нетривиальная измеримая $\operatorname{Ker}\pi$ -инвариантная функция. Таким образом, $\Gamma(G,\mu)$ нетривиальна.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть μ – финитная мера на $G=\mathrm{aff}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ тогда граница $\Gamma(G,\mu)$ тривиальна тогда и только тогда, когда проекция случайного блуждания (G,μ) на подгруппу $\left\{\begin{pmatrix}2^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ возвратна.

§ 3. Бесконечная симметрическая группа

Рассмотрим симметрическую группу $\mathfrak{S}_\infty$ финитных подстановок счетного множества. Группа $\mathfrak{S}_\infty$, очевидно, счетна и локально конечна. Ясно, что в силу локальной конечности группы $\mathfrak{S}_\infty$ всякая финитная мера на ней содержится в некоторой конечной подгруппе, а потому имеет тривиальную границу. Тем не менее на $\mathfrak{S}_\infty$ существуют нефинитные меры с нетривиальной границей.

ТЕОРЕМА 3.I. На группе $\mathfrak{S}_\infty$ существует симметричная вероятностная мера μ, для которой граница случайного блуждания $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty,\mu)$ нетривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что группа $\mathfrak{S}_\infty$ реализована как группа финитных подстановок $g: V\to V$ некоторого счетного множества V. На V определено естественное правое действие $\mathfrak{S}_\infty$:

$$v.g = g^{-1}(v) \qquad v \in V,\ g \in \mathfrak{S}_\infty \tag{I}$$

Основная идея доказательства состоит в построении меры μ на $\mathfrak{S}_\infty$, для которой однородный марковский процесс на V с переходными вероятностями

$$p(x_1|x_0) = \mu\left\{g : x_0 g = x_1\right\} = \mu\left\{g : g^{-1}(x_0) = x_1\right\} \tag{2}$$

индуцированный действием (I) группы $\mathfrak{S}_\infty$ на V, имеет нетривиальную границу-выход. Прообраз всякого хвостового события индуцированного процесса на V, очевидно, будет хвостовым событием для случайного блуждания, а потому из нетривиальности границы-выход индуцированного процесса вытекает и нетривиальность границы $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty, \mu)$ исходного случайного блуждания на $\mathfrak{S}_\infty$.

Далее будет удобно множество V снабдить дополнительной структурой двоичного дерева и рассматривать его как множество последовательностей $v = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ конечной длины $0 \leq |v| = n < \infty$, составленных из нулей и единиц (вершина двоичного дерева пустая последовательность $\emptyset$ имеет длину $|\emptyset| = 0$). Обозначим через V_n множество вершин V_n-го уровня

$$V_n = \left\{v \in V : |v| = n\right\},\ \operatorname{card} V_n = 2^n \quad (n \geq 0) \tag{3}$$

Определим две последовательности $\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ и $\left\{b_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ элементов $\mathfrak{S}_\infty$ следующим образом:

$$a_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \begin{cases} (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0), & k = n \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}), & k = n+1 \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \end{cases} \tag{4}$$

$$b_n(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \begin{cases} (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 1), & k = n \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}), & k = n+1 \\ (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \end{cases}$$

Иными словами, a_n переставляет элементы V_n и $V'_{n+1}=\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}):$ $\varepsilon_{n+1}=0\}$, а b_n – элементы V_n и $V''_{n+1}=\{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}):$ $\varepsilon_{n+1}=1\}$ (a_n и b_n – не автоморфизмы двоичного дерева!).

Определим теперь вероятностную меру μ на $\mathfrak{S}_\infty$ следующим образом:

$$\mu(a_n)=\mu(b_n)=\frac{\alpha_n}{2} \qquad (n\geqslant 0) \tag{5}$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=1$, $\alpha_n>0$. Тогда для индуцированного марковского процесса на V получим следующие значения переходных вероятностей (2):

$$\begin{cases} p((\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})|(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n))=\frac{\alpha_{n-1}}{2} \\ p((\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,0)|(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n))=\frac{\alpha_n}{2} \\ p((\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,1)|(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n))=\frac{\alpha_n}{2} \\ p((\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)|(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n))=1-\alpha_n-\frac{\alpha_{n-1}}{2} \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, индуцированный марковский процесс $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ на V обладает нетривиальной границей-выход (состоящей из концов двоичного дерева), если невозвратен марковский процесс на $\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\dots\}$ с переходными вероятностями

$$\begin{gathered} p(n-1|n)=\frac{\alpha_{n-1}}{2} \\ p(n+1|n)=\alpha_n \\ p(n|n)=1-\alpha_n-\frac{\alpha_{n-1}}{2} \end{gathered} \tag{7}$$

Процессы такого типа на $\mathbb{Z}_+$ хорошо изучены (напр.см. [8] гл.3). Применительно к нашему случаю необходимым и достаточным условием невозвратности является конечность суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\alpha_n}<\infty \tag{8}$$

Выбирая теперь последовательность $\{\alpha_n\}$ так, чтобы выполнялось условие (8), получим, что мера μ на $\mathfrak{S}_\infty$, задаваемая формулой (5), имеет нетривиальную границу $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty,\mu)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Все элементы носителя построенной меры μ являются элементами второго порядка ($a_n^2 = b_n^2 = e$) и мера μ таким образом, симметрична.

2. Носитель $\operatorname{supp}\mu$ построенной меры μ , вообще говоря, порождает не всю группу $\mathfrak{S}_\infty$, а лишь некоторую ее подгруппу, но несколько модифицировав приведенное выше построение, легко привести пример невырожденной меры $\tilde{\mu}$ на $\mathfrak{S}_\infty$ с нетривиальной границей. Действительно, пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ - две последовательности положительных чисел такие, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + 2^n\gamma_n) = 1$ Положим теперь по-прежнему $\tilde{\mu}(a_n) = \tilde{\mu}(b_n) = \frac{\alpha_n}{2}$ и, кроме того, $\tilde{\mu}(g) = \frac{\gamma_n}{2}$ для всех транспозиций g пар элементов $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in V_n$ и $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1}) \in V_{n+1}$ (т.е. транспозиций пар элементов, лежащих на одном ребре двоичного дерева). Построенная так мера $\tilde{\mu}$, очевидно, невырожденна на $\mathfrak{S}_\infty$. Выбирая $\{\alpha_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ так, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(\alpha_n+\gamma_n)} < \infty$, (т.е. так, чтобы индуцированный процесс на V имел нетривиальную границу-выход), получим невырожденную меру на $\mathfrak{S}_\infty$ с нетривиальной границей.

3. Мера μ с нетривиальной границей $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty, \mu)$ может быть выбрана имеющей конечную энтропию $H(\mu)$, как видно из ее построения. С другой стороны, для всякой финитной меры μ' на $\mathfrak{S}_\infty$ энтропия $h(\mathfrak{S}_\infty, \mu')$ есть ноль в силу локальной конечности $\mathfrak{S}_\infty$. Это показывает, что, вообще говоря, произвольная вероятностная мера μ на счетной группе G не может быть аппроксимирована (в каком-нибудь смысле) финитными мерами $\mu^{(k)}$ так, чтобы энтропии $h(G, \mu^{(k)})$ сходились к энтропии $h(G, \mu)$.

4. Пусть группа $\mathfrak{S}_\infty$ реализована как группа финитных подстановок некоторого счетного множества V (как в доказательстве теоремы). Неизвестно, допускает ли граница $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty, \mu)$ полное описание в терминах границы-выход индуцированного марковского процесса на V , и, в частности, следует ли из тривиальности границы-выход индуцированного процесса тривиальность $\Gamma(\mathfrak{S}_\infty, \mu)$.

§ 4. Разрешимая локально конечная группа

Пусть $D = \mathrm{fun}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2)$ - счетная прямая сумма групп $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$, заиндексированных натуральными числами I,2,3, ... Удобно считать, что D есть группа функций $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_2$ с финитными носителями $\operatorname{supp} f = \{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$ (или: D

есть группа финитных конфигураций на $\mathbb{N}$ с операцией поточечного сложения $\mathrm{mod}\ 2$).

Через $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$ обозначим группу финитных функций $F: D \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ с операцией поточечного сложения. Иначе говоря, $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$ есть счетная прямая сумма D экземпляров группы $\mathbb{Z}_2$. Группа D канонически действует на $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$:

$$fF(h)=F(f+h) \qquad F\in \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2);\ f,h\in D \tag{I}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим полупрямое произведение $\mathcal{D} = D\wedge \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$ определяемое действием (I). Группа $\mathcal{D}$ как множество состоит из пар элементов (f,F), где $f\in D$, $F\in \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$ с групповой операцией

$$(f_1,F_1)(f_2,F_2)=(f_1+f_2,\ F_1+f_1F_2) \tag{2}$$

Пусть $\emptyset$ - единица группы D :

$$\emptyset(n)=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N} \tag{3}$$

Через $\delta_n\ (n\in\mathbb{N})$ будем обозначать образующие группы D :

$$\delta_n(m)=\begin{cases}1, & n=m\\ 0 & \text{иначе}\end{cases} \tag{4}$$

Через Φ обозначим единицу группы $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$:

$$\Phi(f)=0 \qquad \forall f\in D \tag{5}$$

Выделим еше один элемент $\omega\in \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$:

$$\begin{aligned}&\omega(\emptyset)=1\\ &\omega(f)=0, \quad f\in D,\ f\neq\emptyset\end{aligned} \tag{6}$$

Единицу $(\emptyset,\Phi)$ группы $\mathcal{D}$ будем обозначать через e .

Группа $\mathcal{D}$ есть локально конечная разрешимая группа ступени 2. Установим несколько ее более специальных свойств.

ЛЕММА 4.I. Множество $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\omega\}$ является порождающим для группы $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ порождает группу D , то достаточно показать, что D -орбита элемента ω порождает всю группу $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$. Пусть $F\in \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$, $\mathrm{supp}\,F=\{f_i\}_{i=1}^{k}$, но тогда очевидно $F=f_1\omega+f_2\omega+\ldots+f_k\omega$ Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Порядки всех элементов $\mathfrak{D}$ не превосходят четырех.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g=(f,F)\in\mathfrak{D}$, тогда, поскольку $f+f=\emptyset$ и $F+F=\Phi$ для всех $f\in D$, $F\in \mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$, то $g^2=(f+f,F+fF)=(\emptyset,F+fF)$, откуда $g^4=(\emptyset,F+fF)^2=$ $=(\emptyset,F+F+fF+fF)=(\emptyset,\Phi)=e$.

ЛЕММА 4.3. Порядки конечно порожденных подгрупп $\mathfrak{D}$ с не более чем k образующими ограничены для всех k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторое множество T из k элементов группы $\mathfrak{D}$. Без ограничения общности можно считать множество T симметричным и содержащим единицу e, таким образом, группа порожденная T есть $gr(T)=\bigcup_{n=0}^{\infty}T^n$, причем множества T^n не убывают, т.е. $\{e\}=T^0\subset T^1\subset\ldots\subset T^n\subset T^{n+1}\subset\ldots$. Оценим мощность множества T^n. Пусть $\{(f_i,F_i)\}_{i=1}^{n}$ - некоторый набор элементов T, тогда

$$(f_1,F_1)\cdot\ldots\cdot(f_n,F_n)=(f_1+\ldots+f_n,F_1+f_1F_2+\ldots+(f_1+\ldots+f_{n-1})F_n) \tag{7}$$

Подгруппа D, состоящая из сумм $f_1+\ldots+f_n$ имеет не более k образующих порядка 2, а потому состоит из не более чем 2^k элементов. Таким образом, подгруппа $\mathrm{fun}(D,\mathbb{Z}_2)$, порожденная элементами вида $(f_1+\ldots+f_{n-1})F_n$ имеет не более $k\cdot 2^k$ образующих порядка 2, и состоит из не более чем 2^{k2^k} элементов. Окончательно получаем $|T^n|\leqslant 2^k\cdot 2^{k2^k}$ для всех n. Лемма доказана.

Напомним, что группа G называется группой равномерно полиномиального роста [II,I7], если существует набор полиномов p_k таких, что

$$|T^n|\leqslant p_k(n) \tag{8}$$

для всех подмножеств $T\subset G$, состоящих из не более чем k элементов. Таким образом, $\mathfrak{D}$ является группой равномерно полиномиального роста. (Заметим, что симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$ имеет слабо экспоненциальный рост см. [I7]).

ТЕОРЕМА 4.I. На группе $\mathfrak{D}$ существует невырожденная симметричная вероятностная мера μ с конечной энтропией $H(\mu)$, для которой граница $\Gamma(\mathfrak{D},\mu)$ нетривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проходит по той же схеме, что и в теореме I.I. Рассмотрим вероятностную меру μ на $\mathfrak{D}$, заданную следующим образом:

$$\mu(\delta_n)=p_n,\ \mu(\omega)=q,\ \mu(e)=r \tag{9}$$

где $p_n, q, r > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n + q + r = 1$. Мера μ, очевидно, симметрична, а на основании леммы 4.I невырожденна. Пусть $\{(h_n, H_n)\}_{n=0}^{\infty}$ – случайное блуждание, заданное мерой μ, т.е.

$$(h_n, H_n)=(f_1,F_1)\cdot\ldots\cdot(f_n,F_n) \tag{I0}$$

где (f_i,F_i) – независимые $\mathcal{D}$ –значные случайные величины с распределением μ (приращения случайного блуждания). Поскольку носители всех F_i или пусты, или состоят из единственной точки ω, то для нетривиальности границы $\Gamma(\mathcal{D},\mu)$ достаточно невозвратности случайного блуждания $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ на D (тогда функции H_n будут п.н. поточечно стабилизироваться – ср. замечание к теореме I.I). Известно, что если, например, $\lim_n \frac{p_{n+1}}{p_n}=1$ то блуждание $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ на D невозвратно [I0], и следовательно $\Gamma(\mathcal{D},\mu)$ нетривиальна. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Напомним, что для конечно порожденных групп полиномиального роста теорема Громова [I4] в сочетании с тривиальностью границы для нильпотентных групп [5] показывает, что граница тривиальна для любой меры. Доказанная теорема дает пример того, что для групп с бесконечным числом образующих ситуация сильно отличается от случая конечно порожденных групп.

2. Несколько более "сложная" группа $D \leftthreetimes \mathrm{fun}(D,D)$ рассматривалась Хуланицким [I5] (см.также [I6]), который доказал несимметричность ее групповой алгебры. Результаты этого параграфа почти дословно переносятся и на эту группу.

Литература

I. Березный А.Е. Дискретные группы с субэкспоненциальным ростом коэффициентов Голода-Шафаревича. – УМН, 1980, т.35, № 5, с.225-226.

2. Вершик А.М. Счетные группы, близкие к конечным. – В кн: Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М, 1973.

3. Вершик А.М. Случайные блуждания на группах и близкие вопросы. – Теор.вероятн. и ее примен., 198I, т.26, № I,с.190-19I.

4. Вершик А.М., Кайманович В.А. Случайные блуждания на группах: граница, энтропия, равномерное распределение.

Докл.АН СССР, I979, 249, № I, с.I5-I8.

5. Дынкин Е.Б., Малютов М.Б. Случайное блуждание на группах с конечным числом образующих. - Докл.АН СССР, I96I, I37, № 5, с.I042-I045.

6. Кайманович В.А. Спектральная мера оператора перехода и гармонические функции, связанные со случайным блужданием на дискретных группах. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I980, т.97, с.I02--I09.

7. Кайманович В.А. Границы случайных блужданий на дискретных группах.-Теория вероятн. и ее примен., I98I, 26, № 3, с.637-639.

8. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М., I97I.

9. Березный А.Е. Дискретные субэкспоненциальные группы. Наст.сб., стр. I55-I56

I0. Спицер Ф. Принципы случайного блуждания. М., I969.

11. Bozeiko M. Uniformly amenable discrete groups. - Math. Ann., 1980, v.251, N 1, p.1-6.

12. Choquet G., Deny J. Sur l'equation de convolution $\mu = \mu * \sigma$ - C.R., 1960, 250A, p.799-801.

13. Furstenberg H. Random walks and discrete subgroups of Lie groups. - In: Adv.Prob.Related Topics, vol.1, N.-Y., M.Dekker, 1971, p.1-63.

14. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. - Publ.Math.IHES, 1981, v.53, p.53-78.

15. Hulanicki A. A solvable group with polynomial growth and non-symmetric group algebra. - preprint

16. Jenkins J.W. Invariant functionals and polynomial growth. - Astérisque, 1980, v.74, p.171-181.

17. Kaimanovich V.A., Vershik A.M. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. - Annals of Probability, 1983, v.11, N 1, p 79-90.

18. Rosenblatt M. Markov processes, structure and asymptotic behavior. - Grundl.Math. Bd.184, Berlin: Springer, 1971.

В.А.Арзуманян, С.А.Григорян

РАВНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРНЫХ ПОЛЕЙ

0. Пусть T - компакт, $\mathfrak{A}$ - C^*-алгебра с единицей. Множество $C(T,\mathfrak{A})$ всех непрерывных отображений (сечений) T в $\mathfrak{A}$, наделенное стандартными операциями и нормой, является C^*-алгеброй. Эта алгебра - частный случай общего понятия непрерывного поля C^*-алгебр, впервые выведенного Феллом [I]. Теория непрерывных полей подробно изложена в [2]. Интерес к равномерным подалгебрам таких алгебр (см.,напр., [3], [4], [5]) вполне обоснован. В настоящей заметке рассматриваются равномерные подалгебры $C(T,\mathfrak{A})$: вводятся и изучаются спектр таких алгебр и связанные с ним объекты, особое внимание уделяется инвариантным равномерным алгебрам на компактных абелевых группах. Некоторые приводимые ниже результаты обобщают известные факты[*] из коммутативной теории, другие вскрывают новые эффекты, присущие некоммутативному случаю.

I. Пусть $a \in \mathfrak{A}$, $f \in C(T)$, $\underline{a}(t) \equiv a$, $\underline{f}(t)=f(t)e$, где $t \in T$, e - единица $\mathfrak{A}$. Тогда $\underline{a}$, $\underline{f} \in C(T,\mathfrak{A})$ и алгебра $C(T,\mathfrak{A})$ порождается C^*-подалгебрами $\underline{\mathfrak{A}} = \{\underline{a}, a \in \mathfrak{A}\}$ и $C(T) = \{\underline{f}, f \in C(T)\}$, $*$-изоморфными, соответственно, $\mathfrak{A}$ и $C(T)$.

Равномерной алгеброй на T называется (см. [3]) замкнутая подалгебра $A \subset C(T,\mathfrak{A})$, содержащая константы и разделяющая точки (т.е. для любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$, существует сечение $x \in A$, такое, что $x(t_1)=a_1$, $x(t_2)=a_2$). Естественным является рассмотрение равномерных алгебр, являющихся подмодулями $\mathfrak{A}$-модуля $C(T,\mathfrak{A})$. Такие алгебры ($\underline{\mathfrak{A}} \subset A$) мы будем называть равномерными $\mathfrak{A}$-алгебрами.

Под относительным спектром (или $\mathfrak{A}$-спектром равномерной алгебры A мы понимаем множество $Sp_{\mathfrak{A}} A$ всех гомоморфизмов $p: A \longrightarrow \mathfrak{A}$, которые продолжаются до условного ожидания

$$P : C \subset (T,\mathfrak{A}) \longrightarrow \underline{\mathfrak{A}}.$$

Это множество наделяется топологией поточечной сходимости. Ясно, что каждая точка $t_0 \in T$ определяет условное ожидание $p_0(x) =$

---

[*] Все понятия и результаты, употребляемые без указания на источник, можно найти в [6] или [7].

$= x(t_0)$, откуда следует, что $T \subset \mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$. Заметим, что это определение использует явно структуру непрерывного поля и не совпадает с обычным спектром алгебры A при коммутативном $\mathfrak{A}$. Однако оно обобщает понятие пространства максимальных идеалов обычных равномерных алгебр.

2. Информацию об $\mathfrak{A}$ -спектре содержат утверждения:.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Множество $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} C(T, \mathfrak{A})$ изоморфно множеству всех непрерывных отображений пространства максимальных идеалов центра алгебры $\mathfrak{A}$ в T .

ТЕОРЕМА I. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ имеет тривиальный центр. Тогда

I) для любой равномерной алгебры A на T $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$ является компактом;

2) $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} C(T, \mathfrak{A}) = T$.

Отметим, что это утверждение верно для простых алгебр $\mathfrak{A}$.

3. Опишем относительный спектр в терминах соответствующих идеалов. Самосопряженный замкнутый $\mathfrak{A}$-подмодуль $\mathfrak{J} \subset C(T, \mathfrak{A})$ назовем $\mathfrak{A}$-максимальным, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{A} = \{0\}$; $\mathfrak{J} \oplus \mathfrak{A} = C(T, \mathfrak{A})$

2) для любых $h \in \mathfrak{J}$, $h \geqslant 0$ и $x, y \in C(T, \mathfrak{A})$, $xhy \in \mathfrak{J}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Относительный спектр $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$ равномерной алгебры A изоморфен множеству двусторонних замкнутых идеалов $I \subset A$, таких, что $I = \mathfrak{J} \cap A$ для некоторого $\mathfrak{A}$ -максимального подмодуля $\mathfrak{J}$.

4. Для каждой равномерной алгебры A можно определить представление, аналогичное представлению Гельфанда, непрерывными сечениями на $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$: для $x \in A$, положим $\hat{x}(p) = p(x)$. Полученная таким образом алгебра $\hat{A} \subset C(\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A, \mathfrak{A})$, вообще говоря, не является равномерной ($\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$ может не быть компактом, $\hat{A}$ может не разделять точек и т.д.). Верно, однако, следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A - равномерная $\mathfrak{A}$ -алгебра, где $\mathfrak{A}$ - простая C^*-алгебра. Тогда

I) представление Гельфанда $\hat{A}$ алгебры A есть равномерная $\mathfrak{A}$ -алгебра на $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$;

2) $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} \hat{A}$ совпадает с $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$.

5. Следующие утверждения выясняют связь между спектрами $x \in A$ и $p(x) \in \mathfrak{A}$, $p \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$. Пусть $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} x = \bigcup \mathrm{Sp}\, p(x)$, где объединение берется по всем $p \in \mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A - равномерная алгебра, где $\mathfrak{A}$ проста, тогда $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{A}} x$ является подкомпактом $\mathrm{Sp}\, x$.

Ясно, что если алгебра A такова, что для любого $x \in A$, $Sp_{\mathfrak{A}}\, x = Sp\, x$, то из того, что $\rho(x)$ обратим в $\mathfrak{A}$ для всех $\rho \in Sp_{\mathfrak{A}} A$, следует, что x обратим в A. Верно и обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если в равномерной алгебре A из обратимости в $\mathfrak{A}$ всех $\rho(x)$, $\rho \in Sp_{\mathfrak{A}} A$, следует обратимость в A элемента x (для любого x), то $Sp_{\mathfrak{A}}\, x = Sp\, x$ при всех $x \in A$.

Существуют алгебры, в которых $Sp_{\mathfrak{A}}\, x$ является собственным подмножеством $Sp\, x$. С другой стороны, имеется достаточно обширный класс алгебр, удовлетворяющих условиям предложения 4 (см., напр., п.7 предл.5).

6. Здесь приводятся факты, которые используются при доказательстве результатов п.п.7, 8, интересные, впрочем, сами по себе.

Множество $F \subset T$ назовем множеством пика (см. [3]) для равномерной алгебры A, если существует сечение $x \in A$, такое, что $x|_F = \underline{e}|_F$, $\|x(t)\| < 1$, при $t \in T \setminus F$. Заметим, что для метризуемого T каждое замкнутое подмножество T является множеством пика для $C(T, \mathfrak{A})$. Неизвестно, существуют ли точки пика для произвольной некоммутативной равномерной алгебры. Множество $F \subset T$ назовем множеством антисимметрии для равномерной алгебры A, если из того, что $x \in A$, $x|_F = \underline{f}|_F$ для некоторой вещественной функции $f \in C(T, \mathfrak{A})$, следует, что $x|_F$ есть константа. Следующий результат распространяет на некоммутативный случай известную теорему Бишопа (см. [6]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – равномерная алгебра. Тогда T можно представить в виде объединения попарно не пересекающихся максимальных множеств антисимметрии, $T = \bigcup_{\alpha} F_\alpha$. При этом

1) каждое F_α является пересечением множеств пика;

2) если $x \in C(T, \mathfrak{A})$ и при каждом α $x|_{F_\alpha} = y|_{F_\alpha}$ для некоторого $y \in A$, то $x \in A$;

3) если $\mathfrak{A}$ – простая C^*-алгебра, то $Sp_{\mathfrak{A}} A = \bigcup_{\alpha} Sp_{\mathfrak{A}} A|_{F_\alpha}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть каждое замкнутое подмножество T есть множество пика равномерной алгебры A. Тогда $A = C(T, \mathfrak{A})$ (ср. [3]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\underline{C(T)} \subset A$, тогда $A = C(T, \mathfrak{A})$ (ср. [3]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть каждая точка T есть максимальное множество антисимметрии для A, тогда $A = C(T, \mathfrak{A})$.

7. В этом разделе приводятся некоторые свойства инвариантных равномерных алгебр A на компактной абелевой группе T. Пусть

Γ - группа характеров T, $\Gamma_A = \{\chi \in \Gamma$, для которых существует $a \in \mathfrak{A}$, для которого $\underline{\chi}\ \underline{a} \in A\}$. Отметим, что, в отличие от коммутативной теории, Γ_A, вообще говоря, не является полугруппой. Верны, однако, следующие утверждения (ср. результаты Аренса, Зингера, Гофмана и др. [6]).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{A}$ - простая C^*-алгебра, A - инвариантная равномерная $\mathfrak{A}$-алгебра на компактной абелевой группе T. Тогда

I) Γ_A является подполугруппой Γ;

2) существует естественный гомеоморфизм $Sp_{\mathfrak{A}} A$ на компакт (в стандартной топологии) всех гомоморфизмов Γ_A в единичный круг комплексной плоскости;

3) алгебра A совпадает с $C(T, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $Sp_{\mathfrak{A}} A$ совпадает с T.

Заметим, что все ограничения в условиях теоремы существенны.

ТЕОРЕМА 5. Для любой инвариантной равномерной алгебры на компактной абелевой группе T ее максимальные множества антисимметрии являются классами смежности по некоторой подгруппе T.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 4. Тогда

I) $Sp_{\mathfrak{A}} A$ совпадает с множеством всех $\mathfrak{A}$-линейных гомоморфизмов A в $\mathfrak{A}$.

2) для любого $x \in A$ $Sp_{\mathfrak{A}} x = Sp\, x$.

8. Равномерную алгебру A назовем **алгеброй конечного типа** $type(A) = n$, если существует последовательность равномерных алгебр $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, такая, что

$$A = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset C(T, \mathfrak{A}),$$

причем любая такая последовательность имеет длину не большую n (см. 8). Алгебра максимальна, если $type(A) = 1$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A - алгебра конечного типа $type(A) > 0$ на связной компактной группе T, удовлетворяющая условиям теоремы 4. Тогда $Sp_{\mathfrak{A}} A$ гомеоморфен $T \times [0,1] / T \times \{0\}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть A - алгебра, удовлетворяющая условиям теоремы 4. Тогда она максимальна тогда и только тогда, когда задает полный архимедов порядок на Γ. В этом случае она является алгеброй Дирихле (т.е. $\overline{Re\, A} = Re\, C(T, \mathfrak{A})$).

Известно (см. [9]), что если группа T не изоморфна единичной окружности, то любая инвариантная подалгебра конечного типа максимальна. По-другому обстоит дело в некоммутативном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра комплексных $n \times n$ матриц, и группа характеров компактной абелевой группы T допускает полный архимедов порядок. Тогда для любого k, $1 \leqslant k \leqslant 3n-2$, существует инвариантная равномерная подалгебра конечного типа $A \subset C(T, \mathfrak{A})$, для которой $\mathrm{type}(A) = k$.

В заключение авторы приносят искреннюю благодарность А.М.Вершику, причитавшему заметку в рукописи и сделавшему ряд замечаний.

Литература

1, **Fell** J. The structure of algebras of operator fields - Acta Math., 1961, v.106, N 3-4, p 233-280.

2. **Диксмье** Ж. C^*-алгебры и их представления. М., 1974, с.399.

3. **Taylor** D.C. Interpolation in albegras of operator fields. - J.of Funct.Anal., 1972, v 10, N 2, p 159-190.

4 **Taylor** D.C. A general Hoffman-Wermer theorem for algebras of operator fields. - Proc. of A.M.C., 1975, v.52, p.212-216.

5. **Sallaz** A. Une extension d'un theoreme de champs continus d'operateurs. - C.R.Acad.Sc.de Paris, ser.A, 1977, v.284, N 17, p.1049-1051.

6. **Гамелин** Т. Равномерные алгебры. М., 1973, с.334.

7. **Sakai** S. C*-algebras and W*-albegras, Springer-Verlag, 1971, p.256.

8. **Батикян** Б.Т., **Григорян** С.А. О функциональных алгебрах конечного типа.- Усп.мат.наук, 1974, т.29, № 16, с.155-156.

9. **Григорян** С.А. Об алгебрах конечного типа на компактной группе.- Изв.Акад.Наук Арм.ССР, сер."Математика", 1979, т.14, № 3, с.168-183.

С.В.Керов

О W-ГРАФАХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

В работе [I] Каждан и Люстиг определили многочлены, играющие ключевую роль для целого ряда алгебраических и геометрических задач: при описании модулей Верма, представлений групп Кокстера, особенностей многообразий Шуберта (см. [2]).

Конструкция представлений группы Кокстера W в [I] использует введенные там же W-графы, дуги которых определяются старшими коэффициентами многочленов Каждана-Люстига. Для группы Вейля W примером W-графа может служить диаграмма Дынкина соответствующей системы корней.

Прямое описание W-графов и многочленов Каждана-Люстига известно лишь в немногих случаях; за исключением отдельных примеров все имеющиеся здесь результаты принадлежат Ласку и Шютценберже. В их статье [4] изучены W-графы представлений симметрической группы $W = \mathfrak{S}_n$, отвечающие двустрочным (грассмановым) диаграммам Юнга.

Цель данной работы - комбинаторное описание более общих $\mathfrak{S}_n$ - графов. Мы хотим также сопоставить результаты [I] с традиционной для теории представлений симметрических групп техникой таблиц и диаграмм Юнга (см. [5]), в частности, с алгоритмом Робинсона-Шенстеда-Кнута (RSK).

Заметим, что $\mathfrak{S}_n$- графы тесно связаны с геометрией многообразий флагов. Спрингер (см. [3]) построил неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_n$ в когомологиях таких многообразий. Его реализации имеют естественный с геометрической точки зрения базис, матрицы представления в котором совпадают с матрицами из конструкции Каждана-Люстига. Непосредственная геометрическая интерпретация $\mathfrak{S}_n$-графов для $n \leq 6$ указана в [I].

Перечислим основное содержание статьи.

В п.I получены условия на $\mathfrak{S}_n$-граф, при которых формулы Каждана-Люстига (2) задают представление $\mathfrak{S}_n$. Они могут использоваться для индуктивного построения дуг $\mathfrak{S}_n$-графов (см. пример в п.4). В п.2 приведено описание $\mathfrak{S}_n$-графа регулярного представления Γ_{reg} . Методическая установка состояла в том, чтобы сделать изложение элементарным, исключив технику, применяемую при работе с группами Вейля.

Начальным приближением к графу Γ_{reg} служит диаграмма Хассе порядка Брюа для перестановок (она содержит дуги $\{x, y\}$ длины $|\ell(x) - \ell(y)| = 1$ в графе Γ_{reg} . Уже на этом уровне определяются разбиения вершин Γ_{reg} (перестановок) на левые и правые клетки. Клетки естественно параметризуются таблицами Юнга. Если P, Q такие таблицы Юнга, что L_P и R_Q – левая и правая клетки, содержащие перестановку $x \in \Gamma_{reg}$, то отображение $x \longmapsto (P, Q)$ совпадает с преобразованием RSK. Это обстоятельство указывает подход к обобщению алгоритма RSK на W-графы групп Кокстера. Геометрический подход к подобному обобщению указан в [6].

В п.3 найдены все дуги длины три графа Γ_{reg}. $\mathfrak{S}_n$-графы для косых диаграмм (в частности, для диаграмм Юнга) строятся в п.4, как фрагменты графа Γ_{reg}. В качестве примера найдены $\mathfrak{S}_n$-графы для крюков, т.е. для диаграмм вида $\lambda=(n-m, 1^m)$.

В [4] построены $\mathfrak{S}_n$-графы для диаграмм из двух строк. В п.5 мы переводим описание этих графов на естественный для теории представлений язык таблиц Юнга (оригинальное изложение в [4] приспособлено к изучению особенностей многообразий Шуберта). Наша формулировка позволяет строить дуги "грассманова типа" для диаграмм с любым числом строк. Она указывает возможную форму общего описания $\mathfrak{S}_n$-графов: их дуги соответствуют циклическим подстановкам специального вида в таблицах Юнга.

В заключение с точки зрения $\mathfrak{S}_n$-графов рассматриваются ограничения представлений $\mathfrak{S}_n$ на подгруппы вида $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$.

Автор признателен А.М.Вершику, А.В.Зелевинскому и А.Н.Кириллову за полезные обсуждения.

I. Комбинаторная характеризация $\mathfrak{S}_n$-графов

Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ подстановок множества $\{1,2,\dots,n\}$ порождается инверсиями соседних чисел $s_k=(k,k+1)$, $k=1,\dots,n-1$; при этом определяющие соотношения имеют вид

$$\text{(1) a) } s_i^2=1; \quad \text{в) } s_i s_j = s_j s_i \quad \text{при } |i-j|>1;$$
$$\text{c) } s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \quad \text{при } |i-j|=1. \qquad \text{(I)}$$

Пусть Γ – помеченный граф (без петель и кратных ребер), каждая вершина x которого снабжена множеством меток $I_x \subset I = \{1,\dots,n-1\}$. Множество дуг графа Γ обозначим через Γ^v. Определим, следуя [I] операторы τ_k, $k=k\in I$ в пространстве H_Γ -формальных линейных комбинаций вершин графа Γ (с комплексными коэффициентами):

$$\tau_k(x)=\begin{cases} -x\quad, & \text{если } k\in I_x \\ x+\sum\limits_{\substack{y:\,k\in I_y\\ \{x,y\}\in\Gamma^v}} y, & \text{если } k\notin I_x\quad. \end{cases} \qquad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ([I]). Граф Γ называется σ_n-графом, если для операторов τ_k выполняются (с заменой s_k на τ_k) соотношения (I). Иначе говоря, соответствие $s_k \longmapsto \tau_k$ задает представление π_Γ группы σ_n в пространстве H_Γ.

Для более прямого описания σ_n-графов введем следующее обозначение. Для $x,\ y\in\Gamma$ условимся писать $x\equiv y$, если $\{x,y\}\in \in\Gamma^v$ и существуют смежные метки $k,\ell\in I,\ |k-\ell|=1$, для которых $k\in I_x\setminus I_y,\ \ell\in I_y\setminus I_x$.

Будем говорить, что множества $I',\ I''\subset I$ смежны, если они отличаются заменой некоторой метки на одну или две соседние метки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Следующие четыре условия (в совокупности) характеризуют σ_n-графы.

I) Если $x\equiv y$, то I_x и I_y смежны.

2) Если $x\in\Gamma$ и I' смежно с I_x, то существует единственная вершина $y\in\Gamma$, такая, что $I_y=I'$ и $x\equiv y$. Пусть $x,\ y\in\Gamma$ и $k,\ell\in I_y\setminus I_x$.

3) Положим $\Gamma(x,y)=\{z\in\Gamma\mid \{x,z\},\{z,y\}\in\Gamma^v\}$.
Тогда множества $\{z\in\Gamma(x,y)\mid k\in I_z,\ \ell\notin I_z\}$ и $\{z\in\Gamma(x,y)\mid k\notin I_z,\ \ell\in I_z\}$ равномощны.

4) Если $|k-\ell|=1$ и $\Gamma_{k,\ell}=\{(z',z'')\mid z'\equiv z''$ и $k\in I_{z'}\setminus I_{z''},\ \ \ell\in I_{z''}\setminus I_{z'}\}$, то множества

$\{(z',z'')\in\Gamma_{k,\ell}\mid \{x,z'\},\ \{z'',y\}\in\Gamma^v\}$ и

$\{(z',z'')\in\Gamma_{k,\ell}\mid \{x,z''\},\ \{z',y\}\in\Gamma^v\}$

равномощны.

Доказательство состоит в прямой проверке тождеств (I) для операторов τ_k. Условия I), 2) получаются сначала в виде пары условий I$'$), 2$'$):

I$'$) если $\{x,y\}\in\Gamma^v$ и $k\in I_x\setminus I_y,\ \ell\in I_y\setminus I_x$, то $|k-\ell|=1$.

2$'$) если $|k-\ell|=1$ и $k\in I_x,\ \ell\notin I_x$, то существует единственная вершина $y\in\Gamma$, для которой $\{x,y\}\in\Gamma^v$ и $k\notin I_y,\ \ell\in I_y$. Условия I) и 3) обеспечивают выполнение соотношений (Iв); 2) и 4) появляются в связи с (1с) . Соотношение (Iа) следует непосредственно из определения (2) операторов τ_k .

В качестве примера использования предложения исправим опечатку в [I]: граф I2 – 3 из п.6, 2 не задает представление σ_n , т.к. нарушено правило I). Правильный σ_4 -граф таков: I3-2.

Предложение I удобно использовать для построения σ_n-графов представлений небольшой размерности: I) ограничивает число возможных дуг, а 3) позволяет строить дуги рекуррентно.

Заметим, что неизоморфные графы могут давать эквивалентные приводимые представления σ_n . Аналогичные примеры для неприводимых представлений автору неизвестны.

2. σ_n-граф регулярного представления

Один из результатов работы [I] – построение σ_n-графа регулярного представления Γ_{reg} . Графы других представлений σ_n можно получить, как полные подграфы в Γ_{reg} . Дадим по возможности прямое комбинаторное описание этого графа.

Вершинами графа Γ_{reg} служат перестановки чисел $1, 2, \dots, n$. Для каждой перестановки $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Gamma_{reg}$ рассмотрим два подмножества во множестве всех меток $I = \{1, 2, \dots, n-1\}$: $\mathcal{L}(x) = \{ k \in I \mid x_k > x_{k+1} \}$ (левые метки) и $\mathcal{R}(x) =$ $= \{ k \in I \mid (k+1)$ расположено в x левее $k \}$ (правые метки).

Назовем транспозицию чисел $x_i < x_j$ в перестановке $x =$ $=(\dots x_i \dots x_j \dots)$ (переводящую ее в $y = (\dots x_j \dots x_i \dots)$) минимальной, если ни при каком $k, I \leq k \leq n$, неравенства $i < k < j$ и $x_i < x_k < x_j$ не выполняются одновременно. Минимальность означает, что $\ell(y) - \ell(x) = 1$, где $\ell(x)$ – число инверсий в перестановке x . В частности, транспозиции чисел x_i , x_j смежных по положению или по значениям, всегда минимальны. Определим порядок Брюа на Γ_{reg} , полагая $x \leq y$ для $x, y \in \Gamma_{reg}$, если существует цепочка минимальных транспозиций, переводящая x в y . Разумеется, данные выше определения для $\mathcal{L}(x), \mathcal{R}(x), \ell(x)$ и порядка Брюа эквивалентны соответствующим определениям из [I].

Для описания дуг графа Γ_{reg} используются многочлены Каждана-Люстига, введенные в [4]. Эти многочлены параметризуются парой перестановок $x, y \in \Gamma$, $x \leq y$, и определяются рекуррентным соотношением (2,2, с) из [I]. Степень многочлена $P_{x,y}(t)$ не превосходит $\frac{1}{2}(\ell(y) - \ell(x) - 1)$. По определению, дугами графа Γ_{reg} служат пары $\{x, y\}$, для которых $P_{x,y}(t)$ имеет эту максимально возможную степень. Известно (см. [4]), что коэффициент $\mu(x,y)$ при старшей степени t в таком многочлене равен единице, поэтому дуги в Γ_{reg} простые.

Если перестановка y получается из x минимальной транспозицией, то $P_{x,y}(t)=1$, так что $\{x,y\}$ - дуга графа Γ_{reg}.

ТЕОРЕМА I ([I]). Помеченные графы $\Gamma^{L}_{reg}=\{\Gamma_{reg};\ \mathcal{L}(x),\ x\in\Gamma_{reg}\}$, $\Gamma^{R}_{reg}=\{\Gamma_{reg};\ \mathcal{R}(x),\ x\in\Gamma_{reg}\}$ являются $\mathfrak{S}_n$-графами. Соответствующие представления π_L, π_R эквивалентны регулярному представлению $\mathfrak{S}_n$ и коммутируют между собой.

Доказательство теоремы I, данное в [I], использует свойства многочленов Каждана-Люстига. Было бы интересно непосредственно проверить выполнение условий предложения I, в частности, найти величину множеств из условия 3). Свойства I), 2) для эквивалентностей Кнута (см.ниже) легко проверяются.

В [I], (2.3.e) показано, что левые метки не могут появляться при спусках по длинным дугам графа Γ_{reg} :

$$\{x,y\}\in\Gamma^{V},\ \ell(y)-\ell(x)>1 \Longrightarrow \mathcal{L}(x)\supset\mathcal{L}(y)\,. \qquad (3)$$

Отсюда нетрудно вывести, что две перестановки x, y связаны отношением $x\equiv y$ в графе Γ^{L}_{reg} (см.п.I), тогда и только тогда, когда x и y эквивалентны по Кнуту [7], т.е. имеют вид

$$\ldots acb\ldots \equiv \ldots cab\ldots$$

или $\ldots bac\ldots \equiv \ldots bca\ldots$,

где $1\le a<b<c\le n$. Обозначим это отношение через $x\underset{L}{\equiv}y$.

Аналогичное рассуждение (или переход к обратным перестановкам в графе Γ_{reg}) показывает, что отношение $x\equiv y$ в $\mathfrak{S}_n$-графе Γ^{R}_{reg} (обозначаемое через $x\underset{R}{\equiv}y$) совпадает с отношением

$$\begin{gathered}\ldots k\ldots(k-1)\ldots(k+1)\ldots \equiv \ldots(k+1)\ldots(k-1)\ldots k\ldots\\ \ldots k\ldots(k+1)\ldots(k-1)\ldots \equiv \ldots(k-1)\ldots(k+1)\ldots k\ldots\end{gathered} \qquad (5)'$$

применявшимся в [8].

В теории представлений симметрической группы важную роль играет алгоритм RSK (см. [7]). Он сопоставляет перестановке $x\in\Gamma_{reg}$ пару таблиц Юнга (P_x, Q_x) с общей диаграммой Юнга λ_x.

Левой клеткой графа Γ_{reg} называется любое множество перестановок с заданной P-таблицей t :

$$L_t = \{ x \in \Gamma_{reg} \mid P_x = t \} .$$

Аналогично, правая клетка – это подмножество вида

$$R_t = \{ x \in \Gamma_{reg} \mid Q_x = t \} .$$

Напомним, что для каждого σ_n-графа Γ в [I] вводится предпорядок $\underset{\Gamma}{\leqslant}$ на множестве вершин Γ : $x \underset{\Gamma}{\leqslant} y$, если существует такая последовательность $x = x_0, x_1, \dots, x_m = y$, что $\{x_{k-1}, x_k\} \in \Gamma^v$ и $I_{x_{k-1}} \neq I_{x_k}$ при всех $1 \leqslant k \leqslant m$. Соответствующее этому предпорядку отношение эквивалентности обозначается через $x \underset{\Gamma}{\sim} y$, а классы эквивалентности называются клетками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([I], § 5). Два определения клеток для графов Γ^L_{reg} и Γ^R_{reg} эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЯ. I) Разбиения на левые и правые клетки определено и для других групп Вейля и может быть использовано для обобщения алгоритма RSK . Однако, для групп серии BC, например, пересечения левых и правых клеток могут содержать более одной точки. Это согласуется с геометрическим обобщением RSK , см.[6].

2) Предпорядок $x \underset{L}{\leqslant} y$ в σ_n-графе Γ^L_{reg} задает порядок на множестве левых клеток и, тем самым, на множестве таблиц Юнга. На рис.I изображен случай $n = 4$.

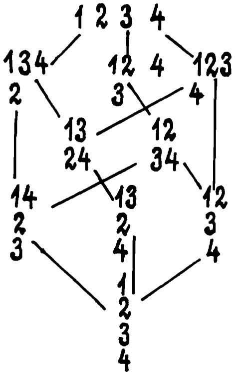


Рис.I

Важное свойство графа Γ_{reg} дает следующая

ТЕОРЕМА 2 ([I], 4.2). Преобразования Кнута сохраняют дуги графа Γ_{reg} . Более точно: пусть $\{x, y\} \in \Gamma^v_{reg}$ и $z = s_k x$,

$w = s_k y$ для некоторой транспозиции $s_k = (k, k+1)$ ж), причем $x \underset{L}{=} z$, $y \underset{L}{=} w$. Тогда $\{z, w\} \in \Gamma^v_{reg}$.

Коэффициент $\mu(x,y)$ при $t^{1/2(\ell(y)-\ell(x)-1)}$ для многочлена $P_{x,y}(t)$ является, таким образом, нетривиальным примером двухместного инварианта кнутовских преобразований. Заметим, что кнутовски-инвариантные функционалы от одной перестановки хорошо изучены в работах Фолкса, Грина и Клейтмана, Ласку и Шютценберже и других авторов (см. [5]).

"Правые" преобразования Кнута также сохраняют дуги графа Γ_{reg}.

Отметим другие свойства симметрии графа Γ_{reg}. Через $\bar{x} = (x_n, \dots, x_1)$ обозначается противоположная к $x = (x_1, \dots, x_n)$ перестановка, а через x^{-1} – обратная.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. I) Преобразование $x \mapsto \bar{x}$ сохраняет дуги графа Γ_{reg} и переводит его левые клетки снова в левые клетки.

2) Преобразование $x \mapsto x^{-1}$ сохраняет дуги графа Γ_{reg} и переводит левые клетки в правые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение – это следствие 3.2 из [I]; второе связано с тождеством $P_{x^{-1}} = Q_x$, $Q_{x^{-1}} = P_x$ для преобразования RSK (см. [7]).

3. Дуги длины три графа Γ_{reg}.

Длиной дуги $\{x, y\} \in \Gamma^v_{reg}$ назовем число $|\ell(x) - \ell(y)|$. Все дуги имеют нечетную длину.

Дуги длины I составляют диаграмму Хассе порядка Брюа на Γ_{reg}. Они имеют вид $\{x, y\}$, где $x = \dots a \dots b \dots$ $y = \dots b \dots a \dots$ совпадают вне выделенных мест, причем между числами $a, b, 1 \leq a < b \leq n$, нет разделяющих их значений (т.е. если h расположено в перестановке x между a и b, то либо $h < a$, либо $h > b$, см. определение минимальных транспозиций в п.2).

Для группы S_4, кроме дуг длины I, имеются только две дуги длины 3 (см. [I], 6.I): $\{1324, 3412\}$ и $\{2143, 4231\}$. Никаких существенно новых дуг длины 3 не появляется и в других симметрических группах.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq a < b < c < d \leq n$. Рассмотрим перестановки

$$x = \dots a \dots c \dots b \dots d \dots$$
$$w = \dots d \dots b \dots c \dots a \dots$$

из Γ_{reg}, для которых

ж) Левое умножение на s_k соответствует транспозиции мест k, $k+1$ в перестановке, правое – транспозиции значений.

$i)$ между a и c нет разделяющих их значений

$ii)$ между b и c нет значений, разделяющих a и d

$iii)$ между b и d нет разделяющих их значений.

Пусть перестановки

$$y = \ldots c \ldots d \ldots a \ldots b \ldots$$
$$z = \ldots b \ldots a \ldots d \ldots c \ldots$$

совпадают соответственно с x и w всюду, кроме выделенных мест. Тогда

I) $\{x,y\}$ и $\{z,w\}$ – дуги длины 3 графа Γ_{reg} ;

2) все дуги длины 3 графа Γ_{reg} имеют такой вид.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что $P_{x,y}(t) = 1$, если $x \leqslant y$ и $l(y) - l(x) \leqslant 2$ ([I], лемма 2.6). Пусть теперь $x < y$ и $l(y) - l(x) = 3$. Перестановка y имеет хотя бы одну метку $k \in \mathcal{L}(y)$; согласно (3), если $\{x,y\} \in \overset{v}{\Gamma}_{reg}$, то $k \in \mathcal{L}(x)$. Пользуясь рекуррентным соотношением (2.2.c) из [I], получаем

$$P_{x,y}(t) = P_{s_k x, s_k y}(t) + t, \tag{6}$$

если между x и $s_k y$ имеются промежуточные (относительно порядка Брюа) элементы,но ни один из них не содержит метки k . Если же $x \nless s_k y$ или существует $z : x < z < s_k y$, $k \in \mathcal{L}(z)$, то

$$P_{x,y}(t) = P_{s_k x, s_k y}(t) . \tag{7}$$

Мы опускаем разбор отдельных случаев, приводящий от формул (6), (7) к заключению, что $P_{x,y}(t) = 1 + t$ для перестановок, указанных в теореме и $P_{x,y}(t) = 1$ в остальных случаях, когда $l(y) - l(x) = 3,\ x \leqslant y$.

4. Другие представления симметрической группы

Пусть Γ – произвольный $\mathfrak{S}_n$-граф. На множестве его вершин определен предпорядок $\underset{\Gamma}{\leqslant}$ и разбиение на клетки – классы эквивалентности $\underset{\Gamma}{\sim}$ (см.п.2).

ЛЕММА. Если Γ_0 – полный подграф $\mathfrak{S}_n$-графа Γ , состоящий из целых клеток (и снабженный прежними метками), то Γ_0 – также $\mathfrak{S}_n$ – граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ([2]). В определении (2) операторов τ_k имеем $y \underset{\Gamma}{\leqslant} x$ для всех y в правой части. Следовательно, подпространства $H_{\leqslant}$ и $H_{<}$ в H_{Γ} , порожденные множествами $\{y \mid y \leqslant x$ при некотором $x \in \Gamma_0\}$, $\{y \mid y < x$ при всех $x \in \Gamma_0\}$ инвариантны для операторов τ_k . $\mathfrak{S}_n$ – граф Γ_0 задает представление в подфакторе $H_{\leqslant} / H_{<}$.

В [I] доказано, что клетки в $\mathfrak{S}_n$ -графе Γ^L_{reg} задают неприводимые представления $\mathfrak{S}_n$.

Вершины клетки $L_s = \{x \in \Gamma_{reg} \mid P_x = s\}$, в силу соответствия RSK , параметризуются таблицами Юнга Q на той же диаграмме Юнга λ , на которой задана таблица s . Если t - еще одна таблица Юнга на λ , то соответствие $(s, Q) \longmapsto (t, Q)$ по теореме 2, устанавливает изоморфизм клеток L_s , L_t , как $\mathfrak{S}_n$-графов.

В теории представлений симметрических групп важную роль играют представления $\pi_\varkappa$, связанные с косыми диаграммами вида $\varkappa = \lambda \setminus \mu$, где $\mu \subset \lambda$ - диаграммы Юнга (см.[9]). В частности, если $\mu = \Phi$ - пустая диаграмма, то $\pi_\varkappa = \pi_\lambda$ пробегает все неприводимые представления. Определим $\mathfrak{S}_n$ -граф $\Gamma_\varkappa$, задающий представление $\pi_\varkappa$.

Если $\varkappa$ - косая диаграмма и t - таблица на ней (со значениями I,2, ... $n = |\varkappa|$, возрастающими вдоль строк и столбцов), то через x_t обозначим перестановку, получаемую чтением чисел из t в арабском порядке: справа налево по строкам и сверху вниз (ср.[9], I.9). Через $\bar{x}_t$ обозначается противоположная к x_t перестановка; мы будем называть ее канонической перестановкой таблицы t .

Вершинами графа $\Gamma_\varkappa$ служат всевозможные таблицы на диаграмме $\varkappa$. По определению, таблицы s, t из $\Gamma_\varkappa$ образуют дугу в $\Gamma^v_\varkappa$, если $\{\bar{x}_s , \bar{x}_t\}$ - дуга графа Γ_{reg} . Наконец, примем множество $I_s = \{k \in I \mid (k+1)$ расположено в s юго-западнее $k\}$ за множество меток таблицы $s \in \Gamma_\varkappa$. Таким образом, если $k \in I_s$ лежит в i-ой строке и j-ом столбце $\varkappa$, а $(k+I)$ - в l-ой строке и m-ом столбце, то $l - m > i - j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Граф $\Gamma_\varkappa$ является $\mathfrak{S}_n$-графом. Соответствующее представление эквивалентно $\pi_\varkappa$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I из [8] образ $\Gamma_\varkappa$ в Γ_{reg} при вложении $s \longmapsto \bar{x}_s$ состоит из целых правых клеток. Нетрудно проверить, что $\mathcal{R}(\bar{x}_s) = I_s$. Первое утверждение следует теперь из леммы. Второе получается из сравнения кратностей неприводимых компонент (см.[8], теорема 2).

Особый интерес представляют графы Γ_λ для диаграмм Юнга λ . Нетрудно дать их прямое описание, когда λ - крюк, т.е. имеет одну строку и один столбец.

Обозначим через $L(m, n)$ решетку, вершинами которой служат возрастающие последовательности по m чисел, взятых из множества $I = \{1, \ldots, n-1\}$, а упорядочение - покоординатное. Пусть

$\Gamma_{m,n}$ – диаграмма Хассе решетки $L(m,n)$; примем $I_u = \{i_1,\dots,i_m\} \subset I$ за множество меток последовательности $u = (i_1,\dots,i_m) \in \Gamma_{m,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Помеченный граф $\Gamma_{m,n}$ изоморфен $\mathfrak{S}_n$-графу Γ_λ крюка λ $(n-m, 1^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим вершине $u=(i_1,\dots,i_m)\in\Gamma_{m,n}$ λ-таблицу Юнга $t = t(u)$, помещая в ногу крюка λ числа i_1+1, $\dots$, i_m+1 , а остальные числа из множества $\{1,2,\dots,n\}$ – в первую строку. При этом метки графа $\Gamma_{m,n}$ переходят в метки Γ_λ . Дугам графа $\Gamma_{m,n}$, т.е. парам $u=(\dots,i_k,\dots)$, $v=(\dots,i_k+1,\dots)$ отвечают транспозиции соседних значений i_k+1 , i_k+2 , переводящие $t(u)$ в $t(v)$. Таким образом, $\Gamma^v_{m,n} \subset \Gamma^v_\lambda$. Обратно, $\Gamma^v_{m,n} \supset \Gamma^v_\lambda$, так как иначе нарушалось бы условие I) предложения 1.

В п.5 мы дадим прямое описание графов Γ_λ для двустрочных и двухстолбцовых диаграмм. Для полного описания клеток всех групп $\mathfrak{S}_n$ с $n \leqslant 6$ остается добавить граф $\Gamma_{(3,2,1)}$ (см.рис.2). При его построении использовались условия I) и 3) из предложения 1.

Заметим, что графы Γ_λ с $|\lambda| \leqslant 6$ имеют прямой геометрический смысл. Пусть u – унипотентная матрица с жордановой структурой типа λ , X – многообразие флагов и X_u – подмногообразие флагов, неподвижных относительно u . Неприводимые компоненты многообразия X_u параметризуются λ-таблицами Юнга (см.[9]). Рассмотрим граф $\Gamma(u)$, вершины которого – неприводимые компоненты X_u , а дуги связывают те компоненты, пересечение которых имеет размерность $\dim X_u - 1$. Тогда граф $\Gamma(u)$ совпадает с Γ_λ ([I], 6.3).

5. Дуги грассманова типа

Ласку и Шютценберже в [4] получили прямое комбинаторное описание многочленов Каждана-Люстига $P_{x,y}(t)$ для перестановок x, y , распадающихся на две возрастающие подпоследовательности (мы будем называть их грассмановыми). Они построили также $\mathfrak{S}_n$-граф представления, индуцированного единичным представлением подгруппы $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k} \subset \mathfrak{S}_k$. Описание, данное в [4], ориентировано на применения к геометрии многообразий Шуберта. Ниже мы даем перевод результатов [4], относящихся к $\mathfrak{S}_n$-графам, на язык таблиц Юнга, удобный для задач теории представлений симметрических групп.

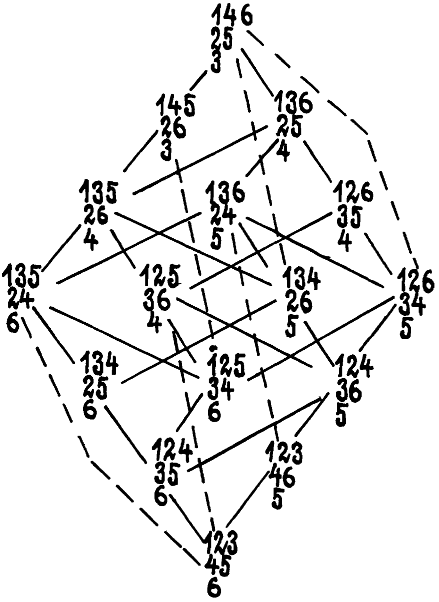


Рис.2

Пусть α - прямоугольная двустрочная таблица Юнга, с диаграммой $\lambda = (m-1, m-1)$, составленная из чисел $(2,3,\dots,2m-1)$. Обозначим через s_α косую таблицу, получаемую дописыванием числа 1 в начало второй строки и числа $2m$ - в конец первой. Пусть также t_α - таблица, получаемая из s_α циклической подстановкой на один шаг по часовой стрелке и u_α, v_α - канонические перестановки таблиц s_α ; t_α (см. п.4).

Пример: $\alpha = \begin{matrix}236\\457\end{matrix}$ $s_\alpha = \begin{matrix}\ 2368\\1457\end{matrix}$ $t_\alpha = \begin{matrix}1236\\4578\end{matrix}$

$u_\alpha = 14572368$, $v_\alpha = 45781236$.

Пусть таблицы s, t на диаграмме $\varkappa$ совпадают вне поддиаграммы $\varkappa_0 \subset \varkappa$ и s_0, t_0 - их ограничения на $\varkappa_0$. Если существуют такие перестановки u_α, v_α, что канонические перестановки для s_0, t_0 отличаются от u_α, v_α лишь общим сдвигом значений, то $\{s, t\}$ назовем грассмановой парой.

ТЕОРЕМА 4 (ср. [4]). Пусть $\varkappa$ - двустрочная диаграмма. Тогда дугами графа $\Gamma_\varkappa$ служат в точности грассмановы пары.

Доказательство представляет собой интерпретацию результатов

[4] на языке таблиц.

Умножение на нетривиальный одномерный характер $sign$ задает инволюцию на множестве представлений группы $\mathfrak{S}_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если $\mathfrak{S}_n$ - граф Γ определяет представление π_Γ, а Γ^* отличается от Γ лишь заменой меток I_x, $x\in\Gamma$ на их дополнения в $I=\{1,2,\dots,n-1\}$, то Γ^* - также $\mathfrak{S}_n$-граф и $\pi_{\Gamma^*}\cong\pi_\Gamma\otimes sign$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\varkappa$ - двухстолбцовая диаграмма. Тогда дуги графа $\Gamma_\varkappa$ имеют вид $\{s^T, t^T\}$, где $\{s,t\}$ пробегает грассмановы пары на двустрочной диаграмме $\varkappa^T$, T - операция транспонирования.

Грассмановы пары таблиц $\{s,t\}$ и транспонированные пары $\{s^T,t^T\}$ назовем дугами грассманова типа. $\mathfrak{S}_n$-графы неприводимых представлений при $n\leq 6$ содержат только такие дуги. Однако для регулярного представления группы $\mathfrak{S}_6$ граф Γ_{reg} содержит дуги, не сводящиеся к грассманову типу. Примеры:

351624 - 563412 , 241635 - 462513 ,
251634 - 562413 , 341625 - 463512 ,
413625 - 634512 , 251463 - 562341 .

Эти дуги появляются при описании $\mathfrak{S}_8$ -графа $\Gamma_{(3,3,2)}$. Для их построения использовалось условие 3) предложения 1.

$\mathfrak{S}_n$ - подграфы графа $\Gamma^{(n)}_{reg}$ при различных значениях n связаны друг с другом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\varkappa_0$ - поддиаграмма диаграммы $\varkappa$ и s_0, t_0 - ограничения на $\varkappa_0$ таблиц s,t на $\varkappa$, причем числа в таблицах s_0, t_0 составляют один и тот же интервал в $\{1,\dots,n\}$. Предположим, что $\{s_0, t_0\}$ - дуга графа $\Gamma_{\varkappa_0}$. Тогда $\{s,t\}\in\Gamma^v_\varkappa$ в том и только том случае, когда таблицы s,t совпадают вне $\varkappa_0$.

Опишем в терминах $\mathfrak{S}_n$ -графов ограничения косых представлений $\mathfrak{S}_n$ на подгруппы $\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}\subset\mathfrak{S}_n$.

Если Γ_1 - $\mathfrak{S}_k$-граф и Γ_2 - $\mathfrak{S}_{n-k}$ -граф, то через $\Gamma=\Gamma_1\times\Gamma_2$ обозначим помеченный граф с множеством вершин $\Gamma_1\times\Gamma_2$, дуги которого имеют вид $\{(x_1,y),(x_2,y)\}$ или $\{(x,y_1),(x,y_2)\}$, где $\{x_1,x_2\}\in\Gamma_1^v$, $\{y_1,y_2\}\in\Gamma_2^v$. За множество меток вершины $(x,y)\in\Gamma$ примем $I_{x,y}=I_x\cup I_y$. Тогда Γ - W -граф для $W=\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}$

Пусть $\varkappa$ - косая диаграмма, $|\varkappa|=n$. Обозначим через $\Gamma^{(k)}_\varkappa$ помеченный граф, возникающий при выбрасывании из всех множеств I_s, $s\in\Gamma_\varkappa$, метки k (вершины и дуги графа $\Gamma^{(k)}_\varkappa$ - те же, что у $\Gamma_\varkappa$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Граф $\Gamma_{\varkappa}^{(k)}$ является W-графом для $W = \mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ и задает ограничение представления $\pi_{\varkappa}$ на подгруппу $W \subset \mathfrak{S}_n$. Клетки графа $\Gamma_{\varkappa}^{(k)}$ имеют вид $\{t \in \Gamma_{\varkappa}^{(k)} \mid t_{\leqslant k} = \beta\} \cong \Gamma_{\beta} \times \Gamma_{\varkappa \setminus \beta}$, где $t_{\leqslant k}$ – поддиаграмма в $\varkappa$, содержащая значения I,2, ..., k из t.

Связи между $\mathfrak{S}_n$-графами при различных n, подобные указанным в предложениях 7,8 будут рассмотрены в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kazhdan D., Lustig G., Representations of Coxeter Groups and Hecke Algebras, Inv.math., 53 (1979), 165-184.
2. Springer T.A., Quelques applications de la cohomologie d'intersection, Seminaire Bourbaki, n^{o} 589 (1982),1-25.
3. Concini C., Kazhdan D., Special bases for S_N and GL(n), Israel J.Math., 40 (1981) 275-290.
4. Lascoux A., Schützenberger M.-P., Polynômes de Kazhdan & Lustig pour les grassmanniennes, Asterisque, 87-88 (1982), 249-266.
5. James G.D. The representation theory of the symmetric group. Lecture Notes in Math., v.682, Berlin, 1978
6. Springer T.A., Geometric questions, arising in the study of nipotent elements, Proc.Symp. in Pure Math., 37 (1980), 255-264.
7. Knuth D., Permutations, matrices and generalized Young tableaux, Pacif.J.Math., 34 (1970), 709-727.
8. Керов С.В., Соответствие Робинсона-Шенстеда-Кнута и правило Литтлвуда-Ричардсона, УМН, 38(I983), I78-I79.
9. Macdonald I.G., Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford, 1979.

Н.Е.Мнёв

О РЕАЛИЗУЕМОСТИ НАД ПОЛЯМИ КОМБИНАТОРНЫХ СХЕМ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть $S=\{S_0,S_1\}$ – блок-схема, S_0 – конечное множество, S_1 – система подмножеств S_0 ; C – реализацией над $\mathbb{F}$ блок-схемы S (где $\mathbb{F}$ – упорядоченное поле) называется такой политоп (выпуклый многогранник) в пространстве $\mathbb{F}^d$, что блок-схема, образованная множеством его вершин и системой гиперграней, как системой подмножеств множества вершин, изоморфна S . Конфигурация a в проективной плоскости Π называется ℓ-реализацией блок-схемы S над проективной плоскостью Π , если блок-схема, образованная точками a и прямыми a как подмножествами множества точек, изоморфна S . Блок-схему политопа (конфигурации) будем называть его (ее) комбинаторным типом. Политопы (конфигурации) с данным комбинаторым типом называются комбинаторно эквивалентными. Не всякая блок-схема является комбинаторным типом. Данный комбинаторный тип может иметь C– (или ℓ–) реализацию над одним полем и не иметь над другим. М.Перль (M.Perles.) построил блок-схему из двенадцати точек, имеющую C-реализацию над $\mathbb{R}$ (при $d=8$) и не имеющую C-реализации над $\mathbb{Q}$ (см.[I]). Иными словами, он привел пример политопа с двенадцатью вершинами в $\mathbb{R}^8$, вершины которого нельзя одновременно поместить в рациональные точки (т.е. реализовать в $\mathbb{Q}^8$) сохраняя тот же комбинаторный тип.

А.М.Вершик предложил автору доказать следуюшее усиление этого результата:

ТЕОРЕМА. Минимальным подполем поля $\mathbb{R}$, над которым реализуемы все комбинаторные типы политопов, реализуемые над $\mathbb{R}$, является поле всех вещественных алгебраических чисел $\mathbb{A}$. Иначе говоря, I) Для всякого конечного расширения $\mathbb{F}$ поля рациональных чисел сушествует политоп в $\mathbb{R}^d$, комбинаторный тип которого не реализуем над $\mathbb{F}$. 2) Всякий реализуемый над $\mathbb{R}$ комбинаторный тип политопов реализуем над $\mathbb{A}$.

В свою очередь, основным вопомогательным утверждением является предложенная Вершиком Лемма I, обобшаюшая построение Перля и уточняюшая основную теорему проективной геометрии.

В пункте I^0 строится серия блок-схем со следуюшим свойством: они ℓ-реализуемы над $\mathbb{R}$, но для каждого конечного расширения $\mathbb{K}\supset\mathbb{Q}$ найдется блок-схема в этой серии не ℓ-реализуемая над $\mathbb{K}$. В пункте 2 с помошью преобразования Гейла делается переход от конфигураций к политопам, что дает серию блок-схем с тем же свойством уже для C-реализуемости. В пункте 3 доказывается, что всякая блок-схема C-реализуемая над $\mathbb{R}$ C-реализуема над $\mathbb{A}$, что завершает доказательство теоремы.

I°. Следующая Лемма является уточнением основной теоремы проективной геометрии (см. [4]) для проективных пространств над конечными расширениями $\mathbb{Q}$.

ЛЕММА I. Для всякого конечного расширения $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$ существует блок-схема $S_{\mathbb{F}}$ такая, что $S_{\mathbb{F}}$ ℓ-реализуема в $P^2_{\mathbb{L}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{L}\supset\mathbb{F}$.

Набор таких схем $\{S_{\mathbb{F}}\}$, где $\mathbb{F}$ пробегает все подполя $\mathbb{R}$, являющиеся конечными расширениями $\mathbb{Q}$, образуют нужную серию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем называть блок-схему помеченной, если в ней отмечены четыре точки в общем положении, т.е. такие, что никакая тройка из них не лежит в одном блоке. ℓ-реализацией помеченной блок-схемы в плоскости Π называем любую конфигурацию, в которой выполняются инциденции, указанные схемой, и, возможно, еще какие-то, лишь бы указанные четыре точки находились в общем положении. Чтобы доказать лемму, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Для всякого полинома с целыми коэффициентами f найдется помеченная блок-схема R_f такая, что R_f реализуема в $P^2_{\mathbb{L}}$ т. и т.т., когда f имеет корень в $\mathbb{L}$.

Для доказательства предложения воспользуемся техникой геометрического представления алгебраических равенств, развитой в [2]. Именно, зафиксируем на абстрактной проективной плоскости Π упорядоченный набор B из четырех точек в общем положении. Любой такой набор ("базис") определяет алгебраическую структуру "натуральное тело Π":

На пучке прямых $\mathcal{L}$, инцидентных первой из точек B с помощью построений определяются операции умножения, сложения и им обратные. Прямым из $\mathcal{L}$, инцидентным трем оставшимся точкам базиса, присваиваются символы 0, I, ∞. Теперь всякому $f\in\mathbb{Z}[x]$ можно сопоставить построение $\mathcal{B}_f$, ставящее в соответствие элементу натурального тела x элемент $f(x)$, где f понимается формально как фиксированная последовательность сложений и умножений. Данное построение есть конечная последовательность соединений и пересечений, исходящая из системы образующих, состоящей из B и прямой X в $\mathcal{L}$. В процессе построения возникает помеченная блок-схема T_f точек и прямых. Добавим к схеме T_f инциденцию, обеспечивающую совпадение прямой $f(x)$ с прямой 0. Полученная блок-схема R_f и является согласно [2] геометрическим представлением равенства $f(x)=0$.

R_f обладает следующими важными для нас свойствами:

а) всякая реализация R_f как помеченной блок-схемы однозначно определяется фиксацией точек B в общем положении и прямой X в отмеченном пучке.

б) если R_f реализована, то прямая, соответствующая X в натуральном теле, определенном точками соответствующими B, является корнем формального полинома f в этом натуральном теле, и обратно.

в) если есть некий фиксированный базис B в проективной плоскости Π и прямая X является корнем f, как формального полинома в соответствуюшем натуральном теле, то применение алгоритма $\mathcal{B}_f$ даст реализацию R_f.

Покажем, что R_f обладает нужными свойствами. В случае, когда Π - плоскость над полем, всякое ее натуральное тело изоморфно основному полю [3]. Пусть R_f реализована так, что точки B в обшем положении. Тогда в определенном ими натуральном теле в соответствии со свойством б) есть корень формального полинома f. Следовательно, если основное поле содержит $\mathbb{Q}$, то в силу изоморфизма в нем есть корень полинома f, как полинома $f\in\mathbb{Z}[x]$.

Обратно. Пусть в $\mathbb{F}$ есть корень f. Возьмем некоторые четыре точки $P^2_{\mathbb{F}}$ в общем положении и в соответствующем натуральном теле возьмем прямую X, являющуюся образом корня f при изоморфизме. После этого по в) получаем реализацию R_f. Предложение доказано.

Теперь возьмем $\mathbb{F}\supset\mathbb{Q}$ - конечное расширение. Тогда $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(\alpha)$, α - примитивный элемент $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$. Пусть $p=\mathrm{Irr}(\alpha,\mathbb{Z})$. По предложению R_p реализуема в $P^2_{\mathbb{L}}$ как помеченная блок-схема т. и т.т., когда $\mathbb{L}\supset\mathbb{Q}(\beta)$, β -корень p, но $\mathbb{Q}(\beta)=\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{F}$. Покажем, что любые две реализации помеченной блок-схемы R_p комбинаторно эквивалентны и, следовательно, являются реализациями в обычном смысле некоторой блок-схемы S_p, которая и будет удовлетворять условиям леммы. Пусть C_1, C_2 - две реализации помеченной блок-схемы R_p в плоскостях $\Pi_1=P^2_{\mathbb{L}_1}$ $\Pi_2=P^2_{\mathbb{L}_2}$ $\quad L_1 L_2\supset\mathbb{Q}$; $\quad B_1 B_2$ - соответствующие $C_1\, C_2$ базисы Π_1 и Π_2, а N_1, N_2 - соответствующие натуральные тела Π_1, Π_2. Пусть α_1, α_2 - корни формального полинома p в натуральных телах N_1, N_2 определенные C_1, C_2 согласно свойству б) из доказательства предложения. Пусть $F_1\, F_2$ - вложения $\mathbb{Q}(f)=\mathbb{F}$ в N_1, N_2 порожденные α_1 и

α_2 . P_1 , P_2 – порожденные этими вложениями вложения $P^2_{\mathbb{F}}$ в Π_1 , Π_2 . По построению все точки C_1 и C_2 лежат: C_1 в P_1 , а C_2 – в P_2 . В силу неприводимости P существует изоморфизм $\sigma : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ переводящий α_1 в α_2 . Тройка B_1, B_2, σ определяет полулинейное отображение $\Lambda : P_1 \longrightarrow P_2$, являющееся коллинеацией [4] и переводяшее B_1 в B_2 , прямую α_1 в прямую α_2 и, следовательно (по свойству в) из доказательства предложения) переводяшее C_1 в C_2 , как конфигурации в P_1 , P_2 . Легко проверить, что соответствие, порождаемое Λ между точками C_1 и C_2 продолжается до изоморфизма блок-схем точек и прямых C_1 и C_2 как конфигураций в Π_1 и Π_2 .

2°. ЛЕММА 2. Для всякого конечного расширения $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ /$\mathbb{F}$ –упорядоченное поле) существует блок-схема $U_{\mathbb{F}}$ такая, что $U_{\mathbb{F}}$ C -реализуема над $\mathbb{L}$ т. и т.т., когда $\mathbb{L} \supset \mathbb{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. g-реализацией блок-схемы G будем называть диаграмму Гейла в пространстве $\mathbb{K}^3$ /$\mathbb{K}$ – упорядоченное поле) такую, что блок-схема, образованная точками, симплексами, содержашими $\mathbb{O}$ в относительной внутренности, и инциденциями между ними, изоморфна G . Пусть a – ℓ – реализация блок-схемы S в $P^2_{\mathbb{K}}$. Будем рассматривать $P^2_{\mathbb{K}}$, как проективное пространство прямых инцидентных нулю в $\mathbb{K}^3$. Отметим на прямых $\mathbb{K}^3$, соответствуюших вершинам a пары антиподальных точек $\mathbb{K}^3$. Полученный набор точек a^g в $\mathbb{K}^3$ будем рассматривать как диаграмму Гейла. Пусть S^g – комбинаторный тип диаграмм Гейла, содержаший a^g . В случае, когда $S = S_{\mathbb{F}}$ ($S_{\mathbb{F}}$ из доказательства Леммы I), легко проверить, что ℓ – реализуемость $S_{\mathbb{F}}$ над $\mathbb{L}$ равносильна g-реализуемости $S^g_{\mathbb{F}}$ над $\mathbb{L}$. Далее стандартным переходом от диаграмм Гейла к выпуклым политопам получаем блок-схему $S^c_{\mathbb{F}}$, чья C-реализуемость над $\mathbb{L}$ равносильна ℓ-реализуемости $S_{\mathbb{F}}$ над $\mathbb{L}$. Теперь положим $U_{\mathbb{F}} = S^c_{\mathbb{F}}$. Так построенные $U_{\mathbb{F}}$ удовлетворяют условию доказываемой леммы.

ЛЕММА 3. Всякая блок-схема S , C-реализуемая над $\mathbb{R}$, C – реализуема над $\mathbb{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – блок-схема $S_0 = \overline{1:n}$ – множество ее элементов. Пусть $V = \{x_i\}_{i \in S_0}$ $x_i \in \mathbb{R}^d$ – набор точек $\mathbb{R}^d$ занумерованный S_0 . Пусть x_{ij} – j-я координата точки x_i . Условие того, что V является множеством вершин политопа, являюшегося C-реализацией S при изоморфизме $i \to x_i$, может быть, записана в терминах равенства нулю и условий на знак определителей, составленных из координат точек V . Это означает, что V есть множество вершин политопа, являюшегося C-реализацией S при изоморфизме $i \to x_i$ т. и т.т., когда матрица координат $\vee \{x_{ij}\}_{i\in S_0,\, j\in \overline{1:d}}$, как точка $\mathbb{R}^{dn}$ лежит в некотором полуалгебраическом многообразии $M(S)$. В таком многообразии, если оно не пусто, обязательно найдется точка с алгебраическими координатами.

ЛИТЕРАТУРА

I. Grünbaum B. Convex Polytopes. N.Y., 1967.

2. Аргунов Б.И. Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты. - Матем.сб., I950, т.26, с.425-456.

3. Скорняков Л.А. Проективные плоскости. УМН, I95I, т.УI, № 6, с.II3-I54.

4. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., I969.

П.В.Спорышев

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

0. Введение

Для изучения различных аналитических характеристик задач линейной алгебры, в частности, задач линейного программирования, можно использовать методы интегральной геометрии. Для этого необходимо параметризовать множество соответствующих задач (например, задач линейного программирования) и изучать геометрические свойства пространства задач. Такое пространство можно строить по-разному. А.М.Вершик предложил отождествить пространство задач с многообразием Грассмана ([2]). Соответствующее построение проводится в пункте I. Удобство использования многообразия Грассмана для построения пространства задач состоит в том, что на нем существует единственная инвариантная относительно естественного действия ортогональной группы нормированная мера (см. [3]), и можно говорить о вероятности того, что задача обладает определенным свойством, как о мере соответствующего множества задач. В наиболее простых случаях ответ можно получить не только для инвариантной меры, но и для более широкого класса мер. В этой работе будут вычислены вероятность того, что экстремум в задаче линейного программирования конечен, вероятность того, что экстремум в задаче линейного программирования бесконечен, и среднее число допустимых базисов. Результат основан на формуле Штейнера-Шлёфли [8] о числе частей, на которые гиперплоскости общего положения разбивают пространство. Она уже использовалась для изучения характеристик случайных конусов в работах [4,5] . Другие определения пространства задач линейного программирования можно найти в работах [6,7] .

I. Построение пространства задач

В дальнейшем символом $G(n,k)$ $(n \geqslant k \geqslant 0)$/ обозначается многообразие Грассмана k-мерных подпространств в R^n . Для каждого подпространства E размерность и ортогональное дополнение обозначаются соответственно $\dim E$ и $E^{\perp}$. Если $A = \{a_j^i\}$ – вещественная матрица размерности $n \times k$, то через a^i обозначается вектор $a^i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_n^i)$ в R^n , а через a_i обозначается вектор $a_i = (a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^k)$ в R^k . Множество целых чисел $\{k, k+1, \ldots, n\}$ обозначается $k : n$. Подмножество может быть пустое s из $1:n$ мы будем называть набором индексов из $1:n$ и обозначать через $|s|$ число элементов s, а через $\bar{s}$ набор $1:n \setminus s$. Запись задачи в виде: $sup\{f(x)|B(x)\}$ означает, что надо найти супремум функции f на векторах, для которых выполнены условия B. Такие вектора называются допустимыми. Определим на матрицах размерности $n \times k$ $(n \geqslant k)$ ранга k отображение Sub со значениями в $G(n,k)$. Оно сопоставляет каждой матрице $A = \{a_j^i\}$ подпространство в R^n, являющееся линейной оболочкой векторов $a^1, a^2, \dots, a^k$ *).

Пусть n, m, k – целые неотрицательные числа, причем $n \geqslant m$, $n \geqslant k$, $m+k \geqslant n$. Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$sup\{x_{n+1} \,|\, xA = \mathbb{0}\,;\ x_i \geqslant 0,\ i \in 1:m\,;\ x_{n+2} = 1\}\,, \qquad (I)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ – вектор в R^{n+2}, A – вещественная матрица размерности $(n+2) \times (k+1)$ ранга $k+1$.

Пусть $E = Sub(A)$. Тогда условие на допустимые вектора в задаче (I): $xA = \mathbb{0}$, эквивалентно тому, что x ортогонален всем векторам порождающим E, то есть $x \in E^{\perp}$. Используя это, получаем следующую задачу:

$$sup\{x_{n+1} \,|\, x \in E^{\perp};\ x_i \geqslant 0,\ i \in 1:m\,;\ x_{n+2} = 1\}. \qquad (2)$$

Заметим, что хотя каждому подпространству E из $G(n+2, k+1)$ соответствует целый класс матриц, вектор-столбцы которых порождают E, условия на допустимые вектора в задаче (I) для произвольной матрицы A, такой, что $Sub(A) = E$, и в задаче (2) эквивалентны. Поэтому при изучении характеристик задач линейного программирования, связанных со структурой множества допустимых векторов, естественно в качестве пространства задач взять многообразие $G(n+2, k+1)$, в каждой точке E которого рассматривается задача (2). Связь между таким определением пространства задач и матричным определением обсуждается в пункте 5.

2. Формулировка теоремы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – n-мерное линейное пространство, $b = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – базис в L, E – k-мерное подпространство $(n \geqslant k \geqslant 0)$. Мы будем говорить, что E – подпространство в общем положении в L относительно базиса b, если для любого набора индексов s из $1:n$ такого, что $|s| = k$,

---

*) Другое обозначение – $Span\,A$.

$E\cap\{x \mid x_i=0,\ i\in s\}=\mathbf{0}$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты вектора x в базисе b .

Фиксируем в пространстве R^n стандартный базис $e=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, где e_i обозначает вектор, у которого i -я координата равна I, а остальные равны нулю. Мы будем говорить, что E – подпространство в общем положении в R^n или просто подпространство в общем положении, когда ясно о каком R^n идет речь, если E – подпространство в общем положении в R^n относительно базиса e . Свойства подпространств в общем положении будут рассматриваться в пункте 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n,k)$ задана мера μ . Мы будем говорить, что μ инвариантна относительно замен знаков координат, если для любого преобразования многообразия φ_ε , соответствующего замене координат векторов в R^n с $\{x_i\}$ на $\{\varepsilon_i x_i\}$, где $\varepsilon_i=\pm 1$, и любого измеримого множества C $\mu(C)=\mu(\varphi_\varepsilon(C))$.

Пусть n, m, k – целые неотрицательные числа, причем $n\geqslant m$, $n\geqslant k$, $m+k\geqslant n$. В каждой точке E многообразия $G(n+2,k+1)$ рассматривается задача (2). Обозначим val функцию на $G(n+2, k+1)$ со значениями в расширенной вещественной прямой равную в каждой точке супремуму задачи (2), рассматриваемой в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть s – набор индексов из $1:(n+1)$, причем $(m+1):(n+1)\subset s$ и $|s|=k+1$, E – $(k+1)$ -мерное подпространство в R^{n+2} . Набор s мы будем называть допустимым базисом задачи (2), рассматриваемой в E , если выполнены следующие условия:

$$E^{\perp}\cap\{x \mid x_i=0,\ i\in\bar{s}\cup\{n+2\}\}=\mathbf{0}, \tag{3}$$

$$E^{\perp}\cap\{x \mid x_i=0,\ i\in\bar{s};\ x_i\geqslant 0,\ i\in s\cap 1:m;\ x_{n+2}=1\}\neq\emptyset . \tag{4}$$

Естественность этого определения будет обсуждаться в пункте 4.

Обозначим bas функцию на $G(n+2,k+1)$, равную в каждой точке числу допустимых базисов задачи (2), отвечающей этой точке.

ТЕОРЕМА I. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n+2, k+1)$ задана вероятностная мера P такая, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и инвариантная относительно замен знаков координат. Тогда

$$P\{val>-\infty\}=2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{m}{i},$$

$$P\{\mathrm{val} = +\infty\} = 2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty < \mathrm{val} < +\infty\} = 2^{-m}\binom{m}{n-k},$$

$$M_p\, \mathrm{bas} = 2^{n-k-m}\binom{m}{k+m-n}.^{*)}$$

3. Свойства подпространств в общем положении

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько свойств подпространств в общем положении, но перед тем, как их сформулировать, удобно ввести некоторые обозначения.

Пусть s и t – два дизъюнктных набора индексов из $1:n$. Через $\varepsilon(s)$ обозначается множество чисел $\varepsilon(s)=\{\varepsilon_i \mid \varepsilon_i = \pm 1, i \in s\}$, которое в дальнейшем мы будем называть набором знаков. Через $R^n_+(s,t)$, $R^n_+(s,\varepsilon(s),t)$, $R^n(t)$ обозначаются конуса в R^n $R^n_+(s,t) = \{x \mid x_i > 0,\ i\in s;\ x_i=0,\ i \in t\}$, $R^n_-(s,\varepsilon(s),t) = \{x \mid \varepsilon_i x_i > 0, i\in s;\ x_i = 0,\ i\in t\}$ и подпространство в R^n $R^n(t) = \{x \mid x_i = 0,\ i \in t\}$. В каждом подпространстве $R^n(t)$ фиксирован базис, состоящий из векторов стандартного базиса e, принадлежащих этому подпространству. Мы будем говорить о подпространствах в общем положении в $R^n(t)$, имея в виду этот базис. χ– функция множества такая, что $\chi(C) = 0$, если C пусто, и $\chi(C) = 1$ в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – k-мерное линейное пространство $(k \geq 1)$. Семейство гиперплоскостей $E_1, E_2, \ldots, E_n$ в E называется семейством гиперплоскостей в общем положении, если пересечение каждых k из этих гиперплоскостей равно нулю.

Теперь мы можем сформулировать основные свойства подпространств в общем положении.

СВОЙСТВО I. Пусть E – подпространство в R^n. Тогда следующие утверждения равносильны:

1. E – k-мерное подпространство в общем положении в R^n;
2. $E^{\perp}$–$(n-k)$-мерное подпространство в общем положении в R^n,
3. для любого набора индексов s из $1:n$ такого, что $|s| = m$ и $k \geq m \geq 0$, подпространство $E \cap R^n(s)$ является $(k-m)$-мерным подпространством в общем положении в $R^n(s)$, и если $k-m \geq 1$, то семейство подпространств $E \cap R^n(s) \cap R^n(\{i\})$ при $i \in \bar{s}$ является семейством гиперплоскостей в общем положении в $E \cap R^n(s)$.

---

*)Знак M_p – математическое ожидание по мере p .

4. $\dim E = k$ и для любых двух дизъюнктных наборо индексов s и t из $1:n$ таких, что $|s| \geq 1$, и любого набора знаков $\varepsilon(s)$ следующие утверждения равносильны:

а) $E \cap \{x \mid \varepsilon_i x_i \geq 0,\ i \in s;\ x_i = 0,\ i \in t\} \neq 0$,

б) $E \cap R^n_+(s, \varepsilon(s), t) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность I и 2. Пусть выполнено I, фиксируем произвольный набор индексов s из $1:k$, $|s| = k$. По определению общего положения $E \cap R^n(s) = 0$, поэтому

$$R^n = (E \cap R^n(s))^\perp = E^\perp + R^n(s)^\perp = E^\perp + R^n(\bar{s}).$$

Используя это равенство, имеем $\dim(E^\perp \cap R^n(\bar{s})) =$

$$= \dim E^\perp + \dim R^n(\bar{s}) - \dim(E^\perp + R^n(\bar{s})) = (n-k)+k-n = 0.$$

$\dim E^\perp = n-k$ и $\bar{s}$ – произвольный набор индексов из $1:n$ с числом элементов равным $n-k$, поэтому $E^\perp$ является $(n-k)$-мерным подпространством в общем положении в R^n. Используя равенство $(E^\perp)^\perp = E$, получаем обратное утверждение.

Эквивалентность I и 3. Из 3 следует I, достаточно взять в качестве s пустое множество. Наоборот, пусть выполнено I. Фиксируем произвольный набор индексов s из $1:n$, $|s| = m$, $k \geq m \geq 0$. Достаточно доказать, что $\dim(E \cap R^n(s)) = k - m$, остальная часть утверждения 3 является очевидным следствием определения общего положения

$$\dim(E \cap R^n(s)) = \dim E + \dim R^n(s) - \dim(E + R^n(s)) \geq k - m.$$

Пусть $L = E \cap R^n(s)$, если $\dim L > k - m$, то для любого набора индексов t из $1:n$ такого, что s и t дизъюнктны и $|t \cup s| = k$, имеем

$$0 = \dim(L \cap R^n(t)) = \dim L + \dim(R^n(t)) - \dim(L + R^n(t)) >$$

$$> (k-m) + (n-k+m) - \dim(L + R^n(t)).$$

Откуда получаем, что $\dim(L + R^n(t)) > n$, чего быть не может.

Следовательно, $\dim(E \cap R^n(s)) = k - m$.

Эквивалентность I и 4. Покажем, что из 3 следует 4. Пусть выполнено 3, фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$ таких, что $|s| \geq 1$, и набор знаков $\varepsilon(s)$. Очевидно, что из б) следует а). Докажем обратное. Доказательство проводим индукцией по размерности пространства R^n. Ясно, что для $n=1$ утверждение верно. Пусть для пространств размерности меньшей n утверждение верно, докажем его для размерности n. По условию существует вектор y такой, что $y \in E \cap \{x \mid \varepsilon_i x_i > 0,\ i \in s;\ x_i = 0,\ i \in t\}$ и $y \neq \mathbf{0}$. Если $\varepsilon_i y_i > 0$ при всех $i \in s$, то утверждение верно. В противном случае найдется индекс $j \in s$ такой, что $y \in E \cap R^n(t \cup \{j\})$.

$$\dim(E \cap R^n(t \cup \{j\})) = \dim(E \cap R^n(t)) - 1,$$

поэтому в $E \cap R^n(t)$ существует вектор z такой, что $\varepsilon_j z_j = 1$. Если $\varepsilon_i y_i > 0$ при всех $i \in s \setminus \{j\}$, то отрезок прямой, соединяющий y и z, пересекает конус $R^n_+(s, \varepsilon(s), t)$, и следовательно, $E \cap R^n_+(s, \varepsilon(s), t) \neq \emptyset$. Осталось показать, что можноподобрать вектор y так, чтобы это условие было бы выполнено. Если $|s| = 1$, то такой вектор уже есть, в противном случае возможность его нахождения следует из применения индукционного предположения к $(n-1)$-мерному пространству $R^n(\{j\})$ и подпространству в нем $E \cap R^n(\{j\})$.

Покажем, что из 4 следует I. Пусть выполнено 4, фиксируем произвольный набор индексов s из $1:n$, $|s| = k$. Если $E \cap R^n(s) \neq \mathbf{0}$, то рассмотрим систему векторов в E y, y^i при $i \in s$ таких, что $y \in E \cap R^n(s)$, $y^i \in E \cap R^n_+(\{i\}, s \setminus \{i\})$ при $i \in s$. По условию такие вектора существуют, но они линейнонезависимы, следовательно, $\dim E \geqslant k+1$. Получили противоречие с тем, что $\dim E = k$. Итак, $E \cap R^n(s) = \mathbf{0}$.

СВОЙСТВО 2. Пусть E - k-мерное подпространство в общем положении в $R^n (n \geqslant k \geqslant 1)$, фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$, причем $|s| = p$, $|t| = m$, $p \geqslant 1$, $m < k$ Тогда

$$\sum_{\varepsilon(s)} \chi(E \cap R^n_+(s, \varepsilon(s), t)) = 2 \sum_{i=0}^{k-m-1} \binom{p-1}{i},$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам знаков $\varepsilon(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При доказательстве этого свойства будет использоваться формула Штейнера-Шлефли о том, что семейство из n $(n \geqslant 1)$ гиперплоскостей в общем положении в k-мерном линейном пространстве $(k \geqslant 1)$ разбивает пространство на $2 \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$ открытых частей. Доказательство этой формулы легко получается индукцией по размерности пространства, кроме того оно есть в работах

[4,8] .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = E \cap R^n(t)$. По свойству I L есть $(k-m)$-мерное пространство и семейство подпространств $L \cap R^n(\{i\})$ при $i \in s$ является семейством гиперплоскостей в общем положении в L. Следовательно эти гиперплоскости разбивают L на $2\sum_{i=0}^{k-m-1}\binom{p-1}{i}$ открытых частей. Очевидно, что каждая из таких частей есть пересечение E с одним из конусов $R^n_+(s,\varepsilon(s),t)$, а с остальными конусами E не пересекается.

4. Доказательство теоремы

ЛЕММА I. Пусть на борелевских множествах многообразия $G(n,k)\ (n \geqslant k \geqslant 1)$ задана нормированная мера μ такая, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и инвариантная относительно замен знаков координат. Фиксируем два дизъюнктных набора индексов s и t из $1:n$, причем $|s| = p$, $|t| = m$, $p \geqslant 1$, $m < k$. Тогда для любого фиксированного набора знаков $\varepsilon^1(s)$

$$\int\limits_{G(n,k)} \chi(E\cap R^n_+(s,\varepsilon^1(s),t))\,d\mu = 2^{1-p}\sum_{i=0}^{k-m-1}\binom{p-1}{i} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что подынтегральная функция измерима, следовательно интегрирование возможно. Используя то, что на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, и свойство 2, имеем

$$\int\limits_{G(n,k)} \sum_{\varepsilon(s)} \chi(E\cap R^n_+(s,\varepsilon(s),t))\,d\mu = 2\sum_{i=0}^{k-m-1}\binom{p-1}{i}, \tag{5}$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам знаков $\varepsilon(s)$. Рассмотрим 2^p конусов $R^n_+(s,\varepsilon(s),t)$, все они получаются из $R^n_+(s,t)$ заменами знаков координат, а мера инвариантна относительно таких замен. Следовательно, меры подпространств, пересекающихся с этими конусами равны. Отсюда и равенства (5) получаем ответ.

ЛЕММА 2. Пусть $A = \{a^i_j\}$ - вещественная матрица размерности $n \times k$ ранга $k\ (n \geqslant k \geqslant 1)$, подпространство $E = \mathrm{Sub}(A)$, s - набор индексов из $1:n$, $|s| = k$. Тогда k векторов a_i при $i \in s$ линейно независимы в R^k, если и только если $E^{\perp} \cap R^n(\bar{s}) = \mathbf{0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение является очевидным следствием того, что однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i\in s} x_i a_i^j = 0 \qquad \text{при } j\in 1:k$$

имеет лишь нулевое решение в том и только том случае, когда

$$E^{\perp}\cap R^{n}(\bar{s}) = \mathbb{0} .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Фиксируем произвольное $(k+1)$ -мерное подпространство E в R^{n+2} и вещественную матрицу A размерности $(n+2)\times(k+1)$ ранга $k+1$ такую, что $Sub(A)=E$. Рассмотрим задачи (I) и (2) и покажем, что определение допустимого базиса в задаче (2) естественно в том смысле, что каждый допустимый базис задачи (I) является допустимым базисом в задаче (2) и наоборот. Действительно, понятие допустимого базиса в задаче (I) хорошо известно. Набор индексов s из $1:(n+1)$ такой, что $(m+1):(n+1)\subset s$ и $|s| = k+1$ называется допустимым базисом в задаче (I), если вектора a_i при $i\in s$ линейно независимы в R^k и соответствующее базисное решение допустимо. Первое из этих условий по лемме 2 эквивалентно (3), а второе совпадает с (4). Если E - подпространство в общем положении, то по свойству I условие (3) выполнено всегда, а условие (4) эквивалентно следующему:

$$E^{\perp}\cap R_{+}^{n+2}((s\cap 1:m)\cup\{n+2\},\bar{s}) \neq \emptyset . \tag{6}$$

Значение функции val в E больше $-\infty$ в том и только том случае, когда в задаче (2) существует допустимый вектор, то есть, если $E^{\perp}\cap\{x \mid x_i\geq 0,\ i\in 1:m;\ x_{n+2}=1\} \neq \emptyset$, что для подпространств в общем положении по свойству I эквивалентно условию:

$$E^{\perp}\cap R_{+}^{n+2}(1:m\cup\{n+2\},\ \emptyset) \neq \emptyset . \tag{7}$$

Известно (см. [I]), что супремум в задаче (I) равен $+\infty$ в том и только том случае, когда существует вектор y такой, что

$$yA=\mathbb{0},\ y_i\geq 0 \quad \text{при } i\in 1:m,\ y_{n+2}=0,\ y_{n+1}>0 \ , \text{ и}$$

в задаче есть допустимый вектор. Переформулируем эти условия для задачи (2). Существование вектора y с нужными свойствами эквивалентно условию: $E^{\perp}\cap\{x \mid x_i\geq 0,\ i\in 1:m;\ x_{n+2}=0;\ x_{n+1}>0\}\neq\emptyset$.

Если E - подпространство в общем положении, то это условие по свойству I равносильно следующему:

$$E^{\perp}\cap R_{+}^{n+2}(1:m\cup\{n+1\},\{n+2\}) = \emptyset . \tag{8}$$

Опять по свойству I для подпространств в общем положении из выполнения условия (8) следует выполнение условия (7), и, значит, $\mathrm{val}(E) = +\infty$ тогда и только тогда, когда выполнено (8). Теперь мы можем перейти к вычислению интересующих нас вероятностей. Заметим, что переход к ортогональным дополнениям подпространств стандартным образом (мера множества равна мере его прообраза) переносит меру с борелевских множеств многообразия $G(n+2, k+1)$ на борелевские множества $G(n+2, n-k+1)$, полученная мера μ инвариантна относительно замен знаков координат, и на множестве полной меры подпространство находится в общем положении. Вычислим математическое ожидание bas. Поскольку на множестве полной меры подпространство находится в общем положении, можно использовать условие (6) и лемму I. Имеем

$$M_P \mathrm{bas} = \int\limits_{G(n+2,k+1)} \mathrm{bas}(E)\, dP = \int\limits_{G(n+2,k+1)} \sum_{s} \chi(E^{\perp} \cap R_{+}^{n+2}((s \cap 1:m) \cup$$

$$\{n+2\}, \bar{s}))\, dP = \int\limits_{G(n+2,n-k+1)} \sum_{s} \chi(E \cap R_{+}^{n+2}((s \cap 1:m) \cup \{n+2\}, \bar{s}))\, d\mu =$$

$$= 2^{n-k-m} \binom{m}{k+m-n},$$

где суммирование ведется по всевозможным различным наборам индексов s из $1:(n+1)$ таким, что $(m+1):(n+1) \subset s$ и $|s| = k+1$. Аналогично, используя условия (7),(8) и лемму I, получаем

$$P\{\mathrm{val} > -\infty\} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{m}{i},$$

$$P\{\mathrm{val} = +\infty\} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty < \mathrm{val} < +\infty\} = P\{\mathrm{val} > -\infty\} - P\{\mathrm{val} = +\infty\} = 2^{-m} \binom{m}{n-k}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы видно, что от меры достаточно требовать инвариантности относительно замен знаков координат только по координатам с номерами из набора $1:m \cup \{n+1\} \cup \{n+2\}$.

5. Основной пример

Мы будем рассматривать вещественные матрицы размерности $(k \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$ вида $U = \{u_i^j \mid i \in 0:(n-1);\ j \in 0:(k-1);\ u_0^0 = 0\}$.

Обозначим $M(n, k)$ пространство таких матриц с естественной топологией.

Фиксируем целые неотрицательные числа n, m, k, p такие, что $n \geqslant m \geqslant p$, $n \geqslant k \geqslant p$, $m+k \geqslant n$, и рассмотрим задачу линейного программирования общего вида:

$$\text{найти супремум функции } \sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^0 \qquad (9а)$$

на векторах из R^{n-p}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j \leqslant u_0^j \qquad \text{при } j \in 1:p, \qquad (9б)$$

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j = u_0^j \qquad \text{при } j \in (p+1):k, \qquad (9в)$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad \text{при } i \in 1:(m-p), \qquad (9г)$$

где $U=\{u_i^j\}$ – матрица из $M(n-p+1, k+1)$. Приведем эту задачу к виду (I). Для этого введем новые переменные $x_{n-p+1}, \dots, x_{n+2}$ и рассмотрим задачу эквивалентную исходной: найти супремум функции x_{n+1} на векторах из R^{n+2}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^0 - x_{n+1} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j + x_{n-j+1} - u_0^j x_{n+2} = 0$$

при $j \in 1:p$,

$$\sum_{i=1}^{n-p} x_i u_i^j - u_0^j x_{n+2} = 0 \qquad \text{при } j \in (p+1):k,$$

$$x_i \geqslant 0 \qquad \text{при } i \in 1:(m-p) \cup (n-p+1):n, \quad x_{n+2} = 1.$$

Эта задача уже имеет вид (I) с точностью до нумерации координат.

Перенумеруем координаты так, чтобы координаты с номерами $m-p+1, \dots, n-p$ имели бы соответственно номера $m+1, \dots, n$, а координаты с номерами $n-p+1, \dots, n$ соответственно номера $m-p+1, \dots, m$, нумерацию остальных координат оставим без изменения. Матрицу полученной задачи обозначим $M_s(U)$. Итак, мы имеем задачу эквивалентную исходной:

$$\sup\{x_{n+1} \mid x \cdot M_s(U) = \mathbb{0};\ x_i \geqslant 0,\ i \in 1:m;\ x_{n+2} = 1\}. \qquad (10)$$

Существуют различные определения допустимых базисов в задаче (9). Рассмотрим одно из них (см. [I]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимой базисной парой в задаче (9) называются два набора индексов s из $1:(n-p)$ и t из $1:k$ такие, что выполнены следующие условия:

$$\bar{s}\subset 1:(m-p),\ \bar{t}\subset 1:p\ ,\ |s|=|t|,$$

система уравнений

$$\sum_{i\in s} x_i u_i^j = u_0^j \qquad \text{при } j\in t,$$

$x_i=0$ при $i\in\bar{s}$ имеет единственное решение y , и y является допустимым вектором.

Легко видеть, что допустимым парам в задаче (9) взаимнооднозначно соответствуют допустимые базисы в задаче (I0). Соответствие задается сопоставлением паре s, t набора индексов

$$\{m-i+1 \mid i\in\bar{t}\}\cup(s\cap 1:(m-p))\cup(m+1):n\cup\{n+1\}\,.$$

Пусть в каждой точке u пространства $M(n-p+1,\,k+1)$ рассматривается задача (9). Обозначим $value$ функцию на $M(n-p+1,\,k+1)$ со значениями в расширенной вещественной прямой, равную в каждой точке супремуму задачи, рассматриваемой в ней.

Обозначим $basis$ функцию на $M(n-p+1,\,k+1)$, равную в каждой точке числу допустимых базисных пар задачи, рассматриваемой в ней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на борелевских множествах пространства $M(n+1,k+1)$ $(n\geqslant 0,\ k\geqslant 0)$ задана мера μ . Мы будем говорить, что μ инвариантна относительно замен знаков координат по столбцам, если для любого преобразования пространства φ_ε , соответствующего замене столбцов матриц с $\{u^i\}$ на $\{\varepsilon_i u^i\}$, где $\varepsilon_i=\pm 1$, $u^i=(u_0^i, u_1^i,\dots, u_n^i)$ при $i=0,1,\dots,k$, и любого измеримого множества C $\mu(C)=\mu(\varphi_\varepsilon(C))$. Аналогично определяется инвариантность относительно замен знаков координат по строкам.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть на борелевских множествах пространства $M(n-p+1,\,k+1)$ задана вероятностная мера P , инвариантная относительно замен знаков координат по столбцам и строкам, и мера множества матриц u таких, что каждые $k+1$ строк матрицы $M_s(u)$ линейно независимы, равна единице. Тогда

$$P\{value>-\infty\} = 2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{m}{i},$$

$$P\{value=+\infty\} = 2^{-m}\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{m}{i},$$

$$P\{-\infty < \mathrm{value} < +\infty\} = 2^{-m}\binom{m}{n-k},$$

$$M_p\, \mathrm{basis} = 2^{n-k-m}\binom{m}{k+m-n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M^0 - множество матриц u в $M(n-p+1, k+1)$ таких, что каждые $k+1$ строк матрицы $M_s(u)$ линейно независимы. M^0 открыто и имеет полную меру. Поэтому достаточно рассматривать задачи на множестве M^0. Для любой матрицы $u \in M^0$ подпространство в R^{n+2} $E = Sub(M_s(u))$ по лемме 2 и свойству I является подпространством в общем положении. Число допустимых базисных пар в задаче (9) совпадает с числом допустимых базисов в задаче (2), и значения супремума у этих задач равны. Перенесем стандартным образом меру с борелевских множеств M^0 на борелевские множества $G(n+2, k+1)$. Легко видеть, что инвариантность меры на M^0 относительно замен знаков координат по столбцам и строкам гарантирует инвариантность полученной меры на $G(n+2, k+1)$ относительно замен знаков координат в R^{n+2}. Применяя теорему, получаем ответ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Достаточно требовать инвариантности меры на $M(n-p+1, k+1)$ относительно замен знаков координат только по строкам с номерами из набора $0:(m-p)$ и по столбцам с номерами из набора $0:p$. Так, что для задач с $p=0$, $m=n$ достаточно только инвариантности относительно замен знаков координат по строкам, а для задач с $p=k$, $m=p$ по столбцам.

Автор приносит глубокую благодарность А.М.Вершику за постановку задачи, постоянный интерес и помощь в работе.

Литература

1. Булавский В.А., Звягина Р.А., Яковлева М.А. Численные методы линейного программирования, М., 1977.
2. Вершик А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования. - УМН, 1970, т.XXУ, № 5, с.117-124.
3. Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций., М., 1975.
4. Cover T., Efron B. Geometrical probability and random points in a hypersphere. - Ann.Math.Statist.,1967, v.38, p.213-220.
5. Wendel J.G. A problem in geometric probability. - Math. Scand., 1962, v.11, p.109-111.

6. Liebling Thomas M. On the number of iterations of the simplex method. Oper.Res.-Verfahren, 1973, v.17, p.248-264.
7. Borgwardt Karl-Heinz. Zum Rechenaufwand von Simplexverfahren. - Oper.Res-Verfahren, 1978, v.3, p.83-97.
8. Schläfli L. Gesammelte Mathematische Abhaudlugen I.- Verlag Birkhauser, Basel, 1950.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

РЕФЕРАТЫ

УДК 5I9.46

Метагональная и метаплектическая бесконечномерные группы.I. Общие понятия и метагональная группа. Вершик А.М. – В кн.: Дифференциальная геометрия группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин. ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.3–35.

Изучены центральные S^1 –расширения групп ортогональных и симплектических операторов в гильбертовом пространстве с гильберт-шмидтовой антилинейной частью. Подробно исследован соответствующий 2-коцикл на их алгебрах Ли. Описан предельный переход от соответствующих конечномерных групп и показано, что оба расширения нетривиальны даже в топологическом смысле. Среди приложений – единая конструкция основных модулей для алгебр Каца – Муди. Библ. – 34 назв.

УДК 5I9.46

Полуконечные характеры группы $\mathcal{U}(\infty)$. Гительсон Г.Я. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн. семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.36–45.

Получена общая формула для полуконечных характеров группы $\mathcal{U}(\infty)$. Приведены критерии конечности и принадлежности типу I. Библ. – I3 назв.

УДК 5I7.98

Условию положительно определенные функции на локально компактных группах и формула Леви – Хинчина. Карпушев С.И. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. У. (Зап.научн.семин. ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.46–57.

Доказана формула типа Леви – Хинчина для условно положительно определенных функций на компактно порожденных группах. Доказательство использует теорию Шоке. Рассмотрен ряд примеров и приложений к I-когомологиям групп со значениями в унитарных представлениях. Библ. – I6 назв.

УДК 5I9.4

Уравнение Ландау – Лифшица. Процедура "одевания". Элементарные возбуждения. Бобенко А.И. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.58-66.

Процедура "одевания" (в смысле В.Е.Захарова - А.Б.Шабата) применяется для построения солитонов и бризеров для уравнения Ландау - Лифшица. Библ. - II назв.

УДК 5I9.4
Гамильтонова структура полиномиальных пучков. Кулиш П.П., Рейман А.Г. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.67-76.

На основе общей теоретико-групповой схемы исследована гамильтонова структура нелинейных эволюционных уравнений, для которых потенциалы системы Захарова - Шабата полиномиально зависят от спектрального параметра. Вычислены орбиты соответствующего коприсоединенного действия. Выведены формулы для производящих функций плотностей и токов законов сохранения и $\mathcal{M}$ - операторов. Библ. - 9 назв.

УДК 5I9.4
Классические r -матрицы и метод орбит. Семенов-Тян-Шанский М.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У.(Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.77-9I.

Обсуждается геометрический смысл классических r -матриц Янга-Бакстера. Библ. - I9 назв.

УДК 5I9.4
Интегрируемые системы и супералгебры Ли. Лейтес Д.А., Семенов-Тян-Шанский М.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли, и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.92-97.

Функтор точек позволяет связать с супералгеброй Ли класс обычных алгебр Ли, образованных ее точками над алгебрами Грассмана. Мы распространяем на эти алгебры Ли геометрическую схему Адлера - Костанта построения нелинейных лаксовых уравнений. Библ. - II назв.

УДК 5I9.4
Явные решения для суперизованных цепочек Тоды. Кириллова Р.Ю. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.98-III.

Построены явные решения для обобщенных цепочек Тоды, связанных с системами простых корней классических супералгебр Ли. Исследована полнота потоков и асимптотическое поведение систем. Библ. - 8 назв.

УДК 5I7.43 + 530.I45
Точно-решаемые квантомеханические системы на цепочке связанные с классическими алгебрами Ли. Решетихин Н.Ю. - В кн.: Дифференциальная геометрия группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.II2-I25.

В работе найдены собственные значения производящей функции высших гамильтонианов для специального класса точно-решаемых квантовых систем. Эти системы описывают цепочку взаимодействующих узлов с взаимодействием между ближайшими соседями. Гамильтониан такой системы инвариантен относительно действия классической группы Ли. В заключении обсуждаются некоторые свойства рассмотренных систем. Библ. - I6 назв.

УДК 5I7.98
K -функтор (группа Гротендика) бесконечной симметрической группы. Вершик А.М., Керов С.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I26-I5I.

Описана группа Гротендика $K_0(\mathfrak{S}_\infty)$ группы финитных подстановок счетного множества. Описаны все полуконечные характеры $\mathfrak{S}_\infty$ и с их помощью охарактеризован конус представлений $K_+^0(\mathfrak{S}_\infty)$. Библ. - I5 назв.

УДК 5I9.2I
Эксперименты по вычислению размерности типичного представления симметрической группы. Вершик А.М., Грибов А.Б., Керов С.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I52-I54.

Приведены численные данные в пользу гипотезы об асимптотической равнораспределенности вероятностей типичных представлений симметрической группы и оценена энтропия предельной меры Планшереля. Библ. - 6 назв.

УДК 5I9.4
Дискретные субэкспоненциальные группы. Березный А.Е. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн. семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I55-I66.

Субэкспоненциальные группы определяются как группы с субэкспоненциальным ростом коэффициентов Голода - Шафаревича (гоша). В работе изучен класс примеров таких групп; получена точная характеристика роста коэффициентов гоша для разрешимых групп. Библ. - I4 назв.

УДК 5I7.39 : 5I9.4
Примеры некоммутативных дискретных групп с нетривиальной границей - выход. Кайманович В.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I67-I84.

Предложен ряд новых контрпримеров, опровергающих некоторые предположения о взаимоотношениях границы-выход (границы Пуассона) случайного блуждания на группе, аменабельности и роста группы. Строятся случайные блуждания с нетривиальной границей-выход на аффинной группе двоично-рациональной прямой и на бесконечной симметрической группе. Библ. - I8 назв.

УДК 5I9.4
Равномерные алгебры операторных полей. Арзуманян В.А., Григорян С.А.- В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механики.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I85-I89.

Изучены равномерные подалгебры алгебры отображений компакта в C^* -алгебру. Введено понятие спектра и другие понятия, обобщающие известные объекты для равномерных алгебр скалярных функций. Исследован случай инвариантных равномерных алгебр на компактных абелевых группах. Библ. - 9 назв.

УДК 5I9.4I

О W-графах представлений симметрических групп. Керов С.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.I90-202.

W-графы тесно связаны с полиномами Каждана - Люстига, возникшими в связи с задачами теории представлений полупростых групп. Для симметрической группы S_n известно описание полиномов Каждана - Люстига и связанных с ними W-графов для грассмановых многообразий. Цель статьи - комбинаторное описание более общих графов. В частности, найдены графы крюков и все неприводимые W-графы для n=6. Библ. - I5 назв.

УДК 5I3.34

О реализуемости над полями комбинаторных схем выпуклых многогранников. Мнев Н.Е. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.203-207.

Показано, что минимальное подполе поля вещественных чисел, над которым реализуются все вещественные комбинаторные типы выпуклых многогранников, есть поле всех вещественных алгебраических чисел. Библ. - 4 назв.

УДК 5I9.852

Применение интегральной геометрии к теории линейных неравенств. Спорышев П.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.У. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I23). Л., "Наука", I983, с.208-220.

А.М.Вершик предложил отождествить пространство задач линейного программирования с соответствующим многообразием Грассмана. На этом многообразии определяется вероятностная мера и вычисляются меры множеств задач с конечными и бесконечными экстремумами и среднее число допустимых базисов в задачах. Библ. - 8 назв.

SUMMARIES

Infinite dimensional metagonal and metaplictic groups I. The general notions and the metagonal group. Verskik A.M..- In: Differential geometry Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin. LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.3-35.

The groups in question are central extensions by S^1 of groups of orthogonal and symplectic operators with Hilbert-Schmidt antilinear part acting in a Hilbert space. A thorough study of the corresponding 2-cocycles on their Lie algebras is presented. A limiting procedure relating the infinite dimensional groups with the corresponding finite dimensional ones is exhibited. Central extensions in the former case are shown to be nontrivial even on the topological level. Possible applications include unified models of the basic moduli for the Kac-Moody Lie algebras. Bibl. - 34.

Semifinite characters of $U(\infty)$. Ghitelson G.Ja. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin. LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.36-45.

A general formula is obtained for semifinite characters of $U(\infty)$ Criterian are given for a character to be finite or of type I. Bibl. - 13.

Conditionally positively definite functions on locally compact groups and the Levy-Khinchin formula. Korpushev S.I. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics V. (Zap.nauch.semin LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983. p.46-57.

The Levy-Khinchin formula for conditionally positively definite functions on compactly generated groups is proved. The proof is based on the Choquet's theory. Some examples and applications to 1-cohomology of unitary representations of locally compact groups are considered. Bibl. - 16.

Landau-Lofshitz equation. Dressing up of the solutions and the elementary excitations. Bobenko A.I. - In: Differential geometry Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.58-66.

The Zakharov-Shabat "dressing up" is used to construct the soliton and breather solutions for the Landau-Lifshitz equations. Bibl.- 11.

Hamiltonian structure of polynomial bundles. P.P.Kulish, A.G.Reyman. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.67-76.

A general group-theoretic method is used to define the Hamiltonian structure of non-linear evolution equations whose Zakharov-Shabat potentials depend polynomially on the spectral parameter. Associated coadjoint orbits are determined. Generating functions for the M -operators and the densities and currents of the conservation laws are derived. Bibl. - 6.

Classical r -matrices and the orbits method, Semenov-Tian-Shansky M.A. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.77-91.

The geometrical meaning of classical Yang-Baxter matrices is considered. Bibl.- 19.

Integrable systems and Lie superalgebras. Leites D.A., Semenov-Tian-Shansky M.A. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.92-97.

Associated to each Lie superalgebra there is a class of ordinary Lie algebras consisting of its points over Grassmann algebras. We extend to these Lie algebras the geometrical scheme, due to M.Adler and B.Kostant, of constructing nonlinear Lax equations Bibl. - 11.

Explicit solutions for generalized Toda lattices related to classical Lie superalgebras. Kirillova R.Yu. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.98-111.

Explicit solutions for generalized Toda lattices associated with simple roots systems of classical Lie superalgebras are constructed. The completeness of flows and the asymptotic behaviour of systems in question are also considered. Bibl. - 8.

Exactly solvable quantum-mechanical systems on the lattices associated with the classical Lie algebras. Reshetikhin N.Yu. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap. nauch.semin.LOMI, v.123), L., "Nauka", 1983, p.112-125.

The eigenvalues of transfermatrices are calculated for a class of quantum systems on the lattice with nearest-neighbour interaction. The Hamiltonians of these systems are invariant under the action of a classical Lie group. Bibl. - 16.

The K-functor (Grothndieck group) of the infinite symmetric group. Vershik A,M., Kerov S.V. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.126-151.

The Grothendieck group $K^0(\mathfrak{S}_\infty)$ of the group $\mathfrak{S}_\infty$ of finite permutations of a countable set is described. We also discribe all semifinite characters of this group and use them to determine the cone $K^0_+(\mathfrak{S}_\infty)$ of true representations. Bibl. - 15.

Numerical data on the typical dimensions of irreducible sepresentations of symmetric groups. Verskik A.M., Gribov A.B., Kerov S.V. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.152-154.

We give numerical evidence in favour of hypothesis on the asympotic probabilities equidistribution of the typical representations of symmetric groups. An estimate for the entropy of the limiting Plancherel measure is presented. Bibl. - 6.

Discrete subexponential groups. Beresny A.E. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.155-166.

Discrete subexponential groups are defined as the groups with a subexponential growth of the Golod-Shafarevich coefficients (gosha). A class of these is studied in the present paper. An exact formula for the growth of the gosha coefficients for solvable groups is given. Bibl. - 14.

Examples of non-abelian discrete groups with non-trivial exit boundary. Kajmanovich V.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.167-184.

New types of counterexamples are given disproving some old conjectures on relations between exit (or, Poisson) boundary of a random walk on a group and its amenability and growth. Random walk with non-trivial exit boundaries on the affine group of the diadic-rational line and on the infinite symmetric group are constructed. Bibl. - 18.

Uniform algebras of operator fields Arzumanian V.A., Grigorian S.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap.nauch.semin. LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.185-189.

Uniform subalgebras of the C^*-algebra of continuous maps from a compact to a C^*-algebra are investigated. The notion of relative spectrum and other notions are introduced for these algebra generalizing the known ones for the uniform algebras of scalar functions. The case of invariant uniform algebras on a compact abelian group is investigated. Bibl. - 9.

On W-graphs of the symmetric group representations. Kerov S.V. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. V. (Zap. nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.190-202.

W -graphes are closely related to the Kazhdan-Lusztig polynomials now extensively used in representation theory of semisimple groups. For the symmetric group $W=\mathfrak{S}_n$ a description of Kazhdan-Lusztig polynomials for the grassmanians and of the related $\mathfrak{S}_n$-graphs is known. The aim of this paper is to describe more general $\mathfrak{S}_n$-graphs, e.g. the graphs of hook diagrams and all irreducible $\mathfrak{S}_n$-graphs for $n \leqslant 6$. Bibl. - 15.

On realizability of combinatorial types of convex polytopes over number fields. Mneuv N.E. - In: Differential geometry, Lie groups and mechains. V. (Zap.nauch.semin. LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.203-207.

It is proved that the minimal subfield of the reals over which all real combinatorial types of convex polytopes may be realized is the field of all real algebrais numbers. Bibl. - 4.

An application of integral geometry to linear inequality theory. Sporyshev P.V. - In: Differential geometry, Lie groups and machanics. V. (Zap.nauch.semin.LOMI, v.123). L., "Nauka", 1983, p.208-220.

A.M.Versik suggested to identify Linear Programming Problems space with the corresponding Grassmann manifold. A probablility measure is defined on the manifold. The average number of permissible bases and the measures of the problems with finite and infinite extrema are calculated. Bibl. - 8.