АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 164

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. IX

Сборник работ под редакцией
Л. Д. ФАДДЕЕВА

ЛЕНИНГРАД
„НАУКА"
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1987

Большой цикл работ в сборнике посвящен алгебраическим и комбинаторным аспектам квантового метода обратной задачи. Вычислены формфакторы для $SU(2)$ -модели Тирринга и модели sh-Gordon Изучены связи обертывающих алгебр классических алгебр Ли и янгианов. Получены новые тождества для дилогарифмической функции Роджерса. Описано разделение переменных в квантовой модели Годена и для гиростата Горячева-Чаплыгина. Две работы посвящены гидродинамике. Метод ренормгруппы применен в теории развитой турбулентности. Для жидкостей Олдройта построены аттрактор и связанная с ним динамическая система. Теория показателей Ляпунова обобщена на случай некомпактных полупростых групп Ли; доказана мультипликативная эргодическая теорема и глобальный закон больших чисел. Исследованы существование и полнота волновых операторов для уравнения Шредингера с ускоряющим потенциалом. Охарактеризованы данные рассеяния для нестационарного уравнения Дирака. Построены семейства согласованных скобок Пуассона для лаксовых уравнений со спектральным параметром. Изучена гиббсова мера на пространстве диаграмм Юнга. Построены реализации представлений полугруппы Брауэра.

Д $\frac{1702050000-734}{042\ (02)-87}$ 131-87-Ш

Н.В.Антонов

СКЕЙЛИНГОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРА СКОРОСТИ В ТЕОРИИ ИЗОТРОПНОЙ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

I. Введение

В стохастической формулировке теории изотропной развитой турбулентности несжимаемой жидкости (газа) [I] рассматривается уравнение Навье-Стокса со случайной силой для поперечного поля скорости $\varphi_i(\vec{x},t)$:

$$\nabla_t \varphi_i = \nu_0 \Delta \varphi_i - \partial_i p + F_i, \qquad (I.I)$$

где $\nabla_t = \partial_t + \varphi\partial$ - ковариантная производная, ν_0 - затравочный коэффициент вязкости, p и F - давление и поперечная внешняя случайная сила (в расчете на единицу массы). Для F предполагается гауссово распределение с коррелятором (для трехмерного пространства)

$$D_{ij}(\vec{k},\omega) = g_0 \nu_0^3 P_{ij}(\vec{k}) D(k), \quad D(k) = k^{1-2\varepsilon} \qquad (I.2)$$

Здесь и ниже $k = |\vec{k}|$, $P_{ij}(\vec{k})$ - поперечный проектор, g_0 играет роль затравочной константы связи, ε - произвольный параметр. Физическим значением ε , соответствующим накачке вида $\delta(\vec{k})$, считается $\varepsilon = 2$.

В работах [2 , 3] для обоснования колмогоровского скейлинга в задаче (I.I), (I.2) был использован аппарат квантовой теории поля, в частности, метод ренормализационной группы (РГ). При этом колмогоровские размерности вычислялись в виде ε - разложений, подобно критическим индексам в теории фазовых переходов второго рода [4] .

В настоящей работе мы продолжим исследование [2,3] и рассмотрим скейлинговую функцию для парного коррелятора поля скорости. В разделе 2 мы напомним полевую формулировку задачи, формулировку и вывод РГ уравнения типа Гел-Манна-Лоу для коррелятора, а в разделе 3 дадим его общее решение. Основной результат работы - расчет скейлинговой функции во втором порядке ε - разложения - содержится в разделе 4.

2. Квантово-полевая формулировка модели и уравнение РГ.

Стохастическая задача (I.I), (I.2) эквивалентна квантовой теории двух поперечных векторных полей φ, φ' с функционалом действия [2] (см.также [3]):

$$S(\varphi,\varphi') = g_0\nu_0^3\,\varphi' D\varphi'/2 + \varphi'[-\nabla_t\varphi + \nu_0\Delta\varphi] \qquad (2.1)$$

(подразумевается суммирование по векторным значкам и интегрирование по $\vec{x}, t$). Модель (2.I) логарифмична (суммарная безразмерность g_0 , см. [3]) при $\varepsilon = 0$, и ультрафиолетовые (УФ) расходимости проявляются в виде полюсов по ε . Для их устранения достаточно одного контрчлена вида $\varphi'\Delta\varphi$, то есть одной ренормировочной константы $Z(g,\varepsilon)$, так что ренормированное действие

$$S_{\text{рен}}(\varphi,\varphi') = gM^{2\varepsilon}\nu^3\varphi' D\varphi'/2 + \varphi'[-\nabla_t\varphi + \nu Z\Delta\varphi] \qquad (2.2)$$

получается из (2.I) переопределением параметров (M - ренормировочная масса):

$$\nu_0 = \nu Z, \quad g_0 = gM^{2\varepsilon}Z^{-3}. \qquad (2.3)$$

Пусть $G_{ij}(\bar{k},\omega) = P_{ij}(\bar{k})\,G(k,\omega)$ - парный коррелятор поля скорости φ_i , $G_{\text{рен}}$ - ренормированный коррелятор, конечный при $\varepsilon \to 0$ в каждом порядке по g . Т.к. ренормировки полей здесь не требуется и $S = S_{\text{рен}}$, имеем:

$$G(k,\omega,g_0,\nu_0) = G_{\text{рен}}(k,\omega,g,\nu,M). \qquad (2.4)$$

Уравнение РГ получим, применив к обеим частям (2.4) операцию $\widetilde{\mathcal{D}}_M$ и используя очевидную независимость левой части от M (здесь и далее $\mathcal{D}_x = x\partial/\partial x$ для любой переменной x , $\widetilde{\mathcal{D}}_M$ означает операцию $\mathcal{D}_M$ при фиксированных затравочных переменных g_0, ν_0):

$$[\mathcal{D}_M + \beta(g)\partial g - \gamma_\nu(g)\,\mathcal{D}_\nu]\,G_{\text{рен}} = 0, \qquad (2.5)$$

где

$$\gamma_\nu(g) = \widetilde{\mathcal{D}}_M \ln Z, \quad \beta(g) = \widetilde{\mathcal{D}}_M g. \qquad (2.6)$$

Вследствие связи (2.5) ренормировочных констант g и ν имеем:

$$\beta(g) = g[-2\varepsilon + 3\gamma_\nu(g)]. \qquad (2.7)$$

В теории имеется инфракрасно-устойчивая неподвижная точка $\beta(g^*) = 0$. Из (2.7) следует, что значение $\gamma_\nu(g)$ в этой точке $\gamma_\nu(g_*) = \frac{2\varepsilon}{3}$ не имеет поправок порядка ε^2 и далее.

3. Общее решение уравнения РГ для коррелятора.

Из соображений размерности коррелятор имеет вид:

$$G_{\text{рен}}(k,\omega,g,\nu,M) = \nu k^{-3}\Phi(s,g,z) \tag{3.1}$$

где Φ зависит только от безразмерных переменных $s=\frac{M}{k}$, g и $z=\frac{\omega}{\nu k^2}$. Подставив (3.1) в РГ уравнение (2.5) и сделав подстановку $\Phi=\exp W$, получим:

$$[\mathcal{D}_s+\beta(g)\partial_g+\gamma_\nu(g)\mathcal{D}_z]W=\gamma_\nu(g). \tag{3.2}$$

Инвариантные переменные $\bar g(s,g)$ и $\bar z(s,g,z)$ суть первые интегралы однородного уравнения (3.2) с нормировкой $\bar g(1,g)=g$, $\bar z(1,g,z)=z$. Инвариантный заряд $\bar g$ неявно задается формулой

$$\ln s = -\int_g^{\bar g}\frac{dg'}{\beta(g')} \tag{3.3}$$

а для $\bar z$ имеем:

$$\bar z = z\exp\int_g^{\bar g}\frac{\gamma_\nu(g')}{\beta(g')}dg'. \tag{3.4}$$

Интеграл в показателе экспоненты вычисляется с помощью (2.7) и (3.3) и дает:

$$\bar z = z s^{-\frac{2\varepsilon}{3}}\left(\frac{\bar g}{g}\right)^{1/3}=\omega k^{-2+\frac{2\varepsilon}{3}}E^{-\frac{1}{3}},\quad E=\frac{gM^{2\varepsilon}\nu^3}{\bar g}. \tag{3.5}$$

С помощью инвариантных переменных решение (3.2) записывается в виде

$$W(s,g,z)=W(1,\bar g,\bar z)-\int_g^{\bar g}\frac{\gamma_\nu(g')}{\beta(g')}dg'. \tag{3.6}$$

Интеграл в правой части уже возникал в (3.4), так что для коррелятора окончательно получаем:

$$G_{\text{рен}} = E^{1/3}k^{-3-\frac{2\varepsilon}{3}}\Phi(1,\bar g,\bar z). \tag{3.7}$$

Функция $\Phi(s,g,z)$ вычисляется в виде ряда по g в ренормированной теории возмущений.

4. Скейлинговая функция в порядке ε^2.

Нас интересует инфракрасная асимптотика коррелятора (3.7). При $k \to 0$ имеем $\bar{g} \to g_*$, $E \to E_* = g\nu^3 M^{2\varepsilon}/g^*$ и коррелятор принимает скейлинговую форму (с колмогоровскими размерностями при $\varepsilon = 2$)

$$G_{рен} \to E_*^{1/3} k^{-3-\frac{2\varepsilon}{3}} f\left(\omega k^{-2+\frac{2\varepsilon}{3}} E_*^{-1/3}\right), \qquad (4.1)$$

где инвариантная скейлинговая функция

$$f(u) = \Phi(1, g^*, u) \qquad (4.2)$$

вычисляется в виде ряда по ε (начиная с порядка ε). Поскольку $g_* \sim \varepsilon$, для расчета $f(u)$ в порядке ε^2 нужно вычислить $\Phi(1, g, u)$ с точностью g^2, что в фейнмановской диаграммной технике для действия (2.1) (известной в теории турбулентности как диаграммная техника Уайльда [1, 5]) соответствует учету следующих диаграмм:

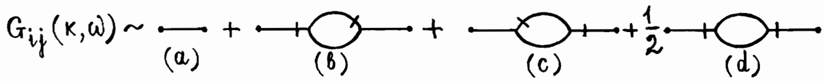


Рис.1

Линия без перечеркивания обозначает свободный пропагатор $\langle \varphi\varphi \rangle$, перечеркнутая линия $-\langle \varphi\varphi' \rangle$(перечеркнут конец φ'). По векторным значкам они пропорциональны поперечному проектору со скалярными коэффициентами $\Delta_{\varphi\varphi'} = \Delta^*_{\varphi'\varphi} = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1}$, $\Delta_{\varphi\varphi} = g_0 \nu_0^3$ $\Delta_{\varphi\varphi'} D \Delta_{\varphi'\varphi}$, так что диаграммы (в) и (с) комплексно сопряжены. $G_{рен}$ получается переразложением по g, при этом вклад g^2 от графа (а) сокращает полюс по ε в сумме (в) и (с); граф (d) при $\varepsilon \to 0$ конечен.

Вклады диаграмм (в - d) вычисляются следующим образом. Т.к. все они $\sim P_{ij}$, можно без потери информации свернуть векторные значки, перейдя к скалярным величинам. Интегралы по внутренней частоте берутся по вычетам, интегралы по внутреннему импульсу записываются в сферических координатах (если внешний импульс выбран за направление оси x_3, подынтегральные выражения не зависят от азимутального угла). Знаменатель представляется однократным интегралом с помощью формулы Фейнмана, после чего исходные интегралы берутся явно (при этом следует пренебречь вкладами $\sim \varepsilon$ и старше). Оставшиеся интегралы по фейнмановскому параметру, вообще говоря, не вычисляются аналитически (что типично для скейлинговых функций). В полученное выражение для $\Phi(1, g, u)$ подставляем $g_* = g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon^2 + \ldots$ (значение $g_1 = 40\pi^2/3$ извлекается из [3], расчет g_2 требует вычисления двухпетлевых диаграмм и представляет собой отдельную задачу) и для инвариантной скейлинговой функции в порядке ε^2 получаем:

$$f(u) = \frac{40\pi^2 \varepsilon}{3(1+u^2)} \left[1 + \varepsilon A(u) \right], \tag{4.3}$$

где

$$A(u) = \frac{3}{40\pi^2} g_2 - \frac{10}{3} \frac{T(u)}{1+u^2} - \frac{5}{6} R(u). \tag{4.4}$$

Первое слагаемое есть вклад (a), второе - (в)+(c) и третье - (d). Перейдем теперь к описанию функций $T(u)$ и $R(u)$. Пусть:

$$a_1 = \frac{1}{3} u^2 - \frac{14}{15}, \quad a_2 = \frac{4}{5} u^3 + \frac{31}{15} u,$$

$$A_1 = u^2 \left[\frac{3}{5} s^2 + \frac{3}{10} s - \frac{7}{15} + \frac{17}{15} (s+1)^{-1} - \frac{2}{3} (s+1)^{-2} \right] +$$
$$+ \left[\frac{2}{5} - \frac{7}{15} (s+1)^{-1} - \frac{19}{15} (s+1)^{-2} + \frac{4}{3} (s+1)^{-3} \right],$$

$$A_2 = -\frac{3}{5} u^3 s^2 + u \left[\frac{3}{10} s - \frac{13}{15} + \frac{8}{5} (s+1)^{-1} + \frac{3}{5} (s+1)^{-2} - \frac{4}{3} (s+1)^{-3} \right],$$

$$A_3 = -s^2 (s+1) u^4 + u^2 \left[-\frac{3}{2} s^2 + s - 1 + (s+1)^{-1} \right],$$

$$A_4 = u^3 \left[-s^3 + \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (s+1)^{-1} \right] +$$
$$+ \frac{u}{2} \left[s - 1 + (s+1)^{-1} \right]. \tag{4.5}$$

Введем также обозначения $(s \in [0,1])$:

$$\alpha = \sqrt{1 + u^2 s^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 + u^2 (s+1)^2}. \tag{4.6}$$

С их помощью введем следующие "спецфункции":

$$B_1 = \sqrt{\frac{1+\gamma}{2}}\,, \quad B_2 = \operatorname{sgn}(u)\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\,,$$

$$D_1 = \frac{1}{2}\arccos\frac{s\gamma-1}{\alpha(1+s)}\,, \quad D_2 = -\frac{\operatorname{sgn}(u)}{2}\operatorname{Arch}\frac{1+\gamma s}{\alpha(1+s)}\,,$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha(s+1)-2\sqrt{s+1}\,E_1}{1+\alpha(s+1)+2\sqrt{s+1}\,E_1}\,, \quad H_2 = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{s+1}\,E_2}{\alpha(1+s)-1}\,;$$

(4.7

где $E_{1,2}$ получаются из $B_{1,2}$ заменой $\gamma \longrightarrow \alpha$; значения $B_{1,2}$ и $D_{1,2}$ при $s=1$ обозначим $b_{1,2}$ и $d_{1,2}$. Тогда $T(u)$ дается выражением:

$$T(u) = \left[-\frac{91}{30}+\frac{9}{5}\ln 2\right]u^2 + \left[-\frac{167}{100}+\frac{43}{15}\ln 2\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{4(1+u^2)}\right]\ln\frac{1+u^2}{4} + \left[\frac{3}{5}-\frac{1}{2(1+u^2)}\right]u\operatorname{arctg}u +$$

$$+(a_1b_1d_1 - a_2b_2d_1 - a_2b_1d_2 - a_1b_2d_2) +$$

$$+2\int_0^1 ds\sqrt{s}\,(A_1B_1D_1 - A_2B_2D_1 - A_1B_2D_2 - A_2B_1D_2) -$$

$$-2\int_0^1 ds\sqrt{s}\,\gamma^{-1}(A_3B_1D_1 + A_4B_2D_1 + A_3B_2D_2 - A_4B_1D_2).$$

(4.8

Функция $R(u)$ представляется в виде:

$$R(u) = -\frac{1}{2}\int_0^1 ds\,\frac{H_1}{\sqrt{1-s^2}} + \int_0^1 ds\sqrt{1-s}\sum_{m=1}^{6} I_m\,, \qquad (4.$$

где

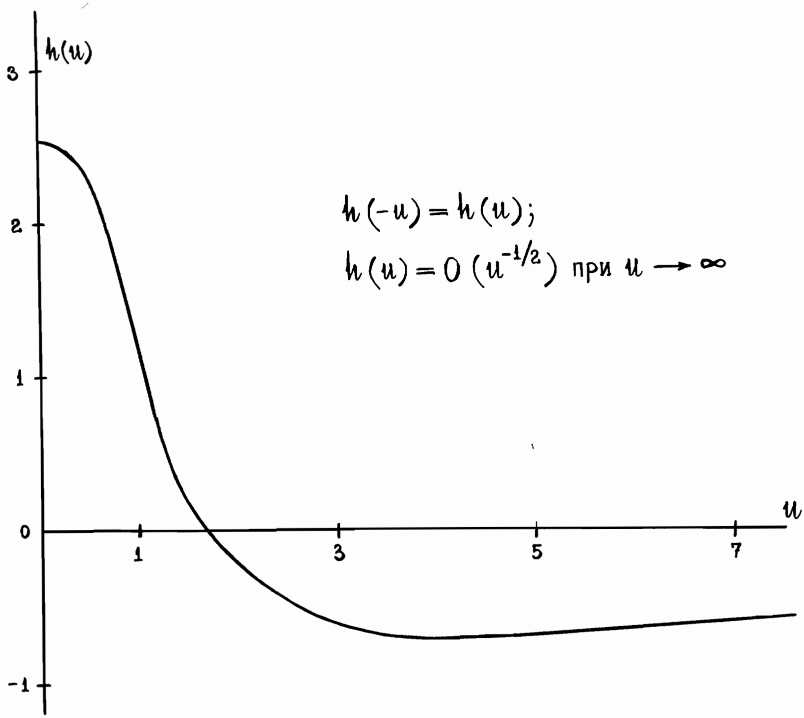
$$I_1 = -\frac{2E_1}{\alpha}\,, \quad I_2 = \frac{3s+2}{s+1}E_1\,, \quad I_3 = 6usE_2\,,$$

$$I_4 = \left(3u^2s^2+\frac{1}{2}\right)H_1\sqrt{1+s}\,, \quad I_5 = \frac{us}{2}\,\frac{3s+2}{\sqrt{1+s}}H_2\,,$$

$$I_6 = \frac{E_1\left[1+u^2(s+1)(2s+1)\right]-usE_2}{\alpha\gamma^2(s+1)}\,.$$

(4.10)

Полученное выражение не слишком наглядно, так что мы приводим и график функции $h(u) = -\frac{10}{3}\frac{T(u)}{1+u^2} - \frac{5}{6}R(u)$:



Автор благодарит Л.Ц.Аджемяна, А.Н.Васильева и М.Гнатича за полезные обсуждения.

Литература

I. М о н и н А.С., Я г л о м А.М. Статистическая гидромеханика, т.2, М.,:Наука, I967, 720 с.

2. D e D o m i n i c i s C., M a r t i n P.C. - Energy spectra of certain randomly-stirred fluids. Phys.Rev.A., 1979, v.19, N 1, p.419-422.

3. А д ж е м я н Л.Ц., В а с и л ь е в А.Н., П и с ь м а к Ю.М - Ренормгрупповой подход в теории турбулентности: размерности составных операторов. ТМФ, I983, т.57, № 2, с.268-28I.

4. М а Ш. Современная теория критических явлений, М.: Мир, I980, 298 с.

5. W y l d H.W., Jr. - Formulation of the theory of the turbulence in an incompressible fluid. Ann.Phys., 1961, v.14, N 1, p.143-165.

М.В.Буслаева

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА СО СЛАБО УСКОРЯЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

I.Введение

Под оператором Шредингера с ускоряющим потенциалом мы понимаем дифференциальный оператор вида

$$f \longmapsto -f'' + v(x) f, \qquad x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \quad f(0) = 0, \tag{I}$$

причем относительно вещественного потенциала v предполагается, что $v(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. В отличие от оператора Шредингера с убывающим потенциалом никакого естественного невозмущенного оператора, с которым можно было бы сравнивать указанный оператор, в общем случае не существует. Несмотря на это, к рассматриваемому оператору можно применить соображения теории рассеяния и получить для него простую спектральную модель. Точнее, можно установить унитарную эквивалентность оператора Шредингера с ускоряющим потенциалом и оператора инфинитезимального сдвига $\hat{p} = -i \frac{d}{d\xi}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ функций $f(\xi)$.

Более точные предположения относительно потенциала v имеют вид: v предполагается дважды непрерывно дифференцируемой функцией на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющей при достаточно больших x условиям

$$-v_- x^{2\alpha} \leqslant v(x) \leqslant -v_+ x^{2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad v_+ > 0, \tag{2'}$$

$$|v'(x)| \leqslant v_1 x^{1/2(5\alpha_1 - 1)}, \quad |v''(x)| \leqslant v_2 x^{-1+3\alpha_1}, \quad \alpha_1 < \alpha. \tag{2''}$$

При этих условиях дифференциальное выражение (I) порождает в $L_2(\mathbb{R}_+)$ самосопряженный оператор, который будет обозначаться через H.

Связь оператора H с самосопряженным оператором $\hat{p}$ устанавливается путем исследования асимптотического поведения функции $f(t) = exp(-iHt) f$ при $t \to \infty$. При этом случаи $\alpha > 1/3$ и $\alpha \leqslant 1/3$ оказываются существенно различными. Если $\alpha > 1/3$, асимптотическое поведение $f(t)$ изображается волновым пакетом, который с постоянной скоростью сдвигается в бесконечность, сохраняя свою форму. Напротив, при $\alpha \leqslant 1/3$ асимптотическое поведение $f(t)$ изображается волновым пакетом, который равномерно убегая в бесконечность, одновременно расплывается. Случай $\alpha > 1/3$ был ранее рассмотрен в [I,2], некоторые частные результаты по поводу случая $\alpha \leqslant 1/3$ приведены в [3].

2. Функции $G(E,\xi)$ и $V(t,\lambda)$.

Пусть $\tilde{v}$ – дважды непрерывно дифференцируемая отрицательная функция на $\mathbb{R}_+$, совпадающая при достаточно больших x с потенциалом v. Рассмотрим диффеоморфизм $c: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, определив его формулой

$$c(x) = 1/2 \int_0^x (-\tilde{v}(x))^{-1/2} dx .$$

Введем функцию

$$F(E,x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1/2} E^k \int_0^x (-\tilde{v}(x))^{1/2-k} dx ,$$

$$n = \left[\frac{\alpha+1}{2\alpha}\right], \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad E \in \mathbb{R} .$$

Функция F совпадает с суммой нескольких первых членов ряда Тейлора по E для интеграла

$$\int_0^x (\sqrt{E-\tilde{v}(x)} - \sqrt{-\tilde{v}(x)})\, dx .$$

Коэффициенты опущенных членов ряда имеют конечные пределы при $x \longrightarrow \infty$.

Пусть $G(E,\xi) = F(E,x), \quad \xi = c(x)$:

$$G(E,\xi) = 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1/2} E^k \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(-\tilde{v})^{k-1}} .$$

Старшие при $\xi \longrightarrow \infty$ члены имеют вид

$$G(E,\xi) = E\xi - \frac{1}{2} E^2 \mathcal{D}(\xi) + O(\xi^{1-2\beta}), \quad \beta = \frac{2\alpha}{1-\alpha} ,$$

$$\mathcal{D}(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} (-\tilde{v})^{-1} d\xi ,$$

$$G_E = \xi - E\mathcal{D}(\xi) + O(\xi^{1-2\beta}),$$

$$G_\xi = E - \frac{1}{4} E^2 (-v)^{-1} + O(\xi^{-2\beta}), \quad v = v(c^{-1}(\xi)) ,$$

$$G_{EE} \sim -\mathcal{D}(\xi) \longrightarrow -\infty .$$

Рассмотрим функцию $V(t,\lambda)$, двойственную по Юнгу к функции $G(E,\xi)$:

$$V(t,\lambda) = Et + \xi\lambda - G(E,\xi), \tag{3}$$

$$t = G_E(E,\xi), \qquad \lambda = G_\xi(E,\xi) . \tag{4}$$

Справедлива

ЛЕММА I. Если выполнены условия ($2'$) и

$$|v'(x)| \leqslant v_3(1+x)^{6\alpha_1-1}, \quad \alpha_1 < \alpha, \tag{$2'''$}$$

то соотношения (4) определяют при достаточно большом R обратимое отображение $(E,\xi) \to (t,\lambda)$ множества $[\alpha,\beta]\times[R,\infty)$, $-\infty<\alpha<\beta<\infty$, $R>0$, на множество $[\alpha_1,\beta_1]\times[R_1,\infty)$, $-\infty<\alpha_1<\beta_1<\infty$, $R_1>0$. Это отображение и обратное отображение дважды непрерывно дифференцируемы. При достаточно большом R_1 на множестве $[\alpha_1,\beta_1]\times[R_1,\infty)$ формула (3) определяет функцию $V(t,\lambda)$, причем

$$E = V_t(t,\lambda), \qquad \xi = V_\lambda(t,\lambda) . \tag{5}$$

Когда $t\to\infty$:

$$V(t,\lambda) = t\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\mathscr{D}(t) + o(t^{1-2\beta}),$$

$$V_\lambda = t + \lambda\mathscr{D}(t) + o(t^{1-2\beta}),$$

$$V_t = \lambda + \frac{\lambda^2}{4}\frac{1}{(-v)} + o(t^{-2\beta}), \quad v = v(c^{-1}(t)),$$

$$V_{\lambda\lambda} \sim \mathscr{D}(t) \longrightarrow \infty .$$

Доказательство леммы не составляет труда. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} G_{EE} & G_{E\xi} \\ G_{\xi E} & G_{\xi\xi} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\mathscr{D}(\xi) & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}E^2(-v)^{-2}v'\frac{dx}{d\xi} \end{pmatrix}.$$

В силу условия ($2'''$) определитель матрицы стремится к -1 при $\xi\longrightarrow\infty$:

$$\left|v^{-2}v'\frac{dx}{d\xi}\mathscr{D}(\xi)\right| \leqslant Cv^{-2}|v'|\,|v^{1/2}|\,\mathscr{D}(\xi) \leqslant Cx^{-3\alpha}x^{6\alpha_1-1}x^{1-3\alpha} \longrightarrow 0 .$$

Докажем обратимость отображения, задаваемого формулой (4). Так как $G_{E\xi} \sim 1$, то соотношение $t = G_E(E,\xi)$ можно решить относительно ξ : $\xi = \Phi(t,E)$. Подставим результат в соотношение $\lambda = G_\xi(E,\xi)$: $\lambda = G_\xi(E,\Phi(t,E))$. Частная производная правой стороны по E также близка к 1 :

$$G_{\xi E} + G_{\xi\xi}(-G_{EE})(G_{E\xi})^{-1} = G_{E\xi}^{-1}\left[-G_{\xi\xi}G_{EE} + G_{\xi E}^2\right] \sim 1 .$$

Поэтому полученное соотношение можно решить относительно E. Итак, формулы (4) задают обратимое отображение. Справедливость формул (5) вытекает из общих свойств преобразования Лежандра. В силу (4) и (5) асимптотические формулы для производных функции V следуют из асимптотических формул для производных функции G. Из них непосредственно вытекает и асимптотическая формула для V. Производную $V_{\lambda\lambda}$ можно вычислить с помощью соотношения

$$\begin{pmatrix} V_{tt} & V_{t\lambda} \\ V_{\lambda t} & V_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{EE} & G_{E\xi} \\ G_{\xi E} & G_{\xi\xi} \end{pmatrix}^{-1} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E^2(-\sigma)^{-2}v'\frac{dx}{d\xi} & -1 \\ -1 & -\mathcal{D}(\xi) \end{pmatrix} .$$

3. Основная теорема

Введем следующие обозначения. Обозначим через $E_\pm$ функции

$$E_\pm(x) = exp\left(\pm i\int_0^x \sqrt{-\tilde{v}(x)}\,dx\right)$$

и операторы умножения на эти функции. Через $T_\pm$ обозначим унитарные операторы в $L_2(\mathbb{R}_+)$, действующие по формуле

$$(T_\pm f)(x) = E_\pm(x)\,c'^{1/2}(x)\,f(\xi), \quad \xi = c(x) .$$

Наконец, пусть θ_+ - оператор, ограничивающий функцию $\mathbb{R} \to C$ на $\mathbb{R}_+$; $(Pf)(x) = f(-x)$, $P_+ = I$, $P_- = P$.

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА I. При выполнении условия ($2'$, $2''$, $2'''$), где $\alpha \leq 1/3$, существуют волновые операторы

$$W_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{s-\lim}\, e^{iHt}\, T_\pm\ \theta_+ P_\pm\, e^{\mp iV(|t|,\hat p)} . \qquad (6)$$

Операторы $W_\pm : L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ унитарны и осуществляют подобие $\hat p$ и H : $HW_\pm = W_\pm \hat p$.

В работе [2] в условиях ($2'$, $2''$), $0<\alpha<1$, было показано, что при $t\longrightarrow +\infty$

$$e^{-iHt} f \sim \frac{1}{2i\sqrt{\pi}\sqrt[4]{-v}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt+i\int_0^x \sqrt{E-\tilde v}\,dx}\, \tilde f(E)\, dE , \qquad (7)$$

при $t\to -\infty$

$$e^{-iHt} f \sim \frac{-1}{2i\sqrt{\pi}\sqrt[4]{-v}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M(E)}{\overline{M(E)}}\, e^{-iEt-i\int_0^x \sqrt{E-\tilde v}\,dx}\, \tilde f(E)\, dE . \qquad (8)$$

Здесь $M(E) = f(0,E)$, а $f(x,E)$ – решение уравнения $-f'' + vf = Ef$, удовлетворяющее при $x\longrightarrow\infty$ асимптотическому условию

$$f(x,E) = \frac{\exp\left[i\int_0^x \sqrt{E-\tilde v(x)}\,dx\right]}{\sqrt[4]{-v(x)}} \left[1+0(1)\right] .$$

Функция $\tilde f$ дается формулой

$$\tilde f = \sigma f , \qquad (\sigma f)(E) = \int_0^\infty f(x)\overline{\psi(x,E)}\, dx ,$$

где

$$\psi(x,E) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi}} \left[f(x,E) - \frac{M(E)}{\overline{M(E)}}\, \overline{f(x,E)} \right] . \qquad (9)$$

Оператор $\sigma : L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ унитарен. В основе формул (7,8) лежит представление

$$(e^{-iHt} f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,E)\, e^{-iEt}\, \tilde f(E)\, dE ,$$

в котором от функции ψ , см. (9), при $t\to\pm\infty$ сохраняется, соответственно, первое и второе слагаемые; вклады остальных слагаемых стремятся к нулю.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы согласовать утверждение теоремы с формулами (7) и (8). Обратимся к случаю

$t \to +\infty$. Функцию $\tilde{f}$ можно считать гладкой финитной.

Выполним в формуле (7) два преобразования: заменим $\int_0^x \sqrt{E-\tilde{v}}\, dx$ на $\int_0^x \sqrt{-\tilde{v}}\, dx + F(E,x)$ и введем оператор T_+ :

$$e^{-iHt} f \sim -iT_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt+iG(E,\xi)} \tilde{f}(E)\, dE .$$

Интеграл, возникший при этом, при $t \to +\infty$ имеет ненулевую (в смысле L_2-нормы) асимптотику только при ξ , имеющих порядок t . В этом случае интеграл легко вычисляется с помощью метода стационарной фазы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt+iG(E,\xi)} \tilde{f}(E)\, dE \sim$$

$$\sim \tilde{f}(E_0)\, e^{-iE_0 t+iG(E_0,\xi)}\, e^{-i\pi/4} |\mathscr{D}(\xi)|^{-1/2}, \tag{10}$$

где $t = G_E(E_0, \xi)$. Разрешимость этого уравнения следует из соотношения $G_{EE} \approx -\mathscr{D}(\xi) \to -\infty$, при этом

$$E_0 = \frac{\xi - t}{\mathscr{D}(\xi)} + O(\xi^{-\beta}) .$$

Хотя большой параметр ξ входит в интеграл (10) не канонически, обоснование применимости метода стационарной фазы не представляет труда. Не останавливаясь на подробностях, укажем основные пункты, на которые опирается это обоснование. Следует убедиться, что можно выбрать $\Delta = \Delta(\xi)$ так, что при $\xi \to \infty$

1) $\Delta \to 0$, 2) $G_{EEE}(E,\xi)\Delta^3 \to 0$, $|E-E_0| \leqslant \Delta$,

3) $G_{EE}(E,\xi)\Delta^2 \to \infty$, $|E-E_0| = \Delta$, 4) $G_{EE}(E,\xi)\Delta \to \infty$, $|E-E_0| \geqslant \Delta$.

Условие 1) обеспечивает возможность замены $f(E) \to f(E_0)$. Условие 2) обеспечивает возможность ограничиться в Δ -окрестности точки E_0 аппроксимацией

$$-Et + G(E,\xi) \approx -E_0 t + G(E_0,\xi) + \frac{1}{2} G_{EE}(E_0,\xi)(E-E_0)^2 .$$

Условие 3) позволяет заменить модельный интеграл по Δ-окрестности точки E_0 интегралом по всей оси. Наконец, условие 4) позволяет пренебречь вкладом внешности этой окрестности, так как при $|E-E_0| \geqslant \Delta$

$$(-Et + G(E,\xi))_E = G_{EE}(\tilde{E},\xi)(E-E_0),$$

где $E_0 < \tilde{E} < E$. Заметим также, что условие 4) можно опустить: оно является следствием I) и 3).

Обсудим условия I)–3). Заметим, что в силу $\alpha \leq 1/3$ выполняется $\beta \leq 1$, причем $\alpha = 1/3$ соответствует $\beta = 1$. При $\beta < 1$ положим $\Delta = \xi^{-\gamma}$, тогда условия I)–3) примут вид

при $\beta < 1$:	при $\beta = 1$:
I) $\gamma > 0$,	$\Delta \to 0$
2) $\gamma > 1/3(1-2\beta)$	$\Delta \xi^{-1/3} \to 0$
3) $\gamma < 1/2(1-\beta)$	$\Delta\sqrt{\ln \xi} \to \infty$.

Ясно, что эти условия могут быть выполнены за счет подходящего выбора Δ .

Итак, формула (I0) доказана.

Установим теперь, что асимптотика интеграла (I0) совпадает с асимптотикой интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi - iV(t,\lambda)} \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda \sim$$

$$\sim \tilde{f}(\lambda_0)\, e^{i\lambda_0\xi - iV(t,\lambda_0)}\, e^{-i\pi/4} \, |V_{\lambda\lambda}|^{-1/2}, \tag{II}$$

где $\xi = V_\lambda(t,\lambda_0)$. Само обоснование формулы (II) проводится аналогично обоснованию формулы (I0).

Совпадение экспоненциальных множителей асимптотических формул (I0) и (II) обеспечивается связью между функциями G и V . Асимптотическая близость точек λ_0 и E_0 является следствием асимптотического поведения V_t , см. лемму I. Асимптотическая близость $|G_{EE}|$ и $|V_{\lambda\lambda}|$ также устанавливается в лемме I.

Таким образом, в старшем при $t \to \infty$ порядке

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi - iV(t,\lambda)} \tilde{f}(\lambda)\, d\lambda \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iEt + iG(E,\xi)} \tilde{f}(E)\, dE\,.$$

Остается заметить, что (II) допускает представление

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi - iV(t,\lambda)}\tilde{f}(\lambda)\,d\lambda = e^{iV(t,\hat{p})}\,\mathbb{F}^{-1}\tilde{f},$$

где $\mathbb{F}$ – преобразование Фурье

$$(\mathbb{F}f)(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iEx} f(x)\,dx .$$

Подставляя этот результат в формулу (7), получаем

$$e^{-iHt} f \sim -iT_+\theta_+ e^{-iV(t,\hat{p})}\,\mathbb{F}^{-1}\sigma f, \quad t \to +\infty . \tag{I2}$$

Аналогичные рассмотрения интеграла (8) показывают, что

$$e^{-iHt} f \sim iT_-\theta_+ P_- e^{-iV(|t|,\hat{p})}\,\frac{M(\hat{p})}{\overline{M}(\hat{p})}\,\mathbb{F}^{-1}\sigma f, \quad t \to -\infty . \tag{I3}$$

Мы изучали асимптотическое поведение интегралов (7) и (8), удерживая аргумент ξ фиксированным. Можно показать, что асимптотические формулы (I2) и (I3) верны в сильном смысле.

Таким образом, установлено существование волновых операторов $W_\pm$. Одновременно показано, что

$$W_+ = iU, \quad U = \sigma^{-1}\mathbb{F}, \quad W_- = -iU\,\frac{\overline{M}(\hat{p})}{M(\hat{p})} .$$

Этим завершается доказательство теоремы.

4. Относительный волновой спектр

Пусть v_1, v_2 – два потенциала, удовлетворяющих условиям теоремы I, им соответствуют операторы H_1 и H_2. Пусть потенциалы v_1 и v_2 асимптотически совпадают:

$$|v_1(x) - v_2(x)| \leq v_{12}(1+x)^{\gamma}, \tag{I4}$$

$\gamma < 2\alpha$, $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если $\gamma < \alpha - 1$, то существуют волновые операторы

$$V_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{s-\lim}\, e^{iH_2 t} e^{-iH_1 t} .$$

Они унитарны в $L_2(\mathbb{R}_+)$ и осуществляют подобие H_1, H_2: $H_2 V_\pm = V_\pm H_1$. Операторы $V_\pm$ связаны с $W_{1,\pm}$, $W_{2,\pm}$ соотношениями

$$V_\pm = W_{2,\pm}\, e^{\mp i a(\hat p)}\, W^{-1}_{1,\pm} \quad ,$$

где

$$a(p) = \sigma + p\tau - \left[V_2(\sigma,p) - V_1(\sigma,p) \right]_{\sigma=+\infty} \ ,$$

$$\sigma = \int_0^\infty \left(\sqrt{-\tilde v_2} - \sqrt{-\tilde v_1}\right) dx \ , \quad \tau = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde v_2}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde v_1}} \right) dx \ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждому из операторов H_1 , H_2 отвечает свой оператор T , соответственно, T_1 T_2 . Вычислим $T_2^{-1} T_1$:

$$(T_2^{-1} T_1 f)(\xi_2) = (c_2'(x))^{-1/2} E_2^{-1}(x) E_1(x) (c_1'(x))^{1/2} f(\xi_1) \ ,$$

$$\xi_1 = c_1(x) \ , \qquad \xi_2 = c_2(x) \ .$$

Действие операторов T_1 , T_2 имеет локальный характер. Вычислим асимптотику $(T_2^{-1} T_1 f)(\xi)$ при $\xi \longrightarrow \infty$:

$$(T_2^{-1} T_1 f)(\xi_2) \approx E_2^{-1}(x) E_1(x) f(\xi_1) \approx e^{-i\sigma} f(\xi_1) \approx$$

$$\approx e^{-i\sigma} f(\xi_2 - \tau) = (e^{-i\sigma - i\hat p \tau} f)(\xi_2) \ .$$

Воспользуемся формулой, полученной в ходе доказательства теоремы I:

$$e^{-iH_1 t} f \approx -iT_1 e^{-iV_1(t,\hat p)} F^{-1} \sigma_1 f \ .$$

Рассмотрим следующие преобразования:

$$e^{-iH_1 t} f \approx -iT_2 (T_2^{-1} T_1) e^{-iV_2(t,\hat p)} (e^{iV_2(t,\hat p)} e^{-iV_1(t,\hat p)}) F^{-1} \sigma_1 f \approx$$

$$\approx -iT_2 e^{-i\sigma - i\hat p\tau} e^{-iV_2(t,\hat p)} e^{i[V_2(\sigma,\hat p) - V_1(\sigma,\hat p)]_{\sigma=+\infty}} F^{-1}\sigma_1 f =$$

$$= -iT_2 e^{-iV_2(t,\hat p)} e^{-ia(\hat p)} F^{-1} \sigma_1 f \approx$$

$$\approx -iT_2 e^{-iV_2(t,\hat p)} F^{-1} \sigma_2 (\sigma_2^{-1} F e^{-ia(\hat p)} F^{-1} \sigma_1) f \approx$$

$$\approx e^{-iH_2 t} \sigma_2^{-1} F e^{-ia(\hat p)} F^{-1} \sigma_1 f \ .$$

Из полученного соотношения

$$e^{-iH_1 t} f \approx e^{-iH_2 t} W_{2,+} e^{-ia(\hat{p})} W_{1,+}^{-1} f$$

и вытекает утверждение теоремы 2 при $t \to +\infty$. Аналогично доказывается утверждение теоремы при $t \to -\infty$.

Литература

1. Буслаева М.В. Одномерный оператор Шредингера с ускоряющим потенциалом. - Функц. анализ, 1984, т.18, с.65-66.
2. Буслаева М.В. Асимптотическая динамика и спектральный анализ для одномерного оператора Шредингера с ускоряющим потенциалом. - В кн.: Проблемы мат.физики. Вып.II.Л., 1986, с.67-77.
3. Буслаева М.В. Оператор Шредингера со слабо ускоряющим потенциалом. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.17. Зап.научн.семин.ЛОМИ,1985, т.147, с.10-13.

А.М.Вершик

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА, СВЯЗАННАЯ С ДИАГРАММАМИ ЮНГА

I°. Введение. В этой работе изучается статсумма

$$\Xi_N(\beta) = \sum_\Lambda \left(\frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^\beta \qquad (I)$$

где Λ – неприводимое комплексное представление симметрической группы σ_N степени N, $\dim \Lambda$ – его размерность, а суммирование проводится по всем классам эквивалентных неприводимых представлений; $\beta \geqslant 0$. При $\beta = 2$ из теоремы Бернсайда следует, что $\Xi_N(2) = 1$, так как $\sum_\Lambda (\dim \Lambda)^2 = N!$. Точное значение для остальных β – не вычислено, однако асимптотика по N хорошо известна еще при $\beta = 0$ и $\beta = 1$. В первом случае $\Xi_N(0) = p(N)$ – функция Эйлера-Харди-Рамануджана – число разбиений числа N, и (см. напр.[I])

$$\lim_N \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(0) = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} .$$

При $\beta = 1$, $\Xi_N(1)$ есть число всех стандартных таблиц Юнга с клетками или число всех инволюций в σ_N (см. напр.[2]) и

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(1) \to 1 .$$

Эти наблюдения дают основание предположить, что для всех $\beta \geqslant 0$ существуют конечный предел

$$\varphi(\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta), \qquad (2)$$

который можно назвать, по аналогии со статистической физикой, свободной энергией. На множестве всех неприводимых представлений можно ввести "гиббсовскую меру":

$$P_{\beta,N}(\Lambda) = \frac{1}{\Xi_N(\beta)} \left(\frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^\beta \qquad (3)$$

и ставить вопрос о ее свойствах и асимптотике при $N \to \infty$ в зависимости от β. Мы изучаем эти вопросы далее, см. пп.3,4. Гипотеза о существовании и конечности свободной энергии (2) пока не доказана, и я попросил А.М.Пасса выполнить расчеты функции $\varphi_N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta)$ при максимально возможных N. В приложении, написанном им, приводится таблица и график φ_N при

$N \sim 50$. Настоящая работа тесно связана с работами [I,2,].

Помимо естественности постановки вопроса об асимптотике выражений (I), (2), (3) имеется еще один повод для его изучения: существует одномерная модель, близкая к гидродинамике и изучавшаяся в [4,5] (гамильтониан в [5] отличен от нашего). Эта модель может быть описана в терминах диаграмм Юнга, что приводит к указанным статсуммам, но мы начнем с непосредственного ее описания.

2^0. Об одной одномерной модели с дальнодействием.

Рассмотрим пространство $\tilde{\Omega} = \{0;1\}^{\mathbb{Z}}$ всех конфигураций из частиц двух сортов 0 и I, расположенных в узлах целочисленной одномерной решетки $\mathbb{Z}$ и выделим в нем счетное подмножество $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ конфигураций со следующими двумя свойствами а) для любого $\omega \in \Omega$ существуют такие целые $n_0(\omega)$ и $n_1(\omega)$, что $\omega(n) = 0$ при $n \leqslant n_0(\omega)$ и $\omega(n_0(\omega)+1) = 1$; $\omega(n) = 1$ при $n \geqslant n_1(\omega)$ и $\omega(n_1(\omega)-1) = 0$ б) $n_0(\omega) + \{n : n > n_0(\omega)$; $\omega(n) = 0\} = 0$. Множество Ω градуировано следующим образом: назовем степенью конфигурации $\omega \in \Omega$ число пар (i,j) , $i > j$, для которых $\omega(j) = 1$, $\omega(i) = 0$, в частности, в Ω есть ровно одна конфигурация ω степени 0 – "море Дирака": $\bar{\omega}(k) = 0$ $k \leqslant 0$, $\bar{\omega}(k) = 1$ $k > 0$, и одна – степени I. Ансамбль конфигураций степени N обозначим Ω_N; $\Omega = \bigcup_{N \geqslant 0} \Omega_N$, как мы увидим $|\Omega_N| = p(N)$. Определим парное взаимодействие частиц, находящихся в узлах i и j, $i > j$: $F(\omega(i), \omega(j)) = 0$ если $\omega(i) = \omega(j)$ или $\omega(i) = 1$, $\omega(j) = 0$, и $F(\omega(i), \omega(j)) = -\ln(i-j)$, если $\omega(i) = 0$, $\omega(j) = 1$. При определении гамильтониана, из-за роста взаимодействия при увеличении расстояния между частицами, следует ввести компенсирующее слагаемое и определить гамильтониан так:

$$H_N(\omega) = \sum_{i,j} F(\omega(i), \omega(j)) + \ln\sqrt{N!}\,, \tag{4}$$

очевидно, сумма конечна. Определим статсумму

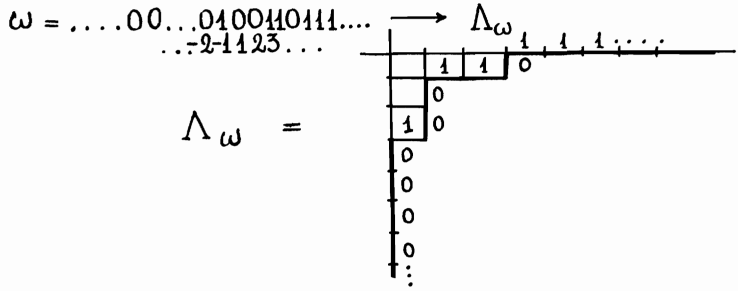
$$\Xi_N(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega_N} \exp \beta H_N(\omega), \tag{5}$$

гиббсовскую меру на конфигурациях

$$P_{\beta,N}(\omega) = \exp \beta H_N(\omega) / \Xi_N(\beta) \tag{6}$$

свободную энергию $\mathcal{F}_N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \ln \Xi_N(\beta)$ (ср.(I)) и т.д. Любопытно, что из-за сильного дальнодействия традиционный подход к изучению одномерных моделей не дает для этой модели полной информации; например, легко доказать, что слабый предел гиббсовских мер $\rho_{\beta,N}$ есть стандартная мера Бернулли на $\tilde{\Omega}$ при всех $\beta \geqslant 0$, но, как мы увидим, на самом деле ситуация более интересна и зависит от β. Фактически эта модель двумерна! Нижеследующая редукция выявляет это и показывает связь с теорией диаграмм Юнга.

Сопоставим конфигурации $\omega \in \Omega$ диаграмму Юнга следующим образом (он хорошо известен и часто использовался (см. напр. [9])



Каждый „0" есть движение на клетку вверх, „1" – на клетку вправо. При этом число клеток в диаграмме есть степень конфигурации (число инверсий), а длина крюка клетки есть расстояние между частицами соответствующей инверсии. Далее, число строк есть число нулей после первой единицы и т.д. Поэтому

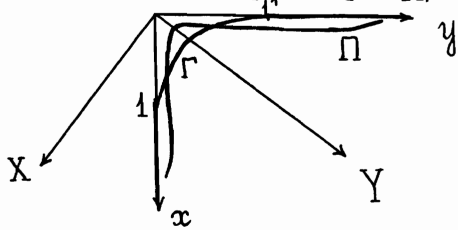
$$H_N(\omega) = \ln \frac{\sqrt{N!}}{\prod h_{i,j}} = \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} \tag{7}$$

где по формуле крюков ([10]) $\dim \Lambda = \frac{N!}{\prod h_{ij}}$, а Λ_ω воспринимается как диаграмма Юнга и как соответствующее ей неприводимое представление σ_N. Связь формул (4) и (7), (I) и (5), (3) и (6) и т.д. – установлена. Теперь можно изучать нашу модель как двумерную и ставить вопрос о предельном поведении гиббсовских мер на диаграммах Юнга. Это приводит нас к более содержательным ответам. (см. п.п.3,4). С точки зрения исходной модели далее изучается поведение частиц в узлах с растущим номером, т.е. не слабого, а "гидродинамического" предела гиббсовских мер (ср. [5]).

3°. <u>Предел гиббсовских мер на диаграммах Юнга. и предельная форма диаграмм</u>

Для того, чтобы говорить о пределе мер на диаграммах с разным количеством клеток, нужно их нормировать. Нормировка для наших целей состоит в гомотетии диаграмм с N клетками с коэффи-

циентом $\frac{1}{\sqrt{N}}$, тогда площадь отдельной клетки - $\frac{1}{N}$, а поддиаграммы равна I. Теперь гиббсовская мера $P_{\beta,N}$ может рассматриваться как мера на ломаных в квадранте, ограничивающих площадь равную единице. Введем кривую Γ (в[1,2] она обозначена через Ω), которая в осях X,Y , указанных на рисунке имеет уравнение
$Y=\frac{2}{\pi}\left(X\arcsin X+\sqrt{1-X^2}\right)$ при $|X|\leqslant 1$ и $Y=|X|$ при $|X|\geqslant 1$



ТЕОРЕМА I. При всяком $\beta>0$ меры $P_{\beta,N}$ слабо (в смысле равномерного расстояния между кривыми) сходятся при $N\to\infty$ к дельта-мере δ_Γ , т.е. для всех $\varepsilon>0$ $P_{\beta,N}(\mathcal{V}_\varepsilon(\Gamma))\to 1$ где $\mathcal{V}_\varepsilon(\Gamma)$ - равномерная окрестность Γ . Доказательство использует ту же идею, которая использовалась в [I,2] для меры Планшереля ($\beta=2$). Прежде всего, имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{N}}\ln P_{\beta,N}(\Lambda)=-\frac{1}{\sqrt{N}}\left(\beta\ln\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}-\ln\Xi_N(\beta)\right)=$$

$$=\sqrt{N}\left(\frac{\beta}{N}\sum_{ij}\ln\frac{h_{ij}(\Lambda)}{\sqrt{N}}+\frac{\beta}{2}\ln N+\frac{\beta}{2N}(N\ln N-N+O(\ln N))\right.$$

$$\left.-\frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}}\right)=\frac{\beta\sqrt{N}}{2}\left(1+\frac{2}{N}\sum_{ij}\ln\frac{h_{ij}(\Lambda)}{\sqrt{N}}+\frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}}\right)+$$

$$+O(1)=\frac{\beta\theta(\Lambda)}{2}\sqrt{N}+\mathcal{S}_N(\beta)+O(1),$$

где $\theta(\Lambda)$ - интеграл крюков (см. I). Заметим теперь, что $\mathcal{S}_N(\beta)\leqslant\mathcal{S}_N(0)=$

$$=\frac{1}{\sqrt{N}}\ln p(N)\leqslant C<\infty.$$

Поэтому, если $\theta(\Lambda)>\frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$, то и $\theta(\Lambda)+\frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\sqrt{N}}>\frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$ для достаточно больших N и $P_{\beta,N}(\Lambda)\leqslant\exp\left(-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}\right)$, тем самым, все диаграммы, для которых $\theta(\Lambda)<\frac{2\pi}{\sqrt{6N}}$ составляют множество со сколь угодно близкой к единице $P_{\beta,N}$ мерой (напомним, что общее число диаграмм есть $p(N)$, а с другой стороны, как показано в [I] это множество есть окрестность критической диаграммы Γ .

Теперь докажем, что при $\beta = 0$ положение иное. Заметим, что $\rho_{0,N}$ есть равномерное распределение на диаграммах с N клетками.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность мер $\rho_{0,N}$ слабо сходится к дельта-мере δ_Π, где Π кривая, задаваемая в естественных координатах уравнением

$$e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}x} + e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}y} = 1 ; \; x, y > 0$$

Доказательство теоремы 2 можно проводить по-разному, оно может быть получено из некоторых оценок работы [6], что и было сделано автором, и сообщено одному из авторов работы [6], после чего тот в свою очередь дал доказательство центральной предельной теоремы для этого случая. (Самой постановки вопроса о предельной кривой в [6] нет, однако, там имеется нужное здесь обобщение формулы Эйлера-Харди-Рамануджана для асимптотики числа разбиений натурального числа N, у которых не менее $c_1\sqrt{N}$ слагаемых имеют величину не меньшую $c_2\sqrt{N}$; константы c_1 и c_2 должны быть выбраны так, чтобы число таких разбиений имело порядок $p(N)$. Метод производящих функций дает такое обобщение.)

Подчеркнем по поводу теорем I и 2, что было бы очень важным получить обе кривые как экстремали для некоторого вариационного принципа. Заметим теперь, что в отличие от кривой Γ, кривая Π лишь асимптотически приближается к осям координат, и что асимптотика нормированных размерностей $\frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}}$ для диаграмм в окрестности кривой Π (как и любой невырожденной кривой, отличной от Γ) имеет вид $\exp(-cN(1+O(1))$ (а не $\exp(-c\sqrt{N}(1+ O(1))$ как для Γ. Это позволяет доказать следующий факт

ТЕОРЕМА 3. $\lim\limits_{N\to\infty} \varphi_N'(0) = -\infty$

$$-\varphi_N'(0) = -\frac{1}{\sqrt{N}\,p(N)} \sum_{\Lambda} \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} \sim \frac{AN}{\sqrt{N}} \quad A\sqrt{N} \to \infty$$

Константа $A = -\lim\limits_{N} \frac{1}{N} \ln \frac{\dim \Lambda_N}{\sqrt{N!}} (\rho_0\text{-п.в})$ есть в точности интеграл крюков для кривой Π. Формула для A, найденная из других соображений имеется в [6, III].

ЗАМЕЧАНИЕ. Даже в предположении существования и конечности φ, вопрос о производной $\varphi'(0)$ и даже о непрерывности φ при $\beta = 0$ открыт и теорема 3 не снимает его, однако, она вместе с выводами теорем I и 2 о различии пределов гиббсовских мер при $\beta > 0$ и $\beta = 0$ может быть истолкована как свидетельство своеобразного фазового перехода в точке $\beta = 0$.

В других задачах (см. [5 , 8]) возникают иные статистики на диаграммах Юнга, которые приводят к новым предельным кривым. В задачах статистики, теории разбиений могут быть и такие гиббсовские меры, предел которых уже не есть δ -мера (Хааровская мера в [8]). Систематически эти вопросы не изучены.

4°. Теорема Шеннона, свободная энергия и максимальная размерность

В теории стационарных случайных процессов теоремой Шеннона называют утверждение об асимптотической экспоненциальной равнораспределенности вероятностей типичных событий, например, утверждение о существовании предела

$$-\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mu\left(\Delta_N(x)\right) = h ,$$

где h - энтропия (информация на один шаг), x - реализация случайного процесса, $\Delta_N(x)$ - цилиндр, определяемый реализацией x в моменты времени от I до N ; предел может пониматься по вероятности (Шеннон) почти всюду (Макмиллан-Брейман) и т.д. В нашей нестационарной задаче вопрос об асимптотической равнораспределенности также интересен. Существует ли в том или ином смысле предел

$$\lim_{N} \frac{1}{\sqrt{N}} \ln p_{\beta,N}(\Lambda) \tag{8}$$

например, по мере или в среднем? Ответ неизвестен даже для $\beta = 2$, но в этом случае получены двусторонние оценки в [I]. Определим, если таковая существует, величину h_β из соотношения:

$$h_\beta = \lim_N h_{\beta,N} , \; h_{\beta,N} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\Lambda p_{\beta,N}(\Lambda) \ln p_{\beta,N}(\Lambda) = -\frac{1}{\sqrt{N}} M_{p_{\beta,N}} \ln p_{\beta,N}$$

при всех $\beta \geq 0$ и назовем h_β энтропией гиббсовской меры p_β ,

$h_{\beta,N} \longrightarrow p_\beta$

ТЕОРЕМА 4. В предположении существования свободной энергии (2) и $\varphi'(\beta)$ существуют h_β, (8) и имеет место формула:

$$h_\beta = -\beta\varphi'(\beta) + \varphi(\beta) = \lim_N \frac{1}{\sqrt{N}} \ln p_{\beta,N}(\Lambda) \text{ (in mean).}$$

Доказательство. В доказательстве теоремы I мы получили формулу

$$\varphi'_N(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\Lambda \frac{1}{\Xi_N(\beta)} \left(\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\right)^\beta \ln\left(\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\right)$$

из которой наше утверждение следует немедленно. Более того, если для (8) доказана теорема о более сильной сходимости (почти всюду, в среднем), то в предположении о существовании свободной энергии то же верно для h_β :

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если существует предел (8) в смысле среднеквадратического, то его можно найти по формуле

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\Big[\sum_{\Lambda}(\ln p_{\beta,N}(\Lambda))^2 p_{\beta,N}(\Lambda)\Big]^{1/2}=h_\beta .$$

2. Так как $\mathcal{S}(2)=0$ (см. п°I), то $h_2=-2\mathcal{S}'(2)$.

3. При $\beta=0$ формула тавтологична $h_0=\mathcal{S}(0)=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}$.

СЛЕДСТВИЕ. При предположениях теоремы имеем $h>0$, $\mathcal{S}(\beta)\geqslant\beta\mathcal{S}'(\beta)$; поэтому, если существует предел $\lim\limits_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}=-c$, то $c=-\lim\limits_{\beta\to\infty}\mathcal{S}'(\beta)$.

Константа c имеет очень важный смысл, как это следует из выкладки:

$$\lim_{N\to\infty}\max\Big(-\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\frac{\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\Big)=-\lim_{N\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\Big[\frac{1}{(N!)^{\frac{\beta}{2}}}\sum_{\Lambda}$$

$$\sum_{\Lambda}(\dim\Lambda)^{\beta}\Big]^{1/\beta}=-\lim_{N\to\infty}\lim_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}_N(\beta)}{\beta}=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}\equiv c .$$

Иначе говоря, c есть предел (если существует) выражения

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\Big(\frac{\max_{\Lambda}\dim\Lambda}{\sqrt{N!}}\Big)$$

и в наших предположениях $\max\limits_{\Lambda\in\hat{\mathfrak{S}}_N}\dim\Lambda\sim\sqrt{N!}\,e^{-c\sqrt{N}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ (А.М.Пасс)

Вычисление функции $\mathcal{S}_N(\beta)$ осуществлялось прямым суммированием по формуле

$$\mathcal{S}_N(\beta)=\frac{1}{\sqrt{N}}\ln\sum_{\Lambda\in\hat{\mathfrak{S}}_N}$$

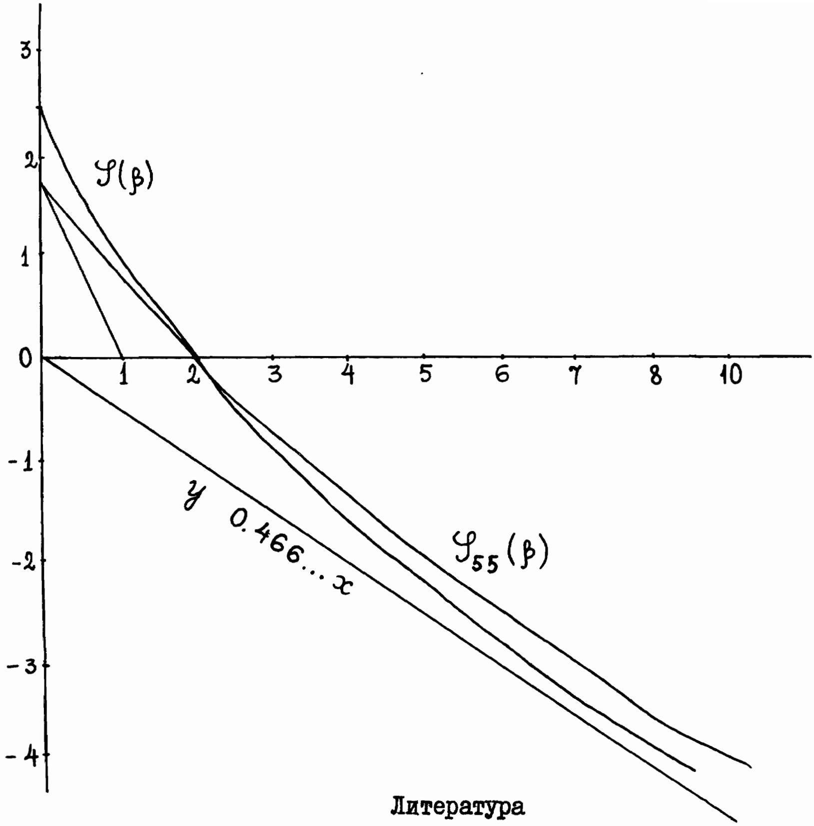
Ниже приводятся данные для N = 45, 50, 55, при некоторых значениях β в интервале $[0,\ 80]$. Другие значения $\mathcal{S}_N(\beta)$ не несут новой информации, что же касается N , то значение 60 является пределом возможности имевшихся ЭВМ (типа СМ-4). В работе [7] удалось при вычислении $\max\dim\Lambda$ дойти до N ==75, подробности этих расчетов не опубликованы см. [3].

ВЫВОДЫ. I. По-видимому, $\mathcal{S}(\beta) = \lim\limits_{N} \mathcal{S}_N(\beta)$ существует, судя по стабилизации (хотя и медленной) значений $\mathcal{S}_N(\beta)$.

2. Вопрос, поставленный А.М.Вершиком о непрерывности $\mathcal{S}$ в 0 также скорее всего решается положительно, во всяком случае $\mathcal{S}_N(\beta)$ при $\beta = 0{,}001$ стабилизируются близко к $\mathcal{S}_N(0) = \mu(N)$

3. При $\beta \geqslant 10$ становится линейной и переходи в прямую $y = 0{,}466\ldots x$ с высокой точностью. Эта прямая есть, видимо, асимптота для $\mathcal{S}$, а коэффициент 0,466...есть $c = \lim\limits_{\beta\to\infty} \frac{\mathcal{S}(\beta)}{\beta}$, см. п°4.

β $\mathcal{S}(\beta)$	$N=45$	$N=50$	$N=55$
β = 0,00000	I.69909	I.72915	I.75559
0,00I	I.69746	I.72746	I.75384
0,002	I.69584	I.72577	I.75209
0,003	I.69422	I.72409	I.75035
0,I	-	I.7I245	I.73832
0,2	-	I.69625	I.72I6I
I,0	0.70658	0.7I765	0.72736
2,0	-0.00000	0.00000	-0.00000
5,0	-I.732I8	-I.762I0	-I.78364
I0,0	-4.224I4	-4.25904	-4.32823
20,0	-8.939I5	-8.869I5	-9.I2I26
30,0	-I3.58I42	-I3.39978	-I3.833I7
40,0	-I8.20269	-I7.9I427	-I8.5I875
50,0	-22.8I6I9	-22.423I92	-23.I93I4
60,0	-27.42602	-26.92985	-27.86205
70,0	-	-	-32.52797
80,0	-	-	-37.I92I7



Литература

I В е р ш и к А.М., К е р о в С.В. Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы. Функц.ан. и его прил. 198I, I9, № I, 25–36.

2 В е р ш и к А.М., К е р о в С.В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга Докл.АН СССР, 1977, т.233, № 6, 1024–27.

4 L i g g e t t T.M. Ergodic theoreme for the asymmetric simple exclusion process. Trans.Amer.Math.Soc.1975, v.213, 237-261.

5 R o s t H. Non-Equilibrium Behaviour of a Many Particle Process: Density Probile and Local Equilibria. Zs.Wahr.1981,

v.58, 41-53.

6. S z a l a y M., T u r a n P. On some problems of the statistical theory of partitions with application the characters of the symmetric group I. Acta Math., Acad.Sci.Hungary, 1977, v.29, 3-4, 361-79, III Ibid 1978, v.32, 1-2, 129-155.

7. M c K a y J. The largest degrees of irreducible characters of the symmetric group. Math.Comp. 1978, v.32, p.624-631.

8. V e r s h i k A.M. Statistics on the partitions of the natural. VNV XScience Press. 1987. IV International Conf. of Prob.Theory and Math.Stat. Vilnius, 1985.

9 В е р ш и к А.М. Биективное доказательство тождества Якоби и перестройки диаграмм Юнга. В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УШ. Зап.науч.сем.ЛОМИ. I986. т.I55, 3-6.

I0 Д ж е й м с Г. Теория представлений симметрических групп. М., I982.

On a statistical sum associated with the Young diagrams. Vershik A.M. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.20-29.

Asymptotic properties of the sums of powers of normalized dimensions of all irreducible complex representations of the symmetric group S_N as $N \to \infty$ are studied. The limiting Gibbs measure on the space of Young diagrams is calculated. Our approach is related to a special one-dimensional many particles model. In the appendix written by A.M.Pass some numerical and graphic information on the "Helmholtz energy" for the model is presented. Bibl. - 10.

Lyapunov Exponents, symmetric spaces and multiplicative ergodic theorem for semi-simple Lie groups. Kaymanovich V.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX (Zap.nauchn.semin. LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.30-46.

The classical theory of dyapunov characteristic exponents is reformulated in invariant geometric terms and developed for arbitrary non-compact semi-simple Lie groups with finite centre. A multiplicative ergodic theorem and a global law of large numbers for semi-simple Lie groups, and criteria for the Lyapunov regularity of linear systems of ordinary differential equations with subexponential growth of coefficients are proved. Bibl. - 21.

В.А.Кайманович

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА, СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

Понятия характеристических показателей и правильности однопараметрического семейства матриц были введены Ляпуновым в его фундаментальной работе [1] и использовались первоначально для описания решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [2]. Применения этих понятий в теории динамических систем основываются на "мультипликативной эргодической теореме" Оселедца [3], устанавливающей условия правильности произведений случайных матриц. Несмотря на многочисленность работ, посвященных показателям Ляпунова в различных ситуациях, судя по всему незамеченным до настоящего времени оставалось то простое обстоятельство, что правильность по Ляпунову последовательности матриц равносильна ее асимптотической близости к последовательности степеней некоторой фиксированной матрицы. Это наблюдение дает возможность перенести классическую теорию характеристических показателей Ляпунова на произвольные некомпактные полупростые группы Ли с конечным центром, переформулировав ее в инвариантных геометрических терминах без использования матричных представлений этих групп. Применение аппарата римановой геометрии и теории симметрических пространств позволяет просто получить как обобщения уже известных фактов, так и результаты, по-видимому не формулировавшиеся раньше и в матричной форме, в частности "глобальный" вариант закона больших чисел для полупростых групп Ли. Наши доказательства являются новыми даже для матричных групп.

Структура работы следующая. В § 1 вводятся необходимые определения и обозначения из теории полупростых групп Ли и симметрических пространств, а также обсуждается связь между различными компактификациями симметрических пространств. Основным является § 2, в нем мы определяем правильные последовательности в симметрическом пространстве как последовательности, которые асимптотически близки к геодезическим, и даем несколько критериев правильности (в полярных и орисферических координатах, а также в терминах конечномерных представлений). В § 3 эти критерии используются для доказательства мультипликативной эргодической теоремы (обобщение теоремы Оселедца) и глобального закона больших чисел для полупростых групп Ли. В § 4 мы показываем, что для последовательностей матриц правильность в нашем смысле естественным образом связана с правильностью по Ляпунову, и как следствие получаем критерии правильности по Ляпунову линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с субэкспоненциальным ростом коэффициентов.

Ключевая в этой работе теорема 2.I была анонсирована в [4], где она использовалась для описания гармонических функций на дискретных подгруппах полупростых групп. Автор благодарит Ю.Д.Бураго, А.М.Вершика, М.И.Захаревича, Г.А.Маргулиса и М.А.Ольшанецкого за полезные обсуждения и замечания.

§ I. Предварительные сведения и обозначения

Вводимые здесь понятия и обозначения будут использоваться ниже без дополнительных указаний.

I.I. Пусть G - некомпактная полупростая вещественная группа Ли с конечным центром, K - ее максимальная компактная подгруппа, A - главная векторная подгруппа, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}$ - соответствующие алгебры Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ - разложение Картана, $\mathfrak{h}$ - главная картановская подалгебра такая, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$. Через $\widetilde{\Delta}$ обозначим систему корней комплексификации $\widetilde{\mathfrak{g}}$ относительно комплексификации $\widetilde{\mathfrak{h}}$, через $\mathfrak{g}^{\alpha}$ $(\alpha \in \widetilde{\Delta})$ - корневые подпространства $\widetilde{\mathfrak{g}}$. Зафиксируем базис $\widetilde{\Pi} \subset \widetilde{\Delta}$, тогда $\Delta = \{\alpha|_{\mathfrak{a}} : \alpha \in \widetilde{\Delta}\}$ и $\Pi = \{\alpha|\mathfrak{a} : \alpha \in \widetilde{\Pi}\}$ - соответственно, система ограниченных корней и ее базис [5]. Подмножества положительных корней из $\widetilde{\Delta}$ и Δ обозначим $\widetilde{\Delta}_+$ и Δ_+. Положим $\widetilde{\mathfrak{n}} = \sum \mathfrak{g}^{\alpha}$ где сумма берется по всем $\alpha \in \widetilde{\Delta}_+$. Через W обозначим ограниченную группу Вейля, действующую в $\mathfrak{a}$, через $\mathfrak{a}^+ = \{x \in \mathfrak{a} : \langle x, \alpha\rangle \geqslant 0 \ \forall \alpha \in \Pi\}$ - замыкание доминантной камеры Вейля. Норму в $\mathfrak{p}$, индуцированную формой Киллинга $\langle \cdot , \cdot \rangle$, обозначим $\|\cdot\|$. Положим $\mathfrak{a}^+_1 = \{x \in \mathfrak{a}^+ : \|x\| = 1\}$. Кроме того, будем еще использовать обозначения $X^{\perp} = \{p \in \mathfrak{p} : \langle p, x\rangle = 0 \ \forall x \in X\}$, $X^{\circ} = X^{\perp} \cap \Pi$, где X - подмножество $\mathfrak{p}$.

I.2. Для всякого элемента $g \in G$ по разложению Картана $g = k_1(\exp\alpha)k_2$, $k_{1,2} \in K$, $\alpha \in \mathfrak{a}^+$ однозначно определяется "сложный радиус" $r(g) = \alpha \in \mathfrak{a}^+$. Положим $\delta(g) = \|r(g)\|$. Тогда $\delta(g_1 g_2) \leqslant \delta(g_1) + \delta(g_2) + C$, а если $M \subset G$ - некоторый компакт, внутренность которого содержит единицу группы G и $\delta_M(g) = \min\{n : g \in M^n\}$, то $a\delta_M + b \leqslant \delta \leqslant A\delta_M + B$ (a, b, A, B, C - константы, причем a и A положительны). Тем самым δ является главным калибром на G [6].

I.3. Если $E \subset \Pi$, положим

$$\tilde{\Delta}_0(E)=\left\{\alpha\in\tilde{\Delta}:\alpha|_{\mathfrak{a}}=\sum k_\beta\beta\ (\beta\in E)\right\}$$

и

$$\tilde{\Delta}_+(E)=\tilde{\Delta}_+\setminus\tilde{\Delta}_0(E).$$

Определим подалгебры

$$\tilde{\mathfrak{a}}'(E)=\sum\mathbb{C}\alpha\quad(\alpha\in\tilde{\Delta}_0(E)),$$

$$\tilde{\mathfrak{g}}'(E)=\tilde{\mathfrak{a}}'(E)+\sum\mathfrak{g}^\alpha\quad(\alpha\in\tilde{\Delta}_0(E)),$$

$$\tilde{\mathfrak{n}}(E)=\sum\mathfrak{g}^\alpha\quad(\alpha\in\tilde{\Delta}_+(E)),$$

$$\tilde{\mathfrak{a}}(E)=\tilde{\mathfrak{h}}\ominus\tilde{\mathfrak{a}}'(E),$$

$$\tilde{\mathfrak{l}}(E)=\tilde{\mathfrak{a}}(E)+\tilde{\mathfrak{n}}(E),$$

$$\tilde{\mathfrak{p}}(E)=\tilde{\mathfrak{g}}'(E)+\tilde{\mathfrak{l}}(E)$$

(здесь $\ominus$ обозначает ортогональное дополнение относительно формы Киллинга). Вещественные части $\mathfrak{a}'(E)=\tilde{\mathfrak{a}}'(E)\cap\mathfrak{g}$ и др. являются подалгебрами $\mathfrak{g}$, причем алгебра $\mathfrak{g}'(E)$ полупроста, $\mathfrak{a}'(E)$ – ее главная векторная подалгебра, $\mathfrak{k}'(E)=\mathfrak{g}'(E)\cap\mathfrak{k}$ – ее максимальная компактная подалгебра, $\mathfrak{n}'(E)=\mathfrak{g}'(E)\cap\mathfrak{n}$ – нильпотентная подалгебра, и $\mathfrak{g}'(E)$ имеет разложение Ивасавы $\mathfrak{k}'(E)+\mathfrak{a}'(E)+\mathfrak{n}'(E)$. Далее, подалгебра $\mathfrak{n}(E)$ нильпотентна, причем $\mathfrak{n}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{n}(E)+\mathfrak{n}'(E)$, а подалгебра $\mathfrak{l}(E)$ разрешима. Подалгебра $\mathfrak{p}(E)$ называется стандартной параболической подалгеброй (типа E), а разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}(E)+\mathfrak{a}(E)+\mathfrak{g}'(E)+\mathfrak{k}$ (неоднозначное на $\mathfrak{k}'(E)$) – обобщенным разложением Ивасавы.

I.4. Пусть $A(E)$ и др. – аналитические подгруппы G, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{a}(E)$ и др. Тогда $N(E)$ и $N'(E)$ – односвязные нильпотентные подгруппы, причем любой элемент $n_0\in N$ единственным образом представим в виде $n_0=nn'$, где $n\in N(E)$, $n'\in N'(E)$ и группа $L(E)=N(E)A(E)$ – односвязная разрешимая. Группа $G'(E)$ – полупростая с конечным центром, $G'(E)=N'(E)\ A'(E)\ K'(E)$ – ее разложение Ивасавы, $A=A(E)\oplus A'(E)$, и имеет место глобальное разложение $G=L(E)\,G'(E)\,K$ причем $L(E)\cap G'(E)=1$ и $L(E)\,G'(E)\cap K=K'(E)$. Группа $P(E)=L(E)\,G'(E)\,Z$, где Z – централизатор A в K, называется стандартной параболической подгруппой G (типа E) [7 – I0].

I.5. Через S обозначим риманово симметрическое пространство $S = G/K = \{gK\}$ с выделенной в нем точкой $x_0 = \{K\}$ и канонической инвариантной метрикой d. Если $x = g x_0$ то однозначно определен "сложный радиус" $r(x) = r(g) \in \mathfrak{a}^+$ и $d(x, x_0) = \| r(x) \|$.

Обозначим через S^∞ множество асимптотических пучков геодезических в S. Каждый пучок содержит единственную геодезическую $\gamma(\tau) = k(\exp \alpha\tau) x_0$, $\alpha \in \mathfrak{a}_1^+$, $k \in K$, выходящую из точки x_0, поэтому S^∞ можно отождествить с единичной сферой касательного пространства $\mathfrak{p}$ к S в точке x_0. При этом всякой точке $\gamma \in S^\infty$ отвечает однозначно определенный вектор $\alpha = \alpha(\gamma) \in \mathfrak{a}_1^+$. Множество $\overline{S} = S \cup S^\infty$ является компактификацией S в конической топологии - сходимость последовательности уходящих на бесконечность точек $\{x_t\} \subset S$ в $\overline{S}$ равносильна сходимости направляющих векторов геодезических $(x_0 x_t)$ [II]. Действие G естественно продолжается с S на S^∞. Относительно этого действия S^∞ распадается на орбиты $S_\alpha^\infty = \{\gamma : \alpha(\gamma) = \alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{a}_1^+$, причем группа K действует транзитивно на каждой орбите. Стабилизатором вектора $\alpha \in \mathfrak{a}_1^+$ как элемента S^∞ является параболическая подгруппа $P(\alpha^\circ)$, а вся орбита S_α^∞ канонически изоморфна пространству $\partial_E S = G/P(E)$, где $E = \alpha^\circ$. Если вектор $\alpha \in \mathfrak{a}_1^+$ фиксирован, то всякая точка $x \in S$ может быть представлена как $x = n a g' x_0$, где $n \in N(\alpha^\circ)$, $a \in A(\alpha^\circ)$, $g' \in G'(\alpha^\circ)$, причем n и a определены однозначно, а g' - с точностью до сомножителя из $K'(\alpha^\circ)$. Таким образом, точки $x \in S$ находятся во взаимно однозначном соответствии с тройками $(n, a, \pi_\alpha(x))$ где $\pi_\alpha(x) = g' K'(\alpha^\circ)$ - точка симметрического пространства $\pi_\alpha(S) = G'(\alpha^\circ)/K'(\alpha^\circ)$. Координаты $(n, a, \pi_\alpha(x))$ будем называть стандартными орисферическими координатами (типа α^0) на S. Поскольку любая точка $\gamma \in S^\infty$ может быть представлена в виде $\gamma = (\mathrm{Ad}\, k)(\alpha)$ где $k \in K$, $\alpha \in \mathfrak{a}_1^+$, то орисферические координаты относительно γ получаются из стандартных орисферических координат типа α° вращением с помощью группы K [9]. Орбиты группы $P(E)$ в S_α^∞ находятся во взаимно однозначном соответствии с двойными классами смежности $P(E)\, g\, P(\alpha^\circ)$, т.е. с двойными классами смежности $W(E)\, w\, W(\alpha^\circ)$, где $W(E)$ - подгруппа W, порожденная отражениями относительно элементов E [IO]. Таким образом, всякая точка $\gamma \in S_\alpha^\infty$ может быть представлена как $\gamma = \mathrm{Ad}(n n')(w\alpha)$, где $n \in N(E)$, $n' \in N'(E)$, $w \in W$ (разложение Брюа).

Заметим, что коническая компактификация несравнима с компактификациями Сатаке - Фюрстенберга - Мура, в которых границей S служит $\partial_{\phi} S$ или $\partial_E S$ при надлежащем выборе E [7 - 9]. Компактификация Мартина и более сильная компактификация Карпелевича получаются из конической компактификации замыканием компонент $\mathcal{F}_{\gamma}(S)$. Обе они сильнее как конической компактификации, так и компактификаций Сатаке - Фюрстенберга - Мура [9, 12].

1.6. Пусть ψ - представление G в конечномерном комплексном пространстве V. Ограниченными весами ψ называются сужения весов представления $\widetilde{d\psi} : \widetilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ на $\mathfrak{a}$. Через ψ_λ будем обозначать неприводимое представление G в конечномерном пространстве V_λ, отвечающее целочисленному ограниченному старшему весу $\lambda \in \mathfrak{a}^+$ [5]. Тогда, если $\|\cdot\|$ - некоторая норма в $\mathrm{End}(V_\lambda)$, то $|\log\|\psi_\lambda(g)\| - \langle r(g), \lambda\rangle| < C$ для некоторой константы C. Для всякого конечномерного представления ψ группы G можно выбрать эрмитову форму в пространстве представления таким образом, чтобы матрицы $\psi(k)$, $k \in K$ лежали в $SU(V)$, а матрицы $\psi(a)$, $a \in A$ были диагональными с положительными диагональными элементами. Тогда представление ψ индуцирует отображение $s\psi : S \longrightarrow S_\psi = SL(V)/SU(V)$, причем образ S является вполне геодезическим подмногообразием в симметрическом пространстве S_ψ. Если представление $d\psi$ точно, то $s\psi$ - изометрическое вложение [7].

§ 2. Правильные последовательности в симметрических пространствах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем последовательность точек $\{x_t\}_{t=1}^{\infty}$ симметрического пространства S правильной, если существуют геодезическая $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow S$ и число $\theta \geqslant 0$ такие, что $d(x_t, \gamma(\theta t)) = o(t)$. Если $\theta = 0$, т.е. если $d(x_t, x) = o(t)$ для $x \in S$, то будем говорить, что $\{x_t\}$ тривиальная правильная последовательность. Последовательность $\{g_t\}$ элементов группы G назовем правильной, если последовательность $\{g_t x\}$ правильна в S для некоторого (или, что равносильно, для всех $x \in S$).

Как следует из п.1.5, правильность последовательности $\{x_t\}$ равносильна существованию $k \in K$ и $\alpha \in \mathfrak{a}^+$ таких, что $d(x_t, k(\exp t\alpha)x_0) = o(t)$, причем вектор α определяется последовательностью $\{x_t\}$ однозначно ($\alpha = \lim r(x_t)/t$). Будем называть вектор $\alpha \in \mathfrak{a}^+$ вектором показателей последовательности $\{x_t\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Для правильности последовательности $\{x_t\}$ точек симметрического пространства S необходимо и достаточно, чтобы $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$ и существовал предел $\alpha = \lim r(x_t)/t$.

ЛЕММА. Пусть $\{\gamma_t\}$ - последовательность выходящих из одной точки геодезических на плоскости Лобачевского $H^2_{\varkappa}$ кривизны $\varkappa < 0$. Если

$$d_t = d(\gamma_t(\theta t), \gamma_{t+1}(\theta t)) = o(t)$$

для некоторого $\theta > 0$, то γ_t поточечно сходятся к предельной геодезической γ_∞ и

$$d(\gamma_t(\theta t), \gamma_\infty(\theta t)) = o(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ_t - угол между направляющими векторами геодезических γ_t и γ_{t+1}, тогда по теореме синусов [13]

$$\sin \varphi_t/2 = \operatorname{sh}(\sqrt{-\varkappa}\, d_t/2)/\operatorname{sh}(\sqrt{-\varkappa}\, \theta t),$$

откуда $\log \varphi_t = \sqrt{-\varkappa}\ \theta t + o(t)$. Следовательно, для $\psi_t = \sum_{i>t} \varphi_i$ также $\log \psi_t = \sqrt{-\varkappa}\ \theta t + o(t)$. Поскольку при любом $i > t$ угол между направляющими векторами геодезических γ_t и γ_i не превосходит ψ_t, то вновь применяя теорему синусов получаем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Необходимость условия теоремы очевидна. Установим достаточность. Не умаляя общности, можно считать, что $x_t = k_t(\exp t\alpha)\, x_o$ и $\alpha \neq 0$. Нам надо доказать, что из условия $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$ следует правильность последовательности $\{x_t\}$. Пусть $\beta(\tau) = k(\tau) \exp \alpha(\tau)\, x_o$ - геодезическая, соединяющая точки x_t и x_{t+1}. Через $\dot\beta(\tau) \in \mathfrak{p}$ обозначим касательный вектор к β в точке $\beta(\tau)$, перенесенный по геодезической $(\beta(\tau), x_o)$ в точку x_o. Составляющими вектора $\dot\beta(\tau)$ в $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{p} \ominus \mathfrak{a}$ являются, соответственно $\dot\beta_1(\tau) = \dot\alpha(\tau)$ и $\dot\beta_2(\tau) = P_{\mathfrak{r}}(\exp(-\operatorname{ad} \alpha(\tau))\, \dot k(\tau))$ где $\dot\alpha(\tau) \in \mathfrak{a}$ и $\dot k(\tau) \in \mathfrak{k}$ - касательные векторы к кривым α и k, перенесенные в единицу группы G левым сдвигом, $P_{\mathfrak{r}}$ - ортогональная проекция алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{p}$. Очевидно,

$$\|\dot\beta(\tau)\|^2 = \|\dot\beta_1(\tau)\|^2 + \|\dot\beta_2(\tau)\|^2$$

причем вектор $\dot\beta_2(\tau)$ лежит в $\alpha(\tau)^{\perp\perp}$. Поскольку $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$, то найдется такое $s = s(t) = t + o(t)$, что $\alpha(\tau) - s\alpha \in \mathfrak{a}^+$ при всех τ.

Рассмотрим теперь кривую $\beta'(\tau) = k(\tau)(\exp s\alpha)\, x_o$, соединяющую точки $x'_t = k_t(\exp s\alpha)x_0$ и $x'_{t+1} = k_{t+1}(\exp s\alpha)x_0$. Поскольку $\dot\beta'_1(\tau) = 0$, а $\|\dot\beta'_2(\tau)\| < \|\dot\beta_2(\tau)\|$ при любом τ по выбору s, то длина кривой β' не превосходит длины β, т.е. расстояния между точками x_t и x_{t+1}. Тем самым расстояние между точками x_t и x_{t+1} во внутренней метрике поверхности

$$R = K(\exp \mathbb{R}_+\alpha)x_0 = \{k(\exp s\alpha)x_0 : k \in K,\ s \geqslant 0\}$$

также есть $o(t)$. Соединим точки x_t и x_{t+1} геодезической $\delta(\tau) = k(\tau)\exp\alpha(\tau)x_0$ на поверхности R. Положим

$$R_t = \{k(\tau)(\exp s\alpha)x_0 : s \geqslant 0\}$$

и обозначим через d_t внутреннюю метрику в R_t. Легко видеть, что или x_t и x_{t+1} лежат на одном геодезическом луче, выходящем из x_0, – тогда R_t вырождается в луч, или $\dot\delta_2(\tau) \neq 0$ при всех τ, и тогда R_t представляет собой геодезически выпуклый (в метрике поверхности R) бесконечный сектор, заключенный между лучами $(x_0 x_t)$ и $(x_0 x_{t+1})$. В последнем случае кривизна R_t в точке $k(\tau)(\exp s\alpha)x_0$ составляет (см. [13])

$$K = -\|[\dot\delta_2(\tau),\alpha]\| / \|\dot\delta_2(\tau)\|\,\|\alpha\|.$$

Поскольку $\dot\delta_2(\tau) \in \alpha^{\perp\perp}$ при всех τ, то получаем, что $K \leqslant \varkappa < 0$, где

$$\varkappa = \varkappa(\alpha) = -\min\{<\lambda,\alpha>/\|\lambda\|\|\alpha\| : \lambda \in \Pi\setminus\alpha^\circ\}.$$

Положим теперь $\gamma_t(\tau) = k_t\exp(\tau\alpha/\|\alpha\|)x_0$ и рассмотрим последовательность геодезических $\tilde\gamma_t$ на плоскости Лобачевского $H^2_\varkappa$ кривизны $\varkappa$ с метрикой $\tilde d$, построенную следующим образом: все $\tilde\gamma_t$ выходят из одной точки, и направляющий вектор геодезической $\tilde\gamma_{t+1}$ откладывается по часовой стрелке от направляющего вектора геодезической $\tilde\gamma_t$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\tilde d(\tilde\gamma_t(t\|\alpha\|), \tilde\gamma_{t+1}((t+1)\|\alpha\|)) = d_t(x_t, x_{t+1}).$$

Геодезическая ε в $H^2_\varkappa$, соединяющая точки $\tilde\gamma_t(t\|\alpha\|)$ и $\tilde\gamma_{t+k}(t\|\alpha\|)$ при больших t пересекается со всеми промежуточными геодезическими $\tilde\gamma_{t+i}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Обозначим через r_i длины отрезков, отсекаемых ε на $\tilde\gamma_{t+i}$ (т.е. $\tilde\gamma_{t+i}(r_i)$ лежит на ε). Тогда из теоремы сравнения треугольников Александрова [14] следует, что

$$d(\gamma_{t+i}(\tau_i),\ \gamma_{t+i+1}(\tau_{i+1}))$$
$$\leqslant d_{t+i}(\gamma_{t+i}(\tau_i),\ \gamma_{t+i+1}(\tau_{i+1}))$$
$$\leqslant \tilde{d}(\tilde{\gamma}_{t+i}(\tau_i),\tilde{\gamma}_{t+i+1}(\tau_{i+1})),$$

откуда

$$d(\gamma_t(t\|\alpha\|),\gamma_{t+k}(t\|\alpha\|))\leqslant\tilde{d}(\tilde{\gamma}_t(t\|\alpha\|),\tilde{\gamma}_{t+k}(t\|\alpha\|))$$

при всех k. Используя лемму, получаем теперь, что геодезические γ_t поточечно сходятся в S к предельной геодезической γ_∞ и

$$d(\gamma_t(t\|\alpha\|),\ \gamma_\infty(t\|\alpha\|)) = o(t).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для симметрического пространства $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ наша теорема близка к лемме Рагунатана [I5], дающей оценку скорости сходимости собственных подпространств положительно определенных матриц. Наше доказательство, однако, опирается на иные соображения.

СЛЕДСТВИЕ. Последовательность точек $\{x_t\}$ симметрического пространства S правильна тогда и только тогда, когда $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$, существует предел $\lim d(x_0, x_t)/t = d$ и, в случае положительности d, направляющие векторы геодезических $(x_0\, x_t)$ сходятся.

Из теоремы 2.I получаем теперь:

ТЕОРЕМА 2.2. Следующие условия равносильны:

I) Последовательность точек $\{x_t\}$ симметрического пространства S правильна;

2) Последовательность точек $\{s\psi(x_t)\}$ правильна в симметрическом пространстве S_ψ для любого конечномерного представления ψ группы G;

3) $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$ и для любого конечномерного представления ψ существует предел $\lim \|\tau(s\psi(x_t))\|/t$.

Кроме того, координаты вектора показателей последовательности $\{s\psi(x_t)\}$ (в стандартном базисе, как элемента $\mathbb{R}^n$, $n = \dim V_\psi$) суть $\langle\alpha,\lambda\rangle$, где α – вектор показателей последовательности $\{x_t\}$, а λ пробегает множество всех ограниченных весов представления ψ (взятых с учетом их кратностей). Если $s\psi$ – вложение, то правильность последовательности $\{s\psi(x_t)\}$ в симметрическом пространстве S_ψ равносильна правильности последовательности $\{x_t\}$ в симметрическом пространстве S.

ТЕОРЕМА 2.3. Последовательность элементов $\{g_t\}$ группы G правильна тогда и только тогда, когда $\delta(g_t^{-1} g_{t+1}) = o(t)$ и для любого конечномерного представления ψ группы G существует предел $\lim \log \|\psi(g_t)\| / t$ (что равносильно существованию этого предела только для фундаментальных представлений G).

Установим теперь критерий правильности последовательности $\{x_t\}$ в орисферических координатах симметрического пространства. Как следует из п.I.5, достаточно ограничиться рассмотрением только стандартных орисферических координат.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $(n_t, a_t, \pi_E(x_t))$ – стандартные орисферические координаты типа E точек последовательности $\{x_t\} \subset S$ т.е. $n_t \in N(E), a_t \in A(E)$. Последовательность $\{x_t\}$ правильна в S тогда и только тогда, когда $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$, последовательность точек $\{\pi_E(x_t)\}$ правильна в симметрическом пространстве $\pi_E(S)$ и существует предел $\alpha = \lim \log a_t / t \in \mathfrak{a}(E)$. Если $\alpha' \in \mathfrak{a}'(E)$ – вектор показателей последовательности $\{\pi_E(x_t)\}$, то вектор показателей $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{a}$ последовательности $\{x_t\}$ имеет вид $\tilde{\alpha} = w(\alpha + \alpha')$, где w – некоторый элемент группы Вейля W.

ЛЕММА (ср. [I6], лемма 9.4). Зафиксируем в пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ матриц размера $n \times n$ с комплексными коэффициентами некоторую норму $\|\cdot\|$ и блочное разбиение на блоки размера $n_i \times n_j$ $(\sum n_i = n)$. Пусть $\{A_t\} \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ – последовательность верхних квазитреугольных матриц с диагональными блоками $A_t^i \in \mathrm{Mat}(n_i, \mathbb{C})$. Если $|\det A_t| = 1$, $\log \|A_t^{-1} A_{t+1}\| = o(t)$ и для всех i существует предел $a^i = \lim \log \|A_t^i\| / t$, то предел $\lim \log \|A_t\| / t = a$ также существует и $a = \max a^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть последовательность $\{x_t\}$ правильна, $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{a}^+$ – ее вектор показателей, тогда, как видно из п.I.4, найдутся $w \in W$ и $\tilde{n} \in N$ такие, что $d(x_t, n w(\exp t\tilde{\alpha}) x_0) = o(t)$. Разложим $\tilde{n} = n n'$ и $w\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha'$, где $n \in N(E)$, $n' \in N'(E)$ и $\alpha \in \mathfrak{a}(E)$, $\alpha' \in A'(E)$. Тогда

$$g_t = n w \exp t\tilde{\alpha} = (n \exp t\alpha)\cdot(n' \exp t\alpha'),$$

поскольку $A(E)$ централизует $N'(E)$. В силу того, что $d(x_t, g_t x_0) = o(t)$, первая часть теоремы доказана. Обратное утверждение легко доказывается с использованием теоремы 2.2 и леммы

Из теоремы 2.4 следует

ТЕОРЕМА 2.5. Последовательность элементов $g_t = n_t a_t g'_t \in P(E)$ где $n_t \in N(E)$, $a_t \in A(E)$, $g'_t \in G'(E)$, правильна в группе G тогда и только тогда, когда $\delta(g_t^{-1} g_{t+1}) = o(t)$, существует предел $\alpha = \lim \log a_t / t$ и последовательность $\{g'_t\}$ правильна в группе $G'(E)$.

В случае, когда $E = \emptyset$, т.е. $P(\emptyset) = P$ - минимальная параболическая подгруппа G, получаем

СЛЕДСТВИЕ. Последовательность элементов $g_t = n_t a_t \in P$, где $n_t \in N$, $a_t \in A$, правильна в G тогда и только тогда, когда $\delta(g_{t-1} g_{t+1}) = o(t)$ и существует предел $\alpha = \lim \log a_t / t$. В этом случае вектор показателей последовательности $\{g_t\}$ есть $w\alpha$ где w - такой элемент группы Вейля W, что $w\alpha \in \mathfrak{a}^+$.

Отметим, что участвующий в формулировке следствия элемент группы Вейля w однозначно определяет то, на какой из орбит группы P в $S^\infty_{w\alpha}$ может лежать предел последовательности $x_t = g_t x_0$ (см. п.I.5). В частности, если $\alpha \in \mathfrak{a}^+$, т.е. $w = e$, то предел последовательности $\{x_t\}$ в S^∞ задается вектором α и не зависит от нильпотентных сомножителей $\{n_t\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 2.I - 2.5 естественно переносятся на случай, когда параметр t принимает непрерывные значения. При этом условие $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$ надо заменить на условие

$$\sup\{d(x_t, x_{t+\tau}) : 0 \leqslant \tau \leqslant 1\} = o(t).$$

§ 3. Мультипликативная эргодическая теорема и закон больших чисел для полупростых групп Ли

Будем говорить, что вероятностное распределение μ на группе G имеет конечный первый момент, если

$$\int \delta(g)\, d\mu(g) < \infty.$$

ТЕОРЕМА 3.I. Если $\{h_t\}$ - стационарная последовательномть случайных величин со значениями в G и конечным первым моментом, то последовательность произведений $g_t = h_1 \dots h_t$ п.н. правильна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку распределение h_t имеет конечный первый момент, то в силу эргодической теоремы п.н. $\delta(h_t) = o(t)$. Использование теоремы Фюрстенберга - Кестена или субаддитивный эргодической теоремы Кингмана (ср. [I5, I7]) позволяет теперь применить теорему 2.3.

Как мы увидим в § 4, для случая, когда $G = SL(n, \mathbb{R})$, теорема 3.I совпадает с мультипликативной эргодической теоремой Оселедца, поэтому ее естественно называть мультипликативной эргодической теоремой для полупростых групп Ли. Из теоремы 3.1 немедленно следует

ТЕОРЕМА 3.2. Если $\{h_t\}$ – стационарная последовательность случайных величин со значениями в G и конечным первым моментом, то для п.в. траекторий случайного блуждания $g_t = h_1 \ldots h_t$ на группе G с приращениями $\{h_t\}$ существует "среднее" $g = g(\{g_t\})$ такое, что $\delta(g^{-t} g_t) = o(t)$. Среднее всегда можно выбрать имеющим вид $g = k(\exp\alpha)k^{-1}$, где $\alpha \in \mathfrak{a}^+$ и $k \in K$ – при этом условии $g(\{g_t\})$ определено по $\{g_t\}$ однозначно и является измеримым относительно хвостовой σ-алгебры последовательности $\{g_t\}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Классический усиленный закон больших чисел для стационарных случайных последовательностей (эргодическая теорема) может быть записан в двух формах: $(X_1 + \ldots + X_n)/n \to a$ и $X_1 + \ldots + X_n = na + o(n)$. Перенос закона больших чисел в первой форме на некоммутативные группы в общем случае невозможен из-за отсутствия нормирующей операции, поэтому как правило рассматривают или закон больших чисел для каких-либо числовых функционалов на группе, или же закон больших чисел для инфинитезимальных систем [6, 16, 18]. Мы предлагаем формулировку закона больших чисел для некоммутативных групп, исходя из второй формы записи классического закона больших чисел. Несмотря на всю естественность такой формулировки, она по-видимому не встречалась ранее в литературе. Имеющийся произвол в выборе значения "среднего" объясняется тем, что классы отношения асимптотической эквивалентности в G

$$g_1 \sim g_2 \iff \delta(g_1^{-t} g_2^{t}) = o(t)$$

содержат, вообще говоря, более одного элемента. Из п.1.5 и теоремы 2.3 видно, что элементы вида $k(\exp\alpha)k^{-1}$ образуют полную систему представителей этих классов. Измеримая зависимость среднего g от хвостового поведения траектории $\{g_t\}$ носит тот же характер, что и в обычной эргодической теореме для неэргодичных стационарных последовательностей (подчеркнем, что хвостовая σ-алгебра последовательности $\{g_t\}$ как правило нетривиальна, несмотря на эргодичность $\{h_t\}$).

2. Доказанная теорема показывает эквивалентность (как и в классическом случае аддитивной группы $\mathbb{R}$) закона больших чисел ("в глобальной формулировке") и мультипликативной эргодической теоремы для полупростых групп Ли с конечным центром. Для группы матриц наша теорема может быть получена из теоремы Оселедца, если заметить, что правильность последовательности матриц по Ляпунову равносильна ее близости к последовательности степеней некоторой

симметричной матрицы (см. § 4).

3. Интересно выяснить, когда хвостовая σ-алгебра последовательности $\{g_t\}$ полностью определяется средними $g(\{g_t\})$ (это так для случая, когда $\{h_t\}$ независимы и их распределение не сингулярно мере Хаара [16] или же, напротив, сосредоточено на некоторой дискретной подгруппе G [4]). Заметим, что если первый момент приращений h_t бесконечен, то не вполне ясно даже то, в каких терминах можно было бы описывать хвостовое поведение для групп ранга большего единицы.

4. Весьма интересно было бы определить класс групп Ли, для которых справедлив закон больших чисел в приводимой выше глобальной формулировке. Он доказан для всех нильпотентных групп Ли и односвязных расщепляемых разрешимых групп Ли [19, 20]. Однако, как заметил Г.А.Маргулис, для полупростых групп Ли с бесконечным центром этот закон уже несправедлив. Действительно, пусть $\widetilde{G}$ – односвязная полупростая группа Ли с бесконечным центром, G – ее фактор-группа по свободной компоненте центра C. Обозначим через $\widetilde{K}$ универсальную накрывающую группы K. Зафиксировав в $\widetilde{K}$ фундаментальную область K_0 с компактным замыканием, мы можем однозначно представить всякий элемент $\widetilde{k} \in \widetilde{K}$ в виде $\widetilde{k} = (c, k)$ где "число вращения" c лежит в C и $\widetilde{k} \longmapsto k$. Используя разложение Картана $G = K(\exp \mathfrak{a}^+)K$, это представление можно продолжить на всю группу $\widetilde{G}$. Из результатов § 2 видно, что для любого элемента $g \in G$ такого, что $\lim \delta(g^n)/n > 0$ сомножители k_n и k'_n в разложении $g^n = k_n(\exp \alpha_n)k'_n$ стабилизируются (с точностью до множителей из Z) и $\alpha_n/n \longrightarrow \alpha$. Поэтому для $\widetilde{g}^n = (c_n, g_n)$ существует предел $\lim c_n/n = c \in C$. Очевидно, что можно выбрать $\widetilde{g}$ так, что $c \neq 0$. С другой стороны, если $\widetilde{g}_n = \widetilde{h}_1 \ldots \widetilde{h}_n = (c'_n, g_n)$, где $\widetilde{h}_i$ независимы и имеют распределение $\beta\delta_{\widetilde{g}} + (1-\beta)\delta_{\widetilde{e}}$, то $\lim c'_n/n = \beta c$. Нетрудно видеть, что функция $\widetilde{\delta}(c, g) = |c| + \delta(g)$ является главным калибром на $\widetilde{G}$ (см.п.1.2) и для того, чтобы два элемента $\widetilde{G}$ отстояли друг от друга на $o(n)$ необходимо, чтобы их "числа вращения" отличались на $o(n)$. Но как мы только что показали, "среднее число вращения" для последовательности степеней всякого элемента $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$ обязательно лежит в C, в то время как для последовательности частичных произведений случайных величин оно может и не лежать в C (при иррациональных β). Таким образом, для группы $\widetilde{G}$ глобальный закон больших чисел не выполняется.

§ 4. Связь с классическими показателями Ляпунова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [I - 3]. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем Φ ($= \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $\|\cdot\|$ - некоторая норма в V. Последовательность $\{A_t\}_{t=1}^{\infty} \subset GL(V)$ называется правильной по Ляпунову, если выполнены следующие условия:

I) существует предел

$$\lim \log |\det A_t| / t = \chi_{\det};$$

2) для всякого $v \in V \setminus \{0\}$ существует предел

$$\lim \log \|A_t v\| / t = \chi(v);$$

3) если $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_K = V$ - отвечающая функции χ фильтрация V, т.е. $\chi(v) = \chi_i$ для $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ и $\chi_1 < \ldots < \chi_K$, то

$$\chi_{\det} = \sum_i (\dim V_i - \dim V_{i-1}) \chi_i .$$

Числа χ_i называются характеристическими показателями Ляпунова последовательности $\{A_t\}$, размерности $\dim V_i - \dim V_{i-1}$ – их кратностями. (Определение, очевидно, не зависит от выбора нормы).

Зафиксируем в V некоторую евклидову (соотв., эрмитову) форму θ. Через K обозначим подгруппу $SL(V)$, сохраняющую форму θ. Отождествим симметрическое пространство $SL(V)/K$ с множеством положительных самосопряженных (относительно θ) операторов из $SL(V)$ (выбор формы θ равносилен фиксации точки $x_0 = K$ симметрического пространства).

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть $\{A_t\}_{t=1}^{\infty} \subset GL(V)$ и существует предел $\lim \log |\det A_t| / t = \chi_{\det}$, тогда следующие условия равносильны:

I) последовательность $\{A_t\}$ правильна по Ляпунову;

2) существует положительный самосопряженный оператор Λ такой, что $\log \|A_t \Lambda^{-t}\| = o(t)$;

3) $\log \|A_{t+1} A_t^{-1}\| = o(t)$ и существует предел
$$\Lambda = \lim (A_t^* A_t)^{1/2t};$$

4) последовательность $x_t = (A_t^* A_t)^{1/2} / |\det A_t|^{1/n}$, где $n = \dim V$, правильна в симметрическом пространстве $SL(V)/K$.

В частности, если $\{A_t\} \subset SL(V)$, то правильность последовательност $\{A_t\}$ по Ляпунову равносильна правильности последовательности $\{A_t^*\}$ элементов группы $SL(V)$ в смысле определения из § 2. Оператор Λ из условия (2) определен однозначно и совпадает с оператором Λ из условия (3), его собственные значения суть $\exp(\chi_i - \chi_{det})$, а соответствующие собственные подпространства – $V_i \ominus V_{i-1}$ (ортогональное дополнение относительно формы θ). Вектор показателей последовательности $\{x_t\}$ образован числами $\chi_i - \chi_{det}$, взятыми с учетом их кратностей и расположенными в порядке убывания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормировкой A_t общий случай сводится к случаю $|\det A_t| = 1$, тогда эквивалентность условий (2), (3) и (4) следует из результатов § 2. Для доказательства импликации (2) $\Longrightarrow$ (I) заметим, что если $B_t = A_t \Lambda^{-t}$, то $\log\|B_t^{-1}\| = o(t)$, поскольку $|\det B_t| = 1$, и правильность по Ляпунову последовательности $A_t = B_t \Lambda^t$ вытекает из правильности последовательности степеней $\{\Lambda^t\}$. Для доказательства обратной импликации (I) $\Longrightarrow$ (2) определим Λ как в формулировке теоремы и рассмотрим в V базис $\{e_i\}$, образованный собственными векторами Λ. Тогда, очевидно, $\log\|A_t \Lambda^{-t} e_i\| = o(t)$ для всех e_i, откуда $\log\|A_t \Lambda^{-t}\| = o(t)$. Описание вектора показателей последовательности $\{x_t\}$ непосредственно вытекает из описания оператора Λ.

С помощью доказанной теоремы можно теперь перенести результаты §§ 2, 3 на последовательности $\{A_t\} \subset GL(V)$. В частности, из теоремы 3.I следует, что если приращения $A_{t+1}A_t^{-1}$ образуют стационарный случайный процесс и их одномерное распределение имеет конечный первый момент (т.е. $\log\|A_{t+1}A_t^{-1}\| = o(t)$ и $\log\|A_t A_{t+1}^{-1}\| = o(t)$), то последовательность $\{A_t\}$ правильна по Ляпунову, что составляет содержание мультипликативной эргодической теоремы Оселедца [3].

ЗАМЕЧАНИЕ. В общей ситуации из существования предела $\Lambda = \lim (A_t^* A_t)^{1/2t}$ (на геометрическом языке это означает сходимость направляющих векторов геодезических $(x_0\, x_t)$ и существование предела $\lim d(x_0, x_t)/t$) еще не следует правильность по Ляпунову последовательности $\{A_t\}$ (или правильность последовательности точек $\{x_t\}$ симметрического пространства). Это так только в том случае, когда $\log\|A_{t+1}A_t^{-1}\| = o(t)$ (т.е. $d(x_t, x_{t+1}) = o(t)$). Если приращения $A_{t+1}A_t^{-1}$ образуют стационарный процесс и их одномерное распределение имеет конечный первый момент, то это условие выполнено (см. доказательство теоремы 3.I). Поэтому для таких последовательностей $\{A_t\}$ правильность по Ляпунову равносильна *a priori* более слабому условию - существованию предела $\Lambda = \lim (A_t^* A_t)^{1/2t}$ (ср. [2I]).

Теорема 4.I в сочетании с теоремами 2.3 и 2.5 позволяет получить следующие критерии правильности по Ляпунову.

ТЕОРЕМА 4.2. Последовательность $\{A_t\} \subset GL(V)$ правильна по Ляпунову тогда и только тогда, когда $\log \| A_{t+1} A_t^{-1} \| = o(t)$ и для всякого $k < \dim V$ существует предел

$$\xi_k = \lim \log \| A_t^{\wedge k} \| / t$$

(здесь $A^{\wedge k}$ - k-я внешняя степень A), при этом показателями последовательности $\{A_t\}$ являются числа $\chi_k = \xi_k - \xi_{k-1}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть матрицы $A_t \in GL(V)$ являются верхними квазитреугольными в некотором базисе пространства V, через A_t^i обозначим их диагональные блоки. Последовательность $\{A_t\}$ правильна по Ляпунову тогда и только тогда, когда $\log \| A_{t+1} A_t^{-1} \| = o(t)$ и все последовательности диагональных блоков $\{A_t^i\}$ правильны по Ляпунову. Набор показателей последовательности $\{A_t\}$ образован объединением наборов показателей последовательностей $\{A_t^i\}$. В частности, последовательность $\{A_t\}$ треугольных матриц правильна по Ляпунову тогда и только тогда, когда $\log \| A_{t+1} A_t^{-1} \| = o(t)$ и существуют пределы $\alpha^i = \lim \log | a_t^i | / t$ (здесь a_t^i - диагональные элементы матрицы A_t); числа α^i образуют набор показателей последовательности $\{A_t\}$.

Теоремы 4.I - 4.3 переносятся на случай, когда параметр t принимает непрерывные значения. При этом условие $\log \| A_{t+1} A_t^{-1} \| = o(t)$ заменяется на условие (ср. § 2)

$$\sup \{ \log \| A_{t+\tau} A_t^{-1} \| : 0 \leq \tau \leq 1 \} = o(t). \qquad (*)$$

Линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = B(t)x$ в пространстве V называется правильным, если его фундаментальная матрица $A(t) \in GL(V)$ правильна по Ляпунову. Если $\log^+ \| B(t) \| = o(t)$, то условие $(*)$ выполнено (обратное вообще говоря, неверно). Таким образом, теоремы 4.2 и 4.3 дают необходимые и достаточные условия правильности линейных систем с субэкспоненциальным ростом коэффициентов. Для случая ограниченных коэффициентов и треугольных матриц теорема 4.3 - это критерий Ляпунова [I], теорема 4.2 для случая ограниченных коэффициентов также известна [2] *). Подчеркнем, что условие $(*)$ является необходимым

---

*) В [2] эти утверждения сформулированы без всяких предположений об ограниченности коэффициентов $B(t)$, но это условие по существу там используется. Какие-либо ограничения на недиагональ-

для правильности системы. Если оно нарушено (при этом, естественно, $\log^+\|B(t)\| \neq o(t)$), то даже треугольная система не может быть правильной, хотя бы точные средние у диагональных элементов $B(t)$ и существовали. Простейший пример:

$$B(t)=\begin{pmatrix} 0 & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t)=\begin{pmatrix} 1 & e^t-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Л я п у н о в А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т.2, М.-Л., 1956, с.7-263.
2. Б ы л о в Б.Ф., В и н о г р а д Р.Э., Г р о б м а н Д.М., Н е м ы ц к и й В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
3. О с е л е д е ц В.И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем. Тр.Моск.Мат.Об-ва, 1968, т.19, с.179-210.
4. К а й м а н о в и ч В.А. Энтропийный критерий максимальности границы случайных блужданий на дискретных группах. Докл.АН СССР, 1985, т.280, № 5, с.1051-1054.
5. Ж е л о б е н к о Д.П., Ш т е р н А.И. Представления групп Ли. - М., 1983.
6. G u i v a r c ' h Y. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. Astérisque, 1980, v.74, p.47-98.
7. S a t a k e I. On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. Ann. of Math., 1960, v.71, N 1, p.77-110.
8. M o o r e C.C. Compactifications of symmetric spaces. I. Amer.J.Math., 1964, v.86, N 1, p.201-218.
9. К а р п е л е в и ч Ф.И. Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами - Лапласа на симметрических пространствах. Тр.Моск.Мат.Об-ва, 1965, т.14, с.48-185.
10. B o r e l A., T i t s J. Groupes réductifs. Publ.Math. IHES, 1965, v.27, p.55-151.

ные коэффициенты отсутствуют и в формулировке критерия Ляпунова в статье В.М.Миллионщикова "Правильные линейные системы" в т.4 Математической Энциклопедии (в оригинальной работе Ляпунова условие ограниченности коэффициентов явно сформулировано), хотя, как будет показано ниже, без таких ограничений критерий Ляпунова несправедлив.

II. Eberlein P., O' Neill B. Visibility manifolds. Pacif.J.Math., 1973, v.46, N 1, p.45-109.

I2. Ольшанецкий М.А. Граница Мартина для оператора Лапласа - Бельтрами на римановом симметрическом пространстве неположительной кривизны. УМН, 1969, т.24, № 6, с.189-190.

I3. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964.

I4. Александров А.Д. Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения. Тр.Мат. ин-та АН СССР, 1951, т.38, с.5-23.

I5. Raghunathan M.S. A proof of Oseledec' multiplicative ergodic theorem. Israel J.Math., 1979, v.32, N 3, p. 356-362.

I6. Raugi A. Fonctions harmoniques sur les groupes localement compacts à base dénombrable. Bull.SMF, 1977, Mém. 54, p.5-118.

I7. Ruelle D. Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space. Ann.of Math., 1982, v.115, N 2, p.243-290.

I8. Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. М., 1981.

I9. Кайманович В.А. Глобальный закон больших чисел для групп Ли. - В кн.: IУ Межд.Вильнюсская Конф. по теории вероят. и матем. стат. Тезисы докладов. Т.2. Вильнюс, 1985, с.9-II.

20. Кайманович В.А. Границы случайных блужданий на полициклических группах и закон больших чисел для разрешимых групп Ли. Вестник ЛГУ, сер.I, 1987, № 4, с. 38-45.

2I. Захаревич М.И. Характеристические показатели и векторная эргодическая теорема. Вестник ЛГУ, 1978, № 7, с.28-34.

On the dynamical system generated by the equations of motion of Oldroyd fluids of order L. Karazeeva N.A., Cotsiolis A.A., Oskolkov A.P. In: Differential geometry. Lie groups and mechanics IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164) L. "Nauka", 1987, p.47-53.

A construction is given of the attractor for the initial boundary value problem for the equations of motion of Oldroyd fluids of order L in dimension 2. Properties of the evolution operator V_t, $t \in \mathbb{R}$, are studied and dynamical system $\{\mathcal{M}, V_t, t \in \mathbb{R}\}$ is described. Bibl. - 14.

Н.А.Каразеева, А.А.Котсиолис,
А.П.Осколков

О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ПОРОЖДАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА ПОРЯДКА L.

I. Работы О.А.Ладыженской [I - 3] вызвали к жизни новое направление в теории начально-краевых задач и теории ассимптотических методов для уравнений с частными производными - нахождение аттрактора $\mathfrak{M}$ начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений с диссипацией и построение и исследование на $\mathfrak{M}$ динамических систем, порождаемых этими начально-краевыми задачами (см.[4 , 5]). В работах [6 , 7] с помощью методов работ [I - 3] построены и изучены аттрактор $\mathfrak{M}$ и динамическая система $\{\mathfrak{M}; V_t, \ -\infty < t < \infty\}$ основной начально-краевой задачи для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка I. В настоящей заметке мы распространяем эти результаты на случай жидкостей Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$.

2. Жидкостью Олдройта порядка $L = 1, 2, \ldots$ называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой, связывающее девиатор тензора напряжений σ и тензор скоростей деформаций $\mathbb{D}$ имеет вид [8 , 9]:

$$\sigma + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^\ell \sigma}{\partial t^\ell} = 2\nu\mathbb{D} + 2\sum_{\ell=1}^{L} \varkappa_\ell \frac{\partial^\ell \mathbb{D}}{\partial t^\ell}\ , \quad \nu, \lambda_L, \varkappa_L > 0\ . \tag{I}$$

Предположим, что времена релаксации $\{\lambda_\ell\}$ удовлетворяют следующим условиям: корни $\{\alpha_\ell\}$ полинома $Q(p) \equiv 1 + \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell p^\ell$ различны, т.е. $Q'(\alpha_\ell) \neq 0$, $\ell = 1, \ldots, L$, вещественны и отрицательны: $\alpha_\ell < 0$, $\ell = 1, \ldots, L$, и, кроме того, времена релаксации $\{\lambda_\ell\}$, коэффициент вязкости ν и времена ретардации $\{\varkappa_\ell\}$ удовлетворяют условиям:

$$\beta_\ell \equiv [Q'(\alpha_\ell)]^{-1}\{\nu - \varkappa_L \lambda_L^{-1} + \sum_{s=1}^{L-1} (\varkappa_s - \varkappa_L \lambda_L^{-1} \lambda_s)\alpha_\ell^s\} > 0, \quad \ell = 1, \ldots, L\ . \tag{2}$$

Условия (2) обобщают известное условие Олдройта[8] для жидкости Олдройта порядка I: $\nu - \varkappa\lambda^{-1} > 0$.Для жидкости Олдройта порядка 2 описанные выше условия на $\nu, \{\lambda_\ell\}, \{\varkappa_\ell\}$ сводятся к следующим[I0-I2]:

$$\mathcal{D}\equiv\lambda_1^2-\gamma\lambda_2>0,\ \nu\lambda_2-\varkappa_2+(\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2)(-\lambda_1+\sqrt{\mathcal{D}})>0,\ \nu\lambda_2-\varkappa_2-(\varkappa_1\lambda_2-\lambda_1\varkappa_2)(\lambda_1+\sqrt{\mathcal{D}})<0. \quad (3)$$

В [II - I2] показано, что при условиях (2) движение жидкостей Олдройта порядка L описывается либо системой интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v_k\frac{\partial v}{\partial x_k}-\mu\Delta v-\sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell\int_0^t e^{\alpha_\ell(t-\tau)}\Delta v\,d\tau+\operatorname{grad}p=f,\ \operatorname{div}v=0,\ \mu=\varkappa_L\cdot\lambda_L^{-1}, \quad (4)$$

либо - после введения новых неизвестных функций $u^\ell\equiv\int_0^t e^{\alpha_\ell(t-\tau)}v\,d\tau$,

$\ell=1,\dots,L$ - операторным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial t}+\Lambda\vec{\varphi}=\vec{F}\ . \quad (5)$$

В уравнении (5) $\vec{\varphi}\equiv(v,u^1,\dots,u^L)$, $\vec{F}\equiv(\mathcal{P}f,0,\dots,0)$,

$$\Lambda\equiv\begin{pmatrix} -\mu\tilde{\Delta}+A & -\beta_1\tilde{\Delta} & -\beta_2\tilde{\Delta} & \dots & -\beta_L\tilde{\Delta}\\ -1 & -\alpha_1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 0 & -\alpha_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_L\end{pmatrix} \quad (6)$$

$\tilde{\Delta}\equiv\mathcal{P}\Delta$, $A(v)\equiv\mathcal{P}(v_k v_{x_k})$, а $\mathcal{P}$ - ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ [I3].

Основная начально-краевая задача для системы (4), или, что то же, уравнения (5), (6) заключается в решении системы (4) (или уравнения (5),(6)) в $Q_\infty\equiv\Omega\times[0,\infty)$, Ω - ограниченная область из E^2, при начально-краевых условиях

$$\vec{\varphi}\Big|_{t=0}=\{v_0(x),0,\dots,0\},\ x\in\Omega;\ \vec{\varphi}\Big|_{\partial Q_\infty}=0\ . \quad (7)$$

В [I0] доказана следующая теорема существования в целом на $[0,\infty)$ единственного классического решения начально-краевой задачи (5)-(7).

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия: Ω - ограниченная область из E^2 ; $\partial\Omega\in C^{2+\gamma}$; $v_0(x)\in C^{2+\gamma}(\bar\Omega)\cap H(\Omega)$; $f(x,t)\in L_\infty(0,\infty;C^\gamma(\bar\Omega))$,

$$0<\gamma<1;\ f_t\in L_{2,1}(Q_\infty);\quad \alpha_\ell<0,\ \beta_\ell>0,\quad \alpha=1,\dots,L .$$

Тогда начально-краевая задача (5)-(7) имеет единственное решение

$$\vec\varphi(x,t)\in\{L_\infty(0,\infty;C^{2+\gamma}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))\cap W^1_\infty(0,\infty;C^\gamma(\bar\Omega)\cap \mathring{J}(\Omega))\}\times$$

$$\times\prod_{\ell=1}^{L}\{W^1_\infty(0,\infty;C^{2+\gamma}(\bar\Omega)\cap H(\Omega))\cap W^2_\infty(0,\infty;C^\gamma(\bar\Omega)\cap\mathring{J}(\Omega))\},$$

и для этого решения имеет место оценка:

$$\|v,u^\ell_t\|_{L_\infty(0,\infty;C^{2+\gamma}(\bar\Omega))}+\|v_t,u^\ell_{tt}\|_{L_\infty(0,\infty;C^\gamma(\bar\Omega))}\leqslant$$

$$\leqslant C_1(\|v_0\|^{(2+\gamma)}_{\bar\Omega};\ \|f\|_{L_\infty(0,\infty;C^\gamma(\bar\Omega))};\ \|f_t\|_{2,1,Q_\infty};\ \mu^{-1},\alpha_\ell^{-1},\beta_\ell^{-1}). \tag{8}$$

3. Будем предполагать в дальнейшем, что в уравнении (5) $f(x,t)\equiv f(x)$, $t\geqslant 0$. Положим $E_0(\Omega)\equiv\mathring{J}(\Omega)\times\prod_{\ell=1}^{L}H(\Omega)$, $\|\vec\varphi\|^2_{E_0}\equiv$

$$\equiv\|v\|^2_{2,\Omega}+\sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell\|u^\ell_x\|^2_{2,\Omega},$$ и возьмем $E_0(\Omega)$ в качестве фазового пространства задачи (5),(7). На нем, как показал А.П.Осколков [I4], определена полугруппа V_t , $t\geqslant 0$, граниченных непрерывных нелинейных операторов, однозначно определяющих слабое обобщенное решение (обобщенное решение в смысле Э.Хопфа [13]) $\vec\varphi(\cdot,t)\equiv\vec\varphi(t)$ задачи (5)-(7) по его значению при $t=0$: $\vec\varphi(t)\equiv V_t(\vec\varphi(0))$. Для такого решения $\vec\varphi(t)$ при почти всех $t\geqslant 0$ справедливо энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec\varphi\|^2_{E_0}+\mu\|v_x\|^2_{2,\Omega}+\sum_{\ell=1}^{L}\alpha_\ell\beta_\ell\|u^\ell_x\|^2_{2,\Omega}=(f,v)_{2,\Omega}, \tag{9}$$

из которого для слабого решения задачи (5)-(7) следует оценка

$$\|\vec{\varphi}\|_{E_0} \leqslant R_0 \equiv (\mu\lambda_1)^{-1}\|f\|_{2,\Omega}\ , \quad t \geqslant 0\ , \tag{10}$$

где λ_1 - первое собственное число спектральной задачи [13]

$$-\Delta\psi + \nabla\psi = \lambda\psi, \quad div\psi = 0, \quad x\in\Omega; \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0\ , \tag{11}$$

и, кроме того, легко выводится (ср. [1], [5]) заключение о том, что шар $B_0 \equiv \{\vec{\varphi} : \vec{\varphi}\in E_0(\Omega), \|\vec{\varphi}\|_{E_0} < R_0\}$ является поглощающим для любого ограниченного множества $B\in E_0(\Omega)$ и $V_t(B_0)\subset \subset B_0$.

Следуя [1 - 5], назовем аттрактором (точнее говоря [4, 5], минимальным глобальным B-аттрактором) задачи (5)-(7) множество $\mathfrak{M} \equiv \bigcap_{t\geqslant 0} V_t(B_0)$.

Положим, далее, $E_s(\Omega) \equiv (W_2^s(\Omega)\cap H(\Omega))\times\prod_{\ell=1}^{L}(W_2^{s+1}(\Omega)\cap H(\Omega))$,

$$\|\vec{\varphi}\|_{E_s}^2 \equiv (\|v\|_{2,\Omega}^{(s)})^2 + \sum_{\ell=1}^{L}\beta_\ell(\|u^\ell\|_{2,\Omega}^{(s+1)})^2, \qquad s = 1,2,\ldots\ .$$

Тогда, как в [1] для двумерной системы Навье-Стокса и в [7] для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка 1, доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть Ω - ограниченная область из E^2, $\partial\Omega \in C^{s+1}$, $f(x)\in W_2^{s-1}(\Omega)\cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $s = 1,2,\ldots$. Тогда для слабого решения $\vec{\varphi}(x,t)$ задачи (5)-(7) при $\forall t > 0$ справедлива оценка

$$\|\vec{\varphi}(\cdot,t)\|_{E_s} \leqslant C_s(\mu^{-1}, \alpha_\ell^{-1}, \beta_\ell^{-1}; \|f\|_{2,\Omega}^{(s-1)})\ . \tag{12}$$

В силу теоремы 2 эволюционный оператор V_t задачи (5)-(7) при $\forall t>0$ переводит шар B_0 в множество $V_t(B_0)$, ограниченное в $E_1(\Omega)$ и компактное в $E_0(\Omega)$, и потому справедлива

ТЕОРЕМА 3. Эволюционный оператор V_t задачи (5)-(7) при $\forall t>0$ является вполне непрерывным в $E_0(\Omega)$, а аттрактор $\mathfrak{M}$ является непустым, связным, инвариантным, компактом в $E_0(\Omega)$ и ограниченным в $E_s(\Omega)$, $s\geqslant 1$, множеством.

Наконец, так же, как в [1] (см. также [5]) для двумерной системы Навье-Стокса и в [7], [12], для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка 1, доказывается:

ТЕОРЕМА 4. Полугруппа $V_t : E_0(\Omega) \Rightarrow E_0(\Omega)$, $t \geq 0$, для задачи (5)-(7) в $\Omega \in E^2$ продолжается на $\mathfrak{M}$ до непрерывной группы $V_t : \mathfrak{M} \Rightarrow \mathfrak{M}$, $-\infty < t < \infty$, $V_t = V_{-t}^{-1}$ $t < 0$, и $\vec{\varphi}(t) \equiv V_t(\vec{\varphi}(0))$, $\vec{\varphi}(0) \in \mathfrak{M}$, $-\infty < t < \infty$, есть решение уравнения (5), (6). Аттрактор $\mathfrak{M}$ состоит из тех и только тех элементов $\vec{\psi} \in B_0$, для которых задача (5)-(7) имеет решение $\vec{\varphi}(t) \equiv V_t(\vec{\psi})$, равное $\vec{\psi}$ при $t = 0$, при $\forall t \in (-\infty, \infty)$.

Пара $\{\mathfrak{M}; V_t, -\infty < t < \infty\}$ и является динамической системой, порождаемой начально-краевой задачей (5)-(7) о двумерных движениях жидкостей Олдройта порядка L .

4. Пусть $\mathcal{E}^n$ - n-мерное подпространство пространства $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, натянутое на первые n собственных функций спектральной задачи (II), P_n - ортопроектор на $\mathcal{E}^n$ из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, $Q_n \equiv I - P_n$.
Пусть, далее, $\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t) - \tilde{\vec{\varphi}}(t) \equiv \{W, \hat{W}^1, \dots, \hat{W}^L\}$ - разность двух произвольных решений $\vec{\varphi}(t) \equiv \{v, u^1, \dots, u^L\}$ и $\tilde{\vec{\varphi}}(t) \equiv \{v, \tilde{u}^1, \dots, \dots, \tilde{u}^L\}$ задачи (5)-(7) из $\mathfrak{M}$, $\vec{\varphi}''(t) \equiv \vec{\varphi}''(t) - \tilde{\vec{\varphi}}''(t) \equiv$ $\equiv \{W'', (\hat{W}^1)'', \dots, (\hat{W}^L)''\} \equiv \{Q_n W, Q_n \hat{W}^1, \dots, Q_n \hat{W}^L\}$. Для $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\varphi}''(t)$ справедливы соотношения (ср. [I], [5], [8]):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}\|^2_{E_0} + \mu\|W_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{L}\alpha_\ell\beta_\ell\|\hat{W}^\ell_x\|^2_{2,\Omega} = \int_\Omega W_k \tilde{v} W_{x_k}\, dx, \quad -\infty < t < \infty \tag{I3}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\vec{\varphi}''\|^2_{E_0} + \mu\|W''_x\|^2_{2,\Omega} + \sum_{\ell=1}^{L}\alpha_\ell\beta_\ell\|\hat{W}''_x\|^2_{2,\Omega} = \int_\Omega (\tilde{v}_k W + W_k v) W''_{x_k}\, dx, \tag{I4}$$

из которых с помощью оценки (I2) точно так же, как в [I], [3], [5] для двумерной системы Навье-Стокса и в [8], [I2] для двумерной системы уравнений движения жидкостей Олдройта порядка I, получаются следующие результаты.

ТЕОРЕМА 5. Если для двух решений $\vec{\varphi}(t)$ и $\tilde{\vec{\varphi}}(t)$ из $\mathfrak{M}$ задачи (5)-(7) при достаточно большом $N \equiv N(\mu^{-1}, \max_\Omega |v_x|)$ справедливы равенства: $P_N(v(t)) = P_N(\tilde{v}(t))$ и $P_N(u^\ell(t)) =$ $= P_N(\tilde{u}^\ell(t))$, $\ell = 1, \dots, L$, $-\infty < t < \infty$, то $\vec{\varphi}(t) \equiv \tilde{\vec{\varphi}}(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Эта теорема доказывает "конечномерность динамики V_t задачи

(5)-(7) на $\mathfrak{M}$ " (см. [I],[3],[5]).

ТЕОРЕМА 6. Для $\forall \vec{\psi}$, $\vec{\tilde{\psi}} \in \mathfrak{M}$ и $\forall t \in (-\infty, \infty)$ справедливы неравенства:

$$\| V_t(\vec{\psi}) - V_t(\vec{\tilde{\psi}}) \|_{E_0} \leq \ell \| \vec{\psi} - \vec{\tilde{\psi}} \|_{E_0} \quad , \quad \ell \equiv \ell(\mu^{-1}, t) , \tag{I5}$$

$$\| Q_N V_t(\vec{\psi}) - Q_N V_t(\vec{\tilde{\psi}}) \|_{E_0} \leq \delta \| \vec{\psi} - \vec{\tilde{\psi}} \|_{E_0} , \quad 0 < \delta \equiv \delta(\mu^{-1}, N, t) < 1 , \tag{I6}$$

$$N \equiv N(\mu^{-1}, \Omega, t) >> 1 ,$$

из которых следуют конечность хаусдорфовой $d_H(\mathfrak{M})$ и информационной $h(\mathfrak{M})$ размерностей аттрактора $\mathfrak{M}$ и оценка:

$$\dim_H \mathfrak{M} \leq h(\mathfrak{M}) \leq N \ln\left(\frac{8 \varkappa^2 \ell^2}{1 - \delta^2}\right) \ln^{-1}\left(\frac{2}{1 + \delta^2}\right) , \tag{I7}$$

где $\varkappa$ - постоянная Гаусса [5].

Авторы выражают благодарность Л.Д.Фаддееву и О.А.Ладыженской за поддержку их исследований по гидродинамике неньютоновских жидкостей.

Литература

I. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. -В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап.науч. семин.ЛОМИ, I972, т.27, с.9I-II4.

2. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. II. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I979, т.84, с.I3I-I46.

3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных системе. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I4. Зап.науч.семин. ЛОМИ, I982, т.II5, с.I37-I55.

4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Об аттракторах нелинейных эволю-

ционных задач с диссипацией. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I8. Зап.науч. семин.ЛОМИ, I986, т.I52, с.72-85.

5. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О нахождении минимальных глобальных -аттракторов для полугрупп, порождаемых начально-краевыми задачами для нелинейных диссипативных уравнений с частными производными. Препринт ЛОМИ Е-3-87, Л., I987, 54 с.

6. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О предельных режимах и аттракторе для уравнений движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I8. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I52, с.67-7I.

7. К о т с и о л и с А.А., О с к о л к о в А.П. О динамической системе,ппрождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УШ. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I55, с.II9-I25.

8. О л д р о й т Дж. Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Реология. Теория и приложения. М.,I962, с.262-3I0.

9. B i r d R., A r m s t r o n g R., H a s s a g e r R. Dynamics of polymeric liquids. Vol.1. Fluid mechanics.N.-Y.,1977.

I0. К а р а з е е в а Н.А. О разрешимости в целом на $[0,\infty)$ основной начально-краевой задачи для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта. - В кн. : Математические вопросы теории распространения волн. I6. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I986, т.I56, с.69-72.

II. О с к о л к о в А.П., А х м а т о в М.М., К о т с и о л и с А.А. Об уравнениях движения линейных вязкоупругих жидкостей и уравнениях фильтрации жидкостей с запаздыванием. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. I9. Зап.науч.семин.ЛОМИ, I987, т.I63, с.I03-I09.

I2. К о т с и о л и с А.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. Автореф.канд.дисс., Л., I987, II с.

I3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-ое изд., М., I970.

I4. О с к о л к о в А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ Р-2-83, Л., I983, 65 с.

А.Н.Кириллов

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ В КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ Sh - Gordon.

Настоящая работа является продолжением статьи автора [I] ; мы дадим простое доказательство теоремы 2 из [I] , приведем явные формулы для формфакторов в квантовой модели Sh-Gordon и изучим их некоторые свойства.

п°I. Введение. Формулировка результатов. Квантовый вариант модели Sh-Gordon был построен в [2] с использованием квантовых уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко (УГЛМ). Существенным моментом построения является проверка локальной коммутативности локальных полей $\varphi_j(x)$, заданных формулами (7.9) и (7.I0) работы [2] . Проверка основана на изучении свойств коэффициентов $f_{mn}(w_1 \ldots w_m | u | v_n \ldots v_1)$ в разложении операторов $\Phi_+^{(i)}(0,u)$, $i=1,2$, определенных формулами (7.5 а,в) из [2] , по элементам алгебры Замолодчикова-Фаддеева (см. [2] , § 3). Функции f_{mn} изучены в [I] . Они удовлетворяют тождествам (I.6)-(I.II) из [I] , следствием которых, как это показано в [2] , §§ 7,8, являются T -инвариантность, СРТ-инвариантность и локальная коммутативность квантовой модели Sh - Gordon . Как показано в [I] , формулы (2.5),(2.I5),(2.I6), функции f_{mn} выражаются через полиномы $Q_n(z|x)$. Напомним их определение ([I], 2.7). Пусть a - параметр, $b=a^{-1}$. Определим семейство полиномов $Q_n(z|x_1,\ldots,x_n)$, $n\geqslant 1$, при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$Q_n(z|x)=Q_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)=\sum_{l=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{(ax_l+x_j)(z-x_j)}{x_l-x_j}\,Q_{n-1}^{(a)}(bx_l|x_1\ldots\hat{x}_l\ldots x_n), \tag{I}$$

$$n\geqslant 2,\quad Q_1(z|x)=1. \tag{2}$$

Рекуррентные соотношения (I) и начальное условие (2) однозначно определяют последовательность полиномов $Q_n(z|x)$, которые с точностью до "стандартных" множителей и замены переменных, см. [I], (2.5), и [2] , (7.5 а,в), совпадают с формфакторами для квантовой модели Sh - Gordon.

Важное свойство полиномов $Q_n(z|x)$, необходимое для построения квантовой модели Sh - Gordon , состоит в том, что эти полиномы удовлетворяют также следующим рекуррентным соотношениям

$$Q_n(z|X)=\sum_{l=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{(bx_l+x_j)(az+x_j)}{x_j-x_l}\,Q_{n-1}(-x_l|x_1\ldots\hat{x}_l\ldots x_n),\ n\geq 2. \tag{3}$$

Таким образом, мы приходим к следующей чисто алгебраической задаче: рассмотрим семейство полиномов $Q_n(z|x_1\ldots x_n)$ степени $(n-1)$ по переменной z, симметричных по $x_1,\ldots,x_n$, и удовлетворяющих рекуррентному соотношению

$$Q_n(x_n|x_1\ldots x_n)=\prod_{j=1}^{n-1}(ax_n+x_j)Q_{n-1}(bx_n|x_1\ldots x_{n-1}),\ Q_1=1.$$

Доказать, что тогда

$$Q_n(-bx_n|x_1\ldots x_n)=\prod_{j=1}^{n-1}(bx_n+x_j)Q_{n-1}(-x_n|x_1\ldots x_{n-1}).$$

Автору неизвестно решение этой задачи, которое бы не использовало явного вида полиномов $Q_n(z|X)$.

Настоящая работа посвящена вычислению полиномов Q_n, исследованию их свойств, и простому доказательству следующего тождества:

пусть $Q_n^{(b)}(z|X)$ - семейство полиномов, которые задаются рекуррентными соотношениями (I) и (2) с использованием параметра b вместо a (т.е. заменой параметров a и b в полиномах $Q_n^{(a)}(z|X)$ на b и a).

ТЕОРЕМА I. Имеет место соотношение

$$Q_n^{(b)}(z|X)=Q_n^{(a)}(-bz|X). \tag{4}$$

Как нетрудно показать (см. [I], теорема 2), из равенства (4) (тождество (2.I8) работы [I]) следуют все остальные тождества теоремы 2 из [I] и, следовательно, тождество (3), а также T-инвариантность, CPT-инвариантность, эквивалентность УГЛМ и локальная коммутативность квантовой модели Sh-$Gordon$ (подробности см. [2], §§ 7,8).

Доказательство тождества (4) основано на явной формуле для полиномов $Q_n(z|X)$. Мы приведем два эквивалентных представления для Q_n: одно в виде чистого определителя матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$ (теорема 3, формула 9), а другое - в виде отношения определителя матрицы размера $n\times n$ и произведения некоторого числа линейных множителей (теорема 2, формула (7)). Наше первоначальное доказательство тождества (4) использовало формулу (9). Проверка того, что правая часть в (9) удовлетворяет рекуррентному соотношению (I) оказывается нетривиальной задачей и опирается на лемму I. К сожалению, известное автору доказательство леммы I состоит в длинной последовательности громоздких преобразований над матрицами и не проясняет внутренних причин, по которым бы она была справедлива. Поэтому мы не будем приводить здесь соответствующие вычисления. С другой стороны, проверка того, что правая часть равенства (7) удовлетворяет тождеству (I) является вполне элементарной.

Формула (9) была получена автором в процессе доказательства (4), как итог длинных вычислений. Формула (7) возникла в результате исследования вырождения солитонных формфакторов для квантовой модели Sine - Gordon, вычисленных в работах [3],[4], в точках, отвечающих связанным состояниям с наименьшей массой (другими словами, мы должны разбить все быстроты $\{\beta\}_1^{2n}$ на пары $\{\beta_{2j-1}, \beta_{2j}\}_1^{n}$, и в формуле для $\phi(P)$ на стр. L557,[3], положить: $\beta_{2j-1} = \mu_j - \frac{\pi i}{2} + 2i\gamma$, $\beta_{2j} = \mu_j + \frac{\pi i}{2} - 2i\gamma$, после чего произвести "приведение подобных членов"). На связь между формфакторами в квантовых моделях Sh - Gordon и Sine - Gordon указал автору Ф.А.Смирнов.

Перейдем теперь к формулировке результатов о вычислении полиномов $Q_n(z|x)$. Введем многочлены

$$B^{(a)}_{\alpha,k}(z|x_1\ldots x_n) = x_\alpha^{2k-1}\left\{(x_\alpha+az)\prod_{j\neq\alpha}(ax_\alpha+x_j)+a^{2k+1}(x_\alpha-z)\prod_{j\neq\alpha}(bx_\alpha+x_j)\right\}, \quad (5)$$

и положим

$$F^{(a)}_n(z|x_1\ldots x_n) = \det\left| B^{(a)}_{\alpha,k}(z|x_1\ldots x_n)\right|_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ 0\leq k\leq n-1}}. \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 2. Имеет место равенство

$$Q^{(a)}_n(z|x_1\ldots x_n) = \frac{F^{(a)}_n(z|x_1\ldots x_n)}{(1+a)^n\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)(ax_i+x_j)(x_i+ax_j)}. \quad (7)$$

СЛЕДСТВИЕ I. $Q^{(a)}_n(z|x)$ является полиномом степени $(n-1)$ от $t=(a-1)z$, причем коэффициент при t^{n-1} у многочлена $Q^{(a)}_n(z|x)$ делится на $\sigma_1 = x_1+\ldots+x_n$.

ТЕОРЕМА 3 (Формула без знаменателей).

Рассмотрим матрицу $(A_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1}$, где

$$A_{ij} = \frac{a^{j-i-1/2}+b^{j-i-1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}\,\sigma_{2i-j} + \frac{a^{j-i+1}-b^{j-i+1}}{a^{1/2}+b^{1/2}}\;a^{1/2}z\,\sigma_{2i-j-1}, \quad (8)$$

где $b = a^{-1}$, σ_k – k-ая элементарная симметрическая функция от переменных $x_1,\dots,x_n$.

Тогда справедливо следующее равенство

$$Q_n^{(a)}(z|x_1\dots x_n) = \det|A_{ij}|_{1\le i,j\le n-1}. \tag{9}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Коэффициент при $[(a-1)z]^{n-1}$ у полинома $Q_n(z|x)$ равен

$$\det\left|\frac{a^{j-i+1}-b^{j-i+1}}{a-b}\sigma_{2i-j-1}\right|_{0\le i,j\le n-1}. \tag{10}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеет место равенство

$$Q_n^{(a)}(0|x_1\dots x_n) = \det\left|\frac{a^{j-i-1/2}+b^{j-i-1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}}\sigma_{2i-j}\right|_{1\le i,j\le n-1}. \tag{11}$$

Доказательство теоремы 3 основано на следующей лемме: определим полиномы $\mathcal{D}_n(z|\sigma_1\dots\sigma_n)$ по формулам (8) и (9), в которых $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ будем рассматривать как набор независимых переменных, $\sigma_\alpha = 0$, если $\alpha\notin[1,n]$.

ЛЕММА I. Имеет место равенство

$$\mathcal{D}_n(z|\sigma_1+z,\sigma_2+\sigma_1 z,\dots,\sigma_{n-1}+\sigma_{n-2}z,\sigma_{n-1}z) = \tag{12}$$
$$=\left[(az)^{n-1}+\sigma_1(az)^{n-2}+\dots+\sigma_{n-1}\right]\mathcal{D}_{n-1}(bz|\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}).$$

п°2. Доказательство теорем I и 2 и следствия I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Обозначим правую часть формулы (7) через $\Pi_n(z|x_1\dots x_n)$. Покажем сначала, что $\Pi_n(z|x)$ является полиномом по x, a. Полиномиальность по a очевидна, так как $B_{\alpha,k}^{(a)}(z|x)|_{a=-1}=0$. Пусть теперь $1\le\alpha\ne\beta\le n$, $ax_\alpha+x_\beta=0$. Тогда (при $k\ge 0$) $B_{\alpha,k+1}(z|x)-x_\beta^2 B_{\alpha,k}(z|x)=$
$$=(ax_\alpha+x_\beta)x_\alpha^{2k-1}\Big\{(x_\alpha+az)\prod_{j\ne\alpha,\beta}(ax_\alpha+x_j)(x_\alpha^2-x_\beta^2)+a^{2k+1}(ax_\alpha-x_\beta)\prod_{j\ne\alpha}(bx_\alpha+x_j)\Big\}=0,$$

$$B_{\beta,k+1}(z|x)-x_\beta^2 B_{\beta,k}(z|x)=(ax_\beta)^{2k}(a^2-1)(x_\beta-z)(ax_\alpha+x_\beta)\prod_{j\ne\alpha,\beta}(bx_\beta+x_j)=0.$$

Следовательно, $F_n^{(a)}(z|x)\big|_{x_\beta=-ax_\alpha}=0$. Аналогично, рассматривая разность $B_{\alpha,k+1}(z|x)-a^2x_\beta^2 B_{\alpha,k}(z|x)$, можно показать, что $F_n(z|x)$ делится на $x_\alpha+ax_\beta$. Итак, $\Pi_n(z|x)$ – полином, степень которого по z не превосходит n. Покажем, что $\Pi_n(z|x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (I). Для этого сперва найдем значения $\Pi_n(z|X)$ в точках $z=x_\alpha, 1\leqslant\alpha\leqslant n$. Воспользуемся следующей легко проверяемой формулой

$$B_{\alpha,k+1}(x_\beta|X)-x_\beta^2 B_{\alpha,k}(x_\beta|X)=(x_\alpha-x_\beta)(x_\alpha+ax_\beta)(ax_\alpha+x_\beta)B_{\alpha,k}(bx_\beta|x_1\ldots\hat{x}_\beta\ldots x_n), \quad (I3)$$

где $k\geqslant 0, 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n$, $B_{\alpha,0}(x_\alpha|x_1\ldots x_n)=(1+a)\prod_{j\neq\alpha}(ax_\alpha+x_j)$.

Из соотношения (I3) следует, что $B_{\alpha,k}(x_\alpha|X)=0$ при $k\geqslant 1$; таким образом мы показали, что

$$\Pi_n(x_\alpha|X)=\prod_{j\neq\alpha}(ax_\alpha+x_j)\Pi_{n-1}(bx_\alpha|x_1\ldots\hat{x}_\alpha\ldots x_n),\ \Pi_1(z|X)\equiv 1. \quad (I4)$$

Рассмотрим теперь разность

$$\Delta_n(z|X)=\Pi_n(z|X)-\sum_{\ell=1}^{n}\prod_{j\neq\ell}\frac{(ax_\ell+x_j)(z-x_j)}{x_\ell-x_j}\Pi_{n-1}(bx_\ell|x_1\ldots\hat{x}_\ell\ldots x_n). \quad (I5)$$

Из (I4) следует, что $\Delta_n(x_\alpha|X)=0,\ 1\leqslant\alpha\leqslant n$, таким образом

$$\Delta_n(z|X)\equiv 0 \mod \prod_{j=1}^{n}(z-x_j).$$

Мы хотим доказать, что $\Delta_n(z|X)\equiv 0$. Ясно, что для этого достаточно показать, что степень по z полинома $\Pi_n(z|X)$ не превосходит $(n-1)$. Для того, чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим дифференциалы

$$\omega_k=\frac{y^{2k}(y+az)\,dy}{\prod_{j=1}^{n}(y-x_j)(y+ax_j)},\quad 0\leqslant k\leqslant n-1.$$

Заметим сначала, что

$$\frac{B_{\alpha,k}(z|X)}{(1+a)\prod_{j\neq\alpha}(x_\alpha-x_j)(ax_\alpha+x_j)(x_\alpha+ax_j)}=\operatorname{Res}_{y=x_\alpha}\omega_k+\operatorname{Res}_{y=-ax_\alpha}\omega_k.$$

Далее, дифференциал ω_k не имеет полюсов на бесконечности при $0\leqslant k\leqslant n-2$, и имеет на бесконечности полюс первого порядка с вычетом равным (-1) при $k=n-1$. Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{B_{\alpha,k}(z|X)}{(1+a)\prod_{j\neq\alpha}(x_\alpha-x_j)(x_\alpha+ax_j)(ax_\alpha+x_j)}=\begin{cases}0, \text{если } 0\leqslant k\leqslant n-2.\\ 1, \text{если } k=n-1.\end{cases} \quad (I6)$$

Из тождества (I6) выводим следующее равенство

$$B_{s,k}(z|X)-\sum_{\substack{\alpha=1\\ \alpha\neq s}}^{n} B_{\alpha,k}(z|X)\prod_{j\neq\alpha,s}\frac{(x_s-x_j)(ax_s+x_j)(x_s+ax_j)}{(x_\alpha-x_j)(ax_\alpha+x_j)(x_\alpha+ax_j)}=$$

$$=(1+a)\prod_{j\neq s}(x_s-x_j)(ax_s+x_j)(x_s+ax_j)\delta_{k,n-1}. \tag{I7}$$

Таким образом, вычитая из последнего столбца матрицы $(B_{\alpha,k}(z|X))$ подходящую линейную комбинацию остальных столбцов, получаем для $\Pi_n(z|X)$ следующее представление

$$\Pi_n(z|X)=\frac{\det|B_{\alpha,k}(z|X)|_{\substack{1\leq\alpha\leq n-1\\ 0\leq k\leq n-2}}}{(1+a)^{n-1}\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x_n-x_j)(ax_n+x_j)(x_n+ax_j)}. \tag{I8}$$

Из представления (I8) вытекает, что степень по z полинома $\Pi_n(z|X)$ не превосходит $(n-1)$, что и требовалось доказать. Из доказанного утверждения следует, что степень по z полинома $\Delta_n(z|X)$, определенного формулой (I5), не превосходит $(n-1)$ и, таким образом, $\Delta_n(z|X)=0$. Итак, мы показали, что полиномы $\Pi_n(z|X)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (I), причем $\Pi_1(z|X)=1=Q_n(z|X)$. Следовательно, $\Pi_n(z|X)=Q_n(z|X)$ для всех n. Теорема 2 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $1\leq s\leq n$. Тогда

$$Q_n(z|X)=\frac{\det|B_{\alpha,k}(z|X)|_{1\leq\alpha\leq n,\ \alpha\neq s,\ 0\leq k\leq n-2}}{(1+a)^{n-1}\prod\limits_{1\leq i<j\leq n,\ i,j\neq s}(x_i-x_j)(ax_i+x_j)(x_i+ax_j)}. \tag{I9}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться равенством (I7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Заметим, что

$$B^{(b)}_{\alpha,k}(z|K)=b^{2k+1}B^{(a)}_{\alpha,k}(-bz|X).$$

Следовательно,

$$\det|B^{(b)}_{\alpha,k}(z|K)|=b^{n^2}\det|B^{(a)}_{\alpha,k}(-bz|X)|, \tag{20}$$

здесь $1\leq\alpha\leq n,\ 0\leq k\leq n-1$.

С другой стороны,

$$(1+b)^n\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)(bx_i+x_j)(x_i+bx_j)=$$
$$=b^{n^2}(1+a)^n\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)(ax_i+x_j)(x_i+ax_j). \tag{2I}$$

Сравнивая равенства (20) и (21), получаем тождество (4). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Ясно, что коэффициент при z в $B_{\alpha,k}(z|x)$ делится на $(a-1)$, таким образом $Q_n(z|x)$ есть полином от $t=(a-1)z$. Для доказательства второго утверждения следствия 1, введем полиномы $\widetilde{Q}_n(z|x_1\ldots x_n)$ при помощи следующих рекуррентных соотношений:

$$\widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)=\sum_{l=1}^{n} b x_l \prod_{j\neq l}\frac{(ax_l+x_j)(z-x_j)}{x_l-x_j}\widetilde{Q}_{n-1}^{(a)}(bx_l|x_1,\ldots,\hat{x}_l,\ldots,x_n), \quad (22)$$

$n\geqslant 2$, $\widetilde{Q}_1^{(a)}(z|x)=1$. Рекурренция (22) и начальное условие $\widetilde{Q}_1=1$ определяют последовательность полиномов $\widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x)$ однозначно.

ЛЕММА 2 (Эквивалентность УГЛМ $^+_+$ и УГЛМ $^+_-$, [2], теорема 8.3). Имеет место тождество

$$\widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x)=\left[x_1\ldots x_n\cdot z\right]^{n-1} Q_n^{(b)}(z^{-1}|x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}). \quad (23)$$

Для доказательства леммы 2 мы покажем, что для полиномов $\widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x)$ справедлив аналог теоремы 2. Более точно, определим полиномы

$$\widetilde{B}_{\alpha,k}^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)=bx_\alpha^{2k}\left\{(x_\alpha+az)\prod_{j\neq\alpha}(ax_\alpha+x_j)-a^{2k+2}(x_\alpha-z)\prod_{j\neq\alpha}(bx_\alpha+x_j)\right\}, \quad (24)$$

$$\widetilde{F}_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)=\det\left|\widetilde{B}_{\alpha,k}^{(a)}(z|x)\right|_{\substack{1\leqslant\alpha\leqslant n\\ 0\leqslant k\leqslant n-1}}. \quad (25)$$

ЛЕММА 3. Имеет место равенство

$$\widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)=\frac{\widetilde{F}_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n)}{(1+a)^n\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)(ax_i+x_j)(x_i+ax_j)}. \quad (26)$$

Доказательство леммы 3 вполне аналогично доказательству теоремы 2 и поэтому мы его опускаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Воспользуемся следующим легко проверяемым соотношением

$$B_{\alpha,k}^{(b)}(z^{-1}|x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1})=\left[x_1\ldots x_n\, z\right]^{-1} b^{n-1} x_\alpha^{-3(n-2)} B_{\alpha,n-k-2}^{(a)}(z|x). \quad (27)$$

Тождество (23) следует из равенств (27), (26), (25) и (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Простое доказательство леммы 2 приведено в [1], тождество (2.15). Оно не использует явного вида (26) для полиномов $\widetilde{Q}_n$. Из леммы 2 вытекает, что для доказательства следствия 1 нам достаточно показать, что $\widetilde{Q}_n^{(a)}(0|x_1\ldots x_n)$ делится на σ_1. Для того, чтобы доказать последнее утверждение, рассмотрим дифференциалы

$$\widetilde{\omega}_k(z)=\frac{y^{2k+1}(y+az)\,dy}{\prod_{j=1}^{n}(y-x_j)(y+ax_j)}\ ,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1\,.$$

Ясно, что

$$\frac{\widetilde{B}_{\alpha,k}(z|x)}{(1+a)\prod_{j\neq\alpha}(x_\alpha-x_j)(x_\alpha+ax_j)(ax_\alpha+x_j)}=\mathrm{Res}_{y=x_\alpha}\widetilde{\omega}_k+\mathrm{Res}_{y=-ax_\alpha}\widetilde{\omega}_k\,.$$

С другой стороны, дифференциал $\widetilde{\omega}_k(0)$ не имеет на бесконечности полюсов, если $0\leqslant k\leqslant n-2$; если $n=k-1$, то форма $\widetilde{\omega}_k(0)$ имеет на бесконечности полюс второго порядка с вычетом равным коэффициенту при y в разложении ряда

$$(-1)\prod_{j=1}^{n}(1-x_jy)^{-1}\prod_{j=1}^{n}(1+ax_jy)^{-1}$$

по степеням y . Ясно, что искомый коэффициент равен $(a-1)\sigma_1$ Следовательно

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\widetilde{B}_{\alpha,k}(0|x)}{(1+a)\prod_{j\neq\alpha}(x_\alpha-x_j)(x_\alpha+ax_j)(ax_\alpha+x_j)}=\begin{cases}0, & \text{если } 0\leqslant k\leqslant n-2\,.\\ (a-1)\sigma_1, & \text{если } k=n-1\,.\end{cases}\tag{28}$$

Прибавляя к последнему столбцу матрицы $(\widetilde{B}_{\alpha,k}(z|x))$ подходящую линейную комбинацию остальных столбцов, мы можем добиться того, чтобы все элементы в n -ом столбце рассматриваемой матрицы кроме последнего равнялись нулю, а последний равнялся бы $(a-1)\sigma_1$. Следовательно, $\widetilde{Q}_n(0|x)\equiv 0 \mod \sigma_1$. Следствие I полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Определитель матрицы $|\mathrm{sh}((j-i+1)\theta)\cdot x_{2i-j}|_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$, $x_\alpha=0$, если $\alpha\notin[1,n]$, делится на x_1 .

п°3. Струнные специализации функций $Q_n(z|x)$.

В рамках общей теории формфакторов [3],[4] представляет интерес исследование вырождений формфакторов, когда часть быстрот $x_1,\dots,x_n$ садится на струны, т.е., например, когда для некоторого p имеем $x_{n-p+i}=(-a)^i x_{n-p}$, $0\leqslant i\leqslant p$ (струна длины $p+1$). В этом случае из $Q_n(z|x)$ выделяются "стандартные" множители и "неприводимая" часть, которую можно рассматривать как формфактор, отвечающий набору одночастичных состояний $\{x_1\},\dots$ $\dots,\{x_{n-p-1}\}$ и связанному $(p+1)$ -частичному состоянию $\{x_{n-p},\dots$ $\dots,x_n\}$. Настоящий раздел посвящен формализации определения "неприводимой" части полинома $Q_n(z|x)$ для любого набора связанных состояний. Начнем с изложения необходимых определений и конструкций. Фиксируем набор параметров $c=(c_1,\dots,c_n)$ и рассмотрим следующие полиномы $B^{c}_{\alpha,k}(z|x_1\dots x_n) =$

$$= x_\alpha^{2k+1}\left\{(x_\alpha+az)\prod_{j=1}^{n}(x_\alpha+x_j)(ax_\alpha+c_jx_j)+a^{2k+2}(x_\alpha-z)\prod_{j=1}^{n}(x_\alpha+c_jx_j)(bx_\alpha+x_j)\right\}, \qquad (29)$$

$$F^{c}_{n}(z|x_1\dots x_n) = \det\left|B^{c}_{\alpha,k}(z|x_1\dots x_n)\right|_{\substack{1\leq\alpha\leq n\\ 0\leq k\leq n-1}}. \qquad (30)$$

Заметим, что если $c = (1^n)$, то

$$B^{(1^n)}_{\alpha,k}(z|x_1\dots x_n) = x_\alpha(1+a)\prod_{j=1}^{n}(x_\alpha+x_j)B_{\alpha,k}(z|x), \qquad (31)$$

$$F^{(1^n)}_{n}(z|x) = \left(\frac{1+a}{2}\right)^{n}\prod_{1\leq i\leq j\leq n}(x_i+x_j)^2 F_n(z|x), \qquad (32)$$

где многочлены $B_{\alpha,k}(z|x)$, $F_n(z|x)$ задаются формулами (5),(6). Далее, положим

$$Q^{c}(z|x_1\dots x_n) = \frac{F^{c}_{n}(z|x)}{(1+a)^{2n}\prod_{j=1}^{n}x_j^2(1+c_j)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i^2-x_j^2)(x_i+ax_j)(ax_i+x_j)(c_ix_i+x_j)} \qquad (33)$$

Ясно, что $Q^{(1^n)}(z|x) = Q_n(z|x)$. Отметим, что, вообще говоря, $Q^{c}(z|x)$ является рациональной функцией.

Перейдем теперь к определению формфакторов отвечающих связанным состояниям. Пусть $\lambda = (n_1,\dots,n_r)$ - композиция числа n, иначе говоря, $n_i > 0$, $1\leq i\leq r$, и $n_1+\dots+n_r = n$. Положим $m_k = n_1+\dots+n_k$, $m_0 = 0$. Композиции λ соответствует разбиение быстрот $x_1,\dots,x_n$ на струны: если $m_{k-1} < j \leq m_k$, то быстроты $x_j = (-b)^{m_k-j}x_{m_k}$ определяют струну длины n_k $(1\leq k\leq r)$. Такое разбиение быстрот на струны будем называть λ -струной. С каждой λ -струной свяжем последовательность

$$c(\lambda) = \left(c_j(\lambda) = (-b)^{n_j-1},\ 1\leq j\leq r\right). \qquad (34)$$

Определим формфактор отвечающей λ -струне следующей формулой

$$Q_\lambda(z|x_1\dots x_r) = Q^{c(\lambda)}(z|x_1\dots x_r). \qquad (35)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть быстроты $(x_1,\dots,x_n)$ образуют λ -струну. Тогда с точностью до "стандартных" множителей

$$Q_n(z|x_1\dots x_n) \approx Q_\lambda(z|x_{m_1},\dots,x_{m_r}).$$

Начнем с исследования поведения функций $Q^{c}(z|x_1\dots x_n)$ при специализации $x_{n-1} = -b\,c_n\,x_n$. На языке струн эта специализация соответствует слиянию струн длины m_{n-1} и m_n в одну струну длины

$m_{n-1}+m_n-1$. Заметим сначала, что

$$B^{c}_{\alpha,k+1}(z|x)-a^2x^2_{n-1}B_{\alpha,k}(z|x)=a(x^2_\alpha-x^2_{n-1})(x^2_\alpha-a^2x^2_{n-1})B^{\tilde c}_{\alpha,k}(z|x_1,\dots,\hat x_{n-1},x_n), \quad (36)$$

где $\tilde c=(c_1,\dots,c_{n-2},-bc_{n-1}c_n)$, $1<\alpha<n$,

$$B^{c}_{n-1,0}(z|x)=a^2x^{-1}_{n-1}(x_{n-1}-z)\prod_{\alpha=1}^{n}(x_{n-1}+c_\alpha x_\alpha)(bx_{n-1}+x_\alpha). \quad (37)$$

При выводе формул (36),(37) использовалось соотношение $ax_{n-1}+c_nx_n=0$. Подставляя формулы (36),(37) в (33) получаем следующий результат

$$Q^c(z|x_1\dots x_n)\Big|_{x_{n-1}=-bc_nx_n}=(-1)^n\frac{1-b}{1+b}(az+c_nx_n)\prod_{j=1}^{n-2}(x_j+c_nx_n)\times \quad (38)$$

$$\times Q^{\tilde c}(z|x_1,\dots,x_{n-2},x_n).$$

Здесь $\tilde c_{n-1}=-bc_{n-1}c_n$, $\tilde c=(c_1,c_2,\dots,c_{n-2},\tilde c_{n-1})$. Доказательство теоремы 4 следует после многократного применения тождества (38). Из (38) можно найти явный вид стандартных множителей, однако ответ получается слишком громоздким, и мы его не будем приводить.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $c_n=1$, то при выводе формулы (38) необходимо разрешить неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т.к. в силу равенства $ax_{n-1}+x_n=0$ в ноль обращаются как знаменатель в (33), так и правая часть (36) при $\alpha=n$. Такой неопределенности нет, если $c_n\neq 1$. Таким образом, при выводе формулы (38) для $c_n=1$ нужно взять $c_n=1+\varepsilon$, а затем устремить ε к нулю. Отметим, что функция $Q^c(z|x)$ симметрична по переменным x_i , которым соответствуют равные c_i .

ЛЕММА 4. Предположим, что $c_n=1$. Тогда

$$Q^c(x_n|x)=\prod_{\alpha=1}^{n-1}\frac{(ax_n+c_\alpha x_\alpha)(x_n+x_\alpha)}{(x_n+c_\alpha x_\alpha)}\,Q^{\tilde c}(bx_n|x_1\dots x_{n-1}), \quad (39)$$

$$Q^c(-bx_n|x)=\prod_{\alpha=1}^{n-1}(bx_n+x_\alpha)Q^{\tilde c}(-x_n|x_1\dots x_{n-1}), \quad (40)$$

где $\tilde c=(c_1,\dots,c_{n-1})$.

Равенства (39),(40) следуют из тождеств

$$B^{c}_{\alpha,k+1}(x_n|x)-x_n^2B^{c}_{\alpha,k}(x_n|x)=(x^2_\alpha-x^2_n)(ax_n+x_\alpha)(ax_\alpha+x_n)B^{\tilde c}_{\alpha,k}(bx_n|x_1\dots x_{n-1}),$$

$$B^{c}_{\alpha,k+1}(-bx_n|x)-a^2x^2_n(-bx_n|x)=(x^2_\alpha-x^2_n)(ax_n+x_\alpha)(ax_\alpha+x_n)B^{\tilde c}_{\alpha,k}(-x_n|x_1\dots x_{n-1}).$$

п$^{\circ}$4. Соотношение между формфакторами в моделях Sine-Gordon и Sh-Gordon.

Как показал Ф.А.Смирнов (не опубликовано), солитонные форм-факторы для квантовой модели Sine-Gordon в точках, отвечающих связанным состояниям с наименьшей массой, имеют следующий вид: $I_n^{(\nu)}(z|x_1\ldots x_n)=$

$$=\int\limits_{\gamma^{n-1}} dy_1\ldots dy_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(y_i+az)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(y_i-y_j)(y_i+ax_j)}\prod_{1\le i<j\le n-1}(y_i^2-y_j^2)\prod_{i=1}^{n-1}y_i^{2\nu\cdot i}. \tag{41}$$

Контур интегрирования $\gamma^{n-1}=\gamma\times\ldots\times\gamma$, γ охватывает все точки $\{x_j,-ax_j\}_{j=1}^{n}$. Здесь ν – параметр модели, $a=\exp\left(\frac{\pi i}{\nu}\right)$

ТЕОРЕМА 5. Имеет место равенство

$$I_n^{(\nu)}(z|x_1\ldots x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^{2\nu}-x_j^{2\nu}}{(x_i-x_j)(x_j+ax_i)(ax_j+x_i)}\,Q_n^{(a)}(z|x_1\ldots x_n). \tag{42}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $\nu\in\mathbb{Z}_+$, таким образом $a^{2\nu}=1$. Найдем рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют $I_n^{(\nu)}$. Заметим, что $I_n^{(\nu)}$ – симметрична по $\{x_j\}$. Положим $z=x_n$. Тогда $I_n^{(\nu)}(z|x)\big|_{z=x_n}=$

$$=\int\limits_{\gamma^{n-2}} d^{n-2}y\prod_{i=1}^{n-2}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{(y_i-y_j)(y_i+ax_j)}\prod_{i<j}^{n-2}(y_i^2-y_j^2)\prod_{i=1}^{n-2}y_i^{2\nu\cdot i}\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma}\frac{dy_{n-1}}{y_{n-1}-x_n}\prod_{j=1}^{n-2}\frac{y_j^2-y_{n-1}^2}{y_j-x_n}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{y_{n-1}^{2\nu}-x_j^{2\nu}}{(y_{n-1}-x_j)(y_{n-1}+ax_j)}.$$

Интеграл по y_{n-1} имеет вид $\mathcal{Y}=\int\limits_{\gamma}\frac{dy_{n-1}}{y_{n-1}-x_n}\Psi(y_{n-1})$, причем функция $\Psi(y_{n-1})$ не имеет полюсов внутри и на границе контура γ. Следовательно, $\mathcal{Y}=\Psi(x_n)$. Таким образом

$$I_n^{(\nu)}(z|x)\big|_{z=x_n}=I_{n-1}^{(\nu)}(bx_n|x_1\ldots x_{n-1})\prod_{j=1}^{n-1}\frac{x_j^{2\nu}-x_n^{2\nu}}{(x_j-x_n)(x_n+ax_j)}. \tag{43}$$

Из (42) следует, что функция $I_n^{(\nu)}(z|x)$ является полиномом полной степени $(\nu-1)n(n-1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Основной прием при выводе формулы (42) заключался в том, что мы заменили функцию $y_{n-1}^{2\nu(n-1)}$ на произведение $\prod_{j=1}^{n-1}(y_{n-1}^{2\nu}-x_j^{2\nu})$; при этом значение интеграла не изменится.

Наша ближайшая цель выделить из $I_n^{(\nu)}(z|x)$ сомножитель

$$\theta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^{2\nu}-x_j^{2\nu}}{x_i-x_j}$$ так, чтобы функция $I_n^{(\nu)}(z|x)\cdot\theta^{-1}(x)$ "формально" не зависела бы от ν. Для этого представим полином $I_n^{(\nu)}$ в виде определителя матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$. С этой целью заменим произведение $\prod_{i<j}(y_i^2-y_j^2)$ на определитель Вандермонда. В итоге для $I_n^{(\nu)}$ получаем следующее представление

$I_n^{(\nu)}(z|x)=\det|A_{jk}(z|x)|$ где $1\le j\le n-1,\ 0\le k\le n-2$, и

$$A_{jk}(z|x_1\ldots x_n)=\int\limits_{\gamma} y^{2k+2\nu\cdot j}\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{(y-x_m)(y+ax_m)}\,dy. \tag{44}$$

Контур интегрирования охватывает все полюса $\{x_m,-ax_m\}_{m=1}^{n}$.

ПРИМЕР. Пусть $j=n-1$. Заменим $y_{n-1}^{2\nu(n-1)}$ на произведение $\prod_{j=1}^{n-1}(y_{n-1}^{2\nu}-x_j^{2\nu})$; значение интеграла (44) при этом не изменится. Следовательно,

$$A_{n-1,k}(z|x)=\frac{1}{1+a}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{x_j^{2\nu}-x_n^{2\nu}}{x_j-x_n}\,\frac{1}{(x_n+ax_j)(ax_n+x_j)}\,B_{n,k}(z|x),$$

где полином $B_{n,k}(z|x)$ задается формулой (5). Более общо

$$A_{j,k}(z|x)=\int\limits_{\gamma} y^{2k}(y+az)\prod_{\alpha=1}^{j}\frac{y^{2\nu}-x_\alpha^{2\nu}}{(y-x_\alpha)(y+ax_\alpha)}\prod_{\alpha>j}\frac{1}{(y-x_\alpha)(y+ax_\alpha)}\,dy=$$

$$=\sum_{m=j+1}^{n}\prod_{1\le\alpha\le j}\frac{x_m^{2\nu}-x_\alpha^{2\nu}}{x_m-x_\alpha}\left\{\prod_{\substack{\alpha>j\\ \alpha\ne m}}(x_m-x_\alpha)\prod_{\alpha\ne m}(x_m+ax_\alpha)(ax_m+x_\alpha)\right\}^{-1}\frac{B_{m,k}(z|x)}{1+a}. \tag{45}$$

Следовательно, применяя элементарные преобразования к столбцам матрицы $(A_{jk}(z|x))$, получаем

$$I_n^{(\nu)}(z|x)=\det\left|\frac{1}{1+a}\prod_{1\le\alpha<j}\frac{x_\alpha^{2\nu}-x_j^{2\nu}}{x_\alpha-x_j}\left\{\prod_{\alpha>j}(x_j-x_\alpha)\prod_{\alpha\ne j}(x_j+ax_\alpha)(ax_j+x_\alpha)\right\}^{-1}B_{j,k}(z|x)\right|=$$

$$=\frac{1}{(1+a)^{n-1}}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i^{2\nu}-x_j^{2\nu}}{x_i-x_j}\left\{\prod_{2\le i<j\le n}(x_i-x_j)\prod_{2\le j\le n}\prod_{\alpha\ne j}(x_j+ax_\alpha)(ax_\alpha+x_j)\right\}^{-1}\times$$

$$\times\det|B_{\alpha,k}(z|x)|_{\substack{2\le\alpha\le n\\ 0\le k\le n-2}} \tag{46}$$

Тождество (42) следует из равенств (I9) при $s=1$ и (46). Доказательство теоремы 5 закончено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В настоящей работе вычислены формфакторы в квантовой модели Sh - Gordon (теоремы 2,3, следствие 4), и доказаны их некоторые свойства (теорема I, следствие I), играющие важную роль при конструктивном подходе к построению квантовой модели $(ch\,\varphi)_2$.

Автор благодарит Л.Д.Фаддеева, Н.Ю.Решетихина, И.М.Хамитова и Ф.А.Смирнова за многочисленные полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

Литература

I. К и р и л л о в А.Н. T -инвариантность, CPT-инвариантность и локальная коммутативность квантовой модели $(ch\,\varphi)_2$. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УП. Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I46, I985, с.9–I9.

2. Х а м и т о в И.М. Конструктивный подход к квантовой модели $(ch\,\varphi)_2$. I. Метод уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.УП. Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I46, I985, с.I47–I90.

3. S m i r n o v F.A. A general formula for soliton form factors in the quantum sine-Gordon model. – J.Phys.A: Math.Gen. 19 (1986), L575–L578.

4. S m i r n o v F.A. Solitons formfactors in the Sine-Gordon model. – LOMI preprints, E-3-86.

Formulae for the formfactors in the quantum sine-Gordon model. Kirillov A.N. – In: "Differential geometry, Lie groups and mechanics IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, vol.164). L. "Nauka", 1987, p.54–66.

Explicit formulae for the formfactors in the quantum sine-Gordon model are obtained. Bibl. – 4..

А.Н.Кириллов, Ф.А.Смирнов

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КОМБИНАТОРНЫХ ПРОБЛЕМ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КОРРЕЛЯТОРОВ В ТОЧНО-РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЯХ

I$^{\circ}$. Вычисление корреляционных функций для вполне интегрируемых квантовых моделей является важной задачей. В рамках квантового метода обратной задачи исследование корреляционных функций для квантовых моделей, отвечающих R-матрицам XXX или XXZ типа, было приведено в работах [I], [2]. Другой подход к проблеме вычисления корреляционных функций, основанный на квантовом уравнении Гельфанда-Левитана-Марченко (УГЛМ) был предложен в работах [4], [3,5]. Дальнейшая разработка метода УГЛМ привела к полному вычислению форм-факторов в модели *sine-Gordon* [7], для $SU(2)$ инвариантной модели Тирринга [6], для $O(3)$ нелинейной σ-модели [9].

Неожиданным образом оказалось, что результаты исследования форм-факторов $O(3)$ нелинейной σ-модели позволяют вычислить в явном виде рациональные функции $\sigma_N^{\alpha}(\lambda,\mu)$, играющие важную роль в работах [I], [2], [5], [I0]. В частном случае $\alpha=-\infty$, статистическая сумма $Z_N(\lambda,\mu)\overset{def}{=}\sigma_N^{-\infty}(\lambda,\mu)$ была вычислена А.Г.Изергиным [8] и, независимо, одним из авторов (А.Н.). Настоящая работа посвящена вычислению вакуумных значений форм-фактора $F_N^{\alpha}(\lambda^C,\lambda^B,\ell^C,\ell^B)$ из [I], что соответствует случаю $\ell_1^B=\ldots=\ell_N^B=1$. Заметим, что если $\ell_1^C=\ldots=\ell_N^C=e^{\alpha}$, $\ell_1^B=\ldots=\ell_N^B=1$, то $F_N^{(0)}(\lambda,\mu,\ell^C,\ell^B)=\sigma_N^{\alpha}(\lambda,\mu)$.

Мы благодарны Л.Д.Фаддееву, А.Г.Изергину, Н.Ю.Решетихину, Е.К.Склянину за интересные обсуждения результатов статьи. Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Е.Корепину, сделавшему ряд важных замечаний и дополнений, позволивших упростить и прояснить наши первоначальные формулы.

С любезного разрешения В.Е.Корепина мы используем эти замечания в настоящей работе.

2°. Напомним некоторые результаты из [I]. Пусть $f(\lambda,\mu)=\dfrac{\lambda-\mu+1}{\lambda-\mu}$ (мы нормируем константу связи ic (см. [I]) на I). В дальнейшем изложении мы будем придерживаться следующих обозначений: если даны два множества переменных $\theta=\{\theta_j \mid j\in A\}$, $\Psi=\{\Psi_k \mid k\in B\}$ и число $\alpha\in\mathbb{C}$, то через $\theta-\Psi+c$ обозначается произведение $\prod\limits_{j\in A}\prod\limits_{k\in B}(\theta_j-\psi_k+c)$. Аналогичный смысл имеют выражения $f(\theta,\Psi)=\prod\limits_{j\in A}\prod\limits_{k\in B}f(\theta_j,\psi_k)$, $z_A=\prod\limits_{j\in A}z_j$ и т.д

Если зафиксирован индекс $j=j_0$, то через $\tilde{\theta}$ обозначается набор переменных $\{\theta_j \mid j\in A,\ j\neq j_0\}$.

Формфактор оператора $\exp \alpha Q_1$ для квантовых моделей, отвечающих R-матрице XXX-типа, является рациональной функцией от $4N$ переменных $\theta^-, \theta^+, Z^-, Z^+$ и может быть задан следующей формулой ([I] , (5,I)-(5,3))

$$F_N^{\alpha}(\theta^-, \theta^+, Z^-, Z^+) = \sum \sigma_n^{\alpha}(\theta_A^-, \theta_C^+)\, \sigma_{N-n}^{\alpha}(\theta_{\mathcal{D}}^+, \theta_B^-) \times \tag{I}$$

$$\times f(\theta_A^-, \theta_B^-) f(\theta_{\mathcal{D}}^+, \theta_C^+) Z_A^- Z_{\mathcal{D}}^+ .$$

Суммирование в (I) ведется по всевозможным разбиениям множества θ^- (соотв. θ^+), на два непересекающихся подмножества θ_A^- и θ_B^- (соотв. θ_C^+ и $\theta_{\mathcal{D}}^+$), с условием $|A|=|C|=n$.

Рациональные функции $\sigma_n^z(\theta^-, \theta^+)$ однозначно определяются следующими свойствами

I) $\sigma_n^z(\theta^-, \theta^+)$ – симметрическая функция по каждой группе переменных θ^- и θ^+ в отдельности (2′)

2) Функция $\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+) = (\theta^- - \theta^+)\, \sigma_n^z(\theta^-, \theta^+)$ является полиномом полной степени (по θ^-, θ^+ и z (, равной n^2. (2″)

3) Выполняется рекуррентное соотношение

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+)\Big|_{\theta_n^- = \theta_n^+ = \theta} = \Big\{ z\prod_{j=1}^{n-1}(\theta-\theta_j^-+1)(\theta-\theta_j^+-1) - \prod_{j=1}^{n-1}(\theta-\theta_j^- -1)(\theta-\theta_j^+ +1)\Big\} \times \tag{2‴}$$

$$\times\, \pi_{n-1}^{(z)}(\theta_{j\neq n}^-, \theta_{j\neq n}^+), \qquad \pi_0^z \equiv 1 .$$

Один из основных результатов настоящей работы является явное вычисление полиномов $\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+)$.

3^{0}. Вычисление многочленов $\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+)$.

Мы приведем несколько эквивалентных выражений для полиномов $\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+)$, которые полезны в приложениях.

ТЕОРЕМА I. Пусть $p, q, r \in \mathbb{Z}_+$. Положим $\beta(p,q,r) = \operatorname{Res}_{x=0} \dfrac{(1-x)^p(1+x)^q}{x^{r+1}}$, $a_{k,j}(\theta, z) = (1-z)\,\sigma_{k-j}(\theta) + \sum\limits_{s\geq 1} \beta(n-j, n-s, k-j-s)\, \sigma_s(\theta)$, $1\leq k \leq 2n$, $1\leq j\leq n$.

Имеет место следующее равенство

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-, \theta^+) = \det \Big| a_{k,j}(\theta^-, z),\ a_{k,j}(\theta^+, 1)\Big|_{\substack{1\leq k\leq 2n\\ 1\leq j\leq n}} \tag{3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Многочлен $\pi_n^{(z)}$ оказывается равным определителю матрицы размера $2n\times 2n$. Легко видеть, что $a_{k,j}(\theta,z)=0$, если $k<j$, $a_{jj}(\theta,z)=1-z$, $a_{j+1,j}(\theta),z)=j+(1-z)\sigma_1(\theta)$, таким образом, полином $\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ является в действительности определителем матрица размера $(n-1)\times(n-1)$, $n\geqslant 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Рассмотрим набор переменных $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ и введем полиномы $\Phi_{k,n}(x|\lambda)=\sum_{\ell=0}^{k}(-x)^\ell\sigma_{k-\ell}(\lambda)$. Ясно, что

$$\text{I)}\quad \Phi_{k,n}(x|\lambda)=\Phi_{k,n-1}(x|\tilde\lambda)+\lambda_n\Phi_{k-1,n-1}(x|\tilde\lambda),\quad \text{где } \tilde\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}). \tag{4'}$$

$$\text{2)}\quad \Phi_{k,n}(x|\lambda)=(-x)^{k-n}\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j-x),\quad \text{если}\quad k\geqslant n. \tag{4''}$$

$$\text{3)}\quad \Phi_{k,n}(\lambda_j|\lambda)=\sigma_k(\lambda_1,\dots,\tilde\lambda_j,\dots,\lambda_n). \tag{4'''}$$

Определим далее полиномы $P_{k,n}^{(z)}(x|\lambda)=\Phi_{k,n}(x-\frac{1}{2}|\lambda)-z\Phi_{k,n}(x+\frac{1}{2}|\lambda)$, и введем обозначение $P_{k,2n}^{(z)}(x|\lambda\pm\frac{1}{2})=P_{k,2n}^{(z)}(x|\lambda-\frac{1}{2},\lambda+\frac{1}{2})$. Ясно, что

$$\text{I)}\quad P_{2n-1,2n}^{(z)}(\lambda_j|\lambda\pm\tfrac{1}{2})\prod_{a\neq j}(\lambda_a^2-\tfrac{1}{4})\left[(\lambda_j-\tfrac{1}{2})(1-z)+1\right],$$

$$\text{2)}\quad P_{2n-k,2n}^{(z)}(\lambda_j|\lambda\pm\tfrac{1}{2})=\frac{\mathbb{D}^{k-1}}{(k-1)!}P_{2n-1,2n}^{(z)}(\lambda_j|\lambda\pm\tfrac{1}{2}),\quad 1\leqslant k\leqslant 2n,$$

где $\mathbb{D}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}$.

ЛЕММА I. Имеет место равенство

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)=\frac{\det\left|P_{k,2n}^{(z)}(\theta_j^-|\theta^-\pm\frac{1}{2}),\ P_{k,2n}^{(1)}(\theta_j^+|\theta^+\pm\frac{1}{2})\right|}{\Delta(\theta^-)\Delta(\theta^+)} \tag{5}$$

где $0\leqslant k\leqslant 2n-1$, $1\leqslant j\leqslant n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим правую часть (5) через $\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$. Ясно, что для $\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ выполняются свойства $(2')$ и $(2'')$. Положим теперь $\theta_n^-=\theta_n^+=\theta$ в $\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$. Тогда, при помощи равенства (4) мы можем исключить $\theta_n^\pm$ из матричных элементов в (5). Действительно, $P_{k,2n}^{(z)}(\theta_j|\theta\pm\frac{1}{2})=$

$$=P_{k,2n-2}^{(z)}(\theta_j|\tilde\theta\pm\tfrac{1}{2})+(2\theta+1)P_{k-1,2n-2}^{(z)}(\theta_j|\tilde\theta\pm\tfrac{1}{2})+\theta(\theta+1)P_{k-2,2n-2}^{(z)}(\theta_j|\tilde\theta\pm\tfrac{1}{2}),$$

где $\tilde\theta=\{\theta_1,\dots,\theta_{n-1}\}$. Следовательно,

$$\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)\Big|_{\theta_n^-=\theta_n^+=\theta}=\frac{\det\left|P_{k,2n-2}^{(z)}(\theta_j^-\,|\,\tilde\theta^-\pm\frac{1}{2}),\ P_{k,2n-2}^{(1)}(\tilde\theta_j^+\,|\,\tilde\theta^+\pm\frac{1}{2})\right|}{\Delta(\theta^-)\,\Delta(\theta^+)},\quad(6)$$

где $0\leq k\leq 2n-1$, $1\leq j\leq n$. Ясно, что если $1\leqslant j<n$, то $P_{k,2n-2}^{(z)}(\theta_j\,|\,\tilde\theta\pm\frac{1}{2})=0$ для $k=2n-2,\,2n-1$. Далее

$$P_{2n-2,2n-2}^{(z)}(\theta\,|\,\tilde\theta\pm\tfrac{1}{2})=(\theta-\tilde\theta)\{(\theta-\tilde\theta-1)-z(\theta-\tilde\theta+1)\},$$

$$P_{2n-1,2n-2}^{(z)}(\theta\,|\,\tilde\theta\pm\tfrac{1}{2})=(\theta-\tilde\theta)\{(\theta-\tfrac{1}{2})(\theta-\tilde\theta-1)-z(\theta+\tfrac{1}{2})(\theta-\tilde\theta+1)\}.$$

Определитель $\begin{vmatrix} P_{2n-2,2n-2}^{(z)}(\theta\,|\,\tilde\theta^-\pm\frac{1}{2}) & P_{2n-2,2n-2}^{(1)}(\theta\,|\,\tilde\theta^+\pm\frac{1}{2}) \\ P_{2n-1,2n-2}^{(z)}(\theta\,|\,\tilde\theta^-\pm\frac{1}{2}) & P_{2n-1,2n-2}^{(1)}(\theta\,|\,\tilde\theta^+\pm\frac{1}{2}) \end{vmatrix}$

как легко видеть, равняется

$$(\theta-\tilde\theta^-)(\theta-\tilde\theta^+)\{z(\theta-\tilde\theta^-+1)(\theta-\tilde\theta^+-1)-(\theta-\tilde\theta^--1)(\theta-\tilde\theta^++1)\}.$$

Следовательно, полином $\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2). Таким образом, $\Pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)=\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$.
Лемма I доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. (В.Е.Корепин).

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)=\frac{\det\left|\sigma_k(\theta^-+\frac{1}{2},\theta^-_{a\neq j}-\frac{1}{2})-z\sigma_k(\theta^-_{a\neq j}+\frac{1}{2},\theta^--\frac{1}{2}),\sigma_{k-1}(\theta^+_{a\neq j}\pm\frac{1}{2})\right|}{\Delta(\theta^-)\,\Delta(\theta^+)}\quad(7)$$

Действительно, в силу (4''') имеем

$$P_{k,2n}^{(z)}(\theta_j\,|\,\theta\pm\tfrac{1}{2})=\sigma_k(\theta+\tfrac{1}{2},\theta_{a\neq j}-\tfrac{1}{2})-z\,\sigma_k(\theta_{a\neq j}+\tfrac{1}{2},\theta-\tfrac{1}{2})\quad\text{и}$$

$$P_{k,2n}^{(1)}(\theta_j\,|\,\theta\pm\tfrac{1}{2})=\sigma_{k-1}(\theta_{a\neq j}\pm\tfrac{1}{2}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следствие I было указано авторам В.Е.Корепиным. В нашей первоначальной формуле для $\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ использовались более сложные функции $P_{k,n}^{\pm}(x\,|\,\lambda)$ естественно возникающие при вычислении формфакторов для $O(3)$ нелинейной σ-модели [9] . В той же работе содержится вычисление более общий функций $\sigma_n^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ (см. также п. 5^0 настоящей работы).

Теперь мы освободимся в формуле (5) от знаменателей. Для этого, с каждым подмножеством $I\subset\{1,\ldots,n\}$ свяжем многочлены $P_{k,n}^{(z)}(I\,|\,\theta)=\sigma_k(\theta_a+\frac{1}{2},\theta_{a\notin I}-\frac{1}{2})-z\sigma_k(\theta_{a\notin I}+\frac{1}{2},\theta_a-\frac{1}{2})$.

ЛЕММА 2. Имеет место равенство

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)=\det\left|P^{(z)}_{k-j,n}(\{1,\dots,j\}|\theta^-),\ P^{(1)}_{k-j,n}(\{1,\dots,j\}|\theta^+)\right|, \tag{8}$$

где $1\leqslant k\leqslant 2n$, $1\leqslant j\leqslant n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $P^{(z)}_{k,n}(\theta_j|\theta\pm\frac{1}{2})=P^{(z)}_{k,n}(\{j\}|\theta)$ и

$$P^{(z)}_{k,n}(I\cup\{a\}|\theta)-P^{(z)}_{k,n}(I\cup\{b\}|\theta)=(\theta_a-\theta_b)P^{(z)}_{k-1,n}(I\cup\{a,b\}|\theta). \tag{9}$$

Лемма 2 легко следует из формулы (9).

Теперь мы при помощи элементарных преобразований над столбцами матрицы, входящей в правую часть (8), добьемся, чтобы все элементы в ней являлись бы линейными комбинациями симметрических функций $\sigma_k(\theta+1/2)$ и $\sigma_k(\theta-1/2)$.

ЛЕММА 3. Определим многочлены

$$b_{k,j}(\theta,z)=\sum_{l=0}^{n-j}(-1)^l\binom{n-j}{l}\sigma_{k-j-l}(\theta+1/2)-z\sigma_{k-j}(\theta-1/2). \tag{10}$$

Тогда

$$\pi_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)=\det\left|b_{k,j}(\theta^-,z),\ b_{k,j}(\theta^+,1)\right|, \tag{11}$$

где $1\leqslant k\leqslant 2n$, $1\leqslant j\leqslant n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $P^{(z)}_{k-n}(\{1,\dots,n\}|\theta)=b_{k,n}(\theta,z)$.Вычтем теперь из $(n-1)$-го столбца n-ый, умноженный на $(\theta_n+1/2)$. Ясно, что $P^{(z)}_{k-n+1}(\{1,\dots,n-1\}|\theta)-(\theta_n+1/2)b_{k,n}(\theta,z)=b_{k,n-1}(\theta,z)$. Повторяя эту процедуру, получаем формулы (10) и (11).

ЛЕММА 4. Имеет место равенство

$$a_{k,j}(\theta,z)=b_{k,j}(\theta+1/2,z)., \tag{12}$$

где полиномы $a_{k,j}(\theta,z)$ определены в теореме I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (12) следует из формулы (см. [11]):

$$\sigma_k(\lambda_1+1,\dots,\lambda_n+1)=\sum_{l=0}^{k}\binom{n-k+l-1}{l}\sigma_{k-l}(\lambda).$$

Доказательство теоремы I закончено.

4^0. В этом разделе мы приведем обобщение результатов раздела 3^0 настоящей работы на случай, когда множества θ^- и θ^+ имеют, вообще говоря, различное количество элементов. В частности, когда $|\theta^-|=N$, $|\theta^+|=N-1$, мы вычисляем в явном виде формфакторы полей, т.е. матричные элементы оператора $\psi(0)$, рассмотренного в работе [10] .

Фиксируем целое число $k\geqslant 0$, и будем в дальнейшем рассматривать наборы переменных θ^- и θ^+ с условием $N_- - N_+ = k$, где

$N_\pm = |\theta^\pm|$. Нас интересуют рациональные функции $\sigma^z(\theta^-|\theta^+)$, которые однозначно характеризуются следующими свойствами

I) $\sigma^z(\theta^-|\theta^+)$ -симметрическая функция по каждой группе переменных θ^- и θ^+ в отдельности.

2) Функция $\pi^z(\theta^-|\theta^+) = (\theta^- - \theta^+)\sigma^z(\theta^-|\theta^+)$ является полиномом полной степени (по θ^-, θ^+ и z), равной $N_-\cdot N_+ + |N_+ - N_-|$.

3) Имеет место рекуррентное соотношение: если $\theta_1^- = \theta_1^+ = \theta$, то

$$\pi^z(\theta^-|\theta^+)\big|_{\theta_1^-=\theta^+} = \{z(\theta-\tilde{\theta}^+ + 1)(\theta-\tilde{\theta}^+ - 1) - (\theta - \tilde{\theta}^- - 1)(\theta - \tilde{\theta}^+ + 1)\} \times$$

$$\times \pi^z(\tilde{\theta}^- | \tilde{\theta}^+), \quad \pi^z(\theta^-|\varnothing) \equiv 1 .$$

Прежде чем сформулировать результат о вычислении полиномов $\pi^z(\theta^-|\theta^+)$, приведем несколько обозначений. Пусть как и раньше $\Phi_k(x|\lambda) = \sum_{\ell=0}^{k} (-x)^\ell \sigma_{k-\ell}(\lambda)$. Положим

$$R_k^{(z)}(\theta_j^-) = \Phi_k(\theta_j^- - \tfrac{1}{2} | \theta^- - \tfrac{1}{2}, \theta^+ + \tfrac{1}{2}) - z\Phi_k(\theta_j^- + \tfrac{1}{2} | \theta^- + \tfrac{1}{2}, \theta^+ - \tfrac{1}{2}),$$

$$R_k^{(z)}(\theta_j^+) = \Phi_k(\theta_j^+ - \tfrac{1}{2} | \theta^- + \tfrac{1}{2}, \theta^+ - \tfrac{1}{2}) - z\Phi_k(\theta_j^+ + \tfrac{1}{2} | \theta^- - \tfrac{1}{2}, \theta^+ + \tfrac{1}{2}) .$$

Напомним, что $\Phi_k(\lambda_j|\lambda) = \sigma_k(\lambda_1, \ldots, \hat{\lambda}_j, \ldots, \lambda_n)$.

ТЕОРЕМА 2. Имеет место равенство

$$\pi^z(\theta^-|\theta^+) = \frac{\det|R_k^{(z)}(\theta_j^-), R_k^{(1)}(\theta_j^+)|}{\Delta(\theta^-)\,\Delta(\theta^+)}, \quad 0 \leq k \leq N_- + N_+ - 1 . \qquad (I3)$$

Доказательство теоремы 2 полностью аналогично доказательству леммы I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $|\theta^-| = |\theta^+|$, то $\pi^z(\theta^-|\theta^+) = \pi^{(z)}_{N_+}(\theta^-, \theta^+)$, где $\pi^{(z)}(\theta^-, \theta^+)$ задается формулой (5).

5°. Вычисление функций $\sigma^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+)$.

При вычислении формфакторов для $O(3)$ нелинейной σ-модели [9] важную роль играют рациональные функции $\sigma^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+)$, где $|\theta^-| = |\theta^+| = n$, $|\theta^0| = m$, которые при $\theta^0 = \varnothing$ совпадают с функциями $\sigma^z(\theta^-, \theta^+)$, рассмотренными в разделах 2° и 3° формулы (2′)-(2‴), (5). Опишем свойства функций $\sigma^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+)$, которые из однозначно определяют:

I) $\sigma^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+)$ -симметрическая функция по каждой группе переменных $\theta^-, \theta^0, \theta^+$ в отдельности.

2) Функция $\pi^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+) = (\theta^- - \theta^+)(\theta^+ - \theta^0)\sigma^z(\theta^-, \theta^0, \theta^+)$ является полиномом полной степени по $\theta^-, \theta^0, \theta^+$ и z), равной $(m+n)^2$.

3) Выполняются рекуррентные соотношения

$$i)\ \pi^{z}(\theta^-,\theta^0,\theta^+)\big|_{\theta^-_n=\theta^+_n=\theta} \quad \pi^{z}(\tilde\theta^-,\theta^0,\tilde\theta^+)\times$$

$$\times\{(\theta-\tilde\theta^--1)(\theta-\tilde\theta^++1)(\theta-\theta^0-1)(\theta-\theta^0+2)-z(\theta-\tilde\theta^-+1)(\theta-\tilde\theta^+-1)(\theta-\theta^0)(\theta-\theta^0+1)\}. \quad (\text{I4})$$

$$ii)\ \pi^{z}(\theta^-,\theta^0,\theta^+)\big|_{\theta^-_n=\theta^+_n+1}=\pi^{z}(\tilde\theta^-,\theta^0\cup\{\theta^-_n\},\tilde\theta^+), \quad (\text{I5})$$

$$\pi^{z}(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\equiv 1 .$$

Как видно из (I5) полином $\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ получается из $\pi^z_{m+n}(\theta^-\cup\theta^0,\theta^+\cup\tilde\theta^0)$ специализацией $\theta^0_j=\tilde\theta^0_j+1$ для m значений индекса j. При этом мы получаем для $\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ представление в виде определителя размера $2(n+m)\times 2(n+m)$; кроме того, мы еще должны разделить этот определитель на "лишние" линейные множители, что весьма затруднительно сделать, пользуясь формулой (5). Мы сейчас приведем формулу для полинома $\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ в виде определителя размера $(2n+m)\times(2n+m)$.

ТЕОРЕМА 3. Имеет место равенство

$$\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)=\frac{\det|\mathfrak{A}^-_k(\theta^-_j),\ \mathfrak{A}^0_k(\theta^0_j),\ \mathfrak{A}^+_k(\theta^+_j)|}{\Delta(\theta^-)\Delta(\theta^0)\Delta(\theta^+)(\theta^--\theta^0)(\theta^+-\theta^0+1)}, \quad (\text{I6})$$

где

$$\mathfrak{A}^-_k(\theta^-_j)=P^{(z)}_k(\theta^-_j\,|\,\theta^-\pm\tfrac{1}{2},\theta^0+\tfrac{1}{2}),\quad \mathfrak{A}^+(\theta^+_j)=P^{(1)}_k(\theta^+_j\,|\,\theta^+\pm\tfrac{1}{2},\theta^0-\tfrac{3}{2})$$

$$\mathfrak{A}^{(0)}_k(\theta^0_j)=(\theta^--\theta^0_j)(\theta^--\theta^0_j+1)(\theta^0-\theta^0_j+1)P^{(1)}_k(\theta^0_j-1\,|\,\theta^+\pm\tfrac{1}{2},\theta^0-\tfrac{3}{2})+$$

$$+(\theta^+-\theta^0_j)(\theta^+-\theta^0_j+1)(\theta^0-\theta^0_j-1)P^{(z)}_k(\theta^0_j\,|\,\theta^-\pm\tfrac{1}{2},\theta^0+\tfrac{1}{2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что $\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ – полином. Действительно, делимость определителя в правой части формулы (I6) на $\theta^-_\ell-\theta^0_j$ следует из рассмотрения разности $\mathfrak{A}^0_k(\theta^0_j)-$ $-(\theta^+-\theta^0_j)(\theta^+-\theta^0_j+1)(\theta^0-\theta^0_j-1)\mathfrak{A}^-_k(\theta^-_\ell)$, а делимость на $(\theta^+_\ell-\theta^0_j+1)$ из рассмотрения разности $\mathfrak{A}^0_k(\theta^0_j)-(\theta^--\theta^0_j)(\theta^--\theta^0_j+1)(\theta^0-\theta^0_j+1)\mathfrak{A}^+_k(\theta^+_\ell)$. Степень полинома $\pi^z(\theta^-,\theta^0,\theta^+)$ легко вычисляется и равна $(m+n)^2$. Рекуррентные соотношения (I4),(I5) проверяются вполне аналогично доказательству леммы I.

Методы, развитые в предыдущих разделах, позволяют вычислить вакуумные значения формфакторов $F_N^{\alpha}(\theta^-,\theta^+,z^-,z^+)$, определенных формулой (I). Точную формулировку результата мы приведем в следующем разделе.

6°. Вакуумные значения формфакторов.

ТЕОРЕМА 4. Определим полиномы

$$A_{k,j}^{(\alpha,z)}(\theta_1,\ldots,\theta_N)=(1-\alpha)\{\sigma_k(\theta+\tfrac{1}{2},\theta_{a\neq j}-\tfrac{1}{2})-z\sigma_k(\theta_{a\neq j}+\tfrac{1}{2},\theta-\tfrac{1}{2})\}+$$

$$+\alpha z\,\sigma_{k-1}(\theta_{a=j}\pm\tfrac{1}{2})-\alpha\sum_{\ell\neq j}\prod_{p\neq\ell,j}\frac{\theta_p-\theta_j+1}{\theta_p-\theta_\ell}\sigma_{k-1}(\theta_{a\neq\ell}\pm\tfrac{1}{2}), \tag{17}$$

где $1\leq j\leq N$, $0\leq k\leq 2N-1$. Положим $A^-_{k,j}=A_{k,j}^{(\alpha,z_j^-)}(\theta^-)$, $A^+_{k,j}=A_{k,j}^{(0,1)}(\theta^+)$ рассмотрим матрицу $\mathcal{A}=|A^-_{k,j},A^+_{k,j}|$ размера $2N\times 2N$ $(1\leq j\leq N,\ 0\leq k\leq 2N-1)$.

Имеет место следующее равенство

$$F_N^{\alpha}(\theta^-,\theta^+,z^-,1)=\frac{\det\mathcal{A}}{(\theta^--\theta^+)\,\Delta(\theta^+)}. \tag{18}$$

Напомним, что в (I7) $\sigma_k(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ – это k-ая элементарная симметрическая функция от $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Для доказательства теоремы 4 рассмотрим полиномы

$$P_{k,j}^{\alpha}(\theta)=\alpha\sigma_k(\theta_{a\neq j}-\tfrac{1}{2},\theta+\tfrac{1}{2})-\sigma_k(\theta_{a\neq j}+\tfrac{1}{2},\theta-\tfrac{1}{2}),$$

$$Q_{k,j}^{\alpha}(\theta)=(1-\alpha)\sigma_k(\theta+\tfrac{1}{2},\theta_{a\neq j}-\tfrac{1}{2})-\alpha\sum_{\ell\neq j}\prod_{p\neq\ell,j}\frac{\theta_p-\theta_j+1}{\theta_p-\theta_\ell}\sigma_{k-1}(\theta_{a\neq\ell}\pm\tfrac{1}{2}).$$

Пусть $\theta^-=\theta^-_A\cup\theta^-_B$, $A\cap B=\emptyset$, $|A|=n$. Определим рациональную функцию

$$\sigma_{A,B}^{\alpha}(\theta^-,\theta^+)=\frac{\det|P^{\alpha}_{k,j\in A}(\theta^-),Q^{\alpha}_{k,j\in B}(\theta^-),A^{(0,1)}_{k,j}(\theta^+)|}{\Delta(\theta^-)\Delta(\theta^+)(\theta^--\theta^+)f(\theta^-_A,\theta^-_B)}. \tag{19}$$

ТЕОРЕМА 5. Имеет место равенство

$$\sigma_{A,B}^{\alpha}(\theta^-,\theta^+)=\sum_{\substack{\theta^+=\theta^+_C\cup\theta^+_D\\ |A|=|C|=n}}\sigma_n^{\alpha}(\theta^-_A,\theta^+_C)\,\sigma^{\alpha}_{N-n}(\theta^+_D,\theta^-_B)\,f(\theta^+_D,\theta^+_C). \tag{20}$$

В силу (I) из теоремы 5 следует теорема 4. Заметим, что из (I9) и (20) следует явная формула для $\sigma_N^{\alpha}(\theta^-,\theta^+)$ (надо взять $B\neq\emptyset_N$). Отметим, что формула (5) совпадает после умножения (5) на z^N с (20) в случае $B=\emptyset$ и $\alpha=z^{-1}$.

Мы ограничимся случаем $\alpha=0$ при доказательстве теоремы 5.

7°. Доказательство теоремы 5 в случае $\alpha=0$.

Обозначим через $Z_n(\theta^-,\theta^+)$ коэффициент при $(-z)^n$ в $\sigma_n^z(\theta^-,\theta^+)$. Из леммы 2 следует, что

$$Z_n(\theta^-,\theta^+)=\frac{1}{\theta^- - \theta^+}\det\left|\sigma_{k-j}(\theta^-_{a>j}+\tfrac{1}{2},\theta^- -\tfrac{1}{2}),\ P^{(1)}_{k-j,n}(\{1,\dots,j\}|\theta^+)\right| \tag{21}$$

Другое выражение для статистической суммы $Z_n(\theta^-,\theta^+)$ было получено независимо А.Г.Изергиным [8] .

Напомним, что имеет место равенство [10] :

$$\sigma_n^z(\theta^-,\theta^+)=\sum_{\substack{\theta^-=\theta^-_A\cup\theta^-_B\\ \theta^+=\theta^+_C\cup\theta^+_{\mathcal{D}}}} z^{|A|}Z_k(\theta^-_A,\theta^+_C)Z_{n-k}(\theta^+_{\mathcal{D}},\theta^-_B)f(\theta^-_A,\theta^-_B)f(\theta^+_{\mathcal{D}},\theta^+_C)\ , \tag{22}$$

причем $A\cap B=\emptyset,\quad C\cap\mathcal{D}=\emptyset,\quad |A|=|C|=k$.

Положим

$$Z_{A,B}(\theta^-,\theta^+)=\sum_{\substack{\theta^+=\theta^+_C\cup\theta^+_{\mathcal{D}}\\ |C|=|A|=k}} Z_k(\theta^-_A,\theta^+_C)Z_{n-k}(\theta^+_{\mathcal{D}},\theta^-_B)\,f(\theta^+_{\mathcal{D}},\theta^+_C). \tag{23}$$

ЛЕММА 5. Имеют место следующие рекуррентные соотношения

$i)$ если $\theta^-_n=\theta=\theta^+_n\in\theta^-_A$, то

$$\operatorname{Res} Z_{A,B}(\theta^-,\theta^+)=(-1)f(\theta,\theta^-_{\tilde A})f(\tilde\theta^+,\theta)Z_{\tilde A,B}(\tilde\theta^-,\tilde\theta^+)\ , \tag{24$'$}$$

$ii)$ если $\theta^-_n=\theta=\theta^+_n\in\theta^-_B$, то

$$\operatorname{Res} Z_{A,B}(\theta^-,\theta^+)=(-1)f(\theta^-_{\tilde B},\theta)f(\theta,\tilde\theta^+)Z_{A,\tilde B}(\tilde\theta^-,\tilde\theta^+), \tag{24$''$}$$

здесь $\tilde A=A\setminus\{n\},\ f(\theta_A,\theta)=\prod_{j\in A}f(\theta_j,\theta)$ и т.д.

Доказательство леммы 5 следует из рекуррентных соотношений для статистической суммы $Z_n(\theta^-,\theta^+)$.

ЛЕММА 6. Имеет место равенство

$$Z_{A,B}(\theta^-,\theta^+)=\frac{\det\left|\Phi_k(\theta^-_A+\tfrac{1}{2}|\theta^-\pm\tfrac{1}{2}),\ \Phi_k(\theta^-_B-\tfrac{1}{2}|\theta^-\pm\tfrac{1}{2}),\sigma_{k-1}(\theta^+_{a\neq j}\pm\tfrac{1}{2})\right|}{\Delta(\theta^-_A)\,\Delta(\theta^-_B)(\theta^-_A-\theta^-_B+1)\Delta(\theta^+)(\theta^- -\theta^+)}\ . \tag{25}$$

Доказательство леммы 6 вполне аналогично доказательству леммы I. Положим $\Pi_{A,B}(\theta^-,\theta^+)$ равным правой части (25).Тогда $\Pi_{A,B}(\theta^-,\theta^+)$ удовлетворяет соотношениям (24),(24),полиномы $(\theta^- -\theta^+)Z_{AB}$ и $(\theta^- -\theta^+)\Pi_{AB}$ имеют одинаковую степень (равную n^2), и одинаковые начальные значения. Следовательно, выполняется равенство (25). Заметим теперь, что при $\alpha=0$ функции $\sigma^\alpha_{A,B}(\theta^-,\theta^+)$, задаваемые формулой (20) совпадают с $Z_{A,B}(\theta^-,\theta^+)$. Доказательство теоремы 5 для случая $\alpha = 0$ закончено.

На этом мы заканчиваем рассмотрение функций $\sigma^{z}(\theta^{-},\theta^{+})$ – "коэффициентов Фурье формфакторов" для квантовых моделей, отвечающих R-матрицам XXX-типа.

8°. В этом разделе мы приведем "мультипликативный" аналог функций π_n^{z}, который соответствует "коэффициентам Фурье формфакторов" для квантовых моделей, отвечающих R-матрицам XXZ-типа [2].

Пусть a – независимая переменная $b = a^{-1}$, $|\theta^{-}| = |\theta^{+}| = n$. Будем считать, что степень a равна нулю. Положим

$$T_k^{(z)}(\theta_j|\theta) = \Phi_k(b\theta_j|a\theta, b\theta) - z\Phi_k(a\theta_j|a\theta, b\theta).$$

Здесь, как и раньше, $\Phi_k(x|\lambda) = \sum_{\ell=0}^{k} \sigma_{k-\ell}(\lambda)(-x)^{\ell}$.

Определим "мультипликативный" аналог полиномов π_n^{z} следующей формулой

$$\Pi_n^{(z)}(\theta^{-}|\theta^{+}) = \frac{\det|T_k^{(z)}(\theta_j^{-}|\theta^{-}), T_k^{(1)}(\theta_j^{+}|\theta^{+})|}{(a-b)^{n}\Delta(\theta^{-})\Delta(\theta^{+})\,\theta^{+}}, \tag{26}$$

где $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$.

ТЕОРЕМА 6. Полиномы $\Pi_n^{(z)}$ однозначно характеризуются следующими свойствами

I) $\Pi_n^{(z)}(\theta^{-}|\theta^{+})$ – симметрическая функция по каждой группе переменных θ^{-} и θ^{+} в отдельности.

2) степень полинома $\Pi_n^{(z)}$ по θ^{-},θ^{+} и z равна n^2.

3) выполняется рекуррентное соотношение: если $\theta_n^{-} = \theta_n^{+} = \theta$, то

$$\Pi_n^{(z)}(\theta^{-}|\theta^{+})\Big|_{\theta_n^{-}=\theta_n^{+}} = \left\{(\theta - a^2\tilde{\theta}^{-})(\theta - b^2\tilde{\theta}^{+}) - z(\theta - b^2\tilde{\theta}^{-})(\theta - a^2\tilde{\theta}^{+})\right\} \times$$
$$\times\, \Pi_{n-1}^{(z)}(\tilde{\theta}^{-}|\tilde{\theta}^{+}), \quad \Pi_1^{(z)}(\theta^{-}|\theta^{+}) = 1 - z. \tag{27}$$

Доказательство теоремы 6 вполне аналогично доказательству леммы I. Соответствующие "мультипликативные" аналоги имеют следствие I, лемма 2, теорема 2, точную формулировку которых мы предоставляем читателю. Отметим, что формула (5) получается из (26) после специализации $\theta_j^{\pm} \mapsto 1 + \varepsilon\theta_j^{\pm}$, $a \mapsto 1 + \varepsilon/2$, $\varepsilon \to 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы вычислили функции $\sigma_n^{z}(\theta^{-},\theta^{+})$, являющиеся "коэффициентами Фурье формфакторов", рассмотренных в [I], формулы 5.I–5.3: функции $\sigma^{(1)}(\{\theta^{-}\}_{N-1}|\{\theta^{+}\}_{N})$, заданные формулой

(23), $z=1$, являющиеся формфакторами полей $\psi_{\pm}(0)$, рассмотренных в [10] , формулы (3.11),(3.12). Для функций $\sigma_n^z(\theta^-,\theta^+)$ мы привели несколько представлений в виде детерминанта: формулы (5), (7), (8),(11),(13). Мы вычислили вакуумные значения формфакторов F_N^α , определенных в [1] . Нерешенной интересной задачей является явное вычисление функций $F_N^\alpha(\theta^-,\theta^+,Z^-,Z^+)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

После того, как настоящая работа была завершена, мы узнали, что Н.А.Славнов нашел новое представление для полиномов $\pi_n^z(\theta^-,\theta^+)$ в виде определителя матрицы размера $n\times n$. Ради полноты изложения, мы приведем в приложении формулу Н.А.Славнова.

ТЕОРЕМА (Н.А.Славнов). Имеет место равенство

$$\pi_n^z(\theta^-,\theta^+) = (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{(\theta^- - \theta^- + 1)(\theta^+ - \theta^+ + 1)}{\theta^+ - \theta^- + 1} \det|B_{kj}| , \tag{28}$$

$$B_{kj}=\delta_{kj}-\sum_{m=1}^{n}\left[(1-z)(\theta_m^- - \theta_k^+)+z\right]\prod_{a\neq m}\frac{\theta_a^- - \theta_k^+ - 1}{\theta_a^- - \theta_m^- + 1}\cdot\frac{\theta_a^- - \theta_k^+}{\theta_a^- - \theta_m^-}\prod_{a\neq j}\frac{\theta_a^+ - \theta_m^- + 1}{\theta_a^+ - \theta_j^+ - 1}\cdot\frac{\theta_a^+ - \theta_m^-}{\theta_a^+ - \theta_j^+}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $V_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ правую часть формулы (28). Рассмотрим сначала поведение матричных коэффициентов $B_{kj}(\theta^-,\theta^+)$ в (28) при специализации $\theta_n^- = \theta_n^+$, $\theta_p^- = \theta_n^+ + 1$. Справедливы следующие правила редукции

1)
$$B_{nj}(\theta^-,\theta^+)\Big|_{\theta_n^- = \theta_n^+ = \theta} = \left\{1-\prod_{a\neq j}\frac{\theta_a^- - \theta - 1}{\theta_a^- - \theta + 1}\cdot\frac{\theta_a^+ - \theta + 1}{\theta_a^+ - \theta - 1}\cdot z\right\}\delta_{nj} ,$$

2) если $1\leqslant k,j<n$, то
$$B_{kj}(\theta^-,\theta^+)\Big|_{\theta_n^- = \theta_n^+ = \theta} = B_{kj}(\tilde\theta^-,\tilde\theta^+)\frac{(\theta-\theta_k^+ - 1)(\theta-\theta_k^+)}{(\theta-\theta_j^+ - 1)(\theta-\theta_j^+)} ,$$

3) $B_{nj}(\theta^-,\theta^+)\Big|_{\theta_p^- = \theta_n^+ + 1} = 0$ для всех $1\leqslant p < n$.

Из 3) следует, что $V_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ является полиномом (легко видеть, что B_{kj} не имеет полюсов при $\theta_\alpha^\pm = \theta_\beta^\pm$) степени $2(n^2-n)-n^2+2n=n^2$. Из 1) и 2) следует, что $V_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению ($2'''$). Остается заметить, что $V_n^{(z)}(\theta^-,\theta^+)$ является симметрической функцией по θ^- и по θ^+ Доказательство закончено.

Н.А.Славнов нашел красивое прямое доказательство эквивалентности формул (5) и (28). Рассмотрим определитель Вандермонда порядка $2n \times 2n$:

$$\Delta = \begin{pmatrix} (1/2 - \theta_j^-)^{2n-k} \\ (-1/2 - \theta_j^+)^{2n-k} \end{pmatrix}_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le 2n}}$$

Ясно, что $\det(\Delta) = \Delta(\theta^-)\Delta(\theta^+)(\theta^+ - \theta^- + 1)$. С другой стороны,

$$\Delta \cdot \left(P_k^{(z)}(\theta_j^- | \theta^- \pm \tfrac{1}{2}), P_k^{(1)}(\theta_j^+ | \theta^+ \pm \tfrac{1}{2})\right)_{\substack{0 \le k \le 2n-1 \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} A_{kj}^{--} & A_{kj}^{-+} \\ A_{kj}^{+-} & A_{kj}^{++} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где

$$A_{kj}^{--} = \prod_{a \ne j} (\theta_a^- - \theta_j^-)(\theta_a^- - \theta_j^- + 1)\,\delta_{kj},$$

$$A_{kj}^{-+} = \prod_{a \ne j} (\theta_a^- - \theta_k^+)(\theta_a^- - \theta_k^+ - 1)\left[(1-z)(\theta_j^- - \theta_k^+) + z\right],$$

$$A_{kj}^{+-} = \prod_{a \ne j} (\theta_a^+ - \theta_k^-)(\theta_a^+ - \theta_k^- + 1),$$

$$A_{kj}^{++} = \prod_{a \ne j} (\theta_a^+ - \theta_j^+)(\theta_a^+ - \theta_j^+ - 1)\,\delta_{kj}.$$

При выводе формулы (29) мы использовали равенство $P_k^{(z)}(\theta_j | \theta \pm \frac{1}{2}) = \sigma_k(\theta_{a \ne j} - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}) - z\,\sigma_k(\theta_{a \ne j} + \frac{1}{2}, \theta - \frac{1}{2})$, где σ_k - k-ая элементарная симметрическая функция. Формула (28) получается из (29), если воспользоваться хорошо известным утверждением: если матрица $\mathcal{D}$ размера $n \times n$ обратима и коммутирует с матрицей C размера $n \times n$, то

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & \mathcal{D} \end{pmatrix} = \det(A\mathcal{D} - BC).$$

Литература

1. I z e r g i n A.G., K o r e p i n V.E. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions, Comm.Math.Phys., 1984, vol.94, p.67-92.
2. I z e r g i n A.G., K o r e p i n V.E. Correlation functions for the Heisenberg XXZ-antiferromagnet, Comm.Math.Phys., 1985, vol.99, p.271-302.
3. C r e a m e r D.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. Gelfand-Levitan method for operator fields, Phys.Rev.D21, 1980, p.1523-1528.

4. С м и р н о в Ф.А. Уравнения Гельфанда - Левитана для квантового нелинейного уравнения Шредингера с притяжением, Докл. АН СССР, 1982, т.262, с.78-83.

5. C r e a m e r D.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. A study of correlation functions for delta-function Bose gas, Fermilab-Pub.-85/51-T, April, 1985, 65 p.

6. К и р и л л о в А.Н., С м и р н о в Ф.А. Формфакторы в SU(2)-инвариантной модели Тирринга. В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, XI, Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1987, т.164, с.70-120.

7. S m i r n o v F.A. A general formula for soliton form factors in the quantum sine-Gordon model, J.Phys.A: Math.Gen., 1986, vol.19, p.L575-L578.

8. И з е р г и н А.Г. Статсумма шестивершинной модели в конечном объеме. ДАН СССР, 1987, т.295, № 6, с.1603-1609.

9. K i r i l l o v A.N., S m i r n o v F.A. Form factors in O(3) nonlinear σ-model, Intern.Journ. of Modern Phys., A, 1987, vol.2, N 6.

10. И з е р г и н А.Г., К о р е п и н В.Е., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Корреляционные функции полей в одномерном Бозе-газе. В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.6, Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1986, т.150, с.26-36.

11. М а к д о н а л ь д И. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1985.

On some combinatorial problems arizing in the study of correlator functions in exactly solvable models of Quantum Field Theory. Kirillov A.N., Smirnov F.A. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.67-79.

Explicit solutions are presented to the recursion relation arising in the calculation of correlator functions in exactly solvable models of QFT via a method proposed by V.Korepin. The solutions are expressed as determinants of certain matrices. Bibl. - 11.

А.Н.Кириллов, Ф.А.Смирнов

ФОРМФАКТОРЫ В $SU(2)$ -ИНВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ ТИРРИНГА

Введение

Под словом формфактор в квантовой теории поля понимается матричный элемент локального оператора, вычисленный между вакуумом и n -частичным состоянием. Для двухчастичных формфакторов существует удобная параметризация через S - переменные, с помощью которой удается полностью исследовать их аналитическую структуру на основе кроссинг-симметрии и CPT-инвариантности. В работе [I] эти, известные в общем формализме квантовой теории поля, свойства были использованы для вычисления двухчастичных формфакторов в точно решаемых релятивистских моделях в пространстве $1+1$ измерений. В этой же работе были приведены некоторые уравнения для n -частичного формфактора, полученные по аналогии с двухчастичным случаем. Смысл этих уравнений, однако, не совсем понятен. Формфактор скалярного поля участвует в них как функция S -переменных во всех двухчастичных каналах, которых $n(n-1)/2$ В то же время реально такой формфактор зависит от $n-1$ вещественных переменных.

В работах [2,3] формфакторы в модели sine-Gordon были вычислены с использованием полученных в [4] квантовых уравнений Гельфанда - Левитана - Марченко (УГЛМ). Сложности, возникающие при таком способе вычисления формфакторов, связаны, прежде всего, с получением УГЛМ над заполненным вакуумом. Эти уравнения оказались весьма эффективными в секторе, содержащем только бозонные (однокомпонентные возбуждения, где они решаются итерациями). В спектре модели sine-Gordon имеются, помимо этих возбуждений, солитоны, являющиеся двухкомпонентными частицами, т.е. обладающие внутренней степенью свободы. Для солитонных формфакторов ситуация еще некоторое время оставалась неопределенной.

В работах [5,6] была реализована следующая программа. По аналогии с моделью sine-Gordon были написаны УГЛМ для модели sh-Gordon . В спектре этой модели имеется только один сорт однокомпонентных возбуждений, что обеспечивает большую эффективность УГЛМ. Было показано, что локальные поля, получаемые в результате решения УГЛМ удовлетворяют фундаментальному требованию квантовой теории поля - локальной коммутативности. Тем самым правильность гипотетических УГЛМ получила неоспоримое с точки зрения квантовой теории поля подтверждение. Такая аксиоматическая программа обладает большой привлекательностью, однако для ее реализации необходимо иметь хорошую гипотезу относительно вида формфакторов или УГЛМ, что в случае модели sh-Gordon практически одно и то же.

В работе [7] было показано, что в модели sine-Gordon в секторе, содержащем солитоны, УГЛМ сводятся к нетривиальной матричной задаче Римана. Тем самым УГЛМ оказываются мало эффективными, их смысл сводится к тому, что формфакторы удовлетворяют задаче Римана, решать же ее приходится независимо. Замечательное обстоятельство состоит в том, что, благодаря не до конца еще проясненной внутренней симметрии проблемы, задача Римана для формфакторов решается явно [3,7] .

Приведенное выше хронологическое вступление сделано для того, чтобы была понятна логика настоящей работы. По аналогии с солитонными формфакторами в модели sine-Gordon можно попытаться выдвинуть гипотезу относительно вида формфакторов в других релятивистских моделях, возбуждения в которых имеют внутренние степени свободы. Таких моделей большинство, обсуждавшаяся выше модель sh-Gordon скорее исключение, чем правило. После того, как гипотеза выдвинута, можно применить к этим моделям программу работы [5] , т.е. показать, что локальные поля, определяемые формфакторами коммутируют на пространственно-подобном интервале. Это является достаточной проверкой правильности гипотезы.

В настоящей работе изложенная программа будет применена к $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга. Модель интересна сама по себе и является для нас переходной ступенью от sine-Gordon к $O(3)$ нелинейной σ -модели, которой будет посвящена следующая публикация.

Модель Тирринга с $SU(2)$ инвариантностью описывается Лагранжианом:

$$\mathcal{L} = \int \left(-i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - g(\bar{\psi}\gamma_\mu\sigma^a\psi)(\bar{\psi}\gamma_\mu\sigma^a\psi)\right) dx$$

где $\psi = \{\psi_i^\alpha\}$ - Ферми поля, индекс $i = 0,1$ спинорный, индекс $\alpha = \pm 1$ - изотопический. Матрицы Паули σ^a действуют на изотопические, а γ_μ - на спинорные индексы, при этом $\gamma_0 = \sigma^1$, $\gamma_1 = i\sigma^2$. Модель исследовалась в [8] . Было показано, что физическими возбуждениями являются массивные двухкомпонентные частицы. Для описания физического пространства состояний мы будем использовать операторы Замолодчикова - Фаддеева. Существование этих операторов является в нашем подходе аксиомой. Без них, впрочем, можно было бы и обойтись, но это усложнило бы технику. Алгебра Замолодчикова - Фаддеева $Z^{\varepsilon}(\beta)$, $Z^{*}_{\varepsilon}(\beta)$, $(\varepsilon = \pm 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$ задается коммутационными соотношениями:

$$Z^{\varepsilon_1}(\beta_1) Z^{\varepsilon_2}(\beta_2) = S^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}_{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}(\beta_1 - \beta_2) Z^{\varepsilon_2'}(\beta_2) Z^{\varepsilon_1'}(\beta_1),$$

$$Z^{*}_{\varepsilon_1}(\beta_1) Z^{*}_{\varepsilon_2}(\beta_2) = S^{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\beta_1 - \beta_2) Z^{*}_{\varepsilon_2'}(\beta_2) Z^{*}_{\varepsilon_1'}(\beta_1), \tag{I}$$

$$Z^{\varepsilon_1}(\beta_1) Z^{*}_{\varepsilon_2}(\beta_2) = S^{\varepsilon_1 \varepsilon_2'}_{\varepsilon_1' \varepsilon_2}(\beta_2 - \beta_1) Z^{*}_{\varepsilon_2'}(\beta_2) Z^{\varepsilon_1'}(\beta_1) +$$

$$+ \delta^{\varepsilon_1}_{\varepsilon_2} \delta(\beta_1 - \beta_2),$$

где S - двухчастичная S -матрица:

$$S^{\varepsilon_1' \varepsilon_2'}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(\beta) = S_0(\beta)(\beta \delta^{\varepsilon_1'}_{\varepsilon_1} \delta^{\varepsilon_2'}_{\varepsilon_2} - \pi i \delta^{\varepsilon_2'}_{\varepsilon_1} \delta^{\varepsilon_1'}_{\varepsilon_2}) \frac{1}{(\beta - \pi i)},$$

$$S_0(\beta) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2\pi i}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi i})}{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2\pi i}) \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi i})},$$

иначе говоря, S действует в тензорном произведении двух $\mathbb{C}^2$ и дается формулой

$$S(\beta) = S_0(\beta)(\beta I - \pi i P) \frac{1}{\beta - \pi i},$$

где I - единичный оператор, P - оператор перестановки. Пространство физических состояний натянуто на физический вакуум $|ph\rangle$. Оператор $Z^{\varepsilon}(\beta)$ аннулируется на $|ph\rangle$, оператор $Z^{*}_{2}(\beta)$ рождает частицу с энергией-импульсом: $p^1(\beta) = m \operatorname{sh} \beta$, m - масса.

Полный набор "in" состояний состоит из векторов:

$$Z^{*}_{\varepsilon_n}(\beta_n) \ldots Z^{*}_{\varepsilon_1}(\beta_1) |ph\rangle,$$

$$\beta_n > \ldots > \beta_1$$

полный набор "out" состояний состоит из векторов

$$Z^{*}_{\varepsilon_n}(\beta_n) \ldots Z^{*}_{\varepsilon_1}(\beta_1) |ph\rangle,$$

$\beta_n < \ldots < \beta_1 .$

Из (I) следует, что "in" состояния преобразуются в "out" полной S -матрицей.

В настоящей работе будут рассматриваться формфакторы следующих локальных операторов: тензора энергии импульса $T_{\mu\nu}$, токов $j^a_\mu = \overline{\Psi} \sigma^a \gamma_\mu \Psi$, $(a = 1,2,3)$. В тех случаях, когда не существенно, с каким именно из этих операторов мы имеем дело, будем обозначать его через $\mathcal{O}(x)$.

Рассмотрим матричный элемент (формфактор)

$$< ph \,|\, \mathcal{O}(x_0, x_1) \,|\, Z^*_{\varepsilon_{2n}}(\beta_{2n}) \ldots Z^*_{\varepsilon_1}(\beta_1) > =$$

$$= \exp\Big(-i \sum_{j=1}^{2n} p^\mu(\beta_j)\, x_\mu\Big) f_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n}}(\beta_1, \ldots, \beta_{2n}),$$

очевидно, что любой из рассматриваемых операторов может перевести из вакуума только в четно-частичное состояние.

Мы требуем, чтобы формфакторы удовлетворяли следующим условиям:

I. Условие симметрии:

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_{2n})_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n}}\, S^{\varepsilon_i\, \varepsilon_{i+1}}_{\varepsilon'_i\, \varepsilon'_{i+1}}(\beta_i - \beta_{i+1}) =$$

$$= f(\beta_1, \ldots, \beta_{i+1}, \beta_i, \ldots \beta_{2n})_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon'_{i+1} \varepsilon'_i \ldots \varepsilon_{2n}} \qquad (2)$$

2. Задача Римана:

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_{2n} + 2\pi i)_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n}} = (-1)^n f(\beta_1, \ldots, \beta_{2n})_{\varepsilon'_1 \ldots \varepsilon'_{2n}} \times$$

$$\times\, S^{\varepsilon'_{2n-1}\, \varepsilon'_{2n}}_{\varepsilon_{2n-1}\, \tau_1}(\beta_{2n-1} - \beta_{2n})\, S^{\varepsilon'_{2n-2}\, \tau_1}_{\varepsilon_{2n-2}\, \tau_2}(\beta_{2n-2} - \beta_{2n}) \ldots S^{\varepsilon'_1\, \tau_{2n-2}}_{\varepsilon_1\, \varepsilon_{2n}}(\beta_1 - \beta_{2n})$$

Благодаря свойству симметрии (2), это уравнение может быть переписано в виде:

$$f(\beta_1, \ldots, \beta_{2n} + 2\pi i)_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n}} = (-1)^n f(\beta_{2n}, \beta_1, \ldots, \beta_{2n-1})_{\varepsilon_{2n} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{2n-1}} \qquad (3)$$

3. $f_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$ регулярна как функция β_{2n} в полосе $0\leqslant \mathrm{Im}\beta_{2n}<\pi$. Она имеет простые полюса в точках $\beta_{2n}=\beta_j+\pi i$. Приведем формулу для вычета в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$, остальные вычеты могут быть получены по симметрии (2).

$$
\begin{aligned}
&2\pi i \operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i} f(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{2n}} = f(\beta_1,\ldots\beta_{2n-2})_{\varepsilon'_1\ldots\varepsilon'_{2n-2}}\times \\
&\times C_{\varepsilon_{2n}\varepsilon'_{2n-1}}\Big\{\delta^{\varepsilon'_1}_{\varepsilon_1}\delta^{\varepsilon'_2}_{\varepsilon_2}\ldots\delta^{\varepsilon'_{2n-1}}_{\varepsilon_{2n-1}}+ \qquad\qquad (4)\\
&+(-1)^n S^{\varepsilon'_{2n-1},\varepsilon'_1}_{\tau_1\,\varepsilon_1}(\beta_{2n-1}-\beta_1)\,S^{\tau_1\,\varepsilon'_2}_{\tau_2\,\varepsilon_2}(\beta_{2n-1}-\beta_2)\ldots \\
&\ldots S^{\tau_{2n-3}\,\varepsilon'_{2n-2}}_{\varepsilon_{2n-1}\,\varepsilon_{2n-2}}(\beta_{2n-1}-\beta_{2n-2}),
\end{aligned}
$$

где $C=\sigma^2$.

Центральным местом нашей аксиоматики является доказанная в первом разделе настоящей работы теорема, утверждающая, что если формфакторы двух операторов удовлетворяют требованиям (2),(3),(4), то операторы коммутируют на пространственно-подобном интервале. Во втором разделе будут предъявлены формулы для формфакторов и показано, что они удовлетворяют (2),(3),(4). В третьем разделе будут вычислены сингулярности коммутаторов токов в начале координат на пространственном интервале. Будет показано, что

$$
\begin{aligned}
&[j_0^a(x),j_0^b(y)] = i\varepsilon^{abc}\,j_0^c(x)\,\delta(x-y)\,,\\
&[j_1^a(x),j_1^b(y)] = i\varepsilon^{abc}\,j_0^c(x)\,\delta(x-y)\,, \qquad\qquad (5)\\
&[j_0^a(x),j_1^b(y)] = i\varepsilon^{abc}\,j_1^c(x)\delta(x\ y) + \varkappa\,\delta^{ab}\delta'(x-y)
\end{aligned}
$$

I. Теорема о локальной коммутативности.

В настоящем разделе будет доказана теорема о локальной коммутативности, которая служит идеологическим фундаментом всей работы. Теорема будет сформулирована в достаточно абстрактных терминах, поскольку область ее применений не исчерпывается рассматриваемой нами моделью.

Рассмотрим некоторую факторизованную S-матрицу, действующую в тензорном произведении двух пространств одинаковой размерности h_1 и h_2. От S потребуем, чтобы она удовлетворяла условиям унитарности и кроссинг-симметрии:

$$S(\beta)\,S(-\beta)=I\,,\quad S(\beta+\pi i)=\varkappa\, C^{(1)} S^{t_1}(-\beta)\, C^{(1)}\,, \tag{6}$$

где $\varkappa=\pm 1$ в зависимости от конкретной S-матрицы, $C^{(1)}$ – действующая в h_1 матрица C, t_1 – транспонирование по h_1. От матрицы C требуется:

$$C^2=1\,,\quad C^t=\varkappa C\,,\quad C^{(1)}C^{(2)}S(\beta)=S(\beta)\,C^{(1)}C^{(2)}\,.$$

В случае $SU(2)$-инвариантной модели Тирринга $C=\sigma^2$, $\varkappa=-1$.

Рассмотрим набор вещественных чисел $\beta_1,\dots,\beta_{2n}$, которые будем называть быстротами. С каждым β_i свяжем пространство h_i. Формфакторы f, определенные во Введении, являются функциями от быстрот $\beta_1,\dots,\beta_{2n}$ со значениями в $h_1^*\otimes h_2^*\otimes\dots h_{2n}^*$. Под $S(\beta_i-\beta_j)$ будем понимать S-матрицу, действующую нетривиально только в $h_i\otimes h_j$. Будем считать, что β_i всегда связана с h_i, т.е. если β_i и β_j поменялись местами, то h_i и h_j также поменялись местами. Смысл этой несколько туманной фразы станет очевиден, когда мы перепишем в новых обозначениях условия (2),(3),(4):

$$\text{I.}\quad f(\beta_1,\dots,\beta_i,\beta_{i+1},\dots,\beta_{2n})\,S(\beta_i-\beta_{i+1})=f(\beta_1,\dots,\beta_{i+1},\beta_i,\dots,\beta_{2n}) \tag{7}$$

$$\text{2.}\quad f(\beta_1,\dots,\beta_{2n-1},\beta_{2n}+2\pi i)=\varkappa^n f(\beta_{2n},\beta_1,\dots,\beta_{2n-1}) \tag{8}$$

$$\text{3.}\quad \operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i} f(\beta_1,\dots,\beta_{2n})\,\big(f(\beta_1,\dots,\beta_{2n-2})\otimes e_{2n-1,2n}\big)\times$$

$$\times\big(1-S(\beta_{2n-1}-\beta_1)\dots S(\beta_{2n-1}-\beta_{2n-2})\,\varkappa^{n-1}\big) \tag{9}$$

где $e_{i,j}$ – вектор из $h_i^*\otimes h_j^*$, построенный следующим образом: в каждом из h_k^* введем базис $e_\varepsilon^{(k)}$, тогда $e_{i,j}=e_{\varepsilon_1}^{(i)}\,C^{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,e_{\varepsilon_2}^{(j)}$.

Определенные во Введении формфакторы есть матричные элементы, вычисленные между вакуумом и произвольным состоянием. Для доказательства локальной коммутативности нам понадобятся все матричные элементы локального оператора. Чтобы описать их, введем прежде всего функцию $f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)$ со значениями в $h_1\otimes\dots\otimes h_k\otimes h_{k+1}^*\dots\otimes h_{m+k}^*$.

$$f(\alpha_1,\dots\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)=\varkappa^{\frac{mk}{2}}C^{(1)}\dots C^{(k)}\times$$
$$\times\left(f(\alpha_1-\pi i,\dots,\alpha_k-\pi i,\beta_1,\dots,\beta_m)\right)^{t_1\dots t_k}, \tag{10}$$

где $C^{(i)}$ - матрица, действующая в h_i, t_i - транспонирование по h_i, α_j связана с h_j, β_j связана с h_{k+j}, $k+m$ считается четным, для нечетных $k+m$ $f(\alpha_1\dots\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)$ равна нулю по определению. Иначе говоря, $f(\alpha_1\dots\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)$ - тензор с m нижними и k верхними индексами, полученный из $\varkappa^{\frac{mk}{2}}\times$ $\times f(\alpha_1-\pi i,\dots,\alpha_k-\pi i,\beta_1,\dots,\beta_m)$ поднятием первых k индексов с помощью матрицы C. Произведение mk может быть нечетным, поэтому надо оговорить, что мы понимаем под $(-1)^{\frac{1}{2}}$ при $\varkappa=-1$. Будем считать $(-1)^{\frac{1}{2}}=i$.

Из свойств $f(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ вытекают следующие свойства $f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)$:

1) $f(\alpha_1,\dots\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)S(\beta_i-\beta_{i+1})=f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_{i+1},\beta_i,\dots,\beta_m)$,

2) $S(\alpha_i-\alpha_{i+1})f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)=f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i+1},\alpha_i,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)$,

3) $$f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_{m-1},\beta_m+\pi i)=\varkappa^{\frac{m-k-1}{2}}\times$$
$$\times\left(f(\beta_m,\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_{m-1})\right)^{t_{k+m}}C^{(k+m)},$$

4) $$f(\alpha_1-\pi i,\alpha_2,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)=\varkappa^{\frac{k-m+1}{2}}\times$$
$$\times C^{(1)}\left(f(\alpha_2,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m,\alpha_1)\right)^{t_1},$$

5) $$\operatorname*{res}_{\alpha_i=\beta_j} f(\alpha_1,\dots,\alpha_k|\beta_1,\dots,\beta_m)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\Big\{-S(\alpha_i-\alpha_{i-1})\dots S(\alpha_i-\alpha_1)f(\alpha_1,\overset{i}{\wedge}\dots,\alpha_k|\beta_1,\overset{j}{\wedge}\dots,\beta_m)I_j^i\times$$
$$\times S(\beta_m-\beta_i)\dots S(\beta_{j+1}-\beta_j)+$$
$$+\varkappa^{\frac{m-k}{2}}S(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\dots S(\alpha_k-\alpha_i)I_j^i f(\alpha_1,\overset{i}{\wedge}\dots,\alpha_k|\beta_1,\overset{j}{\wedge}\dots,\beta_m)\times$$
$$\times S(\beta_j-\beta_1)\dots S(\beta_j-\beta_{j-1})\Big\},$$

где I^i_j – тензор, отождествляющий пространства, связанные с α_i и β_j . Его компонентная запись есть $\delta^{\varepsilon_i}_{\varepsilon_{k+j}}$

Мы хотим ввести более компактные обозначения, которые будут удобны в дальнейшем. Будем обозначать множества быстрот большими латинскими буквами, например, $A=\{\alpha_j\}^k_{j=1}$, $B=\{\beta_j\}^m_{j=1}$. Как и прежде, будем считать, что с каждой быстротой ассоциировано пространство h . Количество элементов в A обозначим через $|A|$. Множество быстрот, упорядоченное по возрастанию (убыванию) будем обозначать через $\overrightarrow{A}(\overleftarrow{A})$. Пусть $\alpha_1<\ldots<\alpha_k$, т.е. $\overrightarrow{A}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, обозначим произведение операторов $Z(\alpha_1),\ldots,Z(\alpha_k)$ через $Z(\overrightarrow{A})$, а произведение $Z^*(\alpha_k),\ldots,Z^*(\alpha_1)$ – через $Z^*(\overleftarrow{A})$. Произведения операторов Z и Z^* понимаются как тензорные по внутренним пространствам.

Пусть $A=A_1\cup A_2$, определим операторы $S(\overrightarrow{A}|\overrightarrow{A}_1)$,

$$S(\overleftarrow{A}|\overleftarrow{A}):\ Z(\overrightarrow{A})=S(\overrightarrow{A}|\overrightarrow{A}_1)Z(\overrightarrow{A}_2)Z(\overrightarrow{A}_1),$$

$$Z^*(\overleftarrow{A})=Z^*(\overleftarrow{A}_1)Z^*(\overleftarrow{A}_2)\,S(\overleftarrow{A}_1|\overleftarrow{A}).$$

Легко показать, что

$$S(\overleftarrow{A}_1|\overleftarrow{A})S(\overrightarrow{A}|\overrightarrow{A}_1)=I \tag{13}$$

Пусть $\alpha_1>,\ldots,>\alpha_m;\ \beta_1>,\ldots,>\beta_n$ составляют множества A и B . Через $\Delta(A,B)$ обозначим $\delta_{mn}\prod\delta(\alpha_i-\beta_i)\,I^i_j$, I^i_j отождествляет пространства, связанные с α_i и β_i .

Базис "in" состояний составляют векторы

$$|\overleftarrow{B}>=Z^*(\overleftarrow{B})\,|ph>,$$

сопряженный базис есть

$$<\overrightarrow{B}|=<ph|\,Z(\overrightarrow{B}).$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с несколькими множествами типа A . Будем различать записи $\overrightarrow{A}_1\cup\overrightarrow{A}_2$ и $\overrightarrow{A_1\cup A_2}$, первая означает, что упорядоченное множество $\overrightarrow{A}_2$ приписано справа к $\overrightarrow{A}_1$, вторая – что $A_1\cup A_2$ упорядочены.

Аксиоматизируем форму матричного элемента $<\overrightarrow{A}|O(x_0,x_1)|\overleftarrow{B}>$:

$$\langle\vec{A}|\mathcal{O}(x_0,x_1)|\overleftarrow{B}\rangle = \exp\left(ix_\mu p^\mu(A) - ix_\mu p^\mu(B)\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\\ B=B_1\cup B_2}} S(\vec{A}\,|\,\vec{A}_1)\, f(\overleftarrow{A}_1+i0|\vec{B}_1)\,\Delta(A_2,B_2)\, S(\overleftarrow{B}_1|\overleftarrow{B})\times \tag{I4}$$

$$\times(-1)^{|B_1|}\,\varkappa^{\frac{1}{2}|A_2|(|A_1|-|B_1|)},$$

где $p^\mu(A)=\sum_{\alpha\in A} p^\mu(\alpha)$, $\overleftarrow{A}_1+i0$ означает, что все элементы A_1 слегка сдвинуты в верхнюю полуплоскость.

При доказательстве коммутативности оказывается чрезвычайно полезной следующая Лемма:

ЛЕММА I. Формула (I4) эквивалентна следующей:

$$\langle\vec{A}|\mathcal{O}(x_0,x_1)|\overleftarrow{B}_1\rangle = \exp\left(ix_\mu p^\mu(A) - ix_\mu p^\mu(B)\right)\times$$

$$\times\sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\\ B=B_1\cup B_2}} S(\vec{A}|\vec{A}_2)\, f(\overleftarrow{A}_1-i0|\vec{B}_1)\,\Delta(A_2,B_2)\, S(\overleftarrow{B}_2|\overleftarrow{B})\times(-1)^{|B_1|} \tag{I5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы для вычета (I2) следует:

$$f(\overleftarrow{A}+i0|\vec{B}) = \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3\\ B=B_1\cup B_2\cup B_3}} S(\vec{A}\,|\,\overrightarrow{A_1\cup A_3})\, S(\overrightarrow{A_1\cup A_3}|\vec{A}_3)\times$$

$$\times f(\overleftarrow{A}_1-i0\,|\,\vec{B}_1)\,\Delta(A_2,B_2)\,\Delta(A_3 B_3)\, S(\overleftarrow{B}_3\,|\,\overleftarrow{B_1\cup B_3})\times$$

$$\times S(\overleftarrow{B_1\cup B_3}|\overleftarrow{B})(-1)^{|B_3|}\,\varkappa^{\frac{1}{2}|A_2|(|A_1|-|B_1|)} \tag{I6}$$

Подставим (I6) в (I4), для удобства считая $x_0=x_1=0$

$$\langle\vec{A}|\mathcal{O}(0)|\overleftarrow{B}\rangle = \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\\ B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4}} S(\vec{A}|\overrightarrow{A_1\cup A_2\cup A_3})\times$$

$$\times S(\overrightarrow{A_1\cup A_2\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{A_1\cup A_3})\, S(\overrightarrow{A_1\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{A_3})\, f(\overleftarrow{A_1}-i0\,|\,\overrightarrow{B_1})\,\times$$

$$\times\,\Delta(A_2,B_2)\Delta(A_3,B_3)\Delta(A_4B_4)\, S(\overleftarrow{B_3}\,|\,\overleftarrow{B_1\cup B_3})\,\times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{B_1\cup B_3}\,|\,\overleftarrow{B_1\cup B_2\cup B_3})\, S(\overleftarrow{B_1\cup B_2\cup B_3}\,|\,\overleftarrow{B})\,\times$$

$$\times\, \varkappa^{\frac{1}{2}(|A_2|-|B_4|)(|A_1|-|B_1|)}(-1)^{|B_1|-|B_2|}$$

(I7)

Сделаем тождественное преобразование, заменив $\Delta(A_2,B_2)\Delta(A_4,B_4)$ на $[S(\overrightarrow{A_2\cup A_4}\,|\,\overrightarrow{A_2})]^{-1}\,\Delta(A_2,B_2)\Delta(A_4,B_4)[S(\overleftarrow{B_2}\,|\,\overleftarrow{B_2\cup B_4})]^{-1}$ и обозначим $A_2\cup A_4$ через A_5 , $B_2\cup B_4$ – через B_5 , при этом (I7) преобразуется к виду:

$$\langle\overrightarrow{A}|\mathcal{O}(0)|\overleftarrow{B}\rangle=\sum_{\substack{A=A_1\cup A_3\cup A_5\\ B=B_1\cup B_3\cup B_5\\ B_2\subset B_5}} S(\overrightarrow{A}\,|\,\overrightarrow{A_1\cup A_3})\, S(\overrightarrow{A_1\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{A_3})\,\times$$

$$f(\overleftarrow{A_1}-i0\,|\,\overrightarrow{B_1})\,\Delta(A_5,B_5)\Delta(A_3B_3)\, S(\overleftarrow{B_3}\,|\,\overleftarrow{B_1\cup B_3})\,\times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{B_1\cup B_3}\,|\,\overleftarrow{B})\,(-1)^{|B_1|-|B_2|}\,\varkappa^{\frac{1}{2}|A_5|(|A_1|-|B_1|)}$$

Заметим теперь, что суммирование по B_2 дает:

$$\sum_{B_2\subset B_5}(-1)^{|B_2|}=\begin{cases}1\ , & B_5\neq\emptyset\\ 0\ , & B_5\neq\emptyset\end{cases}$$

Следовательно,

$$\langle\overrightarrow{A}|\mathcal{O}(0)|\overleftarrow{B}\rangle=\sum_{\substack{A=A_1\cup A_3\\ B=B_1\cup B_3}} S(\overrightarrow{A}\,|\,\overrightarrow{A_3})\, f(\overleftarrow{A_1}-i0\,|\,\overrightarrow{B_1})\,\times$$

$$\times\,\Delta(A_3,B_3)\, S(\overleftarrow{B_2}\,|\,\overleftarrow{B})\,(-1)^{|B_3|},$$

что и требовалось доказать.

Из Леммы I следует существование двух эквивалентных представлений для матричных элементов коммутатора двух операторов. Эти представления даются следующей Леммой:

ЛЕММА 2. Рассмотрим два оператора $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, построенных по наборам удовлетворяющих (7),(8),(9) функций $f_1(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$, $f_2(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ с помощью описанной выше процедуры. Существуют два эквивалентных представлений для матричного элемента коммутатора $[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]$ (здесь и далее x считается пространственной координатой):

$$\langle \overleftarrow{A} | [\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] | \overleftarrow{B} \rangle \exp(+ik(A)x - ik(B)y) =$$

$$= \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3 \\ B=B_1\cup B_2\cup B_3}} S(\overleftarrow{A}|\overrightarrow{A_1}) S(\overrightarrow{A_2\cup A_3}|\overrightarrow{A_3}) \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \times \tag{I8}$$

$$\times G_-(x-y|C,A_1,B_1,A_3)\Delta(A_3,B_3) S(\overleftarrow{B_2}|\overleftarrow{B_2\cup B_3}) S(\overleftarrow{B_2\cup B_3}|\overleftarrow{B});$$

$$\langle \overleftarrow{A} | [\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] | \overleftarrow{B} \rangle \exp(ik(A)x - ik(B)y) \times$$

$$\times \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3 \\ B=B_1\cup B_2\cup B_3}} S(\overleftarrow{A}|\overrightarrow{A_1}) S(\overrightarrow{A_2\cup A_3}|\overrightarrow{A_3}) \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC \times \tag{I9}$$

$$\times G_+(x-y|C,A_1,B_1,A_3)\Delta(A_3,B_3) \overleftarrow{S}(\overleftarrow{B_3}|\overleftarrow{B_2\cup B_3}) \overleftarrow{S}(\overleftarrow{B_1}|\overleftarrow{B})$$

где $k(A) = p^0(A)$, интегрирование по C означает интегрирование по всем быстротам, входящим в C,

$$G_-(x-y) \,|\, C,A_1,B_1,A_3) = [f_1(\overleftarrow{A_1} - i0|\overrightarrow{C}\cup\overrightarrow{B_2}) S(\overleftarrow{C}|\overleftarrow{A_3}\cup\overleftarrow{C}) \times$$

$$\times f_2((\overleftarrow{C}\cup\overleftarrow{A_2}) - i0|\overrightarrow{B_1}) \exp(i(x-y)(k(C)+k(B_2)+k(A_3)+k(A_2))) \times$$

$$\times \varkappa^{\frac{1}{2}(|A_1|-|C|-|B_2|)(|A_3|+|A_4|)} -$$

$$-f_2(\overleftarrow{A}_2 - i0\,|\overrightarrow{B}_1 \cup \overrightarrow{C})\, S(\overrightarrow{C} \cup \overrightarrow{A}_2 | \overleftarrow{C})\, f_1(\overleftarrow{A}_1 \cup \overleftarrow{C}\,|\overrightarrow{B}_2) \times$$

$$\times \exp\left(i(x-y)\left(-k(C)+k(A_2)+k(B_2)+k(A_3)\right)\right) \times$$

$$\times\, \varkappa^{\frac{1}{2}(|A_1|+|C|-|B_2|)(|B_1|+|B_4|)\,]}\,(-1)^{|B_1|+|B_2|+|C|}$$

$G_+(x-y\,|C,A_1,B_1,A_3)$ получается из $-G_-(x-y)|C,A_1,B_1,A_3)$ заменой $x \leftrightarrow y$, $f_1 \leftrightarrow f_2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матричный элемент $\langle \overrightarrow{A} | O_1(x) O_2(y) | \overleftarrow{B} \rangle$. Вставим между $O_1(x)$ и $O_2(y)$ полный набор состояний:

$$\langle \overrightarrow{A} | O_1(x) O_2(y) | \overleftarrow{B} \rangle = \sum_{|D|=0}^{\infty} \int dD\, dF \langle \overrightarrow{A} | O_1(x) | \overleftarrow{D} \rangle \times$$

$$\times\, \Delta(D,F) \langle \overrightarrow{F} | O_2(y) | \overleftarrow{B} \rangle$$

Для $\langle \overrightarrow{A} | O_1(x) | \overleftarrow{D} \rangle$ воспользуемся представлением (I4), а для $\langle \overrightarrow{F} | O_2(y) | \overleftarrow{B} \rangle$ – представлением (I5):

$$\langle \overrightarrow{A} | O_1(x) O_2(y) | \overleftarrow{B} \rangle = \sum_{A=A_1\cup A_4,\; B=B_1\cup B_4} \;\; \sum_{|D|=0} \int dD\, dF \times$$

$$\sum_{D=D_1\cup D_2} \sum_{F=F_1\cup F_2} S(\overrightarrow{A}|\overrightarrow{A}_1)\, f_1(\overleftarrow{A}_1 + i0\,|\overrightarrow{D}_1)\, \Delta(A_4, D_2) \times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{D}_1|\overleftarrow{D})\, \Delta(D,F)\, S(\overrightarrow{F}|\overrightarrow{F}_2)\, f_2(\overleftarrow{F}_1|\overrightarrow{B}_1 + i0)\, \Delta(F_2, B_4) \times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{B}_4|\overleftarrow{B}) \exp\left(-ik(A)x + ik(D)x - ik(F)y + ik(B)y\right) \times$$

$$\times\, \varkappa^{\frac{1}{2}|A_4|(|A_1|-|D_1|)} =$$

$$= \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3 \\ B=B_1\cup B_2\cup B_3}} \;\; \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC\; S(\overrightarrow{A}|\overrightarrow{A}_1)\, f_1(\overleftarrow{A}_1 + i0\,|\overrightarrow{C} + \overrightarrow{B}_2) \times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{C\cup B_2}\,|\,\overleftarrow{C\cup B_2\cup A_3\cup A_2})\,\Delta(A_3,B_3)\,S(\overrightarrow{C\cup B_2\cup B_3\cup A_2}\,|\,\overrightarrow{B_2\cup B_3})\,\times$$

$$\times\, f_2(\overleftarrow{A_2\cup C}\,|\,\overrightarrow{B_1}+i0)\,S(\overleftarrow{B_2\cup B_3}\,|\,\overleftarrow{B})\,\exp\,(-ik(A_1)x+$$

$$+\,ik(B_2)x+ik(C)(x-y)-ik(B_1)y-ik(A_2)y)\,\times$$

$$\times\, x^{\frac{1}{2}(|A_1|-|C|-|B_2|)(|A_2|+|A_3|)}$$

Напишем два тождества

$$Z^*(\overleftarrow{C\cup B_2})\,Z^*(\overleftarrow{A_3\cup A_2})\,S(\overleftarrow{C\cup B_2}\,|\,\overleftarrow{C\cup B_2\cup A_2\cup A_3})\,\times$$

$$\times\, S(\overrightarrow{C\cup B_2\cup A_2\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{B_2\cup A_3})=Z^*(\overleftarrow{B_2\cup A_3})\,Z(\overleftarrow{C\cup A_2}),$$

$$Z^*(\overleftarrow{C\cup B_2})\,Z^*(\overleftarrow{A_3\cup A_2})\,S(\overrightarrow{A_2\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{A_3})\,S(\overrightarrow{C\cup B_2}\,|\,\overrightarrow{B_2})\,\times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{C}\,|\,\overleftarrow{A_3\cup C})\,S(\overleftarrow{C}\,|\,\overleftarrow{C\cup A_2})\,S(\overleftarrow{B_2}\,|\,\overleftarrow{B_2\cup A_3})= \qquad (20)$$

$$=Z^*(\overleftarrow{B_2\cup A_3})\,Z^*(\overleftarrow{C\cup A_2}),$$

при выводе этих тождеств необходимо использовать равенство (I3). Из тождеств (20) следует, что

$$S(\overleftarrow{C\cup B_2}\,|\,\overleftarrow{C\cup B_2\cup A_2\cup A_3})\,\Delta(A_3,B_3)\,S(\overrightarrow{C\cup B_2\cup A_2\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{B_2\cup B_3})=$$

$$=S(\overrightarrow{A_2\cup A_3}\,|\,\overrightarrow{A_3})\,S(\overrightarrow{C\cup B_2}\,|\,\overrightarrow{B_2})\,\Delta(A_3,B_2)\,S(\overleftarrow{C}\,|\,\overleftarrow{B_3\cup C})\,\times$$

$$\times\, S(\overleftarrow{C}\,|\,\overleftarrow{C\cup A_2})\,S(\overleftarrow{B_2}\,|\,\overleftarrow{B_2\cup A_3}).$$

Следовательно

$$\langle \vec{A}|\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(y)|\overleftarrow{B}\rangle = \sum_{\substack{A=A_1\cup A_2\cup A_3\\ B=B_1\cup B_2\cup B_3}} \sum_{|C|=0}^{\infty} \int dC\, S(\vec{A}|\vec{A}_1)\times$$

$$S(\overrightarrow{A_2\cup A_3}|\vec{A}_3)\, f_1(\vec{A}_1+i0|\vec{C}\cup\vec{B}_2)\, S(\overleftarrow{C}|\vec{A}_3\cup\overleftarrow{C})\Delta(A_3,B_3)\times$$

$$\times f_2(\overleftarrow{C}_0\cup\vec{A}_2|\vec{B}_1+i0)\, S(\overleftarrow{B}_2|\overleftarrow{B_2\cup B_3})S(\overleftarrow{B_2\cup B_3}|\overleftarrow{B})\times \tag{21}$$

$$\times \exp(ik(C)(x-y)-ik(A_1)x+ik(B_3)x+ik(B_1)y-ik(A_2)y)\times$$

$$\times\, \varkappa^{\frac{1}{2}(|A_2|+|A_3|)(|A_1|-|C|-|B_2|}$$

Аналогичным образом можно преобразовать матричный элемент $\langle \vec{A}|\mathcal{O}_2(y)\mathcal{O}_1(x)|\overleftarrow{B}\rangle$, по-прежнему пользуясь представлением (15) для $\mathcal{O}_2$. При этом получим формулу (18). Формула (19) получится, если пользоваться представлением (15) для $\mathcal{O}_1$ и представлением (14) для $\mathcal{O}_2$.

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему:

ТЕОРЕМА I. Пусть формфакторы двух локальных операторов удовлетворяют условиям (7),(8),(9), а полный набор их матричных элементов построен по описанной выше процедуре. Пусть, кроме того,

$$f_i(\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{k+1}+\Lambda,\dots,\beta_{2n}+\Lambda) \underset{|\Lambda|\to\infty}{=} \mathcal{O}(e^{s|\Lambda|})$$

где s – некоторое число, общее для всех k и m. Тогда любой матричный элемент коммутатора $[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]$ есть обобщенная функция с носителем в точке $x=y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Матричный элемент коммутатора $\langle A|[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]|\overleftarrow{B}\rangle$ после нормировки на $\exp(ik(A)x-ik(B)y)$ зависит только от $x-y$ (18). Рассмотрим произвольную финитную функцию из C^∞ – $\varphi(x-y)$. Представим ее в виде $\varphi=\varphi_++\varphi_-$ $\varphi_\pm(x-y)=\theta(\pm x\mp y)\varphi(x-y)$. Рассмотрим свертку:

$$\int(\langle\vec{A}|[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]|\overleftarrow{B}\rangle e^{ik(A)x-ik(B)y})\varphi(x-y)\,d(x-y)=$$

$$=\int(\langle\vec{A}|[\mathcal{O}_1(x),\mathcal{O}_2(y)]|\overleftarrow{B}\rangle e^{ik(A)x-ik(B)y})\varphi_-(x-y)\,d(x-y)+$$

$$\int \left(\langle \vec{A} \,|\, [\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] \,|\, \overleftarrow{B} \rangle \, e^{ik(A)x - ik(B)y}\right) \mathcal{G}_+(x-y)\, d(x-y)$$

(22)

Трюк, впервые примененный в [5] состоит в том, чтобы использовать для матричного элемента первого слагаемого (22) представление (I8), а для второго слагаемого - представление (I9). Для первого слагаемого имеем:

$$\int \langle \vec{A} \,|\, [\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y)] \,|\, \overleftarrow{B} \rangle \, e^{ik(A)x - ik(B)y} \, \mathcal{G}_-(x-y)\, d(x-y) =$$

$$= \sum_{\substack{A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ B = B_1 \cup B_2 \cup B_3}} S(\vec{A} \,|\, \overrightarrow{A_1}) \, S(\overrightarrow{A_2 \cup A_3} \,|\, \overrightarrow{A_3}) \left\{ \int d(x-y) \, \mathcal{G}_-(x-y) \times \right.$$

$$\left. \times \int dC \, G_-(x-y \,|\, C, A_1, B_1, A_3) \right\} \Delta(A_3, B_3) \, S(\overleftarrow{B_2} \,|\, \overleftarrow{B_2 \cup B_3}) S(\overleftarrow{B_2 \cup B_3} \,|\, \overleftarrow{B})$$

Рассмотрим величину в фигурных скобках:

$$\int du \, \mathcal{G}_-(u) \int dC \, G_-(u \,|\, C, A_1, B_1, A_3) = \int dC \, f_1(\overleftarrow{A_1} + i0 \,|\, \overrightarrow{C_0} \cup \overrightarrow{B_2}) \times$$

$$\times S(\overleftarrow{C} \,|\, \overleftarrow{A_3} \cup \overleftarrow{C}) \, f_2(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \,|\, \overrightarrow{B_1} + i0) \, \varkappa^{\frac{1}{2}(|A_3| + |A_4|)(|A_1| - |C| - |B_2|)} \times$$

$$\times \hat{\mathcal{G}}_-\left(k(C) + k(B_2) + k(A_3) + k(A_2)\right) -$$

(23)

$$- \int dC \, f_2(\overleftarrow{A_2} - i0 \,|\, \overrightarrow{B_1} \cup \overrightarrow{C}) \, S(\overrightarrow{C} \cup \overleftarrow{A_3} \,|\, \overleftarrow{C}) \, f_1(\overleftarrow{A_1} \cup \overleftarrow{C} \,|\, \overrightarrow{B_2}) \times$$

$$\times \varkappa^{\frac{1}{2}(|B_1| + |A_4|)(|A_1| + |C| - |B_2|} \, \hat{\mathcal{G}}_-\left(-k(C) + k(B_2) + k(A_3) + k(A_2)\right)$$

где $\hat{\mathcal{G}}_-$ - преобразование Фурье функции $\mathcal{G}_-$. Функция $\hat{\mathcal{G}}_-(k)$ аналитична при $\mathrm{Im}\,k < 0$ поскольку $\mathcal{G}_-(u) = 0$ при $u > 0$.

Предположим, что носитель $\varphi(u)$ не содержит точки $u=0$, тогда $\hat{\varphi}_-(k)$ убывает быстрее любой степени k^{-1} при $k\to\infty$. Пусть $C=\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$, введем переменные $\sigma=\frac{1}{n}\sum\gamma_j$, $\Delta_i=\gamma_i-\gamma_{i+1}$ $(i=1,\dots,n-1)$. При фиксированных Δ_i функция $\hat{\varphi}(k(C)+k(B_2)+k(A_3)+k(A_2))$ убывает быстрее любой степени $e^{-|\sigma|}$ при $|\sigma|\to\infty$, а функции $f_1(\overleftarrow{A}_1|\overrightarrow{C}\cup\overrightarrow{B}_2)$ и $f_2(\overleftarrow{C}\cup\overleftarrow{A}_2|\overrightarrow{B}_1)$, в соответствии с оценкой данной в формулировке теоремы I, растут не быстрее некоторой степени $e^{|\sigma|}$. Это, а также способ обхода полюсов функций f_1 и f_2, указанный в (23) позволяет в первом интеграле в (23) сдвинуть контур интегрирования по σ с прямой $\mathrm{Im}\,\sigma=0$ на прямую $\mathrm{Im}\,\sigma=-\pi+0$. Сделаем такой сдвиг и преобразуем первый интеграл из (23):

$$\int dC\, f_1(\overleftarrow{A}_1+i0|(\overrightarrow{C}-\pi i+i0)\cup\overrightarrow{B}_2)\, S(\overleftarrow{C}-\pi i|\overleftarrow{A}_3\cup\overleftarrow{C}-\pi i)\times$$
$$\times f_2(\overleftarrow{C}-\pi i+i0\cup\overleftarrow{A}_2|\overrightarrow{B}_1+i0)\,\varkappa^{\frac{1}{2}(|A_1|-|C|-|B_2|)(|A_3|+|A_4|)}\times$$
$$\times\hat{\varphi}_-(-k(C)+k(B_2)+k(A_3)+k(A_2)).$$

Отметим, что можно одновременно изменить упорядочение C в f_1, f_2, S. Воспользуемся также формулами (6),(10),(11), в результате получим:

$$\int dC\, f_1^{t(C)}(\overleftarrow{A}_1\cup\overleftarrow{C}|\overrightarrow{B}_2-i0)\, S^{t(C)}(\overrightarrow{C}\cup\overrightarrow{A}_3|\overrightarrow{C})\times$$
$$\times f^{t(C)}(\overleftarrow{A}-i0|\overrightarrow{B}_1\cup\overrightarrow{C})\,\hat{\varphi}_-(-k(C)+k(B_2)+k(A_3)+k(A_2))\times$$
$$\times\varkappa^{\frac{1}{2}(|A_1|-|C|-|B_2|)(|A_3|+|A_2|)+\frac{1}{2}|C|(2+2|A_3|+2|B_1|+|A_1|-|B_2|+|C|)}\tag{24}$$

где $t(C)$ – транспонирование по всем пространствам, ассоциированным с $\gamma\in C$. Заметим, что показатель $\varkappa$ может быть преобразован к виду:

$$\frac{1}{2}(|A_1|-|C|-|B_2|)(|A_3|+|A_2|)+|C|+|A_3||C|+$$
$$+\frac{1}{2}|C|(2|B_1|+|A_1|-|B_2|+|C|)=$$
$$=\frac{1}{2}(|A_1|+|C|-|B_2|)(|A_3|+|B_1|)+$$

$$+\left\{\frac{1}{2}(|A_1|-|B_2|-|C|)(|B_1|-|A_2|-|C|)+|C|-|C|^2\right\}$$

слагаемое в фигурных скобках - четное целое число. Теперь ясно, что (24) сокращается со вторым интегралом в ф ормуле (23) (очевидно, $f_1^{t(C)}\, S^{t(C)}\, f_2^{t(C)} = f_2 S f_1$)

Интеграл

$$\int \langle \vec{A} | \left[\mathcal{O}_1(x), \mathcal{O}_2(y) \right] | \vec{B} \rangle \, e^{ik(A)x - ik(B)y}\, \varphi_+(x-y)\, d(x-y) \qquad (25)$$

рассматривается аналогично. Пользуясь представлением (I9) для матричного элемента, убеждаемся, что интеграл (25) равен нулю, если носитель $\varphi(u)$ не содержит точку $u=0$. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Поскольку преобразование Лоренца для формфакторов состоит в одновременном сдвиге всех быстрот, обобщение Теоремы I на пространственно-подобный интервал не вызывает затруднений.

2. Явные формулы для формфакторов

В настоящем разделе будут приведены формулы для формфакторов операторов $T_{\mu\nu}$, j_n^a . Будет показано, что они удовлетворяют условиям (2),(3),(4). В значительной степени этот раздел является повторением работы [9] , поэтому мы постараемся быть краткими. Будут приведены развернутые доказательства только тех утверждений, аналогов которых не содержится в [9] .

Рассмотрим набор быстрот $\beta_1,\dots,\beta_{2n}$, с каждой из которых связано пространство $h_i\,(i=1,\dots,2n)$, изоморфное $\mathbb{C}^2$. В каждом пространстве h_j^* введем базис $e_\varepsilon^{(i)}$ $(\varepsilon=\pm1)$ $(e_{-1}^{(i)} \sim (0,1), e_1^{(i)} \sim (1,0))$ и операторы $S_i^a = (1,2,3)$, задающиеся матрицами Паули в этом базисе. Построим оператор [I0] :

$$L_i(\tau) = \begin{pmatrix} \tau-\beta_i-\frac{\pi i}{2}-\frac{i\pi}{2}S_i^3, & -\pi i\, S_i^- \\ -\pi i\, S_i^+, & \tau-\beta_i-i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}S_i^3 \end{pmatrix},$$

$$S_i^{\pm} = \frac{1}{2}(S_i^1 \pm i S_i^2)$$

и матрицу монодромии "high level Bethe's Anzatz'a"I3 :

$$L_1(\tau)L_2(\tau)\dots L_{2n}(\tau) =$$

$$= \begin{pmatrix} A(\tau|\beta_1,\dots,\beta_{2n}), & B(\tau|\beta_1,\dots,\beta_{2n}) \\ C(\tau|\beta_1,\dots,\beta_{2n}), & D(\tau|\beta_1,\dots,\beta_{2n}) \end{pmatrix}$$

Естественным базисом в пространстве $H_n^* = h_1^* \otimes \dots \otimes h_{2n_{(2n)}}^*$ является базис, составленный из векторов $e_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{2n}} = e_{\varepsilon_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{\varepsilon_{2n}}^{(2n)}$. Введем также базис

$$w_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) = e_{-1-1\dots-1}\prod_{p:\varepsilon_p=1} B(\beta_p|\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

Эти два базиса связаны треугольным преобразованием, т.е. в разложении

$$w_{\varepsilon_1\dots\varepsilon_{2n}}(\beta_1\dots\beta_{2n}) = \sum_{\substack{\varepsilon_1'+\dots+\varepsilon_{2n}'=\\=\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_{2n}}} C^{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_{2n}'}_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots\beta_{2n})e_{\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_{2n}'}$$

не равны нулю только те коэффициенты, для которых $(\varepsilon_1',\dots,\varepsilon_{2n}') \leqslant (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n})$, мультииндексы упорядочены как двоичные числа.

Базис $w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ обладает рядом замечательных свойств. Перечислим их.

I. Свойство симметрии.

Введем матрицу $\hat{S}_{i,j}(\beta_i-\beta_j)$ действующую нетривиально только в $h_i \otimes h_j$:

$$\hat{S}_{i,j}(\beta_i-\beta_j) = (\beta_i-\beta_j-\pi i)^{-1}\{(\beta_i-\beta_j)I - \pi i P_{ij}\}$$

где $P_{i,j}$ – матрица перестановки пространств h_i и h_j. Матрица $\hat{S}^{i,j}$ отличается от S –матрицы (I) отсутствием множителя S_0 Имеет место равенство

$$w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i\varepsilon_{i+1},\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_i,\beta_{i+1},\dots,\beta_{2n})\hat{S}_{i,i+1}(\beta_i-\beta_{i+1}) =$$

$$= w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{i+1}\varepsilon_i,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{i+1},\beta_i,\dots,\beta_{2n})P_{i,i+1} \tag{26}$$

2. Аналитические свойства.

Вектор $w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ имеет простые полюса только в точках $\beta_j=\beta_i+\pi i$, $j>i$, если $\varepsilon_j=1$, $\varepsilon_i=1$. Приведем формулу для вычета в точке $\beta_j=\beta_i+\pi i$ $(\varepsilon_j=1, \varepsilon_i=-1)$

$$\operatorname*{res}_{\beta_j=\beta_i+\pi i} w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{i-1}-1\,\varepsilon_{i+1},\dots,\varepsilon_{j-1}1\varepsilon_{j+1},\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) =$$

7 Заказ 2I08

$$=\left(e_1^{(i)}\otimes e_{-1}^{(j)}-e_{-1}^{(i)}\otimes e_1^{(j)}\right)\otimes$$

$$\otimes\, w_{\varepsilon_1,\dots\varepsilon_{i-1}\varepsilon_{i+1},\dots,\varepsilon_{j-1}\varepsilon_{j+1},\dots}(\beta_1,\dots,\beta_{i-1},\beta_{i+1},\dots,\beta_{j-1},\beta_{j+1},\dots,\beta_{2n})\times$$

$$\times\prod_{k>j}\frac{\beta_k-\beta_i}{\beta_k-\beta_i-\pi i}\,\hat{S}_{j-1,i}(\beta_{j-1}-\beta_i)\,\hat{S}_{j-2,i}(\beta_{j-2}-\beta_i)\times$$

$$\dots\ \hat{S}_{i+1,i}(\beta_{i+1}-\beta_i)$$

(27)

3. Свойства по отношению к глобальному действию алгебры $SU(2)$.

В H_n^* представлена алгебра $SU(2)$ с генераторами $\Sigma^a=\frac{1}{2}\sum S_j^a$ $(a=1,2,3)$. Имеют место равенства:

$$w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})\Sigma^3=\left(\sum_{j=1}^{2n}\varepsilon_j\right)w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n}),\qquad(28)$$

$$w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})\Sigma^+=\sum_{p:\varepsilon_p=1}\ \prod_{\substack{q:\varepsilon_q=1\\ q\neq p}}\frac{\beta_p-\beta_q+\pi i}{\beta_p-\beta_q}\times\qquad(29)$$

$$\times\ w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p-1}-1\,\varepsilon_{p+1},\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

$$w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})\Sigma^-=\sum_{p:\varepsilon_p=-1}\ \prod_{\substack{q:\varepsilon_q=-1\\ q\neq p}}\frac{\beta_p-\beta_q-\pi i}{\beta_p-\beta_q}\times\qquad(30)$$

$$w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{p-1}\,1\,\varepsilon_{p+1},\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

Равенство (28) почти очевидно. Равенства (29),(30) доказываются индукцией по n. Легко показать, что правые части (29),(30) имеют те же полюса, что и левые, вычеты даются формулами аналогичными (27). Аналог равенства (29) можно найти в работе [II].

Приведем несколько определений, аналогичных данным в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Рассмотрим полином $P(\lambda_1,\dots,\lambda_k|\mu_1,\dots,\mu_{2n-k})$ симметричный по $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ и $\mu_1,\dots,\mu_{2n-k}$ по отдельности. Ему сопоставляется следующая функция со значениями в H_n^*:

$$\langle P\rangle_n^k(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\sum_{\substack{\{1,\dots,2n\}\\ \{i_1,\dots,i_k\}\cup\{j_1,\dots,j_{2n-k}\}}} P(\beta_{i_1},\dots,\beta_{i_k}|\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_{2n-k}})\times$$

$$\times\prod_{p=1}^{k}\prod_{q=1}^{2n-k}\frac{1}{\beta_{i_p}-\beta_{j_q}}\; w_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{2n}}(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) \tag{31}$$

где $\varepsilon_{i_p}=-1$, $\varepsilon_{j_{q_k}}=1$, $p=1,\dots,k$; $q=1,\dots,2n-k$.

Функция $\langle P\rangle_n^k$ удовлетворяет условию симметрии:

$$\langle P\rangle_n^k(\beta_1,\dots,\beta_{2n})\hat{S}_{i,i+1}(\beta_i-\beta_{i+1})=\langle P\rangle_n^k(\beta_1,\dots,\beta_{i+1},\beta_i,\dots,\beta_{2n})P_{i,i+1}$$

и имеет простые полюса в точках $\beta_j=\beta_i+\pi i$, $j>i$.

Приведем формулу для вычета в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$, остальные вычеты могут быть найдены по симметрии

$$\operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i}\langle P\rangle_n^k(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)}-e_{-1}^{(2n)}\otimes e_1^{(2n-1)})\otimes$$

$$\otimes\langle P_{\beta_{2n-1}}\rangle_{n-1}^{k-1}(\beta_1,\dots,\beta_{2n-2}), \tag{32}$$

где

$$P_{\beta_{2n-1}}(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}|\mu_1,\dots,\mu_{2n-2-k})=$$

$$=P(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\beta_{2n-1}|\mu_1,\dots,\mu_{2n-2-k},\beta_{2n-1}+\pi i)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рассмотрим два набора чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n;\mu_1,\dots,\mu_n$ и дополнительный параметр α. Функция $A_j(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_n)$ определяется следующим образом:

$$A_i(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j-i\frac{\pi}{2}\right)P_i^+(\alpha|\mu_1,\dots,\mu_n)+$$

$$+\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\mu_j+\frac{\pi i}{2}\right)P_i^-(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n). \tag{33}$$

где

$$P_i^{\pm}(\alpha|\nu_1,\dots,\nu_n)=\sum_{\ell=0}^{i-1}\left(\pm\frac{\pi i}{2}\right)^{\ell}C_{n-i+\ell-1}^{\ell}\,Q_{i-\ell}^{(n)}(\alpha|\nu_1,\dots,\nu_n),$$

$$Q_k^{(n)}(\alpha|\nu_1,\dots,\nu_n)=$$

$$=\sum_{\ell=1}^{k}\left[\left(\alpha+\frac{\pi i}{2}\right)^{\ell}-\left(\alpha-\frac{\pi i}{2}\right)^{\ell}\right](-1)^{k-\ell}\,\sigma_{k-\ell}(\nu_1,\dots,\nu_n)\,, \tag{34}$$

$\sigma_k(\nu_1,\dots,\nu_n)$ – элементарный симметрический полином степени k.

Имеют место равенства:

$$A_i^{(n)}(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_{n-1},\lambda_n+\pi i)=$$

$$=\left(\alpha-\lambda_n-\frac{\pi i}{2}\right)\left\{A_i^{(n-1)}(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1})-\right.$$

$$-\left(\lambda_n+\frac{\pi i}{2}\right)A_{i-1}^{(n-1)}(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1})\,,$$

$$A_n^{(n)}(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_n)= \tag{35}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j+\frac{\pi i}{2}\right)\left(\alpha-\mu_j+\frac{\pi i}{2}\right)-\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2}\right)\left(\alpha-\mu_j-\frac{\pi i}{2}\right)$$

Рассмотрим набор чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$. Построим $(n-1)\times(n-1)$ матрицы $\mathfrak{A}_0^{(n)}$, $\mathfrak{A}_1^{(n)}$, $\mathfrak{A}_{-1}^{(n)}$ с матричными элементами:

$$[\mathfrak{A}_0^{(n)}]_{ij}=A_i(\alpha_j|\lambda_1,\dots,\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_n),$$

$$[\mathfrak{A}_{-1}^{(n)}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\prod_{\ell\neq k}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_\ell}\prod_{\ell=1}^{n-1}(\lambda_k-\mu_\ell+\pi i)\times$$

$$\times A_i(\alpha_j|\lambda_1,\overset{k}{\hat{\dots}},\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1},\lambda_k),$$

$$[\mathfrak{A}_1^{(n)}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n+1}\mu_k\prod_{\ell\neq k}\frac{1}{\mu_k-\mu_\ell}\prod_{\ell=1}^{n-1}(\mu_k-\lambda_\ell-\pi i)\times$$

$$\times A_i(\alpha_j|\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1},\mu_k|\mu_1,\overset{k}{\hat{\dots}},\mu_{n+1})$$

Детерминанты этих матриц обозначим через $\Delta_0^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\dots,\lambda_n|\mu_1,\dots,\mu_n)$, $\Delta_{-1}^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1})$

и $\Delta_1^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}|\mu_1,\ldots,\mu_{n+1})$. При $n=1$ будем считать $\Delta_0^{(1)}=\Delta_1^{(1)}=\Delta_{-1}^{(1)}=1$. Пользуясь равенствами (35), легко показать, что $\Delta_c^{(n)}(c=0,\pm 1)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Delta_c^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-c}|\mu_1,\ldots,\mu_{n+c})\Big|_{\lambda_i=\lambda-\frac{\pi i}{2},\mu_j=\lambda+\frac{\pi i}{2}}$$
$$=\prod_{k=1}^{n-1}(\alpha_k-\lambda)\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\Delta_c^{(n-1)}(\alpha_1,\ldots\overset{k}{\wedge}\ldots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\ldots\overset{i}{\wedge}\ldots,\lambda_{n-c}|$$
$$\mu_1,\ldots\overset{j}{\wedge}\ldots,\mu_{n+c})\Big[\prod_{p\neq i}^{n}\prod_{q\neq j}^{n}(\alpha_k-\lambda_p-\tfrac{\pi i}{2})(\alpha_k-\mu_q-\tfrac{\pi i}{2})- \tag{36}$$
$$-\prod_{p\neq i}^{n}\prod_{q\neq j}^{n}(\alpha_k-\lambda_p+\tfrac{\pi i}{2})(\alpha_k-\mu_q+\tfrac{\pi i}{2})\Big].$$

Полиномы $\Delta_c^{(n)}$ имеют степень $\frac{1}{2}(n-1)(3n-2)$. Будучи антисимметричными по $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$, они обязаны делиться на полином $\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)$, имеющий степень $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Следовательно, соотношений (36), определяющих эти полиномы в $n^2-|c|$ точках, достаточно для их рекуррентного восстановления. В такой рекуррентности, на первый взгляд, нет необходимости, поскольку полиномы описаны явно, однако она будет полезна при доказательстве последующих утверждений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.

$$F_0^{(0)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=\langle\Delta_0^{(n)}\rangle_n^n,$$
$$F_0^{(1)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=\langle\tilde\Delta_0^{(n)}\rangle_n^n,$$
$$F_c^{(1)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=\langle\Delta_c^{(n)}\rangle_n^{n+c}\quad c=\pm 1 \tag{37}$$

где $\tilde\Delta_0^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\ldots,\lambda_n|\mu_1,\ldots,\mu_n)=\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{n}(\mu_k-\lambda_k)-\pi i n\Big]\times$
$\times\Delta_0^{(n)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\ldots,\lambda_n|\mu_1,\ldots,\mu_n)$.

Следующая теорема устанавливает свойства векторов $F_0^{(0)}$, $F_c^{(1)}(c=0,\pm 1)$ по отношению к действию $SU(2)$, заданному генераторами Σ^a.

ТЕОРЕМА 2. Вектор $F_0^{(0)}$ принадлежит синглетному, а вектора $F_c^{(1)}$ $(c=0,\pm 1)$ – триплетному подпространствам H_n^*, т.е.

$$F_0^{(0)}\Sigma^3 = F_0^{(0)}\Sigma^+ = F_0^{(0)}\Sigma^- = 0$$

$$F_c^{(1)}\Sigma = c\,F_c^{(1)},\quad F_{\pm 1}^{(1)}\Sigma^{\pm} = 0, \tag{38}$$

$$F_{\pm}^{(1)}\Sigma^{\mp} = F_0^{(1)},\quad F_0^{(1)}\Sigma^{\pm} = F_1^{(1)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $F_0^{(0)}\Sigma^3 = 0$ очевидно. Докажем, что $F_0^{(0)}\Sigma^+ = 0$. Из формул (29),(3I) следует, что

$$F_0^{(0)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n})\Sigma^+ = \langle G_1^{(n)}\rangle_n^{n+1}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n}),$$

где

$$G_1^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\prod_{\ell\neq k}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_\ell}\times$$

$$\times\prod(\lambda_k-\mu_\ell+\pi i)\,\Delta_0^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\overset{k}{\hat{\dots}},\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1},\lambda_k).$$

Можно показать, что $G_1^{(n)}$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям (36), что и $\Delta_1^{(n)}$. Степень $G_1^{(n)}$ даже меньше, чем степень $\Delta_1^{(n)}$, поэтому $G_1^{(n)}$ восстанавливается по этим соотношениям. Легко проверить, однако, что $G_1^{(1)} \equiv 0$, следовательно $G_1^{(n)} \equiv 0$ при любом n. Равенство $F_0^{(0)}\Sigma^- \equiv 0$ доказывается аналогично.

Равенства $F_c^{(1)}\Sigma^3 = c\,F_c^{(1)}$ очевидны. Докажем, что $F_0^{(1)}\Sigma = F_1^{(1)}$. Из (29),(3I) имеем:

$$F_0^{(1)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n})\Sigma^+ = \langle G_2^{(n)}\rangle_n^{n\,1}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n}),$$

где

$$G_2^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\prod_{\ell\neq k}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_\ell}\prod(\lambda_k-$$

$$-\mu_\ell+\pi i)\times\Delta_0^{(n)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\lambda_1,\overset{k}{\hat{\dots}},\lambda_{n+1}|\mu_1,\dots,\mu_{n-1},\lambda_k).$$

Можно показать, что $G_2^{(n)}$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и $\Delta_1^{(n)}$. При этом $G_2^{(1)} = \Delta_1^{(1)} = 1$, следовательно $G_2^{(n)} = \Delta_1^{(n)}$ при любом n. Действуя в том же духе, можно доказать справедливость остальных равенств из (38).

Теорема доказана.

Определим теперь интегральное преобразование $\Phi_{(n)}(P)$, аналогичное использовавшемуся в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. По функции $P(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, антисимметричной по $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$, построим функцию

$$\Phi_n(P)(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_1\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\alpha_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{j=1}^{2n}\varphi(\alpha_k-\beta_j)\times$$
$$\times P(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\exp\Big\{\sum_{k}^{n-1}(n-2k)\alpha_k\Big\},$$

где $\varphi(\alpha)=\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2\pi i}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2\pi i}\right)$.

Теперь мы в состоянии написать формулы для формфакторов токов и тензора энергии-импульса

$$f^3_\mu(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\Phi_n\Big(\Big[\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)+$$
$$+(-1)^\mu\exp\Big(-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)\Big]F_0^{(1)}\Big),\tag{39}$$

$$f^a_\mu(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\Phi_n\Big(\Big[\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)+$$
$$+(-1)^\mu\exp\Big(-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)\Big]\Big(F_1^{(1)}+(-1)^a F_{-1}^{(1)}\Big)\Big),$$

$$f_{\mu\nu}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\sum_{j=1}^{2n}\left(e^{\beta_j}-(-1)^\nu e^{-\beta_j}\right)\prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\times$$
$$\times\Phi_n\Big(\Big[\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)+(-1)^\mu\exp\Big(-\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)\Big]F_0^{(0)}\Big),\tag{40}$$

где

$$\xi(\beta)=\exp\Big\{\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2\pi}(\beta+\pi i)\right)e^{-\frac{x}{2}}}{x\,\operatorname{sh}x\,\operatorname{ch}\frac{x}{2}}dx\Big\}\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}$$

Функция $\xi(\beta)$ имеет свойства:

$$\xi(\beta)S_0(\beta)=-\xi(-\beta),\quad \xi(\beta-2\pi i)=S_0(\beta)\xi(\beta),$$

$S_0(\beta)$ дается формулой (I).

Перечислим очевидные свойства формфакторов $f^a_\mu, f_{\mu\nu}$

1. $f^a_\mu(\beta_1+\Delta,\ldots,\beta_{2n}+\Delta)=L_{\mu\nu}(\Delta)\,f^a_\nu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$,

$$f_{\mu\nu}(\beta_1+\Delta,\ldots,\beta_{2n}+\Delta)=L_{\mu\mu'}(\Delta)L_{\nu\nu'}(\Delta)f_{\mu'\nu'}(\beta_1,\ldots,\beta_{2n}), \quad (41)$$

где $L_{00}(\Delta)=L_{11}(\Delta)=ch\,\Delta,\ L_{01}(\Delta)=L_{10}(\Delta)=sh\,\Delta$

2. $f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})S_{i\ i+1}(\beta_i-\beta_{i+1})=f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{i+1}\beta_i,\ldots,\beta_{2n})P_{i,\,i+1}$, (42)

где $S_{i\ i+1}(\beta_i-\beta_{i+1})=S_0(\beta_i-\beta_{i+1})\hat{S}_{i,i+1}(\beta_i-\beta_{i+1})$ – двухчастичная S-матрица. Таким же свойством обладает $f_{\mu\nu}$. Это свойство есть ни что иное, как условие (3) из Введения.

Остальные свойства формфакторов f^a_μ, $f_{\mu\nu}$ менее очевидны. Мы сформулируем их в виде теорем, часть из которых докажем.

ТЕОРЕМА 3. Формфакторы f^a_μ, $f_{\mu\nu}$ есть аналитические функк функции β_{2n}, причем

$$f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n}+2\pi i)=(-1)^n f^a_\mu(\beta_{2n},\beta_1,\ldots,\beta_{2n-1})P_{1,2}P_{2,3},\ldots,P_{2n,1}$$

$$f_{\mu\nu}(\beta_1,\ldots,\beta_{2n}+2\pi i)=(-1)^n f_{\mu\nu}(\beta_{2n},\beta_1,\ldots,\beta_{2n-1})P_{1,2}P_{2,3},\ldots,P_{2n,1} \quad (43)$$

Равенства (43) представляют собой условие (3) из Введения. Доказательство теоремы аналогично приведенному в [9] .

ПРИМЕЧАНИЕ. При доказательстве Теоремы 4 нам будет полезно следующее обобщение:

ТЕОРЕМА 3. Построим формфакторы по формулам (39),(40), но деформируем интегральное преобразование Φ_n, поставив вместо $exp(\sum\alpha_k(n-2k))$ функцию $exp(\sum n_k\alpha_k)$, где n_k – произвольные целые числа, не превосходящие по модулю $n-2$. Теорема 3 при этом останется в силе.

ТЕОРЕМА 4. Формфакторы $f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$, $f_{\mu\nu}(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$ регулярны как функции β_{2n} в полосе $0\leq Im\,\beta_{2n}<\pi$. Они имеют простые полюса в точках $\beta_{2n}=\beta_j+\pi i$. Вычет в точке $\beta_{2n}=$ $=\beta_{2n-1}+\pi i$ дается формулой

$$\underset{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i}{res} f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=\left(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)}-e_{-1}^{(2n)}\otimes e_1^{(2n-1)}\right)\otimes$$
$$\otimes f^a_\mu(\beta_1,\ldots,\beta_{2n-2})\times$$

$$\times\left(1 \pm (-1)^n S_{2n-1,1}(\beta_{2n-1}-\beta_1)\dots S_{2n-1,2n-2}(\beta_{2n-1}-\beta_{2n-2})\right), \quad (44)$$

формула для вычета $f_{\mu\nu}$ совершенно аналогична. Равенство (44) есть условие (4) из Введения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим например f^3_μ. Проще всего иметь дело с формфакторами $f^3_\pm = f^3_0 \pm f^3_1$. Формфактор f^3_+ дается формулой:

$$f^3_+(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) = \prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\,\Phi_n\Big(F_0^{(1)}\exp\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)\Big) =$$

$$= \int d\alpha_1,\dots,d\alpha_{n-1}\prod \varphi(\alpha_k-\beta_j)\exp\Big(\sum(n-2j+1)\alpha_j\Big)\times$$

$$\times F_0^{(1)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n})\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum\beta_j\Big)\prod\xi(\beta_i-\beta_j).$$

Из (32),(36),(37) следует, что $F_0^{(1)}$ имеет простой полюс в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}-\pi i$ с вычетом:

$$\operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i} F_0^{(1)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n}) = \left(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)} - e_{-1}^{(2n)}\otimes e_1^{(2n-1)}\right)\otimes$$

$$\otimes\sum_{k=1}^{n-1} F_0^{(1)}(\alpha_1,\overset{k}{\hat{\dots}},\alpha_{n-1}|\beta_1,\dots,\beta_{2n-2})\prod_{k=1}^{n-1}\Big(\alpha_k-\beta_{2n-1}-\frac{\pi i}{2}\Big)\times \quad (45)$$

$$\times\Big[\prod_{j=1}^{2n-2}\Big(\alpha_k-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\Big)-\prod_{j=1}^{2n-2}\Big(\alpha_k-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\Big)\Big].$$

Однако полюс функции f^3_+ в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$ обусловлен не только этой сингулярностью. Пользуясь антисимметричностью $F_0^{(1)}$ по $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}$, преобразуем f^3_+ к виду:

$$f^3_+(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) = \prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\int d\alpha_1\dots d\alpha_{n-1}\prod\varphi(\alpha_k-\beta_j)\times$$

$$\times F_0^{(1)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}|\beta_1,\dots,\beta_{2n})\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(n-2j)\alpha_j\Big)\prod_{j=1}^{n-2}\left(e^{2\alpha_j}+e^{2\beta_{2n}}\right) \quad (46)$$

Функция $\varphi(\alpha)$ имеет простые полюса в точках $\alpha=\pm\frac{\pi i}{2}(4k+1)$, $k\geqslant 0$, $k\in\mathbb{Z}$. Аналитическое продолжение по β_{2n} на πi в интегралах по $\alpha_1,\dots,\alpha_{n-2}$ (46) не вызывает никаких осложнений, поскольку полюс $\varphi(\alpha_i-\beta_{2n})$ в точке $\alpha_i=\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}$ сокращается нулем $\left(e^{2\alpha_i}+e^{2\beta_{2n}}\right)$. Иначе дело обстоит с интегралом по α_{n+1} При продолжении по β_{2n} на πi, полюс в точке $\alpha_{n-1}=\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}$ поднимается на прямую $I_{m\alpha_{n-1}}=\frac{\pi i}{2}$. Если β_{2n} приближается к $\beta_{2n-1}+\frac{\pi i}{2}$, контур интегрирования оказывается зажатым между полюсами $\alpha_{n-1}=\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}$ и $\alpha_{n-1}=\beta_{2n-1}+\frac{\pi i}{2}$. Как следствие, у функции f_+^3 появляется простой полюс. Отметим, что эта особенность не интерферирует с полюсом $F_0^{(1)}$, так как в формуле (45) есть множитель $\left(\alpha_k-\beta_{2n-1}-\frac{\pi i}{2}\right)$. Следовательно, полюс f_+^3 в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$ имеет первый порядок. Для вычисления вычета предлагается следующий трюк.

Введем функцию

$$f_+^3(\sigma|\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=\prod_{i<j}\xi(\beta_i-\beta_j)\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\beta_j\Big)\int d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}\prod\varphi(\alpha_k-$$

$$-\beta_j)\times\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(n-2j)\alpha_j\Big)\prod_{j=1}^{2n-2}\left(e^{2\alpha_j}+e^{2\beta_{2n}}\right)\left(e^{\alpha_{n-1}}-e^{\sigma}\right)F_0^{(1)}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}).$$

Очевидно, что $f_+^3\ (\beta_1,\ldots,\beta_{2n})$ может быть представлена в виде:

$$f_+^3(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})=f_+^3\Big(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\Big)+f_+^3\Big(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\Big).$$

Заметим теперь, что сингулярность $f_+^3\left(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\middle|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\right)$ в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$ обусловлена только сингулярностью $F_0^{(1)}$, поскольку $\exp(\alpha_{n-1})\exp\left(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\right)$ сокращает полюс $\alpha_{n-1}=\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}$. Вычислим вычет $f_+^3\left(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\middle|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\right)$ в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$:

$$\operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i} f_+^3\Big(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\Big)\prod_{i<j}^{2n-2}\prod_{k=1}^{n-2}\varphi^{-1}\Big(\beta_{2n-1}-\beta_k+\frac{3\pi i}{2}\Big)\times$$

$$\times\left(\beta_{2n-1}-\beta_k+\pi i\right)^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n-2}\beta_j\Big)e^{-2\beta_{2n-1}}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n-1}\int d\alpha_1\ldots d\alpha_{n-1}\prod_{p\neq k}\prod_{q=1}^{2n-2}\varphi(\alpha_p-\beta_q)\exp\Big(\sum_{j=1}^{n-2}(n-2j)\alpha_j\Big)$$

$$\times\frac{e^{\alpha_{n-1}}}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\left(\alpha_{n-1}-\beta_{2n-1}+\frac{\pi i}{2}\right)}F_0^{(1)}(\alpha_1,\overset{\stackrel{k}{\wedge}}{\ldots},\alpha_{n-1}|\beta_1,\ldots,\beta_{2n-2})\times$$

$$\times\ \left[\prod_{j=1}^{2n-2}\left(\alpha_k-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)-\prod_{j=1}^{2n-2}\left(\alpha_k-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right)\right]\left(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)}-e_{-1}^{(2n)}\otimes e_1^{(2n-1)}\right), \tag{47}$$

мы воспользовались тождествами:

$$\xi(\beta)\,\xi(\beta-\pi i)=(\beta+\pi i)^{-1}\,\varphi\left(-\beta+\frac{3\pi i}{2}\right),$$

$$\varphi(\alpha)\,\varphi(\alpha-\pi i)=\frac{2\pi^2}{\operatorname{ch}\alpha\left(\alpha-\frac{\pi i}{2}\right)}\,.$$

Пользуясь тождеством

$$\varphi(\alpha-\beta_j+2\pi i)\left(\alpha-\beta_j+2\pi i-\frac{\pi i}{2}\right)=$$

$$=\varphi(\alpha-\beta_j)\left(\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right),$$

преобразуем интеграл по α_k в k -ом слагаемом (47) к виду

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty+2\pi i}^{\infty+2\pi i}\right)\left(\prod_{j=1}^{2n-2}\varphi(\alpha_k-\beta_j)\left(\alpha_k-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)\exp(n-2k)\alpha_k\,d\alpha_k\right),$$

$$k\leqslant n-2\,;$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty+2\pi i}^{\infty+2\pi i}\right)\left(\prod_{j=1}^{2n-2}\varphi(\alpha_{n-1}-\beta_j)\left(\alpha_{n-1}-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\ \operatorname{sh}^{-1}\frac{1}{2}\left(\alpha_{n-1}-\beta_{2n-1}+\frac{\pi i}{2}\right)d\alpha_{n-1}\right).$$

Первые $n-2$ интеграла равны нулю, т.к. подинтегральная функция не имеет особенностей в полосе $0\leqslant \operatorname{Im}\alpha_k\leqslant 2\pi i$. Последний интеграл равен $2\pi i\prod\varphi\left(\beta_{2n-1}-\beta_i+\frac{3\pi i}{2}\right)\left(\beta_{2n-1}-\beta_j+\pi i\right)$. Таким образом,

$$\operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i} f_+^3\left(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}\,\middle|\,\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\right)=$$

$$f_+^3(\beta_1,\ldots,\beta_{2n-2})\otimes\left(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)}-e_{-1}^{(2n)}\otimes e^{(2n-1)}\right) \tag{48}$$

Обратимся теперь к $f_+^3\left(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2}\,\middle|\,\beta_1,\ldots,\beta_{2n}\right)$. Из Примечания к Теореме 3 следует, что

$$f_+^3\left(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_1,\dots,\beta_{2n}\right)=$$

$$=(-1)^n f_+^3\left(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_{2n}-2\pi i,\beta_1,\dots,\beta_{2n-1}\right)P_{1,2}P_{2,3},\dots,P_{2n,1}\,. \quad (49)$$

Можно показать, что при аналитическом продолжении правой части (49) по β_{2n} на πi особенностей из-за интегрирования по α_{n-1} не возникает, т.к. полюс φ в точке $\alpha_{n-1}=\beta_{2n}-\frac{3\pi i}{2}$ сокращается множителем $\left(\exp(\alpha_{n-1})-\exp(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2})\right)$. Таким образом, полюс правой части (49) обусловлен полюсом $F_0^{(1)}(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}|\beta_{2n}-2\pi i,\beta_1,\dots,\beta_{2n-1})$ в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$. Вычет вычисляется аналогично тому, как он был вычислен для $f_+^3\left(\beta_{2n}-\frac{\pi i}{2}|\beta_1,\dots,\beta_{2n}\right)$. В результате имеем:

$$\operatorname*{res}_{\beta_{2n}=\beta_{2n}+\pi i} f_+^3\left(\beta_{2n}+\frac{\pi i}{2}\Big|\beta_1,\dots,\beta_{2n}\right)=(-1)^n f_+^3\left(\beta_1,\dots,\beta_{2n-2}\right)\times$$
$$\times\left(e_1^{(2n)}\otimes e_{-1}^{(2n-1)}-e_{-1}^{(2n)}\otimes e_1^{(2n-1)}\right)\times$$
$$\times\; S_{2n-1,1}(\beta_{2n-1}-\beta_1)\dots S_{2n-1,2n-2}(\beta_{2n-1}-\beta_{2n-2})\,. \quad (50)$$

Складывая (48) и (50), получаем требуемое равенство. Остальные формфакторы рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Еще одно важное свойство формфакторов устанавливается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 5. Формфакторы f_μ^a, $f_{\mu\nu}$ удовлетворяют тождествам:

$$f_{\mu\nu}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=f_{\nu\mu}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

$$\left(\sum_{j=1}^{2n}\operatorname{ch}\beta_j\right)f_0^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\left(\sum_{j=1}^{2n}\operatorname{sh}\beta_j\right)f_1^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

Доказательство этой теоремы легко получить, воспользовавшись следующей Леммой:

ЛЕММА 3.

$$\left(\sum_{j=1}^{2n}e^{-\beta_j}\right)e^{\frac12\sum_{j=1}^{2n}\beta_j}\times$$

$$\times \Phi_n \left(e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \Delta_0^{(n)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} | \beta_1, \ldots, \beta_n | \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}) \right) -$$

$$-\left(\sum_{j=1}^{2n} e^{\beta_j} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \beta_j} \times$$

$$\times \Phi_n \left(e^{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \Delta_0^{(n)} (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} | \beta_1, \ldots, \beta_n | \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}) \right) = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\Phi_n(e^{\pm\sum \alpha_k} \Delta_0^{(n)})$ могут быть представлены в виде детерминанта:

$$\Phi_n \left(e^{\pm\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k} \Delta_0^{(n)} \right) = \det X^{\pm}$$

где $X^{\pm}$ - матрицы $(n-1)\times(n-1)$ с матричными элементами

$$X_{ij}^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{p=1}^{2n} \varphi(\alpha - \beta_p) \exp(n - 2j \pm 1)\alpha \, A_i(\alpha | \beta_1, \ldots, \beta_n | \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}) \, d\alpha$$

Очевидно, что первые $(n-2)$ столбцов из X^+ совпадают с последними $(n-2)$ столбцами из X^-. Поэтому доказательство леммы сводится к тому, чтобы показать, что равен нулю определитель, первые $(n-2)$ столбца которого совпадают со столбцами X^+, а последний есть

$$\tilde{X}_{i,n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod \varphi(\alpha - \beta_p) A_i(\alpha | \beta_1, \ldots, \beta_n | \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}) \times$$

$$\times \left(\exp\left(\tfrac{1}{2} \sum \beta_j - \alpha(n-1)\right) - (-1)^{n-1} \exp\left(-\tfrac{1}{2} \sum \beta_j + \alpha(n-1)\right) \right) d\alpha$$

Знак $(-1)^{n-1}$ возникает из-за перестановки столбцов в X^-.

Столбец $\tilde{X}_{i,n-1}$ можно заменить на

$$\tilde{\tilde{X}}_{i,n-1}=\int_{\infty}^{\infty}\prod \varphi(\alpha-\beta_p)A_i(\alpha|\beta_1,\dots,\beta_n|\beta_{n+1},\dots,\beta_{2n})\times$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{2n}\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)-(-1)^n\prod_{j=1}^{2n}\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right)\right]d\alpha \tag{51}$$

поскольку разность $\tilde{X}_{i,n-1}-\tilde{\tilde{X}}{}^{j=1}_{i,n-1}$ есть линейная комбинация первых $(n-2)$ столбцов. Мы хотим показать, что $\tilde{X}_{i,n-1}\equiv 0$. Ясно, что нули $\prod\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)$ и $\prod\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right)$ сокращают полюса $\prod\varphi(\alpha-\beta_j)$ в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Возникает идея разбить интеграл на две части, одну, содержащую $\prod\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)$, и другую, содержащую, $\prod\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right)$, и замкнуть их в верхнюю и нижнюю полуплоскости соответственно. Здесь, однако, возникает сложность, связанная с тем, что функции

$$G_i^{(\pm)}(\alpha)=\prod\varphi(\alpha-\beta_j)\operatorname{ch}\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j\mp\frac{\pi i}{2}\right)A_i(\alpha|\beta_1,\dots,\beta_n|\beta_{n+1},\dots,\beta_{2n})$$

не убывают при $\alpha\to\infty$. Пользуясь асимптотикой Γ -функции и выражением для A_i (33), легко показать, что

$$G_i^{(\pm)}(\alpha)\underset{\alpha\to\infty}{\simeq}P_i(\alpha)+X_i\alpha^{-1}+O(\alpha^{-2}) \tag{52}$$

где $P_i(\alpha)$ – полином степени $i-1$. Эта асимптотика одинакова для $G_i^{(+)}$ и $G_i^{(-)}$, различие между ними экспонентциального характера. Асимптотика (52) равномерна для $G_i^{(+)}$ в $\mathbb{C}^+$ и для $G_i^{(-)}$ в $\mathbb{C}^-$. Заменим подинтегральное выражение в (5I) на $(G_i^{(+)}-P_i)-$ $-(G_i^{(-)}-P_i)$. Функции $G_i^{(\pm)}-P_i$ регулярны в $\mathbb{C}^\pm$. Необходимым и достаточным условием возможности замкнуть интегралы от $G_i^{(+)}-P_i$ в $\mathbb{C}^\pm$ является равенство нулю коэффициента X_i в разложении (52).

Покажем, что $X_i=0$. Для этого заметим, что функция Q_k (34) может быть представлена при больших α в виде:

$$Q_k(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\frac{\prod\left(\alpha-\lambda_j+\frac{\pi i}{2}\right)}{\left(\alpha+\frac{\pi i}{2}\right)^{n-k}}-\frac{\prod\left(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2}\right)}{\left(\alpha-\frac{\pi i}{2}\right)^{n-k}}+O(\alpha^{-2})$$

что приводит к следующему выражению для $P_{i,n}$:

$$P^{\pm}_{i,n}(\alpha|\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j+\frac{\pi i}{2}\right)\frac{1}{\left(\alpha+\frac{\pi i}{2}(1\pm 1)\right)^{n-i}}-$$

$$-\prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2}\right)\frac{1}{\left(\alpha+\frac{\pi i}{2}(-1\mp 1)\right)^{n-i}}+O(\alpha^{-2}),$$

поэтому

$$A_i(\alpha|\beta_1,\dots,\beta_n|\beta_{n+1},\dots,\beta_{2n})=$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{2n}\left(\alpha-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)}{(\alpha-\pi i)^{n-1}}-\frac{\prod_{j=1}^{2n}\left(\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}\right)}{(\alpha+\pi i)^{n-i}}+O(\alpha^{n-2}) \qquad (53)$$

Функции $\Psi_{\pm}(\alpha)=\prod\varphi(\alpha-\beta_j)\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta_j\mp\frac{\pi i}{2})$ имеют асимптотику:

$$\prod\varphi(\alpha-\beta_j)\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j\mp\frac{\pi i}{2}\right)\sim\alpha^{-n}(1+O(\alpha^{-1}))$$

и удовлетворяют тождеству:

$$\Psi(\alpha+2\pi i)=\Psi(\alpha)\prod_{j=1}^{2n}\frac{\alpha-\beta_j+\frac{3\pi i}{2}}{\alpha-\beta_j+\frac{\pi i}{2}}$$

Отсюда и из (53) следует, что $G^{(\pm)}$ представимы в виде:

$$G^{(+)}(\alpha)=T^{(\pm)}(\alpha)-T^{\pm}(\alpha+2\pi i)+O(\alpha^{-2})$$

где

$$T(\alpha)=\prod_{j=1}^{2n}\varphi(\alpha-\beta_j)\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta_j\mp\frac{\pi i}{2}\right)\left(\alpha-\beta_j-\frac{\pi i}{2}\right)\times$$

$$\times(\alpha-\pi i)^{-n+i}$$

Если функция $f(z)$ допускает асимптотическое разложение в окрестности бесконечности, функция $f(z+a)-f(z)$ имеет нулевой коэффициент при z^{-1} в асимптотическом разложении в окрестности бесконечности. Из этого очевидного факта и полученного представления для G следует, что $X_i=0$, что и требовалось.

Лемма доказана.

Из определения $f_{\mu\nu}$ следует, что

$$f_{\mu 0}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\left(\sum \operatorname{sh}\beta_j\right) g_\mu(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

$$f_{\mu 1}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\left(\sum \operatorname{ch}\beta_j\right) g_\mu(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$$

можно показать, что при $n\geq 2$ $g_\mu(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$, как функций β_{2n} имеет те же особенности, что и функции $f_{\mu\nu}(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ вычет в полюсе $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$ дается формулой, аналогичной (43). В случае $n=1$ имеется полюс в точке $\beta_2=\beta_1+\pi i$, которого не было у $f_{\mu\nu}$. Вычет в этом полюсе есть:

$$2\pi i \operatorname*{res}_{\beta_2=\beta_1+\pi i} g_0(\beta_1,\beta_2)=\operatorname{ch}\beta_1\left(e_1^{(2)}\otimes e_{-1}^{(1)}-e_{-1}^{(2)}\otimes e_1^{(1)}\right),$$

$$2\pi i \operatorname*{res}_{\beta_2=\beta_1+\pi i} g_1(\beta_1,\beta_2)=\operatorname{sh}\beta_1\left(e_1^{(2)}\otimes e_{-1}^{(1)}-e_{-1}^{(2)}\otimes e_1^{(1)}\right)$$

Из Теоремы 5 следует существование такой функции $h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$, что

$$f_0^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\left(\sum \operatorname{sh}\beta_j\right) h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}),$$

$$f_1^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})=\left(\sum \operatorname{ch}\beta_j\right) h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}).$$

Можно показать, что при $n\geq 2$ $h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$ не имеют дополнительных особенностей по сравнению с $f_\mu^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n})$. Вычеты в точке $\beta_{2n}=\beta_{2n-1}+\pi i$ даются формулой аналогичной (44). В случае $n=1$ возникают дополнительные полюса в точках $\beta_2 = \beta_1+\pi i(2k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$. Вычет в полюсе $\beta_2=\beta_1+\pi i$ есть:

$$2\pi i \operatorname*{res}_{\beta_2=\beta_1+\pi i} h^a(\beta_1,\beta_2)=e_{\varepsilon_1}^{(2)}\otimes e_{\varepsilon_2}^{(1)}(\sigma^2\sigma^a)^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \qquad (54)$$

Функции h^a обладают свойством:

$$h^a(\beta_1+\Delta,\dots,\beta_{2n}+\Delta)=h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) \qquad (55)$$

Мы кончаем этот, возможно слишком формальный, раздел и переходим к выводам, которые можно сделать из описанных в нем свойств формфакторов.

3. Операторы $T_{\mu\nu}$, j^a_μ. Алгебра токов.

Во втором разделе были описаны функции $f^a_\mu, f_{\mu\nu}$, которые мы отождествляем с формфакторами операторов $j^a_\mu(x_0,x_1)$ и $T_{\mu\nu}(x_0,x_1)$ соответственно. Покажем, что из свойств функций $f^a_\mu, f_{\mu\nu}$ вытекает, что операторы $j^a_\mu, T_{\mu\nu}$ обладают всеми естественными для них свойствами.

Из теоремы I, Теоремы 3, Теоремы 4, равенства (42) следует, что $j^a_\mu, T_{\mu\nu}$ обладают свойством локальной коммутативности. Из равенств (4I) следует, что j^a_μ является вектором, а $T_{\mu\nu}$ (I,I) - тензором по отношению к преобразованию Лоренца. Из Теоремы 2 следует, что $T_{\mu\nu}$ является изотопическим скаляром, а j^a_μ преобразуется по представлению спина I изотопической алгебры. Из определения f_μ и Теоремы 5 следует, что $\partial_\mu j^a_\mu = 0$, $\partial_\mu T_{\mu\nu}=0$, $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$. Важные свойства $j^a_\mu, T_{\mu\nu}$ устанавливаются следующей теоремой

ТЕОРЕМА 6. Операторы $P_\mu = \int_{-\infty}^{\infty} T_{\mu 0}(x)\,dx$, $Q^a = \int_{-\infty}^{\infty} j^a_0(x)\,dx$ являются операторами энергии-импульса и зарядов системы, т.е.

$$P_\mu Z^*_{\varepsilon_1}(\beta_1)\ldots Z^*_{\varepsilon_m}(\beta_m)|ph\rangle = \Big(\sum_{j=1}^{2m} p_\mu(\beta_j)\Big) Z^*_{\varepsilon_1}(\beta_1)\ldots Z^*_{\varepsilon_m}(\beta_m)|ph\rangle,$$

$$Q^a Z^*_{\varepsilon_1}(\beta_1)\ldots Z^*_{\varepsilon_m}(\beta_m)|ph\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} (\sigma^a)^{\varepsilon_j'}_{\varepsilon_j} Z^*_{\varepsilon_1}(\beta_1)\ldots Z^*_{\varepsilon_j'}(\beta_j)\ldots Z^*_{\varepsilon_m}(\beta_m)|ph\rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим операторы токов. Построим матричные элементы оператора j^a_0 по f^a_0 с помощью формулы (I4). Интегрируя, убеждаемся, что матричные элементы оператора

$$Q^a_-(x) = \int_{-\infty}^{x} j^a_0(y)\,dy$$

строятся по введенным в конце раздела 2 функциям h^a с помощью формулы (I4). Если построить матричные элементы j^a_0 по формуле (I5), то обнаружим, что матричные элементы оператора

$$Q^a_+(x) = -\int_x^{\infty} j^a_0(y)\,dy$$

строятся по h^a с помощью (I5). Обратимся теперь к Лемме I. Операторы Q^a_- и Q^a_+ почти подходят под ее формулировку. Разница состоит только в том, что двухчастичные функции $h^a(\alpha|\beta)$ имеют полюс в точке $\alpha=\beta$. Пользуясь формулой (54) для вычета $h^a(\beta_1,\beta_2)$, убеждаемся, что

$$Q^a(x) - Q^a(x) = Q^a$$

что и требовалось. Операторы $T_{\mu 0}$ рассматриваются аналогично.

Докажем теперь, что операторы j^a_μ порождают алгебру токов.

ТЕОРЕМА 7. Операторы j^a_μ удовлетворяют соотношениям:

$$[j^a_0(x), j^b_0(y)] = i\varepsilon^{abc} j^c_0(x)\delta(x-y),$$

$$[j^a_1(x), j^b_1(y)] = i\varepsilon^{abc} j^c_0(x)\delta(x-y),$$

$$[j^a_0(x), j^b_1(y)] = i\varepsilon^{abc} j^c_1(x)\delta(x-y) +$$

$$+2\pi i\,\eta\,\delta^{ab}\delta'(x-y), \tag{56}$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\int d\beta_1,\ldots,d\beta_{2n}\,\|h^a(\beta_1,\ldots,\beta_{2n})\|^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку в существенном все зависит только от $x-y$, будем считать $y=0$.

Обратимся к доказательству Теоремы I. В этом доказательстве рассматривалась свертка:

$$\int [O_1(x), O_2(0)]\,\varphi(x)dx = \int [O_1(x), O_2(0)]\,\varphi_-(x)dx +$$

$$+\int [O_1(x), O_2(0)]\,\varphi_+(x)dx \tag{57}$$

где $\varphi_+(x) = \varphi(x)\theta(x)$, $\varphi_-(x) = \varphi(x)\theta(-x)$, $\varphi \in C_0^\infty$

Было показано, что если $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ обращаются в ноль в точке $x=0$ со всеми своими производными, то оба члена в правой части (57) равны нулю. То есть $[O_1(x), O_2(0)]$ есть обобщенная функция с носителем в точке $x=0$. По известной теореме Лорана Шварца это есть конечная линейная комбинация производных δ-функции. При этом была существенна возможность использовать для матричных элементов оба представления (I4),(I5). Вопрос о поведении коммутатора в точке $x=0$ остался открытым. Чтобы прояснить его, надо использовать функции φ_+, φ_- с другим поведением в точке $x=0$. Почему вопрос о поведении $\varphi_\pm$ существенен? В результате преобразований, проделанных при доказательстве Теоремы I, вопрос о равенстве нулю первого члена в (57) свелся к равенству нулю разности

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma)\,d\sigma - \int_{-\infty-\pi i+i0}^{\infty-\pi i+i0} G(\sigma)\,d\sigma \tag{58}$$

где

$$G(\sigma) = f_1(\overleftarrow{A}_1 - i0 \,|\, \overrightarrow{C} \cup \overrightarrow{B}_2)\, S(\overleftarrow{C} \,|\, \overleftarrow{A}_3 \cup \overleftarrow{C})\, f_2(\overleftarrow{C} \cup \overleftarrow{A_2} \,|\, \overrightarrow{B}_1 + i0) \times$$

$$\times\ \hat{\varphi}_-(k(C) + k(B_2) + k(A_3) + k(A_4))$$

$\sigma = |C|^{-1} \sum_{\gamma \in C} \gamma$, $\hat{\varphi}_-(k)$ — преобразование Фурье φ_-.

Функция $G(\sigma)$ регулярна в полосе $-\pi < \mathrm{Im}\,\sigma \leq 0$, поэтому разность (58) равна нулю, если интегралы по $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R} - i\pi + i0$ хорошо определены. Может, однако, получиться так, что $G(\sigma)$ убывает слабее σ^{-2} при $\sigma \to \infty$, в этом случае доказательство требует уточнений. Ясно, что убывание $G(\sigma)$ прямо связано с поведением $\varphi_-(x)$ в точке $x=0$.

В нашем случае формфакторы f_1 и f_2 есть формфакторы токов, следующим образом выражающиеся через введенную в конце второго раздела функцию h^a:

$$\begin{aligned} f_0^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) &= \Big(\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{sh}\beta_j\Big)\, h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}), \\ f_1^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) &= \Big(\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{ch}\beta_j\Big)\, h^a(\beta_1,\dots,\beta_{2n}) \end{aligned} \tag{59}$$

Можно показать, что для h^a справедлива асимптотическая формула:

$$h^a(\beta_1,\dots,\beta_k,\beta_{k+1}+\sigma,\dots,\beta_{2n}+\sigma) \underset{\sigma \to \pm\infty}{=} \exp\Big\{\tfrac{1}{8}|\sigma|((-1)^k - 1)\Big\} \times$$

$$\times \, \sigma^{(1-\delta_{0,k}-\delta_{k,2n})} \tilde{h}^a_k (\beta_1,\dots,\beta_k, \beta_{k+1},\dots,\beta_{2n})(1+O(\sigma^{-1})) \tag{60}$$

Из формулы (55) очевидно, что $\tilde{h}^a_k = h^a$ при $k=0$, $k=2n$.

Из асимптотики (60) и формул (59) ясно, что, если $\hat{\mathcal{f}}_-(k)$ убывает как k^{-3} при $k \to \infty$, в любом коммутаторе токов интегралы от $G(\sigma)$ сходятся экспоненциально и никаких осложнений не возникает. Условие $\hat{\mathcal{f}}_-(k) \sim k^{-3}$ эквивалентно условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Следовательно, коммутаторы токов не содержат сингулярностей старше δ' функции.

Рассмотрим теперь коммутаторы $[j^a_+(x), j^b_-(0)]$, $[j^a_-(x), j^b_+(0)]$, $\left(j^a_\pm = j^a_0 \pm j^a_1\right)$. Легко понять, что если $f_1 = f^a_+$, $f_2 = f^b_-$ или наоборот, то $G(\sigma)$ убывает не медленнее σ^{-1}. В тех случаях, когда $G(\sigma)$ убывает как σ^{-1}, формально интегралы в (58) не определены. Мы можем, однако ввести обрезание и рассмотреть разность

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} G(\sigma)\, d\sigma - \int_{-\Lambda-\pi i+i0}^{\Lambda-\pi i+i0} G(\sigma)\, d\sigma \tag{6I}$$

Ясно, что разность (58) равна разности интегралов от $G(\sigma)$ по отрезкам $(\Lambda-\pi i, \Lambda)$, $(-\Lambda-\pi i, -\Lambda)$. Последние убывают при $\Lambda \to \infty$. Следовательно, если понимать (58) как предел (6I) при $\Lambda \to \infty$, разность (58) равна нулю и в случае $G(\sigma) \sim \sigma^{-1}$, $\sigma \to \infty$. Обрезанию (6I) можно придать физический смысл. Надо считать, что импульсы частиц в промежуточных состояниях ограничены e^Λ и рассматривать предел $\Lambda \to \infty$. Тот факт, что разности (58) можно придать смысл, хотя отдельные интегралы в ней не определены, показывает, что коммутатор - менее сингулярный объект, чем просто произведение двух токов. Таким образом мы показали, что

$$[j^a_\pm(x), j^b_\mp(0)] = 0 \tag{62}$$

Теперь удобно рассмотреть коммутатор $[Q^a_-(x), j^b_\mu(0)]$, из которого $[j^a_0(x), j^b_\mu(0)]$ получается дифференцированием. Мы изучаем свертку

$$\int [Q^a_-(x), j^b_\mu(0)]\, \varphi(x)\, dx = \int [Q^a_-(x), j^b_\mu(0)]\, \varphi_-(x)\, dx +$$

$$+ \int [Q^a_-(x), j^b_\mu(0)]\, \varphi_-(x)\, dx =$$

$$= \int [Q_-^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}_-(x)\,dx + \int [Q_+^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}_+(x)\,dx +$$

$$+ \int [Q^a, j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}_+(x)\,dx$$

Легко показать, что

$$[Q^a, j_\mu^b(0)] = i\varepsilon^{abc} j_\mu^c(0)$$

поэтому

$$\int [Q_-^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}(x)\,dx = i\int \varepsilon^{abc} j_\mu^c(0)\, \mathcal{S}_+(x)\,dx +$$

$$+ \int [Q_-^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}_-(x)\,dx + \int [Q_+^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{S}_+(x)\,dx \tag{63}$$

Матричные элементы операторов Q_-^a и Q_+^a, как мы убедились при доказательстве Теоремы 6, строятся по h^a с помощью формул (I4) и (I5) соответственно, поэтому все преобразования, проделанные при доказательстве Теоремы I остаются в силе. Для того, чтобы исследовать, например, второй член в (62) необходимо исследовать (58) с $f_1 = h^a$, $f_2 = f_\mu^b$. Нетрудно убедиться, что $G(\sigma)$ не убывает в единственном случае: $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = \emptyset$, $A_3 = B_3 = A$. При этом $G(\sigma)$ ведет себя как $\frac{1}{2}\|h^a(c)\|^2 \delta^{ab} \mathcal{S}(0)\,(\pm 1)^\mu$ при $\sigma \to \infty$. Отметим, что $\|h^a(c)\|$ не зависит от a. Ясно, что отдельные интегралы в (58) не существуют, однако разности вновь можно придать смысл, введя обрезание:

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \left[\int_{-\Lambda}^{\Lambda} G(\sigma)\,d\sigma - \int_{-\Lambda-\pi i+i0}^{\Lambda-\pi i+i0} G(\sigma)\,d\sigma \right] =$$

$$= \lim_{\Lambda \to \infty} \left[\int_{-\Lambda-\pi i+i0}^{-\Lambda} G(\sigma)\,d\sigma - \int_{\Lambda-\pi i+i0}^{\Lambda} G(\sigma)\,d\sigma \right] =$$

$$= \|h^a(c)\|^2 \delta^{ab} \mathcal{S}(0)\, [1-(-1)^\mu]\, \pi i$$

Отсюда

$$\int [Q_-^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{L}(x)\, dx = \pi i \eta\, \mathcal{Y}(0)\, (1-(-1)^\mu)$$

Аналогично

$$\int [Q_+^a(x), j_\mu^b(0)]\, \mathcal{L}_+(x)\, dx = \pi i \eta\, \mathcal{Y}(0)\, (1-(-1)^\mu)$$

Подставляя это в (63), убеждаемся, что

$$[Q_-(x), j_\mu^b(0)] = i\varepsilon^{abc} \cdot j_\mu^c(0)\theta(x) + 2\pi i \delta^{ab} \eta \delta'(x)(1-(-1)^\mu)$$

Дифференцируя по , имеем:

$$[j_0^a(x), j_\mu^b(0)] = i\varepsilon^{abc} j_\mu^c(0)\,\delta(x) + 2\pi i \eta \delta^{ab} \delta'(x)(1-(-1)^\mu) \qquad (64)$$

Комбинируя (62) и (64), получаем соотношения (56), что и требовалось.

Хотелось бы получить более явную формулу или хотя бы оценку для константы η. Эта задача, как и ряд других, находится в стадии решения. Наиболее актуальным обобщением настоящей работы является рассмотрение O(3) нелинейной σ модели.

Мы признательны Н.Ю.Решетихину и Л.Д.Фаддееву за интерес к нашей работе.

Приложение

После того, как статья была закончена, мы получили более простые формулы для функций $\Delta_c^{(n)}(\alpha\,|\,\lambda\,|\,\mu)$, использовавшихся во втором разделе. Приведем эти формулы:

$$\Delta_c^{(n)}(\alpha\,|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n\ c}|\mu_1,\ldots,\mu_{n+c}) = \det \mathcal{B}_c^{(n)} \qquad (\text{П}1)$$

где $\mathcal{B}_c^{(n)} - (n-1)\times(n-1)$ матрицы с матричными элементами:

$$(\mathcal{B}_c^{(n)})_{ij} = B_{c,i}(\alpha_j|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n\ c}|\mu_1,\ldots,\mu_{n+c}),$$

$$B_{0,i}(\alpha|\lambda,\ldots,\lambda_n|\mu_1,\ldots,\mu_n) = \prod_{j=1}^{n}\left(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2}\right) \times$$

$$\times Q_i(\alpha-\pi i|\mu_1-\pi i,\ldots,\mu_n-\pi i)\prod_{j=1}^{n}(\alpha-\mu_j-\frac{\pi i}{2})Q_i(\alpha|\lambda_1,\ldots,\lambda_n),$$

$$B_{1,i}(\alpha|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}|\mu_1,\ldots,\mu_{n+1})=\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2})\times$$

$$\times\left[Q_{i+1}(\alpha-\pi i|\mu_1-\pi i,\ldots,\mu_{n+1}-\pi i)-\sigma_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\right]+$$

$$+\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha-\mu_j+\frac{\pi i}{2})Q_{i-1}(\alpha|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}),$$

$$B_{-1,i}(\alpha|\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}|\mu_1,\ldots,\mu_{n-1})=\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha-\lambda_j-\frac{\pi i}{2})\times$$

$$\times Q_{i-1}(\alpha-\pi i|\mu_1-\pi i,\ldots,\mu_n-\pi i)+\prod_{j=1}^{n-1}(\alpha-\mu_j+\frac{\pi i}{2})\times$$

$$\times\left[Q_{i+1}(\alpha|\lambda_1,\ldots,\lambda_n)-\sigma_i(\mu_1-\pi i,\ldots,\mu_{n+1}-\pi i)\right]$$

где $Q_0\equiv 0$, Q_i задаются формулой (34). Доказательство эквивалентности формулы (III) и определений $\Delta_c^{(n)}$ использовавшихся во втором разделе основано на тождестве

$$P_k^+(\alpha|\nu_1,\ldots,\nu_n)=P_k^-(\alpha-\pi i|\nu_1-\pi i,\ldots,\nu_n-\pi i)$$

и рекуррентных соотношениях (36).

Литература

1. Karowski M., Weisz P. Exact form factors in (1+1)-dimensional field theoreticl models with soliton behaviour, Nucl.Phys., 1978, B139, p.455.
2. Smirnov F.A. Quantum Gelfand-Levitan-Marchenko equations and form factors in sine-Gordon model, J.Phys.A, 1984, v.17, L973.
3. Smirnov F.A. A general formula for soliton form factors in the quantum sine-Gordon model, J.Phys.A, 1986, v.19, L575-578.

4. С м и р н о в Ф.А. Квантовые уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко для модели синус-Гордон, ТМФ, 1984, т.60, № 3, 3 с.356-371.

5. Х а м и т о в Э.М. Конструктивный подход к квантовой модели $(Ch\,\varphi)_2$. I. Метод уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко, - В кн. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.УII. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1985, т.146, с.147-190.

6. К и р и л л о в А.Н. Т-инвариантность, СРТ-инвариантность и локальная коммутативность квантовой модели $(Ch\,\varphi)_2$. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УП. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1985, т.146, с.9-16.

7. S m i r n o v F.A. Solitons formfactors in the sine-Gordon model, Preprint LOMI, 1986, E-3-86.

8. B e l a v i n A.A. Exact solution of the two-dimensional model with asymptotic freedom, Phys.Letters, 1979, v.87B, N 1-2, p.117-121.

9. С м и р н о в Ф.А. Доказательство некоторых тождеств, возникающих при вычислении форм-факторов в модели sine-Gordon в кн.:Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 7. Зап.научн.семин. ЛОМИ, 1987, т.161, с.98-121.

10. Ф а д д е е в Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля - В сб.: "Проблемы квантовой теории поля" (тр. У Международного Совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979). Дубна: ОИЯИ, 1979, с.249-299.

11. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Спектр и рассеяние возбуждений в одномерном изотропном магнетике. Зап.науч. семин.ЛОМИ, т.109, с.134-179.

12. D e s t r i C., L o w e n s t e i n J.H. Analysis of the Bethe-Ansatz equations of the chiral-invariant Gross-Neveu model, Nucl.Phys., 1982, 205B, p.239.

On the formfactors for the SU(2)-invariant Thirring model. Kirillov A.N., Smirnov F.A. - In: Differential geometry. Lie groups and mechanics IX. -(Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.80-120.

Explicit formulae are obtained for the matrix coefficients of currents and the stress-energy tensor in the SU(2)-invariant Thirring model the operators defined by these formulae are shown to commute with each other on space-like intervals. The singularities of the currents's commutators at the origin are determined. Bubl. - 12.

А.Н.Кириллов

ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДИЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ РОДЖЕРСА СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Настоящая заметка посвящена доказательству новых тождеств для дилогарифма Роджерса $L(x)$, возникающих при исследовании низкотемпературной асимптотики энтропии в $RSOS$ -моделях [4],[6]. Удивительным образом оказывается, что в результате подсчета суммы значений дилогарифма Роджерса в некоторых специальных точках, в ответе получается число вида $\frac{\pi^2}{6}\cdot c$, где $c=\frac{r\cdot\dim\mathfrak{g}}{r+g}$ – центральный заряд конформной теории поля [5],[14] (конформная аномалия в терминологии [8]). Частичное объяснение этого совпадения содержится в [6] ,[12] .

п$^{\circ}$I. Формулировка результатов

Напомним [I] , [2] , что дилогарифмом Роджерса $L(x)$ называется функция

$$L(x)=-1/2\int_0^x\left[\frac{\log(1-x)}{x}+\frac{\log x}{1-x}\right]dx,\quad 0\leqslant x\leqslant 1. \tag{I}$$

Продолжим функцию $L(x)$ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$ по формулам

$$L(x)=\frac{\pi^2}{3}-L(x^{-1}),\qquad \text{если}\quad x\geqslant 1$$

$$L(x)=L\left(\frac{1}{1-x}\right)-\frac{\pi^2}{6},\qquad \text{если}\quad x\leqslant 0.$$

ТЕОРЕМА I ([I2]). Имеют место следующие равенства

I. Если $\varphi=\frac{\pi}{r+n}$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{r}L\left(\frac{\sin k\varphi\ \sin(n-k)\varphi}{\sin(m+k)\varphi\ \sin(m+n-k)\varphi}\right)=\frac{(n^2-1)r}{r+n}\cdot\frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

2. Если $\varphi=\frac{\pi}{r+4}$, то

$$\sum_{m=1}^{r}\left\{L\left(\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin(m+2)\varphi}\right)^2\right)+2L\left(\frac{\sin\varphi\cdot\sin 3\varphi}{\sin(m+1)\varphi\cdot\sin(m+3)\varphi}\right)\right\}=\frac{15r}{r+4}\cdot\frac{\pi^2}{6}. \tag{3}$$

Равенства (2),(3) являются частными случаями общих тождеств для дилогарифма Роджерса, к формулировке которых мы и переходим. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $rg(\mathfrak{g})$ – ее ранг, g – двойственное число Кокстера [9] , $\varphi=\frac{\pi}{r+g}$.

ГИПОТЕЗА ([I2]). Имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{rg(\mathfrak{g})}\sum_{m=1}^{r}L(f_m^{(k)}(\varphi))=\frac{r\cdot\operatorname{diam}\mathfrak{g}}{r+g}\cdot\frac{\pi^2}{6}. \tag{4}$$

Определение функций $f_m^{(k)}(\varphi)$ будет приведено в п$^{\circ}$4. Тождества из теоремы I соответствуют случаям $\mathfrak{g}=SL(n)$ и $\mathfrak{g}=SO(6)$.

Заметим, что все слагаемые в левых частях равенств (2) и (3) соответствующие $m=r$ равны $L(1)=\frac{\pi^2}{6}$. Следовательно, (2) и (3) эквивалентны равенствам

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{r-1} L\left(\frac{\sin k\varphi\cdot\sin(n-k)\varphi}{\sin(m+k)\varphi\cdot\sin(m+n-k)\varphi}\right)=\frac{n(n-1)\cdot r}{r+n}\cdot\frac{\pi^2}{6}, \tag{5}$$

где $\varphi=\frac{\pi}{r+n}$.

$$\sum_{m=1}^{r-1}\left\{L\left(\left(\frac{\sin 2\varphi}{\sin(m+2)\varphi}\right)^2\right)+2L\left(\frac{\sin\varphi\cdot\sin 3\varphi}{\sin(m+1)\varphi\cdot\sin(m+3)\varphi}\right)\right\}=\frac{12(r-1)}{r+4}\cdot\frac{\pi^2}{6}, \tag{6}$$

где $\varphi=\frac{\pi}{r+4}$.

В общем случае можно показать, что всегда $f_r^{(k)}\left(\frac{\pi}{r+g}\right)=1$, $1\leqslant k\leqslant rg(\mathcal{G})$. Таким образом, (4) эквивалентно следующему (гипотетическому) тождеству

$$\sum_{k=1}^{rg(\mathcal{G})}\sum_{m=1}^{r-1} L\left(f_m^{(k)}\left(\frac{\pi}{r+g}\right)\right)=\left\{\frac{r\cdot\dim\mathcal{G}}{r+g}-rg(\mathcal{G})\right\}\cdot\frac{\pi^2}{6}. \tag{7}$$

Прежде чем перейти к доказательству тождеств (2),(3), приведем некоторые свойства функции $L(x)$.

п$^{\circ}$2. Свойства дилогарифма Роджерса

Известно [I,2], что функция $L(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям

I. $L(x)+L(1-x)=L(1)$, $x\in\mathbb{R}$ (8)

2. $L(x)+L(y)=L(xy)+L\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+L\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right)$, (9)

для $0<x,y<1$.

Хорошо известно (см., например, [3],[7]), что соотношения (8),(9) определяют дилогарифм Роджерса $L(x)$ однозначно с точностью до постоянного множителя. Более точно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Допустим, что функция $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ трижды дифференцируема и удовлетворяет на интервале $(0,1)$ функциональным уравнениям (8) и (9). Тогда

$$f(x)=Const\cdot L(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

Ради полноты изложения, мы приведем доказательство этого предложения в приложении.

Хорошо известно [2], что функция $L(x)$ допускает продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Следуя [2],[IO], введем функцию

$$L(x,\theta)\overset{def}{=}\operatorname{Re}L(xe^{i\theta})=-1/2\int_0^x\frac{\ln(1-2x\cos\theta+x^2)}{x}dx+$$

$$+\frac{1}{4}\ln|x|\cdot\ln(1-2x\cos\theta+x^2),\quad x,\theta\in\mathbb{R}. \tag{10}$$

Доказательство теоремы I основано на следующей лемме.

ЛЕММА I. Имеет место равенство

$$L\left(\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}\right)=\frac{1}{2}(2\theta+\psi)(2\varphi+\psi)+$$

$$+L\left(-\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\theta},\varphi\right)+L\left(-\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin(\theta+\psi)},\varphi+\psi\right)- \tag{11}$$

$$-L\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta+\psi)},\varphi+\theta+\psi\right)-L\left(-\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin\theta},\varphi+\theta+\psi\right),$$

при условии $0<\varphi+\theta+\psi\leqslant\pi$.

СЛЕДСТВИЕ I ([2], [10]). Если $0<\varphi+\theta\leqslant\pi$, то

$$L\left(\left(\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\right)^2\right)=2\varphi\cdot\theta+2L\left(-\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin\theta},\varphi\right)-2L\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\varphi+\theta\right). \tag{12}$$

Прежде чем доказывать лемму I, приведем другие полезные свойства функции $L(x,\theta)$ (ср.[2]).

ЛЕММА 2. Имеют место равенства

1. $L(x,0)=L(x),\quad L(-x,\varphi)=L(x,\pi-\varphi)$ (13)

2. $L(x,\varphi)=L(x,2\pi k\pm\varphi),\quad k\in\mathbb{Z}$ (14)

3. $L(1,\varphi)=\frac{1}{4}(\pi-\varphi)^2-\frac{\pi^2}{12},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ (15)

$L(-1,\varphi)=\frac{1}{4}\varphi^2-\frac{\pi^2}{12},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$

4. $L(x,\varphi)+L(x^{-1},\varphi)=\frac{1}{2}(\pi-\varphi)^2-\frac{\pi^2}{6},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$ (16)

5. $L\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\varphi+\theta\right)+L\left(-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi},\varphi+\theta\right)=\frac{(\varphi+\theta)^2}{2}-\frac{\pi^2}{6},$ (17)

$0<\varphi+\theta\leqslant\pi$.

6. $L\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi},\theta\right)+L\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta},\varphi\right)=\frac{(\theta+\varphi-\pi)^2}{2},$ (18)

$0<\varphi+\theta\leqslant\pi$.

7. $L(2\cos\varphi,\varphi)=\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2,\quad 0<\varphi\leqslant\pi.$ (19)

8. $L(x^n,n\varphi)=n\sum_{k=0}^{n-1}L\left(x,\varphi+\frac{2k\pi}{n}\right)$ (20)

$$L(x^n) = n\sum_{k=0}^{n-1} L(\exp\frac{2k\pi i}{n}\cdot x). \tag{21}$$

Для доказательства тождеств (I7)-(I9),(I5) возьмем производную по φ от обеих частей соответствующих равенств. Для этой цели используется равенство

$$dL(x,\theta) = \left\{-\frac{1}{4}\,\frac{\ln(1-2x\cos\theta+x^2)}{x} + 1/2\ln|x|\,\frac{x-\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\right\}dx +$$

$$+\left\{-\operatorname{arctg}\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right) + 1/2\ln|x|\,\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\right\}d\theta. \tag{22}$$

Таким способом легко получаются следующие равенства:

$$\frac{d}{d\varphi}L(1,\varphi) = -\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}) = \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \tag{23}$$

$$\frac{d}{d\varphi}L\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta},\varphi+\theta\right) = \varphi + 1/2\operatorname{ctg}(\varphi+\theta)\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right) - 1/2\operatorname{ctg}\varphi\ln\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}\right) \tag{24}$$

$$\frac{d}{d\varphi}L\left(-\frac{\sin\theta}{\sin\varphi},\varphi+\theta\right) = \theta - 1/2\operatorname{ctg}(\varphi+\theta)\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right) + 1/2\operatorname{ctg}\varphi\cdot\ln\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}\right) \tag{25}$$

$$\frac{d}{d\varphi}L\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta},\varphi\right) = \varphi+\theta-\pi + 1/2\operatorname{ctg}\varphi\ln\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}\right) - 1/2\operatorname{ctg}(\varphi+\theta)\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right) \tag{26}$$

$$\frac{d}{d\varphi}L\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\varphi},\theta\right) = 1/2\operatorname{ctg}(\varphi+\theta)\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right) - 1/2\operatorname{ctg}\varphi\ln\left(\frac{\sin(\varphi+\theta)}{\sin\theta}\right) \tag{27}$$

$$\frac{d}{d\varphi}L\left(\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}\cdot\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}\right) = 1/2\left[\operatorname{ctg}\varphi + \operatorname{ctg}(\varphi+\psi)\right]\ln\left(\frac{\sin(\varphi-\theta)\sin(\varphi+\theta+\psi)}{\sin\theta\cdot\sin(\theta+\psi)}\right) - 1/2\left[\operatorname{ctg}(\varphi-\theta)+\operatorname{ctg}(\varphi+\theta+\psi)\right]\ln\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\sin(\theta+\psi)}\right). \tag{28}$$

Проверим равенство (I5). Из (23) следует, что $L(1,\varphi)=\frac{\varphi^2}{4}-\frac{\pi\varphi}{2}+c$. Для нахождения константы c воспользуемся тем, что $L(1)=\frac{\pi^2}{6}$. Таким образом $c=\frac{\pi^2}{6}$, что доказывает (I5). Проверим, например, равенство (I8). Из (26) и (27) следует, что левая часть (I8) равняется $c+\frac{(\theta+\varphi-\pi)^2}{2}$ для некоторой функции $c=c(\theta)$. В силу симметрии левой части (I8) по φ и θ можно считать, что $c(\theta)$ в действительности от θ не зависит. При $\varphi=\theta=\frac{\pi}{2}$ левая часть (I8) обращается в ноль. Следовательно, $c=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I. Из формул (24),(25) и (28) следует, что разность между левой и правой частями формулы (II) является функцией $c(\theta,\psi)$, которая не зависит от φ. Для нахождения $c(\theta,\psi)$ положим в (II) $\varphi=\theta$. При такой подстановке мы приходим к равенству

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{2}(2\theta+\psi)^2+c(\theta,\psi)-L\left(-\frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\psi)},2\theta+\psi\right)-L\left(-\frac{\sin(\theta+\psi)}{\sin\theta},2\theta+\psi\right).$$

Сравнивая последнее равенство с (I7) находим, что $c(\theta,\psi)=0$. Лемма I полностью доказана.

Для доказательства равенств (I6),(20),(2I) продифференцируем их по x и воспользуемся формулами

$$\frac{d}{dx}L(x,\varphi)=-\frac{1}{4}\,\frac{\ln[(1-xe^{i\varphi})(1-xe^{-i\varphi})]}{x}-\frac{1}{4}\ln|x|\left\{\frac{e^{i\varphi}}{1-xe^{i\varphi}}+\frac{e^{-i\varphi}}{1-xe^{-i\varphi}}\right\},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i\left(\varphi+\frac{2\pi k}{n}\right)}}{1-xe^{i\left(\varphi+\frac{2\pi k}{n}\right)}}=\frac{nx^{n-1}e^{in\varphi}}{1-x^ne^{in\varphi}}.$$

В результате мы показали, что разность между левой и правой частями (I6) и (20) от x не зависит. Для завершения доказательства положим $x=1$ в (I6) и $x=0$ в (20). Заметим, что (2I) есть следствие формул (I0) и (20) в силу вещественности правой части (2I). Лемма 2 полностью доказана.

п$^{\rm o}$3. Доказательство теоремы I.

Докажем сначала тождество (3). Из формул (I2) и (I5) находим

$$\Sigma_1\overset{def}{=}\sum_{m=1}^{r}L\left(\left(\frac{\sin2\varphi}{\sin(m+2)\varphi}\right)^2\right)=2(r+1)(r+4)\varphi^2-\frac{\pi^2}{6}+2L\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin2\varphi},3\varphi\right)-$$

$$-2L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin2\varphi},(r+3)\varphi\right)-2L\left(-\frac{\sin(r+2)\varphi}{\sin2\varphi},(r+4)\varphi\right).$$

Аналогично из формул (II),(I5) и (I7) находим

$$\sum\nolimits_2 \stackrel{def}{=} \sum_{m=1}^{r} L\left(\frac{\sin\varphi\cdot\sin 3\varphi}{\sin(m+1)\varphi\cdot\sin(m+3)\varphi}\right)=2(r+1)(r+4)\varphi^2-\frac{\pi^2}{4}+\varphi^2+$$

$$+L\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi},3\varphi\right)-L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi},(r+2)\varphi\right)-L\left(-\frac{\sin(r+2)\varphi}{\sin\varphi},(r+3)\varphi\right)-$$

$$-L\left(-\frac{\sin(r+3)\varphi}{\sin\varphi},(r+1)\varphi\right)-L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin 3\varphi},(r+4)\varphi\right).$$

Следовательно, $\sum_1+2\sum_2=6(r+1)(r+4)\varphi^2-\pi^2+11\varphi^2-$

$$-2L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin 2\varphi},(r+3)\varphi\right)-2L\left(-\frac{\sin(r+2)\varphi}{\sin 2\varphi},(r+4)\varphi\right)-$$

$$-2L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin\varphi},(r+2)\varphi\right)-2L\left(-\frac{\sin(r+2)\varphi}{\sin\varphi},(r+3)\varphi\right)- \qquad (29)$$

$$-2L\left(-\frac{\sin(r+3)\varphi}{\sin\varphi},(r+4)\varphi\right)-2L\left(-\frac{\sin(r+1)\varphi}{\sin 3\varphi},(r+4)\varphi\right).$$

Левая часть формулы (3) равняется значению суммы $\sum_1+2\sum_2$ при $\varphi=\frac{\pi}{r+4}$. В этом случае, используя формулы (I8) и (I9), для суммы (3) получаем следующее выражение:

$$\sum\nolimits_1+2\sum\nolimits_2=\frac{6(r+1)\pi^2}{r+4}-\pi^2+11\varphi^2-2L(2\cos\varphi,\varphi)-6L(1)-2L\left(\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi},2\varphi\right)-$$

$$-2L\left(\frac{\sin 3\varphi}{\sin 2\varphi},\varphi\right)=\frac{6(r+1)\pi^2}{r+4}+11\varphi^2-2\pi^2-2\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2-(3\varphi-\pi)^2=$$

$$=\frac{6(r+1)\pi^2}{r+4}+8\pi\varphi-\frac{7\pi^2}{2}=\frac{(6r+14)\pi^2}{r+4}-\frac{7\pi^2}{2}=\frac{5r\pi^2}{2(r+4)}.$$

Тождество (3) доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА (2). Воспользуемся формулой (II). Тогда, как не трудно убедиться, сумма в левой части формулы (2) приводится к следующему виду

$$\frac{n(n-1)r(n+r+1)}{2}\varphi^2+2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-k}L\left(-\frac{\sin m\varphi}{\sin k\varphi},(m+k)\varphi\right)-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-k}L\left(-\frac{\sin(m+r)\varphi}{\sin k\varphi},(m+r+k)\varphi\right). \qquad (30)$$

Первая двойная сумма в (30) преобразуется к виду

$$2\sum_{p=3}^{n}\sum_{K=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left\{L\left(-\frac{\sin(p-K)\varphi}{\sin K\varphi},p\varphi\right)+L\left(-\frac{\sin K\varphi}{\sin(p-K)\varphi},p\varphi\right)\right\}+$$

$$+2\sum_{K=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}L(-1,2K\varphi)=\sum_{K=1}^{n}\left(K^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)\left[\frac{K-1}{2}\right]+2\sum_{K=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(K^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{12}\right). \tag{31}$$

Для вычисления второй двойной суммы в (30) воспользуемся тем, что при $\varphi=\frac{\pi}{r+n}$ выполняется соотношение

$$L\left(-\frac{\sin(m+r)\varphi}{\sin K\varphi},(m+r+K)\varphi\right)=L\left(\frac{\sin(n-m)\varphi}{\sin K\varphi},(n-m-K)\varphi\right).$$

Следовательно, вторая двойная сумма в (30) преобразуется к виду

$$2\sum_{p=3}^{n-1}\sum_{K=1}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}\left\{L\left(\frac{\sin p\varphi}{\sin K\varphi},(p-K)\varphi\right)+L\left(\frac{\sin p\varphi}{\sin(p-K)\varphi},K\varphi\right)\right\}+\frac{(n-1)\pi^2}{3}+$$

$$+2\sum_{K=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}L(2\cos K\varphi,K\varphi)=\sum_{K=1}^{n-1}(K\varphi-\pi)^2\left[\frac{K-1}{2}\right]+2\sum_{K=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(K\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{(n-1)\pi^2}{3}. \tag{32}$$

Таким образом с использованием формул (31) и (32), сумма в левой части (2) равняется следующему выражению

$$\frac{n(n-1)r(r+n+1)}{2}\varphi^2+\left(n^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\sum_{K=3}^{n-1}\left(K\varphi\pi-\frac{2\pi^2}{3}\right)\left[\frac{K-1}{2}\right]+$$

$$+2\sum_{K=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(K\varphi\pi-\frac{\pi^2}{3}\right)-\frac{(n-1)\pi^2}{3}+2\sum_{K=0}^{n}\left(K^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{12}\right)\delta_{n,2K}. \tag{33}$$

Заметим, что $\sum_{K=3}^{n-1}K\left[\frac{K-1}{2}\right]+\sum_{K=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}K=\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

$$\left(n^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{3}\right)\left[\frac{n-1}{2}\right]+2\sum_{K=0}^{n}\left(K^2\varphi^2-\frac{\pi^2}{12}\right)\delta_{n,2K}=\frac{n^2(n-1)}{2}\varphi^2-\frac{(n-1)\pi^2}{6}$$

$$2\sum_{K=3}^{n-1}\left[\frac{K-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Здесь $[X]$ – целая часть вещественного числа X .

Окончательно, выражение (33), а следовательно и левая часть формулы (2), преобразуются к виду

$$\pi^2\cdot\left\{\frac{n(n-1)(r+1)}{2(n+r)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right\}=\frac{(n^2-1)\cdot r}{n+r}\cdot\frac{\pi^2}{6}.$$

Теорема I полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2 ([2], [IO]). Имеет место равенство

$$\sum_{m=1}^{r-2} L\left(\left(\frac{\sin\frac{\pi}{r}}{\sin\frac{(m+1)\pi}{r}}\right)^2\right)=\frac{r-2}{r}\cdot\frac{\pi^2}{2}. \tag{34}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. В [IO] доказано следующее оббщение тождества (34). Пусть p – положительное рациональное число, $p=[b_0,b_1,b_2\ldots]$ – разложение числа p в непрерывную дробь. Определим последовательность целых чисел $m_i, y_i, r(j), n_j$:

$$y_{-1}=0,\quad y_0=1,\quad y_1=b_0,\quad y_{i+1}=y_{i-1}+b_i y_i,\quad i\geqslant 0,$$

$$m_0=0,\quad m_1=b_0,\quad m_{i+1}=m_i+b_i,\quad i\geqslant 0,$$

положим $r(j)=i$, если $m_i\leqslant j<m_{i+1}$, положим $n_j=y_{i-1}+(j-m_i)y_i$, если $m_i\leqslant j<m_{i+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Имеют место следующие тождества

I^0. $$\sum_{j=0}^{m_r-1}(-1)^{r(j)}L\left(\left(\frac{\sin(y_{r(j)}\theta)}{\sin(n_j+y_{r(j)})\theta}\right)^2\right)=(-1)^{r-1}y_r(y_r+y_{r-1})\theta^2+$$

$$+\frac{1+(-1)^r}{6}\pi^2+2(-1)^r L\left(-\frac{\sin(y_r\theta)}{\sin(y_{r-1}\theta)},(y_r+y_{r-1})\theta\right), \tag{35}$$

$$0<(y_r+y_{r-1})\theta\leqslant\pi.$$

2^0. Пусть $m_r<\sigma<m_{r+1}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{\sigma-1}(-1)^{r(j)}L\left(\left(\frac{\sin(y_{r(j)}\theta)}{\sin(n_j+y_{r(j)})\theta}\right)^2\right)=(-1)^r n_\sigma(n_\sigma+y_r)\theta^2+$$

$$+\frac{1+(-1)^{r-1}}{6}\pi^2+2(-1)^{r+1}L\left(-\frac{\sin(n_\sigma\theta)}{\sin(y_r\theta)},(n_\sigma+y_r)\theta\right), \tag{36}$$

$$0<(n_\sigma+y_r)\theta\leqslant\pi.$$

Тождество (34) соответствует случаю $p\in\mathbb{Z}_+$, $\varphi=\frac{\pi}{r}$, $r<p$. Было бы интересно найти аналоги тождеств (35) и (36) для произвольной простой алгебры Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Используя явный вид функций $f_m^{(K)}(\varphi)$ (см.п^{0}4), можно доказать справедливость тождества (4) для всех классических алгебр Ли ранга $\leqslant 4$.

п°4. Определение функций $f_m^{(k)}(\varphi)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли ранга r, $C=(\alpha_{ij})$ – соответствующая ей матрица Картана, ρ – полусумма положительных корней. Определим семейство полиномов $Q_m^{(k)}(x_1,\dots,x_r)=Q_m^{(k)}$, $m\geqslant 0$, $1\leqslant k\leqslant r$, при помощи рекуррентных соотношений

$$(Q_m^{(k)})^2-Q_{m-1}^{(k)}Q_{m+1}^{(k)}=\prod_{j\neq k}\prod_{a=0}^{-\alpha_{jk}-1}Q^{(j)}_{\left[\frac{-\alpha_{kj}m+a}{-\alpha_{jk}}\right]},\tag{37}$$

$Q_0^{(k)}\equiv 1$, $1\leqslant k\leqslant r$, $Q_m^{(0)}=Q_m^{(r+1)}\equiv 1$ для всех $m\geqslant 0$.

Начальные данные $Q_1^{(k)}$ задаются следующими формулами:

1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(r+1)$, $Q_1^{(k)}=ch(\omega_k)$, $k=1,\dots,r$

2) $\mathfrak{g}=SO(2r+1)$, $r\geqslant 2$, $Q_1^{(k)}=ch\left(V(\omega_k+\omega_{k-2}+\dots)\right)$, $k=1,\dots,r-1$, $Q_1^{(r)}=ch(\omega_r)$ (37а)

3) $\mathfrak{g}=SO(2r)$, $r\geqslant 3$, $Q_1^{(k)}=ch(V(\omega_k+\omega_{k-2}+\dots))$, $k=1,\dots,r-2$, $Q_1^{(r-1)}=ch(\omega_{r-1})$, $Q_1^{(r)}=ch(\omega_r)$

4) $\mathfrak{g}=Sp(2r)$, $r\geqslant 2$, $Q_1^{(k)}=ch(\omega_k)$, $k=1,\dots,r$

Положим

$$f_m^{(k)}=f_m^{(k)}(x_1,\dots,x_r)=1-\frac{Q_{m+1}^{(k)}Q_{m-1}^{(k)}}{(Q_m^{(k)})^2},\quad m\geqslant 1,\ 1\leqslant k\leqslant r.\tag{37в}$$

Определим функции $f_m^{(k)}(\varphi)$ при помощи специализации

$$f_m^{(k)}(\varphi)\overset{def}{=\!=}f_m^{(k)}(e^{i\varphi\rho}).\tag{38}$$

Полиномы оказываются равными характерам некоторых (вообще говоря приводимых) представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Эти представления и их связь с неприводимыми представлениями Янгиана $Y(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ описаны в [II]. Функции $f_m^{(k)}$ возникают при решении уравнений термодинамики (39) для $\mathfrak{g}$-инвариантного магнетика Гейзенберга при "бесконечной" температуре(подробности см. [I3]):

$$\begin{aligned}\log(1+\eta_{n,k})&=\sum_{m\geqslant 1}2\min(n,m)\log(1+\eta_{m,k}^{-1})-\\&-\sum_{j\neq k}\sum_{m\geqslant 1}\min(-\alpha_{kj}n,-\alpha_{jk}m)\log(1+\eta_{m,j}^{-1}).\end{aligned}\tag{39}$$

Здесь $1\leqslant k\leqslant r$, $\eta_{0,k}\equiv 0$, $\eta_{m,0}=\eta_{m,r+1}\equiv 0$ для всех $m\geqslant 0$.

Можно показать, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ система рекуррентных соотношений (39) имеет единственное решение при произвольном выборе начальных данных $\eta_{1,k}$, $1\leqslant k\leqslant r$. Более точно, решение $\{\eta_{m,k}\}$ системы уравнений (39) связаны с функциями $f_m^{(k)}$, заданными формулами (37) и (37в), следующим соотношением

$$f_m^{(k)} = (1+\eta_{m,k})^{-1},\quad m \geqslant 0,\quad 1 \leqslant k \leqslant r. \tag{40}$$

При выборе начальных условий (37а) все полиномы $Q_m^{(k)}$ являются характерами настоящих, а не виртуальных представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Более подробному изложению исследования системы рекуррентных соотношений (39) будет посвящена отдельная публикация.

ПРИМЕРЫ. I^0. Пусть $\mathfrak{g} = SL(n)$. Тогда

$$Q_m^{(k)}(e^{i\varphi\rho}) = \prod_{j=0}^{k-1}\prod_{l=1}^{m} \frac{\sin(n+m-l-j)\varphi}{\sin(l+j)\varphi}.$$

Следовательно

$$f_m^{(k)}(\varphi) = \frac{\sin(n-k)\varphi \quad \sin k\varphi}{\sin(m+n-k)\varphi \quad \sin(m+k)\varphi}.$$

2^0. Пусть $\mathfrak{g} = SO(2r)$. Обозначим через ω_k^m, $1 \leqslant k \leqslant r$, характер неприводимого представления алгебры $\mathfrak{g}$ соответствующий старшему весу $(\underbrace{m,\ldots,m}_{k})$. Тогда

$$\omega_1^m(e^{i\varphi\rho}) = \frac{\sin(m+r-1)\varphi}{\sin(r-1)\varphi}\prod_{j=1}^{2r-3}\frac{\sin(m+j)\varphi}{\sin j\varphi},$$

$$\omega_r^m(e^{i\varphi\rho}) = \omega_{r-1}^m(e^{i\varphi\rho}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\frac{\sin(m+2r-i-j)\varphi}{\sin(2r-i-j)\varphi}.$$

Следовательно, $Q_m^{(2)}(e^{i\varphi\rho}) = \prod_{j=2}^{2r-4}\left(\frac{\sin(m+j)\varphi}{\sin j\varphi}\right)^2 \frac{\sin(m+1)\varphi}{\sin\varphi}\cdot$

$$\frac{\sin(m+2r-3)\varphi}{\sin(2r-3)\varphi}\cdot\left[\frac{\sin m\varphi\cdot\sin(m+r)\varphi + \sin(m+r-1)\varphi\cdot\sin(m+2r-3)\varphi}{\sin(r-1)\varphi \quad \sin(2r-3)\varphi}\right].$$

Таким образом,

$$f_m^{(1)}(\varphi) = \frac{\sin\varphi\,\sin(r-1)\varphi\,[\sin m\varphi\,\sin(m+r)\varphi + \sin(m+r-1)\varphi\,\sin(m+2r-3)\varphi]}{\sin(m+1)\varphi\,[\sin(m+r-1)\varphi]^2\sin(m+2r-3)\varphi}.$$

Настоящая работа возникла в результате совместных обсуждений с В.В.Бажановым и Н.Ю.Решетихиным работы [6]. Автор благодарен В.В.Бажанову и Н.Ю.Решетихину предположивших, что обобщение результатов [6] на случай произвольных алгебр Ли должно приводить к новым тождествам для дилогарифмов. Автор благодарен Л.Д.Фаддееву за постоянный интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ I (ср.[7]). Пусть $f \in C^3((0,1))$ и удовлетворяет на интервале (0,I) функциональным уравнениям

I. $f(x)+f(1-x)=const$ (ПI)

2. $f(x)+f(y)=f(xy)+f\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)+f\left(\frac{y(1-x)}{1-xy}\right).$ (П2)

Мы должны показать, что тогда на (0,I)

$$f(x)=const\cdot L(x).$$

Для этого продифференцируем соотношение (П2) по x , и в полученном результате положим $g(x)=xf'(x)$. Для функции $g(x)$ получим следующие соотношения

I$'$. $g(x)=g(xy)+\frac{1}{1-xy}g\left(\frac{x(1-y)}{1-xy}\right)-\frac{xy}{1-xy}g\left(\frac{1-y}{1-xy}\right)$ (П3)

2$''$. $(1-x)g(x)=xg(1-x).$

Положим в формуле (П3) $xy=z$, и продифференцируем ее затем по x . Получим следующий результат

$$g'(x)=\frac{1}{(1-z)^2}g'\left(\frac{x-z}{1-z}\right)-\frac{z^2}{(1-z)^2x^2}g'\left(\frac{x-z}{x(1-z)}\right). \tag{П4}$$

Сделаем теперь замену переменных

$$x=\frac{u}{w}, \qquad z=\frac{u}{w}\cdot\frac{(1-w)}{(1-u)}.$$

В итоге соотношение (П4) примет следующий вид

$$\left(1-\frac{u}{w}\right)^2g'\left(\frac{u}{w}\right)+(1-w)^2g'(w)=(1-u)^2g'(u).$$

Следовательно функция $h(u)=(1-u)^2g'(u)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению

$$h(u)+h(w)=h(uw). \tag{П5}$$

Так как $f\in C^3((0,1))$, то $h\in C^1((0,1))$. Таким образом, решение (П5) имеет вид

$$h(u)=K_1\log u, \quad K_1=const.$$

Следовательно

$$g'(x)=K_1\frac{\log x}{(1-x)^2}. \tag{П6}$$

Интегрируя соотношение (П6) получаем

$$g(x)=K_1\left[\frac{x\log x}{1-x}+\log(1-x)\right]+K_2,$$

для некоторой константы K_2. Следовательно

$$f'(x)=K_1\left[\frac{\log x}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{x}\right]+\frac{K^2}{x}. \qquad (П7)$$

Интегрируя соотношение (П7) находим

$$f(x)=(-2K_1)L(x)+K_2\log x+K_3, \qquad (П8)$$

где K_3 – третья константа. Заметим, что первое слагаемое в (П8) удовлетворяет соотношению (П2), в то время как функция $K_2\log x+K_3$ удовлетворяет (П2) только при $K_2=K_3=0$. Предложение I полностью доказано. Заметим, что мы использовали соотношение (ПI) при выводе (П3) из формулы (П2).

Литература

1. Rogers L.J. On function sums connected with the series $\sum x^n/n^2$. - Proc.London Math.Soc., 4, 1907, p.169-189.
2. Lewin L. Polylogarithms and associated functions. - North-Holland, Amsterdam, 1981.
3. Gelfand I.M., MacPherson R.D. Geometry in Grassmannians and a generalization of the dilogarithm. - Adv. in Math., 44, 1982, p.279-312.
4. Andrews G.E., Baxter R.J., Forrester P.J. Eigth-Vertex SOS Model and Generalized Rogers-Romanujan identities. - J.Stat.Phys., 35, 1984, p.193-266.
5. Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory. - Nucl.Phys., B 241, 1984, p. 333-380.
6. Bazhanov V.V., Reshetikhin N.Yu. Conformal field theory and critical RSOS models. - Serpukhov preprint N 27, 1987.
7. Dupout J.J. The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles. - Journ.Pure and Appl.Math., 44, 1987, p.137-164.
8. Kac V., Wakimoto M..Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras. - Preprint N 13, IHES, 1987.
9. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. - М., 1972.
10. Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю. Точное ре-

шение XXZ модели Гайзенберга спина S . - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 5. Зап.научн. семин.ЛОМИ, т.145, 1985, с.109-133.
11. Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю. Представления янгианов и кратности вхождения неприводимых компонент тензорного произведения простых алгебр. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап.науч.семин.ЛОМИ, т.160, 1987, с.211-222.
12. Бажанов В.В., Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю. Конформная теория поля и критические RSOS -модели.II. - Письма ЖЭТФ, 1987, т.46, в.9, с.500-510.
13. Ogievetsky E., Reshetikhin N., Wiegmann P. The principal chiral field in two dimensions on classical Lie algebras. - Nucl.Phys.,B280, 1987,p.45-96.
14. Замолодчиков А.Б. Точные решения двумерной конформной теории поля и критические явления. - Препринт ИТФ-87-65Р.

On identities for Rogers dilogarithm function related to simple Lie algebras. Kirillov A.N. In: Differential geometry Lie groups and mechanics IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.121-133.

New identities for Rogers dilogarithm function related to Lie algebras of A_n series and tomother classical Lie algebras of rank $\geqslant 4$ are proved. Bibl. - 14.

Generalized Goryachev-Chaplygin gyrostat in quantum mechanics. Komarov I.V., Kuznetsov V.B. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.134-141.

A generalization of the Goryachev-Chaplygin top is suggested admitting application of the quantum inverse problem method. An auxiliary parameter introduced in the Hamiltonian plays the some role as the spin value in lattice spin models. Bibl. - 5.

И.В.Комаров, В.Б.Кузнецов

ОБОБЩЕННЫЙ ГИРОСТАТ ГОРЯЧЕВА-ЧАПЛЫГИНА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим классическую динамическую систему на орбитах алгебры Ли $e(3)$, генераторы которой удовлетворяют скобкам Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \{x_i, x_j\} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{I}$$

При фиксированных значениях элементов Казимира

$$\rho = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad \sigma = x_1 J_1 + x_2 J_2 + x_3 J_3 = 0 \tag{2}$$

скобка Пуассона (I) невырождена.

Гамильтониан обобщенного гиростата Горячева-Чаплыгина (ОГГЧ) имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(J_1^2 + J_2^2 + 4J_3^2) - b x_1 + p J_3 + \alpha / x_3^2 , \tag{3}$$

где b определяет мощность поля, а p – гиростатный параметр. Когда параметры $\alpha = 0$, $p = 0$, гамильтониан (3) задает волчок Горячева-Чаплыгина (ВГЧ), а при $\alpha = 0$, $p \neq 0$ – гиростат (ГГЧ). Их квантовые аналоги были изучены в [I,2]. В I9I5 году Д.Н.Горячев [3] заметил, что система остается интегрируемой при $p=0, \alpha \neq 0$. Для произвольных b, p, α на орбите $\sigma = 0$ с гамильтонианом H коммутирует относительно скобки (I) интеграл движения

$$G_{cl} = (2J_3 + p)(J_1^2 + J_2^2 + 2\alpha / x_3^2) + 2 b x_3 J_1 . \tag{4}$$

Интегрируемая система, определяемая H и G_{cl}, допускает разделение переменных и может быть проинтегрирована в квадратурах.

В квантовой механике скобки Пуассона (I) заменяются коммутаторами алгебры Ли $e(3) \oplus w$

$$[J_i, J_j] = -i\varepsilon_{ijk} J_k, \; [J_i, x_j] = -i\varepsilon_{ijk} x_k, \; [x_i, x_j] = 0, \quad [p,q] = -i . \tag{5}$$

В (5), следуя [2], рассматривается расширенное по сравнению с (I) фазовое пространство: наряду с эрмитовыми операторами J_i, x_i вводятся два дополнительных эрмитовых оператора p и q – гиростатный параметр и сопряженный ему оператор, которые коммутируют со всеми генераторами алгебры е(3). Гамильтониан и операторы Казимира также как и в классической механике имеют вид (3), (2), а оператор

$$G = (2\mathcal{J}_3 + p)(\mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \tfrac{1}{4} + 2\alpha/x_3^2) + b[x_3, \mathcal{J}_1]_+ \tag{6}$$

коммутирует с гамильтонианом (3) при условии $\sigma = 0$. Здесь обозначено $AB + BA = [A,B]_+$.

Целью настоящей заметки является изучение квантового ОГТЧ с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) на основе найденного в работе Е.К.Склянина [2] L -оператора для ГТЧ. Мы строим схему нахождения спектра интегралов движения и их собственных функций. Волчок Горячева-Чаплыгина и его обобщения представляют интерес с точки зрения дальнейшего развития техники квантового МОЗР. Дополнительный параметр α играет ту же роль, что спин узла в спиновых цепочках.

§ I. Квантовый L -оператор

Квантовый L -оператор представляет собой зависящую от произвольного комплексного параметра u матрицу вида

$$L(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix} \tag{7}$$

операторные элементы которой определяются формулами

$$A(u) = (u + p + 2\mathcal{J}_3)K(u) + b(x_- u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_-]_+), \tag{8а}$$

$$B(u) = b \cdot e^{2iq}[(x_+ u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_+]_+)(u + p + 2\mathcal{J}_3) - b x_3^2], \tag{8б}$$

$$C(u) = e^{-2iq} \cdot K(u) \tag{8в}$$

$$D(u) = b(x_+ u - \tfrac{1}{2}[x_3, \mathcal{J}_+]_+), \tag{8г}$$

где $\quad x_\pm = x_1 \pm i x_2, \ \mathcal{J}_\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2,$

$$K(u) = u^2 - 2\mathcal{J}_3 u - (\mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \tfrac{1}{4} + 2\alpha/x_3^2). \tag{9}$$

Формулы (8), (9) практически полностью воспроизводят результаты Склянина [2], отличаясь лишь добавкой в последнем слагаемом формулы (9). Эта добавка не нарушает основного сплетающего соотношения для L -оператора

$$R(u-v)\big(L(u)\otimes L(v)\big)=\big(I\otimes L(v)\big)\big(L(u)\otimes I\big)R(u-v) \tag{10}$$

со стандартной R -матрицей $R(u)=u-2\mathcal{P}$, где

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Подчеркнем, что равенство (10) выполняется только при $\sigma=0$.

§ 2. Разделенные уравнения

Для отыскания спектра операторов H, G алгебраический анзац Бете не работает, так же как и для ГТЧ [2]. Дальнейший путь состоит в разделении переменных в квантовой механике. Задача нахождения спектра операторов H, G из обертывающей алгебры $e(3)\oplus W(5)$ при фиксированном гиростатном параметре p может быть сведена к отысканию спектров двух вспомогательных операторов из обертывающих алгебр ранга I. Для получения этих алгебр ранга I рассмотрим коммутирующие операторные корни $u_{1,2}$ уравнения

$$C(u)=0. \tag{11}$$

Они имеют вид

$$u_1=J_3+\left(J^2+\frac{1}{4}+\frac{2\alpha}{x_3^2}\right)^{1/2},\quad u_2=J_3-\left(J^2+\frac{1}{4}+\frac{2\alpha}{x_3^2}\right)^{1/2} \tag{12}$$

и при $\alpha\geqslant-\frac{1}{8}$ являются эрмитовыми операторами. Далее, определим операторы $m_n^{\pm}$, $n=1,2$ с помощью интерполяции по Лагранжу операторных полиномов $A(u)$ и $D(u)$ следующего вида

$$\begin{aligned}A(u)=&(u+p+u_1+u_2)(u-u_1)(u-u_2)+\\&+\frac{u-u_2}{\sqrt{u_1-u_2}}\,m_1^-\,\frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}}+\frac{u_1-u}{\sqrt{u_1-u_2}}\,m_2^-\,\frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}},\end{aligned} \tag{13}$$

$$D(u)=\frac{u-u_2}{\sqrt{u_1-u_2}}\,m_1^+\,\frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}}+\frac{u_1-u}{\sqrt{u_1-u_2}}\,m_2^+\,\frac{1}{\sqrt{u_1-u_2}}. \tag{14}$$

Операторы m_n однозначно заданы при фиксировании правой или левой подстановки операторов u_n в операторные полиномы $A(u)$, $D(u)$. Выше для однозначности выбрана подстановка слева, которая будет обозначаться через $u\,\hat{=}\,u_n$.

Из соотношения (I0) с помощью техники, разработанной в [2], вычисляются коммутационные соотношения между операторами $p, q, u_n, m_n^\pm$

$$[p,u_n]=[p,m_n^\pm]=[q,u_n]=[q,m_n^\pm]=0\,, \tag{I5а}$$

$$[u_m,u_n]=0,\qquad [m_n^\pm, m_k^\pm]=0\,, \tag{I5б}$$

$$[m_k^\pm, u_n]=\pm 2\delta_{nk} m_n^\pm\,, \tag{I5в}$$

$$m_n^+ m_n^- = d(u_n+1) = b^2(u_n^{\,}+2u_n+\frac{3}{4}-2\alpha), \tag{I6а}$$

$$m_n^- m_n^+ = d(u_n-1) = b^2(u_n^2-2u_n+\frac{3}{4}-2\alpha), \tag{I6б}$$

где $d(u)$ – т.н. квантовый детерминант L –оператора [2], который в нашем случае имеет вид

$$d(u) = b^2(u^2-\frac{1}{4}-2\alpha) \tag{I7}$$

Аналогично ПГЧ [2] можно восстановить L –оператор в переменных $p, q, u_n, m_n^\pm$. Симметризация лагранжевых множителей введена так, чтобы из условий сопряжения для полиномов $\mathcal{A}(u)$, $\mathcal{D}(u)$ (8а,г) следовала взаимная сопряженность операторов $m_n^\pm$

$$(m_n^\pm)^* = m_n^\mp \tag{I8}$$

Нетрудно видеть, что операторы

$$y_n^1 = \frac{1}{4b}(m_n^+ + m_n^-), \tag{I9а}$$

$$y_n^2 = \frac{i}{4b}(m_n^+ - m_n^-), \tag{I9б}$$

$$y_n^3 = \frac{u_n}{2} \tag{I9в}$$

удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям алгебры $g = so(2,1)\oplus so(2,1)$

$$[y_m^\alpha\, y_n^\beta] = -i\delta_{mn}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, g_{\gamma\delta}\, y_m^\delta,\quad g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1 \tag{20}$$

и оператор Казимира равен

$$C = g_{\alpha\beta}\, y_n^\alpha\, y_n^\beta = -\frac{3}{16}+\frac{\alpha}{2} = \ell(\ell+1). \tag{2I}$$

В итоге мы получаем две алгебры Ли ранга I, генераторами которых являются эрмитовы операторы (I9). Склянин [2] использует операторы

$$\lambda_n^+ = \mathcal{D}(u \triangleq u_n), \quad \lambda_n^- = A(u \triangleq u_n).$$

При этом у алгебры операторов $\lambda_n^\pm$, u_n нет структуры прямой суммы и возникает задача определения нормы волновых функций уравнений на алгебре ранга I (разделённых уравнений). Отметим, что свойства сопряжения операторов $\lambda_n^\pm$ следуют из формул для нормы, но норма не восстанавливается однозначно по свойствам сопряжения, как это имеет место, например, для цепочки Тода [4]. В предложенной схеме норма для разделенных уравнений, как будет видно ниже, следует из факта разделения переменных.

Рассмотрим дискретные $\mathcal{D}^\pm$ серии неприводимых унитарных представлений пары алгебр $so(2,1)$ (20). Согласно (21) нас интересуют следующие спины

$$\ell_\pm = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\alpha}{2}} \tag{22}$$

Чтобы оставаться в рамках дискретных серий $\mathcal{D}^\pm$ наложим на α ограничения снизу и сверху

$$-1/8 \leqslant \alpha < 3/8 \tag{23}$$

При нарушении нижней границы этого неравенства происходит переход от дискретной к основной серии неприводимых унитарных представлений алгебры $so(2,1)$, где спектр компактных генераторов y_n^3 дискретен и неограничен в обе стороны, а также не зависит от α. При пересечении верхней границы спин ℓ_+ становится положительным.

В рамках ограничений (23), т.е. для дискретных серий $\mathcal{D}^\pm$, перейдем в представление где диагональны компактные генераторы $y_n^3 = u_n/2$, тогда значения спинов $\ell_\pm$ (22) задают спектр S операторов u_1, u_2, который состоит из двух полубесконечных эквидистантных решеток $S = S_+ \cup S_-$

$$S_\pm = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : (u_1, u_2) = (-2\ell_\pm + 2n_1, 2\ell_\pm - 2n_2), \tag{24}$$
$$n_1, n_2 = 0, 1, 2 \ldots\},$$

причем u_1 отвечает $\mathcal{D}^+$ серии, а u_2 – $\mathcal{D}^-$.

Пространство состояний квантового ОГТЧ можно реализовать как пространство $\mathcal{L}_2(S)$ квадратично интегрируемых функций на спектре

$$\mathcal{L}_2(S) = \{ f(u_1, u_2); (u_1, u_2) \in S, \sum_{(u_1,u_2)\in S} |f(u_1,u_2)|^2 < \infty \}. \tag{25}$$

Нетрудно проверить, что операторы $m_n^\pm$, действующие на собственные функции операторов u_n

$$(u_n\varphi)(u_1,u_2) = u_n\varphi(u_1,u_2)$$

следующим образом :

$$\begin{aligned}(m_1^\pm\varphi)(u_1,u_2) &= d^{1/2}(u_1\pm 1)\varphi(u_1\pm 2,u_2),\\ (m_2^\pm\varphi)(u_1u_2) &= d^{1/2}(u_2\pm 1)\varphi(u_1,u_2\pm 2),\end{aligned} \tag{26}$$

реализуют соотношения (I5), (I6).

Рассмотрим действие производящей функции интегралов движения $t(u) = A(u) + D(u) = u^3 + pu^2 - 2(H+\frac{1}{8})u - G$ на собственную функцию $f(u_1,u_2)\in\mathcal{L}_2(S)$ интегралов H, G

$$\begin{aligned}(\tau(u)f)(u_1,u_2) &= (u+p+u_1+u_2)(u-u_1)(u-u_2)f(u_1,u_2)+\\ &+(u-u_2)(u_1-u_2)^{-1/2}(m_1^+ + m_1^-)(u_1-u_2)^{-1/2}f(u_1,u_2)+\\ &+(u_1-u)(u_1-u_2)^{-1/2}(m_2^+ + m_2^-)(u_1-u_2)^{-1/2}f(u_1,u_2),\end{aligned} \tag{27}$$

где использованы формулы (I3), (I4), а величина $\tau(u) = u^3 + pu^2 - 2(h + 1/8)u - g$, где h и g являются собственными значениями H и G.

Из (27) видно, что для разделения переменных u_1, u_2 следует перейти к новой функции $\varphi(u_1,u_2)$

$$f(u_1,u_2) = \sqrt{u_1-u_2}\,\varphi(u_1,u_2) \tag{28}$$

и рассмотреть получившееся выражение при $u = u_n, n = 1,2$. Тогда мы будем иметь два одномерных разделенных уравнения

$$\tau(u_n)\varphi(u_n) = d^{1/2}(u_n-1)\varphi(u_n-2) + d^{1/2}(u_n+1)\varphi(u_n+2), \tag{29}$$

при этом функция $\varphi(u_1,u_2)$ факторизуется

$$\varphi(u_1,u_2) = \varphi(u_1)\cdot\chi(u_2). \tag{30}$$

Такой вид волновой функции позволяет говорить о разделении переменных и отражает структуру прямой суммы $g = SO(2,I)\oplus SO(2,I)$.

Две задачи (29) при $n = 1$ и 2 представляют собой трехчленные рекуррентные соотношения для величин $\varphi(u_n)$, где переменные u_1, u_2 пробегают решетку S, зависящую от значения параметра d. При фиксированном гиростатном параметре p мы имеем две одномерные спектральные задачи с совместным спектром – двумя собственными значениями h и g.

Скалярное произведение для функций $\varphi(u_1,u_2)$ (28) содержит весовой множитель (u_1-u_2)

$$< \varphi | \chi > = \sum_{(u_1,u_2)\in S} (u_1-u_2)\bar{\varphi}(u_1,u_2)\chi(u_1,u_2), \tag{31}$$

поэтому норма для собственных функций задач (29) имеет вид

$$\sum_{\{u_n\}} |u_n|\cdot|\varphi_n(u)|^2 < \infty . \tag{32}$$

При $\alpha=0$ (ГТЧ) спектральная задача (29), (32) исследовалась численно в работе [I]. Численные итерации соотношений (29) требуют предельных значений спектра H и G в слабом поле $b\to 0$. Они имеют вид

$$\begin{cases} h\big|_{b=0} = \frac{1}{2}j(j+1)+\frac{3}{2}m^2+pm , \\ g\big|_{b=0} = (2m+p)\left(j(j+1)-m^2+1/4\right), \end{cases} \tag{33}$$

где $j(j+1)$, m являются собственными значениями операторов $J^2+2\alpha/x_3^2 = 1/4\left((u_1-u_2)^2-1\right)$, $J_3=\frac{u_1+u_2}{2}$ и равны

$$\begin{cases} j = n_1+n_2-2l_\pm-\frac{1}{2}, \\ m = n_1-n_2 ,\ n_1,n_2 = 0,1,2\ldots . \end{cases} \tag{34}$$

Полный численный анализ спектра и собственных функций операторов H и G будет опубликован в другом месте.

Заключение

Квантовый метод обратной задачи требует дополнительного развития для таких моделей, которые не обладают локальным вакуумом (цепочка Тода, sh-Gordon) и алгебраический анзац Бете для которых не работает. Хотя для этого класса моделей наметился существенный прогресс [2], проблема пока еще полностью не решена. Поэтому особенно полезен детальный анализ конкретных примеров типа ГТЧ, ОГТЧ, когда решение удается найти. Имея это ввиду, перечислим кратко основные результаты работы.

Нам удалось ввести дополнительный параметр α в L -оператор для ГТЧ [2], который, как оказалось, играет роль, аналогичную спину узла в спиновых цепочках, хотя L - оператор ГТЧ не имеет узельного представления. В данной заметке предъявлена схема разделения переменных в том случае, когда задача сформулирована с помощью R - матрицы типа XXX, на примере ОГТЧ. Схема эта во многом повторяет результаты работы Е.К.Склянина [2], хотя отличается в некоторых деталях. Спектр и норма для волновых функций разделенного уравнения получены с помощью алгебраических соображений, суть которых заключается в следующем. Задача нахождения спектра интегралов движения из обертывающей $e(3)\oplus W$ (5) при фиксированном p сводится к отысканию спектров двух вспомогательных операторов из обертывающих алгебр ранга I $g = SO(2,I) \oplus SO(2,I)$. Чтобы иметь эрмитовы генераторы этих алгебр мы используем симметризованный вид знаменателей в квантовом аналоге интерполяции по Лагранжу при определении операторов $m_n^{\pm}$, аналогичных $\lambda_n^{\pm}$ в [2]. Далее используется интегрируемое неприводимое унитарное представление каждой из двух алгебр $SO(2,I)$ в прямой сумме g. В рамках выбранных $\mathcal{D}^{\pm}$ дискретных серий спектр разделенных уравнений образует эквидистантную решетку, а норма волновых функций вычисляется из самого факта разделения переменных. В итоге оказывается, что дополнительный параметр $\alpha \neq 0$ приводит лишь к сдвигу решетки S и пределов интегралов движения в слабых полях, хотя нетривиально деформирует спектр интегралов задачи в общем случае ненулевых полей.

Заметим, что наша схема применима также и к цепочке Тода [4]. В этом случае весовой множитель в метрике для волновой функции $\varphi(u_1,\dots,u_{n-1})$ разделенных уравнений для цепочки Тода из n частиц имеет вид определителя Вандермонда

$$\mathcal{P} = \prod_{i<j=1}^{n-1} (u_i - u_j).$$

Авторы благодарны Е.К.Склянину за полезные обсуждения квантового метода обратной задачи.

Литература

1. I.V.K o m a r o v, V.V.Z a l i p a e v. - The Goryachev-Chaplygin gyrostat in quantum mechanics. - J.Phys.A: Math. Gen., 1984, v.17, p.1479-1488.

2 Е.К. С к л я н и н. Волчок Горячева-Чаплыгина и метод обратной задачи рассеяния. -В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1984, т.133, с.236-257.

3 Д.Н. Г о р я ч е в. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Изв.Варш.ун-та, 1915, № 3, с.3-II.

4. E.K.S k l y a n i n. The quantum Toda chain. - Lecture Notes in Physics, 1985, v.226, p.196-233.

Г.И.Ольшанский

ЯНГИАНЫ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ

I. Введение. В статье излагается алгебраическая конструкция, которая возникла из одной задачи теории представлений бесконечномерных групп [6-7] и неожиданно оказалась тесно связанной с янгианами $Y(\mathfrak{sl}(m))$. В [6] были введены алгебры операторов Лапласа на группах $SO(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$. Эти операторы похожи на обычные операторы Лапласа, но они не вмещаются в универсальную обертывающую алгебру $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, ибо $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ имеет тривиальный центр, ср. [3]. Задача состояла в построении такой ассоциативной алгебры $A(\mathfrak{g})$, которая содержала бы $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и операторы Лапласа и обладала хорошими, с точки зрения теории представлений, свойствами. Алгебры $A(\mathfrak{g})$ были построены, и оказалось, что

$$A(\mathfrak{so}(\infty))\simeq A(\mathfrak{sp}(\infty))\simeq A, \quad A(\mathfrak{u}(\infty))\simeq A\otimes A, \qquad (I.I)$$

где A - некоторая алгебра с квадратичными соотношениями, изоморфная тензорному произведению своего центра A_0 (= алгебра операторов Лапласа) на $Y(\mathfrak{gl}(\infty))$ (= объединение янгианов алгебр Ли $\mathfrak{gl}(m)$). Попутно была получена реализация янгианов дифференциальными операторами со счетным числом переменных[ж)].

Ниже приводятся с доказательствами результаты, которые связаны с конструкцией алгебры A и изоморфизмом $A\simeq A_0\otimes Y(\mathfrak{gl}(\infty))$.

Я глубоко признателен В.Г.Дринфельду, А.А.Кириллову, Н.Ю.Решетихину, Б.Л.Фейгину и И.В.Череднику за обсуждения и ценные замечания.

2. Алгебра A. Введем следующие обозначения: $\mathfrak{gl}(n)$ - алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$; $\mathfrak{gl}(\infty)=\bigcup \mathfrak{gl}(n)$; $\{e_{ij}\}$ - стандартный базис в $\mathfrak{gl}(\infty)$, $1\leqslant i,j<\infty$; $GL(n)=GL(n,\mathbb{C})$; $GL_m(n)$ - подгруппа в $GL(n)$, фиксирующая первые m базисных векторов в $\mathbb{C}^n$, $0\leqslant m\leqslant n$ (отметим, что $GL_m(n)\simeq GL(n-m)$);

$A(n)=\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$, где $\mathcal{U}(\cdot)$ - символ универсальной обертывающей алгебры; $A_m(n)$ - подалгебра $GL_m(n)$ - инвариантов в $A(n)$, $0\leqslant m\leqslant n$; $I(n)$ - левый идеал в $A(n)$, натянутый на

ж) Эти результаты анонсированы в статье автора "Расширение алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и янгианы", направленной в Докл.АН СССР.

$e_{1n}, \dots, e_{nn}$.

ЛЕММА 2.I. Для $a \in A_{n-1}(n)$ существует единственный элемент $\pi_n(a) \in A(n-1)$ такой, что $a \in \pi_n(a) + I(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО дублирует построение гомоморфизма Хариш-Чандры ([I], 7,4). Его идея сводится к тому, что если a - моном, от генераторов e_{ij}, делящийся слева на один из элементов вида e_{nj}, $1 < j < n-1$, то он обязан делиться справа на элемент вида e_{in}, иначе $[a, e_{nn}] \neq 0$.

ЛЕММА 2.2 (ср. [I], 7.4.2). Если $0 \leqslant m < n$, то π_n задает морфизм алгебр $A_m(n) \longrightarrow A_m(n-1)$.

Это следует из очевидного равенства $I(n) A_m(n) = I(n)$.

Заметим, что морфизмы $\pi_n : A_m(n) \longrightarrow A_m(n-1)$ сохраняют каноническую фильтрацию универсальных обертывающих алгебр. Для $m = 0, 1, \dots$ пусть A_m - проективный предел фильтрованных алгебр $A_m(n)$, $n \to \infty$. Элементы алгебры A_m суть последовательности вида $a = (a_n)_{n \geqslant m}$, где $a_n \in A_m(n)$, $\pi_n(a_n) = a_{n-1}$, $\deg a = \sup \deg a_n < +\infty$. Очевидно, $a = (a_n)_{n \geqslant m}$ однозначно определяется любой укороченной последовательностью $(a_n)_{n \geqslant k}$, где $k > n$. Поэтому определены вложения $A_0 \to A_1 \to \dots$. Наш основной объект, алгебра A, есть объединение алгебр A_m.

Алгебра $A = \bigcup A_m$ довольно своеобразно связана с $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$. С одной стороны, A содержит $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$ (элементу $e_{ij} \in \mathfrak{gl}(\infty)$ сопоставляется последовательность (a_n), где $a_n = e_{ij}$ для всех $n \geqslant \max(i,j)$. С другой стороны, при $n \geqslant m$ имеются канонические морфизмы $A_m \longrightarrow A_m(n) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$. Отметим еще, что в алгебре A естественно действует группа $GL(\infty)$ - объединение групп $GL(n)$.

3. <u>Центр и квазисимметрические функции</u>.

ТЕОРЕМА 3.I. Подалгебра A_0 совпадает с центром алгебры A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, A_0 коммутативна. Если $a \in A$ и $[a, \mathfrak{gl}(\infty)] = \{0\}$, то $a \in A_0$. Значит, A_0 есть центр. Нетрудно показать также, что A_m совпадает с подалгеброй GL_m--инвариантов в A, где $GL_m = \bigcup GL_m(n)$.

Пусть $Q(n)$ - алгебра многочленов $f(x_1, \dots, x_n)$, которые симметричны как функции переменных $x_1 - 1, \dots, x_n - n$. Отображение $f \mapsto f \mid (x_n = 0)$ задает морфизм $Q(n) \to Q(n-1)$. Пусть Q - проективный предел фильтрованных алгебр $Q(n)$, где фильтрация определяется степенью многочлена. Назовем Q алгеброй квазисимметрических функций, ср.[5], гл.I, п.2. Изоморфизмы Хариш-Чандры $A_0(n)\longrightarrow Q(n)$ (см.[I], 7.4) согласованы с проекциями $A_0(n)\longrightarrow A_0(n-1)$, $Q(n)\longrightarrow Q(n-1)$. Тем самым, определен изоморфизм алгебр $A_0\longrightarrow Q$. Следующий факт очевиден.

ТЕОРЕМА 3.2. Алгебра $A_0\simeq Q$ изоморфна алгебре многочленов от счетного набора образующих, в качестве которых можно взять, например, "квазистепенные суммы"

$$q_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[(x_k-k)^r-(-k)^r\right],\qquad r=1,2,\dots .$$

Свободными образующими в Q являются также "элементарные квазисимметрические функции" и "полные квазисимметрические функции", которые задаются производящими рядами (ср.[5], гл.I, п.2):

$$E(x,t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+(x_k-k)t}{1-kt},\quad H(x,t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+kt}{1-(x_k-k)t}\,.$$

4. <u>Алгебра P</u>. Повторим конструкцию алгебры A, заменив $A(n)=\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$ симметрической алгеброй $P(n)=S(\mathfrak{gl}(n))$. Роль подалгебр $A_m(n)$ будут играть подалгебры $GL_m(n)$ -инвариантов $P_m(n)\subset P(n)$, а роль левого идеала $I(n)$ - идеал в коммутативной алгебре, порожденный теми же элементами. Мы получим в итоге коммутативную градуированную алгебру P, являющуюся объединением своих подалгебр P_m $(m=0,1,\dots)$. Отметим, что P_m совпадает с подалгеброй GL_m -инвариантов в P и что P_0 отождествляется с алгеброй симметрических функций.

Следующий результат проверяется тривиально.

ТЕОРЕМА 4.I. Градуированная алгебра P изоморфна градуированной алгебре, присоединенной к фильтрованной алгебре A. Аналогичный факт справедлив для P_m и A_m $(m=0,1,\dots)$.

Рассмотрим следующие элементы из $P(n)$:

$$p_n^{(M)}=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_M=1}^{n}e_{\alpha_1\alpha_2}e_{\alpha_2\alpha_3}\dots e_{\alpha_M\alpha_1}\tag{4.I}$$

$$p_{ij|n}^{(M)}=\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{M-1}=1}^{n}e_{i\alpha_1}e_{\alpha_1\alpha_2}\dots e_{\alpha_{M-1}j}\tag{4.2}$$

(предполагается, что $p_{ij|n}^{(1)}=e_{ij}$). Отождествив $P(n)$ с алгеброй полиномиальных функций от $n\times n$ -матрицы x, получим:

$$p_n^{(M)}(x)=\mathrm{tr}(x^M),\quad p_{ij|n}^{(M)}(x)=(x^M)_{ij}\,.\tag{4.3}$$

Очевидно, $p_n^{(M)} \in P_0(n)$ и $p_{ij|n}^{(M)} \in P_m(n)$, если $i, j \leqslant m$.

С помощью первой основной теоремы теории инвариантов для $GL(n-m)$ устанавливается следующий результат.

ЛЕММА 4.2. Зафиксируем $m = 0, 1, \ldots$. Элементы $p_n^{(M)}$ и $p_{ij|n}^{(M)}$, где $i, j \leqslant m$, порождают $P_m(n)$ для всех $n \geqslant m$.

Последовательности $(p_n^{(M)})$ и $(p_{ij|n}^{(M)})$, где M, i, j фиксированы, а $n \to \infty$, согласованы с проекциями $P_m(n) \longrightarrow P_m(n-1)$ и, значит, определяют элементы алгебры P, которые мы обозначим через $p^{(M)}$ и $p_{ij}^{(M)}$ соответственно.

ЛЕММА 4.3. Ограничим сверху индексы M, i, j. Если n достаточно велико, то конечный набор элементов $p_n^{(M)}$, $p_{ij|n}^{(M)}$ будет алгебраически независим.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Функции (4.3) сужаем на подходящее аффинное подпространство, выделяемое условиями вида $x_{k\ell} = 0$ или $x_{k\ell} = 1$. Эти условия подбираются с учетом комбинаторной структуры формул (4.I) и (4.2) - так, чтобы различные функции в (4.3) зависели, что по возможности, от различных координат.

ТЕОРЕМА 4.4. Элементы $p^{(M)}$ и $p_{ij}^{(M)}$, где $M = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant i, j \leqslant m$, суть свободные образующие коммутативной алгебры P_m $(m = 0, 1, \ldots)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные элементы алгебраически независимы в силу леммы 4.3. Пусть $p = (p_n)_{n \geqslant m} \in P_m$. По лемме 4.2, при любом $n > m$ мы можем записать p_n в виде некоторого многочлена f_n от $p_n^{(M)}$ и $p_{ij|n}^{(M)}$, где $M < \deg p$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. В силу леммы 4.3, f_n не зависит от n, если n достаточно велико.

Вот несколько следствий. Элементы $p^{(M)}$, $p_{ij}^{(M)}$, где $M, i, j = 1, 2, \ldots$, суть свободные образующие алгебры P. Если M и m фиксированы, то размерность M-й однородной компоненты градуированной алгебры $P_m(n)$ стабилизируется при $n \to \infty$. То же самое верно для подпространства элементов степени $\leqslant M$ в фильтрованной алгебре $A_m(n)$. Проекции $P_m(n) \longrightarrow P_m(n-1)$ и $A_m(n) \longrightarrow A_m(n-1)$ сюръективны для всех $n > m$.

5. <u>Янгианы</u>. Определим янгиан $Y(\mathfrak{gl}(m))$ как комплексную ассоциативную алгебру с единицей, порожденную образующими $t_{ij}^{(M)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $M = 1, 2, \ldots$, с определяющими квадратичными соотношениями

$$[t_{ij}^{(M+1)}, t_{k\ell}^{(N)}] - [t_{ij}^{(M)}, t_{k\ell}^{(N+1)}] = t_{kj}^{(M)} t_{i\ell}^{(N)} - t_{kj}^{(N)} t_{i\ell}^{(M)}, \tag{5.I}$$

где $M, N = 0, 1, \dots,\ t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij},\ 1 \leq i, j, k, l \leq m$. Происхождение формул (5.I) следующее. Введем производящие функции

$$t_{ij}(u) = \delta_{ij} + u^{-1} t_{ij}^{(1)} + u^{-2} t_{ij}^{(2)} + \dots \tag{5.2}$$

и образуем из них $m \times m$ -матрицу $T(u) = (t_{ij}(u))$. Пусть $\{1_{ij}\}$ – стандартный базис в матричной алгебре $\mathrm{End}(\mathbb{C}^m)$; $\sigma = \sum 1_{ij} \otimes 1_{ji}$ – оператор перестановки из $\mathrm{End}(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^m)$; $T_1(u) = T(u) \otimes 1,\ T_2(v) = 1 \otimes T(v)$. Тогда (5.I) превращается в

$$(u - v - \sigma) T_1(u) T_2(v) = T_2(v) T(u) (u - v - \sigma) \tag{5.3}$$

Как известно, соотношения (5.3) и подобные ему (с более общей " R -матрицей" на месте $u - v - \sigma$) играют фундаментальную роль в квантовом методе обратной задачи (см., например, [8]).

Строго говоря, янгианы были определены В.Г.Дринфельдом для простых алгебр Ли, см. [2] . Связь между $Y(\mathfrak{gl}(m))$ и $Y(\mathfrak{sl}(m))$ такова (В.Г.Дринфельд): первая алгебра изоморфна тензорному произведению второй и коммутативной алгебры, порожденной коэффициентами разложения квантового определителя [4] .

Нам понадобятся еще две переформулировки соотношений (5.I):

$$(u - v)[t_{ij}(u), t_{kl}(v)] = t_{kj}(u) t_{il}(v) - t_{kj}(v) t_{il}(u) \tag{5.4}$$

$$[t_{ij}^{(M)}, t_{kl}^{(N)}] = \sum_{r=0}^{\min(M,N)-1} \left(t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(M+N-1-r)} - t_{kj}^{(M+N-1-r)} t_{il}^{(r)} \right) \tag{5.5}$$

6. <u>Изоморфизм</u> $A \simeq A_0 \otimes Y(\mathfrak{gl}(\infty))$. Рассмотрим правую часть в (4.2) как элемент алгебры $A(n)$ и обозначим его через $e_{ij|n}^{(M)}$.

ЛЕММА 6.I. Элементы $e_{ij|n}^{(M)},\ 1 \leq i, j \leq n$, удовлетворяют (5.I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n \times n$ -матрица $T(u)$ удовлетворяет (5.3), то матрица $T(-u)^{-1}$ также удовлетворяет (5.3). Матрица $1 + u^{-1} \sum e_{ij} \otimes 1_{ij}$ удовлетворяет (5.3). Применив к ней указанное преобразование, мы получим матрицу $1 + \sum e_{ij|n}(u) \otimes 1_{ij}$, где $e_{ij|n}(u)$ – производящий ряд типа (5.2) для $e_{ij|n}^{(M)}$. Это простое рассуждение сообщил мне Н.Ю.Решетихин.

Определим элементы $t_{ij|n}^{(M)} \in A(n)$ из условия $t_{ij|n}(u) = e_{ij|n}(u + n)$ или, подробнее,

$$t^{(M)}_{ij|n} = \sum_{r=0}^{M-1} (-n)^r C^r_{M-1} e^{(M-r)}_{ij|n} \qquad (6.1)$$

ЛЕММА 6.2. Если $1 \leqslant i,j \leqslant m < n$, то $t^{(M)}_{ij|n} \in A_m(n)$. Если i, j, m, M фиксированы, а $n \to \infty$, то последовательность $\left(t^{(M)}_{i,j|n}\right)$ согласована с проекциями π_n и, значит, определяет некоторый элемент $t^{(M)}_{ij} \in A_m$.

ЗАМЕЧАНИЕ. $(e^{(M)}_{ij|n})$ не согласована с (π_n) при $M \geqslant 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы $t^{(M)}_{ij|n}$, равно как и $e^{(M)}_{ij|n}$, преобразуются относительно $gl(n)$ так же, как элементы e_{ij} . Значит, они лежат в $A_m(n)$, если $i,j \leqslant m$, Далее, из (6.1) выводится рекуррентное соотношение

$$t^{(M)}_{ij|n} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(e_{i\alpha} t^{(M-1)}_{\alpha j|n} - t^{(M-1)}_{ij|n}\right), \quad M \geqslant 2 \qquad (6.2)$$

Докажем индукцией по M , что

$$t^{(M)}_{ij|n} - t^{(M)}_{ij|n-1} \in I(n), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 \qquad (6.3)$$

Это верно для $M=1$, ибо $t^{(1)}_{ij|n} = e_{ij}$. Пусть $M \geqslant 2$. Напишем выражение типа (6.2) для $n-1$ и вычтем его из (6.2). Члены с индексами $\alpha = 1, \ldots, n-1$ будут лежать в $I(n)$ по предположению индукции. Остается еще n-й член из (6.2), равный

$$t^{(M-1)}_{nj|n} e_{in} + \left[e_{in}, t^{(M-1)}_{nj|n}\right] - t^{(M-1)}_{ij|n} = t^{(M-1)}_{nj|n} e_{in} - \delta_{ij} t^{(M-1)}_{nn|n},$$

что снова попадает в $I(n)$, ибо $M-1 \geqslant 1$.

ТЕОРЕМА 6.3. Элементы $t^{(M)}_{ij}$, где $1 \leqslant i,j \leqslant m$, $M = 1,2,\ldots$, удовлетворяют (5.1) и порождают в A_m подалгебру, изоморфную $Y(gl(m))$. Алгебра A_m изоморфна $A_0 \otimes Y(gl(m))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формальные ряды $e_{ij|n}(u)$, $1 \leqslant i,j \leqslant m$, удовлетворяют (5.4). Поэтому ряды $t_{ij|n}(u)$ также удовлетворяют (5.4). Значит, элементы $t^{(M)}_{ij}$ удовлетворяют (5.1), и определен морфизм алгебр $\psi : A_0 \otimes Y(gl(m)) \longrightarrow A_m$. Введем в алгебру $Y(gl(m))$ фильтрацию, приписав ее образующим степени, равные их верхним индексам. Из (5.5) видно, что присоединенная градуированная алгебра коммутативна. Из теорем 4.1 и 4.4 следует, что Ψ индуцирует изоморфизм присоединенных градуированных алгебр. Значит, Ψ есть изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ. $A \simeq A_0 \otimes Y(gl(\infty))$, где $Y(gl(\infty)) = \bigcup Y(gl(m))$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от янгианов, в A нет коумножения.

ТЕОРЕМА 6.4. Существуют элементы $t^{(M)} \in A_0$, $M = 1,2,\ldots$, определенные условием $(t^{(M)})_n - \sum\limits_{\alpha=1}^{n} t^{(M)}_{\alpha\alpha|n} \in A_0(n)$, $n = 1,2,\ldots$. Они суть свободные образующие коммутативной алгебры A_0.

Это следует из леммы 6.2 и теорем 4.I и 4.4.

7. <u>Подалгебра Гельфанда-Цетлина</u>. Алгебра $\mathfrak{U}(gl(\infty))$ обладает эндоморфизмом γ , который переводит e_{ij} в $e_{i+1,j+1}$. Очевидно,

$$\gamma(A_m(n)) \subset A_{m+1}(n+1), \quad \gamma(I(n)) \subset I(n+1).$$

Поэтому определен эндоморфизм $\gamma : A \to A$ и $\gamma(A_m) \subset A_{m+1}$.

ЛЕММА 7.I. Для $M = 1,2,\ldots$ имеем

$$t^{(M)} = \gamma(t^{(M)}) + M t^{(M)}_{11} + \sum_{r \geqslant 2} \sum_{\substack{M > M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_r > 0 \\ M_1 + \ldots + M_r = M}} c_{M_1 \ldots M_r} t^{(M_1)}_{11} \ldots t^{(M_2)}_{11} + R , \tag{7.I}$$

где $c_{M_1 \ldots M_r}$ – некоторые константы, $\deg R < M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что в алгебре $P(n)$ имеет место аналог равенства (7.I) для $p^{(M)}_n$, $\gamma(p^{(M)}_{n-1})$, $p^{(M)}_{11|n}$, где $R = 0$. В самом деле, рассмотрим правую часть в (4.I). Мономы с индексами $\alpha_1 \geqslant 2, \ldots, \alpha_M \geqslant 2$ дают в сумме $\gamma(p^{(M)}_{n-1})$. Мономы, у которых ровно один индекс равен I, дают $M p^{(M)}_{11|n}$. Наконец, мономы с $r \geqslant 2$ индексами, равными I, образуют члены вида $c_{M_1 \ldots M_r} \, p^{(M_1)}_{11|n} \cdots p^{(M_r)}_{11|n}$. Константы не зависят от n , так что та же формула справедлива для $p^{(M)}$, $\gamma(p^{(M)})$ и т.д. Отсюда следует (7.I).

Пусть C – подалгебра в A , натянутая на A_0, $\gamma(A_0)$, $\gamma(\gamma(A_0)), \ldots$. Очевидно, C коммутативна. Мы увидим в следующем пункте, что C диагонализуется в базисах типа Гельфанда-Цетлина для "полиномиальных" A -модулей со старшим весом. Поэтому ее уместно назвать подалгеброй Гельфанда-Цетлина.

ТЕОРЕМА 7.2. C и $gl(\infty)$ порождают алгебру A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B – подалгебра в A , натянутая на C и $gl(\infty)$. Покажем индукцией по M , что M -е подпространства фильтрованных алгебр B и A совпадают. Достаточно проверить, что $t_{ij}^{(M)} \in B$. Из леммы 7.I следует, что $t_{11}^{(M)} \in B$. Коммутируя $t_{11}^{(M)}$ с элементами e_{ij}, получаем все $t_{ij}^{(M)}$.

Теорема 7.2 помогает установить (I.I), см. по этому поводу статью автора, цитированную во введении.

8. <u>Модули со старшим весом</u>. Пусть J_n – левый идеал в $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(\infty))$, порожденный элементами e_{ij}, где $i < j$ и $j > n$. Очевидно, $J_0 \supset J_1 \supset \dots$ и $\bigcap J_n = \{0\}$. Пусть V – произвольный $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль, V_n – аннулятор идеала J_n в V и $V_\infty = \bigcup V_n$ (заметим, что $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$). Если $i, j \leqslant n$, то $[e_{ij}, J_n] \subset J_n$. Отсюда видно, что V_∞ является подмодулем в V. В частности, $V_\infty = V$, если $V_\infty \neq \{0\}$ и V неприводим.

Пусть Ω – категория $\mathfrak{gl}(\infty)$-модулей V таких, что $V_\infty = V$.

ТЕОРЕМА 8.I. Всякий $V \in \Omega$ является автоматически A-модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in V$ и $a = (a_n) \in A$. Тогда $a_n v - a_{n+1} v \in I(n+1) v \subset J_n v$. Значит, вектор $a_n v$ стабилизируется при $n \to \infty$, и его можно принять за определение вектора $a v$. То, что $a(bv) = (ab)v$, проверяется тривиально.

ЗАМЕЧАНИЕ. $A_m V_n \subseteq V_n$ при $n \geqslant m$.

Пусть λ – произвольное разбиение и $V = \rho_\lambda$ – неприводимый $\mathfrak{gl}(\infty)$-модуль со старшим весом $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Его старший вектор, очевидно, лежит в V_∞. Поэтому ρ_λ лежит в Ω и является A-модулем. В ρ_λ имеется естественный базис типа Гельфанда-Цетлина, ассоциированный с цепочкой подалгебр $\gamma(\mathfrak{gl}(\infty))$, $\gamma(\gamma(\mathfrak{gl}(\infty))), \dots$. Нетрудно убедиться, что C диагонализуется в этом базисе и разделяет базисные векторы.

Модули ρ_λ играют важную роль в теории [6–7]. В их терминах можно явно построить неприводимые конечномерные представления янгианов $Y(\mathfrak{gl}(m))$ и $Y(\mathfrak{sl}(m))$, связанные с косыми диаграммами, см.п.7 цитированной выше статьи автора.

Некоторые q-аналоги результатов этой статьи содержатся в [9].

Литература

I. Д и к с м ь е Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.,1978.

2. Д р и н ф е л ь д В.Г. Квантовые группы. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УIII. Зап.научн.семин.

ЛОМИ, т.155, с.18–49.

3. К а с V.G. Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions. - Proc.Nat .Acad.Sci.USA, 1984, v.81, p.645-647.
4. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Quantum spectral transform. Recent developments. - Lect.Notes.Phys., 1982, v.151, p.61-119.
5. М а к д о н а л ь д И. Симметрические функции и многочлены Холла. М., 1985.
6. О л ь ш а н с к и й Г.И. Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p,\infty)$, $SO_0(p,\infty)$, $Sp(p,\infty)$ и соответствующих групп движений. - Функцион.анализ и его прилож. 1978, т.12, № 3, с.32–44.
7. О л ь ш а н с к и й Г.И. Бесконечномерные классические группы конечного R -ранга: описание представлений и асимптотическая теория. - Функцион.анализ и его прилож. 1984, т.18, № 1, с.28–42.
8. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга. - Успехи матем. наук, 1979, т.34, № 5, с.13–63.
9. Ч е р е д н и к И.В. О q -аналогах базисов Гельфанда–Цетлина. - Препринт ИТЭФ , М., 1986.

The Yangians and the universal envelopping algebras. Olshansky G.I. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p. 142-150

In terms of the algebras $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$, $n = 1, 2, \cdots$, an algebra A is constructed, which yields both a realization of the Yangians $Y(\mathfrak{gl}(m))$ and the "right" version of the universal enveloping algebra for certain classical infinite-dimensional. Lie algebras. Bibl. - 9.

Е.К.Склянин

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В МОДЕЛИ ГОДЕНА

I. Описание модели

В 1973 году М.Годен [I], см. также [2,3], предложил новый класс вполне интегрируемых квантовых моделей. Модели Годена проще всего рассматривать как предельные случаи интегрируемых квантовых цепочек, решаемых в рамках квантового метода обратной задачи (КМОЗ) [4,5].

Рассмотрим, для определенности, неоднородную $su(2)$ -цепочку (XXX-модель) на N узлах с квазипериодическим граничным условием, заданную спиновыми переменными S_n^α $(\alpha = 1,2,3;\, n=1,\dots,N)$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (S_n^\alpha)^2 = \ell_n(\ell_n+1),$$

$$[S_m^\alpha, S_n^\beta] = i\delta_{mn} \sum_{\gamma=1}^{3} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S_n^\gamma, \tag{I.I}$$

L -оператором

$$L_n(u) = 1 + \frac{\eta}{u}\sum_{\alpha=1}^{3} S_n^\alpha \sigma^\alpha = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} u+\eta S_n^3, & \eta S_n^- \\ \eta S_n^+ & , u-\eta S_n^3 \end{pmatrix}, \quad S_n^\pm \equiv S_n^1 \pm i S_n^2 \tag{I.2}$$

и матрицей монодромии

$$T(u) = e^{\eta g \sigma^3} L_1(u-\delta_1)\dots L_N(u-\delta_N), \tag{I.3}$$

удовлетворяющей фундаментальному соотношению КМОЗ

$$R_{12}(u_1-u_2)\overset{1}{T}(u_1)\overset{2}{T}(u_2) = \overset{2}{T}(u_2)\overset{1}{T}(u_1)R_{12}(u_1-u_2) \tag{I.4}$$

с R -матрицей

$$R_{12}(u) = u + \eta \mathcal{P}_{12}, \tag{I.5}$$

где g в (I.3) – константа, определяющая граничное условие, а $\mathcal{P}_{12}$ в (I.5) – оператор перестановки в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$.

Алгебра матриц $T(u)$, задаваемая квадратичными соотношениями (I.4), обладает оператором Казимира (квантовым детерминантом [5]) $\Delta(u)$

$$\Delta(u) = tr_{12} P_{12}^- \overset{1}{T}(u-\tfrac{\eta}{2})\overset{2}{T}(u+\tfrac{\eta}{2}), \tag{I.6a}$$

$$[\Delta(u), T(v)] = 0 \quad \forall u, v, \tag{I.6б}$$

где

$$P_{12}^- = (1-\mathcal{P}_{12})/2. \tag{I.7}$$

На представлениях вида (I.2), (I.3) $\Delta(u)$ принимает значение

$$\Delta(u) = \Delta_+\left(u+\frac{\eta}{2}\right)\Delta_-\left(u-\frac{\eta}{2}\right), \quad \Delta_\pm(u) = e^{\pm g\eta}\prod_{n=1}^{N}\frac{u-\delta_n \pm l_n\eta}{u-\delta_n}. \tag{I.8}$$

Производящей функцией коммутирующих интегралов движения служит величина $t(u)$

$$t(u) = \mathrm{tr}\, T(u), \quad [t(u), t(v)] = 0 \quad \forall u, v. \tag{I.9}$$

Модель Годена получается из вышеописанной в пределе $\eta \to 0$. При этом

$$L_n(u) = 1 + \eta\mathcal{L}_n(u), \quad \mathcal{L}_n(u) = \frac{1}{u}\sum_{\alpha=1}^{3} S_n^\alpha \sigma^\alpha = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} S_n^3 & S_n^- \\ S_n^+ & -S_n^3 \end{pmatrix}; \tag{I.10}$$

$$T(u) = 1 + \eta\mathcal{T}(u) + O(\eta^2), \tag{I.11a}$$

$$\mathcal{T}(u) = g\sigma^3 + \sum_{n=1}^{N}\mathcal{L}(u-\delta_n) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}; \tag{I.11б}$$

$$\frac{1}{u}R_{12}(u) = 1 - \eta r_{12}(u), \quad r_{12}(u) = -\frac{1}{u}\mathcal{P}_{12}. \tag{I.12}$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать невырожденный случай: $g \neq 0$, $\delta_m \neq \delta_n$ при $m \neq n$.

Матрица $\mathcal{T}(u)$ удовлетворяет соотношению

$$[\overset{1}{\mathcal{T}}(u_1), \overset{2}{\mathcal{T}}(u_2)] = [r(u_1-u_2), \overset{1}{\mathcal{T}}(u_1) + \overset{2}{\mathcal{T}}(u_2)], \tag{I.13}$$

которое получается из (I.4) в порядке η^2, а также может быть проверено непосредственно, исходя из (I.I), (I.I0)–(I.I2). Более широкий класс интегрируемых моделей можно получить, беря в качестве $r(u)$ любое решение классического уравнения Янга–Бакстера [4,5], помимо (I.I2). Заметим, что теория интегрируемых систем, связанных с уравнением (I.I3) должна быть устроена существенно проще, чем в случае уравнения (I.4) в силу того факта, что операторы $\mathcal{T}(u)$ образуют представление бесконечномерной алгебры Ли (I.I3), см. [6].

Вернемся, однако, к нашему $su(2)$-случаю. Чтобы решить вопрос об интегралах движения модели Годена (I.I0–I2), разложим $T(u)$ до порядка η^2:

$$T(u) = 1 + \eta\mathcal{T}(u) + \eta^2\mathcal{T}_2(u) + O(\eta^3)$$

и подставим в выражение (I.6а) для $\Delta(u)$

$$\Delta(u) = 1 + \eta\, tr\, \mathcal{T}(u) + \eta^2 \left(tr\, \mathcal{T}_2(u) + tr_{12} P^-_{12} \overset{1}{\mathcal{T}}(u) \overset{2}{\mathcal{T}}(u) + O(\eta^3) \right).$$

Воспользовавшись равенством $tr\, \mathcal{T}(u) = 0$, вытекающим из (I.10-11), и определением P^-_{12} (I.7), получим

$$\Delta(u) = 1 + \eta^2\, tr \left(\mathcal{T}_2(u) - \frac{1}{2} \mathcal{T}^2(u) \right) + O(\eta^3).$$

Сравнивая разложение $\Delta(u)$ с аналогичным разложением $t(u)$

$$t(u) = 2 + \eta^2\, tr\, \mathcal{T}_2(u) + O(\eta^3),$$

мы замечаем, что при вычитании $t(u) - \Delta(u)$ члены с $tr\, \mathcal{T}_2(u)$ сокращаются. Таким образом, в качестве производящей функции интегралов движения можно использовать величину $\hat{\tau}(u)$

$$\hat{\tau}(u) = \frac{1}{2} tr\, \mathcal{T}^2(u), \quad [\hat{\tau}(u), \hat{\tau}(v)] = 0 \quad \forall u, v. \tag{I.14}$$

Для представления (I.11) алгебры Ли (I.13) функция $\hat{\tau}(u)$ принимает вид

$$\hat{\tau}(u) = g^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{H}_n}{u - \delta_n} + \sum_{n=1}^{N} \frac{l_n(l_n + 1)}{(u - \delta_n)^2}, \tag{I.15}$$

где N независимых коммутирующих гамильтонианов $\hat{H}_n$ квадратичны по спинам и имеют вид

$$\hat{H}_n = \operatorname*{res}_{u = \delta_n} \hat{\tau}(u) = 2g S_n^3 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{2 S_n^\alpha S_m^\alpha}{\delta_n - \delta_m}. \tag{I.16}$$

Оператор

$$\langle S^3 \rangle = \sum_{n=1}^{N} S_n^3 \tag{I.17}$$

также является интегралом движения и получается как линейная комбинация $\hat{H}_n$

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n = 2g \langle S_n^3 \rangle. \tag{I.18}$$

Заметим, что при $g = 2$, ($su(2)$- инвариантный случай), гамильтонианы $\hat{H}_n$ становятся зависимыми ввиду (I.18), и $\langle S^3 \rangle$ представляет собой недостающий N -ый интеграл движения. В $su(2)$ - инвариантном случае сохраняется также полный спин

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left(\sum_{n=1}^{N} S_n^\alpha \right)^2 = \sum_{n=1}^{N} l_n (l_n + 1) + \sum_{n=1}^{N} \delta_n \hat{H}_n. \tag{I.19}$$

Интересно, что в величине $\hat{\tau}(u)$ (I.15) смешаны собственно интегралы движения (вычеты в полюсах $u=\delta_n$) и операторы Казимира (главные части в полюсах 2-го порядка). Это отличает линейный случай (I.I3) от квадратичного (I.4), где $t(u)$ и $\Delta(u)$ независимо выражаются через $T(u)$.

Задача определения совместного спектра операторов $\widehat{H}_n$ (или, что то же самое, спектра $\hat{\tau}(u)$) была решена М.Годеном с помощью координатного анзаца Бете [I,2], а затем и с помощью алгебраического анзаца Бете в рамках КМОЗ [3]. Хотя Годен рассматривал только случай $g=0$, добавка $g\neq 0$ ничего не меняет в схеме алгебраического анзаца Бете. Собственные векторы оператора $\hat{\tau}(u)$ ищутся в виде

$$|v_1,\dots,v_M\rangle = \mathcal{B}(v_1)\dots\mathcal{B}(v_M)|0\rangle, \tag{I.20}$$

где $\mathcal{B}(v)$ – матричные элементы $\mathcal{T}(v)$ (I.IIб), которые в силу (I.I3) коммутируют между собой, а вакуум $|0\rangle$ определяется условием

$$C(u)|0\rangle = 0 \quad \forall u. \tag{I.2I}$$

Чтобы $|v_1,\dots,v_M\rangle$ был собственным вектором $\hat{\tau}(u)\,\forall u$, параметры v_m должны удовлетворять системе алгебраических соотношений

$$\Lambda(v_m) = \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{M} \frac{1}{v_m - v_k}, \quad m=1,\dots,M; \tag{I.22}$$

где $\Lambda(u)$ – собственное значение матричного элемента $\mathcal{A}(u)$ (I.IIб) на вакууме $|0\rangle$

$$\mathcal{A}(u)|0\rangle = \Lambda(u)|0\rangle, \quad \Lambda(u) = g + \sum_{n=1}^{N} \frac{l_n}{u-\delta_n}. \tag{I.23}$$

Соответствующее собственное значение $\tau(u)$ оператора $\hat{\tau}(u)$ имеет вид

$$\tau(u) = \left(\chi(u) - \Lambda(u)\right)^2 + \frac{d}{du}\left(\chi(u) - \Lambda(u)\right), \tag{I.24}$$

где

$$\chi(u) = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{u-v_m} = \frac{q'(u)}{q(u)}, \quad q(u) = \prod_{m=1}^{M}(u-v_m) \tag{I.25}$$

Уравнения (I.22) и (I.24) эквивалентны, как заметил Годен [2,3] следующему дифференциальному уравнению типа Ламэ для многочлена $q(u)$ (I.25):

$$q'' - 2\Lambda q' + (\Lambda^2 - \Lambda')q = \tau q \qquad (I.26)$$

или, в силу (I.15),

$$q''(u) - 2\left(g + \sum_{n=1}^{N} \frac{l_n}{u-\delta_n}\right) q'(u) + \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{u-\delta_n}\right) q(u) = 0\,, \qquad (I.27a)$$

где

$$a_n = -H_n + 2l_n\left(g + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N} \frac{l_m}{\delta_n - \delta_m}\right), \qquad (I.27б)$$

а H_n - собственные значения операторов $\hat{H}_n$. Уравнение (I.22) легко вывести из (I.26), разделив обе части на $q(u)$ и взяв вычет в полюсе $u = v_m$.

Уравнения (I.22) и (I.24) можно вывести непосредственным, хотя и несколько громоздким, образом, действуя оператором $\hat{\tau}(u)$ (I.14) на вектор $|v_1,\dots,v_M\rangle$ (I.20) и используя коммутационные соотношения (I.13), см. [3], а можно получить и просто из аналогичных соотношений для $su(2)$ -цепочки (I.I)-(I.4) [4]

$$\frac{\Delta_+(v_m)}{\Delta_-(v_m)} = \prod_{\substack{k=1\\ k\neq m}}^{M} \frac{v_m - v_k + \eta}{v_m - v_k - \eta}\,, \qquad (I.28)$$

$$t(u)q(u) = \Delta_+(u)q(u-\eta) + \Delta_-(u)q(u+\eta) \qquad (I.29)$$

в пределе $\eta \longrightarrow 0$.

После опубликования работ [I,2,3] модель Годена долгое время почти не привлекала внимание исследователей, что, вероятно, незаслуженно, так как, ввиду простоты Ли-алгебраических коммутационных соотношений (I.13) в отличие от квадратичных соотношений (I.4), эта модель необычайно удобна для опробования новых подходов к вполне интегрируемым квантовым моделям. Так, именно для модели Годена впервые были вычислены нормы собственных функций и корреляторы спиновых операторов [2,3] - результаты, которые в квадратичном случае были получены много позднее [7].

В настоящей работе задача нахождения спектра интегралов движения для модели Годена решается с помощью предложенного в [8,9] метода разделения переменных или "функционального анзаца Бете" (последнее название ставит этот метод в один ряд с т.н. "координатным", "алгебраическим" и "аналитическим" [4,5] анзацами Бете). Простота модели позволяет полностью решить вопрос описания пространства состояний и исследовать строение собственных функций операторов $\hat{\tau}(u)$.

2. Функциональный анзац Бете

Идея функционального анзаца Бете состоит в том, чтобы найти такую реализацию представления $\mathcal{T}(u)$ (I.IIб) алгебры Ли (I.I3) в подходящем функциональном пространстве, в которой производящая функция $\hat{\tau}(u)$ (I.I4) имела бы вид, позволяющий провести разделение переменных и свести задачу нахождения спектра $\hat{\tau}(u)$ к одномерной спектральной задаче вида (I.27). Полином $q(u)$ играет при этом роль волновой функции в новом представлении.

Опыт работы с моделями $sl(2)$ -типа, связанными с R -матрицей (I.5), позволяет сформулировать следующий рецепт построения такого представления [8,9]. Заметим, что в силу (I.IIб) элемент $\mathcal{B}(u)$ матрицы $\mathcal{T}(u)$ представляет собой рациональную по u функцию с N простыми полюсами $u=\delta_n$ и $(N-1)$ нулем, а в силу (I.I3) операторы $\mathcal{B}(u)$ образуют коммутативное семейство

$$[\mathcal{B}(u_1), \mathcal{B}(u_2)] = 0 \qquad \forall u_1, u_2 . \tag{2.I}$$

Это позволяет ввести взаимно коммутирующие операторы x, y_j $(j=1,\dots,N-1)$, как асимптотику

$$\mathcal{B}(u) = u^{-1}x + O(u^{-2}), u \to \infty \tag{2.2}$$

и нули

$$\mathcal{B}(y_j) = 0, \quad j=1,\dots,N-1. \tag{2.3}$$

функции $\mathcal{B}(u)$. Присваивание u операторного значения в (2.3) допустимо ввиду коммутативности (2.I). Тем самым, $\mathcal{B}(u)$ реализуется как оператор умножения

$$\mathcal{B}(u) = x\frac{(u-y_1)\dots(u-y_{N-1})}{(u-\delta_1)\dots(u-\delta_N)} \tag{2.4}$$

в пространстве функций на совместном спектре операторов x, $\{y_j\}_1^{N-1}$. При этом возникают следующие задачи:

а) Спектральный анализ коммутативного семейства $x, \{y_j\}_1^{N-1}$ или $\mathcal{B}(u)$.

б) Описание пространства функций на совместном спектре $x, \{y_j\}_1^{N-1}$.

в) Реализация в $\{x,y\}$ - представлении операторов $\hat{\tau}(u)$.

В квадратичном случае (I.4) решение задач а) и б) представляет определенную трудность. Для волчка Горячева-Чаплыгина [8] и цепочки Тоды [9] эти задачи удалось решить, с использованием, однако, специфических свойств этих моделей. Ниже мы получим исчерпывающее решение задач а)-в) для модели Годена, которое сведется к простой замене переменных.

Построим сначала реализацию представления $\mathcal{T}(u)$ для $N=1$.

ЛЕММА 2.I. Пусть $\ell \in \{1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$; $\mathbb{C}[x]$ - кольцо полиномов от перменной x с комплексными коэффициентами; $(x^{2\ell+1})$ - идеал в $\mathbb{C}(x)$, порождаемый мономом $x^{2\ell+1}$, то есть подкольцо всех полиномов, делящихся на $x^{2\ell+1}$; $K^{(\ell)} \equiv \mathbb{C}[x]/(x^{2\ell+1})$ - соответствующее фактор-кольцо, которое удобно понимать как кольцо функций на точке $x=0$ кратности $2\ell+1$ (пространство струй [10]), то есть как коммутативную алгебру над $\mathbb{C}$, порожденную образующей x и соотношением $x^{2\ell+1}=0$.

Тогда операторы

$$\begin{cases} S^3 = -x\dfrac{d}{dx} + \ell \\ S^- = x \\ S^+ = -x\dfrac{d^2}{dx^2} + 2\ell\dfrac{d}{dx} \end{cases} \tag{2.5}$$

а) корректно определены в кольце $K^{(\ell)}$, рассматриваемом как линейное пространство над полем $\mathbb{C}$;

б) реализуют представление алгебры Ли $sl(2)$ (I.I) изоморфное стандартному неприводимому представлению $sl(2)$ размерности $(2\ell+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения а) сводится к проверке инвариантности идеала $(x^{2\ell+1})$ относительно дифференциальных операторов (2.5). Так, например,

$$S^+x^m = m(2\ell+1-m)x^{m-1} \vdots x^{2\ell+1} \quad \text{при} \quad x^m \vdots x^{2\ell+1}.$$

Для доказательства утверждения б) достаточно убедиться, что дифференциальные операторы (2.5) реализуют коммутационные соотношения (I.I) и что пространство $K^{(\ell)}$ (очевидно, $\dim K^{(\ell)} = 2\ell+1$) порождается действием S^- на старший вектор $q(x) \equiv 1 \in K^{(\ell)}$.

Заметим, что $x^{2\ell+1}$ является минимальным аннулирующим многочленом нильпотентного оператора S^-: $(S^-)^{2\ell+1}=0$. Пространство $K^{(\ell)}$ можно поэтому рассматривать как кольцо функций на спектре S^-, состоящем из одной точки $x=0$ кратности $2\ell+1$.

Отметим также, что операторы (2.5) получаются из стандартной реализации $sl(2)$ дифференциальными операторами I-го порядка

[10] формальной заменой $x \leftrightarrow d/dx$.

Рассмотрим теперь представление $\mathcal{T}(u)$ общего вида (I.IIб). Реализуем операторы S_n^{α} дифференциальными операторами (2.5) по переменным $\{x_n\}_1^N$ в пространстве

$$K = \bigotimes_{n=1}^{N} K^{(l_n)},$$

которое есть не что иное, как факторкольцо

$$K = \mathbb{C}\,[x_1, \dots, x_n]/X \tag{2.6}$$

кольца $\mathbb{C}\,[x_1,\dots,x_N]$ полиномов от $\{x_n\}_1^N$ по идеалу X , заданному базисом

$$X = \left(x_1^{2l_1+1}, x_2^{2l_2+1}, \dots, x_N^{2l_N+1}\right). \tag{2.7}$$

Введем новые переменные $x, \{y_j\}_1^{N-1}$ уравнениями (2.2)-(2.3). Воспользовавшись равенствами (2.4), (I.IIб) и (2.5), можно выразить переменные $\{x_n\}$ через $x, \{y_j\}$

$$x_n \equiv S_n^- \equiv \operatorname*{res}_{u=\delta_n} \mathcal{B}(u) = x\prod_{j=1}^{N-1}(\delta_n - y_j)\Big/\prod_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N}(\delta_n - \delta_m). \tag{2.8}$$

Описание кольца K (2.6) в терминах переменных x , $\{y_j\}_1^{N-1}$ получается следующим образом. Пусть $\tilde{S}[x; y_1,\dots,y_{N-1}]$ – кольцо многочленов от x , $\{y_j\}_1^{N-1}$ вида

$$\sum_{m=0}^{M} x^m P_m(y_1,\dots,y_{N-1}) \in \tilde{S}[x; y_1,\dots,y_{N-1}], \tag{2.9}$$

где $P_m(y_1,\dots,y_{N-1})$ – симметрические по $\{y_j\}$ многочлены степени $\leqslant m$ по каждой из переменных y_j . Рассмотрим идеалы $\tilde{\mathcal{J}}_n \subset \tilde{S}[x; y_1,\dots,y_{N-1}]$

$$\tilde{\mathcal{J}}_n = \left(x^{2l_n+1}\prod_{j=1}^{N-1}(y_j - \delta_n)^{2l_n+1}\right), \tag{2.10}$$

$$\tilde{\mathcal{J}} = \left(\tilde{\mathcal{J}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{J}}_N\right). \tag{2.11}$$

Пусть

$$\tilde{\Omega} = \tilde{S}[x;y_1,\ldots y_{N-1}]/\tilde{\mathfrak{J}}. \tag{2.12}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Замена переменных $\{x_n\}_1^N \to x, \{y_j\}_1^{N-1}$ (2.8) индуцирует изоморфизм колец $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] \simeq \tilde{S}[x;y_1,\ldots,y_{N-1}]$ с одной стороны и идеалов $X \simeq \tilde{\mathfrak{J}}$ с другой стороны, а следовательно, и изоморфизм факторколец $K \simeq \tilde{\Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.8) и (2.9) с очевидностью следует, что $x_n(x,y_1,\ldots,y_{N-1}) \in \tilde{S}[x;y_1,\ldots,y_{N-1}]$ и, таким образом замена $x_n \to x_n(x,y_1,\ldots,y_{N-1})$ порождает гомоморфизм колец $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_N] \to \tilde{S}[x,y_1,\ldots,y_{N-1}]$. Обратимость этого гомоморфизма следует из того факта, что система N уравнений (2.8) позволяет выразить N независимых многочленов $x\sigma_m(y_1,\ldots,y_{N-1}) \in \tilde{S}[x,y_1,\ldots,y_{N-1}]$, где σ_m – элементарная симметрическая функция $\{y_j\}$, как линейные комбинации x_n. Изоморфизм идеалов X (2.7) и $\tilde{\mathfrak{J}}$ (2.10–II) устанавливается простой подстановкой (2.8) в (2.7).

Полученное выше описание пространства квантовых состояний $\tilde{\Omega}$ находится в полном согласии с результатами статьи [II], где структура представлений квадратичной алгебры (I.4) анализируется на основе алгебраического анзаца Бете. Действительно, бетевским состояниям $|v_1,\ldots,v_M\rangle$ (I.20) в силу (2.4) отвечают в $x,\{y_j\}$-представлении волновые функции вида

$$|v_1,\ldots,v_M\rangle \sim x^M \prod_{j=1}^{N-1} q(y_j), \tag{2.13}$$

где многочлен $q(y)$ дается формулой (I.25б). Кольцу $\tilde{S}[x;y_1,\ldots,y_{N-1}]$ соответствует на языке статьи [II] пространство представления "свободной матрицы монодромии", а факторизации по идеалу $\tilde{\mathfrak{J}}$ – факторизация по "максимальному инвариантному подпространству" свободной матрицы монодромии. Преимущество функционального анзаца Бете состоит, однако, в том, что становится ненужной гипотеза о существовании вакуума (I.2I) и в том, что уравнения (I.26) для полинома $q(y)$ получают естественную интерпретацию как уравнения разделения переменных для волновой функции (см. § 3).

Перейдем теперь к задаче описания оператора $\hat{\tau}(u)$ в переменных $x,\{y_j\}_1^{N-1}$. Прямолинейный, но ведущий к громоздким вычислениям путь состоит в том, чтобы, выразив из (2.8) производные $\partial/\partial x_n$ и подставив их в формулы (2.5) и (I.I5), получить выражение для $\hat{\tau}(u)$ как дифференциального оператора 2-го порядка по

$x, \{y_j\}_1^{N-1}$. Мы, однако, воспользуемся опытом работ [8,9] и достигнем цели более простым образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Оператор $\mathcal{A}(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\mathcal{A}(u)$ – рациональная функция параметра u с N простыми полюсами в точках $u=\delta_n$.

б) При $u \to \infty$

$$\mathcal{A}(u) = g + u^{-1}\langle S^3\rangle + O(u^{-2}), \tag{2.14а}$$

причем

$$\langle S^3\rangle = -x\frac{\partial}{\partial x} + \langle l\rangle, \tag{2.14б}$$

где

$$\langle l\rangle \equiv \sum_{n=1}^{N} l_n .$$

в) $$[\mathcal{A}(u)]_{u=y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} + \Lambda(y_j), \tag{2.15}$$

где $\Lambda(u)$ дается формулой (I.23б).

Последнее условие в) нуждается в пояснениях, так как необходимо определить, что значит подстановка операторного значения $u=y_j$ в операторнозначную функцию $\mathcal{A}(u)$. Здесь и далее мы будем считать, что $u=y_j$ подставляется в $\mathcal{A}(u)$ слева (ср. [8,9]), то есть, если $\mathcal{A}(u)$, как дифференциальный оператор по $x,\{y_j\}$ записать в виде

$$\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}_0(u) + \mathcal{A}_x(u)\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{A}_k(u)\frac{\partial}{\partial y_k}, \tag{2.16}$$

где $\mathcal{A}_0(u), \mathcal{A}_x(u)$ и $\mathcal{A}_k(u)$ – функции $u, x, \{y_j\}$, то по определению

$$[\mathcal{A}(u)]_{u=y_j} \equiv \mathcal{A}_0(y_j) + \mathcal{A}_x(y_j)\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N-1}\mathcal{A}_k(y_j)\frac{\partial}{\partial y_k} . \tag{2.17}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\mathcal{A}(u)$ – дифференциальный оператор I-го порядка. Обобщение на случай дифференциальных операторов высших порядков очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предложения 2.2. Пункт а) очевиден. Для доказательства пункта б) заметим, что асимптотика (2.14а) следует из (I.11б). Кроме того, в силу (I.17) и (2.5) имеем

$$\langle S^3\rangle \equiv \sum_{n=1}^{N} S_n^3 = \langle l\rangle - \sum_{n=1}^{N} x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

Доказательство (2.I4б) сводится, тем самым, к проверке равенства

$$x\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{n=1}^{N} x_n \frac{\partial}{\partial x_n} . \qquad (2.I8)$$

Действительно, из (2.8) следует, что $\frac{\partial x_n}{\partial x} = \frac{x_n}{x}$. Подставляя это выражение в равенство $\frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial x_n}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x_n}$, приходим к (2.I8). Аналогично доказывается пункт в). В силу (I.IIб) и (2.8) имеем

$$[\mathcal{A}(u)]_{u=y_j} = \Big[g - \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n^3}{u-\delta_n}\Big]_{u=y_j} \quad \Big[g - \sum_{n=1}^{N} \frac{l_n - x_n\frac{\partial}{\partial x_n}}{u-\delta_n}\Big]_{u=y_j} =$$

$$= \Lambda(y_j) - \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{y_j-\delta_n}\frac{\partial}{\partial x_n} .$$

Остается проверить равенство

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{y_j-\delta_n}\frac{\partial}{\partial x_n} , \qquad (2.I9)$$

которое, подобно равенству (2.I8), доказывается с помощью соотношения $\partial x_n/\partial y_j = x_n/(y_j-\delta_n)$ вытекающего из (2.8).

Нетрудно убедиться, что данные а)–в) определяют функцию $\mathcal{A}(u)$ однозначно, и с помощью интерполяционных формул (ср. [8,9]) можно получить для $\mathcal{A}(u)$ выражение в виде дифференциального оператора I-го порядка по $x, \{y_j\}^{N-1}$ с коэффициентами, линейными по x и рациональными по y_j. Для наших целей, однако, гораздо удобнее будет характеризовать $\mathcal{A}(u)$ непосредственно интерполяционной задачей а)–в).

ТЕОРЕМА 2.I. Оператор $\hat{\tau}(u)$ (I.I4–I5) удовлетворяет следующим условиям:

а) $\hat{\tau}(u)$ – рациональная функция параметра u с N полюсами в точках $u=\delta_n$ и главными частями $\hat{\tau}(u) \sim l_n(l_n+1)(u-\delta_n)^{-2}$, $u \sim \delta_n$

б) При $u \to \infty$

$$\hat{\tau}(u) = g^2 + u^{-1}\cdot 2g\langle S^3\rangle + O(u^{-2}) \qquad (2.20)$$

в)

$$[\hat{\tau}(u)]_{u=y_j} = \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - 2\Lambda(y_j) + \Lambda^2(y_j) - \Lambda'(y_j) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y_j} - \Lambda(y_j)\right)^2 = [A(u)_{u=y_j}]^2. \qquad (2.21)$$

В формуле (2.21), как и в (2.15), принято соглашение о подстановке $u = y_j$ слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия а) и б) легко проверяются с помощью выражения (1.15) для $\hat{\tau}(u)$. Перейдем к доказательству пункта в). Выразим с помощью (1.14) и (1.11б) $\hat{\tau}(u)$ через матричные элементы $\mathcal{T}(u)$:

$$\hat{\tau}(u) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tr}\mathcal{T}^2(u) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{A}^2(u) + \mathcal{D}^2(u) + \mathcal{B}(u)C(u) + C(u)\mathcal{B}(u)\right) \qquad (2.22)$$

Выражение (2.22) можно упростить, если заметить, что из $\operatorname{tr}\mathcal{T}(u) = 0$ следует равенство

$$\mathcal{D}(u) = -\mathcal{A}(u), \qquad (2.23)$$

а из (1.13) следует равенство

$$[\mathcal{B}(u), C(v)] = -\frac{1}{u-v}\left(\mathcal{D}(u) - \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v) - \mathcal{D}(v)\right) =$$

$$= \frac{2}{u-v}\left(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)\right),$$

которое при $v \to u$ превращается в равенство

$$[\mathcal{B}(u), C(u)] = 2\mathcal{A}'(u). \qquad (2.24)$$

Подставляя (2.23) и (2.24) в (2.22), получаем

$$\hat{\tau}(u) = \mathcal{A}^2(u) - \mathcal{A}'(u) + \mathcal{B}(u)C(u). \qquad (2.25)$$

При подстановке в (2.25) $u = y_j$ слева член с $\mathcal{B}(u)$ исчезает ввиду (2.3). Таким образом, чтобы доказать равенство (2.21), необходимо установить следующее тождество

$$[\mathcal{A}^2(u) - \mathcal{A}'(u)]_{u=y_j} = [\mathcal{A}(y_j)]^2. \qquad (2.26)$$

Вычислим сначала $[\mathcal{A}^2(u)]_{u=y_j}$. Возводя в квадрат выражение (2.16) для $\mathcal{A}(u)$ и подставляя слева $u = y_j$, получим, с учетом

(2.15),

$$[\mathcal{A}^2(u)]_{u=y_j}=\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}-2\Lambda(y_j)\frac{\partial}{\partial y_j}+\Lambda^2(y_j)-\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{A}(u)\right]_{u=y_j}. \quad (2.27)$$

Заметим теперь, что

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\mathcal{A}(u)_{u=y_j}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{A}(u)\right]_{u=y_j}+\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{A}(u)\right]_{u=y_j} \quad (2.28)$$

Выражая из (2.28) $\left[\frac{\partial}{\partial y_j}\mathcal{A}(u)\right]_{u=y_j}$ и подставляя в (2.27), мы получим, с учетом (2.15), равенство (2.26). На этом доказательство Теоремы 2.I закончено.

§ 3. Разделение переменных

В этом, заключительном параграфе мы изучим строение собственных функций семейства коммутирующих операторов $\hat{\tau}(u)$.

Рассуждая совершенно формально, можно прийти к заключению, что в силу (2.20) и (2.21) собственные функции $\hat{\tau}(u)$ должны иметь вид (2.13), где многочлен $q(y)$ степени M удовлетворяет дифференциальному уравнению (I.26), ср. [8,9]. Более аккуратное исследование, в частности, учет того факта, что пространство состояний Ω есть пространство струй, заставляет, как мы увидим ниже, внести определенные коррективы в этот вывод.

Работа с кольцом многочленов $\tilde{S}[x;y_1,\dots,y_{N-1}]$ (2.9) осложнена выделенным положением переменной x. Поэтому, чтобы сосредоточить внимание на разделении переменных y_j, мы введем переменные y_j иначе, чем в § 2.

Совершим в $\mathcal{L}$-операторе (I.10б) циклическую перестановку матриц Паули $\sigma^3\to\sigma^1\to\sigma^2\to\sigma^3$. Оператор $\hat{\tau}(u)$ от этого, очевидно, не изменится. Изменятся, однако, асимптотики элементов $\mathcal{A}(u)$ и $\mathcal{B}(u)$ матрицы $\mathcal{T}(u)$ (I.11б), именно, вместо (2.2) и (2.14а) мы будем иметь при $u\to\infty$

$$\mathcal{B}(u)=g+O(u^{-1}),\quad \mathcal{A}(u)=O(u^{-1}). \quad (3.1)$$

Вследствие (3.1а) рациональная функция $\mathcal{B}(u)$ будет иметь N нулей, и мы сможем определить N коммутирующих операторов $\{y_j\}_1^N$ из следующего условия, ср. (2.4)

$$\mathcal{B}(u)=g\,\frac{(u-y_1)\dots(u-y_N)}{(u-\delta_1)\dots(u-\delta_N)} \quad (3.2)$$

Замена переменных $\{x_n\}_1^N\longrightarrow\{y_j\}_1^N$ производится совершенно аналогично § 2. Аналог Теоремы 2.I формулируется точно так же, за тем исключением, что асимптотическое условие (2.20) заменяется на

$$\hat{\tau}(u) = g^2 + O(u^{-1}), \quad u \to \infty$$

и в условии (2.2I) индекс j у y_j пробегает значения от I до N.

Пространство состояний Ω описывается теперь как фактор-кольцо

$$\Omega = S[y_1, \ldots, y_N] / \mathcal{J} . \tag{3.3}$$

где $S[y_1,\ldots,y_N]$ – кольцо симметрических по y_j многочленов, а идеал $\mathcal{J} \subset S[y_1,\ldots,y_N]$ натянут на идеалы $\mathcal{J}_n$, ср. (2.I0)-(2.II)

$$\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_N), \quad \mathcal{J}_n = \left(\prod_{j=1}^{N} (y_j - \delta_n)^{2\ell_n + 1} \right). \tag{3.4}$$

Для дальнейшего нам понадобится ввести еще ряд полиномиальных колец и идеалов. Пусть

$$I_n = ((y - \delta_n)^{2\ell_n + 1}) \subset \mathbb{C}[y], \quad n = 1, \ldots, N;$$
$$F_n = \mathbb{C}[y] / I_n . \tag{3.5}$$

Факторкольцо F_n можно рассматривать как кольцо функций на $(2\ell_n + 1)$ -кратной точке $y = \delta_n$ (пространство струй [I0])

$$\psi^{(n)} \in F_n, \; \psi^{(n)} = \sum_{\alpha_n = 0}^{2\ell_n} \psi^{(n)}_{\alpha_n} (y - \delta_n)^{\alpha_n} . \tag{3.6}$$

Канонический гомоморфизм $\mathbb{C}[y] \to F_n$ имеет вид

$$q(y) \mapsto \psi^{(n)}, \quad \psi^{(n)}_{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_n!} \frac{d^{\alpha_n}}{dy^{\alpha_n}} q(y) \Big|_{y = \delta_n} . \tag{3.7}$$

Вследствие симметрии многочленов из $S[y_1, \ldots, y_N]$ по переменным $\{y_j\}^N$, кольцо Ω (3.3) можно рассматривать как кольцо функций (пространство струй) в точке $y_n = \delta_n$, $n = 1, \ldots, N$:

$$\psi \in \Omega, \quad \psi = \sum_{\alpha_1 = 0}^{2\ell_1} \ldots \sum_{\alpha_N = 0}^{2\ell_N} \psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} \prod_{n=1}^{N} (y_n - \delta_n)^{\alpha_n} \tag{3.8}$$

Таким образом, как линейное пространство над $\mathbb{C}$

$$\Omega \simeq F_1 \otimes F_2 \otimes \ldots \otimes F_N . \tag{3.9}$$

Займемся теперь исследованием дифференциального уравнения (I.27a). Зафиксируем значения параметров a_n. Уравнение (I.27a) имеет N регулярных особых точек $y = \delta_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ с показателями $0, (2\ell_n + 1)$ и иррегулярную (при $g \neq 0$) особую точку $y = \infty$ [I2]. Это означает, что в окрестности точки $y = \delta_n$ существует регулярное в этой точке решение

$$q^{(n)}(y) \sim (y - \delta_n)^{2\ell_n + 1} \tag{3.I0a}$$

и линейно независимое решение

$$\tilde{q}^{(n)}(y) \sim p(y) + \gamma_n q^{(n)}(y) \ln(y - \delta_n), \tag{3.I0б}$$

где $p(y)$ – регулярная в окрестности $y = \delta_n$ функция, причем $p(\delta_n) \neq 0$. Константа γ_n, вообще говоря, не равна нулю. В окрестности $y = \infty$ существует решение со степенной асимптотикой

$$q^{(\infty)}(y) \sim y^{\rho}, \quad \rho = \langle \ell \rangle - \langle S^3 \rangle = \frac{1}{2g} \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{3.IIa}$$

и линейно независимое решение

$$\tilde{q}^{(\infty)}(y) \sim e^{2gy} y^{2\langle \ell \rangle - \rho} \tag{3.IIб}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. Пусть для некоторого набора a_n, или, что то же самое, некоторого $\tau(u)$ существует ненулевое решение $\psi^{(n)}$ дифференциального уравнения (I.27a) в пространстве струй F_n (3.6), то есть, существует отрезок ряда Тейлора $\psi^{(n)} \neq 0$, удовлетворяющий уравнению (I.27a) с точностью до членов порядка $(y - \delta_n)^{2\ell_n}$. Тогда такое решение единственно с точностью до постоянного множителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя разложение (3.6) в дифференциальное уравнение (I.27a), мы получим систему рекуррентных соотношений [I2], позволяющих определить при $\psi_0^{(n)} \neq 0$ последовательно $\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}, \ldots$ и т.д. включая $\psi_{2\ell_n}^{(n)}$. Условие существования решения означает, что дополнительное уравнение на $\psi_{2\ell_n}^{(n)}$, получающееся в порядке $(y - \delta_n)^{2\ell_n}$, не противоречит предыдущим.

Теперь мы можем заняться изучением строения собственных функций операторов $\hat{\tau}(u)$.

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть $\Psi \in \Omega$ – собственный вектор операторов $\hat{\tau}(u)$ $\forall (u)$ с собственным значением $\tau(u)$

$$\hat{\tau}(u) \Psi = \tau(u) \Psi , \quad \Psi \neq 0. \tag{3.I2}$$

Тогда существует единственный с точностью до постоянных множителей набор ненулевых решений $\{\psi^{(n)} \in F_n\}_1^N$ дифференциального уравнения (I.27a), в смысле Предложения 3.I, такой, что

$$\Psi = \psi^{(1)} \otimes \psi^{(2)} \otimes \ldots \otimes \psi^N \tag{3.13}$$

в смысле изоморфизма (3.9).

Обратно, если $\{\psi^{(n)} \in F_n\}_1^N$ есть набор ненулевых решений дифференциального уравнения (I.27a) с одним и тем же $\tau(u)$, то вектор $\Psi \in \Omega$ вида (3.13) есть собственный вектор (3.12) операторов $\hat{\tau}(u)$ с тем же $\tau(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать Ψ как элемент пространства струй (3.9). Из (2.21) следует, что $\Psi(y_1,\ldots,y_N)$ удовлетворяет по переменной y_1 дифференциальному уравнению (I.27a) в пространстве струй F_1. Опираясь на свойство единственности (Предложение 3.I), получаем, что

$$\Psi(y_1,\ldots,y_N) = \psi^{(1)}(y_1)\,\tilde{\tilde{\Psi}}(y_2,\ldots,y_N).$$

Применяя последовательно то же рассуждение к переменным $y_2,\ldots,y_N$ приходим в результате к (3.12).

Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно заметить, что вектор Ψ вида (3.13), построенный по решениям $\psi^{(n)}$ уравнения (I.27a), удовлетворяет (I.27a) по каждой переменной y_j, а затем восстановить левую и правую части равенства (3.12) из интерполяционной задачи вида (2.20)-(2.21).

Таким образом, задача нахождения спектра $\hat{\tau}(u)$ эквивалентна серии одномерных спектральных задач вида (I.27a) в пространствах струй $F_n, n = 1,\ldots,N$. Именно это и называется разделением переменных.

Хотя Теорема 3.I дает исчерпывающее описание строения собственных функций $\hat{\tau}(u)$, оно выглядит непривычно, и желательно выяснить его связь с полиномиальными решениями $q(y) \in \mathbb{C}[y]$ дифференциального уравнения (I.27a), в терминах которых формулируется алгебраический анзац Бете (см. § I).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть для некоторого $\tau(u)$ существует набор $\{\psi^{(n)} \in F_n\}_1^N$ ненулевых решений дифференциального уравнения (I.27a) в пространствах струй F_n. Тогда существует единственное с точностью до постоянного множителя полиномиальное решение $q(y)$ уравнения (I.27a) с тем же $\tau(u)$, такое что образы $q(y)$ при канонических гомоморфизмах $\mathbb{C}[y] \to F_n$ (3.7) пропорциональны $\psi^{(n)}$

$$q(y) \longmapsto c_n \psi^{(n)} \tag{3.14}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения $\psi^{(n)} \in F_n$ означает [12] исчезновение логарифмического члена в $\tilde{q}^{(n)}(y)$, то есть $\gamma_n = 0$ (3.10б). Тем самым, любое решение дифференциального уравнения (1.27а) регулярно в окрестности $\delta_n\ \forall n$, а значит, и во всей плоскости $\mathbb{C}$. В частности, решение $q^{(\infty)}(y)$ (3.11а) со степенной асимптотикой является целой функцией. Однако, целая функция со степенной асимптотикой может быть только полиномом. Выполнение условия (3.14) вытекает из того факта, что образы $q(y)$ при канонических гомоморфизмах $\mathbb{C}[y] \to F_n$ удовлетворяют уравнению (1.27а) и из свойства единственности (Предложение 3.1). Единственность полинома $q(y)$ следует из того, что линейно независимое решение $\tilde{q}^{(\infty)}(y)$ (3.11б) имеет экспоненциальную асимптотику. Здесь существенно, что $q \neq 0$.

Заметим, что некоторые, а может быть и все из коэффициентов C_n в (3.14) могут оказаться равными нулю. Будем называть собственный вектор $\Psi \in \Omega$ операторов $\hat{\tau}(u)$ неособым, если отвечающий ему по Теореме 3.1 набор $\{\psi^{(n)} \in F_n\}_1^N$ порождает по Предложению 3.2 полином $q(y)$ с ненулевыми коэффициентами (3.14).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\Psi \in \Omega$ - неособый собственный вектор операторов $\hat{\tau}(u)\ \forall u$ с собственным значением $\tau(u)$. Тогда существует единственное с точностью до постоянного множителя полиномиальное решение $q(y)$ дифференциального уравнения (1.27а) с тем же $\tau(u)$, такое что полином

$$Q(y_1, \dots, y_N) = \prod_{j=1}^{N} q(y_j) \in S[y_1, \dots, y_N] \qquad (3.15)$$

принадлежит классу эквивалентности $\Psi \in \Omega = S[y_1, \dots, y_N] / \mathcal{J}$. Обратно, если полином $q(y)$ удовлетворяет уравнению (1.27а) и не имеет в точках $y = \delta_n$ нулей порядка $\geqslant 2\ell_n + 1$ соответственно, то полином Q (3.15) является собственным вектором операторов $\hat{\tau}(u)$ в $S[y_1, \dots, y_N]$, а следовательно, и в Ω, причем образ Q в Ω ненулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО не составляет труда.

Вопрос о строении особых собственных векторов Ψ остается открытым. Проблема состоит в изучении собственных функций оператора $\hat{\tau}(u)$ не в пространстве $\Omega = S[y_1, \dots, y_N] / \mathcal{J}$, а в более широком пространстве $S[y_1, \dots, y_N]$. При этом возможна ситуация, когда собственный вектор оператора $\hat{\tau}(u)$ в пространстве Ω окажется присоединенным вектором в пространстве $S[y_1, \dots, y_N]$. Это может произойти при совпадении собственного значения оператора $\hat{\tau}(u)$ в пространстве Ω с одним из его собственных значений в идеале $\mathfrak{J}$. Примеры аналогичных ситуаций рассматривались в [13] (т.н. "проблема полноты анзаца Бете"). В любом случае, наличие особого собственного вектора составляет исключение и, вероятно, может быть устранено малым шевелением параметров.

Заключение

Исключительная простота модели Годена позволила нам сравнительно простыми средствами получить почти полную информацию о пространстве состояний и спектре интегралов движения. Получение аналогичных результатов в квадратичном (1.4) случае потребует существенно больших усилий. Основная трудность связана с отсутствием явной замены переменных типа (2.8). Тем не менее, описание пространства состояний и спектра не должны сильно отличаться от полученных в настоящей работе. Автор благодарен И.В.Комарову, А.Г.Рейману и М.А.Семенову-Тян-Шанскому за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. G a u d i n M. Modèles exacts en mécanique statistique: la méthode de Bethe et ses généralisations. - Note CEA 1559 (1) - (1972) et 1559 (2) - (1973). CEN-Saclay.
2. G a u d i n M. Diagonalisation d'une class d'hamiltoniens de spin. - J. de Physique, 1976, v.37, n.10, p.1087-1098.
3. G a u d i n M. La fonction d'onde de Bethe. Paris: Masson, 1983.
   Г о д е н М. Волновая функция Бете. М.: "Мир", 1987.
4. F a d d e e v L.D. Integrable models in 1+1 dimensions. - In: Les Houches lectures (1982), eds. Zuber J.-B., Stora R North-Holland, 1984, p.719-756.
5. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. The quantum spectral transform method. Recent developments. - In: Integrable quantum field theories. Eds. J.Hietarinta, C.Montonen. (Lect. Not.Phys., v.151). Springer, 1982, p.61-119.
6. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Классические r-матрицы и квантование. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ,т.133). Л.: "Наука", 1984, с.228-235.

7. I z e r g i n A.G., K o r e p i n V.E. The quantum inverse scattering method approach to correlation functions. - Commun.Math.Phys., 1984, v.94, n.1, p.67-92.

8. С к л я н и н Е.К. Волчок Горячева-Чаплыгина и метод обратной задачи рассеяния. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133).Л.: "Наука", 1984, с.236-257.

9. S k l y a n i n E.K. The quantum Toda chain. - In: Nonlinear equations in classical and quantum field theory. Ed. by H.Sanchez. (Lect.Not.Phys., v.226). Springer, 1985, p.196-233.

10. Ш а ф а р е в и ч И.Р. Основные понятия алгебры. - В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. т.II (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1985, с.5-288.

11. Т а р а с о в В.О. Неприводимые матрицы монодромии для R-матрицы XXZ-модели и решеточные локальные квантовые гамильтонианы. - Теор.мат.физ., 1985, т.63, № 2, с.175-196.

12. С м и р н о в В.И. Курс высшей математики, т.Ш, часть 2-я. М.: "Наука", 1974.

13. А в д е е в Л.В., В л а д и м и р о в А.А. Об исключительных решениях уравнений анзаца Бете. Теор.мат.физ., 1986, т.69, № 2, с.163-174.

Separation of variables in the Gaudin model. Sklyanin E.K. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanichs. IX. (Zap.nauchn. semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.151-169.

The separation of variables is performed for the Gaudin model (a degenerate case of the quantum integrable magnetic SU(2)-chain) by means of an explicit change of coordinates. The space of quantum states is described in terms of ideals in polynomial rings. The structure of the eigenfunctions is studied. Bibl. - 13.

On scattering data for nonstationary Dirac equation. Kulish P.P., Lipovsky V.D., Shirokov A.V. - In: Differential geometry, Lie groups and mechanics.IX. (Zap.nauchn.semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.170-175.

An arbitrariness in the definition of scatteting data for the auxiliary linear problem of the Davey-Stewartsson-I equation is observed. Relations between different scattering data are described and the conjugation matrix for the nonlocal Riemann problem is found.

П.П.Кулиш, В.Д.Липовский, А.В.Широков

О ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Гамильтоновы аспекты составляют значительную часть теории нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) с одной пространственной переменной, интегрируемых методом обратной задачи [I]. В последнее время растет интерес и к гамильтоновости интегрируемых НЭУ в размерности 2 + I [2-9]. С помощью различных подходов: теоретико-группового [2,3], вариационного [4-6,9], временных асимптотик [7,8], в этих работах обсуждаются: уравнение Кадомцева-Петвиашвили (КП)

$$\partial_t u = -\partial_x^3 u + 6u\partial_x u + 3\alpha^2\partial_x^{-1}\partial_y^2 u, \qquad (I)$$

$u(x,y,t)\in\mathbb{R}$, $\alpha^2=-1$ для КП-I и $\alpha^2=1$ для КП-П; уравнение Деви-Стюартсона (ДС)

$$\begin{aligned} &i\partial_t q = -(\partial_x^2+\alpha^2\partial_y^2)q-(v+2|q|^2)q, \\ &(\partial_x^2-\alpha^2\partial_y^2)v = -4\partial_x^2(|q|^2), \end{aligned} \qquad (2)$$

$q(x,y,t)\in\mathbb{C}$, $\alpha^2=1$ для ДС-I и $\alpha^2=-1$ для ДС-П; система трех волн

$$\begin{aligned} &\partial_t u_t = (\vec{v}_1\vec{\nabla})u_1 + ic\,u_2u_3, \\ &\partial_t u_2 = (\vec{v}_2\vec{\nabla})u_2 + ic\,\bar{u}_3u_1, \\ &\partial_t u_3 = (\vec{v}_3\vec{\nabla})u_3 + ic\,\bar{u}_2u_1, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$u_j(x,y,t)\in\mathbb{C}, \quad (\vec{v}_j\vec{\nabla}) = v_j^x\partial_x + v_j^y\partial_y, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Соответствующие вспомогательные линейные задачи имеют вид:

$$(\alpha\partial_y + \partial_x^2 + u(x,y))\psi = 0, \qquad (4)$$

где $\psi(x,y,k)\in\mathbb{C}$ для КП;

$$(\partial_y - \alpha\sigma_3\partial_x - Q)\psi = 0, \quad Q=\begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (5)$$

для уравнения ДС; **а для системы трех волн**

$$(\partial_y - A\partial_x - Q)\psi = 0, \qquad (6)$$

где $A=\mathrm{diag}\,(a_1,a_2,a_3)$, $a_j\in\mathbb{R}$, 3х3 матрица Q строится по $u_j(x,y)$ и a_ℓ. Во всех этих задачах аналог спектрального параметра из метода обратной задачи появляется при построении того или иного полного набора решений $\psi(x,y,k)$. В соответствии с выбранным набором определяются спектральные данные (или данные рассеяния), которые участвуют в решении обратной задачи - восстановления по ним потенциалов линейных систем. В упомянутых работах [4-9] выбираются различные данные рассеяния, что затрудняет сравнение результатов. Цель этой заметки - перечислить на примере нестационарного уравнения Дирака (5) возможные данные рассеяния и установить связь между ними. Отметим, что проблема выбора данных рассеяния и связи их с данными обратной задачи, обсуждающаяся в [10,11], восходит к первым исследованиям по обратной задаче теории рассеяния для уравнения Шредингера с не сферически-симметричным потенциалом [12].

Система уравнений (5) с заданными асимптотиками эквивалентна интегральным уравнениям $r=(x,y)$, $q(r)\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$

$$\psi(r)=\psi_0(r)+\int d^2r'\, g(r,r')\,Q(r')\,\psi(r'), \tag{7}$$

где $\psi_0(r)$ - решение системы ($\alpha=1$, ДС-I)

$$L_0\psi_0(r)=2\begin{pmatrix}-\partial_\eta & 0\\ 0 & \partial_\xi\end{pmatrix}\psi_0(r)=0,\quad \xi=x+y,\ \eta=x-y,$$

а $g(r,r')$ - функция Грина: $L_0 g(r,r')=\delta(r-r')$.

Произвол в выборе функций Грина

$$g(r)=\begin{pmatrix}\delta(\xi)(\beta_1\theta(-\eta)-\beta_2\theta(\eta)) & 0\\ 0 & \delta(\eta)(\gamma_1\theta(\xi)-\gamma_2\theta(-\xi))\end{pmatrix},$$

где $\beta_1+\beta_2=\gamma_1+\gamma_2=1$, частично устраняется требованием аналитичности решения $\psi(r,k)$ в какой-либо области параметра k, если в качестве решения свободной системы используются $\psi_0^t=(\exp(ik\xi),0)^t$ или $\psi_0^t=(0,\exp(ik\eta))^t$ (t означает транспонирование). Поскольку $\beta_2=1-\beta_1$, $\gamma_2=1-\gamma_1$, то оставляем только параметры β_1 и γ_1, опуская в дальнейшем их индексы, но добавляя знаки $+,-$ в зависимости от того, в какой полуплоскости $\operatorname{Im}k\gtrless 0$ аналитично соответствующее решение. Так $\gamma=0$ дает аналитический в области $\operatorname{Im}k>0$ столбец решение и $\beta\equiv\beta_+$ -параметр, а $\beta=1$ - столбец, аналитический там же и $\gamma\equiv\gamma_+$ -параметр. Аналогично, для полного набора решений $\psi_-(r,k)$, аналитических в нижней полуплоскости, имеем два параметра β_- при $\gamma=1$ и γ_- при $\beta=0$.

Построенные решения имеют следующие асимптотики соответственно: $\xi\to\pm\infty$, $\eta\to\pm\infty$

$$\psi_+(r,k)\simeq\begin{pmatrix}e^{ik\xi} & 0\\ 0 & e^{ik\eta}+\gamma_+ d_+(\eta,k)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}e^{ik\xi} & 0\\ c_+(\eta,k) & e^{ik\eta}+(\gamma_+-1)d_+(\eta,k)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{ik\xi}+(\beta_+-1)a_+(\xi,k) & 0 \\ 0 & e^{ik\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{ik\xi}+\beta_+ a(\xi,k), & b_+(\xi,k) \\ 0 & e^{ik\eta} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где для краткости опущены индексы β_+ и γ_+ в функциях a_+ , b_+ , c_+ , d_+ и аналогично,

$$\psi_-(r,k)=\begin{pmatrix} e^{ik\xi} & 0 \\ c_-(\eta,k) & e^{ik\eta}+\gamma_- d_-(\eta,k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{ik\xi} & 0 \\ 0 & e^{ik\eta}+(\gamma_+-1)d_-(\eta,k) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} e^{ik\xi}+(\beta_--1)a_-(\xi,k) & b_-(\xi,k) \\ 0 & e^{ik\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{ik\xi}+\beta_- a_-(\xi,k) & 0 \\ 0 & e^{ik\eta} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Выражения для функций $a,\dots,d$ через решения можно получить, рассматривая предельные переходы в соответствующих интегральных уравнениях. Совершая преобразование Фурье по оставшейся в функциях $a,\dots,d$ пространственной переменной и записывая их в виде 2x2 матрицы, получаем компактное выражение

$$T_\pm(\ell,k)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_\pm(\ell,k)=\frac{\pm 1}{2\pi}\int d^2 r\, e^{-i\ell(x+\sigma_3 y)}\sigma_3 Q(r)\psi_\pm(r,k), \tag{10}$$

в котором из аргументов опущены соответствующие параметры $\beta_\pm$ и $\gamma_\pm$.

Теперь наша задача найти связь между T с различными параметрами и между данными, входящими в обратную задачу, которая решается для системы (5) в случае $\alpha=1$ с помощью нелокальной задачи Римана [10,11].

$$\psi_+(r,k)=\psi_-(r,k)+\int d\ell\, \psi_-(r,\ell)F(\ell,k). \tag{11}$$

Искомая связь между T в силу (10) будет найдена, если мы установим связь различных ψ . Последняя описывается ядром матричного интегрального оператора u :

$$\hat{\psi}_+(r,k)=\int \psi_-(r,\ell)\, u(\ell,k)\, d\ell. \tag{12}$$

Значок над ψ введен для отличия одних параметров $(\hat{\beta},\hat{\gamma})$ от других (β,γ) . Кроме этого, мы найдем u только для наборов ψ_+ , т.к. для ψ_- связь устанавливается тем же способом. Рассматривая в (12) различные асимптотики ($\xi \to \pm\infty$, $\eta \to \pm\infty$) и используя для $\hat{\varphi}_+$, φ_+ формулы (8) $\hat{\beta}$, β и $\gamma, \hat{\gamma}$, для четырех ядер $u_{ij}(\ell,k)$ получаем

$$
\begin{aligned}
&u_{11}(\ell,k)=(I+(\beta-\hat{\beta})a_+)^{-1}(\ell,k),\ u_{12}(\ell,k)=0,\\
&u_{22}(\ell,k)=(I+(\gamma-\hat{\gamma})d_+)^{-1}(\ell,k),\ u_{21}(\ell,k)=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В частности, u_{22} и u_{21} вычисляются из анализа асимптотик $\xi \to \pm\infty$, в предположении обратимости интегральных операторов $\delta(\ell-k)+\gamma d(\ell,k)$ и $\delta(\ell-k)+(\gamma-1)d(\ell,k)$. Отметим, что получившийся оператор преобразования U решений с фиксированной аналитичностью является диагональным по матричным индексам.

Найдем теперь связь элементов матрицы сопряжения F (данных обратной задачи) из (11) с данными рассеяния (10). Для этого можно использовать как интегральные уравнения (7) для $\varphi_\pm$ и нелокальную задачу Римана (11), так и сравнение асимптотик (8), (9) в полной аналогии с предыдущим случаем. Так из асимптотик $\xi \to -\infty$ получаем

$$
\begin{aligned}
&F_{22}(\ell,k)=(I+(\gamma_--1)d_-)^{-1}((\gamma_+-1)d_+-(\gamma_--1)d_-)(\ell,k)\\
&F_{21}(\ell,k)=(I+(\gamma_--1)d_-)^{-1}c_+(\ell,k),
\end{aligned}
\tag{14}
$$

а из асимптотик $\eta \to -\infty$ получаем

$$
\begin{aligned}
&F_{11}(\ell,k)=(I+\beta_-a_-)^{-1}(\beta_+a_+-\beta_-a_-)(\ell,k),\\
&F_{12}(\ell,k)=(I+\beta_-a_-)^{-1}b_+(\ell,k).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Другие асимптотики дают дополнительные связи между данными рассеяния $T_\pm(\ell,k)$.

Например, выбор в функции Грина $g(\tau)$ констант $\beta_2=0$, $\gamma_1=0$ для φ_+ и $\beta_1=0$, $\gamma_2=0$ для φ_- приводит к данным рассеяния $T_\pm(\ell,k)$ из работы [5], скобки Пуассона которых образуют квадратичную алгебру и допускают запись в виде соотношения Янга-Бакстера-Фаддеева. В этом случае $F(\ell,k)$ совпадает с $T_+(\ell,k)$. В работах [8,11] используются константы $\beta_+=1$, $\beta_-=1$, $\gamma_+=1$, $\gamma_-=1$ и получается следующее выражение для $F(\ell,k)$

$$
F(\ell,k)=\begin{pmatrix} -\int dp\, b_-(\ell,p)c_+(p,k) & b_-(\ell,k) \\ c_+(\ell,k) & 0 \end{pmatrix}.
$$

Выбор $\beta_+=0$, $\beta_-=0$, $\gamma_+=1$, $\gamma_-=1$ ведет к данным обратной задачи $F(\ell,k)$ с нулевой диагональю:

$$F(\ell,k)=\begin{pmatrix} 0 & b_+(\ell,k) \\ c_+(\ell,k) & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Если операторы преобразований (12) для решений $\psi_\pm$ и $\hat{\psi}_\pm$ обозначить $U_\pm$, а к матрице сопряжения F в нелокальной задаче Римана (11) добавить операторную единицу $\Phi = I + F$, то преобразования данных рассеяния $T_\pm$ и оператора сопряжения Φ при изменении затравочной функции Грина $g(\tau)$ следующие

$$\hat{T}_\pm = T_\pm U_\pm , \qquad \hat{\Phi} = U_-^{-1} \Phi U_+ . \tag{18}$$

Таким образом, данные рассеяния с любыми константами можно выразить через данный набор, например из [5], где $\beta_+ = 1$, $\gamma_+ = 0$, $\beta_- = 0$, $\gamma_- = 1$. Получающиеся выражения

$$\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}_+ (\ell,k) = \int dp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_+ (\ell,p) \begin{pmatrix} (I+(1-\hat{\beta})a)^{-1} & 0 \\ 0 & (I-\hat{\gamma} d)^{-1} \end{pmatrix} (p,k) \tag{19}$$

позволяют вычислить скобки Пуассона нового набора по известным [5] и попытаться упростить их.

Другая трудность, наряду с анализом скобок Пуассона и построения переменных действия - угол, связана с получением формул следов, выражающих интегралы движения в терминах данных рассеяния и/или данных обратной задачи (оператора сопряжения) [1]. Для этого можно использовать дополнительные уравнения типа связей, возникающие при анализе асимптотик ($\xi \to \pm\infty$, $\eta \to \pm\infty$) и вычислении $F(\ell,k)$ (14), (15) и не приведенные в тексте. При выборе данных рассеяния из [5] эти уравнения имеют вид

$$T_+(p,k) + T_-(p,k) + \int d\ell \, T_-(p,\ell)\, T_+(\ell,k) = 0$$

или

$$S_- \circ S_+ = I, \qquad S_\pm(\ell,k) = \delta(\ell-k)\cdot I + T_\pm(\ell,k).$$

Дополнительная возможность расширения набора данных рассеяния связана с добавкой к функции Грина $g(\tau)$ специального решения свободного уравнения $diag(1/\xi,\ 1/\eta)$, напоминающего функцию Грина системы (5) с $\alpha = i$, когда решение обратной задачи использует $\bar{\partial}$ -проблему [6,9] и ведет к линейным скобкам Пуассона [6]. Эти возможности будут предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. - М.: Наука, 1986, 528 с.
2. Р е й м а н А.Г., С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Гамильтонова структура уравнений типа Кадомцева-Петвиашвили. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.6. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.133), 1984, с.212-227.
3. Н и ж н и к Л.П., П о ч и н и й к о М.Д. Пространственно-двумерное нелинейное уравнение Шредингера как интегрируемая гамильтонова система. - Препринт 85-24, ИМ АН УССР, Киев, 1985, 22 с.
4. Л и п о в с к и й В.Д. Гамильтонова структура уравнения Кадомцева-Петвиашвили П в классе убывающих данных Коши. - Функц.анализ и его прил., 1986, т.20, в.4, с.35-45.
5. К у л и ш П.П., Л и п о в с к и й В.Д. О гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи для уравнения Дэви-Стюартсона. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и стат.физики.7 (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.161), 1987, с.54-71.
6. Л и п о в с к и й В.Д. Гамильтонов подход к уравнению Дэви-Стюартсона П. - Вестн.ЛГУ, сер."Физика и химия", 1987, № 4, с.67-70.
7. J i a n g Z., B u l l o u g h R.K., M a n a k o v S.V. Complete integrability of the KP equations in 2+1 dimensions. - Physica D, 1986, v.18, p.305-307.
8. J i a n g Z. Integrable systems and integrability. - Ph.D. Thesis.Manchester, UMIST, 1987, 171 p.
9. S c h u l t z C.L., A b l o w i t z M.J., B a r Y a a c o v D. Davey-Stewartson I - A quantum 2+1 dimensional integrable system. - Preprint Clarkson University, Potsdam, USA, 1987, 9 p.
10. M a n a k o v S.V. The inverse scattering transform for the time-depend Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation. - Physica D, 1981, v.3, p.420-427.
11. F o k a s A.S., A b l o w i t z M.J. On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations. - Jour.Math.Phys., 1984, v.25, p.2494-2505.
12. Ф а д д е е в Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния П. - В кн.: Современные проблемы математики. - М.: ВИНИТИ, 1974, т.3, с.93-180.

А.Г.Рейман, М.А.Семенов-Тян-Шанский

СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА ДЛЯ ЛАКСОВЫХ УРАВНЕНИЙ И КЛАССИЧЕСКИЕ r-МАТРИЦЫ

Скобки Пуассона называются согласованными, если их линейная комбинация также является скобкой Пуассона, т.е. удовлетворяет тождеству Якоби. Хорошо известно,что на фазовом пространстве динамических систем, интегрируемых методом обратной задачи, часто удается определить согласованные скобки Пуассона, причем интегралы движения находятся в инволюции относительно всех этих скобок. Свойства таких согласованных скобок и иерархии законов сохранения для них изучались аксиоматически ("схема Магри-Ленарта" [1],[2]), а также для многочисленных конкретных примеров [3], [4],[5]. Цель настоящей заметки - показать, как системы согласованных скобок Пуассона возникают в рамках метода классической r-матрицы [6][7]. Напомним, что с классическими r-матрицами связаны скобки Пуассона двух типов - линейные и квадратичные,или скобки Склянина. В настоящей работе мы рассматриваем только линейные скобки Пуассона. В этом случае фазовое пространство динамических систем естественно вкладывается в двойственное пространство некоторой алгебры Ли, а скобка Пуассона отождествляется с соответствующей скобкой Ли - Пуассона. Семейству согласованных скобок Пуассона соответствует линейное семейство согласованных скобок Ли ("лиев пучок"). Примеры таких лиевых пучков и позволяет строить метод r-матрицы. Структура заметки такова. В § 1 мы напоминаем основную в методе r-матрицы теорему о лаксовых уравнениях и приводим общую конструкцию семейств согласованных R-скобок. В § 2,3 рассмотрены основные приложения к лаксовых уравнениям и уравнениям нулевой кривизны со спектральным параметром. В § 4 мы приводим традиционную в методе r-матрицы тензорную запись основных соотношений. В § 5 рассмотрены обобщения уравнения КдФ, связанные с алгеброй Вирасоро. Эти уравнения и согласованные скобки Пуассона для них недавно изучались М.Антоновичем и А.Форди [8]. Доклад А.Форди на конференции по нелинейным процессам в физике в Киеве в апреле 1987 г. послужил стимулом к написанию данной работы.

1. Основная алгебраическая теорема и построение семейств R-скобок

Напомним,что метод классической r-матрицы основан на следующей простой алгебраической конструкции [7]. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли. Линейный оператор в пространстве $\mathfrak{g}$ называется классической r-матрицей, если выражение

$$[X,Y]_R=\frac{1}{2}([RX,Y]+[X,RY]), \qquad X,Y\in\mathfrak{g}, \tag{I}$$

удовлетворяет тождеству Якоби. В этом случае (I) задает в пространстве $\mathfrak{g}$ еще одну скобку Ли (" R -скобку"). Пусть $\mathfrak{g}^*$ – двойственное пространство. Как хорошо известно, на $\mathfrak{g}^*$ определена скобка Ли–Пуассона (определение ее состоит в том, что скобка линейных функционалов на $\mathfrak{g}^*$ отождествляется со скобкой Ли в $\mathfrak{g}$). В рассматриваемой ситуации в пространстве $\mathfrak{g}^*$ определены две скобки Ли–Пуассона, связанные с двумя скобками Ли в $\mathfrak{g}$. Скобку, связанную с r-матрицей, мы также назовем R-скобкой.

ТЕОРЕМА I. (i) Инвариантные (относительно исходной лиевой структуры) функции на $\mathfrak{g}^*$ находятся в инволюции относительно R-скобки.

(ii) Если H – инвариантная функция на $\mathfrak{g}^*$, то гамильтоново уравнение на $\mathfrak{g}^*$ относительно R-скобки с гамильтонианом H имеет обобщенный лаксов вид

$$\frac{d}{dt}L=-ad^*_{\mathfrak{g}}M\cdot L, \qquad M=\frac{1}{2}R(dH(L)). \tag{2}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Если алгебра $\mathfrak{g}$ самодвойственна, т.е. пространства $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ и представления ad, ad^* можно отождествить, то уравнения (2) превращаются в обычные лаксовы уравнения.

2. В методе классической r-матрицы общеупотребительны тензорные обозначения для записи R-скобки [6]. Мы напомним связь наших определений с тензорным языком в § 4.

Опишем теперь линейное семейство r-матриц, для которых соответствующие R-скобки образуют лиев пучок (т.е. их линейные комбинации – также скобки Ли). В силу теоремы I все эти R-скобки обладают общим запасом функций в инволюции. Это семейство параметризуется пространством сплетающих операторов для присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный оператор в $\mathfrak{g}$ называется сплетающим, если $A\circ adX=adX\circ A$ для всех $X\in\mathfrak{g}$. Пространство сплетающих операторов мы обозначим $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть R – классическая r-матрица. Тогда $R\cdot A$, $A\in\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, – также классическая r-матрица и соответствующие скобки Ли образуют лиев пучок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$B_R(X,Y)=[RX,RY]-2R([X,Y]_R). \tag{3}$$

Преобразуя тождество Якоби для R-скобки, легко проверить, что оно эквивалентно равенству

$$J_R(X,Y,Z)=[B_R(X,Y),Z]+[B_R(Y,Z),X]+[B_R(Z,X),Y]=0. \qquad (4)$$

Предположим,что $R\in End\,\mathfrak{g}$ удовлетворяет (4), $A\in Int(\mathfrak{g})$. Легко видеть, что $B_{RA}(X,Y)=B_R(AX,AY)$. Поэтому $AJ_{RA}(X,Y,Z)=$ $=J_R(AX,AY,AZ)=0$. Если оператор A обратим, то отсюда следует, что $J_{RA}(X,Y,Z)=0$, т.е. RA – также r-матрица. Случай необратимого оператора A можно свести к предыдущему, рассмотрев $A+\alpha I$ и перейдя к пределу $\alpha\to 0$. Согласованность всех RA-скобок очевидна, поскольку сплетающие операторы образуют линейное семейство.

ЗАМЕЧАНИЕ. В приложениях обычно приходится иметь дело с r-матрицами, удовлетворяющими более сильному,чем (4), условию

$$B_R(X,Y)=\alpha[X,Y], \quad \alpha=const \qquad (5)$$

(модифицированному уравнению Янга-Бакстера, [7]). Для таких R $B_{RA}(X,Y)=\alpha A^2[X,Y]$, откуда сразу следует, что $J_{RA}(X,Y,Z)=0$ (независимо от предположения о ядре A).

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство. Предположим,что $A\in Int(\mathfrak{g})$ обратим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Линейная замена переменных в $\mathfrak{g}^*$

$$L\mapsto A^{*-1}L \qquad (6)$$

переводит R-скобку в RA-скобку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замена (6) переводит скобку (I) в скобку

$$[X,Y]'=A^{-1}[AX,AY]_R=[X,Y]_{RA}. \qquad (7)$$

Заметим, что преобразование A^* коммутирует с представлением ad^* и потому переводит множество инвариантов на $\mathfrak{g}^*$ в себя.

2. Аффинные алгебры Ли и иерархия лаксовых уравнений

Теорема 2 содержательна, если пространство $Int(\mathfrak{g})$ достаточно богато, т.е. если присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ приводимо. Наиболее интересный класс примеров связан с рассмотрением аффинных алгебр Ли, или алгебр петель. Пусть $\mathfrak{a}$ – алгебра Ли. В качестве исходной алгебры в нашей конструкции мы будем рассматривать алгебру $\mathfrak{g}=\mathcal{L}(\mathfrak{a})$, состоящую из полиномов Лорана $X(\lambda)=\sum X_i\lambda^i$ с коэффициентами в $\mathfrak{a}$. В алгебре $\mathfrak{g}$ имеется две подалгебры

$$\mathfrak{g}_+=\Big\{\sum_{i\geq 0}X_i\lambda^i\Big\}, \qquad \mathfrak{g}_-=\Big\{\sum_{i<0}X_i\lambda^i\Big\}. \qquad (8)$$

Очевидно, $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_++\mathfrak{g}_-$ (как линейное пространство). Пусть $P_\pm$ –

проектор на $\mathfrak{g}_\pm$ параллельно $\mathfrak{g}_\mp$. Простейшая (стандартная) r-матрица, связанная с алгеброй $\mathfrak{g}$, имеет вид

$$R = P_+ - P_-. \tag{9}$$

Она удовлетворяет тождеству Янга-Бакстера (5) с $\alpha = -1$.

Сплетающие операторы для алгебры $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(\mathfrak{a})$ – это операторы умножения на скалярные полиномы Лорана. Таким образом, Теорема 2 позволяет связать с R семейство r-матриц вида $R \circ \hat{q}$, где $\hat{q}$ – оператор умножения на $q \in \mathbb{R}[\lambda^{-1}, \lambda]$.

Отождествим пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{a})^*$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{a})$ с помощью спаривания

$$\langle X, L \rangle = \mathrm{Res} \langle X(\lambda), L(\lambda) \rangle \, d\lambda = \sum_i \langle x_i, L_{-i-1} \rangle. \tag{10}$$

В частности, если пространство $\mathfrak{a}^*$ отождествлено с $\mathfrak{a}$ при помощи $ad_{\mathfrak{a}}$ – инвариантного скалярного произведения, то

$$\mathcal{L}(\mathfrak{a})^* \simeq \mathcal{L}(\mathfrak{a}), \quad \mathfrak{g}_+^* \simeq \mathfrak{g}_-, \quad \mathfrak{g}_-^* \simeq \mathfrak{g}_+. \tag{11}$$

Мы будем рассматривать на $\mathcal{L}(\mathfrak{a})^*$ инвариантные функции вида

$$P_\varphi(L) = \mathrm{Res}\,(\varphi(\lambda) \; P(L(\lambda))\, d\lambda), \tag{12}$$

где P – инвариантный полином на $\mathfrak{a}^*$, а $\varphi(\lambda)$ – рациональная функция. Преобразование $L \mapsto q(\lambda) L$ переводит это семейство в себя: если P – однородный полином степени N, то $P_\varphi(qL) = P_{q^N \varphi}(L)$. Имеем

$$\mathrm{grad}\, P_\varphi(L) = \varphi(\lambda)\,(\mathrm{grad}\, P)\,(L(\lambda)). \tag{13}$$

По теореме I, лаксово уравнение, порожденное гамильтонианом $P_\varphi(L)$ относительно R-скобки, имеет вид

$$\frac{d}{dt} L = -\frac{1}{2}\, ad^* R(\mathrm{grad}\, P_\varphi(L)) \cdot L, \tag{14}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{d}{dt} L = \mp\, ad^* P_\pm(\mathrm{grad}\, P_\varphi(L)) \cdot L. \tag{15}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Зафиксируем инвариант P алгебры $\mathfrak{a}$ и функцию φ. Лаксовы уравнения, порождаемые гамильтонианами $P_{\varphi q^{-1}}$ относительно $R\hat{q}$ – скобки, не зависят от $q \in \mathbb{R}[\lambda, \lambda^{-1}]$ и совпадают с лаксовым уравнением, задаваемым гамильтонианом P_φ относительно R-скобки.

Если $q(\lambda) = \lambda^K$, то оператор умножения на q в алгебре $\mathcal{L}(\mathfrak{a})$ обратим. В этом случае, как отмечалось в п.I, $R\hat{q}$ – скобку можно получить из R-скобки заменой переменной $L \to \lambda^{-K} L$.

До сих пор мы проводили рассуждения во всем фазовом пространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{a})^*$. Хорошо известно, что R – скобка, связанная с

r-матрицей вида (9) на алгебре петель, обладает большим запасом конечномерных пуассоновых подпространств. Именно, положим

$$\mathcal{L}_{mn}=\left\{\sum_{-m}^{n} u_i\lambda^i,\ u_i\in\mathfrak{A}^*\right\}. \qquad (16)$$

При $m\geqslant 0$, $n\geqslant -1$ пространство $\mathcal{L}_{m,n}$ пуассоново для R-скобки (9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пространство $\mathcal{L}_{m,n}$ является общим пуассоновым подпространством всех $R\hat{q}$ скобок для полиномов q вида

$$q(\lambda)=c_{-m}\lambda^{-m}+\ldots+c_{n+1}\lambda^{n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случаи $q=\lambda^k$, $k=-m,\ldots,n+1$. Требуемое утверждение вытекает тогда из Предложения 2 и пуассоновости пространства $\mathcal{L}_{m,n}$ относительно R-скобки при $m\geqslant 0$, $n\geqslant -1$.

Выпишем более явно формулы для $R\hat{q}$-скобок при $q=\lambda^k$ в терминах коэффициентов " L-матрицы" $L=\sum u_i\lambda^i$. Выберем некоторый базис в алгебре $\mathfrak{A}$, и пусть C_c^{ab} – структурные константы в этом базисе, а u_i^a – компоненты коэффициента u_i. Обозначая $R\lambda^k$-скобку через $\{\,,\}_k$ имеем

$$\{u_i^a,u_j^b\}=\varepsilon\, C_c^{ab}\, u_{i+j+1-k}^c, \qquad (17)$$

где $\varepsilon=1$ при $i,j\geqslant k$, $\varepsilon=-1$ при $i,j<k$, $\varepsilon=0$ при $i\geqslant k$, $j<k$.

Таким образом, в пространстве $\mathcal{L}_{m,n}$ имеется $(m+n+2)$-параметрическое семейство согласованных скобок Пуассона, причем гамильтонианы вида (12) порождают относительно этих скобок одну и ту же иерархию лаксовых уравнений: гамильтонианы $P^{(k)}=\operatorname{Res}\lambda^{-k}\varphi(\lambda)P(L(\lambda))d\lambda$ по скобке $\{\,,\}_k$ приводят к одному и тому же уравнению (при фиксированных P и φ).

Целый ряд интегрируемых систем связан со скрученными алгебрами петель, выделяемыми в алгебре $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ автоморфизмами конечного порядка σ:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{A},\sigma)=\{X\in\mathcal{L}(\mathfrak{A}): X(\varepsilon\lambda)=\sigma X(\lambda)\},$$

где $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{A}$, $\sigma^p=1$, $\varepsilon=\exp^{2\pi i/p}$ (Наиболее важен случай $p=2$). Оператор умножения на функцию $q(\lambda)$ оставляет $\mathcal{L}(\mathfrak{A},\sigma)$ инвариантным, если $q(\varepsilon\lambda)=q(\lambda)$, т.е. q – функция от λ^p. Пользуясь этим, легко подсчитать, что подпространство $\mathcal{L}_{m,n}^{\sigma}=\mathcal{L}_{m,n}\cap\mathcal{L}(\mathfrak{A},\sigma)^*$ является общим пуассоновым подпространством для скобок $\{\,,\}_{kp}$ при $-m\leqslant kp\leqslant n+1$.

Примеры. I. $L=u+v\lambda$. В пространстве таких L-матриц определены скобки $\{\,,\}_k$ при $k=0,1,2$. Имеем

0) $\{u^a, u^b\}_0 = C_c^{ab} v^c$, $\quad \{u^a, v^b\}_0 = \{v^a, v^b\}_0 = 0$,

I) $\{u^a, u^b\}_1 = -C_c^{ab} u^c$, $\quad \{u^a, v^b\}_1 = \{v^a, v^b\}_1 = 0$,

2) $\{u^a, u^b\}_2 = 0$, $\quad \{u^a, v^b\}_2 = -C_c^{ab} u^c$, $\quad \{v^a, v^b\}_2 = -C_c^{ab} v^c$.

2. $L = u + v\lambda + w\lambda^2$. Здесь определены скобки $\{,\}_k$ при $k = 0,1,2,3$. Однако, если мы перейдем к подалгебре $\mathcal{L}(\mathfrak{A}, \sigma)$, выделяемой инволюцией σ (т.е. условием $L(-\lambda) = -\sigma L(\lambda)$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{A})^*$), то останутся лишь скобки $\{,\}_0$ и $\{,\}_2$:

0) $\{u^a, u^b\}_0 = C_c^{ab} v^c$,

$\{u^a, v^b\}_0 = C_c^{ab} w^c$

$\{v^a, v^b\}_0 = 0$

$\{w^a, u^b\}_0 = \{w^a, v^b\}_0 = \{w^a, w^b\}_0 = 0$

2) $\{u^a, u^b\}_2 = 0$

$\{u^a, v^b\}_2 = -C_c^{ab} u^c$

$\{v^a, v^b\}_2 = -C_c^{ab} v^c$

$\{w^a, u^b\}_2 = \{w^a, v^b\}_2 = \{w^a, w^b\}_2 = 0$.

Условия симметрии на коэффициенты имеют вид $\sigma u = -u$, $\sigma v = v$, $\sigma w = -w$. Отметим, что имеется естественная связь скобки $\{,\}_2$ с интегрируемыми системами типа многомерных волчков.

3. Согласованные скобки для уравнений нулевой кривизны

Уравнения нулевой кривизны имеют вид

$$[\partial/\partial x - L,\ \partial/\partial t - M] = 0. \tag{I8}$$

Хорошо известно, что естественный класс алгебр Ли, связанных с такими уравнениями - это алгебры токов, т.е. алгебры функций на прямой (или окружности) со значениями в алгебре Ли, и их центральные расширения. Мы напомним соответствующую конструкцию [9], [7].

Пусть $\mathfrak{A}$ - конечномерная простая алгебра Ли. Зафиксируем на $\mathfrak{A}$ инвариантное скалярное произведение $(,)$ и отождествим с его помощью $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$. Пусть $\tilde{\mathfrak{A}} = C^\infty(S^1, \mathfrak{A})$ - алгебра Ли функций на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ со значениями в $\mathfrak{A}$ и с поточечным коммутатором. Формула

$$\langle X, Y\rangle = \int (X(x), Y(x))\, dx \tag{I9}$$

задает на $\tilde{\mathfrak{A}}$ инвариантное скалярное произведение и позволяет отождествить $\tilde{\mathfrak{A}}$ с (плотным подмножеством в) $\tilde{\mathfrak{A}}^*$. Говоря о двойственном пространстве $\tilde{\mathfrak{A}}^*$, мы рассматриваем только линейные функционалы, представимые гладкими функциями по формуле (I9). Пусть

$$\omega(X,Y)=\langle X,\frac{d}{dx}Y\rangle. \qquad (20)$$

Формула (20) определяет на $\widetilde{\mathfrak{A}}$ нетривиальный 2-коцикл. Заметим, что $H^2(\mathfrak{A},\mathbb{R})=\mathbb{R}$, таким образом, коцикл (20) определен в существенном однозначно. Обозначим $\hat{\mathfrak{A}}$ одномерное центральное расширение алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$, порожденное ω. Коммутатор в алгебре $\hat{\mathfrak{A}}$ задается формулой

$$[(X_1,c_1),(X_2,c_2)]=([X_1,X_2],\omega(X_1,X_2));$$

двойственное пространство $\hat{\mathfrak{A}}^*$ отождествляется с $\widetilde{\mathfrak{A}}\oplus\mathbb{R}$.

При таком отождествлении

$$ad^*X\cdot(L,c)=[x,L]+c\frac{d}{dx}X; \qquad (21)$$

другими словами, коприсоединенное представление алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ имеет вид инфинитезимального калибровочного преобразования и обобщенные лаксовы уравнения на $\hat{\mathfrak{A}}^*$ имеют вид (18). Это обстоятельство и объясняет роль алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$ в теории уравнений нулевой кривизны.

Пусть теперь $\mathfrak{g}=\mathcal{L}(\widetilde{\mathfrak{A}})$ – алгебра петель, связанная с $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Положим также $\hat{\mathfrak{g}}=\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{A}})$. Ясно, что $\hat{\mathfrak{g}}$ – центральное расширение $\mathfrak{g}$ с помощью $\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$. Наделим алгебры $\mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{g}}$ стандартной r-матрицей (9) $R=P_+-P_-$, связанной с градуировкой по степеням λ. Для любого $q\in\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$ на $\mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{g}}$ определены $R\hat{q}$-скобки. Ясно при этом, что все они согласованы и $\hat{\mathfrak{g}}_{R\hat{q}}$ – центральное расширение $\mathfrak{g}_{R\hat{q}}$ с помощью $\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$-значного коцикла

$$\omega_{R\hat{q}}(X,Y)=\langle X,\frac{d}{dx}RqY\rangle+\langle RqX,\frac{d}{dx}Y\rangle. \qquad (22)$$

Отождествим двойственное пространство $\hat{\mathfrak{g}}^*$ к алгебре $\hat{\mathfrak{g}}$ с $\mathfrak{g}\oplus\mathbb{R}[\lambda,\lambda^{-1}]$ при помощи спаривания

$$\langle(X,c),(Y,c')\rangle=\operatorname{Res}\langle X,Y\rangle d\lambda+\operatorname{Res} cc'd\lambda.$$

Элементами пространства $\hat{\mathfrak{g}}^*$ являются пары $(L(\lambda),\ p(\lambda))$, где $L(\lambda)=\sum u_i(x)\lambda^i$, $p(\lambda)=\sum a_i\lambda^i$. Уравнения движения в $\hat{\mathfrak{g}}^*$ имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}L=p\frac{\partial}{\partial x}M+[M,L], \qquad \frac{d}{dt}p=0. \qquad (23)$$

Выпишем покомпонентные формулы для скобок $\{\ ,\}_K$, отвечающих r-матрице $R\lambda^K$: Пусть $\{e^a\}$ – базис алгебры $\mathfrak{A}$, $u_i^a=(u_i,e^a)$, C_c^{ab} – структурные константы алгебры $\mathfrak{A}$, $K^{ab}=(e^a,e^b)$. Тогда

$$\{u_i(x)^a, u_j(y)^b\}_K = \varepsilon C_c^{ab}\, u^c_{i+j+1-K}(x)\,\delta(x-y) + \tag{24}$$
$$+\varepsilon K^{ab}\sum_s a_s\,\delta_{i+j+1,K-s}\,\delta'(x-y),$$

где $\varepsilon=1$ при $i,j\geqslant K$, $\varepsilon=-1$ при $i,j<K$, $\varepsilon=0$ при $i\geqslant K, j<K$, δ_{ij} – символ Кронекера. Легко определить общие пуассоновы подпространства для скобок $\{,\}_K$. Например, при $p=1$, пространство $\mathcal{L}_{m,n}=\left\{\sum_{-m}^{n} u_i(x)\lambda^i\right\}$ пуассоново при $-m\leqslant K\leqslant n+1$.

Примеры:

I. Пусть $L=s\lambda^{-1}$, $p(\lambda)=1$. Для лаксовых операторов такого вида имеется две совместных скобки Пуассона:

$$\{s^a(x), s^b(y)\}_0 = -C_c^{ab}\, S^c(x)\,\delta(x-y),$$
$$\{s^a(x), s^b(y)\}_{-1} = K^{ab}\,\delta'(x-y).$$

2. Пусть $L(\lambda)=u+v(\lambda)$, $p(\lambda)=1$. В этом случае имеется три совместных скобки

0) $$\{u^a(x), u^b(y)\}_0 = C_c^{ab}\, v^c(x)\,\delta(x-y),$$
$$\{u^a(x), v^b(y)\}_0 = \{v^a(x), v^b(y)\}_0 = 0;$$

1) $$\{u^a(x), u^b(y)\}_1 = -C_c^{ab}\, u^c(x)\,\delta(x-y) - K^{ab}\,\delta'(x-y).$$
$$\{u^a(x), v^b(y)\}_1 = \{v^a(x), v^b(y)\}_1 = 0;$$

2) $$\{u^a(x), u^b(y)\}_2 = 0,$$
$$\{u^a(x), v^b(y)\}_2 = -C_c^{ab}\, u^c(x)\,\delta(x-y) - K^{ab}\,\delta'(x-y),$$
$$\{v^a(x), v^b(y)\}_2 = -C_c^{ab}\, v^c(x)\,\delta(x-y).$$

Скобка $\{,\}_0$ – обычная скобка для обобщенного уравнения НШ; скобка $\{,\}_1$ после редукции приводит к хорошо известному Λ-оператору для уравнения НШ [3]. В частности, при $\mathfrak{A}=sl(2,\mathbb{R})$, следующие гамильтонианы H_K порождают относительно скобок $\{,\}_K$ так называемую $p-q$ систему на потенциалах вида $L=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0&p\\q&0\end{pmatrix}$:

$$H_0=\frac{1}{c^5}\int\left(\frac{1}{2c^2}\left(tr[u,v]^2\right)^2 - tr[u_x,v]^2 - 2cd\,tr([u,v]u_x) - 4d^2 tr[u,v]^2\right)dx,$$

$$H_1=\frac{1}{c^3}\int\left(tr([u,v]u_x)-\frac{2}{c^2}tr\,uv\,tr[u,v]^2\right)dx\ ,$$

$$H_2=\int\frac{1}{c^3}\left(tr([u,v]+v_x)^2-\frac{2}{c^2}(tr\,vv_x)^2\right)dx\ ,$$

где $c^2=2tr\,v^2$, $d=\frac{1}{c}tr\,uv$, причем в H_0 и H_1 $v(x)=const$.

4. Семейства R -скобок в тензорных обозначениях

Линейный оператор R на алгебре петель $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ можно считать интегральным:

$$R(X(\lambda)=\int r(\lambda,\mu)X(\mu)d\mu,$$

где $r(\lambda,\mu)\in \mathrm{End}\,\mathfrak{A}\simeq\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}^*$.

Матричные элементы лаксовой матрицы $L(\lambda)$ – линейные функционалы на фазовом пространстве. Мы можем вычислить их скобки Пуассона друг с другом; удобно записывать их в "тензорной" форме. Обозначим $\{L(\lambda)\overset{\otimes}{,}L(\mu)\}_R$ билинейную форму на $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, задаваемую равенством

$$\{L\overset{\otimes}{,}L\}_R(X,Y)=L([X,Y])_R$$

и рассматриваемую как элемент пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{A})^*\otimes\mathcal{L}(\mathfrak{A})^*$. Несложное вычисление дает ([10])

$$\begin{aligned}\{L(\lambda)\overset{\otimes}{,}L(\mu)\}_R=ad^*r(\lambda,\mu)(L(\lambda)\otimes 1)-\\ -ad^*r^t(\lambda,\mu)(1\otimes L(\mu)).\end{aligned}\tag{25}$$

Здесь $r^t(\lambda,\mu)$ – ядро оператора R^*; действие операции ad^* определяется равенствами

$$ad^*(e\otimes f)\cdot(L\otimes 1)=ad^*e\cdot L\otimes f$$

$$ad^*(f\otimes e)\cdot(1\otimes L)=f\otimes ad^*e\cdot L.$$

Если алгебра $\mathfrak{A}$ отождествлена с $\mathfrak{A}^*$, то $r(\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$, $r^t(\lambda,\mu)=\Pi r(\mu,\lambda)$, где Π – оператор перестановки в $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$. Формула (25) принимает в этом случае вид

$$\{L(\lambda)\overset{\otimes}{,}L(\mu)\}_R=[r(\lambda,\mu),L(\lambda)\otimes 1]-[\Pi r(\mu,\lambda),1\otimes L(\mu)].\tag{26}$$

Пусть, в частности, $\mathfrak{A}$ – простая алгебра Ли, R – стандартная r-матрица вида (9) на $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$. Тогда ее ядро

$$r(\lambda,\mu)=\frac{t}{\lambda-\mu}, \tag{27}$$

где $t\in\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{A}$ – элемент Казимира. Другие r-матрицы вида $R\circ\hat{q}$ задаются ядрами

$$r_q(\lambda,\mu)=\frac{q(\mu)t}{\lambda-\mu}.$$

Разделяя в (26) симметричную и антисимметричную относительно перестановки части, можно переписать (26) в виде

$$\begin{aligned}\{L(\lambda)\overset{\otimes}{,}L(\mu)\}_R=[r_+(\lambda,\mu),L(\lambda)\otimes 1+1\otimes L(\mu)]+\\ +[r_-(\lambda,\mu),L(\lambda)\otimes 1-1\otimes L(\mu)],\end{aligned} \tag{28}$$

где $\quad r_+(\lambda,\mu)=\dfrac{q(\lambda)+q(\mu)}{\lambda-\mu}t, \qquad r_-(\lambda,\mu)=\dfrac{q(\lambda)-q(\mu)}{\lambda-\mu}t.$

Для алгебр токов тензорная форма записи аналогична. Нужно лишь воспользоваться формулой (21) для коприсоединенного представления алгебры $\hat{\mathfrak{A}}$. Если "центральный заряд" $p(\lambda)$ зафиксирован, мы получаем в тех же обозначениях

$$\begin{aligned}\{L(\lambda,x)\overset{\otimes}{,}L(\mu,y)\}_R=[r_+(\lambda,\mu),L(\lambda)\otimes 1+1\otimes L(\mu)]\delta(x-y)+\\ +[r_-(\lambda,\mu),L(\lambda)\otimes 1-1\otimes L(\mu)]\delta(x-y)+\frac{p(\lambda)q(\lambda)-p(\mu)q(\mu)}{\lambda-\mu}\delta'(x-y).\end{aligned} \tag{29}$$

Формулы (28), (29) (при $p=1$) выведены из других соображений в [II].

5. Алгебра Вирасоро и скобки Антоновича-Форди

В качестве еще одной иллюстрации r-матричной схемы мы рассмотрим иерархию скобок и уравнений, связанную с алгеброй Вирасоро (r-матричный подход к алгебре Вирасоро применялся в [I2]). Пусть теперь $\mathfrak{A}$ – алгебра векторных полей по окружности (или на прямой); коммутатор двух полей $\varphi(x)\,d/dx$ и $\psi(x)\,d/dx$ задается формулой

$$[\varphi,\psi]=\varphi\frac{d}{dx}\psi-\frac{d}{dx}\varphi\cdot\psi. \tag{30}$$

Алгебра Вирасоро $\hat{\mathfrak{A}}$ есть центральное расширение алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью коцикла

$$\omega(\varphi,\psi)=\int\varphi\frac{d^3}{dx^3}\psi\,dx. \tag{31}$$

Отождествим двойственное к $\mathfrak{A}$ с пространством функций $u(x)$ (точнее, квадратичных дифференциалов $u(x)\,dx^2$): $\langle \varphi, u\rangle = \int \varphi(x) u(x)\,dx$. Коприсоединенное действие в пространстве $\mathfrak{A}^*$ имеет вид

$$ad^*\varphi\cdot u = \left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)\varphi \tag{32}$$

а в $\hat{\mathfrak{A}}^* \simeq \hat{\mathfrak{A}}\oplus \mathbb{R}$ имеем

$$\hat{ad}^*\varphi\cdot(u,c) = \left(c\frac{d^3}{dx^3} + u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)\varphi. \tag{33}$$

Рассуждения § 3, примененные к алгебре Вирасоро вместо алгебры токов, приводят к системе совместных скобок в пространстве $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{A}})^*$. В частности, в подпространстве полиномов $\sum_{i=0}^{N} u_i(x)\lambda^i$ степени не выше N и с фиксированным центральным элементом $p(\lambda)=\sum_{i=0}^{N} a_i\lambda^i$ мы получаем набор из $N+2$ совместных скобок $\{\,,\}_K$, $K=0,\dots,N+1$:

$$\begin{aligned}\{u_i(x), u_j(y)\} &= \varepsilon\big(u_{i+j+1-K}(x)\,\delta'(x-y) + \\ &+ u_{i+j+1-K}(y)\,\delta'(x-y) + \sum_{s=0}^{N} a_s\,\delta_{i+j+1,K-s}\,\delta'''(x-y)\big),\end{aligned} \tag{34}$$

где $\varepsilon=1$ при $i,j\geqslant K$, $\varepsilon=-1$ при $i,j<K, \varepsilon=0$ при $i\geqslant K, j<K$.

Как известно, коприсоединенное действие группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}\,S^1$ в пространстве $\hat{\mathfrak{A}}^*$ имеет вид

$$Ad^*\varphi^{-1}(u,c) = u(\varphi)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + c\,S(\varphi), \tag{35}$$

где $S(\varphi) = \frac{1}{2}\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$, и совпадает с действием группы замен переменной в операторе Штурма-Лиувилля

$$\ell = c\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

(в данном случае ℓ рассматривается как оператор из пространства плотностей веса $1/2$ в пространство плотностей веса $3/2$). Таким образом, точка фазового пространства $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{A}})^*$, $(u(x,\lambda), p(\lambda))$, ассоциируется с линейным оператором

$$\ell = p(\lambda)\frac{d^2}{dx^2} + u(x,\lambda). \tag{36}$$

Отсюда следует, что инварианты матрицы монодромии уравнения $\ell\psi=0$ будут инвариантами коприсоединенного действия в $\mathcal{L}(\hat{\mathfrak{A}})^*$.

Нетрудно выписать оператор Якоби $\mathcal{J}^{(K)}$, задающий скобку $\{,\}_K$ и действующий на вектор вариаций $(\delta u_0, \ldots, \delta u_N)$:

$$\mathcal{J}^{(K)} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & & \mathcal{J}_0 \\ & \iddots & \vdots \\ \mathcal{J}_0 & \cdots & \mathcal{J}_{K-1} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} -\mathcal{J}_{K-1} & \cdots & -\mathcal{J}_N & 0 \\ \vdots & & \iddots & \\ \mathcal{J}_N & \iddots & & 0 \\ 0 & & & \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\mathcal{J}_i = a_i \frac{d^3}{dx^3} + u_i \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} u_i \ .$$

При $K \leqslant N$ коэффициент u_N лежит в аннуляторе скобки $\{,\}_K$; положив его равным 1, мы получаем в точности семейство скобок, открытое Антоновичем и Форди [8].

Литература

1. M a g r i F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation. - J.Math.Phys., 1978, 19, 1156-1162.
2. Г е л ь ф а н д И.М., Д о р ф м а н И.Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры. - Функц.анализ и его прилож. 1980, т.14. № 3, с.71-74.
3. Р е й м а н А.Г., С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Семейство гамильтоновых структур и редукция для матричных дифференциальных операторов первого порядка. - Функц.анализ и его прилож., 1980, т.14, № 2, с.77-78.
4. К у л и ш П.П., Р е й м а н А.Г. Гамильтонова структура полиномиальных пучков. - В кн.: Дифф.геометрия, группы Ли и механика У. Зап.научн.семин.ЛОМИ,1983, т.123, с.67-76.
5. M a g r i F., M o r o s i C., R a g n i s c o O. Reduction techniques for infinite-dimensional Hamiltonian systems. - Comm.Math.Phys., 1985, 99, N 1, 115-140.
6. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М. Наука, 1986.
7. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Что такое классическая r-матрица. - Функц.анализ и его прилож. 1983, т.17, № 4, с.17-33.

8. A n t o n o w i c z M., F o r d y A. Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures. Preprint Leeds Univ. 1987.
9. Р е й м а н А.Г., С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Алгебры токов и нелинейные уравнения в частных производных. – ДАН СССР, 1980, т.251, № 6, с.1310-1314.
10. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Классические r-матрицы и метод орбит. – В кн.: Дифф.геометрия, группы Ли и механика У (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.123), Л., 1983, с.77-91.
11. M a i l l e t J.-M. Hamiltonian structures for integrable classical theories. – Phys.Lett.,1986, 167B, NN 4,p.401-405.
12. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Теоретико-групповые методы в теории интегрируемых систем. – Докт.дисс., Л., 1985, 361.

Compatible Poisson brackets for Lax equations and classical r-matrices. Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M.A. – In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. IX (Zap.Nauchn.Semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.176-188.

For Lax equations and zero curvature equations with spectral parameter a family of compatible linear Poisson brackets is constructed.

On realizations of representations of Brauer's semigroup. Kerov S.V. – In: Differential geometry, Lie groups and mechanics. IX. (Zap.Nauchn.Semin.LOMI, v.164). L. "Nauka", 1987, p.189-193.

Brauer's semigroup replaces symmetric group in the study of the commutant of tensor powers of representations of classical groups of B_n, C_n, D_n type. We present an elementary description of its irreducible representations.

С.В.Керов

РЕАЛИЗАЦИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛУГРУППЫ БРАУЭРА

Теория полиномиальных представлений полных линейных групп $GL(m)$ тесно связана с теорией представлений симметрических групп $\mathfrak{S}_n$. Обе группы действуют в пространстве $(\mathbb{C}^m)^{\otimes n}$, порождая взаимные коммутанты. Эта теорема И.Шура позволяет строить представления $GL(m)$, используя гармонический анализ на конечной группе $\mathfrak{S}_n$.

Р.Брауэр [I], развив и упростив результат Г.Вейля, получил аналогичную теорему взаимности для ортогональной и симплектической групп. В обоих случаях роль группы $\mathfrak{S}_n$ играла конечная полугруппа $\mathfrak{B}_n$. С полугруппой Брауэра $\mathfrak{B}_n$ связано семейство алгебр $B_n(v)$, представления которых и порождают коммутанты к n-ым тензорным степеням векторных представлений групп $O(m)$ и $Sp(2m)$ при $v=m$, $v=-2m$, соответственно.

Совсем недавно Бирман и Венцль [2], в связи с анализом нового инварианта зацеплений - многочлена Кауфмана, построили деформацию $BW_n(u,v)$ алгебры $B_n(v)$. Эти алгебры участвуют в теореме взаимности с квантовыми аналогами ортогональной и симплектической групп.

Как показал Венцль [3], при нецелых значениях параметра v алгебры $B_n(v)$ полупросты и изоморфны. Ниже дано прямое элементарное описание неприводимых представлений этих алгебр.

Автор благодарен А.М.Вершику за внимание к работе, Н.Ю.Решетихину за полезные обсуждения и А.В.Зелевинскому за указание на связь с работой А.А.Клячко [4].

I. Полугруппа Брауэра

Рассмотрим две последовательности из n предметов (входных и выходных "гнезд").

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произвольное разбиение всей совокупности $2n$ предметов на пары назовем <u>чипом</u> *) с $2n$ ножками.

Чипы изображаются графами (рис. I) дуги которых делятся на <u>вертикали</u>, связывающие входные гнезда с выходными и <u>горизонтали</u>, соединяющие гнезда одного типа.

---

*) Чипами называют интегральные микросхемы, составляющие элементную базу современной электроники.

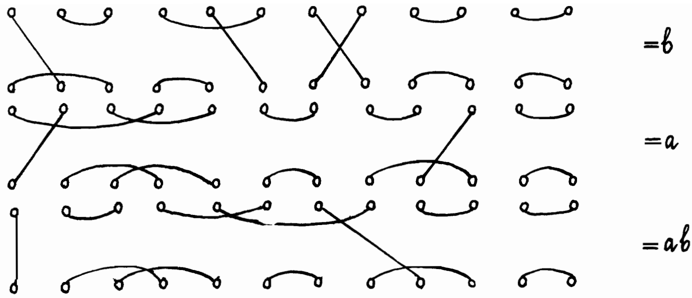


Рис.I

Соединим дугами входные гнезда чипа a с соответствующими выходными гнездами чипа b. Вся совокупность $4n$ гнезд распадается на нити - максимальные последовательности различных гнезд $(p_1, p_2, \dots p_N)$, в которых соседние гнезда p_i, p_{i+1} связаны дугой, $1 \leqslant i < N$. Концы незамкнутых нитей располагаются на выходных гнездах чипа a и входных гнездах b и задают композицию ab (см.рис.I, взятый из [I]). Замкнутые нити - петли - в определении композиции не участвуют.

ЗАМЕЧАНИЯ.

I) Полугруппа чипов с $2n$ ножками $\mathfrak{D}_n$ введена Р.Брауэром [I] .

2) $|\mathfrak{D}_n| = (2n-1)!!$

3) Подгруппа обратимых чипов в $\mathfrak{D}_n$ отождествляется с симметрической группой $\mathfrak{S}_n$.

4) На полугруппе $\mathfrak{D}_n$ имеется инволютивный антиавтоморфизм $*$, совпадающий на $\mathfrak{S}_n$ со взятием обратной подстановки. По определению, чип a^* получается из a, если считать входные ножки выходными и обратно.

2. Проективные представления $\mathfrak{D}_n$.

Обозначим через $L(a,b)$ число петель, возникающих при перемножении чипов a, b и пусть

$$g_v(a,b) = v^{L(a,b)}, \tag{I}$$

где $v \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - параметр.

ЛЕММА I. Справедливо тождество.

$$g_v(a,bc)\, g_v(b,c) = g_v(a,b)\, g_v(ab,c), \tag{2}$$

т.е. g_v - коцикл на полугруппе $\mathfrak{D}_n$.

Определим в пространстве формальных комплексных линейных комбинаций элементов $\mathfrak{D}_n$ умножение, полагая $a * b =$

$= g_v(a,b)ab$. Построенная алгебра $B_n(v)$, согласно лемме I, ассоциативна.

Проективные представления полугруппы $\mathfrak{D}_n$, т.е. семейства операторов $\pi(a)$, $a \in \mathfrak{D}_n$, для которых

$$\pi(a)\pi(b) = g_v(a,b)\pi(ab) \tag{3}$$

естественно отождествляются с обычными представлениями алгебры Брауэра $B_n(v)$.

ПРИМЕР: пусть $\xi_1,\dots,\xi_m$ - базис в $\mathbb{C}^m$ и $V = \mathbb{C}^m \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^m$ (n сомножителей). Последовательности $i = (i_1,\dots,i_n)$ отвечает базисный вектор $\xi_{i_1} \otimes \dots \otimes \xi_{i_n}$ в пространстве V. Положим $M^{i_1,\dots,i_n}_{j_1,\dots,j_n}(a) = 1$, если в каждой паре связанных чипом a мест значения индексов совпадают и $M^{i_1\dots i_n}_{j_1\dots j_n}(a) = 0$ в противном случае. Тогда матрицы $M(a) = \{M^i_j(a)\}$ задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с параметром $v = m$

ТЕОРЕМА (Брауэр [I]). Операторы $M(a)$ и операторы тензорного представления группы $O(m)$ в пространстве V порождают взаимные коммутанты.

3. Реализации представлений $\mathfrak{D}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соединением назовем последовательность из n предметов ("гнезд"), некоторые из которых связаны в пары (горизонтали).

Обозначим множество соединений с ℓ горизонталями через $\mathfrak{X}_{n,\ell}$; ясно, что $|\mathfrak{X}_{n,\ell}| = C^{2\ell}_n (2\ell-1)!!$

Свяжем дугами гнезда соединения $x \in \mathfrak{X}_{n,\ell}$ с соответствующими входными гнездами чипа $a \in \mathfrak{D}_n$. Совокупность всех $3n$ гнезд как и в п.I распадается на нити. Назовем соединение x допустимым для чипа a, если каждая нить с концами в гнездах соединения x совпадает с горизонталью этого соединения. Иначе говоря, нить, ведущая из изолированного в x гнезда, должна заканчиваться в выходном гнезде чипа a. Нити с обоими концами в выходных гнездах чипа a задают новое соединение $y = ax \in \mathfrak{X}_{n,\ell}$, результат действия a на x.

Если соединение x допустимо для чипа a, то определена подстановка $\sigma(a,x) \in \sigma_{n-2\ell}$, переводящая $(n-2\ell)$ изолированных гнезд x в изолированные гнезда соединения y (принимается во внимание только относительное положение гнезд в каждом ряду). Кроме того, обозначим через $L(a,x)$ число петель и положим

$$f_v(a,x)=v^{L(a,x)}, \tag{4}$$

где $v\in\mathbb{C}^*$. На рис.2 $L(a,x)=2$ и $\sigma(a,x)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$

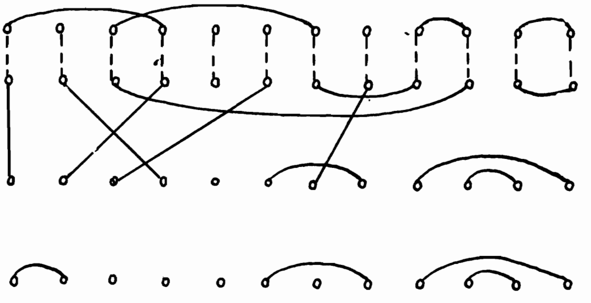


Рис.2

ЛЕММА 2. Пусть $a,b\in\mathfrak{D}_n$, соединение $x\in\mathfrak{X}_{n,\ell}$ допустимо для b и соединение $y=bx$ допустимо для a. Тогда x допустимо для ab и выполняются тождества

$$g_v(a,b)f_v(ab,x)=f_v(a,bx)f_v(b,x), \tag{5}$$

$$\sigma(ab,x)=\sigma(a,bx)\sigma(b,x). \tag{6}$$

Пусть $H_{n,\ell}$ – пространство линейных комбинаций элементов из $\mathfrak{X}_{n,\ell}$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Положим

$$\pi_a(x)=f_v(a,x)\,ax, \tag{7}$$

если соединение x допустимо для $a\in\mathfrak{D}_n$ и $\pi_a(x)=0$ иначе.

ТЕОРЕМА 2. Операторы π_a, $a\in\mathfrak{D}_n$, задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с коциклом g_v в пространстве $H_{n,\ell}$. Если $v\notin\mathbb{Z}$, то представление неприводимо.

Чтобы получить другие неприводимые представления, возьмем диаграмму Юнга λ с $(n-2\ell)$ клетками и пусть H^ℓ – пространство соответствующего представления группы $\sigma_{n-2\ell}$. В пространстве $H^\lambda_{n,\ell}=H^\lambda\otimes H_{n,\ell}$ определим линейные операторы π_a, полагая

$$\pi_a(h\otimes x)=f_v(a,x)(\pi^\lambda_{\sigma(a,x)}h\otimes ax), \tag{8}$$

если соединение x допустимо для $a\in\mathfrak{D}_n$ и $\pi_a(h\otimes x)=0$

иначе; здесь $h \in H^{\lambda}$.

ТЕОРЕМА 3. Операторы π_a, $a \in \mathfrak{D}_n$, задают проективное представление $\mathfrak{D}_n$ с коциклом g_v в пространстве $H^{\lambda}_{n,\ell}$ размерности

$$\dim H^{\lambda}_{n,\ell} = C^{2\ell}_{n} (2\ell-1)!! \dim H^{\lambda}. \qquad (9)$$

Если $v \notin \mathbb{Z}$, то построенное представление $(\lambda)_\ell$ неприводимо, представления $(\lambda)_\ell$, где $0 \leqslant 2\ell \leqslant n$ и λ - диаграмма Юнга с $n-2\ell$ клетками составляют полный список неприводимых проективных представлений полугруппы $\mathfrak{D}_n$.

При ограничении на подгруппу $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{D}_n$ проективное представление $(\lambda)_\ell$ становится обычным и разлагается на неприводимые следующим образом:

$$(\lambda)_\ell \,|\mathfrak{S}_n \simeq (\lambda)\circ\theta_\ell, \qquad (10)$$

где $\theta_\ell = (\varnothing)_\ell\,|\mathfrak{S}_{2\ell}$ и (λ) - неприводимое представление $\mathfrak{S}_{n-2\ell}$. Представление θ_ℓ имеет размерность $(2\ell-1)!!$ а его разложение на неприводимые компоненты получено А.А.Клячко [4] :

$$\theta_\ell = \sum_{\mu} (\mu), \qquad (11)$$

где μ пробегает все диаграммы Юнга с 2ℓ клетками и четными длинами строк.

Полученные реализации приводят к простым формулам для характеров представлений $(\lambda)_\ell$, и характеров предельной полугруппы $\mathfrak{D}_\infty = \underrightarrow{\lim}\, \mathfrak{D}_n$ финитных чипов. Эти вопросы, как и реализация представлений алгебры $BW_n(u,v)$ будут рассмотрены отдельно.

Литература

1. B r a u e r R. On algebras which are connected with semisimple continuous groups. - Ann. of Math., 1937, v.38, N 4, p. 857-872.
2. B i r m a n J.S., W e n z l H. Braids, link polynomials and a new algebra. - Preprint, 1987.
3. W e n z l H. On the structure of Brauer's centralizer algebras. - Preprint, 1987.
4. К л я ч к о А.А. Централизаторы инволюций и модели симметрической и полной линейной групп. - Исследования по теории чисел.7.Саратов,1978,с.59-64.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 517.957

Скейлинговая функция для коррелятора скорости в теории изотропной развитой турбулентности. Антонов Н.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с.3-9.

В рамках ренормгруппового подхода к теории развитой турбулентности вычислена скейлинговая функция для коррелятора скорости во втором порядке ε -разложения. Библ. - 5 назв.

УДК 517.93

Асимптотическая динамика и спектральный анализ для оператора Шредингера со слабо ускоряющим потенциалом. Буслаева М.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с.10-19.

В работе исследованы существование и полнота обобщенных волновых операторов для уравнения Шредингера на полуоси с ускоряющим потенциалом. Библ. - 3 назв.

УДК 519.117

Статистическая сумма, связанная с диаграммами Юнга. Вершик А.М. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с.20-29.

Изучена асимптотика сумм степеней нормированных размерностей комплексных неприводимых представлений группы перестановок S_N при $N \to \infty$. Вычислена предельная гиббсова мера на пространстве диаграмм Юнга. Задача связывается с одной одномерной моделью статистической физики. В приложении, написанном А.М.Пассом приведены численные и графические данные о свободной энергии, отвечающей изучаемой статсумме, при $N \sim 50$. Библ. - 10 назв.

УДК 519.4

Показатели Ляпунова, симметрические пространства и мультипликативная эргодическая теорема для полупростых групп Ли. Кайманович В.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия группы Ли и механика IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с.30-46.

Классическая теория характеристических показателей Ляпунова переформулируется в инвариантных геометрических терминах и переносится на произвольные некомпактные полупростые группы Ли с конечным центром. Доказываются мультипликативная эргодическая теорема (обобщение теоремы Оселедца) и глобальный закон больших чисел для полупростых групп Ли, а также критерии правильности по Ляпунову линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с субэкспоненциальным ростом коэффициентов. Библ. - 2I назв.

УДК 5I7.9

О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта порядка L . Каразеева Н.А., Котсиолис А.А., Осколков А.П. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IX". (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука, I987, с.47--53.

Построены аттрактор $\mathfrak{M}$ и динамическая система $\{\mathfrak{M}; V_t, -\infty<t<\infty\}$ начально-краевой задачи для двумерных уравнений движения жидкостей Олдройта порядка L . Библ. - I4 назв.

УДК 536.7

Формулы для формфакторов в квантовой модели Sh-$Gordon$. Кириллов А.Н. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.54--66.

В статье получены формулы для формфакторов в квантовой модели Sh-$Gordon$. Библ. - 4 назв.

УДК 536.7

Решение некоторых комбинаторных проблем, возникающих при вычислении корреляторов в точно-решаемых моделях. Кириллов А.Н., Смирнов Ф.А. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.67--79.

В работе явно разрешаются рекуррентные соотношения, возникающие при вычислении корреляторов в точно-решаемых моделях методом В.Е.Корепина. Решение дается в форме детерминантов некоторых матриц. Библ. - II назв.

УДК 536.7

Формфакторы в $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга. Кириллов А.Н., Смирнов Ф.А. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.80-I20.

В работе получены явные формулы для матричных элементов операторов тензора энергии-импульса и токов в $SU(2)$ -инвариантной модели Тирринга. Показано, что операторы, определяемые этими матричными элементами, коммутируют на пространственно-подобном интервале. Для операторов токов вычислены сингулярности коммутаторов в начале координат. Библ. - I2 назв.

УДК 5I9.I2

Тождества для дилогарифмической функции Роджерса, связанные с простыми алгебрами Ли. Кириллов А.Н. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64) Л., "Наука", I987, с.I2I-I33.

Доказываются новые тождества для дилогарифмической функции связанные с алгебрами Ли серии A_n и с классическими алгебрами Ли ранга $\leqslant 4$. Библ. - I4 назв.

УДК

Обобщенный гиростат Горячева - Чаплыгина в квантовой механике. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. - В кн.: Дифференциальная геометрия группы Ли и механика IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.I34-I4I.

Построено обобщение волчка Горячева - Чаплыгина, допускающее применение квантового метода обратной задачи рассеяния. Введенный дополнительный параметр играет ту же роль, что и спин узла в спиновых цепочках. Библ. - 5 назв.

УДК 5I7.9

Янгианы и универсальные обертывающие алгебры. Ольшанский Г.И. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX"(Зап. научн.семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.I42-I50

Исходя из универсальных обертывающих алгебр $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$, $n=1,2,\ldots$ - строится алгебра A , которая задает реализацию Янгиана $Y(\mathfrak{gl}(m))$ и служит "правильным" способом определить универсальную обертывающую алгебру для бесконечномерных классических алгебр Ли. Библ. - 9 назв.

УДК 5I-72:530.I45

Разделение переменных в модели Годена. Склинин Е.К. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап.научн. семин.ЛОМИ, т.I64). Л., "Наука", I987, с.I5I-I69.

Для модели Годена (вырожденный случай интегрируемой квантовой магнитной $SU(2)$-цепочки) проведено разделение переменных посредством явной замены координат. Получено описание пространства состояний на языке идеалов в кольцах полиномов. Исследовано строение собственных функций. Библ. - I3 назв.

УДК 517.9

О данных рассеяния для нестационарного уравнения Дирака. Кулиш П.П., Липовский В.Д., Широков А.В. - В кн.: "Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX" (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.164), Л., "Наука", 1987, с.170-175

Отмечено существование произвола в выборе данных рассеяния вспомогательной линейной системы для уравнения Дэви-Стюартсона -I. Установлена связь различных данных рассеяния и соответствующее преобразование матрицы сопряжения нелокальной задачи Римана. Библ. - 12 назв.

УДК 517.9

Согласованные скобки Пуассона для лаксовых уравнений и классические r -матрицы. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с.176-188

Для лаксовых уравнений и уравнений нулевой кривизны со спектральным параметром строится семейство согласованных линейных скобок Пуассона. Библ. - 12 назв.

УДК 519.117

Реализации представлений полугруппы Брауэра. Керов С.В. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика IX. (Зап.научн. семин.ЛОМИ, т.164). Л., "Наука", 1987, с. 189-193

Полугруппа Брауэра заменяет групповое кольцо симметрической группы при изучении коммутанта тензорных степеней представлений классических групп серий B_n, C_n, D_n. В работе дано элементарное описание ее неприводимых представлений. Библ. - 5 назв.

Издание осуществлено с оригинал-макета, подготовленного к печати Ленинградским отделением Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. IX

Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института им.В.А.Стеклова АН СССР

Утверждено к печати
Ленинградским отделением Математического института
им.В.А.Стеклова АН СССР

ИБ № 32945

Подписано к печати I4.I0.87.
М-I4489. Формат 60x90 I/I6. Бумага офсетная № I.
Печать офсетная. Усл.печ. л. I2.50. Усл. кр.-от. I2.62. Уч.-изд. л.I2.49. Тираж I300. Тип. зак. № 2I08. Цена I р.90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука". Ленинградское отделение.
I99034, Ленинград, В-34, Менделеевская лин., I.
Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства "Наука".
I99034, Ленинград, В-34, 9 линия, I2.