АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 133

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. VI

Сборник работ под редакцией
А. Б. ВЕНКОВА, Л. А. ТАХТАДЖЯНА

ПОСВЯЩАЕТСЯ
Академику Людвигу Дмитриевичу Фаддееву
к его 50-летию

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1984

Д $\frac{1702050000-516}{042(02)-84}$ 119-84-I

Содержание

CONTENTS

И.Я.Арефьева, И.В.Волович

СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ И ВЫСШИЕ ТОКИ В СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

I. Введение

Фундаментальная квантовая теория поля по самому своему смыслу должна быть уникальной, т.е. обладать особыми свойствами. Хотелось бы думать, что среди этих свойств будут максимальная геометричность, отсутствие расходимостей и полная интегрируемость.

Однако до недавнего времени не было известно моделей в четырехмерном пространстве-времени Минковского M^4, обладающих хотя бы одним из перечисленных свойств. Действительно, большинство моделей укладываются в схему [I], когда калибровочные поля задаются как связность некоторого расслоения над M^4, а поля материи - как сечения этого расслоения. Таким образом, калибровочные поля и поля материи вводятся с самого начала неравноправно и не сводятся к некоторому единому геометрическому объекту. В общей теории относительности гравитационное поле и поля материи также вводятся независимо и не сводятся к одному геометрическому объекту, поскольку правая часть уравнений Эйнштейна - Гильберта, $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ ($G_{\mu\nu}$ - тензор гравитационного поля, $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса материи) не имеет геометрического происхождения. Поэтому современную теорию гравитации нельзя считать геометрической теорией. Это сознавал Эйнштейн и рассматривал как серьезный недостаток теории (см. [2]). Это же замечание относится и к современным теориям типа Калузы - Клейна (см. [3]). Непременным атрибутом моделей квантовой теории поля в четырехмерном пространстве-времени всегда являлись ультрафиолетовые расходимости [4]. Полная интегрируемость была доказана только для двумерных моделей [5, 6].

Однако недавно было показано, что в так называемой $N=4$ суперсимметричной калибровочной теории отсутствуют ультрафиолетовые расходимости [7,8]. Кроме того суперсимметричные калибровочные теории как нам представляется, удовлетворяют и принципу максимальной геометричности - все поля, в том числе и поля материи, выражаются через единый геометрический объект - суперсвязность. В этом смысле в качестве максимально геометрической модели, включающей гравитацию, естественно рассматривать супергравитацию.

В [9] была предложена система линейных уравнений с параметром и с коэффициентами, зависящими от суперсвязности, условия разрешимости которой приводят к уравнениям движения $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории. Эта система (см.формулы (3.I) ниже) состоит из семи уравнений, причем операторы образуют некоммутативную алгебру. Напомним, что исходным пунктом МОЗР решения нелинейных уравнений является возможность записать нелинейное уравнение как условие разрешимости пары коммутирующих линейных уравнений. Представимость в виде такой пары стала как бы синонимом интегрируемости системы. Тем не менее, приемы, разработанные в МОЗР, переносятся и на более общие системы. Это позволяло надеяться, что мощный метод обратной задачи рассеяния удастся применить к исследованию задачи в реалистическом четырехмерном пространстве-времени. Действительно, в [10] с помощью метода Римана - Гильберта было установлено существование в уравнениях $N=4$ суперсимметричной калибровочной теории бесконечномерной группы скрытой симметрии, причем алгеброй Ли для этой группы является алгебра токов. В недавней работе Девчанда [11] было показано, что при помощи разложения линейных уравнений из [9] по спектральному параметру может быть получена бесконечная последовательность нелокальных сохраняющихся токов.

В настоящей работе будут получены явные выражения для сохраняющихся токов и показано, что как функции суперсвязности они являются локальными. Точнее говоря, будут получены дифференциальные тождества, которые приводят в частности к сохраняющимся токам. Следует подчеркнуть, что построенные токи не являются однако локальными функционалами полей в пространстве Минковского. Дело в том, что соответствие между полями в суперпространстве и в пространстве Минковского в данном случае нетривиально и не сводится просто к разложению суперсвязности по антикоммутирующим переменным. Для того, чтобы связать коэффициенты разложения суперсвязности с физическими полями в пространстве Минковского, нужно решать нелинейные уравнения, поскольку физические поля выражаются через компоненты суперкривизны.

Можно сказать, что дополнительные к пространственно-временным координатам x антикоммутирующие переменные θ позволяют в некотором смысле редуцировать задачу к набору двумерных задач. Можно провести аналогию с раб. [12-14], в которых предлагалось осуществлять редукцию калибровочных полей к двумерной задаче при помощи введения протяженных объектов (контуров, поверхностей и т.п.) Соображение о том, что для эффективной редукции будет достаточно введения конечного числа дополнительных переменных, а не бесконечного, как имеет место в контурном подходе, неоднократно высказывалось Л.Д.Фаддеевым.

2. Калибровочная теория в суперпространстве

Будут рассматриваться дифференциальные уравнения суперсимметричной теории Янга – Миллса (см., например, [3, 15]), которая в пространстве Минковского M^4 имеет следующий набор полей: поле Янга – Миллса A_μ, спинорные поля λ^K_α, $\bar\lambda_{\dot\alpha K}$ и скалярные поля φ^{Kl}, $\bar\varphi_{Kl}$, причем $K, l = 1, \dots, 4$; все поля принимают значения в присоединенном представлении калибровочной группы G и имеется соотношение $\varphi^{Kl} = \frac{1}{2}\varepsilon^{Klmn}\bar\varphi_{mn}$.
Уравнения движения следуют из лагранжиана

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\Big\{-\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} - i\lambda^K \not\nabla \lambda_K - \frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi^{Kl}\nabla^\mu\bar\varphi_{Kl} + \tag{2.1}$$
$$+ g\left(\{\bar\lambda_{\dot\alpha K}, \bar\lambda^{\dot\alpha}_l\}\varphi^{Kl} + \{\lambda^K_\alpha, \lambda^{\alpha l}\}\bar\varphi_{Kl}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}g^2[\varphi^{Kl}, \varphi^{mn}][\bar\varphi_{Kl}, \bar\varphi_{mn}]\Big\}.$$

Эта модель допускает элегантную формулировку на языке суперпространства, когда полевые переменные – это функции на суперпространстве, а уравнения движения – это дифференциальные уравнения в суперпространстве. В дальнейшем суперпространство, супердифференциальные уравнения и пр. мы будем понимать в рамках подхода к суперанализу, развитого в работах [17,18].

В [17,18] дано обобщение понятий и теорем обычного анализа, при котором роль поля вещественных или комплксных чисел играет произвольная коммутативная банахова супералгебра.

Векторное пространство Λ над полем $\mathbb{R}$ называется суперпространством, если задано его разложенее в прямую сумму $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$. При этом элементы $a \in \Lambda_0$ называются четными (четности $p(a) = 0$), элементы $a \in \Lambda_1$ называются нечетными (четности $p(a) = 1$). Элементы из Λ_0 или Λ_1 называются однородными. Суперпространство Λ называется коммутативной банаховой супералгеброй, если оно является банаховой алгеброй с четной операцией умножения (т.е. $p(ab) = p(a) + p(b) \pmod 2$ для однородных a, b) и для однородных элементов a и b выполняется соотношение $[a,b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba = 0$. Понятие коммутативной банаховой супералгебры является естественным обобщением понятия коммутативной банаховой алгебры [19]. Важным примером коммутативной банаховой супералгебры является алгебра Грасмана $G(q)$ с q образующими $e_1, \dots, e_q$, удовлетворяющими соотношениям $e_i e_j + e_j e_i = 0$. Любой элемент $a \in G(q)$

имеет единственное представление $a = \sum a_\alpha e^\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_t)$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_t$, $e^\alpha = e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_t}$, $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Подпространство $\Lambda_0 (\Lambda_1)$ состоит из элементов a, у которых в каждом слагаемом в сумме по α содержится только четное (нечетное) число образующих. Норма $\|a\| = \sum |a_\alpha|$.

Фиксируем некоторую коммутативную банахову супер態алгебру Λ. Координатным Λ-суперпространством размерности (m, n) будем называть банахово пространство $\mathbb{R}^{m,n} = \mathbb{R}^{m,n}_\Lambda = \Lambda_0 \times \dots \times \Lambda_0 \times \Lambda_1 \times \dots \times \Lambda_1 = \Lambda_0^m \times \Lambda_1^n$. Оно играет в суперанализе такую же роль, как $\mathbb{R}^m$ в обычном анализе. Для точки $X \in \mathbb{R}^{m,n}$ пишем $X = (X_1, \dots, X_{m+n}) = (x, \theta) = (x_1, \dots, x_m, \theta_1, \dots, \theta_n)$. В силу определения коммутативной банаховой супералгебры Λ элементы x_i коммутируют между собой и с θ_j, а элементы θ_j антикоммутируют между собой. Пусть $\mathcal{V}$ открытое множество в $\mathbb{R}^{m,n}$ и $f: \mathcal{V} \to \Lambda$. Функция f называется супердифференцируемой в точке $X \in \mathcal{V}$, если существуют элементы $F_i(X) \in \Lambda$ такие, что

$$f(X+H) = f(X) + \sum_{i=1}^{n+m} F_i(X) \cdot H_i + o(\|H\|)$$

для любого допустимого $H = (H_1, \dots, H_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m,n}$; здесь $\|H\| = \sum_{i=1}^{m+n} \|H_i\|$. При этом $F_i(X)$ называются частными суперпроизводными f по X_i в точке X и обозначаются $F_i(X) = \partial f(X) / \partial X_i$.

Имея это определение супердифференцируемости, можно строить суперанализ в полной аналогии с обычным анализом. Условие супердифференцируемости можно представить в виде условий типа Коши – Римана [18], аналогично тому, как это делается в комплексном анализе [20]. Теория строится инвариантно относительно выбора Λ. В приложениях часто можно ограничиться выбором $\Lambda = G(q)$. Дальнейшие подробности, в частности, определения суперрасслоения и суперсвязности см. в [17, 18].

Аналогично определяется комплексное суперпространство $\mathbb{C}^{m,n}_\Lambda$ над комплексной коммутативной банаховой супералгеброй Λ с инволюцией $*$. Координаты в комплексном суперпространстве Минковского $\mathbb{C}^{4,4N}_\Lambda$ будем обозначать $y^A = (x^\mu, \theta^\alpha_s, \bar\theta^{\dot\beta t})$ где x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ – четные элементы, а θ^α_s, $\bar\theta^{\dot\beta t}$ $(s, t = 1, \dots N;\ \alpha, \beta = 1,2)$ – нечетные. Вещественное пространство выделяется условием $(x^\mu)^* = x^\mu$, $(\theta^\alpha_s)^* = \bar\theta^{\dot\alpha s}$.

Ковариантная производная в тривиальном векторном суперрасслоении

ении над $\mathbb{C}^{4,4N}$ со структурной группой G (для определенности можно считать $G = SU(k)$) имеет вид $\nabla_A = D_A + \mathcal{A}_A$, где

$$D_A = (\partial_\mu, D^s_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta t}),\ \partial_\mu = \partial/\partial x^\mu,\ \partial_{\alpha\dot\beta} = \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu,$$

$$D^s_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha_s} + i\bar\theta^{\dot\beta s}\partial_{\alpha\dot\beta},\ \bar{D}_{\dot\beta t} = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\beta t}} - i\,\theta^\alpha_t\partial_{\alpha\dot\beta},$$

$\sigma^\mu = \| \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} \|$ – матрицы Паули. Здесь $\mathcal{A}_A = \sum T_l \mathcal{A}_{Al}(y)$, где $\{T_l\}$ – базис алгебры Ли группы G и $\mathcal{A}_{Al}(y)$ – супергладкие Λ -значные функции, причем четность $p(\mathcal{A}_{Al}(y)) = p(A)$. Градуированный коммутатор ковариантных производных имеет вид

$$[\nabla_A, \nabla_B] = T^C_{AB}\nabla_C + F_{AB},$$

где T^C_{AB} – тензор кручения и F_{AB} – тензор кривизны, причем все компоненты кручения равны 0, за исключением $T^{s\ \mu}_{\alpha,\dot\beta t} = T^{s\mu}_{\dot\beta t,\alpha} = -2i\,\delta^s_t\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}$. Отсюда, в частности, следует:

$$F^s_{\alpha,\dot\beta t} = D^s_\alpha \mathcal{A}_{\dot\beta t} + \bar{D}_{\dot\beta t}\mathcal{A}^s_\alpha + \{\mathcal{A}^s_\alpha, \mathcal{A}_{\dot\beta t}\} + 2i\,\delta^s_t\,\mathcal{A}_{\alpha\dot\beta},$$

где $\mathcal{A}_{\alpha\dot\beta} = \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\mathcal{A}_\mu$.

На суперсвязность накладываются следующие уравнения:

$$F^{st}_{\alpha\beta} + F^{ts}_{\alpha\beta} = 0,\quad F_{\dot\alpha s,\dot\beta t} + F_{\dot\alpha t,\dot\beta s} = 0,$$
$$F^s_{\alpha,\dot\beta t} = 0;\ \alpha,\beta = 1,2;\ s,t = 1,\dots N. \tag{2.2}$$

При $N = 1$ и 2 уравнения (2.2) не приводят ни к каким дифференциальным уравнениям в x -пространстве, поэтому их называют уравнениями связей. Дополнительно к ним накладывают динамические уравнения, которые приводят к уравнениям суперсимметричной калибровочной теории в пространстве с лагранжианом, похожим на лагранжиан (2.I). (при $N = 1,2$ по сравнению с (2.I) уменьшается число скалярных и фермионных полей).

Приведем соотношения между компонентами суперсвязности при $N = 3$ с полями в x -пространстве, которые входят в лагранжиан (2.I). Имеем $F^{st}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\Phi^{st}$ и следующие соотношения при $\theta, \bar\theta = 0$: $\varphi^{st} = \Phi^{st}$, $\varphi^{s4} = \frac{1}{2}\varepsilon^{s4pq}\Phi^{pq}$, $\lambda^s_\alpha = \nabla^s_\alpha\Phi^{st}$, $\nabla^s_\alpha\Phi^{tp} = \varepsilon^{stp}\lambda^4_\alpha$ здесь $s,t,p,q = 1,2,3$.

Важно отметить, что при $N = 3$ (а также в эквивалентной $N = 4$

теории) уравнения (2.2) уже сами по себе приводят к динамическим уравнениям в x -пространстве, т.е. поля A_μ, λ и φ автоматически удовлетворяют уравнениям движения, следующим из лагранжиана (2.I). Это считалось неудовлетворительным, т.е. препятствовало нахождению так называемых вспомогательных полей, необходимых для того, чтобы обеспечить замыкание алгебры суперсимметрии вне массовой поверхности (см. [I5]).

Однако по нашему мнению, то что динамические уравнения в пространстве M^4 следуют из условий (2.2), необходимых для выделения неприводимого мультиплета, т.е. задание суперсвязности и ограничение на спины физических полей однозначно приводят к динамике, можно рассматривать как проявление максимальной геометрической теории.

В смысле максимальной геометризации выделенной теорией, включающей гравитацию, является $N=8$ супергравитация, в которой все поля сводятся к единому геометрическому объекту - суперкручению, и уравнения движения в x -пространстве возникают как следствие условий на кручение.

По поводу другой геометризации суперкалибровочных теорий, связанной с супертвисторами, см. [2I -23]. Супертвисторы особенно полезны при изучении уравнений суперавтодуальности [24].

3. Линейные уравнения и высшие дифференциальные тождества.

В [9,I0] была предложена следующая система линейных уравнений:

$$X^s(\lambda)\chi = (\nabla_1^s + \lambda\nabla_2^s)\chi = 0, \tag{3.I}$$

$$Y_t(\lambda)\chi = (\nabla_{\dot{1}t} + \lambda^2\nabla_{\dot{2}t})\chi = 0,$$

$$Z(\lambda)\chi = (\nabla_{1\dot{1}} + \lambda\nabla_{2\dot{1}} + \lambda^2\nabla_{1\dot{2}} + \lambda^3\nabla_{2\dot{2}})\chi = 0.$$

Здесь λ - спектральный параметр; $s,t = 1,\dots,N$.
Условиями разрешимости системы (3.I) являются уравнения (2.2).
Операторы X^s, Y_t, Z удовлетворяют следующей алгебре:

$$\{X^s(\lambda),X^t(\lambda)\}=0,\{Y_s(\lambda),Y_t(\lambda)\}=0,\{X^s(\lambda),Y_t(\lambda)\}=-2i\delta_t^s Z(\lambda), \tag{3.2}$$
$$[X^s(\lambda),Z(\lambda)]=0,\ [Y_t(\lambda),Z(\lambda)]=0.$$

Мы видим, что суперсимметричная теория Янга - Миллса реализует одно из представлений бесконечномерной алгебры (3.2). Явная реализация представления задает явное решение уравнений этой теории (при $N=3$). Можно поставить вопрос об отыскании других представлений алгебры (3.2).

Обычно в методе обратной задачи получают высшие токи при помощи разложения решений линейных уравнений в ряд по спектральному параметру. Такая же процедура применима и к системе (3.I). Сделаем сначала в системе (3.I) калибровочное преобразование вида $\chi(\lambda) \to \Psi(\lambda) = \chi(\lambda=0)^{-1}\chi(\lambda)$, чтобы получить нормировку $\Psi(\lambda=0)=1$ [II]. Это соответствует выбору калибровки $\mathcal{A}_1^s = \mathcal{A}_{\dot 1 t} = \mathcal{A}_{1\dot 1}$.

Тогда система (3.I) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} L^s\Psi &= (D_1^s + \lambda D_2^s)\Psi = 0, \\ M_t\Psi &= (\bar{D}_{\dot 1 t} + \lambda^2 \nabla_{\dot 2 t})\Psi = 0, \\ K\Psi &= (\partial_{1\dot 1} + \lambda\nabla_{2\dot 1} + \lambda^2\nabla_{1\dot 2} + \lambda^3\nabla_{2\dot 2})\Psi = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

причем L^s, M_t, K удовлетворяют алгебре (3.2), а система уравнений (2.2) перепишется в виде

$$D_1^s \mathcal{A}_2^t + D_1^t \mathcal{A}_2^s = 0, \tag{3.4а}$$

$$\bar{D}_{\dot 1 s}\mathcal{A}_{\dot 2 t} + \bar{D}_{\dot 1 t}\mathcal{A}_{\dot 2 s} = 0, \tag{3.4б}$$

$$D_1^s \mathcal{A}_{\dot 2 t} + 2i\delta_t^s \mathcal{A}_{1\dot 2} = 0, \tag{3.4в}$$

$$\bar{D}_{\dot 1 s}\mathcal{A}_2^t + 2i\delta_s^t \mathcal{A}_{2\dot 1} = 0 \tag{3.4г}$$

и $\mathcal{A}_2^s, \mathcal{A}_{\dot 2 t}, \mathcal{A}_{2\dot 2}$ должны иметь чисто калибровочный вид:
$\mathcal{A}_2^s = g^{-1}D_2^s g$, $\mathcal{A}_{\dot 2 t} = g^{-1}\bar{D}_{\dot 2 t} g$, $\mathcal{A}_{2\dot 2} = g^{-1}\partial_{2\dot 2} g$ с некоторой g. Заметим, что уравнения (3.4а), (3.4б) имеют вид законов сохранения, или, точнее говоря, дифференциальных тождеств. За счет переобозначений из них можно получить соотношения вида $D_\alpha^s J_s^\alpha = 0$, $\bar{D}_{\dot\alpha s} J^{\dot\alpha s} = 0$. Однако последние соотношения слабее, чем (3.4а), (3.4б). Обозначим $J^{(1)s} = \mathcal{A}_2^s$, $J_{(1)s} = \mathcal{A}_{\dot 2 s}$ и покажем, что совершенно аналогично обычной процедуре построения высших токов для двумерного кирального поля [25-29], здесь также строится последовательность токов $J^{(n)s}, J_{(n)s}$, $n = 1,2,\ldots$, удовлетворяющих "законам сохранения"

$$D_1^s J^{(n)t} + D_1^t J^{(n)s} = 0, \tag{3.5а}$$

$$\bar{D}_{\dot 1 s} J_{(n)t} + \bar{D}_{\dot 1 t} J_{(n)s} = 0. \tag{3.5б}$$

Подставив в (3.3) разложение Ψ :

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Psi^{(n)},$$

получим набор уравнений

$$\begin{aligned} & D_1^s \Psi^{(n)} + \nabla_2^s \Psi^{(n-1)} = 0, \\ & \bar{D}_{it} \Psi^{(n)} + \nabla_{\dot{2}t} \Psi^{(n-2)} = 0, \\ & \partial_{1i} \Psi^{(n)} + \nabla_{2i} \Psi^{(n-1)} + \nabla_{1\dot{2}} \Psi^{(n-2)} + \nabla_{2\dot{2}} \Psi^{(n-3)} = 0; \end{aligned} \qquad (3.6)$$

здесь $\Psi^{(0)} = 1$; $\Psi^{(n)} = 0,\ n < 0$. Отметим, что в (3.3) и (3.6) третье соотношение является следствием первых двух на решениях уравнений движения. Положим теперь

$$J^{(n)s} = -\nabla_2^s \Psi^{(n-1)}, \quad J_{(n)s} = -\nabla_{\dot{2}s} \Psi^{(n-2)}.$$

Поскольку уравнения (3.6) должны быть разрешимы, то эти токи удовлетворяют законам сохранения (3.5а), и (3.5б).

Получим явное выражение для первого нетривиального тока $J^{(2)s} = -\nabla_2^s \Psi^{(1)}$, где $\Psi^{(1)}$ удовлетворяет уравнениям (3.6):

$$D_1^s \Psi^{(1)} + A_2^s = 0, \qquad (3.7а)$$

$$\bar{D}_{it} \Psi^{(1)} = 0, \qquad (3.7б)$$

$$\partial_{1i} \Psi^{(1)} + A_{2i} = 0. \qquad (3.7в)$$

Применим прием, указанный в [10] Подставив $\partial_{1i} \Psi^{(1)}$ из уравнения (3.7в) в (3.7а) и (3.7б) с учетом того, что в силу (3.4г) $A_{2i} = \frac{i}{2} \bar{D}_{iq} A_2^q$ (нет суммирования по q), будем иметь

$$P^s \Psi^{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_s^1} + i \bar{\theta}^{\dot{2}s} \partial_{1\dot{2}}\right) \Psi^{(1)} = -A_2^s - \frac{1}{2} \bar{\theta}^{is} \bar{D}_{iq} A_2^q = f^s, \qquad (3.8)$$

$$Q_t \Psi^{(1)} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{it}} + i \theta_t^2 \partial_{2i}\right) \Psi^{(1)} = -\frac{1}{2} \theta_t^1 \bar{D}_{iq} A_2^q = h_t .$$

Здесь операторы P^s, Q_t антикоммутируют:

$$\{P^s, P^t\} = 0, \ \{Q_s, Q_t\} = 0, \ \{P^s, Q_t\} = 0$$

и выполняются условия разрешимости

$$P^s f^t + P^t f^s = 0,\ Q_s h_t + Q_t h_s = 0,\ P^s h_t + Q_s f^t = 0. \qquad (3.9)$$

Положим $T - i\theta^1_s \partial_{1\dot 2} \bar\theta^{\dot 2 s} - i\theta^2_s \partial_{2\dot 1} \bar\theta^{\dot 1 s}$

и $\Psi^{(1)} = e^T \Psi$. Тогда в силу соотношений

$$P^s(e^T\Psi) = e^T \frac{\partial}{\partial\theta^1_s}\Psi, \quad Q_t(e^T\Psi) = e^T \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot 1 t}}\Psi$$

из (3.8) получим

$$\frac{\partial}{\partial\theta^1_s}\Psi = e^{-T} f^s, \quad \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot 1 t}}\Psi = e^{-T} h_t. \qquad (3.10)$$

Система (3.10) представляет собой алгебраическую систему уравнений, которая разрешима в силу (3.9) и дает явное локальное выражение для тока $J^{(2)s}$ через компоненты суперсвязности.

Аналогичная процедура применима и для высших токов. Отметим, наконец, что скрытая симметрия этой теории приводит к алгебре токов [10-11], интригующим образом появляющейся в классических [26-29] и квантовых [30] интегрируемых моделях.

В двумерных квантовых интегрируемых моделях наличие высших токов дает возможность вычислить S-матрицу [31-32]. Вопрос о том, к каким следствиям приводят высшие токи в $N = 4$ суперсимметричной калибровочной теории, остается пока открытым.

Литература

1. Ф а д д е е в Л.Д. Дифференциально-геометрические структуры и квантовая теория поля. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1975, т.135, с.218-223.
2. Э й н ш т е й н А. Физика и реальность. М., 1959.
3. Supersymmetry and supergravity'82. Ed. Ferrara S., Taylor J.G. van Nieuwenhuizen P. World Scientific, 1983.
4. Б о г о л ю б о в Н.Н., Ш и р к о в Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1976.
5. З а х а р о в В.Е., Ф а д д е е в Л.Д. Уравнение Кортевега-де Фриза - вполне интегрируемая гамильтонова система. - Функц.анализ. 1971, т.5, в.4, с.18-27.
6. З а х а р о в В.Е., М а н а к о в С.В., Н о в и к о в С.П.,

П и т а е в с к и й Л.П. Теория солитонов. М., 1980.
7. H o w e P.S., S t e l l e K.S., T o w n s e n d P.K. - CERN preprint TH 3271, Geneva, 1982.
8. M a n d e l s t a m S. Light-cone superspace and ultraviolet finiteness of the $N=4$ model. - Nucl.Phys., 1983, v.B213, N 1, p.149-168.
9. V o l o v i c h I.V. Supersymmetric Yang - Mills equation as an inverse scattering problem. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, p.121-124.
10. В о л о в и ч И.В. Суперсимметричная теория Янга - Миллса и метод обратной задачи рассеяния. - ТМФ, 1983, т.57, № 3, с.35-49.
11. D e v c h a n d C. An infinite number of continuity equations and hidden symmetries in supersymmetric gauge theories. - Preprint DTP-83/15, Durham, 1983, 19 p.
12. A r e f ' e v a I.Ya. The gauge field as chiral field on the path and its integrability. - Lett.Math.Phys., 1979, v.3, N 3, p.240-247. Gauge theory and bags. - Phys.Lett., 1980, B95, N 2, p.269-272.
13. P o l y a k o v A.M. String representations and hidden symmetries for gauge fields. - Phys.Lett., 1979, B82, N 2, p.247-250.
14. А р е ф ь е в а И.Я., В о л о в и ч И.В. Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях. - В кн.: Труды Международной конференции по обобщенным функциям и их применениям в математической физике. - М., 1981, с. 43 - 49.
15. W e s s J., B a g g e r L. Supersymmetry and supergravity. Prinston University. 1980.
16. Superspace and supergravity. Ed.Hawking S.W., Rocek M. Cambridge. 1981.
17. В о л о в и ч И.В. Λ-супермногообразия и расслоения. - Докл. АН СССР, 1983, т.269, № 3, с.524-527.
18. В л а д и м и р о в В.С., В о л о в и ч И.В. Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление. - Докл.АН СССР, 1983, т.273, № 1, с.26-31.
19. Г е л ь ф а н д И.М., Р а й к о в Д.А., Ш и л о в Г.Е. Коммутативные нормированные кольца. М., 1960.
20. В л а д и м и р о в В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М., 1964.
21. W i t t e n E. An interpretation of classical Yang - Mills theory. - Phys.Lett., 1978, v.77, N 4, 5, p.394-397.

22. Волович И.В. Суперсимметричная теория Янга - Миллса как голоморфное расслоение над твисторами и суперавтодуальность. - ТМФ, 1983, т.55, № 1, с.39-43.
23. Volovich I.V. Supersymmetric Yang - Mills theories and twistors. - Phys.Lett., 1983, v.129B, N 6, p.429-431.
24. Volovich I.V. Super-selfduality for supersymmetric Yang - Mills theory. - Phys.Lett., 1982, v.123B, N 5, p.329-331
25. Brezin E., Itzakson C., Zinn-Justin J., Zuber J.-B. An infinite number of conserved currents for chiral models. - Phys.Lett., 1979, v.82, N 4, p.442-445.
26. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных. - Докл.АН СССР, 1980, т.251. № 1, с. 1310-1313.
27. Dolan L. Kac-Moody algebra is hidden symmetry of chiral model. - Phys.Rev.Lett., 1981, v.47, p.1371-1375.
28. Chau L.L., Ge M.L., Sinha A., Wu Y.S. Hidden-symmetry algebra for the self-dual Yang - Mills equation. - Phys.Lett., 1983, v.121B, N 6, p.391-396.
29. Ueno K., Nakamura Y. - In: "Non-linear integrable systems - classical theory and quantum theory", ed. Jimbo M., Miwa T. World Scientific, 1983.
30. Faddeev L.D. Integrable models in 1+1 dimensional quantum field theory. - Preprint S.Ph.T 182/76, CEN-SACLAY, 1982.
31. Арефьева И.Я., Корепин В.Е. Рассеяние в двумерной модели с лагранжианом $\mathcal{L}=\frac{1}{2\gamma}\left[(\partial_\mu\varphi)^2+m^2(\cos\varphi-1)\right]$. - Письма в ЖЭТФ, 1974, т.20, с.680-684.
32. Zamolodchicov A., Zamolodchikov A. Factorized S-matrices in two dimension as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. - Ann. Phys., 1979, v.120, N 2, p.253-291.

В.А.Аркадьев, А.К.Погребков, М.К.Поливанов

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДВ И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение

Уравнение КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{I}$$

является классическим примером использования метода обратной задачи (МОЗ) (см., например, [I - 3]). Именно факт эквивалентности (I) операторному соотношению $L_t = [L, M]$, где

$$L = -\partial_x^2 + u(x), \tag{2}$$

$$M = 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x u), \tag{3}$$

и послужил толчком к применению этого метода в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Обычно решения уравнения КдВ ищутся в классе гладких регулярных функций $u(t,x)$. Применение МОЗ позволило обнаружить при этом богатый спектр данной теории, включающий известные солитонные решения. В то же время, уже 5 - 6 лет тому назад [4 - 8] было замечено, что интересно рассмотреть также некоторые специальные сингулярные решения уравнения (I).

Так, в [4 - 6] рассматривалось решение вида

$$u(t,x) = \frac{2}{(x-x(t))^2} + v(t,x), \tag{4}$$

где $v(t,x)$ - регулярный фон. Это решение медленно (как $2/x^2$) спадает на бесконечности и имеет одну линию особенности. Оно устойчиво в динамике, если выполнены условия

$$v_x(t,x(t)) = 0, \quad \dot{x}(t) = -6v(t,x(t)) . \tag{5}$$

В этих работах рассматривалась задача Коши для уравнения (I), для решения которой формально применялся МОЗ (см. обсуждение в разд.4)

Рассматривались также решения и с большим числом линий особенности, однако, лишь в рамках рационального анзатца (см. [7, 8]):

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{2}{(x-x_j(t))^2} . \tag{6}$$

Требование выполнения для (6) уравнения (I) приводит к уравнениям $\dot{x}_m = -12 \sum_{j=1}^{N}{}' (x_m - x_j)^{-2}$, которые интерпретируются как уравнения движения частиц, ассоциированных с особенностями, и к уравнениям связей $\sum_{j=1}^{N}{}'(x_m-x_j)^{-3}=0$, которые совместны лишь при

$$N=\frac{d(d+1)}{2}, \quad d \text{ - целое число}, \tag{7}$$

а $x_j(t)$, вообще говоря, комплекснозначны. Был установлен факт гамильтоновости и полной интегрируемости этих систем частиц, но ввиду наличия связей динамика их оказалась очень сложной. Также на примере рациональных решений показано, что для высших уравнений КдВ особенность должна иметь вид

$$u(t,x)=\frac{\ell(\ell+1)}{(x-x(t))^2}+v(t,x), \tag{8}$$

где ℓ -соответствующий номер уравнения, и аналогично (5)

$$v_x^{(2k+1)}(t,x(t))=0, \quad k=0,\ldots,\ell-1. \tag{9}$$

В наших работах [9 - II] на примере нелинейного уравнения Шредингера было построено обобщение МОЗ, позволяющее решать задачи Коши с особенностями специального типа в начальных данных в произвольном числе точек. Цель этой заметки состоит в применении сформулированного в [9 - II] обобщения МОЗ к исследованию сингулярных решений уравнения КдВ. Итак, для уравнения (I) рассматривается задача Коши

$$u(0,x)=u(x), \tag{I0}$$

где $u(x)$ - вещественнозначная функция, имеющая локальные представления типа (4), (5) и в то же время обычным быстрым образом убывающая на пространственной бесконечности. Точнее класс допустимых начальных данных описывает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. $u(x)\in C^3(\mathbb{R}\setminus\{x_j\})$, где $\{x_j\}_{j=1}^{N}$ - множество точек сингулярности в конечной части оси x, так что существует такое $D>0$, что

$$\int\limits_{|x|>D}(1+x^2)|u(x)|\,dx<\infty. \tag{IIa}$$

Далее, для каждой точки x_j найдется ее окрестность U_j и вещественная функция $v_j(x)\in C^3(U_j)$ такие, что выполнено представление

$$u(x)=\frac{2}{(x-x_j)^2}+v_j(x), \quad x\in U_j, \tag{IIб}$$

причем

$$v_{jx}(x_j)=0. \tag{I2}$$

Мы строим решения задачи (I), (I0), требуя сохранения этого класса в динамике. При этом мы получаем, что сингулярности решений образуют непрерывные кривые, допускающие естественную динамическую интерпретацию в терминах частиц. Спектр такой задачи оказывается заметно богаче, чем в обычном регулярном случае: помимо непрерывного спектра и обычных солитонов здесь присутствуют сингулярные солитоны и бризеры – связанные состояния регулярных и сингулярных солитонов. Линии сингулярности решения суть мировые линии сингулярных солитонов, а естественно возникающая в теории операция "зарядового сопряжения" позволяет сопоставить мировые линии и регулярным солитонам. Регулярные и сингулярные солитоны могут проходить друг сквозь друга, причем в этих точках возникают кратные (типа (8)) особенности решения $u(t,x)$.

I. Вспомогательная линейная задача

Вспомогательная линейная задача $Ly = k^2 y$ для уравнения КдВ есть уравнение Шредингера

$$-y_{xx}(x) + (u(x) - k^2)\, y(x) = 0, \tag{I3}$$

где потенциал имеет особенности типа $2/(x-x_j)^2$ в окрестности каждой из точек x_j. Это именно та особенность, которая возникает при разложении на парциальные волны. Поэтому поведение решений задачи (I3) вблизи точки особенности потенциала подробно исследовалось в связи с задачами обычной квантовой механики (см. [I2,I3]). Нас сейчас интересует случай $\ell = 1$, но любопытно, что коэффициент при кратных особенностях (или особенностях для высших уравнений КдВ) совпадает с коэффициентом для старших парциальных волн.

Как известно (см.[I3]), для случая одной особенности в нуле на полуоси $x > 0$ существуют два линейно независимых решения: регулярное и сингулярное в точке особенности. Регулярное решение дважды непрерывно дифференцируемо и имеет в точке $x = 0$ нуль второго порядка. Поэтому в нашем случае, локально, т.е. в окрестности каждой из точек x_j, существует решение $\psi_j^R(x,k)$ задачи (I3), вещественное при вещественном k, такое, что $\psi_j^R(x,k) \in C^2(U_j)$ и

$$\psi_j^R(x_j,k) = 0, \quad \psi_{jx}^R(x_j,k) = 0, \quad \psi_{jxx}^R(x_j,k) = 2. \tag{I4}$$

Заметим, что это решение существует и регулярно с обоих сторон от точки x_j, что уточняет

ЛЕММА I. $(x-x_j)^{-2}\psi_j^R(x,k) \in C^5(U_j)$

$$(\partial_x^3 \psi_j^R)(x_j,k) = 0, \quad (\partial_x^4 \psi_j^R)(x_j,k) = \frac{12}{5}(v_j(x_j) - k^2), \tag{I5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, как и для случая полуоси, следует из оценок [13, стр.104, 105] и равенств (11) - (14).

Второе решение имеет особенность типа $1/(x-x_j)$, и мы определим его следующим образом. Пусть $x\in\widetilde{U}_j \subset U_j$, где $\psi_j^R(x,k)$ не имеет в $\widetilde{U}_j$ нулей в точках, отличных от x_j. Введем

$$\psi_j^S(x,k) = (x-x_j)^{-3}\psi_j^R(x,k) - \frac{3}{5}(v_j(x_j)-k^2)(x-x_j)^{-1}\psi_j^R(x,k) - \\ -3\psi_j^R(x,k)\int\limits_{x_j}^{x}\left[(\psi_j^R(y,k))^{-2}-(y-x_j)^{-4}+\frac{1}{3}(v_j(x_j)-k^2)(y-x_j)^{-2}\right]dy. \tag{16}$$

Как легко видеть из (14), (15), подынтегральное выражение в (16) не имеет особенностей при $x\in\widetilde{U}_j$. Заметим, что ввиду (12) нам не пришлось вычитать в этом выражении особенность первого порядка.

ЛЕММА 2. $\psi_j^S(x,k)$ в $\widetilde{U}_j\setminus\{x_j\}$ есть решение задачи (13), вещественное при вещественном k и линейно независимое с ψ_j^R. При этом

$$(x-x_j)\psi_j^S(x,k)\in C^5(\widetilde{U}_j), \tag{17}$$

$$(x-x_j)\psi_j^S(x,k) = 1+O((x-x_j)^2), \tag{18}$$

$$\partial_x^2\left[\psi_j^S(x,k)-\frac{1}{x-x_j}\right]\Big|_{x=x_j} = 0, \tag{19}$$

$$W[\psi_j^R(x,k),\psi_j^S(x,k)] \equiv \psi_j^R\psi_{jx}^S - \psi_{jx}^R\psi_j^S = -3. \tag{20}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из (16) и леммы I.

Требование (5) сохранения типа особенности в динамике, отражающееся в условии (12), обеспечивает дополнительные свойства "гладкости" решения ψ_j^S: сингулярность этого решения рациональна по x и после выделения этой особенности (см. (18)) оставшаяся часть регулярна (т.е. не содержит стандартного члена типа $(x-x_j)^2\ln|x-x_j|$).

В соответствии с предложенным в [9] обобщением МОЗ на случай сингулярных потенциалов, нам следует ввести общее решение задачи (13) на всей оси. Для этого введем следующий принцип сшивания "кусков" решения этой задачи, разделенных непрозрачными особенностями потенциала $u(x)$ в точках $\{x_j\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция $y(x,k)$, дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x\neq x_j$, $j=1,\dots,N$, удовлетворяющая при этих x равенству (13) и представимая в окрестности каждой точки x_j в виде

$$y(x,k) = c_j(k)\psi_j^R(x,k)+d_j(k)\psi_j^S(x,k),\quad x\in\widetilde{U}_j, \tag{21}$$

где $c_j(k)$, $d_j(k)$ — некоторые константы, называется решением задачи (I3).

Подчеркнем, что константы c_j и d_j однозначно определяются по y, поскольку в силу последнего равенства в (I4) и (I9) регулярное решение всегда "заметно" на фоне сингулярного. Указанные константы одни и те же, как слева, так и справа от точки особенности, так что это определение, действительно, дает возможность продолжить решение через точки особенности и тем самым определить его однозначно на всей оси. Отсюда следует, что, если в некоторой точке $x_0 \notin \{x_j\}_{j=1}^N$ величины $y(x_0,k)$ и $y_x(x_0,k)$ вещественны (при $\operatorname{Im} k=0$), то $y(x,k)$ вещественно и при всех x, поскольку вещественны соответствующие коэффициенты c_j и d_j. Вронскиан двух решений y и $\tilde{y}$ в силу (20) и (2I) есть константа опять же при всех x, а не только на интервалах регулярности.

Теперь мы стандартным образом можем задать решения Йоста задачи (I3) асимптотиками на пространственных бесконечностях:

$$
\begin{aligned}
\psi(x,k) &= e^{ikx} + o(1), \quad x \to +\infty, \\
\varphi(x,k) &= e^{-ikx} + o(1), \quad x \to -\infty.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Существование этих решений Йоста следует, как обычно, из условия (IIa), а наша процедура сшивания продолжает их на всю ось. Поэтому вводим матрицу перехода

$$
\varphi(x,k) = a(k)\,\psi(x,k)^* + b(k)\psi(x,k). \tag{23}
$$

В силу (22) и вещественности ψ_j^R и ψ_j^S, видим, что в разложении (2I) для решений Йоста оба коэффициента c_j и d_j отличны от нуля при всех $k \neq 0$, так что каждое из решений Йоста сингулярно в каждой из точек x_j.

Заметим, что по определению 2 при k вещественном и не равном нулю решения Йоста не обращаются в нуль ни в одной из точек регулярности. Действительно, пусть $\psi(x_0,k)=0$. Поскольку это ноль первого порядка, то рассмотрим решение задачи (I3) $y(x) = \psi(x,k)/\psi_x(x_0,k)$. Оно задается вещественными начальными условиями $y(x_0)=0$, $y_x(x_0)=1$, а потому $y(x)$ вещественно при всех x, что противоречит (22). Таким образом, функции Йоста не обращаются в нуль при $\operatorname{Im} k=0$, $k\neq 0$ ни при каких x. Аналогичное утверждение справедливо и для первых производных решений Йоста. Это означает, что мы сменили запас функций, на котором обычно рассматривается уравнение (I3), и, в частности, исключили все собственные функции этой задачи из L^2. Это позволило нам ввести элементы матрицы перехода и обеспечить их регулярность.

Вещественность $u(x)$, как обычно, дает:

$$a(k)^* = a(-k)\,, \quad b(k)^* = b(-k)\,,$$
$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2\,, \qquad \operatorname{Im} k = 0\,. \tag{24}$$

На рассматриваемом наборе функций задача (I3) не сопряжена, а потому в отличие от регулярного случая, $a(k)$ может иметь нули в комплексной плоскости k^2.

2. Аналитические свойства

Для изучения аналитических свойств решений Йоста мы, в соответствии с [9], рассмотрим вспомогательную задачу без особенностей, применив специальный вариант преобразования Крама [I4]. Для этого (см. [I3]) нам следует воспользоваться некоторым решением задачи (I3), сингулярным во всех точках x_j и не имеющим нулей. Кроме того, преобразование должно быть изоспектральным, поэтому мы берем решение с $k=0$. Как следует из (I4), решение ψ_j^R непрерывно и непрерывно дифференцируемо по k при всех $x \in U_j$. Тогда по (I5) и (I6) решение ψ_j^S непрерывно и непрерывно дифференцируемо по k при всех $x \in \tilde{U}_j \setminus \{x_j\}$. Асимптотические условия (22) в силу (IIa) гладко зависят от k, включая точку $k=0$ [I5, стр.282]. Поэтому, по (20) и (2I), коэффициенты $c_j(k)$, $d_j(k)$ также непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции k. Отсюда следует непрерывность и непрерывная дифференцируемость решений Йоста по k при всех $x \neq x_j$. Поэтому можно ввести два вещественных решения задачи (I3)

$$\varphi(x) = \varphi(x,0)\,, \qquad \chi(x) = i\frac{\partial}{\partial k}\varphi(x,k)\Big|_{k=0}\,, \tag{25}$$

вронскиан которых $W[\varphi;\chi] = 1$, а потому в каждой из точек особенности x_j по крайней мере одно из этих решений сингулярно. Пусть

$$Y(x,k) = \frac{i}{k}\left[y_x(x,k) - \frac{\varphi_x(x)+i\chi_x(x)}{\varphi(x)+i\chi(x)}\,y(x,k)\right]. \tag{26}$$

ТЕОРЕМА I. Преобразование (26) отображает каждое решение уравнения (I3) при $k \neq 0$ в решение задачи

$$-Y_{xx}(x,k) + \left[U(x) - k^2\right]Y(x,k) = 0\,, \tag{27}$$

где потенциал

$$U(x) = u(x) - 2\partial_x^2 \ln\left[\varphi(x) + i\chi(x)\right]. \tag{28}$$

При этом выполнены следующие свойства:

$$U(x)\in C^3(\mathbb{R}^1),\ \exists D>0:\ \int\limits_{|x|>D} dx(1+x^2)\left|U(x)-\frac{2}{x^2}\right|<\infty, \tag{29}$$

функция

$$F(x)\equiv\frac{i}{4}\int\limits_{-\infty}^{x} dy\left[U(y)-U(y)^*\right]\geqslant 0, \tag{30}$$

где равенство достигается лишь в точках $x=x_j$ и $F(x)$ имеет в этих точках нуль второго порядка; наконец

$$U+U^*=(F_x/F)_x+\frac{1}{2}(F_x/F)^2-2F^2. \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится так же, как в работе [9] для системы Захарова – Шабата.

Таким образом, мы перешли от исследования задачи (13) с сингулярным потенциалом к задаче (27) с потенциалом регулярным, но медленно (см.(29)) убывающим на бесконечности. Медленность убывания потенциала $U(x)$ приводит к существованию для задачи (27) собственной функции при $k=0$:

$$h(x)=\frac{1}{\varphi(x)+i\chi(x)}. \tag{32}$$

Учет (см.ниже разд.4) динамики функций φ и χ, задаваемой оператором M (3), приводит нас к уравнению (1) для регулярной комплекснозначной функции $U(t,x)$. Условие вещественности $u(t,x)$ заменяется условием сопряжения (31), сохраняющимся в динамике, а как воспоминание о сингулярностях $u(t,x)$ у нас фигурируют нули функции $F(t,x)$.

Обратный переход к уравнению (1) для $u(x)$ и задаче (13) осуществляется следующим образом. В силу (28) и (30) имеем

$$\varphi^2(x)=\frac{1}{F(x)}\sin^2\int\limits_{-\infty}^{x}dz\,F(z),\quad \chi^2(x)=\frac{1}{F(x)}\cos^2\int\limits_{-\infty}^{x}dz\,F(z), \tag{33}$$

так что

$$\frac{\varphi_x(x)+i\chi_x(x)}{\varphi(x)+i\chi(x)}=i\,F(x)-\frac{F_x(x)}{2F(x)}. \tag{34}$$

Здесь мы воспользовались единичностью $W[\varphi,\chi]$. Далее, по (28), (30) и (31)

$$u(x)=-\frac{1}{2}(F_x/F)_x+\frac{1}{4}(F_x/F)^2-F^2, \tag{35}$$

а обращая (26), по (34) получаем

$$y(x,k)=\frac{i}{k}\left[Y_x(x,k)+\left(iF(x)-\frac{F_x(x)}{2F(x)}\right)Y(x,k)\right]. \qquad (36)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана гладкая комплекснозначная функция $U(x)$, удовлетворяющая (29), причем функция $F(x)$, определенная по (30), обращается в нуль лишь в конечном числе точек $x_1,\ldots, x_N$, имеет в них нули второго порядка и выполнены условия (30) и (31). Тогда преобразование (36) переводит каждое решение задачи (27) с $k\neq 0$ в решение задачи (13) с $u(x)$ из (35). Это $u(x)$ имеет особенности в точках $x_1,\ldots, x_N$ (и только в этих точках) и принадлежит к классу допустимых начальных данных для уравнения (I) (см.определение I и равенства (10) - (12)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из равенств (33) - (36).

Теперь можно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. Функции $\varphi(x,k)$ и $\psi(x,k)$ при всех $x\neq x_1,\ldots, x_N$ аналитичны по k в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, k>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО подобно аналогичному доказательству из работы 9 и здесь мы дадим лишь его набросок. Рассмотрим $\varphi(x,k)$. В области $x\leq -\mathcal{D}<x_1$ (см.(IIa)) потенциал $u(x)$ не имеет особенностей, а потому утверждение теоремы в этой области справедливо. Далее, соответствующее решение Йоста $\Phi(x,k)$ задачи (27) выражается по (26) через $\varphi(x,k)$, а потому в области $x\leq -\mathcal{D}$ эта функция также аналитична по k при $\mathrm{Im}\, k>0$. Интегральное уравнение для $\Phi(x,k)$, эквивалентное задаче (27), имеет вид

$$\Phi(x,k)=\Phi(-\mathcal{D},k)\cos k(x+\mathcal{D})+\Phi_x(-\mathcal{D},k)\frac{\sin k(x+\mathcal{D})}{k}+$$
$$+\int_{-\mathcal{D}}^{x} dz\,\frac{\sin k(x-z)}{k}\,U(z)\,\Phi(z,k).$$

Пользуясь доказанной аналитичностью $\Phi(-\mathcal{D},k)$ и $\Phi_x(-\mathcal{D},k)$ и обычными оценками, получаем, что функция $\Phi(x,k)$ аналитична по k в области $\mathrm{Im}\, k>0$ уже при всех x. Утверждение теоремы теперь следует из равенства (36).

Для доказательства теоремы 3 нам пришлось обращаться попеременно, как к задаче (13) и функции $\varphi(x,k)$, так и к задаче (27) и функции $\Phi(x,k)$. Необходимость такого "бутстрапа" вызвана сингулярностью $u(x)$ в конечной части оси и медленностью убывания $U(x)$ на асимптотиках. Аналогично доказывается, что при любом $x\neq x_1,\ldots, x_N$

$$\begin{aligned} &\varphi(x,k)e^{ikx} = 1 + O(k^{-1}), \\ &\psi(x,k)e^{-ikx} = 1 + O(k^{-1}), \end{aligned} \quad |k|\to\infty,\ \Im m\, k > 0\ , \tag{37}$$

и

$$u(x) = \lim_{\substack{|k|\to\infty \\ \Im m\, k>0}} 2ik \frac{\partial}{\partial x}(\psi(x,k)e^{ikx}) . \tag{38}$$

Отсюда следует, как обычно, что функция $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и стремится на асимптотике к единице. В верхней полуплоскости $a(k)$ может иметь конечное число нулей $k_1,\ldots, k_M$, которые мы будем считать простыми. Таким образом, данные рассеяния суть

$$S=\{ r(k)=\frac{b(k)}{a(k)}\ ;\ k_j(\Im m\, k_j>0),\ c_j\ ,\ j=1,\ldots,M \} . \tag{39}$$

где коэффициенты c_j определяются из условий

$$\varphi(x,k_j) = ia'(k_j)c_j\psi(x,k_j) . \tag{40}$$

Из (24) следует теперь, что возможны лишь следующие три ситуации:

I) $\mathrm{Re}\, k_j=0,\ c_j > 0$ – регулярный солитон;

2) $\mathrm{Re}\, k_j=0,\ c_j < 0$ – сингулярный солитон;

3) $\mathrm{Re}\, k_j\neq 0$, но существует такой k_ℓ , что $k_\ell=-k_j^*$ и, соответственно, $c_\ell=c_j^*$ – бризер.

В регулярном случае (т.е. при $N=0$) условие самосопряженности задачи (I3) в L^2 исключает, как известно, случаи 2) и 3) и гарантирует, что нули $a(k)$ простые. Ниже мы покажем, что в сингулярном случае (т.е. при $N\geqslant 1$) реализуются все три ситуации.

Свойства непрерывной части $r(k)$ данных рассеяния обычны (см. [2]), и выполняется представление

$$a(k) = \Big(\prod_{j=1}^{M} \frac{k-k_j}{k-k_j^*}\Big)\exp\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln[1-|r(p)|^2]}{p-k-i0}\, dp . \tag{4I}$$

3. Обратная задача

Теперь нам нужно решить обратную задачу, которая есть задача Римана с сопряжением на функции $\psi(x,k)$, $\varphi(x,k)$ аналитические в верхней полуплоскости, удовлетворяющие там условиям (37) и (40), а при вещественном k краевому условию

$$\psi(x,k)^* + r(k)\psi(x,k) = \frac{\varphi(x,k)}{a(k)}\ ,\quad \Im m\, k = 0 . \tag{42}$$

Здесь $a(k)$ определено по (4I) через данные рассеяния $\mathcal{S}$ (39). Покажем, что эта задача разрешима при всех x за исключением некоторого конечного набора точек $x_1, \dots, x_N$, которые суть точки сингулярности потенциала $u(x)$, восстанавливаемого по (38). Введем вспомогательный набор данных рассеяния

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \{ r(k); \; k_j, \; c_j, \; j = 1, \dots, \widetilde{M} \}, \tag{43}$$

где $r(k), k_j, c_j$ те же, что и в (39) и $\widetilde{M} < M$. Предположим, что мы умеем решать аналогичную (42) задачу

$$\widetilde{\psi}(x,k)^* + r(k)\widetilde{\psi}(x,k) = \frac{\widetilde{\varphi}(x,k)}{\widetilde{a}(k)} \tag{44}$$

для функций $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}$, где

$$\widetilde{a}(k) = a(k) \Big(\prod_{j=\widetilde{M}+1}^{M} \frac{k - k_j^*}{k - k_j} \Big).$$

Это заведомо так, когда набор дискретных переменных в (39) занумерован так, что $\operatorname{Re} k_j = 0$, $c_j > 0$ при всех $j = 1, \dots, \widetilde{M}$ т.е. (44) есть обычная задача Римана для уравнения КдВ. Аеалогично [I0], можно показать, что решение задачи (42) представляется в виде

$$\psi(x,k) = \widetilde{\psi}(x,k) - \sum_{j=\widetilde{M}+1}^{M} \frac{c_j z_j(x) W[\widetilde{\psi}(x,k_j), \widetilde{\psi}(x,k)]}{k^2 - k_j^2}, \tag{45}$$

где $z_j(x)$ – решение линейной системы

$$A(x) Z(x) = \widetilde{\Psi}(x), \tag{46}$$

Z – столбец $z_{\widetilde{M}+1}(x), \dots, z_M(x)$, $\widetilde{\Psi}$ – столбец $\widetilde{\psi}(x, k_{\widetilde{M}+1}), \dots, \widetilde{\psi}(x, k_M)$ и $A(x)$ – матрица $(M - \widetilde{M}) \times (M - \widetilde{M})$ с элементами

$$A_{ij}(x) = \delta_{ij} + c_j w_{ij}(x), \quad i,j = \widetilde{M}+1, \dots, M. \tag{47}$$

Здесь, в свою очередь,

$$w_{ij}(x) = \frac{1}{k_i^2 - k_j^2} W[\widetilde{\psi}(x,k_j), \widetilde{\psi}(x,k_i)] \tag{48}$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x} w_{ij}(x) = -\widetilde{\psi}(x,k_j)\widetilde{\psi}(x,k_i). \tag{49}$$

Диагональные элементы в (48) определяются предельным переходом $k_i \to k_j$.

Пусть $\widetilde{u}(x)$ – потенциал, отвечающий по (38) функции $\widetilde{\psi}(x,k)$. Тогда нетрудно проверить, что

$$u(x) = \widetilde{u}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\det A(x)]^2. \tag{50}$$

Таким образом, исходная краевая задача свелась к задаче (46) линейной алгебры. Элементы матрицы $A(x)$ гладкие и принадлежат C^6 при всех x. Этими же свойствами обладает и $\det A(x)$. Ниже мы дадим набросок доказательства того, что $\det A(x)$ может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек

$$\{x_j\}_{j=1}^{N} = \{x \mid \det A(x) = 0\}, \tag{51}$$

причем эти нули $\det A(x)$ степенные и имеют кратности $\ell_j(\ell_j+1)/2$, где $\ell_j (j=1,\dots,N)$ - целые числа. Как следует из (50), точки x_j суть точки особенности потенциала $u(x)$. В случае $\ell_j=1$ это особенности основного рассматриваемого типа (IIб), (I2), а при $\ell_j>1$ мы попадаем в более общую ситуацию особенностей (8). Заметим, что если $k_j=-k_\ell^*$, то $\tilde{\psi}(x,k_j)=\tilde{\psi}(x,k_\ell)^*$. Учитывая, что при этом $c_j=c_\ell^*$, получаем вещественность $u(x)$ по (50), а асимптотическое поведение $\tilde{\psi}(x,k_j)$ по x обеспечивает выполнение условия (IIа).

Чтобы выяснить свойства $\det A(x)$ введем следующую рекуррентную процедуру. Рассмотрим сначала случай, когда имеются только солитоны (регулярные или сингулярные), но нет бризеров. Упорядочим собственные числа, например, так:

$$-ik_m > \dots > -ik_1 > 0, \tag{52}$$

где m - общее число солитонов. Пользуясь изложенной выше процедурой (переход от $\tilde{S}$ к S), будем добавлять по одному собственному значению в дискретный спектр. Тогда по (45) - (50) имеем, что решение Йоста $\psi_j(x,k)$, отвечающее j (с первой по j-ую) точкам дискретного спектра есть

$$\psi_j(x,k) = \psi_{j-1}(x,k) - c_j \frac{\psi_{j-1}(x,k_j) W[\psi_{j-1}(x,k_j), \psi_{j-1}(x,k)]}{(k^2-k_j^2)[1+c_j w_j(x,k_j)]}, \tag{53}$$

где

$$w_j(x,q) = \frac{1}{2q} W[\psi_{j-1}(x,q), \dot{\psi}_{j-1}(x,q)], \tag{54}$$

$\dot{\psi}(x,q) = \frac{\partial}{\partial q}\psi(x,q)$. При этом соответствующие потенциалы

$$\psi_{jxx}(x,k) = (u_j(x)-k^2)\psi_j(x,k)$$

связаны посредством равенства

$$u_j(x) = u_{j-1}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[1+c_j w_j(x,k_j)]^2,$$

так что

$$\det A(x) = \prod_{i=1}^{m} [1+c_i w_i(x,k_i)]. \tag{55}$$

Таким образом, начиная с решения $\tilde{u}(x) \equiv u_0(x)$, для которого данные рассеяния $\tilde{S}$ (43) сводятся к $r(k)$, мы имеем рекуррентную процедуру последовательного добавления дискретных собственных значений (52), определяющую $u(x) \equiv u_m(x)$ по (50) и (55). Каждый шаг этой рекуррении есть два последовательных преобразования Крама (см. [13], стр.110). Первое из них осуществляет преобразование $a(k) \longrightarrow a(k)$, $b(k) \longrightarrow -\frac{k-q}{k-q^*} b(k)$, а второе: $a(k) \longrightarrow \frac{k-q}{k-q^*} a(k)$, $b(k) \longrightarrow -b(k)$. Поэтому на каждом шаге (в отличие от работ [16, 17]) мы, не меняя существующую часть спектра, добавляем одно собственное значение.

Это позволяет сделать следующие заключения. Заметим, что по (54)

$$\frac{\partial}{\partial x} w_j(x, k_j) = -\psi_{j-1}^2(x, k_j), \tag{56}$$

так что функция w_j кусочно монотонно убывает на всех интервалах регулярности $\psi_{j-1}(x, k_j)$, стремится к нулю при $x \longrightarrow +\infty$ и экспоненциально растет при $x \longrightarrow -\infty$. Пусть известно, что потенциал $u_{j-1}(x)$ и, соответственно, решение Йоста $\psi_{j-1}(x,k)$ $(\mathrm{Im}\, k = 0)$ сингулярны в точках $\{x_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{m_{j-1}}$, причем кратности этих особенностей единичны (это заведомо так для $j=1$: $u_0(x)$ регулярно, т.е. точек особенности нет вообще). Тогда функция $w_j(x, k_j)$, как следует из (54) и (56), сингулярна во всех этих точках и имеет в них особенности первого порядка во всех случаях, за исключением тех специальных ситуаций, когда продолжение ψ_{j-1} в точку k_j регулярно (имеет нуль второго порядка) в каких-то точках из набора $\{x_i^{(j-1)}\}_{i=1}^{m_{j-1}}$. Такие ситуации достаточно редки, они отвечают кратным особенностям, и здесь мы на них останавливаться не будем. Учитывая регулярность $\det A(x)$, видим, что каждый j-ый сомножитель в (55) за счет своих особенностей компенсирует нули предыдущих, но вносит в $[\det A(x)]_j$ – j первых сомножителей в (55) – свои собственные нули. В силу указанного поведения функций $w_j(x, k_j)$ при $c_j > 0$ число нулей в $[\det A(x)]_j$ сохраняется, а при $c_j < 0$ – увеличивается на единицу, что завершает шаг индукции.

Нетрудно построить соответствующую рекуррентную процедуру и для добавления пар собственных значений $(q = -q^*)$ в дискретный спектр (бризеров). Пусть известны потенциал $u(x)$ и собственная функция Йоста $\psi(x, k)$. Введем две функции

$$f(x,q) = \frac{1}{q^2 - q^{*2}} W[\psi(x,q)^*, \psi(x,q)], \quad g(x,q) = \frac{1}{2q} W[\psi(x,q), \dot{\psi}(x,q)],$$

так что $f_x = -|\psi(x,q)|^2$, $g_x = -\psi^2(x,q)$. Тогда решение Йоста, отвечающее добавлению бризера, получается заменой

$$\psi(x,k)\longrightarrow\frac{1}{2}\left[1-\frac{cg_{xx}(1+c^*g^*)-(f_{xx}+(q^2-q^{*2})f)|c|^2 f}{(k^2-q^2)\left[|1+cg|^2-|c|^2f^2\right]}+\text{э.с}\right]\psi(x,k)+$$

$$+\left(\frac{cg_x(1+c^*g^*)-ff_x|c|^2}{(k^2-q^2)\left[|1+cg|^2-|c|^2f^2\right]}+\text{э.с.}\right)\psi_x(x,k),$$

а потенциал

$$u(x)\longrightarrow u(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left\{|1+cg(x,q)|^2-|c|^2f^2(x,q)\right\}^2$$

и

$$\det A(x)\longrightarrow\det A(x)\left\{|1+cg(x,q)|^2-|c|^2f^2(x,q)\right\}. \qquad (57)$$

Аналогично предыдущему показываем, что такое преобразование увеличивает число особенностей потенциала $u(x)$ на единицу. Учет тех случаев, когда функция $\psi(x,q)$ регулярна в каких-либо точках сингулярности $u(x)$ позволяет расматривать случаи кратных особенностей подобно [I3, стр.I09], откуда следуют указанные выше свойства $\det A(x)$.

4. Временная эволюция, примеры и обсуждение

Условие нулевой кривизны $L_t=[L,M]$ эквивалентное уравнению (I), для решений задачи (I3) сводится к равенству

$$(L-k^2)(y_t+My)=0 \qquad (58)$$

(см.(2) и (3)). В сингулярном случае эти равенства справедливы лишь в областях регулярности. Поэтому для выяснения временной зависимости данных рассеяния нам необходимо показать, что y_t+My есть правильно сшитое (в смысле определения 2) решение задачи (I3). Пользуясь определением решений (I4) и (I6) в силу (3) получаем, что

$$(\partial_t+M)\psi_j^R(x,k)=-12\,\psi_j^S(x,k),$$

$$(\partial_t+M)\psi_j^S(x,k)=\left[\frac{7}{36}v_j^{IV}(x_j)+\frac{5}{3}v_j''(x_j)(v_j(x_j)-k^2)-\right. \qquad (59)$$

$$\left.-\frac{4}{3}(v_j(x_j)-k^2)^3\right]\psi_j^R(x,k),$$

где $v_j(x)$ - регулярная часть решения $u(x)$ (см.(IIб)). По (20) и (2I) коэффициенты $c_j(k)$ и $d_j(k)$ непрерывно дифференцируемы по t, а тогда из (59) и (2I) следует, что решение y_t+My правильно сшито. Учитывая теперь асимптотические свойства, имеем и т.д., откуда следует обычная эволюция данных рассеяния S (39):

$$r(k)\to r(k)e^{8ik^3t},\quad k_j\to k_j,\quad c_j\to c_j e^{8ik_j^3t}. \qquad (60)$$

Все сказанное позволяет, подобно [II], доказать локальную теорему существования и единственности решения уравнения (I) в классе функций из определения I, если потребовать еще существования производных $v_j^{IV}(x_j)$. Полное доказательство этой теоремы и соответствующего глобального результата, требующего рассмотрения с самого начала кратных особенностей вида (8), составит предмет отдельной публикации.

Теперь мы продемонстрируем общую идеологию на конкретных примерах. Рассмотрим односингулярное решение, т.е. сингулярный солитон на регулярном фоне. Включим в $\tilde{S}$ (43) все регулярные солитоны $(c_j>0,\ j=1,\dots,\tilde{M}=M-1)$, если они есть, и воспользуемся формулами (45)-(50) для добавления одного сингулярного солитона $(k_M, \operatorname{Im} k_M>0,\ c_M<0)$. Соответствующее $\tilde{u}(x)$ - обычное регулярное решение уравнения КдВ с $M-1$ солитоном, а $\tilde{\psi}(x,k)$ - (тоже регулярное) решение Йоста. По (48) и (49)

$$w_{MM}(x)=\int_x^\infty \tilde{\psi}^2(z,k_M)\,dz, \qquad (61)$$

так что из (47) и (50)

$$u(x)=\tilde{u}(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left[1+c_M\int_x^\infty \tilde{\psi}^2(z,k_M)\,dz\right]^2. \qquad (62)$$

Учитывая асимптотическое поведение $\tilde{\psi}$ и условие $c_M<0$, видим, что при любом t (см.(60)) аргумент логарифма имеет единственный ноль в некоторой точке $x_1(t)$. Уравнение $x=x_1(t)$ и определяет мировую линию сингулярности начального данного. В случае, если $-ik_M>\max\limits_{j=1,\dots,M-1}(-ik_j)$, то сингулярности в (62) всегда простые ($\ell_1=1$, как в (IIб)). В противном случае возможно конечное число точек $t_1,\dots,t_k$, в которых кратность особенности $\ell_1=2$.

Как уже говорилось, односингулярные решения на регулярном фоне рассматривались в литературе (см. [4 - 6]), где, однако, предполагалось, что $u(x)$ и на пространственной бесконечности ведет себя как $2/x^2$, т.е. формула (IIа) не справедлива, а (IIб) справедлива глобально с быстро убывающей $v(x)$. При этом использовалась формальная теория рассеяния на сингулярном потенциале $u_0=2/x^2$, к которому добавлялась непрерывная часть. Как результат возникала проблема ухода полюса из точки

$x=0$ в динамике. В отличие от нашего подхода в указанных работах возникало рассогласование между решаемой задачей (где полюс движется) и методом ее решения. Решения работ [4 - 6] могут быть получены из нашего решения (62) вырождением по сингулярному солитону: $k_M, c_M \longrightarrow 0$, $c_M/2ik_M \longrightarrow 1$. Перепишем (62) в виде

$$u(x)=\tilde{u}(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left[\frac{e^{2ik_M(x-q)}-1}{2ik_M}-e^{-2ik_M q}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int\limits_x^\infty\left[\tilde{\psi}^2(z,k_M)-e^{2ik_M z}\right]dz\right]^2,$$

где положено $c_M=2ik_M e^{-2ik_M q}$. Теперь можно совершить переход $k_M \longrightarrow 0$. Тогда

$$u(x)=\tilde{u}(x)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left[x-q-\int\limits_x^\infty\left[\tilde{\psi}^2(z,0)-1\right]dz\right]^2 \qquad (63)$$

и дает искомое решение, линия сингулярности которого определяется уравнением

$$x(t)-q=-\int\limits_x^\infty\left[1-\tilde{\psi}^2(z,0)\right]dz\,.$$

Заметим, что если $\tilde{u}(x)$ - чисто солитонное решение, то $\tilde{\psi}^2(x,0)\to 1$ при $x\to\pm\infty$. Поэтому, как легко видеть, $x(t)$ изменяется в ограниченной области оси x - факт, отмечавшийся в работах [4 - 6].

Рассмотрим теперь солитонные и бризерные решения, т.е. решения с $r(k)\equiv 0$ (см.(39)). В этом случае в (45) $\tilde{\psi}(x,k)=e^{ikx}$, а соответствующее $\tilde{u}(x)\equiv 0$. По (48)

$$w_{ij}(x)=\frac{i\,e^{i(k_i+k_j)x}}{k_i+k_j} \qquad (64)$$

и решение с M точками дискретного спектра дается формулами (47), (50) и (64). Полученный вид $\det A(x)$ совпадает с тем, который известен (см., напр., [2]) для случая регулярных солитонов, и отличается лишь ослаблением ограничений на положения нулей k_j и фазы коэффициентов c_j. В нашем случае эти величины удовлетворяют условиям, указанным после формулы (40).

<u>$M=1.\ k_1=i\varkappa,\ \varkappa>0.$</u>

Если $c_1>0$, то мы имеем обычный регулярный солитон. Если $c_1<0$, то

$$u(t,x)=\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{sh}^2\varkappa(x-4\varkappa^2 t)}\,, \tag{65}$$

где без потери общности положено $c_1=-2\varkappa$. Это односингулярное решение с прямой линией сингулярности

$$x(t)=4\varkappa^2 t\,,$$

т.е. можно считать, что (65) описывает свободное движение точечной частицы со скоростью $4\varkappa^2$.

$\underline{M=2.\ k_j=i\varkappa_j,\ \varkappa_j>0.}$

Без потери общности положим

$$c_j=2\varkappa_j\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\varepsilon_j \quad \text{и} \quad \varkappa_2>\varkappa_1\,,\quad \varepsilon_j=\pm 1\,. \tag{66}$$

Пусть $\varepsilon_1\varepsilon_2=1$. Тогда решение дается по (50) с $\tilde{u}=0$ и

$$\det A(x)\simeq \operatorname{ch}\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)x-4(\varkappa_1^3+\varkappa_2^3)t\right]+$$
$$+\varepsilon_1\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\operatorname{ch}\left[(\varkappa_2-\varkappa_1)x-4(\varkappa_2^3-\varkappa_1^3)t\right]\,, \tag{67}$$

где запись $\det A\simeq X$ означает, что $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln X$. Если $\varepsilon_1=1$, то имеем обычное (регулярное) 2-солитонное решение (правая часть (67) никогда не обращается в нуль в силу (66)). Пусть $\varepsilon_1=-1$. Тогда $\det A(x)$ при каждом t имеет два простых нуля в точках $x_1(t)<x_2(t)$. Общее поведение линий особенности этого решения представлено на рис.I. Видно, что они описывают две отталкивающиеся частицы, которые в результате взаимодействия обмениваются скоростями и приобретают фазовые сдвиги.

Пусть теперь $\varepsilon_1\varepsilon_2=-1$. Тогда

$$\det A(x)\simeq \operatorname{sh}\left[(\varkappa_1+\varkappa_2)x-4(\varkappa_1^3+\varkappa_2^3)t\right]+$$
$$+\varepsilon_1\frac{\varkappa_2+\varkappa_1}{\varkappa_2-\varkappa_1}\operatorname{sh}\left[(\varkappa_2-\varkappa_1)x-4(\varkappa_2^3-\varkappa_1^3)t\right]\,. \tag{68}$$

При каждом знаке ε_1 для любого t существует единственная точка $x=x_1(t)$, в которой $\det A(x)$ обращается в нуль. При $\varepsilon_1=1$ этот нуль всегда простой, а при $\varepsilon_1=-1$ это свойство нарушается при $t=0$, где $\det A(x)\big|_{t=0}\simeq x^3$, так что мы имеем особенность решения $u(x)$ кратности $\ell=2$. Поведение линий сингулярности для обоих случаев представлено на рис.2. Каждое из решений описывает взаимодействие частицы, отвечающей сингулярности решения, с регулярным солитоном. Поэтому, имея в виду интерпретацию обычного солитона, мы можем говорить о частицах двух родов: регулярных и сингулярных.

Фактически, в теории появился еще один параметр частицы — знак c_j, играющий роль заряда (или спина) подобно ситуации в уравнении sh-Гордон [20]. Легко заметить, что асимптотические скорости и фазовые сдвиги солитонов не зависят от этого параметра. Поэтому естественно считать, что в теории имеется инвариантность относительно зарядового сопряжения — обращения знака всех c_j. Это позволяет однозначно сопоставить мировые линии также и обычным регулярным солитонам. Так, на рис.2 при $\varepsilon_1 = 1 = -\varepsilon_2$ сплошная линия отвечает сингулярному, а штрих-пунктирная — регулярному солитонам. При изменении знаков ε_j они меняются местами. Сравнение рисунков I и 2 показывает, что частицы одинаковых зарядов отталкиваются, а противоположных — притягиваются. Во втором случае они проходят друг сквозь друга, причем одна из них приобретает в этот момент бесконечную отрицательную скорость. Заметим, что при рассмотрении лишь регулярных солитонов, когда нет возможности выяснить детальную картину их взаимодействия, принято считать, что более быстрый солитон проходит через более медленные, обгоняя их.

Наша интерпретация подтверждается бризерным решением:

$M=2.\quad k_1=(i\varkappa+\mu)/2,\ k_2=(i\varkappa-\mu)/2,\ \varkappa,\mu>0.$

Пусть $c_1 = \frac{\varkappa}{\mu}(\mu+i\varkappa) = c_2^*$. Тогда

$$\det A(x) \simeq sh\,\varkappa\left[x+(3\mu^2-\varkappa^2)t\right] - \frac{\varkappa}{\mu}\sin\mu\left[x-(3\varkappa^2-\mu^2)t\right]. \quad (69)$$

Опять при каждом t имеется единственный нуль $\det A(x)$. Этот нуль простой при всех $t \neq t_n \left(= \frac{n\pi}{\mu(\varkappa^2+\mu^2)},\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right)$, а при $t=t_n$ имеется кратная особенность: $\det A(x) \simeq \left[x+(3\mu^2-\varkappa^2)t_n\right]^3$

Линия особенности этого решения периодична и ее поведение показано на рис.3 сплошной линией. Совершая указанную выше операцию зарядового сопряжения (что соответствует изменению знака перед $\sin$ в (69)), мы получаем кривую, изображенную штрих-пунктирной линией. Таким образом, бризер есть связанное состояние двух разноименно заряженных частиц, колеблющихся вокруг общего центра, который движется с постоянной скоростью $\varkappa^2-3\mu^2$. В отличие от солитонов, которые, по крайней мере асимптотически, движутся слева направо, бризер может двигаться в любую сторону.

Можно рассмотреть различные предельные ситуации, например, двойные нули $a(k)$. Для этого в (68) устремляем $\varkappa_2 \to \varkappa_1$ (или, что дает тот же результат, $\mu \to 0$ в (69)). Можно рассмотреть случай вырождения, когда все $k_j, c_j \to 0$, что при правильном выборе этого предельного перехода позволяет получить рациональные по x и t решения. Например, из (65) при $x \to 0$ имеем

$$u(t,x) = \frac{2}{x^2}, \tag{70}$$

а из (68) при $\varepsilon_1 = -1$ и $\varkappa_1, \varkappa_2 \to 0$

$$u(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln\left[x^3 + 12t\right]^2 . \tag{71}$$

В общем N-солитонном случае это было проделано в [18], где было использовано обычное представление для солитонов, но формально допускалось, что некоторые $c_j < 0$, т.е. в соответствии с нашими результатами была использована формула, содержащая сингулярные солитоны. При этом в [18] были получены рациональные решения из [8,19].

Как говорилось во введении, динамика полюсов этих рациональных решений рассматривалась в [8], причем частицам сопоставлялись также полюса, лежащие в комплексной области. В частности, решение (71) интерпретировалось как 3-частичное. При этом динамика частиц описывалась уравнениями первого порядка и содержала связи. В нашем случае, как решение (68), так и (71) интерпретируются как 2-частичные решения. Интересно, что решение (70) есть зарядово-сопряженное к (71), (т.е. получается из (68) при $\varepsilon_1 = +1$). В нашем подходе каждый солитон задается двумя вещественными параметрами $(-ik_j, c_j)$, а бризер - четырьмя. Поэтому, зная линии сингулярности, в принципе можно, дифференцируя уравнения этих линий по t, выразить указанные параметры через положения и скорости частиц. Это доказывает существование динамических уравнений второго порядка ньютонова типа, описывающих взаимодействие наших частиц. Понятно, что никаких связей в этом подходе не возникает.

Используя введенные в разделе 2 вспомогательные регулярные потенциалы $U(x)$, можно, подобно [21], получить модифицированные плотности интегралов движения, отличающиеся от обычных специальными дивергентными членами, устраняющими сингулярности, так что соответствующие интегралы движения конечны.

В заключение авторы выражают благодарность Ф.Калоджеро, указавшему нам на работы [4 - 6], и отмечают, что изложенное здесь обобщение этих работ основано на старой работе [13] Л.Д.Фаддеева.

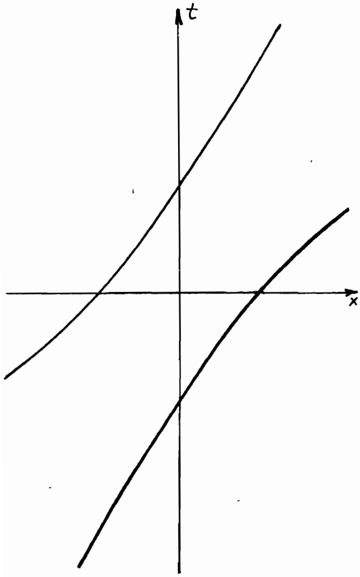


Рис.I

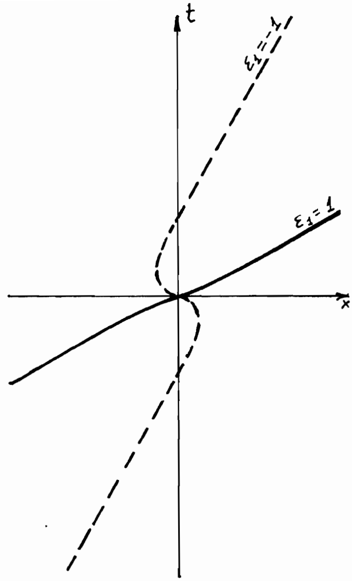


Рис.2

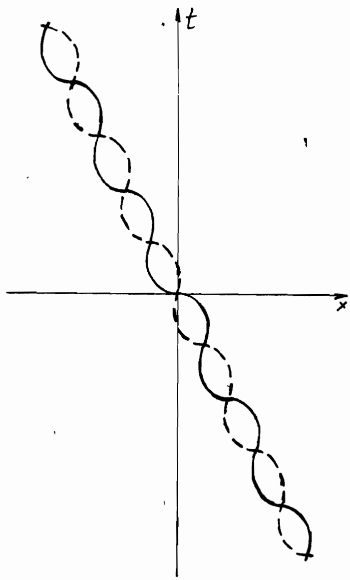


Рис.3

Литература

1. G a r d n e r C.S., G r e e n e J.M., K r u s k a l M.D., M i u r a R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. - Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, N 19, p.1095-1097.
2. З а х а р о в В.Е., М а н а к о в С.В., Н о в и к о в С.П., П и т а е в с к и й Л.П. Теория солитонов. М., 1980.
3. Ф а д д е е в Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. - В кн.: Современные проблемы математики (Итоги науки и техники), 1974, т.3, с.93-180.
4. A b l o w i t z M.J., C o r n i l l e H. On solutions of the Korteweg-de Vries equation. - Phys.Lett., 1979, v.72A,N2, p.277-280.
5. D e g a s p e r i s A. Solutions of the Korteweg-de Vries equation and their spectral transform. - In: Problèmes inverses et évolution nonlinéaire. Ed.Sabatier P., Paris, 1980, p.189-222.
6. C a l o g e r o F., D e g a s p e r i s A. Spectral transform and solitons. v.1, Horth-Holland, 1982, p.281-287.
7. K r u s k a l M.D. The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations. - Lect.App.Math., 1974, v.15, p.61-83.
8. A i r a u l t H., M c K e a n H., M o s e r J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem. - Comm.Pure Appl.Math.,v.30, N 1, p.95-148.
9. А р к а д ь е в В.А., П о г р е б к о в А.К., П о л и в а н о в М.К. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений.I. - ТМФ, 1982, т.53, № 2, с.163-180.
10. А р к а д ь е в В.А., П о г р е б к о в А.К., П о л и в а н о в М.К. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений.II. ТМФ, 1983, т.54, № 1, с.23-37.
11. А р к а д ь е в В.А. Метод обратной задачи рассеяния в применении к сингулярным решениям нелинейных уравнений.III. - ТМФ, 1984, т.58, № 1, с.38-49.
12. Д е А л ь ф а р о В., Р е д ж е Т. Потенциальное рассеяние. М., "Мир", 1966.
13. Ф а д д е е в Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. - УМН, 1959, т.14, № 4, с.57-119.
14. C r u m M. Associated Sturm - Liouville systems. - Quart.J.

Math.2, 1955, v.6, p.121-127.
15. Марченко В.А. Операторы Штурма - Лиувилля. К., 1977.
16. Wadati M., Sanuki H., Konno K. Relationships among inverse scattering method, Bäcklund transformation and infinite nnmber of conservation laws. - Prog. Theor.Phys., 1975, v.53, N 2, p.419-436.
17. Deift P.A. Applications of a commutator formula. - Duke Math.J., 1978, v.45, N 2, p.267-310.
18. Ablowitz M.J., Satsuma J. Solitons and rational solutions of nonlinear evolution equations. - J. Math.Phys., 1978, v.19, N 6, p.2180-2186.
19. Adler M., Moser J. On a class of polynomials connected with the Korteweg-de Vries equation. - Comm.Math. Phys., 1978, v.61, N 1, p.1-30.
20. Pogrebkov A.K. Singular solutions: An example of a sinh-Gordon equation. - Lett.Math.Phys., 1981, v.5, p.277-285.
21. Аркадьев В.А. Метод обратной задачи рассеяния для сингулярных решений нелинейных уравнений. - Автореферат канд.дисс., Москва, МИАН им.В.А.Стеклова, 1983.

В.И.Арнольд

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Хорошо известно, что с каждым эллипсоидом в конечномерном евклидовом пространстве связаны эллиптические координаты Якоби, с помощью которых интегрируются уравнения геодезических на этом эллипсоиде, а также некоторые другие уравнения, например - уравнения движения точки на сфере под действием сил с квадратичным потенциалом.

Это наводит на мысль, что и в бесконечномерном, гильбертовом пространстве с каждым симметрическим оператором должен быть связан свой класс интегрируемых систем. Для исследования этих систем нужно перенести на бесконечномерный случай теорию эллиптических координат. А для этого нужно прежде всего изложить обычную конечномерную теорию конфокальных поверхностей второго порядка в бескоординатной форме.

Такое бескоординатное изложение теории эллиптических координат Якоби было приведено в докладе [I] и воспроизведено ниже. Для перехода к бесконечномерному случаю нужно всюду заменить симметрические операторы в евклидовом конечномерном пространстве самосопряженными в гильбертовом. При этом, поскольку эллиптические координаты связаны не с самим оператором, а с его резольвентой, неограниченность исходного оператора (который может, например, быть дифференциальным) не является слишком серьезным препятствием.

В некоторых случаях получаемые таким образом эллиптические координаты в гильбертовом пространстве образуют счетный набор. Однако возможен и случай непрерывного спектра, когда набор координат получается континуальным. В этом случае переход от исходной точки гильбертова (скажем, функционального) пространства к континуальному набору эллиптических координат этой точки может рассматриваться как нелинейное преобразование функционального пространства. Это преобразование, по аналогии с преобразованием Фурье, можно назвать преобразованием Якоби: исходной функции сопоставляется функция, выражающая зависимость континуальной эллиптической координаты от ее номера (т.е. мера на оси спектрального параметра). Я надеюсь, что исследование функционально-эллиптических свойств прямого и обратного преобразований Якоби - дело не слишком далекого будущего, здесь же ограничиваюсь предварительной подготовкой - геометрическим, безвыкладочным описанием конечномерной теории эллиптических координат (формульные описания можно найти у Якоби [2] и Мозера [3]).

§ 1. Эллиптические координаты и конфокальные квадрики

Эллиптические координаты в евклидовом пространстве определяются при помощи конфокальных квадрик (поверхностей второй степени). Геометрия же конфокальных квадрик получается из геометрии пучка квадратичных форм в евклидовом пространстве (т.е. из теории главных осей эллипсоидов или теории малых колебаний) переходом в сопряженное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Евклидовым пучком квадрик (соответственно квадратичных форм) в евклидовом векторном пространстве V называется однопараметрическое семейство поверхностей второй степени

$$\frac{1}{2}(A_\lambda x, x) = 1$$

(соответственно, форм A_λ), где

$$A_\lambda = A - \lambda E$$

и где A - симметрический оператор

$$A : V \to V^*, \quad A^* = A .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конфокальным семейством квадрик в евклидовом пространстве называется семейство квадрик, двойственных квадрикам одного евклидова пучка (квадрик в пространстве, двойственном рассматриваемому):

$$\frac{1}{2}(A_\lambda^{-1} \xi, \xi) = 1 .$$

Таким образом, конфокальные друг другу квадрики образуют однопараметрическое семейство, но от параметра квадратичная форма семейства зависит уже не линейно.

ПРИМЕР. Плоские кривые, конфокальные фиксированному эллипсу, - это все эллипсы и гиперболы с теми же фокусами.

На рис.1 внизу изображены кривые одного конфокального семейства, а вверху - кривые соответствующего евклидова пучка.

Эллиптическими координатами точки называются значения параметра λ, которым соответствуют проходящие через эту точку

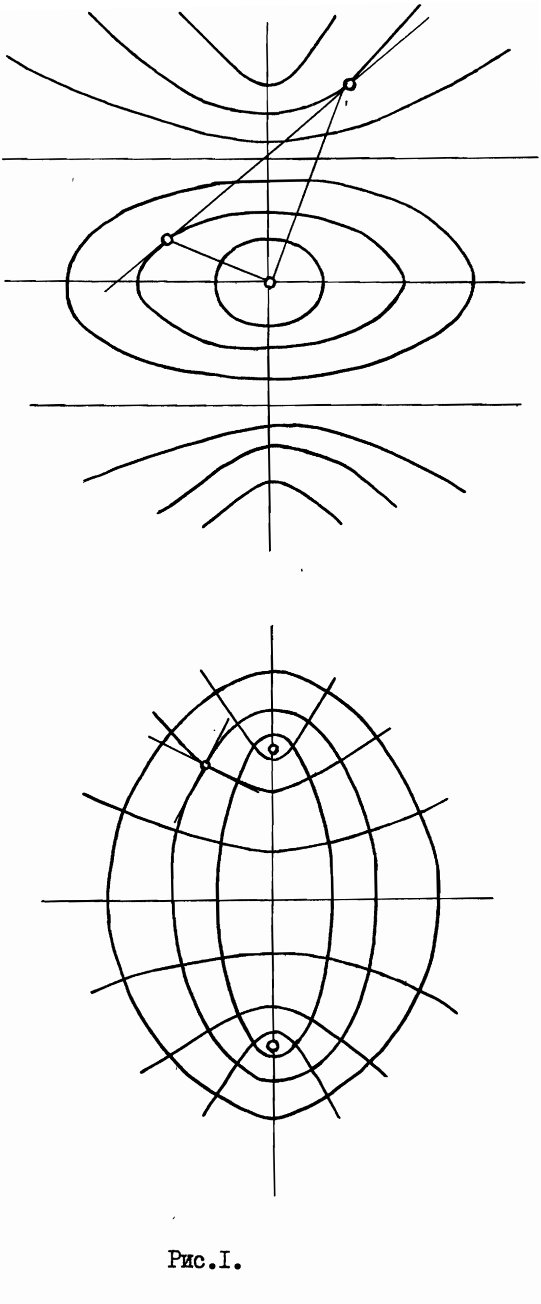


Рис.I.

квадрики фиксированного семейства конфокальных квадрик.

Зафиксируем в евклидовом пространстве эллипсоид, все оси которого имеют неравные длины.

ТЕОРЕМА I. (Якоби). Через каждую точку n - мерного евклидова пространства проходит n квадрик, конфокальных выбранному эллипсоиду. Гладкие конфокальные квадрики пересекаются под прямыми углами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отличная от 0 точка пространства соответствует в двойственном пространстве аффинной гиперплоскости: последняя состоит из линейных форм, равных I в этой точке. В терминах двойственного пространства теорема I означает, что всякая гиперплоскость, не проходящая через 0 в n - мерном евклидовом пространстве, касается ровно n квадрик евклидова пучка, причем векторы, ведущие из 0 в точки касания, попарно ортогональны (рис.I справа).

Доказательство указанного свойства евклидова пучка основано на том, что эти векторы определяют главные оси подходящей квадратичной формы, а именно формы $B=\frac{1}{2}(Ax,x)-\frac{1}{2}(\ell,x)^2$,

где $(\ell,x)=1$ - уравнение рассматриваемой гиперплоскости.

В самом деле, на главной оси любой квадратичной формы B, отвечающей собственному числу λ, форма $B-\lambda E$ обращается в 0 вместе со своим градиентом. Обращение в 0 самой этой формы в точке пересечения главной оси с гиперплоскостью означает, что точка пересечения лежит на квадрике $\frac{1}{2}(A_\lambda x,x)=1$, а обращение в 0 градиента означает, что квадрика в этой точке касается гиперплоскости.

ТЕОРЕМА 2 (Шаля). Общая прямая в n - мерном евклидовом пространстве касается $n-1$-й различной квадрики семейства конфокальных квадрик, причем плоскости, касающиеся каждая своей квадрики в точке ее касания с прямой, попарно ортогональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спроектируем квадрики конфокального семейства пучком параллельных прямых на перпендикулярную пучку гиперплоскость. Каждая квадрика определяет видимый контур (множество критических значений проектирования квадрики). Для направления проектирования общего положения видимые контуры квадрик - это поверхности второй степени в гиперплоскости - образе проектирования.

ЛЕММА. Видимые контуры квадрик конфокального семейства сами образуют конфокальное семейство квадрик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переход к двойственным объектам превращает сечения в проекции, а проекции в сечения. Видимые контуры проектирования конфокальных квадрик пучком параллельных прямых двойственны поэтому сечениям двойственных квадрик проходящей через нуль гиперплоскостью.

Но сечения квадрик евклидова пучка гиперплоскостью, проходящей через 0, образуют евклидов пучок квадрик в этой гиперплоскости. По двойственности отсюда следует лемма.

Применим доказанную лемму к проектированию вдоль прямой, о которой идет речь в теореме 2. По лемме видимые контуры проектирования конфокальных квадрик теоремы 2 образуют конфокальное семейство квадрик в гиперплоскости. По теореме I эти видимые контуры пересекаются под прямыми углами. Это доказывает теорему 2.

§ 2. <u>Геодезические на эллипсоидах</u>

ТЕОРЕМА 3 (Якоби и Шаля). Касательные прямые к геодезической линии квадрики в n -мерном пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются, кроме этой квадрики, еще $n-2$ -х конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек геодезической.

НАЧАЛО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Рассмотрим многообразие ориентированных прямых евклидова пространства. Это многообразие имеет естественную симплектическую структуру, как многообразие характеристик гиперповерхности $p^2 = 1$ в фазовом пространстве свободной частицы, движущейся по инерции в нашем евклидовом пространстве.

Характеристика на гиперповерхности в симплектическом многообразии - это интегральная кривая поля характеристических направлений, т.е. поля кососортогональных дополнений к касательной плоскости гиперповерхности. Иными словами характеристика гиперповерхности - это лежащая на этой гиперповерхности фазовая кривая уравнений Гамильтона, с функцией Гамильтона, имеющей на этой гиперповерхности нуль первого порядка.

Симплектическая структура многообразия характеристик гиперповерхности симплектического многообразия определяется тем, что кососкалярное произведение любых двух векторов, касающихся гиперповерхности в исходном симплектическом многообразии, равно кососкалярному произведению их проекций на многообразие характеристик.

ЛЕММА А. Каждая характеристика многообразия всех прямых, касающихся заданной гиперповерхности в евклидовом пространстве, состоит из касательных прямых одной геодезической гиперповерхности (во всех точках геодезической).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ А. Здесь мы для краткости речи отождествим кокасательные векторы евклидова пространства с касательными при помощи евклидовой структуры, так что исходное фазовое пространство будем представлять себе как пространство векторов, приложенных в точках евклидова пространства (импульсы отождествляем со скоростями). Орты, приложенные в точках рассматриваемой гиперповерхности и касающиеся ее, образуют в фазовом пространстве подмногообразие нечетной коразмерности (равной 3). Характеристики этого подмногообразия определяют геодезический поток на рассматриваемой гиперповерхности.

Отображение, сопоставляющее вектору прямую, на которой он лежит, переводит указанное подмногообразие коразмерности 3 в многообразие касательных прямых гиперповерхности. При этом отображении характеристики переходят в характеристики (по определению симплектической структуры пространства прямых). Это доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Проведенное рассуждение легко обобщается на следующую общую ситуацию, впервые рассмотренную Мельрозом [4] (см. также [5], [6]).

Пусть Y , Z – пара гиперповерхностей в симплектическом многообразии X , трансверсально пересекающихся по подмногообразию W . Рассмотрим многообразия характеристик B и C гиперповерхностей Y и Z вместе с каноническими расслоениями на характеристики $Y \twoheadrightarrow B$ и $Z \twoheadrightarrow C$; многообразия B и C наследуют из X симплектические структуры.

В пересечении W , выделяется еще гиперповерхность (коразмерности 3 в X), в точках которой ограничение симплектической структуры X на W вырождается. Эту гиперповерхность Σ в W можно также определить как множество критических точек сквозного отображения $W \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow B$ (или, по желанию, $W \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow C$). Введенные объекты образуют следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
& X^{2n} & \\
Y^{2n-1} \arrow[ur, hook] \arrow[d] & & Z^{2n-1} \arrow[ul, hook'] \arrow[d] \\
& W^{2n-2} \arrow[uu, hook] \arrow[ul, hook'] \arrow[ur, hook] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B^{2n-2} & & C^{2n-2} \\
& \Sigma^{2n-3} \arrow[uu, hook] \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Аналог леммы А в этой ситуации утверждает, что характеристики на образах отображений $\Sigma \to B$ и $\Sigma \to C$ являются образами одних и тех же кривых на Σ (а именно, характеристик подмногообразия Σ симплектического многообразия X).

Сама лемма А получается из этого утверждения в частном случае, когда $X = R^{2n}$ – фазовое пространство свободной частицы в R^n, гиперповерхность Y образована ортами (задается условием $p^2 = 1$, т.е. является поверхностью уровня гамильтониана свободной частицы), гиперповерхность Z образована всеми векторами, приложенными в точках изучаемой поверхности в R^n. В этом случае B есть многообразие всех ориентированных прямых евклидова пространства, а Σ многообразие касательных ортов. Отображение $\Sigma \to B$ сопоставляет касательному орту содержащую его касательную прямую. Многообразие C есть пространство (ко) касательного расслоения изучаемой поверхности. $\Sigma \to C$ -вложение в это пространство пространства расслоения единичных сфер (в иных терминах – вложение гиперповерхности уровня кинетической энергии, т.е. гамильтониана движения со связями).

Приведенную выше диаграмму всегда полезно иметь в виду при исследовании связей в симплектической геометрии.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3. Предположим, что в евклидовом (конфигурационном) пространстве задана гладкая функция, и что ограничение этой функции на некоторую прямую имеет невырожденную критическую точку. В таком случае такая же критическая точка (точка касания прямой с поверхностью уровня функции) будет и на любой близкой прямой. Значение функции в критической точке является, таким образом, функцией от прямой. Назовем эту функцию прямой индуцированной (из исходной функции точки).

ЛЕММА В. Если функции точек евклидова пространства таковы, что плоскости, касающиеся их поверхностей уровня в точках касания некоторой прямой с этими поверхностями[*] ортогональны, то скобка Пуассона индуцированных функций обращается в нуль в точке, являющейся рассматриваемой прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ В. Вычислим производную второй индуцированной функции вдоль фазового потока, заданного первой, как функцией Гамильтона. Фазовые кривые, заданные первой индуцированной функцией на ее поверхности уровня, являются характеристиками этой поверхности. Поверхность уровня первой индуцированной функции состоит из всех прямых, касающихся фиксированного много-

---

[*] Точка касания, вообще говоря, своя для каждой функции.

образия уровня первой функции точки. Каждая характеристика этого многообразия прямых, по лемме А, состоит из прямых, касающихся одной геодезической многообразия уровня первой функции точки.

При бесконечно-малом сдвиге точки по геодезической поверхности касательная к геодезической прямая (с точностью до малых высшего порядка) поворачивается в плоскости исходной касательной и нормали к поверхности. По условию, касательная плоскость к поверхности уровня второй функции в точке касания этой поверхности с нашей прямой перпендикулярна касательной плоскости поверхности уровня первой функции. Поэтому при указанном выше бесконечно-малом повороте прямая сохранит касание с той же самой поверхностью уровня второй функции (с точностью до малых высшего порядка). Следовательно, скорость изменения второй индуцированной функции под действием фазового потока, заданного первой, обращается в нуль в изучаемой точке пространства прямых, что и доказывает лемму В.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 3. Зафиксируем прямую общего положения в R^n . По теореме 2 она касается $n-1$-й квадрики конфокального семейства в $n-1$-й точке. Построим в окрестности каждой из этих точек гладкую функцию без критических точек, поверхности уровня которой – квадрики нашего конфокального семейства.

Зафиксируем одну из этих квадрик ("первую") и рассмотрим уравнения Гамильтона в пространстве прямых, функцией Гамильтона которых является первая индуцированная функция прямой. Каждая фазовая кривая на фиксированной поверхности уровня функции Гамильтона состоит из касательных прямых одной геодезической квадрики (лемма А). Остальные индуцированные функции имеют с этой функцией нулевую скобку Пуассона по лемме В (ибо плоскости, касающиеся конфокальных друг другу поверхностей в точках одной прямой ортогональны по теореме 2).

Итак, все индуцированные функции суть первые интегралы системы, функцией Гамильтона которой является любая из них. Поскольку фазовые кривые этой системы - касательные к одной геодезической первой поверхности, все индуцированные функции принимают на всех этих касательных постоянные (не зависящие от точки геодезической) значения. Отсюда вытекает как теорема 3, так и

ТЕОРЕМА 4. Геодезический поток на центральной поверхности второй степени в евклидовом пространстве - вполне интегрируемая по Лиувиллю система (имеющая столько независимых интегралов в инволюции, каково число степеней свободы).

ЗАМЕЧАНИЕ. Строго говоря, мы доказали теорему 3 лишь для прямых общего положения, но результат по непрерывности легко распространяется на исключительные случаи (в частности, на асимптотические прямые наших квадрик). Точно так же теорема 4 доказана для поверхностей с неравными главными осями, но предельным переходом распространяется на более симметричные квадрики вращения (а также на нецентральные, "параболоиды").

§ 3. Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори

Эллиптические координаты позволяют распространить известные теоремы Ньютона о притяжении сфер на случай притяжения эллипсоидов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гомеоидной плотностью на поверхности эллипсоида называется плотность слоя между данным и бесконечно-близким к нему гомотетичным эллипсоидом с тем же центром. Хорошо известна

ТЕОРЕМА (Айвори). Конечная масса, распределенная по поверхности эллипсоида с гомеоидной плотностью, не притягивает внутренние точки, а внешние точки притягивает так же, как такая же масса, распределенная с гомеоидной плотностью по поверхности меньшего конфокального эллипсоида.

Здесь притяжение определяется законом Ньютона или Кулона: в n-мерном пространстве сила пропорциональна r^{1-n} (как предписывает фундаментальное решение уравнения Лапласа).

Обобщение теоремы Ньютона о притяжении внутренних точек на случай гиперболических гомеоидных слоев и на случай притяжения массой, распределенной по гиперповерхности уровня гиперболического многочлена любой степени доказано в [7] (см. также [8]).

Многочлен степени m, $f(x_1, \ldots, x_n)$, называется гиперболическим (относительно точки 0), если его ограничение на любую прямую, проходящую через 0, имеет лишь действительные корни.

Гомеоидная плотность заряда на гиперповерхности $f = 0$ определяется как плотность однородного бесконечно-тонкого слоя между гиперповерхностями $f = 0$ и $f = \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ (знаки зарядов выбираются так, чтобы последовательные овалоиды были заряжены противоположно).

Теорема из [7] утверждает, что гомеоидный заряд не притягивает точку 0 (и все точки внутри самого внутреннего овалоида), и что это свойство заряда сохраняется, если умножить его плотность на любой многочлен степени не выше $m-2$.

ОБОБЩЕНИЕ: Если умножить гомеоидную плотность заряда на любой многочлен степени $m - l + r$, то потенциал такого заряда внутри самого внутреннего овалоида будет гармоническим многочленом степени r (А.Б.Гивенталь, 1983). При попытке перенести на гиперболоиды теоремы Айвори о притяжении конфокальными эллипсоидальными слоями выяснилось, что существенную роль играет топология гиперболоида. При переходе к гиперболоидам различных сигнатур вместо гомеоидных плотностей следует рассматривать гармонические на гиперболоидах дифференциальные формы различных степеней, а вместо ньютоновского или кулоновского потенциала - соответствующим образом обобщенные потенциалы закона Био-Савара.

В простейшем нетривиальном случае однополостного гиперболоида в трехмерном евклидовом пространстве результаты состоят в следующем [10].

Гиперболоид делит пространство на две части: "внутреннюю" и "внешнюю" (неодносвязную). Рассмотрим линии эллиптических координат, поверхности уровня которых - квадрики, конфокальные данному гиперболоиду.

Линии эллиптических координат на нашем гиперболоиде, получающиеся пересечением его с эллипсоидами (замкнутые линии кривизны гиперболоида) назовем параллельными гиперболоида. Перпендикулярные им линии пересечения с двуполостными гиперболоидами назовем меридианами.

Хотя эллиптические координаты и имеют особенности (на всех плоскостях симметрии квадрик семейства), гиперболоид гладко расслоен на параллели (диффеоморфные окружностям) и меридианы (диффеоморфные прямым).

Область внутри трубы гиперболоида также гладко расслоена на меридианы (ортогональные конфокальным эллипсоидам семейства), а кольцевая область вне гиперболоида - на параллели (ортогональные однополостным гиперболоидам).

ТЕОРЕМА. Ток надлежащей плотности, текущий вдоль меридианов гиперболоида, создает магнитное поле, которое внутри трубы гиперболоида равно нулю, а во внешней кольцевой области направлено вдоль параллелей. Ток надлежащей плотности, текущий вдоль параллельной гиперболоида, создает магнитное поле, равное нулю во внешней, кольцевой области и направленное вдоль меридианов внутри трубы гиперболоида.

Плотности токов, создающих такие магнитные поля, обобщают гомеоидные плотности на поверхностях эллипсоидов и могут быть описаны следующим образом.

С семейством конфокальных квадрик в трехмерном евклидовом пространстве связаны две "фокальные кривые": эллипс и гипербола. Фокальный эллипс – это край предельного эллипсоида семейства, у которого малая ось сжалась в 0 (фокальная гипербола получается так же, из двуполостного гиперболоида).

Определим на фокальном эллипсе гомеоидную плотность следующим образом. Сначала рассмотрим какую-либо неплоскую параллель, определенную как неплоское пересечение конфокальных эллипсоида и однополостного гиперболоида. Гомеоидная плотность на этой параллели определяется как плотность бесконечного тонкого слоя, получающегося при пересечении слоя между данным эллипсоидом и бесконечно-близким к нему гомотетичным эллипсоидом с тем же центром с одной стороны и слоя между данным однополостным гиперболоидом и бесконечно-близким к нему гомотетичным гиперболоидом с тем же центром. Мы нормируем эту гомеоидную плотность на параллели так, чтобы масса всей параллели была равна 1.

Теперь рассмотрим фокальный эллипс как предел неплоских параллелей. Оказывается, нормированные гомеоидные плотности параллелей имеют при стремлении параллелей к фокальному эллипсу определенный предел. Этот предел и называется гомеоидной плотностью фокального эллипса.

Гомеоидная плотность фокальной гиперболы определяется аналогичным образом.

Теперь мы можем описать плотности токов, создающие описанные в теореме магнитные поля. Поверхность однополостного гиперболоида расслоена над фокальным эллипсом (слой над точкой – меридиан, лежащий на том же двуполостном гиперболоиде, что рассматриваемая точка).

Поток меридианного тока, описанного в теореме, через любую кривую на гиперболоиде равен интегралу формы гомеоидной плотности на фокальном эллипсе по проекции этой кривой на фокальной эллипс (вдоль двуполостных гиперболоидов).

Плотность тока, текущего вдоль параллелей, индуцируется аналогичным образом из гомеоидной плотности на фокальной гиперболе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Магнитное поле параллельного тока указанной плотности внутри трубы гиперболоида совпадает во внешней области каждого конфокального эллипсоида (с точностью до знака) с ньютоновским или кулоновским полем заряда, распределенного по поверхности этого эллипсоида с гомеоидной плотностью *).

Точно так же магнитное поле меридианного тока в кольцевой

*) Это именно та плотность, с которой сам собой распределяется заряд на поверхности проводящего эллипсоида.

области вне однополостного гиперболоида совпадает (с точностью до знака) в пространстве между полами каждого двуполостного конфокального гиперболоида с кулоновским полем двухравных зарядов разных знаков, распределенных по двум полам этого двуполостного гиперболоида с гомеоидной плотностью (О.П.Щербак).

Сформулированные выше результаты недавно перенесены Б.З.Шапиро и А.Д.Вайнштейном на гиперболоиды в евклидовых пространствах любого числа измерений. Для гиперболоида в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфного $S^k \times \mathbb{R}^\ell$, строится гармоническая k-форма во внешней области (диффеоморфной произведению S^k на полупространство) и гармоническая ℓ-форма во внутренней.

Соответствующие гомеоидные плотности определяются на фокальном эллипсоиде размерности k и фокальном двуполостном гиперболоиде размерности ℓ таким же предельным переходом от пересечений слоев между бесконечно-близкими гомотетичными квадриками, который выше описан для $k=\ell=1$.

Безвыкладочные доказательства этих геометрических теорем, даже в частном случае магнитного поля в трехмерном пространстве, неизвестны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Наличие выделенных гармонических форм на гиперболоидах и в дополнительных к ним областях подсказывает, что на некомпактных (а возможно и особых) алгебраических или полуалгебраических многообразиях в пространствах дифференциальных форм можно пытаться искать фильтрации, аналогичные возникающим в теории смешанных структур Ходжа, чтобы восстановить взаимнооднозначное соответствие между классами когомологий и гармоническими формами, имеющееся на гладком компактном многообразии (причем, однако в некомпактном или особом случае классы когомологий фиксированной размерности могут реализовываться формами различных степеней).

Литература

1. А р н о л ь д В.И. **Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с квадриками** (по Ю.Мозеру). - УМН, 1979, т.34, № 5, с.214-215.
2. Я к о б и К.Г. **Лекции по динамике.** М.-Л., 1936.
3. М о з е р Ю. **Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем.** - УМН, 1981, т.36, № 5, с.109-151.
4. M e l r o s e R.B. Equivalence of glancing hypersurfaces.- Invent.Math., 1976, 37, p.165-191.

5. А р н о л ь д В.И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост. – Функц. анализ и его прил. 1981, т.15, в.4, с.1-14.
6. А р н о л ь д В.И. Особенности в вариационном исчислении. – В кн.: Итоги науки: Современные проблемы математики, 1983, т.22, с.3-55.
7. А р н о л ь д В.И. О ньютоновском потенциале гиперболических слоев. – Тр.Тбил.ун-та, сер.матем., мех., астр., 1982, т.232-233, с.23-28.
8. А р н о л ь д В.И. О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц. – УМН, 1982, т.37, № 4 с.125.
9. A r n o l d V.I. Some algebro-geometrical aspects of the Newton attraction theory. Arithmetic and Geometry. – In:Papers dedicated to I.R. Shafarevich on the occasion of his sixteeth birthday, Vol.II, Geometry (Progress in Mathematics, Vol.36, 1983), p. 1-4.
10. А р н о л ь д В.И. Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори. – УМН, 1983, т.38, № 5, с.35-65.

А.Б.Венков

ПОСТРОЕНИЕ "HAUPTFUNKTION", РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ШВАРЦА И ФУКСА ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ РОДА НОЛЬ МЕТОДОМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Целью настоящей работы является обобщение основных результатов [I], [2] на произвольную фуксову группу первого рода с некомпактной фундаментальной областью, которая отвечает римановой поверхности рода ноль. На промежуточном этапе исследуется общий ряд Зигеля - Сельберга, в частности, его значение в начальной точке спектра автоморфного лапласиана.

В первой части работы будем предполагать, что Γ - произвольная фуксова группа первого рода с некомпактной фундаментальной областью F.

Пусть H - плоскость Лобачевского, реализованная как верхняя полуплоскость. Для $\alpha = 1, \ldots, n$ определим подгруппу $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$, стабилизирующую параболическую вершину F z_α. Будем считать: $\Gamma_n = \Gamma_\infty = \{ S^m \}$, $S: z \to z+1$, $z \in H$. Введем набор $g_\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ $\alpha = 1, \ldots, n$ таких, что $z_\alpha = g_\alpha \infty$ и $g_\alpha \Gamma_\infty g_\alpha^{-1} = \Gamma_\alpha$. Будем предполагать $g_n = E$ - единица группы. (Это предположение является несущественным и принято лишь для некоторого технического удобства). Введем ряд Зигеля-Сельберга (см. [3], [I])

$$F_\ell(z; s; \Gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} \sqrt{y(\gamma z)}\, I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |\ell| y(\gamma z)) \exp 2\pi i x(\gamma z),$$

где $I_s(y)$ - модифицированная функция Бесселя, $z = x(z) + iy(z) = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \neq 0$.

Ряд $F_\ell(z; s; \Gamma)$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, допускает мероморфное продолжение на все $s \in \mathbb{C}$, является Γ-автоморфным C^∞-решением дифференциального уравнения:

$$-Lu + s(1-s)u = 0,$$

где L-оператор Лапласа-Бельтрами на H. Функция $F_\ell(z; s; \Gamma)$ может быть разложена в специальные ряды Фурье:

ТЕОРЕМА I. Справедливо разложение Фурье:

$$F_\ell(g_\alpha z; s; \Gamma) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i k x}\, b_k(y; \ell; \alpha; s; \Gamma), \quad z = x + iy$$

при этом для коэффициентов Фурье имеют место формулы:

I) $k=0,\ l\neq k\ (l,k\in\mathbb{Z}),\ \alpha=1,2,\dots,n$

$$b_k(y;l;\alpha;s;\Gamma)=2\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|k|y)\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\alpha}} c^{-1}S(-k,-l;c)M_{2s-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{-kl}}{c}\right) \tag{I}$$

где

$$M_{2s-1}(a\sqrt{-ml})=\begin{cases} I_{2s-1}(a\sqrt{|ml|}), & ml<0\\ J_{2s-1}(a\sqrt{ml}), & ml>0\end{cases}$$

и I_s, J_s - функции Бесселя,

$$S_\alpha(k,l;c)=\sum_{0\le d<c}\exp\frac{2\pi i}{c}(ka+ld) \tag{2}$$

общая сумма Клостермана $\gamma g_\alpha z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, γ берется в классе $\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\alpha$, сумма однозначно определяется матричным элементом $c=c(\gamma g_\alpha)$ и параметрами k, l.

2) $k=l\neq 0\ \ (k,l\in\mathbb{Z}),\ \alpha=1,\dots,n$

$b_k(y;k;\alpha;s;\Gamma)$ равно правой части равенства (I) для $k=l$ плюс $\delta_{\alpha n}\sqrt{y}\,I_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|l|y)$, где $\delta_{\alpha n}$ - символ Кронекера (напомним, n-я вершина F лежит в ∞).

3) $k=0,\ l\in\mathbb{Z},\ l\neq 0,\ \alpha=1,2,\dots,n$

$$b_0(y;l;\alpha;s;\Gamma)=\varphi(-l;\alpha;s;\Gamma)\frac{y^{1-s}}{2s-1},$$

где $\varphi(l;\alpha;s;\Gamma)$ тесно связана с l-м коэффициентом Фурье ряда Эйзенштейна-Мааса. Точнее говоря,

$$E_\beta(g_\alpha z;s;\Gamma)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi ixk}a_k(y;\beta;\alpha;s;\Gamma),\quad z=x+iy$$

Для $\operatorname{Re}s>1$ $\quad E_\beta(z;s;\Gamma)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\backslash\Gamma}y^s(g_\beta^{-1}\gamma z)$.

Для $k \neq 0$ $a_k(y;\beta;\alpha;s;\Gamma) = \sqrt{y}\, K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|k|y)\,\tilde{\varphi}(k;\beta;\alpha;s;\Gamma)$

$$\tilde{\varphi}(k;\beta;\alpha;s;\Gamma) = 2\pi^{s}|k|^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)^{-1}\eta(k;\beta;\alpha;s;\Gamma)$$

$$\eta(k;\beta;\alpha;s;\Gamma) = \sum_{\substack{c>0 \\ \gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha}} \frac{1}{|c|^{2s}} S_{\beta\alpha}(0;k;c) \quad .$$

В этих формулах $\Gamma(s)$ -функция Эйлера, $S_{\beta\alpha}(k;\ell;c)$ еще более общая сумма Клостермана, которая формально определяется правой частью (2), но с $g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z = (az+b)(cz+d)^{-1}$. Наконец, верно равенство

$$\varphi(\ell;\alpha;s;\Gamma) = \tilde{\varphi}(\ell;n;\alpha;s;\Gamma) \ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе доказательства теоремы лежит общий классический метод построения разложений Фурье относительно параболических подгрупп Γ_α для рядов вида

$$\Phi(z;\beta;\Gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma} f(y(g_\beta^{-1}\gamma z))\, e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma z)}, \quad \ell\in\mathbb{Z} \ ,$$

применяемый ранее в специальных ситуациях Г.Петерсоном, А.Сельбергом, Д.Нибуром и пр. (см., например, [3]). Справедливы преобразования

$$\int_0^1 dx \Big\{ \sum_{\Gamma_\beta\setminus\Gamma} f(y(g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z))\, e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z)} \Big\}\, e^{-2\pi i k x} =$$

$$= \int_0^1 dx \Big\{ \sum_{\gamma\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha} \ \sum_{\gamma_2\in\Gamma_\alpha} f(y(g_\beta^{-1}\gamma_1\gamma_2 g_\alpha z))\, e^{2\pi i\ell x(g_\beta^{-1}\gamma_1\gamma_2 g_\alpha z)} \Big\}\, e^{-2\pi i k x} =$$

$$= \sum_{\gamma_1\in\Gamma_\beta\setminus\Gamma/\Gamma_\alpha} e^{2\pi i(\ell\frac{a}{c}+k\frac{d}{c})} \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\frac{y}{c^2(x^2+y^2)}\Big)\, e^{-2\pi i k x - \frac{2\pi i\ell}{(x^2+y^2)c^2}}\, dx = \tag{3}$$

$$= \sum_{c>0} S_{\beta\alpha}(\ell;k;c)\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{c^2(x^2+y^2)}\right) e^{-2\pi ikx-\frac{2\pi i\ell}{(x^2+y^2)c^2}}\,dx .$$

Мы рассмотрели случай $\beta\neq\alpha$ и воспользовались обозначениями $\gamma_1\in\Gamma_\beta\backslash\Gamma/\Gamma_\alpha$, $g_\beta^{-1}\gamma g_\alpha z=(az+b)(cz+d)^{-1}$. Пользуясь спецификой функции $f(y)$, из формулы (3) уже нетрудно получить все известные формулы для разложений Фурье рядов Пуанкаре, Эйзенштейна, Зигеля-Сельберга и, в частности, утверждение теоремы. Доказательство закончено.

Докажем теперь существование предела:

$$\lim_{s\to 1} F_\ell(z;s;\Gamma)\,,\quad \ell\neq 0\,, \tag{4}$$

и в некотором смысле вычислим его.

ЛЕММА I. Существует конечный предел (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r(z,z';s;\Gamma)$ ядро резольвенты Γ--автоморфного лапласиана $A(\Gamma)$ (см. [4], [5]). Из разложения Фурье для $r(z,z';s;\Gamma)$ (см. [4], [5], [6]) нетрудно получить следующую формулу (см. [7]):

$$\int_0^1 r(x+iy,z';s;\Gamma)\,e^{2\pi i\ell x}dx = F_\ell(z';s;\Gamma)\sqrt{y}\,K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|\ell|y)\,. \tag{5}$$

С другой стороны, в окрестности собственного значения дискретного спектра λ_j оператора $A(\Gamma)$ ядро резольвенты допускает разложение (см. [4], [5])

$$r(z,z';s)=\frac{1}{\lambda_j-s(1-s)}\sum_{k=1}^{n_j} v_{k_j}(z)\,v_{k_j}(z')+\tilde{r}(z,z';s)\,, \tag{6}$$

где $\tilde{r}(z,z';s)$ аналитична в окрестности s_j, $\lambda_j=s_j(1-s_j)$, $\{v_{k_j}(z)\}$ – вещественный базис в собственном подпространстве оператора $A(\Gamma)$ для n_j-кратного собственного значения λ_j. Для $\lambda_j=0$ формула (6) принимает вид

$$r(z,z';s)=\frac{c_1}{s(s-1)}+r(z,z';s)\,, \tag{7}$$

где c_1 зависит только от Γ. Из формул (5), (7) следует

$$\lim_{s\to 1} F_\ell(z';s)=(\sqrt{y}\,K_{\frac{1}{2}}(2\pi|\ell|y))^{-1}\int_0^1 \tilde{\tau}(x+iy;z';1)\,e^{2\pi i\ell x}dx,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Функция $F_\ell(z;1;\Gamma)=F_\ell(z)$ является гармонической и автоморфной. Кроме этого, из теоремы I видно, что на фундаментальной области F функция $F_\ell(z)$ ограничена в каждой параболической вершине z_α, $\alpha = 1, 2, \dots n-1$.

Проведем теперь более детальное изучение функции $F_\ell(z)$. Достаточно рассмотреть ситуацию $\ell\in\mathbb{Z}$, $\ell<0$, так как выполняется равенство

$$F_\ell(z) = \overline{F_{-\ell}(z)},$$

где черта означает, как обычно, комплексное сопряжение.

Построим теперь разложение Фурье для $F_{-\ell}(z)$ относительно подгруппы Γ_∞ $(\ell>0)$. Из теоремы I получаем:

$$F_{-\ell}(z)=\sqrt{y}\,I_{\frac{1}{2}}(2\pi\ell y)\,e^{-2\pi i\ell x}+a_{-\ell}+$$

$$+\sum_{m>0} e^{2\pi imx}\,2\sqrt{y}\,K_{\frac{1}{2}}(2\pi my)\sum_{c>0} c^{-1}S_n(-m,\ell;c)\,I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right)+$$

$$+\sum_{k>0} e^{-2\pi ikx}\,2\sqrt{y}\,K_{\frac{1}{2}}(2\pi ky)\sum_{c>0} c^{-1}S_n(k,\ell;c)\,J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right), \qquad (8)$$

где $a_{-1}=\varphi(\ell;n;1;\Gamma)$.

Примем обозначения:

$$\sum_{c>0} c^{-1}S_n(-m;\ell;c)\,I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m\ell}}{c}\right)=A_m(\ell)$$

$$\sum_{c>0} c^{-1}S_n(k,\ell;c)\,J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k\ell}}{c}\right)=B_k(\ell).$$

Кроме этого, примем во внимание следующие хорошо известные формулы:

$$\sqrt{y}\, I_{\frac{1}{2}}(2\pi \ell y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell}}\left(e^{2\pi \ell y} - e^{-2\pi \ell y}\right)$$

$$\sqrt{y}\, K_{\frac{1}{2}}(2\pi m y) = \frac{1}{2\sqrt{m}}\, e^{-2\pi m y} \quad .$$

В результате из (8) получим равенство

$$F_\ell(z) = \mathcal{J}(z;\ell) + G(z;\ell)\ , \tag{9}$$

где

$$\mathcal{J}(z;\ell) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell}}\, e^{-2\pi i \ell z} + a_{\ell} + \sum_{m>0} e^{2\pi i m z} \frac{1}{\sqrt{m}} A_m(\ell) \tag{10}$$

$$G(z;\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k>0} \frac{1}{\sqrt{k}}\, e^{-2\pi i k \bar{z}} \left(2\pi B_k(\ell) - \delta_{k\ell}\right)\ , \tag{11}$$

$\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера.

Введем теперь классический нормированный ряд Пуанкаре веса два (см. [8], [9])

$$P_m(z) = -m \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \frac{e^{2\pi i m \gamma z}}{(cz+d)^2}\ , \tag{12}$$

где, как обычно, ряд понимается, как предельное значение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -m \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma} \frac{e^{2\pi i m\gamma z}}{(cz+d)^2|cz+d|^{\varepsilon}}\ , \qquad \gamma z = (az+b)(cz+d)^{-1}\ .$$

Хорошо известно разложение Фурье ряда (12) относительно подгруппы Γ_∞

$$P_m(t) = \sum_{n>0} C_{nm}\, e^{2\pi i n t} \tag{13}$$

$$C_{nm}=\sqrt{mn}\left\{2\pi\sum_{c>0}c^{-1}S_\infty(m,n;c)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)-\delta_{mn}\right\}. \tag{I4}$$

Возьмем внутри фундаментальной области две точки t и t_0 и проинтегрируем разложение Фурье (I3) от t_0 до t почленно. Заметим, что почленное интегрирование (I3) возможно, потому что оно лишь улучшает сходимость ряда. Получим:

$$\int_{t_0}^{t}P_m(\tau)\,d\tau=\sum_{n>0}C_{nm}\frac{1}{2\pi in}e^{2\pi int}-\sum_{n>0}C_{nm}\frac{1}{2\pi in}e^{2\pi int_0}. \tag{I5}$$

Интегрирование в (I5) не зависит локально от выбора пути, так как подынтегральное выражение аналитично. Однако интеграл, вообще говоря, не является инвариантно определенным с точки зрения действия дискретной группы Γ.

Вернемся теперь к равенству (II) для $G(z;\ell)$. Оказывается, эту функцию можно выразить в терминах соответствующего ряда Пуанкаре. Следующие равенства очевидны:

$$\overline{G(z;\ell)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k>0}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{2\pi ikz}\left(2\pi\overline{B_k(\ell)}-\delta_{k\ell}\right)$$

$$\overline{B_k(\ell)}=\sum_{c>0}c^{-1}\,\overline{S_\infty(k,\ell;c)}\,J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k\ell}}{c}\right),$$

где черта означает комплексное сопряжение. Кроме этого, для суммы Клостермана $S_\infty(k,\ell;c)$ верно соотношение: (см.[6])

$$\overline{S_\infty(k,\ell;c)}=S_\infty(\ell,k;c).$$

Отсюда получаем искомое равенство:

$$\overline{G(z;\ell)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{k>0}\frac{1}{\sqrt{k}}e^{2\pi ikz}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}c_{k\ell}=$$

$$=\frac{i}{\sqrt{\ell}}\left\{\int_{t_0}^{z}P_\ell(\tau)\,d\tau+\sum_{n>0}c_{n\ell}\frac{1}{2\pi in}e^{2\pi int_0}\right\},$$

т.к. $2\pi\overline{B_k(\ell)}-\delta_{k\ell}=\frac{1}{\sqrt{k\ell}}\,C_{k\ell}$, что приводит окончательно к выражению

$$G(z;\ell)=-\frac{i}{\sqrt{\ell}}\left\{\overline{\int_{t_0}^{z}P_\ell(\tau)d\tau+\sum_{n>0}\overline{C_{n\ell}}\frac{i}{2\pi n}e^{-2\pi int_0}}\right\}=$$

$$=-\frac{i}{\sqrt{\ell}}\int_{\bar t_0}^{\bar z}\overline{P_\ell(\tau)d\tau}+\psi(\ell;t_0),\tag{16}$$

где $\psi(\ell;t_0)$ не зависит от z.

Мы доказали теорему:

ТЕОРЕМА 2. Для функции $F_{-\ell}(z)$ верно равенство

$$F_{-\ell}(z)=\mathcal{J}(z;\ell)+G(z;\ell),\tag{17}$$

где для $\mathcal{J}(z;\ell)$, $G(z;\ell)$ в свою очередь, верны формулы (10), (16).

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 2 верна для любой фуксовой группы первого рода Γ с некомпактной фундаментальной областью F и в некоторых ситуациях она может служить инструментом для доказательства тождественной необратимости в ноль рядов Пуанкаре (12). Поясним это утверждение на простом примере, который при желании может быть и усложнен. Пусть риманова поверхность, отвечающая F и Γ, имеет нетривиальный топологический род g, т.е. $g>0$. Выберем в теореме 2 $\ell=1$. Предположим теперь, что первый ряд Пуанкаре (12) для данной Γ равен тождественно нулю. Из теоремы 2 следует, что в этом случае выполняется равенство $F_{-1}(z)=$ $=\mathcal{J}(z;1)$, где $\mathcal{J}(z;1)$ является автоморфной аналитической функцией, имеющей в вершине ∞ единственный простой полюс (относительно параметра $t=e^{2\pi iz}$). Другими словами, $\mathcal{J}(z;1)$ является Hauptfunktion (инвариантом Клейна), а такой функции для поверхности рода $g>0$ существовать не может (см. [10]). Мы пришли к противоречию, что доказывает утверждение о том, что $P_1(z)$ не является тождественным нулем для данной Γ.

Теперь и до конца этой работы мы будем рассматривать исключительно ситуацию группы топологического рода ноль с целью приложения развитой теории для решения уравнений Шварца и Фукса.

Группа Γ рода ноль, в классическом обозначении имеющая сигнатуру $\Gamma(0;k;\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_k)$, задается следующими соотношениями на образующие:

$$\begin{cases} V_1 V_2 \dots V_k = E \\ V_1^{\ell_1} = E,\ V_2^{\ell_2} = E, \dots, V_k^{\ell_k} = E\,, \end{cases}$$

где $\ell_j \geq 2$, $\ell_j \in \mathbb{Z}$. При этом будем считать, что $\ell_k = \ell_{k-1} = \dots$ $\dots = \ell_{k-n+1} = \infty$ и соответствующие $V_k, V_{k-1}, \dots, V_{k-n+1}$ являются параболическими: $V_{k-n+1} = S_1,\ V_{k-n+2} = S_2', \dots, V_k = S_n' = S'$.

ТЕОРЕМА 3. Если группа Γ имеет род ноль, то в обозначениях теоремы 2 выполняется равенство:

$$F_{-1}(z) = J(z;1) \tag{18}$$

и $F_{-1}(z)$ является "Hauptfunktion" (инвариантном Клейна).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Римана-Роха любая параболическая форма веса два, отвечающая группе Γ, тождественно равна нулю. Следовательно, тождественно равны нулю все ряды Пуанкаре (12) и их коэффициенты Фурье (14). Поэтому из формулы (16) следует, что $G(z;1) = 0$ тождественно. По теореме 2 выполняется искомое равенство. Таким образом, $F_{-1}(z)$ является автоморфной и аналитической функцией. Далее, как было показано ранее (см. теорему I) она ограничена в каждой параболической вершине фундаментальной области F, за исключением $z_n = \infty$, где $F_{-1}(z)$ имеет простой полюс (относительно локального параметра $t = e^{2\pi i z}$), что и доказывает теорему.

Используя теоремы I–3 мы теперь можем легко обобщить результаты работ [I], [2] на случай произвольной группы Γ (не обязательно симметричной) рода ноль.

"Hauptfunktion" $J(z) = J(z;1)$ и обратная к ней $z(J)$ удовлетворяют следующим уравнениям Шварца (см. [I0], [II]):

$$-\{J, z\} = J'^2(z)\, Q(J(z))$$

$$\{z, J\} = Q(J)\,,$$

где $\{z, J\}$ – производная Шварца, $\{z,J\} = z'^{-1} z''' - \frac{3}{2} z''^2 z'^{-2}$, $z = z(J)$, $Q(J)$ – рациональная функция:

$$Q(J) = \prod_{m=1}^{k-1} (J - a_m)^{-1} \Big[E_{k-3}(J) + \sum_{m=1}^{k-1} N_m (J - a_m)^{-1} \Big] \tag{19}$$

$$N_m = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\ell_m^2}\right)\prod_{b=1}^{k-1}{}' (a_m - a_b) .$$

В этих формулах: a_m является образом соответствующей вершины канонической фундаментальной области F при отображении $\mathcal{J}(z)$ (в формуле (19) мы учли, что образ вершины, отвечающей образующей $V_k = S_n = S'$ группы Γ, есть точка бесконечность); штрих в произведении N_m означает, что произведение берется по всем указанным b, кроме $b = m$; далее

$$E_{k-3}(\mathcal{J}) = \sum_{m=0}^{k-3} X_m \mathcal{J}^m, \quad X_{k-3} = \frac{1}{2} .$$

Проблема состоит в том, чтобы выразить оставшиеся $k-3$ "акцессорные" коэффициенты X_m в терминах группы Γ. Дословно также как и в [I] мы можем выразить X_m в терминах коэффициентов Фурье инварианта $\mathcal{J}$ и в терминах чисел a_ℓ. Указанные коэффициенты Фурье уже выражены нами в терминах Γ в теоремах I–3, а числа a_ℓ, по крайней мере те, которые отвечают параболическим вершинам фундаментальной области F, могут быть на основании тех же теорем I–3 относительно просто (аналогично [2]) выражены в терминах группы Γ.

Мы ограничимся здесь формулировкой окончательных результатов, так как доказательство их, как мы уже отмечали, вполне аналогично соответствующим теоремам работ [I], [2]. Введем обозначения:

$$\prod_{m=1}^{k-1} (\mathcal{J} - a_k) = \sum_{m=0}^{k-1} \mathcal{D}_m \mathcal{J}^m, \quad \mathcal{D}_{k-1} = 1$$

$$\mathcal{J}(z) = \sum_{m \geq -1} A_m e^{2\pi i m z}$$

$$\Phi_p(v) = \sum_{\substack{t_1+t_2+\dots+t_p+s_1+s_2+s_3+s_4 = v \\ -1 \leq t_1,\dots,t_p,s_1,\dots,s_4 < \infty}} A_{t_1} A_{t_2} \dots A_{t_p} A_{s_1} A_{s_2} A_{s_3} A_{s_4} s_1 s_2 s_3 s_4 \qquad (20)$$

$$\Psi(r)=\sum_{m=0}^{k-1}\mathcal{D}_m\sum_{\substack{\ell_1+\dots+\ell_m+n_1+n_2=r\\ -1\leqslant \ell_1,\dots,\ell_m,n_1,n_2<\infty}} A_{\ell_1}A_{\ell_2}\dots A_{\ell_m}A_{n_1}A_{n_2}n_1^2 n_2\left(\tfrac{3}{2}n_2-n_1\right),$$

где все индексы целые числа. В формуле (20) будем считать, что индексы r, p пробегают значения $4\leqslant -r\leqslant k+1$, $0\leqslant p\leqslant k-3$

ТЕОРЕМА 4. Матрица $\{\Phi_p(r)\}$ обратима и треугольна, $\{\Phi_p(r)\}^{-1}=\{\eta_p(r)\}$. Для акцессорных коэффициентов X_p, $0\leqslant p\leqslant k-4$ справедлива формула:

$$X_p=\sum_{r=-4}^{-k-1}\eta_p(r)\Psi(r).$$

ТЕОРЕМА 5. Для точек a_ℓ из (19), соответствующих параболическим вершинам области F, верна формула

$$a_\ell=const\cdot\sum_{\substack{c>0\\ \gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma/\Gamma_\ell}}\frac{1}{c^2}S_{n\ell}(0;-1;c),$$

где как и ранее $\gamma g_\ell z=(az+b)(cz+d)^{-1}$, сумма $S_{n\ell}$ определена в теореме I, $const$ –абсолютная константа.

Литература

I. В е н к о в А.Б. О точных формулах для акцессорных коэффициентов в уравнении Шварца. - Функц.анализ и его прилож., 1983, т.17, № 3, с.1–8.

2. В е н к о в А.Б. Об акцессорных коэффициентах уравнения Фукса второго порядка с вещественными особыми точками. В кн.: Автоморфные функции и теория чисел.I. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.129, с.17–29.

3. N i e b u r D. A class of nonanalytic automorphic functions. - Nagoya Math.J., 1973, v.52, p.133–145.

4. Ф а д д е е в Л.Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. - Труды ММО, 1967, т.17, с.323–349.

5. В е н к о в А.Б. Спектральная теория автоморфных функций.- Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1981, т.153.

6. F a y J.D. Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group. - J.Reine Angew.Math., 1977, v.293/294, p.143-203.
7. H e j h a l D.A. Some Dirichlet series whose poles are related to cusp forms. - Preprint University of Göteborg, 1981, N 14, Sweden.
8. P e t e r s s o n H. Über die Entwicklungskoeffizienten der automorphen Formen. - Acta Math., 1932, Bd.58, p.169-215.
9. S e l b e r g A. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. - Proc.Symp.Pure Math. AMS, 1965, v.8,p.1-15.
10. K l e i n F., F r i c k e R. Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunktionen /Automorphenfunktionen/,G. Teubner, Leipzig, 1896.
11. F o r d L.R. Automorphic functions. McGraw-Hill, New-York, 1929.

Ю.М.Воробьев, С.Ю.Доброхотов, В.П.Маслов

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СПИН-СПИНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Введение

Недавно созданный Л.Д.Фаддеевым и его сотрудниками квантовый метод обратной задачи [I-3] позволил найти точные решения спектральных задач, отвечающих вполне интегрируемым квантовым моделям теории поля. К их числу относится ряд дискретных моделей, в частности магнетик Гейзенберга, описывающий систему N -взаимодействующих спинов на одномерной решетке, а также различные его обобщения (см., например, [2,4,5,6]).

В настоящей работе рассмотрена модель Гейзенберга с учетом анизотропии и взаимодействия спинов с внешним полем. Для соответствующего оператора энергии, содержащего параметр h , построены квазиклассические спектральные серии (при $h \to 0$) [7-9], причем в интегрируемом случае (без внешнего поля) полученные квазиклассические серии спектра совпадают с точными. Этот факт является весьма важным, поскольку дает возможность убедиться в том, что в классе асимптотических решений по $\mathrm{mod}\ O(h)$ мы выбираем "правильного" представителя.

Оператор энергии рассматриваемой модели имеет вид:

$$H(\hat{S}) = -\sum_{n=1}^{N} \hat{S}^n \cdot \hat{S}^{n+1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \hat{S}^n \cdot \mathcal{J} \hat{S}^n - \vec{F} \cdot \hat{S}^n \right), \quad \hat{S}^{n+N} = \hat{S}^n \tag{I}$$

где $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3)$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\hat{S}^n = (\hat{S}_1^n, \hat{S}_2^n, \hat{S}_3^n)$ – вектор-оператор, точка означает скалярное произведение в R^3 , $\hat{S} = (\hat{S}^1, \ldots, \hat{S}^N)$ - набор самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям:

$$[\hat{S}_1^n, \hat{S}_2^k] = ih\delta_{nk}\hat{S}_3^n, \ [\hat{S}_2^n, \hat{S}_3^k] = ih\delta_{nk}\hat{S}_1^n, \ [\hat{S}_3^n, \hat{S}_1^k] = ih\delta_{nk}\hat{S}_2^n \tag{2}$$

здесь $n, k = 1, \ldots, N$, $h > 0$ параметр, δ_{nk} - символ Кронекера.

Модель (I) является вполне интегрируемой только при определенных соотношениях между параметрами анизотропии $\mathcal{J}_1 \leqslant \mathcal{J}_2 \leqslant \mathcal{J}_3$ и внешним полем $\vec{F}$; мы будем считать эти величины произвольными. Нас интересует построение асимптотических решений задачи на собственные значения для оператора (I) при $h \to 0$, то есть, нахождение чисел $\mathcal{E}(h)$ и векторов $u(h)\in\mathcal{X}$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\|(H(\hat{s})-\mathcal{E}(h))u(h)\|_{\mathcal{X}}=O(h),\ \|u(h)\|_{\mathcal{X}}=O(1)$$

Если в квантовомеханической задаче на спектр исходный оператор содержит малый параметр h, то, как правило, не существует единой формулы для асимптотики спектра при $h\to 0$. Здесь можно говорить об асимптотике не всего спектра, а лишь об асимптотике некоторых спектральных серий. Классификация этих серий связана с геометрическими объектами классической механики. Для h-псевдодифференциальных операторов на R^k такими объектами являются лагранжевы и изотропные подмногообразия фазового пространства $R^k_q\times R^k_p$, то есть подмногообразия, аннулирующие симплектическую форму $dp\wedge dq$ и имеющие соответственно размерность k и меньше k. Лагранжевы подмногообразия должны быть инвариантны относительно сдвигов по траекториям Гамильтоновой системы с функцией Гамильтона, равной символу исходного оператора. Изотропные подмногообразия должны дополнительно обладать некоторым свойством устойчивости (существование инвариантного комплексного ростка), аналогичным устойчивости в линейном приближении [9]. Тогда квазиклассическое квантование лагранжевых и изотропных подмногообразий проводится соответственно в рамках вещественного [8] и комплексного [9,10] канонического оператора и дает асимптотику спектра исходного оператора при $h\to 0$ вблизи различных уровней энергии функции Гамильтона. Для ряда конкретных задач аналогичные асимптотические спектральные серии иными методами получены в работах В.М.Бабича, В.С.Булдырева, В.Ф.Лазуткина и др.

Построение квазиклассических спектральных серий для операторов, представимых в виде функций от образующих общих некоммутативных алгебр, связано, вообще говоря, с нетривиальными симплектическими многообразиями (без кокасательной структуры) и лагранжевыми и изотропными подмногообразиями на них [II-I3]. Так для конечномерных алгебр Ли роль фазового пространства играет орбита коприсоединенного представления в дуальном пространстве алгебры Ли, естественную симплектическую структуру на которой задает форма Кириллова. Объектами квазиклассического квантования являются лагранжевы и изотропные подмногообразия на орбитах коприсоединенного представления, инвариантные относительно сдвигов по траекториям уравнения Эйлера.

Для модели (I) соответствующее фазовое пространство реализует ся как нетривиальное симплектическое многообразие. Коммутационные соотношения (2) порождают полупростую алгебру Ли g_N размерности $3N$, которой отвечает односвязная компактная группа Ли:

$$G_N = SO(3) \times \ldots \times SO(3) \tag{3}$$

Орбиты коприсоединенного представления группы G_N в дуальном пространстве g_N^* (с координатами $s = (\vec{s}^1, \ldots, \vec{s}^N)$) к алгебре Ли g_N представимы в виде прямого произведения двумерных сфер $S^2(\mu_n)$ с радиусами $\mu_n > 0$:

$$\Omega(\mu) = \{ s \in g_N^* : |\vec{s}^n| = \mu_n,\ n = 1, \ldots, N \} \tag{4}$$

Симплектическую структуру на орбитах $\Omega(\mu)$ индуцирует естественная 2-форма на сфере $S^2(\mu_n)$ (в обычных сферических координатах): $\omega_{S^2} = \mu_n^{-1} \sin\theta \, d\theta \wedge d\alpha$, которая не является точной.

Построение квазиклассических спектральных серий для модели (I) связано с исследованием решений динамической системы:

$$\frac{d\vec{s}^n}{dt} = \vec{s}^n \times (\vec{s}^{n+1} + \vec{s}^{n-1}) + \vec{s}^n \times (\vec{F} - J\vec{s}^n), \quad \vec{s}^{n+N} = \vec{s}^n \tag{5}$$

здесь $(\times)$ - векторное произведение в R^3. Система (5) представляет собой дискретный аналог уравнения Ландау - Лифшица и при определенных условиях на $\vec{F}$ и J, например, если $|\vec{F}| = 0$ или $J_1 = J_2$, $\vec{F} = (0, 0, F_3)$ является вполне интегрируемой системой. В этом случае ее решения находятся с помощью конечнозонного интегрирования [I4, I5]. Соответствующие конечнозонные решения задают на орбитах (4) семейства условно-периодических торов, которые можно использовать в квазиклассическом квантовании, аналогично тому, как это сделано для периодической цепочки Тода [I6, I7].

Для произвольных $\vec{F}$, J интегрируемость системы (5) нарушается, однако из этого не следует отсутствие на орбитах $\Omega(\mu)$ инвариантных торов. В частности, система (5) всегда имеет точки покоя, в которых функция Гамильтона модели (I) достигает на $\Omega(\mu)$ минимума. Этот случай и будет рассмотрен в данной работе.

В §§ I, 2 изложена общая схема [I8, I9] построения квазиклассических спектральных серий для операторов, представимых в виде функций от образующих конечномерной алгебры Ли. В § 3 на основе этой схемы получены конкретные результаты для модели (I).

Авторы благодарны М.В.Карасеву за ценные замечания и советы, а также И.В.Череднику за полезные обсуждения.

§ I. Квазиклассическое квантование лагранжевых и изотропных подмногообразий на орбитах коприсоединенного представления

Пусть $A=(A_1,\dots,A_n)$ набор линейных операторов, зависящих от параметра $h\in[0,1]$ и заданных на общей плотной инвариантной области $\mathcal{D}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Все операторы A_j в существенном самосопряжены, гладко зависят от h на $\mathcal{D}$ в сильном смысле и порождают алгебру Ли, т.е. всюду на $\mathcal{D}$ выполнены коммутационные соотношения:

$$[A_j, A_k]=ih\sum_{s=1}^{n}\lambda_{jk}^{s}A_s; \quad j,k=1,\dots,n \tag{I.I}$$

где $h>0,\lambda_{jk}^{s}$ - структурные вещественные константы, удовлетворяющие условиям антисимметричности и тождествам Якоби. При этом операторы $A_1,\dots,A_n$ являются генераторами унитарного представления U_h связной группы G, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Рассматривается задача на собственные значения:

$$H(A)u=\mathcal{E}u, \quad \|u\|_{\mathcal{H}}=1 \tag{I.2}$$

здесь $H(A)=H(A_1,\dots,A_n)$ - функция от набора операторов $A_1,\dots$ $\dots,A_n$ в смысле вейлевского или упорядоченного исчисления [10, 18]. Символ $H(\xi)$, $\xi\in R^n$ оператора $H(A)$ предполагается гладкой медленно растущей функцией при $|\xi|\longrightarrow 0$. Задача (I.2) с помощью правоинвариантных операторов Ли - $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_n$ на группе Ли G сводится к h-псевдодифференциальному уравнению на группе:

$$H(-ih\hat{\mathcal{D}}_1,\dots,-ih\hat{\mathcal{D}}_n)f=\mathcal{E}f, \quad \|f\|_{L_2(G)}=1 \tag{I.3}$$

Если из (I.3) найдена функция $f\in C^\infty(G)$, то решение $u\in\mathcal{H}$ исходной задачи (I.2) задается через свертку f с унитарным представлением U_h.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ алгебру Ли размерности n, порожденную соотношениями (I.I), через $\mathfrak{g}^*$ пространство дуальное к $\mathfrak{g}$. Отождествим дуальное пространство $\mathfrak{g}^*$ стандартным образом с евклидовым пространством R^n_ξ с координатами $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Задаче (I.2) сопоставим динамическую систему - уравнение Эйлера:

$$\frac{d\xi}{dt}=\Psi(\xi)\frac{\partial H}{\partial \xi}, \tag{I.4}$$

где $\Psi(\xi)$ - кососимметрическая матрица с элементами $\Psi_{jk}(\xi) = \sum \lambda^s_{jk}\xi_s$, $j,k=1,\dots,n$, суммирование ведется по s от I до n. На орбитах коприсоединенного представления $\Omega \subset R^n_\xi$ с невырожденной замкнутой 2-формой (формой Кириллова):

$$\omega_\Omega = \frac{1}{2}\, d\xi \wedge \Psi^{-1}(\xi)\, d\xi$$

выделяется класс подмногообразий $\Lambda \subset \Omega$ аннулирующих симплектическую форму $\omega_\Omega|_\Lambda = 0$. Максимальная размерность подмногообразий Λ равна $\frac{1}{2}\dim\Omega$, они называются лагранжевыми, если $\dim\Lambda < \frac{1}{2}\dim\Omega$, то изотропными. На изотропных подмногообразиях вводится дополнительный геометрический объект - комплексный росток.

Пусть $\Lambda \subset \Omega$, $\dim\Lambda < \frac{1}{2}\dim\Omega = m$ изотропное подмногообразие и каждой точке $\xi \in \Lambda$ сопоставлена комплексная лагранжева плоскость $r_\xi \in T^{\mathbb{C}}(\Omega)_\xi$ $(\dim^{\mathbb{C}} r_\xi = m : \omega_\Omega(v^1, v^2) = 0,\ \forall v^1, v^2 \in r_\xi)$, гладко зависящая от ξ. Если выполнены следующие условия: а) r_ξ содержит комплексифицированную касательную плоскость к Λ в точке ξ, б) условие диссипативности - для каждого базиса $v^1,\dots$ $\dots, v^m$ на r_ξ неотрицательно определена и имеет ранг - $(m - \dim\Lambda)$ матрица с элементами $\frac{1}{2i}\,\omega_\Omega(v^k, \bar{v}^j)$; $j,k=1,\dots,m$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), то совокупность подмногообразия Λ и семейства плоскостей r_ξ, $\xi \in \Lambda$ называется изотропным подмногообразием с комплексным ростком и обозначается (Λ, r).

Построение асимптотических решений (при $h \to 0$) задачи (I.2) связано с существованием на орбитах Ω лагранжевых и изотропных подмногообразий (с комплексным ростком) инвариантных относительно сдвигов $Ad^t_H : R^n_\xi \to R^n_\xi$ по траекториям уравнения Эйлера (I.4). При этом на инвариантные изотропные подмногообразия Λ накладываются еще требования а) $H|_\Lambda = \mathrm{const}$, б) инвариантность комплексного ростка: для любых $\xi \in \Lambda$, $t \in R^1$ справедливо равенство:

$$(Ad^t_H)_* r_\xi = r_{Ad^t_H \xi}, \tag{I.5}$$

где $(Ad^t_H)_*$ - дифференциал отображения Ad^t_H.

Основное утверждение состоит в следующем: если на орбитах существует семейство лагранжевых или изотропных подмногообразий, удовлетворяющих соответствующим условиям инвариантности относительно эйлеровых сдвигов Ad^t_H, то асимптотические решения задачи (I.3) находятся в рамках канонического оператора [8,9].

Фазовым пространством для задачи (I.3) является кокасательное расслоение к группе T^*G с естественной симплектической структурой $d\theta$. Обозначим через $R(\alpha)$, $L(\alpha)$ правый и левый сдвиги на элементы $\alpha \in G$, через $R^*(\alpha)$, $L^*(\alpha)$, отвечающие этим сдвигам отображения кокасательных пространств $T^*(G)_\alpha$. Рассмотрим отображение:

$$R^* \times L^* : T^*G \longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^*, \qquad R^*(\alpha,\eta) = R^*(\alpha)\eta, \quad L^*(\alpha,\eta) = L^*(\alpha)\eta \tag{I.6}$$

здесь $\alpha \in G$, $\eta \in T^*(G)_\alpha$. Функция Гамильтона $H(\xi)$, заданная на $\mathfrak{g}^*$, поднимается в T^*G правым сдвигом $H^{(R)}(\alpha,\eta) \stackrel{def}{=} H(R^*(\alpha)\eta)$, соответствующая гамильтонова система имеет вид:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial H^{(R)}}{\partial \eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial H^{(R)}}{\partial \alpha} \tag{I.7}$$

Исходные геометрические объекты с орбит Ω поднимаются в фазовое пространство T^*G с помощью отображения $R^* \times L^*$. Пусть $\Lambda \subset \Omega$ лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно сдвигов по траекториям уравнения Эйлера (I.4), тогда прообраз прямого произведения $\Lambda \times \Lambda$ при отображении (I.6):

$$\tilde{\Lambda} = (R^* \times L^*)^{-1}(\Lambda \times \Lambda) \tag{I.8}$$

определяет лагранжево подмногообразие $\tilde{\Lambda}$ в T^*G инвариантное относительно сдвигов по траекториям гамильтоновой системы (I.7) [20]. Квазиклассические решения уравнения (I.3) задаются вещественным каноническим оператором $K_{\tilde{\Lambda}} : C_0^\infty(\tilde{\Lambda}) \to C^\infty(G)$ [8] на $\tilde{\Lambda}$. Соответственно асимптотические решения исходной задачи (I.2) имеют вид [18]:

$$u(h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \left[\int_G (K_{\tilde{\Lambda}} \cdot 1)(\alpha) U_h(\alpha)\, d\rho(\alpha) \right] w(h), \tag{I.9}$$

где 1 – единичная функция на $\tilde{\Lambda}$, $d\rho(\alpha)$ – левая мера Хаара, $w(h) \in \mathcal{X}$ – некоторое семейство векторов равномерно ограниченных по норме при $h \in [0,1]$.

Если (Λ, r) – изотропное подмногообразие с комплексным ростком на орбите Ω, то формула (I.8) задает в фазовом пространстве T^*G изотропное подмногообразие $\tilde{\Lambda}$. Комплексный росток на $\tilde{\Lambda}$ определяется следующим образом. Для произвольных точек $\xi, \xi' \in \Lambda$ плоскости комплексного ростка $r_\xi, r_{\xi'}$ индуцируют плоскость $r_\xi \oplus \overline{r}_{\xi'}$ (черта означает комплексное сопряжение) в комплексифицированном касательном пространстве $^{\mathbb{C}}T(\Omega \times \Omega)_{\xi \times \xi'}$. В каждой точке $(\alpha, \eta) \in \widetilde{\Lambda}$ комплексный росток $\widetilde{r}_{(\alpha,\eta)}$ на $\widetilde{\Lambda}$ задается как прообраз плоскости $r_\xi \oplus \overline{r}_{\xi'}$ при линейном преобразовании $d(R^* \times L^*)$ (дифференциал отображения $R^* \times L^*$ в точке (α, η)):

$$\widetilde{r}_{(\alpha,\eta)} = \left[d(R^* \times L^*)\right]^{-1} (r_\xi \oplus \overline{r}_{\xi'}),$$
$$\xi = R^*(\alpha)\eta, \ \xi' = L^*(\alpha)\eta \tag{I.10}$$

При этом формула (I.10) сохраняет свойство инвариантности комплексного ростка (I.5). Квазиклассические решения задачи (I.3) находятся с помощью комплексного канонического оператора [9] на $(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{r})$ для уравнения (I.2) они будут иметь вид, аналогичный (I.9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Другой способ вычисления асимптотических решений уравнения вида (I.3) предложен в [21]. Уравнение редуцируется на орбиту Ω, подчиненную условиям квантования [12], на ней строится асимптотическое решение и затем с помощью некоторого универсального оператора осуществляется поднятие на исходное конфигурационное пространство (в нашем случае – на группу Ли).

§ 2. Квантование устойчивых точек покоя уравнений Эйлера

Пусть имеется инвариантное нульмерное изотропное подмногообразие $\Lambda^0 \subset \Omega$ – точка покоя уравнения Эйлера (I.4):

$$\Lambda^0 = \left\{ \xi^0 : \Psi(\xi^0) \frac{\partial H}{\partial \xi}(\xi^0) = 0 \right\}$$

Условие существования на Λ^0 инвариантного комплексного ростка эквивалентно [9] тому, что точка покоя ξ^0 устойчива в линейном приближении, то есть все решения системы в вариациях

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{H}_{вар.}(\xi^0) v, \quad v \in \mathbb{C}^n \tag{2.1}$$

$$\left[\mathcal{H}_{вар.}(\xi)\right]_{j,s} = \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_{jk}^{s} \frac{\partial H}{\partial \xi_k} + \Psi_{jk}(\xi) \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_k \partial \xi_s} \right), \ j, s = 1, \dots, n$$

ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$. Тогда матрица $\mathcal{H}_{вар.}(\xi^0)$ приводима к диагональному виду и все ее собственные значения лежат на мнимой оси. Базис комплексного ростка r на $\Lambda^\circ \subset \Omega, \dim \Omega = 2m$ составляют собственные вектора матрицы $\mathcal{H}_{\mathrm{bap}}(\xi^\circ) - v^1, \dots, v^m$, удовлетворяющие условию диссипативности: матрица с элементами $\frac{1}{2i}\omega_\Omega(v^j, \bar v^k)$; $j,k=1,\dots,m$ положительно определена:

$$\frac{1}{2i}\|\omega_\Omega(v^k, \bar v^j)\| > 0. \tag{2.2}$$

Поднятие точки покоя Λ° с помощью формулы (I.8) в фазовое пространство T^*G дает $(n-2m)$-мерный условно-периодический тор гамильтоновой системы (I.7):

$$\tilde\Lambda = \left\{(\alpha, h)\in T^*G : \alpha\in G_{\xi^\circ},\ h = (L^*(\alpha))^{-1}\xi^\circ\right\}, \tag{2.3}$$

где $G_{\xi^\circ}\subset G$ стабилизатор точки $\xi^\circ\in\Omega$ (т.е. стационарная подгруппа точки ξ° в коприсоединенном представлении). Комплексный росток $\tilde r$ на $\tilde\Lambda$ определяется из соотношения (I.I0).

Приведем результаты построения квазиклассических спектральных серий для задач (I.2), (I.3) в случае, когда $H(A)$ - функция от набора операторов $A_1,\dots,A_n$ в смысле вейлевского исчисления и эти операторы являются генераторами унитарного представления U_h связной односвязной компактной группы Ли G.

Предположим, что выполнены следующие условия.

I) Некоторая область дуального пространства $\mathfrak{g}^*$ расслаивается на орбиты максимальной размерности $\Omega(\mu)$, $\dim\Omega(\mu) = 2m$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_{n-2m})\in\Sigma^{n-2m}$ - гладкая параметризация и уравнение Эйлера (I.4) на каждой орбите $\Omega(\mu)$ имеет точку покоя $\xi^\circ(\mu)$ устойчивую в линейном приближении. Через $i\beta_1(\mu),\dots,i\beta_m(\mu)$; $\beta_j(\mu)\in R^1$ обозначим собственные значения матрицы $\mathcal{H}_{\mathrm{bap}}(\xi^\circ(\mu))$, которые отвечают собственным векторам $v^1(\mu),\dots,v^m(\mu)$ удовлетворяющим условию диссипативности (2.2) (базис комплексного ростка r на $\Lambda^\circ(\mu)=\{\xi^\circ(\mu)\}$;

2) Для $h\in[0,1]$ существует набор целых чисел $k=(k_1,\dots,k_{n-2m})$ и значения параметров $\mu^k(h) = (\mu_1^k(h),\dots,\mu^k_{n-2m}(h))\in\Sigma^{n-2m}$, которые удовлетворяют условию целочисленности:

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\Sigma_j(\mu)}\omega_\Omega = k_j, \tag{2.4}$$

где $\Sigma_j(\mu)$, $j=1,\dots,n-2m$ - базис двумерных циклов на орбите $\Omega(\mu)$, $k_j = k_j(h)\sim 1/h$.

Условие целочисленности (2.4) на орбите $\Omega(\mu)$ эквивалентно [20] условию квантования [9, 22] на изотропных торах $\widetilde{\Lambda}(\mu)$ (2.3):

$$\frac{1}{2\pi h} \oint\limits_{\Gamma_j(\mu)} \theta \in \mathbb{Z}^1 ,$$

где θ – стандартная 1-форма на T^*G. $\Gamma_j(\mu)$ – базис одномерных циклов на $\widetilde{\Lambda}(\mu)$. Введем на изотропных торах с комплексным ростком $(\widetilde{\Lambda}(\mu), \widetilde{r}(\mu))$, $\mu=\mu^k(h)$ комплексный канонический оператор $K_{\widetilde{\Lambda}} : C_0^\infty(\widetilde{\Lambda}) \longrightarrow C^\infty(G)$ [9, 10]. Если выполнены условия 1), 2), то квазиклассические решения задачи (1.3) задаются формулами:

$$f_{k,\nu}(\alpha, h) = h^{-\frac{m}{2}} \left[K_{\widetilde{\Lambda}} \cdot \varphi_\nu \right] (\alpha) , \tag{2.5}$$

$$\mathcal{E}_{k,\nu}(h) = H(\xi^0(\mu)) + h \sum_{j=1}^{m} \beta_j(\mu)(1/2 + \nu_j), \quad \mu = \mu^k(h) \tag{2.6}$$

где $k_i = k_i(h) \sim 1/h$ – целые, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ – натуральные числа, не зависящие от h, функции $\varphi_\nu \in C^\infty(\widetilde{\Lambda})$ определены с помощью операторов рождения на $(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{r})$ [9] и являются обобщением полиномов Эрмита, при $\nu = (0, \dots, 0)$ (невозбужденное состояние) $\varphi_0 = 1$. Функции (2.5) и числа (2.6) удовлетворяют правым частям соотношений (1.3) соответственно с точностью $O(h^{3/2})$ и $O(h^{1/2})$ по норме в $L_2(G)$. Функции $f_{k,\nu}(\alpha)$ локализованы в некоторой окрестности стабилизатора $\widetilde{G}_{\xi^0(\mu)}$, $\mu = \mu^k(h)$ – естественной проекции торов $\widetilde{\Lambda}(\mu)$ на конфигурационное пространство G, вне этой окрестности $f_{k,\nu} = O(h^\infty)$.

Пусть целые числа $k = (k_1, \dots, k_{n-2m})$, $k_i = k_i(h)$ из условия (2.4) выбраны так, что существует предел

$$\lim_{h \to 0} \mu^k(h) = \mu^{(0)} \in \Xi^{n-2m}$$

и пусть существует семейство векторов $w(h) \in \mathcal{X}$ равномерно ограниченных по норме при $h \in [0,1]$ плотность осцилляций [18], которого имеет вид:

$$F_w \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \rho_{w(h)} = \delta(\xi - \xi^0(\mu^{(0)})) ,$$

где $\delta(\xi)$ - дельта функция, $\varrho_{w(h)} \in \mathcal{D}'(R^h)$ - функция плотности вектора $w(h) \in \mathfrak{X}$, т.е. функционал, заданный формулой

$$\langle \varrho_w, g \rangle = (g(A)w, w)_{\mathfrak{X}}, \quad \forall g \in C_0^\infty(R^h).$$

Тогда семейство векторов

$$\mathcal{U}_{k,\nu}(h) = \frac{1}{(2\pi h)^{n/2}} \left[\int_G f_{k,\nu}(\alpha)\, \mathcal{U}_h(\alpha)\, d\varrho(\alpha) \right] w(h) \tag{2.7}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\|(H(A) - \mathcal{E}_{k,\nu})\mathcal{U}_{k,\nu}\|_{\mathfrak{X}} = O(h^{3/2}), \quad \|\mathcal{U}_{k,\nu}(h)\|_{\mathfrak{X}} = 1 + O(h^{1/2}).$$

§ 3. Квазиклассические серии спектра анизотропной модели Гейзенберга с внешним полем

Применим результаты, приведенные в § 2 к модели (I). Уравнение (5) имеет семейство устойчивых точек покоя, принадлежащих $2N$ -мерным орбитам (4) $\Omega(\mu) = \mathbb{S}^2(\mu_1) \times \ldots \times \mathbb{S}^2(\mu_N)$. Соответствующие этим точкам квазиклассические спектральные серии оператора (I) даются формулами (2.5), (2.6), где условие целочисленности (2.4) относительно симплектической 2-формы

$$\omega_{\Omega} = \omega_{\mathbb{S}^2} \oplus \ldots \oplus \omega_{\mathbb{S}^2} \tag{3.I}$$

имеет вид: $\mu_n = \frac{1}{2} k_n h, n = 1, \ldots, N$, $k_n \sim 1/h$ - целые числа. Из этих серий выделим подсерии, которые отвечают точкам покоя уравнения (5) лежащим на орбитах $\Omega(\mu_0)$ - прямое произведение 2-мерных сфер с одинаковыми радиусами $\mu_1 = \ldots = \mu_N = \mu_0 > 0$.

Рассмотрим функцию Гамильтона модели (I):

$$H(s) = -\sum_{n=1}^{N} \vec{s}^{\,n} \cdot \vec{s}^{\,n+1} + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \vec{s}^{\,n} \cdot J \vec{s}^{\,n} - \vec{F} \cdot \vec{s}^{\,n} \right), \quad \vec{s}^{\,n+N} = \vec{s}^{\,n}.$$

Для фиксированных $J_1 \leqslant J_2 \leqslant J_3$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ функция $H(\xi)$ достигает на орбите $\Omega(\mu_0)$ минимума в точке:

$$\Lambda^0(\mu_0) = \left\{ s = (\vec{s}^{\,1}, \ldots, \vec{s}^{\,N}) : \vec{s}^{\,1} = \ldots = \vec{s}^{\,N} = \mu_0 \vec{e} \right\}, \tag{3.2}$$

где единичный вектор $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ задается формулой

$$\vec{e}=\left(\frac{\mu_0^{-1}F_1}{J_1-\lambda_0},\ \frac{\mu_0^{-1}F_2}{J_2-\lambda_0},\ \frac{\mu_0^{-1}F_3}{J_3-\lambda_0}\right) \tag{3.3}$$

через $\lambda_0=\lambda_0(\mu_0)$, $0<\mu_0<\infty$ обозначено наименьшее из решений следующего уравнения:

$$\varkappa(\lambda)=\mu_0^2,\quad \varkappa(\lambda)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{3}\frac{F_k^2}{(J_k-\lambda)^2}\ . \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) имеет относительно λ не более шести и по крайней мере два вещественных решения (рис.I). Если $|\vec{F}|=0$, то вектор $\vec{e}$ в (3.2) совпадает с собственным вектором $(1,0,0)$ матрицы J . Вычисляя значение функции Гамильтона $H(s)$ в точке (3.2) $N\mathcal{E}^{(0)}(\mu_0)=H(s)/\Lambda^0(\mu_0)$ находим минимум этой функции на орбите $\Omega(\mu_0)$:

$$\frac{1}{N}\min_{s\in\Omega(\mu_0)}H(s)=\mathcal{E}^{(0)}(\mu_0)=\mu_0^2\left(\frac{\lambda_0}{2}-1\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{F_k^2}{(\lambda_0-J_k)}\ .$$

Обозначим через $\Xi^1\in R^1$ множество значений параметра μ_0, при которых точки покоя уравнения (5) $\Lambda^0(\mu_0)$ являются устойчивыми в линейном приближении. Множество Ξ^1 почти для всех $J,\vec{F}$ состоит из интервала $(0,+\infty)$. Исключением является случай $F_1=0$, $|\vec{F}|\neq 0$, здесь $\Xi^1=\left\{0<\mu_0\leqslant\sqrt{\varkappa(J_1)}\right\}$, причем если $F_2=0$ и $J_3-J_2\geqslant 2$, то добавляется еще полуинтервал $\sqrt{\varkappa(J_2+2)}\leqslant\mu_0<+\infty$.

Выберем из собственных векторов матрицы в вариациях $\mathcal{H}_{\text{вар}}(\mu_0)$ в точке $\Lambda^0(\mu_0)$, $\mu_0\in\Xi^1$ вектора $v^1(\mu_0),\ldots,v^N(\mu_0)$ удовлетворяющие относительно 2-формы (3.I) условию диссипативности (2.2). Этим собственным векторам соответствуют чисто мнимые собственные значения $i\beta_1(\mu_0),\ldots,i\beta_N(\mu_0)$ которые задаются равенством:

$$\beta_j(\mu_0)=\left[2\mu_0\sqrt{x^2-4bx+c}\right]\Big|_{x=\frac{\lambda_0}{2}-1+\cos\frac{2\pi j}{N}},\quad j=1,\ldots,N,$$

$$b=\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{3}J_k(1-e_k^2),\quad c=\frac{1}{4}\left(J_2J_3e_1^2+J_1J_3e_2^2+J_1J_2e_3^2\right),$$

где e_1,e_2,e_3 - координаты вектора (3.3), $\lambda_0=\lambda_0(\mu_0)$ - решение уравнения (3.4).

Квазиклассические серии спектра оператора (I), отвечающие квантованию точек покоя (3.2), имеют вид:

$$\mathcal{E}_{k,\nu}(h)=N\mathcal{E}^{(0)}(\mu_0)+h\sum_{j=1}^{N}\beta_j(\mu_0)\left(\frac{1}{2}+\nu_j\right),\ \mu_0=\frac{1}{2}k_0h, \tag{3.5}$$

здесь $k_0\sim 1/h$ - целое, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_N)$ - натуральные числа не зависящие от h. В пределе при $N\to\infty$ из формулы (3.5) $(\nu=(0,\ldots,0))$ получим:

$$\frac{1}{N}\mathcal{E}_{k_0,0}(h)\longrightarrow\mathcal{E}^{(0)}(\mu_0)+\frac{h\mu_0}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{(x-\gamma_+)(x-\gamma_-)}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

где $\gamma_\pm=1-\frac{\lambda_0}{2}+b\pm\sqrt{4b^2-c^2}$. В случае $J_1=J_2=J_3=0,\ |\vec{H}|=0$ формула (3.5) дает следующие серии спектра оператора (I):

$$\mathcal{E}_{k_0,\nu}(h)=-\frac{Nk_0^2h^2}{4}+k_0h^2\sum_{j=1}^{N}\left(1-\cos\frac{2\pi j}{N}\right)\left(\frac{1}{2}+\nu_j\right).$$

Литература

1. Ф а д д е е в Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - Препринт ЛОМИ Р-2-79, 1979, 57 с.
2. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ -модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т.34, № 5, с.13-63.
3. С к л я н и н Е.К., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи. - ТМФ, 1979, т.40, № 2, с.194-220.
4. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса-Неве. - ЖЭТФ, 1981, т.80, № 1, с.214-228.
5. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IУ. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.109, с.134-178.
6. Ч е р е д н и к И.В. Алгебраические аспекты двумерных киральных полей. - В кн.: Совр.пробл.мат., т.17, М.:ВИНИТИ, 1980, с.176-219.
7. М а с л о в В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1965.
8. М а с л о в В.П., Ф е д о р ю к М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976.

9. Маслов В.П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М., 1977.

10. Маслов В.П. Операторные методы. М., 1973.

11. Маслов В.П., Карасев М.В. Глобальные асимптотические операторы регулярного представления. – Докл.АН СССР, 1981, т.257, с.33–37.

12. Карасев М.В., Маслов В.П. Квантование симплектических многообразий с коническими точками. – ТМФ, 1982, т.53, № 3, с.374–387.

13. Карасев М.В., Маслов В.П. Псевдодифференциальные операторы в общих симплектических многообразиях. – Изв. АН СССР, сер.матем., 1983, т.47, № 5, с.999–1029.

14. Bikbaev R.F., Bobenko A.I. On finite-gap integration of the Landau – Lifshitz equation. – Preprint LOMI, E-8-83, L., 1983, 27 p.

15. Чередник И.В. Релятивистски-инвариантные квазиклассические пределы интегрируемых двумерных квантовых моделей. – ТМФ, 1981, т.47, № 2, с.225–229.

16. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях. – В кн.: Совр. пробл.мат., т.15, М.:ВИНИТИ, 1980, с.3–94.

17. Воробьев Ю.М., Доброхотов С.Ю. Квазиклассическое квантование периодической цепочки Тоды с точки зрения алгебр Ли. – ТМФ, 1983, т.54, № 3, с.477–479.

18. Карасев М.В., Маслов В.П. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения II. – В кн.: Совр. пробл.мат., т.13, М.:ВИНИТИ, 1979, с.145–266.

19. Карасев М.В. Интеграл по траекториям и квазиклассическая асимптотика на группе Ли. – ТМФ, т.31, № 1, 1977, с. 41–47.

20. Карасев М.В. Условия квантования Маслова в высших когомологиях и аналоги объектов теории Ли для канонических расслоений симплектических многообразий, I–II. МИЭМ, 1981. Деп. ВИНИТИ, № 1092-82 Деп., и № 1093-82 Деп.

21. Карасев М.В. Асимптотические собственные значения операторов с пуассоновской алгеброй симметрии у старшего символа. – ФАН, 1984, т.18, № 2, с.73–88.

22. Доброхотов С.Ю., Крахнов А.Д. О топологическом условии квантования в вырожденном случае. – В кн.: Тезисы VII Всесоюзн.тополог.конф., г.Минск, июнь 1977, с. 9.

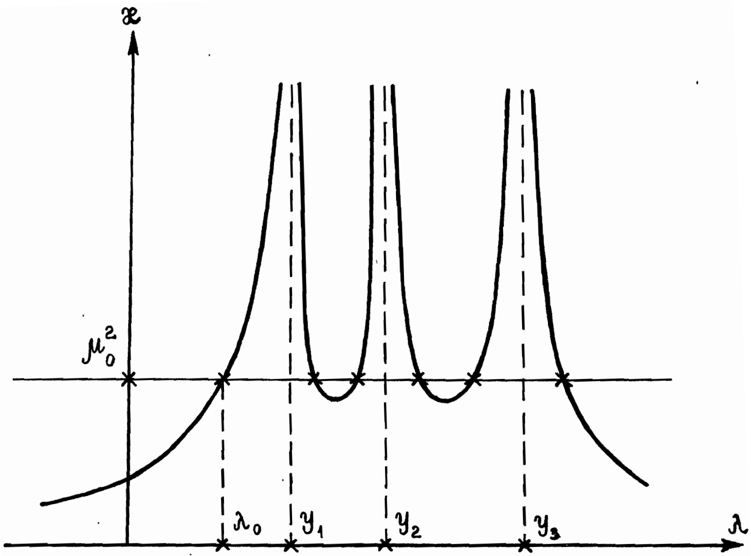


Рис.I

В.Е.Захаров, С.В.Манаков

МНОГОМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ИХ РЕШЕНИЙ

Введение

В 1974 году одним из авторов настоящей статьи совместно с А.Б.Шабатом была предложена [1] схема построения многомерных нелинейных интегрируемых уравнений и их точных решений, получившая название "метода одевания". Интегрируемые уравнения, рассмотренные в [1], представляют собой условия совместности переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = L_1 \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = L_2 \Psi, \tag{B.1}$$

и могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_1} - \frac{\partial L_1}{\partial x_2} + [L_2, L_1] = 0. \tag{B.2}$$

Здесь $L_{1,2}$ – дифференциальные по новой переменной x линейные операторы, вообще говоря с матричными коэффициентами. Эти коэффициенты – неизвестные функции в интегрируемых уравнениях – весьма несимметричным образом зависят от трех независимых переменных x_1, x_2, x.

Изложим основной результат работы [1] на самом простом примере. Рассмотрим интегральное уравнение

$$K(x,z) + F(x,z) + \int_x^\infty K(x,s)F(s,z)\,ds = 0. \tag{B.3}$$

Здесь матричные $N \times N$ функции F и K зависят еще от переменных x_1, x_2, причем функция F предполагается известной, а функция K – неизвестной. Пусть функция F подчиняется системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = I_i \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} I_i, \qquad i = 1,2. \tag{B.4}$$

Здесь I_i – постоянные коммутирующие между собой матрицы: $[I_1, I_2] = 0$.

Дифференцируя уравнение (B.3), убеждаемся, что функция K удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = \left(I_i \frac{\partial}{\partial x} + [I_i, Q]\right) K + \frac{\partial K}{\partial z} I_i, \tag{B.5}$$

$$Q(x,x_1,x_2)=K(x,x,x_1,x_2) .$$

Представив функцию K в виде

$$K(x,z,x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\lambda,x,x_1,x_2)e^{i[\lambda z+\lambda I_i x_i]}\,d\lambda, \qquad (B.6)$$

убеждаемся, что Ψ удовлетворяет уравнениям (В.I), где

$$L_i=I_i\frac{\partial}{\partial x}+[I_i,Q] . \qquad (B.7)$$

Уравнения (В.2) имеют вид

$$\left[I_2,\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right]-\left[I_1,\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right]+I_2\left[I_1,\frac{\partial Q}{\partial x}\right]-I_1\left[I_2,\frac{\partial Q}{\partial x}\right]+$$

$$+\left[[I_2,Q],[I_1,Q]\right]=0 . \qquad (B.8)$$

При подходящей редукции, например, при $I^+=I$ $J^+=J$ $Q^+=-Q$, уравнение (В.8) переходит в "систему N волн", представляющую значительный прикладной интерес. Эффективно решение системы (В.8) можно строить, полагая, например, $F=\sum_k F_k(x)\,G_k(z)$ (см. [2], также [3–4]). Операторы L_i естественно назвать "одеваниями" "затравочных" операторов $L_{0i}=I_i\frac{\partial}{\partial x}$.

Следующим шагом в развитии метода оценивания была работа [5] , в которой снова рассматривались уравнения (В.I), (В.2), но $L_{1,2}$ полагались рациональными функциями комплексного параметра λ . При этом возникают уравнения относительно функций от двух независимых переменных x_1, x_2 ; одевание осуществляется при помощи решения задачи Римана на произвольном контуре Γ в комплексной плоскости λ , то есть фактически при помощи решения на этом контуре определенного сингулярного интегрального уравнения. Связь между обоими вариантами метода [6–7] *) на первый взгляд элементарна. Пусть коэффициенты операторов L_1, L_2 в (В.I) не зависят от x , тогда после замены $\Psi\sim e^{i\lambda x}$ они становятся полиномами от λ . Так система (В.I)–(В.7) приобретает вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_k}=\left(iI_k\lambda+[I_k,Q]\right)\Psi, \qquad (B.9)$$

а уравнение (В.8) – форму

$$\left[I_2,\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right]-\left[I_1,\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right]+\left[[I_2,Q],[I_1,Q]\right]=0 . \qquad (B.10)$$

*) а также доклад В.Е.Захарова на Международном математическом конгрессе, Варшава, 1983.

Согласно терминологии, используемой в [7] уравнение (В.8) является "первым многомерным обобщением" уравнения (В.10).

Чтобы получить решения, не зависящие от x, нужно положить функцию F зависящей только от разности $x-z$. Уравнение (В.3) становится теперь уравнением Винера-Хопфа, решающим после преобразования Фурье задачу Римана, причем контур Γ совпадает с вещественной осью.

Ясно, что метод, развитый в [5], позволяет, за счет произвольности контура Γ, найти для уравнения (В.10) гораздо больший запас решений чем позволяет метод [1]. Возникает задача как найти аналогичные решения у системы (В.8)? Кроме того, непонятно, как строить первое многомерное обобщение для систем типа [5], если L_1 и L_2 – не полиномы, а рациональные функции? Решению обеих этих проблем и посвящена настоящая статья.

Вторая из сформулированных проблем была до некоторой степени решена раньше путем прямого обобщения техники работы [1] (см. [7]). При этом вместо уравнений (В.1) рассматривалась линейная система

$$N_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = L_i \Psi , \qquad (\text{B.11})$$

где N_i, L_i – линейные дифференциальные по x операторы. Полное соотношение этих результатов с результатами настоящей статьи не будет входить в нашу задачу. Наша работа в существенной степени основана на предложении, высказанном ранее одним из авторов (С.В.Манаков), использовать в многомерном случае вместо локальной – нелокальную задачу Римана (см. [8]). Мы переведем на язык нелокальной задачи Римана схему [1] и покажем, что при помощи нелокальной задачи Римана можно строить многомерные интегрируемые уравнения и их решения с такой же эффективностью, как при помощи локальной задачи – двумерные уравнения и их решения.

Среди многомерных интегрируемых систем не менее чем (В.8) популярно уравнение Кадомцева-Петвиашвили (К.П.).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - 6uu_x - u_{xxx}\right) = 3\alpha^2 u_{yy} \qquad (\text{B.12})$$

(см. [1,9-13]). В работе [13] была развита техника построения решений этого уравнения, не сводящаяся к нелокальной задаче Римана, но использующая решение локальной $\bar\partial$ – проблемы специального вида. Можно показать (хоть это и не входит в предмет настоящей статьи), что при помощи некоторого предельного перехода из нелокальной задачи Римана можно получить более универсальную чем это сделано в [13] технику получения решений интегрируемых многомерных уравнений, основанную на нелокальной $\bar{\partial}$ - проблеме. Соответствующие результаты будут опубликованы в другом месте.

§ I. Нелокальная задача Римана (разбор примера)

Представим функции F и K в (В.3) в виде

$$F(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int F(\lambda',\lambda)e^{i(\lambda' x-\lambda z)}d\lambda' d\lambda, \qquad (I.I)$$

$$K(x,z)=-\frac{1}{2\pi}\int K(x,\lambda)e^{i\lambda(x-z)}d\lambda \qquad (I.2)$$

и введем в рассмотрение функцию

$$T(\lambda',\lambda,x,x_i)=F(\lambda',\lambda)e^{i(\lambda'-\lambda)x}=T(\lambda',\lambda) \qquad (I.3)$$

(ниже зависимость функции T от x, x_i будет в формулах опускаться).

После подстановки (I.I)-(I.3) в (В.3) получим

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}T(\lambda',\lambda)d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\xi)T(\lambda',\lambda)}{\lambda'-\xi+i\nu}d\lambda' d\xi. \qquad (I.4)$$

Рассмотрим аналитические в верхней и нижней полуплоскости функции $\chi_{1,2}(\lambda)$, определенные формулой

$$\chi_{1,2}(\lambda)=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\lambda')}{\lambda-\lambda'\pm i\nu}d\lambda'. \qquad (I.5)$$

При этом

$$K(\lambda)=\chi_2(\lambda)-\chi_1(\lambda)\Big|_{\operatorname{Im}\lambda=0}. \qquad (I.6)$$

Прямой проверкой легко убедиться, что уравнение (В.3) тождественно соотношению

$$\chi_2(\lambda)=\chi_1(\lambda)+\int_{-\infty}^{\infty}\chi_1(\lambda')T(\lambda',\lambda)d\lambda', \qquad (I.7)$$

которое удобно переписать в символическом виде

$$\chi_2=\chi_1+\chi_1 * T. \qquad (I.8)$$

Соотношение (I.7)((I.8)) определяет на вещественной оси нелокальную задачу Римана о сопряжении при помощи интегрального соотношения двух аналитичных в верхней и нижней полуплоскости функций $\chi_{1,2}(\lambda)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\chi_{1,2}(\lambda) \to 1 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty .$$

В дальнейшем будем предполагать, что эта (и все остальные) задачи Римана однозначно разрешимы. Это в частности, означает, что решение задачи Римана (I.7) - (I.8), удовлетворяющее условию

$$\chi_{1,2}(\lambda) \to 0 \qquad \text{при} \quad \lambda \to \infty ,$$

тождественно равно нулю

$$\chi_{1,2}(\lambda) = 0 . \tag{I.9}$$

Утверждением (I.9) мы будем неоднократно пользоваться. Для решения задачи Римана с единичной асимптотикой при $\lambda \to \infty$ имеем асимптотическое разложение

$$\chi_{1,2} \to 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{\lambda^n} , \quad \lambda \to \infty . \tag{I.10}$$

Здесь

$$\varphi_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n-1} K(\lambda)\, d\lambda . \tag{I.11}$$

Подставляя (I.I) в (B.4), убедимся, что функция $T(\lambda', \lambda)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = i \left\{ I_k \lambda' T - T I_k \lambda \right\} . \tag{I.12}$$

Кроме того, очевидно, выполняется соотношение

$$\frac{\partial T}{\partial x} = i(\lambda' - \lambda) T . \tag{I.13}$$

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы

$$\mathcal{D}_0 \chi = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\lambda\right)\chi , \qquad \mathcal{D}_k \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x_k} + i \chi I_k \lambda . \tag{I.14}$$

Соотношения (I.12), (I.13) могут быть записаны символически

$$[\mathcal{D}_0, T] = 0 , \quad [\mathcal{D}_i, T] = 0 . \tag{I.15}$$

Операторы (I.14) между собой коммутируют.

Применяя операторы $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_i$ к соотношению (I.8) и пользуясь равенствами (I.15), находим

$$\mathcal{D}_0\chi_2=\mathcal{D}_0\chi_1+\mathcal{D}_0\chi_1*T\,;\quad \mathcal{D}_i\chi_2=\mathcal{D}_i\chi_1+\mathcal{D}_i\chi_1*T\,. \tag{I.16}$$

Более того, для любого дифференциального оператора M вида

$$M=\sum_K a_K\mathcal{D}^K \tag{I.17}$$

(здесь K - мультииндекс, $\mathcal{D}^K=(\mathcal{D}_0)^\alpha(\mathcal{D}_1)^\beta(\mathcal{D}_2)^\gamma$) справедлива формула

$$M\chi_2=M\chi_1+M\chi_1*T\,. \tag{I.18}$$

Функции $M\chi_1$, $M\chi_2$ образуют решение задачи Римана, имеющее при $\lambda\to\infty$ полиномиальную по λ асимптотику. Операторы M образуют кольцо $\mathfrak{m}$. Рассмотрим в $\mathfrak{m}$ множество $\widetilde{\mathfrak{m}}$ операторов $\widetilde{M}$, таких, что

$$\widetilde{M}\chi_1\to 0\,,\quad \widetilde{M}\chi_2\longrightarrow 0 \qquad \text{при}\quad \lambda\longrightarrow\infty\,.$$

В силу утверждения (I.9)

$$\widetilde{M}\chi_1=0\,,\quad \widetilde{M}\chi_2=0\,. \tag{I.19}$$

Это же верно для любого оператора типа $M_1\widetilde{M}$. Итак, множество $\widetilde{\mathfrak{m}}$ представляет собой левый идеал в кольце $\mathfrak{m}$. Будем искать элементы из $\widetilde{\mathfrak{m}}$ в виде

$$\widetilde{M}_K=\mathcal{D}_K-I_K\mathcal{D}_0+\mathcal{U}_K\,. \tag{I.20}$$

Подставляя в $M_K\chi$ асимптотику (I.10) и требуя убывания при $\lambda\longrightarrow\infty$, найдем

$$\mathcal{U}_K=i\left[I_K,\varphi_1\right]. \tag{I.21}$$

Удобно объединить $\chi_{1,2}$ в одну функцию χ, определенную на всей комплексной плоскости. Теперь имеем

$$\widetilde{M}_K\chi=0\,,\qquad k=1,2\,. \tag{I.22}$$

Легко проверить, что операторы $\widetilde{M}_K$ образуют базис в идеале $\widetilde{\mathfrak{m}}$ - из $\widetilde{M}\chi=0$ следует $\widetilde{M}=A_i\widetilde{M}_i$ $(i=1,2)$ где A_i - некоторые операторы. Введем функцию $\Psi=\chi e^{i\lambda(x+I_Kx_K)}$. Она удовлетворяет уравнениям

$$\widetilde{R}\Psi=0,$$

где операторы $\tilde{R}$ получаются из операторов $\tilde{M}$ заменой "длинных производных" в (I.I4) на обычные

$$\mathcal{D}_0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{D}_K \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_K}.$$

В частности, уравнения (I.22) переходят в уравнения (В.9). При этом

$$Q = i\,\varphi_1 . \tag{I.23}$$

Формулу (I.23) легко получить непосредственно из определения функции χ .

Во всем предыдущем рассмотрении никакой роли не играл специальный выбор контура Γ (вещественная ось). Оно сохраняет силу и при произвольном контуре Γ . Это позволяет строить новые, неизвестные ранее, решения уравнения (В.8). Так, полагая $T(\lambda'\lambda) = T_1(\lambda')T_2(\lambda)$ найдем из (I.I2), (I.I3)

$$T_1 = e^{i(I_K x_K + x)\lambda'} f_1(\lambda'), \tag{I.24}$$

$$T_2 = f_2(\lambda) e^{-i(I_K x_K + x)\lambda} .$$

Из уравнения (I.4) теперь имеем

$$Q(x,x_i) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma T_1(\lambda')d\lambda'\left[1-\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{T_2(\xi)T_1(\lambda')}{\lambda'-\xi+i0}d\xi d\lambda'\right]^{-1}\int_\Gamma T_2(\lambda)d\lambda . \tag{I.25}$$

В (I.24), (I.25) f_1, f_2 – произвольные матричные функции переменной λ , заданные на контуре Γ . Решение (I.25) обобщает решения системы (В.8) найденные в [2] .

Мы неявно предполагали, что в рамках нашей новой схемы уравнения (В.8) получены как условия совместности системы (I.22) ,или эквивалентной ей системы

$$R_K \Psi = 0, \qquad K = 1,2 ,$$

совпадающей с системой (В.I), то есть фактически при помощи формулы (В.2). Уравнение (В.8) можно получить и другим способом – рассматривая в уравнениях (I.22) члены, пропорциональные $\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda \longrightarrow \infty$.

Имеем из (I.I0) (I.20) (I.22)

$$[\varphi_2, I_k] = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - I_k \frac{\partial Q}{\partial x} + u_k Q \quad ; \tag{I.25}$$

из-за коммутативности матриц I_k

$$[[\varphi_2, I_1] I_2] = [[\varphi_2, I_2], I_1] \, .$$

Пользуясь этим тождеством, исключаем член, содержащий φ_2 и приходим к уравнению (В.8).

§ 2. Нелокальная задача Римана - общий случай

Итак, мы перевели на язык нелокальной задачи Римана развитую в [I] технику решения уравнения (В.8) и приобрели при этом возможность значительно расширить класс решений за счет произвольного выбора контура.

Рассмотрим теперь общую схему применения нелокальной задачи Римана к многомерным интегрируемым системам, включающим в себя как частный случай все системы, описанные в [I] .

Пусть на комплексной плоскости λ задан контур Γ и на нем определена нелокальная задача Римана (I.8), то есть задана аналитическая на всей плоскости функция χ , имеющая на контуре Γ граничные значения χ_1, χ_2, связанные интегральным соотношением

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \int_\Gamma \chi_1(\lambda') \, T(\lambda', \lambda) \, d\lambda' . \tag{2.I}$$

Для простоты будем считать задачу Римана нормированной при $\lambda \to \infty$ на единицу $\chi \to 1$ при $\lambda \to \infty$.

Тогда по разные стороны от контура справедливо представление,

$$\chi = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{k(\lambda')}{k - \lambda' \pm i0} \, d\lambda' , \tag{2.2}$$

где

$$k(\lambda) = \chi_2(\lambda) - \chi_1(\lambda) \Big|_{\lambda \in \Gamma} .$$

Функция $k(\lambda)$ подчиняется сингулярному интегральному уравнению

$$k(\lambda) = \int_\Gamma T(\lambda', \lambda) \, d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Gamma\,\Gamma} \frac{k(\xi) \, T(\lambda', \lambda)}{\lambda - \xi + i0} \, d\lambda' \, d\xi . \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) (а вместе с ним и нормированную задачу Римана (2.I)) мы будем считать однозначно разрешимым.

Рассмотрим теперь набор коммутирующих рациональных матричных функций $I_k(\lambda)$

$$(k=1 \ldots n) \qquad [I_k, I_j] = 0$$

и построим при их помощи набор коммутирующих дифференциальных операторов первого порядка

$$\mathcal{D}_k \chi = \frac{\partial \chi}{\partial x_k} + \chi I_k(\lambda) , \tag{2.4}$$

$$[\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_j] = 0 .$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial x_k}$ - дифференцирования по n вообще говоря комплексным независимым переменным.

Пусть функция сопряжения $T(\lambda',\lambda)$ удовлетворяет условиям

$$[\mathcal{D}_i, T] = 0 ,$$

то есть уравнениям

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = I_i(\lambda')T - T I_i(\lambda) . \tag{2.5}$$

Тогда для любого дифференциального оператора M типа (I.I7) произвольного полинома от операторов $\mathcal{D}_i$ с независящими от λ переменными коэффициентами имеет место тождество (I.I8).

Функция $M\chi$ не является решением задачи Римана, так как содержит особенности во всех полюсах функций $I_k(\lambda)$, а также, вообще говоря имеет при $\lambda \to \infty$ полиномиальное поведение.

Снова выделим в кольце m операторов M подмножество $\tilde{m}$ операторов $\tilde{M}$ таких, что $\tilde{M}\chi$ не имеет особенностей во всей комплексной плоскости (кроме контура Γ), пусть, кроме того, $\tilde{M}\chi \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Теперь из разрешимости задачи Римана имеем

$$\tilde{M}\chi \equiv 0 , \tag{2.6}$$

так что множество $\tilde{m}$ - идеал в кольце m . Идеал $\tilde{m}$ состоит из всех уравнений $\tilde{M}$, имеющих совместное решение χ . Уравнения $\tilde{M}$ явно содержат параметр λ . Переходя к функции ψ по формуле

$$\psi = \chi e^{\sum_k I_k(\lambda) x_k} ,$$

получаем совместную систему уравнений на функцию ψ

$$\tilde{R}\psi = 0; \qquad (2.7)$$

операторы $\tilde{R}$ отличаются от M заменой (2.7) $\mathcal{D}_k \to \partial_k$ и не содержат параметра λ.

Следуя логике § I, мы должны были бы искать условия совместности уравнений (2.7). Однако, уравнения из $\tilde{m}$, вообще говоря, содержат много произвольных элементов, связанных с возможностью умножения слева на любые операторы типа M. Нужно поэтому построить в идеале $\tilde{m}$ базис.

Рассмотрим простые случаи, когда ее удается решить.

I. Пусть одна из переменных x_0 выделена тем, что $I_0(\lambda) = i\lambda$ а все остальные $I_i(\lambda)$ - полиномы. Тогда базис в идеале $\tilde{m}$ образуют операторы первого по $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i > 0)$ порядка имеющие вид

$$\tilde{M}_i = \mathcal{D}_i - L_i(\mathcal{D}_0) ;$$

соответствующие операторы $\tilde{R}_i$ и имеют вид

$$R_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - L_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

здесь L_i - некоторые полиномы. При $i = 1,2$ класс интегрируемых систем совпадает с описанным в [I] и задающимся формулой (B.2).

Среди этого класса находится и уравнение КП (B.I2). Чтобы получить его, нужно положить

$$\mathcal{D}_1 = \alpha\frac{\partial}{\partial y} - \lambda^2, \qquad \mathcal{D}_2 = \frac{\partial}{\partial t} - 4\lambda^3 . \qquad (2.8)$$

Применение нелокальной задачи Римана на произвольном контуре позволяет найти для КП новые классы точных решений.

2. Пусть по-прежнему $I_0(\lambda) = i\lambda$, но $I_k(\lambda) = \frac{P_k(\lambda)}{Q_k(\lambda)}$ - произвольные рациональные функции. P_k и Q_k - полиномы (полином Q_k имеет скалярные коэффициенты). Теперь базис в идеале $\tilde{m}$ (этот факт мы приводим без доказательства) строится из операторов вида

$$\tilde{M}_i = N_i(\mathcal{D}_0)\frac{\partial}{\partial x_i} - L_i(\mathcal{D}_0) . \qquad (2.9)$$

Соответствующие уравнения для функции ψ имеют вид (B.II).

И. условия совместности, дающие нелинейные уравнения, выписаны в работе [7].

Заметим, что нелинейные уравнения, описанные в пунктах 1, 2, возникают также, если положить $\mathcal{D}_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\lambda I_0$, где I_0 – произвольная постоянная невырожденная матрица.

В общем случае построение базиса в идеале $\tilde{m}$ – непростая задача. Существует однако, способ непосредственно вычислять нелинейные интегрируемые уравнения, минуя вычисление базиса $l\ \tilde{m}$. Этот способ был намечен в конце § I при вычислении уравнения (В.8). Продемонстрируем его на более общем примере.

Пусть $n=3$

$$\mathcal{D}_i \chi = \frac{\partial}{\partial x_i}\chi + \frac{\chi A_i}{\lambda-\lambda_i}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j ; [A_i, A_j] = 0 . \tag{2.10}$$

Обозначим $\chi|_{\lambda=\lambda_i} = \chi_i$ и будем искать оператор $\tilde{M}$ в виде

$$\tilde{M} = \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2 + R^1_{12}\mathcal{D}_1 + R^2_{12}\mathcal{D}_2 .$$

Функция $\tilde{M}\chi$ имеет особенности при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$. Из требования их отсутствия имеем

$$R^1_{12} = -\left(\partial_2 \chi_1 + \frac{\chi_1 A_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\chi_1^{-1}, \tag{2.11}$$

$$R^2_{12} = -\left(\partial_1 \chi_2 - \frac{\chi_2 A_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\chi_2^{-1} .$$

По определению $\tilde{M}\chi = 0$. В частности, это верно при $\lambda = \lambda_3$. Отсюда имеем нелинейное уравнение

$$\partial_1\partial_2\chi_3 + \frac{\partial_2\chi_3 A_1}{\lambda_3-\lambda_1} + \frac{\partial_1\chi_3 A_2}{\lambda_3-\lambda_2} + R^2_{12}\partial_2\chi_3 + R^1_{12}\partial_1\chi_3 + \tag{2.12}$$

$$+ \frac{\chi_3 A_1 A_2}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} + R^1_{12}\frac{\chi_3 A_1}{\lambda_3-\lambda_1} + R^2_{12}\frac{\chi_3 A_2}{\lambda_3-\lambda_2} = 0 .$$

Остальные два уравнения, связывающие χ_1, χ_2, χ_3 получаются из формул (2.11), (2.12) путем циклической перестановки.

Уравнение (2.12), насколько нам известно, ранее не возникало. Все переменные χ_1, χ_2, χ_3 входят в него весьма симметричным образом.

Из рассмотренного примера вытекает эмпирический прием построения уравнений интегрируемых при помощи нелокальной задачи Римана. Вначале следует, ограничиваясь полиномами возможно более низкого порядка, строить операторы из $\tilde{m}$, зануляющие функцию χ. Коэффициенты этих уравнений будут выражены через значения функции χ и ее первых производных по λ (элементов разложения Тейлора) в полюсах функций $I_k(\lambda)$ а также если это необходимо, элементов асимптотического разложения χ в окрестности $\lambda = \infty$. Далее следует рассматривать все полученные таким образом уравнения типа $\tilde{M}\chi = 0$ в окрестностях всех особенностей, включая $\lambda = \infty$. При этом естественным образом возникает замкнутая система нелинейных уравнений на элементы разложения Тейлора функции χ в особенностях $I_k(\lambda)$. Мы не имеем пока общей теоремы, позволяющей доказать универсальность этого приема, но его эффективность проверена на ряде примеров, слишком громоздких, чтобы их приводить в настоящей статье.

§ 3. Связь с локальной задачей Римана

Уравнения (2.5) допускают частное решение

$$T(\lambda', \lambda) = G(\lambda)\,\delta(\lambda-\lambda') . \tag{3.1}$$

Тогда

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = \left[I_i(\lambda), G \right] . \tag{3.2}$$

Задача Римана (2.1) при этом кардинально упрощается и становится локальной

$$\chi_2(\lambda) = \chi_1(\lambda) + \chi_1(\lambda)\, G(\lambda) . \tag{3.3}$$

Сильно упрощается и вычисление идеала $\tilde{m}$. Действительно, в число операторов типа M теперь входят операторы умножения слева на произвольную рациональную функцию от λ. Теперь можно выбирать операторы $\tilde{M}$ в виде

$$\tilde{M}_i \chi = \mathcal{D}\chi - u(\lambda)\chi = \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi I_i(\lambda) - u_i(\lambda)\chi = 0 . \tag{3.4}$$

Здесь $u(\lambda)$ - рациональная функция, имеющая те же особенности что и $I(\lambda)$.

В формуле (3.4) легко узнать основное соотношение работы [5]. Элементы функции выражаются через значения функции χ в особенностях I_i при помощи известных "формул одевания". Так, если

$$I_k(\lambda) = \sum \frac{I_k}{\lambda - \lambda_n}, \quad U_k = \sum \frac{u_n^k}{\lambda - \lambda_n},$$

$$\chi\big|_{\lambda=\lambda_n} = \chi_n, \qquad \text{то}$$

$$u_n^k = \chi_n I_n^k \chi_n^{-1} \qquad \text{(см. [5])}.$$

Операторы $\tilde{M}_i$, будучи операторами первого порядка, образуют, конечно, базис в идеале $\tilde{m}$. Нелинейные уравнения можно получить, либо коммутируя попарно операторы $\tilde{M}_i$, либо пользуясь описанным в § 2 приемом, то есть сужая уравнения (3.4) на окрестности полюсов функций $I_i(\lambda)$. При таком способе получения уравнений они принимают так называемую "спинорную форму" (см. [14]) Замечательно, что для нелинейных уравнений, записанных в этой форме, удается в общем виде сформулировать вариационный принцип (см. [15]). Это позволяет надеяться получить в будущем вариационный принцип и для систем типа (2.12), связанных с нелокальной задачей Римана.

Коммутируя попарно уравнения типа (3.4) мы будем получать нелинейные интегрируемые системы относительно функций, зависящих от двух независимых переменных. Этот факт согласуется с тем что в случае локальной задачи Римана мы произвольно задаем функцию одной переменной $G(\lambda)$. По этим же соображениям естественное число независимых переменных для систем типа (2.12) - три. Это согласуется с тем фактом, что в данном случае задается произвольная функция двух переменных. Представляется, однако, привлекательной возможность строить при помощи нелокальной задачи Римана частные решения более многомерных уравнений, выделяемые неопределенными, но совместными системами многомерных условий. Представляется, кроме того, перспективным использовать нелокальные задачи Римана для поиска нетривиальных редукций в двумерных системах. Результаты этих редукций могут оказаться "стационарными точками" более многомерных интегрируемых систем.

Литература

I. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. – Функц.анализ и его прилож. 1974, т.8, в.3, с.43-53.

2. Захаров В.Е. Точные решения задачи о параметрическом взаимодействии волновых пакетов. – Докл.АН СССР, 1976, т.228, № 6, с.1314-1316.

3. Kaup D.J. A method for solving the separable initial value problem of the full three-dimensional three-wave interaction. - Stud. Appl.Math., 1980, v.62, p.75-83.

4. Kaup D.J. The inverse scattering solution for the full three-dimensional three-wave resonant interaction. - Physica 3D, 1980, v.1, N 1, p.45-67.

5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. – Функц.анализ и его прилож., 1979, т.13, в.3, с.13-22.

6. Zakharov V.E. The inverse scattering method. - In.: Solitons, ed.Bullough R.K., Caudrey P.J., Springer, 1980, p. 243-286 (русский перевод: "Солитоны", под редакцией С.П.Новикова, Мир, 1983).

7. Zakharov V.E. Integrable systems in multidimensional spaces. - In.: Mathematical problems in theoretical physics, Lect.Notes in Phys., Springer, 1982, v.153, p.190-216.

8. Манаков С.В. Многомерные нелинейные эволюционные уравнения, интегрируемые методом обратной задачи. – Автореферат док.диссер.ИТФ им.Л.Д.Ландау, Черноголовка, 1983 г.

9. Manakov S.V. The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. - Physica 3D, 1981, v.3, N 1, 2; p.420-427.

10. Manakov S.V., Santini P., Takhtajan L.A. - Long-time behaviour of the solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation (two-dimensional KdV equation). - Phys. Lett., 1980, v.74A, p.451-454.

11. Manakov S.V., Zakharov V.E. Soliton theory. - In: Physics Review, v.1, ed.I.M.Khalatnikov, London, 1979.

p.133-190.
12. F o k a s A.S., A b l o w i t z M.J. On the inverse scattering and direct linearization transform for the KP equation. - Preprint INS, 1982, N 9.
13. A b l o w i t z M.J., van Y a a k o v D., F o k a s A.S. On the inverse scattering transform for the KP-II equation. - Preprint INS, 1982, N 21.
14. M i k h a i l o v A.V., Z a k h a r o v V.E. On the integrability of classical spinor models in two-dimensional space-time. - Comm.Math.Phys., 1980, v.74, p.21-40.
15. З а х а р о в В.Е., М и х а й л о в А.В. Вариационный принцип для уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Функ.анализ и его прилож., 1980, т.14, в.1, с.55-56.

А.Г.Изергин, В.Е.Корепин

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В КВАНТОВОМ МЕТОДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

I. ВВЕДЕНИЕ.

Создание Л.Д.Фаддеевым и его учениками квантового метода обратной задачи рассеяния КМОЗ [I-3] и, в первую очередь, алгебраизация анзатца Бете привели к значительному прогрессу в исследовании вполне интегрируемых систем. Были решены многие задачи, которые не удавалось решить традиционными способами. В настоящей работе в рамках КМОЗ формулируется задача о вычислении корреляционных функций. Использование алгебраической структуры КМОЗ, как оказывается, позволяет значительно продвинуться и в решении этой задачи.

Мы будем опираться в дальнейшем на результаты работ [4,5], где была введена модель, которую в дальнейшем будем называть одноузельной обобщенной моделью. Вакуумные значения диагональных элементов матрицы монодромии этой модели являются произвольными функциями. Конкретные модели, такие как одномерный Бозе-газ, XXX и XXZ модели Гейзенберга, получаются из одноузельной модели при соответствующем выборе этих функций. Именно существование функционального параметра в одноузельной модели позволило исследовать свойства скалярных произведений и доказать формулу для норм бетевских волновых функций [5].

Задача о вычислении корреляционных функций в КМОЗ требует введения обобщенных моделей с несколькими узлами. Этот подход можно применять для вычисления любых корреляционных функций во вполне интегрируемых моделях с R-матрицами типа XXX и XXZ. В дальнейшем, однако, будет рассмотрен простейший случай - двухузельная модель с R-матрицей типа XXX. Эта модель связана с вычислением таких величин, как коррелятор токов для одномерного Бозе-газа и коррелятор спинов в XXX модели Гейзенберга.

В разделе 2 мы формулируем основные свойства скалярных произведений в одноузельной модели. В разделах 3-6 вводится обобщенная двухузельная модель и исследуются средние значения операторов заряда в этой модели. В терминах этих средних значений выражается коррелятор токов для Бозе-газа. При этом основную роль играет понятие неприводимой части среднего значения. Полученные здесь результаты существенно используются в следующей статье этого сборника [6] при вычислении коррелятора токов для Бозе-газа с отталкиванием.

Отметим, что из-за ограниченного объема статьи мы опускаем доказательства. Подробная версия этой работы, содержащая все доказательства, направлена в журнал Communications in Mathematical Physics.

2. ОДНОУЗЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ И СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Рассмотрим некоторую матрицу монодромии $T(\lambda)$:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda); & B(\lambda) \\ C(\lambda); & D(\lambda) \end{pmatrix} . \tag{2.I}$$

В конкретных моделях матрица монодромии строится как произведение локальных L-операторов [2], а ее след - трансфер-матрица $\tau(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ - является производящей функцией интегралов движения, среди которых находится и гамильтониан модели. Здесь мы не интересуемся внутренней структурой матрицы монодромии и поэтому называем модель "одноузельной".

Матричные элементы матрицы монодромии являются "квантовыми операторами", их коммутационные соотношения задаются формулой [2]:

$$R(\lambda-\mu)\, T(\lambda) \otimes T(\mu) = T(\mu) \otimes T(\lambda)\, R(\lambda-\mu), \tag{2.2}$$

где 4×4-матрица R есть R-матрица XXX-модели:

$$R(\lambda-\mu) = \begin{pmatrix} f(\mu,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu,\lambda) \end{pmatrix}; \tag{2.3}$$

$$f(\lambda,\mu) = 1 + g(\lambda,\mu) = 1 + ic/(\lambda-\mu) . \tag{2.4}$$

Здесь λ - комплексный спектральный параметр, а c - константа связи. Мы предполагаем, что в квантовом пространстве, где действуют матричные элементы матрицы монодромии, существует вакуумный вектор-состояние $|0\rangle$ со следующими свойствами:

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle; \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle;$$
$$C(\lambda)|0\rangle = 0; \qquad B(\lambda)|0\rangle \neq 0 . \tag{2.5}$$

Это необходимо для решения модели с помощью КМОЗ. Дуальный вакуум $\langle 0|$ удовлетворяет соотношениям $\langle 0|B(\lambda)=0$, $\langle 0|A(\lambda) = a(\lambda)\langle 0|$; $\langle 0|D(\lambda)=d(\lambda)\langle 0|$; $\langle 0|0\rangle = 1$.

Такие матрицы монодромии $T(\lambda)$ существуют для произвольных комплекснозначных функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, которые можно рассматривать как свободные функциональные параметры одноузельной модели [4,5] . При этом существенно различным матрицам монодромии соответствуют различные значения функционального параметра $r(\lambda)$:

$$r(\lambda) = a(\lambda)/d(\lambda) . \tag{2.6}$$

Собственные векторы трансфер-матрицы $\tau(\lambda)$ имеют вид [2] :

$$|\Psi_N(\lambda_1,\dots,\lambda_N)\rangle = \prod_{j=1}^{N} \mathbb{B}(\lambda_j)|0\rangle; \quad \langle\Psi_N(\lambda_1,\dots,\lambda_N)| = \langle 0|\prod_{j=1}^{N} \mathbb{C}(\lambda_j) . \tag{2.7}$$

Здесь мы используем операторы рождения и уничтожения, нормированные следующим образом:

$$\mathbb{B}(\lambda) = B(\lambda)/d(\lambda); \quad \mathbb{C}(\lambda) = C(\lambda)/d(\lambda) . \tag{2.8}$$

Все "импульсы" λ_j в (2.7) различны [7] и удовлетворяют системе трансцендентных уравнений (с.т.у.):

$$\vartheta_j = 0 \pmod{2\pi}, \tag{2.9}$$

где

$$\vartheta_j = i\ln r_j + i\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \ln(f_{jk}/f_{kj}) . \tag{2.10}$$

Мы обозначаем $f_{jk} \equiv f(\lambda_j,\lambda_k)$ и $r_j \equiv r(\lambda_j)$.

"Скалярным произведением" назовем величину $\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\prod_{k=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle$, где все λ_k^B , λ_j^C произвольны и различны. Свойства скалярных произведений были подробно исследованы в работе [5] ; все дальнейшие формулы этого раздела легко восстанавливаются из результатов этой работы. В принципе скалярное произведение можно вычислить с помощью коммутационных соотношений (2.2); так, например, $\langle 0| \mathbb{C}(\lambda^C)\mathbb{B}(\lambda^B)|0\rangle = g(\lambda^C,\lambda^B)[r(\lambda^C)-r(\lambda^B)]$.

Для произвольного N легко выделить зависимость от вакуумных собственных значений:

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\prod_{k=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle = \sum_{part}\Big(\prod_{pr}^{N} r(\lambda_{pr})\Big)\mathbb{K}_N(part). \quad (2.\mathrm{II})$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda^C\}_N \cup \{\lambda^B\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{pr}\}_N$ и $\{\lambda_{ab}\}_N$ (нижний индекс M в $\{\lambda\}_M$ означает число элементов в $\{\lambda\}_M : \mathrm{card}\,\{\lambda\}_M \equiv M$). Коэффициенты $\mathbb{K}_N$ не зависят от функции $r(\lambda)$, будучи рациональными функциями $2N$ переменных λ^B, λ^C и убывая по любому из λ как $1/\lambda$ при остальных λ фиксированных.

Скалярное произведение зависит лишь от значений произвольной функции $r(\lambda)$ в $2N$ точках λ_j^C, λ_k^B. Эти значения можно рассматривать как $2N$ независимых комплексных числовых переменных:

$$r_j^C \equiv r(\lambda_j^C)\,; \quad r_k^B = r(\lambda_k^B) \quad (j,k=1,\dots,N). \quad (2.\mathrm{I2})$$

Следовательно, скалярное произведение есть функция $4N$ независимых переменных $\{\lambda^C\}_N$, $\{\lambda^B\}_N$, $\{r^C\}_N$, $\{r^B\}_N$. Важнейшее свойство состоит в том, что при $\lambda_j^C \longrightarrow \lambda_k^B$ $(j,k=1,\dots,N)$ скалярное произведение имеет простой полюс, вычет в котором есть также некоторое скалярное произведение. Так, при $\lambda_N^C \longrightarrow \lambda_N^B = \lambda_N$ (общий случай очевиден в силу симметрии относительно замены $(r_j,\lambda_j)\longleftrightarrow(r_k,\lambda_k)$) имеем

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\prod_{k=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle\Big|_{\lambda_N^C\to\lambda_N^B} \longrightarrow \frac{ic(r_N^C-r_N^B)}{(\lambda_N^C-\lambda_N^B)}\Big(\prod_{j=1}^{N-1} f_{Nj}^B f_{Nj}^C\Big)\times$$

$$\times\langle 0|\prod_{j=1}^{N-1}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\prod_{k=1}^{N-1}\mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle^{mod}; \quad f_{Nj}^B \equiv f(\lambda_N,\lambda_j^B). \quad (2.\mathrm{I3})$$

Скалярное произведение в правой части должно быть сосчитано при "модифицированных" вакуумных значениях $\tilde{a}(\lambda)=a(\lambda)f(\lambda,\lambda_N)$;

$$\tilde{d}(\lambda) = d(\lambda)\, f(\lambda_N, \lambda), \text{ т.е.}$$

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{N-1} \mathbb{C}(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} \mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle^{mod} = \sum_{part} \Big(\prod_{pr} \tilde{r}(\lambda_{pr})\Big) \mathbb{K}_{N-1}(part); \tag{2.14}$$
$$card\{\lambda_{pr}\}_{N-1} = N-1,$$

где

$$\tilde{r}(\lambda) = r(\lambda)\, f(\lambda, \lambda_N) / f(\lambda_N, \lambda). \tag{2.15}$$

Заметим, что коэффициенты $\mathbb{K}_{N-1}$ не модифицируются – они те же, что в (2.12) при $N \longrightarrow N-1$. Модифицированное скалярное произведение в (2.15) не содержит $r_N^{C,B}$, а λ_N входит только в $\tilde{r}(\lambda)$.

В физически интересных случаях переменные r_j являются значениями гладкой функции $r(\lambda)$ (см. (2.12)). При этом вычет в полюсе (2.13) становится равным нулю, и соответствующий предел конечен. При $\lambda_N^C \longrightarrow \lambda_N^B \longrightarrow \lambda_N$ зависимость скалярного произведения от вакуумных собственных значений в точке λ_N естественно выражается через переменные $r_N \equiv r(\lambda_N)$ и $z_N \equiv$ $\equiv i\partial(\ln r(\lambda))/\partial\lambda \big|_{\lambda=\lambda_N}$. Зависимость от z_N линейна, а коэффициент при z_N дается в существенном вычетом в (2.13):

$$\frac{\partial}{\partial z_N} \langle 0| \Big(\prod_{j=1}^{N-1} \mathbb{C}(\lambda_j^C)\Big) \mathbb{C}(\lambda_N) \mathbb{B}(\lambda_N) \Big(\prod_{k=1}^{N-1} \mathbb{B}(\lambda_k^B)\Big)|0\rangle =$$

$$= c\, r_N \Big(\prod_{k=1}^{N-1} f_{Nk}^B\, f_{Nk}^C\Big) \langle 0| \prod_{j=1}^{N-1} \mathbb{C}(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{N-1} \mathbb{B}(\lambda_k^B)|0\rangle^{mod} \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь случай, когда все $\lambda_j^C \longrightarrow \lambda_j^B = \lambda_j$ $(j=1,\dots,N)$, причем все λ_j различны. В этом случае скалярное произведение $\langle 0| \prod_{j=1}^{N} \mathbb{C}(\lambda_j) \prod_{j=1}^{N} \mathbb{B}(\lambda_j)|0\rangle$ зависит от $3N$ независимых комплексных переменных $\{z_j\}_N$, $\{r_j\}_N$ и $\{\lambda_j\}_N$, где

$$z_j = i\partial(\ln r(\lambda))/\partial\lambda \Big|_{\lambda=\lambda_j}. \tag{2.17}$$

Линейность по каждому из z_j, так же как и уравнение (2.16), и в этом случае имеют место, но в скалярном произведении модифицируются не только $r(\lambda)$ (2.15), но и переменные z_j:

$$\tilde{z}_j = z_j + K_{jN}; \quad K_{jN} \equiv K(\lambda_j, \lambda_N) = 2c\left[c^2 + (\lambda_j - \lambda_N)^2\right]^{-1} \tag{2.18}$$

Наконец, если не только $\lambda_j^C \to \lambda_j^B \to \lambda_j$ $(j=1,\dots,N)$, но λ_j удовлетворяют с.т.у. (2.9), то скалярное произведение превращается в "норму" бетевской волновой функции $\langle \Psi_N(\lambda_1\dots\lambda_N)|\Psi_N(\lambda_1\dots\lambda_N)\rangle$. В этом случае переменные r_j выражаются из с.т.у. как явные рациональные функции λ_j, и норма зависит от $2N$ независимых переменных $\{z_j\}_N$ и $\{\lambda_j\}_N$. Линейность по z_j и (2.16) остаются, причем модифицированное скалярное произведение в правой части можно тоже рассматривать как норму, т.к. благодаря (2.9), (2.15) выполнена модифицированная с.т.у. $\tilde{r}_j \prod_{k\neq j}^{N-1} (f_{jk}/f_{kj}) = 1$ $(j=1,\dots,N-1)$. Это обстоятельство и позволило вычислить норму [5]:

$$\langle \Psi_N(\lambda_1\dots\lambda_N)|\Psi_N(\lambda_1\dots\lambda_N)\rangle = c^N \Big(\prod_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} f_{jk}\Big) \det_N(\varphi'), \tag{2.19}$$

где $N\times N$ -матрица φ' определена как $\varphi'_{jk} \equiv \partial \varphi_j / \partial \lambda_k$.

В конкретных моделях функции $a(\lambda)$, $d(\lambda)$ и $r(\lambda)$ принимают конкретные значения. Так, одномерный Бозе-газ описывается гамильтонианом

$$H = \int_0^L (\partial_x \psi^+ \partial_x \psi + c\psi^+\psi^+\psi\psi)\,dx - h\int_0^L \psi^+\psi\,dx \tag{2.20}$$

где L – длина ящика, h – химический потенциал, а $\psi(x), \psi^+(x)$ – бозонные операторы с коммутационными соотношениями $[\psi(x), \psi^+(y)] = \delta(x-y)$. Уравнение движения в этом случае есть нелинейное уравнение Шредингера, и в дальнейшем эта модель называется моделью НШ. Модель НШ решается с помощью КМОЗ [1,2]; при этом гамильтониан (2.20) выражается в терминах трансфер-матрицы [8]. Соответствующие вакуумные значения есть

$$a_{NS}(\lambda) = \exp\{-i\lambda L/2\};\ d_{NS}(\lambda) = \exp\{i\lambda L/2\};\ r_{NS}(\lambda) = \exp\{-i\lambda L\}. \tag{2.21}$$

Формулы (2.10), (2.19), (2.21) дают выражение для нормы бетевской волновой функции в модели НШ. Одноузельной модели, однако, недостаточно для вычисления корреляционных функций, т.к. они зависят не только от поведения матрицы монодромии на всем пространственном интервале, но и от матриц монодромии на его частях.

3. ДВУХУЗЕЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Двухузельная модель - это модель, полная матрица монодромии $T(\lambda)$ (2.I) которой представляется в виде матричного произведения двух матриц монодромии размерности 2×2:

$$T(\lambda)=T_2(\lambda)\,T_1(\lambda). \tag{3.I}$$

Матрицу $T_1(\lambda)$ мы связываем с первым, а матрицу $T_2(\lambda)$ - со вторым узлом двухузельной решетки. Матричные элементы $T_i(\lambda)$ - квантовые операторы в i-ом узле $(i=1,2)$ - обозначим естественным образом $A_i(\lambda)$, $B_i(\lambda)$, $C_i(\lambda)$, $D_i(\lambda)$.

Операторы в разных узлах решетки коммутируют; коммутационные соотношения операторов в одном узле те же (2.2), что и у матричных элементов $T(\lambda)$. Матрица монодромии $T_i(\lambda)$ имеет вакуум $|0\rangle_i$:

$$A_i(\lambda)|0\rangle_i=a_i(\lambda)|0\rangle_i;\quad D_i(\lambda)|0\rangle_i=d_i(\lambda)|0\rangle_i;$$
$$C_i(\lambda)|0\rangle_i=0;\quad B_i(\lambda)|0\rangle_i\neq 0. \tag{3.2}$$

Дуальный вакуум ${}_i\langle 0|$ определяется обычным образом и удовлетворяет соотношению ${}_i\langle 0|0\rangle_i=1$. Состояние $|0\rangle=|0\rangle_2\otimes|0\rangle_1$ - это вакуум (2.5) для $T(\lambda)$, причем

$$a(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda);\quad d(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda);\quad r(\lambda)=\ell(\lambda)m(\lambda), \tag{3.3}$$

$$\ell(\lambda)\equiv a_1(\lambda)/d_1(\lambda);\quad m(\lambda)\equiv a_2(\lambda)/d_2(\lambda). \tag{3.4}$$

Функции $a_i(\lambda)$, $d_i(\lambda)$ - четыре произвольные комплекснозначные функции. Существенно различным моделям соответствуют различные функции $\ell(\lambda)$, $m(\lambda)$. Отметим, что одной одноузельной модели, рассмотренной в п.2 соответствует множество двухузельных моделей с одной и той же функцией $r(\lambda)$. Функция $\ell(\lambda)$ будет играть роль основного свободного функционального параметра модели.

В двухузельной модели введем оператор числа частиц Q_i в i-ом узле $(i=1,2)$:

$$[Q_i,T_j(\lambda)]=\tfrac{1}{2}[\sigma_3,T_i(\lambda)]\,\delta_{ij}\quad (i,j=1,2);$$
$$Q_i|0\rangle=0. \tag{3.5}$$

Слева здесь стоит "квантовый" коммутатор, а справа - матричный коммутатор с матрицей Паули σ_3. Оператор полного числа частиц есть $Q = Q_1 + Q_2$. Собственные векторы операторов Q_i суть:

$$Q_i \prod_{j=1}^{n} \mathbb{B}_i(\lambda_j)|0\rangle = n \prod_{j=1}^{n} \mathbb{B}_i(\lambda_j)|0\rangle ;$$
$$\langle 0| \prod_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\lambda_j) Q_i = n \langle 0| \prod_{j=1}^{n} \mathbb{C}(\lambda_j) \tag{3.6}$$

(мы используем операторы $\mathbb{B}_i(\lambda) \equiv B_i(\lambda)/d_i(\lambda);\ \mathbb{C}_i(\lambda) = C_i(\lambda)/d_i(\lambda)$). Заметим, что с.т.у. (2.9) для λ_j здесь не предполагается выполненной.

Конкретным физическим моделям соответствует конкретный выбор матриц монодромии T_1 и T_2 в (3.I). Например, мы можем взять в качестве T_1 матрицу монодромии модели НШ на пространственном интервале $[0, x]$, а в качестве T_2 - матрицу монодромии на интервале $[x, L]$, так что вакуумные значения суть

$$\ell_{NS}(\lambda) = \exp\{-i\lambda x\};\quad m_{NS}(\lambda) = \exp\{-i\lambda y\}, \tag{3.7}$$

где $y \equiv L - x$. Операторы заряда при этом выразятся через локальное поле модели НШ:

$$Q_1 = \int_0^x \psi^+(x)\psi(x)dx;\quad Q_2 = \int_x^L \psi^+(x)\psi(x)dx;\quad Q = \int_0^L \psi^+(x)\psi(x)dx. \tag{3.8}$$

Поставим задачу о вычислении в модели НШ среднего значения $\langle \Psi_N | j(x) j(0) | \Psi_N \rangle$, где $|\Psi_N\rangle$ - собственная функция гамильтониана (та же, что у трансфер-матрицы (2.7)), а $j(x) = \psi^+(x)\psi(x)$ - оператор тока. Если $|\Psi_N\rangle = |\Omega\rangle$, где $|\Omega\rangle$ - физический вакуум модели [2,9], то это среднее значение есть коррелятор токов. Нетрудно видеть, что

$$\langle \Psi_N | j(x) j(0) | \Psi_N \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle \Psi_N | Q_1^2 | \Psi_N \rangle, \tag{3.9}$$

т.е. вычисление среднего значения произведения токов сводится к вычислению среднего значения оператора Q_1^2. Эта последняя задача может быть поставлена и в общей двухузельной модели, где ее решение упрощается благодаря произвольности функционального параметра $\ell(\lambda)$.

4. МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАТОРА ЗАРЯДА В ДВУХУЗЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

При исследовании свойств матричных элементов удобнее иметь дело с "производящим оператором" $exp\left\{\alpha Q_1\right\}$; операторы Q_1 , Q_1^2 легко получаются из него дифференцированием по α . Рассмотрим в двухузельной модели матричный элемент

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\left|exp\left\{\alpha Q_1\right\}\right|\prod_{k=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_k^B)\,|0\rangle \equiv \mathbb{M}_N^{\alpha}\,. \qquad (4.1)$$

Здесь все импульсы λ_j^C , λ_k^B произвольны и различны. Исследование свойств этого матричного элемента проводится аналогично исследованию свойств скалярных произведений [5] , которые являются частным случаем $\mathbb{M}_N^{\alpha}$ при $\alpha=0$.

В двухузельной модели имеет место следующая формула, выражающая состояние $\prod\mathbb{B}(\lambda_j^B)\,|0\rangle$ в терминах состояний $\prod\mathbb{B}_1(\lambda^B)\,|0\rangle$ и $\prod\mathbb{B}_2(\lambda^B)\,|0\rangle$, локализованных в первом и втором узлах решетки:

$$\prod_{j=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_j)|0\rangle = \sum_{\{\lambda\}_N=\{\lambda_{\mathrm{I}}\}_{n_1}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}\}_{n_2}}^{n_1+n_2=N}\Big(\prod_{\mathrm{I}}\prod_{\mathrm{II}} m(\lambda_{\mathrm{I}})f(\lambda_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{II}})\Big)\times \qquad (4.2)$$

$$\times\Big(\prod_{\mathrm{II}}\mathbb{B}_2(\lambda_{\mathrm{II}})\Big)\Big(\prod_{\mathrm{I}}\mathbb{B}_1(\lambda_{\mathrm{I}})\Big)\,|0\rangle\,.$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{\mathrm{I}}\}_{n_1}$ и $\{\lambda_{\mathrm{II}}\}_{n_2}$; $card\{\lambda_{\mathrm{I}}\}_{n_1}=n_1$; $card\{\lambda_{\mathrm{II}}\}_{n_2}=n_2$; $n_1+n_2=N$. Произведение $\prod\limits_{\mathrm{I}}\prod\limits_{\mathrm{II}}$ обозначает произведение по всем $\lambda\in\{\lambda_{\mathrm{I}}\}$ и $\lambda\in\{\lambda_{\mathrm{II}}\}$; оно содержит $n_1 n_2$ сомножителей. Эта формула доказывается с помощью обобщения стандартных аргументов, используемых при выводе формул алгебраического анзатца Бете [2,3] . Формула (4.2) и аналогичная формула для состояния $\langle 0|\prod\mathbb{C}(\lambda^C)$ позволяют записать $\mathbb{M}_N^{\alpha}$ в виде

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j^C)\left|exp\left\{\alpha Q_1\right\}\right|\prod_{k=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_k^B)\,|0\rangle =$$

$$= \sum_{\{\lambda^B\}=\{\lambda^B_I\}\cup\{\lambda^B_{II}\}} \quad \sum_{\{\lambda^C\}=\{\lambda^C_I\}\cup\{\lambda^C_{II}\}} \exp\{\alpha n_1\} \times \tag{4.3}$$

$$\times \langle 0|\prod_I \mathbb{C}_1(\lambda^C_I)\prod_I \mathbb{B}_1(\lambda^B_I)|0\rangle \langle 0|\prod_{II}\mathbb{C}_2(\lambda^C_{II})\prod_{II}\mathbb{B}_2(\lambda^B_{II})|0\rangle \times$$

$$\times\Big(\prod_I m(\lambda^B_I)\Big)\Big(\prod_{II}\ell(\lambda^C_{II})\Big)\Big(\prod_{I,II} f(\lambda^B_I,\lambda^B_{II})\Big)\Big(\prod_{I,II} f(\lambda^C_{II},\lambda^C_I)\Big).$$

Суммирование здесь ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda^B_j\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda^B_I\}_{n_1}$ и $\{\lambda^B_{II}\}_{n_2}$ и по аналогичным разбиениям набора $\{\lambda^C_j\}_N$. При этом $card\{\lambda^B_I\}_{n_1}= =card\{\lambda^C_I\}_{n_1}=n_1$; $card\{\lambda^B_{II}\}_{n_2}=card\{\lambda^C_{II}\}_{n_2}=n_2=N-n_1$. В остальном разбиения произвольны.

Из представления (4.3) и свойств скалярных произведений (см. п.2) следует, что матричный элемент (4.I) можно рассматривать как рациональную функцию $6N$ независимых комплексных переменных: $2N$ импульсов λ^C_j, λ^B_k и $4N$ переменных ℓ^C_j, ℓ^B_k; m^C_j, m^B_k:

$$\ell^{C,B}_j \equiv \ell(\lambda^{C,B}_j); \quad m^{C,B}_j \equiv m(\lambda^{C,B}_j) \tag{4.4}$$

(функции $\ell(\lambda)$ и $m(\lambda)$ определены в (3.5)). Выпишем эту зависимость:

$$\mathbb{M}^\alpha_N=\mathbb{M}^\alpha_N(\{\lambda^C\}_N,\{\lambda^B\}_N,\{\ell^C\}_N,\{\ell^B\}_N,\{m^C\}_N,\{m^B\}_N) \tag{4.5}$$

Из (2.2) следует, что функция $\mathbb{M}^\alpha_N$ симметрична при перестановке "троек" $(\lambda^C_j,\ell^C_j,m^C_j)\longleftrightarrow(\lambda^C_k,\ell^C_k,m^C_k)$ и независимо при перестановке $(\lambda^B_j,\ell^B_j,m^B_j)\longleftrightarrow(\lambda^B_k,\ell^B_k,m^B_k)$. Основное свойство рациональной функции $\mathbb{M}^\alpha_N$ состоит в том, что она имеет полюса первого порядка при $\lambda^C_j=\lambda^B_k$ $(j,k=1,\dots,N)$ и остальных переменных фиксированных, причем вычеты в этих полюсах выражаются через $\mathbb{M}^\alpha_{N-1}$. Так, при $\lambda^C_N\longrightarrow\lambda^B_N\longrightarrow\lambda_N$ имеем (общий случай легко восстанавливается из свойства симметрии):

$$\mathbb{M}^\alpha_N\Big|_{\lambda^C_N\to\lambda^B_N}=\frac{ic}{(\lambda^C_N-\lambda^B_N)}\left[\ell^C_N m^B_N-r^B_N\right]e^\alpha\Big(\prod_{j=1}^{N-1} f^C_{Nj}\, f^B_{Nj}\Big)\times$$

$$\times \mathbb{M}^{\alpha}_{N-1}(\{\lambda^C\}_{N-1},\{\lambda^B\}_{N-1},\{\tilde{\ell}^C\}_{N-1},\{\tilde{\ell}^B\}_{N-1},\{m^C\}_{N-1},\{m^B\}_{N-1})+$$

$$+\frac{ic}{(\lambda^C_N-\lambda^B_N)}\left[r^C_N-\ell^C_N\, m^B_N\right]\left(\prod_{j=1}^{N-1} f^C_{Nj}\, f^B_{Nj}\right)\times \tag{4.6}$$

$$\times \mathbb{M}^{\alpha}_{N-1}(\{\lambda^C\}_{N-1},\{\lambda^B\}_{N-1},\{\ell^C\}_{N-1},\{\ell^B_{N-1}\},\{\tilde{m}^C\}_{N-1},\{\tilde{m}^B\}_{N-1}).$$

Здесь $f^{C,B}_{Nj}\equiv f(\lambda_N,\lambda_j^{C,B})$, а модифицированные значения переменных ℓ и m суть

$$\tilde{\ell}_j^{C,B}=\ell_j^{C,B}\left(f^{C,B}_{jN}\Big/f^{C,B}_{Nj}\right);\ \tilde{m}_j^{C,B}=m_j^{C,B}\left(f^{C,B}_{jN}\Big/f^{C,B}_{Nj}\right) \tag{4.7}$$

(ср. с (2.I5)). Формула (4.6) получается из (2.I3) и (4.3). Существенно, что в (4.6) $\mathbb{M}^{\alpha}_{N-1}$ не зависит от ℓ_N, m_N, а переменная λ_N входит только в модифицированные вакуумные значения $\tilde{\ell}_j$ и $\tilde{m}_j$.

В физически интересных моделях переменные ℓ_j и m_j являются значениями гладких функций $\ell(\lambda)$ и $m(\lambda)$ (см. (3.5), (4.4), (3.7)). В этом случае вычет в (4.6) становится равным нулю. В пределе $\lambda_j^C\to\lambda_j^B\ (j=1,\dots,N)$ зависимость матричного элемента (4.I) от вакуумных собственных значений в точках λ_j представляется в терминах $4N$ переменных $\ell_j\equiv\ell(\lambda_j)$; $m_j=m(\lambda_j)$ и x_j, y_j (ср. с (2.I7):

$$x_j=i\partial(\ln\ell(\lambda))/\partial\lambda\Big|_{\lambda=\lambda_j};\ y_j=i\partial(\ln m(\lambda))/\partial\lambda\Big|_{\lambda=\lambda_j} \tag{4.8}$$

(для модели НШ (см. (3.7)) $x_j=x$, $y_j=y$). Обозначим

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{N}\mathbb{C}(\lambda_j)\prod_{j=1}^{N}\mathbb{B}(\lambda_j)|0\rangle\equiv M^{\alpha}_N(\{\lambda\}_N,\{x\}_N,\{y\}_N,\{\ell\}_N,\{m\}_N). \tag{4.9}$$

Величина M^{α}_N зависит, таким образом, от $5N$ комплексных переменных. Нетрудно видеть, что M^{α}_N является линейной функцией каждой из переменных x_j, y_j, причем коэффициенты при x_j, y_j

выражаются в терминах M_{N-1}^{α}. Это легко сделать при помощи (4.6); здесь имеется полная аналогия с формулой (2.16).

Чтобы перейти к интересующему нас среднему значению по отношению к собственной функции (2.7), надо подчинить λ_j с.т.у. (2.9). При этом переменные $m_j \equiv m(\lambda_j)$ в (4.9) могут быть выражены через остальные переменные:

$$m_j = \ell_j^{-1} \prod_{k \neq j} (f_{kj} / f_{jk}) \qquad (j = 1, \ldots, N). \tag{4.10}$$

Выпишем явно зависимость от независимых переменных:

$$\langle \Psi_N(\lambda_1 \ldots \lambda_N) | \exp\{\alpha Q_1\} | \Psi_N(\lambda_1 \ldots \lambda_N) \rangle \equiv \mathcal{M}_N^{\alpha}(\{\lambda\}_N, \{x\}_N, \{y\}_N, \{\ell\}_N). \tag{4.11}$$

Линейность функции $\mathcal{M}_N^{\alpha}$ по каждому из x_j, y_j $(j = 1, \ldots, N)$ сохраняется, а вычет по-прежнему выражается через $\mathcal{M}_{N-1}^{\alpha}$.

В заключение этого раздела сформулируем свойства, необходимые для вычисления средних значений операторов Q_1 и Q_1^2. При этом удобно использовать следующую нормировку среднего значения функций оператора Q_1:

$$\langle Q_1^m \rangle_N (\{\lambda\}_N, \{x\}_N, \{y\}_N, \{\ell\}_N) \equiv \frac{\langle \Psi_N(\lambda_1 \ldots \lambda_N) | Q_1^m | \Psi_N(\lambda_1 \ldots \lambda_N) \rangle}{C^N \prod_{j \neq k} f_{jk}} \tag{4.12}$$

Важнейшие свойства величин $\langle Q_1 \rangle_N$ и $\langle Q_1^2 \rangle_N$ следующие:

(1) Это симметричные функции относительно перестановок $(\lambda_j, x_j, y_j, \ell_j) \longleftrightarrow (\lambda_k, x_k, y_k, \ell_k)$. (2) Это линейные функции x_N и y_N. (3) Коэффициенты при x_N и y_N даются формулами

$$\frac{\partial}{\partial x_N} \langle Q_1 \rangle_N = \langle Q_1 + 1 \rangle_{N-1} \left(\{\lambda_j\}_{N-1}, \{x_j + K_{jN}\}_{N-1}, \{y_j\}_{N-1}, \{\tilde{\ell}_j\}_{N-1} \right) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_N} \langle Q_1 \rangle_N = \langle Q_1 \rangle_{N-1} \left(\{\lambda_j\}_{N-1}, \{x_j\}_{N-1}, \{y_j + K_{jN}\}_{N-1}, \{\ell_j\}_{N-1} \right) \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_N}\langle Q_1^2\rangle_N=\langle (Q_1+1)^2\rangle_{N-1}\left(\{\lambda_j\}_{N-1},\{x_j+K_{jN}\}_{N-1},\{y_j\}_{N-1},\{\tilde{\ell}_j\}_{N-1}\right), \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_N}\langle Q_1^2\rangle_N=\langle Q_1^2\rangle_{N-1}\left(\{\lambda_j\}_{N-1},\{x_j\}_{N-1},\{y_j+K_{jN}\}_{N-1},\{\ell_j\}_{N-1}\right). \qquad (4.16)$$

Переменные x_N , y_N , ℓ_N не входят в правую часть этих формул, а λ_N входит только в модифицированные вакуумные значения (ср. с (2.15), (2.18)):

$$\tilde{x}_j=x_j+K_{jN};\ \tilde{y}_j=y_j+K_{jN};\ \tilde{\ell}_j=\ell_j(f_{jN}/f_{Nj}) \quad . \qquad (4.17)$$

Важность установленных в этом разделе свойств заключается в том, что они позволяют восстановить среднее значение $\langle Q_1^2\rangle_N$ по более простым величинам - неприводимым частям I_n средних значений с $n\leqslant N$ [6] . В оставшейся части статьи мы приводим определение неприводимых частей и исследуем их свойства.

5. НЕПРИВОДИМАЯ ЧАСТЬ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ И ФОРМФАКТОР

Рассмотрим "нормированное" среднее значение (4.12) оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ по отношению к собственным функциям (2.7) $\langle\exp\{\alpha Q_1\}\rangle_N(\{\lambda\}_N,\{x\}_N,\{y\}_N,\{\ell\}_N)$. Его значение при $x_j=y_j=0$ $(j=1,\dots,N)$ назовем неприводимой частью I_N^α :

$$I_N^\alpha(\{\lambda\}_N,\{\ell\}_N)=\langle\exp\{\alpha Q_1\}\rangle\Big|_{x_j=y_j=0} \quad . \qquad (5.1)$$

Средние значения операторов Q_1^m $(m=0,1,2,\dots)$ суть $\langle Q_1^m\rangle_N = =\partial^m\langle\exp\{\alpha Q_1\}\rangle_N/\partial\alpha^m\Big|_{\alpha=0}$. Неприводимые части $I_N^{(m)}$ этих средних значений генерируются величиной I_N^α :

$$I_N^{(m)}=\partial^m I_N^\alpha/\partial\alpha^m\Big|_{\alpha=0} \quad . \qquad (5.2)$$

Среднее значение $\langle 1\rangle_N$ единичного оператора есть (2.19)

$$\langle 1 \rangle_N = \det_N (\varphi') \quad . \tag{5.3}$$

Соответствующая неприводимая часть имеет простой вид: $\bar{I}_N^{(0)} = \delta_{N_0}$. Неприводимые части $\bar{I}_N^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$ трудно исследовать, отправляясь от их определения. Поэтому мы дадим метод их вычисления в терминах формфактора.

Формфактор F_N^{α} - это матричный элемент оператора $\exp\{\alpha Q_1\}$ по отношению к различным собственным функциям:

$$F_N^{\alpha} \equiv \langle \Psi_N (\lambda_1^C \ldots \lambda_N^C) | \exp\{\alpha Q_1\} | \Psi_N (\lambda_1^B \ldots \lambda_N^B) \rangle . \tag{5.4}$$

Учитывая, что λ_j^C и λ_j^B удовлетворяют с.т.у. (2.9) и вспоминая (4.I), (4.5), (4.IO), запишем:

$$F_N^{\alpha}(\{\lambda_j^C\},\{\lambda_j^B\},\{\ell_j^C\},\{\ell_j^B\}) =$$

$$= \mathbb{M}_N^{\alpha}\Big(\{\lambda_j^C\},\{\lambda_j^B\},\{\ell_j^C\},\{\ell_j^B\}, \Big\{(\ell_j^C)^{-1}\prod_{k\neq j}(f_{kj}^C/f_{jk}^C)\Big\}, \Big\{(\ell_j^B)^{-1}\prod_{k\neq j}(f_{kj}^B/f_{jk}^B)\Big\}\Big) . \tag{5.5}$$

Выражая неприводимую часть (5.I) в терминах функции $\mathbb{M}_N^{\alpha}$ (4.5) (для этого надо выразить через эту функцию $\mathcal{M}_N^{\alpha}$ (4.II)), можно получить связь между неприводимой частью и формфактором

$$\bar{I}_N^{\alpha} = C^{-N}\Big(\prod_{j\neq k} f_{jk}\Big)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} F_N^{\alpha}\Big(\{\lambda_j^C = \lambda_j\}, \{\lambda_j^B = \lambda_j + \varepsilon\}, \{\ell_j^C = \ell_j\}, \{\ell_j^B = \ell_j\}\Big). \tag{5.6}$$

Таким образом, исследование неприводимой части сводится к исследованию формфактора.

Зависимость формфактора от вакуумных собственных значений, как можно показать, выделяется в виде

$$F_N^{\alpha}(\{\lambda^C\}, \{\lambda^B\}, \{\ell^C\}, \{\ell^B\}) =$$

$$= \sum_{part} \Big(\prod_{pr} \ell(\lambda_{pr}^C)\Big)\Big(\prod_{pr} \ell^{-1}(\lambda_{pr}^B)\Big) \mathbb{R}_N(part) \quad . \tag{5.7}$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda^C\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_{pr}^C\}_n$ и $\{\lambda_{ab}^C\}_{N-n}$ и по раз-

биениям множества $\{\lambda^B\}_N$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda^B_{pr}\}_n$ и $\{\lambda^B_{ab}\}_{N-n}$. При этом $card\{\lambda^C_{pr}\}_n = card\{\lambda^B_{pr}\}_n = n$; $card\{\lambda^C_{ab}\}_{N-n} = card\{\lambda^B_{ab}\}_{N-n} = N-n$, а в остальном разбиения независимы. Произведение $\prod\limits_{pr} \ell(\lambda^C_{pr})$ обозначает произведение n сомножителей $\ell(\lambda^C_j)$; $\lambda^C_j \in \{\lambda^C_{pr}\}_n$. Произведение $\prod\limits_{pr} \ell^{-1}(\lambda^B_{pr})$ - это произведение n сомножителей $\ell^{-1}(\lambda^B_j)$; $\lambda^B_j \in \{\lambda^B_{pr}\}_n$.
Таким образом, формфактор F^α_N является линейной функцией каждого $\ell(\lambda^C_j)$ и линейной функцией каждого из $\ell^{-1}(\lambda^B_j)$. Коэффициенты $\mathbb{R}_N$ не зависят от $\ell(\lambda)$ и являются рациональной функцией переменных λ :

$$\mathbb{R}_N(part) = \mathbb{R}_N \begin{pmatrix} \{\lambda^C_{pr}\}_n, \{\lambda^C_{ab}\}_{N-n} \\ \{\lambda^B_{pr}\}_n, \{\lambda^B_{ab}\}_{N-n} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Можно доказать, что эти коэффициенты представляются в следующем "факторизованном" виде

$$\mathbb{R}_N \begin{pmatrix} \{\lambda^C_{pr}\}_n, \{\lambda^C_{ab}\}_{N-n} \\ \{\lambda^B_{pr}\}_n, \{\lambda^B_{ab}\}_{N-n} \end{pmatrix} = \sigma^\alpha_n\left(\{\lambda^C_{pr}\}_n, \{\lambda^B_{pr}\}_n\right) \times \tag{5.9}$$

$$\times \sigma^\alpha_{N-n}\left(\{\lambda^B_{ab}\}_{N-n}, \{\lambda^C_{ab}\}_{N-n}\right) \left\{\prod_{pr}\prod_{ab} f(\lambda^C_{pr}, \lambda^C_{ab})\right\} \left\{\prod_{pr}\prod_{ab} f(\lambda^B_{ab}, \lambda^B_{pr})\right\}.$$

Здесь произведение $\prod\limits_{pr}\prod\limits_{ab}$ обозначает независимое произведение по всем $\lambda \in \{\lambda_{pr}\}$ и всем $\lambda \in \{\lambda_{ab}\}$; это произведение содержит $n(N-n)$ сомножителей. Рациональные функции σ^α_n $(n=0,1,2,\ldots)$ однозначно определяются следующими пятью свойствами:

(I) σ^α_n есть рациональная функция $2n$ импульсов:

$$\sigma^\alpha_n = \sigma^\alpha_n\left(\{\lambda^C\}_n, \{\lambda^B\}_n\right) .$$

(2) Она является симметричной функцией всех λ^C_j и симметричной функцией всех λ^B_j $(j=1,2,\ldots,N)$.
(3) Для $n \geqslant 1$ эта функция убывает по любому из своих аргументов как $1/\lambda$ при $\lambda \to \infty$ и остальных аргументах фиксированных.
(4) Единственные сингулярности функций σ^α_n - это полюса первого порядка при $\lambda^C_j \to \lambda^B_k$ $(j,k=1,\ldots,n)$, причем вычет в полюсах

выражается в терминах σ^{α}_{n-1}. При $\lambda^C_n \to \lambda^B_n \to \lambda_n$

$$\sigma^{\alpha}_n(\{\lambda^C\}_n,\{\lambda^B\}_n)\Big|_{\lambda^C_n\to\lambda^B_n} = \frac{ic}{(\lambda^C_n-\lambda^B_n)}\times$$

$$\times\left\{e^{\alpha}\prod_{j=1}^{n-1} f^C_{jn} f^B_{nj} - \prod_{j=1}^{n-1} f^C_{nj} f^B_{jn}\right\}\sigma^{\alpha}_{n-1}(\{\lambda^C\}_{n-1},\{\lambda^B\}_{n-1}). \tag{5.10}$$

Заметим, что переменные $\lambda^{C,B}_n$ отсутствуют в σ^{α}_{n-1} в правой части.

(5) По определению, $\sigma^{\alpha}_0 \equiv 1$.

Используя эти свойства, функции σ^{α}_n можно вычислять рекурсивным образом; например, $\sigma^1_{\alpha} = g(\lambda^C,\lambda^B)(\exp\{\alpha\}-1)$.

Формулы (5.7)-(5.9) дают представление для формфактора, на основе которого, благодаря (5.6), проводится исследование свойств неприводимых частей.

6. СВОЙСТВА НЕПРИВОДИМЫХ ЧАСТЕЙ

Из (5.7)-(5.9) легко получить, что формфактор $F' \equiv \langle\Psi_N(\lambda^C_1\ldots\lambda^C_N)|Q_1|\Psi_N(\lambda^B_1,\ldots,\lambda^B_N)\rangle = \partial F^{\alpha}_N/\partial\alpha\big|_{\alpha=0}$ представляется в виде

$$F'_n = \left\{\prod_{j=1}^{N} \ell(\lambda^C_j)\ell^{-1}(\lambda^B_j)-1\right\}\sigma'_N(\{\lambda^C\}_N,\{\lambda^B\}_N), \tag{6.1}$$

где рациональные функции σ'_N определяются как

$$\sigma'_N(\{\lambda^C\}_N,\{\lambda^B\}_N) = \partial\sigma^{\alpha}_N(\{\lambda^C\}_N,\{\lambda^B\}_N)/\partial\alpha\Big|_{\alpha=0} \tag{6.2}$$

Функции σ'_N, как оказывается, играют центральную роль и при исследовании неприводимой части $I^{(2)}_N$. Они могут вычисляться рекуррентным образом. Особенно просто получить асимптотики по константе связи. При $C\to\infty$

$$\sigma'_N(\{\lambda^C\},\{\lambda^B\}) = -\frac{2^{N-1}(ic)^{N(N-1)+1}\left(\sum^N\lambda^B-\sum^N\lambda^C\right)^{N-1}}{\prod_{j,k=1}^{N}(\lambda^B_j-\lambda^C_k)} \sim C^{N(N-1)+1} \tag{6.3}$$

При $C\to 0$

$$\sigma'_N(\{\lambda^C\},\{\lambda^B\}) = \frac{i}{Nc}\left(\sum^N\lambda^B-\sum^N\lambda^C\right)\times$$

$$\times \sum_{P,Q} \prod_{n=1}^{N} g(\lambda^B_{P_n}, \lambda^C_{Q_n})\, g(\lambda^B_{P_{n+1}}, \lambda^C_{Q_n}) \sim c^{2N-1} \qquad (6.4)$$

Здесь сумма берется по независимым перестановкам P и Q n чисел.

Формфактор $F''_N = \partial^2 F^\alpha_N / \partial\alpha^2 \big|_{\alpha=0}$, как это следует из (5.6)-(5.8) и свойств функций σ^α_n, может быть представлен в виде

$$F''_N = \sigma''_N(\{\lambda^B\}_N, \{\lambda^C\}_N) + \Big(\prod_{j=1}^{N} \ell(\lambda^C_j)\ell^{-1}(\lambda^B_j)\Big)\sigma''_N(\{\lambda^C\}_N, \{\lambda^B\}_N) +$$

$$+2 \sum_{part}^{(N-1\geqslant n\geqslant 1)} \sigma'_n(\{\lambda^C_{pr}\}_n, \{\lambda^B_{pr}\}_n)\sigma'_{N-n}(\{\lambda^B_{ab}\}_{N-n}, \{\lambda^C_{ab}\}_{N-n}) \times \qquad (6.5)$$

$$\times\Big[\prod_{pr}\ell(\lambda^C_{pr})\ell^{-1}(\lambda^B_{pr})\Big]\Big\{\prod_{pr}\prod_{ab} f(\lambda^C_{pr}, \lambda^C_{ab})\Big\}\Big\{\prod_{pr}\prod_{ab} f(\lambda^B_{ab}, \lambda^B_{pr})\Big\} .$$

Суммирование здесь ведется так же, как в (5.I), но мы выписали явно вклады, соответствующие разбиению $\{\lambda^C_{pr}\} = \{\lambda^C\}_N$; $\{\lambda^B_{pr}\} = \{\lambda^B\}_N$ и разбиению $\{\lambda^C_{pr}\} = \{\lambda^B_{pr}\} = \varnothing$ ($\varnothing$ обозначает пустое множество). В (6.5) обозначено $\sigma''_n = \partial^2\sigma^\alpha_n / \partial\alpha^2 \big|_{\alpha=0}$ и $card\{\lambda^C_{pr}\} = card\{\lambda^B_{pr}\} = n$.

Перейдем теперь к исследованию неприводимых частей. Легко видеть из (5.6) и (6.I), что неприводимая часть среднего значения $\langle Q_1 \rangle_N$ равна нулю

$$I^{(1)}_N = 0 \quad . \qquad (6.6)$$

Наиболее интересна для вычисления коррелятора, конечно, неприводимая часть $I^{(2)}_N$ среднего значения $\langle Q^2_1 \rangle_N$, которую в дальнейшем будем обозначать просто I_N, опуская верхний индекс. Эта неприводимая часть устроена довольно сложно; она отлична от нуля при $N \geqslant 2$. Из формулы (6.5) получается следующее представление для неприводимой части I_N :

$$I_N(\{\lambda\}_N, \{\ell\}_N) = \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda_+\}\cup\{\lambda_-\}\cup\{\lambda_0\}}^{(0\leqslant n\leqslant [N/2])} \prod_{(+)}^{n}\ell(\lambda_+)\prod_{(-)}^{n}\ell^{-1}(\lambda_-) \times \qquad (6.7)$$

$$\times\, \mathcal{K}^n_N(\{\lambda_+\}_n, \{\lambda_-\}_n, \{\lambda_0\}_{N-2n}) .$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda\}_N$ на три непересекающихся подмножества, причем $card\{\lambda_+\}_n = card\{\lambda_-\}_n = n$; $card\{\lambda_o\}_{N-2n} = N-2n$; $0 \leqslant n \leqslant [N/2]$. Коэффициенты $\mathcal{A}_N^n$ назовем коэффициентами Фурье неприводимой части. Они являются рациональными функциями переменных λ_j , симметричными при перестановке аргументов, входящих в какой-либо из наборов $\{\lambda_+\}$, $\{\lambda_-\}$ или $\{\lambda_o\}$ (по отдельности). Коэффициенты Фурье не зависят от переменных ℓ_j . Следовательно, они не зависят от конкретной модели, а зависят только от R -матрицы. Зависимость I_N от вакуумных значений $\ell(\lambda)$ выписана в (6.7) явно.

Из формулы (6.5) видно, что первые два члена в правой части дают вклад только в слагаемое с $n=0$ в (6.7). Поэтому только в выражение для $\mathcal{A}_N^o$ входят функции σ'' ; коэффициенты $\mathcal{A}_N^n$ $(n \geqslant 1)$ выражаются только через функции σ' . Коэффициент $\mathcal{A}_N^o$, однако, можно исключить, используя свойство

$$I_N(\{\lambda_j\}, \{\ell_j = 1;\ j=1,\dots,N\}) = 0 :$$

$$I_N(\{\lambda\}_N, \{\ell\}_N) = \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda_+\}\cup\{\lambda_-\}\cup\{\lambda_o\}}^{(1\leqslant n\leqslant[N/2])}{}' \left[\prod_{+}\ell(\lambda_+)\prod_{(-)}\ell(\lambda_-) - 1\right] \times \tag{6.8}$$

$$\times \mathcal{A}_N^n(\{\lambda_+\}_n, \{\lambda_-\}_n, \{\lambda_o\}_{N-2n}),$$

где сумма не содержит уже коэффициента $\mathcal{A}_N^o$. Функции σ'_n , через которые выражаются коэффициенты $\mathcal{A}_N^n$ $(n \geqslant 1)$ легко вычисляются рекуррентным образом.

Приведем результаты вычисления нескольких первых неприводимых частей:

$$I_o = I_1 = 0, \tag{6.9}$$

$$I_2(\{\lambda_1\lambda_2\}; \{\ell_1\ell_2\}) = \mathcal{A}_2^1(\lambda_1\lambda_2)\left[\ell_1\ell_2^{-1} - 1\right] + \mathcal{A}_2^1(\lambda_2\lambda_1)\left[\ell_2\ell_1^{-1} - 1\right];$$

$$\mathcal{A}_2^1(\lambda_1\lambda_2) = -\frac{2}{\lambda_{12}^2}\left(\frac{\lambda_{12}+ic}{\lambda_{12}-ic}\right);\quad \lambda_{12} \equiv \lambda_1 - \lambda_2 \tag{6.10}$$

$$I_3(\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\},\{\ell_1\ell_2\ell_3\}) = \sum_P \mathcal{A}_3^1(\lambda_{P_1}\lambda_{P_2}\lambda_{P_3})\left[\ell(\lambda_{P_1})\ell^{-1}(\lambda_{P_2})-1\right];$$

$$\mathcal{A}_3^1(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \frac{8c}{\lambda_{12}^2}\left(\frac{\lambda_{12}+ic}{\lambda_{12}-ic}\right)\left[\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{31}}+\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{32}}\right]\frac{1}{(\lambda_{31}+ic)(\lambda_{23}+ic)} \quad . \tag{6.II}$$

Сумма в (6.II) берется по всем перестановкам P переменных λ_1, λ_2, λ_3. К сожалению, нам не удалось получить замкнутой формулы для I_N. Однако, используя (6.3), (6.4) легко установить поведение I_N при $c \to 0$ и $c \to \infty$:

$$I_N \sim c^{N-2} \qquad \text{при} \quad c \to 0 \qquad (N \geq 2) \tag{6.IO}$$

$$I_N \sim c^{2-N} \qquad \text{при} \quad c \to \infty \qquad (N \geq 2)\ . \tag{6.II}$$

Поведение коэффициентов Фурье $\mathcal{A}_N^n$ по константе связи такое же. Как обсуждалось в п.3, для построения корреляционных функций надо вычислить среднее $\langle\Omega|Q_1^2|\Omega\rangle$, где $|\Omega\rangle$ – физический вакуум модели НШ; число частиц в вакуумном состоянии $N \to \infty$ в термодинамическом пределе. Формулы (4.I3)-(4.I6) позволяют выразить это среднее через неприводимые части I_n $(n \leq N)$ [6]. Замечательное поведение по константе связи (6.IO), (6.II) позволяет построить теорию возмущений для корреляционных функций токов, n-ый член которой генерируется неприводимой частью I_n. Для вычисления конечного числа членов этой теории возмущений надо знать лишь конечное число неприводимых частей.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что КМОЗ позволяет естественным образом подойти к проблеме вычисления корреляционных функций. Отметим, что ввести понятие неприводимых частей средних значений и исследовать некоторые из их свойств можно и на более привычном языке координатного анзатца Бете для модели НШ (см. [6]). Однако полное исследование, например, оценка поведения на константе связи (6.IO), (6.II) или получение формул (4.I3)-(4.I6), дающих принципиальную возможность получения корреляционных функций, возможно только в рамках КМОЗ.

Следует подчеркнуть, что предлагаемый подход можно применять для вычисления любых корреляционных функций. Для этого необходимо ввести в рассмотрение обобщенные модели более, чем с двумя узлами. Например, коррелятор полей $< \Omega | \psi^{+}(x)\psi(0) | \Omega >$ в модели НШ можно вычислить при помощи четырехузельной модели, представляя матрицу монодромии в виде $T(\lambda) = T_2(\lambda) L_x(\lambda) T_1(\lambda) L_0(\lambda)$ (ср. с (3.I)). Здесь $L_x(\lambda)$ - локальный L-оператор модели НШ. С этой точки зрения коррелятор тока выделен в двух отношениях. Во-первых, он связан с простейшей двухузельной моделью; во-вторых, его неприводимые части малы не только в пределе слабой, но и сильной связи (это не так для коррелятора полей).

Заметим также, что и обобщение на XXZ-случай совершенно очевидно. Поэтому в рамках данного подхода можно вычислять корреляционные функции для XXZ-модели Гейзенберга и для модели синус-Гордон.

В заключение мы благодарим Л.Д.Фаддеева за обсуждения.

Литература

I. **Склянин Е.К., Фаддеев Л.Д. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля. - Докл. АН СССР, 1978, т.243, с.1430-1433.**

2. **Фаддеев Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - Препринт ЛОМИ Р-2-79, Ленинград, 1979; - В кн.: Проблемы квантовой теории поля (Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля). Дубна, 1979, с.249-299.**

3. **Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т.34, с.13-63.**

4. **Корепин В.Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели. - Докл.АН СССР, 1982, т.265, с.1361-1364.**

5. Korepin V.E. Calculation of norms of Bethe wave functions. - Commun.Math.Phys., 1982, v.86, p.391-418.

6. **Корепин В.Е. Корреляционные функции одномерного бозе-газа в случае отталкивания. - Наст.сб., с. 133-145.**

7. Izergin A.G., Korepin V.E. Pauli principle for one-dimensional bosons and the algebraic Bethe Ansatz. - Lett.Math.Phys., 1982, v.6, p.283-288.

8. И з е р г и н А.Г., К о р е п и н В.Е., С м и р н о в Ф.А. Формулы следов для квантового нелинейного уравнения Шредингера. – ТМФ, 1981, т.48, с.319–323.

9. Mathematical Physics in One Dimension. Ed.Lieb E.H. and Mattis D.C., Academic Press, New-York and London, 1966.

А.Р.Итс

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение.

Настоящий период развития метода обратной задачи в теории нелинейных уравнений может быть охарактеризован, с одной стороны, исключительно широким использованием в нем глубоких теоретико-групповых и алгебро-геометрических идей, а с другой стороны, существенной тривиализацией самих основ метода. Последнее обстоятельство особенно выпукло проявляется тогда, когда речь идет о конструктивных аспектах метода обратной задачи - построении явных решений, исследовании задач Коши и т.п. Анализируя достижения последних лет в этих областях, нетрудно прийти к выводу, что в основе всех аналитических концепций метода обратной задачи лежит даже не матричная задача Римана (наиболее распространенная ныне точка зрения), а еще более фундаментальный и одновременно более простой ингредиент классической математики - теорема Лиувилля. По сути дела, в интегрировании какой-либо конкретной нелинейной системы, погружающейся в схему метода обратной задачи, всегда можно выделить следующие два этапа.

Первый этап - нахождение той аксиоматики формальных свойств Ψ -функции [*)] (совместного решения соответствующей линейной системы), которая при априорном условии рациональности по "спектральному" параметру λ логарифмических производных $\Psi_x(\lambda)\,\Psi^{-1}(\lambda)$ и $\Psi_t(\lambda)\,\Psi^{-1}(\lambda)$, гарантирует для них полюсную, матричную и функциональную структуры, диктуемые видом соответствующей $U-V$ -пары. Второй этап - конкретная реализация, тем или иным способом, установленной на первом этапе аксиоматики. Математическим содержанием первого этапа и является теорема Лиувилля: с помощью нее осуществляется логический переход [**)] от утверждения о п р и б л и ж е н н о м выполнении равенств $\Psi_x = U\cdot\Psi$ и $\Psi_t = V\cdot\Psi$ (при некоторых U и V требуемого вида) к утверждению об их точном выполнении. В отличие от первого этапа, математическое содержание второго этапа существенно зависит от того, какие вопросы ставятся при исследовании данной нелинейной

[*)] Под этим понимается формулировка характера существенных особенностей Ψ -функции и наложение на нее определенных редукционных ограничений.

[**)] Более детально этот вопрос будет освещен в основном тексте статьи на конкретных примерах.

системы. Так, например, обсуждение задачи Коши требует привлечение аппарата либо матричной задачи Римана (быстро убывающие начальные данные), либо алгебраической геометрии (периодические и почти периодические начальные данные), в то время как вопрос о построении всевозможных "процедур одевания", позволяющих по известному решению изучаемой системы строить ее новые решения, нуждается лишь в элементарных идеях линейной алгебры.

Сформулированный только что взгляд на существо метода обратной задачи практически тождественен как известной в теории конечнозонного интегрирования схеме Кричевера ([1]), так и принятой сейчас, благодаря работам А.Б.Шабата, В.Е.Захарова, С.В.Манакова и А.В.Михайлова ([2] - [5]), интерпретации метода обратной задачи как метода матричной задачи Римана. Однако изложенную выше концепцию удается наполнить и дополнительным содержанием, если обогатить ее рядом аналитических конструкций, возникших в недавних исследованиях М.Джимбо, Т.Мива и К.Уэно ([6] , [7]) по теории изомонодромных деформаций систем линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. В результате оказывается возможным развить весьма удобный в методологическом плане подход к интегрированию уравнений, погружающихся в схему метода обратной задачи, при котором, в частности, все основные конструктивные аспекты метода (асимптотика решений задач Коши, построение процедур одевания, конечнозонное интегрирование и т.д.) описываются с совершенно единых позиций. В первом параграфе настоящей работы мы подробно излагаем предлагаемую нами методику на простейшем примере нелинейного уравнения Шредингера, а во втором параграфе демонстрируем ее эффективность получением процедуры одевания уже для нетривиального примера - для уравнения Було-Додда *). Отметим также, что в пользу развиваемой нами схемы говорит и то обстоятельство, что, опираясь на нее, А.И.Бобенко, Р.Ф.Бикбаеву и автору настоящей статьи удалось построить конечнозначные решения уравнения Ландау-Лифшица в случае одноосной анизотропии ([8]), а А.И.Бобенко и Р.Ф.Бикбаеву - существенно продвинуться по сравнению с известной работой И.В.Чередника [9] , в конечнозонном интегрировании того же уравнения в случае полной анизотропии [10] .

В существенном, настоящая статья является результатом анализа работ [6] , [7] с точки зрения метода обратной задачи. Автор приносит свою искреннюю благодарность Л.Д.Фаддееву, обратившему его внимание на эти работы.

---

*) Автор благодарен М.А.Ольшанецкому, обратившему внимание автора на эту задачу, решение которой оказалось довольно красивым в формульном плане.

§ I. Нелинейное уравнение Шредингера.

Под Нелинейным Уравнением Шредингера мы будем понимать систему

$$\begin{cases} ip_t + p_{xx} - 8p^2 q = 0 \\ -iq_t + q_{xx} - 8q^2 p = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow U_t - V_x = [V, U],$$

$$U(\lambda) = -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2ip \\ -2iq & 0 \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = 2\lambda U(\lambda) + \begin{pmatrix} -4ipq & -2p_x \\ -2q_x & 4ipq \end{pmatrix}. \qquad (I.I)$$

Собственно уравнение НШ получается в результате редукционных ограничений $p = \pm\bar{q}$. В (I.I) мы сразу привели и отвечающую уравнению НШ хорошо известную $U-V$ пару. Заметим еще, что через σ_k , $k=1,2,3$ на протяжении всей статьи будут обозначаться стандартные матрицы Паули.

а) Аксиоматика Ψ - функции.

Рассмотрим на $\mathbb{C}P^1$ кусочно-аналитическую, возможно многозначную, матричную (размерности 2x2) функцию $\Psi(\lambda,x,t)$ $(\lambda \in \mathbb{C}P^1)$ гладко зависящую от "дополнительных" параметров x , t и такую, что выполнены следующие два условия:

I. В окрестности точки ∞ справедлива дифференцируемая по x и t асимптотика вида

$$\Psi(\lambda,x,t) = \Big(I + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x,t)\lambda^{-k}\Big)\exp\{-ix\sigma_3\lambda - 2it\sigma_3\lambda^2\}\cdot\lambda^{T_\infty} C_\infty. \qquad (I.2)$$

с некоторыми, независящими от x и t матрицами T_∞ и C_∞ , $\det C_\infty \neq 0$.

2. Логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ регулярны на $\mathbb{C}P^1/\{\infty\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.I. Логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ суть полиномы $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ вида (I.I), где

$$p(x,t) = (\psi_1(x,t))_{12}, \quad q(x,t) = (\psi_1(x,t))_{21} \qquad (I.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря "правой" специфики вхождения в представление (I.2) экспоненциального множителя и независимости от x и t матриц T_∞ и C_∞ , лорановские ряды для $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ в окрестности бесконечности имеют конечные главные части:

$$\Psi_x\Psi^{-1} = \sum_{k=-1}^{\infty} \lambda^{-k}\mathcal{P}_k\,,\quad \Psi_t\Psi^{-1} = \sum_{k=-2}^{\infty} \lambda^{-k} R_k \tag{I.4}$$

где $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k(\Psi_1, \Psi_2, \ldots; \Psi_{1x}, \Psi_{2x}, \ldots)$, $R_k = R_k(\Psi_1, \Psi_2, \ldots; \Psi_{1x}, \Psi_{2x}, \ldots)$.
Несколько первых коэффициентов рядов (I.4), как нетрудно проверить непосредственным дифференцированием представления (I.2), имеют следующий вид:

$$\mathcal{P}_{-1} = -i\sigma_3,\ \mathcal{P}_0 = i[\sigma_3, \Psi_1],\ \mathcal{P}_1 = i[\sigma_3, \Psi_2] + \Psi_{1x} - i[\sigma_3, \Psi_1]\Psi_1\,,$$

$$R_{-2} = -2i\sigma_3,\ R_{-1} = 2i[\sigma_3, \Psi_1],\ R_0 = 2i[\sigma_3, \Psi_2] - 2i[\sigma_3, \Psi_1]\Psi_2\,.$$

Заметим теперь, что, учитывая обозначения (I.3),

$$\mathcal{P}_{-1}\lambda + \mathcal{P}_0 = -i\lambda\sigma_3 + \begin{pmatrix} 0 & 2ip \\ -2iq & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^2 R_{-2} + \lambda R_{-1} + R_0 = 2\lambda(\lambda\mathcal{P}_{-1} + \mathcal{P}_0) + \begin{pmatrix} -4ipq & -2p_x \\ -2q_x & 4ipq \end{pmatrix} (\mathrm{mod}[\mathcal{P}_1 = 0]).$$

Доказательство сформулировано в Предложении I.I утверждения завершается ссылкой на условие 2 и теорему Лиувилля.

СЛЕДСТВИЕ I.I. Функции $p(x,t)$ и $q(x,t)$, определяемые равенствами (I.3), образуют решение уравнения НШ (I.I).

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Для того, чтобы в порождаемом функцией Ψ решении уравнения (I.I) выполнялись редукции $p = \pm\bar{q}$, на Ψ-функцию нужно наложить дополнительное ограничение:

$$3.\quad \sigma_2\bar{\Psi}(\bar{\lambda}) = \Psi(\lambda)\sigma(\lambda) \Longleftrightarrow q = -\bar{p}\,,$$

$$\sigma_1\bar{\Psi}(\bar{\lambda}) = \Psi(\lambda)\sigma(\lambda) \Longleftrightarrow q = \bar{p}\,, \tag{I.5}$$

где $\sigma(\lambda)$ - некоторая постоянная по x и t матрица.

б) П р о ц е д у р ы о д е в а н и я.

Условимся прежде всего в следующей терминологии. Будем говорить (ср. [6]), что функция $\Psi(\lambda, x, t)$ имеет в точке $a \in \mathbb{C}$ регулярную особенность, если она допускает в некоторой окрестности этой точки представление в виде

$$\Psi(\lambda) = \hat{\Psi}(\lambda)\cdot(\lambda - a)^T \cdot C \tag{I.6}$$

где T – диагональная числовая матрица, а матрицы $C(\lambda)$ и $\hat{\Psi}(\lambda)$ голоморфны и невырожденны в окрестности точки a. Имеет место следующее очевидное

УТВЕРЖДЕНИЕ I.I. Если в представлении (I.6) точка a и матрицы T и C не зависят от x и t, то логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ регулярны по λ в окрестности точки a. Иными словами особенности Ψ-функции вида (I.6) с независящими от x и t параметрами a, T и C суть допустимые аксиоматикой I–2 особенности.

В связи с представлением (I.6) отметим следующий простой общий факт (см. [6]):

ЛЕММА I.I. Пусть $B(\lambda)$ – $n\times n$ матричная функция, голоморфная в окрестности точки a, которая является простым нулем $\det B(\lambda)$. Тогда для матрицы $B(\lambda)$ справедливо представление вида (I.6) с $T=\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0)$. При этом в качестве C можно взять любую обратимую числовую матрицу, но такую, что первый столбец матрицы C^{-1} принадлежит $\ker B(a)$.

Приступим теперь непосредственно к процедурам одевания, под которыми мы понимаем построение по известной функции Ψ_0, удовлетворяющей аксиоматике I–2, новой функции Ψ_1, обладающей тем же свойством.

СЛУЧАЙ I. "П р и б а в л е н и е" д в у х р е г у л я р н ы х о с о б е н н о с т е й.

Пусть $\Psi_0(\lambda,x,t)$ – функция, удовлетворяющая условиям I–2 с некоторыми T^0_∞ и C^0_∞. Зададимся парой точек a_1, a_2 комплексной плоскости λ, не совпадающей с регулярными особенностями функции $\Psi_0(\lambda,x,t)$, произвольной парой комплексных чисел c_1, c_2 и положим

$$\Psi_1(\lambda,x,t)=(\lambda+A(x,t))\Psi_0(\lambda,x,t), \tag{I.7}$$

$$\Psi_1(a_j)\begin{pmatrix}1\\ c_j\end{pmatrix}=0,\quad j=1,2. \tag{I.8}$$

Относительно четырех матричных элементов матрицы A, соотношения (I.8) представляют собой неоднородную линейную алгебраическую систему из четырех уравнений. Тем самым матрица A в случае общего положения, равенствами (I.8) полностью (и явно!) определяется.

ТЕОРЕМА I.I. Функция $\Psi_1(\lambda,x,t)$, построенная в соответствии с (I.7),(I.8), удовлетворяет аксиоматике I–2 с $T^1_\infty = T^0_\infty + I$, $C^1_\infty = C^0_\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость части утверждения теоремы, относящейся к асимптотическому условию (I.2), тривиальна. Столь же очевидна регулярность логарифмических производных функции Ψ_1 при всех λ, не совпадающих с нулями полинома $\det(\lambda + A)$. В силу равенств (I.8) нулями этого полинома являются точки a_1, a_2. Полином $\det(\lambda+A)$ – второй степени. Поэтому точками a_1, a_2 его нули исчерпываются. "Навязав" равенствами (I.8) соответствующим собственным подпространствам независящий от x, t базис мы, благодаря лемме I.I, гарантируем в точках a_1, a_2 представление функции Ψ_1 в виде (I.6) с независящими от x и t матрицами T и C:

$$T_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c_j & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Доказательство теоремы I.I завершается теперь ссылкой на утверждение I.I.

СЛУЧАЙ 2. "П р и б а в л е н и е" о д н о й р е г у л я р н о й о с о б е н н о с т и.

В этом случае "одетая" Ψ -функция ищется в виде

$$\Psi_1(\lambda, x, t) = \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + A(x,t)\right]\Psi_0(\lambda, x, t) = P(\lambda)\cdot\Psi_0(\lambda)$$

Теперь $\det P(\lambda)$ может обращаться в нуль лишь в одной точке. Задавшись произвольной парой $(a, c) \in \mathbb{C}^2$ и положив

$$\Psi_1(a)\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = 0, \tag{I.9}$$

мы помещаем этот нуль в независящую от x и t выбранную нами точку a и, как и в предыдущем случае, гарантируем в ее окрестности регулярность логарифмических производных $\Psi_{1x}(\lambda)\cdot\Psi_1^{-1}(\lambda)$ и $\Psi_{1t}(\lambda)\Psi_1^{-1}(\lambda)$.

Равенство (I.9) определяет нам два из четырех независимых параметров (элементов матрицы A) рассматриваемого преобразования $\Psi_0 \to \Psi_1$. Для фиксации оставшихся двух параметров обратимся к асимптотике функции $\Psi_1(\lambda)$ на бесконечности. Так как функция Ψ_0 удовлетворяет аксиоматике I-2, то

$$\Psi_1 \underset{\lambda\to\infty}{=} \left[I + \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\exp\{-i\lambda\sigma_3 x - 2it\lambda^2\sigma_3\}\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^{T_\infty^0}\cdot C_\infty^0.$$

где $p_0 = (\Psi_{01})_{12}$.

Поэтому для того, чтобы иметь возможность "пронести" матрицу $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ "направо", получив при этом требуемую аксиоматикой I-2 асимптотику на бесконечности, необходимо и достаточно положить

$$A_{12} = -p_0, \quad A_{22} = 0. \tag{I.10}$$

Соотношения (I.10) вместе с равенствами (I.9) определяют искомую матрицу A однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Если мы хотим сохранять при рассматриваемых преобразованиях $\Psi_0 \longrightarrow \Psi_1$ редукционные ограничения (I.5), то параметры a_j, c_j необходимо подчинить определенным условиям. Например, в случае прибавления двух регулярных особенностей и редукции $p = -\bar{q}$, эти условия состоят из требований взаимной комплексной сопряженности точек a_j и колленеарности векторов $\sigma_0(a_1)\begin{pmatrix}\bar{c}_2\\ -1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1\\ c_1\end{pmatrix}$.

c) Конечнозонное интегрирование.

Пусть Γ -гиперэллиптическая кривая рода $g \geqslant 1$, задаваемая уравнением

$$z^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - e_j), \quad e_j \in \mathbb{C}, e_j \neq e_k.$$

Выберем на Γ произвольный неспециальный дивизор D степени g, фиксируем произвольным образом комплексное число $\alpha \neq 0$, и определим однозначную на Γ вектор-функцию $\vec{\Psi}(\lambda, x, t), \lambda \in \Gamma$, (функцию Бэйкера-Ахиезера) условиями

I' В окрестностях точек $\infty^\pm$ $(z \sim \pm\lambda^g, \lambda \sim \infty^\pm)$ функция $\vec{\Psi}$ имеет существенные особенности вида

$$\vec{\Psi} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \exp\{-i\lambda x - 2i\lambda^2 t\}, \quad \lambda \to \infty^+$$

$$\vec{\Psi} = \alpha\cdot\lambda\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right\} \exp\{i\lambda x + 2i\lambda^2 t\}, \quad \lambda \to \infty^-.$$

2' На $\Gamma/\{\infty^\pm\}$ функция $\vec{\Psi}(\lambda)$ мероморфна и ее дивизор полюсов совпадает с D.

Условиями I'- 2' функция $\vec{\Psi}$ определяется однозначно и может быть явно выражена через θ -функции кривой Γ и абелевы интегралы ([1],[11],[12]).

Будем представлять себе кривую Γ в виде двулистного накрытия плоскости λ с отрезками $[e_{2k+1}, e_{2k+2}]$, $k = 0, \dots, g$.

в качестве линий перехода. В этой реализации условие неспециальности дивизора $D=\sum_{k=1}^{g}\mu_k$ означает, что проекции точек μ_j на λ -плоскость не совпадают друг с другом. Отметим еще, что Γ допускает естественный автоморфизм $*\left((\lambda,z)^*=(\lambda,-z)\right)$, который в рассматриваемой реализации действует как "перестановка листов".

Определим теперь матрично-значную функцию

$$\Psi(\lambda)=\left(\vec{\Psi},\vec{\Psi}^*\right).$$

Рассматривая ее ограничение на верхний лист поверхности Γ, мы получаем функцию $\mathring{\Psi}(\lambda)$, однозначную на комплексной плоскости λ с разрезами по отрезкам $[e_{2k+1},e_{2k+2}]$, $k=0,\dots,g$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2. Верны следующие утверждения:

I. В окрестности ∞ функция $\mathring{\Psi}$ имеет существенную особенность вида $\mathring{\Psi}(\lambda,x,t)=\left(I+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\exp\left\{-ix\lambda\sigma_3-2it\lambda^2\sigma_3\right\}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&\alpha\lambda\end{pmatrix}$.

2. Скачки функции $\mathring{\Psi}$ на отрезках $[e_{2k+1},e_{2k+2}]$ описываются равенствами $\mathring{\Psi}_-=\mathring{\Psi}_+\cdot\sigma_1$, $\lambda\in(e_{2k+1},e_{2k+2})$. 3. В окрестности каждой точки e_k, $k=1,\dots,2g+2$ для функции $\mathring{\Psi}$ справедливо представление вида (I.6) с матрицами $T=\begin{pmatrix}0&0\\0&1/2\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, а в окрестности каждой точки*) μ_j, $j=1,\dots,g$ - аналогичное представление с матрицами $T=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$ и либо $C=I$ (μ_j, как точка дивизора D лежит на верхнем листе), либо $C=\sigma_1$ (μ_j, как точка дивизора D лежит на нижнем листе). 4. Всюду вне множества $\{\mu_j\}\cup\{e_k\}\cup\{\infty\}$ функция $\mathring{\Psi}$ голоморфна и матрично-обратима.

Доказательство этого предложения, которое, кстати, тоже опирается на теорему Лиувилля (только на этот раз для компактных римановых поверхностей) мы в целях экономии места, опускаем. При необходимости читатель может его восстановить по работе [7].

Следствием предложения I.2 является факт справедливости для функции $\mathring{\Psi}$ аксиоматики I-2. В самом деле, асимптотика на ∞ имеет нужный вид, а благодаря тому, что матрицы T и C во всех регулярных особых точках функции $\mathring{\Psi}$ и матрицы сопряжения на всех ее линиях разрыва не зависят от x и t, соответствующие логарифмические производные регулярны всюду на $\mathbb{C}P^1/\{\infty\}$.

---

*) Мы сохраняем за проекциями точек μ_j на λ -плоскость то же обозначение.

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. Обеспечение редукционных ограничений $p=\pm\bar{q}$ здесь гораздо менее тривиальная задача, нежели в случае процедур одевания. Наиболее удобный подход к этой задаче, основанный на непосредственном анализе явных формул для самих конечнозонных решений, предложен в работе Б.А.Дубровина и С.М.Натанзона [13] .

§ 2. Уравнение Було-Додда.

Уравнение, о котором пойдет речь в этом параграфе, имеет следующий вид:

$$u_{xt}+e^{-2u}-e^{u}=0. \tag{2.1}$$

Это уравнение подробно исследовалось в работах Р.Було, Р.Додда, А.В.Жибера, А.Б.Шабата и А.В.Михайлова ([14] - [15] , [5]).*) В частности, в работе [5] для уравнения (2.I) было получено представление "нулевой кривизны" на матрицах размерности 3х3:

$$U_t-V_x=[V,U],$$

$$U(\lambda)=\lambda\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_x&0&0\\0&-u_x&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad V(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0&0&e^{u}\\e^{-2u}&0&0\\0&e^{u}&0\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

а) А к с и о м а т и к а Ψ - ф у н к ц и и.

Рассмотрим на $\mathbb{C}P^1$ кусочно-аналитическую, возможно многозначную, матричную (размерности 3х3) функцию $\Psi(\lambda,x,t)$ $(\lambda\in\mathbb{C}P^1)$, гладко зависящую от дополнительных параметров x , t и такую, что выполнены следующие три условия:

I. В окрестностях точек ∞ и 0 функция Ψ имеет дифференцируемую по x и t асимптотику вида

$$\Psi(\lambda,x,t)=F_\infty\Big(I+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x,t)\lambda^{-k}\Big)\exp\{Q\lambda x\}\lambda^{T_\infty},\ \lambda\sim\infty, \tag{2.3}$$

$$\Psi(\lambda,x,t)=F_0(x,t)\Big(I+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x,t)\lambda^{k}\Big)\exp\Big\{\frac{t}{\lambda}Q^+\Big\}\cdot\lambda^{T_0}C_0,\ \lambda\sim 0,$$

---

*) См.также доклад А.Б.Шабата на конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными, посвященной памяти И.Г.Петровского, МГУ, 1979 г.

где

$$F_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} q & q^2 & 1 \\ q^2 & q & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ q = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \ (\mathbb{Q}^+)_{ij} = \overline{\mathbb{Q}}_{ji},$$

$\det F_0, \det C_0 \neq 0$; C_0, T_0, T_∞ – не зависят от x и t .

2. Всюду на CP^1 функция Ψ удовлетворяет редукционным тождествам

$$\Psi(\lambda) = \mathbb{Q}\cdot\Psi(q\lambda)\cdot\mathbb{M}, \qquad (2.4)$$
$$\Psi(\lambda) = \mathbb{T}\,[\Psi^T(-\lambda)]^{-1},$$

где

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (\Psi^T)_{i,j} = \Psi_{ji}, \ \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ регулярны на $\mathbb{C}P^1/\{\infty, 0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Матрица F_0 представима в виде

$$F_0(x,t) = D(x,t)F_\infty, D_{ij} = 0, \ i \neq j, \ D_{33} = \pm 1, \ D_{22} = D_{11}^{-1},$$

а логарифмические производные $\Psi_x\Psi^{-1}$ и $\Psi_t\Psi^{-1}$ суть рациональные функции переменной λ предписанной равенствами (2.2) структуры. При этом следует положить

$$u = \ln(\pm D_{11}) \qquad (2.5)$$

Доказательство предложения 2.I фактически содержится в работе А.В.Михайлова [5] и может быть проведено по той же схеме, что и доказательство предложения I.I. Поэтому в целях экономии места мы его опускаем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. Выполнение тождеств (2.4) достаточно требовать "по модулю" умножения на правый матричный множитель, не зависящий от x и t .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Вещественная редукция $u = \bar{u}$ осуществляется наложением на Ψ -функцию дополнительного ограничения вида

$$\overline{\Psi}(\bar\lambda) = \Psi(\lambda)\,\sigma(\lambda), \ \sigma(\lambda) \text{ –не зависит от } x,t \qquad (2.6)$$

б) П р о ц е д у р а о д е в а н и я.

Пусть $\Psi_0(\lambda,x,t)$, $u_0(x,t)$ – затравочные Ψ -функция и решение уравнения (2.I). Будем искать новую функцию $\Psi_1(\lambda,x,t)$ в виде

$$\Psi_1(\lambda)=(\lambda+B)^{-1}\cdot(\lambda+A)\cdot\Psi_0(\lambda)\equiv\frac{\lambda+A}{\lambda+B}\cdot\Psi_0(\lambda). \qquad (2.7)$$

Выбрав функцию Ψ_1 в виде (2.7), мы обеспечиваем для нее сохранение нужного вида существенных особенностей в нуле и на бесконечности. Учтем редукции (2.4):

$$Q\Psi_1(q\lambda)M=\Psi_1(\lambda)\Leftrightarrow Q\,\frac{\lambda+q^2A}{\lambda+q^2B}\,Q^+=\frac{\lambda+A}{\lambda+B}\Leftrightarrow\begin{cases}q^2QAQ^+=A\\ q^2QBQ^+=B\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&0&A_{13}\\A_{21}&0&0\\0&A_{32}&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&B_{13}\\B_{21}&0&0\\0&B_{32}&0\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{T}\left[\Psi_1^T(-\lambda)\right]^{-1}=\Psi_1(\lambda)\Leftrightarrow\mathbb{T}\,(\lambda-B^T)(\lambda-A^T)^{-1}\mathbb{T}=(\lambda+B)^{-1}(\lambda+A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lambda+B)(\lambda-\mathbb{T}B^T\mathbb{T})=(\lambda+A)(\lambda-\mathbb{T}A^T\mathbb{T})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(B=A)\vee\left(B_{13}=-A_{13},B_{32}=A_{32}-2A_{13},B_{21}=\frac{A_{21}A_{32}}{A_{32}-2A_{13}}\right).$$

Итак выбирая $\Psi_1(\lambda,x,t)$ в виде

$$\Psi_1(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&0&-A_{13}\\ \dfrac{A_{21}A_{32}}{A_{32}-2A_{13}}&\lambda&0\\ 0&A_{32}-2A_{13}&\lambda\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda&0&A_{13}\\A_{21}&\lambda&0\\0&A_{32}&\lambda\end{pmatrix}\Psi_0(\lambda), \qquad (2.8)$$

мы гарантируем выполнение первых двух аксиоматических условий. При этом у нас осталось три свободных параметра – величины A_{13}, A_{21} и A_{32}, определяющие матрицу A. Для их фиксации зададимся точкой $a\in\mathbb{C}$, не совпадающей с регулярными особенностями функции Ψ_0, парой комплексных чисел c,d и положим

$$\Psi_1(a)\begin{pmatrix}1\\c\\d\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a&0&A_{13}\\A_{21}&a&0\\0&A_{32}&a\end{pmatrix}\Psi_0(a)\begin{pmatrix}1\\c\\d\end{pmatrix}=0 \qquad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что a – нуль $\det(\lambda+A)$. Специфика матрицы A такова, что оставшиеся два нуля этого определителя суть qa и q^2a. Благодаря соотношению $\mathbb{T}(\lambda-B^T)(\lambda-A^T)^{-1}\mathbb{T}=$ $=(\lambda+B)^{-1}(\lambda+A)$, нули $\det(\lambda+B)$ совпадают с нулями

$\det(\lambda - A)$, т.е. с точками $-a, -qa, -q^2 a$. Множеством $\Omega = \{a, qa, q^2 a, -a, -aq, -aq^2\}$ исчерпывается все множество новых регулярных особенностей функции Ψ_1 . Повторяя соответствующие рассуждения § I, приходим к выводу, что равенство (2.9) влечет за собой голоморфность выражений $\Psi_{1x}\Psi^{-1}(\lambda)$ и $\Psi_{1t}\Psi^{-1}(\lambda)$ в окрестности точки a . Редукции (2.4) переносят справедливость последнего утверждения на все точки множества Ω . Условие 3 аксиоматики Ψ -функции тем самым удовлетворяется.

Разрешая систему (2.9) относительно величин A_{13} , A_{21} и A_{32}, приходим к формулам

$$A_{ij}(x,t) = -a\,\varphi_i(a,x,t)/\varphi_j(a,x,t),\ (i,j) = (1,3),(2,1),(3,2),$$

где
$$\vec{\varphi}(\lambda,x,t) = \Psi_0(\lambda,x,t)\begin{pmatrix}1\\c\\d\end{pmatrix}.$$

На этом описание процедуры одевания для уравнения (2.I) заканчивается. В терминах самого решения уравнения (2.I), построенное нами преобразование, как нетрудно проверить, выглядит следующим образом:

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) + \ln\frac{2A_{13} - A_{32}}{A_{32}} = u_0 + \ln\left(1 - 2\frac{\varphi_1\cdot\varphi_2}{\varphi_3}\right) \qquad (2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Сохранение условия вещественности (2.6) при переходе от Ψ_0 к Ψ_1 обеспечивается требованиями вещественности a и колленеарности векторов $(1, c, d)$ и $(1\,\bar{c}\,\bar{d})\cdot\sigma_0^T(a)$. Например, в случае "нулевой" затравки $\left(\Psi_0 = F_\infty \exp\{\lambda Q x + \frac{t}{\lambda}Q^+\}, u_0 = 0\right)$, последнее требование выглядит совсем просто:

$$\sigma_0(\lambda) \equiv \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow |c| = 1,\ \arg d = \frac{1}{2}\arg c.$$

Получающееся при этом решение u_1 совпадает с простым солитоном уравнения (2.I) (см. [5]).

Литература

I. К р и ч е в е р И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. - Функц.анализ и его прилож., 1977, т.II, № I, с.I5-3I.

2. Ш а б а т А.Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений. - Функц.анализ и его прилож., 1975, т.9, № 3, с.75-78.

3. З а х а р о в В.Е., М а н а к о в С.В. Точная теория резо-

нансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах. – Препринт ИЯФ, № 74-41, Новосибирск, 1974.
4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи.II. – Функц.анализ и его прилож., 1979, т.13, № 3, с.13-22.
5. Mikhailov A.V. The reduction problem and the inverse scattering method, Physica 3D, 1981, v.1, N 2, p.73-117.
6. Jimbo M., Miwa T., Ueno K. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients.I. – Preprint RIMS, N 319, Kyoto, 1980.
7. Jimbo M., Miwa T. Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, Preprint RIMS, N 327, Kyoto, 1980.
8. Бикбаев Р.Ф., Бобенко А.И., Итс А.Р. О конечнозонном интегрировании уравнений Ландау-Лифшица. – Докл. АН СССР, 1983, т.272, № 6, с.1293-1298.
9. Чередник И.В. О решениях алгебраического типа асимметрических дифференциальных уравнений. – Функц.анализ и его прилож., 1982, т.15, № 3, с.93-94.
10. Bikbaev R.F., Bobenko A.I. On finite-gap integration of the Landau - Lifshitz equation. X-Y-Z-case. – Preprint LOMI, E-8-83, Leningrad, 1983.
11. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных уравнений. – Вестн.ЛГУ, сер.матем., мех., астр., 1976, вып.7, с.28-39.
12. Matveev V.B. Abelian Functions and solitons. – Preprint ITP, N 373, Wroclaw, 1976.
13. Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные двухзонные решения уравнения Sine-Gordon. – Функц.анализ и его прилож., 1982, т.16, № 1, с.25-43.
14. Dodd R.K., Bullough R.K. Polynomial conserved densities for the sine-Gordon equations. – Proc.Roy.Soc.Lond. A, 1977, v.352, p.481.
15. Жибер А.В., Шабат А.Б., Уравнение Клейна - Гордона с нетривиальной группой. – Докл. АН СССР, 1979, т.247, № 5, с.1103-1105.

Л.В.Капитанский, О.А.Ладыженская

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВКЛИДОВЫХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА-МИЛЛСА

Для эвклидовых уравнений Янга-Миллса в $\mathbb{R}^4$ со структурной группой $SU(2)$ мы исследуем решения, которые естественно назвать сферически-симметричными. Возьмем для потенциалов A_μ кватернионное представление: $A_\mu(x) = \sum_{k=1}^{3} A_\mu^k(x)\,\sigma_k$, $\mu=1,2,3,4$, где σ_k - кватернионные мнимые единицы $(\sigma_k^2=-1)$. Функционал действия Янга-Миллса имеет вид:

$$\mathcal{J}(A) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=1}^{4} |F_{\mu\nu}(x)|^2\,dx\,, \tag{I}$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, а функционал, задающий топологический заряд (число инстантонов), имеет вид *):

$$Q(A) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^a_{\mu\nu} F^a_{\alpha\beta}\,dx\,. \tag{2}$$

Рассмотрим следующее действие группы $S^3 (\simeq SU(2))$ кватернионов единичной длины на потенциалы A_μ:

$$\pi(g): A_\mu(x) \longmapsto (\pi(g)A_\mu)(x) = A_\alpha(gx)\,\hat{g}_{\alpha\mu}\,, \quad \mu=1,2,3,4\,. \tag{3}$$

Здесь $g = g_\mu \sigma_\mu$, $\sigma_4 = 1$, - кватернион единичной длины, gx -произведение g на x, рассмотренный как кватернион $x_\nu \sigma_\nu$, а $\hat{g}_{\alpha\mu}$ - элементы матрицы $\hat{g}$, определяемой по компонентам g_η кватерниона g равенством:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_4 & -g_3 & g_2 & g_1 \\ g_3 & g_4 & -g_1 & g_2 \\ -g_2 & g_1 & g_4 & g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & g_4 \end{pmatrix}.$$

Легко находятся все потенциалы, неменяющиеся под действием преобразований (3), т.е. те A_μ, для которых $A_\alpha(gx)\,\hat{g}_{\alpha\mu} = A_\mu(x)$ при любых g с $|g|=1$ и любых $x \in \mathbb{R}^4$. Такие потенциалы можно представить в виде:

*) Всюду по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование от I до 4, а по латинским - от I до 3.

$$A_\mu(x) = \frac{1}{|x|} f_\alpha \left(\ln |x|^2 \right) \left(\frac{\widehat{x}}{|x|} \right)_{\alpha\mu}, \quad (4)$$

где $f_\alpha(\cdot) = f_\alpha^k(\cdot)\,\sigma_k$ - произвольные функции переменной $\tau = \ln|x|^2$.

Функционалы (I) и (2) инвариантны относительно преобразований (3), и для отыскания стационарных точек функционала Янга-Миллса (I) при фиксированном значении заряда (2) можно применить принцип Коулмена (см. по этому поводу [I] и [2]). Чтобы получить редуцированную задачу, надо подставить выражение (4) в (I) и (2) и результаты представить в виде интегралов от f_α и их производных. Оказалось, что при этом плотности функционалов (I) и (2) являются функциями только $|x|$. С точностью до постоянных множителей сами функционалы имеют вид:

$$\tilde{J}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |\dot{\vec{f}}_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=}^{3} |\vec{f}_i|^2 + (\dot{\vec{f}}_i, \vec{f}_4, \vec{f}_i) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |\vec{f}_i \times \vec{f}_4|^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{3} |\vec{f}_i \times \vec{f}_j|^2 - 3(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \Big\} d\tau \quad (5)$$

и

$$\tilde{Q}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau} \Big\{ \sum_{i=1}^{3} |\vec{f}_i|^2 - 2(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \Big\} d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau} \Phi(f)\, d\tau . \quad (6)$$

Здесь мы использовали для кватернионов $f_\mu(\tau) = f_\mu^k(\tau)\sigma_k$ векторное представление $\vec{f}_\mu(\tau) = \left(f_\mu^1(\tau), f_\mu^2(\tau), f_\mu^3(\tau) \right)$; $\dot{\vec{f}}_i$ - это $\dfrac{d\vec{f}_i}{d\tau}$, а $(\vec{f}_\mu, \vec{f}_\nu, \vec{f}_\gamma)$ - смешанное произведение векторов $\vec{f}_\mu, \vec{f}_\nu$ и $\vec{f}_\gamma$. Функционалы (5) и (6) инвариантны относительно калибровочных преобразований:

$$f_k(\tau) \longrightarrow q(\tau) f_k(\tau) q(\tau)^{-1}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$f_4(\tau) \longrightarrow q(\tau) f_4(\tau) q(\tau)^{-1} - 2\dot{q}(\tau) \cdot q(\tau)^{-1},$$

где $q(\tau)$ - произвольная гладкая кватернионно-значная функция с $|q(\tau)|=1$. Мы выберем $q(\cdot)$ так, чтобы $f_4(\tau)\equiv 0$. В такой калибровке

$$\tilde{J}(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}|\dot{\vec{f}}_i|^2+K(f)\right\}d\tau \ , \qquad (7)$$

где $K(f)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}|\vec{f}_i-\vec{\psi}_i|^2$, а $\vec{\psi}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ik\ell}\vec{f}_k\times\vec{f}_\ell$.

Уравнения Эйлера для функционала (5) (редуцированные уравнения Янга-Миллса) в калибровке $f_4\equiv 0$ имеют вид:

$$\begin{cases}\ddot{\vec{f}}_i=\vec{f}_i-3\vec{\psi}_i+2\vec{\chi}_i\,, & i=1,2,3\\ \dot{\vec{f}}_j\times\vec{f}_j=0\,, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\vec{\chi}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ik\ell}\vec{\psi}_k\times\vec{f}_\ell$, а уравнения авто- и антидуальности имеют вид:

$$\dot{\vec{f}}_i=\vec{f}_i-\vec{\psi}_i\,, \quad i=1,2,3 \quad (F=*F) \qquad (9)$$

и

$$\dot{\vec{f}}_i=-\vec{f}_i+\vec{\psi}_i\,, \quad i=1,2,3 \quad (F=-*F) \qquad (10)$$

соответственно. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА Если для решения f системы (8) $\tilde{J}(f)\leq\infty$, а $\tilde{Q}(f)>0$, то оно удовлетворяет системе (9) и $\tilde{\tilde{Q}}(f)=1$. Если же для него $\tilde{J}(f)<\infty$, а $\tilde{\tilde{Q}}(f)<0$, то оно удовлетворяет системе (10) и $\tilde{\tilde{Q}}(f)=-1$.

Для доказательства теоремы вместо $\dot{\vec{f}}_i$ введем новые переменные $\vec{z}_i=-\dot{\vec{f}}_i+\vec{f}_i-\vec{\psi}_i$ – "отклонение от автодуальности". Первые три уравнения системы (8) в переменных $\{f,z\}=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3,\vec{z}_1,\vec{z}_2,\vec{z}_3\}$ примут вид:

$$\dot{\vec{f}}_i=-\vec{z}_i+\vec{f}_i-\vec{\psi}_i \qquad (11)$$

$$\dot{\vec{z}}_i=-\vec{z}_i+\varepsilon_{ik\ell}\vec{z}_k\times\vec{f}_\ell\,. \qquad (12)$$

Пусть $f(\tau)$ есть решение системы (8) с $\tilde{J}(f)<\infty$ и $\tilde{Q}(f)>0$. Функции $\vec{z}_i$, вычисленные по $f(\tau)$ из уравнений (11), удовлетворяют уравнениям (12). Так как последние линейны и однородны по $\vec{z}_i$, то из обращения $|z(\tau)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}|\vec{z}_i(\tau)|^2}$ в нуль при каком-нибудь $\tau=\tau_1$ следует, что $z(\tau)$ будет равно нулю при всех τ, а тем самым, $\vec{f}_i$ будут удовлетворять уравнениям (9). Ввиду этого, остается рассмотреть случай, когда $|z(\tau)|>0$ при всех $\tau\in\mathbb{R}$. Докажем, что в этом случае $\tilde{J}(f)=\infty$. Дадим сначала невполне строгое доказательство. Из сходимости интеграла (7) следует, что $|\dot{f}(\tau)|$ и $K(f(\tau))$ стремятся к нулю при $\tau\longrightarrow\pm\infty$, а отсюда и из (II) следует, что и $|z(\tau)|\longrightarrow 0$ при $\tau\longrightarrow\pm\infty$. Если $K(f)=0$, то либо $f=\{\vec{f}_1;\vec{f}_2;\vec{f}_3\}=0$, либо f есть положительно ориентированный орторепер. В первом случае $\Phi(f)=0$, а во втором $\Phi(f)=1$. По условию $\tilde{Q}(f)>0$. Тогда $f=0$ при $\tau=-\infty$, а при $\tau=+\infty$ f есть какой-нибудь орторепер f^+ и, значит, в силу (6), $\tilde{Q}(f)=1$. Поскольку $f(-\infty)=0$, то $|f(\tau)|$ будет мал при $\tau<<-1$ и система (I2) будет "почти" совпадать с системой $\dot{\vec{z}}_i=-\vec{z}_i$, все ненулевые решения которой растут экспоненциально при $\tau\longrightarrow-\infty$. Решения (I2) также экспоненциально растут при $\tau\longrightarrow-\infty$. Действительно, из (I2) следует, что

$$\frac{d|z|^2}{d\tau}=-2|z|^2+2\varepsilon_{ik\ell}(\vec{z}_k\times\vec{f}_\ell)\cdot\vec{z}_i\leqslant$$

$$\leqslant-2|z|^2+4|f|\cdot|z|^2\,. \tag{I3}$$

Если $|f(\tau)|\leqslant\frac{1}{4}$ при всех τ, меньших какого-либо τ_1, то $\frac{d}{d\tau}|z|^2\leqslant-|z|^2$ при $\tau\leqslant\tau_1$ и потому

$$|z(\tau)|^2\geqslant|z(\tau_1)|^2\exp(\tau_1-\tau)\,,\qquad \tau\leqslant\tau_1\,, \tag{I4}$$

что невозможно, ибо $|z(\tau)|\longrightarrow 0$ при $\tau\longrightarrow-\infty$.

Нестрогость проведенного рассуждения лишь в том, что сходимость интеграла (7) не влечет, вообще говоря, равномерного стремления к нулю $|\dot{f}(\tau)|$ и $K(f(\tau))$ при $\tau\longrightarrow\pm\infty$. Но требования $\tilde{J}(f)<\infty$ и $\tilde{Q}(f)>0$ гарантируют существование последовательностей $\tau_k^\pm$, $k=1,2,\dots$, стремящихся к $\pm\infty$, для которых $|\dot{f}(\tau_k^\pm)|+K(f(\tau_k^\pm))\longrightarrow 0$, $|f(\tau_k^-)|\longrightarrow 0$, а $|f(\tau_k^+)|\longrightarrow\sqrt{3}$. Из (II) тогда следует, что $|z(\tau_k^\pm)|\longrightarrow 0$ при $k\longrightarrow\infty$. Без ограничения общности можно считать, что $|f(\tau_k^-)|<\frac{1}{8}$ при всех k. Но, с другой стороны, как уже отмечалось выше (см.(I3),(I4)), если $|f(\tau)|\leqslant\frac{1}{4}$ при всех τ, меньших какого-либо τ_1, то $|z(\tau)|$ экспоненциально растет при $\tau\longrightarrow-\infty$, и мы сразу приходим к противоречию с условием $|z(\tau_k^-)| \longrightarrow 0$. Поэтому остается предположить, что существует бесконечная последовательность $\tilde{\tau}_k^-$ такая, что $\tilde{\tau}_k^- \longrightarrow -\infty$ при $k \longrightarrow \infty$ и $|f(\tilde{\tau}_k^-)| > \frac{1}{4}$ при всех k. Следовательно, кривая $f(\tau)$ должна бесконечное число раз заходить в шар $|f| < \frac{1}{8}$ и выходить из шара $|f| > \frac{1}{4}$. Значит, найдутся две такие стремящиеся к $(-\infty)$ последовательности $\{\tau_k'\}$ и $\{\tau_k''\}$, что $\tau_1' > \tau_1'' > \ldots > \tau_k' > \tau_k'' > \tau_{k+1}' > \ldots$, $|f(\tau_k')| = \frac{1}{8}$, $|f(\tau_k'')| = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8} \leqslant |f(\tau)| \leqslant \frac{1}{4}$ при $\tau \in [\tau_k'', \tau_k']$.

Как легко подсчитать, при $|f| \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$

$$|f - \psi|^2 > 3 \cdot 2^{-9} .$$

Кроме того,

$$\int_{\tau_k''}^{\tau_k'} |\dot{f}(\tau)|^2 d\tau \geqslant \inf \int_{\tau_k''}^{\tau_k'} |\dot{y}(\tau)|^2 d\tau \geqslant \frac{2^{-6}}{\tau_k' - \tau_k''} ,$$

где $\inf$ берется по всем траекториям $y(\tau)$, для которых $|y(\tau_k')| = \frac{1}{8}$, $|y(\tau_k'')| = \frac{1}{4}$. Благодаря этим двум минорантам

$$\int_{\tau_k''}^{\tau_k'} \left(\frac{1}{2}|\dot{f}|^2 + K(f)\right) d\tau \geqslant \frac{2^{-7}}{\tau_k' - \tau_k''} + 3 \cdot 2^{-10} (\tau_k' - \tau_k'') \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-15/2} \cdot 3^{1/2}. \qquad (15)$$

Отсюда получаем:

$$\tilde{J}(f) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\tau_k''}^{\tau_k'} \left(\frac{1}{2}|\dot{f}|^2 + K(f)\right) d\tau = \infty ,$$

что противоречит предположению $\tilde{J}(f) < \infty$.

Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Покажем теперь, что система (9) (так же, как и (10)) может быть проинтегрирована в явном виде. Для этого введем новую независимую переменную $s = \exp \tau \,(= |x|^2)$, а вместо $\vec{f}_i$ – новые неизвестные функции $\vec{v}_i(s) = s^{-1} \vec{f}_i(\ln s)$. В них система (9) имеет вид:

$$\frac{d\vec{v}_1}{ds} = \vec{v}_3 \times \vec{v}_2 ; \quad \frac{d\vec{v}_2}{ds} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 ; \quad \frac{d\vec{v}_3}{ds} = \vec{v}_2 \times \vec{v}_1 . \qquad (16)$$

Ее можно записать, как одно матричное уравнение:

$$\frac{dv}{ds} = -(v^{-1})^T \det v, \tag{17}$$

где

$$v = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \\ v_3^1 & v_3^2 & v_3^3 \end{pmatrix} .$$

Легко видеть, что (17) обладает следующими свойствами: 1) инвариантность относительно преобразований: $v \longrightarrow U_1 v U_2$, где U_1, U_2 – произвольные ортогональные матрицы 3x3 с одинаковыми детерминантами; 2) если в качестве начального условия для (17) взять диагональную матрицу, то решение $v(s)$ при всех s будет диагональным. В силу этих двух свойств достаточно рассмотреть случай, когда

$$v(s) = \begin{pmatrix} v_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & v_2(s) & 0 \\ 0 & 0 & v_3(s) \end{pmatrix} .$$

Для таких $v(s)$ система (17) принимает вид:

$$\frac{dv_1}{ds} = -v_2 v_3, \quad \frac{dv_2}{ds} = -v_3 v_1, \quad \frac{dv_3}{ds} = -v_1 v_2 . \tag{18}$$

Легко видеть, что в силу (18)

$$\begin{aligned} (v_2(s))^2 - (v_1(s))^2 &= c_1 = const, \\ (v_3(s))^2 - (v_1(s))^2 &= c_2 = const, \end{aligned} \tag{19}$$

поэтому

$$\left(\frac{dv_1}{ds}\right)^2 = (v_1^2 + c_1)(v_1^2 + c_2),$$

откуда находится v_1, а затем из (18) и (19) определяются v_2 и v_3.

Рассмотрим решения системы (18), для которых функционал действия (7) конечен. Нетрудно показать, что в этом случае постоянные c_1 и c_2 в (19) должны быть нулевыми, а все соответствующие решения (18) получаются из (основного) решения

$$\mathring{v}_1(s) = \mathring{v}_2(s) = \mathring{v}_3(s) = \frac{1}{s + const} \tag{20}$$

с помощью (калибровочного) преобразования $(v_1, v_2, v_3) \longrightarrow$ $\longrightarrow (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \lambda_3 v_3)$, где $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Восстановленные по $\mathring{v}_K(s)$ потенциалы $A_\mu(x)$ дают в точности I-инстантонное решение, найденное в [3].

Литература

I. Фаддеев Л.Д. В поисках многомерных солитонов. - В кн.: Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля. Дубна, I976, с.207-223.

2. Капитанский Л.В., Ладыженская О.А. О принципе Коулмэна нахождения стационарных точек инвариантных функционалов. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I5. Зап.науч.семин. ЛОМИ, т.I27, I983, с.84-I02.

3. Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations. - Phys.Lett. 1975, v.59B, N 1, p.85-87.

В.Е.Корепин

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОГО БОЗЕ-ГАЗА В СЛУЧАЕ ОТТАЛКИВАНИЯ

I. Введение.

В работе рассматривается одномерный Бозе-газ, эквивалентный квантовому нелинейному уравнению Шредингера. Мы будем употреблять сокращение НШ, чтобы обозначить модель. Гамильтониан модели имеет вид

$$H=\int\limits_0^L dx\left(\partial_x\psi^+\partial_x\psi+c\psi^+\psi^+\psi\psi-h\psi^+\psi\right) \tag{I}$$

$$\left[\psi(x),\psi^+(y)\right]=\delta(x-y).$$

Здесь L - длина ящика, c - константа взаимодействия $(c>0)$ h - химический потенциал $(h>0)$. В настоящей работе мы используем подход работы [I], опубликованной в этом же номере. Формулы из этой работы будут цитироваться так (номер формулы) [I]. Следует отметить, что модель НШ была погружена в квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) в работах [2-4]. В работе [I] задача о вычислении корреляционных функций была сформулирована в рамках КМОЗ. Основное состояние модели НШ в термодинамическом пределе было построено в работах [5-6]. Основное состояние - это море Дирака, плотность которого $\rho(\lambda)$ удовлетворяет уравнению Янга:

$$\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}\right)\rho=\frac{1}{2\pi}\ . \tag{2}$$

Здесь $\hat{K}$ - интегральный оператор, который действует на функцию $\rho(\lambda)$ так

$$(\hat{K}\rho)(\lambda)=\int\limits_{-q}^{q}K(\lambda,\mu)\rho(\mu)\,d\mu \tag{3}$$

$$K(\lambda,\mu)=\frac{2c}{c^2+(\lambda-\mu)^2}\ . \tag{4}$$

где q - импульс Ферми. Собственную функцию гамильтониана, соответствующую основному состоянию, будем обозначать $|\Omega>$ (физический вакуум). В работе [7] было доказано, что нормы собственных состояний гамильтониана равны $\det(\varphi')$, см., например, (2.I9), (5.3) [I] . В термодинамическом пределе этот детерминант существенно упрощается

$$\det_N(\varphi') = \prod_{j=1}^{N} \left[2\pi L \rho(\lambda_j) \right] \det\left(1 - \frac{1}{2\pi}\hat{K}\right) . \tag{5}$$

Здесь последний сомножитель - это детерминант интегрального оператора (2)-(4). Весьма интересным является вопрос о вычислении корреляционных функций в этой модели. Коррелятор полей при $c=\infty$ был вычислен в работах [8] , [9] . В работе [I0] с помощью квантового варианта уравнения Гельфанда-Левитана было вычислено два порядка разложения этого коррелятора по I/c. Однако в работе [II] было доказано, что квантовое уравнение Гельфанда-Левитана, использованное в работе [I0] , является правильным над физическим вакуумом лишь в асимптотической области $c \to \infty$. Аналитические свойства функции Йоста в квантовом случае оказываются более сложными, чем в классическом. "Классический" разрез должен быть заменен в квантовом случае на два разреза с расстоянием c между ними. Это приводит к тому, что метод работы [I0] может дать лишь несколько первых порядков разложения по I/c, но не может быть использован для систематического разложения по I/c. Следует отметить, что в работе [I2] была вычислена асимптотика коррелятора полей на больших расстояниях при любом c .

В настоящей работе предъявлен общий способ вычисления любых корреляторов в модели. Общий метод проиллюстрирован на примере простейшего коррелятора - коррелятора торов $j(x) = \psi^+\psi$. Следует отметить, что в связи с ограниченностью объема приведены лишь формулировка теорем и окончательный ответ. Полный текст со всеми доказательствами направлен в журнал "Communications in Mathematical Physics ". Отметим, что при $c = \infty$ коррелятор токов является элементарной функцией

$$\frac{\langle \Omega | : j(x_1) j(x_2) : \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} = \left(\frac{q}{\pi}\right)^2 - \left[\frac{\sin q(x_1 - x_2)}{\pi(x_1 - x_2)}\right]^2 . \tag{6}$$

Асимптотика на больших расстояниях также элементарно вычисляется при любом c :

$$\frac{\langle \Omega | j(x_1) j(x_2) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \longrightarrow \left[\int_{-q}^{q} \rho(\lambda)\, d\lambda \right] \qquad \text{при } |x_1 - x_2| \longrightarrow \infty \tag{7}$$

В настоящей работе удается вычислить коррелятор токов при любых c и $|x_1 - x_2|$ в виде ряда. Этот ряд дает, например, улучшенную версию I/c разложения - поправки дают равномерное приближение по $|x_1 - x_2|$. В пределе слабого взаимодействия $c \to 0$, ряд так же существенно упрощается. Слагаемое номер n порождается вкладом n частиц, присутствующих в вакууме. В этом смысле наш подход аналогичен программе бутстрапа [I3], в которой стандартные методы квантовой теории поля применяются для вычисления корреляторов в интегрируемых моделях. Однако существенным отличием нашего подхода от [I3] является отсутствие какого-либо произвола или неоднозначности при вычислении n-го члена ряда. Мы существенно опираемся на обобщенную модель построенную в работе [I], в которую входит произвольная функция $a_1(\lambda)/d_1(\lambda) = \ell(\lambda)$. С помощью методов, разработанных в работе [7] удается явно выделить зависимость корреляционной функции от $\ell(\lambda)$. Таким образом, мы видим, что проблему вычисления корреляционных функций удалось решить, только с помощью КМОЗ [2].

Материал в работе расположен следующим образом. В п.2 приведен ответ - представление коррелятора в виде ряда. В остальной части работы поясняется идея доказательства. В п.3 построено представление коррелятора через неприводимые части в рамках обобщенной модели. В п.4 рассматривается термодинамический предел обобщенной модели, строятся одевающие уравнения.

2. Коррелятор токов.

Вычисление коррелятора токов сводится к вычислению среднего от оператора $\langle\Omega|Q_1^2|\Omega\rangle$ (3.9) [I]. Здесь Q_1 - оператор числа частиц на отрезке $[0,x]$. Чтобы построить разложение этого среднего, полезно рассмотреть другое среднее $\langle\psi_\kappa|Q_1^2|\psi_\kappa\rangle$. Здесь $|\psi_\kappa\rangle$ - κ частичная собственная функция гамильтониана, нормируем ее так $\langle\psi_\kappa|\psi_\kappa\rangle = \det_\kappa(\varphi')$, обозначения см. (5.3) [I]. Это среднее при небольших κ легко вычислить как с помощью КМОЗ, так и с помощью координатной волновой функции. Можно доказать, что среднее представимо в псевдополиномиальном виде :

$$\langle\psi_\kappa|Q_1^2|\psi_\kappa\rangle = \sum_{n=0}^{\kappa}\sum_{m=0}^{\kappa-1} J^{(\kappa)}_{n,m}x^n y^m; \quad y = L - x. \tag{8}$$

Коэффициенты $J_{n,m}$ являются рациональными функциями λ_j и $exp(ix\lambda_j)$. Неприводимой частью I_κ этого среднего называется $J^{(\kappa)}_{00} = I_\kappa$. Неприводимая часть была подробно исследована в работе [I] , ее можно записать в виде

$$I_K(\{\lambda_j\}) = \sum_{\{\lambda_j\}=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^0\}} e^{-ix\sum_{\ell=1}^{n}(\lambda_\ell^+-\lambda_\ell^-)} \mathcal{A}_K^n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^0\}) \tag{9}$$

см. (6.7), (6.8) [I] . Величины $\mathcal{A}_K^n$ называются коэффициентами Фурье неприводимой части. В следующем пункте мы увидим, что все коэффициенты $J_{n,m}^{(K)}$ могут быть выражены через неприводимые части.

Для того, чтобы вычислить вклад неприводимой части в коррелятор, необходимое ее "одеть". Одевающее преобразование строится с помощью функции $P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}$. Эта функция зависит от $(2n+1)$ аргументов $-q\le t\le q$, $-q\le\lambda_j^\pm\le q$, $j=1,2,\dots,n$. Она однозначно определяется одевающим уравнением

$$1+2\pi P_n(t)=\left\{\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\lambda_j^+-t+ic}{\lambda_j^+-t-ic}\right)\left(\frac{\lambda_j^--t-ic}{\lambda_j^--t+ic}\right)\right\}\exp\left\{\int_{-q}^{q}K(t,s)P_n(s)\,ds\right\} \tag{10}$$

и неравенством $\operatorname{Re}P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})\le 0$. Можно доказать соответствующую теорему существования и единственности. Приведем важнейшие свойства этой функции:

1) При комплексном сопряжении наборы $\{\lambda^+\}$ и $\{\lambda^-\}$ меняются местами $P_n^*(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})=P_n(t,\{\lambda^-\},\{\lambda^+\})$
2) $P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}$ является симметричной функцией всех λ_j^+ и всех λ_j^- по отдельности.
3) Функция $P_{(n-1)}$ - это специальное значение функции P_n при $\lambda_n^+=\lambda_n^-$. Если наборы $\{\lambda^+\}$ и $\{\lambda^-\}$ совпадают целиком $\lambda_j^+=\lambda_j^-$, $j=1,\dots,n$, то $P_n=0$.
4) Функция P_n является ограниченной во всей области определения

$$|P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})|\le 1/\pi \tag{11}$$

5) Если $\{\lambda^+\}\neq\{\lambda^-\}$, то $\operatorname{Re}P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})\neq 0$ ни в одной точке.
6) В пределе $c\to\infty$ функция P_n убывает

$$P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}) \longrightarrow \frac{1}{i\pi c}\left(1+\frac{2q}{\pi c}\right)\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)-\frac{1}{\pi c^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)\right]^2 \qquad (12)$$

7) В пределе $c \longrightarrow 0$ интегральный оператор $\hat{K}$ (3) превращается в единичный $\hat{K} \longrightarrow 2\pi I$, а функция P_n стремится к нулю почти всюду, за исключением областей $|t-\lambda_j^{\pm}| \leq c$. В этих областях P_n ограничена. С помощью функции P_n определим функцию p_n от $2n$ аргументов:

$$p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}) = -i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)+\int_{-q}^{q}dt\, P_n(t,\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}). \qquad (13)$$

С помощью этой функции определим одевающее преобразование которое действует на неприводимую часть следующим образом: $I_K(\{\lambda_j\}) \longrightarrow I_K^d(\{\lambda_j\})$, где

$$I_K^d(\{\lambda_j\}) = \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^0\}} e^{x p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})}\, A_K^n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^0\}). \qquad (14)$$

Здесь суммирование ведется по тем же разбиениям, что и в (9). Таким образом, одевающее преобразование действует только на экспоненты по правилу

$$\exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^+-\lambda_j^-)x\Big\} \longmapsto \exp\{x p_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\})\}. \qquad (15)$$

Коэффициенты Фурье A остаются неизменными. Следует отметить, что одетая неприводимая часть $I_K^d(\{\lambda_j\})$ является вещественной, симметричной и ограниченной функцией всех λ_j. Теперь все обозначения подготовлены для того, чтобы написать представление для коррелятора токов в виде ряда. Вклад K-частичных процессов Γ_K получается при интегрировании $I_K^d(\{\lambda_j\})$ по всем λ_j с весом $\omega(\lambda)$:

$$\Gamma_K = \frac{1}{K!}\int_{-q}^{q}\left[\prod_{j=1}^{K}\left(\frac{\omega(\lambda_j)\,d\lambda_j}{2\pi}\right)\right] I_K^d(\{\lambda_j\}). \qquad (16)$$

Вес $\omega(\lambda)$ равен

$$\omega(\lambda) = \exp\left\{\frac{-1}{2\pi}\int_{-q}^{q} K(\lambda,\mu)\,d\mu\right\} . \tag{17}$$

Это функция ограниченной вариации $e^{-1} < \omega(\lambda) < \omega_0$

$$0 < \omega_0 = \exp\left\{\frac{-2cq}{\pi(c^2+4q^2)}\right\} < 1 . \tag{18}$$

Коррелятор токов равен

$$\frac{\langle\Omega|j(x)j(0)|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle} = \left[\int_{-q}^{q}\rho(\lambda)\,d\lambda\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k . \tag{19}$$

Здесь $x > 0$. Этого достаточно, т.к. коррелятор - четная функция x . Формулы (12), (16), (17), (6.11) [1] показывают, что $\Gamma_k \longrightarrow c^{2-k}$ при $c \longrightarrow \infty$. Таким образом (19) аналогично 1/c разложению, причем собственно 1/c разложение легко извлекается из (19). Отметим однако, что 1/c разложение дает неравномерное по расстоянию приближение из-за полиномиальных вкладов. Разложение (19) лишено этого недостатка, оно дает равномерное по расстоянию приближение.

Например, первое слагаемое в (19) дает асимптотику коррелятора на больших расстояниях (7). В пределе $c \longrightarrow 0$, I_k^d стремится к произведению δ-функций, k - кратный интеграл задающий Γ_k , явно вычисляется, а разложение (19) существенно упрощается. С помощью формул (6.10), (6.11) [1] легко вычислить три первых слагаемых в правой части (19). Это дает, например, возможность вычислить поправки к формуле (6) в пределе $c \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\langle\Omega|j(x)j(0)|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle} = \left(\frac{q}{\pi}\right)^2 + \frac{4}{c}\left(\frac{q}{\pi}\right)^3 - \left(1+\frac{2}{c}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\sin(x_2 q)}{\pi x_2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2}{c\pi^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin qx}{\pi x}\int_{-q}^{q} d\lambda \sin\lambda x\, \ln\left(\frac{q+\lambda}{q-\lambda}\right)\right] - \frac{8q}{\pi c}\left(\frac{\sin qx}{\pi x}\right)^2 + \tag{20}$$

$$+ O\left(\frac{1}{c^2}\right) .$$

Здесь $X_q = X(1+2q/\pi c)$. Поправки к этому выражению имеют порядок $1/c^2$ при любом x. Так же можно вычислить любое слагаемое в разложение (I9). В оставшейся части работы мы поясним идею доказательства ф-лы (I9).

3. Восстановление среднего значения $\langle Q_1^2\rangle$ по неприводимым частям.

В этом пункте приводится формула, выражающая среднее значение $\langle Q_1^2\rangle$ через неприводимые части I_k , $2\leqslant k\leqslant N$. Используются формулы (4.I5), (4.I6), (5.I), (5.2) [I] . Эта формула имеет вид

$$\frac{\langle 0|\prod\limits_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\, Q_1^2 \prod\limits_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle}{\langle 0|\prod\limits_{j=1}^{N} C(\lambda_j)\prod\limits_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle} = \frac{\langle Q_1^2\rangle_N^0}{\langle 1\rangle_N} + \sum_{n_I=2}^{N} \Gamma_{n_I,N} \quad . \tag{21}$$

В левой части происходит усреднение по собственной функции. В правой части использованы следующие обозначения: $\langle 1\rangle_N = \det_N(\varphi')$ (см. (5.3) [I]), а

$$\langle Q_1^2\rangle_N^0 = \sum_{\{\lambda\}_N=\{\lambda^x\}\cup\{\lambda^y\}} n_x^2 \det_{n_x}(\varphi_x') \det_{n_y}(\varphi_y') \ . \tag{22}$$

Здесь суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda_j\}$ на два непересекающихся подмножества $\{\lambda_j\}=\{\lambda^x\}\cup\{\lambda^y\}$, $\{\lambda^x\}\cap\{\lambda^y\}=\emptyset$. Число элементов обозначим $n_x = card\{\lambda^x\}$, $n_y = card\{\lambda^y\}$; $N = card\{\lambda\}$, $n_x+n_y=N$.
Иногда мы будем писать число элементов как субиндекс множества, например, $\{\lambda\}_N$. Определим величины φ_j^x и φ_j^y .

$$\varphi_j^x = i\ln l(\lambda_j^x) + \sum_{\substack{\lambda_k^x\in\{\lambda^x\}\\ k\neq j}} i\ln\left[f(\lambda_j^x,\lambda_k^x)/f(\lambda_k^x,\lambda_j^x)\right] \tag{23}$$

$$\varphi_j^y = i\ln m(\lambda_i^y) + \sum_{\substack{\lambda_k^y\in\{\lambda^y\}\\ k\neq j}} i\ln\left[\frac{f(\lambda_j^y,\lambda_k^y)}{f(\lambda_k^y,\lambda_j^y)}\right] \ . \tag{24}$$

Число величин φ_j^x равно n_x, величин φ_j^y равно n_y. Якобианы определяются так

$$\det_{n_x}(\varphi'_x)\ ,\quad (\varphi'_x)_{jk} = \partial\varphi_j^x / \partial\lambda_k^x \tag{25}$$

$$\det_{n_y}(\varphi'_y)\ ,\quad (\varphi'_y)_{jk} = \partial\varphi_j^y / \partial\lambda_k^y\ . \tag{26}$$

Субиндекс у детерминанта обозначает ранг матрицы. Таким образом, мы определили первое слагаемое в правой части (2I). Остальные слагаемые определяются так. Набор $\{\lambda\}_N$ разбивается на 5 непересекающихся подмножеств: $\{\lambda_j\}_N = \{\lambda^v\}\cup\{\lambda^I\}$; $\{\lambda^v\} = \{\lambda^x\}\cup\{\lambda^y\}$; $\{\lambda^I\} = \{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^\circ\}$. Число элементов в подмножествах определяется так : $n^+ = card\{\lambda^+\}$, $n^- = card\{\lambda^-\}$, $n^\circ = card\{\lambda^\circ\}$, $n^x = card\{\lambda^x\}$, $n^y = card\{\lambda^y\}$; $n^+ + n^- + n^\circ + n^x + n^y = N$. Удобно также обозначать $n^I = card\{\lambda^I\} = n^+ + n^- + n^\circ$, $n^v = card\{\lambda^v\} = n^x + n^y$. Накладывается следующее ограничение $n^+ = n^- = n$. В остальном разбиение произвольно. Определим величины φ_j^v :

$$\varphi_j^v = i \ln r(\lambda_j^v) + \sum_{\substack{\lambda_k^v \in \{\lambda^v\} \\ k\neq j}} i \ln\left[\frac{f(\lambda_j^v\ \lambda_k^v)}{f(\lambda_k^v\ \lambda_j^v)}\right] \tag{27}$$

и якобиан

$$\det(\varphi'_v)\ ;\quad (\varphi'_v)_{jk} = \partial\varphi_j^v / \partial\lambda_k^v\ . \tag{28}$$

Это позволяет записать $\Gamma_{n_I, N}$ в виде

$$\Gamma_{n_I,N} = \sum_{\{\lambda\}=\{\lambda^I\}\cup\{\lambda^v\}} \frac{\det(\varphi'_v)}{\det_N(\varphi')}\, I^d_{n_I N}(\{\lambda^I\},\{\lambda^v\})\ . \tag{29}$$

Величина I^d определяется так

$$I^d_{n_I,N}(\{\lambda^I\},\{\lambda^v\}) = \sum_{\{\lambda^I\}=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^\circ\}} \mathcal{A}^n_{n_I}(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^\circ\})\ \times$$

(30)

$$\times E_{n,n_v}(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^v\})\prod_{j=1}^{n} \ell(\lambda_j^+)\ell^{-1}(\lambda_j^-)\,.$$

Здесь $\mathcal{A}^{n}_{n_I}$ – коэффициенты Фурье неприводимой части (6.7), (6.8) [I] . Величина E определяется так

$$E_{n,n_v}(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^v\})=\sum_{\{\lambda^v\}=\{\lambda^x\}\cup\{\lambda^y\}}\frac{\det_{n_x}(\varphi'_x)\det_{n_y}(\varphi'_y)}{\det_{n_v}(\varphi'_v)}\times \tag{3I}$$

$$\times\prod_{i=1}^{n_x}\prod_{j=1}^{n}\frac{f(\lambda_j^+\,\lambda_i^x)}{f(\lambda_i^x\,\lambda_j^+)}\,\frac{f(\lambda_i^x\,\lambda_j^-)}{f(\lambda_j^-\,\lambda_i^x)}\,.$$

Якобианы $\det\varphi'_x$, $\det\varphi'_y$ введены по формулам (23)-(26). Итак все величины в формуле (2I) определены. Доказательство этой формулы аналогично доказательству формулы для норм [7] . Однако оно является весьма громоздким, и мы его опускаем. Следует отметить, что в пределе сильной связи поведение величины $\Gamma_{k,N}$ такое же, как и у неприводимой части: $\Gamma_{k,N}\longrightarrow c^{2-k}$ при $c\longrightarrow\infty$. В следующем пункте мы вычислим термодинамический предел ($N\to\infty$, k – фиксировано) этой величины, а так же термодинамический предел E_{n,n_v} ($n_v\to\infty$, n^I фиксировано).

4. Одевающие уравнения.

Здесь мы вычислим термодинамический предел функции E_{n,n_v} . Прежде всего определим термодинамический предел в обобщенной модели. Для этого положим $i\ln r(\lambda)=L\,\mathcal{U}(\lambda)$, $u'(\lambda)>0$. В термодинамическом пределе $L\to\infty$, $N\to\infty$, $N/L=const$. Импульсы λ_j ; удовлетворяющие системе $\varphi_j=2\pi j+\pi N;\ -N/2\le j\le N/2$, заполняют интервал $[-q,q]$ с плотностью $\rho_u(\lambda_j)=1/L(\lambda_{j+1}-\lambda_j)$ удовлетворяющей уравнению

$$\Big[(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K})\rho_u\Big](\mu)=\frac{1}{2\pi}\,u'(\mu)\ . \tag{32}$$

В этом пределе гладкая функция $x(\lambda)$ остается фиксированной

$x^{max} > x(\lambda) > 0$; $y(\lambda)$ устремляется на ∞ $y(\lambda) = = \mathrm{L}u'(\lambda) - X(\lambda)$. Напомним, что $u'(\lambda) = 1$ для модели НШ. Ниже мы будем изучать изменение функции E_{n,n^v} при изменении функции $X(\lambda)$. Функция $u(\lambda)$ будет фиксирована, ее с самого начала можно положить равной $u(\lambda) = \lambda$.

Важное утверждение состоит в том, что термодинамический предел E_{n,n_v} ($n_v \to \infty$, n^I - фиксировано) существует и задается в виде абсолютно сходящегося ряда. Обозначим предел через $E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}, [X(\lambda)])$. Он обладает следующими свойствами

$$\left| E_n(\{\lambda^-\},\{\lambda^-\}, [X(\lambda)|) \right| \leqslant 1 \tag{33}$$

$$E_n(\{\lambda^-\},\{\lambda^-\}, [0]) = 1 \, . \tag{34}$$

Функционал E_n удовлетворяет линейному, уравнению в вариационных производных

$$E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},[x(\lambda)]) + 2\pi \frac{\delta}{\delta X(\mu)} E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},[x(\lambda)]) =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_j^+, \mu)}{f(\mu, \lambda_j^+)} \frac{f(\mu, \lambda_j^-)}{f(\lambda_j^-, \mu)} \right\} E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\}, [x(\lambda) + K(\lambda,\mu)]) \, . \tag{35}$$

Вывод этого уравнения опирается на свойства (4.I5), (4.I6) [I] . Все решения этого уравнения можно найти с помощью преобразования Фурье

$$E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},[x(\lambda)]) = \exp\left\{ \int_{-q}^{q} x(t) P_n(t, \{\lambda^+\},\{\lambda^-\}) dt \right\} . \tag{36}$$

При этом уравнение (35) превращается в уравнение (I0), а неравенство (33) в неравенство $\operatorname{Re} P_n \leqslant 0$. Это однозначно фиксирует функцию P_n . Таким образом, мы вычислим термодинамический предел функции E_{n,n^v} . Это является решающим. Формула (36) позволяет элементарно вычислить термодинамический предел $\Gamma_{k,N}$. Приведем окончательный ответ в обобщенной модели.

$$\frac{\langle\Omega|Q_1^2|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}=\left[\int\limits_{-q}^{q}x(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda\right]^2+\int\limits_{-q}^{q}x(\lambda)P''(\lambda)d\lambda+ \tag{37}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\Gamma_k .$$

Здесь $\rho(\lambda)$ задается формулой (2), $P''(\lambda)$ - задается уравнением $[(2\pi-\hat{K})P''](\lambda)=[2\pi\rho(\lambda)]^2$. Величина Γ_k - задается интегралом

$$\Gamma_k=\frac{1}{k!}\int\limits_{-q}^{q}\left[\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{\omega(\lambda_j)d\lambda_j}{2\pi}\right)\right]I_k^d(\{\lambda_j\}) \tag{38}$$

здесь $\omega(\lambda)$ - вес (I7), а I_k^d равно

$$I_k^d(\{\lambda_j\})=\sum_{\{\lambda\}_k=\{\lambda^+\}\cup\{\lambda^-\}\cup\{\lambda^0\}}\mathcal{A}_k^n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},\{\lambda^0\})\times$$

$$\times E_n(\{\lambda^+\},\{\lambda^-\},[x(\lambda)])\prod_{j=1}^{n}\ell(\lambda_j^+)\ell^{-1}(\lambda_j^-) . \tag{39}$$

Величины $\mathcal{A}_k^n$ - коэффициенты Фурье неприводимой части. Здесь явно видно, как среднее значение (37) зависит от произвольной функции $\ell(\lambda)$. Для НШ $\ell(\lambda)=exp\{-ix\lambda\}$, $X(\lambda)=X$, формула (37) переходит в формулу (I9). Таким образом, завершается вывод формулы для коррелятора токов в модели НШ.

5. Заключение.

Итак, вычислен коррелятор токов в модели НШ. Отметим, что наш подход является общим. Увеличивая число узлов в обобщенной модели, можно вычислить любой коррелятор. Например, чтобы вычислить коррелятор полей $\langle\psi(x)\psi^+(y)\rangle$, следует использовать 4-х узельную обобщенную модель. Опишем ответ. Любой коррелятор равен среднему значению некоторого оператора 0 по физическому вакууму $\langle\Omega|0|\Omega\rangle$. Чтобы построить разложение этого коррелятора следует вычислить среднее значение оператора 0 по k - частичному собственному состоянию гамильтониана $\langle\Psi_k|0|\Psi_k\rangle$.

Неприводимую часть этого среднего следует определить, как нулевой коэффициент в псевдополиномиальном представлении, аналогичном (8). Неприводимую часть следует одеть с помощью уравнений, аналогичных (10), и проинтегрировать. Таким образом, получится k -ый член ряда в разложении коррелятора. Отметим, что явный вид такого разложения для коррелятора полей $\langle \psi(x)\, \psi^+(y) \rangle$ отличается от (19). Например, при $c = \infty$ все члены ряда для $\langle \psi(x)\psi^+(y) \rangle$ отличны от нуля. Наш подход может быть применен к любой модели с R матрицей XXX или XXZ типа. Напомним, что этот набор включает XXZ — модель Гейзенберга и модель синус Гордон. Отметим, что разложение (37) весьма естественно с точки зрения аналогии между КМОЗ и теорией представления групп [14], [15]. Задание R - матрицы аналогично заданию группы, а задание матрицы монодромии аналогично заданию представления. Напомним, что коэффициенты Фурье неприводимой части $\mathcal{A}^n_k$ - зависят только от R матрицы. "Представления" группы параметризуются произвольной функцией $a(\lambda)/d(\lambda)$ [14]. Нам удалось явно вычислить зависимость коррелятора от этой произвольной функции. Отметим, что одевающие уравнения содержат информацию о структуре физического вакуума. В конце отметим, что анализ ряда (19) приводится к следующей гипотезе:

$$0 \leqslant \frac{\langle \Omega | : j(x_1) j(x_2) : | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \leqslant \left[\int_{-q}^{q} \rho(\lambda)\, d\lambda \right]^2 .$$

Автор признателен Л.Д.Фаддееву за обсуждения.

Литература

I. Изергин А.Г., Корепин В.Е. Корреляционные функции в квантовом методе обратной задачи. - Наст.сб., с. 92-112.

2. Faddeev L.D. Quantum completely integrable models of field theory. - Soviet Scientific Reviews, Math.Phys.C.,1981, v.1, p.107-160.

3. Фаддеев Л.Д., Склянин Е.К. Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля. - Докл. АН СССР, 1978, т.243, с.1430-1433.

4. Склянин Е.К. Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера. - Докл.АН СССР, 1978, т.244, с.1337-1341.

5. L i e b E.H. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. - Phys.Rev. 1963, v.130, p.1605-1624.
6. Y a n g C.N., Y a n g C.P. Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction. - Journ.Math.Phys., 1969, v.10, p.1115-1122.
7. K o r e p i n V.E. Calculation of Norms of Bethe Wave Functions. - Commun.Math.Phys., 1982, v.86, p.391-418.
8. L e n a r d A. One-Dimensional Impenetrable Bosons in Thermal Equilibrium. - Journ.Math.Phys., 1966, v.7, p.1268-1272.
9. J i m b o M., M i w a T., M o r i Y., S a t o M. Density Matrix of an Impenetrable Gas and the Fifth Painlevé Transcendent. - Physica D, 1980, v.1, p.80-158.
10. G r e a m e r O.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. Some Exact Results for the Two Point Function of an Integrable Quantum Field Theory. - Phys.Rev.D, 1980, v.21, p.1523-1535.
11. С м и р н о в Ф.А. Уравнения Гельфанда - Левитана для квантового нелинейного уравнения Шредингера с притяжением. - Докл. АН СССР, 1982, т.262, с.78-83.
12. П о п о в В.Н. Длинноволновая асимптотика многочастичных функций Грина одномерного Бозе газа. - Письма в ЖЭТФ, 1980, т.31, с.560-563.
13. K a r o w s k i M. The Bootstrap Program for $1+1$ Dimensional Field Theoretical Models With Soliton Behaviour. - In the book: Theoretical Methods in Particle Physics. ed.W.Ruhl, New York, Plenum Publishing Corporation, 1980.
14. К о р е п и н В.Е. Анализ билинейного соотношения шестивершинной модели. - Докл.АН СССР, 1982, т.265, с.1361-1364.
15. И з е р г и н А.Г., К о р е п и н В.Е. Задача об описании всех L-операторов для R-матриц моделей XXX и XXZ. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.4. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.131, с.80-87.

П.П.Кулиш, Н.Ю.Решетихин

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФЕРМИОННЫЕ КИРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ, СВЯЗАННЫЕ С КЛАССИЧЕСКИМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Активное развитие в последние годы точно решаемых моделей релятивистской квантовой теории поля и классической статистической физики плоских решеток стало возможным благодаря открытию квантового метода обратной задачи [I] .

Точное решение киральной модели Гросса-Неве в двухмерном пространстве-времени позволило вне рамок теории возмущений получить динамическое возникновение массы в асимптотически свободной теории, в гамильтоновом формализме вычислить спектр масс и матрицу рассеяния возбуждений [2-4] . Собственные функции неперенормированного гамильтониана в упомянутых работах строятся с помощью координатного анзатца Бете. Возможность такого построения связана с тем, что двухчастичная матрица рассеяния фермионов над голым вакуумом является факторизованной, т.е. удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера. Это обстоятельство позволило сформулировать большой класс интегрируемых релятивистских безмассовых фермионных моделей, структура четырехфермионного взаимодействия в которых определяется заданной факторизованной S-матрицей - регулярным решением уравнения Янга-Бакстера [4,5] . Спектр гамильтониана фермионной модели в конечном объеме определяется по спектру вспомогательного магнетика, построенного по факторизованной S-матрице. В настоящее время известно много решений уравнения Янга-Бакстера, для которых получен спектр соответствующих магнетиков. В частности, вычислен спектр G-инвариантных магнетиков для классических групп Ли $SU(k+1)$, $SO(2k)$, $SO(2k+1)$, $Sp(2k)$ [4,6,7] . Таким образом, с каждой из классических групп Ли можно связать интегрируемую релятивистскую модель со специальным четырехфермионным взаимодействием. Точное решение фермионных $SU(k+1)$-инвариантных киральных моделей найдено в [3,4] , а с симметрией $SO(2k)$ в [8] . В настоящей работе мы рассмотрим $SO(2k+1)$-симметричные модели. Точное решение $O(3)$-модели, а также квазиклассическое поведение для произвольных k , были получены в [9] . Отметим, что коль скоро G-инвариантное решение уравнения Янга-Бакстера зависит не только от группы, но и от ее представления [10] , с каждой группой можно связать не одну четырехформионную модель, а целую серию, параметризуемую старшими весами представлений. Интересный вопрос о зависимости свойств фермионных моделей от выбранного представления исследован еще недостаточно (некоторые результаты известны лишь для группы $SU(2)$ [II]). Мы также ограничиваемся лишь простейшим случаем, когда фермионы относительно внутренней степени свободы преобразуются по векторному представлению $SO(2k+1)$.

I. Этот пункт содержит основные формулы диагонализации гамильтониана фермионной киральной модели посредством координатного анзатца Бете. Лагранжиан и гамильтониан модели имеют вид

$$\mathcal{L}=\sum_{a=1}^{2k+1} i\bar\psi_a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a-\sum_{a,b,c,d} j^\mu_{ac}\;{}_{ab}V_{cd}\,j_{\mu;bd},\quad j^\mu_{ab}=\bar\psi_a\gamma^\mu\psi_b, \qquad (I.1)$$

$$\mathcal{H}=\int_{-L/2}^{L/2}dx\Big(\sum_a -i\psi^+_a\gamma^5\partial_x\psi_a+4\sum_{a,b,c,d}\psi^+_{1a}\psi^+_{2b}\;{}_{ab}V_{cd}\,\psi_{2d}\psi_{1c}\Big), \qquad (I.2)$$

где ферми-поля удовлетворяют антикоммутационным соотношениям $(\alpha,\beta=1,2;\ a,b=1,2,\ldots,2k+1)$

$$\{\psi_{\alpha a}(x),\ \psi^+_{\beta b}(y)\}=\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{ab}\,\delta(x-y). \qquad (I.3)$$

Требование $O(2k+1)$ инвариантности теории определяет структуру потенциала V как матрицы в тензорном произведении $\mathbb{C}^{2k+1}\otimes\mathbb{C}^{2k+1}$

$$V=g_1 I+g_2 P+g_3 K, \qquad (I.4)$$

где действующие в $\mathbb{C}^{2k+1}\otimes\mathbb{C}^{2k+1}$ операторы имеют вид

$${}_{ab}I_{cd}=\delta_{ac}\delta_{bd},\quad {}_{ab}P_{cd}=\delta_{ad}\delta_{bc},\quad {}_{ab}K_{cd}=\delta_{ab}\delta_{cd}. \qquad (I.5)$$

Условие интегрируемости модели (I.2) оставляет независимыми только два заряда. Поскольку исследуемая модель является асимптотически свободной и при снятии ультрафиолетового обрезания голые заряды стремятся к нулю, то g_1, g_2, g_3 в этой области можно выразить через два параметра следующим образом:

$$g_1=\frac{\alpha}{2}+\frac{g}{4},\quad g_2=-\frac{g}{4},\quad g_3=\frac{g}{4}. \qquad (I.6)$$

Из $SO(2k+1)$ инвариантности следует коммутативность гамильтониана с генераторами группы $SO(2k+1)$

$$[\mathcal{H},Q_{ab}]=0,\quad Q_{ab}=\int dx\,\psi^+(x)\,(e_{ab}-e_{ba})\,\psi(x). \qquad (I.7)$$

Здесь e_{ab} – базисные матрицы в $\mathbb{C}^{2k+1}$. Поэтому включение взаимодействия с магнитными полями вдоль элементов подалгебры Картана не изменяет собственных функций $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}(H)=\mathcal{H}+\sum_{p=1}^{k-1}(Q_{2p-1,2p}-Q_{2p+1,2p+2})H_p+2Q_{2k-1,2k}H_k. \quad (I.8)$$

Собственные состояния гамильтониана (I.2),(I.8) над голым вакуумом $|0\rangle : \psi_{\alpha a}(x)|0\rangle=0$ строятся методом координатного анзатца Бете – линейных комбинаций произведений одночастичных собственных функций (см., например, [2-4]). Коэффициенты этих линейных комбинаций строятся с использованием двухчастичных матриц рассеяния, которые в силу безмассовости голых фермионов зависят только от спиральностей $\sigma=\pm 1$ и являются преобразованием Кэли от потенциала V [5]

$$S(2\sigma)=(\sigma+iV)(\sigma-iV)^{-1}, \quad S(0)=P. \quad (I.9)$$

Для согласованности условий периодичности волновой функции достаточно, чтобы двухчастичная S-матрица (I.9) удовлетворяла соотношению Янга-Бакстера. Такое решение с $O(n)$-симметрией хорошо известно

$$S^{(0)}(\lambda)=(i\lambda+1)^{-1}(i\lambda+\gamma)^{-1}\{i\lambda(i\lambda+\gamma)I+(i\lambda+\gamma)P-i\lambda K\}, \quad (I.10)$$

где $\gamma=(n-2)/2$. Вводя дополнительно фазу $\alpha : S(2\sigma)=\exp(i\sigma\alpha)\cdot S^{(0)}(-2\sigma/g)$, из (7) получаем при малых α и g соотношения (6). В результате, N-частичные собственные состояния гамильтониана (I.8) параметризуются N квазиимпульсами k_j, из которых N_+ отвечают частицам с положительной спиральностью $(\sigma=1)$, а N_+ – с отрицательной $(\sigma=-1)$, и k наборами чисел $\{\lambda_j^{(\ell)}\}_{j=1}^{m_\ell}$ $\ell=1,2,\ldots,k$, которые связаны со вспомогательным неоднородным $SO(2k+1)$-инвариантным магнетиком [8] . Собственные значения энергии и импульса на этих состояниях равны

$$\mathcal{H}\,|\{k_j,\sigma_j\}_1^N;\ \{\lambda_j^{(\ell)}\}_1^{m_\ell}\rangle=\sum_{j=1}^{N}\sigma_j k_j\,|\{k_j,\sigma_j\}_1^N;\ldots\rangle, \quad (I.11)$$

$$\mathcal{P}\,|\{k_j,\sigma_j\}_1^N;\ \ldots\ \rangle=\sum_{j=1}^{N}k_j\ |\{k_j,\sigma_j\}_1^N\ldots\rangle. \quad (I.12)$$

Из условий периодичности N-частичной волновой функции получаем систему уравнений на числа $\{k_j\}_1^N$, $\{\lambda_j^{(\ell)}\}_1^{m_\ell}$:

$$k_j L=2\pi I_j+\sum_{p=1}^{N}(\sigma_j-\sigma_p)\frac{\alpha}{2}-\sum_{p=1}^{m_1}2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sigma_j}{g}-\lambda_p^{(1)}\right), \quad (I.13)$$

$$2\pi J_p^{(1)}=\sum_{j=1}^{N}\phi\left(2\lambda_p^{(1)}+2v_j\right)-\sum_{j\neq p}^{m_1}\phi\left(\lambda_p^{(1)}-\lambda_j^{(1)}\right)+\sum_{j=1}^{m_2}\phi\left(2\lambda_p^{(1)}-2\lambda_j^{(2)}\right), \tag{I.14}$$

$$2\pi J_p^{(q)}=\sum_{j=1}^{m_{q-1}}\phi\left(2\lambda_p^{(q)}-2\lambda_j^{(q-1)}\right)-\sum_{j\neq p}^{m_q}\left(\lambda_p^{(q)}-\lambda_j^{(q)}\right)+\sum_{j=1}^{m_{q+1}}\phi\left(2\lambda_p^{(q)}-2\lambda_j^{(q+1)}\right),$$

$$q=2,3,\ldots k-1 .$$

$$2\pi J_p^{(k)}=\sum_{j=1}^{m_{k-1}}\phi\left(2\lambda_p^{(k)}-2\lambda_j^{(k-1)}\right)-\sum_{j\neq p}^{m_k}\phi\left(2\lambda_p^{(k)}-2\lambda_j^{(k)}\right),$$

где $\phi(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x$, $v_j=\sigma_j/g$, I_j, $J_j^{(\ell)}$ – целые или полуцелые числа в зависимости от m_ℓ. Используя (I.I3), энергию и импульс выражаем через квазиимпульсы вспомогательного магнетика

$$E=\frac{2\pi}{L}\left(\sum_{j=1}^{N_+}I_j^{(+)}-\sum_{j=1}^{N_-}I_j^{(-)}\right)+2\alpha\frac{N_+N_-}{L}-$$

$$-\frac{2}{L}\sum_{p=1}^{m_1}\left\{N_+\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{g}-\lambda_p^{(1)}\right)+N_-\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{g}+\lambda_p^{(1)}\right)\right\}, \tag{I.I5}$$

$$P=\frac{2\pi}{L}\left(\sum_{j=1}^{N_+}I_j^{(+)}+\sum_{j=1}^{N_-}I_j^{(-)}\right)-$$

$$-\frac{2}{L}\sum_{p=1}^{m_1}\left\{N_+\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{g}-\lambda_p^{(1)}\right)-N_-\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{g}+\lambda_p^{(1)}\right)\right\}. \tag{I.I6}$$

Операторы (I.7), отвечающие картановским элементам $SO(2k+1)$, также диагональны на бетевских векторах:

$$Q_{2p-1,2p}\left|\{k_j\}_1^N,\ \{\lambda_j^{(\ell)}\}_1^{m_\ell}\right\rangle=m_p'\left|\{k_j\}_1^N,\ldots\right\rangle,\quad p=1,\ldots,k, \tag{I.I7}$$

$$m_p'=m_{p-1}-m_p,\ m_0=N,\ r_p=m_p'-m_{p+1}'=m_{p-1}+m_{p+1}-2m_p,\ p=1,\ldots,k-1.$$

2. Рассмотрим термодинамический предел в модели (I.8), что соответствует $L\to\infty$. При конечной длине интервала L состояния системы описываются квантовыми числами $\{I_j^{(\pm)}\}_1^{N\pm}$, $\{J_j^{(\ell)}\}_1^{m_\ell}$ или, что эквивалентно, наборами $\{k_j^{(\pm)}\}_1^{N\pm}$, $\{\lambda_j^{(\ell)}\}_1^{m_\ell}$. Эти числа выражаются друг через друга с помощью уравнений (I.I3), (I.I4). При $N_\pm\to\infty$ и фиксированных $\xi_\pm=N_\pm/(N_++N_-)$ числа $\lambda_j^{(\ell)}$ могут образовывать струны:

$$\lambda_{n,r,j}^{(\ell)}=\lambda_{n,j}^{(\ell)}+i\left(1-\frac{1}{2}\delta_{\ell k}\right)\left(\frac{n+1}{2}-r\right),\quad r=1,2,\ldots,n. \tag{2.I}$$

В пределе $m_\rho, N_\pm \to \infty$ распределение чисел $\lambda_{n,j}^{(\rho)}$ по вещественной оси характеризуется плотностями $(\rho=1,2,\dots k;\ n=1,2\dots)$

$$\rho_n^\rho(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\frac{J_{n,j+1}^{(\rho)}-J_{n,j}^{(\rho)}}{N(\lambda_{n,j+1}^{(\rho)}-\lambda_{n,j}^{(\rho)})},\quad \lambda_{n,j}^{(\rho)}\to\lambda. \tag{2.2}$$

Аналогично вводятся плотности распределения дырок [I2]

$$\tilde\rho_n^\rho(\lambda)=\lim_{N\to\infty}\frac{\tilde J_{n,j+1}^{(\rho)}-\tilde J_{n,j}^{(\rho)}}{N(\mu_{n,j+1}^{(\rho)}-\mu_{n,j}^{(\rho)})},\quad \mu_{n,j}^{(\rho)}\to\lambda, \tag{2.3}$$

где $\tilde J_{n,j}^{(\rho)}$ набор целых чисел, дополнительных к $J_{n,j}^{(\rho)}$ в множестве всех целых чисел

$$\{J\}\cup\{\tilde J\}=\mathbb{Z},\quad \{J\}\cap\{\tilde J\}=\emptyset . \tag{2.4}$$

Для плотностей $\rho_n^\rho(\lambda)$ и $\tilde\rho_n^\rho(\lambda)$ из (I.I4) получаем

$$\begin{aligned}
\delta_{\rho 1}\varphi_n &= \tilde\rho_n^\rho+\sum_{m\geq 1}A_{nm}*(\rho_m^\rho-s*(\rho_m^{\rho+1}+\rho_m^{\rho-1})),\quad \rho=1,\dots,k-2\\
0 &= \tilde\rho_n^{k-1}+\sum_{m\geq 1}A_{nm}*(\rho_m^{k-1}-s*\rho_m^{k-2})-\tilde s*\tilde A_{2n,m}*\rho_m^k,\\
0 &= \tilde\rho_n^k+\sum_{m\geq 1}\tilde A_{nm}*\rho_m^k-\sum_{m\geq 1}\tilde s*\tilde A_{n,2m}*\rho_m^{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$A_{nm}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\omega}\frac{1+e^{-|\omega|}}{1-e^{-|\omega|}}\left(e^{-|n-m|\frac{|\omega|}{2}}-e^{-|n+m|\frac{|\omega|}{2}}\right)d\omega, \tag{2.6}$$

$$s(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\omega}\frac{e^{-|\omega|/2}}{1+e^{-|\omega|}}d\omega=\frac{2}{ch(4\pi\lambda)}, \tag{2.7}$$

$$\tilde s(\lambda)=s(2\lambda),\quad \tilde A_{nm}(\lambda)=A_{n,m}(2\lambda), \tag{2.8}$$

$$\varphi_n(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda\omega}e^{-n|\omega|/2}(\xi_+e^{i\omega/g}+\xi_-e^{-i\omega/g}). \tag{2.9}$$

Значок $*$ используется для свертки

$$(f*g)(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda-\nu)\,g(\nu)\,d\nu . \tag{2.10}$$

Таким образом, при $N\to\infty$ состояния параметризуются плотностями частиц ρ_n^ℓ или дырок $\tilde\rho_n^\ell$. Эти наборы функций эквивалентны и связаны между собой соотношениями (2.5). Для импульсов фермионов $\{k^{\pm}_{j}\}$ при $L \to \infty$ имеем

$$k^{\pm}(p)=p\pm\alpha\rho_{\mp}-2\pi(\rho_{+}+\rho_{-})\sum_{n\geq 1}(a_n * \rho_n^1)\left(\pm\frac{2}{g}\right),$$

где $p=2\pi I_j/L$ – импульс безмассовых скалярных голдстоуновских частиц, связанных с $U(1)\otimes U(1)$ симметрией модели, $\rho_{\pm}=N_{\pm}/L$ – плотности фермионов,

а. $T>0$. Чтобы получить термодинамику модели (I.8) при конечной температуре, следует минимизировать функционал свободной энергии (см., например, [I3]). Из-за наличия ультрафиолетовых расходимостей в моделях с четырехфермионным взаимодействием это оказывается возможным только если ввести ультрафиолетовую регуляризацию. На языке уравнений Бете это означает, что в $k^{\pm}(p)$ следует учитывать только конфигурации с $|p|<\Lambda$.

Функционал свободной энергии системы имеет вид:

$$F=F_0+F_1,$$

$$F_1=E-TS-\sum_{\ell=1}^{k}\theta_\ell H_\ell. \tag{2.II}$$

Здесь F_0 – вклад в F от безмассовых скалярных частиц. Минимизация F_0 приводит к условию $\rho_{\pm}=\Lambda/2$. Вклад в свободную энергию от цветных частиц F_1, состоит из энергии этих частиц E, энтропии S и добавки, связанной с включением магнитных полей H_ℓ.

$$E=\sum_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(\lambda)\rho_n^1(\lambda)\,d\lambda, \tag{2.I2}$$

$$S=\sum_{n\geq 1}\sum_{\ell=1}^{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big((\rho_n^\ell(\lambda)+\tilde\rho_n^\ell(\lambda))\ln(\rho_n^\ell(\lambda)+\tilde\rho_n^\ell(\lambda))-$$
$$-\rho_n^\ell(\lambda)\ln\rho_n^\ell(\lambda)-\tilde\rho_n^\ell(\lambda)\ln\tilde\rho_n^\ell(\lambda)\Big)\,d\lambda, \tag{2.I3}$$

$$\theta_\ell=\sum_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n^{\ell-1}(\lambda)+\rho_n^{\ell+1}(\lambda)-2\rho_n^\ell(\lambda))\,d\lambda,\quad \ell=1,\dots,k-2,$$
$$\theta_{k-1}=\sum_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_n^{k-2}(\lambda)+2\rho_n^{k}(\lambda)-2\rho_n^{k-1}(\lambda))\,d\lambda,\quad \theta_k=\int_{-\infty}^{+\infty}(2\rho_n^{k-1}(\lambda)-2\rho_n^{k}(\lambda))\,d\lambda, \tag{2.I4}$$

где
$$\rho_n^0(\lambda)=\delta_{n1}\delta(\lambda),$$

$$h_n(\lambda)=\Lambda\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda+2/g}{n}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda-2/g}{n}\right)\right),$$

Минимизируя функционал (2.II), получаем уравнения термодинамики модели при конечной ультрафиолетовой регуляризации Λ :

$$nH_p - \Lambda\delta_{p1}\varphi * A_{n1} - T\ln(1+e^{\beta\varepsilon_n^{(p)}}) +$$

$$+ T A_{nm} * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(p)}}) - TA_{nm} * S * \ln((1+$$

$$+ e^{-\beta\varepsilon_m^{(p+1)}})(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(p-1)}})) ,$$

$$nH_{k-1} - T\ln(1+e^{\beta\varepsilon_n^{(k-1)}}) + TA_{nm} * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(k-1)}}) - \tag{2.15}$$

$$- TA_{nm} * s * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(k-2)}}) - T\tilde{s} * \tilde{A}_{2n,m}\ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(k)}}),$$

$$nH_k - T\ln(1+e^{\beta\varepsilon_n^{(k)}}) + T\tilde{A}_{n,m} * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(k)}}) -$$

$$- T\tilde{s} * \tilde{A}_{n,2m} * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_m^{(k-1)}}),$$

$$F_1 = -T\sum_{n\geqslant 1}\varphi * A_{n1} * \ln(1+e^{-\beta\varepsilon_n^{(1)}}) , \tag{2.16}$$

где $\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda (s(\nu+\frac{1}{g}) - s(\nu-\frac{1}{g})\,d\nu$. Величины $\varepsilon_n^{(p)}$ имеют смысл энергий возбуждений, они связывают ρ_n^p и $\tilde{\rho}_n^p$:

$$\tilde{\rho}_n^p(\lambda) = \rho_n^p(\lambda)\exp(\varepsilon_n^{(p)}(\lambda)/T) . \tag{2.17}$$

Зная $\varepsilon_n^{(p)}(\lambda)$ и связь (2.I7), плотности $\rho_n^p(\lambda)$ можно найти из уравнений (2.5).

б. $T = 0$. В пределе $T \to 0$ из (2.I5),(2.I6) получаем уравнения для энергии основного состояния и для энергий возбуждений над этим состоянием в присутствии магнитных полей:

$$E_0(H) = \sum_{n\geqslant 1}\varphi * A_{n1} * \varepsilon_n^{(1)-} \tag{2.18}$$

$$n\tilde{H}_p - \Lambda\delta_{p1}\varphi * A_{n1} - \varepsilon_n^{(p)^+} - A_{nm} * (\varepsilon_m^{(p)^-} - s * (\varepsilon_m^{(p-1)^-} + \varepsilon_m^{(p+1)^-})) = 0 ,$$

$$n\tilde{H}_{k-1} - \varepsilon_n^{(k-1)^+} - A_{nm} * (\varepsilon_m^{(k-1)^-} - s * \varepsilon_m^{(k-2)^-}) + \tilde{A}_{2m,m} * \tilde{s} * \varepsilon_m^{(k)^-} = 0 ,$$

$$n\tilde{H}_k - \varepsilon_n^{(k)^+} - \tilde{A}_{nm} * \varepsilon_m^{(k)^-} + \tilde{A}_{n,2m} * \tilde{s} * \varepsilon_m^{(k-1)^-} = 0 . \qquad (2.19)$$

Здесь $\varepsilon_n^{(p)^+} (\varepsilon_n^{(p)^-})$ положительная (отрицательная) часть функции $\varepsilon_n^{(p)} = \varepsilon_n^{(p)^+} + \varepsilon_n^{(p)^-}$ и

$$\tilde{H}_\ell = H_{\ell-1} + H_{\ell+1} - 2H_\ell , \quad \ell = 1, 2, \ldots , k-2 ,$$

$$\tilde{H}_{k-1} = H_{k-2} + 2H_k - 2H_{k-1} , \; \tilde{H}_k = 2H_{k-1} - 2H_k .$$

Величина $\varepsilon_n^{(p)^+}$ – энергия возбуждения частицы, $-\varepsilon_n^{(p)^-}$ является энергией возбуждения дырки.

В дальнейшем нам будет удобно использовать новые переменные:

$$\epsilon_n^{(p)} = \begin{cases} \varepsilon_n^{(p)}, & p = 1, \ldots , k-1 , \\ \varepsilon_{2n}^{(k)} , & p = k , \end{cases} \qquad \tau_n = \varepsilon_{2n-1}^{(k)} . \qquad (2.20)$$

Для ϵ и τ система (2.19) записывается в следующем простом виде

$$n\tilde{H}_p - \Lambda\varphi * A_{n1}\delta_{p1} = \epsilon_n^{(p)^+} + \sum_{q=1}^{k} \sum_{m\geq 1} A_{nm} * C_{pq} * \epsilon_m^{(q)^-} - \qquad (2.21)$$

$$- \sum_{m\geq 1} C_{pk} * A_{nm} * \tilde{s} * (\tau_m^- + \tau_{m+1}^-) ,$$

$$\tau_n = \tilde{s} * (\epsilon_{n-1}^{(k)^+} + \epsilon_n^{(k)^+}) . \qquad (2.22)$$

Ядро C_{pq} имеет следующий вид:

$$C_{ij}(\lambda) = \delta(\lambda)\delta_{ij} - s(\lambda)(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1}) ,$$

$$C_{k-1,k} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\lambda} e^{-\frac{|\omega|}{4}} \frac{1+e^{-|\omega|/2}}{1+e^{-|\omega|}} d\omega ,$$

$$C_{kk} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+e^{-|\omega|/2})^2}{1+e^{-|\omega|}} e^{-i\lambda\omega} d\omega , \qquad (2.23)$$

$C_{kk-1} = C_{k-1,k}$, остальные элементы равны нулю.

Из (2.22) следует, что $\tau_n^- = 0$, поэтому, обращая матрицы C_{pq} и A_{nm} в (2.2I) получаем систему уравнений для $\epsilon_n^{\pm}$:

$$-\Lambda \delta_{n1} R_{p1} * \varphi = \sum_{q=1}^{k} \sum_{m\geq 1} C_{nm} * R_{pq} * \epsilon_m^{(q)^+} + \epsilon_n^{(p)^-}, \tag{2.24}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon_n^{(p)}}{n} = \tilde{H}_p,\ p = 1,\ldots,k-1,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon_n^{(k)}}{2n} = \tilde{H}_k . \tag{2.25}$$

Здесь R_{pq} матрица обратная к C_{pq} :

$$\sum_{q=1}^{k} (R_{pq} * C_{qs})(\lambda) = \delta_{ps}\, \delta(\lambda), \tag{2.26}$$

$$R_{pq}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\lambda} R_{pq}(\omega)\, d\omega ,$$

$$R_{em}(\omega) = (1+e^{-|\omega|}) e^{-(m-e)|\omega|/2} \frac{1+e^{-(k-m-1/2)|\omega|}}{1+e^{-(k-1/2)|\omega|}} \cdot \frac{1-e^{-\ell|\omega|}}{1-e^{-|\omega|}}, k-1\geq m\geq \ell \geq 1$$

$$R_{ek}(\omega) = (1+e^{-|\omega|}) e^{-|\omega|/4} e^{-(k-\ell-1)|\omega|/2} \frac{1}{1+e^{-(k-1/2)|\omega|}} \cdot \frac{1-e^{-\ell|\omega|}}{1-e^{-|\omega|}} ,$$

$$R_{kk}(\omega) = (1+e^{-|\omega|}) \cdot \frac{1}{1+e^{-|\omega|/2}} \cdot \frac{1}{1+e^{-(k-1/2)|\omega|}} \cdot \frac{1-e^{-k|\omega|}}{1-e^{-|\omega|}} .$$

Матрица C_{nm} обратна к A_{nm}

$$\sum_{m\geq 1} (C_{nm} * A_{me})(\lambda) = \delta_{ne}\, \delta(\lambda), \tag{2.28}$$

$$C_{nm}(\lambda) = \delta_{nm}\, \delta(\lambda) - (\delta_{n\,m+1} + \delta_{n\,m-1})\, s(\lambda) . \tag{2.29}$$

Из (2.24) следует, что

$$\epsilon_n^{(p)} = \epsilon_n^{(p)^+} = (n-1)\tilde{H}_p (1+\delta_{pk}) + a_{n-1} * \epsilon_1^{(p)^+},\quad n > 2$$

$$\tau_n = (2n-3)\tilde{H}_k + a_{n-\frac{3}{2}} * \epsilon_1^{(k)^+} , \tag{2.30}$$

где $a_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\lambda\omega} e^{-\frac{n|\omega|}{2}} d\omega = \frac{2n}{\pi} (4\lambda^2 + n^2)^{-1}$.

Для $\epsilon_1^{(p)}$ получаем систему интегральных уравнений

$$H_p - \epsilon_p^{(0)}(\lambda) = \epsilon_1^{(p)}(\lambda) + \sum_{q=1}^{k} \int_{|\mu|<B_q} (A_{11}^{-1} * R_{pq})(\lambda-\mu)\, \epsilon_1^{(q)}(\mu)\, d\mu . \tag{2.3I}$$

Здесь $\epsilon_p^{(0)}(\lambda) = \Lambda(R_{p1} * \varphi)(\lambda)$,

$$\frac{d}{d\lambda}\epsilon_p^{(0)}(\lambda) = \Lambda\left(\epsilon_p\left(\lambda+\frac{1}{g}\right) - \epsilon_p\left(\lambda-\frac{1}{g}\right)\right),$$

где $\epsilon_p(\lambda)$ – энергии магнонов в $O(2k+1)$ -инвариантном магнетике

$$\epsilon_\ell(\lambda) = \frac{4\pi}{k-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi\ell}{2k-1}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\lambda}{k-1/2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\lambda}{k-1/2}\right) - \cos\left(\frac{\pi\ell}{k-1/2}\right)}, \quad \ell=1,\dots,k-1,$$

$$\epsilon_k(\lambda) = \frac{\pi}{k-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\lambda}{k-1/2}\right)}.$$

Границы интегрирования в (2.31) определяются условиями

$$\epsilon_1^{(p)}(B_p) = 0. \tag{2.32}$$

Для функций $\epsilon_1^{(p)}(\lambda)$ получаем, что $\epsilon_1^{(p)}(\lambda) \gtrless 0$ при $|\lambda| \lessgtr B_p$.

Чтобы получить окончательный ответ, необходимо снять ультрафиолетовую регуляризацию, т.е. $\Lambda \to \infty$. При этом для $\epsilon_p^{(0)}$ имеем:

$$\epsilon_\ell^{(0)}(\lambda) = m\sin\left(\frac{\pi\ell}{2k-1}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\lambda}{2k-1}\right), \quad \ell=1,\dots,k-1,$$

$$\epsilon_k^{(0)}(\lambda) = \frac{m}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\lambda}{2k-1}\right), \tag{2.33}$$

$$m = \Lambda\cdot\frac{32\pi}{2k-1}\exp\left(-\frac{2\pi}{(2k-1)g}\right),$$

Фиксируя массу элементарных возбуждений m при $\Lambda\to\infty$, из (2.33) получаем асимптотически свободное поведение константы связи $g\to 0$.

Подставляя (2.30) в (2.18) для энергии основного состояния получаем

$$\Delta E_0(H) = E_0(H) - E_0(0) = -\sum_{p=1}^{k}\int_{-B_p}^{B_p} m_p \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi\lambda}{2k-1}\right)\epsilon_1^{(p)}(\lambda)\,d\lambda.$$

При $H_\ell < H_\ell^{(c)} = m\sin\left(\frac{\pi\ell}{2k-1/2}\right)$, $H_k < H_k^{(c)} = \frac{m}{2}$ магнитные поля не перестраивают основное состояние, структура которого та же, что и при $H_p = 0$ $(B_p=0)$. В этом случае заполнение голого вакуума состоит из магнонов при $\ell=1,2,\dots,k-1$ (1 – струны ранга ℓ) и струн длины 2 при $\ell=k$. Элементарные возбуждения имеют релятивистскую дисперсию с отличной от нуля массой.

3. Проанализируем кратко S -матрицы возбуждений в рассматриваемой модели. Из полученных в предыдущем пункте выражений для

спектра масс (2.33) следует, что $\ell, m, \ell+m \leq k-1$

$$\epsilon_{\ell+m}(\lambda) = \epsilon_\ell\left(\lambda - i\frac{m}{2}\right) + \epsilon_m\left(\lambda + i\frac{\ell}{2}\right) . \tag{3.I}$$

Естественно ожидать, что (3.I) можно трактовать как соотношения бутстрапа. Иными словами, считать частицу ранга $\ell+m$ связанным состоянием частицы ранга ℓ и частицы ранга m. Чтобы это действительно было так, нужно убедиться, что имеются соответствующие полюса в S-матрицах. Покажем это для $\ell=m=1$.

Используя методы работы [I4], для двухчастичных фаз рассеяния в наиболее симметричном канале (НСК) получаем следующее выражение

$$\varphi_{\ell m}(\lambda) = \int_0^\lambda \left(R_{\ell m}(\nu) - \delta_{\ell m}\,\delta(\nu)\right) d\nu . \tag{3.2}$$

В случае $\ell=m=1$ имеем

$$S_1(\lambda) = e^{i\varphi_{11}(\lambda)} = \frac{i\lambda+1}{-i\lambda+1}\; \frac{\Gamma\left(\frac{i\lambda}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda+k-\frac{3}{2}}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{-i\lambda-k-\frac{3}{2}}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{-i\lambda-1}{2k-1}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\lambda}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{-i\lambda+k-\frac{3}{2}}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda-k-\frac{3}{2}}{2k-1}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda-1}{2k-1}\right)} . \tag{3.3}$$

Частицы ранга I преобразуются по векторному представлению $SO(2k+1)$, при этом НСК соответствует симметричным бесследовым матрицам в $\mathbb{C}^{2k+1} \otimes \mathbb{C}^{2k+1}$, проектор на это подпространство имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}^{(1)} = \frac{1}{2}(I+P) - \frac{1}{2k+1}K . \tag{3.4}$$

Матрицы P и K – те же что и в (I.5). Для остальных каналов – антисимметричного и синглетного, следуя [I5], получаем:

$$S_2(\lambda) = S_1(\lambda)\frac{i\lambda+1}{i\lambda-1}, \qquad \mathcal{P}^{(2)} = \frac{1-P}{2} , \tag{3.5}$$

$$S_3(\lambda) = S_1(\lambda)\frac{i\lambda+1}{i\lambda-1}\cdot\frac{i\lambda+k-\frac{1}{2}}{i\lambda-k+\frac{1}{2}}, \qquad \mathcal{P}^{(3)} = \frac{1}{2k+1}K . \tag{3.6}$$

Полная двучастичная матрица рассеяния для частиц ранга I

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{3} S_i(\lambda)\,\mathcal{P}^{(i)} \tag{3.7}$$

является кроссинг-симметричной, унитарной и факторизованной S-матрицей [I6]. Она имеет полюс при $\lambda = i$, отвечающий связанному состоянию – частице ранга 2.

Аналогично вычисляются полные S-матрицы для частиц произвольного ранга $l \neq k$. Как и в случае модели с $O(2k)$ симметрией [8] частицы ранга l преобразуются по приводимым представлениям.

Мы умышленно не обсуждаем S-матрицы для кинков (частицы ранга k). В рассматриваемой модели естественно ожидать у кинков дополнительных степеней свободы [9,II,I7]. Для модели с $O(3)$ симметрией эта проблема изучались в работах [9,II]. Игнорирование дополнительных степеней свободы ведет к нарушению кроссинг-симметрии. Удовлетворительное решение всех этих вопросов мы надеемся дать в последующих публикациях.

4. В заключение упомянем несколько интересных вопросов, связанных с точно решаемыми фермионными моделями и требующих дальнейшего исследования. Предыдущие пункты содержат решение $SO(2k+1)$ модели с лагранжианом (I.I). Аналогичное решение несложно получить и для модели с $Sp(2k)$ симметрией, поскольку известно решение $Sp(2k)$-инвариантного магнетика [6]. Для $Sp(2k)$ - инвариантной модели с векторным представлением по внутренним степеням свободы фермионов основное состояние заполняется I- и 2-струнами рангов $1,2,\ldots,k-1$ и I-струнами ранга k. Интересной задачей является исследование фермионных моделей, в которых пространство внутренних степеней свободы отвечает старшим представлениям группы симметрии. При этом, как показывает пример группы $SU(2)$ и спинорных представлений групп $SO(N)$, заполнение основного состояния существенно зависит от представления.

Исходным пунктом при решении релятивистских фермионных моделей в настоящее время является координатный анзатц Бете, а технические приемы квантового метода обратной задачи применяются на следующих этапах. Это связано с тем, что, по-видимому, непосредственно для релятивистских безмассовых фермионных моделей разумных квантовых L-операторов нет. Квантовые решения для таких моделей получаются в соответствии с принципом универсальности подходящими предельными переходами из спиновых решеточных моделей, решаемых квантовым методом обратной задачи, а соответствующий L-оператор таких предельных переходов не выдерживает. Структура уравнений Бете (I.I3),(I.I4) показывает, что в качестве таких спиновых моделей следует брать градуированные магнетики.

Поучительной будет проверка согласованности результатов точного решения с ответами, получаемыми методами ортодоксальной теории поля. Так, уравнения (2.3I), (2.23) позволяют вычислить зависимость энергии основного состояния от магнитных полей H_ℓ . В пределе $H_\ell/m_\ell \gg 1$ это должно согласовываться с теорией возмущений [I3] .

Полное решение модели квантовой теории поля означает вычисление корреляционных функций локальных полей. Полученные в последнее время результаты в этой области для нерелятивистских моделей (см. статьи А.Г.Изергина и В.Е.Корепина в этом сборнике) дают основания ожидать прогресса в этом направлении и для релятивистских моделей.

Литература

1. F a d d e e v L.D. Quantum completely integrable models in field theory. - Soviet Sci.Rev., Sec.C: Math.Phys.Rev.,1980, v.1, p.107-155.
F a d d e e v L.D. Integrable models in 1+1 dimensional quantum field theory. - Proc. of LesHouches summer school, 1982, 50 p.
2. B e l a v i n A.A. Exact solution of the two-dimensional model with asymptotoc freedom. - Phys.Lett., 1979, v.87B, p.117-121.
3. An d r e j N., L o w e n s t e i n J. Diagonalization of the chiral invariant Gross-Neven Hamiltonian. - Phys.Rev. Lett., 1979, v.43, N 23, p.1698-1700.
4. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса-Неве.-ЖЭТФ,I98I,т.80,2I4-228.
5. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Quantum spectral transform method. Recent developments. - Lect.Notes in Phys., 1982, v.151, p.61-119.
6. Р е ш е т и х и н Н.Ю. Точно решаемые квантовомеханические системы на цепочке, связанные с классическими алгебрами Ли. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I983, т.I23, с.II2-I25.
7. R e s h e t i k h i n N.Yu. A method of functional equations in the theory of exactly solvable quantum systems. - Lett. Math.Phys., 1983, v.7, p.205-213.
8. Р е ш е т и х и н Н.Ю. Точное решение $O(2N)$ модели Гросса--Невё. - Препринт ЛОМИ, Р-I-83, I983, 32 с.
9. Ann d r e j N., D e s t r i C. Dynamical symmetry breaking and fractionization in a new integrable model. - Preprint RU-83-025, 1983, 65 p.
10. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu., S k l y a n i n E.K. Yang-Baxter equation and representation theory.I.

Lett.Math.Phys., 1981, v.5, N 5, p.393-403.

11. Polyakov A.M., Wiegman P.B. Theory of nonabelian Goldstone bosons in two dimensions. - Preprint IThPh-83-06, 1983, 12 p.

12. Yang C.N., Yang C.P. Thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive δ-function interaction interaction. - Jour.Math.Phys., 1969, v.10, p.1115-1122.

13. Destri C., Lowenstein J. States of non-zero density in the chiral invariant Gross-Neveu model. - Nucl. Phys., 1982, v.B200(FS4), p.71-92.
Japaridze G., Nersesyan A., Wiegman P. Crossover from the strong-conpling to weak-conpling regime in the $SU(2)$-symmetric Thirring model. - Phys.Lett., 1983, v.94,A, p.254-258.

14. Корепин В.Е. Непосредственное вычисление S-матрицы в массивной модели Тирринга. - ТМФ, 1979, т.41, № 2, с.169-189.

15. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Спектр и рассеяние возбуждений в однородном изотропном магнетике Гейзенберга. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1981, т.109, с.134-178.

16. Zamolodchikov A.B., Zamolodchikov Al.B. Factorized S-matrix in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. - Ann.Phys., 1979, v.120, N 2, p.253-291.

17. Witten E. Some properties of the $(\bar{\Psi}\Psi)^2$ model in two dimensions. - Nucl.Phys., 1983, v.B142, p.285-300.

Ю.И.Манин

ГЕОМЕТРИЯ СУПЕРГРАВИТАЦИИ И СУПЕРКЛЕТКИ ШУБЕРТА

Введение

Всякая модель супергравитации в суперпространстве описывается с помощью задания супермногообразия M с дополнительными структурами на нем и формы объема, построенной по этим структурам, которая играет роль лагранжиана и определяет динамику.

В этой работе предлагается еще одна точка зрения на то, каковы должны быть исходные структуры на M. В литературе описан ряд подходов, приводящих к эквивалентным формализмам для $N=1$, но довольно различных по исходным позициям. Отметим следующие: формализм Весса – Зумино [7], исходящий из аффинной суперсвязности с ограничениями на кручение; формализм Огиевецкого – Сокачева [2] и Зигеля – Гэйтса [6], в котором основным полем является предпотенциал (см. ниже, § 4); подход Шварца [5], вкладывающий геометрию супергравитации в теорию G- и CR-структур; наконец, формализм Т.Редже и сотрудников ([4] и последующие работы).

Здесь мы аргументируем позицию, согласно которой источником инвариантных связей, лагранжианов и динамических уравнений теории с супергруппой симметрий G может служить геометрия компактных комплексных супермногообразий $G_{\mathbb{C}} / P$ (P – параболическая подгруппа), систем суперклеток Шуберта на них и условий интегрируемости вдоль этих систем.

Напомним, что если реализовать $G_{\mathbb{C}} / P$ как многообразие флагов, то каждая клетка Шуберта определяется как множество флагов, находящихся в данном относительном положении с фиксированным максимальным флагом. Физическая роль этих клеток ясно видна в геометрии Плюккера – Клейна – Пенроуза четырехмерной комплексной квадрики M, реализованной как грассманиан. Именно:

а) Вещественная часть большой (четырехмерной) клетки M имеет естественную структуру пространства Минковского.

б) Вещественные части трехмерных клеток Шуберта являются световыми конусами.

в) Двумерные клетки Шуберта не имеют вещественных точек: это α- и β-плоскости комплексифицированного пространства Минковского. Интегрируемость вдоль них связности Янга – Миллса есть условие ее (анти)автодуальности. Сохранение одной из двух систем плоскостей в искривленном случае определяет "комплексный гравитон" Пенроуза.

г) Вещественные части одномерных клеток Шуберта являются световыми лучами.

План статьи следующий. В § I напоминаются основные факты об аналитических суперпространствах. В § 2 устанавливается, что обобщением модели Пенроуза на случай N-расширенной суперсимметрии является специальное флаговое пространство размерности $4|4N$ и изучается структура его касательного пучка. В § 3 рассматривается искривление этого флагового многообразия, сохраняющее две системы $0|2N$ -мерных суперклеток Шуберта (поскольку их размерность чисто нечетна и через каждую точку проходят две таких суперклетки, мы говорим вместо этого о касательных пучках к ним $\mathcal{T}_{l,r}M$). В § 4 показано, как для $N=1$ отсюда с полной естественностью получается формализм Огиевецкого - Сокачева.

Я думаю, что эвристические возможности этого подхода далеко не исчерпаны, и он может привести к лучшему пониманию геометрии расширенных супергравитаций. Вместо эвристических структур можно, разумеется, пользоваться их CR -версиями.

Я глубоко признателен В.И.Огиевецкому, который учил меня супергравитации, Э.Сокачеву, А.Гальперину, А.С.Шварцу и А.А.Бейлинсону, который предположил, что лагранжиан Огиевецкого - Сокачева должен иметь простой вид (I2), проверке чего посвящен конец работы.

§ I. Аналитические суперпространства

I. Основные обозначения. В статье [I] читатель найдет введение в супералгебру и геометрию дифференцируемых супермногообразий. Мы будем работать здесь в категории комплексно-аналитических суперпространств [3]. Аналитическое суперпространство есть пара $(M,\mathcal{O}_M)$, где $\mathcal{O}_M=\mathcal{O}_{M,0}+\mathcal{O}_{M,1}$ - такой пучок суперкоммутативных колец, что $(M,\mathcal{O}_{M,0})$ есть обычное супераналитическое пространство, а $\mathcal{O}_{M,1}$ является когерентным $\mathcal{O}_{M,0}$-модулем. Аналитическое супермногообразие размерности $p|q$ есть суперпространство, локально изоморфное $(\mathbb{C}^p, \Lambda^\circ(\mathcal{O}^q_{\mathbb{C}}))$. Через M_{rd} обозначается суперпространство $(M, \mathcal{O}_M/(\mathcal{O}_{M,1}))$; аналогично, $\mathcal{F}_{rd}=\mathcal{F}/(\mathcal{O}_{M,1}\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ - когерентный пучок на M. Функтор обращения четности обозначается Π. Аналитический касательный пучок к супермногообразию M обозначается $\mathcal{T}M$; если задан морфизм $M\longrightarrow N$, через $\mathcal{T}M/N$ обозначается пучок векторных полей, касательных к слоям этого морфизма. Пучок дифференциальных форм $\Omega^\circ M$ - аналитический и с нечетным дифференциалом: $\Omega^i M = S^i(\Pi(\mathcal{T}M)^*)$. Для локально-свободного пучка $\mathcal{T}$ на M через $Ber\ \mathcal{F}$ обозначается пучок березинианов:

локально он порожден сечениями $\mathcal{D}(f)$, где f - базис сечений $\mathcal{F}$; $\mathcal{D}(f') = \mathrm{Ber}(f'/f)\mathcal{D}(f)$, где (f'/f) - матрица перехода. Мы обозначаем через $\mathrm{Ber}\, M = (\mathrm{Ber}\, \Omega^1 M)^*$ пучок голоморфных форм объема, так что если (x^a, θ^α) - локальная система координат на M, то мы обозначаем $\mathcal{D}^*(dx^a, d\theta^\alpha)$ локальную форму объема на M, которая в физических работах обычно пишется в виде $d^4x\, d^{4N}\theta$. В тех случаях, когда необходимы нечетные константы, мы можем считать, что M определено над $\mathrm{Spec}\,\Lambda$ где Λ - конечномерная грассманова алгебра над $\mathbb{C}$.

2. <u>Грассманианы и флаги</u>. Пусть M - аналитическое суперпространство, $\mathcal{T}$ - локально свободный пучок на нем конечного суперранга $p|q = c+d$ (то есть $\mathcal{T}$ локально изоморфен $\mathcal{O}^p \oplus (\Pi\mathcal{O}_M)^q$). Тогда существует относительный грасоманиан $G_M(d;\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} M$ - суперпространство над M, классифицирующее локально прямые подпучки $\mathcal{T}$ суперранга d. Пусть $s \subset \pi^*(\mathcal{T})$ - тавтологический пучок на нем, $\tilde{s} \subset \pi(\mathcal{T}^*)$ - ортогональный пучок. Иногда их удобно обозначать s^d и $\tilde{s}^c$ соответственно. Имеет место канонический изоморфизм $\mathcal{T}G_M / M = s^* \otimes \tilde{s}^*$, который строится так же, как в чисто четном случае, и которым мы будем существенно пользоваться в § 2. Аналогично, для последовательности суперрангов $d_1 < d_2 < \ldots$ устанавливается существование суперпространства флагов $F_M(d_1, d_2, \ldots; \mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} M$ с тавтологическим флагом $s^{d_1} \subset s^{d_2} \subset \ldots \subset \pi^*(\mathcal{T})$. В случае M =точка, $\mathcal{T}$ = супервекторное пространство мы будем обозначать грассманианы и флаги просто G и F. См.дальнейшие подробности в работе [3].

3. <u>Супервещественные структуры</u>. Пусть A - $\mathbb{Z}_2$-градуированная $\mathbb{C}$-алгебра, S - некоторый A-модуль, ε_i, $\eta = \pm 1, i=1,2,3$. (Супер)вещественной структурой ρ типа (ε_i) на A называется четное $\mathbb{R}$-линейное отображение $A \longrightarrow A$, $a \longmapsto a^\rho$ со свойствами:

$$(\alpha a)^\rho = \bar{\alpha} a,\ \alpha \in \mathbb{C};\quad a^{\rho\rho} = (\varepsilon_1)^{\tilde{a}} a;\quad (ab)^\rho = \varepsilon_3 (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{b}} b^\rho a^\rho .$$

Продолжением ρ на A-бимодуль S типа η называется четное отображение $S \to S$, $s \longmapsto s^\rho$ со свойствами

$$s^{\rho\rho} = \eta \varepsilon_1^{\tilde{s}} s;\quad (as)^\rho = \varepsilon_3 (\varepsilon_2)^{\tilde{a}\tilde{s}} s^\rho a^\rho;\quad (sa)^\rho = (\varepsilon_2)^{\tilde{s}\tilde{a}} \varepsilon_3 a^\rho s^\rho .$$

Здесь $a \in A$, $s \in S$; $\tilde{a}, \tilde{s}$ - степени a и s соответственно. Перенеся эти определения на структурный пучок колец, получаем понятие вещественной структуры на суперпространстве.

Ниже мы пользуемся только вещественными структурами типа $(1,1,1)$

поскольку ограничиваемся сигнатурой Минковского. Для суперэвклидовой геометрии необходимо рассмотрение других типов.

§ 2. Компактная комплексная модель суперпространства Минковского

1. Супертвисторы. Обозначим через T комплексное линейное суперпространство размерности $4|N$ и положим $M = F(2|0, 2|N; T)$. Введем на T и T^* координаты $(z_\alpha, z^{\dot\beta}, \zeta^j)$ и $(w^\alpha, w_{\dot\beta}, \omega_j)$ соответственно ($\alpha, \beta = 0,1$; $j = 1, \ldots, N$), в которых каноническое спаривание имеет вид $h = z_\alpha w^\alpha - z^{\dot\beta} w_{\dot\beta} + 2i\zeta^j \omega_j$. Определим вещественную структуру ρ типа $(1,1,1)$ на $T \times T^*$ формулами

$$(w^\beta, w_{\dot\alpha}, \omega_j)^\rho = (z^{\dot\beta}, z_\alpha, \zeta^j), \quad \rho^2 = id$$

(в этой структуре $h^\rho = -h$). Основная цель этого параграфа - доказательство следующего результата.

2. ТЕОРЕМА. Пространство вещественных точек M_0 большой клетки флагового пространства M имеет каноническую структуру N-расширенного суперпространства Минковского. ■

Доказательство состоит в реализации на $\mathbb{C} \otimes \mathcal{T}M_0$ естественного представления суперрлгебры Пуанкаре, а основные вычисления, описанные ниже, относятся к структуре $\mathcal{T}M$.

3. Структура касательного пучка. Введем прежде всего левое и правое суперпространства $M_\ell = G(2|0; T)$, $M_r = G(2|N; T) = G(2|0, T^*)$. Пусть $\pi_{\ell,r}$ - канонические проекции $M \to M_{\ell,r}$; положим $\mathcal{T}_\ell M = \mathcal{T}M/M_r$, $\mathcal{T}_r M = \mathcal{T}M/M_\ell$. Тавтологический флаг на M обозначим $s^{2|0} \subset s^{2|N}$, ортогональный к нему $\tilde{s}^{2|0} \subset \tilde{s}^{2|N}$. Положим далее $\mathcal{F}_\ell = s^{2|N}/s^{2|0}$, $\mathcal{F}_r = \tilde{s}^{2|N}/\tilde{s}^{2|0} = \mathcal{F}_\ell^*$. Очевидно, M над M_ℓ и M_r является относительным грассманианом. Применяя к нему предложение I, получаем канонические изоморфизмы

$$\mathcal{T}_\ell M = (s^{2|0})^* \otimes \mathcal{F}_\ell, \quad \mathcal{T}_r M = \mathcal{F}_\ell^* \otimes (\tilde{s}^{2|0})^*.$$

Производя свертку по $\mathcal{F}_\ell$, находим отсюда естественное билинейное отображение

$$a : \mathcal{T}_\ell M \otimes \mathcal{T}_r M \longrightarrow (s^{2|0})^* \otimes (\tilde{s}^{2|0})^*. \qquad (1)$$

С другой стороны, $\mathcal{T}_{\ell,r} M$ являются интегрируемыми распределениями (то есть локально прямыми подпучками супералгебр Ли в $\mathcal{T}M$), и суперкоммутатор между $\mathcal{T}_l M$ и $\mathcal{T}_r M$ определяет второе билинейное отображение – форму Фробениуса:

$$b:\ \mathcal{T}_l M \otimes \mathcal{T}_r M \longrightarrow \mathcal{T}M/(\mathcal{T}_l M + \mathcal{T}_r M) \overset{def}{=\!=} \mathcal{T}_0 M\,. \tag{2}$$

4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. а) Сумма $\mathcal{T}_l M + \mathcal{T}_r M$ в $\mathcal{T}M$ является прямой, и $\mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M$ – локально прямой подпучок ранга $0|4N$, причем $(\mathcal{T}_l M)^\rho = \mathcal{T}_r M$.

б) Существует единственный изоморфизм $\mathcal{T}_0 M = (S^{2|0})^* \otimes (\tilde{S}^{2|0})^*$, относительно которого формы a и b совпадают. При редукции нечетных координат он переходит в стандартный изоморфизм $\mathcal{T}M_{rd} = (S^{2|0}_{rd})^* \otimes (\tilde{S}^{2|0}_{rd})^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести вычисления на какой-нибудь большой клетке M. Мы выберем ту из них, которая является прообразом двух больших клеток M_l и M_r с координатами $(x_l^{\alpha\dot\beta}, \theta_l^{\alpha j})$ и $(x_r^{\dot\beta\alpha}, \theta^{\dot\beta}_{r\,j})$ соответственно. Эти последние однозначно определяются тем, что ограничения на них пучков $S^{2|0}_M$ и $S^{2|0}_{M_r}$ соответственно порождены парами сечений пучков $\mathcal{O}_{M_l} \otimes T$ и $\mathcal{O}_{M_r} \otimes T^*$ вида:

$$M_l:\ s^\alpha = (\delta^{\alpha\beta} \,|\, x_l^{\alpha\dot\beta} \,|\, \theta_l^{\alpha j})\,, \quad \alpha = 0,1\ ;$$

$$M_r:\ s^{\dot\beta} = (x_r^{\beta\dot\alpha} \,|\, \delta^{\dot\beta\dot\alpha} \,|\, \theta^{\dot\beta}_{r\,j})\,, \quad \beta = 0,1\ .$$

(Строки выписанных матриц следует читать как координаты в выбранных в п.I базисах T и T^*). Будем обозначать теми же буквами подъем этих координат на M. Там левые и правые координаты не являются независимыми. Действительно, $(2|0,\ 2|N)$ – флаг в $\mathcal{O}_M \otimes T$ – это то же, что пара $2|0$ -подпучков в $\mathcal{O}_M \otimes T$ и $\mathcal{O}_M \otimes T^*$, которые ортогональны относительно формы h. Условие ортогональности в координатах на большой клетке состоит из четырех соотношений:

$$\delta^{\alpha\gamma} x_r^{\dot\beta\gamma} - x_l^{\alpha\dot\gamma}\delta^{\dot\beta\dot\gamma} + 2i\,\theta_l^{\alpha j}\theta^{\dot\beta}_{r\,j} = 0; \quad \alpha,\beta = 0,1\,.$$

Положим $x^{\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}(x_l^{\alpha\dot\beta} + x_r^{\dot\beta\alpha})$ и перепишем условие ортогональности в виде

$$x_l^{\alpha\dot\beta} - x_r^{\dot\beta\alpha} = 2i\,\theta_l^{\alpha j}\theta^{\dot\beta}_{r\,j}\ . \tag{3}$$

Тогда в качестве стандартной системы координат на большой клетке M можно взять $(x^{\alpha\dot\beta},\ \theta_l^{\alpha j},\ \theta^{\dot\beta}_{r\,j})$. Нетрудно проверить, что $(x^{\alpha\dot\beta})^\rho = (x^{\alpha\dot\beta})^+$ и $(\theta_l^{\alpha j})^\rho = \theta^{\dot\alpha}_{r\,j}$. В этой системе координат пучки $\mathcal{T}_\ell M$ и $\mathcal{T}_r M$ свободно порождены киральными производными

$$\mathcal{D}_{\ell\alpha j}=\frac{\partial}{\partial\theta_\ell^{\alpha j}}+i\theta_r^{\dot\beta}{}_j\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}; \quad \alpha=0,1;\ j=1,\dots,N \qquad (4)$$

$$\mathcal{D}_{r\dot\beta}^{j}=\frac{\partial}{\partial\theta_r^{\dot\beta}{}_j}+i\theta_\ell^{\alpha j}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}; \quad \beta=0,1;\ j=1,\dots,N. \qquad (5)$$

Отсюда видно, что сумма $\mathcal{T}_\ell M+\mathcal{T}_r M$ прямая, векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}$ образуют базис пучка ранга $4|0$, дополняющего эту сумму до $\mathcal{T}M$ и, наконец, что $(\mathcal{T}_\ell M)^\rho = \mathcal{T}_r M$. Остается сравнить билинейные отображения a и b. Прямое вычисление коммутатора дает

$$[\mathcal{D}_{\ell\alpha j},\ \mathcal{D}_{r\dot\beta}{}^{k}] = 2i\delta_j^k\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}.$$

С другой стороны, вычисляя a с помощью явной формулы

$$a(X_\ell\otimes X_r)(s\otimes t)=(-1)^{\tilde X_\ell\tilde X_r}\langle X_\ell X_r s,t\rangle=(-1)^{\tilde s(\tilde X_\ell+\tilde X_r)}\langle s, X_\ell X_r t\rangle$$

получаем тот же результат, если воспользоваться изоморфизмом

$$(s^{2|0})^*\otimes(\tilde s^{2|0})^*\to\mathcal{T}_0 M: s_\alpha\otimes s_{\dot\beta}\longmapsto\frac{\partial}{\partial x^{\alpha\dot\beta}}\ \mathrm{mod}\,(\mathcal{T}_\ell M\oplus\mathcal{T}_r M),$$

где (s_α), $(s_{\dot\beta})$ – базисы сечений $(s^{2|0})^*$, $(\tilde s^{2|0})^*$ дуальные к (s^α), $(s^{\dot\beta})$. Это завершает доказательство предложения 4 и теоремы 2, поскольку задание киральных производных (4), (5) в отмеченной ("суперинерциальной") системе координат есть один из стандартных способов введения на $\mathbb{R}^{4|4N}$ структуры N-расширенного суперпространства Минковского. ■

§ 3. Геометрия искривленного суперпространства

I. Основные структуры. Мы будем называть искривленным суперпространством N-расширенной супергравитации комплексное супермногообразие M размерности $4|4N$, на котором заданы структуры из следующего списка.

а) Два интегрируемых комплексных распределения $\mathcal{T}_\ell M, \mathcal{T}_r M \subset \mathcal{T}M$ ранга $0|2N$, сумма которых в $\mathcal{T}M$ прямая.

б) Локально свободные пучки $\mathcal{F}_\ell = \mathcal{F}_r^*$ рангов $0|N$ и s_ℓ, s_r рангов $2|0$, а также структурные изоморфизмы $\mathcal{T}_\ell M = s_\ell^* \otimes \mathcal{F}_\ell$, $\mathcal{T}_r M = \mathcal{F}_\ell^* \otimes (s_r)^*$.

в) Вещественная структура ρ на M типа $(1,1,1)$, имеющая на M_{rd} четырехмерное вещественное многообразие неподвижных точек, и ее согласованные продолжения на $\mathcal{F}_{\ell,r}$, $s_{\ell,r}$.

Эти структуры должны удовлетворять следующим требованиям. Положим $\mathcal{T}_0 M = \mathcal{T}M/(\mathcal{T}_\ell M \oplus \mathcal{T}_r M)$. Тогда форма Фробениуса

$$\varphi : \mathcal{T}_\ell M \otimes \mathcal{T}_r M \longrightarrow \mathcal{T}_0 M$$

должна быть изоморфна форме свертки по $\mathcal{F}_\ell$ при подходящем отождествлении $\mathcal{T}_0 M = s_\ell^* \otimes s_r^*$. Наконец, мы должны иметь $(\mathcal{T}_\ell M)^\rho = \mathcal{T}_r M$.

Сравнение с содержанием предыдущего параграфа (ср. (I) и (2)) показывает, что мы зааксиоматизировали в этом описании существенную часть геометрии пространства флагов $F(2|0, 2|N; T)$.

Вычислим теперь пучок $\mathrm{Ber}\, M$, сечения которого могут быть лагранжианами суперпространства. В силу интегрируемости $\mathcal{T}_{\ell,r} M$ можно ввести левое и правое суперпространства $\pi_{\ell,r}: M \to M_{\ell,r}$ такие, что $\mathcal{T}_{\ell,r} M = \mathcal{T}M / M_{r,\ell}$ (поскольку $\mathcal{T}_{\ell,r} M$ имеют чисто нечетные ранги, топологических препятствий к существованию $M_{\ell,r}$ нет).

2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть M – искривленное суперпространство. Тогда имеют место канонические изоморфизмы:

$$\mathrm{Ber}\, M = (\mathrm{Ber}\, s_\ell)^{2-N} \otimes (\mathrm{Ber}\, s_r)^{2-N}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Ber}\, M = \left[(\pi_\ell^* \mathrm{Ber}\, M_\ell) \otimes (\pi_r^* \mathrm{Ber}\, M_r)\right]^{\frac{2-N}{4-N}} \quad (N \neq 4). \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно описанию основных структур, имеется точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow \Omega_0^1 M \longrightarrow \Omega^1 M \longrightarrow \Omega_\ell^1 M \oplus \Omega_r^1 M \longrightarrow 0,$$

$$\Omega_\ell^1 M = s_\ell \otimes \varepsilon_\ell, \quad \Omega_r^1 M = s_r \otimes \varepsilon_r, \quad \Omega_0^1 M = \Pi(s_\ell \otimes s_r),$$

где $\varepsilon_{\ell,r} = \Pi \mathcal{F}_{\ell,r}^*$. Теперь следует воспользоваться тем, что функтор Ber ведет себя почти так же, как $\det$ в обычной линейной алгебре:

$$\mathrm{Ber}\, M = (\mathrm{Ber}\,\Omega^1 M)^* = (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_0 M)^* \otimes (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_\ell M)^* \otimes (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_r M)^*, \tag{8}$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_0 M)^* = \mathrm{Ber}\,(s_\ell \otimes s_r) = (\mathrm{Ber}\, s_\ell)^2 \otimes (\mathrm{Ber}\, s_r)^2, \tag{9}$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_\ell M)^* = [(\mathrm{Ber}\, s_r)^N \otimes (\mathrm{Ber}\,\varepsilon_\ell)^2]^*, \tag{10}$$

$$(\mathrm{Ber}\,\Omega^1_r M)^* = [(\mathrm{Ber}\, s_r)^N \otimes (\mathrm{Ber}\,\varepsilon_r)^2]^*. \tag{11}$$

Подставляя формулы (9)-(11) в (8), находим (7). Далее, рассмотрим подпучки $\pi^*_{\ell,r}\,\Omega^1 M_{\ell,r} \subset \Omega^1 M$. Нетрудно убедиться, что при отображениях $\Omega^1 M \to \Omega^1_{\ell,r} M$ они проектируются на $\Omega^1_{\ell,r} M$ соответственно, с ядром $\Omega^1_0 M$ (для $N = 1$ мы проверим это в § 4 прямым вычислением в локальных координатах). Поэтому имеют место точные последовательности

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \pi^*_{\ell,r}\,\Omega^1 M_{\ell,r} \to \Omega^1_{\ell,r} M \to 0,$$

из которых, как выше, находим

$$\pi^*_\ell \mathrm{Ber}\, M_\ell = (\mathrm{Ber}\, s_\ell)^{2-N} \otimes (\mathrm{Ber}\, s_r)^2 \otimes (\mathrm{Ber}\,\varepsilon_r)^2,$$

$$\pi^*_r \mathrm{Ber}\, M_r = (\mathrm{Ber}\, s_r)^{2-N} \otimes (\mathrm{Ber}\, s_\ell)^2 \otimes (\mathrm{Ber}\,\varepsilon_\ell)^2.$$

Учитывая, что $\varepsilon_\ell = \varepsilon^*_r$, находим отсюда равенство (7) с учетом (6). ■

3. <u>Проблема дополнительных структур и лагранжиана.</u>
Чтобы превратить описанную геометрическую структуру в модель супергравитации, мы должны ответить по крайней мере на два вопроса:

а) Задать "поля", то есть описать M в терминах нескольких суперфункций от локальных координат.

В § 4 указан простой способ сделать это.

б) Указать лагранжиан - сечение $\mathrm{Ber}\, M$, который можно варьировать по полям.

Из (6) довольно очевидно, что мы не можем прямо построить лагранжиан по имеющимся данным: нужно вводить дополнительные структуры. Например, в случае $N = 0$ гравитацию Эйнштейна можно ввести так: нарушить имеющуюся конформную симметрию выбором спинорных метрик $\varepsilon_\ell \in \Lambda^2 s_\ell$, $\tilde{\varepsilon}_r \in \Lambda^2 s_r$, $\varepsilon^\rho_\ell = \varepsilon_r$, затем по метрике $g = \varepsilon_\ell \otimes \varepsilon_r$ построить связность Леви - Чивита, и, наконец, по ней лагранжиан $R\sqrt{\det g}$. В § 4 мы опишем формализм Огиевецкого - Сокачева для случая $N = 1$, при котором суперконформная структура п.I нарушается выбором форм объема в киральных суперпространствах $v_{\ell,r} \in \mathrm{Ber}\, M_{\ell,r}$. При $N = 2$ по $v_{\ell,r}$ нельзя прямо построить лагранжиан по формуле (7), поскольку каноническое сечение $1 \in \mathrm{Ber}\, M = \mathcal{O}_M$ дает тривиальные уравнения Эйлера - Лагранжа (на это указал Э.Сокачев). При $N = 4$ формула (7) также не годится. Задача наиболее удачного описания динамики при $N \geqslant 2$ далека от окончательного решения. Наиболее универсальным приемом остается введение суперсвязности на M на которую накладываются ограничения, означающие согласованность со структурами п.I, и еще какие-то, геометрически менее ясные, условия. Этой техники здесь мы не касаемся.

§ 4. Формализм Огиевецкого - Сокачева ($N=1$)

I. Основные структуры. В этом параграфе мы рассматриваем искривленное суперпространство M размерности $4|4$ с данными из п.3.I. Мы будем работать локально и отождествим $\mathcal{F}_{\ell,r}$ с $\Pi\mathcal{O}_M$. Кроме того, фиксируем две четных невырожденных формы объема $v_{\ell,r} \in H^0(M_{\ell,r}, \mathrm{Ber}\, M_{\ell,r})$ с условием $v_\ell^\rho = v_r$. Пользуясь отождествлением (7), мы можем построить по ним форму объема на

$$w = (\pi_\ell^* v_\ell \otimes \pi_r^* v_r)^{1/3}, \tag{I2}$$

которую и будем называть лагранжианом.

Пусть теперь $(x_\ell^a, \theta_\ell^\alpha)$ - локальная система координат в M_ℓ. Предположим, что выполнены следующие условия.

а) Функции $(x_\ell^a)_{rd}$ на M_{rd} вещественны (то есть ρ - инвариантны).

б) Функции $(x^a = \frac{1}{2}(x_\ell^a + x_r^a), \theta_\ell^\alpha, \theta_r^{\dot\alpha})$, где $x_r^a = (x_\ell^a)^\rho$, $\theta_r^{\dot\alpha} = (\theta_\ell^\alpha)^\rho$, образуют локальную систему координат на M.

Такие системы координат (x_ℓ, θ_ℓ) на M_ℓ, (x_r, θ_r) на M_r и $(x, \theta_\ell, \theta_r)$ на M мы будем называть приспособленными. Их существование следует прямо из описания основных структур в п.3.I: x_ℓ^a существуют, потому что множество вещественных точек M_{rd} четырехмерно; в качестве θ_ℓ^α можно взять две нечетных функции, локально спрямляющие $\mathcal{T}_\ell M$; условие б) следует из того, что сумма $\mathcal{T}_\ell M + \mathcal{T}_r M$ прямая.

Далее мы в существенном воспроизведем вычисления Огиевецкого-

Сокачева [2] в приспособленных системах координат, подчеркивая каждый раз инвариантный смысл этих вычислений.

2. <u>Описание суперпространства суперполями</u>. Положим (ср. с (3)):

$$H^a = \frac{1}{2i}(x^a_\ell - x^a_r).$$

Это - четыре функции на M ; они вещественны, то есть $(H^a)^\rho = H^a$, и нильпотентны, так как $(x^a_r)_{rd} = (x^a_\ell)_{rd}$. Набор функций (H^a) называется предпотенциалом Огиевецкого - Сокачева. Смена приспособленной системы координат меняет предпотенциал (H^a) ; такие преобразования называются калибровочными. Следуя Зигелю и Гэйтсу [6] , было бы последовательнее допускать на M_ℓ любые системы координат (y_ℓ, η_ℓ) (или накладывать на них только условие вещественности $(y_\ell)_{rd}$) и определять восьмикомпонентный предпотенциал $H^a = \frac{1}{2i}(y^a_\ell - (y^a_\ell)^\rho)$, $H^\alpha = \frac{1}{2i}(\eta^\alpha_\ell - (\eta^\alpha_\ell)^\rho)$. Выбор Огиевецкого - Сокачева уже подразумевает частичное закрепление калибровки.

Положим далее

$$v_\ell = \Phi^3_\ell \, \mathcal{D}^*(d\theta^\alpha_\ell, dx^a_\ell), \quad v_r = \Phi^3_r \, \mathcal{D}^*(d\theta^{\mathring{\alpha}}_r, dx^a_r)$$

Кубы стоят для уменьшения количества дробных степеней в будущей формуле для лагранжиана.

Предпотенциал (H^a) определяет структуры а) и б) пункта I на общем $4|4$ -многообразии $(X^a, \theta^\alpha, \theta^{\mathring{\alpha}})$; достаточно положить

$$(X^a)^\rho = X^a + 2iH^a, \quad (\theta^{\mathring{\alpha}})^\rho = \theta^\alpha,$$

$$\mathcal{O}_\ell = \text{функции от } X^a, \theta^\alpha; \quad \mathcal{O}_r = \text{функции от} (X^a)^\rho, \theta^{\mathring{\alpha}}.$$

Две четные суперфункции $\Phi_{\ell,r}$ дополняют это описание. Ниже мы вычислим все введенные структуры, включая лагранжиан , через H и Φ ; по ним можно проводить вариацию для вывода динамических уравнений. Функции $\Phi_{\ell,r}$ тоже зависят от координат; часто выбирают калибровку, в которой $\Phi_\ell = \Phi_r = 1$.

Положим $\partial_a = \partial/\partial x^a$, $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha_\ell$, $\partial_{\mathring{\alpha}} = \partial/\partial\theta^{\mathring{\alpha}}_r$ - векторные поля на M , записанные в "центральной" системе координат $(x^a, \theta^\alpha, \theta^{\mathring{\alpha}})$. Введем следующие обозначения: $(\partial H/\partial x)^a_\ell =$

$= \partial_b H^a$ (матрица), и далее

$$X^a_\alpha = i\left[\left(1 - i\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}\right]^a_b \partial_\alpha H^b; \quad X^a_{\dot\alpha} = -i\left[\left(1 + i\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{-1}\right]^a_b \partial_{\dot\alpha} H^b .$$

Это – нечетные, и стало быть, нильпотентные функции на M.

3. ЛЕММА. Дифференцирования

$$\Delta_\alpha = \partial_\alpha + X^a_\alpha \partial_a , \quad \Delta_{\dot\alpha} = -\partial_{\dot\alpha} - X^a_{\dot\alpha} \partial_a \tag{13}$$

образуют локальный базис $\mathcal{T}_\ell M$ и $\mathcal{T}_r M$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы принадлежать $\mathcal{T}_\ell M$ (соотв. $\mathcal{T}_r M$), Δ_α (соотв. $\Delta_{\dot\alpha}$) должны аннулировать $\theta^{\dot\alpha}$ и $x^a_r = x^a - iH^a$ (соотв. θ^α и $x^a_\ell = x^a + iH^a$). Коэффициенты X^a_α (соотв. $X^a_{\dot\alpha}$) и находятся из этих условий:

$$(\partial_\alpha + X^a_\alpha \partial_a)(x^b - iH^b) = 0 \Longleftrightarrow (\delta^b_a - i\partial_a H^b) X^a_\alpha = i\partial H^b$$

и аналогично для $\Delta_{\dot\alpha}$. Далее, пусть $D = A^a\partial_a + B^\alpha\partial_\alpha + C^{\dot\alpha}\partial_{\dot\alpha}$ лежит в $\mathcal{T}_\ell M$. Тогда, вычтя из D комбинацию $B^\alpha\Delta_\alpha$, можно считать, что $B^\alpha = 0$. Применив D к $\theta^{\dot\alpha}$, получим $C^{\dot\alpha} = 0$ а применив к x^b_r, получим $A^a(\delta^a_b - i\partial_a H^b) = 0$, откуда $A^a = 0$ в силу обратимости матрицы $1 - \partial H/\partial x$. ■

4. СЛЕДСТВИЕ. Формы

$$\omega^a = dx^a - X^a_\alpha d\theta^\alpha - X^a_{\dot\alpha} d\theta^{\dot\alpha}$$

образуют базис пучка $\Omega^1_0 M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $\Delta_\alpha \lrcorner\, \omega^a = 0 = \Delta_{\dot\alpha} \lrcorner\, \omega^a$. ■

5. СЛЕДСТВИЕ. Имеют место точные последовательности

$$0 \to \Omega^1_0 M \to \pi^*_{\ell,r}\Omega^1 M_{\ell,r} \to \Omega^1_{\ell,r} M \to 0,$$

использованные в доказательстве предложения 3.2. Формы (dx^b_ℓ) и (dx^b_r) образуют базисы $\Omega^1_0 M$ в $\pi^*_{\ell,r}\Omega^1 M_{\ell,r}$ и выражаются через ω^a формулами:

$$dx^a_\ell = (\delta^a_b + i\partial_b H^a)\,\omega^b, \quad dx^a_r = (\delta^a_b - i\partial_b H^a)\,\omega^b .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подпучок $\pi_\ell^* \Omega^1 M_\ell \subset \Omega^1 M$ свободно порожден дифференциалами dx_ℓ^a, $d\theta_\ell^\alpha$. Поскольку $\Delta_\alpha \lrcorner\, d\theta^\beta = \delta^\beta$ отображение $\pi_\ell^* \Omega^1 M_\ell \longrightarrow \Omega^1 M_\ell$ сюръективно. Его ядро, очевидно, свободно порождено dx_ℓ^a. Из формул для ω^a нетрудно усмотреть, что разность $dx_\ell^a - (\delta_\ell^a + i\partial_\ell H^a)\,\omega^\ell$, выраженная в центральном базисе $(dx^a, d\theta_\ell^\alpha, d\theta_r^{\dot\alpha})$, является линейной комбинацией $d\theta^\alpha$ и $d\theta^{\dot\alpha}$. С другой стороны, она лежит в $\Omega_0^1 M$ и поэтому равна нулю. Аналогично проверяется формула для правого базиса.

6. <u>Вычисление формы Фробениуса</u>. Обозначим через $(\mathcal{D}_a)$ базис $\mathcal{T}_0 M$, двойственный к базису (ω^a) из п.4: $(\mathcal{D}_a, \omega^b) = \delta_a^b$. Положим

$$\varphi(\Delta_\alpha \otimes \Delta_{\dot\beta}) = \varphi_{\alpha\dot\beta}^a \, \mathcal{D}_a ,$$

где $\varphi: \mathcal{T}_\ell M \otimes \mathcal{T}_r M \longrightarrow \mathcal{T}_0 M$ – форма Фробениуса. Для вычисления коэффициентов $\varphi_{\alpha\dot\beta}^a$ воспользуемся определением:

$$(\varphi(\Delta_\alpha \otimes \Delta_{\dot\beta}), \omega^b) = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \lrcorner\, \omega^b = \varphi_{\alpha\dot\beta}^a \, \mathcal{D}_a \lrcorner\, \omega^b = \varphi_{\alpha\dot\beta}^b ,$$

откуда

$$\varphi_{\alpha\dot\beta}^a = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \lrcorner\, \omega^a = [\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] \lrcorner\, (dx^a - d\theta^\gamma \cdot \chi_\gamma^a - d\theta^{\dot\delta} \cdot \chi_{\dot\delta}^a) .$$

Формулы (13) для $\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}$ показывают, что $[\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}]$ является линейной комбинацией ∂_a, так что определение $\varphi_{\alpha\dot\beta}^a$ можно переписать в виде

$$[\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}] = \varphi_{\alpha\dot\beta}^a \, \partial_a .$$

Выражения через H^a удобно искать так: $\Delta_\alpha(x^b - iH^b) = 0$, откуда $\Delta_\alpha x^b = i\Delta_\alpha H^b$ и $\Delta_{\dot\beta}\Delta_\alpha x^b = i\Delta_{\dot\beta}\Delta_\alpha H^b$. Аналогично, $\Delta_{\dot\beta}(x^b + iH^b) = 0$ и $\Delta_\alpha\Delta_{\dot\beta} x^b = -i\Delta_\alpha\Delta_{\dot\beta} H^b$. Окончательно,

$$\varphi_{\alpha\dot\beta}^a = -i\{\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}\} H^a . \qquad (14)$$

Здесь $\{\,,\}$ – суперантикоммутатор; применительно к нечетным дифференцированиям $\Delta_\alpha, \Delta_{\dot\beta}$ он выглядит как обычный коммутатор.

Основная аксиома структуры п.1 – максимальная невырожденность формы Фробениуса, то есть обратимость матрицы вторых спинорных производных от H^a. (Иногда вместо $\varphi_{\alpha\dot\beta}^a$ переходят к $\varphi_b^a = (\sigma_b)^{\alpha\dot\beta} \varphi_{\alpha\dot\beta}^a$: у этой матрицы строки и столбцы перенумерованы одинаково).

7. <u>Спинорные метрики</u>. Положим

$$\varepsilon_l = (\pi_l^* v_l)^{1/3} \otimes (\pi_r^* v_r)^{-2/3}, \quad \varepsilon_r = (\pi_l^* v_l)^{-2/3} \otimes (\pi_r^* v_r)^{1/3} .$$

Из вычислений в доказательстве предложения 3.2 для $N=1$ видно, что

$$\varepsilon_{l,r} \in (\mathrm{Ber}\,\Omega^1_{l,r} M)^* = \mathrm{Ber}\,\Pi\Omega^1_{l,r} M .$$

Поэтому после редукции нечетных координат $\varepsilon_{l,r}$ превратятся в спинорные метрики на M_{rd}, чем и объясняется их роль. Для их вычисления через H^a и $\Phi_{l,r}$ мы проведем явные отождествления в двойственной форме, для $\mathcal{T}$ вместо Ω^1. Это дает некоторую экономию на Π и дуализациях. Из следствия 5 находим точные последовательности

$$0 \to \mathcal{T}_{l,r} M \to \pi_{l,r}^* \mathcal{T}M_{l,r} \to \mathcal{T}_0 M \to 0 .$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{D}}_{l,a} = l_a^b \pi_l^* \left(\frac{\partial}{\partial x_l^b}\right), \qquad \tilde{\mathcal{D}}_{r,a} = r_a^b \pi_r^* \left(\frac{\partial}{\partial x_r^b}\right) ,$$

где

$$l_a^b = \delta_a^b + i\partial_a H^b, \quad r_a^b = \delta_a^b - i\partial_a H^b . \tag{15}$$

Мы утверждаем, что образы $\tilde{\mathcal{D}}_{l,a}$ и $\tilde{\mathcal{D}}_{r,a}$ в $\mathcal{T}_0 M$ совпадают с $\mathcal{D}_a$. В самом деле, для этого нужно проверить, что $\tilde{\mathcal{D}}_{l,a} \lrcorner\, \omega^c = \delta_a^c = \tilde{\mathcal{D}}_{r,a} \lrcorner\, \omega^c$ а это вытекает из выражений ω^c через dx_l^a, dx_r^a, данных в следствии 5.

Теперь в $\pi_{l,r}^* \mathcal{T}M_{l,r}$ у нас есть по два базиса и матрицы перехода между ними:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_{l,a} \\ \Delta_\alpha \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} l_a^b & 0 \\ \hline X_\alpha^b & \delta_\alpha^\beta \end{array}\right) \begin{pmatrix} \pi_l^* (\partial/\partial x_l^b) \\ \pi_l^* (\partial/\partial \theta_l^\beta) \end{pmatrix}$$

и аналогично для $\mathcal{T}M_r$, откуда

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\ell,a},\Delta_\alpha) = \det|\ell_a^b|\,\pi_\ell^*\,\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell^a},\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right),$$

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{D}}_{r,a},\Delta_{\dot\alpha}) = \det|r_a^b|\,\pi_r^*\,\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_r^a},\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot\alpha}}\right). \tag{16}$$

Мы можем написать в координатах основное отождествление из предложения 3.2: $\pi_\ell^*\,\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}M_\ell = (\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}_\ell M)^{-1}\otimes(\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}_r M)^{-2}$:

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{D}}_{\ell,a},\Delta_\alpha) = \mathcal{D}((\varphi^{-1})_a^{\alpha\dot\beta}\Delta_\alpha\otimes\Delta_{\dot\beta},\Delta_\alpha) = (\det\varphi)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^{-2},$$

где φ – форма Фробениуса, вычисленная в предыдущем пункте, и аналогично

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{D}}_{r,a},\Delta_{\dot\alpha}) = (\det\varphi)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^{-2}\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^{-1}.$$

Подставив эти равенства в (16), получим:

$$\pi_\ell^*\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell^a},\frac{\partial}{\partial\theta_\ell^\alpha}\right) = (\det\ell_a^b)^{-1}(\det\varphi)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^{-2},$$

$$\pi_r^*\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_r^a},\frac{\partial}{\partial\theta_r^{\dot\alpha}}\right) = (\det r_a^b)^{-1}(\det\varphi)^{-1}\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^{-2}\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^{-1}.$$

Отождествим $\mathcal{D}\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell^a},\frac{\partial}{\partial\theta_\ell^\alpha}\right)$ с сечением $\mathrm{Ber}\,\mathcal{T}M_\ell$ двойственным к сечению $\mathcal{D}^*(d\theta_\ell^\alpha, dx_\ell^a)$ пучка $\mathrm{Ber}^*\Omega^1M_\ell$ и аналогично для M_r. Тогда формулы для $v_{\ell,r}$ примут вид:

$$\pi_\ell^* v_\ell = \Phi_\ell^3\pi_\ell^*\mathcal{D}^*(d\theta_\ell^\alpha, dx_\ell^a) = \Phi_\ell^3\det(\ell_a^b)\det{}_\varphi\,\mathcal{D}(\Delta_\alpha)\,\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^2,$$

$$\pi_r^* v_r = \Phi_r^3\pi_r^*\mathcal{D}^*(d\theta_r^{\dot\alpha}, dx_r^a) = \Phi_r^3\det(r_a^b)\det{}_\varphi\,\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^2\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta}), \tag{17}$$

откуда, наконец,

$$\varepsilon_\ell = (\pi_\ell^* v_\ell)^{1/3}\otimes(\pi_r^* v_r)^{-2/3} = \Phi_\ell\Phi_r^{-2}(\det\ell_a^b)^{1/3}(\det r_a^b)^{-2/3}(\det\varphi)^{-1/3}\mathcal{D}(\Delta_\alpha)^{-1},$$

$$\varepsilon_r = (\pi_\ell^* v_\ell)^{-2/3}\otimes(\pi_r^* v_r)^{1/3} = \Phi_\ell^{-2}\Phi_r(\det\ell_a^b)^{-2/3}(\det r_a^b)^{1/3}(\det\varphi)^{-1/3}\mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})^{-1}. \tag{18}$$

8. <u>Структурные реперы</u>. Назовем структурным репером суперпространства M любой локальной базис векторных полей на M

вида

$$(\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\Delta}_{\dot\alpha}, \frac{i}{2}[\tilde{\Delta}_\alpha, \tilde{\Delta}_{\dot\alpha}]), \qquad \mathcal{D}(\tilde{\Delta}_\alpha) = \varepsilon_l^{-1}, \mathcal{D}(\tilde{\Delta}_{\dot\alpha}) = \varepsilon_r^{-1}.$$

Всякой приспособленной системе координат отвечает структурный репер, для которого

$$\tilde{\Delta}_\alpha = F\Delta_\alpha \ , \ \tilde{\Delta}_{\dot\alpha} = F^\rho \Delta_{\dot\alpha} \ .$$

Функции F, F^ρ находятся из формул (I8):

$$F = \Phi_l^{1/2} \Phi_r^{-1} (\det l_a^b)^{1/6} (\det r_a^b)^{-1/3} (\det \varphi)^{-1/6},$$

$$F^\rho = \Phi_l^{-1} \Phi_r^{1/2} (\det l_a^b)^{-1/3} (\det r_a^b)^{1/6} (\det \varphi)^{-1/6} .$$

9. <u>Лагранжиан.</u> Согласно определению и формулам (I6) имеем:

$$w = [\pi_l^* v_l \otimes \pi_r^* v_r]^{1/3} = \Phi_l \Phi_r (\det\varphi)^{2/3} \det(1 + (\frac{\partial H}{\partial x})^2)^{1/3} \mathcal{D}(\Delta_\alpha) \mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta}) \cdot$$

Здесь $\det(1+(\frac{\partial H}{\partial x})^2) = \det(l_a^b) \det(r_a^b)$ в силу определений (I5).

Эта формула для лагранжиана не является окончательной; мы должны выразить $\mathcal{D}(\Delta_\alpha)\ \mathcal{D}(\Delta_{\dot\beta})$ через $\mathcal{D}^*(d\theta^\alpha, d\theta^{\dot\alpha}, dx^a)$, чтобы иметь возможность непосредственно пользоваться формулой для интеграла Березина, определяющей действие, писать уравнения Эйлера - Лагранжа и т.п.

Действуя, как в начале п.7, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{T}_l M \oplus \mathcal{T}_r M \to \mathcal{T}M \to \mathcal{T}_0 M \to 0 .$$

Из определений очевидно, что ∂_a отображается в $\tilde{\mathcal{D}}_a$, ибо $\partial_a \lrcorner\, \omega^b = \delta_a^b$. Поэтому из матрицы пересчета двух базисов $\mathcal{T}M$

$$\begin{pmatrix} \partial_a \\ \Delta_\alpha \\ \Delta_{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ X_\alpha^a & E & 0 \\ X_{\dot\alpha}^a & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_a \\ \partial_\alpha \\ \partial_{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

находим:

$$\mathcal{D}(\partial_a, \partial_\alpha, \partial_{\dot\alpha}) = \mathcal{D}(\partial_a, \Delta_\alpha, \Delta_{\dot\alpha}) =$$

$$=\mathfrak{D}((\varphi^{-1})_a^{\alpha\dot\alpha}(\Delta_\alpha\otimes\Delta_{\dot\alpha}),\Delta_\alpha,\Delta_{\dot\alpha})=(\det\varphi)^{-1}\mathfrak{D}(\Delta_\alpha)^{-1}\mathfrak{D}(\Delta_{\dot\alpha})^{-1},$$

или

$$\mathfrak{D}(\Delta_\alpha)\mathfrak{D}(\Delta_{\dot\alpha})=(\det\varphi)^{-1}\mathfrak{D}^*(d\theta^\alpha,d\theta^{\dot\alpha},dx^a),$$

откуда

$$w=\Phi_\ell\Phi_r(\det\varphi)^{-1/3}\det\left(1+\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2\right)^{1/3}\mathfrak{D}^*(d\theta^\alpha,d\theta^{\dot\alpha},dx^a).$$

Пусть L – плотность действия, то есть коэффициент при $\mathfrak{D}^*$ в этом выражении. Пусть далее E_B^A – матрица перехода от голономного репера $(\partial_a,\partial_\alpha,\partial_{\dot\alpha})$ к структурному $(\frac{i}{2}[\tilde\Delta_\alpha,\tilde\Delta_{\dot\alpha}],\tilde\Delta_\alpha,\tilde\Delta_{\dot\alpha})$. Тогда из приведенных формул без труда получаем формулу Весса-Зумино:

$$L=\frac{1}{8}\,\mathrm{Ber}(E_B^A).$$

10. <u>Калибровка Весса-Зумино</u>. Калибровка Весса-Зумино определяется такой приспособленной системой координат, в которой $\Phi_\ell=1$, $\Phi_r=1$ а потенциал H^a имеет следующий вид:

$$H^a(x,\theta^\alpha,\theta^{\dot\alpha})=\theta^\alpha\theta^{\dot\alpha}e^a_{\alpha\dot\alpha}+\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\theta^{\dot\alpha}\theta^{\dot\beta}\theta^\gamma\psi^a_\gamma+\varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\theta^{\dot\gamma}\psi^a_{\dot\gamma}+\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\theta^{\dot\alpha}\theta^{\dot\beta}A^a.$$

Согласно компонентному анализу в этой калибровке, структура суперпространства M определяется следующим набором классических полей на M_{rd} : 16 компонент тетрады $e^a_{\alpha\dot\alpha}$ + 16 компонент полей $(\psi^a_\gamma,\psi^a_{\dot\gamma})$ спина $\frac{3}{2}$ + вспомогательное поле A^a. Поле A^a выпадает в силу уравнений движения; суперлагранжиан w будет линейной комбинацией лагранжианов Гильберта – Эйнштейна и Рариты – Швингера, умноженных на $\theta^0\theta^1\theta^{\dot 0}\theta^{\dot 1}$ и дивергенции.

Литература

1. Лейтес Д.А. Введение в теорию супермногообразий. – УМН, 1980, т.35, в.1, с.3–57.
2. Огиевецкий В.И., Сокачев Э.С. Гравитационное аксиальное суперполе и формализм дифференциальной геометрии. – Яд.физ., 1980, т.31, в.3, с.821–839.
3. Manin Yu.I. Flag superspaces and supersymmetric Yang-Mills equations. – In: Arithmetic and Geometry, vol.II, 1983, Birkhäuser, p.175–198.

4. N e ' e m a n Y., R e g g e T. Gauge theory of gravity and supergravity on a group manifold. - Rivista del Nuovo Cimento, 1978, v.1, p.1-43.
5. S c h w a r z A.S. Supergravity, complex geometry and G - structures. - Comm.Math.Phys., 1982, v.87, p.37-63.
6. S i e g e l W., G a t e s J.S. Superfield supergravity.- Nucl.Phys., 1979, v. B147, p.77-104.
7. W e s s J., Z u m i n o B. Superspace formulation of supergravity. - Phys.Lett.B, 1977, v.66, p.361-364.

С.П.Новиков

АЛГЕБРО-ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ПРОБЛЕМАХ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ КОНЕЧНОЗОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON

Введение

Начиная с работ Гарднера, Захарова и Фаддеева 1971 года [1] стало ясно, что фундаментальные нелинейные эволюционные системы теории солитонов, интегрируемые методом обратной задачи, являются теоретико-полевыми вполне интегрируемыми гамильтоновыми системами. Их современная теория развивается на том или ином функциональном пространстве гладких, быстроубывающих, периодических или квазипериодических по x полей, удовлетворяющих надлежащим требованиям вещественности (см.[2]). В теории периодических и квазипериодических решений ведущую роль играет семейство (оказывающееся всюду плотным) конечномерных подмногообразий так называемых "конечнозонных" решений (см.[3]) в функциональном пространстве полей. На этих конечнозонных фазовых многообразиях динамика системы порождает конечномерные вполне интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Интересно, что поверхность уровня набора коммутирующих интегралов после надлежащей компактификации образуют абелев комплексный тор, являющийся многообразием Якоби некоторой гиперэллиптической римановой поверхности. Само решение в конечном счете записывается в виде выражения через θ-функции этого тора с линейной зависимостью от координаты x и времени t под аргументом. Линейные координаты на торе Якоби представляют собой (комплексифицированные) "углы" из теоремы Лиувилля. Выделение вещественного тора из комплексного требует отдельного обсуждения. Соответствующие углам канонически сопряженные переменные "действия", во-первых, являются предметом только вещественной теории и, во-вторых, не описываются на языке θ-функции; это важное обстоятельство порождает круг задач, рассматриваемый в данной работе. Уместно также обратить внимание на следующее: общий формализм "конечнозонного интегрирования" без труда дает θ-функциональные формулы для общих комплексных решений; выделить из них значения параметров, приводящих к гладким вещественным решениям было тривиально для КдФ и цепочки Тода (см. [3]), но оказалось сложной проблемой, например, для уравнения SG, а также для всех систем, где соответствующий линейный оператор Лакса имеет порядок больше двух, или для матричных систем даже первого порядка, если матричная размерность больше двух. Эффективные условия вещественности Θ – функциональных формул для уравнения SG были получены впервые в работе [4]. Напомним, что переменные через которые пишутся Θ – функции, отвечают комплексифицированным Лиувиллевым "углам" исходной гамильтоновой системы, как отмечалось еще в [5]. Позднее, в работе [6] было обнаружено, однако, что важные для различных приложений переменные "действия" для КДФ и цепочки Тода, сопряженные к углам в обычной теоретико-полевой скобке Пуассона, естественно описываются в другом представлении через некоторые интегралы по запрещенным зонам (лакунам) на римановой поверхности Блоховской функции. Развитие этого наблюдения было предпринято в [7], [8]. Это оказалось общим для широкого класса скобок Пуассона на конечнозонных многообразиях решений, для которых все высшие КДФ – гамильтоновы системы. Можно сказать, что это является универсальным свойством всех нетривиально интегрируемых классических гамильтоновых систем, которые сводились к абелевым интегралам и Θ -функциям.

В работе [9] эта программа была реализована для уравнения Sine-Gordon (SG). Несмотря на относительно эффективное решение проблемы вещественности в Θ-функциональных формулах [4] из этих формул нельзя извлечь информацию даже о так называемом "топологическом заряде", не говоря уже о переменных "действия". Настоящая работа, в основном, излагает результаты [9], где впервые был развит, как мы будем говорить, "алгебро-топологический подход" к проблеме эффективного отбора вещественных решений – в так называемом γ – представлении на римановой поверхности, где явно вычисляются "переменные действия". Этот подход является чрезвычайно общим и, без сомнения, применим по многим системам, где проблема вещественности еще не решена (а таких большинство!).

§ I. Комплексные конечнозонные решения. Гамильтонов формализм в γ– представлении

Уравнение SG имеет вид

$$u_{tt} = u_{xx} - \sin u$$

и, как известно, допускает коммутационное представление, вытекающее из работ АКНС в виде (см.[2])

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + A ,\ \frac{\partial}{\partial t} + B \right] = 0 ,$$

где

$$A = \sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{i}{4}(u_t+u_x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\frac{1}{16\sqrt{\lambda}}\begin{pmatrix}0 & e^{iu}\\ e^{-iu} & 0\end{pmatrix}$$

(вид $B(\lambda)$ см. в [2] – он нам не будет нужен).

Требуется, чтобы функция $\exp(iu)$ была периодической или квазипериодической. Решения называются "физическими", если $u(x,t)$ – вещественно. Следующая величина называется "средней плотностью топологического заряда"

$$\bar{e}=\frac{1}{2\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\int_0^L u_x dx .$$

В периодическом случае с периодом T величина $\bar{e}$ имеет вид

$$2\pi\bar{e}=\frac{m}{T},$$

где m – целое число, называемое "топологическим зарядом". В периодическом случае определяется оператор трансляции на период $x\longrightarrow x+T$ и блоховская функция (или функция Флоке) для оператора $L(\lambda)=\partial_x+A$

$$\psi_\pm(x+T,t,\lambda)=\exp\{\pm ip(\lambda)T\}\,\psi_\pm(x,t,\lambda) .$$

Величина $p(\lambda)$ называется "квазиимпульсом". Важно отметить, что $\psi_\pm$ зависит только от λ, в то время как оператор L зависит от $\sqrt{\lambda}$. При надлежащей нормировке, квазиимпульс имеет асимптотики

$$p(\lambda)=\sqrt{\lambda}+2\pi\bar{e}+C_+(16\sqrt{\lambda})^{-2}+\ldots,\quad \lambda\longrightarrow\infty,$$

$$p(\lambda)=-(16\sqrt{\lambda})^{-1}+\pi\bar{e}-C_-\sqrt{\lambda}+\ldots,\quad \lambda\longrightarrow 0 .$$

В конечнозонном случае риманова поверхность Γ блоховской функции $\psi_\pm(x,\lambda)$, двулистная над λ-плоскостью, является по определению неособой и имеет конечный род $n<\infty$. Она представляется в виде

$$y^2=\prod_{j=0}^{2n}(\lambda-\lambda_j),\quad \lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{2n}=0,$$

причем точки $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ являются ветвлениями. Квазиимпульс определяется как интеграл по пути на Γ от следующей 1-формы dp

$$dp=dp_+ + dp_-,\ \text{где}$$

а) $dp_+ = dz\left(-\frac{1}{z^2} + O(1)\right), \quad z = \lambda^{-1/2} \longrightarrow \infty,$

$$dp_- = dw\left(\frac{1}{16w^2} + O(1)\right), \quad w = \lambda^{1/2} \longrightarrow 0 ,$$

в) если $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ – канонический базис циклов на Γ такой что $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}$, то:

$$\oint_{a_j} dp_{\pm} = 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, n .$$

Таким образом, квазиимпульс определен для всех конечнозонных операторов L , даже если $\exp\ (iu)$ и не является периодической функцией, а только квазипериодической. Следует отметить, что квазиимпульс определяется в зависимости от избранного полубазиса $(a_1, \ldots, a_n)$, выбор которого будет подробно обсуждаться далее.

Важную роль в теории играют нули первой компоненты блоховской функции – вектора $\psi(x, t, T)$, где $T = (\lambda, \pm)$ – точка на поверхности Γ . Эти нули обозначаются через $\gamma_j(x, t)$, $j=1,2,\ldots$ $\ldots, n$.

Они являются точками на Γ в количестве n штук. Для общего комплексного решения $u(x,t)$ это произвольные точки на поверхности Γ . Их расположение для вещественных решений $u(x,t)$ будет предметом дальнейшего обсуждения. Итак, конечнозонные семейства комплексных решений лежат на функциональных многообразиях со следующей параметризацией (набор данных обратной задачи в γ–представлении):

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n), \quad \lambda_0 \cdot \ldots \cdot \lambda_{2n} = 0,$$

где λ_j – точки λ–плоскости и γ_q – точки поверхности Γ, заданной уравнением $y^2 = \prod(\lambda - \lambda_j)$. Параметры γ_q следует задать только при $x = x_0$.

В работах ([7], [8]) были введены и исследовались общие алгебро-геометрические и аналитические скобки Пуассона на этом комплексном многообразии. Они, по определению задаются I-формой $Q(\Gamma, \lambda)\, d\lambda$ на поверхности Γ, или какой-то ее накрывающей. Форма $Q\, d\lambda$ зависит от Γ как от параметра. Требуется выполнение следующих свойств (для случая КдФ в простейших примерах скобок эти свойства в γ– представлении были установлены еще в 1976 году – см. [6], [10]); универсальность этих свойств для всех алгебро-геометрических интегрируемых случаев замечена в [7]:

$$\{\lambda_j, \lambda_i\} = \{\gamma_q, \gamma_p\} = 0,$$
$$\{Q(\gamma_q), \gamma_p\} = \delta_{qp},$$
$$\{Q(\gamma_q), Q(\gamma_p)\} = 0,$$

где λ_j, γ_q - проекции фазового многообразия на соответствующий сомножитель. Симплектическая 2-форма имеет вид

$$\Omega_Q = \sum dQ(\Gamma, \gamma_i) \wedge d\gamma_i .$$

Кроме того, аннулятор скобки Пуассона должен задаваться в виде набора функций только от $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$, не зависящих от $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Поверхности уровня аннулятора имеют размерность $2n$. Требуется, чтобы производные формы $Q(\Gamma, \lambda)\, d\lambda$ по касательным к поверхностям уровня аннулятора были меромоффными I-формами на Γ. Скобка Пуассона называется "совместимой с динамикой SG", если все их высшие аналоги, ограниченные на конечнозонные семейства, гамильтоновы в этой скобке. Комплексная теория таких скобок завершена в [8] для КдФ; комплексные теории КдФ и SG полностью параллельны (чего нельзя сказать о вещественных теориях). Основные примеры таковы.

ПРИМЕР I. Стандартная полевая скобка Пуассона для SG-уравнения имеет вид

$$\{u(x), u(y)\} = \{\pi(x), \pi(y)\} = 0,$$
$$\{u(x), \pi(y)\} = \delta(x-y), \quad \pi = u_t .$$

После ограничения на конечнозонные семейства она является алгебро-геометрической, аналитической и т.д., где функция Q имеет вид

$$Q = Q_1(\Gamma, \lambda) = 4ip(\lambda)\lambda^{-1} .$$

ПРИМЕР 2. Для другой скобки Пуассона на конечнозонном семействе, порожденной их заданием в виде условия стационарности "высших аналогов SG", функция Q имеет вид

$$Q = Q_2(\Gamma, \lambda) = q_i\left(1 + 16\sqrt{\prod_{\lambda_i \neq 0} \lambda_j}\right)\sqrt{\prod_{j=0}^{2n}(\lambda - \lambda_j)}\; \lambda^{-2}$$

Роль аннулятора в первом случае, очевидно, играет группа периодов как функций от $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{2n})$

$$T_j(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2n}),\quad j=1,\ldots,n,$$
$$\{T_j, f(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2n},\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\}_1 \equiv 0 .$$

Во втором случае аннулятор задается следующими величинами

$$f_p=\sigma_p(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2n})=\sum_{j_1<\ldots<j_p}\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}\ldots\lambda_{j_p},$$

$$f_n=\sqrt{\sigma_{2n}}, \qquad p=1,2,\ldots,n-1,$$

$$\{f_q, f(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2n},\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\}_2 = 0.$$

Обратим внимание на то, что I-форма $Q_1\,d\lambda$ определена однозначно лишь на накрывающем $\hat{\Gamma}$ над Γ, где замкнутыми остаются все a-циклы, так как $\rho(\lambda)$ определено и однозначно только на этой накрывающей над Γ.

Во втором примере форма $Q_2\,d\lambda$ мероморфна и однозначна на самой поверхности Γ.

Хотя работа [8] написана для КдФ, полностью идентичное рассуждение приводит к такой теореме: алгебро-геометрические, аналитические скобки Пуассона $Q(\Gamma,\lambda)\,d\lambda$ совместимы с динамикой SG, если и только если набор производных формы $Q(\Gamma,\lambda)\,d\lambda$ по направлениям в пространстве модулей, касательным к поверхностям уровня аннулятора скобки Пуассона, дает базис голоморфных I-форм (первого рода) на поверхностях Γ.

Преобразование Абеля линеаризует динамику любого гамильтониана вида $H(\Gamma)$ для таких скобок и вводит "угловые переменные". После преобразования Абеля мы получим набор "данных обратной задачи в θ- представлении", который будет выглядеть как новый набор координат на конечнозонном многообразии $(\lambda_0,\ldots,\lambda_{2n},$ $\eta^1,\ldots,\eta^n)$, где комплексный вектор угловых переменных η задан по модулю решетки в C^n, натянутой на вектора $[e_1,\ldots,e_n,e'_1,\ldots,e'_n]$, $e'_j=\sum_i b_{ji}e_i$; здесь e_j - базисные вектора в C^n и (b_{ij}) - матрица Римана

$$b_{ij}=\oint_{b_j}\Omega_i,\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{a_j}\Omega_i=\delta_{ij},$$

Ω_j - нормированный базис голоморфных I-форм на Γ.

Мы будем далее работать только в γ- представлении, где оказывается возможным эффективно вычислить переменные действия и развить алгебро-топологический подход к условиям вещественности решений.

§ 2. Алгебро-топологический подход к проблемам вещественности в γ-представлении

Преобразование Абеля из γ — представления в θ — представление определяется набором голоморфных I-форм на Γ (n - род Γ)

$$z_k = A_k(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\infty}^{\gamma_j} \Omega_k ,$$

где координаты $(z_1, \dots, z_n)$ определены с точностью до вектора решетки в C^n, по смыслу их определения этим интегралом.

Проблема вещественности может ставиться так: найти эффективные условия на набор $(\Gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ такие, что решение $u(x,t)$ уравнения SG является вещественным. Условия на Γ легко находятся: необходимо и достаточно, чтобы поверхность $y^2 = \prod_{j=0}^{2n}(\lambda - \lambda_j) = R(\lambda)$ задавалась вещественным полиномом $R(\lambda)$ степени $2n+1$, который имеет точку $\lambda = 0$ своим корнем, не имеет вещественных строго положительных корней и не имеет кратных вещественных неположительных корней. Мы будем рассматривать только "случай общего положения", где все комплексные корни $R(\lambda_j)=0$ некратны. В этом случае поверхность Γ является неособой. Этот результат можно извлечь из работ [II], [I2], хотя в них отсутствует его четкая формулировка. Проблеме вещественности посвящены также работы [I3], [I4]. В работе [I4] дана алгебро-геометрическая переформулировка задачи, из которой автор сумел извлечь неэффективное доказательство теоремы о числе вещественных компонент для решений SG при фиксированной поверхности Γ. В работе [I3] было введено полезное понятие "числа осцилляций" m_j (ниже) для малых возмущений тривиальных операторов L, которое использовалось и развивалось в [9].

Из алгебро-геометрической переформулировки условий вещественности решений уравнения SG видно, что после преобразования Абеля на комплексном торе $J(\Gamma)$ комплексной размерности n возникает антиголоморфная инволюция $\delta : J(\Gamma) \longrightarrow J(\Gamma)$, $\delta^2 = 1$, (-1)- неподвижные точки которой отвечают вещественным решениям SG, $\delta z = -z$. Именно эффективному вычислению этой инволюции в θ — представлении и посвящена работа [4].

Однако, эта инволюция δ является "коллективной" по γ, Возвращаясь обратным преобразованием Абеля в исходное γ -представление, мы видим, что координата γ_i набора $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)= A^{-1}(\eta)$, такого что $\delta\eta=-\eta$, может в принципе, находиться в любой точке римановой поверхности Γ. Напомним, что в случае КдФ для местоположения точки γ была заранее отведена только лакуна (запрещенная зона) с номером j, если решение гладко и вещественно - то есть, антикомплексная инволюция на торе $J(\Gamma)$ порождалась инволюцией самой поверхности Γ. Для уравнения SG это уже не так.

Итак, в отличие от КдФ, для уравнения SG не имеет смысла искать места расположения отдельных нулей $\gamma_j(x)$ первой компоненты блоховской функции ψ. Идея алгебро-топологического подхода ([9]) состоит в следующем. По аналогии с эргодической теорией и определением так называемых чисел вращения, следует рассмотреть большой интервал $[x_0, x_\alpha]$, такой что:

$$\gamma_j(\alpha)\longrightarrow\gamma_j(x_0),\ \alpha\longrightarrow\infty,\ |x_\alpha|\longrightarrow\infty.$$

Легко показать, что точки $\gamma_j(x)$ никогда не лежат в выделенных точках ветвления 0 или ∞ на Γ. Замкнув длинный отрезок $[\gamma_j(x_0), \gamma_j(x_\alpha)]$ короткой геодезической на Γ мы получим последовательность циклов $Z_{\alpha j}$, $\alpha\longrightarrow\infty$ на поверхности $\Gamma\setminus(0\cup\infty)$. Легко видеть, что существует предел

$$w_j=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{[Z_{\alpha j}]}{x_\alpha-x_0}\in H_1(\Gamma\setminus(0\cup\infty), R),$$

где $[Z_{\alpha j}]$-класс гомологий цикла $Z_{\alpha j}$. Буквой w_j мы будем обозначать также образ w в $H_1(\Gamma, R)$. В эргодической теории нередко возникают такие ситуации, причем элемент w_α в пределе $\alpha\longrightarrow\infty$ разложится, вообще говоря, в линейную комбинацию целочисленных классов гомологий ("геометрических циклов") с вещественными коэффициентами. В нашем случае, как будет ясно далее, он мог бы быть линейной комбинацией n циклов $a_1,\dots,a_n$, где $a_i\circ a_j=0$. Однако, ситуация оказывается гораздо лучшей. Имеет место следующая совокупность утверждений (как будет указано ниже, эти утверждения доказаны не для всех значений параметров). Элемент w_j (точнее, его образ в группе $H_1(\Gamma, R)$) представляет собой вещественное кратное некоторого одного целочисленного неделимого цикла $a_j\in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$

$$w_j = m_j a_j\,, \quad m_j \in R\,.$$

При этом набор циклов $(a_1, \dots, a_n)$ образует полубазис канонического базиса

$$a_i \circ a_j = 0\,.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если дифференциал квазиимпульса dp (см. § I) нормировать по отношению к этому базису $(a_1, \dots, a_n)$ то имеет место равенство

$$2\pi m_j = U_j = \oint_{b_j} dp\,, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}\,.$$

Строго говоря, следует сказать, что это равенство определяет направление цикла a_j. В лемме 2 работы [9] была неточность: величины U_j и m_j не обязаны быть положительными.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть риманова поверхность Γ имеет ровно $2k$ отрицательных точек ветвления $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots \lambda_{2k-2} < < \lambda_{2k-1} < 0 = \lambda_{2k}$.

и ровно $2n-2k$ различных комплексно сопряженных пар

$$\lambda_{2k+1} = \bar{\lambda}_{2k+2}\,, \dots, \lambda_{2n-1} = \bar{\lambda}_{2n}\,.$$

Пусть также числа m_j все различны $m_j \neq m_s$, $j \neq s$.

Тогда классы гомологий a_j можно реализовать на поверхности $\Gamma \setminus (0 \cup \infty)$ следующими попарно непересекающимися несамопересекающимися замкнутыми кривыми M_j:

а) их проекции N_j на λ – плоскость также несамопересекаются или двукратно складываются в гладкие несамопересекающиеся отрезки с концами в паре комплексно сопряженных точек ветвления. Их проекции на λ – плоскость попарно не пересекаются и инвариантны относительно комплексного сопряжения $\lambda \to \bar{\lambda}$.

b) замкнутые проекции N_j однократно охватывают точку $\lambda = 0$, они однократно пересекают положительную вещественную полуось в точках $\mu_j > 0$ и отрицательную – в точках $\mu_j < 0$, где $\lambda_{2j-2} < \mu_j < \lambda_{2j-1}$, $j = 1, 2, \dots, k$.

с) Проекции N_j типа отрезка кончаются в точках ветвления $\lambda_{2j-1} = \bar{\lambda}_{2j}$, $j = k+1, \dots, n$,
и пересекают положительную полуось в точках $\mu_j > 0$.

d) Если $m_j > m_p$, то $\mu_j > \mu_p$; для $p, j = 1, \dots, k$ мы всегда имеем $m_j > m_p$, если $j > p$.

Свойства кривых M_j и их проекций N_j полностью определяют классы гомологий a_j и классы w_j в $H_1(\Gamma)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При фиксированном наборе проекций N_j и классов $a_j \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ можно выбрать кривые M_j на $\Gamma \setminus (0 \cup \infty)$ неоднозначно. Всего имеется 2^k различных способов выбора. Эти способы и различают различные связные компоненты вещественных решений уравнения SG, отвечающих одной и той же поверхности Γ. У каждой кривой N_j для $j \leq k$ имеется ровно 2 прообраза на Γ на двух разных листах, каждый из которых может быть выбран за M_j на соответствующей компоненте множества вещественных решений. Эти две кривые, которые мы обозначим через M_j' и M_j'' переходят друг в друга при антиинволюции поверхности Γ:

$$i : (y, \lambda) \longrightarrow (-\bar{y}, \bar{\lambda}), \quad \tau^2 = 1,$$

$$\tau(M_j') = M_j''; \ \tau_* a_j = a_j \in H_1(\Gamma, \mathbb{Z}).$$

Антиинволюция τ меняет направление проекции $N_j' = N_j \longrightarrow$ $\longrightarrow N_j^{-1} = N_j''$, $j = 1, 2, \ldots, k$ Средняя плотность топологического заряда вычисляется следующим образом

$$\bar{e} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \int_0^L d \ln(\gamma_1(x) \gamma_2(x) \ \gamma_n(x)),$$

так как $u(x,t) = \ln(\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_n) + const$. Вследствие этого мы имеем

$$\bar{e} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j m_j = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} \sigma_j U_j, \quad \sigma_j = \pm,$$

где знак σ_j зависит от компоненты связности в множестве вещественных решений уравнения SG, т.е. какая из кривых M_j' или M_j'' выбрана на $\Gamma \setminus (0 \cup \infty)$. Итак, компоненты связности нумеруются наборами

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k), \ \sigma_j = \pm, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где $2k$ – число отрицательных точек ветвления. Следует отметить, что подгруппа γ– циклов, натянутая на $a_1, \ldots, a_n$ в $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ легко может быть определена алгебро-топологическими средствами. Именно, группа гомологий всего комплексного тора $H_1(J(\Gamma))$ идентифицируется с $H_1(\Gamma)$. Вещественный Лиувиллев тор $T^n \subset$ $\subset J(\Gamma)$, т.е. любая связная компонента (-1)–неподвижных точек антиинволюции

$$\delta : J(\Gamma) \longrightarrow J(\Gamma), \ -\delta / T^n \equiv 1,$$

выделяющей вещественные решения в θ-представлении, вкладывается в $J(\Gamma)$, порождая мономорфизм (изоморфное вложение) одномерных гомологий $H_1(T^n) \longrightarrow H_1(J(\Gamma))$. Именно эта подгруппа и порождена γ-циклами $(a_1, \ldots, a_n)$. Эту подгруппу легко найти, используя [4]. В недавнем препринте [15] написанном в начале 1983 года, решалась именно задача вычисления этой подгруппы для рода $n=2$. К сожалению, авторы этого препринта, по-видимому, не были знакомы с уже опубликованными работами [4],[9].

Выбор базиса γ-циклов, отвечающих индивидуальным кривым $\gamma_j(x)$, содержит гораздо большую информацию. В частности, формула для топологического заряда имеет место именно в этом базисе.

Принцип доказательства этих утверждений, предложенный Б.А.Дубровиным и автором, состоял в следующем. Рассмотрим малые возмущения тривиального оператора, где $u = const$. Для них все эти утверждения проверяются без труда. В этом случае $k = 0$. Далее, мы получаем все конечнозонные операторы деформацией, обходя все особенности коразмерности 2 в пространстве параметров. Возникновение отрицательных вещественных точек ветвления есть особенность коразмерности I в пространстве параметров, от которых зависят вещественные поверхности. Эта бифуркация изучается без труда. Поэтому все алгебро-топологические свойства семейства операторов, получаемые указанными деформациями из тривиального, безусловно правильны для потенциалов, достижимых деформацией без других особенностей коразмерности I. Однако, это пока полностью не обосновано. В частности, возникновение равенств $m_i = m_j$ при $i = j$ может быть такой бифуркацией, хотя до обоих ее сторон, по-видимому, возможно добраться деформацией указанного типа. Итак, пока указанные выше свойства строго доказаны не для всего вещественного конечнозонного семейства.

В заметке [16] найдена асимптотика аналитических свойств конечнозонных операторов L при $n \to \infty$. Б.А.Дубровин доказал, что любой гладкий периодический оператор L аппроксимируется конечнозонными.

Среди других задач, к которым было бы интересно применить алгебро-топологический подход при изучении условий вещественности (эрмитовости), особое место занимают пространственно двумерные операторы L с двояко периодическими (квазипериодическими) коэффициентами.

I. а) нестационарный оператор Шредингера

$$i\psi_y = -\psi_{xx} + u(x,y)\psi, \quad L = i\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u,$$

b) параболический оператор

$$\psi_y = \psi_{xx} + u(x,y)\psi, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \; .$$

П. Двумерный стационарный оператор Шредингера в электрическом и магнитном полях

$$L = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - A_1(x,y)\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} - A_2(x,y)\right)^2 + u(x,y) \cdot$$

Во всех случаях изучается блоховское решение уравнения

$$L\psi = 0 ,$$

где $\nabla(\ln\psi)$ имеет ту же группу периодов, что и оператор L_0.

После надлежащей комплексификации в "аналитически допустимом" случае множество блоховских решений уравнения $L\psi = 0$ образует однопараметрическое семейство $\psi(x,y,P)$, где P пробегает точки римановой поверхности Γ , Оператор L называется "конечнозонным", если риманова поверхность Γ имеет конечный ряд. Имеются выделенные "бесконечноудаленные" точки - одна точка ∞ для случая I и две точки ∞_1, ∞_2 для случая П, с асимптотиками:

I a) $\psi(x,y,P) = e^{kx+k^2y}(1+O(k)^{-1}), \; P \to \infty,$

b) $\psi(x,y,P) = e^{ikx+k^2y}(1+O(k)^{-1}), \; P \to \infty,$

II

$$\psi(x,y,P) = \begin{cases} e^{ik_1 z}(1+O(k^{-1})), & P \to \infty_1, \\ ce^{ik_2\bar{z}}(1+O(k_2^{-1})), & P \to \infty_2, \end{cases}$$

где $z = x+iy$, $k^{-1}, k_1^{-1}, k_2^{-1}$ - локальные параметры около точек $\infty, \infty_1, \infty_2$ соответственно, $c(x,y)$ - функция, не зависящая от P . Далее, функция ψ имеет ровно n полюсов, не зависящих от (x,y) и n нулей $\gamma(x,y), \ldots, \gamma_n(x,y)$, где n - род Γ . Ситуация I впервые рассматривалась в [17], случай П в работе [18]. Для любого набора данных - римановой поверхности Γ , бесконечноудаленных точек на ней, локального параметра около них и набора полюсов или нулей. При $x \to x_0$ нули сливаются с полюсами, и $\psi(x_0, P) \equiv 1$. В комплексной области случаи I, a) и I, b) не различаются. Вещественная теория требует решения следующих задач:

I. Как выбрать класс допустимых поверхностей Γ бесконечно-удаленные точки и локальные параметры $k^{-1}, k_\alpha^{-1}, \alpha=1,2$?

2. Как выбрать наборы нулей $\gamma_j(x)$, если задача I уже решена?

Обе задачи пока не решены, хотя начиная с работ [I4, I9] известен нетривиальный класс примеров, даже в наиболее трудном случае П, где все коэффициенты (u, A_1, A_2) вещественны. В случае I,а), вероятно, ответ является простым: поверхность Γ должна обладать антиинволюцией $\delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, $\delta^2=1$ обладающей ровно $n+1$ неподвижным овалом $S_1^1, S_2^1, \dots, S_{n+1}^1, \delta(S_q^1) = S_q^1$.

Точка ∞ должна лежать на овале S_{n+1}^1, а точки $\gamma_j(x)$ на овалах S_j^1, $j=1,\dots,n$. Локальный параметр k^{-1} около точки ∞ должен также быть инвариантен $\overline{\delta^*(k)} = k$. Эти условия достаточны для гладкости и вещественности величины $u(x,y)$ и соответствующего решения $u(x,y,t)$ уравнения КП. Однако, необходимость этих условий не доказана.

В случаях I, в) и П вероятно, риманова поверхность Γ также обязана быть вещественной - т.е. обладать антиинволюцией $\delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, $\delta^2 = 1$, где $\delta(\infty) = \infty$ для случая I, в) и $\delta(\infty_1) = \infty_2$ для П. Локальные параметры k, k_1, k_2 вероятно, должны также переходить в себя для I или друг в друга для П. Допустимый класс вещественных кривых Γ, однако, может быть нетривиальным.

Во всяком случае, если это так, то возникает задача 2 о допустимых наборах нулей $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ для исследования которых естественно применить алгебро-топологический подход в случаях I, в) и П.

В общем комплексном случае П для операторов L второго порядка по (x,y) также можно выделить менее интересный подслучай, аналогичный I, а). Это - задача о выделении неэрмитовых, а чисто вещественных операторов L, где A_1, A_2 - чисто мнимые. Такой вопрос обсуждался в [I8]. По-видимому, для этого достаточно, чтобы нули $\gamma_j(x)$ все лежали на различных овалах антиинволюции δ, а точки ∞_1, ∞_2 и локальные параметры переставлялись антиинволюцией. Необходимость этих условий является сложной задасей, как и для I, а).

Задача о выделении эрмитовых L, где A_1, A_2 вещественны, более интересна и сложна. Как показано в [I4] при выполнении предыдущих требований на поверхность Γ можно дать такие достаточные условия на набор $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, где n - род Γ.

Пусть K – канонический класс поверхности Γ степени $2n-2$. Рассмотрим дивизор $\mathcal{D}=\gamma_1+\ldots+\gamma_n-\infty_1$. Если выполнено условие – к сожалению неэффективное – $\delta(\mathcal{D})\equiv K-\mathcal{D}$ (под равенством понимается линейная эквивалентность), то оператор L – эрмитов.

Как указано в [18], в комплексной теории двумерного оператора Шредингера L имеется простой подслучай, содержащий в себе теорию уравнения SG; он отвечает гиперэллиптическим поверхностям Γ вида $y^2=\prod_{j=0}^{2n}(\lambda-\lambda_j)$, $\prod_j \lambda_j=0$, где $\infty_1=0$, $\infty_2=\infty$ хотя условия вещественности здесь другие. Со случаем П связаны также "полукоммутативные" алгебры", порожденные оператором $L_0=L, L_1, L_2$ с соотношениями $[L_\alpha, L_\beta]=C_{\alpha\beta}L_0$, $\alpha,\beta=0,1,2$ $C_{\alpha,\beta}$ – дифференциальные операторы (см. [13], [21]).

Ряд интересных задач возникает также для одномерных операторов L порядка больше двух или матричных систем размерности больше двух. Условия вещественности римановых поверхностей Γ пояснил Б.А.Дубровин в последнее время ([20]). Остальные задачи здесь пока не решены и алгебро-топологический подход также перспективен.

§ 3. Вещественные переменные действия для уравнения SG

Переменные действия определяются в том случае, когда поверхность уровня коммутирующих интегралов компактна и является тором T^n с каноническими угловыми переменными $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$, каждая из которых нормирована и меняется от нуля до 2π. Скобка Пуассона, согласно Лиувиллю, имеет вид

$$\{\varphi_i, \varphi_j\}=0.$$

Если $I_1,\ldots,I_n$ – коммутирующие интегралы, то углы φ_i определены с точностью до преобразования

$$\varphi_i'=\varphi_i+c_i(I),$$

где матрица $q_{ij}=\{\varphi_i, c_j\}$ симметрична. Можно подвергнуть также набор углов целочисленному линейному преобразованию с детерминантом, равным ± 1. Зафиксировав набор углов, мы определяем переменные действия

$$J_i=\frac{1}{2\pi}\oint_{a_i'} p\,dq,$$

где a_i' – цикл на торе T^n, полученный набором уравнений

$\varphi_s = \underbrace{const}$, $s \neq i$. Здесь $p\,dq$ - это стандартная I-форма, такая что $d(p\,dq) = \Omega$ задает симплектическую форму на $2n$ – мерном фазовом пространстве и скобку Пуассона. Для встречающихся гамильтоновых формализмов (см.§ I) форма $p\,dq$ совпадает в γ – представлении с формой

$$p\,dq = \sum_{i=1}^{n} Q(\Gamma, \gamma_i)\,d\gamma_i$$

на поверхности уровня аннулятора скобки Пуассона, заданной уравнениями только на модули (точки ветвления) поверхности Γ. Мы предполагаем, что преобразование Абеля A является диффеоморфизмом на изучаемых компонентах связности вещественных решений. Для конечнозонных решений SG с неособой поверхностью Γ и условием $m_j \neq m_q$ ($j \neq q$) это так. Учитывая это обстоятельство, набор базисных циклов (a'_j) на вещественном торе T^n отвечающих углам φ_j ($0 \leqslant \varphi_j \leqslant 2\pi$), можно выбрать в виде γ -циклов, указанных в § 2, точнее

$$a'_i = A_*^{-1}\,(a_i)\,,$$

где A_*^{-1} - вложение группы гомологий $H_1(T^n)$ в группу $H_1(\Gamma)$. Сопоставляя это с видом формы $p\,dq$ (выше), мы получаем

$$\mathcal{J}_i = \frac{1}{2\pi}\oint_{a'_i} p\,dq = \frac{1}{2\pi}\oint Q\,(\Gamma, \lambda)\,d\lambda\,,$$

где $a_i \in H_1(\Gamma \setminus (0 \cup \infty), \mathbb{Z})$ – базисные γ -циклы на поверхности Γ

Для случая КдФ и в любом другом случае, когда имеется ровно один вещественный тор, вычисление переменных действия на этом завершается, если циклы a_i указаны явно на поверхности Γ. В результате этих рассуждений, вычисление переменных действия для введенных в § I алгебро-геометрических, аналитических скобок Пуассона свелось к периодам I-формы $Q(\Gamma, \lambda)\,d\lambda$ на поверхности Γ по некоторым I-циклам a_j.

Для конечнозонных решений SG имеется, вообще говоря, несколько различных вещественных торов T^n_σ, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, $\sigma_s = \pm$ (см.§ 2) при фиксированной поверхности Γ. Набор циклов $a_i(\sigma)$ меняется при изменении σ в группе $H_1(\Gamma \setminus (0 \cup \infty), \mathbb{Z})$; - точнее, меняются только первые k циклов, пересекающие отрицательную вещественную полуось. Возникает естественный вопрос: как меняются переменные действия при изменении связной компоненты вещественных решений?

Этот вопрос исследован в [9]. Для форм $Q\,d\lambda$ мероморфных на Γ и голоморфных вне $\lambda=0,\infty$ ответ весьма простой. При изменении компоненты $\sigma'\longrightarrow\sigma''$ часть γ-циклов M_j сохраняется неизменной (в частности, все M для $j>k$ и часть M_j для $j\leqslant k$), остальная часть подвергается антиинволюции, $\tau(y,\lambda)=(-\bar{y},\bar{\lambda})$, как указано в § 2. Кривые M'_j и M''_j, где $M'_j = M''_j$, гомотопны на Γ, но негомотопны на $\Gamma\setminus(0\cup\infty)$. Легко видеть следующее равенство

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{M'_j} Q\,d\lambda \;-\; \frac{1}{2\pi}\oint_{M''_j} Q\,d\lambda = \operatorname*{res}_{\lambda=0}\,[Q\,d\lambda].$$

Так как переход к другой компоненте и состоит в замене для части номеров $j\leqslant k$ кривых M'_j на M''_j (или наоборот), указанное равенство полностью решает вопрос об изменении переменных действия:

$$J_j(\sigma')=J_j(\sigma''),\quad j>k,$$

$$J_j(\sigma')-J_j(\sigma'')=\frac{1}{2}(\sigma'_j-\sigma''_j)\operatorname*{res}_{\lambda=0}\,[Q\,d\lambda],$$

$$\sigma'=(\sigma'_1,\dots,\sigma'_k),\quad \sigma''=(\sigma''_1,\dots,\sigma''_k).$$

Таков, например, гамильтонов формализм стационарной задачи, указанный в примере 2 из § 2, где

$$Q\,d\lambda=Q_2\,d\lambda=2i\Big(1+16\sqrt{\prod_{j\neq 0}\lambda_j}\Big)\sqrt{\prod_{j=0}^{2n}(\lambda-\lambda_j)}\;\lambda^{-2}\,d\lambda.$$

Однако, для важного в приложениях гамильтонова формализма, порожденного ограничением на конечнозонное семейство общеполевой стандартной локальной скобки Пуассона (где роль аннулятора играют периоды квазипериодической функции $\exp(\,iu)\,)$, дело обстоит сложнее. Здесь мы имеем (см. пример I из § 2)

$$Q\,d\lambda=Q_1\,d\lambda=4ip(\lambda)\,\lambda^{-1}\,d\lambda,$$

где $p(\lambda)$ – квазиимпульс. Во-первых, форма $Q_1\,d\lambda$ мероморфна лишь на накрывающей $f:\hat{\Gamma}\longrightarrow\Gamma$, где образ $\operatorname{Im} p_*(H_1\,\hat{\Gamma})\longrightarrow H_1(\Gamma))$ состоит из подгруппы, натянутой на циклы $(a_1,\dots,a_n)$. Группа монодромии этого покрытия является свободной абелевой $\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$ (n штук) и порождается движениями

$$\varkappa_i : \hat{\Gamma} \longrightarrow \hat{\Gamma} , \quad i=1,\ldots,n .$$

На накрывающей $\hat{\Gamma}$ форма $f^*(dp)$ является точной, а функция $p(\lambda)$ однозначной. Кроме того, во всех прообразах точек $(\lambda=0)$ и $(\lambda=\infty)$ форма $Q_1 d\lambda$ имеет ненулевой вычет, согласно разложению величины $p(\lambda)$ при $\lambda=0$, указанному в § I. Этот вычет равен $(4i\bar{e})$ в точках $f^{-1}(0)$, где $\bar{e}$ средняя плотность топологического заряда (см.§ I). Согласно § 2 мы имеем

$$\bar{e} = \sum \sigma_j m_j , \quad \sigma_j = \pm , \quad m_j = \frac{1}{2\pi} U_j ,$$

где $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$– номер компоненты связности вещественных решений, $U_j = \oint_{b_j} dp$. Однако, эта формула имеет смысл только для вещественных компонент, описываемых набором σ в то время как плотность топологического заряда имеет смысл для гладких комплекснозначных $u(x)$, если $\exp(iu)$ – квазипериодична. В группе монодромии (движений) накрытия $f:\hat{\Gamma}\longrightarrow\Gamma$, которая изоморфна $\mathbb{Z}^n$ выделена подгруппа $\mathbb{Z}^k\subset\mathbb{Z}^n$, порожденная первыми $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k$ согласно нумерации a–циклов, указанной в § 2. При движениях мы имеем

$$\varkappa_j^* \, p(\lambda) = p(\lambda) + U_j .$$

Выделен набор вершин k–мерного куба в пространстве R^k с координатами $(\pm 1/2, \pm 1/2, \ldots, \pm 1/2)$. Пусть $\varkappa_j$ $(j=1,\ldots,k)$ действует в R^k, добавляя к $j=n$ координате $(+1)$. Тогда вершины куба символически изображают вещественные компоненты, причем вершина с координатами $(1/2,\ldots,1/2)$ изображает компоненту $\sigma' = (+,\ldots,+)$ и отвечает "начальной" точке полного прообраза $Q_0\in f^{-1}(0)$. Остальные вершины получаются из этой преобразованием $\varkappa_1^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot\varkappa_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i = 0$, или (-1). При переходе на другой лист $Q_0 \longrightarrow \prod_i \varkappa^{\varepsilon_i}(Q_0)$ регулярная часть функции $p(\lambda)$ меняется на величину:

$$p(\lambda) \longrightarrow p(\lambda) + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j U_j .$$

Это сохраняет вид разложения $p(\lambda)$ при $\lambda=0$, указанный в § I, учитывая равенства

$$\pi\bar{e} = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j U_j / 2 , \quad p(\lambda) = -\frac{1}{16\sqrt{\lambda}} + \pi\bar{e} + O(\sqrt{\lambda}) .$$

Итак, переход к другой компоненте связности $\sigma''=(\sigma_1'',\dots,\sigma_k'')$, $\sigma_j''=(-1)^{\varepsilon_j}$ вещественных решений означает, во-первых, переход к другой "начальной" точке $\mathcal{O}_{\sigma''}\in f^{-1}(\mathcal{O})$ и тем самым к другой ветви многозначной функции $p(\lambda)$. Во-вторых, как указывалось в § 2, необходимо изменить кривые M_j, $j\leqslant k$ представляющие циклы (a_j) для тех номеров j, где $\sigma_j''\neq\sigma_j'$ – на кривые $M_j''=\tau M_j'$; здесь τ антиинволюция $(y,\lambda)\longrightarrow(-\bar{y},\bar{\lambda})$. Изменение набора γ-циклов при переходе к другой вещественной компоненте состоит из двух операций – антиинволюции над частью кривых $M_j'(j\leqslant k)$, где σ_j' меняется $\sigma_j''\neq\sigma_j'$ и сдвиг квазиимпульса на другую ветвь. Это порождает изменение всех компонент $J_j(\sigma)$ для $j\leqslant k$. Вычисляя изменение интеграла действия, мы получаем формулы изменения переменных J_j для стандартной скобки Пуассона:

$$J_j(\sigma'')=J_j(\sigma'),\ j>k,$$

$$J_j(\sigma'')-J_j(\sigma')=$$

$$=8\pi\sum_{s=1}^{k}m_s\frac{\sigma_s'\sigma_j'-\sigma_s''\sigma_j''}{2},\ j\leqslant k.$$

В частном случае, когда $\sigma_j''=-\sigma_j'$ для всех $j\leqslant k$, мы получаем $J_1(\sigma'')=J_j(\sigma')$. Этот ответ естественный, так как преобразование $\sigma\to-\sigma$ отвечает тривиальному преобразованию $u\to-u$, $\bar{e}\to-\bar{e}$ учитывая нечетность функции $\sin u$.

Переменные действия могут быть использованы для ряда важных приложений. Во-первых, квазиклассическое квантование требует знания именно переменных действия. В теории солитонов оно было начато (для быстроубывающих классов функций) Фаддеевым и Тахтаджяном [22]. Во-вторых, переменные действия играют важную роль в гамильтоновой теории медленных модуляций – полевых аналогах метода усреднения Боголюбова и др. типа Уизема или нелинейного аналога метода ВКБ. Мы не будем вникать в этот вопрос более детально – обсуждение его глубокой дифференциально-геометрической природы читатель найдет в работе [23].

Литература

1. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега де Фриза – вполне интегрируемая гамильтонова система. – Функц.анализ и его прилож., 1971, т.5,в.4, с.18-27.
2. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Под ред.С.П.Новикова. М., 1980.

3. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортевега де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия. – УМН, 1976, т.31, в.1, с.55–136.
4. Дубровин Б.А., Натанзон С.М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Гордон. – Функц.анализ и его прилож., 1982, т.16, в.1, с.27–43.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно-периодический аналог многосолитонных решений уравнения Кортевега де Фриза (КдФ). – ЖЭТФ, 1974, т.67, в.12, с. 2131–2143.
6. Flaschka H., McLaughlin D. Canonically conjugate variables for KdV equation with periodic boundary conditions. – In: Progress Theor.Phys., 1976, v.55, N 2, p.438–456.
7. Веселов А.П., Новиков С.П. О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой КдФ на множестве конечнозонных потенциалов. – Докл. АН СССР, 1982, т.266, № 3, с.233–237.
8. Веселов А.П., Новиков С.П. Скобки Пуассона и комплексные торы. – Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1983, т.165, с.39–62.
9. Дубровин Б.А., Новиков С.П. Алгеброгеометрические скобки Пуассона для вещественных конечнозонных решений нелинейного уравнения Шредингера (НШ) и уравнения sine-Gordon (SG). – Докл.АН СССР, 1982, т.267, № 6, с.1295–1300.
10. Alber S.I. On stationary problems of Korteweg-de Vries type, – Comm.Pure Appl.Math., 1981, v. 34, p.259–272
11. Козел В.А., Котляров В.П. Почти периодические решения уравнения $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$. Докл.АН УССР, сер.А, 1976, № 10, с.878–881.
12. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера. – Докл.АН УССР, 1976, сер.А, № 11, с.965–968.
13. McKean H. The sine-Gordon and sinh-Gordon equations on the circle. – Comm.Pure Appl. Math., 1981, v. 34, p. 197–257.
14. Чередник И.В. Об условиях вещественности в конечнозонном интегрировании. – Докл.АН СССР, 1980, т.252, № 5, с. 1104–1108.

15. E r c o l a n i N., F o r e s t M.G. The geometry of real two-phase sine-Gordon wavetrains. Preprint Ohio State University, 1982, N 17/82, 50 p.

16. Д у б р о в и н Б.А. Аналитические свойства спектральных данных для несамосопряженных линейных операторов, связанных с вещественными периодическими решениями уравнения sine-Gordon. – Докл.АН СССР, 1982, т.265, № 4, с.789–793.

17. К р и ч е в е р И.М. Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова – Шабата и их периодических решений. – Докл. АН СССР, 1976, т.227, № 2, с.291–294.

18. Д у б р о в и н Б.А., К р и ч е в е р И.М., Н о в и к о в С.П. Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности. – Докл.АН СССР, 1976, т.229, № 1, с.15–18.

19. К р и ч е в е р И.М., Н о в и к о в С.П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. – УМН, 1980, т.35, в.6, с.47–68.

20. Д у б р о в и н Б.А. Матричные конечнозонные операторы. – В кн.: Соврем.проблемы матем., ВИНИТИ, 1983, т.23, с.33–78.

21. Н о в и к о в С.П. Двумерный оператор Шредингера в периодических полях. – В кн.: Соврем.проблемы матем., ВИНИТИ, 1983, т.23, с.3–32.

22. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Существенно нелинейная одномерная модель классической теории поля. – ТМФ, 1974, т.21, № 2, с.160–174; дополнение ТМФ, 1974, т.22, № 1, с.143–144.

23. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова – Уизема. – Докл.АН СССР, 1983, т.270, № 4, с.781–785.

Б.С.Павлов, Н.В.Смирнов

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОМЕРНЫХ РЕДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В квантовой механике часто возникают ситуации, когда при выполнении какого-либо предельного перехода скачком меняется спектральная структура рассматриваемого оператора. Так, в нашей статье [I] описано возникновение зонной структуры спектра при апроксимации периодического потенциала в операторе Шредингера финитными, представляющими собой его конечнопериодическую срезку. Другой задачей такого сорта является задача о возникновении дискретного спектра при замыкании "ловушки" и при апроксимации растущего потенциала финитными $q_R(x)=q(x)$, $|x|\leq R$, $q_R(x)=0$, $|x|>R$ (см. С.В.Петрас [2] и А.Г. Аленицын [3] Во всех случаях, когда рассматриваемый оператор задан обыкновенным дифференциальным выражением, за указанными предельными переходами удается проследить, рассматривая функции Вейля.

В предлагаемой работе мы исследуем предельный переход, который в квантовой механике кристаллов называется "приближением сильной связи". Именно, взяв локально суммируемый вещественный потенциал q с конечным первым моментом $Q=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,|q(x)|\,dx<\infty$, мы изучаем оператор Шредингера в $L_2(R)$ с периодическим потенциалом $q_a(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q(x-na)$, $x\in R$

$$\ell_a y=-y''+q_a y .$$

Оператор ℓ_a имеет зонный спектр. Предельный оператор

$$\ell y=-y''+qy$$

имеет непрерывный спектр на промежутке $[0,\infty)$ и не более конечного числа отрицательных собственных чисел.

Мы покажем, что на каждом компакте K в области регулярности оператора ℓ функция Вейля $m_a^{\pm}(\lambda)$ оператора ℓ_a стремятся равномерно к соответствующим функциям Вейля $m^{\pm}$ предельного оператора ℓ . Отсюда выводится два следствия спектрального характера. Во-первых, пользуясь ограниченностью функций Вейля рассматриваемых задач на каждой замкнутой области разрезанной плоскости λ , не содержащей собственных чисел оператора ℓ и точки $\lambda=0$ мы выводим из полученного результата, что спектральные проекторы оператора ℓ_a слабо стремятся к спектральным проекторам оператора ℓ . Отсюда, в частности, собственные функции оператора ℓ получаются предельным переходом из собственных функций оператора ℓ_a (в $L_{2,loc}$). Во-вторых, мы показываем, что, в определенном смысле, верно и обратное. Именно, пусть λ_0, $\lambda_0 < 0$ – собственное число предельного – "одноатомного" – оператора ℓ и ψ – отвечающая ему собственная функция. Тогда при достаточно больших значениях a вблизи λ_0 лежит экспоненциально-узкая зона Δ непрерывного спектра оператора ℓ_a и отвечающая ей ветвь Блоховских собственных функций $\psi_a(x,\lambda)$ апроксимируется линейной комбинацией сдвигов "атомной" собственной функции

$$\psi_a(x) \cong \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu^n(\lambda)\,\psi(x-na), \quad \lambda \in \Delta .$$

Эта формула хорошо известна в квантовой теории кристаллов под названием приближения сильной связи для Блоховских собственных функций. Мы дадим ее математического определение и оценим скорость приближения при $a \longrightarrow \infty$.

Авторы благодарны Н.В.Абаренкову за проявленный им живой интерес к нашей работе и полезные обсуждения полученных результатов.

I. Для операторов Шредингера ℓ_a, ℓ с потенциаламми рассматриваемого класса на каждом из промежутков $(0,\pm\infty) = R_\mp$, имеет место случай предельной точки. Это означает, что в области регулярности для каждого из них существует аналитическая функция $m^+(\lambda), m_a^+(\lambda)$ такая, что линейные комбинации стандартных решений $\varphi, \theta; \varphi_a, \theta_a$ соответствующих однородных уравнений

$$\begin{array}{llll} \ell\varphi=\lambda\varphi & \ell\theta=\lambda\theta & \ell_a\varphi_a=\lambda\varphi_a & \ell_a\theta_a=\lambda\theta_a \\ \varphi|_0=0,\ \varphi'|_0=1 ; & \theta|_0=1,\ \theta'|_0=0 ; & \varphi_a|_0=0,\ \varphi_a'|_0=1 ; & \theta_a|_0=1,\ \theta_a'|_0=1 \end{array}$$

принадлежат $L_2(R_+)$

$$\chi = \theta + m^+\varphi, \quad \chi_a = \theta_a + m_a^+\varphi_+ \quad .$$

Аналогичные функции m^-, m_a^- сопоставляются левой полуоси. Функции $m^\pm$, $m_a^\pm$ называются функциями Вейля спектральных задач $\ell^\pm y=\lambda y,\ y(0)=0;\ \ell_a^\pm y=\lambda y,\ y(0)=0$ соответственно на правой и левой полуоси. Функции Вейля полностью определяют спектральные свойства операторов $\ell^\pm$, $\ell_a^\pm$, в частности, их спектральные функции совпадают с мерами $\rho^\pm$, $\rho_a^\pm$, через которые $m^\pm$, $m_a^\pm$ представляются интегралами Шварца (см. [4]). Функции Вейля легко выражаются через стандартные решения соответствующих однородных уравнений. Именно, пусто $f_\pm$ – определенные на $R_\pm$ соответственно решения уравнения $\ell y = k^2 y$, $\operatorname{Im} k > 0$, имеющие асимптотики

$$f_+(x,k) \sim \exp(ikx), \quad x \longrightarrow +\infty$$
$$f_-(x,k) \sim \exp(-ikx), \quad x \longrightarrow -\infty$$

– так называемые решения Иоста. Функции Вейля $m^{\pm}(\lambda)$ выражаются через решения Иоста следующим образом

$$m^{\pm}(\lambda) = f'_{\pm}(0,k)\, f_{\pm}^{-1}(0,k), \quad k=\sqrt{\lambda}. \tag{I}$$

Функции Вейля $m_a^{\pm}(\lambda)$ выражаются через стандартные решения θ, φ и их производные в точке $x = \pm a/2$ по формулам

$$m_a^{\pm}(\lambda) = -(\theta_a^+ - \mu_a^{\pm}\theta_a^-)(\varphi_a^+ - \mu_a^{\pm}\varphi_a^-)^{-1}, \tag{2}$$

где $\theta_a^{\pm} = \theta(\pm a/2, \lambda)$, $\varphi_a^{\pm} = \varphi(\pm a/2, \lambda)$ и $\mu^{\pm}$ – так называемые множители Блоха, т.е. собственные числа оператора монодромии T на промежутке $(-a/2, a/2)$

$$\mu^{\pm} = S_p T/2 \pm \sqrt{(S_p T/2)^2 - 1}\ .$$

Знак радикала выбирается таким образом, чтобы в верхней полуплоскости $\Im m\,\lambda > 0$ было выполнено $|\mu_a^+| < 1$, $|\mu_a^-| > 1$. Тогда и на всей области регулярности оператора ℓ_a оказывается $|\mu_a^+(\lambda)| < 1$, $|\mu_a^-(\lambda)| > 1$, $\mu_a^+\mu_a^- = 1$.

Отметим сразу же, что след оператора монодромии на периоде инвариантен, т.е. не зависит от расположения периода на оси. В частности,

$$T_a(0,a) = \begin{pmatrix} \theta(a,\lambda) & \varphi(a,\lambda) \\ \theta'(a,\lambda) & \varphi'(a,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$T_a(-a/2, a/2) = \begin{pmatrix} \theta_+\varphi'_- - \varphi_+\theta'_- & -\theta_+\varphi_- + \varphi_+\theta_- \\ \theta'_+\varphi_- - \varphi'_+\theta_- & -\theta'_+\varphi_- + \varphi'_+\theta_- \end{pmatrix}$$

и $S_p T_a(0,a) = \mu + \frac{1}{\mu} = \theta(a,\lambda) + \varphi'(a,\lambda) = S_p T_a(-a/2, a/2) = S_p T_a$.

Наряду с формулой (2) для функции Вейля справедливо также и формула

$$m^{\pm} = (\theta'_+ - \mu_{\pm}\theta'_-)(\varphi'_+ - \mu_{\pm}\varphi'_-)^{-1},$$

которая выводится из условия периодичности решения χ_a : $\chi_a^{\pm}(a/2, \lambda) = \mu^{\pm}\chi_a^{\pm}(-a/2, \lambda)$.

В дальнейшем, наряду с операторами ℓ, ℓ_a нам понадобится вспомогательный оператор $\tilde{\ell}_a$ потенциал которого $\tilde{q}_a$ порожден сдвигами:

$$\tilde{q}_a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{q}(x-na),\ |x|<a/2;\ \tilde{q}_a=0,\ |x|>a/2 .$$

"Промежуточный" оператор $\tilde{\ell}$ оказывается хорошо связанным как с оператором ℓ, так и с ℓ_a, поскольку отвечающие ему стандартные решения $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\theta}$ на $(-a,a)$ совпадают с соответствующими решениями $\ell_a=\lambda a$.

Имеет место следующая формула:

$$\mathrm{Sp}\, T_a = \tilde{S}^a_{11}(k) .$$

ЛЕММА I. Пусть $\tilde{S}^a$ - матрица рассеяния $\{\tilde{S}^a_{ij}\}$, отвечающая финитному потенциалу $\tilde{q}_a$. Тогда $\tilde{S}^a$ допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного k как мероморфная функция и справедлива формула

$$\mathrm{Sp}\, T_a=\left[\tilde{S}^a(-k)\right]^{-1}\exp(-ika)+\left[\tilde{S}^a(k)\right]^{-1}\exp(ika)$$

на вещественной оси приобретающая вид:

$$\mathrm{Sp}\, T_a=2\,\mathrm{Re}\,\tilde{S}^{a^{-1}}_{11}(k)\exp(ika) .$$

Запишем матрицу монодромии оператора ℓ_a через решения Йоста $\tilde{f}_\pm(x,k)$, $\tilde{f}_\pm(x,-k)$ уравнения $\tilde{\ell}y=k^2y$,

$$\tilde{S}^a_{11}\tilde{f}_-(x,-k)=\tilde{f}_+(x,k)+\tilde{S}^a_{21}\tilde{f}_+(x,-k),$$
$$\tilde{f}_-(x,k)+\tilde{S}^a_{12}\tilde{f}_-(x,-k)=\tilde{S}^a_{22}\tilde{f}^a_+(x,-k) .$$

Ввиду финитности потенциала $f_\pm(x,k)=\exp(\pm ikx)$ при $x>a/2$, $x<-a/2$ соответственно, это дает следующие равенства для оператора монодромии $T_a(-a/2,a/2)\equiv T_a$

$$\begin{aligned} &T_a e^{-ika/2}\tilde{S}^a_{11}\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}=e^{ika/2}\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}+\tilde{S}^a_{21}e^{-ika/2}\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}\\ &T_a\left[e^{ika/2}\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}+\tilde{S}^a_{12}e^{-ika/2}\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}\right]=\tilde{S}^a_{22}e^{-ika/2}\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}\end{aligned}\qquad(3)$$

отсюда находим:

$$T_a e^{ika/2}\tilde{S}^a_{11}\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}=e^{-ika/2}\det\tilde{S}^a\begin{pmatrix}1\\ -ik\end{pmatrix}-\tilde{S}^a_{12}e^{ika/2}\begin{pmatrix}1\\ ik\end{pmatrix}.$$

Вместе с (3) это влечет равенство

$$\mathrm{S_p}\, T_a=\left[\tilde{S}^a_{11}\right]^{-1}\left[e^{-ika}\det\tilde{S}^a-e^{ika}\right],$$

которое с учетом тождества $\det \tilde{S}^a = [\tilde{S}^a_{11}(-k)]^{-1}\tilde{S}^a_{11}(k)$ дает искомый результат.

Функции Вейля $m^{\pm}$ промежуточного оператора $\tilde{l}$, оказывается, просто связаны с функциями Вейля $m^{\pm}_a$ оператора l_a. Чтобы избежать нагромождения индексов, мы проведем доказательство этого факта лишь для функций Вейля $\tilde{m}^+$, m^+_a, которые временно обозначим через $\tilde{m}$, m_a. Блоховский множитель задачи $l_a y = \lambda y$ обозначим через μ^+_a.

ЛЕММА 2. Справедлива оценка:

$$|\tilde{m} - m_a - \mu^+_a (\tilde{\varphi}'_+ \tilde{\varphi}_- - \tilde{\varphi}'_- \tilde{\varphi}_+)^{-1}| \leq 2\,|\tilde{\varphi}'_+ \bar{\tilde{\varphi}}_+ - \tilde{\varphi}_+ \bar{\tilde{\varphi}}'_+|^{-1} \tag{4}$$

Здесь $\tilde{\varphi}_\pm, \tilde{\theta}_\pm, \varphi'_\pm, \tilde{\theta}'_\pm$ – стандартные решения уравнения $l_a y = \lambda y$ и их производные при $x = \pm a$ соответственно.

Чтобы проверить оценку (4), придется проанализировать известное рассуждение Г.Вейля [5]. Для "произвольного" решения $\psi = \theta + M\varphi$ однородного уравнения $\tilde{l}_a \psi = \lambda \psi$ при фиксированном λ из верхней полуплоскости $C_+ = \{\lambda, \operatorname{Im}\lambda > 0\}$ с помощью интегрирования по частям доказывается равенство

$$\int_a^b |\psi|^2 dx = \frac{\operatorname{Im} M}{\operatorname{Im}\lambda} - \frac{|\psi(a/2)|^2}{\operatorname{Im}\lambda} \operatorname{Im} \psi'/\psi \Big|_{x=b}. \tag{5}$$

Область в плоскости M, где выполнено неравенство $\int_0^b |\psi|^2 dx \leq \operatorname{Im} M/\operatorname{Im}\lambda$, представляет собою круг Вейля $\mathcal{D}_b$, расположенный в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} M > 0$

$$\mathcal{D}_b = \{M : M = -[\tilde{\varphi}'(b) - z\tilde{\varphi}]^{-1} [\tilde{\theta}'(b) - z\tilde{\theta}(b)],\ \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Его радиус ρ_a выражается через вронскиан $W[\tilde{\varphi}, \bar{\tilde{\varphi}}]$

$$\rho_b = |\tilde{\varphi}'(b)\bar{\tilde{\varphi}}(b) - \tilde{\varphi}(b)\bar{\tilde{\varphi}}'(b)|^{-1} = \Big|2\operatorname{Im}\lambda \int_0^b |\tilde{\varphi}|^2 dx\Big]^{-1}, \operatorname{Im}\lambda > 0,$$

а центр лежит в точке $M_0(b) = -W[\tilde{\theta}, \bar{\tilde{\varphi}}]_b(b)\{W[\tilde{\varphi}, \bar{\tilde{\varphi}}](b)\}^{-1}$ Круги, отвечающие различным значениям b " "гнездятся": $\mathcal{D}_{b'} \subset \mathcal{D}_b$ если $b' > b$, и в случае "предельной точки", когда $\int_0^\infty |\tilde{\varphi}|^2 dx = \infty$, стягиваются при $b \to \infty$ к $m(\lambda)$-значению функции Вейля $\tilde{m}(\lambda)$

Для нас важно, что при любом выборе аналитической в C_+ функции z_b с положительной мнимой частью имеет место включение

$$[\theta'(b) - z_b\,\theta(b)][\varphi'(b) - z_b\,\varphi(b)]^{-1} \equiv m^z(\lambda, b) \in \mathcal{D}_b$$

и потому $m^{z}(\lambda,b)\longrightarrow m(\lambda)$, когда $b\to\infty$, независимо от выбора функции z. При этом заведомо выполнено

$$|m^{z}(\lambda,b)-\widetilde{m}(\lambda)|<2\rho_b . \qquad (6)$$

Положим теперь $b=a/2$ и воспользуемся следующим выбором функции z_b

$$z_b(\lambda)=\varphi'(b,\lambda)\,\varphi^{-1}(b,\lambda) .$$

Условие положительности ее мнимой части легко проверяется на основании Вейлевской формулы интегрирования по частям (5). С другой стороны, сравним выражение

$$m^{z}(\lambda,\tfrac{a}{2})=-(\varphi_-\varphi'_+-\theta_+\varphi'_-)(\varphi'_+\varphi_- -\varphi_+\varphi'_-)^{-1} ,$$

где $\varphi_\pm=\varphi(\pm a/2)$ и т.д., с функцией Вейля m_a периодической задачи, которая находится из условий Блоха:

$$\theta+m_a\varphi_+=\mu_a^+(\theta_-+m_a\varphi_-) ,$$
$$\theta'_+ +m_a\varphi'_+=\mu_a^+(\theta'_- +m_o\varphi'_-).$$

В силу тождества Лиувилля справедливо равенство

$$1=\mu_a^+\left[(\theta_-\varphi'-\varphi_\pm\theta'_-)+m_a(\varphi_-\varphi'_+-\varphi'_-\varphi_+)\right]. \qquad (7)$$

С учетом выражения для следа оператора монодромии получим

$$\varphi_-\theta'_+-\theta_+\varphi'_-=\varphi'_+\theta_--\varphi_+\theta'_--\mu_a^+-(\mu_a^+)^{-1}=$$
$$=-\left[m_a(\varphi_-\varphi'_+-\varphi'_-\varphi_+)+\mu_a^+\right]=-m_aW[\varphi_-,\varphi_+]-\mu_a^+ .$$

Теперь равенство (7) записывается в виде:

$$m^{z}(\lambda,a/2)=m_a+\mu_a^+\left\{W[\varphi_-,\varphi_+]\right\}^{-1} . \qquad (8)$$

Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться оценкой (6).

В сущности, оценки (4) было бы достаточно для доказательства основного результата настоящей работы, если бы удалось заменить промежуточный оператор $\widetilde{l}$ одноатомным оператором l и оценить вснизу выражения $W[\widetilde{\varphi}_+,\widetilde{\varphi}_-]$ и $W[\widetilde{\varphi}_+,\bar{\widetilde{\varphi}}_+]$.

Оба этих шага основаны на том, что операторы l и $\widetilde{l}$ близки, действительно их потенциалы q и $\widetilde{q}_a$ мало отличаются в метрике нулевого и первого момента

$$\int_{-\infty}^{\infty}|q(x)-\widetilde{q}_a(x)|\,dx\leq 2\int_{|t|>a/2}|q(t)|\,dt ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|q(x)-\tilde{q}_a(x)|\,dx \leqslant 2\int_{|t|>a/2} |t|\,|q(t)|\,dt .$$

Мы будем далее опираться на следующее утверждение описывающее устойчивость решений уравнения Шредингера относительно возмущений потенциала слагаемым с малыми нулевым и первым моментами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $q, \tilde{q}$ – локально суммируемые (в пунктах, касающихся f – суммируемые с конечным первым моментом) функции, заданные на вещественной оси. Введем следующие обозначения

$$\int_{(0,x)} t^{\alpha}|q(t)|dt = Q_{\alpha}(0,x),\ \alpha=0,1;\quad \int_{|t|\geqslant|x|} |t|^{\alpha}|q(t)|\,dt = Q_{\alpha}(x,\infty),\ \alpha=0,1,$$

для моментов потенциала q и соответствующие обозначения $\tilde{Q}_{\alpha}$, δQ_{α} для моментов потенциала $\tilde{q}$ и разности $\delta q = q - \tilde{q}$. Тогда имеют место следующие оценки стандартных решений и их производных

$$|\varphi(x)| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)\,|x| \exp Q_1(0,x),$$

$$|\theta(x)| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)(1+|x|) \exp Q_1(0,x),$$

$$|f_{\pm}(x)| \leqslant \exp\,(-\operatorname{Im} k|x|) \exp Q_1(x,\infty),$$

$$|f_{\pm} \exp(\mp ikx)| \leqslant \exp\,\left[|k|^{-1} Q_0(-\infty,\infty)\right],$$

$$|\varphi'(x)| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)\left\{1+Q_1(0,x)\right\} \exp Q_1(0,x),$$

$$|\theta'(x)| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)\left\{|k|+Q_0(0,x)+Q_1(0,x)\right\} \exp Q_1(0,x),$$

$$|f'_{\pm}(x)| \leqslant \exp\,(-\operatorname{Im} k|x|)\left\{|k|+Q_0(x,\infty)\right\} \exp Q_1(x,\infty).$$

а также следующие оценки для соответствующих разностей:

$$|\delta\varphi| = |\varphi(x)-\tilde{\varphi}(x)| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)\,\delta Q_1(0,x) \exp\left[Q(0,x)+\tilde{Q}_1(0,x)\right],$$

$$|\delta\theta| \leqslant \exp(\operatorname{Im} k|x|)\left[\delta Q_0(0,x)+\delta Q_1(0,x)\right] \exp\left[Q_1(0,x)+\tilde{Q}_1(0,x)\right],$$

$$|\delta f_{\pm}| \leqslant \exp(-\operatorname{Im} k|x|)\,\delta Q_1(x,\infty) \exp\left[Q_1(x,\infty)+\tilde{Q}_1(x,\infty)\right],$$

$$|\delta f_{\pm} e^{-ikx}| \leqslant 1/|k|\,\delta Q_0(-\infty,\infty) \exp 1/|k|\left[Q_0(-\infty,\infty)+\tilde{Q}_0(-\infty,\infty)\right],$$

$$|\delta\varphi'| \leqslant \exp\,(\operatorname{Im} k|x|)\,\delta Q_1(0,x)\left[1+Q_1(0,x)+\tilde{Q}_1(0,x)\right] \times$$

$$\times \exp\left[Q_1(x,\infty)+\tilde{Q}_1(x,\infty)\right],$$

$$|\delta\theta'| \leqslant \exp(\operatorname{Im} k|x|)\left[\delta Q_0(0,x)+\delta Q_1(0,x)\right] \times$$
$$\times\left\{1+\sum_{\alpha=0}^{1}\left[Q_\alpha(0,x)+\tilde{Q}_\alpha(0,x)\right]\right\}\exp\left[Q_1(x,\infty)+\tilde{Q}_1(x,\infty)\right],$$
$$|\delta f'| \leqslant \exp(-\operatorname{Im} k|x|)\left[\delta Q_0(x,\infty)+\delta Q_1(x,\infty)\right]\times$$
$$\times\left[1+Q_0(x,\infty)+Q_1(x,\infty)\right]\exp\left[Q_1(x,\infty)+\tilde{Q}_1(x,\infty)\right].$$

Доказательство цитированного предложения содержится, в сущности, в книге В.А.Марченко [6]. Впрочем, его нетрудно получить и непосредственно, решая Вольтерровские уравнения для стандартных решений .

Положим теперь $\tilde{q}$ равным срезанному при $|x|>a/2$ потенциалу $\tilde{q}_a$. Тогда сразу видно, что

$$|\tilde{f}_+(0,k)-f_+(0,k)| \leqslant const\ Q_1(a/2,\infty),$$
$$|\tilde{f}'_+(0,k)-f'_+(0,k)| \leqslant const\ Q_1(a/2,\infty).$$

Это позволяет оценить разность между $\tilde{m}$ и m на основании (I),

$$|\tilde{m}-m| \leqslant const\,|f_+(0,k)|^{-1}|\tilde{f}_+(0,k)|^{-1}Q_1(a/2,\infty) \quad (9)$$

Заменить $\tilde{m}$ на m в формуле (4). Остается оценить снизу $W[\tilde{\varphi}_+,\varphi_-]$, $W[\tilde{\varphi}_+,\bar{\tilde{\varphi}}_+]$.

ЛЕММА 3. На области регулярности оператора $\tilde{\ell}^+$ справедлива асимптотика

$$W[\varphi_+,\bar{\varphi}_+]=(2ik)^{-1}e^{-ika}\left[f_+(0,k)\bar{f}_+(0,-\bar{k})+o(1)\right]. \quad (10)$$

На общей области регулярности операторов $\ell^{\pm}$ справедлива асимптотика

$$W[\varphi_+,\varphi_-]=(2ik)^{-1}e^{-ika}\left[f_+(0,k)f_-(0,-k)+o(1)\right]. \quad (11)$$

Ввиду однотипности утверждений (10),(11), докажем, здесь лишь второе. Для этого запишем $\varphi_\pm$, $\varphi'_\pm$ через решения Йоста уравнения $\tilde{\ell}y=k^2y$ со срезанным при $|x|>a/2$ потенциалом

$$\varphi_+ = 1/2ik\left[e^{ika/2}\tilde{f}_+(0,-k)-e^{-ika/2}\tilde{f}_+(0,k)\right],$$
$$\varphi_- = -1/2ik\left[e^{ika/2}\tilde{f}_-(0,-k)-e^{-ika/2}\tilde{f}_-(0,-k)\right],$$

здесь $\tilde{f}_\pm$ – функции Йоста вспомогательной задачи; тогда

$$W[\varphi_+,\varphi_-]=-\frac{1}{4ik}\left[e^{ika/2}\tilde f_+(0,-k)-e^{-ika/2}\tilde f_+(0,k)\right]\times$$

$$\times\left[e^{ika/2}\tilde f_-(0,-k)-e^{-ika/2}\tilde f_-(0,k)\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{e^{ika/2}\tilde f_+(0,-k)+e^{-ika/2}\tilde f_+(0,k)}{e^{ika/2}f_+(0,-k)-e^{-ika/2}f_+(0,k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{ika/2}\tilde f_-(0,-k)+e^{-ika/2}\tilde f_-(0,-k)}{e^{ika/2}\tilde f_-(0,-k)-e^{-ika/2}\tilde f_-(0,k)}\right\}.$$

Убедимся, что при $a\longrightarrow\infty$ выражения $exp(ika)\tilde f_\pm(0,-k)$ стремятся к нулю на каждом компакте в $\mathbb{C}_+$. Действительно, решая методом последовательных приближений вольтерровское уравнение для функции $\tilde f(x,k)e^{-ikx}$, получим после замены k на $-k$ и домножения на $exp(ika/2)$

$$\tilde f(0,-k)e^{ika}=e^{ika}\left[1+\int_0^{a/2}\frac{1-exp(-2ikt_1)}{2ik}q(t_1)dt_1+\right.$$

$$\left.+\int_0^{a/2}\frac{1-exp(-2ikt_1)}{2ik}q(t_1)\int_{t_1}^{a/2}\frac{1-exp[-2ik(t_2-t_1)]}{2ik}q(t_2)dt_1dt_2+\ldots\right].$$

Оценим общий член полученного ряда

$$J_n\left(\frac{a}{2}\right)=e^{ika}\int_0^{a/2}\frac{1-exp(-2ikt_1)}{2ik}q_1(t_1)\int_{t_1}^{a/2}\frac{1-exp[-2ik(t_2-t_1)]}{2ik}q(t_2)\ldots$$

$$\ldots\int_{t_{n-1}}^{a/2}\frac{1-exp[-2ik(t_n-t_{n-1})]}{2ik}q(t_n)dt_ndt_{n-1}\ldots dt_1.$$

Для этого область интегрирования, представляющую собою пирамиду $\mathfrak{R}_{a/2}=\{t:0\leq t_1\leq t_2\leq\ldots t_n\leq a/2\}$ представим в виде объединения меньшей пирамиды $\mathfrak{R}_{a/2-\Delta}$ и "слоя" $\mathfrak{R}_{a/2}\setminus\mathfrak{R}_{a/2-\Delta}$. Интеграл по меньшей пирамиде оценится легко, если воспользоваться разбиением $exp\,ika=exp\,ik\Delta\cdot exp(2ikt_1)\cdot exp[2ik(t_2-t_1)]\times$ $\times exp[2ik(t_3-t_2)]\ldots exp[2ik(\frac{a}{2}-\Delta-t_n)]$:

$$\left|e^{2ik\Delta}\mathcal{I}_n\left(\frac{a}{2}-\Delta\right)\right| \leqslant \exp\left[-2\,\mathrm{Im}\,k\Delta\right]\cdot\int\limits_0^{a/2-\Delta}\left|\frac{1-\exp(2ikt_1)}{2ikt_1}\right| t_1|q(t_1)|\,dt_1 \times$$

$$\times\int\limits_{t_2}^{a/2}\left|\frac{1-\exp\left[2ik(t_2-t_1)\right]}{2ik(t_2-t_1)}\right|(t_2-t_1)|q(t_2)|\,dt_2\ldots \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[-2\,\mathrm{Im}\,k\cdot\Delta\right](n!)^{-1}\left[\int\limits_0^{a/2-\Delta} t|q(t)|\,dt\right]^n .$$

Пользуясь тем же разбиением экспоненты $\exp(ika)$ можно оценить интеграл по "слою":

$$\left|e^{ika}\int\limits_{\Omega_{a/2}\setminus\Omega_{a/2-\Delta}}\right| \leqslant \frac{1}{n!}\left\{\left[\int\limits_0^{a/2} t|q(t)|\,dt\right]^n -\right.$$

$$\left.-\left[\int\limits_0^{a/2-\Delta} t|q(t)|\,dt\right]^n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{a/2-\Delta}^{a/2} t|q(t)|\,dt\cdot\left[\int\limits_0^{a/2} t|q(t)|\,dt\right]^{n-1} .$$

Вместе взятое, это дает:

$$\left|\mathcal{I}_n\left(\frac{a}{2}\right)\right| \leqslant e^{-2\,\mathrm{Im}\,k\Delta}(n!)^{-1}\left(\int\limits_0^{\infty} t|q(t)|\,dt\right)^n +$$

$$+\left[(n-1)!\right]^{-1}\int\limits_{a/2-\Delta}^{a/2} t|q(t)|\,dt\cdot\left(\int\limits_0^{\infty} t|q(t)|\,dt\right)^{n-1},$$

$$\left|e^{ika}\tilde{f}(0,k)\right| \leqslant \left[e^{-2\,\mathrm{Im}\,k\cdot\Delta}+\int\limits_{a/2-\Delta}^{a/2} t|q(t)|\,dt\right] e^{\int_0^{\infty} t|q(t)|\,dt} \equiv \varepsilon(\Delta,a) .$$

Здесь Δ с помощью какой-либо монотонно стремящейся к бесконечности функции $\Delta(a)$, такой, чтобы $\frac{a}{2}-\Delta(a)\to\infty$ одновременно с a, получим

$$\left|e^{ika}\tilde{f}(0,k)\right| \leqslant \varepsilon(\Delta(a),a) \equiv \varepsilon(a)\to 0 \quad \text{при } a\to\infty .$$

Сделанное наблюдение позволяет переписать выражение (12), выделяя главные члены

$$W[\varphi_+,\varphi_-] = -\frac{1}{4ik}e^{-ika}\left[\tilde{f}_+(0,k)\tilde{f}_-(0,k)+o(1)\right]\left[-2+o(1)\right] .$$

Для завершения доказательства леммы 3 остается воспользоваться тем, что согласно цитированному выше утверждению $\tilde{f}_{\pm}(0,\kappa)\to$ $\to f_{\pm}(0,\kappa)$ при $a\to\Delta$.

Объединяя факты, сформулированные в леммах 2, 3 и оценке I2, получаем следующее основное утверждение настоящей работы.

ТЕОРЕМА I. На каждом компакте в верхней полуплоскости $\mathcal{J}m\,\kappa>0$ вне малой окрестности корней функций Йоста $f_{\pm}(0,\kappa)$ (отвечающих собственным числам операторов $\ell^{\pm}, \ell^{\pm}y=\kappa^2 y$) функции Вейля $m_a^{\pm}(\kappa^2)$ периодических задач $\ell_a y=\kappa^2 y$, стремятся равномерно при $a\to\infty$ к функциям Вейля $m^{\pm}(\kappa^2)$ одноатомной задачи. При этом справедлива оценка

$$|m_a^{\pm}(\kappa^2)-m^{\pm}(\kappa^2)|\leqslant 10|\kappa|\left\{|f_+(0,\kappa)|^{-2}+|f_-(0,\kappa)|^{-2}\right\}\times$$

$$\times\exp 4\left[\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)|q(t)|\,dt\right]\cdot\int_{|x|>\frac{a}{2}}(1+|t|)|q(t)|\,dt .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Соответствующий факт верен также и для функций Вейля $m_{\alpha}^{\pm}$, отвечающих произвольным граничным условиям $y'-\alpha y|_0=0$.

2. Из теоремы I можно вывести ряд утверждений, касающихся предельного поведения спектральных характеристик операторов $\ell_a^{\pm}, \ell_a$ при $a\to\infty$. В качестве простейшего примера приведем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 2. При $a\to\infty$ спектральные проекторы $E_{a,\Delta}^{+}$ самосопряженного оператора ℓ_a^{+}, имеющего зонный спектр, слабо стремятся в $L_2(R^+)$ к спектральным проекторам E_{Δ}^{+} оператора

Доказательство основывается на известном представлении ядер спектральных проекторов

$$E_{\Delta}^{+}(x,y)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\Delta}}\varphi(x,\lambda)\varphi(y,\lambda)\,m^{+}(\lambda)\,d\lambda$$

интегралом по контуру прямоугольника, вырезающего участок спектра Δ (см. [4]). При этом нужно воспользоваться тем обстоятельством, что на всем контуре Γ_{Δ}, кроме малых участков, примыкающих к вещественной оси λ выполнено: $\varphi_a(x,\lambda)\to\varphi(x,\lambda)$, $m_a^{+}(\lambda)\to m^{+}(\lambda)$ при $a\to\infty$, а на указанных участках подынтегральное выражение остается равномерно ограниченным при всех a.

Другим интересным следствием теоремы I является строгое математическое оправдание приближения "сильной связи" в квантовой теории кристаллов. Мы докажем в этом направлении лишь следующий начальный результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть q – вещественная локально суммируемая функция с конечным первым моментом. Если оператор $\ell = -y'' + qy_2$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$ имеет отрицательное собственное число $\lambda_0 = -\varkappa_0$, $\ell_\psi = \lambda_0 \psi$, то при достаточно больших значениях a вблизи точки λ_0 лежит экспоненциально узкая зона Δ непрерывного спектра оператора ℓ_a, $|\Delta| \leq \exp[-\varkappa_0 a]\, const$, на которой ветвь Блоховских собственных функций $\psi_a(x,\lambda)$ оператора ℓ_a аппроксимируется специальными линейными комбинациями сдвигов "атомных" собственных функций ψ_a :

$$\sup_x \left| \psi_a(x,\lambda) - \sum_n \mu_a^n(\lambda)\psi(x-na) \right| \leq const\left[a^2 e^{-\varkappa_0 a/2} + \int\limits_{|x|>a/2} |t||q(t)|dt\right].$$

Здесь константа зависит лишь от моментов потенциала и $\mu_a(\lambda)$ - Блоховский множитель оператора ℓ_a .

Опишем в грубых чертах путь доказательства этой теоремы.

Согласно лемме I, Блоховский множитель $\mu_a^+ \equiv \mu_a$ выражается через матрицу рассеяния оператора $\tilde{\ell}$ с финитным потенциалом:

$$\mu_a(k) = Sp\, T_a/2 \pm \sqrt{(Sp\, T_a/2)^2 - 1},$$

где $Sp\, \tilde{T}_a(k) = [\tilde{S}_{11}(-k)]^{-1} \exp(-ika) + [\tilde{S}_{11}(k)]^{-1} \exp(ika)$.

Здесь

$$[\tilde{S}_{11}(k)]^{-1} \equiv \tilde{t}_{11}(k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{ikx}\tilde{q}_a(x)\tilde{f}_+(x,-k)\,dx ,$$

$$[\tilde{S}_{11}(-k)]^{-1} = \tilde{t}_{11}(-k) = 1 - \frac{1}{2ik}\int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx}\tilde{q}_a(x)\tilde{f}_+(x,k)\,dx .$$

Из формул (I4) видно, что при $a \to \infty$ обратный коэффициент прохождения $\tilde{t}_{11}(-k)$ при $a \to \infty$ стремится к аналитической в верхней полуплоскости $\Im m\, k > 0$ функции $t_{11}(-k) = [S_{11}(-k)]^{-1}$ - обратному коэффициенту прохождения одноатомной задачи. Если точка $\sqrt{\lambda_0} = k_0 \equiv i\varkappa_0$, $\varkappa_0 > 0$ отвечает отрицательному собственному числу, то $S_{11}^{-1}(-k_0) = 0$. Поэтому согласно теореме Руше вблизи точки k_0 при больших значениях a найдется точка $\tilde{k}_a = i\varkappa$, служащая корнем функции $\tilde{S}_{11}^{-1}(-k) = \tilde{t}_{11}(-k)$. Эта точка соответствует собственному числу $\tilde{k}_a^2 = -\varkappa^2$ вспомогательного оператора $\tilde{\ell}$. Ввиду того, что все корни функции t_{11} простые, т.е. $\dot{t}_{11}(k_0) \neq 0$, можно легко оценить расстояние от k_0 до k_a

$$|k_0 - \tilde{k}_a| \leq \left| [\dot{t}_{11}(-k_0)]^{-1} \right| |k_0|^{-1} \int\limits_{|x|>a/2} |q(t)|\,dt\; e^{\frac{2}{|k|}[Q_0(R) + \tilde{Q}_0(R)]} .$$

Поэтому непосредственно в точке $\tilde{k}_a = i\tilde{\varkappa}_a$ выполнено: при больших a :

$$|Sp\, T_a(\tilde{k}_a)| = |\exp(-\varkappa a)\tilde{t}_{11}(k_a)| =$$

$$= \left|\exp(-\varkappa a)\left[1 - \frac{1}{2\varkappa}\int_{-a/2}^{a/2} e^{-\varkappa a}\tilde{q}_a(x)\tilde{f}_+(x,-i\varkappa)\,dx\right]\right| \leq$$

$$\leq \exp(-\varkappa a)\left[1 + \frac{1}{2\varkappa}Q_0(R)\exp\frac{1}{\varkappa}Q_0(R)\right] < 2,$$

т.е. точка $\tilde{k}_a$ принадлежит непрерывному спектру оператора l_a поскольку $|\mu_a^+| = 1$.

Не ограничивая общности, можно считать, что λ_0 не является собственным числом операторов $l^\pm$ в $L_2(R^\pm)$ соответственно. В противном случае всегда можно вместо операторов $l^\pm$ рассмотреть операторы, задаваемые другими граничными условиями, например, $y' - hy|_0 = 0,\ \Im h = 0$. При сделанном предположении λ_a не будет собственным также и для операторов $\tilde{l}^\pm$ при достаточно больших значениях a, т.е. $\tilde{f}_\pm(\pm k) \neq 0$.

Тогда отвечающая точке $\lambda_a = k_a^2$ собственная функций $\psi_a = \theta + m_a^+\varphi$ непрерывного спектра мало отличается на периоде $(-a/2,\ a/2)$ от собственной функции $\tilde{\psi} = \theta + \tilde{m}^+\varphi$ вспомогательного оператора $\tilde{l}$, отвечающей собственному числу λ_a

$$\sup_{-a/2<x<a/2}|\psi_a - \tilde{\psi}| \leq |m_a - \tilde{m}| \sup_{-a/2<x<a/2}|\varphi_a(x)| \leq$$

$$\leq (2+\varepsilon)|k|\left|\tilde{f}_k(k_a)\cdot\tilde{f}_-(-k_a)\right|^{-1}\exp\left(-\Im k_a\cdot\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{a}{2}Q_1\left(0,\frac{a}{2}\right).$$

Кроме того, при больших a собственные функции $\tilde{\psi}, \psi$ операторов $\tilde{l}, l$, отвечающие собственным числам λ_a, λ_0 близки, поскольку обе совпадают, с точностью до множителей соответствующими решениями Йоста $\tilde{f}_\pm(x,k_a),\ f_\pm(x,k_0)$:

$$|f_+(x,k_0) - \tilde{f}_+(x,k_a)| = |f_+(x,k_0) - f_+(x,k_a)| + |f_+(x,k_a) - \tilde{f}_+(x,k_a)| \leq$$

$$\leq \exp[-\min(\varkappa_0,\varkappa_a)x]\int_{x>a/2}|t||q(t)|\,dt\,|t_{11}(k_0)|^{-1}\varkappa_0\cdot const.$$

Разности множителей также можно оценить на основании формул для коэффициентов отражения

$$\tilde{S}^a_{21}/\tilde{S}^a_{11} = -\frac{1}{2ik}\int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{ikx}\tilde{q}_a(x)\tilde{f}_-(x,-k)\,dx\,,$$

$$\tilde{S}^a_{12}/\tilde{S}^a_{11} = -\frac{1}{2ik}\int\limits_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx}\tilde{q}_a(x)\tilde{f}_+(x,-k)\,dx\,.$$

В результате получится $\sup\limits_{|x|<a/2}|\tilde{\psi}-\psi| \le const\int\limits_{|x|>a/2}|t||q(t)|\,dt$,
с константой, зависящей от моментов потенциала. Взятое вместе с оценкой экспоненциального уравнения для функции ψ, $|\psi(x)| \le const\,exp(-\varkappa_0|x|)$ это дает с учетом условий периодичности:

$$\sup_x\Big|\tilde{\psi}_a - \sum \mu^n_a(\lambda^a)\,\psi(x-a_n)\Big| \le \sup_{-a/2<x<a/2}|\tilde{\psi}_a-\psi| \le$$

$$\le \Big[exp(-\varkappa_0\tfrac{a}{2}) + \int\limits_{|x|>a/2}|t||q(t)|\,dt\Big]\,const\,.$$

Нетрудно показать, что оценка (15) остается справедливой для всех точек зоны, содержащей λ_a. Заметим сначала, что эта зона имеет экспоненциально малую длину. Действительно, ее концы $\lambda_\pm = k^2_\pm$ можно найти из приближенного уравнения

$$[\tilde{t}_{11}(-k_a)]^\bullet(k_\pm-k_a)\,exp(\varkappa_a a) + \tilde{t}_{11}(k_a)\,exp(-\varkappa_a a) = \pm 2\,,$$

что дает $k_\pm - k_a \cong 2\{[\tilde{t}_{11}(-\tilde{k}_a)]^\bullet\}^{-1}exp(-\varkappa_a a)$. Поэтому для стандартных решений уравнения $\ell y = k^2 y$ во внутренних точках зоны допускают оценку

$$\sup_{-a/2<x<a/2}|\tilde{\theta}(x,k)-\tilde{\theta}(x,k_a)| \le a|k-k_a|\,exp(\varkappa_a\tfrac{a}{2})\,const \le a\,exp(-\tfrac{\varkappa_a a/2}{2})\,const,$$

$$\sup_{-a/2<x<a/2}|\tilde{\varphi}(x,k)-\tilde{\varphi}(x,k_a)| \le a|k-k_0|\,exp(\varkappa_a a/2)\,const \le a\,exp(-x_a a/2)\,const\,.$$

Разность значений функций Вейля периодической задачи в близких точках зоны λ, λ_a можно оценить, просто относя приращение спектрального параметра к потенциалу $\delta q = \lambda - \lambda_a$ и пользуясь уже известными соображениями (см.доказательство теоремы I).

$$|m_a(\lambda) - m_a(\lambda_a)| \le const\cdot a\,|\lambda-\lambda_a| \le a\,exp(-\varkappa_a a)\,.$$

Вместе с оценками (15) это дает возможность сравнить значения "истинных" Блоховских собственных функций в разных точках зоны:

$$\sup_{-a/2<x<a/2}|\tilde{\psi}_a(x,\lambda)-\tilde{\psi}_a(x,\lambda_a)| \le const\,a^2 exp(-\varkappa^a_a/2)\,.$$

Объединяя последнюю оценку с (15), получим

$$\sup_{-a/2<x<a/2} |\tilde{\psi}_a(x,\lambda)-\psi(x)| \leqslant \mathrm{const}\{a^2 \exp(-\varkappa_0 a/2) + \int_{|x|>a/2} |t||q(t)|\,dt\}.$$

Ввиду того, что функция ψ экспоненциально убывает и для суммы $\sum_n \mu_a^n(\lambda)\psi(x-an) \equiv \Sigma(x)$ выполнено Блоховское условие периодичности $\Sigma(x+a) = \mu_a(x)\,\Sigma(x)$, получаем окончательно:

$$\sup_x |\tilde{\psi}_a(x) - \sum_n \mu_a^n(\lambda)\psi(x-na)| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\left[a^2 \exp(-\varkappa_0 \tfrac{a}{2}) + \int_{|x|>a/2} |t||q(t)|\,dt\right].$$

Литература

1. Павлов Б.С., Смирнов Н.В. Резонансное рассеяние на одномерном кристалле и тонкой пленке. - Вестн.ЛГУ, сер. матем., мех., астр., № 13, вып.3, 1977, с.71-80.
2. Петрас С.В. О расщеплении серий резонансов. - Функц. анализ и его прил., 1975, т.9, вып.2, с.89-90.
3. Аленицын А.Г. О возмущении несамосопряженного оператора Шредингера с дискретным спектром. - В сб. "Пробл.матем. физики", 1971, вып.5, с.5-24.
4. Титчмарш Е.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.I, М., 1960.
5. Weyl H. Über gewönliche Differentialgleichungen mit Sungularitäten und die zugehörigen Lutwicklungen willkürliher Funktionen. - Math.Ann., 1910, Bd.68, S.220-269.
6. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев, 1972.
7. Newton R.G. Inverse Scattering I. One dimension. - J. Math.Phys., 1980, v.21, p.493-505.

А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский

ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ТИПА КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ

В работе авторов [I] было показано, как с помощью метода орбит и так называемой схемы Адлера-Костанта [2], [3] можно строить гамильтоновы уравнения, допускающие представление нулевой кривизны. В настоящей заметке мы показываем, как этот подход распространяется на уравнения с двумя пространственными переменными. Для простоты мы ограничиваемся случаем скалярных лаксовых операторов, который приводит к уравнению Кадомцева-Петвиашвили (КП) и его аналогам. Случай матричных операторов рассматривается совершенно аналогично, но более громоздок.

Уравнение КП получается из уравнения КдФ присоединением дополнительной переменной y. Эта операция, по существу, не влияет на скобки Пуассона (новые скобки Пуассона ультралокальны по y), но сильно изменяет трактовку самого уравнения как динамической гамильтоновой системы. Дело в том, что плотности интегралов уравнения КдФ и его аналогов представляются в виде дифференциальных полиномов от неизвестных функций и автоматически принадлежат тому же функциональному классу, что и сами решения (например, классу быстро убывающих, периодических или почти периодических функций), а их выражения не зависят от конкретного вида краевых условий. Это позволяет построить формальную теорию интегралов для уравнения КдФ. Присоединение дополнительной переменной резко меняет положение: интегралы движения становятся нелокальными. Это приводит к тому, что стандартные формальные способы построения интегралов движения (например, подстановка Риккати) становятся некорректными, а законы сохранения не следуют (без дополнительных оговорок) из дивергентных тождеств (так как интеграл от полной производной не обязан равняться нулю). Отметим в этой связи неточности в имеющейся литературе по уравнению КП (см., например, приложение к книге [4], § 2). Корректная трактовка уравнения КП как гамильтоновой системы возможна в пространстве периодических и почти периодических функций. Гамильтонова формулировка в классе быстро убывающих функций наталкивается на серьезные трудности.

План статьи следующий. В § I мы описываем двумеризацию уравнений КдФ и их аналогов для случая периодических граничных условий. Изложение основано на схеме работы [I], но мы описываем конструкцию непосредственно. В § 2 изложен, следуя [5], [6], многовременной формализм для уравнений типа КП и связь между гамильтоновыми потоками и симплектическими структурами на разных операторных пучках. Аккуратное исследование этих связей включает вопросы об однозначной разрешимости задачи Коши и об оценках решений, достаточных для применения теоремы Стокса в неограниченной области. Оба вопроса существенно зависят от конкретного вида уравнений и не могут быть решены без дополнительных предположений. Здесь мы ограничиваемся формальным изложением. В § 3 изложена альтернативная конструкция уравнений типа КП, использующая алгебру $gl(\infty)$ (роль этой алгебры в теории уравнений КП вскрыта в работах М.Сато и его школы [7]). К сожалению, нам не удалось сравнить возникающие здесь симплектические структуры с введенными в § I.

§ I. Алгебра символов и ее центральное расширение

I. Напомним конструкцию алгебры формальных псевдодифференциальных операторов [2] , [8] . Ее элементами являются формальные ряды вида $X = \sum_{k\leq n} X_k \xi^k$, где X_k - гладкие функции на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Умножение задается формулой

$$X \cdot Y = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \partial_\xi^p X \cdot \partial_x^p Y . \tag{I}$$

Операция $[X,Y] = X\circ Y - Y\circ X$ превращает $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли; мы обозначим эту алгебру той же буквой. Билинейная форма на $\mathfrak{g}$

$$(X, Y) = \operatorname{tr} X\circ Y = \int dx \operatorname{Res}_\xi (X\circ Y)_{\xi=0} \tag{2}$$

невырождена, инвариантна и позволяет отождествить алгебру $\mathfrak{g}$ с двойственным пространством. Алгебра $\mathfrak{g}$ содержит две важные подалгебры - алгебру дифференциальных операторов $\mathfrak{g}_+$ и алгебру формальных интегральных операторов $\mathfrak{g}_-$. Формальные ряды вида $1+X$, $X \in \mathfrak{g}$ - обратимые элементы $\mathfrak{g}$ и образуют группу G_- . Скалярное произведение (2) позволяет отождествить пространство $\mathfrak{g}_-^*$ с алгеброй $\mathfrak{g}_+$.

2. Переходим к конструкции работы [I] . Пусть $\tilde{\mathfrak{g}} = C^\infty(S^1) \otimes \mathfrak{g}$ - алгебра Ли гладких функций переменной $y \in S^1$ со значениями в $\mathfrak{g}$ и поточечным коммутатором. Скалярное произведение

$$(X, Y) = \int dy \operatorname{tr} X\cdot Y \tag{3}$$

позволяет отождествить алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ с двойственным пространством.

Формула

$$\omega(X,Y) = \left(X, \frac{dY}{dy}\right) \tag{4}$$

задает на $\widetilde{\mathfrak{g}}$ 2-коцикл ("коцикл Маурера – Картана").

Пусть $\widehat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение алгебры $\widetilde{\mathfrak{g}}$, построенное по коциклу (4). Коприсоединенное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{g}}$ в пространстве $\widehat{\mathfrak{g}}^* \simeq \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}$ задается формулой

$$ad^* M\,(L,e) = \left([M,L] + e\frac{dM}{dy}, 0\right), \tag{5}$$

т.е. представляет собой инфинитезимальное калибровочное преобразование, связанное со вспомогательной линейной задачей

$$\left(e\frac{d}{dy} - L\right)\psi = 0 . \tag{6}$$

Формула (5) непосредственно приводит к тому, что обобщенные лаксовы уравнения, связанные с алгеброй $\widehat{\mathfrak{g}}$, имеют вид уравнений нулевой кривизны. Это служит мотивировкой для введения коцикла (4).

Групповое действие, отвечающее калибровочному действию алгебры Ли (5), формально задается формулой

$$Ad^* g\cdot(L,e) = \left(gLg^{-1} + e\frac{dg}{dy}g^{-1}, e\right). \tag{7}$$

К сожалению, группы G, отвечающей алгебре Ли $\mathfrak{g}$ (и, тем более, группы $\widetilde{G}$ отвечающей алгебре $\widetilde{\mathfrak{g}}$) не существует. Для нас достаточно будет рассмотреть действие группы $\widetilde{G}_- = C^\infty(S^1; G_-)$

3. Калибровочные инварианты. Следуя общей схеме [I], мы опишем инварианты калибровочного действия (5). Мы можем зафиксировать параметр $e=1$ и рассматривать инварианты на гиперплоскости $\widehat{\mathfrak{g}}^*_1 = (\widetilde{\mathfrak{g}}, 1) \subset \widetilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}$. Инварианты представления (5) не удается определить глобально, т.е. сразу во всем пространстве $\widehat{\mathfrak{g}}^*_1$. Для наших целей достаточно описать инварианты, определенные на аффинных подпространствах $\mathcal{D}_N \subset \widehat{\mathfrak{g}}^*_1$, состоящих из операторов вида

$$L = \xi^N + u_{N-2}\xi^{N-2} + \ldots + u_0 + u_{-1}\xi^{-1} + \ldots \tag{8}$$

с фиксированным старшим коэффициентом и нулевым коэффициентом при следующей степени.

<u>Лемма о нормальной форме</u>. (i) Любой оператор $L \in \mathcal{D}_N$ калибровочным преобразованием $\Phi \in \widetilde{G}_-$ приводится к виду

$$L_0 = \xi^N + \sum_{n=-N+2}^{\infty} c_n \xi^{-n}, \quad \partial_x c_n = 0 . \tag{9}$$

(ii) Преобразование Φ однозначно фиксируется условием $\Phi\big|_{x=0}=1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi = 1+\sum\limits_{n>0}\Phi_n\xi^{-n}$ – искомое калибровочное преобразование. Из равенства

$$\left(\frac{d}{dy}-L\right)\circ\Phi=\Phi\circ\left(\frac{d}{dy}-L_0\right) \tag{10}$$

получаем последовательно

$$\binom{N}{1}\partial_x\Phi_1+u_{N-2}=c_{-N+2},$$

$$\binom{N}{1}\partial_x\Phi_2+\binom{N}{2}\partial_x^2\Phi_1+\binom{N-2}{1}u_{N-2}\partial_x\Phi_1+u_{N-3}=c_{-N+2}\Phi_1+c_{-N+3},$$

$$\ldots \qquad\qquad \ldots$$

На n-м шаге получаем уравнение вида

$$\partial_x\Phi_n+F_n(u_1\Phi_1,\ldots,\Phi_{n-1},c_{-N+2},\ldots,c_{-N+n-2})=c_{-N+n-1},$$

где F_n – дифференциальный полином от коэффициентов u_i и функций $\Phi_1,\ldots,\Phi_{n-1},c_{-N+2},\ \ldots\ ,c_{-N+n-2}$. Отсюда последовательно находим Φ_n, c_k. Постоянная c_{-N+n-1} однозначно определяется из условия разрешимости n-го уравнения в периодических функциях:

$$c_{-N+n-1}=\int_0^1 F_n(u_1\Phi_1,\ldots,\Phi_{n-1},c_{-N+2},\ldots,c_{-N+n-2})\,dx$$

Условие $\Phi\big|_{x=0}=1$ однозначно фиксирует выбор первообразных, откуда следует второе утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ.I. При практическом вычислении гамильтонианов удобно пользоваться операторной подстановкой Риккати

$$\Phi=\,:\exp\varphi(x,\xi):$$

Как обычно при работе с виковскими экспонентами, следует перейти от оператора $\Phi(x,\xi)$ к его символу по формуле

$$\Phi(x,\xi)e^{\lambda x}=\Phi(x,\lambda)\,e^{\lambda x}.$$

Очевидно, символ виковской экспоненты равен $\exp\varphi(x,\lambda)$. Предоставим читателю явно выписать рекуррентные формулы для φ (ниже это будет сделано для операторов 2-го порядка).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если расширить группу $\widetilde{G}_-$, не накладывая условия периодичности по y, класс сплетающих операторов расширяется. Любой такой оператор представляется в виде

$$\psi=\Phi\circ\exp\varphi(y,\xi).$$

В частности, пусть

$$\Psi_0 = \Phi \cdot \exp\left(\partial_y^{-1} L_{0-}\right),$$

где $L_0 = L_{0+} + L_{0-}$, $L_{0\pm} \in \tilde{\mathcal{G}}_{\pm}$. Тогда

$$\left(\frac{d}{dy} - L\right) \cdot \Psi_0 = \Psi_0 \cdot \left(\frac{d}{dy} - L_{0+}\right) \tag{11}$$

Процедуру вычисления интегралов, описанную в Лемме, интересно сравнить со стандартной наивной подстановкой Риккати. Для обыкновенного дифференциального оператора $L = \xi^N + u_{N-2}\xi^{N-2} + \ldots + u_0$ подстановка Риккати эквивалентна построению сплетающего оператора $\Phi(x,\xi)$ такого, что $L \circ \Phi = \Phi \circ \xi^N$. Как обычно, это приводит к рекуррентным формулам типа $\partial_x \Phi_{n+1} = F_n(u, \Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, определяющим Φ_{n+1} однозначно с точностью до выбора первообразной. Пусть $\Phi(x,\lambda)$ - символ оператора Φ. Положим $J_0 = \partial_x \Phi \cdot \Phi^{-1}$. Можно показать, что коэффициенты J_0 - дифференциальные полиномы по u_i и таким образом (в отличие от самой функции Φ) принадлежат тому же функциональному классу, что и потенциалы u_i [12]. При добавлении переменной y это утверждение перестает быть верным, поэтому сплетающий оператор Φ следует выбирать более аккуратно. Для оператора L с периодическими коэффициентами правильное условие на Φ — периодичность по x. Наивная волновая функция Риккати ([4], стр.290) приводит к неправильным формулам (для КП расхождение начинается с 4-го закона сохранения).

ТЕОРЕМА I. Функционалы

$$H_n[L] = \int_0^1 dy\, C_n[L], \quad L \in D_N, \tag{12}$$

калибровочно инвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H_n[L] = \int \operatorname{Res}_\xi \left(\xi^n \cdot L_0\right)_{\xi=0} dy\, dx. \tag{13}$$

Варьируя равенство (10), получаем

$$\delta L_0 = \Phi^{-1} \delta L \Phi + \left[L_0, \Phi^{-1}\delta\Phi\right],$$

откуда

$$\delta H_n[L] = \int dx\, dy \operatorname{Res}_\xi \left(\Phi\, \xi^n \Phi^{-1} \cdot \delta L\right)_{\xi=0} \tag{14}$$

Вклад второго слагаемого исчезает в силу инвариантности следа и постоянства коэффициентов L_0.

Из равенства (I4) получаем

$$\left[\frac{d}{dy} - L\ ,\ grad\ H_n[L]\right] = 0 \tag{I5}$$

Формула (I5) эквивалентна калибровочной инвариантности H_n.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Эвристически утверждение теоремы следует из того, что функционалы H_n – собственные значения логарифма матрицы монодромии уравнения (6). В самом деле, имеем формально из (6),(9),(I0)

$$\psi = \Phi \circ exp \int^y L_0(y', \xi)\, dy',$$

откуда $T(L) = \Phi\, exp \int L_0(\xi, y)\, dy\, \Phi^{-1}$. Так как алгебра операторов с постоянными коэффициентами – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, отсюда следует, что построенная система калибровочно инвариантных функционалов максимальна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Лемма о нормальной форме может быть доказана для алгебры операторов с почти периодическими по x коэффициентами (достаточно заменить интеграл по x на среднее $Mf = \lim\limits_{L\to\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} dx\ f(x)$). Для операторов с быстро убывающими коэффициентами лемма неверна. Выбор граничных условий по y не слишком существенен.

4. Скобки Пуассона и орбиты. Как и в работе Адлера [2] , пуассонова структура для уравнений типа КП связана с подалгеброй $\tilde{\mathfrak{g}}_-$. Так как сужение коцикла (4) на подалгебру $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ равно нулю, скобка Ли-Пуассона алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ не меняется при центральном расширении и ультралокальна по переменной y .

Напомним, что $\tilde{\mathfrak{g}}_-^* \simeq \tilde{\mathfrak{g}}_+$. Скобка Ли-Пуассона функционалов на $\tilde{\mathfrak{g}}_-^*$ задается формулой

$$\{h_1, h_2\}(L) = ([L, X_1]_+,\ X_2),\ \ X_i = grad\, h_i\,(L), \tag{I6}$$

где $+$ означает, что все члены ряда с отрицательными степенями ξ отбрасываются. Градиент функционала в алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ получается из градиента в более широкой алгебре $\hat{\mathfrak{g}}$ проектированием

$$grad_{\mathfrak{g}_-} h(L) = [grad_{\hat{\mathfrak{g}}}\, h(L)]_- , \tag{I7}$$

где $-$ означает, что отбрасываются все члены ряда с положительными номерами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. (i) Подпространства $\mathfrak{D}_N^+ = \mathfrak{D}_N \cap \tilde{\mathfrak{g}}_+ \subset \tilde{\mathfrak{g}}_-^*$ инвариантны относительно коприсоединенного представления группы $\tilde{G}_-$. (ii) Пусть $L \in \mathfrak{D}_N^+$. Функционалы $c_i(y)[L]$, $i = -N+2, \ldots, 0$, централны относительно скобки Ли-Пуассона алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Таким образом, несколько первых гамильтонианов (12) являются орбитными инвариантами. Гамильтонианы с положительными номерами приводят к нетривиальной динамике.

ТЕОРЕМА 2. Гамильтонианы $H_n(L)$ находятся в инволюции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение - частный случай общей теоремы о коммутативности [2], [8], [9]. Легко доказать его и непосредственно, пользуясь формулами (15),(16),(17).

Заметим, что интегралов (12) недостаточно для полной интегрируемости. Это сразу же следует из счета параметров: точки орбит в пространстве $\mathfrak{D}_N^+$ параметризуются набором функций двух переменных, а интегралы параметризуются функцией одной переменной.

Пример. С уравнением КП связана орбита $\mathcal{O}_2$, точки которой - лаксовы операторы вида

$$L=\xi^2+u(x,y)\,, \qquad \int_0^1 dx\cdot u(x,y)=0\,. \tag{18}$$

Пользуясь подстановкой Риккати, вычислим для операторов (18) несколько первых гамильтонианов. Рекуррентное соотношение для символа $\varphi(x,\lambda)$ имеет вид

$$\partial_y\varphi+\partial_x^2\varphi+(\partial_x\varphi)^2+2\lambda\partial_x\varphi+u=c(\lambda)\,,$$

$$\varphi(x,y,\lambda)=\sum_{n\geqslant 1}\varphi_n(x,y)\lambda^{-n}, \quad c(\lambda)=\sum_{n\geqslant 1}c_n\lambda^{-n}\,,$$

откуда

$$\begin{aligned}&2\partial_x\varphi_1=-u\,,\\ &2\partial_x\varphi_{n+1}=-\Big(\partial_y\varphi_n+\partial_x^2\varphi_n+\sum_{i=1}^{n-1}\varphi_i\varphi_{n-i}\Big)\end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) последовательно находим

$$H_0=\int u\,dxdy=0,\quad H_1=0,\quad H_2=\frac14\int u^2dxdy\,,$$

$$H_3=\frac14\int u\partial_x^{-1}u_y\,dxdy,\quad H_4=\int\Big[\frac18u^3-\frac1{16}(\partial_xu)^2+$$

$$+\frac3{16}\left(\partial_x^{-1}u_y\right)^2\Big]dxdy-\frac3{16}\int dy\Big(\int\partial_x^{-1}u_y\,dx\Big)^2 \tag{20}$$

Гамильтониан уравнения КП равен $8H_4$. Отметим последнее слагаемое в формуле для H_4, которое не воспроизводится при наивном вычислении законов сохранения с помощью подстановки Риккати

([4] , стр.289-291). При более высоких номерах n интегралы H_n все более сильно отличаются от наивных плотностей законов сохранения. Уравнение КП имеет вид

$$\partial_t u = 6uu_x - u_{xxx} + 3\partial_x^{-1} u_{yy} - 3\int dx\, \partial_x^{-1} u_{yy} . \qquad (21)$$

Последнее слагаемое, отсутствующее в стандартной формулировке, необходимо из условий самосогласованности: если его не добавлять, то $\partial_t(\int dx\, u) \neq 0$, что противоречит предложению 1. Отметим, что в обычной записи уравнения КП

$$\partial^2_{xt} u = \partial_x(6uu_x - u_{xxx}) + 3u_{yy}$$

последнее слагаемое выпадает; в отличие от (21), это уравнение не является эволюционным.

5. Гамильтоновы уравнения, задаваемые гамильтонианами H_n имеют вид уравнений нулевой кривизны. Так как связанные с ними потоки коммутируют, удобно связать с каждым гамильтонианом собственное время t_n . Имеем

$$\partial_{t_n} L = \partial_y M_n + [M_n, L], \quad M_n = (\Phi \xi^n \Phi^{-1})_+ . \qquad (22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Уравнения (22) эквивалентны системе совместных уравнений на сплетающий оператор Φ , нормированный условием $\Phi|_{x=0} = 1$,

$$\partial_{t_n} \Phi = M_n \Phi - \Phi B_n , \qquad (23)$$

$$B_n = M_n \Phi|_{x=0} \qquad (24)$$

При этом

$$\partial_{t_n} L_0 = \partial_y B_n , \quad \partial_{t_n} B_m = \partial_{t_m} B_n . \qquad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi = 1 + \sum_{n\geq 1} \psi_n \xi^{-n}$ - периодическое по x решение системы уравнений (см.(11))

$$\partial_y \psi = L\psi - \psi \xi^N , \qquad (26)$$

$$\partial_{t_n} \psi = M_n \psi - \psi \xi^n .$$

Очевидно, $\psi = \Phi \exp A$, где $\exp A = \psi|_{x=0}$. Подставляя это в (26), получим уравнения (23), в которых $B_n = \partial_{t_n} A + \xi^n$. При этом $L_0 = \partial_y A + L_{0+}$. Отсюда следует (25). Равенство (24) вытекает из (23) и условия нормировки $\Phi|_{x=0} = 1$.

§ 2. Многовременной формализм и связь гамильтоновых структур на различных орбитах

I. Обозначим $\mathcal{O}_N$ орбиту символа ξ^N в пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*_-$; $\mathcal{O}_N$ состоит из дифференциальных операторов вида (8), $L = \Phi \xi^N \Phi_+^{-1}$, $\Phi \in \hat{G}_-$; $L_{0+} = \xi^N$. В этом параграфе будет показано, что все эти орбиты вместе со своими симплектическими формами и заданными на них системами уравнений (22) могут быть в некотором смысле канонически отождествлены друг с другом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для каждого N имеется взаимно-однозначное соответствие между пространством решений системы уравнений (23) на нормированный сплетающий оператор Φ,

$$\partial_{t_n}\Phi = M_n\Phi - \Phi B_n$$

где $M_n = \left(\Phi \xi^n \Phi^{-1}\right)_+$, $B_n = M_n \Phi\big|_{x=0}$, и пространством решений системы (22) на $\mathcal{O}_N$. Это соответствие имеет вид

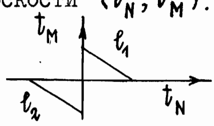
$$L(y, t_1, \dots, t_N, \dots) = M_N(t_1, \dots, t_N + y, \dots) .$$

В предположении, что задача Коши для (22) глобально разрешима, мы получаем, что при каждом N орбита $\mathcal{O}_N$ параметризует одно и то же пространство - пространство решений системы (23) В этом смысле орбиты $\mathcal{O}_N$ могут быть отождествлены друг с другом. Серии уравнений (22) являются при этом различными реализациями системы (23).

2. Естественно спросить, какова связь гамильтоновых структур на $\mathcal{O}_N$ при таком отождествлении. Проще всего устанавливается связь гамильтонианов H_n^N (I2). Действительно, $H_n^N = \int c_n^N \, dt_N$, где $c_n^N = \mathrm{Res}\, \xi^n B_N$. Из (25) получаем

$$\partial_{t_M} c_n^N = \partial_{t_N} c_n^M . \tag{27}$$

Это соотношение позволяет применить для сравнения H_n^N и H_n^M формулу Стокса в плоскости (t_N, t_M).



Если пренебречь интегралами по удаляющимся прямым ℓ_1, ℓ_2 , то получим $H_n^N = H_n^M$. Отметим, что полное аналитическое обоснование подобного пересчета гамильтонианов и форм из (x,t) - координат в характеристические для уравнения синус-Гордон проведено в [II] .

Покажем теперь, следуя работе [5], что симплектические структуры на $\mathcal{O}_n$ и $\mathcal{O}_m$ совпадают в том же смысле, что и гамильтонианы. Для доказательства будем пользоваться следующим выражением для формы Кириллова Ω_n на орбите $\mathcal{O}_n$ в терминах сплетающего оператора ψ, удовлетворяющего системе (26) $(tr = \int dx \cdot Res)$:

$$\Omega_n = \int \omega_n(y \circ dy),$$

$$\omega_n = tr(L\, d\psi\psi^{-1} \wedge d\psi\psi^{-1}) = tr(M^n d\psi\psi^{-1} \wedge d\psi\psi^{-1}), \tag{28}$$

где $M = \psi\xi\psi^{-1}$. Форма ω_n точна: $\omega_n = d\vartheta_n$, где

$$\vartheta_n = tr(L\, d\psi\psi^{-1}) = tr(M^n d\psi\psi^{-1}). \tag{29}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. На пространстве решений системы (23) выполняются соотношения

$$\partial_{t_m} \omega_n = \partial_{t_n} \omega_n. \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $A_n = \partial_{t_n}\psi\psi^{-1} = M_n - M^n$. Имеем

$$\partial_{t_n}(d\psi\psi^{-1}) = dA_n - [d\psi\psi^{-1}, A_n].$$

Дифференцируя $\vartheta_m = tr(M^m d\psi\psi^{-1})$ по t_n и учитывая, что $\partial_{t_n} M = [M_n, M]$, получим

$$\partial_{t_n} \vartheta_m = tr(M^m dA_n).$$

Следовательно, $\partial_{t_n}\omega_m = tr(dM^m \wedge dA_n)$. Легко видеть, что

$$tr(dM^m \wedge dM^n) = 0. \tag{31}$$

Поэтому

$$\partial_{t_n}\omega_m = tr(dM^m \wedge dM_n).$$

Так как $M_n = M^n_+$, из (31) следует, что

$$tr(dM^m \wedge dM_n) = tr(dM^n \wedge dM_m),$$

то есть $\partial_{t_n}\omega_m = \partial_{t_m}\omega_n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Система (23) эквивалентна следующей системе уравнений на "полный градиент" $M = \psi\xi\psi^{-1}$:

$$\partial_{t_n} M = [M_n, M]. \tag{32}$$

Эти лаксовы уравнения также являются гамильтоновыми в соответствии с общей схемой Костанта-Адлера: достаточно заметить, что $M = \xi + M_0$, где $M_0 \in \mathcal{G}^*_+$, а ξ - характер (одноточечная орбита) подалгебры $\mathfrak{g}_-$. Соответствующие гамильтонианы суть $H_n = \frac{1}{n+1} \operatorname{tr} M^{n+1}$. Однако эта гамильтонова структура не имеет никакого отношения к структурам уравнений типа КП на орбитах $\mathcal{O}_N$ (такое заблуждение возникло в работе [10]).

3. Стационарные уравнения. Зафиксируем номер s и рассмотрим пространство $St(N,s)$ стационарных решений уравнения (2 2) $\partial_{t_s} L = 0$, т.е.

$$\partial_y M_s + [M_s, L] = 0 .$$

Пространство $St(N,s)$ инвариантно относительно всех остальных уравнений (22). При $s = N$ получаем условие $\partial_y L = 0$. В этом случае, очевидно, пространство $St(N,s)$ параметризуется оператором $L = M_s$, не зависящим от y и пробегающим орбиту символа ξ^s под действием группы G_-. При $s \neq N$ ситуация вполне аналогична.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пространство $St(N,s)$ параметризуется оператором $M_s|_{y=0}$, пробегающим орбиту символа ξ^s. Уравнения (22) принимают на этой орбите лаксов вид

$$\partial_{t_n} M_s = [M_n, M_s]$$

и являются гамильтоновыми с гамильтонианами $H_n^s = \operatorname{Res} \xi^n B_s$.

Отметим, что H_n^s не совпадают с более привычными гамильтонианами типа $\operatorname{tr} M_s^{n/s}$ ([2]), но выражаются через них полиномиально.

§ 3. Нелокальная задача Римана в $GL(\infty)$ и уравнение КП

Хорошо известно (см., например, [4]), что решение пространственно-двумерных уравнений типа КП приводит к нелокальной задаче Римана. Мы покажем, что в рамках общего теоретико-группового подхода [1] задача факторизации в группе операторов, или в группе $GL(\infty)$, также естественно связана с уравнениями типа КП. Сложность этой связи обусловлена тем, что не существует группы, отвечающей основной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – алгебре всех псевдодифференциальных символов.

1. Пусть $\mathfrak{gl}(\infty)$ обозначает алгебру бесконечных в обе стороны матриц, у которых только конечное число диагоналей выше главной отличны от нуля, т.е. $u_{ij} = 0$, если $(j-i)$ достаточно велико. Алгебра $\mathfrak{gl}(\infty)$ действует в пространстве строк $v = (\dots v_{-1}, v_0, v_1, \dots)$ таких, что $v_i = 0$ для достаточно больших i. Строка v отождествляется с рядом Лорана $v(\lambda) = \sum v_i \lambda^i$. Пусть Λ – оператор умножения на λ, $(\Lambda v)_i = v_{i-1}$. Любая

матрица из $\mathfrak{gl}(\infty)$ однозначно представляется в виде

$$\mathcal{U} = \sum_{-\infty}^{*} u_k \Lambda^k ,$$

где u_k – диагональные матрицы.

Как и в § I, построение законов сохранения и гамильтоновой теории нелинейных уравнений зависит от граничных условий на бесконечные матрицы. Нашей основной алгеброй будет алгебра $\mathfrak{gl}$ почти периодических матриц, т.е. наименьшая алгебра, содержащая все алгебры $\mathfrak{gl}_n$ n-периодических матриц (коммутирующих с Λ^n): $\mathfrak{gl} = \bigcup_n \mathfrak{gl}_n$. На алгебре $\mathfrak{gl}$ определен регуляризованный след

$$\operatorname{tr} \mathcal{U} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{-n}^{n} u_{kk} .$$

Положим $\mathfrak{gl}_+ = \left\{ \sum_{k\geqslant 0} u_k \Lambda^k \right\}$, $\mathfrak{gl}_- = \left\{ \sum_{k<0} u_k \Lambda^k \right\}$.

Операция tr позволяет отождествить $\mathfrak{gl}_+^* = \left\{ \sum_{k\leqslant 0} u_k \Lambda^k \right\}$ $\mathfrak{gl}_-^* = \left\{ \sum_{k>0} u_k \Lambda^k \right\}$. Следуя схеме § I, рассмотрим алгебру $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ периодических функций от переменной x со значениями в $\mathfrak{gl}$ и введем ее центральное расширение с помощью коцикла $\int dx \operatorname{tr}(\mathcal{U}_1 \partial_x \mathcal{U}_2)$. Соответствующее коприсоединенное действие имеет вид (ср.(7)):

$$\mathrm{Ad}^* g \cdot L = g L g^{-1} + \partial_x g \cdot g^{-1} \tag{33}$$

<u>Лемма о нормальной форме</u>. $i)$ Любая матрица вида $L = \Lambda + \sum_0^\infty u_k(x) \Lambda^{-k}$ из $\widetilde{\mathfrak{gl}}$ приводится калибровочным преобразованием (33) со сплетающей матрицей $\Phi \in \widetilde{GL}_-$, $\Phi = 1 + \sum_1^\infty \varphi_k \Lambda^{-k}$ к виду

$$L_0 = \Lambda + \sum_0^\infty c_k(x) \Lambda^{-k} , \tag{34}$$

где $c_k(x)$ – числа.

$ii)$ Если Φ_1 и Φ_2 – две сплетающие матрицы для L, то $\Phi_2 = \Phi_1 \exp \mathcal{D}$, $\mathcal{D} = \sum_1^\infty d_k(x) \Lambda^{-k}$, так что $L_0^{(1)} = L_0^{(2)} + \partial_x \mathcal{D}$.

Определим строку $\mathbb{1}$ равенством $\mathbb{1}_k = \delta_{k0}$. Сплетающая матрица Φ однозначно фиксируется следующим условием нормировки: $\mathbb{1}\cdot\Phi=\mathbb{1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если не накладывать условий периодичности по x на сплетающую матрицу, то найдется преобразование ψ, $\psi=1+\sum_1^\infty \psi_k \Lambda^{-k}$, переводящее матрицу L в $\Lambda+c_0$, $c_0=\mathrm{tr}\,L$:

$$\partial_x\psi = L\psi - \psi(\Lambda+c_0). \tag{35}$$

Функционалы $H_n[L]=\int c_n(x)\,dx$ (34) являются калибровочными инвариантами. В терминах ψ (35) они выражаются следующим образом: если $f(\lambda,x)=\mathbb{1}\cdot\psi(x)$, то

$$H_n = \mathrm{res}_{\lambda=0}\,\lambda^{n-1}\int \partial_x \log f(\lambda,x)\,dx .$$

По схеме § I (с учетом сдвига на характер Λ подалгебры gl_- - см. [I, 8]) гамильтонианы H_n порождают лаксовы уравнения в пространстве gl_+^*:

$$\partial_{t_n} L = \partial_x M_n + [M_n, L], \tag{36}$$

где $\quad M_n = (\Phi\Lambda^n\Phi^{-1})_+ .$

Уравнения (36) эквивалентны системе линейных уравнений на сплетающую матрицу ψ:

$$\partial_{t_n}\psi = M_n\psi - \psi\Lambda^n, \tag{37}$$

или на сплетающую матрицу Φ:

$$\partial_{t_n}\Phi = M_n\Phi - \Phi B_n ,$$

где $B_n=\Lambda^n+\sum_0^\infty b_k\Lambda^{-k}$, b_k - числа; B_n находятся по Φ из соотношения $\mathbb{1}\cdot B_n=\mathbb{1} M_n\Phi$. Законы сохранения в дивергентной форме имеют вид $\partial_{t_n}L_0=\partial_x B_n$.

2. Рассмотрим простейшую орбиту алгебры gl_+, состоящую из диагональных матриц $U=\mathrm{diag}(\dots u_{-1},u_0,u_1,\dots)$, $\mathrm{tr}\,U=0$, со скобкой Ли-Пуассона

$$\{u_k(x_1),u_\ell(x_2)\}=\delta_{k\ell}\,\delta'(x_1-x_2). \tag{38}$$

Мы покажем, что система матричных уравнений (36), (37) на этой орбите связана с системой дифференциальных уравнений (22), (26). Поскольку решение системы (36) сводится к задаче факторизации в группе $\widetilde{GL}$, это позволит установить связь системы (22) с нелокальной задачей Римана. Кроме того, уравнение (32) для n-периодических матриц являются аналогами модифицированного уравнения $K_q\Phi$, и скобка (38) приводит к известной второй скобке Гельфанда – Дикого. Поэтому мы надеемся, что и в общем случае скобка (38) как-то связана с гамильтоновыми структурами уравнений типа КП, рассмотренными в § I.

Положим $E(x,t)=exp\left(\Lambda x+\sum_{k>0}\Lambda^k t_k\right)$, $\hat\psi=\psi E(x,t)$. Уравнения (37) перепишутся в виде $\partial_{t_n}\hat\psi=M_n\hat\psi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Найдутся полиномы $P_n(\partial_x)=\partial_x^n+\sum_0^{n-1}P_k\partial_x^k$, где P_k – диагональные матрицы, являющиеся полиномами от коэффициентов ψ_k и их производных по x, такие что

$$\partial_{t_n}\hat\psi=P_n(\partial_x)\hat\psi .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\partial_x\hat\psi=(\Lambda+U)\psi$, имеем

$$\partial_x^n\hat\psi=\left(\Lambda^n+\sum_0^{n-1}a_k\Lambda^k\right)\hat\psi ,$$

где a_k – некоторые диагональные матрицы. Сравнивая это с уравнением

$$\partial_{t_n}\hat\psi=M_n\hat\psi=\left(\Lambda^n+\sum_0^{n-1}m_k\Lambda^k\right)\hat\psi ,$$

мы можем подобрать полином $P_n(\partial_x)=\partial_x^n+\sum_0^{n-1}p_k\partial_x^k$ с диагональными коэффициентами p_k так, чтобы

$$\partial_{t_n}\hat\psi=P_n(\partial_x)\hat\psi .$$

С другой стороны, $\partial_x\hat\psi=(\partial_x\psi+\psi\Lambda)E(x,t)$, $\partial_{t_n}\hat\psi=(\partial_{t_n}\psi+\psi\Lambda^n)E(x,t)$. Поэтому найдется полином $Q_n(\partial_x)=\partial_x^n+\sum_0^{\infty}q_k\Lambda^k$, коэффициенты q_k которого выражаются через $\{\partial_x^i\psi_j\}$, такой, что

$$\partial_{t_n}\hat\psi-Q_n(\partial_x)\hat\psi=\sum_1^{\infty}s_k\Lambda^{-k}E(x,t).$$

Таким образом,

$$(P_n(\partial_x)\hat\psi-Q_n(\partial_x)\hat\psi E(x,t)^{-1}=\sum_1^{\infty}s_k\Lambda^{-k} .$$

Сравнивая коэффициенты при степенях Λ, получим $P_n=Q_n$.

Положим $\hat{f}(\lambda) = \mathbb{1} \cdot \hat{\psi}$; $\hat{f}(\lambda) = f(\lambda) \exp(\lambda x + \sum_{k>0} \lambda^k t_k)$, где $f(\lambda) = \mathbb{1} + \sum_{1}^{\infty} f_k \lambda^k$.

СЛЕДСТВИЕ. Скалярная функция $\hat{f}(\lambda)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\partial_{t_n} \hat{f} = P_n(\partial_x) \hat{f} , \tag{39}$$

причем коэффициенты полинома P_n выражаются через $\{\partial_x^i f_j\}$.

Система (36) представляет собой обычную запись иерархии уравнений КП в форме Захарова-Шабата.

3. Вернемся к нелокальной задаче Римана. Согласно [I], решение уравнений (36) или (37) сводится к задаче факторизации

$$\exp \sum_{k>0} M^k t_k = g_-(t)^{-1} g_+(t), \quad t = (t_1, t_2, \ldots)$$

где $M = \psi \Lambda \psi^{-1}$, а $g_\pm(t)$ лежат в подгруппах $GL_\pm \subset GL$, т.е. $g_+ = \sum_{k \geqslant 0} g_k \Lambda^k$, $g_- = 1 + \sum_{k<0} g_k \Lambda^k$. Решение уравнений (37) дается формулой $\psi(t) = g_-(t)\psi(0)$. Легко видеть, что также $\psi(t) = \hat{g}_-(t)$, где $\hat{g}_-(t)$ - решение задачи факторизации для матрицы $G(t)$,

$$G(t) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 0} \Lambda^k t_k\right) \psi(0)^{-1} \exp\left(-\sum_{k \geqslant 0} \Lambda^k t_k\right) = \hat{g}_-(t)^{-1} \hat{g}_+(t).$$

При этом $\psi(t) G(t) = \hat{g}_+(t)$. Применяя это равенство к строке $\mathbb{1}$ получим соотношение для скалярной волновой функции

$$f(\lambda; t) G(t) = f_+(\lambda, t) ,$$

где $f(\lambda, t) = \mathbb{1} \cdot \psi(t)$, $f_+(\lambda, t) = \mathbb{1} \cdot \hat{g}_+(t)$. Функция $f_+(\lambda)$ аналитична по λ , а $f(\lambda)$ по λ^{-1} . Тем самым, общая схема в группе $GL(\infty)$ привела нас к обычной формулировке задачи Римана.

Замечание 7. Для точного определения группы GL и исследования задачи факторизации в ней необходимо привлечь подходящие функциональные пространства. При этом принадлежность сплетающей матрицы ψ группе GL становится дополнительным условием.

Эта статья возникла в связи с вопросом, заданным авторам Л.Д.Фаддеевым. Мы приносим ему искреннюю благодарность за внимание к работе.

Литература

1. Р е й м а н А.Г., С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных. - ДАН СССР, 1980, т.251, № 6, с.1310-1313.
2. A d l e r M. On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for KdV type equations. - Inv.math., 1979, v.50, N 2, p.219-248.
3. K o s t a n t B. Quantization and representation theory. In: Proc. of the Research Symp. on Representations of Lie groups, Oxf., 1977. London Math.Soc.Lecture Notes Ser., 1979, v.34.
4. Теория солитонов: Метод обратной задачи. Под ред.С.П.Новикова, М., "Наука", 1980.
5. Р е й м а н А.Г. Единая гамильтонова структура на полиномиальных пучках и структура стационарных задач. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.4. Зап.научн. семин.ЛОМИ, 1983, т.131, с.118-127.
6. К у л и ш П.П., Р е й м а н А.Г. Гамильтонова структура полиномиальных пучков. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.5. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.123, с.67-76.
7. D a t e E., J i m b o M., K a s h i w a r M., M i w a T. Transformation groups for soluton equations.III, J.Phys. Soc. Japan, 1981, v.50, p.3806-3812.
8. Р е й м а н А.Г. Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.3. Зап.научн.семин.ЛОМИ,1980, т.95, с.3-54.
9. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Что такое классическая r-матрица. - Функц.анализ и его прилож., 1983, т.17, в.4, с.17-33.
10. W a t a n a b e Y. Hamiltonian structure of Sato's Hierarchy of KP equations and a coadjoint orbit of a certain formal Lie group. - Lett.Math.Phys., 1983, v.7, N 2, p.99-106.
11. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтонова система, связанная с уравнением $u_{\xi\eta} + \sin u = 0$. - Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1976, т.142, с.254-266.
12. W i l s o n G. On two constructions of conservation laws for Lax equations. Quart.J.Math.Oxford, 1982, v.32, p.491-512.

М.А.Семенов-Тян-Шанский

КЛАССИЧЕСКИЕ r-МАТРИЦЫ И КВАНТОВАНИЕ

Настоящая заметка продолжает статью автора [I], посвященную алгебраической природе классических r-матриц. Напомню основное определение работы [I].

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли, $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ - линейный оператор. Будем говорить, что R задает на $\mathfrak{g}$ структуру двойной алгебры Ли, если скобка *)

$$[X,Y]_R = \frac{1}{2}([RX,Y]+[X,RY]) \tag{I}$$

удовлетворяет тождеству Якоби. Алгебру $\mathfrak{g}$, снабженную скобкой (I), обозначим $\mathfrak{g}_R$. Линейный оператор R называется классической r-матрицей.

Отмеченный класс двойных алгебр Ли образуют алгебры, для которых оператор R удовлетворяет модифицированному тождеству Янга - Бакстера

$$[RX,RY] = R([RX,Y]+[X,RY]) - [X,Y]. \tag{2}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть оператор $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству (2). Тогда (i) $(\mathfrak{g}, R)$ - двойная алгебра Ли (ii). Операторы $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm 1)$ - гомоморфизмы из $\mathfrak{g}_R$ в $\mathfrak{g}$.

Мы отсылаем читателя к [I], [2] по поводу связи определений (I), (2) с традиционными тензорными обозначениями.

ПРИМЕР I. Пусть $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ - подалгебры $\mathfrak{g}$ такие, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_-$ как линейное пространство. Пусть $P_\pm$ - проектор на $\mathfrak{g}_\pm$ параллельно дополнительной подалгебре, $R = P_+ - P_-$. Нетрудно видеть, что оператор R удовлетворяет тождеству (2); алгебра $\mathfrak{g}_R$ - прямая сумма $\mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ со скобкой Ли $[X,Y]_R = [X_+,Y_+] - [X_-,Y_-]$. Приведенный пример соответствует так называемой схеме Адлера - Костанта. Он наиболее важен в приложениях.

На двойственном пространстве к двойной алгебре Ли определены две пуассоновых структуры - скобки Ли-Пуассона алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_R$. Напомним, что скобка Ли-Пуассона алгебры Ли вырождена; ее центр образуют функции, постоянные на орбитах коприсоединенного пред-

*) Это определение отличается от принятого в [I] нормировкой.

ставления соответствующей группы Ли ("функции Казимира").

ТЕОРЕМА I. Элементы Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ коммутируют относительно скобки Ли-Пуассона алгебры $\mathfrak{g}_R$.

Теорема I была первоначально доказана для двойных алгебр Ли, описанных в примере I. Она охватывает многочисленные частные случаи доказательства инволютивности интегралов движения вполне интегрируемых гамильтоновых систем, решаемых методом задачи Римана [I].

Представляется интересным, что все основные результаты классической теории - инволютивность интегралов, построение обобщенной задачи Римана и группы одевающих преобразований - можно вывести непосредственно из уравнения Янга - Бакстера (2), не используя классификации его решений.

В квантовой механике скобку Ли-Пуассона заменяет коммутатор в универсальной обертывающей алгебре. Возникают естественные вопросы:

(I) каков квантовый аналог теоремы I.

(2) какова связь этой теоремы с квантовым методом обратной задачи.

В настоящей заметке мы приведем квантовый вариант теоремы I для произвольных r-матриц, удовлетворяющих тождеству (2). (Для случая схемы Костанта - Адлера (пример I) этот результат был получен Костантом на примере незамкнутой цепочки Тоды [3]). Мы изложим также некоторые соображения по поводу второго вопроса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([I], [4]). Пусть оператор $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству (2). Пусть $\mathfrak{g}_\pm = \mathrm{Im}\,R_\pm$, $k_\pm = \mathrm{Ker}\,R_\mp$. Тогда (i) $\mathfrak{g}_\pm \subset \mathfrak{g}$ - подалгебра Ли.(ii) $k_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ идеал (iii) Отображение $\theta: \mathfrak{g}_+/k_+ \longrightarrow \mathfrak{g}_-/k_-$, заданное формулой $\theta: R_+X \mapsto R_-X$ - изоморфизм алгебр Ли Отображение

$$\mathfrak{g}_R \xrightarrow{(R_+,\,R_-)} \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$$

- мономорфизм, образ которого совпадает с подалгеброй

$$\tilde{\mathfrak{g}}_R = \{(X_+,X_-) \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- \ ; \ \theta(\bar{X}_+) = \bar{X}_-\}$$

(мы обозначаем $\bar{X}_\pm$ класс вычетов $X_\pm\ (\mathrm{mod}\ k_\pm)$)

(v) Любой элемент $X \in \mathfrak{g}$ однозначно представим в виде $X = X_+ - X_-$, $(X_+,X_-) \in \tilde{\mathfrak{g}}_R$.

Отображение θ называется преобразованием Кэли оператора R.

Пусть $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$ - универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_R$. В силу теоремы Пуанкаре – Биркгофа – Витта алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$ изоморфны как фильтрованные линейные пространства. Мы построим канонический линейный изоморфизм $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и опишем связь умножений в алгебрах $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$. Будем обозначать гомоморфизмы обертывающих алгебр теми же буквами, что и соответствующие гомоморфизмы алгебр Ли. Для любой алгебры Ли ℓ пусть $\varepsilon : \mathcal{U}(\ell) \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекция на $\mathbb{C}$ в разложении

$$\mathcal{U}(\ell) = \mathbb{C} \oplus \ell\,\mathcal{U}(\ell) .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mu : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ – гомоморфизм, заданный на образующих $X \in \mathfrak{g}_R$ формулой

$$\mu(X) = X_+ \otimes 1 + 1 \otimes X_- , \quad X_\pm = R_\pm X$$

(i) Отображение μ – мономорфизм.
(ii) Пусть $\pi_\pm : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm / k_\pm)$ – каноническая проекция, Образ μ – подалгебра

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{ x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) ;\ \theta \circ \pi_+ (\varepsilon \otimes 1)\, x = \pi_- (1 \otimes \varepsilon)\, x \} .$$

(iii). Пусть $x \longmapsto {}^t x$ – антиавтоморфизм $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, равный -1 на $\mathfrak{g}$. Пусть

$$p : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : x \otimes y \longmapsto x \cdot {}^t y .$$

Сквозное отображение

$$p \circ \mu \ : \ \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

– линейный изоморфизм. Любой элемент $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_k x_k^+ \cdot {}^t x_k^- \ , \quad \sum_k x_k^+ \otimes x_k^- \in \tilde{\mathcal{U}} . \tag{3}$$

КОММЕНТАРИЙ. Представление $X = X_+ - X_-$, построенное в предложении 2 (v) – инфинитезимальная версия задачи факторизации ("задача о скачке"). Представление (3) – задача факторизации в универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. (Ср.роль задачи факторизации в классической механике [I]).

Обозначим $\delta = (p \circ \mu)^{-1}$ и положим

$$x * y = \delta^{-1}(\delta(x) \cdot \delta(y)).$$

Операцияя $*$ – это умножение в $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, перенесенное в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с помощью изоморфизма δ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$x * y = \sum_k x_k^+ \, y \, {}^t x_k^- \, , \tag{4}$$

где $x = \sum_k x_k^+ \cdot {}^t x_k^-$, $\sum_k x_k^+ \otimes x_k^- \in \widetilde{\mathcal{U}}$.

Пусть Z – центр алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^K$.

ТЕОРЕМА 2. Сужение отображение $\delta : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ на Z – кольцевой гомоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in Z$. Имеем в силу (4)

$$x * y = \sum_k x_k^+ \cdot y \cdot {}^t x_k^- = xy = yx = y * x .$$

Для того, чтобы симметричным элементам $z \in Z$ (т.е. таким, что $z = {}^t z$) соответствовали самосопряженные операторы в унитарных представлениях алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, отображение δ нужно слегка подправить. Определим функционал $\rho \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ формулой

$$\rho(X) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} (\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} X) .$$

Пусть α – автоморфизм алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, заданный на образующих $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ формулой

$$\alpha(X) = X - \rho(X) .$$

Положим $\gamma = \alpha \circ \delta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна, т.е. $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Тогда гомоморфизм $\gamma : Z \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ симметричен, т.е. $\gamma({}^t z) = {}^t \gamma(z)$ (См. [5]).

Пусть gr – канонический функтор из категории фильтрованных алгебр в категорию градуированных алгебр. Напомним, что $\operatorname{gr} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathcal{U} = \bigcup_n \mathcal{U}_n$ – каноническая фильтрация, $S = \bigoplus_n S_n$ – соответствующая ей каноническая градуировка. Пусть $u \in \mathcal{U}_k$. Элемент $\operatorname{gr}_k u \in S_k$ называется старшим символом u.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. (i) Отображение $\gamma : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ сохраняет каноническую фильтрацию. (*ii*) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_k & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)_k \\ {\scriptstyle gr_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle gr_k} \\ S(\mathfrak{g})_k & \longrightarrow & S(\mathfrak{g}_R)_k \end{array}$$

в которой нижняя стрелка - канонический изоморфизм, коммутативна.

Таким образом, старшие символы операторов z и $\gamma(z)$ совпадают.

Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{l}$ алгебра $S(\mathfrak{l})$ снабжена естественной скобкой Ли, которая при изоморфизме $S(\mathfrak{l}) \simeq P(\mathfrak{l}^*)$ переходит в скобку Ли-Пуассона алгебры $\mathfrak{l}$. Для любых $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{l})_k$, $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{l})_m$

$$gr_{k+m-1}(u \cdot v - v \cdot u) = \{ gr_k u, gr_m' v \} . \tag{5}$$

Пользуясь (5) и предложением 6, нетрудно вывести теорему I из теоремы 2.

Между квантовыми операторами $\gamma(z)$ и их символами можно установить взаимно однозначное соответствие. Напомним, что квантованием симметрической алгебры $S(\mathfrak{l})$ называется отображение $q : S(\mathfrak{l}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{l})$, согласованное с фильтрацией и сохраняющее старший символ. Другими словами, если $x \in S_k$, то $q(x) \in \mathcal{U}_k$ и $gr_k\, q(x) = x$. Примером квантования является отображение симметризации β. Потребуем, чтобы квантование Q алгебры $S(\mathfrak{g}_R)$ переводило алгебру $J = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ в коммутативную алгебру $\gamma(Z)$ и было кольцевым гомоморфизмом. Эти условия определяют Q однозначно.

Чтобы построить отображение Q, напомним сначала конструкцию изоморфизма Дюфло.

Определим формальный ряд $j \in \hat{P}(\mathfrak{g})$ равенством

$$j(X) = \det(\operatorname{sh} \operatorname{ad} X / \operatorname{ad} X) .$$

Ряд j - обратимый элемент в кольце формальных степенных рядов. Пусть j^{-1} - обратный ряд. Определено каноническое спаривание

$$\hat{P}(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

которое позволяет рассматривать формальные ряды как дифференциальные операторы (бесконечного порядка) на $S(\mathfrak{g})$. Обозначим $\mathcal{D}(j^{-1})$ дифференциальный оператор, соответствующий ряду j^{-1}. Пусть $\beta: S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – отображение симметризации.

ТЕОРЕМА (Дюфло, [6]). Отображение

$$\Delta: S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow Z \qquad u \longmapsto \beta_0 \mathcal{D}(j^{-1})\, u$$

– кольцевой изоморфизм.

(Для полупростых алгебр Ли этот результат (в несколько иной форме) был получен Хариш-Чандрой).

Нетрудно проверить, что если $u \in S(\mathfrak{g})_K$, то $gr_K \Delta u = u$. Таким образом, отображение Δ – квантование алгебры $S(\mathfrak{g})$. Пусть $Q = \gamma \circ \Delta$ – сквозное отображение

$$Q : S(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. (i) Отображение Q – квантование $S(\mathfrak{g}_R)$.
(ii) Сужение Q на $J = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ – кольцевой гомоморфизм.
Теоремы 1 и 2 не зависят от выбора модели, т.е. от конкретного вида лаксова оператора. Чтобы конкретизировать выбор модели в классической механике нужно выбрать орбиту присоединенной группы алгебры Ли. $\mathfrak{g}_R$. В квантовой механике выбор модели соответствует переходу к представлению алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$. (Напомним, что между орбитами и представлениями существует естественное соответствие).

Закончим эту заметку замечанием о соотношении теоремы 2 с квантовым методом обратной задачи. Различие между ними состоит в их исходном пункте – выборе пуассоновой структуры. Пуассонова структура, возникающая в методе обратной задачи, не линейна, как скобка Ли – Пуассона, а квадратична. (Квадратичные скобки Пуассона впервые исследованы в [8], [9]).

Пусть G – редуктивная матричная группа Ли. Отождествим ее алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с двойственным пространством с помощью инвариантного скалярного произведения $\operatorname{tr} XY$. Предположим, что оператор $R \in \operatorname{End} \mathfrak{g}$ кососимметричен ("условие унитарности") и удовлетворяет модифицированному уравнению Янга – Бакстера (2). Определим скобку Пуассона функций на группе G, положив

$$\{h_1,h_2\}(L) = tr(LX_2R(LX_1) - X_2LR(X_1L)), \tag{6}$$
$$X_i = \operatorname{grad} h_i(L).$$

ТЕОРЕМА ([7], [I]). (i) Скобка (4) кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби (ii). Умножение $G \times G \longrightarrow G$ - пуассоново отображение относительно скобки (4)
(iii) Центральные функции на G коммутируют относительно скобки (6).

Свойство (ii) скобки (4) - это, в точности, хорошо известное свойство матриц монодромии разностных систем ("скобки Пуассона элементов матрицы монодромии воспроизводят скобки Пуассона элементов лаксова оператора в одном узле", см. [I], [8]).

Алгебра операторов в квантовом методе обратной задачи представляет собой деформацию алгебры функций на группе G с квадратичной скобкой Пуассона (4). Построение такой деформации давало бы "универсальные" (т.е. не зависящие от модели) коммутационные соотношения между квантовыми операторами. Е.К.Склянин в [9] изучает факторалгебру этой универсальной алгебры, получающуюся при выборе модели. "Универсальная" алгебра построена В.Г.Дринфельдом [IO] для классических r-матриц, удовлетворяющих вместо (2) вырожденному тождеству

$$[RX, RY] = R([X,RY] + [RX,Y]) . \tag{7}$$

К сожалению, с тождеством (7) не связана разумная задача факторизации и оно не выполняется в реалистических примерах.

Задача изучения деформаций квадратичных скобок (7) интересна в особенности потому, что она приводит нас к новому классу некоммутативных алгебр, для которых существует содержательная теория представлений [6].

Автор благодарен А.Г.Рейману, Н.Ю.Решетихину и Е.К.Склянину за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

I. Семенов-Тян-Шанский М.А. Что такое классическая r-матрица. - Функц.анализ и его прилож., I983, т.I7, № 4, с.I7-33.

2. Семенов-Тян-Шанский М.А. Классические r матрицы и метод орбит. - В кн.: Дифференциальная геометрия,

группы Ли и механика.У. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.123, с. 77-91.
3. K o s t a n t B. Quantization and representation theory. - Lecture Notes of the London Math.Sci., 1979, v.34, p.287-316.
4. Б е л а в и н А.А., Д р и н ф е л ь д В.Г. Уравнения треугольников и простые алгебры Ли. - Препринт ИТФ, 1982-18. Черноголовка, 33 с.
5. R e y m a n A.G., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I. - Inv.math.. 1979, v.54, p.81-100.
6. D u f l o M. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. - Ann.Sci.Ecile Norm.Sup., 1977, v.10, p.265-283.
7. Д р и н ф е л ь д В.Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл уравнения Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1983, т.268, № 5, с.285-287.
8. Р е ш е т и х и н Н.Ю., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтоновы структуры интегрируемых моделей теории поля. - ТМФ, 1983, т.56, № 3, с.323-343.
9. С к л я н и н Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера I,II. - Функц.анализ и его прилож., 1982, т.16, в.4, с.27-34; 1983, т.17, в.4, с.34-48.
10. Д р и н ф е л ь д В.Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1983, т.273, № 3, с.531-535.

Е.К.Склянин

ВОЛЧОК ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА И МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Введение

Волчком Горячева-Чаплыгина (ГЧ) называется следующая гамильтонова система. Рассмотрим 6-мерное фазовое пространство, натянутое на динамические переменные x_α, J_α $(\alpha = 1,2,3)$, образующие алгебру Ли $e(3)$ относительно скобки Пуассона

$$\begin{aligned} \{ J_\alpha, J_\beta \} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma , \\ \{ J_\alpha, x_\beta \} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma , \\ \{ x_\alpha, x_\beta \} &= 0 . \end{aligned} \tag{I}$$

Зафиксировав значения операторов Казимира

$$\begin{aligned} \rho &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 , \\ \sigma &= x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3 = 0 , \end{aligned} \tag{2}$$

мы получим 4-мерное многообразие, на котором скобка Пуассона (I) невырожденна.

Гамильтониан волчка ГЧ имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2) - b x_1 = \\ &= \tfrac{1}{2} (J^2 + 3J_3^2) - b x_1 , \end{aligned} \tag{3}$$

где $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, а b - параметр. Относительно физической интерпретации величин x_α, J_α и гамильтониана (3) см., например, [I].

Как показал Чаплыгин [2], при $\sigma = 0$ гамильтониан (3) коммутирует относительно скобки Пуассона (I) с интегралом движения

$$\begin{aligned} G &= 2J_3 (J_1^2 + J_2^2) + 2b x_3 J_1 = \\ &= 2J_3 (J^2 - J_3^2) + 2b x_3 J_1 , \end{aligned} \tag{4}$$

и, таким образом, рассматриваемая гамильтонова система является вполне интегрируемой по Лиувиллю. Чаплыгин же установил [2], что уравнения движения, соответствующие гамильтониану (3), интегрируются в квадратурах при переходе к переменным

$$u_1 = \mathcal{J}_3 + \sqrt{\mathcal{J}^2}\,,$$
$$u_2 = \mathcal{J}_3 - \sqrt{\mathcal{J}^2}\,. \qquad (5)$$

В работе [3] было показано, что наряду с волчком ГЧ вполне интегрируемой системой является также т.н. гиростат ГЧ [I] , задаваемый гамильтонианом

$$H_p = H + p\mathcal{J}_3\,, \qquad (6)$$

который коммутирует относительно скобки Пуассона (I) с интегралом движения

$$G_p = G + p(\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}_3^2)\,. \qquad (7)$$

Гиростат ГЧ интегрируется в тех же переменных (5), что и волчок ГЧ. Очевидно, при $p = 0$ гиростат ГЧ вырождается в волчок ГЧ.

В квантовом случае скобки Пуассона (I) должны быть заменены на перестановочные соотношения

$$[\mathcal{J}_\alpha, \mathcal{J}_\beta]_- = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{J}_\gamma\,,$$
$$[\mathcal{J}_\alpha, x_\beta]_- = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma\,, \qquad (8)$$
$$[x_\alpha, x_\beta]_- = 0$$

(здесь и далее используется обозначение $[A,B]_\pm = AB \pm BA$). Операторы Казимира (2) и гамильтонианы (3) и (6) при этом сохраняют свой вид. Как и в классическом случае, мы будем предполагать, что $\rho = 1$, $\sigma = 0$.

В дальнейшем мы будем обозначать квантовые операторы теми же буквами, что соответствующие классические величины, помечая знаком $\wedge$ те квантовые величины, выражение для которых отличается от соответствующего классического выражения упорядочением множителей или наличием квантовых поправок.

И.В.Комаров показал [4] , что в квантовом случае гамильтониан (3) коммутирует с оператором

$$\hat{G} = 2\mathcal{J}_3(\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}_3^2 + \tfrac{1}{4}) + b\,[x_3, \mathcal{J}_1]_+\,, \qquad (9)$$

если выполнено условие $\sigma = 0$. Кроме того, ему удалось свести задачу о нахождении спектра H к двум независимым одномерным спектральным задачам, что, очевидно, соответствует разделению переменных в классической механике.

Обобщение перечисленных результатов на случай квантового гиростата ГЧ содержится в работе [5] . В частности, квантовый аналог интеграла движения (7) имеет вид

$$\hat{G}_p = \hat{G} + p(J^2 - J_3^2 + \frac{1}{4}) . \tag{10}$$

Цель настоящей статьи двоякая. Во-первых, показать, что волчок (гиростат) ГЧ (как классический, так и квантовый) может быть систематически исследован в рамках классического или, соответственно, квантового метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), который в настоящее время является, пожалуй, единственным методом исследования вполне интегрируемых систем, претендующим на универсальность. Точнее, речь идет о модификации МОЗР, появившейся не так давно - о т.н. методе R - матрицы [6, 7] . Хотя полная интегрируемость волчка (гиростата) ГЧ уже установлена ранее другими средствами, такой результат, тем не менее, важен с методологической точки зрения, как еще одно свидетельство универсальности МОЗР.

Вторая цель настоящей работы состоит в том, чтобы продемонстрировать на примере квантового волчка (гиростата) ГЧ новый способ вывода уравнений для спектра H , который может составить альтернативу т.н. алгебраическому анзатцу Бете [6] в тех ситуациях, когда у L - оператора отсутствует локальный вакуум. Предлагаемый способ обобщает прием, использованный в работе [8] при исследовании квантовой периодической цепочки Тода. Подчеркнем, что такое обобщение оказалось возможным благодаря использованию R - матричного формализма.

Основной текст статьи состоит из двух параграфов: в первом исследуется классический волчок (гиростат) ГЧ, во втором - квантовый.

Я глубоко признателен И.В.Комарову, содержательные беседы с которым послужили толчком к написанию этой работы.

§ I. Классический случай

Для интегрирования классического волчка (гиростата) ГЧ мы воспользуемся методом классической r - матрицы [7] , представляющим собой, в сущности, один из вариантов МОЗР. Этот метод в применении к дискретным вполне интегрируемым системам состоит в следующем, Рассматриваемой системе сопоставляется квадратная $(N \times N)$ - матрица $L(u)$, т.н. L - оператор, зависящая от динамических переменных системы и от вспомогательного параметра u , называемого спектральным. Требуется, чтобы существовала такая $(N^2 \times N^2)$ - матрица $r(u)$, зависящая от спектрального параметра u, что справедливо тождество:

$$\{ L(u) \overset{\otimes}{,} L(v) \} = [r(u-v), L(u) \otimes L(v)]_- . \tag{11}$$

Легко видеть [7], что из (11) вытекает инволютивность функций $t(u) = tr\, L(u)$

$$\{ t(u), t(v) \} = 0 . \tag{12}$$

Если гамильтониан H исследуемой системы и $t(u)$ функционально зависимы, то $t(u)$ в силу (12) может рассматриваться, как производящая функция коммутирующих интегралов движения.

Теперь остается только предъявить для волчка (гиростата) ГЧ L - оператор и r - матрицу, удовлетворяющие всем вышеперечисленным требованиям. Для этого нам придется расширить фазовое пространство, добавив переменные p и q со скобками Пуассона

$$\begin{gathered} \{ p, q \} = 1 , \\ \{ p, J_\alpha \} = \{ q, J_\alpha \} = 0 , \\ \{ p, x_\alpha \} = \{ q, x_\alpha \} = 0 . \end{gathered} \tag{13}$$

Положим теперь

$$L(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} , \tag{14}$$

$$A(u) = (u + p + 2J_3) K(u) + b(x_- u - x_3 J_-) , \tag{15а}$$

$$B(u) = b e^{2iq} [(x_+ u - x_3 J_+)(u + p + 2J_3) - b x_3^2] , \tag{15б}$$

$$C(u) = e^{-2iq} K(u) , \tag{15в}$$

$$D(u) = b(x_+ u - x_3 J_+) , \tag{15г}$$

где

$$\begin{aligned} K(u) &= u^2 - 2J_3 u - (J^2 - J_3^2) = \\ &= (u - u_1)(u - u_2) , \end{aligned} \tag{16}$$

$$x_\pm = x_1 \pm i x_2 , \qquad J_\pm = J_1 \pm i J_2 . \tag{17}$$

Прямым вычислением проверяется, что L - оператор (I4, I5) удовлетворяет тождеству (II) с r - матрицей

$$r(u)=\frac{2i}{u}\mathcal{P}\ ,\qquad \mathcal{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}. \tag{I8}$$

Полная сводка скобок Пуассона между матричными элементами $L(u)$ приведена в Приложении I. Подчеркнем, что равенство (II) выполняется только при $\sigma=0$.

Как уже отмечалось, тождество (II) влечет за собой выполнение равенства (I2), где в нашем случае $t(u)$ - следующий кубический полином:

$$t(u)=A(u)+D(u)=u^3+pu^2-2H_pu-G_p\ . \tag{I9}$$

Величины H_p и G_p в (I9) представляют собой не что иное как введенные ранее гамильтониан (6) и интеграл движения (7) классического гиростата ГЧ. Из (I2) и (I9) вытекает, что p, H_p и G_p находятся в инволюции. Поскольку величина p является, тем самым, интегралом движения, ее можно рассматривать как параметр в H_p и G_p. Таким образом, мы воспроизвели результаты [2, 3] о полной интегрируемости волчка (гиростата) ГЧ.

Согласно Чаплыгину [2], для интегрирования в квадратурах уравнений движения волчка ГЧ полезно использовать переменные u_1, u_2 (5). Ниже будет показано, что переменные u_1, u_2, а также канонически сопряженные с ними величины v_1, v_2 находят естественную интерпретацию в рамках МОЗР. В наших рассуждениях мы используем подход работ [9, I0], переведенный на язык r - матричного формализма.

Заметим, прежде всего, что u_1 и u_2 являются нулями квадратного полинома $C(u)$ (I5в, I6) ж)

$$C(u_n)=0\ ,\qquad n=1,2\ . \tag{20}$$

Зададим величины $\lambda_n^{\pm}$ формулами

$$\lambda_n^-=A(u_n)\ ,\quad \lambda_n^+=D(u_n)\ ,\quad n=1,2\ . \tag{2I}$$

ж) Это наблюдение принадлежит И.В.Комарову.

Пользуясь формулами (I5) и условиями на операторы Казимира ρ и σ, нетрудно убедиться, что

$$\det L(u) = A(u)\,D(u) - B(u)\,C(u) \equiv d(u) = b^2 u^2 . \qquad (22)$$

Поэтому, в силу (20), (2I)

$$\lambda_n^- \lambda_n^+ = A(u_n)\,D(u_n) = d(u_n) = b^2 u_n^2 . \qquad (23)$$

С помощью формул (ПI.I-I6) и определений (20), (2I) можно вычислить скобки Пуассона между величинами p, q, $u_n, \lambda_n^{\pm}$:

$$\{p, u_n\} = \{p, \lambda_n^{\pm}\} = \{q, u_n\} = \{q, \lambda_n^{\pm}\} = 0 ,$$

$$\{u_m, u_n\} = 0, \quad \{\lambda_m^{\pm}, \lambda_n^{\pm}\} = 0 , \qquad (24)$$

$$\{\lambda_m^{\pm}, u_n\} = \pm 2i\, \lambda_m^{\pm} \delta_{mn} ,$$

$$\{\lambda_m^{+}, \lambda_n^{-}\} = 2i d'(u_m)\, \delta_{mn} = 4 i b^2 u_m \delta_{mn} .$$

Покажем, например, как вычисляется скобка Пуассона $\{\lambda_m^+, u_n\}$. Используя (20), (2I), (ПI.I5), получаем

$$\{\lambda_m^+, u_n\} = \{D(u_m), u_n\} = D'(u_m)\{u_m, u_n\} + \{D(u), u_n\}\Big|_{u=u_m} =$$

$$= -\frac{1}{C'(u_n)}\{D(u), C(v)\}\Big|_{\substack{u=u_m,\\ v=u_n}} = -\frac{2i}{C'(u_n)}\,\frac{D(u)C(v) - C(u)D(v)}{u - v}\Bigg|_{\substack{u=u_m,\\ v=u_n}} = 2i\lambda_m^+ \delta_{mn}.$$

Остальные равенства (24) проверяются аналогично.

Переменные p, q, $u_n, \lambda_n^{\pm}$ образуют полную систему динамических переменных в том смысле, что через них можно выразить любые функции на фазовом пространстве системы, в том числе и матричные элементы L - оператора (I4) $A(u), B(u), C(u)$ и $D(u)$. Действительно, полиномы $C(u), A(u)$ и $D(u)$ однозначно определяются своими значениями в точках u_n и асимптотиками

$$\begin{aligned} C(u) &= e^{-2iq} u^2 + O(u), \\ A(u) &= u^3 + p u^2 + O(u), \\ D(u) &= O(u) . \end{aligned} \qquad (25)$$

при $u \to \infty$. Воспользовавшись интерполяционной формулой Лагранжа, получаем следующий ответ

$$C(u) = e^{-2iq}(u-u_1)(u-u_2),$$

$$A(u) = (u+p+u_1+u_2)(u-u_1)(u-u_2) + \frac{u-u_2}{u_1-u_2}\lambda_1^- + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}\lambda_2^-, \tag{26}$$

$$\mathfrak{D}(u) = \frac{u-u_2}{u_1-u_2}\lambda_1^+ + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}\lambda_2^+ .$$

Выражение для $B(u)$ можно получить, воспользовавшись равенством (22):

$$B(u) = e^{2iq}(u+p+u_1+u_2)\left[\frac{u-u_2}{u_1-u_2}\lambda_1^+ + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}\lambda_2^+\right] + \frac{e^{2iq}}{(u_1-u_2)}\left[2b^2u_1u_2 - \lambda_1^+\lambda_2^- - \lambda_1^-\lambda_2^+\right]. \tag{27}$$

Сравнение (26) с (I5) показывает, что

$$u_1+u_2 = 2J_3, \qquad u_1u_2 = J_3^2 - J^2; \tag{28}$$

$$\frac{\lambda_1^\pm - \lambda_2^\pm}{u_1-u_2} = bx_\pm, \quad \frac{u_2\lambda_1^\pm - u_1\lambda_2^\pm}{u_1-u_2} = bx_3J_\pm; \tag{29}$$

$$2H = u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2 - (u_1-u_2)^{-1}(\lambda_1^+ + \lambda_1^- - \lambda_2^+ - \lambda_2^-), \tag{30а}$$

$$G = -u_1u_2(u_1+u_2) - (u_1-u_2)^{-1}\left[u_1(\lambda_2^+ + \lambda_2^-) - u_2(\lambda_1^+ + \lambda_1^-)\right]. \tag{30б}$$

Из соотношений $\bar{x}_+ = x_-$, $\bar{J}_+ = J_-$ и (29) вытекают условия вещественности для $\lambda_n^\pm$

$$\bar{\lambda}_n^\pm = \lambda_n^\mp . \tag{3I}$$

Равенства (23), (24) и (3I) дают возможность представить $\lambda_n^\pm$ в виде

$$\lambda_n^\pm = bu_n e^{\pm 2iv_n}, \tag{32}$$

где v_n - импульсы, канонически сопряженные с координатами

$$\{v_1, v_2\} = 0, \quad \{v_m, u_n\} = \delta_{mn}.$$

Поскольку техника интегрирования уравнений движения волчка ГЧ в квадратурах детально описана в работах [1, 2] (см. также статьи [9, 10], где в случае периодической цепочки Тода описан переход от канонических переменных u_n, v_n к переменным действие-угол), мы закончим на этом исследование классического волчка ГЧ и перейдем к квантовому случаю.

§ 2. Квантовый случай.

В квантовом случае, как и в классическом, следует ввести два вспомогательных оператора p и q, удовлетворяющих каноническому перестановочному соотношению $[p, q]_- = -i$ и коммутирующих с динамическими переменными x_α, $\mathcal{J}_\alpha$ (8).

Квантовый L - оператор представляет собой матрицу $\hat{L}(u)$ вида

$$\hat{L}(u) = \begin{pmatrix} \hat{A}(u) & \hat{B}(u) \\ \hat{C}(u) & \hat{D}(u) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

определяемую формулами

$$\hat{A}(u) = (u + p + 2\mathcal{J}_3)\hat{K}(u) + b(x_- u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_-]_+), \tag{34а}$$

$$\hat{B}(u) = be^{2iq}\left[(x_+ u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_+]_+)(u + p + 2\mathcal{J}_3) - bx_3^2\right], \tag{34б}$$

$$\hat{C}(u) = e^{-2iq}\hat{K}(u), \tag{34в}$$

$$\hat{D}(u) = b(x_+ u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_+]_+), \tag{34г}$$

где

$$\hat{K}(u) = u^2 - 2\mathcal{J}_3 u - (\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}_3^2 + \tfrac{1}{4}). \tag{35}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что $\hat{L}(u)$ удовлетворяет равенству [6, 7]

$$R(u-v)(\hat{L}(u) \otimes \hat{L}(v)) = (I \otimes \hat{L}(v))(\hat{L}(u) \otimes I)R(u-v), \tag{36}$$

где

$$R(u) = u(1 + i r(u)) = u - 2\mathcal{P}. \tag{37}$$

Полная сводка получаемых из (36) перестановочных соотношений для операторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ приведена в Приложении 2. Равенство (36) играет в квантовом методе обратной задачи [6, 7] ту же роль, что равенство (II) в классическом случае, обеспечивая коммутативность значений

$$[\hat{t}(u), \hat{t}(v)]_- = 0 \tag{38}$$

производящей функции интегралов движения

$$\begin{aligned} \hat{t}(u) &= tr\,\hat{L}(u) = \hat{A}(u) + \hat{D}(u) = \\ &= u^3 + pu^2 - 2(H_p + \tfrac{1}{8})u - \hat{G}_p , \end{aligned} \tag{39}$$

где H_p и $\hat{G}_p$ - гамильтониан (6) и интеграл движения (I0) квантового гиростата ГЧ.

Теперь мы можем перейти к решению задачи, представляющей наибольший интерес в квантовом случае - определению совместного спектра коммутирующих самосопряженных операторов H_p и $\hat{G}_p$. Обычно, в рамках квантового метода обратной задачи, для этого используется т.н. алгебраический анзатц Бете [6], который в своем простейшем варианте состоит в следующем. Пусть существует вектор Ω (псевдовакуум), аннулируемый оператором $\hat{C}(u)$ при любых u

$$\hat{C}(u)\,\Omega = 0 . \tag{40}$$

Тогда собственные векторы производящей функции интегралов движения $\hat{t}(u)$ ищутся в виде $\hat{B}(u_1)\ldots\hat{B}(u_N)\,\Omega$. Задача определения спектра и построения собственных векторов $\hat{t}(u)$ сводится при этом к решению некоторой системы уравнений для параметров $u_1, \ldots, u_N$.

К сожалению, этот метод неприменим к волчку (гиростату) ГЧ, так как уравнение (40) не имеет решения Ω, не зависящего от u, поскольку у оператора e^{-2iq} нет нулевого собственного значения. Поэтому для решения поставленной задачи мы применим новый прием, идея которого состоит в перенесении на квантовый случай рассуждений предыдущего параграфа.

Действуя по аналогии с классическим случаем, попробуем разложить полином $\hat{C}(u)$ на линейные по u множители.

$$\hat{C}(u) = e^{-2iq}(u - \hat{u}_1)(u - \hat{u}_2) . \tag{4I}$$

В силу (П2.II) операторы $e^{-2iq}, \hat{u}_1, \hat{u}_2$ должны коммутировать. Из (34в), (35) получаем для операторов $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{u}_1 + \hat{u}_2 = 2J_3 \\ \hat{u}_1 \hat{u}_2 = J_3^2 - J^2 - \frac{1}{4} \end{cases} \tag{42}$$

Поскольку "импульс" p является интегралом движения, мы всегда можем ограничиться рассмотрением собственных состояний, отвечающих фиксированному собственному значению p . Поэтому в дальнейшем мы не будем делать различия между оператором p и его собственным значением.

Выберем в качестве базиса пространства состояний квантового волчка (гиростата) ГЧ при фиксированном собственном значении p общие собственные векторы $|j,m\rangle$ операторов J^2 и J_3

$$\begin{cases} J^2 |j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle, \\ J_3 |j,m\rangle = m|j,m\rangle, \end{cases} \tag{43}$$

где j и m пробегают значения

$$\begin{cases} j = 0, 1, 2, \ldots \\ m = -j, -j+1, \ldots, 0, \ldots, j . \end{cases} \tag{44}$$

Будем считать, что векторы $|j,m\rangle$ нормированы условием

$$\langle j,m|j',m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'} . \tag{45}$$

Из (42) и (43) для собственных значений $u_n(j,m)$ операторов $\hat{u}_n$ на векторе $|j,m\rangle$ получаем

$$\begin{cases} u_1(j,m) + u_2(j,m) = 2m, \\ u_1(j,m)\, u_2(j,m) = (m+j+\frac{1}{2})(m-j-\frac{1}{2}) . \end{cases} \tag{46}$$

Зафиксируем, для определенности, одно из двух решений системы (46):

$$\begin{cases} u_1(j,m) = m+j+\frac{1}{2} \\ u_2(j,m) = m-j-\frac{1}{2} . \end{cases} \tag{47}$$

Из (44) и (47) следует, что совместный спектр S определенных таким образом коммутирующих самосопряженных операторов $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ прост и представляет собой объединение $S = S_+ \cup S_-$ двух квадратных решеток $S_\pm$ (см.Рис.I)

$$S_{\pm}=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2:\,(u_1,u_2)=(1\mp\tfrac{1}{2}+2n_1,\,-1\pm\tfrac{1}{2}-2n_2)\,,\quad n_1,n_2=0,1,2,\ldots\}\ , \tag{48}$$

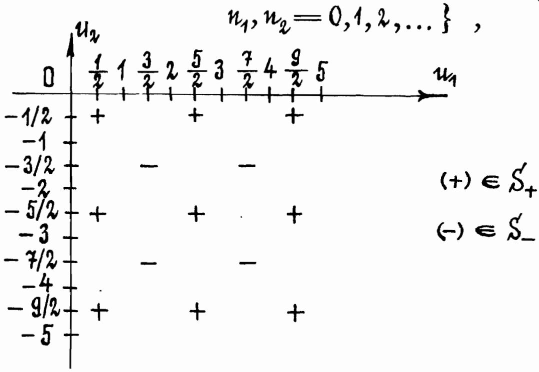


Рис.I

расположенных в нижнем правом квадранте плоскости (u_1,u_2) и отвечающих четным (S_+) и нечетным (S_-) состояниям относительно инволюции p :

$$p\,|j,m> = (-1)^{j+m}\,|j,m>\,,$$
$$pJ_3p = J_3\,,\qquad p\,x_3\,p = -x_3\ ,$$
$$pJ_\pm p = -J_\pm\,,\qquad p\,x_\pm\,p = x_\pm\ .$$

Таким образом, мы можем реализовать пространство состояний квантового волчка (гиростата) ГЧ как пространство $\mathcal{L}_2(S)$ квадратично интегрируемых функций на спектре S :

$$\mathcal{L}_2(S)=\{\,f(u_1,u_2):(u_1,u_2)\in S,\ \sum_{(u_1,u_2)\in S}|f(u_1,u_2)|^2<\infty\,\}\,.$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы представить производящую функцию интегралов движения $\hat{t}(u)$ как оператор в $\mathcal{L}_2(S)$. Самый прямой путь к этому лежит через использование формул [II] , явно описывающих неприводимое представление алгебры Ли $e(3)$ с нужными значениями операторов Казимира (2):

$$J_3|j,m> = m|j,m>\,,$$
$$J_\pm|j,m> = \pm i\sqrt{(j\pm m)(j\mp m+1)}\ |j,m\mp 1>\,,$$
$$x_3|j,m> = i\sqrt{\frac{(j-m)(j+m)}{(2j-1)(2j+1)}}\,|j-1,m> - i\sqrt{\frac{(j-m+1)(j+m+1)}{(2j+1)(2j+3)}}\,|j+1,m>\,, \tag{49}$$
$$x_\pm|j,m> = \sqrt{\frac{(j\pm m-1)(j\pm m)}{(2j-1)(2j+1)}}\,|j-1,m\mp 1> + \sqrt{\frac{(j\mp m+1)(j\mp m+2)}{(2j+1)(2j+3)}}\,|j+1,m\mp 1>\,.$$

Подставив (49) и (34) в (39), мы получим действие оператора $\hat{t}(u)$ на волновую функцию $f(u_1,u_2)=\langle j,m|f\rangle\in\mathcal{L}_2(S)$:

$$(\hat{t}(u)f)(u_1,u_2)=(u+p+u_1+u_2)(u-u_1)(u-u_2)f(u_1,u_2)+ \tag{50}$$

$$+\frac{(u-u_2)\,\hat{d}^{1/2}(u_1+1)}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_2+2)}}f(u_1+2,u_2)+\frac{(u-u_2)\,\hat{d}^{1/2}(u_1-1)}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_2-2)}}f(u_1-2,u_2)+$$

$$+\frac{(u-u_1)\,\hat{d}^{1/2}(u_2+1)}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_2-2)}}f(u_1,u_2+2)+\frac{(u-u_1)\,\hat{d}^{1/2}(u_2-1)}{\sqrt{(u_1-u_2)(u_1-u_2+2)}}f(u_1,u_2-2),$$

где $\hat{d}(u)$, напомним, это квантовый детерминант (П2.I9) L - оператора (33).

Удобно сделать замену

$$f(u_1,u_2)=i^{\frac{2u_2+1}{2}}\sqrt{u_1-u_2}\,\varphi(u_1,u_2).$$

При этом формула (50) значительно упростится:

$$(\hat{t}(u)\varphi)(u_1,u_2)=(u+p+u_1+u_2)(u-u_1)(u-u_2)\varphi(u_1,u_2)+$$

$$+\frac{u-u_2}{u_1-u_2}\left[\hat{d}^{1/2}(u_1+1)\varphi(u_1+2,u_2)+\hat{d}^{1/2}(u_1-1)\varphi(u_1-2,u_2)\right]+ \tag{5I}$$

$$+\frac{u-u_1}{u_2-u_1}\left[\hat{d}^{1/2}(u_2+1)\varphi(u_1,u_2+2)+\hat{d}^{1/2}(u_2-1)\varphi(u_1,u_2-2)\right].$$

Скалярное произведение для волновой функции $\varphi(u_1,u_2)$ имеет вид

$$\langle\chi|\varphi\rangle=\sum_{(u_1,u_2)\in S}(u_1-u_2)\,\overline{\chi}(u_1,u_2)\varphi(u_1,u_2). \tag{52}$$

Заметим, что для $(u_1,u_2)\in S$ всегда $u_1-u_2>0$. Заметим, также, что хотя носитель функций $\varphi(u_1,u_2)$ лежит в квадранте $\{u_1>0,\ u_2<0\}$ сдвиги аргументов u_n на ± 2 в формуле (5I) не выводят $\varphi(u_1,u_2)$ из рассматриваемого пространства, так как множитель $\hat{d}^{1/2}(u_n\pm 1)=b\sqrt{(u_n\pm\frac{1}{2})(u_n\pm\frac{3}{2})}$ обращается в 0 при $u_n=\mp\frac{1}{2}$, $\mp\frac{3}{2}$. В дальнейшем нам будет удобно считать, что $\varphi(u_1,u_2)=0$ при $(u_1,u_2)\notin S$.

Уравнения для определения спектра $\hat{t}(u)$ получаются теперь при помощи следующего простого рассуждения (ср. [8]). Пусть $\varphi(u_1,u_2)$ - собственная функция оператора $\hat{t}(u)$, отвечающая собственному значению $\tau(u)=u^3+pu^2-2(h_p+\frac{1}{8})u-g_p$, h_p и g_p - собственные значения операторов H_p (6) и $\hat{G}_p$ (I0). Тогда левая часть (5I) заменится на $\tau(u)\varphi(u_1,u_2)$. Подставляя в (51) $u=u_1$ и $u=u_2$, мы получим для $\varphi(u_1,u_2)$ систему уравнений

$$\begin{cases} \tau(u_1)\varphi(u_1,u_2)=\hat{d}^{1/2}(u_1+1)\varphi(u_1+2,u_2)+\hat{d}^{1/2}(u_1-1)\varphi(u_1-2,u_2) \\ \tau(u_2)\varphi(u_1,u_2)=\hat{d}^{1/2}(u_2+1)\varphi(u_1,u_2+2)+\hat{d}^{1/2}(u_2-1)\varphi(u_1,u_2-2), \end{cases} \tag{53}$$

которая эквивалентна исходной задаче (51), так как кубический полином $\tau(u)$ однозначно восстанавливается по своим значениям в точках u_1 и u_2 и асимптотике $\tau(u)=u^3+pu^2+O(u)$, $u\to\infty$ посредством интерполяции по Лагранжу.

Рассмотрим теперь следующую спектральную задачу

$$\tau(u)\chi(u)=\hat{d}^{1/2}(u+1)\chi(u+2)+\hat{d}^{1/2}(u-1)\chi(u-2) \tag{54}$$

для функции χ от переменной u, пробегающей решетку $u=\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$ $\pm\frac{5}{2}\ldots$. Граничные условия для $\chi(u)$ следующие

$$\begin{cases} \chi(u)=0, \quad u<0 \\ \sum\limits_{\{u\}} u\,|\chi(u)|^2<\infty \end{cases} . \tag{55}$$

Трехчленное рекуррентное соотношение (54) с граничными условиями (55) детально исследовалось в работах [4] (при $p=0$) и [5] (в общем случае), где было показано, что при $b\neq 0$ собственные значения h_p и g_p (p - фиксировано), при которых задача (54), (55) имеет решение, образуют дискретное множество, причем кратность каждой точки спектра (h_p, g_p) равна I.

Легко видеть, что одномерная спектральная задача (54), (55) эквивалентна двумерной задаче (51), так как всякому решению $\chi(u)$ задачи (54), (55) соответствует собственная функция $\varphi(u_1,u_2)$ оператора $\hat{t}(u)$(51) вида

$$\varphi|u_1,u_2|=\chi(u_1)\chi(-u_2) \tag{56}$$

и обратно, поскольку спектр задачи (54), (55) прост, всякая собственная функция задачи (51), (53) непременно имеет вид (56) [ж)].

Итак, нам удалось разделить переменные в квантовом волчке

ж) Условие простоты спектра не является, впрочем, существенным. Если кратность собственного значения (h_p, q_p) задачи (54), (55) равна μ, то кратность того же собственного значения для задачи (51), (53) равна, очевидно, μ^2.

(гиростате) ГЧ, то есть, свести вопрос об определении совместного спектра интегралов движения к набору независимых одномерных спектральных задач, которые могут затем исследоваться, например, численными методами [4, 5] .

Приведенный выше вывод формулы (5I) имеет, однако, тот недостаток, что он слишком сильно опирается на явный вид операторов $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ (34). Поэтому мы опишем в заключение другой вывод, который использует только фундаментальное соотношение (36) и может таким образом, быть перенесен на другие модели, допускающие применение квантового метода обратной задачи.

Идея приводимого ниже вывода формулы (5I) состоит в построении квантового аналога переменных u_n (20) и $\lambda_n^{\pm}$ (2I), оказавшихся, как мы видели весьма полезными при исследовании классического волчка ГЧ. Квантовые операторы $\hat{u}_n$ были определены выше (4I), (47). Введем теперь операторы $\hat{\lambda}_n^{\pm}$ формулами

$$\hat{\lambda}_n^- = \hat{A}(u \doteqdot \hat{u}_n), \ \hat{\lambda}_n^+ = \hat{D}(u \doteqdot u_n) ; \quad n = 1, 2; \tag{57}$$

где знак $\doteqdot$ означает, что операторы $\hat{u}_n$ подставляются в операторные полиномы $\hat{A}(u)$ и $\hat{D}(u)$ <u>слева</u>, то есть, например, полином $\hat{A}(u) = \sum_{k=0}^{3} u^k \hat{A}_k$ заменяется на оператор $\hat{A}(u \doteqdot \hat{u}_n) = \sum_{k=0}^{3} \hat{u}_n^k \hat{A}_k$. Это условие существенно, так как операторы $\hat{A}(u)$ и $\hat{D}(u)$, вообще говоря, не коммутируют с $\hat{u}_n$.

Пользуясь формулами (П2.I-I6) и определениями (4I), (57), можно вычислить коммутационные соотношения между операторами $p, q, \hat{u}_n, \hat{\lambda}_n^{\pm}$:

$$[p, \hat{u}_n]_- = [p, \hat{\lambda}_n^{\pm}]_- = [q, \hat{u}_n]_- = [q, \hat{\lambda}_n^{\pm}]_- = 0 , \tag{58а}$$

$$[\hat{u}_m, \hat{u}_n]_- = 0, \ [\hat{\lambda}_m^{\pm}, \hat{\lambda}_n^{\pm}]_- = 0, \tag{58б}$$

$$\hat{\lambda}_m^{\pm} \hat{u}_n = (\hat{u}_n \pm 2\delta_{mn}) \hat{\lambda}_m^{\pm} . \tag{58в}$$

Кроме того, из соотношений (П2.20-27) вытекают следующие равенства:

$$\hat{\lambda}_n^- \hat{\lambda}_n^+ = \hat{d}(\hat{u}_n - 1) = b^2(\hat{u}_n - \tfrac{1}{2})(\hat{u}_n - \tfrac{3}{2}) , \tag{59а}$$

$$\hat{\lambda}_n^+ \hat{\lambda}_n^- = \hat{d}(\hat{u}_n + 1) = b^2(\hat{u}_n + \tfrac{1}{2})(\hat{u}_n + \tfrac{3}{2}) . \tag{59б}$$

Покажем, например, как выводится коммутационное соотношение

(58в) между $\hat{\lambda}^-_m$ и $\hat{u}_n$. Перепишем равенство (П2.3) в виде

$$(u-v)\hat{A}(u)\hat{C}(v)=(u-v-2)\hat{C}(v)\hat{A}(u)+2\hat{C}(u)\hat{A}(v). \qquad (60)$$

Подставим теперь в (60) $u=\hat{u}_m$. Используя определения (57) и тот факт, что, в силу (4I), $[\hat{C}(v),\hat{u}_m]_-=0$, причем

$$\hat{C}(u \doteqdot \hat{u}_m)=0 \qquad (6I)$$

получим

$$(\hat{u}_m-v)\hat{\lambda}^-_m\hat{C}(v)=(\hat{u}_m-v-2)\hat{C}(v)\hat{\lambda}^-_m \quad . \qquad (62)$$

Пусть, для определенности, $m=1$. Тогда, подставив в (62) выражение (4I) для $\hat{C}(v)$ и сократив слева на $e^{-2iq}(v-\hat{u}_1)$, что всегда можно сделать при v, лежащих вне спектра $\hat{u}_1$, получим

$$\hat{\lambda}^-_1(v-\hat{u}_1)(v-\hat{u}_2)=(v-\hat{u}_1+2)(v-\hat{u}_2)\hat{\lambda}^-_1 \; . \qquad (63)$$

Из равенства (63) немедленно вытекает равенство

$$\hat{\lambda}^-_1 s(\hat{u}_1,\hat{u}_2)=s(\hat{u}_1-2;\hat{u}_2)\hat{\lambda}^-_1 \qquad (64)$$

для любой <u>симметрической</u> функции $s(u_1,u_2)=s(u_2,u_1)$, так как любая симметрическая функция двух переменных u_1,u_2, как известно, однозначно выражается через элементарные симметрические полиномы (u_1+u_2) и u_1u_2. Но поскольку, совместный спектр S операторов $\hat{u}_1,\hat{u}_2$, как было показано ранее, целиком лежит в правом нижнем квадранте плоскости $\mathbb{R}^2$, равенство (64) на самом деле справедливо для <u>любой</u> функции $s(u_1,u_2)$, в том числе и для $s(u_1,u_2)=u_1$ и $s(u_1,u_2)=u_2$. Доказательство закончено.

Аналогично, подставив $u \doteqdot u_n$ в равенство (П2.I2), мы получим перестановочное соотношение (58в) между $\hat{\lambda}^+_m$ и $\hat{u}_n$.

Доказательство равенства (59а) потребует более громоздких выкладок. Заметим, прежде всего, что, как и в классическом случае, из определений (57) и асимптотик (25) вытекают равенства

$$\hat{A}(u)=(u+p+\hat{u}_1+\hat{u}_2)(u-\hat{u}_1)(u-\hat{u}_2)+$$
$$+\frac{u-\hat{u}_2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}^-_1+\frac{u-\hat{u}_1}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}^-_2 , \qquad (65)$$

$$\hat{D}(u)=\frac{u-\hat{u}_2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}^+_1+\frac{u-\hat{u}_1}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}^+_2 ,$$

в которых, в отличие от формул (26), существен порядок операторных множителей.

Рассмотрим теперь равенство (П2.23)

$$\hat{A}(u)\,\hat{D}(u-2)-\hat{C}(u)\,\hat{B}(u-2)=\hat{d}(u-1)\,.$$

Второе слагаемое в левой части исчезает после подстановки $u \hat{=} \hat{u}_n$ в силу (61). Чтобы вычислить первое слагаемое, заменим в нем $\hat{A}(u)$ и $\hat{D}(u)$ их выражениями (65) через $\hat{u}_n$ и $\hat{\lambda}_n^{\pm}$:

$$\hat{A}(u)\,\hat{D}(u-2)=(u+p+\hat{u}_1+\hat{u}_2)(u-\hat{u}_1)(u-\hat{u}_2)\hat{D}(u-2)+$$
$$+\frac{u-\hat{u}_2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_1^-\frac{u-\hat{u}_2-2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_1^+ +\frac{u-\hat{u}_2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_1^-\frac{u-\hat{u}_1-2}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}_2^+ +$$
$$+\frac{u-\hat{u}_1}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}_2^-\frac{u-\hat{u}_2-2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_1^+ +\frac{u-\hat{u}_1}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}_2^-\frac{u-\hat{u}_1-2}{\hat{u}_2-\hat{u}_1}\hat{\lambda}_2^+\,.$$

Пользуясь соотношениями (58в), пронесем операторы $\hat{\lambda}_n^-$ направо.

$$\hat{A}(u)\hat{D}(u-2)=(u+p+\hat{u}_1+\hat{u}_2)(u-\hat{u}_1)(u-\hat{u}_2)\hat{D}(u-2)+$$
$$+\frac{(u-\hat{u}_2)(u-\hat{u}_2-2)}{(\hat{u}_1-\hat{u}_2)(\hat{u}_1-\hat{u}_2-2)}\hat{\lambda}_1^-\hat{\lambda}_1^+ +\frac{(u-\hat{u}_2)(u-\hat{u}_1)}{(\hat{u}_1-\hat{u}_2)(\hat{u}_2-\hat{u}_1+2)}\hat{\lambda}_1^-\hat{\lambda}_2^+ +$$
$$+\frac{(u-\hat{u}_1)(u-\hat{u}_2)}{(\hat{u}_2-\hat{u}_1)(\hat{u}_1-\hat{u}_2+2)}\hat{\lambda}_2^-\hat{\lambda}_1^+ +\frac{(u-\hat{u}_1)(u-\hat{u}_1-2)}{(\hat{u}_2-\hat{u}_1)(\hat{u}_2-\hat{u}_1-2)}\hat{\lambda}_2^-\hat{\lambda}_2^+\,.$$

Подставив в полученное выражение $u \hat{=} \hat{u}_n$, мы получим $\hat{\lambda}_n^-\hat{\lambda}_n^+$, что и требовалось доказать. Аналогичное рассмотрение равенства (П2.27) приводит к тождеству (59б).

Теперь нам необходимо получить представление соотношений (58бв), (59) в пространстве функций $\varphi(u_1,u_2)$ на S' (вопрос о метрике в этом пространстве оставим пока открытым). Как мы уже знаем, операторы $\hat{u}_n$ представляются при этом операторами умножения

$$(\hat{u}_n\varphi)(u_1,u_2)=u_n\varphi(u_1,u_2)\,. \tag{66}$$

Нетрудно проверить, что операторы $\hat{\lambda}_n^{\pm}$, определяемые формулами

$$\begin{aligned}(\hat{\lambda}_1^{\pm}\varphi)(u_1,u_2)&=\hat{d}^{1/2}(u_1\pm1)\,\varphi(u_1\pm2,u_2),\\ (\hat{\lambda}_2^{\pm}\varphi)(u_1,u_2)&=\hat{d}^{1/2}(u_2\pm1)\,\varphi(u_1,u_2\pm2)\,,\end{aligned} \tag{67}$$

удовлетворяют вместе с операторами u_n (66) всем соотношениям (58), (59). Более того, можно показать, что представление (67) для операторов $\hat{\lambda}_n^{\pm}$ единственно с точностью до преобразования подобия $\hat{\lambda}_n^{\pm}\to W^{-1}\hat{\lambda}_n^{\pm}\,W$ с оператором W вида

$$(W\varphi)(u_1,u_2)=w(u_1,u_2)\,\varphi(u_1,u_2)\,.$$

Мы опускаем несложное доказательство этого факта, вполне аналогичное доказательству единственности неприводимого представления группы Гейзенберга.

Представление (51) для оператора $\hat{t}(u)=\hat{A}(u)+\hat{D}(u)$ получится теперь, если подставить выражения (67) в формулы (65).

Последний вопрос, который осталось рассмотреть, это метрика в пространстве функций φ. Сравнивая выражения (65) и (41) с (34), получим

$$\hat{u}_1+\hat{u}_2=2J_3\,,\qquad \hat{u}_1\hat{u}_2=J_3^2-J^2-\frac{1}{4}\,,$$
$$(\hat{u}_1-\hat{u}_2)^{-1}(\hat{\lambda}_1^{\pm}-\hat{\lambda}_2^{\pm})=b\,x_{\pm}\,, \tag{68}$$
$$(\hat{u}_1-\hat{u}_2)^{-1}(\hat{u}_2\hat{\lambda}_1^{\pm}-\hat{u}_1\hat{\lambda}_2^{\pm})=\frac{b}{2}[x_3,J_{\pm}]_+\,.$$

Приведем также для справок выражения для интегралов движения

$$2H=\hat{u}_1^2+\hat{u}_1\hat{u}_2+\hat{u}_2^2-(\hat{u}_1-\hat{u}_2)^{-1}(\hat{\lambda}_1^{+}+\hat{\lambda}_1^{-}-\hat{\lambda}_2^{+}-\hat{\lambda}_2^{-})-\frac{1}{4}\,,$$
$$\hat{G}=-\hat{u}_1\hat{u}_2(\hat{u}_1+\hat{u}_2)+(\hat{u}_1-\hat{u}_2)^{-1}\left[\hat{u}_2(\hat{\lambda}_1^{+}+\hat{\lambda}_1^{-})-\hat{u}_1(\hat{\lambda}_2^{+}+\hat{\lambda}_2^{-})\right]\,.$$

(Порядок операторных множителей существен!)

Из равенств $x_+^*=x_-$, $J_+^*=J_-$, $x_3^*=x_3$, $J_3^*=J_3$ и коммутационных соотношений (58в) вытекают условия сопряжения для операторов $\hat{u}_n$, $\hat{\lambda}_n^{\pm}$

$$\hat{u}_n^*=u_n\,, \tag{69}$$

$$\hat{\lambda}_1^{\pm *}=\frac{\hat{u}_1-\hat{u}_2\mp 2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_1^{\mp}\,,\qquad \hat{\lambda}_2^{\pm *}=\frac{\hat{u}_1-\hat{u}_2\pm 2}{\hat{u}_1-\hat{u}_2}\hat{\lambda}_2^{\mp}\,. \tag{69б}$$

Будем искать скалярное произведение для функций $\varphi(u_1,u_2)$ вида

$$<\chi|\varphi>=\sum_{(u_1,u_2)\in S}\rho(u_1,u_2)\,\bar{\chi}(u_1,u_2)\,\varphi(u_1,u_2)\,, \tag{70}$$

такое, чтобы операторы $\hat{u}_n$ (66) и $\hat{\lambda}_n^{\pm}$ (67) удовлетворяли соотношениям (69). Соотношения (69а) при этом выполняются автоматически, а соотношения (69б) дают для функции $\rho(u_1,u_2)$ уравнения

$$\rho(u_1+2,u_2)=\frac{u_1-u_2+2}{u_1-u_2}\,\rho(u_1,u_2)\,,$$

$$\rho(u_1, u_2+2) = \frac{u_1-u_2-2}{u_1-u_2}\,\rho(u_1,u_2) \ ,$$

единственным, с точностью до эквивалентности решением которых является функция $\rho(u_1,u_2) = u_1-u_2$, приводящая к метрике (52).

Заключение

Перечислим ряд нерешенных пока вопросов, касающихся приведенных выше результатов.

Невыясненным остается пока отношение волчка ГЧ к другим вполне интегрируемым моделям, обладающим той же $sl(2)$ - инвариантной R - матрицей (37). Весьма вероятно, что волчок ГЧ является вырожденным случаем какой-либо модели решеточного ферромагнетика на цепочке из трех узлов.

Интересно было бы также получить обобщение волчка ГЧ на случай алгебр Ли динамических переменных, отличных от $e(3)$ (8) или на случай N - мерного твердого тела.

Хочется особо отметить, что предложенный в настоящей статье метод редукции задачи о совместном спектре интегралов движения квантового волчка ГЧ к одномерной спектральной задаче вида (54) основан почти исключительно на соотношении (36), в силу чего сфера его применимости выходит далеко за рамки рассмотренной частной модели - волчка ГЧ. В настоящее время автор работает над применением этого метода к таким вполне интегрируемым моделям, как цепочка Тода и уравнение sh - Gordon [6, 7], L - операторы которых не обладают локальным вакуумом.

Приложение I

Ниже приводится полная сводка матричных элементов соотношения (II), которое с учетом формулы (I8) для r - матрицы можно переписать в виде

$$\{ L_{\alpha_1\beta_1}(u), L_{\alpha_2\beta_2}(v) \} = \frac{2i}{u-v}\left[L_{\alpha_2\beta_1}(u) L_{\alpha_1\beta_2}(v) - L_{\alpha_1\beta_2}(u) L_{\alpha_2\beta_1}(v) \right] ,$$

где, согласно (I4),

$$L_{11}(u) = A(u),\ L_{12}(u) = B(u),\ L_{21}(u) = C(u),\ L_{22}(u) = D(u).$$

В приводимых ниже соотношениях слева указаны значения индексов $(\alpha_1\alpha_2\,\beta_1\beta_2)$.

$$(1111):\{A(u),A(v)\}=0 \tag{П1.1}$$

$$(1112):\{A(u),B(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[A(u)B(v)-B(u)A(v)\right] \tag{П1.2}$$

$$(1211):\{A(u),C(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[-A(u)C(v)+C(u)A(v)\right] \tag{П1.3}$$

$$(1212):\{A(u),D(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[C(u)B(v)-B(u)C(v)\right] \tag{П1.4}$$

$$(1121):\{B(u),A(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[B(u)A(v)-A(u)B(v)\right] \tag{П1.5}$$

$$(1122):\{B(u),B(v)\}=0 \tag{П1.6}$$

$$(1221):\{B(u),C(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[D(u)A(v)-A(u)D(v)\right] \tag{П1.7}$$

$$(1222):\{B(u),D(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[-B(u)D(v)+D(u)B(v)\right] \tag{П1.8}$$

$$(2111):\{C(u),A(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[-C(u)A(v)+A(u)C(v)\right] \tag{П1.9}$$

$$(2112):\{C(u),B(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[A(u)D(v)-D(u)A(v)\right] \tag{П1.10}$$

$$(2211):\{C(u),C(v)\}=0 \tag{П1.11}$$

$$(2212):\{C(u),D(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[C(u)D(v)-D(u)C(v)\right] \tag{П1.12}$$

$$(2121):\{D(u),A(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[B(u)C(v)-C(u)B(v)\right] \tag{П1.13}$$

$$(2122):\{D(u),B(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[-D(u)B(v)+B(u)D(v)\right] \tag{П1.14}$$

$$(2221):\{D(u),C(v)\}=\frac{2i}{u-v}\left[D(u)C(v)-C(u)D(v)\right] \tag{П1.15}$$

$$(2222):\{D(u),D(v)\}=0 \tag{П1.16}$$

Приложение 2

Пользуясь формулой (37), представим соотношение (36) в виде

$$(u-v)\cdot\hat{L}_{\alpha_1\beta_1}(u)\hat{L}_{\alpha_2\beta_2}(v)-2\cdot\hat{L}_{\alpha_2\beta_1}(u)\hat{L}_{\alpha_1\beta_2}(v)=$$

$$=(u-v)\cdot\hat{L}_{\alpha_2\beta_2}(v)\hat{L}_{\alpha_1\beta_1}(u)-2\cdot\hat{L}_{\alpha_2\beta_1}(v)\hat{L}_{\alpha_1\beta_2}(u)\ .$$

Полная сводка матричных элементов соотношения (36) приводится ниже. Как и в Приложении I, слева указаны значения индексов $(\alpha_1\, \alpha_2\, \beta_1\, \beta_2)$

$$(1111):\ (u-v-2)\hat{A}(u)\hat{A}(v)=(u-v-2)\hat{A}(v)\hat{A}(u) \qquad (\text{П}2.1)$$

$$(1112):\ (u-v-2)\hat{A}(u)B(v)=(u-v)\hat{B}(v)\hat{A}(u)-2\hat{A}(v)\hat{B}(u) \qquad (\text{П}2.2)$$

$$(1211):\ (u-v)\hat{A}(u)\hat{C}(v)-2\hat{C}(u)\hat{A}(v)=(u-v-2)\hat{C}(v)\hat{A}(u) \qquad (\text{П}2.3)$$

$$(1212):\ (u-v)\hat{A}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)-2\hat{C}(u)\hat{B}(v)=(u-v)\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{A}(u)-2\hat{C}(v)\hat{B}(u) \qquad (\text{П}2.4)$$

$$(1121):\ (u-v-2)\hat{B}(u)\hat{A}(v)=(u-v)\hat{A}(v)\hat{B}(u)-2\hat{B}(v)\hat{A}(u) \qquad (\text{П}2.5)$$

$$(1122):\ \hat{B}(u)\hat{B}(v)=\hat{B}(v)\hat{B}(u) \qquad (\text{П}2.6)$$

$$(1221):\ (u-v)\hat{B}(u)\hat{C}(v)-2\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{A}(v)=(u-v)\hat{C}(v)\hat{B}(u)-2\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{A}(u) \qquad (\text{П}2.7)$$

$$(1222):\ (u-v)\hat{B}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)-2\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{B}(v)=(u-v-2)\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{B}(u) \qquad (\text{П}2.8)$$

$$(2111):\ (u-v)\hat{C}(u)\hat{A}(v)-2\hat{A}(u)\hat{C}(v)=(u-v-2)\hat{A}(v)\hat{C}(u) \qquad (\text{П}2.9)$$

$$(2112):\ (u-v)\hat{C}(u)\hat{B}(v)-2\hat{A}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)=(u-v)\hat{B}(v)\hat{C}(u)-2\hat{A}(v)\hat{\mathbb{D}}(u) \qquad (\text{П}2.10)$$

$$(2211):\ \hat{C}(u)\hat{C}(v)=\hat{C}(v)\hat{C}(u) \qquad (\text{П}2.11)$$

$$(2212):\ (u-v-2)\hat{C}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)=(u-v)\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{C}(u)-2\hat{C}(v)\hat{\mathbb{D}}(u) \qquad (\text{П}2.12)$$

$$(2121):\ (u-v)\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{A}(v)-2\hat{B}(u)\hat{C}(v)=(u-v)\hat{A}(v)\hat{\mathbb{D}}(u)-2\hat{B}(v)\hat{C}(u) \qquad (\text{П}2.13)$$

$$(2122):\ (u-v)\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{B}(v)-2\hat{B}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)=(u-v-2)\hat{B}(v)\hat{\mathbb{D}}(u) \qquad (\text{П}2.14)$$

$$(2221):\ (u-v-2)\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{C}(v)=(u-v)\hat{C}(v)\hat{\mathbb{D}}(u)-2\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{C}(u) \qquad (\text{П}2.15)$$

$$(2222):\ (u-v-2)\hat{\mathbb{D}}(u)\hat{\mathbb{D}}(v)=(u-v-2)\hat{\mathbb{D}}(v)\hat{\mathbb{D}}(u) \qquad (\text{П}2.16)$$

В основном тексте статьи употребляется также ряд формул, связанных с понятием квантового детерминанта [7] . Используя явный вид (34) квантового $\mathbb{L}$ - оператора, можно убедиться, что имеет место соотношение

$$\sigma_2 \hat{\mathbb{L}}(u)\, \sigma_2 \hat{\mathbb{L}}(u-2)=\hat{d}(u-1), \qquad (\text{П}2.17)$$

а также эквивалентное соотношение

$$\hat{L}(u)\,\sigma_2\,\hat{L}(u+2)\,\sigma_2 = \hat{d}(u+1)\,, \qquad (\text{П}2.18)$$

где

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{d}(u) = b^2\left(u^2 - \frac{1}{4}\right). \qquad (\text{П}2.19)$$

Величина $\hat{d}(u)$ называется квантовым детерминантом [7] L- оператора.

Ниже расписаны матричные элементы соотношения (П2.17).

$$\hat{D}(u)\hat{A}(u-2) - \hat{B}(u)\hat{C}(u-2) = \hat{d}(u-1)\,, \qquad (\text{П}2.20)$$

$$\hat{D}(u)\hat{B}(u-2) - \hat{B}(u)\hat{D}(u-2) = 0\,, \qquad (\text{П}2.21)$$

$$\hat{A}(u)\hat{C}(u-2) - \hat{C}(u)\hat{A}(u-2) = 0\,, \qquad (\text{П}2.22)$$

$$\hat{A}(u)\hat{D}(u-2) - \hat{C}(u)\hat{B}(u-2) = \hat{d}(u-1)\,. \qquad (\text{П}2.23)$$

и соотношения (П2.18)

$$\hat{A}(u)\hat{D}(u+2) - \hat{B}(u)\hat{C}(u+2) = \hat{d}(u+1)\,, \qquad (\text{П}2.24)$$

$$\hat{B}(u)\hat{A}(u+2) - \hat{A}(u)\hat{B}(u+2) = 0\,, \qquad (\text{П}2.25)$$

$$\hat{C}(u)\hat{D}(u+2) - \hat{D}(u)\hat{C}(u+2) = 0\,, \qquad (\text{П}2.26)$$

$$\hat{D}(u)\hat{A}(u+2) - \hat{C}(u)\hat{B}(u+2) = \hat{d}(u+1)\,. \qquad (\text{П}2.27)$$

Литература

1. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев, 1978.
2. Чаплыгин С.А. Новый случай вращения твердого тела, подпертого в одной точке. Собр.соч. т.I. М.; 1948, с.118–124.
3. Сретенский Л.Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. – Вестн.МГУ, сер.матем., мех., 1963, № 3, с.60–71.
4. Комаров И.В. Волчок Горячева – Чаплыгина в квантовой механике. – ТМФ, 1982, т.50, № 3, с.402–409.
5. Komarov I.V., Zalipaev V.V. The Goryachov-Chaplygin gyrostat in quantum mechanics.–J.Phys.A, 1984, v.A17, p.31–49.

6. Ф а д д е е в Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. – В сб.: Проблемы квантовой теории поля (Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта 1979), Дубна, 1979, с.249–299.

7. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. The quantum spectral transform method. – In: Recent developments.Lect.Notes in Physics, 1982, v.151, p.61-119.

8. G u t z w i l l e r M.S. The quantum mechanical Toda lattice, II. – Ann.Phys., 1981, v.133, N 2, p.304-331.

9. F l a s c h k a H., M c L a u g h l i n D.W. Canonically conjugate variables for the Korteweg-de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions. – In: Progr.Theor. Phys., 1976, v.55, N 2, p.438-456.

10. K a c M., v a n M o e r b e k e P. A complete solution of the periodic Toda problem. Proc.Math.Acad.Sci.USA, 1975, v.72, N 8, p.2879-2880.

11. Л а н д а у Л.Д., Л и ф ш и ц Е.М. Квантовая механика. М:Наука, 1974, § 29, с.122.

Л.А.Тахтаджян

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$-СИММЕТРИЕЙ И МАТРИЧНЫЕ АНАЛОГИ ДЗЕТА- И СИГМА-ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

Введение

Фундаментальная роль, которую играют уравнения треугольников (уравнения Янга-Бакстера) в теории вполне интегрируемых классических и квантовых систем, в настоящее время является общеизвестной (см., например, [I-2] и обзоры [3-7]). В классическом случае уравнение треугольников имеет вид

$$\left[r_{12}(u-v), r_{13}(u)+r_{23}(v)\right]+\left[r_{13}(u), r_{23}(v)\right] = 0 . \qquad (0.I)$$

Здесь все матрицы действуют в пространстве $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ и через $r_{12}(u)$ (аналогично $r_{13}(u)$ и $r_{23}(u)$) обозначена матрица в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$, тривиально действующая в третьем (аналогично во втором и в первом) сомножителе тензорного произведения и совпадающая с матрицей $r(u)$ в произведении оставшихся сомножителей. Величина $r(u)$ - матрица в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ - называется классической r-матрицей.

Аналог уравнения (0.I) для квантового случая имеет вид

$$R_{12}(u-v) R_{13}(u) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u) R_{12}(u-v) \qquad (0.2)$$

- (квантовое) уравнение треугольников. В нем участвует матрица $R(u)$ в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ - (квантовая) R-матрица. Уравнение (0.I) является квазиклассическим пределом (0.2) в следующем смысле: пусть матрица $R(u)$ зависит от дополнительного параметра η (играющего роль константы Планка) таким образом, что

$$R(u,\eta) = I + \eta r(u) + O(\eta^2) \qquad (0.3)$$

при $\eta \to 0$, где I - единичная матрица в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Тогда матрица $r(u)$ удовлетворяет классическому уравнению треугольников.

Построению решений уравнений треугольников посвящена обширная литература ([4] , [8 - I4]). Для уравнения (0.I) наиболее полные результаты были получены Белавиным и Дринфельдом в [I4]. Уравнение (0.2), в отличие от (0.I), уже не является ли - алгебраическим и поэтому труднее поддается исследованию. Наиболее подробно здесь изучены решения, ассоциированные с группой Ли SL_n. Напомним соответствующие результаты.

Начнем с $SL_n \times SL_n$ инвариантного случая, когда матрица $R(u)$ удовлетворяет условию

$$(g \otimes g) R(u) (g^{-1} \otimes g^{-1}) = R(u) \qquad (0.4)$$

при всех $g \in SL_n$. Такие решения уравнений (0.1) и (0.2) имеют вид

$$r(u) = \frac{P}{u}, \quad R(u) = \frac{uI + \eta P}{u + \eta}, \qquad (0.5)$$

где P – матрица перестановки в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Она характеризуется свойствами

$$P^2 = I, \quad P(A \otimes B) = (B \otimes A) P \qquad (0.6)$$

для любых матриц A и B в $\mathbb{C}^n$. Аналогичные решения существуют и для других классических групп Ли [4]. В работах Белавина [9-10] в случае SL_n была впервые отмечена связь между обобщениями решений уравнений треугольников типа (0.5) и коммутирующими автоморфизмами конечного порядка алгебры Ли sl_n. В [14] на основе этой идеи было получено достаточно полное описание решений уравнения (0.1), ассоциированных с простыми алгебрами Ли.

Пусть U и V матрицы, порождающие коммутирующие автоморфизмы sl_n конечного порядка n без общих собственных векторов. Тогда их можно реализовать (см. [14]) следующим образом

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \xi & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \xi^{n-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (0.7)$$

так что

$$VU = \xi U V, \qquad (0.8)$$

где $\xi^n = 1$, ξ – первообразный корень. Обозначим через L двумерную решетку на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $L = \{ \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 ; m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \}$, а через g – проективное представление L в $\mathbb{C}^n$:

$$g(\omega) = U^{m_1(\omega)} V^{m_2(\omega)}, \quad \omega \in L; \qquad (0.9)$$

так что

$$g(\omega+\omega')=\chi(\omega,\omega')g(\omega)g(\omega'), \tag{0.10}$$

где $\chi(\omega,\omega')=\xi^{-m_1'(\omega')m_2(\omega)}$.

В работах [9-10] Белавин предложил в качестве $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ -инвариантной R -матрицы (то есть матрицы, удовлетворяющей условию (0.4) для $g=g(\omega)$, $\omega\in L$) рассматривать целую матрицу-функцию $R(u)$ со следующими свойствами:

$$R(u+\omega)=\lambda(\omega)(g(\omega)\otimes I)\,e^{c(\omega)u}R(u)\,(g^{-1}(\omega)\otimes I) \tag{0.11}$$

- обобщенная квазипериодичность и

$$R(u)\Big|_{u=0}=P \tag{0.12}$$

- нормировка. Здесь $c(\omega)$ - квазипериоды функции $\zeta(u)$ (см. § 1), $\lambda(\omega)\in\mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\lambda(\omega+\omega')=$ $=\lambda(\omega)\lambda(\omega')e^{c(\omega')\omega}$ (самосогласованному в силу соотношения Лежандра), а I - единичная матрица в $\mathbb{C}^n$. (Не опасаясь путаницы, мы через I обозначаем как единичную матрицу в $\mathbb{C}^n$, так и в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$; из контекста всегда ясно, о каком пространстве идет речь). В [9] было показано, что приведенными условиями матрица $R(u)$ определяется однозначно и выражается через тэта-функции с характеристиками $\frac{m_1}{n}+\frac{1}{2}$, $\frac{m_2}{n}+\frac{1}{2}$; $m_1, m_2=0,\dots,n-1$. Там же было доказано, что квазиклассический предел $R(u)$ удовлетворяет уравнению (0.1), а в [10] установлено, что сама матрица $R(u)$ удовлетворяет уравнению (0.2). Это доказательство было затем упрощено Чередником [12].

В настоящей работе $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ - инвариантные решения уравнений треугольников интерпретируются как матричные аналоги эллиптических функций. В § 1 показывается, в согласии с процедурой усреднения (см. [7], [15]), что классическая $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ -инвариантная r-матрица является матричным аналогом дзета-функции Вейерштрасса. В основном результаты этого параграфа известны и он служит для подготовки к § 2, где мы вводим матричный аналог сигма-функции Вейерштрасса. Она представляет собой целую матрицу-функцию с нулями в точках решетки L и заданными условиями квазипериодичности. Затем показывается, что $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ - инвариантная R -матрица представляется в виде отношения двух сигма-функций (формула (2.28)), откуда сразу следует свойство унитарности. Отсюда уже легко получить, что $R(u,\eta)$ удовлетворяет уравнению треугольников. В качестве простого следствия представления (2.28) получаются дифференциальные уравнения для $R(u,\eta)$ по u и η. Уравнение по η было впервые получено Бажановым и Строгановым в [16]. Далее в этом параграфе мы объясняем, что $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ - инвариантные R -матрицы можно рассматривать как мультипликативное усреднение (см. [7]) SL_n - инвариантных R -матриц. И в заключение мы приводим некоторые соображения по поводу переноса полученных результатов на другие серии классических групп Ли.

Я хочу поблагодарить Н.Ю.Решетихина, Л.Д.Фаддеева и И.В. Чередника за полезные комментарии и замечания. Я также признателен А.Г.Веселову за обсуждения леммы 2.

§ I. Классический случай

Простейшей мероморфной функцией, связанной с двумерной решеткой L в $\mathbb{C}$, является дзета-функция Вейерштрасса $\zeta(u)$, задаваемая рядом

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{\substack{\omega\in L\\ \omega\neq 0}}\left(\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right), \tag{I.I}$$

который абсолютно сходится при $u\in\mathbb{C}\setminus L$. Функция $\zeta(u)$ нечетна, имеет простые полюса в точках $u=\omega$, $\omega\in L$ и удовлетворяет условию квазипериодичности

$$\zeta(u+\omega)=\zeta(u)+c(\omega),\quad \omega\in L. \tag{I.2}$$

Здесь $c(\omega)$ - квазипериоды $\zeta(u)$. Они удовлетворяют соотношению Лежандра $\frac{1}{2\pi i}(\omega c(\omega')-\omega' c(\omega))\in\mathbb{Z}$.

Классическая дзета-функция Вейерштрасса имеет естественный матричный аналог - мероморфную матрицу-функцию $Z(u)$, принимающую значения в $sl_n\otimes sl_n$. Она однозначно характеризуется следующими свойствами:

I. $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ - инвариантность

$$(g(\omega)\otimes g(\omega))Z(u)(g^{-1}(\omega)\otimes g^{-1}(\omega))=Z(u); \tag{I.3}$$

2. квазипериодичность

$$Z(u+\omega)=(g(\omega)\otimes I)Z(u)(g^{-1}(\omega)\otimes I)= \tag{I.4}$$

$$=(I\otimes g^{-1}(\omega))\,Z(u)\,(I\otimes g(\omega))\ ;$$

3. нормировка – в фундаментальной области $\frac{\mathbb{C}}{L}$ функция $Z(u)$ имеет только один простой полюс при $u=0$.

Таким образом множество полюсов $Z(u)$ в $\mathbb{C}$ совпадает с решеткой L и

$$\operatorname{res} Z(u)\Big|_{u=\omega} = T(\omega) = (g(\omega)\otimes I)\,T(g^{-1}(\omega)\otimes I)\ , \tag{I.5}$$

где $\omega\in L$, $T\in sl_n\otimes sl_n$ и является $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ – инвариантной матрицей.

Единственность такой функции $Z(u)$ непосредственно следует из теоремы Лиувилля и из неприводимости представления g фактор-решетки L/nL.

Легко предъявить явную формулу для функции $Z(u)$ со свойствами I. – 3. Введем функцию $Z_1(u)$, периодическую с решеткой периодов nL

$$Z_1(u+n\omega) = Z_1(u),\quad \omega\in L \tag{I.6}$$

полюса и вычеты которой совпадают с таковыми для $Z(u)$. Благодаря неприводимости представления g выполняется необходимое для существования такой функции условие

$$\sum_{\substack{\omega\in\mathbb{C}/nL\\ \omega\in L}} \operatorname{res} Z_1(u)\Big|_{u=\omega} = \sum_{\omega\in L/nL} T(\omega) = 0\ . \tag{I.7}$$

Поэтому $Z_1(u)$ с указанными свойствами представляется в виде

$$Z_1(u) = \frac{1}{n}\sum_{\omega\in L/nL} \zeta\left(\frac{u-\omega}{n}\right) T(\omega)\ . \tag{I.8}$$

Это определение зависит от выбора системы представителей фактор-решетки L/nL , однако, весь произвол состоит в добавлении к $Z_1(u)$ постоянной матрицы из $sl_n\otimes sl_n$.

Для того, чтобы удовлетворить свойству квазипериодичности и устранить указанный произвол, следует усреднить $Z_1(u)$ по фактор-решетке L/nL с представлением g . В результате для искомой функции $Z(u)$ получаем выражение

$$Z(u) = \frac{1}{n^2}\sum_{\omega\in L/nL} (g^{-1}(\omega)\otimes I)\,Z_1(u+\omega)\,(g(\omega)\otimes I) \tag{I.9}$$

или

$$Z(u)=\frac{1}{n^3}\sum_{\omega,\omega'\in L/nL}\zeta\left(\frac{u+\omega'-\omega}{n}\right)T(\omega-\omega') . \qquad (I.10)$$

Построенная функция $Z(u)$ удовлетворяет всем свойствам I. - 3. и представляет собой матричный аналог дзета-функции Вейерштрасса. Ее определение - формула (I.10) - уже не зависит от выбора системы представителей для L/nL .

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда матрица T обладает дополнительным свойством

$$[T, A\otimes I + I\otimes A] = 0 \qquad (I.11)$$

для любой $A\in sl_n$. Условие (I.11) означает, что с точностью до скалярного множителя

$$T = \mathcal{P} = P - \frac{1}{n} I , \qquad (I.12)$$

где P - матрица перестановки из Введения. Во внутренних терминах sl_n матрица $\mathcal{P}$ имеет вид

$$\mathcal{P} = \sum_{\mu} I_{\mu}\otimes I_{\mu} , \qquad (I.13)$$

где $\{I_{\mu}\}$ - ортонормированный базис алгебры Ли sl_n .

В этом случае матрица $Z(u)$ дополнительно удовлетворяет условию

$$Z(-u) = -PZ(u)P \qquad (I.14)$$

- "классическому условию унитарности". Оно немедленно вытекает из соотношения $P\mathcal{P}P = \mathcal{P}$ и единственности функции $Z(u)$ со свойствами I. - 3.

Как упоминалось во Введении, матрица $\mathcal{P}/u$ является решением классического уравнения треугольников. Поэтому не удивительно, что и ее квазипериодический аналог - матрица $Z(u)$ также удовлетворяет уравнению (0.I). Другими словами, справедлива

ЛЕММА I. Функция $Z(u)$ является классической r-матрицей.

Впервые это утверждение было сформулировано в [9-10] и подробно доказано в [14] . Его доказательство необычайно просто и изящно. Именно, рассмотрим левую часть уравнения (0.I) как функцию от переменной u при фиксированном v и обозначим ее через $\Phi(u)$. Она является квазипериодической

$$\Phi(u+\omega)=(g(\omega)\otimes I\otimes I)\,\Phi(u)(g^{-1}(\omega)\otimes I\otimes I)\,, \tag{I.15}$$

$\omega\in L$ и имеет простые полюса при $u=\omega$ и $u=v+\omega$. В силу свойства (I.II) вычет $\Phi(u)$ при $u=v$ исчезает; в силу классической унитарности также аннулируется и вычет при $u=0$. Поскольку $\Phi(u)\in sl_n\otimes sl_n\otimes sl_n$, то из теоремы Лиувилля и неприводимости представления g следует, что и сама функция $\Phi(u)$ исчезает.

В § 2 нам потребуется дополнительная информация о поведении функции $Z(u)$ в окрестности полюсов. Положим

$$Z(u)=\frac{\mathcal{P}}{u}+C+O(|u|) \tag{I.16}$$

при $u\to 0$. Очевидно, что матрица $C\in sl_n\otimes sl_n$, является $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ - инвариантной и удовлетворяет условию

$$PCP=-C. \tag{I.17}$$

(В случае $n=2$ легко показать, что матрица C исчезает). Более тонкое свойство матрицы C состоит в следующем.

ЛЕММА 2. Справедливо равенство

$$PC=-C. \tag{I.18}$$

Другими словами, имеет место формула

$$[\mathcal{P},C]=-2C. \tag{I.19}$$

Для доказательства воспользуемся $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ -инвариантностью и запишем $Z(u)$ в виде

$$Z(u)=\sum_{\substack{\omega\in L/nL\\ \omega\neq 0}}\varphi_\omega(u)(g(\omega)\otimes g^{-1}(\omega)). \tag{I.20}$$

Из свойств 2. - 3. следует, что с точностью до общего множителя

$$\varphi_\omega(u)=\frac{\theta_\omega(u)}{\theta_\omega(0)\,\theta_0(u)}\,;\quad \omega\in L/nL,\ \omega\neq 0, \tag{I.21}$$

где для $\omega=m_1\omega_1+m_2\omega_2$ через $\theta_\omega(u)$ обозначена тэта-функция с характеристиками $\frac{m_1}{n}+\frac{1}{2}$, $\frac{m_2}{n}+\frac{1}{2}$ (см. [I2]). Поэтому можно считать, что

$$C = \sum_{\substack{\omega\in L/nL \\ \omega\neq 0}} \frac{d \log \Theta_\omega(u)}{du}\Big|_{u=0} (g(\omega)\otimes g^{-1}(\omega)) . \qquad (I.22)$$

С помощью формулы

$$P = \frac{1}{n} \sum_{\omega\in L/nL} g(\omega)\otimes g^{-1}(\omega) \qquad (I.23)$$

равенство (I.18) переписывается в виде n^2 тождеств для линейных комбинаций величин $\frac{d}{du} \log \Theta_\omega(u)\big|_{u=0}$, которые являются частным случаем равенств из предложения 3 в работе [I2]. Именно, продифференцировав формулы из [I2] по η и положив $\eta = 0$, мы придем к нужным нам тождествам.

Разумеется, было бы весьма желательно дать "невычислительное" доказательство леммы 2, основываясь только на свойствах I. - 3. функции $Z(u)$.

В заключении этого параграфа укажем, что выражение (I.I0) для классической r-матрицы согласуется со схемой усреднения из работ [7] и [I5]. Отметим однако, что если понимать идею усреднения наивно, то в качестве квазипериодической r-матрицы следовало бы рассматривать сумму по решетке

$$r(u) = \sum_{\omega\in L} \frac{\mathcal{P}(\omega)}{u-\omega}, \qquad (I.24)$$

где $\mathcal{P}(\omega) = (g(\omega)\otimes I)\,\mathcal{P}(g^{-1}(\omega)\otimes I)$ Но этот ряд не сходится абсолютно. Поэтому следует подставить в выражение (I.I0) для $Z(u)$ формулу (I.I), поменять порядки суммирования по nL и L/nL (что законно в силу абсолютной сходимости) и использовать равенство (I.7); в результате мы придем к представлению

$$Z(u) = \frac{1}{n^2} \sum_{\omega\in L} \sum_{\omega',\omega''\in L/nL} \frac{\mathcal{P}(\omega'-\omega'')}{u-n\omega-\omega'+\omega''} . \qquad (I.25)$$

Полученный ряд уже сходится абсолютно и является квазипериодической регуляризацией приведенного выше наивного выражения для $r(u)$.

§ 2. Квантовый случай

С классической дзета-функцией Вейерштрасса $\zeta(u)$ естественным образом связана целая функция $\sigma(u)$ - сигма-функция

Вейерштрасса. Она задается каноническим произведением Вейерштрасса

$$\sigma(u) = u \prod_{\substack{\omega\in L \\ \omega\neq 0}} \left(1-\frac{u}{\omega}\right) e^{\frac{u}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2} \tag{2.I}$$

и является нечетной целой функцией с нулями в точках $u=\omega$, $\omega\in L$. Функция $\sigma(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma}{du}(u) = \zeta(u)\,\sigma(u) \tag{2.2}$$

и обладает свойством квазипериодичности

$$\sigma(u+\omega) = \varepsilon(\omega)\, e^{c(\omega)(u+\frac{\omega}{2})}\, \sigma(u), \qquad \omega\in L, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon(\omega)=1$, если $\frac{\omega}{2}\in L$ и $\varepsilon(\omega)=-1$ в противном случае.

Введем теперь матричный аналог сигма-функции Вейерштрасса. Чтобы обойти проблему упорядочения некоммутирующих матричных множителей, мы положим в основу ее определения не произведение типа (2.I), а дифференциальное уравнение типа (2.2) с классической τ-матрицей - матричной дзета-функцией Вейерштрасса. По причине, которая будет ясна чуть ниже (тривиальность группы монодромии), вместо функции $Z(u)$ из § I, задаваемой формулами (I.I0) и (I.I2), следует использовать модифицированную дзета-функцию

$$\mathcal{Z}(u) = \frac{1}{n^3} \sum_{\omega,\omega'\in L/nL} \zeta\left(\frac{u-\omega+\omega'}{n}\right) P_-(\omega-\omega'), \tag{2.4}$$

где $P_- = \frac{I-P}{2}$ проектор в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$, $P_-^2 = P_-$, а $P_-(\omega) = (g(\omega)\otimes I)\, P_-(g^{-1}(\omega)\otimes I)$. При этом предполагается, что $L/nL = \{\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2;\ m_1,m_2 = 0,\dots,n-1\}$ при изменении системы представителей к $\mathcal{Z}(u)$ добавляется постоянная матрица, кратная единичной.

Из свойств $\zeta(u)$ в § I имеем очевидное равенство

$$\sum_{\omega,\omega'\in L/nL} \zeta\left(\frac{u-\omega-\omega'}{n}\right) = n^3\zeta(u), \tag{2.5}$$

откуда получаем простую связь матриц $\mathcal{Z}(u)$ и $Z(u)$

$$\mathcal{Z}(u) = -\frac{1}{2} Z(u) + \frac{n-1}{2n}\zeta(u)\, I. \tag{2.6}$$

Матрица $\mathcal{Z}(u)$ по-прежнему является классической r-матрицей со свойствами I.,3. (где вместо $T(\omega)$ участвует $P_-(\omega)$), удовлетворяющей условию унитарности. В силу соотношения (I.2) свойство 2. заменяется на следующее

$$\mathcal{Z}(u+\omega)=(g(\omega)\otimes I)\,\mathcal{Z}(u)(g^{-1}(\omega)\otimes I)+ + \frac{n-1}{2n}\,c(\omega)I\,,\quad \omega\in L\,. \tag{2.7}$$

В окрестности полюса $u=\omega,\ \omega\in L$ для $\mathcal{Z}(u)$ справедливо представление

$$\mathcal{Z}(u)=\frac{P_-(\omega)}{u-\omega}-\frac{1}{2}\,C(\omega)+O(|u-\omega|)\,, \tag{2.8}$$

где

$$C(\omega)=(g(\omega)\otimes I)\,C(g^{-1}(\omega)\otimes I)-\frac{n-1}{n}c(\omega)I\,, \tag{2.9}$$

а матрица C участвует в (I.I6).

После этой интродукции определим матричную сигма-функцию Вейерштрасса $\mathfrak{S}(u)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathfrak{S}}{du}(u)=\mathfrak{S}(u)\,\mathcal{Z}(u) \tag{2.10}$$

с начальным условием

$$\mathfrak{S}(u)=P_+ + uP_- + O(|u|^2) \tag{2.11}$$

при $u\to 0$, где $P_+=\dfrac{I+P}{2}$ – дополнительный проектор к .

Покажем, что $\mathfrak{S}(u)$ является целой матрицей-функцией и заодно поясним смысл начального условия (2.II). В силу (2.8) дифференциальное уравнение (2.I0) имеет особые точки при $u=\omega$, $\omega\in L$, так что оно, вообще говоря, обладает группой монодромии, которая является препятствием к однозначности решения. Докажем, что группа монодромии уравнения (2.I0) тривиальна.

Для этого, рассмотрим сначала уравнение (2.I0) в окрестности точки $u=0$ и перепишем его в виде

$$\frac{dF}{du}(u)=F(u)\left(\frac{P_-}{u}-\frac{1}{2}C+uA(u)\right), \tag{2.12}$$

где матрица-функция $A(u)$ регулярна в окрестности $u=0$. Положив

$$F(u) = G(u)\, e^{P_- \log u} , \tag{2.13}$$

для $G(u)$ получаем уравнение

$$\frac{dG}{du}(u) = G(u)\, e^{P_- \log u}\left(-\frac{1}{2}\, C + u A(u)\right) e^{-P_- \log u} . \tag{2.14}$$

Заметим теперь, что

$$e^{P_- \log u} = P_+ + u P_- , \tag{2.15}$$

так что функция $e^{P_- \log u}$ однозначна в окрестности $u=0$; этим и объясняется замена матрицы $Z(u)$ на $\mathcal{Z}(u)$. Используя (2.15), перепишем правую часть (2.14) в виде

$$(P_+ + uP_-)\left(-\frac{1}{2} C + uA(u)\right)\left(P_+ + \frac{1}{u} P_-\right) =$$

$$= -\frac{1}{2u} P_+ C P_- + \mathcal{A}(u) , \tag{2.16}$$

где $\mathcal{A}(u)$ регулярна в окрестности $u=0$. Далее, из леммы 2 имеем $P_+ C = 0$, поэтому сингулярный член в (2.16) исчезает и для $G(u)$ получаем уравнение

$$\frac{dG}{du}(u) = G(u)\, \mathcal{A}(u) . \tag{2.17}$$

Отсюда следует, что функция $G(u)$ регулярна и однозначна в окрестности $u=0$, так что таковым является и решение $F(u)$. Условие (2.11) означает, что для матрицы $G(u)$ выбрана нормировка $G(0) = I$.

Приведенные рассуждения с заменой $P_\pm$ и C на $P_\pm(\omega)$ и $C(\omega)$ остаются справедливыми и для общей особой точки $u=\omega$, $\omega \in L$. Это завершает доказательство тривиальности группы монодромии дифференциального уравнения (2.10). Тем самым мы показали, что $\mathfrak{S}(u)$ является однозначной матрицей-функцией, регулярной на $\mathbb{C}$.

Приведем теперь характерные свойства $\mathfrak{S}(u)$.

ЛЕММА 3. Матрица $\mathfrak{S}(u)$ является целой функцией со следующими свойствами:

а) $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ - инвариантность

$$(g(\omega) \otimes g(\omega))\, \mathfrak{S}(u)\, (g^{-1}(\omega) \otimes g^{-1}(\omega)) = \mathfrak{S}(u) ; \tag{2.18}$$

в) "правая" квазипериодичность

$$\mathfrak{S}(u+\omega)=\mathcal{J}(\omega)e^{\frac{n-1}{2n}c(\omega)u}\mathfrak{S}(u)(g^{-1}(\omega)\otimes I), \tag{2.19}$$

$\omega\in L$, где $\mathcal{J}(\omega)$ – невырожденная матрица в $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$;

с) "правая P-четность"

$$\mathfrak{S}(-u)=\mathfrak{S}(u)P; \tag{2.20}$$

d) матрица $\mathfrak{S}(u)$ невырожденна в $\mathbb{C}\setminus L$ и

$$\det\mathfrak{S}(u)=(\sigma(u))^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{2.21}$$

где $\sigma(u)$ – скалярная сигма-функция Вейерштрасса, так что $\mathfrak{S}(u)$ имеет нули только в точках $u=\omega$, $\omega\in L$; матрица $\mathfrak{S}^{-1}(u)$ имеет в этих точках простые полюса с вычетами

$$\operatorname{res}\mathfrak{S}^{-1}(u)\Big|_{u=\omega}=(g(\omega)\otimes I)\ P_-\mathcal{J}^{-1}(\omega). \tag{2.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2.2I) немедленно следует из теоремы Лиувилля (другой!) и формул (2.2),(2.6). Для доказательства свойств а)–с) достаточно заметить, что в силу свойства I. и формулы (2.7) для $\mathcal{Z}(u)$ правые и левые части в (2.I8)–(2.20) удовлетворяют одним и тем же дифференциальным уравнениям. Благодаря $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ – инвариантности проекторов $P_\pm$ и очевидным равенствам $P_\pm P=\pm P_\pm$ в случаях а) и с) сохраняются начальные условия. В случае в) матрица $\mathcal{J}(\omega)$ однозначно определяется. Формула (2.22) вытекает из (2.II) и (2.I9).

Итак, мы ввели целую матрицу-функцию $\mathfrak{S}(u)$ с нулями в точках решетки L и с заданными вычетами "логарифмической производной"

$$\operatorname{res}\mathfrak{S}^{-1}(u)\frac{d\mathfrak{S}}{du}(u)\Big|_{u=\omega}=P_-(\omega),\ \omega\in L. \tag{2.23}$$

Допуская известную вольность, ее можно трактовать как мультипликативное усреднение по решетке L простейшей матрицы-функции $\mathfrak{S}_0(u)$ с одним нулем при $u=0$

$$\mathfrak{S}_0(u)=P_++uP_-, \tag{2.24}$$

то есть $\mathfrak{S}(u)$ можно представить в виде произведения

$$\mathfrak{S}(u) = \text{o.ч.} \prod_{\omega \in L} (g(\omega) \otimes I)\, \mathfrak{S}_0(u-\omega) \cdot$$

$$\cdot (g^{-1}(\omega) \otimes I), \tag{2.25}$$

где символ **о.ч.** отвечает за некоторое упорядочение и регуляризацию. Это эвристическое рассуждение показывает, что функцию $\mathfrak{S}(u)$ действительно можно рассматривать как матричный аналог сигма-функции Вейерштрасса. Строгое ее определение было дано выше с помощью дифференциального уравнения (2.10).

Как отмечалось во Введении, для приложения к уравнению треугольников нам нужно иметь мероморфные матрицы-функции, обладающие "двусторонней" квазипериодичностью (см.(0.11)). Однако свойство в) показывает, что $\mathfrak{S}(u)$ является только право-квазипериодической, так что следует ввести функцию

$$R(u,a,b) = \mathfrak{S}^{-1}(u+a)\, \mathfrak{S}(u+b)\,, \tag{2.26}$$

уже обладающую двусторонней квазипериодичностью. Для согласования с начальным условием

$$R(u,a,b)\Big|_{u=0} = P\,, \tag{2.27}$$

естественным с точки зрения уравнения треугольников, достаточно считать, в силу (2.20), что $a = -b$.

Таким образом мы приходим к рассмотрению функции

$$R(u,\eta) = \mathfrak{S}^{-1}(u+\eta)\, \mathfrak{S}(u-\eta), \tag{2.28}$$

где параметр $\eta \in \mathbb{C}$ и играет роль "константы связи".

Перечислим теперь характерные свойства $R(u,\eta)$, которые немедленно вытекают из ее определения и леммы 3.

ЛЕММА 4. Матрица $R(u,\eta)$ является мероморфной $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$-инвариантной матрицей-функцией, обладающей следующими свойствами:

1) квазипериодичность –

$$R(u+\omega,\eta) = (g(\omega) \otimes I)\, e^{\frac{1-n}{n} c(\omega)\eta}\, R(u,\eta) \cdot$$

$$\cdot (g^{-1}(\omega) \otimes I), \quad \omega \in L; \tag{2.29}$$

2) "унитарность" –

$$R(u,\eta)\, P R(-u,\eta) P = I \; ; \tag{2.30}$$

3) нормировка –

$$R(u,\eta)\Big|_{u=0} = P, \quad R(u,\eta)\Big|_{\eta=0} = I \; ; \tag{2.31}$$

4) симметрия u и η –

$$R(u,\eta) = R(\eta,u) P \; ; \tag{2.32}$$

5) квазиклассический предел –

$$R(u,\eta) = I - 2\eta\, \mathcal{L}(u) + O(|\eta|^2) \tag{2.33}$$

при $\eta \to 0$;

6) $R(u,\eta)$ имеет только простые полюса в точках $u = -\eta + \omega, \; \omega \in L$ с вычетами

$$\operatorname{res} R(u,\eta)\Big|_{u=-\eta+\omega} = A(\omega), \quad \omega \in L \; , \tag{2.34}$$

где

$$A(\omega) = (g(\omega)\otimes I)\, e^{\frac{1-n}{n} c(\omega)\eta} P_- \sigma(-2\eta)(g^{-1}(\omega)\otimes I) \; ; \tag{2.35}$$

7) $R^{-1}(u,\eta)$ имеет только простые полюса в точках $u = \eta + \omega, \; \omega \in L$ с вычетами

$$\operatorname{res} R^{-1}(u,\eta)\Big|_{u=\eta+\omega} = \tilde{A}(\omega) \; , \tag{2.36}$$

где

$$\tilde{A}(\omega) = (g(\omega)\otimes I)\, e^{\frac{n-1}{n} c(\omega)\eta} P_- \sigma(2\eta)(g^{-1}(\omega)\otimes I) \, . \tag{2.37}$$

Сравнив свойства $R(u,\eta)$ из леммы 4 с результатами работ [9-10] и [12], обсуждавшимися во Введении, убеждаемся, что матрица $R(u,\eta)$ совпадает с матрицей, построенной Белавиным и удовлетворяет уравнению (0.2). Другими словами, справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Функция $R(u,\eta)$ является R -матрицей.

Наиболее простое доказательство этой теоремы содержится в

[I2] и опирается только на свойства I)-3) и 6) матрицы $R(u,\eta)$. Мы приведем его здесь для полноты изложения. Введем функцию

$$S(u,\eta)=\frac{\sigma(u+\eta)}{\sigma\left(u+\frac{\eta}{n}\right)}\,R(u,\eta)\,, \tag{2.38}$$

где $\sigma(u)$ - скалярная сигма-функция. В силу (2.3) и (2.29) $S(u,\eta)$ уже является "чисто" квазипериодической функцией

$$S(u+\omega,\eta)=(g(\omega)\otimes I)\;S(u,\eta)\,(g^{-1}(\omega)\otimes I\,)\,; \tag{2.39}$$

в частности, она периодична с решеткой периодов nL. В фундаментальной области $\mathbb{C}/nL$ функция $S(u,\eta)$ имеет n^2 полюсов в точках $u=-\eta/n+\omega$, $\omega\in L/nL$ (полюса $R(u,\eta)$ при $u=-\eta+\omega$ сокращаются множителем $\sigma(u+\eta)$ в (2.38)).

Рассмотрим теперь уравнение (0.2) для $S(u,\eta)$ и обозначим через $\Psi(u,v)$ разность его левой и правой частей

$$\Psi(u,v)=S_{12}(u-v)\,S_{13}(u)\,S_{23}(v)-$$

$$-\,S_{23}(v)\,S_{13}(u)\,S_{12}(u-v)\,, \tag{2.40}$$

где для сокращения записи мы опустили зависимость от η. При фиксированном v $\Psi(u,v)$ как функция u является периодической с решеткой периодов nL и в фундаментальной области $\mathbb{C}/nL$ имеет $2n^2$ полюсов при $u=-\eta/n+\omega$, $u=v-\eta/n+\omega$, $\omega\in L/nL$. С другой стороны, в силу 3) и основного свойства (0.6) матрицы перестановки имеем

$$\Psi(u,v)\Big|_{u=v+\omega}=0\,,\quad \omega\in L\,. \tag{2.41}$$

Далее в силу свойства унитарности (2.30) получаем, что $\Psi(u,v)$ исчезает и при $u=\omega$, $\omega\in L$.

Таким образом, каждый матричный элемент $\Psi(u,v)$, являющийся периодической функцией с решеткой периодов nL, имеет в $\mathbb{C}/nL$ $2n^2$ полюсов (не менее!) и $2n^2$ нулей (не более!) Однако их разность по $\mathrm{mod}\ nL$ равна $2\eta n$ и, в неспециальном случае $2\eta\notin L$, не содержится в nL. Отсюда следует, что матрица $\Psi(u,v)$ тождественно исчезает, то есть выполняется уравнение треугольников. В случае $2\eta\in L$ (не представляющим особого интереса) уравнение (0.2) для $R(u,\eta)$ по-прежнему справедливо и получается из неспециальных η предельным переходом.

Другие свойства матрицы $R(u,\eta)$ из леммы 4 оказываются полезными при рассмотрении ее квантовых симметрических и внешних степеней (см. [12]). В качестве последнего следствия формулы (2.28) приведем здесь следующее утверждение, непосредственно вытекающее из дифференциального уравнения (2.10).

ЛЕММА 5. Матрица $R(u,\eta)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям по u

$$\frac{\partial R}{\partial u}(u,\eta) = -\mathcal{Z}(u+\eta) R(u,\eta) + R(u,\eta)\,\mathcal{Z}(u-\eta) \qquad (2.42)$$

и η

$$\frac{\partial R}{\partial \eta}(u,\eta) = -\mathcal{Z}(u+\eta) R(u,\eta) - R(u,\eta)\,\mathcal{Z}(u-\eta)\,. \qquad (2.43)$$

Вместе с условиями нормировки (2.31) лемма означает, что матрицу $R(u,\eta)$ можно представить в виде мультипликативного интеграла

$$R(u,\eta) = \widehat{\exp}\left\{-\int_{u-\eta}^{u+\eta} \mathcal{Z}(s)\,ds\right\}. \qquad (2.44)$$

Его независимость от контура, соединяющего точки $u-\eta$ и $u+\eta$, обеспечивается тривиальностью группы монодромии.

Дифференциальное уравнение по параметру η для $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ - инвариантной квазипериодической R -матрицы было получено Бажановым и Строгановым [16] в результате прямой подстановки в (2.43) явных формул для $R(u,\eta)$ и $Z(u)$ через тэта-функции. Представление (2.28) дает наиболее простой вывод уравнений (2.42) и (2.43).

Мы закончим эту работу следующими замечаниями.

1. Очевидно, что представление (2.28) для R -матрицы остается справедливым и при вырождениях решетки L до одномерной (тригонометрический случай) и нульмерной (рациональный случай). В последнем случае матрица $R(u,\eta)$ имеет вид

$$R_0(u,\eta) = \frac{uI + \eta P}{u+\eta} \qquad (2.45)$$

и формула (2.28) дает ее разложение на элементарные множители

$$R_0(u,\eta) = \mathfrak{S}_0^{-1}(u+\eta)\,\mathfrak{S}_0(u-\eta)\,, \qquad (2.46)$$

где $\mathfrak{S}_0(u)$ была введена в (2.24). Полученные выше результаты показывают, что в общем случае матрицу $R(u,\eta)$ можно символически записать в виде

$$R(u,\eta) = \text{о.г.} \prod_{\omega\in L} (g(\omega)\otimes I)\, R_0(u-\omega,\eta)(g^{-1}(\omega)\otimes I), \tag{2.47}$$

так что она представляется как мультипликативное усреднение матрицы $R_0(u,\eta)$ по решетке L. Формулы (2.28) или (2.44) реализуют эту идею на строгом уровне.

II. В случае $n=2$ формулам типа (2.47) можно легко придать точный смысл. Так, например, тригонометрическая и рациональная R-матрицы в этом случае имеют общие собственные векторы, переходящие друг в друга при действии $\sigma_3\otimes I$ (здесь σ_3, как и σ_1 ниже - стандартные матрицы Паули). При этом их собственные значения вычисляются явно. Это очевидно из явного представления этих R-матриц (см., например, [2], [4]). Отсюда уже легко получить, что

$$R_{trig}(u,\eta) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=-N}^{N} (\sigma_3^k\otimes I)\, R_0(u-k\omega_1,\eta)(\sigma_3^k\otimes I). \tag{2.48}$$

Также несложно показывается, что общая $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ - инвариантная R-матрица (эллиптический случай) получается аналогичным усреднением $R_{trig}(u,\eta)$ вдоль направления, отвечающего второму периоду ω_2, с матрицей Паули $\sigma_1\otimes I$.

Это наблюдение, вместе с результатом из [16], и легло в основу настоящей работы.

III. И.В.Чередник обратил наше внимание на аналогию между формулой (2.28) для R-матрицы и соотношением

$$A(u)\otimes A(v+\eta) = R(u-v,\eta)\, A(u+\eta)\otimes A(v), \tag{2.49}$$

где $A(u)\in\mathbb{C}^n$, являющимся функциональной реализацией алгебры Замолодчикова. Было бы поучительно развить эту аналогии дальше; в частности, получить выражение для вектор-функции $A(u)$ из работы [12] непосредственно исходя из представления (2.28).

IУ. Приведенная в основном тексте конструкция обобщается на случай простейших R-матриц, связанных с другими классическими группами Ли. Так для SO_n-инвариантной R-матрицы (рациональный случай) справедлив аналог формулы (2.28) с четырьмя сомножителями, получающимися из двух коммутирующих матриц-функций $\mathfrak{S}_1(u)$ и $\mathfrak{S}_2(u)$ сдвигами аргумента и обращением. Это позволяет надеяться, что такие R -матрицы допускают усреднение по одномерной решетке в $\mathbb{C}$ (тригонометрический случай) и полученные таким образом матрицы обладают представлением того же вида. (Для классических групп Ли, отличных от sl_n , возможно усреднение только по одномерной решетке, так как их алгебры Ли уже не обладают двумя коммутирующими автоморфизмами порядка n).

В тригонометрическом случае матрицы $\mathfrak{S}_{1,2}(u)$ по-прежнему должны удовлетворять дифференциальным уравнениям типа (2.10), однако, они теперь не обязаны коммутировать. Тем самым для других серий классических алгебр Ли дифференциальные уравнения для R -матрицы типа (2.42),(2.43) (и, по-видимому, функциональное соотношение типа (2.49)) уже могут не иметь места. Эти соображения лишний раз указывают на фундаментальную роль представлений типа (2.28).

Литература

1. Склянин Е.К., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи.I. - ТМФ, 1979, т.40, № 2, с.194-220.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ -модель Гейзенберга. - УМН, 1979, т.34, № 5, с.13-63.
3. Faddeev L.D. Quantum completely integrable models in field theory. - In: Soviet Scientific Reviews, Harvard Academic, London 1980, v.1C, p.107-155.
4. Кулиш П.П., Склянин Е.К. О решениях уравнения Янга - Бакстера. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 3. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.129-160.
5. Kulish P.P., Sklyanin E.K. Quantum spectral transform method. Recent developments. - Lect.Notes in Phys., 1982, v.151, p.61-119.
6. Изергин А.Г., Корепин В.Е. Квантовый метод обратной задачи. - Физика ЭЧАЯ, 1982, т.13, № 3, с.501-541.
7. Faddeev L.D. Integrable models in 1+1 dimensional quantum field theory. - Preprint S.Ph. T 182/76, CEN-SACLAY, 1982.
8. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu., Sklyanin E.K. Yang - Baxter equation and representation theory: I. - Lett. Math. Phys., 1981, v. 5, N 5, p.393-403.

9. Б е л а в и н А.А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем. – Функц.анализ, 1980, т.14, № 4, с.18-26.
10. B e l a v i n A.A. Dynamical symmetry of integrable quantum systems. – Nucl.Phys. B, 1981, v. B 180 (FS2), N 2, p. 189-200.
11. Ч е р е д н и к И.В. Об одном методе построения факторизованных S-матриц в элементарных функциях. – ТМФ, 1980, т.43, №1, с.117-119.
12. Ч е р е д н и к И.В. О свойствах факторизованных S-матриц в эллиптических функциях. – ЯФ, 1982, т.36, № 2, с.549-557.
13. З а м о л о д ч и к о в А.А., Ф а т е е в В.А. Модельная факторизованная S-матрица и интегрируемая цепочка Гейзенберга со спином 1. – ЯФ, 1980, т.32, № 2, с.581-590.
14. Б е л а в и н А.А., Д р и н ф е л ь д В.Г. О решениях классического уравнения Янга – Бакстера для простых алгебр Ли. – Функц.анализ, 1982, т.16, № 3, с.1-29.
15. Р е ш е т и х и н Н.Ю., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтоновы структуры для интегрируемых моделей теории поля. – ТМФ, 1983, т.56, № 3, с.323-343.
16. B a z h a n o v V.V., S t r o g a n o v Yu.G. On connection between the solutions of the quantum and classical triangle equations. – preprint IHEP 82-201, Serpukhov, 1982.

Д.Р.Яфаев

ЗАМЕЧАНИЯ О СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА МНОГОЧАСТИЧНОГО ТИПА

Введение

Теория рассеяния для системы трех попарно взаимодействующих частиц была построена в классической работе Л.Д.Фаддеева [I]. Л.Д.Фаддеев подробно изучил резольвенту трехчастичного гамильтониана, что позволило ему полностью описать эволюцию соответствующей квантовой системы при больших временах. В трехчастичном случае при построении теории рассеяния необходимо включить в рассмотрение процессы рассеяния каждой из частиц на связанных состояниях двух других частиц (младшие каналы рассеяния). В [I] доказана теорема об асимптотической полноте, которая утверждает, что основной канал рассеяния, в котором все частицы асимптотически свободны, вместе с младшими каналами исчерпывают абсолютно непрерывное подпространство трехчастичного гамильтониана.

В недавней статье [2] Е.Мурр предложил оригинальный подход к доказательству принципа предельного поглощения для многочастичных гамильтонианов. В [2] рассматривался случай двух и трех частиц. На случай произвольного числа частиц методика Е.Мурра перенесена в статье П.Перри, И.Сигала и Б.Саймона [3]. В [3] показано, что для многочастичного оператора Шредингера H принцип предельного поглощения справедлив, если парные потенциалы $V_\alpha(x_\alpha)$ (α - индекс пары частиц, x_α - вектор их относительного положения) представимы в виде суммы короткодействующей $V_\alpha^{(1)}$ и дальнодействующей $V_\alpha^{(2)}$ частей, т.е. $V_\alpha = V_\alpha^{(1)} + V_\alpha^{(2)}$, где

$$\left.\begin{aligned} &|V_\alpha^{(1)}(x_\alpha)| \leqslant C(1+|x_\alpha|)^{-1-\delta}, \\ &|V_\alpha^{(2)}(x_\alpha)| + |x_\alpha|\left|\frac{\partial V_\alpha^{(2)}(x_\alpha)}{\partial |x_\alpha|}\right| \leqslant C(1+|x_\alpha|)^{-\delta} \end{aligned}\right\} \qquad (0.\mathrm{I})$$

при $\delta=1$. В частности, при этих условиях сингулярный непрерывный спектр у оператора H отсутствует. Близкие, хотя и несколько более стеснительные, ограничения на потенциалы V_α были и в работе самого Е.Мурра [2]. С другой стороны, в двухчастичном случае эти результаты удается получить совершенно иными методами (см. работу А.А. Винника [4] или книгу Ё.Саито [5]) при условиях (0.I), где $\delta>0$. Это дает основания предполагать, что и в многочастичном случае предположения работ [2,3] являются завышенными.

В § I мы покажем, что, в действительности, методика работы [2] позволяет установить принцип предельного поглощения для многочастичного оператора Шредингера при условиях (0.I), где $\delta > 0$. Подход статьи [2] основан на рассмотрении коммутатора гамильтониана H и генератора A группы растяжений. Предположение $\delta = 1$ возникало при этом за счет того, что в [2,3] требовалась относительная (по отношению к H) ограниченность двойного коммутатора $[[H,A], A]$. Мы полностью следуем методике статьи [2], но избавляемся от необходимости считать этот оператор относительно ограниченным. Это позволяет ослабить предположения о функциях V_α. Таким образом, в многочастичном случае условия справедливости принципа предельного поглощения и отсутствия сингулярного непрерывного спектра оказываются теми же, что и в двухчастичном. По нашему мнению, подход Е.Мурра существенно проще методов работ [4,5], где, в частности, важную роль играет теорема единственности для решений уравнения Шредингера, удовлетворяющих условиям излучения на бесконечности. Отметим, однако, что в [4,5] при выводе принципа предельного поглощения одновременно устанавливается также отсутствие положительных собственных значений у двухчастичного оператора H.

В § 2 мы показываем, что при высоких энергиях условия справедливости принципа предельного поглощения и абсолютной непрерывности спектра заметно расширяются. В частности, здесь получены некоторые признаки ограниченности точечного спектра оператора H. В § 2 выясняется, что при больших значениях спектрального параметра убывание возмущения на бесконечности оказывается для методики Е.Мурра несущественным. Поэтому результаты этого параграфа автоматически применимы к многочастичному случаю.

В § 3 строится теория рассеяния для оператора Шредингера с потенциалом, похожим по структуре на потенциальную энергию системы трех частиц. Однако, в отличие от трехчастичного случая мы считаем, что "парные потенциалы" V_α зависят от координат всех трех частиц и убывают степенным образом в конфигурационном пространстве системы. Быстрое (быстрее кулоновского) убывание функции V_α предполагается лишь по переменной x_α. Несмотря на то, что возмущение $V = \sum V_\alpha$ убывает на бесконечности, теория рассеяния для таких потенциалов является, вообще говоря, многоканальной (см. [6]). Полученная в § 3 теорема об асимптотической полноте формулируется в существенном аналогично трехчастичной задаче. Именно, мы показываем, что асимптотически (при больших временах) волновая функция системы распадается в сумму волновых функций вспомогательных систем, отвечающих гамильтонианам $H_\alpha = H_0 + V_\alpha$ ($H_0 = -\Delta$ - невозмущенный оператор). Более того, для рассматриваемого класса потенциалов справедлив следующий принцип локализации: асимптотическое поведение системы в любом конусе определяется лишь медленно убывающей в этом конусе частью потенциала. Доказательство этих результатов основано на рассмотрении волновых операторов $W^{(\pm)}(H_\alpha, H; \mathcal{J}_\alpha)$, где отождествление $\mathcal{J}_\alpha$ - оператор умножения на подходящую срезающую функцию η_α в конфигурационном пространстве. Нам удобно считать, что η_α обращается в нуль в конусе, где функция $V - V_\alpha$ медленно убывает. В трехчастичном случае потенциальная целесообразность изучения волновых операторов такого типа отмечалась в статье П.Дейфта и Б.Саймона [7] . Доказательство существования операторов $W^{(\pm)}(H_\alpha, H; \mathcal{J}_\alpha)$ существенно использует как упомянутый выше принцип предельного поглощения, так и условия излучения для решений соответствующего неоднородного уравнения Шредингера. Подобным же образом условия излучения применялись ранее в статье Е.М.Ильина [8] , где рассматривалось рассеяние на некомпактном препятствии. В этом случае необходимо было использовать срезки параболического (а не конического) типа, что приводило к дополнительным аналитическим трудностям.

Условимся здесь о некоторых обозначениях. Пусть A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{D}(A)$ обозначаем его область определения; $R_A(z) = (A - z)^{-1}$; $E_A(a, b)$ - спектральный проектор оператора A , отвечающий интервалу (a, b) ; $\mathcal{H}_A^c$ - абсолютно непрерывное подпространство оператора A ; P_A^c - ортогональный проектор на $\mathcal{H}_A^c$.

§ I. Принцип предельного поглощения для многочастичного оператора Шредингера

В этом параграфе, пользуясь методикой Е.Мурра [2] , мы покажем, что при условиях (0.I) для многочастичного оператора Шредингера справедлив принцип предельного поглощения, и, следовательно, этот оператор не имеет сингулярного непрерывного спектра. Нам удобно рассмотреть оператор H несколько более общего вида, чем оператор Шредингера системы многих частиц. Для точного определения H введем некоторые обозначения. Пусть π_α, $\alpha = 1, \dots, N$ - ортогональные проекции в $\mathbb{R}^n = X$ с областями значений X_α , причем $X_1 + \dots + X_N = X$ (не исключается, что $X_\alpha = X$ при каком-либо α). Через x, x_α обозначаем переменные в X, X_α ; $\Delta = \nabla^2$, $\Delta_\alpha = \nabla_\alpha^2$ - операторы Лапласа по переменным x, x_α . Оператор

H в $L_2(X)$ определяется формулой

$$H = -\Delta + \sum_{\alpha=1}^{N} V_\alpha(\pi_\alpha(x)). \qquad (I.I)$$

Вещественные функции V_α заданы на подпространствах X_α, и предполагается, что операторы $V_\alpha(-\Delta_\alpha + I)^{-1}$ компактны в $L_2(X_\alpha)$. Тогда оператор H самосопряжен на области определения оператора $H_0 = -\Delta$. Как правило, мы не делаем различия в обозначениях функции и оператора умножения на эту функцию.

При построении спектральной теории оператора H важную роль играет исключение некоторого счетного замкнутого множества, точки которого называются порогами. Для оператора (I.I) определение порога состоит в следующем. Рассмотрим множество $\mathcal{X}$ всевозможных подпространств вида $X_{\alpha_1} + \ldots + X_{\alpha_k}$, где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \{1, \ldots, N\}$. Для $\tilde{X} \in \mathcal{X}$ положим $\mathfrak{A}(\tilde{X}) = \{\alpha \in \{1, \ldots, N\} : X_\alpha \subseteq \tilde{X}\}$ и

$$H_{\tilde{X}} = -\Delta_{\tilde{x}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}(\tilde{X})} V_\alpha(\tilde{\pi}_\alpha(\tilde{x})).$$

Здесь $\Delta_{\tilde{x}}$ – оператор Лапласа по переменной $\tilde{x} \in \tilde{X}$; $\tilde{\pi}_\alpha : \tilde{X} \longrightarrow X_\alpha$ – естественное сужение исходной проекции π_α, $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, на подпространство $\tilde{X}$. Оператор $H_{\tilde{X}}$ рассматривается в $L_2(\tilde{X})$. Будем считать, что $\{0\} \in \mathcal{X}$ и $H_{\{0\}}$ – нулевой оператор в $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Собственные числа всевозможных операторов $H_{\tilde{X}}$, где $\tilde{X} \in \mathcal{X}$, $\tilde{X} \neq X$, называются порогами для оператора H. Множество порогов обозначаем $\mathcal{F}_0$.

Сформулируем теперь точные предположения о функциях V_α. Пусть каждая из функций V_α представима в виде суммы короткодействующего $V_\alpha^{(1)}$ и дальнодействующего $V_\alpha^{(2)}$ слагаемых: $V_\alpha = V_\alpha^{(1)} + V_\alpha^{(2)}$. Примем два условия.

УСЛОВИЕ I. Операторы

$$V_\alpha^{(j)}(-\Delta_\alpha + I)^{-1}, \ j = 1, 2, \ \ |x_\alpha| V_\alpha^{(1)}(-\Delta_\alpha + I)^{-1}, \ |x_\alpha| \frac{\partial V_\alpha^{(2)}}{\partial |x_\alpha|}(-\Delta_\alpha + I)^{-1}$$

компактны в пространстве $L_2(X_\alpha)$.

УСЛОВИЕ 2. При некотором $\delta > 0$ операторы

$$|x_\alpha|^{1+\delta} V_\alpha^{(1)}(-\Delta_\alpha + I)^{-1}, \quad |x_\alpha|^{1+\delta} \frac{\partial V_\alpha^{(2)}}{\partial |x_\alpha|}(-\Delta_\alpha + I)^{-1}$$

ограничены в пространстве $L_2(X_\alpha)$ (или $L_2(X)$).

Условия I,2 соответствуют предположению (0.I), однако наличие в них оператора $(-\Delta_\alpha + I)^{-1}$ несколько ослабляет это предположение. В работе [3] доказательство принципа предельного поглощения было дано в точности при условиях I,2, где, однако, считалось $\delta = 1$. Подчеркнем, что эти условия не содержат ограничений на производные функции $V_\alpha^{(2)}$ по угловым переменным вектора x_α.

Основу метода Е.Мурра составляет рассмотрение самосопряженного генератора A группы растяжений в $\mathbb{R}^n$. Оператор A задается формулой

$$2iA = x\nabla + \nabla x . \qquad (I.2)$$

Отметим, что $i[H_0, A] = 2H_0$. Следующее утверждение получено в работе [2] для двух- и трехчастичных операторов Шредингера; его обобщение на случай произвольного числа частиц установлено в [3]. В применении к операторам вида (I.I) нужный нам результат содержится в статье Р.Фрёзе и И.Хербста [9]. Ниже через C и c обозначаем различные положительные постоянные, точное значение которых безразлично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть для функций $V_\alpha^{(j)}$, $V_\alpha^{(1)} + V_\alpha^{(2)} = V_\alpha$, выполнено условие I. Тогда множество $\mathcal{F}_0$ счетно и замкнуто, а собственные значения оператора H могут накапливаться только к точкам из $\mathcal{F}_0$. Если $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{F}_0$, λ не является собственным значением оператора H, а $\nu = \nu(\lambda)$ - достаточно малое положительное число, то при $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [\lambda - \nu, \lambda + \nu]$ справедливо неравенство

$$f(H)\, i[H, A] f(H) \geq c f(H)^2 . \qquad (I.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При условии I оператор $(H_0 + I)^{-1/2} [H, A] (H_0 + I)^{-1}$ ограничен.

Обозначим через $\mathcal{F}$ объединение $\mathcal{F}_0$ и множества всех собственных значений оператора H. Согласно предложению I множество $\mathcal{F}$ счетно и замкнуто. Цель этого параграфа состоит в доказательстве следующего утверждения.

ТЕОРЕМА I. Пусть для функций $V_\alpha^{(j)}$, $V_\alpha^{(1)} + V_\alpha^{(2)} = V_\alpha$, выполнены условия I и 2. Тогда при любом $\sigma > 0$ для каждого компактного интервала $\mathcal{J}$, $\mathcal{J} \subset \mathbb{R} \setminus \mathcal{F}$, справедлива оценка

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in \mathcal{J},\, \operatorname{Im} z \neq 0} \left\| (1 + |x|)^{-1/2 - \sigma} R_H(z) (1 + |x|)^{-1/2 - \sigma} \right\| < \infty . \qquad (I.4)$$

Кроме того, оператор-функция $(1+|x|)^{-1/2-\epsilon} R_H(z)(1+|x|)^{-1/2-\epsilon}$ гельдеровски (показатель гельдеровости зависит от δ и ϵ) непрерывна по норме вплоть до разреза по интервалу $\mathcal{J}$.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях I и 2 оператор H не имеет сингулярного непрерывного спектра.

Совокупность утверждений теоремы I о резольвенте $R_H(z)$ оператора H мы, пользуясь обычной терминологией, и называем принципом предельного поглощения.

Как отмечалось во введении, при доказательстве теоремы I мы следуем пути работ [2,3] . Более того, большая часть построений из [2,3] переносится на рассматриваемый нами несколько более общий случай без изменений. Соответствующие места мы будем, как правило, опускать, ограничиваясь лишь формулировкой нужных нам вспомогательных утверждений из [2,3] . Отличия появляются при рассмотрении второго коммутатора $[[V,A],A]$. При $\delta=1$ оператор $(H_0+I)^{-1}[[V,A],A](H_0+I)^{-1}$ был ограниченным, что играло важную роль в [2,3] . Рассмотрим оператор

$$[[V,A],A]=\sum_{\alpha=1}^{N}[[V_\alpha,A_\alpha],A_\alpha]\ ,\quad 2iA_\alpha=x_\alpha\nabla_\alpha+\nabla_\alpha x_\alpha$$

в предположении $\delta>0$.

ЛЕММА I. При условиях I и 2 операторы

$$(1+x_\alpha^2)^{-\frac{1-\delta}{4}}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}[[V_\alpha^{(j)},A_\alpha],A_\alpha](-\Delta_\alpha+I)^{-1}(1+x_\alpha^2)^{-\frac{1-\delta}{4}}\ ,\quad j=1,2, \tag{I.5}$$

ограничены в пространстве $L_2(X_\alpha)$.

Доказательство элементарно. Ограничимся поэтому лишь краткими пояснениями. Индекс α опускаем. Отметим, что операторы

$$(1+x^2)^{a}(-\Delta+I)^{b}(1+x^2)^{-a'}(-\Delta+I)^{-b'} \tag{I.6}$$

ограничены при любых $a\leqslant a',\ b\leqslant b'$. Отсюда вытекает, что операторы

$$(1+x^2)^{a}(-\Delta+I)^{b}A(1+x^2)^{-a'-1/2}(-\Delta+I)^{-b'-1/2}\ ,\ a\leqslant a',\ b\leqslant b', \tag{I.7}$$

тоже ограничены. Пусть вначале в (I.5) $j=1$. Согласно условиям I и 2 оператор

$$(-\Delta+I)^{-b}(1+x^2)^{a_1}V^{(1)}(1+x^2)^{a_2}(-\Delta+I)^{-1+b}. \tag{I.8}$$

ограничен при любых $b\in[0,1]$, $a_1+a_2=(1+\delta)/2$. Представим выражение (I.5) в виде суммы трех слагаемых, отвечающих равенству

$$[[V^{(1)},A],A] = V^{(1)}A^2 - 2AV^{(1)}A + A^2V^{(1)}.$$

Ограниченность каждого из этих слагаемых прямо вытекает из ограниченности операторов (I.6)-(I.8); при этом для разных слагаемых числа a_1, a_2 и b в (I.8) выбираются по-разному. Именно, $a_1 = -\frac{1-\delta}{4}$, $b=1$ для $V^{(1)}A$, $a_1 = \frac{1+\delta}{4}$, $b=1/2$ для $AV^{(1)}A$ и $a_1 = \frac{3+\delta}{4}$, $b=0$ для $A^2V^{(1)}$. При $j=2$ вычислим сначала первый коммутатор

$$[V^{(2)},A] = i|x|\frac{\partial V^{(2)}}{\partial |x|} \equiv \mathcal{U}.$$

Согласно условиям I и 2 оператор

$$(-\Delta+I)^{-b}(1+x^2)^{a_1}\,\mathcal{U}\,(1+x^2)^{a_2}(-\Delta+I)^{-1+b} \qquad (I.9)$$

ограничен при любых $b\in[0,1]$, $a_1+a_2=\delta/2$. Теперь вместо второго коммутатора $[[V^{(2)},A],A]$ в (I.5) подставляем разность $\mathcal{U}A - A\mathcal{U}$. Ограниченность обоих получившихся слагаемых следует из ограниченности операторов (I.6),(I.7) и (I.9). Лемма доказана.

Ниже нам понадобятся некоторые обозначения, которые по возможности мы заимствуем из статьи [3]. Выберем в условиях предложения I какую-либо определенную функцию $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f\subset[\lambda-\nu, \lambda+\nu]$, причем будем считать, что $f(\mu)=1$ при $\mu\in[\lambda-\nu_0, \lambda+\nu_0]$, $\nu_0<\nu$. Обозначим $\mathcal{J}=[\lambda-\frac{\nu_0}{2}, \lambda+\frac{\nu_0}{2}]$, $K_\varepsilon=(1+|x|)^{-1/2-\delta}(1+\varepsilon|x|)^{-1/2+\delta}$, $B=i[H,A]$, $M=f(H)Bf(H)$, $G_\varepsilon(z)=(H-i\varepsilon M-z)^{-1}$, $F_\varepsilon(z)=K_\varepsilon G_\varepsilon(z)K_\varepsilon$. Для определенности рассмотрим случай $\operatorname{Im} z>0$; тогда считаем, что и $\varepsilon\geqslant 0$. Нужные нам извлечения из [2,3] соберем в следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть выполнено условие I. Тогда

а) При $\varepsilon\geqslant 0$, $\operatorname{Im} z>0$ оператор $H-i\varepsilon M-z$ обратим и оператор-функция $G_\varepsilon(z)$ непрерывно дифференцируема по $\varepsilon\in(0,\infty)$ и непрерывна по $\varepsilon\in[0,\infty)$.

в) При $\operatorname{Re} z\in\mathcal{J}$, некотором $\varepsilon_0>0$ и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ справедливы оценки

$$\|f(H)G_\varepsilon(z)\varphi\| \leqslant C\varepsilon^{-1/2}|(\varphi, G_\varepsilon(z)\varphi)|^{1/2}, \qquad (I.10)$$

$$\|(H_0+I)G_\varepsilon(z)\| \leqslant C\varepsilon^{-1}, \qquad (I.11)$$

$$\|(H_0+I)(I-f(H))\,G_\varepsilon(z)\| \leq C, \tag{I.12}$$

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon(z)(H_0+I)\|+\|(H_0+I)\,G_\varepsilon(z)K_\varepsilon\| \leq C(1+\varepsilon^{-1/2}\|F_\varepsilon\|^{1/2}). \tag{I.13}$$

c) При любой функции $g\in C_0^\infty$ оператор $(H_0+I)^{1/2}[g(H),A]$ $(H_0+I)^{1/2}$ ограничен.

d) Операторы $[H,(1+x_\alpha^2)^{1/2}](H_0+I)^{-1/2}$ и $(H_0+I)\,[g(H),(1+x_\alpha^2)^{1/2}](H_0+I)$, где $g\in C_0^\infty$, $\alpha=1,\dots,N$, ограничены.

Доказательства утверждений а),в) и с) приведены в леммах 7.3, 7.4 и 7.6 работы [3] . Единственное отличие в формулировках состоит в том, что по сравнению с [3] мы добавили множитель (H_0+I) в (I.13). В связи с этим отметим, что неравенство (I.13) является прямым следствием оценок (I.10)-(I.12). Отметим также, что при доказательстве теоремы I основное неравенство (I.3) непосредственно используется лишь для вывода оценки (I.10). Доказательство утверждения d) получается вполне аналогично проверке с) в [3] .

Приступим к доказательству неравенства (I.4). Достаточно, очевидно, показать, что

$$\sup_{\substack{\operatorname{Re} z\in \mathcal{J},\ \operatorname{Im} z>0\\ 0\leq\varepsilon<\varepsilon_0}} \|F_\varepsilon(z)\| < \infty . \tag{I.14}$$

Установим предварительно дифференциальное неравенство

$$\left\|\frac{dF_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\| \leq C\varepsilon^{-a}(1+\|F_\varepsilon\|), \quad a=a(\sigma,\delta)<1 . \tag{I.15}$$

Ясно, что

$$\left\|\frac{dF_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\| \leq \left\|\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\|(\|G_\varepsilon K_\varepsilon\|+\|K_\varepsilon G_\varepsilon\|)+\left\|K_\varepsilon\frac{dG_\varepsilon}{d\varepsilon}K_\varepsilon\right\| . \tag{I.16}$$

Поскольку $\left\|\frac{dK_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\| \leq C\varepsilon^{\sigma-1/2}$, то согласно (I.13) первое слагаемое в правой части (I.16) не превосходит $C\varepsilon^{\sigma-1}(1+\|F_\varepsilon\|)$. Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$K_\varepsilon\frac{dG_\varepsilon}{d\varepsilon}K_\varepsilon = i\,K_\varepsilon G_\varepsilon M G_\varepsilon K_\varepsilon = i\,K_\varepsilon G_\varepsilon(fBf-B)\,G_\varepsilon K_\varepsilon -$$

$$-K_\varepsilon G_\varepsilon[H-i\varepsilon M-z, A]\, G_\varepsilon K_\varepsilon - i\varepsilon K_\varepsilon G_\varepsilon [M,A]\, G_\varepsilon K_\varepsilon, \quad f=f(H) \,. \tag{I.17}$$

С помощью (I.12),(I.13) норма первого оператора в правой части (I.17) оценивается через $C\varepsilon^{-1/2}(1+\|F_\varepsilon\|)$. Раскрывая коммутатор во втором слагаемом в (I.17), оценим норму этого слагаемого через

$$\|K_\varepsilon(1+|x|)\|\cdot\|(1+|x|)^{-1}A(H_0+I)^{-1}\|\cdot\|(H_0+I)\, G_\varepsilon K_\varepsilon\| \,.$$

Первый сомножитель здесь не превосходит $\varepsilon^{\sigma-1/2}$, второй – не зависит от ε и конечен, а третий – оцениваем с помощью (I.13). Тем самым все произведение не превосходит $C\varepsilon^{\sigma-1}(1+\|F_\varepsilon\|)$. В последнем слагаемом в (I.17) запишем коммутатор $[M,A]$ в виде

$$[M,A]=[fBf, A]=[f,A]\,Bf+fB\,[f,A]+f[B,A]f \,.$$

Согласно замечанию к предложению I и пункту с) предложения 2 первые два слагаемые здесь – ограниченные операторы. Поэтому норма оператора, получаемого при их подстановке вместо $[M,A]$ в (I.17), не превосходит (см.(I.13)) $C(1+\|F_\varepsilon\|)$. До сих пор наше доказательство почти буквально следовало статье [3]. Далее, однако, в [3] использовалась ограниченность оператора $f[B,A]f$, что выполнено лишь, если $\sigma\geqslant 1$ в условии 2. В наших предположениях этот оператор заведомо неограничен. Поскольку

$$[B,A]=i[[H_0,A],A]+i[[V,A],A]=-4iH_0+i\sum[[V_\alpha,A_\alpha],A_\alpha]$$

и оператор $fH_0 f$ ограничен, то для доказательства неравенства (I.15) остается получить оценку

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon f[[V_\alpha,A_\alpha],A_\alpha]fG_\varepsilon K_\varepsilon\|\leqslant C\varepsilon^{-1-a}(1+\|F_\varepsilon\|), \qquad a<1\,,\quad f=f(H)\,. \tag{I.18}$$

В силу ограниченности операторов (I.5) достаточно проверить неравенство

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon f(-\Delta_\alpha+I)(1+x_\alpha^2)^{\frac{1-\sigma}{4}}\|\leqslant C\varepsilon^{-\frac{1+a}{2}}(1+\|F_\varepsilon\|^{1/2}) \,. \tag{I.19}$$

В свою очередь (I.19) получается интерполяцией двух неравенств

$$\|K_\varepsilon G_\varepsilon f(-\Delta_\alpha+I)\|\leqslant C\varepsilon^{-1/2}(1+\|F_\varepsilon\|^{1/2}) \tag{I.20}$$

и

$$\| K_\varepsilon G_\varepsilon f(-\Delta_\alpha+I)(1+x_\alpha^2)^{1/2}\| \leqslant C\varepsilon^{-3/2}(1+\|F_\varepsilon\|^{1/2}) . \tag{I.21}$$

Неравенство (I.20) прямо вытекает из (I.13). Проверим (I.21). Поскольку согласно утверждению $d)$ предложения 2 коммутатор $[f(H)(-\Delta_\alpha+I),(1+x_\alpha^2)^{1/2}]$ ограничен, то достаточно установить оценку

$$\| K_\varepsilon G_\varepsilon(1+x_\alpha^2)^{1/2} f(H)\| \leqslant C\varepsilon^{-3/2}(1+\|F_\varepsilon\|^{1/2}) . \tag{I.22}$$

Прокоммутируем теперь операторы G_ε и $(1+x_\alpha^2)^{1/2}$:

$$[G_\varepsilon,(1+x_\alpha^2)^{1/2}] = G_\varepsilon T_\varepsilon G_\varepsilon , \tag{I.23}$$

где

$$T_\varepsilon = [(1+x_\alpha^2)^{1/2}, H] - i\varepsilon[(1+x_\alpha^2)^{1/2}, fBf] .$$

Ясно, что

$$[(1+x_\alpha^2)^{1/2}, fBf] = [(1+x_\alpha^2)^{1/2}, f]\,Bf + 2f[(1+x_\alpha^2)^{1/2}, H_0]\,f +$$

$$+ fB[(1+x_\alpha^2)^{1/2}, f] .$$

Поэтому в силу утверждения $d)$ предложения 2 имеет место оценка

$$\| T_\varepsilon(H_0+I)^{-1/2}\| \leqslant C. \tag{I.24}$$

Из равенства (I.23) теперь вытекает, что

$$\| K_\varepsilon G_\varepsilon(1+x_\alpha^2)^{1/2} f(H)\| \leqslant C(\| K_\varepsilon(1+x_\alpha^2)^{1/2}\|\cdot\| G_\varepsilon\| +$$

$$+\| K_\varepsilon G_\varepsilon\|\cdot\| T_\varepsilon(H_0+I)^{-1/2}\|\cdot\|(H_0+I)^{1/2} G_\varepsilon\| .$$

В силу неравенств $\| K_\varepsilon(1+x_\alpha^2)^{1/2}\| \leqslant C\varepsilon^{\sigma-1/2}$ и (I.II) первое слагаемое здесь не превосходит $C\varepsilon^{-3/2}$. Второе слагаемое с помощью (I.II),(I.13) и (I.24) оценивается через $C\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^{-1/2}\|F_\varepsilon\|^{1/2})$. Это доказывает неравенство (I.22), а потому и (I.18). В свою очередь отсюда вытекает дифференциальное неравенство (I.15).

Как показано в [2], неравенство (I.15) влечет за собой (I.14). Действительно, если $\|F_\varepsilon\| \leqslant C\varepsilon^{-b}$, $0< b\leqslant 1$, то согласно (I.15) $\left\|\frac{dF_\varepsilon}{d\varepsilon}\right\| \leq C\varepsilon^{-a-b}$, а потому $\|F_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{1-a-b}$ при $b>1-a$ и $\|F_\varepsilon\| \leq C$ при $b<1-a$. Коль скоро в соответствии с (I.11) $\|F_\varepsilon\| \leq C\varepsilon^{-1}$, то, применяя это соображение конечное число раз, найдем, что величина $\|F_\varepsilon\|$ равномерно ограничена. Неравенство (I.4) получается из (I.14) при $\varepsilon=0$. Утверждение теоремы о гельдеровской непрерывности оператор-функции $F_0(z)=(1+|x|)^{-1/2-\delta}R_H(z)(1+|x|)^{-1/2-\delta}$ также является следствием (см. [3]) неравенств (I.13)-(I.15). Теорема I доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема I остается справедливой для несколько более общего случая, когда $V_\alpha=V_\alpha^{(1)}+V_\alpha^{(2)}+V_\alpha^{(3)}$, где $V_\alpha^{(1)}$, $V_\alpha^{(2)}$ удовлетворяют условиям I,2, а относительно функций $V_\alpha^{(3)}$ выполнено следующее предположение: операторы $V_\alpha^{(3)}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$ $|x_\alpha|\frac{\partial V_\alpha^{(3)}}{\partial|x_\alpha|}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$ компактны в $L_2(X_\alpha)$, а оператор $|x_\alpha|^{1+\delta}\frac{\partial^2 V_\alpha^{(3)}}{\partial|x_\alpha|^2}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$ при некотором $\delta>0$ ограничен. Отметим, что компактность операторов $V_\alpha^{(3)}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$ и $|x_\alpha|\frac{\partial V_\alpha^{(3)}}{\partial|x_\alpha|}(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$ нужна лишь для вывода неравенства (I.3). Коль скоро для оператора (I.1) неравенство (I.3) установлено, при доказательстве принципа предельного поглощения достаточно ограниченности операторов $|x_\alpha|^{\delta}\frac{\partial}{\partial|x_\alpha|}\left(|x_\alpha|\frac{\partial V_\alpha^{(3)}}{\partial|x_\alpha|}\right)(-\Delta_\alpha+I)^{-1}$, $\delta>0$, которая обеспечивает ограниченность операторов (I.5).

§ 2. Спектр оператора Шредингера при высоких энергиях

В двухчастичном случае при выводе неравенства (I.3) решающую роль в [2,3,9] играла относительная (по отношению к H) компактность возмущения $V=H-H_0$ и коммутатора $[V,A]$. Для многих частиц за счет специальной структуры оператора (I.1) удается [2,3,9] ограничиться относительной компактностью операторов V_α и $[V_\alpha,A_\alpha]$ в пространстве $L_2(X_\alpha)$. В этом параграфе мы покажем, что при больших значениях спектрального параметра относительная компактность этих операторов для вывода неравенства (I.3) оказывается несущественной. Это несколько расширяет условия справедливости принципа предельного поглощения для оператора (I.1). Одновременно с помощью теоремы вириала будут получены признаки отсутствия при высоких энергиях собственных значений оператора H. Для простоты формулировок будем рассматривать лишь ограниченные функции V_α, которые теперь, однако, могут не убывать на бесконечности.

ЛЕММА 2. Пусть функции $V_\alpha, \alpha=1,\dots,N$, в (I.I) допускают представление $V_\alpha = V_\alpha^{(1)} + V_\alpha^{(2)}$, причем функции $(1+|x_\alpha|)\, V_\alpha^{(1)}$, $V_\alpha^{(2)}$ и $|x_\alpha| \dfrac{\partial V_\alpha^{(2)}}{\partial |x_\alpha|}$ ограничены; оператор A задается формулой (I.2). Тогда при достаточно больших λ имеет место неравенство

$$i E_H(\lambda,\lambda+1)[H,A]\, E_H(\lambda,\lambda+1) \geq c E_H(\lambda,\lambda+1), \quad c>0. \tag{2.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $i[H_0, A] = 2H_0$, то

$$i[H,A] = 2H + W, \tag{2.2}$$

где $W = -2V + i[V,A]$. По условию операторы V и

$$i[V^{(2)}, A] = \sum |x_\alpha| \frac{\partial V_\alpha^{(2)}}{\partial |x_\alpha|}$$

ограничены. Рассмотрим $[V^{(1)}, A] = V^{(1)}A - AV^{(1)}$. Оператор

$$V^{(1)} A (H_0+1)^{-1/2} = \left[V^{(1)}(1+|x|) \right] \left[(1+|x|)^{-1} A (H_0+1)^{-1/2} \right]$$

очевидно, ограничен. Таким образом, оператор W может быть представлен в виде $W = W_0 + W_0^*$, где оператор $W_0 (H_0 + I)^{-1/2}$ ограничен, и следовательно, $\| W_0 (H+v)^{-1/2} \| \equiv w < \infty$ $(v > \|V\|)$. Отсюда вытекает, что

$$\left| (W E_H(\lambda,\lambda+1)\psi, E_H(\lambda,\lambda+1)\psi) \right| \leq 2 \left| (W_0 (H+v)^{-1/2} (H+v)^{1/2} E_H(\lambda,\lambda+1)\psi, \right.$$

$$\left. E_H(\lambda,\lambda+1)\psi) \right| \leq 2w(\lambda+v+1)^{1/2} (E_H(\lambda,\lambda+1)\psi,\psi).$$

Согласно (2.2) это дает оценку

$$i E_H(\lambda,\lambda+1)[H,A]\, E_H(\lambda,\lambda+1) \geq 2\left[\lambda - w(\lambda+v+1)^{1/2}\right] E_H(\lambda,\lambda+1).$$

Остается выбрать λ так, чтобы $\lambda - w(\lambda+v+1)^{1/2} \geq C/2$. Лемма доказана.

В условиях леммы 2 справедлива (см., например, книгу [IO]) теорема вириала, которая утверждает, что для любого собственного вектора ψ оператора H должно быть выполнено равенство

$$([H, A]\psi, \psi) = 0.$$

Это соотношение, очевидно, несовместно с оценкой (2.I).

Оценка (2.I) влечет за собой неравенство вида (I.4), если операторы (I.5) ограничены. В данном случае удобно воспользоваться условиями ограниченности этих операторов, приведенными в замечании в конце § I. Тем самым из леммы 2 вытекают следующие спектральные следствия для оператора (I.I).

ТЕОРЕМА 2. I) В условиях леммы 2 оператор H не имеет собственных значений, больших некоторого числа λ_0.

2) Пусть функции $V_\alpha, |x_\alpha| \dfrac{\partial V_\alpha}{\partial |x_\alpha|}$ и $|x_\alpha|^{1+\delta} \dfrac{\partial^2 V_\alpha}{\partial |x_\alpha|^2}$, $\delta > 0$,

ограничены. Тогда при некотором λ_0 и любом компактном интервале $\mathcal{J} \subset (\lambda_0, \infty)$ справедливо неравенство (I.4). В частности, спектр оператора H в интервале (λ_0, ∞) абсолютно непрерывен.

Таким образом, при высоких энергиях доказательство принципа предельного поглощения для многочастичного оператора Шредингера столь же элементарно, как и в двухчастичном случае. С другой стороны, в теореме 2 не требуется стремления функций $V_\alpha(x_\alpha)$ к нулю при $|x_\alpha| \to \infty$. Поэтому это утверждение, сформулированное без предположения о многочастичной структуре потенциала, оказывается почти эквивалентным теореме 2. Приведем здесь соответствующее

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $H = -\Delta + V(x)$.

I) Предположим, что $V = V^{(1)} + V^{(2)}$, где функции $(1+|x|)\, V^{(1)}$, $V^{(2)}$ и $|x| \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial |x|}$ ограничены. Тогда оператор H не имеет собственных значений, больших некоторого числа λ_0.

2) Предположим, что функции $V, |x| \dfrac{\partial V}{\partial |x|}$, $|x|^{1+\delta} \dfrac{\partial^2 V}{\partial |x|^2}$

ограничены. Тогда при некотором λ_0 и любом компактном интервале $\mathcal{J} \subset (\lambda_0, \infty)$ справедливо неравенство (I.4), а спектр оператора H в интервале (λ_0, ∞) абсолютно непрерывен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты теоремы 2 и следствия к ней сохраняют силу, если к рассматриваемым в них потенциалам добавить функции, удовлетворяющие условиям теоремы I.

Приведем простой пример применения последнего следствия в "двухчастичном" случае. Пусть $V(x) = p(|x|)\, q(x/|x|)$, где функции p и q ограничены. Если $p'(r) = O(r^{-1})$, $r \to \infty$, то у оператора H нет достаточно удаленных собственных значений. Если же, кроме того, $p''(r) = O(r^{-1-\delta})$, $\delta > 0$, $r \to \infty$, то при достаточно большом λ_0 в интервале (λ_0, ∞) имеет место принцип предельного поглощения, а спектр оператора H правее точки λ_0 абсолютно непрерывен. Это утверждение естественно сопоставить с результатами, справедливыми для радиального случая. Именно, для оператора $-d^2/dr^2+p(r)$, $u(0)=0$ в $L_2(\mathbb{R}_+)$ известно (см., например, [II]), что при $p\in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $p'\in L_2(\mathbb{R}_+)$, $p''\in L_1(\mathbb{R}_+)$ его спектр абсолютно непрерывен в интервале (λ_0,∞) , где $\lambda_0=\sup p(r)$. Более того, при этих условиях в интервале (λ_0,∞) справедлива теорема разложения по собственным функциям оператора H с квазиклассической асимптотикой при $r\to\infty$. Полученный здесь результат, разумеется, грубее, но качественно имеет ту же природу.

Даже в радиальном случае условия первой части следствия к теореме 2 не исключают появления собственных значений на непрерывном спектре. Это подтверждается известным примером Вигнера-фон Неймана, в котором построен потенциал с асимптотикой $r^{-1}\sin r$ при $r\to\infty$, порождающий положительное собственное значение.

§ 3. Теория рассеяния для анизотропно-убывающих потенциалов

В этом параграфе мы рассмотрим оператор Шредингера с потенциалом $V(x)$, скорость убывания которого при $|x|\to\infty$ может существенно зависеть от направления вектора x . Опишем гамильтониан в терминах конструкции, приведенной в начале § I. Пусть по-прежнему $\pi_\alpha:\mathbb{R}^n\to X_\alpha$, $\alpha=1,\dots,N$, - ортогональные проекции, $X_\alpha\neq\mathbb{R}^n$, $Y_\alpha=\mathbb{R}^n\ominus X_\alpha$. Тогда произвольный вектор $x\in\mathbb{R}^n$ может быть разложен N различными способами в ортогональную сумму $x=x_\alpha+y_\alpha$, где $x_\alpha=\pi_\alpha(x)\in X_\alpha$, $y_\alpha=x-\pi_\alpha(x)\in Y_\alpha$. Предположим дополнительно, что $Y_\alpha\cap Y_\beta=\{0\}$ при $\alpha\neq\beta$. Будем считать, что потенциал V представим в виде суммы

$$V=\sum_{\alpha=1}^{N}V_\alpha+V_0\,, \tag{3.I}$$

где функции $V_\alpha(x),\alpha=1,\dots,N$, быстро убывают по переменным x_α и медленно - по переменным y_α , а $V_0(x)$ - быстроубывающая функция x (точные условия см.ниже). Функция (3.I) похожа по структуре на потенциал многочастичного оператора (I.I), но отличается тем, что в (I.I) слагаемые V_α от y_α вообще не зависели. Соотношение $Y_\alpha\cap Y_\beta=\{0\}$, $\alpha\neq\beta$, выделяет операторы трехчастичного типа.

Приведем точные условия относительно вещественных функций V_α и V_0 . Пусть при некотором $\delta>0$ и любом $\gamma>0$ в области $|x_\alpha|>\gamma|y_\alpha|$, $\alpha=1,\dots,N$, справедливо неравенство

$$|V_\alpha(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\delta}, \ \delta>0, \quad C=C_\gamma, \tag{3.2}$$

а функция V_0 удовлетворяет оценке (3.2) при всех $x\in\mathbb{R}^n$. Кроме того, будем считать, что

$$\left| V_\alpha(x)\right| + |x| \left| \frac{\partial V_\alpha(x)}{\partial |x|} \right| \leq C(1+|x|)^{-\delta}. \tag{3.3}$$

Условие (3.2) выполнено, в частности, если

$$|V_\alpha(x)| \leq C(1+|x_\alpha|)^{-1-\delta}.$$

Для короткодействующих многочастичных потенциалов $V_\alpha(x)=V_\alpha(x_\alpha)$ это неравенство справедливо, однако (3.3) может удовлетворяться лишь при $\delta=0$.

При предположениях (3.2) относительно V_0 и (3.3) относительно V_α, $\alpha=1,\dots,N$, теорема I гарантирует, что, за исключением собственных значений, накапливающихся разве лишь к точке нуль, спектр самосопряженных операторов $H=H_0+V$ $(H_0=-\Delta)$ и $H_\alpha=H_0+V_\alpha$ абсолютно непрерывен. Поэтому подпространство $\mathcal{H}^c=\mathcal{H}^c_H$ $(\mathcal{H}^c_\alpha=\mathcal{H}^c_{H_\alpha})$ совпадает с ортогональным дополнением к множеству всех собственных векторов оператора H (H_α). Кроме того, резольвенты этих операторов удовлетворяют оценке (I.4). На отрицательной полуоси операторы H и H_α могут иметь лишь дискретный спектр. Задача теории рассеяния состоит в нахождении асимптотики функции $e^{-iHt}\psi$, $\psi\in\mathcal{H}^c$, при $|t|\to\infty$. В наших предположениях этот вопрос решается в терминах операторов H_α, отвечающих лишь одному из "парных" взаимодействий. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (3.2),(3.3). Тогда для любого вектора $\psi\in\mathcal{H}^c$ найдутся такие вектора $\psi_\alpha^{(\pm)}\in\mathcal{H}^c_\alpha$, что

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left\| e^{-iHt}\psi - \sum_{\alpha=1}^{N} e^{-iH_\alpha t}\psi_\alpha^{(\pm)} \right\| = 0. \tag{3.4}$$

При доказательстве теоремы 3 нам понадобится следующая геометрическая конструкция. Положим $K_\alpha(\gamma)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x_\alpha|<\gamma|y_\alpha|\}$, $\mathring{K}_\alpha(\gamma)=K_\alpha(\gamma)\cap S^{n-1}$. Поскольку $Y_\alpha\cap Y_\beta=\{0\}$, то число γ можно выбрать настолько малым, что $\mathring{K}_\alpha(\gamma)\cap\mathring{K}_\beta(\gamma)=\emptyset$ при $\alpha\neq\beta$. Построим теперь такие C^∞-функции $\mathring{\eta}_\alpha(\omega)$ на сфере S^{n-1}, что $\mathring{\eta}_\alpha(\omega)=1$ при $\omega\in\mathring{K}_\alpha(\gamma)$, $\mathring{\eta}_\alpha(\omega)=0$ при $\omega\in\mathring{K}_\beta(\gamma)$,

$\beta \neq \alpha$, и $\overset{\circ}{\eta}_1 + \ldots + \overset{\circ}{\eta}_N = 1$. Пусть $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\zeta(r) = 0$ при $r < 1$ и $\zeta(r) = 1$ при $r > 2$, $\eta_\alpha(x) = \zeta(|x|)\, \overset{\circ}{\eta}_\alpha(x/|x|)$. Через $\mathcal{J}_\alpha$ обозначим оператор умножения на $\eta_\alpha(x)$; тогда $\mathcal{J}_0 = I - \sum_{\alpha=1}^{N} \mathcal{J}_\alpha$ - оператор умножения на функцию из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ЛЕММА 3. Пусть при $\alpha = 1, \ldots, N$ существуют сильные пределы

$$s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{iH_\alpha t} \mathcal{J}_\alpha e^{-iHt} P_H^c = W^{(\pm)}(H_\alpha, H; \mathcal{J}_\alpha) \equiv W_\alpha^{(\pm)} . \tag{3.5}$$

Тогда при любом $\psi \in \mathcal{H}^c$ имеет место соотношение (3.4), где можно положить $\psi_\alpha^{(\pm)} = W_\alpha^{(\pm)} \psi$.

Действительно, из (3.5) вытекает, что $W_\alpha^{(\pm)} \psi \in \mathcal{H}_\alpha^c$ и

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| \mathcal{J}_\alpha e^{-iHt} \psi - e^{iH_\alpha t} W_\alpha^{(\pm)} \psi \| = 0 . \tag{3.6}$$

Просуммируем эти равенства по $\alpha = 1, \ldots, N$. Для доказательства (3.4) остается заметить, что $\mathcal{J}_0 e^{-iHt} \psi \longrightarrow 0$ при $|t| \to \infty$ в силу компактности оператора $\mathcal{J}_0 R_H(i)$.

При доказательстве существования пределов (3.5) будем исходить из следующего абстрактного утверждения, в котором A, B - самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $\mathcal{J}$ - произвольный ограниченный оператор.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Предположим, что для некоторой пары операторов L, M при любых $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$, $\psi \in \mathfrak{D}(B)$ справедливо равенство

$$(\mathcal{J} A \varphi, \psi) - (\mathcal{J} \varphi, B \psi) = (L \varphi, M \psi) , \tag{3.7}$$

причем операторы $L R_A(i)$ и $M R_B(i)$ ограничены. Пусть $\{\mathcal{I}_s\}$ - счетная система компактных интервалов, объединение которых есть множество полной меры на прямой; $\mathfrak{D}$ - какое-либо плотное в $\mathcal{H}$ множество. Если для любого интервала $\mathcal{I}_s$ и всех $f \in \mathfrak{D}$ выполнены условия

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in \mathcal{I}_s} \| L R_A(z) f \| < \infty , \tag{3.8}$$

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in \mathcal{I}_s} \| M R_B(z) M^* \| < \infty , \tag{3.9}$$

то существуют волновые операторы

$$W^{(\pm)}(B, A; \mathcal{J}) = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{iBt} \mathcal{J} e^{-iAt} P_A^c .$$

Это утверждение является простой модификацией известной теоремы Като-Лавина (см., например, книгу [10]). Отличие состоит в том, что в теореме Като-Лавина предположение относительно пары L, A формулируется аналогично (3.9). Подчеркнем, что условие (3.8) допускает проверку на элементах f из произвольного плотного множества. Более общий вариант условий такого типа применялся в уже упомянутой работе Е.М.Ильина [8] .

При проверке для операторов H и H_α соотношений типа (3.8),(3.9) важную роль играет как принцип предельного поглощения (неравенство (1.4)), так и условие излучения для функции $R_H(z)f$. Пусть функция V_0 удовлетворяет условию (3.2), функции $V_\alpha, \alpha=1,\dots,N$, удовлетворяют условию (3.3), а $\mathcal{J}$ - компактный, отделенный от нуля интервал, причем $\mathcal{J}$ не содержит собственных значений оператора H . В [4,5] показано, что при некотором $\sigma=\sigma(\delta)>0$ и элементах f из подходящего плотного множества $\mathcal{D}$ справедлива оценка

$$\sup_{\mathrm{Re}\, z\in\mathcal{J}} \left\|(1+r)^{-1/2+\sigma}(\nabla-i\sqrt{z}\,x/r)R_H(z)f\right\|<\infty,\ \mathrm{Im}\sqrt{z}>0,\quad r=|x|. \tag{3.10}$$

Здесь можно, например, считать, что множество $\mathcal{D}$ состоит из функций f , для которых $(1+r)^{1/2+\sigma}f\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Соотношение (3.10) мы называем условием излучения. Нам понадобится лишь "угловая часть" оценки (3.10). Именно, пусть ∇_ω - угловая составляющая градиента, т.е. $\nabla_\omega=\nabla-r^{-1}x\,\partial/\partial r$. Тогда из (3.10) вытекает неравенство

$$\sup_{\mathrm{Re}\, z\in\mathcal{J}} \left\|(1+r)^{-1/2+\sigma}\nabla_\omega R_H(z)f\right\|<\infty . \tag{3.11}$$

Доказательство (3.10) в [4,5] , грубо говоря, состоит в следующем. Прямыми вычислениями величина (3.10) оценивается через (1.4). В комбинации с теоремой единственности для решений неоднородного уравнения Шредингера, удовлетворяющих условиям излучения, эта априорная оценка позволяет установить конечность обеих величин (1.4) и (3.10). При таком подходе наиболее трудный этап состоит в доказательстве теоремы единственности. Коль скоро неравенство (1.4) получено независимо (с помощью метода Е.Мурра), необходимость в теореме единственности отпадает, и вывод (3.10) становится вполне элементарным. В [4,5] показано также, что оператор H не имеет положительных собственных значений (так что $\mathcal{J}$ - любой интервал $[a,b]$, где $0<a<b<\infty$), но нам этот результат не понадобится.

Отметим еще, что из (I.4) вытекает оценка

$$\sup_{\operatorname{Re} z\in J}\left\|(1+r)^{-1/2-\sigma}\frac{\partial}{\partial r}R_H(z)\ (1+r)^{-1/2-\sigma}\right\|<\infty,\ \sigma>0. \qquad (3.12)$$

Приступим к доказательству теоремы 3. Применим предложение 3. В нашем случае роль операторов A, B и J играют соответственно H, H_α и J_α. Пусть M – оператор умножения на $(1+r)^{-1/2-\sigma}$, где σ – достаточно малое положительное число. Тогда в силу оценки (I.4) для резольвенты оператора H_α выполнено условие (3.9). Согласно (3.7) $L=(1+r)^{1/2+\sigma}(H_\alpha J_\alpha-J_\alpha H)$. Проверим теперь условие (3.8), где будем считать, что $\mathcal{D}$ состоит из функций f, для которых $(1+r)^{1/2+\sigma}f\in L_2(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим вначале

$$\left\|(1+r)^{1/2+\sigma}\left[H_0,J_\alpha\right]R_H(z)f\right\|.$$

Коммутатор $[H_0, J_\alpha]$ заменим здесь суммой

$$[H_0,J_\alpha]=-(\Delta\eta_\alpha)-2(\nabla\eta_\alpha)\nabla=-(\Delta\eta_\alpha)-2\mathring{\eta}_\alpha\zeta'\frac{\partial}{\partial r}-2\zeta(\nabla_\omega\mathring{\eta}_\alpha)\nabla_\omega.$$

Поскольку $\Delta\eta_\alpha=O(r^{-2})$, $\mathring{\eta}_\alpha\zeta'\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\nabla_\omega\mathring{\eta}_\alpha=O(r^{-1})$, $r\to\infty$, то равномерная (по z, $\operatorname{Re} z\in J$) ограниченность каждого из трех получившихся слагаемых вытекает из соотношений (I.4),(3.12) и (3.11) соответственно. Для доказательства (3.8) остается показать, что

$$\sup_{\operatorname{Re} z\in J}\left\|(1+r)^{1/2+\sigma}J_\alpha V_\beta R_H(z)f\right\|<\infty,\ \beta\neq\alpha. \qquad (3.13)$$

Так как $\eta_\alpha(x)=0$ при $|x_\beta|<\gamma|y_\beta|$ для всех $\beta=1,\dots,N$, $\beta\neq\alpha$, то в силу условия (3.2) $|\eta_\alpha(x)V_\beta(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-1-\delta}$. Последнее неравенство, очевидно, справедливо и для функции $\eta_\alpha V_0$. Считая $\sigma<\delta$, найдем, что (3.13) прямо вытекает из (I.4). Это завершает проверку условия (3.8). В силу предложения 3 существуют пределы(3.5), а потому в силу леммы 3 выполнено соотношение (3.4). Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Меняя операторы H и H_α ролями, совершенно аналогично доказательству теоремы 3 можно установить существование волновых операторов $W^{(\pm)}(H,H_\alpha;J_\alpha)=\Omega_\alpha^{(\pm)}$, причем, очевидно, $\Omega_\alpha^{(\pm)}=W_\alpha^{(\pm)*}$. Из соотношения (3.6) вытекает, что сумма областей значений $\mathcal{R}(\Omega_\alpha^{(\pm)})$ операторов $\Omega_\alpha^{(\pm)}$, $\alpha=1,\dots,N$, плотна в подпространстве $\mathcal{H}^c$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathring{\eta}(\omega)=0$ при $\omega\in\mathring{K}_\alpha(\gamma)$ для какого-либо $\gamma>0$ и всех $\alpha=1,\dots,N$, $\eta(x)=\zeta(|x|)\mathring{\eta}(x/|x|)$, $\mathcal{J}$ – оператор умножения на $\eta(x)$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 3, можно установить существование волновых операторов $W^{(\pm)}(H_0,H;\mathcal{J})\equiv$ $\equiv W_0^{(\pm)}$.

Соотношения (3.5) или (3.6) дают несколько бо́льшую, чем (3.4), информацию о поведении $e^{-iHt}\psi$ при $t\to\pm\infty$. Именно, соотношение (3.6) показывает, что для любого $\alpha=1,\dots,N$ в области, где $|x_\alpha|<\gamma|y_\alpha|$ (γ достаточно мало) поведение функции $e^{-iHt}\psi$ при $t\to\pm\infty$ такое же, как у функции $e^{-iH_\alpha t}\psi_\alpha^{(\pm)}$, $\psi_\alpha^{(\pm)}=W_\alpha^{(\pm)}\psi$. Аналогичным образом, из существования волновых операторов $W_0^{(\pm)}$ вытекает, что в области, где $|x_\alpha|>\gamma|y_\alpha|$ для всех $\alpha=1,\dots,N$ функция $e^{-iHt}\psi$ при $t\to\pm\infty$ ведет себя как $e^{-iH_0t}\psi_0^{(\pm)}$, $\psi_0^{(\pm)}=W_0^{(\pm)}\psi$. Таким образом, в любом конусе асимптотическая эволюция системы зависит лишь от значений потенциала в этом конусе. Более того, существенна только медленно убывающая часть этого потенциала. Тем самым справедлив отмеченный во введении принцип локализации.

С помощью признака Кука легко убедиться, что при условии (3.2) существуют волновые операторы $W^{(\pm)}(H,H_0;I)\equiv W^{(\pm)}(H,H_0)$. Для любого элемента $\psi\in\mathcal{R}(W^{(\pm)}(H,H_0))$ функция $e^{-iHt}\psi$ имеет свободную асимптотику при $t\to\pm\infty$, т.е. $e^{-iHt}\psi\sim e^{-iH_0t}\varphi$, где $\varphi=W^{(\pm)}(H,H_0)^*\psi$. Из условий (3.2),(3.3), однако, не вытекает, что $\mathcal{R}(W^{(\pm)}(H,H_0))=\mathcal{H}^c$. Приведем соответствующие примеры. Более подробно эти примеры обсуждаются в [6].

ПРИМЕР I. Пусть $V(x)=V_\alpha(x)=p(x_\alpha)\,q(y_\alpha)$, причем при некотором $\delta>0$

$$|p|+\left|\frac{\partial p}{\partial|x_\alpha|}\right|\le C(1+|x_\alpha|)^{-1-\delta},$$

$$|q|+|y_\alpha|\left|\frac{\partial q}{\partial|y_\alpha|}\right|\le C(1+|y_\alpha|)^{-\delta}.$$

Тогда условия (3.2),(3.3) выполнены. В то же время даже при финитной функции p в этой задаче $\mathcal{R}(W^{(\pm)}(H,H_0))\neq\mathcal{H}^c$, если $\dim X_\alpha=1$, $\int p\,dx_\alpha<0$, а $q(y_\alpha)$ убывает как $q_0|y_\alpha|^{-\delta}$, $q_0>0$, $\delta\in(0,1/2)$, при $|y_\alpha|\to\infty$.

ПРИМЕР 2. Пусть $V(x) = V_\alpha(x) = |y_\alpha|^{-2a} p(|y_\alpha|^{-a} x_\alpha)$ при $|y_\alpha| > 1$ (и V_α - например, гладкая и финитная функция в цилиндре $|y_\alpha| < 1$). При условиях $a \in (0,1)$ и

$$|p(x_\alpha)| + |x_\alpha| \left| \frac{\partial p(x_\alpha)}{\partial |x_\alpha|} \right| \leq C(1 + |x_\alpha|)^{-b}, \quad b > (1-a)^{-1},$$

выполнены неравенства (3.2),(3.3). Если, однако, $a \in (0, 1/2)$ и оператор $-\Delta_\alpha + p(x_\alpha)$ в $L_2(X_\alpha)$ имеет собственное число, то при незначительных ограничениях на соответствующую собственную функцию в этой задаче $\mathcal{R}(W^{(\pm)}(H, H_0)) \neq \mathcal{H}^c$.

При $\psi \in \mathcal{H}^c \ominus \mathcal{R}(W^{(\pm)}(H, H_0))$ асимптотика функции $e^{-iHt}\psi$, $t \to \pm\infty$, отличается от свободной, и, следовательно, задача рассеяния становится многоканальной. В примерах I,2 нарушение равенства $\mathcal{R}(W^{(\pm)}(H, H_0)) = \mathcal{H}^c$ связано с появлением состояний, аналогичных младшим каналам рассеяния в трехчастичной задаче. Содержательные приложения теоремы 3 получаются, например, при рассмотрении возмущений, являющихся суммами потенциалов из примеров I и 2. Утверждение теоремы 3 означает, что для гамильтониана H все возможные каналы рассеяния исчерпываются каналами, возникающими для гамильтонианов H_α , $\alpha = 1, \ldots, N$, каждый из которых содержит лишь одно "парное" взаимодействие.

Для трехчастичного оператора Шредингера соотношение асимптотической полноты также может быть сформулировано в форме (3.4). В этом случае в уравнении Шредингера с оператором H_α "переменные разделяются", и (3.4) приводит к традиционной (см. [I]) формулировке асимптотической полноты в терминах основного и младших каналов рассеяния. Напротив, для рассматриваемых нами потенциалов эффективное описание асимптотики функции $e^{-iH_\alpha t}$ при $|t| \to \infty$ является, возможно, трудной задачей. Отметим, что в нашем случае соотношение (3.4) удается доказать без предварительного изучения задач с гамильтонианами H_α .

К сожалению, для применения изложенной схемы к реальному трехчастичному случаю не хватает условия излучения (3.II), вывод которого требует предположения $\delta > 0$ в неравенстве (3.3). В действительности, за счет младших каналов рассеяния в трехчастичном случае соотношение (3.II) заведомо нарушается. Однако, для нашего доказательства теоремы 3 оценка (3.II) не является необходимой. На самом деле, нужно, чтобы при каком-либо достаточно малом $\gamma > 0$

$$\sup_{\operatorname{Re} z\in J}\left\|(1+r)^{-1/2+\sigma}\nabla_\omega R_H(z)f\right\|_{L_2(\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{\alpha=1}^N K_\alpha(\gamma))}<\infty . \qquad (3.14)$$

Здесь, как и ранее, σ - сколь угодно малое положительное число, элементы f берутся из какого-нибудь плотного множества, а J - интервал из счетного семейства интервалов, покрывающих $\mathbb{R}$ с точностью до множества меры нуль. В отличие от (3.II) в соотношении (3.I4) конические окрестности подпространств Y_α, на которых потенциал не убывает, выброшены из рассмотрения. Оценка (3.I4) достаточно правдоподобна, однако вопрос о ее доказательстве остается открытым. Вместе с принципом предельного поглощения оценка (3.I4) дала бы элементарный вывод асимптотической полноты для трехчастичного оператора Шредингера.

Литература

I. Ф а д д е е в Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I963, т.69.

2. M o u r r e E. Absence of singular spectrum for certain self-adjoint operators. - Comm.Math.Phys., 1981, v.78, p.391-400.

3. P e r r y P., S i g a l I.M., S i m o n B. Spectral analysis of N-body Schrödinger operators. - Ann.Math.,1981, v.114, p.519-567.

4. В и н н и к А.А. Об условиях излучения для областей с бесконечными границами. - Изв.ВУЗов, сер.мат., I977, № 7, с.37-45.

5. S a i t o Y. Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials. Springer-Verlag, 1979, 149 p.

6. Y a f a e v D.R. On the break-down of completeness of wave operators in potential scattering. - Comm.Math.Phys., 1979, v.65, p.167-179.

7. D e i f t P., S i m o n B. A time-dependent approach to the completeness of multiparticle quantum systems. - Comm. Pure Appl.Math., 1977, v.30, p.573-583.

8. И л ь и н Е,М. О рассеянии на некомпактных препятствиях. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.I5. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I983, т.I27, с.68-74.

9. F r o e s e R., H e r b s t I. A new proof of the Mourre estimate. - Duke Math.J., 1982, v.49,p.1075-1085.

I0. Р и д М., С а й м о н Б. Методы современной математичес-

кой физики, т.4, М., 1982.
11. Y a f a e v D.R. The low energy scattering for slowly decreasing potentials. - Comm.Math.Phys., 1982, v.85, p.177-196.

УДК 517.958

Скрытая симметрия и высшие токи в суперсимметричной калибровочной теории поля. Арефьева И.Я., Волович И.В. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.6–16.

Получены явные выражения для нелокальных сохраняющихся токов в $N=4$ суперсимметричной калибровочной теории. Библ. – 32 назв.

УДК 519.4

Сингулярные решения уравнения КдВ и метод обратной задачи. Аркадьев В.А., Погребков А.К., Поливанов М.К. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.17–37.

Работа посвящена построению сингулярных решений уравнения КдВ. Изложение основано на варианте метода обратной задачи для сингулярных решений нелинейных уравнений, развитого в предыдущих работах авторов. Библ. – 21 назв.

УДК 519.4

Несколько замечаний об эллиптических координатах. Арнольд В.И. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.38–50.

Дается бескоординатное изложение многомерной теории эллиптических координат Якоби, с помощью которых интегрируются уравнения геодезических на эллипсоиде и некоторые другие уравнения. Приводятся обобщения теорем Ньютона и Айвори о поле притяжения эллипсоида. Библ. – 10 назв.

УДК 517.862

Построение "Hauptfunktion", решение уравнений Шварца и Фукса для поверхности рода ноль методом спектральной теории автоморфных функций. Венков А.Б. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.51–62.

Статья посвящена исследованию уравнений Шварца и Фукса с n особыми точками на поверхности рода ноль. В первой части работы методами спектральной теории автоморфных функций для произвольной фуксовой группы рода 0 с фундаментальной областью конечной неевклидовой меры явно строится ее инвариант Клейна. Полученная информация используется во второй части работы, где выводятся формулы, выражающие координаты особых точек и акцессорные параметры уравнений Шварца и Фукса в терминах соответствующей фуксовой группы. Библ. - II назв.

УДК 517.958+530.145

Квазиклассическое приближение для моделей спин-спинового взаимодействия на одномерной решетке. Воробьев Ю.М., Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с. 63-76.

В работе рассмотрена одномерная анизотропная модель Гейзенберга во внешнем поле. Для соответствующего оператора энергии, содержащего параметр h, с помощью метода канонического оператора построены квазиклассические (при $h \longrightarrow 0$) спектральные серии. В интегрируемом случае (без внешнего поля) полученные результаты совпадают с точными. Библ. - 22 назв.

УДК 519.4

Многомерные интегрируемые нелинейные системы и методы построения их решений. Захаров В.Е., Манаков С.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.УI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с. 77-91.

Предлагается новый метод построения многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений с помощью нелокальной задачи Римана. Он является естественным обобщением метода локальной задачи Римана на случай многих пространственных переменных и включает в себя известный метод Захарова - Шабата одевания вольтерровыми операторами. Библ. - 15 назв.

УДК 530.14

Корреляционные функции в квантовом методе обратной задачи рассеяния. Изергин А.Г., Корепин В.Е. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.УI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с. 92-112.

Предлагается метод вычисления корреляционных функций для вполне интегрируемых моделей в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния. Библ. – 9 назв.

УДК 517.946

Теорема Лиувилля и метод обратной задачи. Итс А.Р. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.113–125.

На основе классической теоремы Лиувилля развивается подход к интегрированию уравнений Захарова – Шабата, являющийся синтезом идей "конечнозонного" интегрирования, метода матричной задачи Римана и теории изомонодромных деформаций дифференциальных уравнений. Эффективность предлагаемой схемы демонстрируется на примере построения "процедуры одевания" для уравнения Булло – Додда. Библ. – 15 назв.

УДК 519.4

Сферически-симметричные решения эвклидовых уравнений Янга – Миллса. Капитанский Л.В., Ладыженская О.А. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.126–132.

Мы рассматриваем эвклидовы уравнения Янга – Миллса со структурной группой $SU(2)$. Функционал действия и топологический заряд инвариантны относительно преобразований: $A_\mu(x)\,dx_\mu \longrightarrow A_\mu(gx)\,d(gx)_\mu$, где g пробегает множество кватернионов единичной длины, а gx есть произведение кватерниона g на кватернион $x = x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3$. Эта $SU(2)$-симметрия позволяет применить принцип Коулмена. Для потенциалов A_μ получаем следующий сферически-симметричный анзац:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{|x|} f_\alpha(\ln|x|^2) \frac{1}{|x|}\left(\delta_{4\alpha} x_\mu - \delta_{4\mu} x_\alpha + \delta_{\alpha\mu} x_4 + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma 4} x_\gamma\right), \quad (I)$$

а уравнения Янга – Миллса и уравнения дуальности редуцируются к системам обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $f^a_\alpha(\tau)$. Мы доказываем, что всякое решение уравнений Янга – Миллса вида (I), для которого действие конечно и заряд положителен (отрицателен), является решением уравнений дуальности $F = *F$ (соотв., $F = -*F$) и при этом заряд равен I (соотв., -I). Кроме того, мы явно описываем все решения вида (I) уравнений дуальности, среди них содержится, в частности, одноинстантонное решение Белавина, Полякова и др. Библ. - 3 назв.

УДК 530.14
Корреляционные функции одномерного Бозе-газа в случае отталкивания. Корепин В.Е. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.133-145.

Модель одномерного Бозе-газа совпадает с квантовым вариантом нелинейного уравнения Шредингера. В случае отталкивания основное состояние системы - это море Дирака с конечной плотностью. С помощью квантового метода обратной задачи удается вычислить корреляционные функции в этой модели. Библ. - 15 назв.

УДК 530.14
Интегрируемые фермионные киральные модели, связанные с классическими алгебрами Ли. Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин. ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.146-159.

Исследуется кирально инвариантная модель квантовой теории поля с четырехфермионным взаимодействием и с $O(2k+1)$ симметрией. Получены уравнения термодинамики и уравнения,описывающие основное состояние модели. Вычислены S -матрицы фундаментальных фермионов. Библ. - 17 назв.

УДК 519. 4+530.14
Геометрия супергравитации и суперклетки Шуберта. Манин Ю.И. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.160-176.

Описано обобщение твисторной модели Пенроуза на случай N -расширенной суперсимметрии. Показано, что источником инвариантных связей лагранжианов и динамических уравнений супергравитации является геометрия суперклеток Шуберта комплексных супермногообразий флагов. Библ. - 7 назв.

УДК 519.4
Алгебро-топологический подход в проблемах вещественности. Вещественные переменные действия в теории конечнозонных решений урав-

ния sine-Gordon. Новиков С.П. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.177-196.

В статье развивается алгебро-топологический подход к проблеме эффективного отбора вещественных конечнозонных решений уравнения синус-Гордон, использующий так называемое γ -представление на римановой поверхности, в котором явно вычисляются переменные "действия". Этот подход является общим и применим ко многим системам, где проблема вещественности еще не решена. Библ. - 23 назв.

УДК 517.9

О спектральных свойствах одномерных редких кристаллов. Павлов Б.С., Смирнов Н.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с. 197-211.

В работе изучается связь между спектральными характеристиками одномерного оператора Шредингера $\ell_a(y)=-y''+q_a(x)y$ с периодическим потенциалом $q_a=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q(x-na)$ при $a\to\infty$ со спектральными характеристиками оператора Шредингера $\ell(y)=-y''+q(x)y$ с убывающим потенциалом $q(x)$. Библ. - 7 назв.

УДК 519.4

Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева - Петвиашвили. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.212-227.

В рамках общей теоретико-групповой схемы описаны гамильтоновы структуры и интегралы движения для нелинейных уравнений с двумя пространственными переменными. Обсуждается связь с нелокальной задачей Римана, многовременной формализм и гамильтонова структура стационарных задач. Библ. - 12 назв.

УДК 519.4

Классические r -матрицы и квантование. Семенов-Тян-Шанский М.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.228-235.

Описано построение квантовых интегралов движения для систем с линейными скобками Пуассона, задаваемыми с помощью классических r-матриц. Библ. - 10 назв.

УДК 51-72:531.38+51-72:530.145
Волчок Горячева - Чаплыгина и метод обратной задачи рассеяния. Склянин Е.К. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с. 236-257.

Показано, что к волчку Горячева - Чаплыгина, как в классическом, так и в квантовом случае, применим метод обратной задачи рассеяния. Предложен новый, основанный на формализме R-матрицы, способ вывода уравнений, определяющих спектр квантовых интегралов движения. Указанный способ носит довольно общий характер и может составить альтернативу т.н. алгебраическому анзацу Бете. Библ. - 11 назв.

УДК 517.43+519.46
Решения уравнений треугольников с $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$-симметрией как матричные аналоги дзета- и сигма-функций Вейерштрасса. Тахтаджян Л.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.258-276.

В работе вводятся и изучаются матричные аналоги дзета- и сигма-функций Вейерштрасса. В $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$-симметричном случае доказано, что классическая r-матрица совпадает с матричной дзета-функцией, а квантовая R-матрица представляется в виде отношения матричных сигма-функций. Полученные формулы интерпретируются как результат усреднения по решетке периодов. Библ. - 16 назв.

УДК 517.9
Замечания о спектральной теории для оператора Шредингера многочастичного типа. Яфаев Д.Р. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133). Л., "Наука", 1984, с.277-298.

С помощью метода Мурра принцип предельного поглощения для многочастичного оператора Шредингера доказывается при тех же предположениях относительно парных потенциалов, что и в двухчастичной задаче. Показано, что при высоких энергиях условия справедливости этого принципа оказываются более широкими, чем на всей спектральной оси. По аналогии с трехчастичной задачей построена теория рассеяния для оператора Шредингера, потенциал которого убывает на бесконечности существенно анизотропно. Библ. - II назв.

SUMMURIES

Hidden symmetry and higher currents in a supersymmetric gauge theory. Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics.VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.6-16.

Explicit expressions are given for nonlocal conserved currents in a $N=4$ supersymmetric gauge theory. Bibl. - 32.

Singular solutions of the KdV equation and the inverse scattering method. Arkadyev V.A., Pogrebkov A.K., Polivanov M.K. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics.VI. (Zapiski nauchn. semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.17-37.

The paper is devoted to the construction of singular solutions for the KdV equation. The presentation is based on a variant of the inverse scattering method for singular solutions of nonlinear equations, developed in the previous papers of the authors. Bibl- 21.

Several remarks on elliptic coordinates. Arnold V.I. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics.VI. (Zapiski nauchn.semin. LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.38-50.

A coordinate-free description of multidimensional Jacobi elliptic coordinates theory is given, which allows to solve the geodesic equation on an ellipsoid and some other equations. Generalizations of theorems of Newton and Ivory concerning the gravitational field of an ellipsoidal mass are discussed. Bibl. - 10.

Construction of "Hauptfunktion", solution of the equations of Schwarz and Fuchs for a surface of zero genus by the methods of spectral theory of automorphic functions. Venkov A.B. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn. semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.51-62.

Fuchsian and Schwarzian equations with n singularities on a surface of zero genus are studied. The methods of spectral theory of automorphic functions are used to construct explicity the Klein invariant for an arbitrary Fuchsian group of genus 0 with fundamental domain of finite area. This result is used to derive explicit formula expressing singularities and accessory parameters for Fuchsian and Schwarzian equations in terms of the corresponding Fuchsian group. Bibl. - 11.

Quasiclassical approximation for the models of spin-spin interaction on the one-dimensional lattice. Vorobyev Yu.M., Dobrochotov S.Yu., Maslov V.P. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp. 63-76.

The one-dimensional anisotropic Heisenberg model in the exterior field is considered. For the corresponding energy operator with parameter h the quasiclassical ($h \to 0$) spectral expansion is constructed. In the integrable case (in the absence of the exteriour field) the results obtained coincide with the exact ones. Bibl. - 22.

Multidimensional integrable nonlinear systems and methods for constructing their solutions. Zakharov V.E., Menakov S.V. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.77-91.

A new method for constructing multidimensional nonlinear integrable systems and their solutions by means of the nonlocal Riemann problem in presented. The method generalizes the local Riemann problem approach to the case of several space variables and incorporates the well-known Zakharov - Shabat dressing method. Bibl. - 15.

Correlation functions in the quantum inverse scattering method. Izergin A.G., Korepin V.E. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp. 92-112.

The inverse scattering method approach is developed for calculation of correlation functions in completely integrable quantum models. Bibl. - 9.

Liouville's theorem and the inverse scattering method. Its A.R. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.113-125.

On the base of Liouville's theorem, an approach to the integration of the Zakharov - Shabat equations is developed. It arises as a synthesis of ideas of the "finite-gape" integration, the matrix Riemann problem method and the theory of isomonodromic deformations. With the help of this scheme the "dressing procedure" for the Bullough - Dodd equation is obtained. Bibl. - 15.

Spherically symmetric solutions of the euclidean Yang - Mills equations. Kapitanskiy L.V., Ladyzhenskaya O.A. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin. LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.126-132.

We consider the euclidean Yang - Mills equations with the structural group $SU(2)$. The functionals of the Yang - Mills action and of topological charge are invariant under the transformations: $A_\mu(x)\,dx_\mu \longrightarrow A_\mu(qx)\,d(qx)_\mu$ where q runs over the set of quaternions with $|q| = 1$, and qx stands for the multiplication of quaternions q and $x = x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3$. The $SU(2)$-symmetry allows us to use the Coleman's principle. Then, for gauge potentials A_μ we obtain the following spherically symmetric Anzatz:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{|x|}\, f_\alpha(\ln|x|^2)\,\frac{1}{|x|}\left(\delta_{4\alpha}x_\mu - \delta_{4\mu}x_\alpha + \delta_{\alpha\mu}x_4 + \varepsilon_{\alpha\mu\gamma4}x_\gamma\right). \quad (1)$$

The Yang - Mills equations and the duality equations reduce to systems of ODE on the functions $f_\alpha^a(\mathcal{T})$. We prove that for the Y-M equations every solution of the form (1) with finite action and positive (negative) charge is necessarilly a solution of the duality equations $F = *F$ (accordingly, $F = -*F$), and has a unit topological charge. Besides, we describe explicitly all the solutions of the form (1) for the duality equations; the 1-instanton solution of Belavin et al. is among them. Bibl. - 3.

Correlation functions of the one-dimensional Bose gas in the repulsive case. Korepin V.E. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.133-145.

It shown that the one-dimensional Bose gas is equivalent to the quantum non-linear Schrödinger equation. The ground state of the system is the Dirac sea with finite density. Correlation functions in this model are calculated by means of quantum inverse scattering method. Bibl. - 15.

Integrable fermion chiral models, connected with the classical Lie algebras. Kulish P.P., Reshetikhin N.Yu. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.146-159.

The quantum field theoretical model with four fermion interaction and with chiral and $O(2K+1)$ invariance is investigated. The thermodynamic equations and the ground state equations for this model are obtained. The S-matrix of the fundamental fermions is calculated. Bibl. - 17.

Geometry of supergravity and super-Schubert cells. Manin Yu.I. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.160-176.

An extension of Penrose model for superspaces with N-extended supersymmetry is described. Geometry of super-Schubert cells of complex super-flag manifolds is used as a source of invariant constraints, Lagrangian and dynamical equations for supergravity models. Bibl. - 7.

Algebro-topological approach to reality problems. Real action variables in the theory of finite-gap solutions of the Sine-Gordon equations. Novikov S.P. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.177-196.

The paper developes an algebro-topological approach to the problem of effective selection of real finite gap solutions of the sine-Gordon equation, based on the so-called γ-representation associated with a Riemann surface where action variables can be written in a closed form. The approach is a general one and applies to many other systems for which the reality problem has not yet been solved. Bibl. - 23.

On spectral properties of one-dimensional disperse crystals. Pavlov B.S., Smirnov N.V. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.197-211.

The connection between spectral characteristics of one-dimensional Schrödinger operator $\ell_a(y) = -y'' + q_a(x)y$ with a periodic potential $q_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q(x-na)$ as $a \to \infty$ and spectral characteristics of the Schrödinger operator $\ell(y) = -y'' + q(x)y$ with decreasing potential $q(x)$ is studed. Bibl. - 7.

Hamiltonian structure of the Kadomzev - Petviashvily type equations. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin. LOMI, v,133). L., "Nauka", 1984, pp.212-227.

Following a general group theoretic pattern a description is given of the Hamiltonian structure and integrals of motion for a class of nonlinear equations with two spacial variables. Connections with the nonlocal Riemann problem are discussed. Other items include Hamiltonian formalism for stationary equations and multitime formalism. Bibl. - 12.

Classical r-matrices and quantization. Semenov-Tian-Shansky M.A. - In: Differential geometry, Lie Groups and mechanics.VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.228-235.

A description of quantum integrals of motion for systems with linear Poisson brackets given by a classical r -matrix is presented. Bibl. - 10.

The Goryachov - Chaplygin top and the inverse scattering method. Sklyanin E.K. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics.VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.236-257.

It is shown that the Goryachov - Chaplygin top can be treated within the framework of the inverse scattering method. A new method based on the R-matrix formalism is proposed to derive the equations determining the spectrum of the quantum integrals of motion. The method is of rather general nature and could present an alternative to the so called algebraic Bethe ansatz method. Bibl. - 11.

Solutions of the triangle equations with $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ -symmetry as the matrix analogues of the Weierstrass zeta and sigma functions. Takhtajan L.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.258-276.

The matrix analoguesof the Weierstrass zeta and sigma functions are introduced and studied. It is proved in the case of $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ symmetry that the classical r-matrix coincides with the matrix zeta function and that the quantum R-matrix can be represented as the ratio of matrix sigma functions. The obtained formulae are interpreted as the result of averaging over the lattice in $\mathbb{C}$. Bibl. - 16.

Remarks on the spectral theory for the Schrödinger operator of multiparticle type. Yafaev D.R. In: Differential geometry, Lie groups and mechanics, VI. (Zapiski nauchn.semin.LOMI, v.133). L., "Nauka", 1984, pp.277-298.

The Mourre's method is used to prove the limiting absorption principle for the multiparticle Schrödinger operator under the same assumptions on pair potentials as in a two-particle problem. It is shown that at high energies this principle is valid in broader conditions than on the whole spectral axis. By analogy with the three-particle problem the scattering theory is constructed for the Schrödinger operator with potential which vanishes essentially anisotropically at infinity. Bibl. - 11.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ,
ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. УI.

Записки научных семинаров Ленинградского отделения
ордена Ленина Математического института им. В.А.Стеклова.
Том I33

Утверждено к печати
Ленинградским отделением ордена Ленина
Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР

ИБ № 20946

Подписано к печати I8.0I.84. М-I0644. Формат 60x90 I/I6.
Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Усл.печ.л. I9.5.
Усл.кр.=отт. I9.63. Уч.=изд.л.I7.28. Тираж II50. Тип.зак.
№ II63 Цена 2 р.60 к.

Издательство "Наука", Ленинградское отделение
I99I64, Ленинград, В=I64, Менделеевская лин., I

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства "Наука"
I99034, Ленинград, В=34, 9 линия, I2