АКАДЕМИЯ НАУК
СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ЗАПИСКИ НАУЧНЫХ СЕМИНАРОВ ЛОМИ, том 95

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. III

Сборник работ под редакцией
Л. Д. ФАДДЕЕВА

ЛЕНИНГРАД
«НАУКА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1980

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, ГРУППЫ ЛИ И МЕХАНИКА. III.

Записки научных семинаров Ленинградского отделения ордена Ленина Математического института им. В.А.Стеклова
Том 95

ИБ № 8938

Утверждено к печати Ленинградским отделением ордена Ленина Математического института им. В.А.Стеклова АН СССР

Подписано к печати 26.08.80. М-II002. Формат 60х90 I/I6.
Бумага офсетная № I. Печать офсетная. Печ.л. I0. Усл.печ.л. I0.
Уч.-изд.л. 9.4I. Тираж I950. Изд. № 798I. Тип.зак. № 2018.
Цена I р. 40 к.

Ленинградское отделение издательства "Наука"
I99I64, Ленинград, В-I64, Менделеевская лин., I

Ордена Трудового Красного Знамени Первая типография издательства "Наука" I99034, Ленинград, В-34, 9 линия, I2

Д $\frac{20203-645}{055(02)-80}$ БЗ-93-77-79. I702050000

А.Г.Рейман

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ГРАДУИРОВАННЫМИ АЛГЕБРАМИ ЛИ

Введение

Цель данной работы – построение конечномерных гамильтоновых систем, обладающих рядом характерных свойств, которые и объясняют термин "интегрируемые":

1. Системы имеют много интегралов движения в инволюции, в ряде случаев доказана полная интегрируемость.

2. Построение их траекторий сводится к решению задачи факторизации в подходящей группе Ли.

3. Системы имеют лаксов вид, т.е. существует коммутаторное представление уравнений движения.

4. Системы имеют прозрачный механический смысл: их фазовое пространство является кокасательным расслоением, а гамильтониан распадается в сумму кинетической и потенциальной энергии.

Идеи, на которых основана предлагаемая здесь конструкция, появились и интенсивно развивались в течение последних пятнадцати лет. Главные из них – введенная А.А.Кирилловым [1] гамильтонова структура в пространстве, двойственном к алгебре Ли; схема редукции гамильтоновых систем с симметрией ([2]); представление Лакса [3] и его связь с полной интегрируемостью [4] ; наконец, установленная М.Адлером [5] замечательная связь представления Лакса с механикой на орбитах. По существу, наша конструкция является геометрической интерпретацией схемы Адлера. К моменту ее возникновения уже был накоплен большой материал по конечномерным лаксовым представлениям. Были найдены лаксовы пары для цепочек Тоды [6,7,8,9,10] , многомерного волчка [11] , систем одномерных частиц, обобщающих системы Ф.Калоджеро и Б.Сазерленда [8,12] . В работе С.П.Новикова [13] впервые был введен дополнительный спектральный параметр, что позволило линеаризовать лаксовы уравнения на якобиане соответствующей спектральной кривой [14] . Некоторые задачи (системы Калоджеро – Сазерленда [15] обобщенные цепочки Тоды [16]) были рассмотрены с точки зрения гамильтоновой редукции по группе симметрии. В нашей конструкции лаксово представление, гамильтонова редукция и спектральный параметр объединяются общей теоретико-групповой формулировкой.

Предлагаемая работа представляет собой подробное и усовершенствованное изложение той части статьи автора и М.А.Семенова-

Тян-Шанского [I7] , которая касается классических (т.е. не квантовых) систем. План ее следующий. В § I излагается основная геометрическая конструкция (теорема I). В качестве примера рассмотрено разложение алгебры псевдодифференциальных символов, отличное от использовавшегося М.Адлером. В § 2 дается интерпретация теоремы I на языке гамильтоновой редукции и приводятся необходимые для дальнейшего сведения об орбитах полупрямых произведений. В § 3 теорема I применяется к параболическим разложениям полупростых алгебр Ли и строятся новые интегрируемые системы, обобщающие цепочку Тоды. Рассматривается пополнение потоков таких систем, основанное на гамильтоновой редукции.

Следующие параграфы посвящены градуированным алгебрам Ли и связанным с ними уравнениям со спектральным параметром. В § 4 даются необходимые алгебраические определения, строятся разложения, к которым будет применена теорема I, и определяются соответствующие банаховы группы Ли - группы токов. В § 5 собраны отдельные факты, касающиеся гамильтоновой механики в пространстве, двойственном к градуированной алгебре Ли: вычисляется размерность орбит общего положения, обсуждаются различные скобки Пуассона, порождающие один и тот же набор лаксовых уравнений. Дается простое доказательство важных специальных случаев теоремы I в градуированной ситуации. § 6 посвящен конкретным примерам. Здесь определяются обобщенные периодические цепочки Тоды и системы с компактным конфигурационным пространством типа многомерных волчков. Среди новых интегрируемых систем отметим движение точки на различных однородных пространствах в линейном и квадратичном потенциале, систему двух билинейно взаимодействующих волчков, вращение волчка в линейном и квадратичном поле. Наконец, в § 7 с помощью алгебро-геометрических методов доказывается полнота интегралов движения в модельной задаче на орбитах общего типа.

Нужно отметить, что предпринятое здесь теоретико-групповое построение интегрируемых систем тесно смыкается с алгебро-геометрическим подходом работ [I3,I4,I8,I9] : автором и М.А.Семеновым-Тян-Шанским доказано, что задача факторизации, к которой сводится решение уравнений движения, в свою очередь решается в терминах функции Бейкера-Ахиезера, связанной со спектральной кривой. Таким образом, наш подход можно рассматривать как теоретико-групповую интерпретацию методов алгебраической геометрии.

Автор глубоко благодарен академику Л.Д.Фаддееву за постоянное внимание, поддержку и постановку задач, и М.А.Семенову-Тян-Шанскому за многочисленные полезные обсуждения.

§ I. Геометрическое построение лаксовых систем

Здесь излагается схема построения алгебры функций на двойственном к некоторой алгебре Ли пространстве, находящихся в инволюции относительно скобки Березина – Кириллова – Костанта. Эта схема является геометрическим обобщением алгебраической конструкции, предложенной М.Адлером [5] и Б.Костантом [20]. Здесь и далее в тексте группы Ли обозначаются прописными латинскими буквами, их алгебры Ли – соответствующими готическими.

I.I. Скобка Кириллова.

Напомним основные факты, касающиеся скобки Кириллова [2,2I]. Пусть G – группа Ли, $\mathfrak{g}$ – ее алгебра Ли. $\mathfrak{g}^*$ – двойственное пространство. С помощью левых сдвигов отождествим касательное расслоение TG с $G\times\mathfrak{g}$, а кокасательное расслоение T^*G с $G\times\mathfrak{g}^*$. На T^*G имеется каноническая скобка Пуассона. Рассмотрим ее сужение на пространство левоинвариантных функций; это пространство естественно отождествляется с пространством $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ функций на $\mathfrak{g}^*$. При этом линейные функции на $\mathfrak{g}^*$, то есть элементы $\mathfrak{g}$, являются гамильтонианами правых сдвигов в T^*G. Их скобка Пуассона совпадает со скобкой Ли в $\mathfrak{g}$. Итак, скобка Пуассона в пространстве $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$, которую в дальнейшем мы будем называть скобкой Кириллова, для линейных функций $x, y\in\mathfrak{g}$ равна

$$\{x,y\}=[x,y],$$

а тем самым для произвольных функций $\varphi,\psi\in\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$

$$\{\varphi,\psi\}(\xi)=\xi([d\varphi(\xi),d\psi(\xi)]),\quad \xi\in\mathfrak{g}^*.$$

Пусть $I(\mathfrak{g}^*)$ – алгебра инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*$. Очевидно, функции из $I(\mathfrak{g}^*)$ продолжаются до двусторонне инвариантных функций на T^*G.

ЛЕММА I.I.I. Центр алгебры Ли $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ совпадает с $I(\mathfrak{g}^*)$.

Отсюда видно, что скобка Кириллова обычно вырождена.

ЛЕММА I.I.2. Пусть на многообразии M задана (вырожденная) скобка Пуассона. Обозначим $\Lambda: T^*M\longrightarrow TM$ соответствующий гамильтонов оператор: $<\Lambda_m d\varphi, d\psi>=\{\varphi,\psi\}(m)$, $m\in M$. Тогда

а) распределение $m\mapsto\Lambda_m(T^*_m)$ в M интегрируемо;

б) на интегральных многообразиях этого распределения оператор Λ индуцирует симплектическую структуру.

Таким образом, вырожденная скобка Пуассона связана со слоеной симплектической структурой. Для скобки Кириллова $\Lambda_\xi(x)=$ $=ad^*x\cdot\xi$, поэтому интегральные многообразия совпадают с орбитами коприсоединенного действия. Другими словами, при ограничении на орбиты скобка Кириллова становится невырожденной.

I.2. Основная конструкция.

Предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ как векторное пространство представлена в виде линейной суммы двух своих подалгебр: $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{b}$. В этом случае для двойственного пространства имеется разложение $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a}^* \dotplus \mathfrak{b}^*$, где $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^\perp$, $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}^\perp$. Пусть A и B - связные подгруппы, отвечающие подалгебрам $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$.

Построим алгебру $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ - прямую сумму алгебр $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, и рассмотрим линейное отображение $\sigma_0 : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{g}$, $\sigma_0(\alpha \oplus \beta) = \alpha - \beta$. Можно считать, что отображение σ_0 определяет на пространстве $\mathfrak{g}$ новую структуру алгебры Ли; тем самым на $\mathfrak{g}^*$ имеются две скобки Кириллова.

ТЕОРЕМА I. (i) Функции из $I(\mathfrak{g}^*)$ находятся в инволюции относительно обеих скобок на $\mathfrak{g}^*$.
(ii) Пусть $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$. Уравнения движения на $\mathfrak{g}^*$, задаваемые гамильтонианом φ относительно второй скобки Кириллова, имеют вид

$$\dot{\xi} = ad^* d\varphi(\xi)_- \cdot \xi ,$$

где $d\varphi(\xi)_-$ - проекция $d\varphi(\xi)$ на $\mathfrak{b}$ параллельно $\mathfrak{a}$.
(iii) Пусть $exp\, t d\varphi(\xi) = a(t) b(t)$, где $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ - гладкие кривые в группах A и B. Решение указанных уравнений движения, начинающееся в точке ξ, имеет вид

$$\xi(t) = Ad^* b(t) \cdot \xi .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G_0 = A \times B$ и определим отображение $\sigma : G_0 \longrightarrow G$ следующим образом: $\sigma(a,b) = ab^{-1}$. Очевидно, дифференциал отображения σ A-инвариантен и B-эквивариантен, то есть $d\sigma(a,b) = Ad b \circ d\sigma(e)$. Так как $d\sigma(e) = \sigma_0$, получаем $d\sigma(a,b) = Ad b \circ \sigma_0$. Отсюда следует, что σ является погружением. Поэтому можно определить отображение $\sigma^* : T^*G_0 \longrightarrow T^*G$, положив на слое $T^*_{a,b}$ $\sigma^* = d\sigma(a,b)^{*-1}$. Если φ - функция на T^*G, то обозначим φ^σ функцию на T^*G_0: $\varphi^\sigma(m) = \varphi(\sigma^* m)$. Отображение σ^* является симплектическим погружением и $\{\varphi^\sigma, \psi^\sigma\} = (\{\varphi,\psi\})^\sigma$. Теперь для доказательства (i) остается заметить, что для $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$ функция φ^σ G_0-инвариантна слева.

ЛЕММА I.2. Траектории в T^*G, задаваемые гамильтонианом $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$, имеют вид

$$(g(t), \xi(t)) = (g(0)\, exp\, t d\varphi(\xi), \xi(0)) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения движения, задаваемые инвариантным гамильтонианом φ, имеют вид $\dot{\xi} = 0$, $\dot{g} = d\varphi(\xi)$, откуда и вытекает формула для траекторий.

Беря прообраз такой траектории (с $g(0) = e$) в $T^* G_0$ и вычисляя его компоненты в разложении $T^* G_0 = G_0 \times \mathfrak{g}_0^*$, мы получим траекторию гамильтониана φ^σ в $\mathfrak{g}_0^*$. Если $\exp t\, d\varphi(\xi) = a(t)\, b(t)$, то $(d\sigma)^*(\exp t\, d\varphi(\xi)) = \sigma_0^* \cdot Ad^* b(t)$. Отсюда следует утверждение (iii). Дифференцируя траекторию по t получаем (ii). Доказательство теоремы окончено.

Как видно из доказательства, отображение $\varphi \mapsto \varphi^\sigma$ является гомоморфизмом алгебры A -инвариантных слева и B -инвариантных справа функций на $T^* G$ со скобкой Пуассона в алгебру $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ со скобкой Кириллова.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в $\mathfrak{g}$ имеется инвариантная невырожденная билинейная форма, то можно отождествить $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$, ad^* с коммутатором, и уравнения движения приобретают Лаксов вид.

Как было отмечено в п$^{\circ}$ I.I, гамильтонова механика в $\mathfrak{g}_0^*$ развертывается на орбитах. Орбиты в $\mathfrak{g}_0^*$ – суть произведения орбит в $\mathfrak{a}^*$ и в $\mathfrak{b}^*$. В частности, если $f \in \mathfrak{a}^*$ – характер алгебры $\mathfrak{a}$, то есть одноточечная орбита, то ограничивая теорему I на подпространство $f + \mathfrak{b}^*$, получаем в качестве следствия теорему I0 и предложение I2 работы [I7] :

СЛЕДСТВИЕ I.2. Пусть f – характер алгебры $\mathfrak{a}$.

(i) Функции на $\mathfrak{b}^*$ вида $\varphi_f(\xi) = \varphi(\xi + f)$, $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$, находятся в инволюции относительно скобки Кириллова на $\mathfrak{b}^*$.

(ii) Уравнения движения на $\mathfrak{b}^*$, задаваемые гамильтонианом φ_f имеют вид

$$\dot{\xi} = ad^* d\varphi(\xi + f)_- \cdot (\xi + f).$$

(iii) Пусть $\exp t\, d\varphi(\xi + f) = a(t)\, b(t)$, где $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ – гладкие кривые в группах A и B. Решение указанных уравнений движения, начинающееся в точке ξ, имеет вид

$$\xi(t) = Ad^* b(t) \cdot (\xi + f) - f$$

или, эквивалентно,

$$\xi(t) = Ad_B^* b(t) \cdot \xi .$$

I.3. Алгебраическое доказательство.

Приведем также чисто алгебраическое доказательство первых двух пунктов теоремы I. Введем следующие обозначения: для $x \in \mathfrak{g}$ ($\xi \in \mathfrak{g}^*$) положим $x = x_+ + x_-$, $x_+ \in \mathfrak{a}$, $x_- \in \mathfrak{b}$ ($\xi = \xi_+ + \xi_-$, $\xi_+ \in \mathfrak{a}^*$, $\xi_- \in \mathfrak{b}^*$). Кроме того, обозначим

$ad^* x \cdot \xi = [x, \xi]^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ii). Уравнения движения на $\mathfrak{g}_0^*$ имеют вид

$$\dot{\xi} = -ad^*_{\mathfrak{g}_0} d\varphi^{\sigma}(\xi) \cdot \xi .$$

Если $\mathfrak{g}_0^*$ отождествляется с $\mathfrak{g}^*$ с помощью σ_0^* , то, как легко видеть, операция $ad^*_{\mathfrak{g}_0}$ превращается в

$$ad^*_{\mathfrak{g}_0} x \cdot \xi = [x_+, \xi_+]^*_{\xi} - [x_-, \xi_-]^*_- ,$$

и уравнения движения на $\mathfrak{g}^*$ относительно $\mathfrak{g}_0$ -скобки имеют вид

$$\dot{\xi} = [M_-, \xi_-]^*_- - [M_+, \xi_+]^*_+ , \quad M = d\varphi(\xi) . \qquad (I)$$

Воспользуемся теперь тем, что φ - инвариантная функция, то есть $[M, \xi]^* = 0$ или

$$[M_+, \xi_+]^* + [M_+, \xi_-]^* + [M_-, \xi_+]^* + [M_-, \xi_-]^* = 0 . \qquad (2)$$

Но $[M_+, \xi_-]^*_+ = 0$, так как $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{\perp}]^* \subset \mathfrak{a}^{\perp}$. По аналогичной причине $[M_-, \xi_+]^*_+ = [M_-, \xi_+]^*$. Выражая $[M_+, \xi_+]^*_+$ из (2) и подставляя в (I), получим

$$\dot{\xi} = [M_-, \xi_-]^*_- + [M_-, \xi_+]^* + [M_-, \xi_-]^*_+ = [M_-, \xi]^* .$$

Отсюда легко следует инволютивность функций $\varphi, \psi \in I(\mathfrak{g}^*)$. Действительно,

$$\{\varphi, \psi\}_0(\xi) = \langle \dot{\xi}, d\psi(\xi) \rangle = \langle [M_-, \xi]^*, d\psi(\xi) \rangle =$$

$$= -\langle M_-, [d\psi(\xi), \xi]^* \rangle = 0$$

поскольку $[d\psi(\xi), \xi]^* = 0$.

I.4. Пример: нестандартное разложение алгебры символов и укороченные уравнения Бенни.

Алгебраическая схема, использующая расщепление алгебры Ли и следы инвариантных функционалов на одной из подалгебр, была впервые предложена М.Адлером [5] и заключалась в первых двух пунктах следствия I.2, при дополнительном предположении $f = 0$. Основная цель его работы состояла в орбитной интерпретации новой гамильтоновой механики в пространстве дифференциальных операторов, построенной И.М.Гельфандом и Л.А.Диким [23] , поэтому главную роль в [5] играли алгебра $\mathfrak{g}$, состоящая из формальных псевдодифференциальных символов и подалгебры в ней, состоящие из символов дифференциальных ($\mathfrak{a}$) и вольтерровых ($\mathfrak{b}$) операторов. Такое разложение не попадает в область действия теоремы I. Действительно, алгебра дифференциальных символов не имеет не только нетривиальных характеров, но даже орбит конечной функциональной размерности. С другой стороны, все инвариантные полиномы на $\mathfrak{g}$ вида $\operatorname{tr}\varphi(L)$ обращаются на $\mathfrak{b}^*\simeq\mathfrak{a}$ в ноль. Тем самым схема п$^{\circ}$ I.2 становится бессодержательной, и Адлер был вынужден вслед за [23] обратиться к суррогату инвариантных функционалов (следам дробных степеней), которые определены лишь в подпространстве символов фиксированного порядка.

Здесь мы хотим отметить, что возможности алгебры символов не исчерпываются разложением Адлера, и проиллюстрировать Теорему I с помощью другого разложения алгебры $\mathfrak{g}$.

Напомним, что алгебра символов $\mathfrak{g}$ состоит из формальных рядов Лорана $L=\sum\limits_{n\leqslant N(L)} u_n\xi^n$ с функциональными коэффициентами и умножением

$$L_1\circ L_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\partial_\xi^k L_1\,\partial_x^k L_2 .$$

В $\mathfrak{g}$ имеется инвариантный след $\operatorname{tr}L=\int u_{-1}(x)\,dx$. Инвариантность означает, что $\operatorname{tr}[L_1,L_2]=0$. С помощью следа строится инвариантное невырожденное скалярное произведение

$$(L_1,L_2)=\operatorname{tr}(L_1\circ L_2).$$

Рассмотрим разложение $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{b}$, где

$$\mathfrak{a}=\Big\{\sum_{n\geqslant 1}u_n\xi^n\Big\},\qquad \mathfrak{b}=\Big\{\sum_{n\leqslant 0}u_n\xi^n\Big\}.$$

В этом разложении операторы умножения присоединяются к вольтерровым. Имеем

$$\mathfrak{b}^*\simeq\Big\{\sum_{n\geqslant -1}u_n\xi^n\Big\}.$$

Алгебра $\mathfrak{a}$ по-прежнему не имеет характеров, но сужения полиномов $\operatorname{tr}\varphi(L)$ на $\mathfrak{b}^*$ уже нетривиальны. Коприсоединенное действие $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{b}^*$ сохраняет фильтрацию, и подпространство символов с фиксированным старшим членом распадается в конечнопараметрическое семейство орбит.

Рассмотрим пример. Символы вида $L=\xi+u+v\xi^{-1}$ заполняют инвариантное (аффинное) подпространство в $\mathfrak{b}^*$. Скобка Пуассона переменных u и v имеет вид

$$\{u(x),v(y)\}=\delta'(x-y),\qquad \{u(x),u(y)\}=0=\{v(x),v(y)\}.$$

Орбиты задаются условиями $\int u = const$, $\int v = const$. Полиномы вида $H_n(u,v) = tr\, L^n$ находятся в инволюции. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{u} = \partial_x \frac{\delta H}{\delta v}, \qquad \dot{v} = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u}.$$

Для гамильтониана $H = \frac{1}{3} tr\, L^3 = \int (u^2 v + v^2 + u v')$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot{u} = \partial_x (u^2 + 2v - u') \\ \dot{v} = \partial_x (2uv + v') \end{cases}.$$

Для этой системы имеется Лаксова пара:

$$\dot{L} = [L, M], \qquad \text{где} \quad M = (L^2)_+ = \xi^2 + 2u\xi.$$

Приведем еще один аналогичный пример, в котором в качестве $\mathfrak{g}$ берется "квазиклассический предел" алгебры символов, изученный Д.М.Лебедевым и Ю.И.Маниным [22] в связи с уравнениями Бенни. Алгебра $\mathfrak{g}$ является алгеброй рядов Лорана $L = \sum u_n \xi^n$ с обычным умножением, а скобка Ли задается скобкой Пуассона по переменным x, ξ:

$$[L_1, L_2] = \partial_x L_1 \partial_\xi L_2 - \partial_\xi L_1 \partial_x L_2.$$

Все сказанное выше переносится на этот случай с той лишь поправкой, что для $L = \xi + u + v\xi^{-1}$ получим $\frac{1}{3} tr\, L^3 = \int (u^2 v + v^2)$ и предыдущая система упрощается $(H = \frac{1}{6} tr\, L^3)$:

$$\begin{cases} \dot{u} = u_x u + v_x \\ \dot{v} = (uv)_x \end{cases}.$$

В этой системе мы узнаем укороченную систему уравнений Бенни. $H_n = tr\, L^n$ – ее интегралы движения. Д.Р.Лебедев и Ю.И.Манин занимались более содержательной формулировкой системы Бенни в моментах A_n, $n = 0, 1, \ldots$. Законы сохранения для нее суть $\widetilde{H}_n = tr\, (\xi + A(\xi))^n$, где $A(\xi) = \sum_{n \geq 0} A_n \xi^{-n-1}$. Моменты укороченной системы $A_n = v u^n$, так что $\widetilde{H}_n = tr\,(\xi + \frac{v}{\xi - u})^n$. Оказывается H_n совпадает с $\widetilde{H}_n$. Действительно,

$$tr\,(\xi + v(\xi - u)^{-1})^n = \int dx \int dz \left(z + \frac{v}{z-u}\right)^n = \int dx \int dy\, (y + u + v y^{-1})^n =$$
$$= tr\, (\xi + u + v\xi^{-1})^n.$$

Отметим еще, что орбиты алгебры $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a}^* \simeq \{\sum_{n \leq -2} u_n \xi^n\}$ имеют конечную функциональную размерность. Например, $\mathcal{O}_1 = \{w\xi^{-2}\}$ – орбита. Применяя Теорему I к орбитам $\mathcal{O}_1 \times \{u, v\}$, получим функционалы в инволюции вида $H_n = \mathrm{tr}\, L^n$, $L = \xi + u + v\xi^{-1} + w\xi^{-2}$ при скобке Пуассона $\{w(x), w(y)\} = \delta'(x-y)$. Для гамильтониана $H = \frac{1}{6}\mathrm{tr}\, L^3$ получаем систему

$$\begin{cases} \dot u = u_x u + v_x \\ \dot v = (uv)_x + \frac{1}{3} w_x \\ \dot w = \frac{1}{3} u_x \end{cases} .$$

§ 2. Гамильтонова редукция и орбиты

Здесь излагается схема гамильтоновой редукции ([2]), которая используется в § 3 для пополнения потоков обобщенных цепочек Тоды. В терминах редукции объясняется теорема I. Затем рассматриваются орбиты полупрямого произведения группы K и векторного пространства V. Те из них, которые имеют структуру кокасательного расслоения к K -орбите в V^*, особенно интересны для механики.

2.I. Гамильтонова редукция.

Пусть связная группа Ли G гамильтоново действует на симплектическом многообразии (M, ω). Это означает, что

а) для каждого $x \in \mathfrak{g}$ соответствующее векторное поле на M гамильтоново с гамильтонианом H_x;

б) отображение $x \longmapsto H_x$ линейно, и

с) $H_{[x,y]} = \{H_x, H_y\}$.

Отображение моментов $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ сопряжено отображению $H : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}(M)$:

$$\langle \Phi m, x \rangle = H_x(m) .$$

Отображение моментов G - эквивариантно.

Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$ - регулярное значение отображения Φ, так что $M_f = \Phi^{-1}(f)$ - гладкое подмногообразие в M. Обозначим ω_f сужение формы ω на M_f, G_f - стационарную подгруппу элемента f. Многообразие M_f инвариантно относительно действия G_f, и орбиты этого действия высекаются на M_f орбитами группы G в M.

ЛЕММА 2.I.I. Ядро формы ω_f совпадает с касательным слоением к G_f -орбитам в M_f.

Отсюда следует, что все G_f -орбиты в (связной компоненте) многообразия M_f имеют одинаковую размерность и образуют слоение. Предположим, что это слоение является гладким расслоением с базой $\overline{M}_f$, которую будем называть приведенным пространством.

ЛЕММА 2.I.2. 2-форма ω_f проектируется в замкнутую невырожденную 2-форму $\overline{\omega}_f$ на $\overline{M}_f$.

Гамильтонова механика на $\overline{M}_f$ связана с механикой на M следующим образом. Пусть φ – G – инвариантная функция на M. Соответствующее гамильтоново поле X_φ также G -инвариантно и касается подмногообразия M_f. Поэтому определены естественные проекции функции φ и поля X_φ на $\overline{M}_f$: обозначим их $\overline{\varphi}$ и $\overline{X}_\varphi$. Пусть $X_{\overline{\varphi}}$ – гамильтоново поле на $\overline{M}_f$, порожденное гамильтонианом $\overline{\varphi}$.

ЛЕММА 2.I.3. Поток приведенного гамильтониана является редукцией исходного потока: $X_{\overline{\varphi}} = \overline{X}_\varphi$.

СЛЕДСТВИЕ 2.I. Если φ_1 и φ_2 – G – инвариантные функции на M, то $\{\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2\} = \overline{\{\varphi_1, \varphi_2\}}$.

Пример: действие группы Ли на своем кокасательном расслоении. Действие группы G на многообразии N канонически поднимается до гамильтонова действия G в $M = T^*N$: если X – векторное поле на N, отвечающее генератору $x \in \mathfrak{g}$, то гамильтониан H_x на M равен $H_x(m) = \langle m, X \rangle$. Рассмотрим, в частности, два действия группы G на себе – правыми и левыми сдвигами. Отождествим пространство T^*G с произведением $G \times \mathfrak{g}^*$ с помощью левых сдвигов. Тогда левое действие группы G запишется в виде: $h(g,\xi) = (hg, \xi)$, правое: $h \circ (g,\xi) = (gh^{-1}, Ad^* h \cdot \xi)$. Левое и правое отображение моментов имеют вид

$$\Phi_l(g,\xi) = Ad^* g \cdot \xi, \qquad \Phi_r(g,\xi) = -\xi.$$

В результате редукции над точкой ξ в обоих случаях получается приведенное многообразие, изоморфное орбите $\mathcal{O}_\xi$.

2.2. Редукция и схема Адлера.

Основная теорема п.I.2 может быть получена исходя из редукции пространства T^*G по левому действию подгруппы A и правому действию подгруппы B. При этом приведенное многообразие содержит орбиту алгебры $\mathfrak{g}_0$ в качестве открытого подмножества. Потоки биинвариантных гамильтонианов на T^*G полны (лемма I.2), поэтому редуцированные потоки на приведенном многообразии также полны. Тем самым редукция дает каноническое пополнение потоков лаксовых систем на орбитах в $\mathfrak{g}_0^*$. Необходимо лишь проверить, что приведенное пространство действительно является гладким многообразием, что будет проделано в следующем пункте для некоторых обобщенных цепочек Тоды.

Перейдем к точным формулировкам. Определим действие группы $G_0 = A \times B$ на G следующим образом: $(a,b)\cdot g = agb^{-1}$. Тогда отображение $\sigma : G_0 \to G$, $\sigma(a,b) = ab^{-1}$, также как и индуцированное отображение $\sigma^*: T^*G_0 \longrightarrow T^*G$, коммутируют с действием G_0. Пусть $\xi \in \mathfrak{g}_0^*$, $\mathcal{O}_\xi$ - орбита в $\mathfrak{g}_0^*$ проходящая через точку ξ. Обозначим $\overline{M}_\xi$ пространство, получающееся редукцией T^*G по указанному действию группы G_0 над точкой ξ.

Предположим, что разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ обладает следующим свойством: отображение $\sigma: G_0 \to G$ взаимно однозначно. Таковы, в частности, параболические разложения, которые обсуждаются в § 3.

ЛЕММА 2.2. Имеется естественное вложение орбиты $\mathcal{O}_\xi$ в пространство $\overline{M}_\xi$ в качестве открытой области. Это вложение переводит поток гамильтониана φ^σ на $\mathcal{O}_\xi$, $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$, в приведенный поток гамильтониана φ.

Доказательство вытекает из описания орбит группы G_0 в терминах редукции (см.конец п.2.I).

В сочетании со свойствами редукции лемма 2.2 поглощает теорему I, давая, в частности, простое доказательство инволютивности приведенных функций $\overline{\varphi}$, $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$. В связи с этим отметим, что в первых работах инволютивность интегралов движения лаксовых систем доказывалась путем вычислений. Вычислялась симплектическая форма в данных рассеяния [4], непосредственно вычислялась скобка Пуассона двух интегралов [6], или же использовались "асимптотические" соображения [8]. Затем появились более простые методы. Д.Каждан, Б.Костант и С.Стернберг [I5] интерпретировали результаты Ю.Мозера [8] и М.А.Ольшанецкого и А.М.Переломова [I2] с точки зрения гамильтоновой редукции систем с симметрией, использовав ее в направлении, обратном традиционному: не для упрощения сложных систем, а для усложнения простых. При этом стала очевидной инволютивность законов сохранения и получили естественное объяснение "явные" формулы для траекторий как результат факторизации явно заданных матриц. Однако связь между общей схемой редукции и представлением Лакса, которая прослеживалась на отдельных примерах, выглядела случайной.

2.3. Орбиты полупрямых произведений.

Пусть задано линейное представление группы Ли K в пространстве V. Обозначим $G = K * V$ соответствующую аффинную группу - полупрямое произведение K и V. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ раскладывается в полупрямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + V$ и $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{k}^* + V^*$

Пусть $\xi \in \mathfrak{g}^*$, $\xi = \pi + a$, где $\pi \in \mathfrak{k}^*$, $a \in V^*$.

Введем следующие обозначения:

K_a - стационарная подгруппа точки a при Ad^* - действии K в V^*,

$P: k^* \longrightarrow k_a^*$ - естественная проекция,

$\Phi_a : T^*K \longrightarrow k_a^*$ - правое отображение моментов,

$$\Phi_a(\kappa, \rho) = -P\rho, \quad \kappa \in K, \quad \rho \in k^*.$$

Обозначим $M_\pi = \Phi_a^{-1}(-P_\pi)$ и пусть $\overline{M}_\pi$ - результат редукции пространства T^*K по правому действию подгруппы K_a над точкой $-P\pi$.

Следующее предложение обобщает лемму на стр.97 работы [17]

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Орбита $\mathcal{O}_\xi$ группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$ изоморфна как симплектическое K-пространство многообразию $\overline{M}_\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сопоставим вектору $u \in V$ функцию u_a на группе K по формуле $u_a(\kappa) = a(\kappa^{-1}u)$. Очевидно, отображение $u \longmapsto u_a$ K-эквивариантно. Определим гамильтоново действие группы G на пространстве T^*K следующим образом: группа K действует левыми сдвигами, а гамильтонианами действия подгруппы V являются функции u_a. Соответствующее отображение моментов $\Phi : T^*K \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ имеет вид

$$\Phi(\kappa, \rho) = Ad^*\kappa(\rho + a).$$

Очевидно, действие подгруппы K_a правыми сдвигами коммутирует с построенным действием группы G, поэтому многообразие M_π G-инвариантно. Поскольку $M_\pi = K \times (\pi + k_a^\perp)$, то

$$\Phi(M_\pi) = Ad^*K(\pi + a + k_a^\perp).$$

Легко убедиться в том, что $Ad^*V(a) = k_a^\perp$. Отсюда следует, что $\Phi(M_\pi) = \mathcal{O}_\xi$. Для завершения доказательства остается заметить, что слои отображения Φ, суженного на M_π совпадают с орбитами группы $(K_a)_{P\pi}$ - стационарной подгруппы точки $P\pi$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Предположим, что $\pi = 0$, то есть $\xi = a$. Обозначим $K \cdot a$ орбиту точки a под действие группы K. Тогда орбита $\mathcal{O}_\xi$ изоморфна как симплектическое K-пространство кокасательному расслоению $T^*(K \cdot a)$. Изоморфизм $T^*(K \cdot a) \longrightarrow \mathcal{O}_\xi$ задается отображением моментов

$$(\kappa \cdot a, \rho) \longmapsto Ad^*\kappa(\rho + a), \quad \rho \in k_a^\perp.$$

В этой формуле орбита $K \cdot a$ рассматривалась как однородное пространство K/K_a. Если рассмотреть $K \cdot a$ как подмногообразие V^*, то кокасательное пространство $T^*_{\kappa \cdot a}$ станет факторпространством пространства V. Пусть $v \in V$ - представитель элемента из $T^*_{\kappa \cdot a}$. Тогда ему отвечает импульс $\rho = -\kappa^{-1} ad^* v(\kappa \cdot a)$ и точка $\eta = -ad^* v(\kappa \cdot a) + \kappa \cdot a$ на орбите $\mathcal{O}_\xi$.

Пусть на группе K задана биинвариантная (псевдо-) риманова метрика. Тогда на пространстве T^*K определена двойственная к метрике биинвариантная квадратичная функция - кинетическая энергия E. Если N - однородное K-пространство, то E проектируется в K-инвариантную "кинетическую энергию" E_N на T^*N : $E_N = E \circ \Phi$, где $\Phi: T^*N \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ - отображение моментов.

В общем случае энергия E_N может быть вырождена (как квадратичная форма). Критерий невырожденности E_N - редуктивность стационарной подгруппы K_u некоторой (тем самым любой) точки $u \in N$. Последнее означает, что сужение (псевдо-) римановой метрики из K на K_u невырождено. В этом случае на однородном пространстве N определена K-инвариантная "ортогональная проекция" метрики из K. Легко видеть, что кинетическая энергия на T^*N, отвечающая этой метрике, совпадает с E_N.

§ 3. Обобщенные цепочки Тоды

Незамкнутая цепочка Тоды была, по-видимому, первой конечномерной системой, исследованной с помощью представления Лакса [6,7,8], и первой системой, для которой все ранее известные результаты были полностью воспроизведены по схеме Адлера. ([2], [32]). Здесь обсуждаются различные системы, связанные с параболическим разложением алгебры Ли, в этом смысле обобщающие классическую цепочку Тоды. Как правило, эти системы неполны: в них имеются траектории, уходящие на бесконечность за конечное время. Предлагается канонический способ пополнения таких систем, основанный на гамильтоновой редукции и дающий одновременное пополнение потоков всех интегралов движения.

3.I. Определения.

Пусть $\mathfrak{g}$ - полупростая вещественная алгебра Ли, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_+$ - ее разложение Ивасавы, Δ - система корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ - разбиение на положительные и отрицательные корни, согласованное с разложением Ивасавы: если $\mathfrak{g}_\alpha$ - собственное подпространство, отвечающее корню α, то $\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$. Обозначим P систему простых корней в Δ_+.

Пусть $\mathfrak{m}$ - централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{k}$. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_+$ - минимальная параболическая подалгебра. Прочие параболические подалгебры суть подалгебры, содержащие $\mathfrak{p}$. Для них справедливо разложение Ленглендса

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{n}}_+ ,$$

где $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{n}}_+ \subset \mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{l}$ - редуктивная подалгебра, централизующая $\bar{\mathfrak{a}}$ и нормализующая $\bar{\mathfrak{n}}_+$.

Определим $\mathfrak{g}$-градуировку алгебры $\mathfrak{g}$ следующим образом. Пусть элемент $x_0 \in \bar{\mathfrak{a}}$ задан условиями $\alpha(x_0)=1$ для тех корней $\alpha \in P$, которые не ортогональны к $\bar{\mathfrak{a}}$. Тогда собственные значения оператора $ad\, x_0$ – целые числа. Обозначим d_i собственное подпространство, отвечающее собственному значению i. Имеем

$$\ell + \bar{a} = d_0, \quad \bar{n}_+ = \bigoplus_{i>0} d_i \qquad \bar{n}_- = \bigoplus_{i<0} d_i$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{i \geqslant 0} d_i \qquad \mathfrak{g}_- = \bigoplus_{i \leqslant 0} d_i .$$

Теперь мы готовы к построению систем, указанных в заглавии. С помощью формы Киллинга B отождествим $\mathfrak{g}^*$ с $\mathfrak{g}$ и ad^* с ad. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_-$ – параболическое разложение алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_- \dot{+} \mathfrak{g}_+$ – двойственное разложение, $\mathfrak{n}_+^* \simeq \mathfrak{n}_-$; $\mathfrak{g}_-^* \simeq \mathfrak{g}_+$. Легко видеть, что ad^* – действие алгебры $\mathfrak{g}_-$ в $\mathfrak{g}_+$ не повышает $\mathfrak{g}$-градуировку:

$$ad^* \mathfrak{g}_- \cdot d_j \subset \bigoplus_{i=0}^{j} d_i .$$

Тем самым, подпространства $\mathcal{D}_j = \bigoplus_{i=0}^{j} d_i$ инвариантны и распадаются на G_--орбиты.

По доказанному в п.2.3, орбита $\mathcal{O}_e$, проходящая через элемент $e \in d_1$, изоморфна многообразию $T^*(L\bar{A} \cdot e)$ как симплектическое $L\bar{A}$-пространство. Кроме того, сужая форму Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathcal{O}_e$ получим $L\bar{A}$-инвариантную кинетическую энергию E:

$$E(\xi) = \frac{1}{2} B(\xi, \xi), \qquad \xi \in \mathcal{O}_e .$$

Применим следствие I.2 к орбите $f + \mathcal{O}_e$, учитывая, что характеры алгебры $\mathfrak{n}_+$ задаются элементами $f \in d_{-1}$. Вычисляя форму Киллинга на $f + \mathcal{O}_e$, получим гамильтониан вида

$$H = E + V_f ,$$

где E – инвариантная кинетическая энергия на $\mathcal{O}_e$, V_f – потенциальная функция на $\mathcal{O}_e$, $V_f(\xi) = B(\xi, f)$.

Сформулируем следствие I.2 в этой конкретной ситуации:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.I. (i) Гамильтонова система на $\mathcal{O}_e$ с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} B\,|_{f+\mathcal{O}_e}$ обладает интегралами движения в инволюции вида $\varphi|_{f+\mathcal{O}_e}$, где $\varphi \in I(\mathfrak{g})$.

(ii) Уравнения движения имеют Лаксов вид

$$\dot{\xi} = [\xi_-, \xi],$$

где $\xi \in f + \mathfrak{G}_e$, ξ_- – $\mathfrak{g}_-$ – компонента ξ.

(iii) Траектории системы можно получить, разлагая $\exp t\xi$ в произведение $\exp t\xi = a(t)\, b(t)$, где $a(t) \in N_+$, $b(t) \in Q_-$; траектория, начинающаяся в точке ξ имеет вид

$$\xi(t) = \mathrm{Ad}\, b(t) \cdot \xi .$$

Мы будем называть эти системы обобщенными цепочками Тоды, или Q -цепочками.

3.2. Главные нильпотентные элементы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть элемент $f \in \mathfrak{d}_{-1}$ таков, что $\mathfrak{g}_f \cap \mathfrak{n}_+ = \{0\}$, $\mathfrak{g}_f$ централизатор f в $\mathfrak{g}$. Тогда присоединенное действие подгруппы N_+ на аффинном подпространстве $f + \mathfrak{g}_+$ – свободное и собственное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что действие свободно. Из условия, наложенного на f, следует, что инфинитезимальное действие алгебры $\mathfrak{n}_+$ свободно, т.е. $[n, \xi] = 0$, $n \in \mathfrak{n}_+$, $\xi \in f + \mathfrak{g}_+$ влечет $n = 0$. Действительно, пусть $n = \sum_{i>0} n_i$, $\xi = f + \sum_{i \geqslant 0} \xi_i$ – градуированные разложения. Тогда $[n, \xi] = 0$ влечет

$$[n_1, f] = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[n_j, f] + \sum_{i=1}^{j-1} [n_i, \xi_{j-i-1}] = 0 .$$

Отсюда, учитывая что $[n, f] = 0$ влечет $n = 0$, рекуррентно получим $n_i = 0$. Так как N_+ – нильпотентная подгруппа, то из $\mathrm{Ad}\, g \cdot \xi = \xi$, $g \in N_+$ следует $g = \exp n$ и $[n, \xi] = 0$, т.е. $n = 0$ и $g = e$.

Докажем теперь, что действие N_+ собственное. Это означает, что если $\xi_k' = \mathrm{Ad}\, g_k \cdot \xi_k$ и при этом $\xi_k \to \xi$, $\xi_k' \to \xi'$, то последовательность g_k компактна. Для доказательства рассмотрим процедуру восстановления элемента g из уравнения $\xi' = \mathrm{Ad}\, g \cdot \xi$. Пусть $g = \exp n$, тогда $\mathrm{Ad}\, g = \exp \mathrm{ad}\, n = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} (\mathrm{ad}\, n)^k$. Имеем уравнение

$$\sum \frac{1}{k!} (\mathrm{ad}\, n)^k \cdot \xi = \xi' .$$

Раскладывая это равенство по градуированным компонентам, $n = \sum n_i$, $\xi = f + \sum \xi_i$, $\xi' = f + \sum \xi_i'$, получим

$$\xi_0 + \mathrm{ad}\, n_1 \cdot f = \xi_0'$$

$$\xi_1 + (\mathrm{ad}\, n_1)^2 \cdot f + \mathrm{ad}\, n_1 \cdot \xi_0 + \mathrm{ad}\, n_2 \cdot f = \xi_1'$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_i(n_1, \dots, n_i ; \xi_0, \dots, \xi_i) + \mathrm{ad}\, n_{i+1} \cdot f = \xi_i' .$$

Из свойств элемента f следует, что эти соотношения однозначно разрешимы относительно n :

$$n_{i+1} = (ad\, f|_{d_{i+1}})^{-1} \left(P_i(n_1,\dots,n_i; \xi_0,\dots,\xi_i) - \xi_i' \right).$$

Таким образом, n полиномиально зависит от ξ, ξ' . Отсюда вытекает собственность действия.

Для борелевской подалгебры $\mathfrak{g}_+$ в расщепимом случае Б.Костант построил линейное сечение к действию группы N_+ . Предложение 3.2 – ослабленный, но более универсальный вариант теоремы I.2 из [24] .

Элементы $f \in d_{-1}$ такие, что $\mathfrak{g}_f \cap \mathfrak{n}_+ = \{0\}$, будем по аналогии с [25] называть главными.

Напомним, что элемент $x_0 \in \bar{\mathfrak{a}}$ задает $\mathfrak{g}$ -градуировку в $\mathfrak{g}$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $f \in d_{-1}$. Если подпространство $ad\, f \cdot d_1 \subset d_0$ содержит элемент x_0 , то f – главный нильпотентный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[f, e] = x_0$, $e \in d_1$, то тройка (e, x_0, f) образует стандартный базис алгебры $s\ell(2)$. Из теории представлений этой алгебры, примененной к ее ad -представлению в $\mathfrak{g}$, следует, что если $[f, x] = 0$, то x лежит в сумме собственных подпространств оператора $ad\, x_0$, соответствующих неположительным собственным значениям, то есть $x \in \mathfrak{g}_-$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. ([25]). Пусть $\mathfrak{g}$ – расщепимая полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}_+$ – ее борелевская подалгебра. Элемент $f = \sum_{\alpha \in -P} f_\alpha$, $f_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ главный тогда и только тогда, когда все f_α отличны от нуля.

3.3. Пополнение потоков обобщенных цепочек Тоды.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{g}_-$ – параболическое разложение алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{g}_+$ – двойственное разложение. Отождествим пространство T^*G с произведением $G \times \mathfrak{g}^*$ с помощью правых сдвигов. Тогда левое действие группы G запишется в виде: $h(g, \xi) = (hg, Ad\, h \cdot \xi)$, правое: $h_0(g, \xi) = (gh^{-1}, \xi)$. Левое и правое отображение моментов имеют вид

$$\Phi_\ell(g, \xi) = \xi, \qquad \Phi_r(g, \xi) = -Ad^* g^{-1} \cdot \xi .$$

Пусть $\Phi : T^*G \to \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{g}_+$ – отображение моментов, соответствующее левому действию подгруппы N_+ и правому действию подгруппы Q_- :

$$\Phi(g, \xi) = Pr_{\mathfrak{n}_-}(\xi) \oplus -Pr_{\mathfrak{g}_+}(Ad\, g^{-1} \cdot \xi) .$$

Для $f \in \mathfrak{n}_-$, $c \in \mathfrak{g}_+$ обозначим $M_{f,c} = \Phi^{-1}(f \oplus c)$. Пусть Q_c – стационарная подгруппа элемента c .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.I. Пусть f – главный нильпотентный элемент. Тогда

(i) $M_{f,c}$ – гладкое подмногообразие в T^*G.

(ii) Факторпространство $\overline{M}_{f,c} = N_+ \setminus M_{f,c} / Q_c$ – гладкое симплектическое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Достаточно доказать, что $f \oplus c$ – регулярное значение отображения Φ, то есть что дифференциал $d\Phi_{g,\xi}: \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \to \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{q}_+$ отображения Φ в точке $(g,\xi) \in M_{f,c}$ сюръективен. Легко видеть, что

$$d\Phi_{g,\xi}(x,y) = Pr_{\mathfrak{n}_-} y \oplus Pr_{\mathfrak{q}_+} Ad\, g^{-1}([x,\xi]-y).$$

Для доказательства сюръективности $d\Phi_{g,\xi}$ достаточно проверить, что отображение $(x,y) \to [x,\xi]-y$, отображающее $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{q}_+$ в $\mathfrak{g}$, сюръективно. Но если элемент $z \in \mathfrak{g}$ таков, что $B([x,\xi]-y, z) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{q}_+$, то $z \in \mathfrak{n}_+$ и $[z,\xi] = 0$. Так как $\xi \in f + \mathfrak{q}_+$, а элемент f – главный, то отсюда следует, что $z = 0$. Тем самым (i) доказано.

(ii) Достаточно доказать, что группа $G_0 = N_+ \times Q_-$ действует на многообразии $G \times (f + \mathfrak{q}_+) \supset M_{f,c}$ свободно и собственно. Этот факт прямо следует из предложения 3.2.

В п.2.2 было отмечено, что орбита $\mathcal{O}_c$ естественно вложена в многообразие $\overline{M}_{f,c}$. Пусть $\mathfrak{q}$ – минимальная параболическая подалгебра в $\mathfrak{g}$, $f = \sum_{\alpha \in -P} f_\alpha$ и все f_α отличны от нуля. В этих условиях мы докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.2. Дополнение $\overline{M}_{f,c} \setminus \mathcal{O}_c$ является объединением подмногообразий меньшей размерности и поток Q – цепочки трансверсален к этим подмногообразиям.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением Брюа

$$G = \bigcup_{w \in W} N_+ w Q_- .$$

Орбита $\mathcal{O}_c$ лежит над старшей клеткой $N_+ Q_-$; мы покажем, что подмножества приведенного многообразия, лежащие над другими клетками, имеют меньшую размерность. Многообразие $\overline{M}_{f,c}$ получается в результате факторизации многообразия

$$M_{f,c} = \{(g,\xi) : Pr_{\mathfrak{n}_-} \xi = f,\ Pr_{\mathfrak{q}_+} Ad\, g^{-1} \cdot \xi = -c\}.$$

по левому действию группы N_+ и правому действию группы Q_-. Пусть $g = n w q$, $\xi = f + y$; $n \in N_+, q \in Q_-, y \in \mathfrak{q}_+$. Тогда

$$Ad\, g^{-1} \cdot \xi = -c + x, \quad x \in \mathfrak{n}_-,$$

то есть

$$Ad\, w^{-1} \cdot Ad\, n^{-1} \xi = Ad\, q(-c + x)$$

или
$$\mathrm{Ad}\, w^{-1}(f+y') = c' + x' .$$
Окончательно получаем уравнение
$$\mathrm{Ad}\, w^{-1}\cdot y' - x' = c' - \mathrm{Ad}\, w^{-1} f . \qquad (*)$$
Если пространство решений этого уравнения непусто, то его размерность равна $d(w) = \dim(\mathrm{Ad}\, w^{-1}\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{n}_-)$. С другой стороны, коразмерность клетки $N_+ w Q_-$ G равна
$$\dim G - \dim N_+ w Q_- = \dim(w^{-1} N_+ w \cap Q_-) = d(w).$$
Так как группа $N_+ \times Q_c$ действует в $M_{f,c}$ свободно, то достаточно доказать, что те точки $n wq$, для которых (*) разрешимо, т.е. те, для которых $(\mathrm{Ad}\, q\cdot c + \mathrm{Ad}\, w^{-1} f) \in \mathrm{Ad}\, w^{-1}\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{n}_-$ – образуют в клетке $N_+ w Q_-$ подмножество меньшей размерности. Пусть $\alpha \in -P$ таков, что $w^{-1}\alpha \in \Delta_+$. Тогда $\mathrm{Ad}\, w^{-1} f_\alpha \notin \mathrm{Ad}\, w^{-1}\mathfrak{g}_+$. Если $\beta = w^{-1}\alpha \notin P$, то решений у (*) нет вовсе. Если же $\beta \in P$, то возникает следующее условие на q. Пусть $q = ma\bar{n}$ – разложение Ленглендса, c_β – компонента элемента c в пространстве $\mathfrak{g}_\beta$. Тогда для разрешимости (*) необходимо, чтобы $\mathrm{Ad}(ma)\cdot c_\beta = \mathrm{Ad}\, w^{-1}\cdot f_\alpha$. Это условие выделяет в MA подмногообразие коразмерности $\geqslant 1$, которому соответствует подмногообразие той же коразмерности в клетке $N_+ w Q_-$. Последнее вытекает из существования однозначного разложения $N_+ w Q_- = N_+ w MA N_-^{(w)}$, $N_-^{(w)} \subset N_-$.

Докажем теперь, что поток Q – цепочки трансверсален "младшим клеткам". Достаточно доказать трансверсальность потока в $M_{f,c}$ (до редукции), траектории которого по лемме I.2 имеют вид $(g(t), \xi(t)) = (g \exp t\xi, \xi)$, $(g,\xi) \in M_{f,c}$. Пусть $g \in N_+ w Q_-$, $g = nwq$. Касательное пространство к клетке $N_+ w Q_-$ (в правоинвариантном базисе) в точке g есть $T_g = \mathfrak{n}_+ + \mathrm{Ad}(nw)\cdot\mathfrak{q}_-$. Касательный вектор к траектории в точке (g,ξ) имеет вид $(\xi, 0)$, $\xi \in f + \mathfrak{g}_+$. Поскольку при $w \neq 1$ элемент f не лежит в подалгебре $\mathrm{Ad}\, w\, \mathfrak{g}_-$, то вектор ξ не принадлежит пространству T_g и траектории не касаются младших клеток.

3.4. Симметрическая реализация цепочек Тоды.

Рассмотрим теперь "малые" цепочки Тоды, связанные с подалгеброй $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_-$; в расщепимом случае $\mathfrak{b}$ – борелевская подалгебра. Подалгебра $\mathfrak{b}$ участвует в двух разложениях: треугольном $\mathfrak{g} = (\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{m}) \dot{+} \mathfrak{b}$ и разложении Ивасавы $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{b}$. Оказывается, что цепочки Тоды, построенные по двум этим разложениям, эквивалентны.

Цепочка Тоды, отвечающая разложению $\mathfrak{g} = (\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{m}) \dot{+} \mathfrak{b}$, определена на орбите $\mathcal{O}_e$, $e = \sum_{\alpha \in P} e_\alpha$, общая точка которой имеет вид $\xi = p + \sum c_\alpha e_\alpha$, $p \in \mathfrak{a}$.

Разложению $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{b}$ отвечает симметрическая реализация $\mathfrak{b}^* \simeq \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ – разложение Картана. Орбита цепочки $\mathcal{O}'_e$ проходит через точку $e - \theta e$ (θ – автоморфизм Картана) и ее общая точка имеет вид

$$\xi' = p' + \sum c'_\alpha (e_\alpha - \theta e_\alpha), \quad p' \in \mathfrak{a}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.I. (i) Отображение $\mathcal{O}'_e \to \mathcal{O}_e : p = \frac{1}{2} p'$, $c_\alpha = \frac{1}{4} c'^2_\alpha$ является симплектическим диффеоморфизмом.
(ii) Если $f = -\theta e$, φ – инвариантный полином на $\mathfrak{g}$ степени d, то

$$\varphi(\xi') = 2^d \varphi(\xi + f).$$

(iii) Гамильтоновы потоки, которые задаются гамильтонианами $\varphi \in I(\mathfrak{g})$ на орбите $\mathcal{O}_e$, полны.

ЗАМЕЧАНИЕ: для произвольного вектора сдвига f утверждения (ii) и (iii) неверны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Непосредственно следует из явного вида скобок Пуассона: $\{p, c_\alpha\} = \alpha = \{p', c'_\alpha\}$.
(ii) Пусть $u = v \cdot \prod_{\alpha \in \Delta} e_\alpha^{k_\alpha}$ – одночлен степени d, входящий в φ (здесь v – одночлен в $\mathfrak{a}$). Ввиду A – инвариантности многочлена φ, $\sum k_\alpha \cdot \alpha = 0$. Если для некоторого $\alpha \in \Delta \setminus (P \cup -P)$ коэффициент $k_\alpha > 0$, то $u(\xi') = u(\xi + f) = 0$. Если же $k_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \Delta \setminus (P \cup -P)$, то $u = v \prod_{\alpha \in P} (e_\alpha e_{-\alpha})^{k_\alpha}$ откуда $u(\xi') = 2^d u(\xi + f)$.
(iii) Следует из разложения Ивасавы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции $\varphi(\xi)$, $\varphi \in I(\mathfrak{g})$, $\xi \in \mathfrak{p}$, определенные на $\mathfrak{b}^* \simeq \mathfrak{p}$, очевидным образом M – инвариантны. Вернемся к минимальной параболической подалгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{b}$. Пусть $\eta \in \mathfrak{g}^*$, $\eta = \pi + \xi$, $\pi \in \mathfrak{m}^*$, $\xi \in \mathfrak{b}^*$. Мы получаем, что функции на $\mathfrak{g}^*$ вида $\tilde{\varphi}(\eta) = \varphi(\xi)$ коммутируют между собой и с функциями вида $\tilde{\psi}(\eta) = \psi(\pi)$. Выбирая коммутативную по скобке Пуассона подалгебру функций на $\mathfrak{m}^*$, получим инволютивную систему функций $\{\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$ на $\mathfrak{g}^*$. Несколько модифицируя доказательство теоремы I, можно доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4.2. Потоки гамильтонианов $H = \tilde{\varphi} + \tilde{\psi}$, $\varphi \in I(\mathfrak{g})$, $\psi \in \mathcal{F}(\mathfrak{m}^*)$ в пространстве $\mathfrak{g}^*$ полны.

3.5. Примеры.

а) Цепочки Тоды, связанные с разложением Ивасавы расщепимых полупростых алгебр Ли перечислены в [IO]. В последнее время они подробно изучались в [16], [20]. Здесь они обсуждаются лишь для иллюстрации предыдущих результатов. Мы будем использовать разложение Гаусса $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{b}_-$, $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}_-$. Пусть $B = AN_-$ - связная компонента борелевской подгруппы.

Орбита $\mathcal{O}_e \subset \mathfrak{b}_+$, проходящая через элемент $e \in \mathfrak{d}_1$, изоморфна $T^*(A \cdot e)$ (следствие 2.3). Выберем ненулевые элементы $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и положим $e = \sum_{\alpha \in P} e_\alpha$. Тогда отображение $A \to A \cdot e$ взаимно однозначно и $\mathcal{O}_e \simeq T^* A$. Экспоненциальное отображение отождествляет $\mathfrak{a}$ с A и, тем самым, $T^*\mathfrak{a}$ с $T^* A$. Следствие 2.3 сопоставляет точке $(p, q) \in T^*\mathfrak{a}$ точку $\xi = p + \sum_{\alpha \in P} e^{\langle q, \alpha \rangle} e_\alpha \in \mathcal{O}_e$ Выбирая вектор сдвига $f \in \mathfrak{d}_{-1}$, получим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} B(p, p) + \sum_{\alpha \in P} f_\alpha e^{\langle q, \alpha \rangle}.$$

Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\xi} = [\, \xi + f,\ p + f \,].$$

Если все $f_\alpha \geqslant 0$, то система полна (п.$^{\circ}$ 3.4). В противном случае предложение 3.3.I дает пополнение цепочки Тоды с "неправильными" знаками в потенциале (при условии $f_\alpha \neq 0 \ \forall \alpha \in P$).

б) Неабелевой цепочкой Тоды называется гамильтонова система на фазовом пространстве $T^*(G^n)$, $G = GL(m, \mathbb{R})$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{tr} g_{i+1} g_i^{-1}, \quad p_i = \dot{g}_i g_i^{-1}.$$

Система обладает группой симметрии $G \times G$, действующей сдвигами на конфигурационном пространстве G^n:

$$(g, h) \cdot (g_1, \ldots, g_n) = (g g_1 h^{-1}, \ldots, g g_n h^{-1}).$$

Представим матричную алгебру $\mathfrak{gl}(m,n)$ как тензорное произведение $\mathfrak{gl}(m,n) = \mathfrak{gl}(m) \otimes \mathfrak{gl}(n)$ и рассмотрим блочную параболическую подалгебру $\mathfrak{q} = \mathfrak{gl}(m) \otimes \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ - борелевская подалгебра в $\mathfrak{gl}(n)$. Пусть Q - соответствующая параболическая подгруппа, $Q = LAN$ - разложение Ленглендса. Тогда $LA = G^n$. Из предложения 2.3 следует, что орбита $\mathcal{O}_e$ Q-цепочки является редукцией пространства $T^* G^n$. Пусть $e = \mathbb{1}_m \otimes e_n$, $f = \mathbb{1}_m \otimes f_n$, где e_n и f_n - "исходные данные" классической цепочки Тоды в $\mathfrak{gl}(n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. (i) Q-цепочка Тоды на орбите $\mathcal{O}_e$ (п.$^{\circ}$ 3.I) совпадает с редукцией неабелевой цепочки Тоды по правому действию группы симметрии G над точкой $0 \in \mathfrak{g}^*$.

(ii) f – $\mathfrak{g}$ – главный элемент.

Отметим еще, что левое действие группы симметрии G в исходной цепочке Тоды превращается в Q-цепочке (т.е. после редукции) в Ad-действие блочно-диагональной подгруппы $G = diag\, GL(m) \subset GL(mn)$. Неабелева цепочка Тоды неполна, ее кинетическая энергия индефинитна. Число независимых интегралов движения, указанных в предложении 3.I, равно $mn-1$ и меньше размерности конфигурационного пространства, равной $m^2(n-1)$. Введение спектрального параметра добавляет новые интегралы движения (§ 7).

в) Перечислим цепочки, связанные с минимальными параболическими подалгебрами. Комплексные полупростые алгебры Ли, рассматриваемые как вещественные, приводят к очевидной комплексификации расщепимых цепочек.

I) $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbb{H})$: кватернионная цепочка Тоды, аналогичная неабелевой. Конфигурационное пространство есть $\mathbb{H}^{*n}/\mathbb{H}^*$, $\mathbb{H}^*$ – мультипликативная группа кватернионов. Гамильтониан $H = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\sum_1^n (\dot{g}_i g_i^{-1})^2 + \sum_1^{n-1} c_i g_{i+1} g_i^{-1}\right]$, c_i – фиксированные кватернионы. Справедлив аналог предложения 3.5. Если $c_i \neq 0$, то заменой переменных можно добиться $c_i = 1$.

2) $\mathfrak{g} = so(m,n)$, $m > n$: стандартная цепочка Тоды длины n, взаимодействующая с точкой на сфере S^{m-n-1}. Гамильтониан $H = \frac{1}{2}\sum_1^n p_i^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \sum_1^{n-1} e^{q_{i+1}-q_i} + e^{q_1}(v, f)$. Здесь $v \in S^{m-n-1}$, (v, f) – скалярное произведение с вектором $f \in \mathbb{R}^{m-n}$, π – импульс точки на сфере.

3) $\mathfrak{g} = su(m,n)$, $m > n$: комплексная цепочка Тоды, взаимодействующая с точкой на сфере $S = S^{2(m-1)-1} \subset \mathbb{C}^{m-n}$. Конфигурационное пространство – результат факторизации произведения $\mathbb{C}^{*n} \times S$ по диагональному действию группы $u(1)$. Гамильтониан (до редукции)

$$H = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\sum_1^n (\dot{z}_i z_i^{-1})^2 - \frac{1}{2}\pi^2 + \sum_1^{n-1} z_{i+1} z_i^{-1} + z_1 (f, v)\right]$$

$v \in S$, π – импульс точки на сфере, $f \in \mathbb{C}^{m-n}$.

Если $m = n$, то конфигурационное пространство есть $\mathbb{C}^{*n}/u(1)$, потенциал $v = \mathrm{Re} \sum z_{i+1} z_i^{-1} + |z_1|^2$

4) $\mathfrak{g} = so^*(2n)$: кватернионно-ортогональная цепочка. Конфигурационное пространство есть $\mathbb{H}^{*\ell}$ при $n = 2\ell+1$ и $\mathbb{H}^{*\ell}/Sp(1)$ при $n = 2\ell$. Гамильтониан $H = \mathrm{Re}\left[\sum_1^{\ell} (\dot{q}_i q_i^{-1})^2 + \sum_1^{\ell-1} c_i q_{i+1} q_i^{-1} + V\right]$, где $V = c q_1$ при $n = 2\ell+1$ и $V = c|q_1|^2$ при $n = 2\ell$.

5) $\mathfrak{g} = sp(m,n),\ m>n$: кватернионная цепочка, взаимодействующая с точкой на сфере $S = S^{4(m-n)-1} \subset \mathbb{H}^{m-n}$. Конфигурационное пространство – результат факторизации $\mathbb{H}^{*n} \times S$ по диагональному действию $Sp(1)$. Потенциал $V = \mathrm{Re}\left[\sum_1^{n-1} c_i g_{i+1} g_i^{-1} + g_1(f,v)\right]$, $v \in S$, $f \in \mathbb{H}^{m-n}$. Если $m = n$, то конфигурационное пространство есть $\mathbb{H}^{*n}/U(1)$ и $V = \mathrm{Re}\left[\sum_1^{n-1} c_i g_{i+1} g_i^{-1}\right] + c(g_1)$, где $c(g_1)$ – матричный элемент кватерниона g_1 в ортогональном представлении в $\mathbb{R}^3$.

§ 4. Градуированные алгебры Ли и группы токов

В этом параграфе вводятся бесконечномерные алгебры Ли и их разложения, играющие в дальнейшем основную роль. Описание нужных нам орбит и гамильтоновой механики на них не требует привлечения соответствующих бесконечномерных групп Ли – групп токов. Однако геометрическая конструкция § I позволяет выразить решение уравнений движения через решение задачи факторизации в группе; ради этого мы вкратце обсуждаем необходимые свойства группы токов.

4.I. Аффинные алгебры Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – (конечномерная) алгебра Ли. Аффинной алгеброй Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ будем называть алгебру Ли рядов Лорана с коэффициентами в $\mathfrak{g}$ и поточечным коммутатором:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{ x = \sum_{n \leq N(x)} x_n z^n,\ x_n \in \mathfrak{g} \}$$

$$[x z^m, y z^n] = [x,y] z^{m+n}.$$

В алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$ имеются подалгебры $\mathfrak{g}_\pm$, определяемые следующим образом:

$$\mathfrak{g}_+ = \{ \sum_{n \geq 0} x_n z^n \}, \qquad \mathfrak{g}_- = \{ \sum_{n \leq 0} x_n z^n \}.$$

Эти подалгебры содержат убывающие последовательности идеалов вида $\mathfrak{g}_\pm^k = \mathfrak{g}_\pm \cdot z^{\pm k}$, $k>0$.

Если задана подалгебра $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$, то определим подалгебры $\mathfrak{q}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$, положив $\mathfrak{q}_\pm = \mathfrak{q} + \mathfrak{g}_\pm^1$. Тогда разложение алгебры $\mathfrak{g}$ в линейную сумму двух подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$ порождает аналогичное разложение для $\tilde{\mathfrak{g}}$: $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}_+ \dot{+} \mathfrak{b}_-$.

Пространством $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, двойственным к алгебре $\tilde{\mathfrak{g}}$, является пространство рядов Лорана с коэффициентами в $\mathfrak{g}^*$: значение функционала $\xi = \sum \xi_n z^n$ на элементе $x = \sum x_n z^n$ равно $\xi(x) =$

$= \sum \xi_n (x_{-n})$. Введем обозначение $< \mathcal{S} >_n$ для n-го коэффициента ряда $\mathcal{S}$. Тогда можно записать

$$\xi(x) = < \xi(z)(x(z)) >_0 .$$

Разложение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{a}_+ \dot{+} \mathfrak{b}_-$ влечет $\tilde{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{a}_+^* \dot{+} \mathfrak{b}_-^*$, где $\mathfrak{a}_+^* = \mathfrak{b}_-^\perp$, $\mathfrak{b}_-^* = \mathfrak{a}_+^\perp$, то есть

$$\mathfrak{a}_+^* = \{ \sum_{n \leq 0} \xi_n z^n, \ \xi_0 \in \mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^\perp \}$$

$$\mathfrak{b}_-^* = \{ \sum_{n \geq 0} \xi_n z^n, \ \xi_0 \in \mathfrak{b}^* = \mathfrak{a}^\perp \}.$$

Коприсоединенное действие алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ функционально по z : $ad^* x \cdot \xi(z) = ad^* x(z) \cdot \xi(z)$. Коприсоединенное действие алгебры $\mathfrak{b}_-$ в $\mathfrak{b}_-^*$ принимает вид

$$ad^*_{\mathfrak{b}_-} x \cdot \xi = (ad^* x \cdot \xi)_+ ,$$

где $(\cdot)_+$ обозначает проекцию в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ на подпространство $\mathfrak{b}_-^*$ параллельно $\mathfrak{a}_+^*$. Отсюда видно, что конечномерное подпространство

$$\mathfrak{b}_n^* = \{ \sum_0^n \xi_k z^k, \ \ \xi_0 \in \mathfrak{b}^* \}$$

$ad^* \mathfrak{b}_-$ - инвариантно. Это ясно также и из того, что подпространство $\mathfrak{b}_n^*$ естественно двойственно факторалгебре $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_- / \mathfrak{g}_-^{n+1}$ и ad^* - действие $\mathfrak{b}_-$ в $\mathfrak{b}_n^*$ сводится к действию алгебры $\mathfrak{b}_n^*$. Таким образом $\mathfrak{b}_-$ - орбиты в пространстве $\mathfrak{b}_n^*$, т.е. интегральные многообразия распределения $\xi \mapsto ad^*_{\mathfrak{b}_-} \mathfrak{b}_- \cdot \xi$ являются орбитами конечномерной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{b}_n$.

4.2. Симметрически-градуированные алгебры Ли.

Пусть θ - инволютивный автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}(\mathfrak{p})$ - его собственное подпространство, отвечающее собственному значению $1(-1)$. Продолжим θ до инволюции $\tilde{\theta}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$:

$$\tilde{\theta}(x z^n) = (-1)^n \theta(x) z^n .$$

Подалгебру $\tilde{\mathfrak{g}}^\theta \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, состоящую из $\tilde{\theta}$ -инвариантных элементов, будем называть θ -градуированной алгеброй Ли:

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\theta = \{ x = \sum x_n z^n : x_{2k} \in \mathfrak{k}, \ x_{2k+1} \in \mathfrak{p} \} .$$

Если θ - инволюция Картана в полупростой алгебре $\mathfrak{g}$, то будем также называть $\tilde{\mathfrak{g}}^\theta$ симметрически-градуированной.

Двойственное пространство $\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta *}$ естественно вкладывается в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ как подпространство $\tilde{\theta}^*$ -инвариантных элементов:

$$\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta *} = \{ \xi = \sum \xi_n z^n : \xi_{2k} \in \mathfrak{k}^*, \ \xi_{2k+1} \in \mathfrak{p}^* \} .$$

Все построения п° 4.I переносятся на θ -градуированные алгебры.

4.3. Основная теорема.

Алгебраическое доказательство п° I.3 дословно переносится на алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$, $\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta}$. Для того, чтобы сформулировать аналог теоремы I, остается описать алгебру инвариантных полиномов на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$.

Пусть $\tilde{\varphi}$ - полином на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$. По определению, $\tilde{\varphi}\in I(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$, если $ad^* d\tilde{\varphi}(\xi)\cdot\xi = 0$ для всех $\xi\in\tilde{\mathfrak{g}}^{x}$. Пусть $\varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$; построим полиномы φ_n на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, $n\in\mathbb{Z}$, беря n -й коэффициент Фурье ряда $\varphi(\xi(z))$:

$$\varphi_n(\xi) = <\varphi(\xi(z))>_n .$$

Очевидно, $\varphi_n\in I(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ и полиномы такого вида порождают алгебру $I(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$. Ограничение полинома из $I(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$ на $\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta *}\subset\tilde{\mathfrak{g}}^*$ дает инвариантный полином на $\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta *}$.

Обозначим $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{a}_+\oplus\mathfrak{b}_-$ прямую сумму подалгебр $\mathfrak{a}_+$ и $\mathfrak{b}_-$ и отождествим пространство $\tilde{\mathfrak{g}}_0^* = \mathfrak{a}_+^*\oplus\mathfrak{b}_-^*$ с $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ с помощью отображения $\sigma:\alpha\oplus\beta\longmapsto\alpha-\beta$, задавая тем самым на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ вторую скобку Кириллова.

ТЕОРЕМА 2. (i) Полиномы вида φ_n , $\varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$, находятся в инволюции относительно обеих скобок на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$.
(ii) Уравнения движения в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$, задаваемые гамильтонианом φ_n относительно второй скобки Кириллова, имеют вид

$$\dot{\xi} = ad^* M_-\cdot\xi ,$$

где M_- - проекция $M = z^{-n} d\varphi(\xi(z))$ на $\mathfrak{b}_-$ параллельно $\mathfrak{a}_+$
(iii) Если в $\mathfrak{g}$ имеется невырожденная инвариантная билинейная форма, то уравнения движения принимают коммутаторный лаксов вид

$$\dot{\xi} = [M_-,\xi] .$$

В формулировке теоремы 2 можно алгебру $\tilde{\mathfrak{g}}$ заменить на $\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta}$.

Прокомментируем пункт (iii). Если B - инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, то формула

$$\tilde{B}_n(x,y) = <B(x(z),y(z))>_n$$

задает инвариантную форму в $\tilde{\mathfrak{g}}$; если B невырождена, то и все $\tilde{B}_n$ невырождены. В дальнейшем будет использоваться форма $\tilde{B} = \tilde{B}_0$. С ее помощью производятся следующие отождествления:

$$\tilde{\mathfrak{g}}^*\simeq\tilde{\mathfrak{g}},\quad\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta *}\simeq\tilde{\mathfrak{g}}^{\theta} ,\quad ad^*\simeq ad$$

$$\mathfrak{a}_+^* \simeq \mathfrak{b}^\perp + \mathfrak{g}_-^1 \quad , \quad \mathfrak{b}_-^* \simeq \mathfrak{a}^\perp + \mathfrak{g}_+^1 \; ,$$

$ad_{\mathfrak{b}_-}^* x \cdot \xi = [x, \xi]_+$, $+$ означает проекцию на $\mathfrak{b}_-^*$ параллельно $\mathfrak{a}_+^*$.

При построении примеров будет в основном использоваться следствие I.2 для полупростой алгебры $\mathfrak{g}$. Очевидно, характер f алгебры $\mathfrak{a}_+$ имеет вид $f = f_0 + f_1 z^{-1}$, где f_0 - характер $\mathfrak{a}$, $f_1 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{g}]^\perp$. В частности, если $\mathfrak{a} = \{0\}$, $\mathfrak{a}_+ = \mathfrak{g}_+^1$, то $f = f_1 z^{-1}$, $f_1 \in \mathfrak{g}^*$. Сформулируем следствие I.2 отдельно:

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть f - характер алгебры $\mathfrak{a}_+$.

(i). Полиномы на $\mathfrak{b}_-^*$ вида $\varphi_n(\xi) = \langle \varphi(\xi(z) + f) \rangle_n$, $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$ находятся в инволюции относительно скобки Кириллова на $\mathfrak{b}_-^*$

(ii) Пусть $\mathfrak{g}$ редуктивна. Уравнения движения на $\mathfrak{b}_-^*$, задаваемые гамильтонианом φ_n , имеют лаксов вид

$$\dot{\xi} = [M_-, \xi + f] \; ,$$

где M_- - проекция $M = z^{-n} d\varphi(\xi(z) + f)$ на $\mathfrak{b}_-$ параллельно $\mathfrak{a}_+$.

4.4. Группы токов.

Для того, чтобы связать предыдущее с теорией аналитических групп Ли, рассмотрим видоизменение алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ - банахову алгебру Ли $\mathfrak{g}_W$, состоящую из абсолютно сходящихся рядов Фурье с коэффициентами в $\mathfrak{g}$. Все сказанное выше по отношению алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}$ применимо и к $\mathfrak{g}_W$. Для простоты мы ограничимся случаем матричных групп. Отметим, что в работе [I7] в этом пункте имеется ошибка: лемма I9 неверна, и определенное там множество ${}^\circ G_W$ не является группой.

Пусть $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ - связная матричная группа, $G^{\mathbb{C}} \subset GL(n, \mathbb{C})$ - ее комплексификация, $g \mapsto \bar{g}$ - комплексное сопряжение в $G^{\mathbb{C}}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ лежит в $Mat(n, \mathbb{R})$. Обозначим W (вещественную) алгебру абсолютно сходящихся рядов Фурье с коэффициентами из $Mat(n, \mathbb{R})$. Положим

$$\mathfrak{g}_W = \{ u \in W : u = \sum u_n z^n, \, u_n \in \mathfrak{g} \} .$$

Другими словами, $\mathfrak{g}_W = \{ u \in W : u(z) \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \; u(\bar{z}) = \overline{u(z)}$ при $|z| = 1\}$. Соответствующая банахова группы Ли - группа токов G_W:

$$G_W = \{ g \in W : g(z) \in G^{\mathbb{C}}, \; g(\bar{z}) = \overline{g(z)} \quad \text{при } |z| = 1 \} .$$

Обозначим W_+ (W_-) подалгебру в W , состоящую из функций, аналитических (антианалитических) внутри единичного круга.

Положим

$$G_{\pm}=\{g\in G_{W}\cap W_{\pm},\quad g(z)\in G^{\mathbb{C}}\qquad \text{при } |z|\leqslant 1\}$$
$$N_{\pm}=\{g\in G_{\pm}:\ g(0)=\mathbb{1}\}.$$

Из теоремы Винера следует, что G_W , $G_{\pm}$, $N_{\pm}$ являются группами.

ЛЕММА 4.4. Пусть $g\in G_W$, $|1-g|_W<\frac{1}{2}$. Тогда g разлагается в произведение

$$g=ng_-,$$

где $n\in N_+$, $g_-\in G_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующую кривую в группе G_W соединяющую $\mathbb{1}$ с g :

$$g_t(z)=\exp(t\log g(z)).$$

Из $|1-g|_W<\frac{1}{2}$ легко вытекает оценка $|1-g_t|_W<1$. По лемме 5.I из [26] , для таких функций g_t существует разложение в $GL(n,C)_W$:

$$g_t=n(t)\,g_-(t),$$

где $n(\cdot)$ и $g_-(\cdot)$ - гладкие кривые в группах $GL(n)_+, GL(n)_-$ соответственно, причем $n(t,0)=\mathbb{1}$. Остается доказать, что $n(t)\in N_+$, $g_-(t)\in G_-$.

Продифференцировав равенство $g_t=n(t)\,g_-(t)$ по t , получим

$$n^{-1}\dot n+\dot g_-g_-^{-1}=n^{-1}\dot g g_-^{-1}.$$

Пусть P - естественная проекция W на W_- . Траектории $n(t)$ $g(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям на группах $GL(n,\mathbb{C})_{\pm}$:

$$\dot g_-g_-^{-1}=P(g_-Lg_-^{-1})$$
$$n^{-1}\dot n=(I-P)(n^{-1}Rn),$$

где $L(t)=g_t^{-1}\dot g_t$, $R(t)=\dot g_t g_t^{-1}$. Поскольку соответствующие векторные поля при всех t касаются подгрупп $G_{\pm}$, траектории $n(\cdot)$, $g(\cdot)$ начинающиеся в $\mathbb{1}\in G_{\pm}$, лежат целиком в $G_{\pm}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Отображение $N_+\times G_-\to G_W:(n,g_-)\mapsto ng_-$ взаимно однозначно и покрывает окрестность единицы в G_W.

Пусть теперь A - подгруппа в G . Положим $A_{\pm}=\dot{A}N_{\pm}$. По подгруппам $A,B\subset G$, удовлетворяющим условиям п° I.2, построим подгруппы $A_+, B_-\subset G_W$; они удовлетворяют тем же условиям. Мы получаем следующее дополнение к теореме 2:

ТЕОРЕМА 2. (iiii) Пусть $\exp tM = a(t)b(t)$, где $a(\cdot)$, $b(\cdot)$ – гладкие кривые в группах A_+, B_-, и $a(0)=\mathbb{1}=b(0)$. Тогда решение уравнений движения $\dot{\xi}=[M_-,\xi]$ дается формулой

$$\xi(t) = \mathrm{Ad}\, b(t)\cdot\xi \, .$$

Конечномерное лаксово представление с дополнительным спектральным параметром впервые встретилось в работе С.П.Новикова [I3] при описании стационарных решений высших уравнений $K_g\Phi$. Однако гамильтонова структура уравнений Новикова оказалась довольно сложной и ее связь со структурами, рассматриваемыми в этом и следующем параграфах, неясна. На существование такой связи указывает тот факт, что инволютивная система интегралов движения в обоих случаях порождается инвариантами матрицы Лакса.

Автором и М.А.Семеновым-Тян-Шанским установлено, что факторизация матричнозначной функции $\exp tM$ может быть получена с помощью функции Бейкера-Ахиезера, связанной со спектральной кривой матрицы ξ. Тем самым решение уравнений движения в принципе может быть выражено в терминах многомерных Θ-функций. Таким образом, теорема 2 дает теоретико-групповую интерпретацию алгебро-геометрических методов [I3,I4,I8,I9].

§ 5. Гамильтонова механика в пространстве $\tilde{\mathfrak{g}}^*$

В этом параграфе собраны различные результаты об орбитах и уравнениях движения в пространствах $\mathfrak{g}_n^*$ и $\mathfrak{g}_n^{\theta *}$: вычисляется размерность орбит общего положения, изучается связь различных гамильтоновых структур, дается элементарное доказательство специальных случаев теоремы 2, обобщающее способ А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [27,28].

Напомним, что $\mathfrak{g}_n^* = \{\sum_0^n \xi_k z^k, \xi_k\in\mathfrak{g}^*\}$, $\mathfrak{g}_n^{\theta *} = \mathfrak{g}_n^*\cap\mathfrak{g}^{\theta *}$.

5.I. Размерность орбит общего положения.

Здесь предполагается, что алгебра $\mathfrak{g}$ такова, что функциональная размерность алгебры $I(\mathfrak{g}^*)$ равна коразмерности орбиты общего положения в $\mathfrak{g}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I.I. Максимальная размерность орбиты в $\mathfrak{g}_n^*$ равна $(n+1)d$, где d – максимальная размерность орбиты в $\mathfrak{g}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim \mathcal{O}_\alpha = d$, $\alpha\in\mathfrak{g}^*$. Тогда орбита в $\mathfrak{g}_n^*$, проходящая через $\xi=\alpha\cdot z^n$, имеет размерность $(n+1)d$. Действительно, ее касательное пространство $T_\xi = (\mathrm{ad}^*\mathfrak{g}_-\cdot\xi)_+ = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{ad}^*\mathfrak{g}\cdot\alpha z^i$ имеет размерность $(n+1)d$, поскольку

$dim(ad^*\mathfrak{g}\cdot\alpha) = d$.

Докажем обратное неравенство $dim\, T_\xi \leqslant (n+1)\,d$ для $\xi\in\mathfrak{g}^*_n$. Доказательство ведется индукцией по n. Рассмотрим пространство

$$T^1_\xi = (ad^*\mathfrak{g}^1_-\cdot\xi)_+ \; .$$

Так как $T^1_\xi = (ad^*\mathfrak{g}_-\cdot\xi z^{-1})_+$, то по индукционному предположению $dim\, T^1_\xi \leqslant nd$. Поскольку $T_\xi = T^1_\xi + ad^*\mathfrak{g}\cdot\xi$, то для доказательства оценки $dim\, T_\xi \leqslant (n+1)\,d$ достаточно доказать, что

$$dim(ad^*\mathfrak{g}\cdot\xi / ad^*\mathfrak{g}\cdot\xi\cap T^1_\xi) \leqslant d \; . \qquad (*)$$

Пусть $\varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$; рассмотрим полином φ^n на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ вида

$$\varphi^n(\xi) = \langle \varphi(\xi\cdot z^{-n})\rangle_{-n} \; .$$

Тогда $\varphi^n\in I(\tilde{\mathfrak{g}}^*)$, т.е. $ad^*d\varphi(\xi)\cdot\xi = 0$. Но для $\xi=\sum\limits_0^n \xi_i z^i$ имеем $d\varphi^n(\xi) = d\varphi(\xi_n) - x,\;\; x\in\mathfrak{g}^1_-$. Отсюда

$$ad^*d\varphi^n(\xi_n)\cdot\xi = (ad^*x\cdot\xi)_+ \in T^1_\xi \; .$$

Если ξ_n – регулярный элемент, т.е. $dim\, O_{\xi_n} = d$, то $codim_{\mathfrak{g}}\{d\varphi(\xi_n),\; \varphi\in I(\mathfrak{g}^*)\} = d$. Отсюда следует оценка (*) и неравенство $dim\, T_\xi \leqslant (n+1)\,d$ для тех ξ, в которых старший коэффициент ξ_n регулярен. Так как такие ξ образуют открытое плотное множество в $\mathfrak{g}^*_n$, то индукционный переход завершен.

Вычислим теперь максимальную размерность орбиты симметрически-градуированной алгебры $\mathfrak{g}^\theta_-$ в $\mathfrak{g}^{\theta *}_n$ для расщепимой полупростой $\mathfrak{g}$. В этом случае пространство $\mathfrak{p}$ содержит $\mathfrak{g}$-регулярный элемент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.I.2. Максимальная размерность орбиты в $\mathfrak{g}^{\theta *}_n$ равна

(i) $(s+1)\,d$, если $n = 2s+1$

(ii) $s\cdot d + d(k)$, если $n = 2s$; здесь $d(k)$ – максимальная размерность орбиты в компактной подалгебре k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (i). Пусть $\xi=\sum\limits_0^n \xi_i z^i\in\mathfrak{g}^{\theta *}_n$, $\alpha = \xi_n$ – регулярный элемент, $\mathfrak{a} = Cent(\alpha)$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, натянутая на α, $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}^\perp$. Положим $\mathfrak{m}_{-n} = \{\sum\limits_{-n}^{0} x_i z^i,\; x_i\in\mathfrak{m}\}$, $\mathfrak{a}_n = \{\sum\limits_0^n x_i z^i,\; x_i\in\mathfrak{a}\}$. Легко проверить, что отображение $ad_+\xi:\mathfrak{m}_{-n}\to T_\xi$, $ad_+\xi\cdot x = [\xi, x]_+$, не имеет ядра. Отсюда, сравнивая размерности, видим, что $ad_+\xi$ – изоморфизм. Но $[\xi,\mathfrak{m}_{-n}]_+\cap\mathfrak{a}_n = \{0\}$, то есть T_ξ взаимно однозначно проектируется на $\mathfrak{M}_n = \{ \sum_0^n x_i z^i, \; x_i \in \mathfrak{M} \}$. Отсюда легко следует неравенство $dim(T_\xi \cap \tilde{\mathfrak{g}}^\theta) \leq (s+1)d$, то есть $dim\, \mathcal{O}_\xi^\theta \leq (s+1)\, d$. Обратное неравенство очевидно.

Доказательство (ii) аналогично.

5.2. Согласованные скобки Пуассона на $\mathfrak{g}_n^*$.

Рассмотрим разложение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_+^1 \dot{+} \mathfrak{g}_-$; пусть $\tilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{g}_+^1 \oplus \mathfrak{g}_-$. Фиксируем **положительное** $n \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим $ad^*\, \tilde{\mathfrak{g}}_0$ – инвариантные подпространства в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$:

$$\mathcal{E}_k = \mathfrak{g}_n^* \cdot z^{-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1 .$$

На каждом из них имеется (теорема 2) набор гамильтонианов в инволюции и лаксовых уравнений относительно своей (вырожденной) скобки Пуассона. Очевидно, умножение на $z^{k-\ell}$, отождествляющее $\mathcal{E}_k$ с $\mathcal{E}_\ell$, переводит один набор гамильтонианов в другой. Оказывается, что и уравнения движения переходят при этом отождествлении друг в друга, хотя скобки Пуассона совершенно различны.

ЛЕММА 5.2. Пусть $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$. Уравнение движения на $\mathcal{E}_0$ задаваемое гамильтонианом φ_m, переходит при умножении на z^{-k} в уравнения движения на $\mathcal{E}_k$, задаваемое гамильтонианом $\varphi_m^k(\xi) = \varphi_{k+m}(\xi \cdot z^k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнения движения для гамильтониана φ_m имеют вид

$$\dot{\xi} = ad^*\, d\varphi_m(\xi)_- \cdot \xi ,$$

а для гамильтониана φ_m^k

$$\dot{\xi} = ad^*\, d\varphi_m^k(\xi)_- \cdot \xi .$$

Но $d\varphi_m^k(\xi) = z^{-k} d\varphi_m(\xi \cdot z^k)$, откуда и следует лемма.

Таким образом, лаксовы уравнения в $\mathfrak{g}_n^*$ являются гамильтоновыми и находятся в инволюции относительно $(n+2)$ различных скобок Пуассона. Это напоминает ситуацию, рассматривающуюся в работах Ф.Магри [29], П.П.Кулиша и А.Г.Реймана [30], И.М.Гельфанда и И.Я.Дорфман [31], особенно в случае $n = 1$: здесь все три скобки включаются в линейное семейство. Точнее, пусть $\{\cdot, \cdot\}_k$ – скобка Кириллова на $\mathcal{E}_k$, $k = 0, 1, 2$, и все $\mathcal{E}_k$ отождествлены с $\mathfrak{g}_1^*$. Тогда скобка $\sum c_k \{\cdot, \cdot\}_k$ удовлетворяет тождеству Якоби.

Все сказанное выше справедливо и для θ -градуированных алгебр при условии, что рассматриваются $\mathcal{E}_k$ с четными k.

Любопытно, что сравнение скобок в инвариантных подпространствах $\mathcal{E}_f = f z^{-1} + \mathfrak{g}_0^*$ и $\mathcal{E}_f z^{-1}$ приводит к конструкции Мищенко-Фоменко (см.п^{o} 5.3).

5.3. Семейство гамильтоновых структур в $\mathfrak{g}^*$ и доказательство теоремы 2 в специальных случаях.

В дальнейшем $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ обозначают собственные подпространства инволюции θ в алгебре $\mathfrak{g}$, отвечающие собственным значениям I и -I соответственно. Обозначим $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$ полупрямую сумму подалгебры $\mathfrak{k}$ и векторного пространства $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{g}_\theta$ изоморфна алгебре $\mathfrak{g}_1^\theta = \mathfrak{g}_-^\theta / \mathfrak{g}_-^{\theta,2}$ (§ 4). Двойственное пространство $\mathfrak{g}_\theta^*$ отождествляется с $\mathfrak{g}^*$, а также с инвариантным подпространством $\mathfrak{g}_1^{\theta *}$ в $\mathfrak{g}_-^{\theta *}$. Можно считать, что на $\mathfrak{g}^*$ заданы две скобки Кириллова, $\{,\}$ и $\{,\}_\theta$, связанные со скобками Ли в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_\theta$.

Фиксируем элемент $f \in \mathfrak{p}^*$. Обозначим $\{,\}_f$ скобку Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ гейзенбергова типа: для линейных функций $x, y \in \mathfrak{g}$

$$\{x, y\}_f = f([x,y]).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. (i) Скобка $\{,\}_{\alpha,\beta} = \alpha\{,\} + (1-\alpha)\{,\}_\theta + \beta\{,\}_f$ является скобкой Пуассона на $\mathfrak{g}^*$ при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(ii) Пусть $T_{\lambda,\mu}$ – линейное преобразование в $\mathfrak{g}^*$,

$$T_{\lambda,\mu}(\pi + s) = \pi + \lambda s + \mu f, \qquad \pi \in \mathfrak{k}^*, \quad s \in \mathfrak{p}^*.$$

Для функции φ на $\mathfrak{g}^*$ положим

$$\varphi_{\lambda,\mu}(\xi) = \varphi(T_{\lambda,\mu}(\xi)).$$

Если точка $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ лежит на прямой, проходящей через точки (α_i, β_i), то при $\lambda_i^{-2} = \alpha_i$, $\lambda_i^{-1}\mu_i = \beta_i$

$$\{\varphi^1_{\lambda_1,\mu_1}, \varphi^2_{\lambda_2,\mu_2}\}_{\alpha,\beta} = 0$$

для любых $\varphi^1, \varphi^2 \in I(\mathfrak{g}^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Легко проверить, что $T_{\lambda,\mu}$ преобразует скобку $\{,\}$ в скобку $\{,\}_{\alpha,\beta}$ с индексами $\alpha = \lambda^{-2}$, $\beta = \lambda^{-1}\mu$, откуда и следует (i)
(ii) Из доказательства (i) видно, что функции $\varphi_{\lambda,\mu}$ лежат в ядре скобки $\{,\}_{\alpha,\beta}$ с $\alpha = \lambda^{-2}$, $\beta = \lambda^{-1}\mu$. Поэтому если $(\alpha,\beta) = a(\alpha_1,\beta_1) + b(\alpha_2,\beta_2)$, $a + b = 1$, то

$$\{\varphi^1_{\lambda_1,\mu_1}, \varphi^2_{\lambda_2,\mu_2}\}_{\alpha,\beta} = a\{\varphi^1_{\lambda_1,\mu_1}, \varphi^2_{\lambda_2,\mu_2}\}_{\alpha_1,\beta_1} + b\{\varphi^1_{\lambda_1,\mu_1}, \varphi^2_{\lambda_2,\mu_2}\}_{\alpha_2,\beta_2} = 0.$$

Отметим, что доказательство (ii) является интерпретацией приема А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко.

Поскольку $\{,\}_{0,0} = \{,\}_\theta$, то выбирая прямую $\alpha = \beta$, т.е. $\mu = \lambda^{-1}$ получаем важный специальный случай следствия 4.3, относящийся к подпространству $\mathfrak{g}_1^{\theta *}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3.I. Функции вида

$$\varphi_\lambda(\pi+s) = \varphi(\pi+\lambda s+\lambda^{-1} f), \qquad \varphi\in I(\mathfrak{g}^*),$$

находятся в инволюции по скобке $\{,\}_\theta$ на $\mathfrak{g}^*$ (более общим образом, по скобкам из семейства

$$\alpha\{,\} + (1-\alpha)\{,\}_\theta + \alpha\{,\}_f).$$

Если же взять прямую $\alpha = \beta+1$, то $\mu = \lambda^{-1}-\lambda$ и получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.3.2. ([32]) Функции вида

$$\varphi_\lambda(\pi+s) = \varphi(\pi+\lambda s+(\lambda^{-1}-\lambda) f), \qquad \varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$$

находятся в инволюции по скобке $\{,\}$ на $\mathfrak{g}^*$ (более общим образом, по семейству скобок

$$\alpha\{,\} + (1-\alpha)\{,\}_\theta + (\alpha-1)\{,\}_f).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.3.2 в несколько иной форме содержится в работе М.Адлера и П.Мербеке [32], где используется для гамильтоновой интерпретации найденного Ю.Мозером [33] лаксова представления уравнений движения точки на эллипсоиде в центральном поле сил.

Отметим, что следствия 5.3.I и 5.3.2 связаны между собой сдвигом $\beta \longrightarrow \beta+1$.

Применяя предложение 5.3 к прямой $\alpha=1$ получим следствие, обобщающее теорему I.6 работы [28]:

СЛЕДСТВИЕ 5.3.3. Функции на $\mathfrak{g}^*$ вида

$$\varphi_\lambda(\xi) = \varphi(\xi+\lambda f), \qquad \varphi\in I(\mathfrak{g}^*)$$

находятся в инволюции относительно семейства скобок $\{,\}+\beta\{,\}_f$.

Пусть имеется линейное семейство скобок Пуассона

$$\{,\}_\alpha = \{,\}_0 - \alpha\{,\}_1$$

(например, ограничение семейства $\{,\}_{\alpha,\beta}$ на прямую в плоскости $\{\alpha,\beta\}$). Пусть функции φ_α лежат в ядре скобки $\{,\}_\alpha$. Полагая $\varphi_\alpha = \Sigma\,\varphi_k\alpha^k$, получим иерархию уравнений движения (ср. [29,30]):

$$\{\varphi_{k+1},\cdot\}_0 = \{\varphi_k,\cdot\}_1 .$$

В частности, рассмотрим $\{,\}_\alpha = \{,\}_{\alpha,\alpha}$. Тогда $\{,\}_0 = \{,\}_\theta$, $\{,\}_0 - \{,\}_1 = \{,\} - \{,\}_f$. Отметим, что последняя скобка получается из $\{,\}$ сдвигом аргумента на f. Полиномы $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha^{-1/2},\alpha^{1/2}}$ где φ – полином из $I(\mathfrak{g}^*)$, лежат в ядре скобки $\{,\}_\alpha$ и разлагаются в ряд по полуцелым степеням α.

ЛЕММА 5.3. Уравнения движения, задаваемые гамильтонианом φ_k (соответственно, φ_α) по скобке $\{,\}_\theta$, переходят при замене $\xi \mapsto \xi - f$ в уравнения движения, задаваемые по скобке $\{,\}$ гамильтонианом $H_k = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+k}$ (соответственно $H = (1-\alpha^{-1})^{-1}\varphi_\alpha$)..

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того, чтобы по гамильтониану φ_k найти гамильтониан H_k в новой скобке, нужно решить уравнение

$$\{\varphi_k, \cdot\}_0 = \{H_k, \cdot\}_0 - \{H_k, \cdot\}_1 .$$

Очевидно, $H_k = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+k}$ - решение. Поскольку $\varphi_\alpha = \sum \varphi_k \alpha^k$, то гамильтониану φ_α соответствует

$$H_\alpha = \sum_k \alpha^k \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+k} = \sum_k \varphi_k \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{k-i} = (1-\alpha^{-1})^{-1}\varphi_\alpha .$$

С точностью до сдвига переменной и растяжения времени, гамильтониан φ_α задает одно уравнение по двум скобкам $\{,\}$ и $\{,\}_\theta$.

В качестве примера к следствию 5.3.I рассмотрим уравнения Эйлера вращения n-мерного волчка. Лаксово представление со спектральным параметром для уравнений Эйлера было найдено С.В.Манаковым [II] и систематически изучено А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко [27,28] . Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, θ - инволюция Картана, так что $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$. Пусть $I \in \mathfrak{p}$ - тензор инерции волчка, $\Omega = ad I \cdot (ad I^2)^{-1}$ - линейное преобразование в $\mathfrak{k}$.

Скобку $\{,\}_\theta$ можно ограничить на $ad^*_{\mathfrak{g}_\theta}$ - инвариантное подпространство $\mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$. В этом подпространстве уравнение волчка порождены гамильтонианом

$$H(\pi) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \pi \cdot \Omega(\pi) ,$$

и представление Манакова [I4] для него имеет вид

$$\dot{\pi} = [\, \pi + \lambda I^2, \Omega(\pi) + \lambda I \,] .$$

Положим $f = I^2$ и рассмотрим полином на $\mathfrak{k}$ вида $\varphi_2(\pi) = \langle \varphi(I^2 + \pi z) \rangle_2$, $\varphi \in I(\mathfrak{g})$. Легко проверить (см.п^0 6.2), что соответствующее лаксово уравнение имеет вид

$$\dot{\pi} = [\, \pi + I^2 z^{-1}, \ ad M_0 \circ (ad I^2)^{-1}\pi + M z^{-1} \,] ,$$

где $M = d\varphi(I^2)$. При этом φ_2 квадратичен по π , $d\varphi_2 = ad M (ad I^2)^{-1}$ и $\varphi_2(\pi) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\pi \cdot d\varphi_2(\pi))$. В частности, если $M = I$, т.е. $d\varphi(I^2) = I$, то $\varphi_2 = H$ и мы получаем представление С.В.Манакова с заменой $\lambda \mapsto z^{-1}$. Символически нужную инвариантную функцию можно записать как $\varphi(x) = \frac{2}{3} \operatorname{tr} x^{3/2}$. Несложно также построить нужный гамильтониан как линейную комбинацию полиномов $H = \sum c_k H_k$

$$H_k = -\langle \frac{1}{k+1} \operatorname{tr}(I^2 + \pi z)^{k+1} \rangle_2 = \sum_{i<j} \frac{a_i^{2k} - a_j^{2k}}{a_i^2 - a_j^2} \pi_{ij}^2 \ , \quad I = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) .$$

Для этого достаточно решить линейную систему типа Вандермонда $\sum_1^n c_k I^{2k} = I$.

§ 6. Динамические системы в подпространствах малой градуировки

Здесь рассмотрены периодические цепочки Тоды и системы в $\mathfrak{g}_1^{\theta *}$, описывающие многомерные волчки в потенциальном поле. Алгебра $\mathfrak{g}$ – вещественная форма простой алгебры Ли.

6.I. Периодические цепочки Тоды.

Построение цепочек по корневому разложению было проведено в п.3.I. Для применения этой процедуры к аффинной алгебре Ли опишем ее систему корней.

Определим дифференцирование $\mathcal{D}: \tilde{\mathfrak{g}} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ формулой $\mathcal{D}(xz^n) = n x z^n$ и образуем полупрямую сумму $\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \dotplus \mathbb{R}\mathcal{D}$. Пусть $\mathfrak{a}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \dotplus \mathbb{R}\mathcal{D}$. Корни пары $(\hat{\mathfrak{g}}, \hat{\mathfrak{a}})$ – это ненулевые элементы ω из $\hat{\mathfrak{a}}^*$ такие, что корневое подпространство $\hat{\mathfrak{g}}_\omega = \{ x \in \hat{\mathfrak{g}} : \operatorname{ad} a \cdot x = \omega(a) x \}$ отлично от $\{0\}$. Корни имеют вид $\omega = \alpha + n\gamma$, $n \in \mathbb{Z}$, где α – корень $(\mathfrak{g}, \alpha)$, элемент γ определен равенством $\gamma(\mathcal{D}) = 1$, $\gamma|_{\mathfrak{a}} = 0$. Корень ω положителен, если $n > 0$ или $n = 0$, $\alpha \in \Delta_+$. Систему простых корней $\hat{P}$ образуют корни $\{\alpha, \gamma - \alpha^*\}$, где $\alpha \in P$, α^* – единственный корень максимальной высоты.

Определим элемент $x_0 \in \hat{\mathfrak{a}}$ равенством $\omega(x_0) = 1$, $\omega \in \hat{P}$. Пусть $\mathcal{D}_j \subset \tilde{\mathfrak{g}}$ – собственное подпространство оператора $\operatorname{ad} x_0$, отвечающее собственному значению $j \in \mathbb{Z}$. Разложение $\tilde{\mathfrak{g}} = \oplus \mathcal{D}_j$ задает в $\tilde{\mathfrak{g}}$ градуировку по высоте корня, согласованную с градуировкой в $\mathfrak{g}$ (п.3.I). Начиная отсюда, можно дословно повторить рассуждения п$^{\circ}$ 3.I. Перейдем непосредственно к примерам (ср.п.$^{\circ}$ 3.5).

а) Цепочки, связанные с разложением Ивасавы $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{k} + \mathfrak{b}_-$ $\mathfrak{b}_- = \bigoplus_{j \le 0} \mathcal{D}_j$, в расщепимом случае перечислены О.И.Богоявленским [IC] , исходившим из других соображений. Более естественная конструкция таких цепочек на основе градуированных алгебр Ли предложена автором, М.А.Семеновым-Тян-Шанским и И.Б.Френкелем [34] . Подалгебра $\widetilde{k}=\{\Sigma x_n z^n:\ \theta(x_n)=x_{-n}\}$ - приводит к симметричной реализации пространства b_-^* . В отличие от непериодического случая, система корней типа BC_n дает новую цепочку (это отмечено М.А.Ольшанецким и А.М.Переломовым) с потенциалом

$$V=\sum_1^{n-1} e^{q_{i+1}-q_i}+e^{q_1}+c\cdot e^{-2q_n}\ .$$

Используя разложение Гаусса $\tilde{g}=n_+ + b_-$ и повторяя рассуждения п° 3.5 а), получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.I ([34]). Орбита обобщенной периодической цепочки Тоды состоит из точек

$$\xi=p+\sum_{\omega\in\hat{P}} e^{\langle q,\omega\rangle}e_\omega\ ,\quad p,q\in\mathfrak{a}\ ,$$

переменные p,q -канонические. Выбирая вектор сдвига $f\in\mathcal{D}_1$ получим гамильтониан $H=\frac{1}{2}B(p,p)+\sum_{\omega\in\hat{P}} f\omega\, e^{\langle q,\omega\rangle}$. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{\xi}=[\xi+f,\ \ p+f\,]\ .$$

Если все $f_\omega>0$, то система полна.

Полнота следует из того, что поверхности постоянной энергии компактны: условие $\Sigma f_\omega e^{\langle q,\omega\rangle}<c$ влечет за собой $|q|<c_1$.

б) Периодическая неабелева цепочка Тоды задана на фазовом пространстве $T^*(G^n)$, $G=GL(m,\mathbb{R})$, гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr(\dot{g}_i g_i^{-1})^2+tr\Big(\sum_{i=1}^{n-1} g_{i+1}g_i^{-1}+g_1 g_n^{-1}\Big)\ .$$

После редукции по правому диагональному действию группы G получается система на орбите блочной параболической подалгебры в $gl(mn,\mathbb{R})$ - см.п.3.5б). Матрица Лакса $L=\xi+f$, $\xi=$

$$=\sum_1^{n-1} g_{i+1}g_i^{-1}\otimes e_i+g_1 g_n^{-1}\otimes e_{-\alpha^*}z+diag(\dot{g}_i g_i^{-1}),\ f=\Sigma\,\mathbb{1}_m\otimes e_i+\mathbb{1}_m\otimes e_{\alpha^*}z^{-1}.$$

в) Периодические цепочки, связанные с минимальными параболическими подалгебрами, перечисляются на основе п.3.5в). Мы укажем добавку V_p к выписанным там потенциалам. Комплексные алгебры приводят к очевидной комплексификации расщепимых периодических цепочек.

1) $\mathfrak{g}=sl(n,\mathbb{H})$: периодическая кватернионная цепочка Тоды,

$$V_p=\mathrm{Re}\,q_1 q_n^{-1}\ .$$

2) $\mathfrak{g} = so(m,n)$: $V_p = c \cdot e^{-q_{n-1}-q_n}$

3) $\mathfrak{g} = su(m,n)$: $V_p = c \cdot |z_n|^{-2}$

4) $\mathfrak{g} = so^*(2n)$: $V_p = c \cdot |q_n|^{-2}$

5) $\mathfrak{g} = sp(m,n)$: $V_p = c(q_n^{-1})$,

где $c(\cdot)$ – **матричный элемент ортогонального представления $\mathbb{H}^*$ в $\mathbb{R}^3$. При этом несколько меняется конфигурационное пространство: при** $m>n$ **это** $\mathbb{H}^* \times S/\mathcal{U}(1)$ **, при** $m=n$

6.2. Представление Манакова.

В общей формуле Лаксова представления $\dot{L} = \pm[L, M_\pm]$

где + (–) означает проекцию на $\mathfrak{g}_+^1$ $(\mathfrak{g}_-)$. мы выделим случаи, когда $M_\pm$ имеет особенно простую структуру. Заглавие пункта объясняется тем, что данное С7В.Манаковым представление эйлеровых уравнений волчка имеет как раз такой вид.

Рассмотрим разложение $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}_+^1 \dotplus \mathfrak{g}_-$. Пусть $\xi \in f z^{-1} + \mathfrak{g}_n^*$, $\xi = f z^{-1} + \sum_0^n \xi_i z^i$; $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$. Рассмотрим полиномы на $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ вида $\varphi_k^m(\xi) = \langle \varphi(\xi \cdot z^m) \rangle_k$ Тогда $d\varphi_k^m(\xi) = z^{m-k} d\varphi(\xi \cdot z^m)$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\varphi \in I(\mathfrak{g}^*)$ – однородный полином степени d, $M_\pm = [d\varphi_k^m(\xi)]_\pm$. Тогда

(i) Если $k-m+1-(d-1)(m+n)=0$, то $M_+ = d\varphi(\xi_n) \cdot z$.

(ii) Если $k-m-1-(d-1)(m-1)=0$, то $M_- = d\varphi(f) \cdot z^{-1} + M_0$.

Для полупростого регулярного f элемент M_0 вычисляется следующим образом: пусть $\mathfrak{a}$ – подалгебра Картана, натянутая на f, $\varphi''(f)$ – вторая производная многочлена $\varphi|\mathfrak{a}$, $\xi_0 = \alpha + \beta$, где $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\beta \in \mathfrak{a}^\perp$. Тогда

$$M_0 = \varphi''(f) \cdot \alpha + ad\, d\varphi(f) \circ (ad f)^{-1} \cdot \beta .$$

Аналогичные формулы верны и для алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^\theta$, с учетом того, что градиенты должны проектироваться на $\tilde{\mathfrak{g}}^\theta$. В частности, в (ii) получаем

$$M_0 = ad\, d\varphi(f) \circ (ad f)^{-1} \cdot \xi_0 .$$

Лемма доказывается простым вычислением, которое мы здесь опускаем.

6.3. Системы, связанные с симметрически-градуированными алгебрами.

Пусть θ – автоморфизм Картана в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ – собственные пространства θ, отвечающие собственным значениям I и –I соответственно, $\mathfrak{g}^\theta$ – симметрически градуированная алгебра.

Здесь мы рассмотрим системы в $\mathfrak{g}_-^{\theta *} \simeq \mathfrak{g}_+^{\theta}$ на орбитах, лежащих в подпространстве $\mathfrak{k} + \mathfrak{p} z$. Эффективно в этом подпространстве действует алгебра $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_-^\theta / \mathfrak{g}_-^{\theta,2}$, изоморфная полупрямой сумме $\mathfrak{k} \dot{+} \mathfrak{p}$. Поэтому применимо следствие 3.2. Орбита $\mathcal{O}_a$, проходящая через точку $az \in \mathfrak{p} z$, изоморфна кокасательному расслоению $T^*(K \cdot a)$ как симплектическое K-пространство, причем изоморфизм $T^*(K \cdot a) \to \mathcal{O}_a$ задается отображением моментов $(k \cdot a, \rho) \to k \cdot (\rho + az), \rho \in \mathfrak{k}_a^\perp$ или $(s, p) \mapsto [s, p] + sz$, $s = k \cdot a \in K \cdot a$, $p \in \mathfrak{p}$.

Нас будут интересовать гамильтонианы, квадратичные по моменту $\pi = Ad\, k \cdot \rho = [s, p]$. Выделим три случая. Через $\xi = \pi + sz$ обозначается точка на орбите $\mathcal{O}_a$, $L = \xi + f z^{-1}$, $f \in \mathfrak{p}$.

A) $f = 0$, гамильтониан выбирается в виде

$$H(\xi) = \langle \varphi(\xi z^{-1}) \rangle_{-2}, \quad \varphi \in I(\mathfrak{g}).$$

Очевидно, эти гамильтонианы K-инвариантны. Легко вычисляется, что

$$H(\pi + sz) = \frac{1}{2} B(\pi, ad\, d\varphi(s) \circ (ad\, s)^{-1} \pi).$$

Представление Манакова имеет вид $\dot{L} = [L, d\varphi(s) z]$. Гамильтонова система описывает свободное движение точки на многообразии $K \cdot a$ в некоторой K-инвариантной римановой метрике.

B) $f \neq 0$, гамильтониан порожден формой Киллинга

$$H(\pi + sz) = \frac{1}{2} B(\pi, \pi) + B(f, s).$$

Представление Манакова имеет две формы

$$\dot{L} = -[L, \pi + f z^{-1}], \quad \dot{L} = [L, sz].$$

Система описывает движение точки на $K \cdot a$ в стандартной метрике (см. конец п.2.3) и потенциале $V(s) = B(f, s)$.

C) Общий случай, $f \neq 0$. c1) $H(\xi) = \langle \varphi(L \cdot z) \rangle_2, \varphi \in I(\mathfrak{g})$. Вычисление дает

$$H(\xi) = \frac{1}{2} B(\pi, ad\, d\varphi(f) \circ (ad\, f)^{-1} \pi) + B(d\varphi(f), s).$$

В представлении $\dot{L} = -[L, M_-]$ имеем

$$M_- = d\varphi(f) \cdot z^{-1} + ad\, d\varphi(f) \cdot (ad\, f)^{-1} \pi$$

c2) $H = \langle \varphi(L z^{-1}) \rangle_{-2}$,

$$H(\xi) = \frac{1}{2} B(\pi, ad\, d\varphi(s) \circ (ad\, s)^{-1} \pi) + B(f, d\varphi(s)).$$

Представление Манакова имеет вид

$$\dot{L} = [L, d\varphi(s)z].$$

Если G – матричная группа, то элементы матрицы $K \cdot a = s$ квадратично зависят от матричных элементов k (иногда эта зависимость сводится к линейной). Таким образом, потенциальные части гамильтонианов, будучи подняты с орбиты $K \cdot a$ на группу K, оказываются квадратичными или линейными функциями от матричных элементов.

Перечислим типы орбит компактной подгруппы K в пространстве $\mathfrak{p}$. Отметим, что если $\mathfrak{g}$ – комплексная простая алгебра Ли, то действие K в $\mathfrak{p}$ эквивалентно присоединенному действию K в $\mathfrak{k}$.

Пояснение к таблице. Всюду имеются в виду блочно-диагональное вложение $K(n_1)\times\ldots\times K(n_k)$ в $K(n)$, $n=\sum n_i$ в комбинации с естественными вложениями $U(n)\subset SO(2n)$, $U(n)\subset Sp(n)$, $Sp(n)\subset U(2n)$. В п° 8,9,10 подгруппа $diag\, K(n_1)\times\ldots\times K(n_k)$, $\sum n_i = l$, расположена в $K(m)\times K(n)$ следующим образом. В $K(p)$, $p = m,n$ выделяется подгруппа $K(p-l)\times K(l)$, и подгруппа

алгебра Ли	тип орбиты в $\mathfrak{p}$
1. $sl(n,\mathbb{C})$	$U(n)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$, $\sum n_i = n$
2. $so(n,\mathbb{C})$	$SO(n)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)\times SO(m)$, $m+2\sum n_i = n$
3. $sp(n,\mathbb{C})$	$Sp(n)/U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)\times Sp(m)$, $m+\sum n_i = n$
4. $sl(n,\mathbb{R})$	$SO(n)/S(O(n_1)\times\ldots\times O(n_k))$, $\sum n_i = n$
5. $sl(n,\mathbb{H})$	$Sp(n)/Sp(n_1)\times\ldots\times Sp(n_k)$, $\sum n_i = n$
6. $so^*(2n)$	$U(n)/Sp(n_1)\times\ldots\times Sp(n_k)\times U(m)$, $m+2\sum n_i = n$
7. $sp(n,\mathbb{R})$	$U(n)/O(n_1)\times\ldots\times O(n_k)\times U(m)$, $m+\sum n_i = n$
8. $su(m,n)$	$U(m)\times U(n)/U(m-l)\times U(n-l)\times diag\, U(n_1)\times\ldots\times U(n_k)$ $\sum n_i = l$
9. $so(m,n)$	$SO(m)\times SO(n)/S(O(m-l)\times O(n-l)\times diag\, O(n_1)\times\ldots\times O(n_k))$ $\sum n_i = l$
10. $sp(m,n)$	$Sp(m)\times Sp(n)/Sp(m-l)\times Sp(n-l)\times diag\, Sp(n_1)\times\ldots\times Sp(n_k)$ $\sum n_i = l$

$K(n_1)\times\ldots\times K(n_k)\subset K(\ell)$ помещается на диагональ произведения $K(\ell)\times K(\ell)\subset K(m)\times K(n)$.

В таблице встречаются многообразия, хорошо известные в геометрии. Это, например, многообразия флагов (I,4,5), лагранжевы многообразия Грассмана $U(n)/O(n)$ и $Sp(n)/U(n)$ (7 и 3), многообразия ортогональных комплексных структур $SO(2n)/U(n)$ (2).

Рассмотрим отдельные примеры более подробно.

I. Удобно вместо алгебры $sl(n,\mathbb{R})$ рассматривать $gl(n,\mathbb{R})$. Пусть $a\in\mathfrak{p}$, $a=diag(a_1,\ldots,a_n)$ и диагональные элементы расположены в порядке убывания

$$a_1=\ldots=a_{n_1}>a_{n_1+1}=\ldots>a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}=\ldots=a_n .$$

Тогда $SO(n)\cdot a=SO(n)/S(O(n_1)\times\ldots\times O(n_k))$ – многообразие флагов в $\mathbb{R}^n$.

(A): движение n-мерного волчка по Лагранжу. Пусть $\varphi\in I(g)$, $d\varphi(a)=b=diag(b_1,\ldots,b_n)$. Тогда

$$H(\pi+az)=<\varphi(\pi z^{-1}+a)>_2=\sum\frac{b_i-b_j}{a_i-a_j}\pi_{ij}^2,\quad \pi\in so(n).$$

Если полином φ таков, что $b=a^{1/2}$ $(a\geqslant 0)$, то получаем гамильтониан волчка с тензором инерции b. Фазовое пространство при этом уже приведено по группе симметрии тензора инерции. Представление Манакова имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\pi+sz)=\left[\pi+sz,\ s^{1/2}z\right].$$

Все лаксовы интегралы движения $SO(n)$-инвариантны, поэтому для построения полной системы интегралов нужно дополнительно выбрать максимальную коммутативную систему функций на $so(n)$

(B) Если $s=Ad\,u\cdot a=uau^t$, $u\in SO(n)$, то для потенциала V в переменных u_{ij} получаем

$$V(u)=tr\,f\cdot uau^t=\sum_{ijk}a_k f_{ij}u_{ik}u_{jk}.$$

Система описывает движение точки на многообразии флагов (или симметричный волчок) в квадратичном потенциале. Представление Манакова имеет вид

$$\dot L=[L,M],\quad L=\pi+sz+fz^{-1},\quad M=sz.$$

В частности, для $a=diag(1,0,\ldots,0)$ получим $O_a\simeq\mathbb{R}P^{n-1}$. В канонических переменных x,p на $\mathbb{R}P^{n-1}$ (или на сфере S^{n-1}), нормированных условием $|x|=1,(x,p)=0$, получим $s=x\otimes x$, $\pi=x\wedge p$

$$L = x \wedge p + x \otimes x \cdot z + f z^{-1}$$

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \sum f_{ij} x_i x_j$$

$$\dot{L} = [\, L,\ x \otimes x \cdot z \,] \ .$$

Движение точки на сфере в квадратичном потенциале было проинтегрировано К.Нейманом в 1858 г. методом Гамильтона-Якоби. Интегралы движения

$$F_i = x_i^2 + \sum_{j \neq i} \frac{1}{f_i - f_j} \pi_{ij}^2$$

(здесь $f = diag(f_1, \ldots, f_n)$) были найдены К.Уленбек и затем широко использовались Ю.Мозером [43] , который также построил $L-M$ пару. Интегралы F_i содержатся среди инвариантов матрицы :

$$F_i = \langle \varphi(Lz) \rangle_2 \quad ,$$

если $d\varphi(a)_{km} = \delta_{ik} \delta_{im}$.

(С) вращение волчка в квадратичном потенциале. Выбирая полином φ как в случае (А), получим для $H(\xi) = \langle \varphi(Lz^{-1}) \rangle_{-2}$

$$H(\pi + s z) = \sum \frac{\pi_{ij}^2}{a_i + a_j} + tr(f \cdot d\varphi(s)) .$$

Подставляя $s = u a u^t$, получим потенциал

$$V(u) = tr(f u\ d\varphi(a) u^t) = \sum_{ijk} b_k f_{ij} u_{ik} u_{jk} \ .$$

Представление Манакова: $\dot{L} = [\, L,\ s^{1/2} z \,]$.

2. $g = so(m,n)$, $m \geq n$; $k = so(m) + so(n)$. Подалгебра Картана в p состоит из матриц $a = E(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_i (e_{i,m+i} + e_{m+i,i})$, где $(e_{ij})_{km} = \delta_{ik} \delta_{jm}$. Пусть среди чисел a_i имеется $n-l$ нулей, а остальные разбиваются на k групп равных между собой по n_i чисел в i -й группе. Тогда

$$SO(m) \times SO(n) \cdot a \simeq SO(m) \times SO(n) / S(O(m-l) \times O(n-l) \times diag\, O(n_1) \times \ldots \times O(n_k)) .$$

Здесь мы рассмотрим лишь гамильтонианы типа (В).

Пусть $a_1 = \ldots = a_n = 1$. Тогда $SO(m) \times SO(n) \cdot a = St(m,n)$ многообразие Штифеля. Потенциал, выраженный в координатах u_{ij} n -репера в $\mathbb{R}^m$, соответствующего точке из $St(m,n)$ имеет вид

$$V(u) = \sum f_{ij} u_{ij} \ .$$

Система описывает движение точки на $St(m,n)$ (или приведенного симметричного волчка) в линейном потенциале. В частности, при $n=1$ $St(m,1)=S^{m-1}$. В канонических переменных $\{x,p\}$, $|x|=1$, $(x,p)=0$, получаем $H=\frac{1}{2}p^2+(f,x)$. Лаксова матрица для движения точки на сфере в линейном потенциале имеет вид

$$L=x\wedge p+(xz+fz^{-1})\otimes e_{m+1}+e_{m+1}\otimes(xz+fz^{-1}),$$

где e_{m+1} – $(m+1)$ -й базисный вектор.

При $m=n$ $SO(m)\times SO(n)a\simeq SO(n)$. В переменных $\{u,\pi\}$ на $T^*SO(n)$ матрица Лакса для вращения симметричного волчка в линейном потенциале $V(u)=\operatorname{tr} fu$ имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} u\pi u^t & uz+fz^{-1} \\ u^tz+f^tz^{-1} & -\pi \end{pmatrix}$$

3. $\mathfrak{g}=so(n,n)$, $a=E(a_1,\dots,a_k,0,\dots,0)$,

a_i попарно различны и $a_i\neq 0$. В этом случае $SO(n)\times SO(n)\cdot a\simeq St(n,k)\times St(n,k)$ и гамильтониан типа (B) задает систему двух точек на $St(n,k)$ (или двух приведенных симметричных волчков), взаимодействующих посредством билинейного потенциала $V(u,v)=\sum a_k f_{ij}u_{ik}u_{jk}$. В частности, при $k=1$ получаем систему двух билинейно взаимодействующих точек на $(n-1)$ -мерной сфере. Матрица Лакса в канонических переменных $(x,p;\ y,q)$ имеет вид

$$L=\begin{pmatrix} x\wedge p & x\otimes y\cdot z+fz^{-1} \\ y\otimes x\cdot z+f^tz^{-1} & -y\wedge q \end{pmatrix}.$$

Интегралы движения типа $c1$ для $f=diag(f_1,\dots,f_n)$ имеют вид

$$H=\sum_{i,j}(f_i-f_j)^{-2}\left[b_i f_i(\pi_{ij}^2+\rho_{ij}^2)+2b_i f_j\pi_{ij}\rho_{ij}\right]+2\sum_i b_i x_i y_i,$$

где $\pi=x\wedge p$, $\rho=y\wedge q$, $E(b_1,\dots,b_n)=d\varphi(E(f_1,\dots,f_n))$.

Гамильтонианы типа (C) описывают взаимодействие несимметричных волчков. Из приведенных примеров должно быть ясно геометрическое содержание лаксовых систем в $\mathfrak{g}_1^{\theta *}$.

§ 7. Полнота системы интегралов движения

Проверка полноты системы интегралов движения, построенных по инвариантам градуированной алгебры, представляет значительные трудности. Для систем с числом степеней свободы, равным рангу группы (цепочки Тоды, движение в квадратичном потенциале на сфере), полнота устанавливается легко. Для орбит общего положения в подпространстве нулевой градуировки (например, для эйлеровых уравнений волчка), полнота была доказана в [28] . Полная интегрируемость неабелевой цепочки Тоды была недавно доказана И.М.Кричевером [35] .

Наиболее естественный путь доказательства полной интегрируемости использует средства алгебраической геометрии, которые приводят к линеаризации лаксовых уравнений на якобиане спектральной кривой матрицы Лакса. В обзоре Б.А.Дубровина, В.Б.Матвеева и С.П.Новикова [14] была доказана основная для нас теорема о соответствии между матричными полиномами с фиксированным спектром и якобианом спектральной кривой. Применительно к конечно-разностным уравнениям этот метод разработан в [18,19] . В частности, в [19] доказана эквивалентность линейного движения на якобиане и уравнений вида $\dot{L}=[L,M_+]$. В [32] вводятся градуированные алгебры и просчитан ряд примеров.

Мы напоминаем алгебро-геометрическую схему решения лаксовых уравнений, следуя в основном работе [19] , и затем показываем, как формула для траекторий (теорема 2, (*iiii*)) легко приводит к линеаризации уравнений. В дальнейшем $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(m,\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_{n_+,n_-}=\left\{\sum_{i=-n_-}^{n_+} x_i z^i\right\}$, $n_\pm \geqslant 0$. Мы будем пользоваться обозначением L вместо ξ , как более привычным в этой ситуации. Для простоты будем считать $L=\sum_{-n_-}^{n_+} \ell_i z^i$ элементом общего положения в $\mathfrak{g}_{n_+,n_-}$. Это означает, что ℓ_{n_+} и ℓ_{n_-} – матрицы с простым спектром.

7.1. Спектральная задача.

Пусть $L\in\mathfrak{g}_{n_+,n_-}$, X_L – аффинная кривая, задаваемая уравнением $\det(L(z)-\lambda)=0$. Будем предполагать, что спектр в общей точке простой, а кривая X_L неособа и неприводима. Пусть $\overline{X}_L$ – гладкая компактификация кривой X_L ; координаты z,λ – мероморфные функции на $\overline{X}_L$. Обозначим $(z)=P^+-P^-$ дивизор функции z , $P^\pm$ – эффективные дивизоры степени m . Положим $\mathcal{U}_\pm=X\setminus P^\pm$, $X_0=\mathcal{U}_+\cap\mathcal{U}_-$. Будем писать X вместо $\overline{X}_L$.

Рассмотрим линейное расслоение собственных подпространств матрицы $L(\cdot)$, определенное над X вне точек ветвления функции $\lambda(z)$, т.е. там, где спектр L прост. Оно задает мероморфное отображение кривой X в $\mathbb{C}P^{m-1}$ – пространство прямых в $\mathbb{C}^m$. Поскольку каждое такое отображение голоморфно, наше расслоение канонически продолжается до голоморфного расслоения E_L над X .

Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{U},E)$ пространство регулярных сечений расслоения E над областью $\mathcal{U}$; если $\mathcal{U}=X$, то будем писать просто $\mathcal{L}(E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.I.I. Пусть L - элемент общего положения в $\mathfrak{g}_{n_+,n_-}$. Тогда

(i) Род $g=g(X)$ кривой X равен $\frac{1}{2}m(m-1)(n_++n_-)-m+1$.

(ii) Степень расслоения E_L^* равна $g+m-1$ и $\mathcal{L}(E_L^*(-p^+))=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Замыкание кривой X в пополнении $\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^{-1}$ плоскости $\mathbb{C}^2=\{z,\lambda\}$ имеет особенности лишь в точках $P_+=(0,\infty)$ и $P_-=(\infty,\infty)$. Род неособой кривой X вычисляется через бистепень (d_1,d_2) ее уравнения и индексы $v(P_\pm)$ особых точек по формуле

$$g=d_1d_2-(d_1+d_2)+1-v(P_+)-v(P_-)\ .$$

В нашем случае $d_1=m(n_++n_-)$, $d_2=m$, а индексы легко вычисляются по главной части уравнения в точках $P_\pm$: $v(P_\pm)=\frac{1}{2}m(m-1)n_\pm$.

В результате получим

$$g=\frac{1}{2}m(m-1)(n_++n_-)-m+1\ .$$

(ii) Поскольку расслоение E_L погружено в $\mathbb{C}^m$, линейные координаты в $\mathbb{C}^m$ дают m -мерное пространство сечений двойственного расслоения E_L^* - обозначим это пространство через V . Обозначим также $R=\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ - кольцо полиномов Лорана.

ЛЕММА 7.I ([I9]). Естественное отображение $\iota: V\otimes R\to\mathcal{L}(X_0,E_L^*)$ является изоморфизмом R -модулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Кольцо R_0 функций, регулярных в X_0 , порождено функциями z, z^{-1} и λ . Пространства $V\otimes R$ и $\mathcal{L}(X_0,E_L^*)$ являются R_0 -модулями: для $V\otimes R$ это следует из того, что если $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_m)^t$ - базис в V , то $\lambda\psi=L\psi$.
Если $\iota(V\otimes R)$ является собственным подмодулем в $\mathcal{L}(X_0,E_L^*)$, то, как утверждает Коммутативная алгебра, найдется точка $x\in X_0$, в которой все элементы $\iota(V\otimes R)$ обращаются в ноль. Поскольку координаты ψ_i не обращаются в ноль одновременно, $\iota(V\otimes R)=\mathcal{L}(X_0,E_L^*)$.
Докажем теперь, что ι не имеет ядра. Это легко выводится из следующего утверждения:

⊛ Если $\psi\in V$ и $\psi\cdot z^{-1}$ лежит в $\mathcal{L}(E_L^*)$, то $\psi=0$.

Докажем его. Пусть мероморфное сечение ψz^{-1} регулярно. Тогда ψ обращается в ноль в точках P^+ и тем самым все собственные векторы матрицы ℓ_{n_+} имеют нулевую ψ -координату. Поскольку мы предполагаем, что ℓ_{n_+} имеет простой спектр, отсюда следует, что $\psi=0$.

Предположим теперь, что $\sum_{i=n_1}^{n_2} \varphi_i z^i = 0,\ \varphi_i \in V$ и среди φ_i есть ненулевые сечения. Можно считать, что $n_1 = -1$ и $\varphi_{-1} \neq 0$. Тогда $\varphi_{-1} z^{-1} = -\sum_0^{n_2} \varphi_i z^i$. Сумма в правой части не имеет полюсов в P^+, поэтому $\varphi_{-1} z^{-1} \in \mathcal{L}(E_L^*)$, что приводит к противоречию.

Из леммы 7.I следует, что $V = \mathcal{L}(E_L^*)$. Воспользовавшись $\circledast$, получим $\mathcal{L}(E_L^*(-P^+)) = 0$. Отсюда следует, что $\deg E_L^* \leqslant g + m - 1$. Для доказательства противоположного неравенства рассмотрим подкрученное расслоение $E_k = E_L^*(kP^-)$. При достаточно больших k

$$\dim \mathcal{L}(E_k) = \deg E_L^* - g + 1 + km .$$

Поскольку пространство $V \otimes \{\sum_0^k c_i z^i\}$ содержится в $\mathcal{L}(E_k)$, $\dim \mathcal{L}(E_k) \geqslant (k+1)m$, или $\deg E_L^* \geqslant g + m - 1$.

Обсудим теперь обратную задачу – восстановление матрицы L по алгебраическим данным: неособой полной кривой X рода g, мероморфной функции z степени m, $(z) = P^+ - P^-$, мероморфной функции λ, регулярной вне $P^+ \cup P^-$, и линейному расслоению E над X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейное расслоение E степени $g + n - 1$ называется z-регулярным, если $\mathcal{L}(E(-P^+)) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.I.2. Если E регулярно, то существуют матрицы $L \in \widetilde{gl(m,\mathbb{C})}$ для которых $X_L \simeq X$ и $E_L^* \simeq E$, и все такие матрицы $GL(m,\mathbb{C})$ – сопряжены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $V = \mathcal{L}(E)$, $X_0 = X \setminus (P^+ \cup P^-)$, $R = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, $E_k = E(kP^-)$. Мы докажем, что естественное отображение $\imath : V \otimes R \to \mathcal{L}(X_0, E)$ является изоморфизмом R-модулей. Действительно, доказательство леммы 7.I **показывает, что** $\imath$-вложение. Для доказательства сюрьективности достаточно проверить, что $\mathcal{L}(E_k) \subset \imath(V \otimes R)$ для всех $k \geqslant 0$. Если $\varphi \in \mathcal{L}(E_k)$, то из регулярности E следует, что найдется $\psi \in V$ такое, что $\varphi - \psi z^k \in \mathcal{L}(E_{k-1})$. Индукция по k завершает рассуждение.

Далее, умножение на регулярную в X_0 функцию λ задает R – линейный оператор в $\mathcal{L}(X_0, E)$. Применяя $\imath^{-1}$, получаем R – линейный оператор в $V \otimes R$, то есть полином Лорана $L(z)$ с коэффициентами в $\mathcal{E}nd(V)$. Наконец, из регулярности E следует, что $\dim V = m$. Доказательство закончено.

7.2. Динамика в алгебраических данных.

Обозначим T_L множество матриц из $\mathfrak{g}_{n_+,n_-}$, изоспектральных с L; другими словами, T_L – множество уровня алгебры инвариантных полиномов $I(\tilde{\mathfrak{g}})$. Обозначим $\mathcal{J}_k$ многообразие классов изоморфных линейных расслоений над X степени k, $\mathcal{J}(L)=\mathcal{J}_-(g+m-1)$. Мы построили отображение $\mathcal{J}:T_L\longrightarrow\mathcal{J}(L)$, $L'\longrightarrow E_{L'}$, слои которого являются $GL(m)$ – орбитами.

Множество T_L инвариантно относительно лаксовых уравнений. В свою очередь эти уравнения $GL(m)$ – инвариантны, и поэтому проектируются отображением $\mathcal{J}$ на $\mathcal{J}(L)$. Мы покажем, что теорема 2 мгновенно приводит к результату "прямой спектральной задачи": лаксовы уравнения движения проектируются в линейные уравнения на $\mathcal{J}(L)$.

Фиксируем гамильтониан $\varphi\in I(\tilde{\mathfrak{g}})$. Пусть $M=d\varphi(L)$ и L_t – решение гамильтонова лаксова уравнения $\dot{L}=[L,M_+]$, $L_0=L$. Спектральная кривая X_{L_t} в процессе эволюции не меняется. Опишем изменение со временем соответствующего расслоения E_{L_t}. Алгебра R_0 функций, регулярных в X_0 совпадает с алгеброй полиномов от z,z^{-1} и λ. Пусть $\Psi(x)\in E_L(x)$ – собственный вектор матрицы $L(z(x))$, отвечающий точке спектра $x\in X$. Поскольку $[L,M]=0$, имеем $M(z(x))\Psi(x)=\mu(x)\Psi(x)$, при этом $\mu\in R_0$. Обозначим F_t линейное расслоение над X, задаваемое функцией перехода $\exp t\mu$ для покрытия $X=\mathcal{U}_+\cup\mathcal{U}_-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2.I. $E_{L_t}=E_L\otimes F_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\exp tM=g_-^{-1}(t)g_+(t)$ – решение задачи факторизации, определенное *a priori*, при достаточно малых t. Эволюция матрицы L дается формулой

$$L_t=g_-(t)\,L\,g_-(t)^{-1}=g_+(t)\,L\,g_+(t)^{-1}.$$

Поэтому расслоение E_{L_t}, как подрасслоение в $X\times\mathbb{C}^m$, над областями $\mathcal{U}_\pm$ представляется в виде $E_{L_t}=g_\pm(t)E_L$: функции $g_\pm(t)$ задают изоморфизмы E_L и E_{L_t} над $\mathcal{U}_\pm$. При этом функция перехода в $\mathcal{U}_+\cap\mathcal{U}_-$, различающая эти изоморфизмы, есть $g_-(t)^{-1}g_+(t)|_{E_L}=\exp tM|_{E_L}=\exp t\mu$, что и доказывает предложение.

Остается заметить, что F_t – однопараметрическая группа линейных расслоений нулевой степени и $E_L\otimes F_t$ – линейная траектория на $\mathcal{J}(L)$.

Верно также, что каждому линейному уравнению на $\mathcal{J}(L)$ соответствует лаксово уравнение в T_L. Это вытекает из Предложения 7.2.I и того, что регулярные расслоения образуют открытое по Зарисскому множество в $\mathcal{J}_{g+m-1}$. Мы дадим также альтернативное доказательство этого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2.2. Любое линейное уравнение на $\mathcal{J}(L)$ поднимается до лаксова уравнения в T_L.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 7.2.I ясно, что достаточно доказать следующее: Любое расслоение F степени 0 над X можно задать функцией перехода $exp\,\mu$, $\mu\in R_0$ для покрытия $\{\mathcal{U}_+,\mathcal{U}_-\}$. Поскольку области $\mathcal{U}_\pm$ являются аффинными кривыми, то над каждой из них расслоение F тривиально, и поэтому оно задается функцией перехода φ. Поскольку $deg\, F=0$, φ можно выбрать гомотопной константе (как отображение X_0 в $\mathbb{C}^*$). В этом случае существует однозначная функция $\mu=\log\varphi$.

7.3. Полная интегрируемость.

Перейдем к вопросу о полноте системы интегралов движения лаксовых уравнений на $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ – орбите $\mathcal{O}_L$ матрицы L. Пусть при $n_->0$ H_L обозначает централизатор элемента ℓ_{-n_-} в $GL(m)$ (отметим, что в этом случае $\ell'_{-n_-}=\ell_{-n_-}$ для всех $L'\in\mathcal{O}_L$), и $H_L=GL(m)$ при $n_-=0$. Обозначим $T_L^0=T_L\cap\mathcal{O}_L$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3.I. (i) Группа H_L гамильтоново действует на $\mathcal{O}_L$ и сохраняет лаксовы уравнения движения.
(ii) Имеется естественный изоморфизм "приведенного тора"T_L^0/H на открытое по Зарисскому подмножество якобиана $\mathcal{J}(L)$.
(iii) Если $n_->0$, то алгебра $I(\tilde{\mathfrak{g}})$ дает полную систему интегралов движения и T_L^0 – "максимальный тор" в $\mathcal{O}_L$. Если $n_-=0$, то полная система интегралов движения получается добавлением к $I(\tilde{\mathfrak{g}})$ максимальной коммутативной по скобке Кириллова в $\mathfrak{gl}(m)$ алгебры функций от ℓ_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Как замечено в [32], при $n_->0$ гамильтонианы действия H_L на $\mathcal{O}_L$ содержатся в алгебре $I(\tilde{\mathfrak{g}})$. Действительно, рассмотрим полиномы $\varphi_n(L')=\langle\varphi(L'z^{n_-})\rangle_{n_-}$, $\varphi\in I(\mathfrak{g})$. Если $M=d\varphi_n(L')$, $L'\in\mathcal{O}_L$, то $M_-=d\varphi(\ell_{-n_-})$ и лаксово уравнение $\dot{L}'=[M_-,L']$ задает Ad-действие подгруппы $exp\,tM_-\subset H_L$. Поскольку ℓ_{-n_-} – матрица с различными собственными значениями, эти подгруппы заполняют всю группу H_L. В случае $n_-=0$ утверждение очевидно,
(ii) вытекает из предложений 7.I.I и 7.I.2
(iii) Из доказательства (i) **и предложения 7.2.2 вытекает, что при** $n_->0$ траектории гамильтонианов из $I(\mathfrak{g})$, начинающиеся в точке L, заполняют открытую часть множества уровня T_L^0. Это равносильно полной интегрируемости. При $n_-=0$ подмногообразие, заполняемое траекториями, начинающимися в L, трансверсально к $GL(m)$ – орбите точки L. Отсюда легко следует (iii).

Отметим, что $dim\,\mathcal{O}_L=m(m-1)(n_++n_-)$ при $n_->0$ и

$\dim \mathcal{O}_L = m(m+1)(n_+ + 1)$ при $n_- = 0$ (Предложение 5.I.I). Это согласуется с тем, что $\dim \mathcal{J}(L) = \frac{1}{2} m(m+1)(n_+ - n_-) + m + 1$ (Предложение 7.I.I).

Рассмотрим теперь тот же вопрос для симметрически градуированной комплексной алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}^\theta = \{L \in \tilde{\mathfrak{g}} : L(-z) = -L(z)^t\}$. Если $L \in \tilde{\mathfrak{g}}^\theta$, то на кривой X_L имеется инволюция $\tau(z, \lambda) = (-z, -\lambda)$. В [32] показано, что расслоения, соответствующие точкам множества уровня $T_L \cap \mathfrak{g}^\theta$, заполняют открытую часть подтора в $\mathcal{J}(L)$. При подходящем изоморфизме $\mathcal{J}(L)$ с $\mathcal{J}_0$ этот подтор переходит в многообразие Прима индуцированной инволюции τ_* в $\mathcal{J}_0$,

$$Prym(\tau) = \{E \in \mathcal{J}_0 : \tau_*(E) = E^*\}.$$

Пусть $\mathcal{O}_L^\theta$ – орбита точки L относительно алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_0^\theta$, $T_L^\theta = T_L \cap \mathcal{O}_L^\theta$, H_L^θ – компонента единицы пересечения $H_L \cap O(n, \mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3.2 (i) Группа H_L^θ гамильтоново действует на $\mathcal{O}_L^\theta$ и сохраняет лаксовы уравнения движения.
(ii) Имеется естественный изоморфизм "приведенного тора" T_L^θ / H_L^θ на открытое по Зарисскому подмножество в $Prym(\tau)$.
(iii) Если $n_- > 0$, то алгебра $I(\tilde{\mathfrak{g}})$ дает полную систему интегралов движения и T_L^θ – "максимальный тор" в $\mathcal{O}_L^\theta$. Если $n_- = 0$, то полная система интегралов движения получается добавлением к $I(\tilde{\mathfrak{g}})$ максимальной коммутативной по скобке Кириллова в $so(n)$ алгебры функций от ℓ_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Описанное выше отображение $\mathcal{J}^\theta : T_L \cap \mathfrak{g}^\theta \to Prym(\tau)$ имеет такие же свойства, что и отображение $\mathcal{J} : T_L \to \mathcal{J}(L)$: его слои – орбиты группы $O(n, \mathbb{C})$, лаксовы потоки в $T_L \cap \mathfrak{g}^\theta$ переходит в линейные потоки на $Prym(\tau)$ и обратно. Поэтому доказательство Предложения 7.3.I переносится на этот случай. Мы приведем также независимое вычисление размерности многообразия Прима.

Пусть $\mathcal{J}^\tau$ – множество неподвижных точек инволюции τ_*. Очевидно, $\dim Prym(\tau) = g - \dim \mathcal{J}^\tau$. Поскольку $\mathcal{J}^\tau$ – якобиан фактор-кривой $X^\tau = X/\tau$, то $\dim \mathcal{J}^\tau = g(X^\tau)$. Для вычисления $g(X^\tau)$ достаточно знать индекс ветвления двулистного накрытия $X \to X^\tau$. Ветвление может происходить лишь в точках с координатами $z = 0, \infty$, $\lambda = 0, \infty$. Они исчерпываются теми $2m$ точками, которые возникают при разрешении особенности в $P_+ = (0, \infty)$ $P_- = (\infty, \infty)$. Таким образом, индекс ветвления равен $v = v_+ + v_-$. Из формулы Гурвица $2g(X^\tau) = g + 1 - v$ получаем $\dim Prym(\tau) = \frac{1}{2}(g-1) + \frac{1}{4} v$. При этом $v_\pm = m$, если $n_\pm$ нечетно и $v_\pm = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{m})$, если $n_\pm$ четно.

Все предыдущие рассуждения проводились для комплексных алгебр и групп. В случае вещественной алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ изоспектральным матрицам отвечает "вещественная часть" якобиана $\mathcal{J}(L)$, и утверждения о полной интегрируемости сохраняют свою силу.

Для алгебры Ли, отличной от $\mathfrak{gl}(m)$, следует рассмотреть ее точное матричное представление. Лаксово движение будет происходить вдоль подтора, который определяется свойствами симметрии представления.

7.4. Дополнительные интегралы для неабелевой цепочки Тоды.

Как отмечалось в п.3.5, обычная $L-M$ пара для незамкнутой неабелевой цепочки Тоды дает $(mn-1)$ независимых интегралов движения, меньше, чем число степеней свободы $(n-1)m^2$. Привлечение градуированной алгебры позволяет задать ту же цепочку с помощью матрицы $L_c = L + C \otimes e_{\alpha*} z^{-1}$, $c \in \mathfrak{gl}(m)$

$$L_c = \begin{pmatrix} p_1 & a_1 & \dots & & cz^{-1} \\ 1 & p_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & p_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & p_n \end{pmatrix},$$

где $p_i = \dot{g}_i g_i^{-1}$, $a_i = g_{i+1} g_i^{-1}$, $g_i \in GL(m)$. Отличие от периодической цепочки состоит в том, что здесь орбита лежит в подпространстве нулевой z -градуировки.

По аналогии с [35] можно полагать, что число независимых инвариантов матрицы L_c не меньше рода кривой X_{L_c} ; задаваемой уравнением $\det(L_c(z) - \lambda) = 0$. Вычислим его. Бистепень кривой равна $(d_1, d_2) = (m, mn)$. Пусть $c = \operatorname{diag}(c_1, \dots, c_m)$, c_i попарно различны. Замыкание кривой X_L в $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ имеет особенность в точке $z = 0$, $\lambda = \infty$, где главная часть уравнения есть $\prod_{i=1}^{m} (\lambda^n - c_i z^{-1})$. Индекс этой особой точки равен $v = \frac{1}{2} m(m-1)n$, откуда

$$g = d_1 d_2 - (d_1 + d_2) + 1 - v = \frac{1}{2} m(m-1)n - m + 1 .$$

Кроме того, в неабелевой цепочке Тоды имеется группа симметрии $\operatorname{diag} GL(m) \subset GL(mn)$. Преобразования из $GL(m)$ коммутирующие с матрицей C , добавляют к интегралам $\langle \varphi(L_c) \rangle_k$, $\varphi \in I(\mathfrak{gl}(mn))$ еще $m-1$ интеграл в инволюции.

Заключительные замечания

Здесь обсуждается квантовый вариант схемы п$^{\text{O}}$ I.2 и формулируются некоторые нерешенные задачи.

I. Квантование.

Под квантованием интегрируемой динамической системы в $\mathfrak{g}^*$ мы понимаем следующее. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – стандартная фильтрация в обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\beta: S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \oplus\, \mathcal{U}_i/\mathcal{U}_{i-1}$ – изоморфизм симметризации. Пусть задана подалгебра $A \subset S(\mathfrak{g})$, коммутативная по скобке Кириллова. Введем на A фильтрацию степенью полинома.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Квантованием алгебры A называется гомоморфизм $q : A \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ алгебр с фильтрацией такой, что соответствующий гомоморфизм градуированных алгебр совпадает с ограничением β на $\mathrm{grad}(A)$.

Другими словами, квантование – это реализация гамильтонианов коммутирующими операторами с сохранением старшего символа.

ПРИМЕР. Квантованием алгебры инвариантов $A = I(\mathfrak{g}^*)$ является изоморфизм $Q : A \to Z(\mathfrak{g})$, построенный Хариш-Чандрой в полупростом случае и М.Дюфло [36] в общем случае.

Сохраним обозначения п^0 I.2: $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \dot{+} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, $\sigma_0 : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}$ определяется равенством $\sigma_0(\alpha \oplus \beta) = \alpha - \beta$. Пусть $u \mapsto u^*$ – антиинволюция в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, порожденная умножением на $-I$ в $\mathfrak{g}$. Определим отображение $\tilde{\sigma} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ "индуцированное" отображением σ_0 : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) = \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{b})$ и для $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$, $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{b})$ положим $\tilde{\sigma}(u \otimes v) = u v^*$,

$$\rho = \tilde{\sigma}^{-1}.$$

Пусть $\sigma_* : S(\mathfrak{g}_0) \to S(\mathfrak{g})$ – продолжение σ_0 на симметрическую алгебру. Напомним, что в теореме I рассматривалась алгебра гамильтонианов на $\mathfrak{g}_0^*$ вида $A^{\sigma} = \sigma_*^{-1} I(\mathfrak{g}^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть $Q : I(\mathfrak{g}^*) \to Z(\mathfrak{g})$ – квантование Дюфло в $\mathfrak{g}^*$. Отображение

$$q = \rho \circ Q \circ \sigma_*$$

задает квантование алгебры A^{σ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать, что на центре $Z(\mathfrak{g})$ отображение ρ является гомоморфизмом. Для этого заметим, что из определения ρ следует при $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{a})$, $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{b})$, $z \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$\rho(u z v) = \rho(u)\, \rho(v)\, \rho(z).$$

Поэтому для $z \in Z(\mathfrak{g})$, $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ имеем $\rho(xz) = \rho(x)\rho(z)$.

Геометрическая интерпретация отображения $\rho|_{Z(\mathfrak{g})}$ состоит в том, что при замене переменной $\sigma: G_0 \to G$ биинвариантный дифференциальный оператор $z \in Z(\mathfrak{g})$ переходит в левоинвариантный оператор $\rho(z)\in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$.

Рассмотрим вопрос о симметричности оператора $\rho(z), z\in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ при унитарном представлении группы G_0, в частности, при квантовании на орбитах. С этой целью введем обозначение * для антиавтоморфизма обертывающей алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0))$, равного $-id$ на $\mathfrak{g}$ (на $\mathfrak{g}_0$) в унитарном представлении ему соответствует сопряжение. Очевидно, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ * -инвариантно. Обозначим dg_r, dg_ℓ правую и левую меры Хаара на G_0, $dg_\ell = \Delta(g)\, dg_r$. Положим $2\sigma(x) = \frac{d}{dt}\Delta(\exp tx)\big|_{t=0}$, $x\in\mathfrak{g}_0$. Пусть $\tilde{\sigma}$ - автоморфизм алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$, заданный на образующих $x\in\mathfrak{g}_0$ равенством $\tilde{\sigma}(x) = x - \sigma(x)$. Наконец, положим $\gamma = \tilde{\sigma}\circ\rho$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть группа G унимодулярна. Тогда гомоморфизм $\gamma: \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ симметричен, т.е. $\gamma(z^*) = \gamma(z)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\sigma: G_0 \to G$ переводит меру Хаара на G в левоинвариантную меру на G_0 и, тем самым, автоморфизм * в $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ - в сопряжение по мере dg_ℓ в регулярном представлении алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$. Так как $\mathfrak{g}_0$ - алгебра левоинвариантных полей, то ее регулярное представление унитарно относительно правой меры dg_r, т.е. * в $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ соответствует сопряжению по мере dg_r. Но умножение на $\Delta^{1/2}$ переводит одно сопряжение в другое и оператор $u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ в $\tilde{\sigma}(u)$.

Для расщепимых цепочек Тоды имеется более детальная информация ([I7]). Задачу квантования можно решить полностью, построив спектральное разложение алгебры квантовых интегралов движения. Она оказывается унитарно эквивалентной алгебре операторов умножения на полиномы, инвариантные относительно группы Вейля, в пространстве квадратично суммируемых функций на подалгебре Картана.

2. Некоторые нерешенные задачи.

I. Имеются две вполне интегрируемые системы, весьма похожие на системы § 6, но не охваченные нашей схемой. Первая - ангармонический осциллятор, задаваемый гамильтонианом

$$H(x,p) = \sum (p_i^2 + a_i x_i^2) + \frac{1}{2}\left(\sum x_i^2\right)^2 .$$

Интегралы движения в инволюции

$$H_i(x,p) = p_i^2 + a_i x_i^2 + \frac{1}{2} x_i^2 \sum x_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \frac{(x_i p_j - x_j p_i)^2}{a_i - a_j}$$

напоминают интегралы движения для осциллятора на сфере, но $L-M$ пара не найдена.

Вторая система - движение частицы на сфере $|x| = 1$ в $\mathbb{R}^n$ в потенциале $V(x) = \frac{1}{2}\left(\sum a_i x_i^2 + \sum c_i^2 x_i^{-2}\right)$. Ю.Мозер [33] нашел $L-M$ пару, в которой

$$L = x \wedge p + x \otimes x + x \otimes \frac{c}{x} + \frac{c}{x} \otimes x + A ,$$

где $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$, $\frac{c}{x} = \left(\frac{c_1}{x_1}, \ldots, \frac{c_n}{x_n}\right)$. Отсутствует орбитное истолкование этой пары.

2. Для расщепимых цепочек Тоды Б.Костант [20] определил переменные типа действие-угол, в которых линеаризуются все лаксовы уравнения. Как в этих переменных выглядит симплектическая форма? В частности, будут ли они настоящими переменными действие-угол?

3. Обобщить способ пополнения потоков на основе гамильтоновой редукции на градуированный случай.

4. Есть ли связь между гамильтоновыми структурами стационарных уравнений [I4] и структурами п^0 5.2 в $\mathfrak{g}_n^*$?

6. М.Адлер [5] предложил вторую гамильтонову структуру для классической цепочки Тоды, относительно которой прежние интегралы движения коммутируют и дают тот же набор уравнений. Задача состоит в групповой интерпретации этой структуры.

7. Квантовые гамильтонианы систем § 6 легко строятся и имеют дискретный спектр. В [I7] предложено квантование интегралов движения, но коммутативность не доказана, в частности, не известно, дает ли оно квантовые интегралы. Было бы интересно, по аналогии с конечномерным случаем, научиться использовать представления аффинных алгебр для нахождения спектра и собственных функций квантовой системы.

Литература

I. К и р и л л о в А.А., Унитарные представления нильпотентных групп Ли, УМН I7, 4 (I962), 57–I0I.

2. А р н о л ь д В.И., Математические методы классической механики, М., "Наука", I974.

3. Л а к с П.Д., Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны, Математика, I3:5 (I969), I28–I50.

4. З а х а р о в В.Е., Ф а д д е е в Л.Д., Уравнение Кортевега – де Фриза вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ 5:4 (I97I), I8–27.

5. A d l e r M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for Korteweg-de-Vries type equations. Inventiones math., 50, 219-248, (1979).

6. М а н а к о в С.В., О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, ЖЭТФ 67:2 (I974), 543–555.

7. F l a s c h k a H., Toda lattice II, Progr.Theor.Phys.51 (1974), 703-716.

8. M o s e r J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Advances in Math. 16 (1975), 197-220.

9. van M o e r b e k e P., The spectrum of Jacobi matrices, Invent.Math. 37 (1976), 45-81.

I0. B o g o y a v l e n s k y O.I., On perturbations of the periodic Toda lattice, Commun.nath.Phys.,51(1976), 201-209.

II. М а н а к о в С.В., Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функ.анализ,I0:4 (I976), 93-94.

I2. О л ь ш а н е ц к и й М.А., П е р е л о м о в А.М., Явные решения некоторых вполне интегрируемых гамильтоновых систем, Функц.анализ, II:I (I977), 75-76.

I3. Н о в и к о в С.П., Периодическая задача Кортевега - де Фриза I, Функц.анализ, 8:3 (I974), 54-66.

I4. Д у б р о в и н Б.А., М а т в е е в В.Б., Н о в и к о в С.П., Линейные уравнения типа Кортевега - де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН 3I, I (I976), 55-I36.

I5. K a z h d a n D., K o s t a n t B., S t e r n b e r g S., Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero type, Comm.Pure Appl.Math.,31,4 (1978), 481-508.

I6. O l s h a n e t s k y M.A., P e r e l o m o v A.M., Explicit solutions of the classical generalized Toda models, Inventiones math., 54(1979).

I7. R e y m a n A.G., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A., Reduction of Hamiltonial systems, affine Lie algebras and Lax equations, Inventiones math., 54, 1979, 81-100.

I8. К р и ч е в е р И.М., Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения, УМН 33:4 (I978), 2I5-2I6.

19. van M o e r b e k e P., M u m f o r d D., The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math., 143 (1979), 93-154.

20. K o s t a n t B., The solution to a generalized Toda lattice and representation theory, Advances in Math. 34 (1979), 195-338.

21. К и р и л л о в А.А., Элементы теории представлений. М., "Наука", I972.

22. Л е б е д е в Д.Р., М а н и н Ю.И., Уравнения длинных волн Бенни П. Представление Лакса и законы сохранения,препринт

ИТЭФ-89 (I979).

23. Гельфанд И.М., Дикий Л.А., Дробные степени операторов и гамильтоновы системы, Функц.анализ I0:4 (I976), I3-29.

24. Kostant B., On Whittaker vectors and representation theory, Inv,math., 48, 2 (1978), 101-184.

25. Kostant B., The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, Amer.J. Math., 81 (1959), 973-1032.

26. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., "Наука",I97I.

27. Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Об интегрировании уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, Докл.АН СССР, 23I, 3 (I976), 536-538.

28. Мищенко А.С., Фоменко А.Т., Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли, Изв.АН СССР, сер.матем., 42(I978), 396-4I5.

29. Magri F., A simple model of the integrable Hamiltonian equation, J.Math.Phys., 19 (1978), 1156-1162.

30. Кулиш П.П., Рейман А.Г., Иерархия симплектических форм для уравнений Шредингера и Дирака на прямой, Записки научных семинаров ЛОМИ, 77 (I978), I34-I47.

3I. Гельфанд И.М., Дорфман И.Я., Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры, Функц. анализ, I3:4 (I979), I3-30.

32. Adler M., van Moerbeke P., Completely integrable systemss, Kac-Moody Lie algebras, and curves, preprint (1979).

33. Moser J., Geometry of quadrics and spectral theory, preprint 1979.

34. Рейман А.Г., Семенов-Тян-Шанский М.А., Френкель И.Б. Градуированные алгебры Ли и вполне интегрируемые динамические системы. Докл.АН СССР, 247 (I979), 802-805.

35. Кричевер И.М., Периодическая неабелева цепочка Тода и ее двумерное обобщение, направлено в ДАН СССР.

36. Duflo M., Operateurs differentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. Ann.Sci Ecole Norm.Sup., 4-e ser., 10 (1977), 265-288.

Е.К.Склянин

КВАНТОВЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Введение

I. Последнее десятилетие было ознаменовано резким усилением интереса к вполне интегрируемым системам классической и квантовой механики. Хотя точно решаемые задачи всегда представляли интерес для физики и математики как модели для изучения общих закономерностей поведения сложных нелинейных систем или как источник "нулевого" приближения к неинтегрируемым уравнениям, лишь сравнительно недавно были открыты мощные методы их исследования, которые позволили существенно расширить класс вполне интегрируемых систем. Речь идет, с одной стороны, о методе обратной задачи рассеяния [I] , берущем свое начало от работ К.Гарднера, Дж.Грина, М.Крускала и Р.Миуры [2] , П.Лакса [3] , В.Е.Захарова и Л.Д.Фаддеева [4] и позволяющем исследовать вполне интегрируемые модели классической механики. С другой стороны, существует традиция исследования точно решаемых моделей квантовой механики и статистической физики, восходящая к работам Г.Бете [5] и Л.Онзагера [6] и достигшая своего высшего развития в работах Р.Бакстера [7-8] . (Мы намеренно схематизируем здесь ситуацию, оставляя в стороне, например, теоретико-групповые методы исследования классических и квантовых вполне интегрируемых моделей).

После того, как методом обратной задачи рассеяния была доказана полная интегрируемость некоторых релятивистски инвариантных моделей: уравнения синус-Гордон [9] , киральных полей [IO] и др., возник вопрос, не окажутся ли вполне интегрируемыми также и соответствующие квантовополевые модели. Положительное решение этого вопроса представляло бы большой интерес для квантовой теории поля, так как дало бы нетривиальный пример точно решаемой квантовополевой модели. Эти соображения вызвали ряд попыток квазиклассического квантования вполне интегрируемых моделей, напр., [II, I2] которые, однако, не принесли полного удовлетворения, так как могли дать лишь приближенный, а не точный ответ.

Таким образом, остается актуальной проблема синтеза указанных выше двух подходов - классического и квантового - в один метод исследования квантовополевых вполне интегрируемых систем, который можно было бы назвать "квантовый метод обратной задачи рассеяния".

Первые шаги в этом направлении были предприняты в работе

Л.Д.Фаддеева и автора [I3] и работе автора [I4] . В работе [I3] была оформулирована программа обобщения метода обратной задачи рассеяния на квантовый случай. В работе [I4] эта программа была успешно реализована для нелинейного уравнения Шредингера. Однако, малые размеры заметки [I4] не позволили включить в нее все необходимые доказательства. Настоящая работа, написанная на основе диссертации автора [I5] , содержит развернутое и последовательное изложение квантового метода обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера с учетом достижений двухлетнего периода развития этого метода [I6-28] . Кроме того, мы включили сюда краткий очерк теории классического нелинейного уравнения Шредингера, основанной на предложенном автором в работе [29] методе классической τ - матрицы.

Автор искренне благодарен академику Л.Д.Фаддееву за постановку задачи и постоянное внимание к работе а также всем сотрудникам лаборатории математических проблем физики ЛОМИ за многочисленные плодотворные обсуждения.

2. Рассмотрим подробнее основные черты подхода к квантовому обобщению метода обратной задачи рассеяния, предложенного в работах [I3, I4] и развиваемого в настоящей работе. Сравним прежде всего постановку задачи в классической и квантовой механике. Если в классической механике обычно интересуются эволюцией начальных данных во времени, и классический метод обратной задачи рассеяния обычно нацелен на то, чтобы найти закон эволюции во времени данных рассеяния вспомогательной линейной задачи, то для квантовой механики более характерен "стационарный" подход, наибольший интерес в котором представляют спектр гамильтониана и S - матрица. Однако, несмотря на такое кажущееся несходство постановок задачи, все же существует подход к классическому методу обратной задачи рассеяния, вполне аналогичный "стационарному" квантовомеханическому подходу. Речь идет о гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи рассеяния, развитой в работах [4, 30] . Исследование нелинейного эволюционного уравнения при таком подходе нацелено на то, чтобы построить из данных рассеяния вспомогательной линейной задачи переменные типа действие-угол для рассматриваемого уравнения и доказать таким образом его полную интегрируемость, определив попутно спектр элементарных возбуждений системы. Вопрос же о временной эволюции представляет с этой точки зрения второстепенный интерес. Именно этот гамильтонов подход и был взят в качестве отправной точки для квантовомеханического обобщения метода обратной задачи рассеяния в работах [I3, I4] и в настоящей работе.

Выбор нелинейного уравнения Шредингера (н.у.Ш.)

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2\varkappa|\Psi|^2\Psi \qquad (1)$$

в качестве объекта исследования диктовался следующими соображениями:

1) Квантовая версия нелинейного уравнения Шредингера (с нулевыми граничными условиями на бесконечности) описывает одномерную систему бозе-частиц с точечным взаимодействием. Тем самым задача сводится к квантовой механике конечного числа частиц и не содержит трудностей, специфичных для квантовой теории поля (нефоковские представления перестановочных соотношений, расходимости и т.п.).

2) Нелинейное уравнение Шредингера детально изучено как в классическом, так и в квантовом случае. Классическое н.у.Ш. допускает применение метода обратной задачи рассеяния [30-32] , в квантовом случае имеется полное описание спектра и собственных функций гамильтониана [33, 34] . Последнее обстоятельство ценно тем, что позволяет сравнить результаты, полученные новым методом с точным квантовым ответом.

Теперь можно конкретизировать постановку задачи. Важную роль в методе обратной задачи рассеяния играет матрица перехода $T(\lambda)$ (см. далее § 1.1)

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) \ , & \varkappa\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda) \ , & \bar{a}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \bar{\lambda}\ , \qquad (2)$$

которая определяется посредством вспомогательной линейной задачи, и матричные элементы которой являются функционалами полей $\Psi(x)$, $\Psi(x)$.

Как известно [30] , уравнение (1) описывает динамику гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(|\Psi_x|^2 + \varkappa|\Psi|^4 \right)$$

и скобкой Пуассона, задаваемой соотношениями

$$\{\Psi(x), \Psi(y)\} = \{\bar{\Psi}(x), \bar{\Psi}(y)\} = 0\ ,$$

$$\{\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\} = i\delta(x-y)\ .$$

Метод обратной задачи рассеяния позволяет вычислить скобки

Пуассона между матричными элементами матрицы $T(\lambda)$. В частности:

$$\{a(\lambda), a(\mu)\} = \{\bar{b}(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = 0 , \tag{3}$$

$$\{a(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\, a(\lambda)\, \bar{b}(\mu) . \tag{4}$$

Оказывается, [31, 32] что $\ln a(\lambda)$ является производящей функцией локальных интегралов движения уравнения (1), а из величин $b(\lambda)$ и $\bar{b}(\lambda)$ можно построить переменные типа действие-угол.

В работе [13] задача обобщения метода обратной задачи на квантовый случай была сформулирована, как задача о построении квантовых операторов $A(\lambda)$ и $B^{+}(\lambda)$, которые обладали бы следующими свойствами:

1) В классическом пределе операторы $A(\lambda)$ и $B^{+}(\lambda)$ должны переходить соответственно в величины $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$.

2) Между операторами $A(\lambda)$ и $B^{+}(\mu)$ должны выполняться следующие коммутационные соотношения:

$$[A(\lambda), A(\mu)] = [B^{+}(\lambda), B^{+}(\mu)] = 0 , \tag{5}$$

$$A(\lambda) B^{+}(\mu) = c(\lambda,\mu) B^{+}(\mu) A(\lambda) , \tag{6}$$

где $c(\lambda,\mu)$ - некоторая числовая функция λ и μ.

Отметим, что такая постановка задачи имеет смысл не только для н.у.Ш., но и для многих других вполне интегрируемых уравнений [16].

Квантование уравнения (1) производится в терминах операторов уничтожения и рождения $\Psi(x)$ и $\Psi^{+}(x)$, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям

$$[\Psi(x), \Psi^{+}(y)] = [\Psi^{+}(x), \Psi^{+}(y)] = 0 ,$$
$$[\Psi(x), \Psi^{+}(y)] = \delta(x-y) . \tag{7}$$

При этом задача построения операторов $A(\lambda)$ и $B^{+}(\lambda)$ сводится, по существу, к вопросу о выборе правильного упорядочения операторов Ψ и Ψ^{+}, т.е. такого упорядочения, которое удовлетворяло бы условию 2), сформулированному выше. Как будет показано в дальнейшем, для н.у.Ш. правильным является нормальное (виковское) упорядочение, т.е. операторы $A(\lambda)$ и $B^{+}(\lambda)$ определяются, как операторы, нормальными символами которых являются соответственно классические функционалы $a(\lambda;\Psi,\overline{\Psi})$ и $\overline{b}(\lambda;\Psi,\overline{\Psi})$.

Основная техническая трудность рассматриваемого подхода состоит в доказательстве коммутационных соотношений (5, 6) и вычислении коэффициента $c(\lambda,\mu)$. Эту задачу позволяет решить предложенный автором в работе [I4] метод R - матрицы, который дает возможность записать коммутационные соотношения между матричными элементами квантовой матрицы перехода в компактном матричном виде и свести их доказательство к проверке простых инфинитезимальных соотношений. Идея этого метода была подсказана автору работами Р.Бакстера [7, 8].

Вычисление коэффициента $c(\lambda,\mu)$ методом R - матрицы дает следующий результат:

$$c(\lambda,\mu)=\frac{\lambda-\mu+i\varkappa}{\lambda-\mu}\ . \tag{8}$$

Перечислим главные результаты, которые будут доказаны в основном тексте, как следствия коммутационных соотношений (5, 6):

I) Операторнозначная функция $\ln A(\lambda)$, как и в классическом случае, является производящей функцией локальных попарно коммутирующих интегралов движения $\mathcal{I}_m$ для квантового н.у.Ш.

2) Состояния $|k_1,\ldots,k_N>_B$, получаемые действием на вакуум операторов $B^+(k_j)$ $(j=1,\ldots,N)$

$$|k_1,\ldots,k_N>_B=B^+(k_1)\ldots B^+(k_N)|0>\ , \tag{9}$$

являются собственными векторами квантового гамильтониана $\mathbb{H}$ и всех интегралов движения $\mathcal{I}_m$, причем соответствующие собственные значения аддитивны по импульсам k_j:

$$\mathbb{H}\,|k_1,\ldots,k_N>_B=\sum_{j=1}^{N}k_j^2\ |k_1,\ldots,k_N>_B\ . \tag{IO}$$

Волновые функции состояний $k_1,\ldots,k_N>_B$ совпадают с волновыми функциями, получаемыми методом подстановки Бете [33, 34].

3) Операторы $\Phi(\lambda),\Phi^+(\lambda)$, определяемые формулами

$$\Phi^+(\lambda)=B^+(\lambda)\left(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda)\right)^{-1/2},\ \Phi(\lambda)=\Phi^+(\lambda)^+\ , \tag{II}$$

удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\left[\Phi(\lambda), \Phi(\mu)\right] = \left[\Phi^+(\lambda), \Phi^+(\mu)\right] = 0 , \qquad \left[\Phi(\lambda), \Phi^+(\mu)\right] = \delta(\lambda-\mu) . \tag{12}$$

и позволяют (в случае $\varkappa > 0$) явно диагонализовать гамильтониан

$$\mathbb{H} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \, \mu^2 \, \Phi^+(\mu) \, \Phi(\mu) \tag{13}$$

и все другие интегралы движения $\mathfrak{I}_m$. На этом основании операторы $\Phi(\lambda), \Phi^+(\lambda)$ могут быть названы квантовыми аналогами переменных действие-угол.

3. Основной текст статьи состоит из двух глав, заключения и приложения. В Главе I рассматривается классическое нелинейное уравнение Шредингера, в Главе II - квантовое. При этом рассмотрение классического случая ведется таким образом, чтобы все получаемые результаты имели прямые аналогии в квантовом случае.

Этой идее подчинена и композиция статьи: каждому параграфу Главы I соответствует аналогичный параграф Главы II.

Глава I состоит из 5 параграфов. В § 1.1 вводятся основные понятия и обозначения. В § 1.2 вычисляются скобки Пуассона между матричными элементами матрицы перехода $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ на конечном интервале. В § 1.3 рассмотрен случай полубесконечного и бесконечного интервалов. В § 1.4, носящем вспомогательный характер, собраны известные результаты относительно интегралов движения для н.у.Ш. и построены переменные действие-угол. В § 1.5 с помощью метода R -матрицы строится производящая функция M - операторов для н.у.Ш.

Глава II состоит также из 5 параграфов. В § 2.1 перечисляются известные для квантового н.у.Ш. результаты, вводится квантовая матрица перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$. В § 2.2 вычисляются коммутационные соотношения между матричными элементами квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$. В § 2.3 рассматривается случай полубесконечного и бесконечного интервалов. В § 2.4 суммируются полученные результаты, обсуждается вопрос построения квантовых переменных действие-угол. В § 2.5 исследуется вопрос о квантовом M -операторе.

В Заключение суммируются основные выводы и результаты работы, дается краткий обзор нерешенных проблем в области квантовых вполне интегрируемых систем, обсуждаются перспективы развития этого направления.

В Приложении приводится сводка классических и квантовых коммутационных соотношений между матричными элементами матриц перехода для конечного, полубесконечного и бесконечного интервалов.

ГЛАВА I

КЛАССИЧЕСКОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

§ I.I Матрица перехода

В настоящем параграфе вводятся основные обозначения и перечисляются некоторые, в основном известные в литературе [30-32] результаты для классического нелинейного уравнения Шредингера. Мы позволили себе несколько отступить от обозначений и формулировок оригинальных работ [30-32], придав им более удобный для наших целей вид.

Нелинейное уравнение Шредингера, как было указано во Введении, имеет вид

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + 2\varkappa |\Psi|^2 \Psi . \qquad (\mathrm{I.I.I})$$

Комплекснозначную функцию $\Psi(x,t)$ будем считать бесконечно дифференцируемой по обоим аргументам и при всяком t убывающей по x быстрее любой степени x.

Изучение уравнения (I.I.I) методом обратной задачи рассеяния сводится, как было показано в [31, 32] к исследованию спектральных характеристик пучка линейных дифференциальных операторов $\frac{d}{dx} - L(x,\lambda)$, где

$$L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} , & i\varkappa\overline{\Psi}(x) \\ -i\Psi(x) , & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} = \qquad (\mathrm{I.I.2})$$

$$= -i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + i\varkappa\overline{\Psi}(x)\sigma_+ - i\Psi(x)\sigma_- .$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Начиная с этого места и вплоть до § I.5 мы будем считать момент времени t фиксированным.

В отличие от [30-32], мы выбрали матрицу L с несимметричным вхождением константы связи $\varkappa$, что позволит нам единообразно рассматривать как случай отталкивания $\varkappa>0$, так и случай притяжения $\varkappa<0$.

Введем матрицу перехода $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ на конечном интервале $[x_1,x_2]$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_2} T_{x_1}^{x_2}(\lambda)=L(x_2,\lambda)\, T_{x_1}^{x_2}(\lambda) \qquad (\text{I.I.3})$$

с начальным условием

$$T_{x}^{x}(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I \qquad (\text{I.I.4})$$

Перечислим некоторые свойства матрицы $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$:

I) $$\left(T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\right)^{-1}=T_{x_2}^{x_1}(\lambda), \qquad (\text{I.I.5})$$

2) $$T_{x_2}^{x_3}(\lambda)\, T_{x_1}^{x_2}(\lambda)=T_{x_1}^{x_3}(\lambda), \qquad (\text{I.I.6})$$

3) $$\frac{\partial}{\partial x_1} T_{x_1}^{x_2}(\lambda)=-T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\, L(x_1,\lambda), \qquad (\text{I.I.7})$$

4) $$\overline{T_{x_1}^{x_2}(\lambda)}=K\, T_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)\, K, \qquad (\text{I.I.8})$$

где

$$K=\begin{pmatrix}0\,, & \varkappa^{1/2}\\ \varkappa^{-1/2}, & 0\end{pmatrix}, \quad K^2=I,$$

а черта над матрицей означает поэлементное комплексное сопряжение.

5) $$\det T_{x_1}^{x_2}(\lambda)=1. \qquad (\text{I.I.9})$$

Свойства I) – 3) вытекают непосредственно из определения $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$. Свойство симметрии 4) следует из аналогичного свойства L - оператора

$$\overline{L(x,\lambda)}=K\, L(x,\bar\lambda)\, K, \qquad (\text{I.I.I0})$$

которое проверяется непосредственно. Заметим, что (I.I.8) означает, что матрица $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ имеет вид

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,, & \varkappa\, \overline{b_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)}\\ b_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,, & \overline{a_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)}\end{pmatrix} \qquad (\text{I.I.II})$$

Наконец, свойство 5) вытекает из равенства $\operatorname{tr} L(x,\lambda)=0$.

Подставляя (I.I.II) в (I.I.9), получаем при вещественных λ важное соотношение "унитарности"

$$\left|a_{x_1}^{x_2}(\lambda)\right|^2-\varkappa\left|b_{x_1}^{x_2}(\lambda)\right|^2=1\,,\ \lambda=\bar\lambda\,. \qquad \text{(I.I.I2)}$$

Определим теперь матрицы перехода $T_-(x,\lambda), T_+(x,\lambda), T(\lambda)$ для полубесконечных интервалов $(-\infty,x]$ и $[x,\infty)$ и бесконечного интервала $(-\infty,\infty)$, соответственно, как следующие пределы:

$$T_-(x,\lambda)=\lim_{x_1\to-\infty} T_{x_1}^{x}(\lambda)\,e(x_1,\lambda)\,, \qquad \text{(I.I.I3)}$$

$$T_+(x,\lambda)=\lim_{x_2\to\infty} e(-x_2,\lambda)\,T_{x}^{x_2}(\lambda)\,, \qquad \text{(I.I.I4)}$$

$$T(\lambda)=\lim_{\substack{x_1\to-\infty\\ x_2\to+\infty}} e(-x_2,\lambda)\,T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,e(x_1,\lambda), \qquad \text{(I.I.I5)}$$

где введено обозначение

$$e(x,\lambda)=\exp\left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 x\right)\ .$$

Из определения (I.I.I3) следует, что $T_-(x,\lambda)$ удовлетворяет по переменной x дифференциальному уравнению (I.I.3) с граничным условием при $x\to-\infty$

$$T_-(x,\lambda)-e(x,\lambda)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0 \qquad \text{(I.I.I6)}$$

Аналогично, $T_+(x,\lambda)$ удовлетворяет по x дифференциальному уравнению (I.I.7) с граничным условием при $x\to+\infty$

$$T_+(x,\lambda)-e(-x,\lambda)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \qquad \text{(I.I.I7)}$$

Из (I.I.6) следует, что для любого x

$$T(\lambda)=T_+(x,\lambda)\,T_-(x,\lambda)\ . \qquad \text{(I.I.I8)}$$

Аналогично случаю конечного интервала, для $T_\pm(x,\lambda)$ и $T(\lambda)$ доказываются свойства симметрии (I.I.8), и "унитарности" (I.I.I2).

Перечислим аналитические свойства матричных функций $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$, $T_\pm(x,\lambda)$ и $T(\lambda)$ по спектральному параметру λ . $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ является голоморфной функцией на всей комплексной плоскости λ .

Матричные элементы $a_-(x,\lambda), b_-(x,\lambda), a_+(x,\lambda), \overline{b_+(x,\bar\lambda)}, a(\lambda)$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda>0$, тогда как матричные элементы $\overline{a_-(x,\bar\lambda)}, \overline{b_-(x,\bar\lambda)}, b_+(x,\lambda), \overline{a_+(x,\bar\lambda)}, \overline{a(\bar\lambda)}$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda<0$. Матричные элементы $b(\lambda)$ и $\overline{b(\bar\lambda)}$ вообще говоря, определены только для вещественных λ. (Обозначения матричных элементов матриц $T_\pm(x,\lambda)$ и $T(\lambda)$ приведены в Приложении).

Доказательство вышеперечисленных аналитических свойств, а также существования пределов (I.I.I3-I7) проводится стандартным образом [30-32] с использованием интегральных уравнений и интегральных представлений для $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$, $T_\pm(x,\lambda)$ и $T(\lambda)$, к рассмотрению которых мы сейчас приступим.

Задачи Коши (I.I.3-4) и (I.I.7) - (I.I.4) эквивалентны соответственно вольтерровым интегральным уравнениям

$$T^{x_2}_{x_1}(\lambda)=I+\int_{x_1}^{x_2}dx\,L(x,\lambda)T^{x}_{x_1}(\lambda) \tag{I.I.I9}$$

и

$$T^{x_2}_{x_1}(\lambda)=I+\int_{x_1}^{x_2}dx\,T^{x_2}_{x}(\lambda)L(x,\lambda)\,. \tag{I.I.20}$$

Выделяя из $L(x,\lambda)$ потенциал $V(x)=i\varkappa\overline{\Psi}(x)\sigma_+-i\Psi(x)\sigma_-$, получим следующие интегральные уравнения для $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$:

$$T^{x_2}_{x_1}(\lambda)=e(x_2-x_1,\lambda)+\int_{x_1}^{x_2}dx\,e(x_2-x,\lambda)V(x)T^{x}_{x_1}(\lambda) \tag{I.I.2I}$$

или

$$T^{x_2}_{x_1}(\lambda)=e(x_2-x_1,\lambda)+\int_{x_1}^{x_2}dx\,T^{x_2}_{x}(\lambda)V(x)e(x-x_1,\lambda)\,. \tag{I.I.22}$$

Из (I.I.I3), (I.I.2I) и (I.I.22) следует интегральное уравнение

$$T_-(x,\lambda)=e(x,\lambda)+\int_{-\infty}^{x}d\xi\,e(x-\xi,\lambda)V(\xi)T_-(\xi,\lambda) \tag{I.I.23}$$

и интегральное представление

$$T_-(x,\lambda)=e(x,\lambda)+\int_{-\infty}^{x}d\xi\,T^{x}_{\xi}(\lambda)V(\xi)e(\xi,\lambda) \tag{I.I.24}$$

для $T_-(x,\lambda)$. Аналогично, из (I.I.I4), (I.I.2I) и (I.I.22) выводится интегральное уравнение

$$T_+(x,\lambda)=e(-x,\lambda)+\int_{x}^{\infty}d\xi\,T_+(\xi,\lambda)V(\xi)e(\xi-x,\lambda) \tag{I.I.25}$$

и интегральное представление

$$T_+(x;\lambda)=e(-x,\lambda)+\int_x^{\infty}d\xi\, e(-\xi,\lambda)V(\xi)T_x^{\xi}(\lambda) \qquad (I.I.26)$$

для $T_+(x,\lambda)$. Для $T(\lambda)$ из (I.I.I5), (I.I.2I), (I.I.22) получим два интегральных представления:

$$T(\lambda)=I+\int_{-\infty}^{\infty}dx\, e(-x,\lambda)V(x)T_-(x,\lambda) \qquad (I.I.27)$$

и

$$T(\lambda)=I+\int_{-\infty}^{\infty}dx\, T_+(x,\lambda)V(x)\,e(x,\lambda)\,. \qquad (I.I.28)$$

Итерируя интегральное уравнение (I.I.2I) или (I.I.22), получим следующие разложения матричных элементов $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ в степенные ряды по $\varkappa$:

$$a_{x_1}^{x_2}(\lambda)=e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n\int\limits_{x_2>\xi_n>\eta_n>\xi_{n-1}>\ldots>\eta_1>x_1}\!\!\ldots\int d\xi_1\ldots d\xi_n\,d\eta_1\ldots d\eta_n\times$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n-\eta_1-\ldots-\eta_n)}\,\overline{\Psi}(\xi_1)\ldots\overline{\Psi}(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n)\Big]\,, \qquad (I.I.29)$$

$$b_{x_1}^{x_2}(\lambda)=-ie^{i\frac{\lambda}{2}(x_1+x_2)}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\varkappa^n\int\limits_{x_2>\eta_{n+1}>\xi_n>\ldots>\eta_1>x_1}\!\!\ldots\int d\xi_1\ldots d\xi_n\,d\eta_1\ldots d\eta_{n+1}\times$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n-\eta_1-\ldots-\eta_{n+1})}\,\overline{\Psi}(\xi_1)\ldots\overline{\Psi}(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_{n+1})\Big]\,. \qquad (I.I.30)$$

Разложения для $\overline{a_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)}$ и $\overline{b_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)}$ получаются комплексным сопряжением. Аналогичные разложения для матричных элементов $T_-(x,\lambda)$, $T_+(x,\lambda)$ и $T(\lambda)$ получаются из (I.I.29) и (I.I.30) вычеркиванием соответственно x_1, x_2 или x_1 и x_2 .

В заключение параграфа несколько слов о дискретном спектре. Как показано в [3I] , при $\varkappa>0$ функция $a(\lambda)$ не имеет нулей в $\operatorname{Im}\lambda>0$, но при $\varkappa<0$ может иметь в верхней полуплоскости конечное число нулей:

$$a(\lambda_j)=0\,,\ \operatorname{Im}\lambda_j>0\,,\ j=1,\ldots,\mathcal{N}\,. \qquad (I.I.31)$$

5 2018

Это свойство коэффициента $a(\lambda)$ тесно связано с существованием при $\varkappa<0$ солитонных решений уравнения (I.I.I), а в квантовом случае, как мы увидим в дальнейшем, связанных состояний основных частиц.

§ I.2 Скобки Пуассона. r - матрица.

Как известно [30] , уравнение (I.I.I) описывает динамику гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(|\Psi_x|^2+\varkappa|\Psi|^4\right) \qquad (I.2.I)$$

и скобками Пуассона

$$\{\Psi(x),\Psi(y)\}=\{\overline{\Psi}(x),\overline{\Psi}(y)\}=0\,, \qquad (I.2.2)$$
$$\{\Psi(x),\overline{\Psi}(y)\}=i\delta(x-y)\,.$$

Иными словами, уравнение (I.I.I) представимо в следующем виде:

$$\Psi_t=\{H,\Psi\}\,. \qquad (I.2.3)$$

В работе [30] из матричных элементов матрицы $T(\lambda)$ (I.I.I5) были построены переменные действие-угол для уравнения (I.I.I). Обоснование этой конструкции включает в себя вычисление скобок Пуассона между матричными элементами $T(\lambda)$, как функционалами полей $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$. Ниже мы вычислим эти скобки Пуассона новым способом, предложенным в работе автора [29] . Этот способ основан на использовании т.н. r - матрицы и обладает тем преимуществом перед традиционными [4, 30] , что допускает непосредственное обобщение на квантовый случай, а также позволяет заметно упростить выкладки.

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующие обозначения. Каждой матрице размера 2х2

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix}$$

мы сопоставим две матрицы $\widetilde{T}$ и $\widetilde{\widetilde{T}}$ размера 4х4:

$$\widetilde{T}=T\otimes I_2=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & t_{12} & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & t_{21} & 0 & t_{22}\end{pmatrix}\,, \qquad (I.2.4)$$

и

$$\overset{\approx}{T} = I_2 \otimes T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{11} & t_{12} \\ 0 & 0 & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \tag{I.2.5}$$

Таким образом, матрица

$$\left\{ \tilde{T}(\lambda),\ \overset{\approx}{T}(\mu) \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \{a(\lambda), a(\mu)\}, \{a(\lambda), \varkappa\overline{b(\bar{\mu})}\}, \{\varkappa\overline{b(\bar{\lambda})}, a(\mu)\}, \{\varkappa\overline{b(\bar{\lambda})}, \varkappa\overline{b(\bar{\mu})}\} \\ \{a(\lambda), b(\mu)\}, \{a(\lambda), \overline{a(\bar{\mu})}\}, \{\varkappa\overline{b(\bar{\lambda})}, b(\mu)\}, \{\varkappa\overline{b(\bar{\lambda})}, \overline{a(\bar{\mu})}\} \\ \{b(\lambda), a(\mu)\}, \{b(\lambda), \varkappa\overline{b(\bar{\mu})}\}, \{\overline{a(\bar{\lambda})}, a(\mu)\}, \{\overline{a(\bar{\lambda})}, \varkappa\overline{b(\bar{\mu})}\} \\ \{b(\lambda), b(\mu)\}, \{b(\lambda), \overline{a(\bar{\mu})}\}, \{\overline{a(\bar{\lambda})}, b(\mu)\}, \{\overline{a(\bar{\lambda})}, \overline{a(\bar{\mu})}\} \end{pmatrix} \tag{I.2.6}$$

будет содержать все 16 возможных скобок Пуассона между матричными элементами матриц $T(\lambda)$ и $T(\mu)$. Отметим, что матрицы $T(\lambda)$ и $T(\mu)$ коммутируют друг с другом

$$\tilde{T}\,\overset{\approx}{T} = \overset{\approx}{T}\,\tilde{T} \tag{I.2.7}$$

В дальнейшем нам понадобятся также матрица перестановки $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{P}^2 = I_4 \tag{I.2.8}$$

и следующие легко проверяемые соотношения

$$\mathcal{P}\,\tilde{T}\,\mathcal{P} = \overset{\approx}{T}\ , \quad \mathcal{P}\,\overset{\approx}{T}\,\mathcal{P} = \tilde{T}\ , \tag{I.2.9}$$

$$\mathcal{P}\,\tilde{T}\,\overset{\approx}{T}\,\mathcal{P} = \tilde{T}\,\overset{\approx}{T}\ . \tag{I.2.10}$$

Основной результат настоящего параграфа составляет следующая

ТЕОРЕМА I. Матрица скобок Пуассона $\left\{ \tilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda), \overset{\approx}{T}_{x_1}^{x_2}(\mu) \right\} = \mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda,\mu)$ допускает следующее представление при $x_2 > x_1$

$$\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu)=\left[r(\lambda-\mu),\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right] \tag{I.2.II}$$

где $[\ ,\ ]$ обозначает коммутатор матриц, а 4x4 матрица $r(\lambda-\mu)$ имеет вид

$$r(\lambda-\mu)=-\frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\mathcal{P}\ . \tag{I.2.I2}$$

При $x_2<x_1$, как это следует из (I.I.5), (I.2.II) переходит в

$$\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu)=-\left[r(\lambda-\mu),\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно убедиться в том, что правая и левая части (I.2.II) удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению с одними и теми же начальными условиями.

Дифференцируя правую часть (I.2.II) по x_2 получаем для $\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu)=\left[r(\lambda-\mu),\widetilde{L}(x_2,\lambda)+\widetilde{\widetilde{L}}(x_2,\mu)\right]\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)+$$
$$+\left(\widetilde{L}(x_2,\lambda)+\widetilde{\widetilde{L}}(x_2,\mu)\right)\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu) \tag{I.2.I3}$$

с начальным условием

$$\mathcal{P}^{x}_{x}(\lambda,\mu)=0\ . \tag{I.2.I4}$$

Чтобы вычислить производную по x_2 от левой части (I.2.II), представим ее в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right\}=\lim_{\delta\to 0}\left(\mathcal{P}^{x_2+\delta}_{x_1}(\lambda,\mu)-\mathcal{P}^{x_2}_{x_1}(\lambda,\mu)\right)=$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left\{\widetilde{T}^{x_2+\delta}_{x_2}(\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2+\delta}_{x_2}(\mu)\right\}\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)+ \tag{I.2.I5}$$
$$+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\widetilde{T}^{x_2+\delta}_{x_2}(\lambda)\,\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2+\delta}_{x_2}(\mu)-I_4\right)\left\{\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right\}.$$

Займемся первым слагаемым полученного выражения. Подставляя в $\mathcal{P}^{x_2+\delta}_{x_2}(\lambda,\mu)$ выражение

$$T_{x_2}^{x_2+\delta} = I_2 + \int_{x_2}^{x_2+\delta} dx\, L(x) + O(\delta^2),$$

вытекающее из (I.I.I9), получим

$$\left\{\widetilde{T}_{x_2}^{x_2+\delta}(\lambda), \widetilde{\widetilde{T}}_{x_2}^{x_2+\delta}(\mu)\right\} = \int_{x_2}^{x_2+\delta} dx \int_{x_2}^{x_2+\delta} dy \left\{\widetilde{L}(x,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(y,\mu)\right\} + O(\delta^2) =$$

$$= \int_{x_2}^{x_2+\delta} dx \int_{x_2}^{x_2+\delta} dy \left\{\widetilde{L}(x,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\}' \delta(x-y) + O(\delta^2) =$$

$$= \int_{x_2}^{x_2+\delta} dx \left\{\widetilde{L}(x,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\}' + O(\delta^2).$$

Здесь $\{,\}'$ обозначает "локальную" скобку Пуассона

$$\{\Psi(x), \Psi(x)\}' = \{\overline{\Psi}(x), \overline{\Psi}(x)\}' = 0,$$

$$\{\Psi(x), \overline{\Psi}(x)\}' = i. \tag{I.2.I6}$$

Окончательно, перейдя в (I.2.I5) к пределу $\delta \to 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda,\mu) = \left\{\widetilde{L}(x_2,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x_2,\mu)\right\}' \widetilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \widetilde{\widetilde{T}}_{x_1}^{x_2}(\mu) +$$

$$+ \left(\widetilde{L}(x_2,\lambda) + \widetilde{\widetilde{L}}(x_2,\mu)\right) \mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda,\mu). \tag{I.2.I7}$$

Чтобы отождествить (I.2.I3) и (I.2.I7), достаточно заметить, что справедливо равенство

$$\left\{\widetilde{L}(x,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\}' = \left[r(\lambda-\mu), \widetilde{L}(x,\lambda) + \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu) \right] \tag{I.2.I8}$$

или

$$\left\{\widetilde{L}(x,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(y,\mu)\right\} = \left[r(\lambda\ \mu), \widetilde{L}(x,\lambda) + \widetilde{\widetilde{L}}(y,\mu) \right] \delta(x-y), \tag{I.2.I9}$$

которые легко проверяются непосредственно, с учетом (I.I.2), (I.2.2), (I.2.I2).

Чтобы закончить доказательство Теоремы I, осталось заметить, что $\left\{\widetilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda), \widetilde{\widetilde{T}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right\}$ удовлетворяет начальному условию (I.2.I4).

Полная сводка всех скобок Пуассона между матричными элементами $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ вытекающих из (I.2.II), приведена в Приложении (ф-лы ПI - П6).

Отметим, что область применения метода r - матрицы не ограничивается уравнением (I.I.I). Существование представления скобки Пуассона в виде (I.2.II) основывается, как это следует из приведенного выше доказательства, только на формуле (I.2.I9), которая имеет место также для уравнения синус-Гордон и уравнения Ландау-Лифшица [29]. Матрица τ для этих уравнений имеет более сложный вид, чем (2.2.I2).

§ I.3 Переход к бесконечному интервалу.

Для достижения нашей конечной цели – построения переменных действие-угол – нам необходимо вычислить скобки Пуассона для матрицы перехода на интервале $(-\infty,\infty)$. Но сначала мы займемся вычислением скобки Пуассона $\left\{\tilde{T}_-(x,\lambda),\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\right\}$, которую удобно обозначить $\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)$.

Повторив дословно рассуждения предыдущего параграфа, можно убедиться, что $\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)$ удовлетворяет по переменной x дифференциальному уравнению (I.2.I3). С другой стороны, такому же дифференциальному уравнению удовлетворяет выражение $\left[\tau(\lambda-\mu),\right.$ $\left.\tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\right]$. Следовательно, их разность удовлетворяет соответствующему однородному дифференциальному уравнению, общее решение которого мы можем записать как $\tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\,C_-(\lambda,\mu)$.

. Таким образом, мы получаем следующее представление для $\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)$:

$$\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)=\left[\tau(\lambda-\mu),\tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\right]-\tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\,C_-(\lambda,\mu). \tag{I.3.I}$$

Матрица $C_-(\lambda,\mu)$ размера 4x4 определяется из сравнения асимптотик (I.3.I) при $x\to-\infty$.

Асимптотику правой части (I.3.I) легко получить, воспользовавшись (I.I.I6):

$$\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)\underset{x\to-\infty}{\sim}\left[\tau(\lambda\ \mu),E(x;\lambda,\mu)\right]-E(x;\lambda,\mu)\,C_-(\lambda,\mu), \tag{I.3.2}$$

где

$$E(x;\lambda,\mu)=\tilde{e}(x,\lambda)\tilde{\tilde{e}}(x,\mu)=e^{-\frac{i}{2}\left(\lambda\tilde{\sigma}_3+\mu\tilde{\tilde{\sigma}}_3\right)x}. \tag{I.3.3}$$

Для вычисления асимптотики $\left\{\tilde{T}_-(x,\lambda),\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\right\}$ при $x\to-\infty$ воспользуемся интегральным представлением (I.I.24). Имеем:

$$\left\{\tilde{T}_-(x,\lambda),\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\right\}= \tag{I.3.4}$$

$$=\int_{-\infty}^{x}d\xi\int_{-\infty}^{x}d\eta\left\{\tilde{T}^{\,x}_{\,\xi}(\lambda)\tilde{V}(\xi),\tilde{\tilde{T}}^{\,x}_{\,\eta}(\mu)\tilde{\tilde{V}}(\eta)\right\}\tilde{e}(\xi,\lambda)\tilde{\tilde{e}}(\eta,\mu).$$

Вычисляя стоящую в (I.3.4) под интегралом скобку Пуассона

$$\begin{aligned}&\left\{\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda)\widetilde{V}(\xi),\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\widetilde{\widetilde{V}}(\eta)\right\}=\\&=\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\left\{\widetilde{V}(\xi),\widetilde{\widetilde{V}}(\eta)\right\}+\left\{\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\right\}\widetilde{V}(\xi)\widetilde{\widetilde{V}}(\eta)+\\&+\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\left\{\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda),\widetilde{\widetilde{V}}(\eta)\right\}\widetilde{V}(\xi)+\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda)\left\{\widetilde{V}(\xi),\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\right\}\widetilde{\widetilde{V}}(\eta),\end{aligned}\qquad(I.3.5)$$

мы видим, что только слагаемое

$$\begin{aligned}&\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\left\{\widetilde{V}(\xi),\widetilde{\widetilde{V}}(\eta)\right\}=\\&=\widetilde{T}_{\xi}^{x}(\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}{}_{\eta}^{x}(\mu)\,i\varkappa\left(\widetilde{\sigma}_{-}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{+}-\widetilde{\sigma}_{+}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{-}\right)\delta(\xi-\eta)\end{aligned}\qquad(I.3.6)$$

дает неубывающий при $x\to-\infty$ вклад в (I.3.4). Подставляя (I.3.5) и (I.3.6) в (I.3.4) и учитывая, что, как это следует из (I.I.2I),

$$T_{\xi}^{x}(\lambda)-e(x-\xi,\lambda)\to 0,\quad x,\xi\to-\infty,$$

получим, что при $x\to-\infty$

$$\mathcal{P}_{-}(x;\lambda,\mu)\sim\int_{-\infty}^{x}E(x-\xi;\lambda,\mu)\,i\varkappa\left(\widetilde{\sigma}_{-}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{+}-\widetilde{\sigma}_{+}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_{-}\right)E(\xi;\lambda,\mu)\,d\xi\,.\qquad(I.3.7)$$

Интеграл в (I.3.7) легко вычисляется, и сравнивая асимптотику (I.3.7) с (I.3.2), мы получаем

$$C_{-}(\lambda,\mu)=\varkappa\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\lambda-\mu-i0}&0\\0&\frac{1}{\lambda-\mu+i0}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(I.3.8)$$

Совершенно аналогично вычисляется скобка Пуассона $\left\{\widetilde{T}_{+}(x,\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}(x,\mu)\right\}=$ $=\mathcal{P}_{+}(x;\lambda,\mu)$:

$$\mathcal{P}_{+}(x;\lambda,\mu)=\left[r(\lambda-\mu),\widetilde{T}_{+}(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_{+}(x,\mu)\right]+C_{+}(\lambda,\mu)\widetilde{T}_{+}(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_{+}(x,\mu),\qquad(I.3.9)$$

где

$$C_{+}(\lambda,\mu)=\varkappa\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{\lambda-\mu+i0}&0\\0&\frac{1}{\lambda-\mu-i0}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(I.3.10)$$

Интересно отметить, что, хотя (I.3.I) и (I.3.9) следует понимать в смысле обобщенных функций, слагаемые в (I.3.I) и (I.3.9), содержащие $\tau(\lambda-\mu)$, в регуляризации при $\lambda=\mu$ не нуждаются, так как соответствующий числитель $\left[\mathcal{P}, \widetilde{T}_{\pm}(x,\lambda)\ \widetilde{\widetilde{T}}_{\pm}(x,\mu)\right]$ исчезает при $\lambda=\mu$ в силу (I.2.I0).

Однако, выбор определенной регуляризации $\tau(\lambda-\mu)$, например $\tau(\lambda-\mu)=-\varkappa\mathcal{P}\,\mathrm{v.p.}\frac{1}{\lambda-\mu}$, позволяет записать формулы (I.3.I) и (I.3.9) в компактном виде:

$$\mathcal{P}_-(x;\lambda,\mu)= \tag{I.3.II}$$
$$=\tau(\lambda-\mu)\widetilde{T}_-(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_-(x,\mu)-\widetilde{T}_-(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_-(x,\mu)\,\tau_-(\lambda-\mu)$$

и

$$\mathcal{P}_+(x;\lambda,\mu)= \tag{I.3.I2}$$
$$=\tau_+(\lambda-\mu)\widetilde{T}_+(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_+(x,\mu)-\widetilde{T}_+(x,\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}_+(x,\mu)\,\tau(\lambda-\mu)\ ,$$

где
$$\tau_{\pm}(\lambda-\mu)=\tau(\lambda-\mu)+C_{\pm}(\lambda,\mu)= \tag{I.3.I3}$$
$$=-\varkappa\begin{pmatrix} \mathrm{v.p.}\frac{1}{\lambda-\mu}, & 0, & 0, & \\ 0, & 0, & \pm\pi i\delta(\lambda-\mu), & \\ 0, & \mp\pi i\delta(\lambda-\mu), & 0, & \\ 0, & 0, & 0, & \mathrm{v.p.}\frac{1}{\lambda-\mu} \end{pmatrix}.$$

Теперь все готово, чтобы вычислить скобку Пуассона $\left\{\widetilde{T}(\lambda),\widetilde{\widetilde{T}}(\mu)\right\}=$ $=\mathcal{P}(\lambda,\mu)$. Принимая во внимание (I.I.I8), (I.3.II) и (I.3.I2), получаем

$$\mathcal{P}(\lambda,\mu)=\tau_+(\lambda-\mu)\widetilde{T}(\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}(\mu)-\widetilde{T}(\lambda)\widetilde{\widetilde{T}}(\mu)\,\tau_-(\lambda-\mu)\,. \tag{I.3.I4}$$

Доказанные выше результаты позволяют сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Скобки Пуассона между матричными элементами матриц перехода для полубесконечного и бесконечного интервалов даются формулами (I.3.II–I4).

Полная сводка всех скобок Пуассона приведена в Приложении (П 7–П24).

§ I.4 Интегралы движения. Переменные действие-угол.

В настоящем параграфе, носящем вспомогательный характер, мы перечислим в основном известные из литературы [30-32] результаты для нелинейного уравнения Шредингера, которые будут полезны впоследствии для сравнения с квантовым случаем.

Как показано в [31, 32], $\ln a(\lambda)$ является производящей функцией локальных интегралов движения $\mathcal{I}_m$ для уравнения (I.I.I), т.е. коэффициенты $\mathcal{I}_m$ разложения $\ln a(\lambda)$ в асимптотический ряд по степеням λ^{-1}

$$\ln a(\lambda) = i\varkappa \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{I}_m \lambda^{-m} \qquad (I.4.1)$$

представляют собой интегралы от локальных по $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$ плотностей

$$\mathcal{I}_m = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{\Psi}(x) \chi_m(x)\,, \qquad (I.4.2)$$

где $\chi_m(x)$ определяется из рекуррентного соотношения

$$\chi_{m+1}(x) = -i \frac{d}{dx} \chi_m(x) + \varkappa \overline{\Psi}(x) \sum_{k=1}^{m-1} \chi_k(x) \chi_{m-k}(x) \qquad (I.4.3)$$

с начальным условием

$$\chi_1(x) = \Psi(x)\,. \qquad (I.4.4)$$

В силу (П19) величины $\mathcal{I}_m$ находятся в инволюции относительно скобки Пуассона (I.2.2). Выпишем первые несколько интегралов $\mathcal{I}_m$:

$$\mathcal{I}_1 = N = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2, \qquad (I.4.5)$$

$$\mathcal{I}_2 = P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\overline{\Psi}_x \Psi - \overline{\Psi} \Psi_x \right), \qquad (I.4.6)$$

$$\mathcal{I}_3 = H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(|\Psi_x|^2 + \varkappa |\Psi|^4 \right). \qquad (I.4.7)$$

Величины N, P и H называются соответственно числом частиц, импульсом и энергией. Поскольку гамильтониан $H = \mathcal{I}_3$ содержится среди $\mathcal{I}_m$, величины $\mathcal{I}_m$ являются интегралами движения для уравнения (I.I.I).

Перейдем теперь к построению переменных действие-угол для уравнения (I.I.I). Понятие "переменные действие-угол" мы при этом будем трактовать расширительно, называя так любые канонические переменные, в которых гамильтониан H записывается как квадратичная форма (а уравнения движения, соответственно, становятся линейными).

Введем величины $\varphi(\lambda)$ и $\bar{\varphi}(\lambda)$ формулами

$$\varphi(\lambda)=\frac{b(\lambda)}{|b(\lambda)|}\sqrt{\frac{\ln|a(\lambda)|}{\pi\varkappa}}\ ,\qquad\qquad (I.4.8)$$

$$\bar{\varphi}(\lambda)=\frac{\bar{b}(\lambda)}{|b(\lambda)|}\sqrt{\frac{\ln|a(\lambda)|}{\pi\varkappa}}$$

В формулах (I.4.8) надо брать положительное значение корня. Подкоренное выражение при этом остается положительным при любом знаке $\varkappa$, т.к. в силу (I.I.I2), $|a(\lambda)|>1$ при $\varkappa>0$ и $|a(\lambda)|<$ <1 при $\varkappa<0$, когда λ пробегает вещественную ось.

Величины $\varphi(\lambda)$ и $\overline{\varphi(\lambda)}$ удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям для переменных действие-угол. Действительно, пользуясь скобками Пуассона (II9-24), нетрудно проверить, что $\varphi(\lambda)$ и $\bar{\varphi}(\lambda)$ - канонически сопряженные переменные:

$$\{\varphi(\lambda),\varphi(\mu)\}=\{\bar{\varphi}(\lambda),\bar{\varphi}(\mu)\}=0\ ,\qquad\qquad (I.4.9)$$

$$\{\varphi(\lambda),\bar{\varphi}(\mu)\}=i\delta(\lambda-\mu)\ .$$

Далее, при $\varkappa>0$, производящая функция интегралов движения $\ln a(\lambda)$ имеет, как показано в [3I, 32], следующее интегральное представление:

$$\ln a(\lambda)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\frac{\ln|a(\mu)|}{\lambda-\mu}\ ,$$

которое можно переписать, воспользовавшись (I.4.8), как

$$\ln a(\lambda)=i\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\frac{|\varphi(\mu)|^2}{\lambda-\mu}\ .\qquad\qquad (I.4.I0)$$

Раскладывая (I.4.I0) по степеням λ^{-1}, получаем

$$\mathcal{I}_m=\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\mu^{m-1}\,|\varphi(\mu)|^2\ .\qquad\qquad (I.4.II)$$

В частности,

$$\mathcal{N}=\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\,|\varphi(\mu)|^2, \qquad (I.4.I2)$$

$$P=\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\,\mu\,|\varphi(\mu)|^2, \qquad (I.4.I3)$$

$$H=\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\,\mu^2\,|\varphi(\mu)|^2\,. \qquad (I.4.I4)$$

Таким образом, все интегралы движения $\mathcal{I}_m$ в переменных $\varphi(\mu)$, $\bar{\varphi}(\mu)$ квадратичны, а соответствующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\varphi(t;\mu)=\{\mathcal{I}_m,\varphi(t;\mu)\}=-i\mu^{m-1}\varphi(t;\mu) \qquad (I.4.I5)$$

линейны по $\varphi, \bar{\varphi}$, что позволяет назвать переменные $\varphi(\mu), \bar{\varphi}(\mu)$ переменными типа действие-угол для уравнения (I.I.I) в смысле данного выше определения. Введенные нами переменные действие-угол отличаются от традиционных [30], но имеют то преимущество, что допускают квантовомеханическое обобщение.

Случай $\varkappa<0$ требует учета дискретного спектра. Мы не будем выписывать здесь соответствующие переменные типа действие-угол, так как они, по-видимому, не имеют разумных аналогов в квантовом случае, а ограничимся тем, что укажем, как в этом случае обобщаются равенства (I.4.I0-I4):

$$\ln a(\lambda)=\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\ln\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-\bar{\lambda}_j}+i\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(\mu)|^2}{\lambda-\mu}\,d\mu\,, \qquad (I.4.I0')$$

$$\mathcal{I}_m=\frac{2}{m|\varkappa|}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\operatorname{Im}(\lambda_j^m)+\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\mu^{m-1}|\varphi(\mu)|^2\,, \qquad (I.4.II')$$

$$\mathcal{N}=\frac{2}{|\varkappa|}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\operatorname{Im}\lambda_j+\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,|\varphi(\mu)|^2\,, \qquad (I.4.I2')$$

$$P=\frac{2}{|\varkappa|}\sum_{j=1}^{\mathcal{N}}\operatorname{Re}\lambda_j\cdot\operatorname{Im}\lambda_j+\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\mu\,|\varphi(\mu)|^2\,, \qquad (I.4.I3')$$

$$H = \frac{2}{3|\varkappa|}\sum\left(3\mathrm{Re}^2\lambda_j\cdot\mathrm{Im}\lambda_j - \mathrm{Im}^3\lambda_j\right)+\int_{-\infty}^{\infty}d\mu\,\mu^2|\varphi(\mu)|^2 . \qquad (\mathrm{I.4.I4'})$$

§ I.5 M - оператор.

Все рассуждения предыдущих параграфов были основаны на изучении оператора $L(x,\lambda)$ в фиксированный момент времени t. Это не помешало нам доказать полную интегрируемость уравнения (I.I.I) и найти спектр его элементарных возбуждений. Для традиционного подхода [31], однако, характерно рассмотрение временной эволюции с самого начала. Исходным моментом при этом является представление уравнения движения (I.I.I), как условия коммутативности двух дифференциальных операторов:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - L(x,t;\lambda), \frac{\partial}{\partial t} - M(x,t;\lambda)\right] = 0 \ , \qquad (\mathrm{I.5.I})$$

или

$$L_t = M_x + [M, L] \ , \qquad (\mathrm{I.5.2})$$

где

$$M(x,t;\lambda) = \\ = \begin{pmatrix} i\frac{\lambda^2}{2} + i\varkappa|\Psi(x,t)|^2, & \varkappa\overline{\Psi}_x(x,t) - i\varkappa\lambda\overline{\Psi}(x,t) \\ \Psi_x(x,t) + i\lambda\Psi(x,t), & -i\frac{\lambda^2}{2} - i\varkappa|\Psi(x,t)|^2 \end{pmatrix} . \qquad (\mathrm{I.5.3})$$

Хотя, подчеркнем еще раз, подход, развиваемый в настоящей работе в принципе не нуждается во введении оператора M как в классическом, так и в квантовом случае, исследование вопроса об M - операторе представляет определенный методический интерес и позволит нам еще раз продемонстрировать возможности метода $\mathcal{T}$ - матрицы.

Поставим задачу следующим образом. Пусть временная эволюция полей $\Psi(x,t)$ и $\overline{\Psi}(x,t)$ задается m-ым локальным интегралом движения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left\{ \mathcal{I}_m , \Psi(x,t) \right\} . \qquad (\mathrm{I.5.4})$$

Как найти при этих условиях матрицу $M_m(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (I.5.2)? Хотя ответ на этот вопрос известен [35] метод r - матрицы позволяет выразить его в простом и компактном виде.

Рассмотрим сначала случай периодических граничных условий на интервале $[x_1, x_2]$

$$\Psi(x+x_2-x_1)=\Psi(x) \tag{I.5.5}$$

и сформулируем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5.I. Имеет место равенство

$$\left\{\operatorname{tr} T_{x_1}^{x_2}(\lambda), L(x,\mu)\right\} = \frac{\partial}{\partial x} M_{x_1}^{x_2}(x;\lambda,\mu) + \tag{I.5.6}$$

$$+\left[M_{x_1}^{x_2}(x;\lambda,\mu), L(x,\mu)\right],$$

где

$$M_{x_1}^{x_2}(x;\lambda,\mu) = \widetilde{\operatorname{tr}}\left(\widetilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\, r(\lambda-\mu)\, \widetilde{T}_{x_1}^{x}(\lambda)\right). \tag{I.5.7}$$

Введенная нами здесь операция $\widetilde{\operatorname{tr}}$ есть свертка оператора в $\mathbb{C}^2\otimes\otimes\mathbb{C}^2$ по индексам, относящимся к первому сомножителю. Результат, таким образом, есть матрица 2х2. В частности

$$\widetilde{\operatorname{tr}}(A\otimes B) = \widetilde{\operatorname{tr}}(\widetilde{A}\widetilde{\widetilde{B}}) = (\operatorname{tr}A)B; \quad A,B\in \operatorname{Mat}(2,2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предложения I.5.I. опирается на следующую лемму:

ЛЕММА I.5.I. Для любого функционала $X(\psi,\overline{\psi})$ полей $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$ имеет место следующее соотношение:

$$\left\{T_{x_1}^{x_2}(\lambda), X\right\} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, T_{x}^{x_2}(\lambda)\left\{L(x,\lambda), X\right\} T_{x_1}^{x}(\lambda). \tag{I.5.8}$$

Для доказательства Леммы I.5.I введем обозначение $\mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda,X)= =\left\{T_{x_1}^{x_2}(\lambda),X\right\}$. Дифференцируя левую и правую части равенства (I.5.8) по x_2, нетрудно убедиться, что они удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda;X) = L(x_2,\lambda)\mathcal{P}_{x_1}^{x_2}(\lambda,X) + \left\{L(x_2,\lambda),X\right\} T_{x_1}^{x_2}(\lambda) \tag{I.5.9}$$

с одним и тем начальным условием

$$\mathcal{P}_{x_1}^{x_1}(\lambda;X)=0. \tag{I.5.10}$$

Ссылка на соответствующую теорему единственности завершает доказательство.

Приступим теперь к доказательству Предложения I.5.I. Преобразуем сначала, пользуясь введенным обозначением $\widetilde{\mathrm{tr}}$, левую часть (I.5.6):

$$\left\{\mathrm{tr}\, T^{x_2}_{x_1}(\lambda), L(x,\mu)\right\} = \widetilde{\mathrm{tr}}\left\{\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\}. \qquad (I.5.II)$$

Для вычисления правой части (I.5.II) воспользуемся только что доказанной Леммой I.5.I. Подставляя в формулу (I.5.8) $X=\widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)$, получим

$$\left\{\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\} = \int_{x_1}^{x_2} d\xi\, \widetilde{T}^{x_2}_{\xi}(\lambda)\left\{\widetilde{L}(\xi,\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\}\widetilde{T}^{\xi}_{x_1}(\lambda), \qquad (I.5.I2)$$

или, в силу (I.2.I9)

$$\left\{\widetilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right\} = \widetilde{T}^{x_2}_{x}(\lambda)\left[r(\lambda-\mu), \widetilde{L}(x,\lambda)+\widetilde{\widetilde{L}}(x,\mu)\right]\widetilde{T}^{x}_{x_1}(\lambda). \qquad (I.5.I3)$$

Подставив (I.5.I3) в (I.5.II) и воспользовавшись (I.I.3) и (I.I.7), получим

$$\begin{aligned}
&\left\{\mathrm{tr}\, T^{x_2}_{x_1}(\lambda), L(x,\mu)\right\} = \qquad (I.5.I4)\\
&= \widetilde{\mathrm{tr}}\, \widetilde{T}^{x_2}_{x}(\lambda)\left[r(\lambda-\mu), \widetilde{L}(x,\lambda)\right]\widetilde{T}^{x}_{x_1}(\lambda) + \\
&+ \widetilde{\mathrm{tr}}\, \widetilde{T}^{x_2}_{x}(\lambda)\left[r(\lambda-\mu), \widetilde{\widetilde{L}}(x,\lambda)\right]\widetilde{T}^{x}_{x_1}(\lambda) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{\mathrm{tr}}\, \widetilde{T}^{x_2}_{x}(\lambda)\, r(\lambda-\mu)\widetilde{T}^{x}_{x_1}(\lambda) + \\
&+ \left[\widetilde{\mathrm{tr}}\, \widetilde{T}^{x_2}_{x}\, r(\lambda-\mu)\widetilde{T}^{x}_{x_1}(\lambda), L(x,\mu)\right] = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} M^{x_2}_{x_1}(x;\lambda,\mu) + \left[M^{x_2}_{x_1}(x;\lambda,\mu), L(x,\mu)\right],
\end{aligned}$$

где $M^{x_2}_{x_1}(x;\lambda,\mu)$ дается формулой (I.5.7), что и требовалось доказать.

Из (I.2.II) следует равенство

$$\left\{\mathrm{tr}\, T^{x_2}_{x_1}(\lambda), \mathrm{tr}\, T^{x_2}_{x_1}(\mu)\right\} = 0, \qquad (I.5.I5)$$

которое позволяет рассматривать $\ln \mathrm{tr}\, T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$, как производящую функцию интегралов движения уравнения (I.I.I) с периодическими граничными условиями.

Для того, чтобы найти аналог формулы (I.5.6) для бесконечного интервала, необходимо разделить обе части (I.5.6) на $\mathrm{tr}\, T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ и перейти к пределу $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to +\infty$. Ответ зависит, очевидно, от знака $\mathrm{Im}\,\lambda$ и дается следующей формулой:

$$\left\{\ln a^{(\pm)}(\lambda), \mathcal{L}(x,\mu)\right\} = M_x^{(\pm)}(x;\lambda,\mu) + \left[M^{(\pm)}(x;\lambda,\mu), \mathcal{L}(x,\mu)\right], \qquad (I.5.I6)$$

где

$$M^{(\pm)}(x;\lambda,\mu) = \widetilde{\mathrm{tr}}\left(\widetilde{P}^{(\pm)}\, \widetilde{T}_+(x,\lambda)\, r(\lambda-\mu)\, \widetilde{T}_-(x,\lambda)\, \widetilde{P}^{(\pm)}\right) . \qquad (I.5.I7)$$

Поясним обозначения. Верхний знак соответствует $\mathrm{Im}\,\lambda>0$, нижний - $\mathrm{Im}\,\lambda<0$. $a^{(+)}(\lambda)=a(\lambda)$, $a^{(-)}(\lambda)=\overline{a(\bar\lambda)}$. Проекторы $P^{(\pm)}$ на собственные подпространства $e(x,\lambda)$ имеют вид

$$P^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad P^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Доказательство формул (I.5.I6) и (I.5.I7) становится очевидным, если заметить, что при $x_1 \to -\infty$, $x_2 \to +\infty$

$$\mathrm{tr}\, T_{x_1}^{x_2}(\lambda) \sim \mathrm{tr}\left(e(x_2,\lambda)\, T(\lambda)\, e(-x_1,\lambda)\right) \sim$$
$$\sim e^{\mp i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)}\, \mathrm{tr}\, P^{(\pm)}\, T(\lambda)\, P^{(\pm)} = e^{\mp i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)}\, a^{(\pm)}(\lambda) .$$

Обсудим полученные результаты. Поскольку $\ln a(\lambda)$ (или $\ln \overline{a(\bar\lambda)}$) является, как обсуждалась в § I.4, производящей функцией локальных интегралов движения $\mathcal{I}_m$, формула (I.5.I6) означает, что $M^{(\pm)}(x;\lambda,\mu)$ есть производящая функция соответствующих M - операторов:

$$M^{(\pm)}(x;\lambda,\mu) = \pm i\varkappa \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{-m} M_m(x,\mu) . \qquad (I.5.I8)$$

В частности,

$$M_1(x,\lambda) = \frac{i}{2}\sigma_3 , \qquad (I.5.I9)$$

$$M_2(x,\lambda) = -\mathcal{L}(x,\lambda) = i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 - i\varkappa\overline{\psi}(x)\sigma_+ + i\psi(x)\sigma_- , \qquad (I.5.20)$$

$$M_3(x,\lambda) = \left(i\frac{\lambda^2}{2} + i\varkappa|\Psi(x)|^2\right)\sigma_3 + \\ + \varkappa\left(\overline{\Psi}_x(x) - i\lambda\overline{\Psi}(x)\right)\sigma_+ + \left(\Psi_x(x) + i\lambda\Psi(x)\right)\sigma_- . \tag{I.5.21}$$

Отметим, что специфическая структура r - матрицы для нелинейного уравнения Шредингера (I.2.I2) позволяет упростить выражение (I.5.I7) для $M^{(\pm)}(x;\lambda,\mu)$:

$$M^{(+)}(x;\lambda,\mu) = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\frac{1}{a(\lambda)}\begin{pmatrix} a_-(x,\lambda) \\ b_-(x,\lambda)\end{pmatrix}\left(a_+(x,\lambda), \varkappa\overline{b_+(x,\overline{\lambda})}\right) \tag{I.5.22}$$

$$M^{(-)}(x;\lambda,\mu) = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\frac{1}{\overline{a(\overline{\lambda})}}\begin{pmatrix} \varkappa\overline{b_-(x,\overline{\lambda})} \\ \overline{a_-(x,\overline{\lambda})}\end{pmatrix}\left(b_+(x,\lambda), \overline{a_+(x,\overline{\lambda})}\right) \tag{I.5.23}$$

воспроизводя тем самым известный результат [35] , гласящий, что производящая функция M - операторов для н.у.Ш. пропорциональна диагонали ядра резольвенты оператора $\frac{\partial}{\partial x} - L$.

Подчеркнем, однако, что такое упрощение существенно использует специфику нелинейного уравнения Шредингера, в то время как формула (I.5.I7) носит универсальный характер и годится для любых вполне интегрируемых моделей, L - операторы которых имеют r - матрицу (например, уравнение синус-Гордон, уравнение Ландау-Лифшица [29]).

В заключение этого параграфа мы выведем ряд формул, описывающих временную эволюцию матриц перехода $T_{x_1}^{x_2}$, $T_\pm$ и T .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5.2. Матрицы перехода $T_{x_1}^{x_2}(t;\lambda)$, $T_\pm(x,t;\lambda)$ и $T(t;\lambda)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_{x_1}^{x_2}(t;\lambda) = M(x_2,t;\lambda)T_{x_1}^{x_2}(t;\lambda) - T_{x_1}^{x_2}(t,\lambda)M(x_1;t,\lambda), \tag{I.5.24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T_-(x,t;\lambda) = M(x,t;\lambda)T_-(x,t;\lambda) - T_-(x,t;\lambda)\, i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 , \tag{I.5.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T_+(x,t;\lambda) = i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 T_+(x,t;\lambda) - T_+(x,t;\lambda)M(x,t;\lambda) , \tag{I.5.26}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t,\lambda) = \left[i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 , T(t,\lambda)\right] . \tag{I.5.27}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение $\frac{\partial}{\partial t} T^{x_2}_{x_1}(t,\lambda) = \mathcal{M}^{x_2}_{x_1}(t;\lambda)$. Дифференцируя (I.5.24) по x_2 и используя равенства (I.I.3) и (I.5.2), нетрудно убедиться, что обе части (I.5.24) удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathcal{M}^{x_2}_{x_1}(t;\lambda) = \mathcal{L}(x_2,t;\lambda) \mathcal{M}^{x_2}_{x_1}(t;\lambda) + \tag{I.5.28}$$

$$+ \Big(M_x(x_2,t;\lambda) + \big[\mathcal{L}(x_2,t;\lambda), M(x_2,t;\lambda) \big] \Big) T^{x_2}_{x_1}(t;\lambda)$$

с одним и тем же начальным условием

$$\mathcal{M}^{x_1}_{x_1}(t,\lambda) = 0 \ , \tag{I.5.29}$$

что и доказывает (I.5.24). Формулы (I.5.25-27) получаются теперь из (I.5.24) предельным переходом согласно (I.I.I3-I5) с учетом равенства

$$\lim_{|x|\to\infty} M(x,\lambda) = i\,\frac{\lambda^2}{2}\,\sigma_3 \ , \tag{I.5.30}$$

которое вытекает непосредственно из (I.5.3) и граничного условия $\Psi(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$.

Отметим, что дифференциальное уравнение (I.5.27) имеет очевидное общее решение:

$$T(t;\lambda) = e^{i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 t}\, T(0,\lambda)\, e^{-i\frac{\lambda^2}{2}\sigma_3 t} \ . \tag{I.5.3I}$$

Выписывая матричные элементы (I.5.3I), мы получаем хорошо известный результат [3I] :

$$a(t,\lambda) = a(0,\lambda) \ , \tag{I.5.32}$$

$$\bar{a}(t,\lambda) = \bar{a}(0,\lambda) , \tag{I.5.33}$$

$$b(t,\lambda) = e^{-i\lambda^2 t}\, b(0,\lambda) \tag{I.5.34}$$

$$\bar{b}(t,\lambda) = e^{i\lambda^2 t}\, \bar{b}(0,\lambda) \ . \tag{I.5.35}$$

6 2018

ГЛАВА II

КВАНТОВОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА.

§ 2.1. Квантование.

В этом параграфе мы приступаем к изучению квантовой версии нелинейного уравнения Шредингера, составляющей основной предмет исследований настоящей работы. Как уже отмечалось во Введении, нелинейное уравнение Шредингера допускает детальное описание как в классическом, так и в квантовом случае, что и обусловило его выбор в качестве объекта первого применения квантового метода обратной задачи.

Опишем кратко квантовую систему, соответствующую классическому уравнению (1.1.1). Гильбертово пространство состояний системы представляет собой пространство Фока $\mathbb{F}$ для бозе-частиц в одном измерении [36, 37] .

Элементами пространства $\mathbb{F}$ являются столбцы вида

$$f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x_1) \\ \cdots\cdots \\ f_N(x_1,\ldots,x_N) \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}, \qquad (2.1.1)$$

где $f_0 \in \mathbb{C}$, а $f_N(x_1,\ldots,x_N)$ - комплекснозначная симметричная квадратично интегрируемая функция N вещественных переменных. Скалярное произведение в пространстве $\mathbb{F}$ определим формулой

$$\langle f, g\rangle = \bar{f}_0 g_0 + \sum_{N=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\ldots dx_N \bar{f}_N(x_1,\ldots,x_N)\, g_N(x_1,\ldots,x_N) .$$

Пространство Фока $\mathbb{F}$ разлагается в ортогональную сумму N - частичных подпространств $\mathbb{F}_N$:

$$\mathbb{F} = \sum_{N=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \mathbb{F}_N \quad ; \quad f_N(x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{F}_N .$$

Вектор вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} = |0\rangle \quad , \quad \langle 0|0\rangle = 1$

будем называть вакуумом и обозначим его $|0\rangle$.

Пусть обобщенные операторнозначные функции $\Psi(x)$ и $\Psi^+(x)$ задают стандартное [36, 37] представление канонических коммутационных соотношений

$$[\Psi(x),\Psi(y)] = [\Psi^+(x),\Psi^+(y)] = 0 \ , \qquad (2.I.2)$$

$$[\Psi(x),\Psi^+(y)] = \delta(x-y)$$

в пространстве F (постоянную Планка $\hbar$ мы положим равной I), обладающее свойством

$$\Psi(x)|0\rangle = 0 \ . \qquad (2.I.3)$$

При этом всякий элемент f (2.I.I) пространства F может быть представлен в виде

$$f = f_0|0\rangle + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{N!}}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dx_1\ldots dx_N f_N(x_1,\ldots,x_N)\Psi^+(x_1)\ldots\Psi^+(x_N)|0\rangle \ . \qquad (2.I.4)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться как представлением (2.I.I), так и (2.I.4)

Классическому гамильтониану H (I.2.I) в квантовом случае соответствует самосопряженный оператор $\mathbb{H}$ в пространстве F, задаваемый выражением

$$\mathbb{H} = \int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\Psi_x^+\Psi_x + \varkappa\Psi^+\Psi^+\Psi\Psi\right) . \qquad (2.I.5)$$

Гейзенбергово уравнение движения для оператора $\Psi(x,t)$, порождаемое гамильтонианом $\mathbb{H}$, имеет вид

$$i\Psi_t = [\Psi,\mathbb{H}] = -\Psi_{xx} + 2\varkappa\Psi^+\Psi\Psi \ . \qquad (2.I.6)$$

Используя коммутационные соотношения (2.I.2), нетрудно проверить, что гамильтониан $\mathbb{H}$ коммутирует с операторами числа частиц

$$\mathbb{N} = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,\Psi^+\Psi \qquad (2.I.7)$$

и импульса

$$\mathbb{P} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left(\Psi_x^+\Psi - \Psi^+\Psi_x\right) . \qquad (2.I.8)$$

На векторы $f_N(x_1,\dots,x_N)$ из N - частичного подпространства F_N гамильтониан $\mathbb{H}$ действует как дифференциальный оператор [33, 34, 38] :

$$\mathbb{H} f_N(x_1,\dots,x_N) = \left(-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x^2} + 2\varkappa \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j)\right) f_N(x_1,\dots,x_N) , \tag{2.I.9}$$

имеющий вид многочастичного оператора Шредингера с парным точечным взаимодействием. Сингулярному потенциалу $\delta(x_i - x_j)$ в (2.I.9) легко можно придать строгий смысл, заменив его на граничное условие [33, 34, 38]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_N(x_1,\dots,x_N)\Big|_{x_i = x_j - 0}^{x_i = x_j + 0} = \varkappa f_N(x_1,\dots,x_N)\Big|_{x_i = x_j} , \quad i \neq j . \tag{2.I.10}$$

Собственные функции оператора $\mathbb{H}$ допускают простое описание [33, 34] . Именно, собственная функция $f_N(x_1,\dots,x_N | k_1,\dots,k_N)$, отвечающая собственному значению $\sum_{j=1}^{N} k_j^2$ и описывающая состояние рассеяния N частиц с импульсами $k_1,\dots,k_N$ $(\operatorname{Im} k_j = 0;\ j = 1,\dots,N)$, имеет при $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ следующий вид

$$f_N(x_1,\dots,x_N | k_1,\dots,k_N) = \tag{2.I.11}$$

$$= \frac{(i)^N}{(2\pi)^{N/2}\sqrt{N!}} \sum C_{\ell_1 \dots \ell_N}\, \ell^{\, i(k_{\ell_1} x_1 + \dots + k_{\ell_N} x_N)}$$

(на остальные значения x функция f_N продолжается по симметрии). Подстановка вида (2.I.11) для собственной функции обычно называется подстановкой Бете в честь Г.Бете, который в работе [5] впервые предложил такую подстановку, исследуя решеточную модель ферромагнетика.

Суммирование в (2.I.11) ведется по всем перестановкам $(\ell_1,\dots,\ell_N)$ из $(1,\dots,N)$, а коэффициенты $C_{\ell_1 \dots \ell_N}$ должны удовлетворять условию

$$\frac{C_{\ell_1 \dots \ell_r \dots \ell_s \dots \ell_N}}{C_{\ell_1 \dots \ell_s \dots \ell_r \dots \ell_N}} = \frac{k_{\ell_r} - k_{\ell_s} + i\varkappa}{k_{\ell_r} - k_{\ell_s} - i\varkappa} \quad . \tag{2.I.12}$$

Следуя работе [38] , выберем решение уравнения (2.I.12) в виде

$$C_{\ell_1 \dots \ell_N}^{(norm)} = \prod_{r<s} \sqrt{\frac{k_{\ell_r} - k_{\ell_s} + i\varkappa}{k_{\ell_r} - k_{\ell_s} - i\varkappa}} \quad . \tag{2.I.13}$$

При таком выборе $C^{(norm)}_{\ell_1\ldots\ell_N}$ система функций $f^{(norm)}_N(x_1,\ldots,x_N|k_1,\ldots,k_N)$ является ортонормированной:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1\ldots dx_N\, \overline{f^{(norm)}_N(x_1,\ldots,x_N|k_1,\ldots,k_N)}f^{(norm)}_N(x_1,\ldots,x_N|p_1,\ldots,p_N)= \tag{2.I.14}$$
$$=\sum_{(\ell_1,\ldots,\ell_N)}\prod_{j=1}^{N}\delta(k_j-p_{\ell_j}).$$

В случае отталкивания $\varkappa>0$, система функций $f^{(norm)}_N(x_1,\ldots,x_N|$ $|k_1,\ldots,k_N)$, $(N=0,1,2\ldots)$, кроме того, полна в F. В случае притяжения $\varkappa<0$ необходим учет связанных состояний. Оказывается, что при каждом $N=2,3,\ldots$ имеется только одно N - частичное связанное состояние, получаемое из (2.I.II) аналитическим продолжением по импульсам k_j :

$$k_j=\frac{P}{N}+i|\varkappa|\left(j-\frac{N+1}{2}\right);\quad j=1,2,\ldots,N. \tag{2.I.15}$$

где P - полный импульс связанного состояния. Соответствующие нормированные волновые функции приведены в работе [38] .

Доказательства всех вышеприведенных утверждений содержатся в работах [33, 34, 38] .

Закончив перечисление результатов, полученных для квантового н.у.Ш. методом подстановки Бете, мы можем приступить к последовательному изложению квантового варианта метода обратной задачи. Заметим сразу же, что, в отличие от метода подстановки Бете, наш метод позволит найти спектр гамильтониана и других интегралов движения уравнения (2.I.6), не используя явного вида собственных функций (2.I.II).

Главным объектом нашего исследования будет, как отмечалось во Введении, квантовый аналог фундаментального решения $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ вспомогательной линейной задачи (I.I.3).Вообще говоря, существует много способов сопоставить данному функционалу классических канонических переменных $\Psi(x)$ и $\overline{\Psi}(x)$ квантовый оператор (например, виковское, антивиковское, вейлевское квантования [39]). Мы остановимся здесь на виковском (нормальном) квантовании. В пользу такого выбора говорит, например, результат работы [38] , где показано, что интегралы движения $\Im_m$ (I.4.2) для классического уравнения (I.I.I) после виковского квантования переходят в квантовые интегралы движения для уравнения (2.I.6).

Итак, определим квантовую матрицу перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ формулой

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :T_{x_1}^{x_2}(\lambda): \quad . \tag{2.I.16}$$

Двоеточия $: :$ в (2.I.16) обозначают виковское квантование. Иными словами матричные элементы матрицы $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ определяются, как такие квантовые операторы, виковскими символами которых служат соответствующие элементы $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$.

Сразу же встает вопрос о корректности такого определения, т. е. о существовании таких квантовых операторов в пространстве $\mathbb{F}$. Выяснение этого вопроса мы отложим до конца параграфа, а пока перечислим свойства квантовой матрицы перехода, формально следующие из определения (2.I.16).

1) $$\mathbb{T}_{x_1}^{x_3}(\lambda) = \mathbb{T}_{x_2}^{x_3}(\lambda)\,\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \tag{2.I.17}$$

при $x_1 < x_2 < x_3$ или $x_1 > x_2 > x_3$

2) $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ имеет вид

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{x_1}^{x_2}(\lambda) \,, & \varkappa B^{+}{}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \\ B_{x_1}^{x_2}(\lambda) \,, & A^{+}{}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \end{pmatrix} \,, \tag{2.I.18}$$

где крест $+$ означает эрмитово сопряжение, и $A_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :a_{x_1}^{x_2}(\lambda):$, $B_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :b_{x_1}^{x_2}(\lambda):$, $A^{+}{}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \left(A_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)\right)^{+}$, $B^{+}{}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \left(B_{x_1}^{x_2}(\bar\lambda)\right)^{+}$.

3) $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = :L(x_2,\lambda)\,T_{x_1}^{x_2}(\lambda): = \tag{2.I.19}$$

$$= \left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 + i\varkappa\Psi^{+}(x_2)\sigma_{+}\right)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) - i\sigma_{-}\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\Psi(x_2)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -:T_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,L(x_1,\lambda): =$$

$$= -i\varkappa\Psi^{+}(x_1)\,\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\sigma_{+} - \mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\left(-i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 - i\sigma_{-}\Psi(x_1)\right) \tag{2.I.20}$$

с начальным условием

$$\mathbb{T}_x^x(\lambda) = I \ . \qquad (2.I.2I)$$

Свойство I) следует из аналогичного свойства (I.I.6) для классической матрицы перехода и коммутативности операторов $\Psi(x)$ и $\Psi^+(x)$ на непересекающихся интервалах. Подчеркнем, что в отличие от классического случая, в квантовом случае существенно условие $x_1 < x_2 < x_3$ или $x_1 > x_2 > x_3$.

Свойство 2) вытекает из представления (I.I.II) для классической матрицы перехода и очевидного свойства виковского квантования, состоящего в том, что комплексно сопряженным виковским символам соответствуют эрмитово сопряженные операторы.

Чтобы доказать свойство 3), сформулируем следующее простое утверждение. Пусть $\chi(\psi,\bar\psi)$ - функционал полей $\psi(x)$ и $\bar\psi(x)$. Тогда имеют место равенства

$$:\bar\psi\chi: = \Psi^+ :\chi: , \qquad (2.I.22)$$

$$:\chi\psi: = :\chi:\Psi \ .$$

Доказательство очевидно.

Теперь, дифференцируя $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ по x_2 или x_1 и используя определение (2.I.I6), дифференциальные уравнения (I.I.3) и (I.I.7) и равенства (2.I.22), получаем формулы (2.I.I9-2I).

Чтобы записать дифференциальные уравнения (2.I.I9) и (2.I.20) более компактно, введем знак нормальной расстановки операторных множителей $\vdots\ \vdots$. Знак $\vdots\ \vdots$ не следует путать со знаком виковского квантования $::$, применяемым здесь только к классическим функционалам. Знак $\vdots\ \vdots$, примененный к произведению нескольких операторных множителей (включающих Ψ и Ψ^+), обеспечивает расстановку всех Ψ^+ слева, а всех Ψ - справа, не меняя порядка остальных сомножителей. Например,

$$\vdots\, X \Psi \Psi^+ Y \,\vdots = \Psi^+ X Y \Psi \ . \qquad (2.I.23)$$

Пользуясь введенным обозначением, уравнения (2.I.I9) и (2.I.20) можно переписать соответственно в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \vdots\, \mathbb{L}(x_2,\lambda)\, \mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \,\vdots \qquad (2.I.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = -:\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\mathbb{L}(x_1,\lambda): \ , \qquad (2.\text{I}.25)$$

где $\mathbb{L}(x,\lambda)$ - квантовый $\mathbb{L}$- оператор

$$\begin{aligned}\mathbb{L}(x,\lambda) &= :L(x,\lambda): = \\ &= -i\frac{\lambda}{2}\sigma_3 - i\sigma_-\Psi(x) + i\varkappa\sigma_+\Psi^+(x) = \\ &= \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2}, & i\varkappa\Psi^+(x) \\ -i\Psi(x), & i\frac{\lambda}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad (2.\text{I}.26)$$

Как и в классическом случае, дифференциальные уравнения (2.I.24) и (2.I.25) с начальным условием (2.I.2I) эквивалентны вольтерровым интегральным уравнениям

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \text{I} + \int_{x_1}^{x_2} dx :\mathbb{L}(x,\lambda)\,\mathbb{T}_{x_1}^{x}(\lambda): \qquad (2.\text{I}.27)$$

и

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \text{I} + \int_{x_1}^{x_2} dx :\mathbb{T}_{x}^{x_2}(\lambda)\,\mathbb{L}(x,\lambda): \qquad (2.\text{I}.28)$$

или

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e(x_2-x_1,\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx\, e(x_2-x,\lambda) :\mathbb{V}(x)\,\mathbb{T}_{x_1}^{x}(\lambda): \qquad (2.\text{I}.29)$$

и

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e(x_2-x_1,\lambda) + \int_{x_1}^{x_2} dx :\mathbb{T}_{x}^{x_2}(\lambda)\,\mathbb{V}(x):\, e(x-x_1,\lambda)\,, \qquad (2.\text{I}.30)$$

где

$$\mathbb{V}(x) = :V(x): = i\varkappa\sigma_+\Psi^+(x) - i\sigma_-\Psi(x)\ . \qquad (2.\text{I}.3\text{I})$$

Итерируя уравнение (2.I.29) или (2.I.30), получим для матричных элементов $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ (2.I.I8) следующие разложения:

$$A_{x_1}^{x_2}(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_2-x_1)}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n \int\limits_{x_2>\xi_n>\eta_n>\dots>\eta_1>x_1}\!\!\dots\!\!\int d\xi_1\dots d\xi_n\, d\eta_1\dots d\eta_n \times \qquad (2.\text{I}.32)$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n-\eta_1-\ldots-\eta_n)}\,\Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n)\Big],$$

$$A^{+\,x_2}_{x_1}(\lambda)=e^{i\lambda(x_2-x_1)}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n\int\limits_{x_2>\eta_n>\xi_n>\ldots>\xi_1>x_1}\!\!\ldots\!\!\int d\xi_1\ldots d\xi_n d\eta_1\ldots d\eta_n\,\times \tag{2.I.33}$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n-\eta_1-\ldots-\eta_n)}\,\Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n)\Big],$$

$$B^{x_2}_{x_1}(\lambda)=-i e^{i\frac{\lambda}{2}(x_1+x_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\varkappa^n\int\limits_{x_2>\eta_{n+1}>\xi_n>\ldots>\eta_1>x_1}\!\!\ldots\!\!\int d\xi_1\ldots d\xi_n d\eta_1\ldots d\eta_{n+1}\,\times \tag{2.I.34}$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_n-\eta_1-\ldots-\eta_{n+1})}\,\Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_n)\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_{n+1}),$$

$$B^{+\,x_2}_{x_1}(\lambda)=i e^{-i\frac{\lambda}{2}(x_1+x_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\varkappa^n\int\limits_{x_2>\xi_{n+1}>\eta_n>\ldots>\xi_1>x_1}\!\!\ldots\!\!\int d\xi_1\ldots d\xi_{n+1} d\eta_1\ldots d\eta_n\,\times \tag{2.I.35}$$

$$\times e^{i\lambda(\xi_1+\ldots+\xi_{n+1}-\eta_1-\ldots-\eta_{n+1})}\,\Psi^+(\xi_1)\ldots\Psi^+(\xi_{n+1})\Psi(\eta_1)\ldots\Psi(\eta_n),$$

аналогичные классическим разложениям (I.I.29) и (I.I.30).

В заключение этого параграфа вернемся к вопросу о корректности определения (2.I.I6) квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$. К сожалению, общие теоремы, содержащиеся, например, в [40], не дают ответа на этот вопрос, так как накладывают слишком ограничительные условия на виковский символ оператора (типа убывания при $|\psi|\to\infty$ или суммируемости). Однако, специфическое строение $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ как функционала $\bar\psi(x)$ и $\psi(x)$ существенно упрощает ситуацию.

Возьмем за основу разложения (2.I.32-35). Анализ формул (2.I.32-35) показывает, что операторы $A^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ и $A^{+\,x_2}_{x_1}(\lambda)$ не изменяют числа частиц, $B^{+\,x_2}_{x_1}(\lambda)$ увеличивает его на I, а уменьшает на I (аннулируя вакуум). При этом, чтобы определить действие любых из этих 4-х операторов на N - частичное состояние, достаточно знать только конечное число первых членов рядов (2.I.32-35) (вплоть до члена, содержащего N операторов уничтожения, включительно). Таким образом, на функции из F_N матричные элементы $\mathbb{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ действуют как некоторые интегральные операторы.

Мы не будем здесь обсуждать такие свойства этих операторов как область определения, область значений и т.п. Для наших целей (т.е., для вычисления коммутационных соотношений между матричными элементами $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$) будет достаточно рассматривать операторы $A^{x_2}_{x_1}(\lambda)$, $A^{+x_2}_{x_1}(\lambda)$, $B^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ и $B^{+x_2}_{x_1}(\lambda)$, как формальные ряды (2.I.32-35). Интегральные уравнения (2.I.27-30) мы будем рассматривать при этом, как компактную запись рядов (2.I.32-35).

Некоторые дополнительные сведения о свойствах матричных элементов $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ как операторов в пространстве Фока будут приведены в § 2.4.

§ 2.2 R - матрица.

Как и в классическом случае, нашей конечной целью является определение квантовой матрицы перехода $T(\lambda)$ для бесконечного интервала и вычисление коммутационных соотношений между ее элементами. Важный промежуточный этап при этом составляет вычисление коммутационных соотношений между матричными элементами $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$. Аналогично § I.2, удобно ввести матрицы $\tilde{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ и $\tilde{\tilde{T}}^{x_2}_{x_1}(\mu)$ по формулам (I.2.4-5). Основной результат настоящего параграфа составляет следующая

ТЕОРЕМА 3. Перестановочные соотношения между матричными элементами $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ и $T^{x_2}_{x_1}(\mu)$ компактно записываются в виде

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)R(\lambda-\mu), \tag{2.2.I}$$

где

$$R(\lambda)=I_4+i\tau(\lambda)=I_4-\frac{i\varkappa}{\lambda}\mathcal{P} . \tag{2.2.2}$$

Как и в § I.2, доказательство Теоремы 3 основано на проверке соотношения (2.2.I) в инфинитезимальном виде. При этом будет полезна следующая

ЛЕММА 2.2.I. Произведения $\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)$ и $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right)=:\mathcal{L}(x_2;\lambda,\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu): \tag{2.2.3}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu)\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\right) = :\mathcal{L}'(x_2;\lambda,\mu)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu)\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2}: \tag{2.2.4}$$

и начальному условию

$$\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x}^{x}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x}^{x}(\mu) = \widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x}^{x}(\mu)\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x}^{x}(\lambda) = \mathrm{I}\ . \tag{2.2.5}$$

Операторы $\mathcal{L}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{L}'(x;\lambda,\mu)$ в (2.2.3) и (2.2.4) имеют следующий вид

$$\mathcal{L}(x;\lambda,\mu) = \widetilde{\mathbb{L}}(x,\lambda) + \widetilde{\widetilde{\mathbb{L}}}(x,\mu) + \varkappa\widetilde{\sigma}_-\widetilde{\widetilde{\sigma}}_+ = \tag{2.2.6}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda+\mu}{2}, & i\varkappa\Psi^+(x), & i\varkappa\Psi^+(x), & 0 \\ -i\Psi(x), & i\frac{\mu-\lambda}{2}, & 0, & i\varkappa\Psi^+(x) \\ -i\Psi(x), & \varkappa, & i\frac{\lambda-\mu}{2}, & i\varkappa\Psi^+(x) \\ 0, & -i\Psi(x), & -i\Psi(x), & i\frac{\lambda+\mu}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}'(x;\lambda,\mu) = \mathbb{L}(x,\lambda) + \widetilde{\widetilde{\mathbb{L}}}(x,\mu) + \varkappa\widetilde{\sigma}_+\widetilde{\widetilde{\sigma}}_- = \tag{2.2.7}$$

$$= \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda+\mu}{2}, & i\varkappa\Psi^+(x), & i\varkappa\Psi^+(x), & 0 \\ -i\Psi(x), & i\frac{\mu-\lambda}{2}, & \varkappa, & i\varkappa\Psi^+(x) \\ -i\Psi(x), & 0, & i\frac{\lambda-\mu}{2}, & i\varkappa\Psi^+(x) \\ 0, & -i\Psi(x), & -i\Psi(x), & i\frac{\lambda+\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Мы приведем два доказательства Леммы 2.2.I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО I. Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное положительное число. Продифференцируем произведение $\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ по x_2. Воспользовавшись уравнением (2.I.I9), получим

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right) = \left(-i\frac{\lambda}{2}\widetilde{\sigma}_3 - i\frac{\mu}{2}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_3 + i\varkappa\sigma_+\Psi^+(x_2+\varepsilon)\right)\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu) -$$

$$- i\widetilde{\widetilde{\sigma}}_-\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu)\Psi(x_2) + \tag{2.2.8}$$

$$+ i\varkappa\widetilde{\widetilde{\sigma}}_+\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\Psi^+(x_2)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu) - i\widetilde{\sigma}_-\widetilde{\mathbb{T}}{}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\Psi(x_2+\varepsilon)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}{}_{x_1}^{x_2}(\mu) =$$

$$= \vdots\left(\widetilde{\mathbb{L}}(x_2+\varepsilon,\lambda) + \widetilde{\widetilde{\mathbb{L}}}(x_2,\mu)\right) \widetilde{\mathbb{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x_1}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\vdots -$$

$$- i\widetilde{\delta}_- \widetilde{\mathbb{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x_1}(\lambda)\left[\Psi(x_2+\varepsilon), \widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right] +$$

$$+ i\varkappa\widetilde{\widetilde{\delta}}_+ \left[\widetilde{\mathbb{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x_1}(\lambda), \Psi^+(x_2)\right] \widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu) .$$

Чтобы получить окончательный ответ (2.2.3), нам необходимо вычислить коммутаторы в последних двух членах правой части (2.2.8) и выполнить предельный переход $\varepsilon \longrightarrow 0$. Коммутатор $\left[\Psi(x_2+\varepsilon), \widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right]$, очевидно, обращается в нуль, так как $\Psi(x_2+\varepsilon)$ коммутирует со всеми операторами $\Psi(x), \Psi^+(x)$ при $x \in [x_1, x_2]$ в силу $\varepsilon > 0$. Для вычисления второго коммутатора в (2.2.8), воспользуемся Леммой I.5.I и следующим легко проверяемым равенством,

$$\left[:\chi(\psi,\overline{\psi}):, \Psi^+(x)\right] = :\frac{1}{i}\left\{\chi(\psi,\overline{\psi}), \overline{\psi}(x)\right\}: , \qquad (2.2.9)$$

которое справедливо для любого функционала $\chi(\psi,\overline{\psi})$ полей $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$. В результате получим

$$\left[\widetilde{\mathbb{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x_1}(\lambda), \Psi^+(x_2)\right] = :\int_{x_1}^{x_2+\varepsilon} dx\, \widetilde{\mathrm{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x}(\lambda)\, \frac{1}{i}\left\{\widetilde{\mathrm{L}}(x,\lambda), \overline{\Psi}(x_2)\right\} \widetilde{\mathrm{T}}^{x}_{x_1}(\lambda): = \qquad (2.2.10)$$
$$\widetilde{\mathbb{T}}^{x_2+\varepsilon}_{x_2}(\lambda)\, \varkappa\widetilde{\delta}_- \, \widetilde{\mathbb{T}}^{x_2}_{x_1}(\lambda) .$$

Подставляя (2.2.10) в (2.2.8) и устремляя $\varepsilon \longrightarrow 0$, получаем требуемый ответ . Заметим, что результат не зависит от знака ε . При $\varepsilon < 0$ в нуль обращается второй коммутатор в (2.2.8), а первый дает нужное слагаемое в (2.2.3). Аналогично доказывается (2.2.4)

Прием "раздвижки", использованный в вышеприведенном доказательстве, заимствован нами из работы [30] *. Этот прием позволяет избежать рассмотрения неопределенных выражений вида $\left[\mathbb{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda), \Psi^+(x_2)\right]$ (содержащих неопределенности типа произведения

---

*) Автор благодарен С.В.Манакову за указание на возможность использования приема "раздвижки" в квантовом случае.

функции на разрывную, в чем легко убедиться, воспользовавшись, например, разложениями (I.I.29-30)). Однако при этом неявно используется недоказанное, вообще говоря, предположение о непрерывной зависимости $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2+\varepsilon}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right)$ от ε. Поэтому мы приводим второе доказательство Леммы 2.2.I, более прямолинейное, хотя и более громоздкое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Подставим в произведение $\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ интегральные уравнения для $\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ и $\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ вида (2.I.27). В результате получим:

$$\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)=\mathrm{I}+ \tag{2.2.II}$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}d\xi\left[\left(-i\frac{\lambda}{2}\widetilde{\sigma}_3+i\varkappa\Psi^+(\xi)\widetilde{\sigma}_+\right)\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)-i\widetilde{\sigma}_-\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)\Psi(\xi)\right]+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}d\eta\left[\left(-i\frac{\mu}{2}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_3+i\varkappa\Psi^+(\eta)\widetilde{\widetilde{\sigma}}_+\right)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)-i\widetilde{\widetilde{\sigma}}_-\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)\Psi(\eta)\right]+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}d\xi\int_{x_1}^{x_2}d\eta\left[\left(-i\frac{\lambda}{2}\widetilde{\sigma}_3+i\varkappa\Psi^+(\xi)\widetilde{\sigma}_+\right)\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)-i\widetilde{\sigma}_-\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)\Psi(\xi)\right]\times$$

$$\times\left[\left(-i\frac{\mu}{2}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_3+i\varkappa\Psi^+(\eta)\widetilde{\widetilde{\sigma}}_+\right)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)-i\widetilde{\widetilde{\sigma}}_-\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)\Psi(\eta)\right].$$

Последующие, хотя и громоздкие, но в идейном отношении совершенно прозрачные выкладки ставят своей конечной целью привести, используя коммутационные соотношения (2.I.2), уравнение (2.2.II) к вольтерровому интегральному уравнению, эквивалентному дифференциальному уравнению (2.2.3) с начальным условием (2.2.5)

Преобразуем четвертое слагаемое в (2.2.II), раскрыв скобки в подынтегральном выражении и воспользовавшись коммутационным соотношением (2.I.2), после чего оно примет вид

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}d\xi\int_{x_1}^{x_2}d\eta\Bigg[&\left(-i\frac{\lambda}{2}\widetilde{\sigma}_3+i\varkappa\Psi^+(\xi)\widetilde{\sigma}_+\right)\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)\left(-i\frac{\mu}{2}\widetilde{\widetilde{\sigma}}_3+i\varkappa\Psi^+(\eta)\widetilde{\widetilde{\sigma}}_+\right)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)+\\&+\left(-i\frac{\lambda}{2}\widetilde{\sigma}_3+i\varkappa\Psi^+(\xi)\widetilde{\sigma}_+\right)\left(-i\widetilde{\widetilde{\sigma}}_-\right)\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)\Psi(\eta)-\\&-\widetilde{\sigma}_-\widetilde{\widetilde{\sigma}}_-\,\widetilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{\xi}(\lambda)\Psi(\xi)\widetilde{\widetilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{\eta}(\mu)\Psi(\eta)+\end{aligned} \tag{2.2.I2}$$

$$-i\tilde{\sigma}_-\ \widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\left(-i\tfrac{\mu}{2}\tilde{\tilde{\sigma}}_3+i\varkappa\Psi^+(\eta)\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\Psi(\xi)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)+$$

$$\left.\varkappa\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\,\delta(\xi-\eta)\,\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)\right].$$

Преобразуем (2.2.I2) следующим образом. Во-первых, проинтегрируем δ - функцию в 5-ом слагаемом. Во-вторых, разобьем область интегрирования в остальных слагаемых на две части: $x_1<\xi<\eta<x_2$ и $x_1<\eta<\xi<x_2$. Затем, при $\xi<\eta$, в I-ом и 4-ом слагаемых пронесем $\Psi^+(\eta)$ налево, пользуясь тем, что $\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)$ коммутирует с $\Psi^+(\eta)$ при указанном соотношении ξ и η, а при $\xi>\eta$ аналогичным образом пронесем 3-ем и 4-ом слагаемых $\Psi(\xi)$ направо. Воспользовавшись затем уравнением (2.I.I9), мы сможем переписать (2.2.I2) в виде

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}d\eta\int\limits_{x_1}^{\eta}d\xi\left[\left(-i\tfrac{\mu}{2}\tilde{\tilde{\sigma}}_3+i\varkappa\Psi^+(\eta)\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)-\right. \tag{2.2.I3}$$

$$\left.-i\tilde{\tilde{\sigma}}_-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)\Psi(\eta)\right]+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}d\xi\int\limits_{x_1}^{\xi}d\eta\left[\left(-i\tfrac{\lambda}{2}\tilde{\sigma}_3+i\varkappa\Psi^+(\xi)\tilde{\sigma}_+\right)\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)\right)-\right.$$

$$\left.-i\tilde{\sigma}_-\ \widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{\xi}_{x_1}(\lambda)\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{\eta}_{x_1}(\mu)\right)\Psi(\xi)\right]+$$

$$+\varkappa\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\,\tilde{\tilde{\sigma}}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\ \widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{x}_{x_1}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{x}_{x_1}(\mu)\ .$$

Проведя в (2.2.I3) интегрирование полных производных и подставив результат в (2.2.II), получим для $\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\mu)$ следующее интегральное уравнение

$$\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\mu)=I+ \tag{2.2.I4}$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x_2}dx:\left(\widetilde{\mathbb{L}}(x,\lambda)+\tilde{\tilde{\mathbb{L}}}(x,\mu)+\varkappa\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{x}_{x_1}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{x}_{x_1}(\mu):\ ,$$

которое, очевидно, эквивалентно задаче Коши (2.2.5) для уравнения (2.2.3). Исследование произведения $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\,\widetilde{\mathbb{T}}\,{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ проводится аналогично. Таким образом, Лемма 2.2.I доказана.

Доказанная Лемма позволяет свести доказательство Теоремы 3 к проверке равенства

$$R(\lambda-\mu)\mathcal{L}(x;\lambda,\mu)=\mathcal{L}'(x;\lambda,\mu)R(\lambda-\mu)\ . \qquad (2.2.15)$$

Действительно, в силу (2.2.3-5) и (2.2.15), величины $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ и $R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)R^{-1}(\lambda-\mu)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению с одним и тем же начальным условием. Заметим, что для установления этого факта чрезвычайно важно, что R - числовая матрица, матричные элементы которой коммутируют с матричными элементами $\mathbb{T}^{x_2}_{x_1}$.

Равенство (2.2.15), к которому свелось доказательство Теоремы 3, легко проверяется непосредственно.

Обсудим в заключение этого параграфа связь полученной нами формулы (2.2.1) с результатом (1.2.11) Теоремы 1. Для этого удобно ввести в коммутационные соотношения (2.1.2) постоянную Планка $\hbar$:

$$\left[\Psi(x),\Psi^{+}(y)\right]=\hbar\,\delta(x-y)\ . \qquad (2.2.16)$$

Тогда R - матрица примет вид

$$R(\lambda)=I-\frac{i\varkappa\hbar}{\lambda}\mathcal{P}=I+i\hbar\, r(\lambda)\ . \qquad (2.2.17)$$

Покажем, что в квазиклассическом пределе $\hbar\to 0$ соотношение (2.2.1) переходит в (1.2.7). Действительно, ввиду (2.2.17) соотношение (1.2.1) можно записать в виде

$$\left[\tilde{\mathbb{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\lambda),\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\right]= \qquad (2.2.18)$$

$$=-i\hbar\left(r(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)-\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}{}^{x_2}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}{}^{x_2}_{x_1}(\lambda)r(\lambda-\mu)\right)\ .$$

Пользуясь тем, что при $\hbar\to 0$, $\mathbb{T}^{x_2}_{x_1}(\lambda)$ переходит в классическую матрицу перехода $T^{x_2}_{x_1}(\lambda)$, а коммутатор превращается в скобку Пуассона

$$[\ ,\ ]\longrightarrow -i\hbar\{\ ,\ \} \qquad (2.2.19)$$

и удерживая в (2.2.18) члены порядка $\hbar$, мы приходим к (1.2.11).

Заметим, что этот результат справедлив и для R - матриц более общего вида, для которых неверно соотношение (2.2.17) (см.

[29]). В общем случае оно заменяется на соотношение

$$R(\lambda) = I + i\hbar r(\lambda) + O(\hbar^2) \tag{2.2.20}$$

или

$$r(\lambda) = -i \frac{\partial}{\partial \hbar}\bigg|_{\hbar=0} R(\lambda, \hbar). \tag{2.2.21}$$

§ 2.3 Переход к бесконечному интервалу.

Этот параграф посвящен выводу важнейшего результата настоящей работы - коммутационных соотношений между матричными элементами квантовой матрицы перехода для бесконечного интервала.

Аналогично тому, как в § 2.I была введена квантовая матрица перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ для конечного интервала, определим квантовые матрицы перехода $\mathbb{T}_-(x,\lambda)$, $\mathbb{T}_+(x,\lambda)$ для полубесконечного и $\mathbb{T}(\lambda)$ для бесконечного интервалов формулами

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\pm(x,\lambda) &= :\mathbb{T}_\pm(x,\lambda): \;, \\ \mathbb{T}(\lambda) &= :\mathbb{T}(\lambda): \;. \end{aligned} \tag{2.3.I}$$

Свойства матриц $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ непосредственно следующие из определения (2.3.I), вполне аналогичны соответствующим свойствам матрицы $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$, установленным в § 2.I. Матрицы $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ имеют ту же симметрию, что и $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ (обозначения матричных элементов $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ см. в Приложении, пп. 6-8). $\mathbb{T}_-(x,\lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{T}_-(x,\lambda) = :\mathbb{L}(x,\lambda)\,\mathbb{T}_-(x,\lambda): \;, \tag{2.3.2}$$

а $\mathbb{T}_+(x,\lambda)$ - уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{T}_+(x,\lambda) = -:\mathbb{T}_+(x,\lambda)\,\mathbb{L}(x,\lambda): \;. \tag{2.3.3}$$

Для $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ справедливы квантовые аналоги интегральных уравнений (I.I.23-28), которые мы будем в дальнейшем выписывать по мере надобности.

Напомним еще раз, что мы пока рассматриваем матричные элементы $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ как формальные ряды вида (2.I.32-35) (мы не будем выписывать здесь эти ряды, т.к. они получаются из (2.I.32-35) вычеркиванием x_1 и/или x_2).

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы - Теорему 4.

ТЕОРЕМА 4. Коммутационные соотношения между матричными элементами квантовых матриц перехода $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ могут быть записаны при вещественных λ и μ в следующем виде:

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)= \tag{2.3.4}$$
$$=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)R(\lambda-\mu),$$

$$R(\lambda-\mu)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)= \tag{2.3.5}$$
$$=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)R(\lambda-\mu),$$

$$R(\lambda-\mu)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)= \tag{2.3.6}$$
$$=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)R(\lambda-\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала равенство (2.3.4). Доказательство будет основано на исследовании асимптотического поведения произведений $\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ и $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ при $x_1\to-\infty$. При этом основное внимание мы будем уделять формально-алгебраической стороне, не углубляясь в вопросы аналитического обоснования наших выкладок и ставя своей целью дать по возможности простой и быстрый способ вычисления искомых коммутационных соотношений.

В § 2.2 было доказано, что произведения $\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ и $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ удовлетворяют, соответственно, дифференциальным уравнениям (2.2.3) и (2.2.4). Фигурирующие в (2.2.3) и (2.2.4) операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ (2.2.6-7) не совпадают с суммой операторов $\tilde{\mathbb{L}}(x,\lambda)$ и $\tilde{\tilde{\mathbb{L}}}(x,\mu)$, как это было бы в классическом случае, а отличаются от нее слагаемыми $\varkappa\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+$ и $\varkappa\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-$ соответственно, возникающими из-за некоммутативности квантовых операторов. В связи с этим в квантовом случае при описании асимптотического поведения произведений $\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ и $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\,\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ при $x_1 \to -\infty$ или $x_2 \to +\infty$ роль классической матрицы $E(x;\lambda,\mu)$ (см. § I.3) будут играть, соответственно, матрицы $\mathcal{E}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{E}'(x;\lambda,\mu)$:

$$\mathcal{E}(x;\lambda,\mu) = \exp \mathcal{L}_0(\lambda,\mu)\,x =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda+\mu}{2}x}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & e^{i\frac{\mu-\lambda}{2}x}, & 0, & 0 \\ 0, & 2\varkappa\dfrac{\sin\frac{\lambda-\mu}{2}x}{\lambda-\mu}, & e^{i\frac{\lambda-\mu}{2}x}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & e^{i\frac{\lambda+\mu}{2}x} \end{pmatrix}, \qquad (2.3.7)$$

$$\mathcal{E}'(x;\lambda,\mu) = \exp \mathcal{L}_0'(\lambda,\mu)\,x =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda+\mu}{2}x}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & e^{i\frac{\mu-\lambda}{2}x}, & 2\varkappa\dfrac{\sin\frac{\lambda-\mu}{2}x}{\lambda-\mu}, & 0 \\ 0, & 0, & e^{i\frac{\lambda-\mu}{2}x}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & e^{i\frac{\lambda+\mu}{2}x} \end{pmatrix}, \qquad (2.3.8)$$

где $\mathcal{L}_0(\lambda,\mu)$ и $\mathcal{L}_0'(\lambda,\mu)$ - "асимптотические" (при $|x| \to \infty$) значения операторов $\mathcal{L}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{L}'(x;\lambda,\mu)$ соответственно

$$\mathcal{L}_0(\lambda,\mu) = -i\frac{\lambda}{2}\tilde{\sigma}_3 - i\frac{\mu}{2}\tilde{\tilde{\sigma}}_3 + \varkappa\,\tilde{\sigma}_-\,\tilde{\tilde{\sigma}}_+\,, \qquad (2.3.9)$$

$$\mathcal{L}_0'(\lambda,\mu) = -i\frac{\lambda}{2}\tilde{\sigma}_3 - i\frac{\mu}{2}\tilde{\tilde{\sigma}}_3 + \varkappa\,\tilde{\sigma}_+\,\tilde{\tilde{\sigma}}_-\,. \qquad (2.3.10)$$

Заметим, что в силу (2.2.15) имеет место равенство

$$R(\lambda-\mu)\,\mathcal{L}_0(\lambda,\mu) = \mathcal{L}_0'(\lambda,\mu)\,R(\lambda-\mu). \qquad (2.3.11)$$

Из равенства (2.3.II) в сочетании с (2.3.7–8) вытекает аналогичное равенство для матриц $\mathcal{E}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{E}'(x;\lambda,\mu)$:

$$R(\lambda-\mu)\,\mathcal{E}(x;\lambda,\mu)=\mathcal{E}'(x;\lambda,\mu)\,R(\lambda-\mu)\,. \qquad (2.3.12)$$

Займемся теперь исследованием асимптотического поведения произведения $\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)$ при $x_1\to-\infty$. Заметим, прежде всего, что дифференциальное уравнение (2.2.3), которое, пользуясь введенными обозначениями (2.3.9–10) и (2.1.31) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right)= \qquad (2.3.13)$$

$$=\,\vdots\,(\mathcal{L}_0(\lambda,\mu)+\tilde{\mathbb{V}}(x_2)+\tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(x_2))\left(\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right)\vdots\ ,$$

эквивалентно при начальном условии (2.2.5) вольтерровому интегральному уравнению

$$\left(\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right)=\mathcal{E}(x_2-x_1;\lambda,\mu)+ \qquad (2.3.14)$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}dx\,\vdots\left(\tilde{\mathbb{T}}_{x}^{x_2}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x}^{x_2}(\mu)\right)\left(\tilde{\mathbb{V}}(x)+\tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(x)\right)\vdots\ \mathcal{E}(x-x_1;\lambda,\mu)\,.$$

Введем в рассмотрение предел

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)=\lim_{x_1\to-\infty}\left(\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x}(\mu)\right)\mathcal{E}(x_1;\lambda,\mu)\,. \qquad (2.3.15)$$

Подставляя (2.3.14) в (2.3.15), получим для $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ следующее интегральное представление

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)=\mathcal{E}(x;\lambda,\mu)+ \qquad (2.3.16)$$

$$+\int_{-\infty}^{x}d\eta\,\vdots\left(\tilde{\mathbb{T}}_{\eta}^{x}(\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{\eta}^{x}(\mu)\right)\left(\tilde{\mathbb{V}}(\eta)+\tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(\eta)\right)\vdots\ \mathcal{E}(\eta;\lambda,\mu)\,.$$

Заметим, что $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ по-прежнему удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2.3):

$$\frac{d}{dx}\,\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)=\,\vdots\,\mathcal{L}(x;\lambda,\mu)\,\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)\,\vdots\ . \qquad (2.3.17)$$

С другой стороны, рассуждая точно так же, как при доказательстве Леммы 2.2.I в § 2.2, можно убедиться, что произведение $\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)$, которое мы обозначим $\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)$, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu) = \vdots\, \mathcal{L}(x;\lambda,\mu)\,\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)\,\vdots \; . \tag{2.3.I8}$$

Следовательно, величины $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)$ могут отличаться только некоторым матричным множителем $\mathbb{C}(\lambda,\mu)$:

$$\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu) = \mathcal{T}(x;\lambda,\mu)\,\mathbb{C}(\lambda,\mu) \; . \tag{2.3.I9}$$

Отметим очевидное сходство наших рассуждений с рассуждениями, проводившимися при доказательстве Теоремы 2 (§ I.3). Как и в § I.3, мы найдем матрицу $\mathbb{C}(\lambda,\mu)$, сравнив асимптотики $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)$ при $x \to -\infty$. Асимптотика $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ при $x \to -\infty$ легко определяется из интегрального представления (2.3.I6):

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathcal{E}(x;\lambda,\mu) \; . \tag{2.3.20}$$

Осталось исследовать асимптотику $\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)$. Для этого мы воспользуемся квантовым аналогом интегрального представления (I.I.24):

$$\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda) = \tilde{\mathrm{e}}(x,\lambda) + \int_{-\infty}^{x} d\eta \;\vdots\; \tilde{\mathbb{T}}_\eta^x(\lambda)\,\tilde{\mathbb{V}}(\eta) \;\vdots\; \tilde{\mathrm{e}}(\eta,\lambda) \tag{2.3.2I}$$

или

$$\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu) = \tilde{\tilde{\mathrm{e}}}(x,\mu) + \int_{-\infty}^{x} d\eta \;\vdots\; \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_\eta^x(\mu)\,\tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(\eta) \;\vdots\; \tilde{\tilde{\mathrm{e}}}(\eta,\mu) \; . \tag{2.3.22}$$

Подставляя (2.3.2I) и (2.3.22) в произведение $\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)$ получаем

$$\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu) = \mathrm{E}(x;\lambda,\mu) + \int_{-\infty}^{x} d\eta \;\vdots\; \tilde{\mathbb{T}}_\eta^x(\lambda)\,\tilde{\mathbb{V}}(\eta) \;\vdots\; \tilde{\mathrm{e}}(\eta,\lambda)\,\tilde{\tilde{\mathrm{e}}}(x,\mu) + \tag{2.3.23}$$

$$+\int_{-\infty}^{x} d\eta \, : \, \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{\eta}^{x}(\mu) \tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(\eta) \, : \, \tilde{e}(x,\lambda) \tilde{\tilde{e}}(\eta,\mu) +$$

$$+\int_{-\infty}^{x} d\eta_1 \int_{-\infty}^{x} d\eta_2 \left[i\varkappa \Psi^{+}(\eta_1) \tilde{\mathbb{T}}_{\eta_1}^{x}(\lambda) \tilde{\sigma}_{+} - i \tilde{\mathbb{T}}_{\eta_1}^{x}(\lambda) \tilde{\sigma}_{-} \Psi(\eta_1) \right] \times$$

$$\times \left[i\varkappa \Psi^{+}(\eta_2) \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}{}_{\eta_2}(\mu) \tilde{\tilde{\sigma}}_{+} - i \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}{}_{\eta_2}(\mu) \tilde{\tilde{\sigma}}_{-} \Psi(\eta_2) \right] \tilde{e}(\eta_1,\lambda) \tilde{\tilde{e}}(\eta_2,\mu).$$

Здесь мы снова воспользовались введенным в § I.3 обозначением $\mathrm{E}(x;\lambda,\mu) = \tilde{e}(x,\lambda)\tilde{\tilde{e}}(x,\mu)$.

Четвертое слагаемое в (2.3.23) может быть преобразовано совершенно аналогично тому, как преобразовалось соответствующее слагаемое в (2.2.II). Опуская соответствующие выкладки, которые почти тождественно совпадают с цепочкой выкладок (2.2.II-I4), мы приведем, лишь окончательный результат:

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu) = \mathrm{E}(x;\lambda,\mu) + \tag{2.3.24}$$
$$+\int_{-\infty}^{x} d\eta \, \vdots \left(\tilde{\mathbb{T}}_{\eta}^{x}(\lambda) \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{\eta}^{x}(\mu) \right) \left(\tilde{\mathbb{V}}(\eta) + \tilde{\tilde{\mathbb{V}}}(\eta) + \varkappa \tilde{\sigma}_{-} \tilde{\tilde{\sigma}}_{+} \right) \vdots \, \mathrm{E}(\eta;\lambda,\mu).$$

Чтобы найти теперь асимптотику $\mathcal{T}_{-}(x;\lambda,\mu)$ при $x \to -\infty$, заметим, что произведение $\tilde{\mathbb{T}}_{\eta}^{x}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{\eta}^{x}(\mu)$ имеет следующую асимптотику

$$\tilde{\mathbb{T}}_{\eta}^{x}(\lambda) \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{\eta}^{x}(\mu) \underset{x,\eta\to-\infty}{\sim} \mathcal{E}(x-\eta;\lambda,\mu) \tag{2.3.25}$$

при $x,\eta \to -\infty$. Формула (2.3.25) вытекает из интегрального уравнения (2.3.I4). Подставляя (2.3.25) в (2.3.24) и откидывая убывающие при $x \to -\infty$ члены, получим

$$\mathcal{T}_{-}(x;\lambda,\mu) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{E}(x;\lambda,\mu) + \tag{2.3.26}$$
$$+\int_{-\infty}^{x} d\eta \, \mathcal{E}(x-\eta;\lambda,\mu) \varkappa \tilde{\sigma}_{-} \tilde{\tilde{\sigma}}_{+} \mathrm{E}(\eta;\lambda,\mu).$$

Вычислив интеграл в (2.3.26), мы приходим к следующему результату:

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu) \underset{x\to-\infty}{\sim} \mathrm{E}(x;\lambda,\mu) + \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0} e^{i\frac{\mu-\lambda}{2}x} \tilde{\sigma}_{-} \tilde{\tilde{\sigma}}_{+} = \tag{2.3.27}$$
$$= \mathcal{E}(x;\lambda,\mu) \, \mathbb{C}(\lambda,\mu),$$

где

$$\mathbb{C}(\lambda,\mu) = \mathrm{I}_4 + \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_-\,\tilde{\tilde{\sigma}}_+ \,. \tag{2.3.28}$$

Переписав (2.3.I9) в виде

$$\mathcal{T}(x;\lambda,\mu) = \mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)\,\mathbb{C}^{-1}(\lambda,\mu) \tag{2.3.29}$$

и воспользовавшись тем, что

$$\mathbb{C}^{-1}(\lambda,\mu) = \mathrm{I}_4 - \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_-\,\tilde{\tilde{\sigma}}_+ \,, \tag{2.3.30}$$

(т.к. $\sigma_-^2 = \sigma_+^2 = 0$), и вспомнив определения $\mathcal{T}(x;\lambda,\mu)$ и $\mathcal{T}_-(x;\lambda,\mu)$, получаем окончательно

$$\lim_{x_1\to-\infty}\left(\tilde{\mathbb{T}}^{x}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}_{x_1}(\mu)\right)\mathcal{E}(x;\lambda,\mu) = \tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\left(\mathrm{I}_4 - \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right). \tag{2.3.31}$$

Аналогичная формула для $\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x}_{x_1}(\lambda)$ получается перестановкой в (2.3.31) $\lambda\leftrightarrow\mu$ и $\sim\ \longleftrightarrow\ \approx$:

$$\lim_{x_1\to-\infty}\left(\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x}_{x_1}(\lambda)\right)\mathcal{E}'(x;\lambda,\mu) = \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\left(\mathrm{I}_4 + \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right). \tag{2.3.32}$$

Теперь все готово, чтобы получить коммутационное соотношение (2.3.4). Для этого умножим (2.2.I) справа на $\mathcal{E}(x_1;\lambda,\mu)$ и воспользовавшись равенством (2.3.I2), получим

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x}_{x_1}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}_{x_1}(\mu)\mathcal{E}(x_1;\lambda,\mu) = \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}^{x}_{x_1}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}^{x}_{x_1}(\lambda)\mathcal{E}'(x_1;\lambda,\mu)\,R(\lambda-\mu)\,. \tag{2.3.33}$$

Переходя в (2.3.33) к пределу $x_1 \to -\infty$ согласно (2.3.3I) и (2.3.32), мы получаем равенство (2.3.4).

Равенство (2.3.5) доказывается совершенно аналогично. Комбинируя вместе (2.3.4) и (2.3.5) и воспользовавшись очевидным равенством

$$\mathbb{T}(\lambda) = \mathbb{T}_+(x,\lambda)\,\mathbb{T}_-(x,\lambda)\,, \tag{2.3.34}$$

мы получим равенство (2.3.6), завершив тем самым доказательство Теоремы 4.

Перейдем к обсуждению полученных результатов. Заметим прежде всего, что выкладка, вполне аналогичная проведенной в конце § 2.2, позволяет получить в классическом пределе из (2.3.4) формулу (I.3.I) и аналогичные формулы для T_+ и T. Таким образом, результаты Теоремы 4 обобщают результаты Теоремы 2 на квантовый случай.

Сводка коммутационных соотношений между матричными элементами матриц $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$ и $\mathbb{T}(\lambda)$ приведена в Приложении (формулы П3I-48). Чтобы показать, как получаются эти формулы, вычислим, например, коммутационное соотношение между операторами $A_-(x,\mu)$ и $B_-^+(x,\lambda)$ (формула П34). Для этого выпишем в соотношении (2.3.4) матричный элемент, находящийся на пересечении I-ой строки и 3-го столбца:

$$\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right)B_-^+(x,\lambda)A_-(x,\mu)=-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}B_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda)+ \tag{2.3.35}$$

$$+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}B_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda)+A_-(x,\mu)B_-^+(x,\lambda).$$

Перегруппировав члены, получим

$$A_-(x,\mu)B_-^+(x,\lambda)=B_-^+(x,\lambda)A_-(x,\mu)-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}B_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda)+ \tag{2.3.36}$$

$$+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\left[B_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda)-B_-^+(x,\lambda)A_-(x,\mu)\right].$$

Заметим, что в знаменателе 3-его члена правой части (2.3.36) не нужна регуляризация при $\lambda=\mu$, так как числитель при этом обращается в ноль. Это значит, что мы можем выбрать регуляризацию знаменателя произвольно, в частности, заменить $(\lambda-\mu)^{-1}$ на $(\lambda-\mu-i0)^{-1}$ (ср. с аналогичным рассуждением в § I.3 по поводу формулы (I.3.II)). Тогда члены, содержащие произведение $B_-^+(x,\mu)\cdot A_-(x,\lambda)$, сохраняться, и мы получим формулу (П34).

Аналогично получаются и остальные формулы (П3I-48). Выкладки при этом, однако, получаются довольно громоздкие. Оказывается, если интересоваться коммутационными соотношениями только при $\lambda\neq\mu$, то формулы (2.3.4-6) можно существенно упростить.

Действительно, при $\lambda\neq\mu$ регуляризации $\pm i0$ в знаменателе $(\lambda-\mu)$ несущественны, и мы можем разделить, например, равенство (2.3.4) справа на $\left(I-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)$, получив при этом следующее равенство:

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)R_0(\lambda-\mu), \tag{2.3.37}$$

где

$$R_0(\lambda)= \qquad (2.3.38)$$

$$=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda}\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)R(\lambda)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\frac{i\varkappa}{\lambda}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1+\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1-\frac{i\varkappa}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что не сделав предварительно оговорки насчет $\lambda\neq\mu$ мы получили бы в (2.3.38) бессмысленные произведения обобщенных функций вида $(\lambda-\mu-i0)^{-1}(\lambda-\mu+i0)^{-1}$. Аналогично из (2.3.5) и (2.3.6) получаются равенства

$$R_0(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)R(\lambda-\mu), \qquad (2.3.39)$$

$$R_0(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)R_0(\lambda-\mu). \qquad (2.3.40)$$

Формула (2.3.40) воспроизводит результат, полученный Л.Д.Фаддеевым в работе [I6].

Отметим одно интересное обстоятельство. Хотя коммутационные соотношения для матричных элементов $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$, получаемые из (2.3.37) и (2.3.39), определены лишь при $\lambda\neq\mu$, мы можем, воспользовавшись аналитическими свойствами матричных элементов матриц $\mathbb{T}_\pm(x,\lambda)$, продолжить соответствующие коммутационные соотношения на вещественную ось и найти тем самым правильную регуляризацию их при $\lambda=\mu$. Поясним сказанное примером.

Выпишем матричный элемент, лежащий на пересечении I-ой строки и 2-го столбца в (2.3.37):

$$\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right)B_-^+(x,\lambda)A_-(x,\mu)=A_-(x,\mu)B_-^+(x,\lambda). \qquad (2.3.4I)$$

В силу определения (2.3.I) операторные функции $A_-(x,\mu)$ и $B_-^+(x,\lambda)$ имеют те же аналитические свойства, что и соответствующие классические величины $a_-(x,\mu)$ и $\bar{b}_-(x,\lambda)$. Таким образом (2.3.4I) определено первоначально при $\operatorname{Im}\mu>0$ и $\operatorname{Im}\lambda<0$. Когда λ и μ выходят на вещественную ось, мы должны регуляризовать знаменатель $(\lambda-\mu)$ в (2.3.4I) следующим образом:

$$A_-(x,\mu)B_-^+(x,\lambda)=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\right)B_-^+(x,\lambda)A_-(x,\mu), \tag{2.3.42}$$

получая таким образом правильное коммутационное соотношение (П34).

Таким же образом из формул (2.3.37) и (2.3.39) можно воспроизвести все коммутационные соотношения (П3I-42). Для квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}(\lambda)$ на бесконечном интервале аналогично из формулы (2.3.40) воспроизводятся коммутационные соотношения (П43-46), т.е. те коммутационные соотношения, в которых хотя бы один сомножитель допускает аналитическое продолжение с вещественной оси. Исключение составляет коммутационные соотношения (П47-48), т.к. функции $B(\lambda)$ и $B^+(\lambda)$ определены только при вещественных λ. Эти коммутационные соотношения могут быть получены только из формулы (2.3.6).

Коммутационное соотношение (П48) между $B(\lambda)$ и $B^+(\mu)$ заслуживает особого комментария. Выпишем его отдельно:

$$B(\lambda)B^+(\mu)=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\right)\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\right)B^+(\mu)B(\lambda)+ \\ +2\pi\delta(\lambda-\mu)A^+(\lambda)A(\lambda). \tag{2.3.43}$$

В правой части (2.3.43) мы видим, вообще говоря, неопределенное произведение обобщенных функций $(\lambda-\mu+i0)^{-1}(\lambda-\mu-i0)^{-1}$. Это свидетельствует о крайне сингулярной операторной природе $B(\lambda)$ и $B^+(\mu)$. Оказывается однако, что от сингулярностей в соотношении (2.3.46) можно избавиться, регуляризовав определенным образом операторы $B(\lambda)$ и $B^+(\mu)$.

Именно, определим операторы $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^+(\lambda)$ формулами

$$\Phi(\lambda)=(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda))^{-1/2}B(\lambda), \\ \Phi^+(\lambda)=B^+(\lambda)(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda))^{-1/2}, \tag{2.3.44}$$

и сформулируем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.I. Введенные формулами (2.3.44) операторы

$\Phi(\lambda)$ и $\Phi^+(\lambda)$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям:

$$[\,\Phi(\lambda),\Phi(\mu)\,] = [\,\Phi^+(\lambda),\Phi^+(\mu)\,] = 0\,,$$
$$[\,\Phi(\lambda),\,\Phi^+(\mu)\,] = \delta(\lambda-\mu)\,. \tag{2.3.45}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что из коммутационного соотношения (П46)

$$A(\lambda)B^+(\mu) = \Big(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\Big)B^+(\mu)A(\lambda) \tag{2.3.46}$$

и из (П43) следует аналогичное соотношение

$$f(A(\lambda))\,B^+(\mu) = B^+(\mu)\,f\Big[\Big(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\Big)A(\lambda)\Big] \tag{2.3.47}$$

для любой аналитической функции $f(\lambda)$. Действительно, из (2.3.46) непосредственно следует справедливость равенства (2.3.47) для полиномиальных функций $f(\lambda)$, а следовательно и для аналитических функций $f(\lambda)$, рассматриваемых как бесконечные степенные ряды по λ (напомним, что все наши рассуждения носят формально-алгебраический характер). Мы можем распространить (2.3.47) и на функции $f(\lambda)$ вида $f(\lambda)=\lambda^{-1/2}$, раскладывая их в степенной ряд около любой точки $\lambda=\lambda_0\neq 0$.

Аналогичные рассуждения позволяют получить из (П45) следующее соотношение

$$B(\lambda)\,f(A(\mu)) = f\Big[\Big(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\Big)A(\mu)\Big].B(\lambda)\,. \tag{2.3.48}$$

Теперь можно приступить к доказательству Предложения 2.3.I. Выведем, например, коммутационное соотношение между $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^+(\mu)$. Для этого подставим в произведение $\Phi(\lambda)\Phi^+(\mu)$ выражения (2.3.44). Получим

$$\Phi(\lambda)\Phi^+(\mu) = (2\pi)^{-1}\big(A^+(\lambda)A(\lambda)\big)^{-1/2}B(\lambda)B^+(\mu)\big(A^+(\mu)A(\mu)\big)^{-1/2}. \tag{2.3.49}$$

Воспользуемся теперь коммутационным соотношением (2.3.43)

$$\Phi(\lambda)\Phi^+(\mu) = (2\pi)^{-1}\big(A^+(\lambda)A(\lambda)\big)^{-\frac{1}{2}}B(\mu)B(\lambda)\big(A^+(\mu)A(\mu)\big)^{-\frac{1}{2}}\Big(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\Big)\Big(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\Big)+ \tag{2.3.50}$$

$$+(2\pi)^{-1}(A^{+}(\lambda)A(\lambda))^{-\frac{1}{2}}(2\pi)A^{+}(\lambda)A(\lambda)\delta(\lambda-\mu)(A^{+}(\mu)A(\mu))^{-1/2}.$$

Чтобы получить нужный ответ, осталось преобразовать (2.3.50), пользуясь соотношениями (2.3.47–48) и коммутативностью $A(\lambda)$ и $A^{+}(\mu)$ (П43–44):

$$\Phi(\lambda)\Phi^{+}(\mu)=(2\pi)^{-1}B^{+}(\mu)(A^{+}(\mu)A(\mu)A^{+}(\lambda)A(\lambda))^{-1/2}B(\lambda)+\delta(\lambda-\mu)=$$
$$=\Phi^{+}(\mu)\Phi(\lambda)+\delta(\lambda-\mu).$$

Остальные соотношения из (2.3.45) получаются аналогично.

Заметим в заключение параграфа, что квантовые операторы $\Phi(\lambda)$ и $\Phi^{+}(\lambda)$ соответствуют классическим переменным типа действие-угол $\varphi(\lambda)$ и $\overline{\varphi}(\lambda)$ (I.4.8).

§ 2.4 Спектральное разложение.

В настоящем параграфе мы покажем, как, используя коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы перехода $\mathbb{T}(\lambda)$, можно исследовать спектр интегралов движения квантового н.у.Ш.

Сначала, однако, мы обсудим связь квантового метода обратной задачи и метода подстановки Бете. Эту связь устанавливает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.I. Волновая функция N - частичного состояния

$$|k_1,\dots,k_N>_B = B^{+}(k_1)\dots B^{+}(k_N)|0>$$

совпадает с волновой функцией, задаваемой формулой (2.I.II) при следующем выборе коэффициентов $C_{\ell_1\dots\ell_N}$:

$$C^{(B)}_{\ell_1\dots\ell_N} = (2\pi)^{N/2}\prod_{r<s}\frac{k_{\ell_r}-k_{\ell_s}+i\varkappa}{k_{\ell_r}-k_{\ell_s}}\,. \qquad (2.4.I)$$

Сформулированное только что утверждение было впервые анонсировано в работе автора [I4] . Имеющееся в распоряжении автора доказательство этого факта весьма громоздко и сводится, по существу, к непосредственному вычислению результата действия отрезка ряда (2.I.34) на волновую функцию вида (2.I.II). Аналогичное доказательство было недавно опубликовано в работе [27] . Почти одновременно с работой [27] появилась работа [23] , содержащая изящное и краткое доказательство утверждения, эквивалентного Предложению 2.4.I. Поэтому мы не будем приводить здесь доказательства Предложения 2.4.I, а перейдем сразу к обсуждению вытекающих из него следствий.

Сравнивая выражение (2.4.I) с (2.I.I3), мы видим, что имеет место соотношение

$$|k_1,\ldots,k_N\rangle_B = (2\pi)^{N/2}\prod_{r<s}\left|\frac{k_r-k_s+i\varkappa}{k_r-k_s}\right|\,|k_1,\ldots,k_N\rangle_{norm}\,, \tag{2.4.2}$$

где $|k_1,\ldots,k_N\rangle_{norm}$ есть N -частичное состояние,которое сопоставляется по формуле (2.I.4) волновой функции $f_N^{(norm)}(x_1,\ldots,x_N|k_1,\ldots,k_N)$ (2.I.II). Соотношение (2.4.2) показывает, что волновые функции, порождаемые операторами $B^+(k_j)$ не нормированы на δ- функцию. Более того, знаменатели $(k_r-k_s)^{-1}$ делают нормировку этих волновых функций настолько сингулярной, что $B^+(\lambda)$ не может быть определена даже как обобщенная операторнозначная функция*. Этот факт позволяет объяснить сингулярные коммутационные соотношения (2.3.43).

Рассмотрим теперь N - частичное состояние, порождаемое нормализованными операторами $\Phi^+(k_j)$ (2.3.44):

$$|k_1,\ldots,k_N\rangle = \Phi^+(k_1)\ldots\Phi^+(k_j)|0\rangle\,. \tag{2.4.3}$$

Подставляя (2.3.44) в (2.4.3), получим

$$|k_1,\ldots,k_N\rangle = \tag{2.4.4}$$
$$= B^+(k_1)(2\pi A^+(k_1)A(k_1))^{-\frac{1}{2}}\ldots B^+(k_N)(2\pi A^+(k_N)A(k_N))^{-\frac{1}{2}}|0\rangle\,.$$

Пронося с помощью коммутационных соотношений (2.3.47-48) множители $(2\pi A^+(k_j)A(k_j))^{-1/2}$ в (2.4.4) направо и используя равенства

$$A(k_j)|0\rangle = A^+(k_j)|0\rangle = |0\rangle\,, \tag{2.4.5}$$

---

*) На это указал автору А.К.Погребков.

непосредственно вытекающее из разложений (2.I.32-33), мы приходим к равенству

$$|k_1,\dots,k_N> = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{r<s} \left| \frac{k_r - k_s}{k_r - k_s + i\varkappa} \right| \, |k_1,\dots,k_N>_B , \qquad (2.4.6)$$

или, в силу (2.4.2)

$$|k_1,\dots,k_N> = |k_1,\dots,k_N>_{norm} .$$

Таким образом, операторы $\Phi^+(k_j)$ рождают нормированные собственные функции гамильтониана $\mathbb{H}$ (2.I.5).

Перейдём теперь к рассмотрению круга вопросов, связанного с квантовыми интегралами движения для уравнения (2.I.6).

Покажем, что, аналогично классическому случаю, роль производящей функции квантовых интегралов движения играет $\ln A(\lambda)$. Действительно из коммутационного соотношения (П43) следует коммутационное соотношение

$$[\ln A(\lambda), \ln A(\mu)] = 0 . \qquad (2.4.7)$$

Кроме того, подставив в (2.3.47) $f(\lambda) = \ln\lambda$, мы получим равенство

$$(\ln A(\lambda)) B^+(\mu) = B^+(\mu) \left[\ln A(\lambda) + \ln\left(1 + \frac{i\varkappa}{\lambda - \mu + i0}\right) \right] \qquad (2.4.8)$$

или

$$[\ln A(\lambda), \Phi^+(\mu)] = \Phi^+(\mu) \ln\left(1 + \frac{i\varkappa}{\lambda - \mu + i0}\right) . \qquad (2.4.9)$$

Подействуем оператором $\ln A(\lambda)$ на N-частичное состояние $|k_1,\dots,k_N>$:

$$\ln A(\lambda)\, \Phi^+(k_1) \dots \Phi^+(k_N) |0> . \qquad (2.4.10)$$

Используя коммутационное соотношение (2.4.9), мы можем пронести $\ln A(\lambda)$ в (2.4.10) направо. Заметив, кроме того, что в силу (2.4.5) имеет место равенство

$$\ln A(\lambda) |0> = 0 , \qquad (2.4.11)$$

мы приходим к следующему результату. Состояние $|k_1,\dots,k_N>$ является собственной функцией оператора $\ln A(\lambda)$:

$$\ln A(\lambda)|k_1,\dots,k_N>=\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-k_j+i0}\right)|k_1,\dots,k_N>, \qquad (2.4.12)$$

причем соответствующее собственное значение аддитивно по импульсам k_j ;

Раскладывая обе части (2.4.12) по степеням λ^{-1} , мы получаем, что состояние $|k_1,\dots,k_N>$ является собственным также для операторов A_m , определяемых как коэффициенты разложения

$$\ln A(\lambda) = i\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} A_m\lambda^{-m}. \qquad (2.4.13)$$

Соответствующие собственные значения $c_m(k)$

$$A_m|k_1,\dots,k_N>=\sum_{j=1}^{N} c_m(k_j)|k_1,\dots,k_N> \qquad (2.4.14)$$

определяются из разложения

$$\ln\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-k}\right)=i\varkappa\sum_{m=1}^{\infty} c_m(k)\lambda^{-m} \qquad (2.4.15)$$

и имеют вид

$$c_m(k)=\frac{k^m-(k-i\varkappa)^m}{im\varkappa}=\sum_{s=1}^{m}\frac{(m-1)!}{s!(m-s)!}(-i\varkappa)^{s-1}k^{m-s+1}. \qquad (2.4.16)$$

К сожалению, для квантового случая пока неизвестен способ вычисления операторов A_m , аналогичный методу уравнения Риккати (I.4.2-4) в классическом случае. Поэтому, чтобы связать операторы A_m с локальными интегралами движения для уравнения (2.I.6), нам придется воспользоваться результатом А.А.Цветкова [38] . Как показано в [38] , классические интегралы движения $\mathcal{I}_m$ (I.4.2) для уравнения (I.I.I) после виковского квантования превращаются в квантовые самосопряженные операторы $\mathfrak{I}_m$ в пространстве $\mathbb{F}$:

$$\mathfrak{I}_m = :\mathcal{I}_m: \qquad (2.4.17)$$

коммутирующие с гамильтонианом $\mathbb{H}$.

В частности

$$\mathcal{J}_1 = :\mathsf{N}: = \mathbb{N} , \qquad (2.4.18)$$

$$\mathcal{J}_2 = :\mathsf{P}: = \mathbb{P} , \qquad (2.4.19)$$

$$\mathcal{J}_3 = :\mathsf{H}: = \mathbb{H} . \qquad (2.4.20)$$

(Определение $\mathbb{N},\mathbb{P}$ и $\mathbb{H}$ см. в (2.1.5,7,8)).

Собственные значения операторов $\mathcal{J}_m$ на состояниях $|k_1,\dots,k_N>$ имеют вид

$$\mathcal{J}_m|k_1,\dots,k_N> = \sum_{j=1}^{N} k_j^m \, |k_1,\dots,k_N> . \qquad (2.4.21)$$

Сравнивая (2.4.21) и (2.4.14), получаем соотношение

$$A_m = \sum_{s=1}^{m} \frac{(m-1)!}{s!(m-s)!} (-i\varkappa)^{s-1} \mathcal{J}_{m-s+1} . \qquad (2.4.22)$$

В частности

$$A_1 = \mathcal{J}_1 , \qquad (2.4.23)$$

$$A_2 = \mathcal{J}_2 - \frac{i\varkappa}{2} \mathcal{J}_1 , \qquad (2.4.24)$$

$$A_3 = \mathcal{J}_3 - i\varkappa \mathcal{J}_2 - \frac{\varkappa^2}{3} \mathcal{J}_1 . \qquad (2.4.25)$$

Формулы (2.4.23-25) позволяют выразить $\mathbb{N},\mathbb{P}$ и $\mathbb{H}$ через A_1, A_2 и A_3 :

$$\mathbb{N} = A_1 , \qquad (2.4.26)$$

$$\mathbb{P} = A_2 + \frac{i\varkappa}{2} A_1 , \qquad (2.4.27)$$

$$\mathbb{H} = A_3 + i\varkappa A_2 - \frac{\varkappa^2}{6} A_1 . \qquad (2.4.28)$$

При положительных значениях константы связи $\varkappa$ (случай отталкивания), состояния $|k_1,\dots,k_N>$ $(N=0,1,2\dots)$, как указывалось в § 2.1, образуют полную систему собственных функций $\mathbb{H}$ в пространстве $\mathcal{F}$. Этот факт, а также аддитивность собственных значений $\ln A(\lambda)$ (2.4.12), позволяют написать для производящей функции квантовых интегралов движения $\mathcal{J}_m$ следующее спектральное разложение:

$$\ln A(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \ln\left(1 + \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right) \Phi^+(\mu)\Phi(\mu), \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \qquad (2.4.29)$$

Аналогичные разложения для $\mathbb{N}, \mathbb{P}$ и $\mathbb{H}$ имеют вид

$$\mathbb{N} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, \Phi^{+}(\mu)\Phi(\mu), \tag{2.4.30}$$

$$\mathbb{P} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu\, \Phi^{+}(\mu)\Phi(\mu), \tag{2.4.3I}$$

$$\mathbb{H} = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \cdot \mu^{2}\, \Phi^{+}(\mu)\Phi(\mu). \tag{2.4.32}$$

Формулы (2.4.30–32) показывают, что $\Phi^{+}(\mu)$ и $\Phi(\mu)$ являются операторами рождения и уничтожения элементарных частиц с импульсом μ и энергией μ^{2}. Оператор $\Phi^{+}(\mu)\Phi(\mu)$ можно при этом интерпретировать как оператор плотности числа частиц с импульсом μ. Отметим очевидное сходство формул (2.4.29–32) с формулами (I.4.I0, I2–I4) для классического н.у.Ш.

Обсудим в заключение этого параграфа случай притяжения ($\varkappa < 0$). При этом, как отмечалось в § 2.I, в спектре появляются связанные состояния, которые могут быть получены из состояний рассеяния $|k_1,\dots,k_N\rangle$ аналитическим продолжением по импульсам (2.I.I5).

Вычислим собственные значения интегралов движения для связанных состояний. Это, конечно, можно было бы сделать, просто подставив (2.I.I5) в (2.4.2I), но мы изберем другой способ вычисления, который позволит заодно получить интересные выводы общего характера.

Найдем сначала собственное значение оператора $A(\lambda)$ на состоянии $|k_1,\dots,k_N\rangle$. Это легко сделать, подействовав оператором $A(\lambda)$ на выражение $\Phi^{+}(k_1)\dots\Phi^{+}(k_N)|0\rangle$ и пронося $A(\lambda)$ направо с помощью коммутационных соотношений (П46). В результате имеем

$$A(\lambda)|k_1,\dots,k_N\rangle = \prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda - k_j + i\varkappa}{\lambda - k_j}|k_1,\dots,k_N\rangle, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0\ . \tag{2.4.33}$$

Отметим два обстоятельства в связи с формулой (2.4.33). Во-первых, собственные значения $A(\lambda)$ мультипликативны (тогда как собственные значения $\ln A(\lambda)$ аддитивны) по импульсам k_j. Во-вторых, собственное значение $\prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda - k_j + i\varkappa}{\lambda - k_j}$ имеет в верхней полуплоскости по λ ровно N нулей $\lambda = k_j - i\varkappa = k_j + i|\varkappa|$ (напомним, что мы рассматриваем случай $\varkappa < 0$).

Собственное значение оператора $A(\lambda)$ на связанном состоянии

N частиц получается из (2.4.33) аналитическим продолжением (2.I.I5) по импульсам k_j. При этом в произведении

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{\lambda - k_j - i|\varkappa|}{\lambda - k_j} = \tag{2.4.34}$$

$$= \frac{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N-3}{2}}{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N-5}{2}}{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N-3}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda - \frac{P}{N} - i|\varkappa|\frac{N+1}{2}}{\lambda - \frac{P}{N} - i|\varkappa|\frac{N-1}{2}}$$

происходит последовательное сокращение числителей и знаменателей, и в результате остается множитель

$$\frac{\lambda - \frac{P}{N} - i|\varkappa|\frac{N+1}{2}}{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N-1}{2}} \tag{2.4.35}$$

имеющий единственный нуль в верхней полуплоскости по λ в точке $\lambda = \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N+1}{2}$. Интересно отметить, что, с другой стороны, условие (2.I.I5) можно получить, потребовав, чтобы собственное значение $A(\lambda)$ имело единственный нуль в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и чтобы импульсы k_j были распределены симметрично относительно вещественной оси. Действительно, условие сокращения числителей и знаменателей в (2.4.34) приводит к требованию эквидистантности импульсов $k: k_{j+1} - k_j = i|\varkappa|$, которое в сочетании с требованием симметрии $k_N = \overline{k_1}$ дает (2.I.I5).

Этот результат имеет интересные аналогии в теории классического нелинейного уравнения Шредингера. Известно [II, 4I], что связанным состояниям квантовых частиц соответствуют в классическом пределе солитоны для уравнения (I.I.I). Классический коэффициент прохождения $a(\lambda)$ на односолитонном решении, характеризуемом импульсом P и числом частиц N, имеет вид

$$a(\lambda) = \frac{\lambda - \frac{P}{N} - i|\varkappa|\frac{N}{2}}{\lambda - \frac{P}{N} + i|\varkappa|\frac{N}{2}} . \tag{2.4.36}$$

Сравнивая выражения (2.4.36) и (2.4.35), мы видим, что они совпадают с точностью до сдвига $\lambda \longrightarrow \lambda - i\frac{|\varkappa|}{2}$, который в квазиклассическом пределе несуществен.

Собственные значения $C_m^{(N)}(P)$ интегралов движения A_m на N-частичном связанном состоянии получаются, как и раньше, разложением производящей функции

$$\ln \frac{\lambda - \frac{P}{\mathcal{N}} - i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}+1}{2}}{\lambda - \frac{P}{\mathcal{N}} + i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}-1}{2}} = -i|\varkappa| \sum_{m=1}^{\infty} c_m^{(\mathcal{N})}(p)\, \lambda^{-m}, \tag{2.4.37}$$

$$c_m^{(\mathcal{N})}(p) = \frac{i}{m|\varkappa|}\left[\left(\frac{P}{\mathcal{N}} - i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}-1}{2}\right)^m - \left(\frac{P}{\mathcal{N}} + i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}+1}{2}\right)^m\right], \tag{2.4.38}$$

$$c_m^{(1)}(p) = c_m(p) .$$

Пользуясь формулами (2.4.26–28), легко получить собственные значения интегралов движения $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ и $\mathbb{H}$ на $\mathcal{N}$- частичном связанном состоянии $|p,\mathcal{N}>$:

$$|p,\mathcal{N}> = |k_1,\ldots,k_{\mathcal{N}}>, \quad k_j = \frac{P}{\mathcal{N}} + i|\varkappa|\left(j - \frac{\mathcal{N}+1}{2}\right), \tag{2.4.39}$$
$$j = 1,\ldots,\mathcal{N} .$$

Эти собственные значения имеют вид

$$\mathbb{N}\,|p,\mathcal{N}> = \mathcal{N}\,|p,\mathcal{N}> , \tag{2.4.40}$$

$$\mathbb{P}\,|p,\mathcal{N}> = p\,|p,\mathcal{N}> , \tag{2.4.41}$$

$$\mathbb{H}\,|p,\mathcal{N}> = \left(\frac{p^2}{\mathcal{N}} - \frac{\varkappa^2}{12}(\mathcal{N}^3 - \mathcal{N})\right)|p,\mathcal{N}> . \tag{2.4.42}$$

К сожалению, пока мы не располагаем основанным на квантовом методе обратной задачи способом построения канонических операторов $\Phi_{\mathcal{N}}^+(p)$ и $\Phi_{\mathcal{N}}(p)$ рождения и уничтожения нормированных связанных состояний $\mathcal{N}$ частиц с полным импульсом p. Если, однако, допустить, что такие операторы построены, то правильное обобщение спектральных разложений (2.4.29–32) на случай $\varkappa<0$ должно принять вид:

$$\ln A(\lambda) = \sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp \ln \frac{\lambda - \frac{P}{\mathcal{N}} - i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}+1}{2}}{\lambda - \frac{P}{\mathcal{N}} + i|\varkappa|\frac{\mathcal{N}-1}{2}}\, \Phi_{\mathcal{N}}^+(p)\Phi_{\mathcal{N}}(p), \tag{2.4.29$'$}$$

$$\mathbb{N} = \sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \mathcal{N}\, \Phi_{\mathcal{N}}^+(p)\Phi_{\mathcal{N}}(p), \tag{2.4.30$'$}$$

$$\mathbb{P}=\sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\cdot p\,\Phi^{+}_{\mathcal{N}}(p)\Phi_{\mathcal{N}}(p), \tag{2.4.31'}$$

$$\mathbb{H}=\sum_{\mathcal{N}=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp\left(\frac{p^2}{\mathcal{N}}-\frac{\varkappa^2}{12}(\mathcal{N}^3-\mathcal{N})\right)\Phi^{+}_{\mathcal{N}}(p)\Phi_{\mathcal{N}}(p). \tag{2.4.32'}$$

§ 2.5 Квантовый $\mathbb{M}$ - оператор.

Все рассуждения предыдущих параграфов проводились при фиксированном моменте времени t. Введение временно́й эволюции не представляет в квантовой механике никакого труда. Действительно, решение гейзенбергова уравнения движения

$$X_t = i\,[X,\mathbb{H}] \tag{2.5.1}$$

для любой наблюдаемой величины X дается формулой

$$X(t) = e^{i\mathbb{H}t}X(0)e^{-i\mathbb{H}t}. \tag{2.5.2}$$

В частности для матричных элементов квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}(\lambda)$ мы получаем, используя коммутационные соотношения

$$[A(\lambda),\mathbb{H}] = 0, \tag{2.5.3}$$

$$[B^{+}(\lambda),\mathbb{H}] = \lambda^2 B^{+}(\lambda) \tag{2.5.4}$$

следующий результат

$$A(t,\lambda) = A(0,\lambda), \tag{2.5.5}$$

$$B^{+}(t,\lambda) = e^{i\lambda^2 t}B^{+}(0,\lambda). \tag{2.5.6}$$

Тем не менее, определенный методический интерес представляет следующий вопрос: существует ли в квантовом случае оператор $\mathbb{M}(x,\lambda)$, позволяющий описывать временну́ю эволюцию матрицы перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$, аналогично оператору M в классическом случае (§ 1.5)?

Положительный ответ на этот вопрос дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.I. Гейзенбергово уравнение движения для квантовой матрицы перехода на конечном интервале

$$\frac{d}{dt}\,\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = i\left[\,\mathbb{H}\,,\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\right]$$

может быть представлено в виде, аналогичном (I.5.24):

$$\frac{d}{dt}\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \vdots\,\mathbb{M}(x_2,\lambda)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) - \mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\mathbb{M}(x_1,\lambda)\,\vdots\ , \tag{2.5.7}$$

где оператор $\mathbb{M}(x,\lambda)$ имеет вид

$$\mathbb{M}(x,\lambda) = :M(x,\lambda): =$$

$$\left(i\frac{\lambda^2}{2} + i\varkappa\Psi^+(x)\Psi(x)\right)\sigma_3 + \varkappa\left(\Psi^+_x(x) - i\lambda\Psi^+(x)\right)\sigma_+ +$$

$$+\left(\Psi_x(x) + i\lambda\Psi(x)\right)\sigma_-\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим коммутатор $i\left[\,\mathbb{H},\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\right]$ символом $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ и найдем дифференциальное уравнение по переменной x_2, которому подчиняется эта величина. Для этого продифференцируем $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ по x_2, воспользовавшись (2.I.24). Получим

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = i\left[\,\mathbb{H},\ \vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\vdots\,\right] = \tag{2.5.8}$$

$$= \vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\vdots - i\sigma_-\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\left[\,i\mathbb{H},\ \Psi(x_2)\,\right] +$$

$$+\, i\varkappa\sigma_+\left[\,i\mathbb{H},\ \Psi^+(x_2)\,\right]\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\ .$$

Воспользовавшись уравнением движения (2.I.6) для $\Psi(x)$ и сопряженным к нему уравнением, приведем (2.5.8) к следующему виду

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\vdots\, - \tag{2.5.9}$$

$$- i\sigma_-\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\left(i\Psi_{xx}(x_2) - 2i\varkappa\Psi^+(x_2)\Psi(x_2)\Psi(x_2)\right) +$$

$$+\, i\varkappa\sigma_+\left(-i\Psi^+_{xx}(x_2) + 2i\varkappa\Psi^+(x_2)\Psi^+(x_2)\Psi(x_2)\right)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\ .$$

Перед тем, как двинуться дальше, сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 2.5.I. Имеют место равенства:

$$\sigma_-\left[\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda),\Psi^+(x_2)\right]=\sigma_+\left[\Psi(x_2),\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\right]=0. \tag{2.5.I0}$$

Доказательства Леммы 2.5.I мы приводить не будем, поскольку проводится оно с помощью того же приема "раздвижки", который использовался при доказательстве I Леммы 2.2.I в § 2.2. При этом в силу равенств $\sigma_-^2=\sigma_+^2=0$ результат, как и в § 2.2 не зависит от знака .

Воспользовавшись Леммой 2.5.I, преобразуем (2.5.9), пронеся $\Psi^+(x_2)$ направо, а $\Psi(x_2)$ - налево. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)=\vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\,\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\vdots\,+ \tag{2.5.II}$$

$$+\sigma_-\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\Psi_{xx}(x_2)-2\varkappa\sigma_-\Psi^+(x_2)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\Psi(x_2)\Psi(x_2)+$$

$$+\varkappa\sigma_+\Psi^+_{xx}(x_2)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)-2\varkappa^2\sigma_+\Psi^+(x_2)\Psi^+(x_2)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\Psi(x_2)=$$

$$=\vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\,\vdots+:\left(M_x(x_2,\lambda)+\left[M(x_2,\lambda),L(x_2,\lambda)\right]\right)T_{x_1}^{x_2}(\lambda):$$

С другой стороны, правая часть равенства (2.5.7), которую мы обозначим $\mathcal{M}_{x_1}^{\prime x_2}(\lambda)$, удовлетворяет точно такому же дифференциальному уравнению. Действительно, дифференцируя правую часть (2.5.7) по x_2 и пользуясь равенством (I.5.28), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{M}_{x_1}^{\prime x_2}(\lambda)=\frac{\partial}{\partial x_2}\,\vdots\,\mathbb{M}(x_2,\lambda)\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)-\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\mathbb{M}(x_1,\lambda)\,\vdots= \tag{2.5.I2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_2}:M(x_2,\lambda)T_{x_1}^{x_2}(\lambda)-T_{x_1}^{x_2}(\lambda)M(x_1,\lambda):=$$

$$=\vdots\,\mathbb{L}(x_2,\lambda)\mathcal{M}_{x_1}^{\prime x_2}(\lambda)\,\vdots+:\left(M_x(x_2,\lambda)+\left[M(x_2,\lambda),L(x_2,\lambda)\right]\right)T_{x_1}^{x_2}(\lambda):$$

Так как величины $\mathcal{M}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ и $\mathcal{M}_{x_1}^{\prime x_2}(\lambda)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и одному и тому же начальному условию

$$\mathcal{M}_{x_1}^{x_1}(\lambda)=\mathcal{M}_{x_1}^{\prime x_1}(\lambda)=0 \tag{2.5.I2}$$

мы заключаем, что они на самом деле совпадают, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать квантовые аналоги равенств (I.5.25-27).

Заключение.

Подведем итоги. В настоящей работе был на примере нелинейного уравнения Шредингера развит новый метод точного квантования вполне интегрируемых теоретико-полевых моделей. Этот метод позволил не только воспроизвести известные для квантового нелинейного уравнения Шредингера результаты, полученные ранее с помощью подстановки Бете, но и получить ряд новых результатов, а именно, построить производящую функцию квантовых интегралов движения и операторы рождения-уничтожения элементарных возбуждений. По сравнению с методом подстановки Бете наш метод обладает тем преимуществом, что он позволяет строить и исследовать собственные векторы гамильтониана чисто алгебраическим путем, не выписывая явно соответствующие волновые функции в координатном представлении.

Центральную роль в предлагаемом нами методе играет, как мы видим, R - матрица, давшая название всему методу. Использование R - матрицы позволяет компактно и эффективно вычислять коммутационные соотношения между матричными элементами квантовой матрицы перехода, не прибегая к выкладкам с бесконечными рядами, как это сделано, например, в работах [22, 26], появившихся после работы автора [I4].

Перечислим некоторые задачи, касающиеся квантового нелинейного уравнения Шредингера, которые остаются пока нерешенными:

I) Было бы желательно найти эффективный способ построения квантовых интегралов движения, аналогичный уравнению Риккати в классическом случае. Это позволило бы окончательно избавиться при исследовании квантовых интегралов движения от ссылок на результаты, полученные с помощью подстановки Бете.

2) Построить в рамках метода R - матрицы операторы рождения и уничтожения связанных состояний $\mathcal{N}$ - частиц - $\Phi^{+}_{\mathcal{N}}(k)$ и $\Phi_{\mathcal{N}}(k)$.

3) Построить производящую функцию квантовых $\mathbb{M}$ - операторов аналогично тому, как это было сделано для классического случая в § I.5.

После опубликования работ [I3, I4] проблематика, связанная с квантовым обобщением метода обратной задачи привлекла внимание большого числа исследователей, как в СССР, так и за рубежом. В Советском Союзе работы по квантовому методу обратной задачи ведутся в ЛОМИ под руководством Л.Д.Фаддеева [13-21] . Из зарубежных авторов следует выделить группу Такера (США, Батавия) [22-25] и Хонеркампа (ФРГ, Фрайбург) [26, 27] .

Перечислим основные направления, по которым развивается в настоящее время квантовый метод обратной задачи:

1) Квантование релятивистски инвариантных вполне интегрируемых моделей. К этому направлению относится работа [17] , в которой метод R - матрицы был успешно применен к квантованию уравнения синус-Гордон.

2) Исследование вполне интегрируемых решеточных спиновых моделей, таких как ферромагнетик Гайзенберга [18] и XYZ - модель [19] .

3) Исследование моделей с несколькими сортами частиц, обладающих изотопической симметрией [20, 21] .

4) И, наконец, очень перспективное направленное, интенсивно развивающееся в последнее время - это попытки решить обратную задачу рассеяния для вспомогательного линейного уравнения, т.е. выразить полевые операторы, например, $\Psi(x)$ и $\Psi^{+}(x)$ для н.у.Ш. через данные рассеяния $A(\lambda)$ и $B^{+}(\lambda)$. Решение этой задачи представляет большой интерес для квантовой теории поля, так как позволило бы эффективно исследовать функции Грина вполне интегрируемых квантовополевых систем. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах [23-25, 28] для нелинейного уравнения Шредингера.

В заключение, необходимо упомянуть о классическом варианте метода R - матрицы, развитом в гл. I настоящей работы. Этот метод позволил не только упростить выкладки, связанные с вычислением скобок Пуассона, но и получить такой новый результат, как общее выражение для производящей функции M - операторов. Таким образом, в теории классических вполне интегрируемых уравнений возник новый объект - r - матрица. Место, которое занимает r - матрица в методе обратной задачи пока не совсем ясно. Неизвестен, например, точно класс L - операторов, которые имеют r - матрицу. В связи с этим большой интерес представляет задача обобщения метода r - матрицы на неультралокальные по терминологии Л.Д.Фаддеева [16] L - операторы, т.е. L - операторы, скобки Пуассона между матричными элементами которых содержат производные от δ - функции.

Приложение.

В Приложении собраны скобки Пуассона (в классическом случае) и коммутационные соотношения (в квантовом случае) между матричными элементами матриц перехода для конечного, полубесконечного и бесконечного интервалов. Все формулы выписаны при вещественных значениях λ и μ.

I. Сводка скобок Пуассона между матричными элементами классической матрицы перехода $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ для конечного интервала $[x_1, x_2]$.

Напомним, что матрица $T_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ имеет вид (I.I.II):

$$T_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} a_{x_1}^{x_2}(\lambda) , & \varkappa \bar{b}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \\ b_{x_1}^{x_2}(\lambda) , & \bar{a}_{x_1}^{x_2}(\lambda) \end{pmatrix}, \qquad \lambda = \bar{\lambda} .$$

Искомые скобки Пуассона даются формулой (I.2.II):

$$\{\tilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda), \tilde{\tilde{T}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = [r(\lambda-\mu), \tilde{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\tilde{\tilde{T}}_{x_1}^{x_2}(\mu)] .$$

Ниже выписаны 6 независимых матричных элементов формулы (I.2.II) из I6 возможных.

$$\{a_{x_1}^{x_2}(\lambda), a_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = 0, \tag{П1}$$

$$\{a_{x_1}^{x_2}(\lambda), \bar{a}_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = \frac{\varkappa^2}{\lambda-\mu}\left(\bar{b}_{x_1}^{x_2}(\lambda) b_{x_1}^{x_2}(\mu) - b_{x_1}^{x_2}(\lambda)\bar{b}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right), \tag{П2}$$

$$\{a_{x_1}^{x_2}(\lambda), b_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = \frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\left(a_{x_1}^{x_2}(\lambda) b_{x_1}^{x_2}(\mu) - b_{x_1}^{x_2}(\lambda) a_{x_1}^{x_2}(\mu)\right), \tag{П3}$$

$$\{a_{x_1}^{x_2}(\lambda), \bar{b}_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = \frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\left(\bar{b}_{x_1}^{x_2}(\lambda) a_{x_1}^{x_2}(\mu) - a_{x_1}^{x_2}(\lambda)\bar{b}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right), \tag{П4}$$

$$\{b_{x_1}^{x_2}(\lambda), b_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = 0, \tag{П5}$$

$$\{b_{x_1}^{x_2}(\lambda), \bar{b}_{x_1}^{x_2}(\mu)\} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\bar{a}_{x_1}^{x_2}(\lambda) a_{x_1}^{x_2}(\mu) - a_{x_1}^{x_2}(\lambda)\bar{a}_{x_1}^{x_2}(\mu)\right). \tag{П6}$$

Остальные I0 соотношений получаются из перечисленных комплексным сопряжением, перестановкой λ и μ и использованием антисимметрии скобки Пуассона.

2. Сводка скобок Пуассона между матричными элементами классической матрицы перехода $T_-(x,\lambda)$ для полубесконечного интервала $(-\infty, x]$.

Матрица $T_-(x,\lambda)$ имеет вид

$$T_-(x,\lambda) = \begin{pmatrix} a_-(x,\lambda), & \varkappa \bar{b}_-(x,\lambda) \\ b_-(x,\lambda), & \bar{a}_-(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Напомним, что матричные элементы $a_-(x,\lambda)$ и $\bar{b}_-(x,\lambda)$ допускают аналитическое продолжение по λ в верхнюю полуплоскость, а $b_-(x,\lambda)$ и $\bar{a}_-(x,\lambda)$ – в нижнюю (см. § I.I).

Исходная формула для скобок Пуассона (I.3.II):

$$\{\tilde{T}_-(x,\lambda), \tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu)\} = r(\lambda-\mu)\tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu) - \tilde{T}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_-(x,\mu) r_-(\lambda-\mu).$$

Независимые матричные элементы:

$$\{a_-(x,\lambda), a_-(x,\mu)\} = 0, \qquad (\text{П7})$$

$$\{a_-(x,\lambda), \bar{a}_-(x,\mu)\} = -\frac{\varkappa^2}{\lambda-\mu+i0} b_-(x,\lambda)\bar{b}_-(x,\mu), \qquad (\text{П8})$$

$$\{a_-(x,\lambda), b_-(x,\mu)\} = \frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\left(a_-(x,\lambda)b_-(x,\mu) - b_-(x,\lambda)a_-(x,\mu)\right), \qquad (\text{П9})$$

$$\{a_-(x,\lambda), \bar{b}_-(x,\mu)\} = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu+i0} a_-(x,\lambda)\bar{b}_-(x,\mu), \qquad (\text{П10})$$

$$\{b_-(x,\lambda), b_-(x,\mu)\} = 0, \qquad (\text{П11})$$

$$\{b_-(x,\lambda), \bar{b}_-(x,\mu)\} = -\frac{1}{\lambda-\mu+i0} a_-(x,\lambda)\bar{a}_-(x,\mu). \qquad (\text{П12})$$

В формуле П9 регуляризация знаменателя не нужна, т.к. числитель обращается в ноль при $\lambda = \mu$. При этом скобка Пуассона допускает аналитическое продолжение в одну и ту же полуплоскость по λ и μ.

3. Сводка скобок Пуассона между матричными элементами классической матрицы перехода $T_+(x,\lambda)$ для полубесконечного интервала $[x, +\infty)$.

Матрица $T_+(x,\lambda)$ имеет вид:

$$T_+(x,\lambda) = \begin{pmatrix} a_+(x,\lambda), & \varkappa \bar{b}_+(x,\lambda) \\ b_+(x,\lambda), & \bar{a}_+(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Матричные элементы $a_+(x,\lambda)$ и $\bar{b}_+(x,\lambda)$ допускают аналитическое продолжение по λ в верхнюю полуплоскость, а $b_+(x,\lambda)$ и $\bar{a}_+(x,\lambda)$ – в нижнюю (см. § I.I).

Исходная формула для скобок Пуассона (I.3.I2):

$$\{\tilde{T}_+(x,\lambda),\tilde{\tilde{T}}_+(x,\mu)\}=r_+(\lambda-\mu)\tilde{T}_+(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_+(x,\mu)-\tilde{T}_+(x,\lambda)\tilde{\tilde{T}}_+(x,\mu)\,r(\lambda-\mu)\,.$$

Независимые матричные элементы:

$$\{a_+(x,\lambda),\ a_+(x,\mu)\}=0\,, \tag{П13}$$

$$\{a_+(x,\lambda),\ \bar{a}_+(x,\mu)\}=\frac{\varkappa^2}{\lambda-\mu+i0}\,\bar{b}_+(x,\lambda)\,b_+(x,\mu)\,, \tag{П14}$$

$$\{a_+(x,\lambda),\ b_+(x,\mu)\}=\frac{\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\,a_+(x,\lambda)\,b_+(x,\mu), \tag{П15}$$

$$\{a_+(x,\lambda),\ \bar{b}_+(x,\mu)\}=\frac{\varkappa}{\lambda-\mu}\left(\bar{b}_+(x,\lambda)a_+(x,\mu)-a_+(x,\lambda)\bar{b}_+(x,\mu)\right), \tag{П16}$$

$$\{b_+(x,\lambda),\ b_+(x,\mu)\}=0\,, \tag{П17}$$

$$\{b_+(x,\lambda),\ \bar{b}_+(x,\mu)\}=\frac{1}{\lambda-\mu+i0}\,\bar{a}_+(x,\lambda)\,a_+(x,\mu)\,. \tag{П18}$$

По поводу формулы (П16) можно сделать замечание, аналогичное сделанному в п.2 о формуле (П9).

4. Сводка скобок Пуассона между матричными элементами классической матрицы перехода $T(\lambda)$ на бесконечном интервале $(-\infty,\infty)$.

Матрица $T(\lambda)$ имеет вид

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix} a(\lambda)\,, & \varkappa\bar{b}(\lambda) \\ b(\lambda)\,, & \bar{a}(\lambda)\end{pmatrix},\quad \lambda=\bar{\lambda}\,.$$

Матричный элемент $a(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение по λ в верхнюю полуплоскость, $\bar{a}(\lambda)$ – в нижнюю. Матричные элементы $b(\lambda)$ и $\bar{b}(\lambda)$, вообще говоря, не допускают аналитического продолжения (см. § I.I).

Исходная формула для скобок Пуассона (I.3.I4):

$$\{\tilde{T}(\lambda),\tilde{\tilde{T}}(\mu)\}=r_+(\lambda-\mu)\tilde{T}(\lambda)\tilde{\tilde{T}}(\mu)-\tilde{T}(\lambda)\tilde{\tilde{T}}(\mu)\,r_-(\lambda-\mu)\,.$$

Независимые матричные элементы:

$$\{a(\lambda),\ a(\mu)\}=0\,, \tag{П19}$$

$$\{a(\lambda),\ \bar{a}(\mu)\}=0\,, \tag{П20}$$

$$\{a(\lambda), b(\mu)\} = \frac{\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\, a(\lambda) b(\mu); \qquad (\text{П21})$$

$$\{a(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = -\frac{\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\, a(\lambda) \bar{b}(\mu), \qquad (\text{П22})$$

$$\{b(\lambda), b(\mu)\} = 0, \qquad (\text{П23})$$

$$\{b(\lambda), \bar{b}(\mu)\} = 2\pi i\, |a(\lambda)|^2 \delta(\lambda-\mu). \qquad (\text{П24})$$

5. **Сводка коммутационных соотношений между матричными элементами квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ для конечного интервала $[x_1, x_2]$.**

Матрица $\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda)$ имеет вид (2.I.18)

$$\mathbb{T}_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{x_1}^{x_2}(\lambda), & \varkappa B_{x_1}^{+x_2}(\lambda) \\ B_{x_1}^{x_2}(\lambda), & A_{x_1}^{+x_2}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \bar{\lambda}.$$

Исходная формула (2.2.I):

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu) = \tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_{x_1}^{x_2}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}_{x_1}^{x_2}(\lambda) R(\lambda-\mu).$$

Независимые коммутационные соотношения:

$$A_{x_1}^{x_2}(\lambda) A_{x_1}^{x_2}(\mu) = A_{x_1}^{x_2}(\mu) A_{x_1}^{x_2}(\lambda), \qquad (\text{П25})$$

$$A_{x_1}^{x_2}(\lambda) A_{x_1}^{+x_2}(\mu) = A_{x_1}^{+x_2}(\mu) A_{x_1}^{x_2}(\lambda) + \frac{i\varkappa^2}{\lambda-\mu}\left(B_{x_1}^{+x_2}(\mu) B_{x_1}^{x_2}(\lambda) - B_{x_1}^{+x_2}(\lambda) B_{x_1}^{x_2}(\mu)\right), \qquad (\text{П26})$$

$$B_{x_1}^{x_2}(\mu) A_{x_1}^{x_2}(\lambda) = \left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right) A_{x_1}^{x_2}(\lambda) B_{x_1}^{x_2}(\mu) - \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu} A_{x_1}^{x_2}(\mu) B_{x_1}^{x_2}(\lambda), \qquad (\text{П27})$$

$$A_{x_1}^{x_2}(\lambda) B_{x_1}^{+x_2}(\mu) = \left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right) B_{x_1}^{+x_2}(\mu) A_{x_1}^{x_2}(\lambda) - \frac{i\varkappa}{\lambda-\mu} B_{x_1}^{+x_2}(\lambda) A_{x_1}^{x_2}(\mu), \qquad (\text{П28})$$

$$B_{x_1}^{x_2}(\lambda) B_{x_1}^{x_2}(\mu) = B_{x_1}^{x_2}(\mu) B_{x_1}^{x_2}(\lambda), \qquad (\text{П29})$$

$$B_{x_1}^{x_2}(\lambda) B_{x_1}^{+x_2}(\mu) = B_{x_1}^{+x_2}(\mu) B_{x_1}^{x_2}(\lambda) + \frac{i}{\lambda-\mu}\left(A_{x_1}^{+x_2}(\mu) A_{x_1}^{x_2}(\lambda) - A_{x_1}^{+x_2}(\lambda) A_{x_1}^{x_2}(\mu)\right), \qquad (\text{П30})$$

Все прочие коммутационные соотношения получаются эрмитовым сопряжением и перестановкой λ и μ.

Здесь и далее все коммутационные соотношения приведены к единому виду: в левой части стоит произведение двух матричных элементов, в правой части – линейная комбинация матричных элементов с коэффициентами, имеющими $(\lambda-\mu)$ в знаменателе.

6. Сводка коммутационных соотношений между матричными элементами квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}_-(x,\lambda)$ для полубесконечного промежутка $(-\infty, x]$.

Матрица $\mathbb{T}_-(x,\lambda)$ имеет вид:

$$\mathbb{T}_-(x,\lambda)=\begin{pmatrix} A_-(x;\lambda), & æB_-^+(x,\lambda) \\ B_-(x,\lambda), & A_-^+(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda=\bar{\lambda}.$$

Аналитические свойства матричных элементов $\mathbb{T}_-(x,\lambda)$ те же, что в п.2.

Исходная формула (2.3.4):

$$R(\lambda-\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\left(1-\frac{iæ}{\lambda-\mu+i0}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)=$$

$$=\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_-(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_-(x,\lambda)\left(1+\frac{iæ}{\lambda-\mu-i0}\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)R(\lambda-\mu).$$

Независимые коммутационные соотношения:

$$A_-(x,\lambda)A_-(x,\mu)=A_-(x,\mu)A_-(x,\lambda), \tag{П31}$$

$$A_-(x,\lambda)A_-^+(x,\mu)=A_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda)+\frac{iæ^2}{\lambda-\mu+i0}B_-^+(x,\mu)B_-(x,\lambda), \tag{П32}$$

$$B_-(x,\mu)A_-(x,\lambda)=\left(1+\frac{iæ}{\lambda-\mu}\right)A_-(x,\lambda)B_-(x,\mu)-\frac{iæ}{\lambda-\mu}A_-(x,\mu)B_-(x,\lambda), \tag{П33}$$

$$A_-(x,\lambda)B_-^+(x,\mu)=\left(1+\frac{iæ}{\lambda-\mu+i0}\right)B_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda). \tag{П34}$$

$$B_-(x,\lambda)B_-(x,\mu)=B_-(x,\mu)B_-(x,\lambda). \tag{П35}$$

$$B_-(x,\lambda)B_-^+(x,\mu)=B_-^+(x,\mu)B_-(x,\lambda)+\frac{i}{\lambda-\mu+i0}A_-^+(x,\mu)A_-(x,\lambda). \tag{П36}$$

7. Сводка коммутационных соотношений между матричными элементами квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}_+(x,\lambda)$ для полубесконечного интервала $[x,+\infty)$.

Матрица $\mathbb{T}_+(x,\lambda)$ имеет вид:

$$\mathbb{T}_+(x,\lambda)=\begin{pmatrix} A_+(x,\lambda), & æB_+^+(x,\lambda) \\ B_+(x,\lambda), & A_+^+(x,\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda=\bar{\lambda}.$$

Аналитические свойства матричных элементов те же, что в п.3.

Исходная формула (2.3.5):

$$R(\lambda-\mu)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)=$$
$$=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}_+(x,\mu)\tilde{\mathbb{T}}_+(x,\lambda)R(\lambda-\mu).$$

Независимые коммутационные соотношения:

$$A_+(x,\lambda)A_+(x,\mu)=A_+(x,\mu)A_+(x,\lambda), \tag{П37}$$

$$A_+(x,\lambda)A_+^+(x,\mu)=A_+^+(x,\mu)A_+(x,\lambda)-\frac{i\varkappa^2}{\lambda-\mu+i0}B_+^+(x,\lambda)B_+(x,\mu), \tag{П38}$$

$$B_+(x,\mu)A_+(x,\lambda)=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\right)A_+(x,\lambda)B_+(x,\mu), \tag{П39}$$

$$A_+(x,\lambda)B_+^+(x,\mu)=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}\right)B_+^+(x,\mu)A_+(x,\lambda)-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu}B_+^+(x,\lambda)A_+(x,\mu), \tag{П40}$$

$$B_+(x,\lambda)B_+(x,\mu)=B_+(x,\mu)B_+(x,\lambda), \tag{П41}$$

$$B_+(x,\lambda)B_+^+(x,\mu)=B_+^+(x,\mu)B_+(x,\lambda)-\frac{i}{\lambda-\mu-i0}A_+^+(x,\lambda)A_+(x,\mu). \tag{П42}$$

8. Сводка коммутационных соотношений между матричными элементами квантовой матрицы перехода $\mathbb{T}(\lambda)$ для бесконечного интервала $(-\infty,\infty)$.

Матрица $\mathbb{T}(\lambda)$ имеет вид:

$$\mathbb{T}(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda), & \varkappa B^+(\lambda) \\ B(\lambda), & A^+(\lambda)\end{pmatrix},\qquad \lambda=\bar{\lambda}.$$

Аналитические свойства матричных элементов те же, что в п.4.

Исходная формула (2.3.6)

$$R(\lambda-\mu)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\tilde{\sigma}_-\tilde{\tilde{\sigma}}_+\right)=$$
$$=\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)\tilde{\tilde{\mathbb{T}}}(\mu)\tilde{\mathbb{T}}(\lambda)\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\tilde{\sigma}_+\tilde{\tilde{\sigma}}_-\right)R(\lambda-\mu).$$

Независимые коммутационные соотношения:

$$A(\lambda)A(\mu)=A(\mu)A(\lambda), \tag{П43}$$

$$A(\lambda)A^+(\mu)=A^+(\mu)A(\lambda), \tag{П44}$$

$$B(\mu)A(\lambda)=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\right)A(\lambda)B(\mu), \tag{П45}$$

$$A(\lambda)B^{+}(\mu)=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\right)B^{+}(\mu)A(\lambda), \tag{П46}$$

$$B(\lambda)B(\mu)=B(\mu)B(\lambda), \tag{П47}$$

$$B(\lambda)B^{+}(\mu)=\left(1+\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu+i0}\right)\left(1-\frac{i\varkappa}{\lambda-\mu-i0}\right)B^{+}(\mu)B(\lambda)+ \tag{П48}$$
$$+2\pi A^{+}(\lambda)A(\lambda)\delta(\lambda-\mu).$$

Литература

I. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П., Теория солитонов: Метод обратной задачи, "Наука", М., 1980.

2. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, p.1095-1097.

3. Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны, Математика (сборник переводов иностр.статей), 1967, т.13, № 5, с.128-150.

4. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега-де Фриса - вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ и прил., 1971, т.5, № 4, с.18-27.

5. Bethe H. Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunctionen der linearen Atomkette, Zeitschrift für Physik, 1931, Bd 71, S.205-226.

6. Onsager L. Crystal statistics I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. Phys.Rev., 1944, v.65,

7. Baxter B.J. Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model. Annals of Physics, 1972, v.70, N 1, p.193-228.

8. Baxter R.J. One-Dimensional Anisotropic Heisenberg Chain. Annals of Physics, 1972, v.70, N 2, p.323-337.

9. Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д., Полное описание решений "sin-Gordon" уравнения, ДАН СССР, 1974, т.219, № 6, с.1334-1337.

10. Захаров В.Е., Михайлов А.В., Релятивистски-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, ЖЭТФ, 1978, т.74, № 6, с.1953-1973.

11. Кулиш П.П., Манаков С.В., Фаддеев Л.Д., Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера, ТМФ, 1976, т.28, № 1, с.38-45.

12. Faddeev L.D., Korepin V.E., Quantum theory of

solitons, Physics Reports, 1978, v.42C, N 1, p.1-87.

13. С к л я н и н Е.К., Ф а д д е е в Л.Д., Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля, ДАН СССР, 1978, т.243, № 6, с.1430-1433.

14. С к л я н и н Е.К., Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера, ДАН СССР, 1978, т.244, № 6, с.1337-1341.

15. С к л я н и н Е.К., Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния, Кандидатская диссертация, ЛОМИ, Л., 1980.

16. Ф а д д е е в Л.Д., Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля, в сб.: "Проблемы квантовой теории поля (Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта 1979), Дубна 1979, с.249-299.

17. С к л я н и н Е.К., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи I, ТМФ, 1979, №2, т.40, с.194-220.

18. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K., Quantum Inverse Scattering Method and the Heisenberg Ferromagnet. Phys.Lett. A, 1979, v.70, n.5-6, p.461-463.

19. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи и XYZ-модель Гейзенберга, УМН, 1979, т.34, №5, 13-63.

20. К у л и ш П.П. Обобщенный анзатц Бете и квантовый метод обратной задачи. Препринт ЛОМИ, Р-3-79, Ленинград 1979.

21. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu. Generalized Heisenberg Ferromagnet and the Groos-Neveu Model. Preprint LOMI, E-4-79, Leningrad 1979.

22. T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D., The Inverse Scattering Transform as an Operator Method in Quantum Field Theory. Phys.Rev., 1979, v. D19, n.12, p.3660-3665.

23. C r e a m e r D.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. Gelfand-Levitan Method for Operator Fields. Preprint Fermilab-Pub-79/75-THY, September 1979.

24. C r e a m e r D.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. Quantum Gelfand-Levitan Method as a Generalized Jordan--Wigner Transformation. Fermilab-Pub-80/17-THY, January 1980.

25. C r e a m e r D.B., T h a c k e r H.B., W i l k i n s o n D. Statistical Mechanics of an Exactly Integrable System. Fermilab-Pub-80/25-THY. February 1980.

26. H o n e r k a m p J., W e b e r P., W i e s l e r A. On the connection between the inverse transform method and the exact quantum eigenstates. Nuclear Physics, 1979, v. B152, n.2, p.266.

27. W i e s l e r A. Rigorous Proof of "Bethe's Hypothesis"

from Inverse Scattering Transformation. Preprint Univ.Freiburg THEP 79/8, October 1979.

28. G r o s s e H. On the construction of Möller operators for the Nonlinear Schrödinger equation. Phys.Lett., 1979, v.86B, n.3-4, p.267-271.

29. S k l y a n i n E.K. On Complete Integrability of the Landau-Lifshitz Equation, LOMI preprint, E-3-79, Leningrad 1979.

30. З а х а р о в В.Е., М а н а к о в С.В., О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера, ТМФ, 1974, т.19, №3, с.332-343.

31. З а х а р о в В.Е., Ш а б а т А.Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ,1971, т.61, № 1, с.118-134.

32. Т а х т а д ж я н Л.А., Гамильтоновы системы, связанные с уравнением Дирака, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1973, т.37, с.66-76.

33. Б е р е з и н Ф.А., П о х и л Г.П., Ф и н к е л ь б е р г В.М. Уравнение Шредингера для систем одномерных частиц с точечным взаимодействием, Вестник МГУ, сер.Математика, Механика, 1964, № 1, с.21-28.

34. M c G u i r e J.B., Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problem, J.Math.Phys., 1964, v.5, n.5, p.622.

35. Г е л ь ф а н д И.М., Д и к и й Л.А. Резольвента и гамильтоновы системы. Функц.анализ, 1977, т.11, № 2, с.11-27.

36. Б е р е з и н Ф.А. Метод вторичного квантования. М., "Наука", 1965.

37. Ш в а р ц А.С. Математические основы квантовой теории поля. М., "Атомиздат", 1975.

38. Ц в е т к о в А.А. Об интегралах движения системы бозонов с точечным взаимодействием. Вестник МГУ, сер.Математика, Механика, 1977, № 4, с.61-69.

39. Б е р е з и н Ф.А. Квантование. Изв.АН СССР, сер.матем., 1974, т.38, № 5, с.1116-1175.

40. Б е р е з и н Ф.А. Виковские и антивиковские символы операторов. Матем.сборник, 1971, т.86 (128), № 4 (12), с.578-610.

41. Т ю п к и н Ю.С., Ф а т е е в В.А., Ш в а р ц А.С. О связи частицеподобных решений классических уравнений с квантовыми частицами. Ядерная физика, 1975, т.22, № 3, с.622-631.

П.П.Кулиш, Е.К.Склянин

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

0. Уравнением Янга-Бакстера [I, 2] называется следующее функциональное уравнение

$$
\begin{aligned}
&{}_{\alpha\alpha'}R_{\gamma\gamma'}(u-v)\,{}_{\gamma\alpha''}R_{\beta\gamma''}(u)\,{}_{\gamma'\gamma''}R_{\beta'\beta''}(v) = \\
&= {}_{\alpha'\alpha''}R_{\gamma'\gamma''}(v)\,{}_{\alpha\gamma''}R_{\gamma\beta''}(u)\,{}_{\gamma\gamma'}R_{\beta\beta'}(u-v)
\end{aligned}
\tag{I}
$$

для набора функций ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u)$ комплексного параметра u, зависящих от 4-х индексов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, пробегающих значения от I до некоторого натурального числа N. По повторяющимся индексам в (I) и далее подразумевается суммирование.

Уравнение (I), впервые появившееся в работах [I, 2], имеет многочисленные применения в теории вполне интегрируемых квантовых и классических систем и точно решаемых моделей статистической физики. В последние годы оно подвергается усиленному изучению. При этом все более явственно вырисовываются глубокие связи уравнения (I) с такими разделами математики, как теория групп и алгебраическая геометрия.

Настоящая статья представляет собой (по-видимому, первую) попытку дать систематический обзор накопившихся к моменту ее написания фактов, относящихся к решениям уравнения (I). Изложение строится следующим образом. В п.I мы приводим основные определения и формулируем задачу классификации решений уравнения (I). В п.2 перечислены различные приложения уравнения (I) к теории вполне интегрируемых систем. В п.3 обсуждаются известные способы решения уравнения (I) и формулируются некоторые утверждения о свойствах его решений. В п.4 рассматриваются обобщения уравнения Янга-Бакстера, и, наконец, в Приложении дана сводка известных решений уравнения (I).

Авторы надеются, что настоящая статья будет полезна специалистам по теории вполне интегрируемых систем и методу обратной задачи рассеяния, а также поможет привлечь внимание математиков-специалистов по теории групп и алгебраической геометрии к новому многообещающему объекту изучения - уравнению Янга-Бакстера.

Авторы благодарны Л.Д.Фаддееву, инициатору исследований по квантовому методу обратной задачи, В.Е.Корепину, А.Г.Рейману, М.А.Семенову-Тян-Шанскому, Л.А.Тахтаджяну, Н.Ю.Решетихину и С.А.

Цыпляеву за многочисленные полезные обсуждения. Мы признательны А.А.Белавину, А.Б.Замолодчикову и В.А.Фатееву, предоставивших нам ряд решений уравнения Янга-Бакстера.

I. Поскольку систематическое исследование уравнения Янга-Бакстера (Я-Б) только начинается, сколько-нибудь общепринятой терминологии в этой области пока нет. В этом пункте мы делаем попытку предложить систему терминов и определений для теории решений уравнения Я-Б. Насколько удачной окажется эта попытка, покажет практика.

Прежде всего, обсудим ряд эквивалентных записей уравнения Янга-Бакстера (I). Для этого заметим, что 4-х индексной величине ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u)$ можно сопоставить линейный оператор $\mathbb{R}(u)$ в тензорном произведении двух N-мерных комплексных пространств $V\otimes V$ $(V=C^N)$. Действие этого оператора на базисный вектор $e_\gamma \otimes e_\delta$ задается следующей формулой:

$$\mathbb{R}(e_\gamma \otimes e_\delta) = (e_\alpha \otimes e_\beta)\,{}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} \ . \tag{2}$$

Тензору ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}$ можно также сопоставить три оператора $\mathbb{R}_{12}$, $\mathbb{R}_{13}$, $\mathbb{R}_{23}$ в тензорном произведении $V\otimes V\otimes V$, соответствующие трем способам вложения пространства $V\otimes V$ в $V\otimes V\otimes V$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}_{12}(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\alpha \otimes e_{\alpha'} \otimes e_{\gamma''})\,{}_{\alpha\alpha'}R_{\gamma\gamma'},\\
&\mathbb{R}_{13}(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\alpha \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\alpha''})\,{}_{\alpha\alpha''}R_{\gamma\gamma''},\\
&\mathbb{R}_{23}(e_\gamma \otimes e_{\gamma'} \otimes e_{\gamma''}) = (e_\gamma \otimes e_{\alpha'} \otimes e_{\alpha''})\,{}_{\alpha'\alpha''}R_{\gamma'\gamma''}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Введенные нами обозначения (3) позволяют записать уравнение Янга-Бакстера (I), как операторное равенство:

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)\,\mathbb{R}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v)\,\mathbb{R}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{12}(u-v) \ . \tag{4}$$

Во избежание недоразумений, необходимо отметить, что существует и другая система обозначений, принятая, например, в работах [3-5]. В этих работах вместо оператора $\mathbb{R}$, введенного выше, используется оператор $\check{\mathbb{R}}$, отличающийся от $\mathbb{R}$ умножением на оператор перестановки $\mathbb{P}$:

$$\check{\mathbb{R}} = \mathbb{P}\mathbb{R} \ , \tag{5}$$

где

$$_{\alpha\beta}P_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma} \ . \tag{6}$$

При этом уравнение Янга-Бакстера приобретает вид:

$$(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(u-v))(\check{\mathbb{R}}(u)\otimes \mathbb{I})(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(v)) = \\ = (\check{\mathbb{R}}(v)\otimes \mathbb{I})(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(u))(\check{\mathbb{R}}(u-v)\otimes \mathbb{I}) \ . \tag{7}$$

Эта запись уравнения Я-Б интересна тем, что она сохраняет свой вид и в градуированном случае (см.п.4).

Введем теперь ряд понятий, которые нам понадобятся в дальнейшем. Решение $\mathbb{R}(u)$ уравнения Янга-Бакстера (4) мы будем называть пучком Янга-Бакстера. Натуральное число N (размерность пространства V) будем называть размерностью пучка. Переменную u , фигурирующую в уравнении Янга-Бакстера (4) будем называть спектральным параметром, в отличие от других параметров $\xi, \eta, \zeta \dots$, от которых возможно зависит пучок $\mathbb{R}(u,\xi,\eta,\dots)$ и которые мы будем называть константами связи. Пучок Янга-Бакстера $\mathbb{R}(u)$ назовем регулярным, если при $u=0$ оператор $\mathbb{R}(u)$ равен оператору перестановки $\mathbb{P}$ (6), который, очевидно, удовлетворяет уравнению (4):

$$\mathbb{P}_{12}\,\mathbb{P}_{13}\,\mathbb{P}_{23} = \mathbb{P}_{23}\,\mathbb{P}_{13}\,\mathbb{P}_{12} \ . \tag{8}$$

Часто бывает полезно рассматривать не отдельный пучок $\mathbb{R}(u)$, а семейство пучков Янга-Бакстера $\mathbb{R}(u,\eta)$, зависящее от константы связи η . Семейство $\mathbb{R}(u,\eta)$ назовем квазиклассическим, если при некотором значении параметра $\eta=\eta_0$ (обычно выбирается нормировка $\eta_0=0$, что мы в дальнейшем и будем делать) тождественно по u выполняется равенство:

$$\mathbb{R}(u,\eta)\Big|_{\eta=\eta_0} = \mathbb{I} \ , \tag{9}$$

где $\mathbb{I}$ - единичный оператор в пространстве $V\otimes V$:

$$_{\alpha\beta}\mathbb{I}_{\gamma\delta} = \delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta} \ . \tag{10}$$

Если, кроме того, при каждом η пучок $\mathbb{R}(u,\eta)$ регулярен в смысле данного выше определения, такое семейство пучков будем называть каноническим.

Уравнение (4) допускает ряд очевидных преобразований, оставляющих его инвариантным:

1) Умножение решения $\mathbb{R}(u)$ на произвольную скалярную функцию $f(u)$ снова дает решение уравнения (4):

$$\mathbb{R}'(u) = f(u)\,\mathbb{R}(u) \ . \tag{11}$$

Пучки $\mathbb{R}(u)$ и $\mathbb{R}'(u)$, связанные соотношением (II), будем называть <u>гомотетичными</u>.

2) Преобразование подобия. Пусть T - невырожденный оператор в пространстве V. Тогда, как нетрудно проверить, пучок

$$\mathbb{R}'(u) = (T \otimes T)\, \mathbb{R}(u)\, (T \otimes T)^{-1} \tag{I2}$$

удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (4). Пучки $\mathbb{R}(u)$ и $\mathbb{R}'(u)$, связанные соотношением (I2), будем называть <u>подобными</u>. Отметим, что преобразование подобия сохраняет свойства регулярности, квазиклассичности и каноничности пучка или семейства пучков Я-Б. Два пучка, связанные преобразованиями подобия и гомотетии, мы будем называть <u>эквивалентными</u>.

Если в пространстве V действует представление $T(g)$ какой-то группы G, то мы будем называть пучок $\mathbb{R}(u)$ <u>инвариантным относительно представления</u> $T(g)$, если для всякого $g \in G$ выполняется равенство

$$\mathbb{R}(u)(T(g) \otimes T(g)) = (T(g) \otimes T(g))\, \mathbb{R}(u) . \tag{I3}$$

Пусть $\mathbb{R}^{(1)}(u)$ и $\mathbb{R}^{(2)}(u)$ - два решения уравнения (4) размерностей N_1 и N_2 соответственно. Назовем <u>тензорным произведением</u> пучков $\mathbb{R}^{(1)}(u)$ и $\mathbb{R}^{(2)}(u)$ пучок $(\mathbb{R}^{(1)} \otimes \mathbb{R}^{(2)})(u)$ размерности $N_1 \times N_2$ задаваемый формулой

$$(\mathbb{R}^{(1)} \otimes \mathbb{R}^{(2)})(u) = \mathbb{R}^{(1)}(u) \otimes \mathbb{R}^{(2)}(u) . \tag{I4}$$

<u>Прямой суммой</u> пучков $\mathbb{R}^{(1)}(u)$ и $\mathbb{R}^{(2)}(u)$ будем называть пучок $(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)$ размерности $N_1 + N_2$, определяемый следующим образом. Оператор $(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)$ действует на базисные векторы вида $e^{(i)}_{\alpha_i} \otimes e^{(k)}_{\alpha_k}$ ($i,k = 1,2$; $\alpha_i = 1,2,\dots,N_i$; $e^{(i)}_{\alpha_i} \in V_i$) пространства $(V_1 + V_2) \otimes (V_1 + V_2)$ по формулам:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)(e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(1)}_{\beta_1}) &= \mathbb{R}^{(1)}(u)(e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(1)}_{\beta_1}) , \\
(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)(e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\beta_2}) &= e^{(1)}_{\alpha_1} \otimes e^{(2)}_{\beta_2} , \\
(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)(e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes e^{(1)}_{\beta_1}) &= e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes e^{(1)}_{\beta_1} , \\
(\mathbb{R}^{(1)} + \mathbb{R}^{(2)})(u)(e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes e^{(2)}_{\beta_2}) &= \mathbb{R}^{(2)}(u)(e^{(2)}_{\alpha_2} \otimes e^{(2)}_{\beta_2}) .
\end{aligned} \tag{I5}$$

Непосредственная проверка показывает, что $(\mathbb{R}^{(1)}\otimes\mathbb{R}^{(2)})(u)$ и $(\mathbb{R}^{(1)}+\mathbb{R}^{(2)})(u)$ действительно удовлетворяют уравнению (4). Очевидно также, что операция тензорного умножения пучков Я-Б сохраняет свойства регулярности семейств пучков. Операция же сложения, напротив, сохраняет <u>только</u> свойство квазиклассичности пучков. Более того, из формул (I5) следует, что прямая сумма двух пучков <u>никогда</u> не является регулярным пучком.

Если пространство V допускает такое разложение в прямую сумму двух подпространств V_1 и V_2, что действие оператора $\mathbb{R}(u)$ на базисные векторы вида $e^{(i)}_{\alpha_i}\otimes e^{(k)}_{\beta_k}$ (обозначения те же, что в формуле (I5)) обладает следующим свойством

$$\mathbb{R}(u)(e^{(i)}_{\alpha_i}\otimes e^{(k)}_{\alpha_k})\in V_i\otimes V_k\ ,\quad i,k=1,2\ ; \tag{I6}$$

тогда пучок $\mathbb{R}(u)$ называется <u>приводимым</u>. В частности, приводимым пучком всегда является прямая сумма двух пучков. Если такого разложения не существует, мы будем называть такой пучок <u>неприводимым</u>. Легко доказать, что для приводимого пучка $\mathbb{R}(u)$ операторы $\mathbb{R}^{(1)}(u)$ и $\mathbb{R}^{(2)}(u)$, действующие в пространствах $V_1\otimes V_1$ и $V_2\otimes V_2$ соответственно по формулам

$$\mathbb{R}^{(i)}(u)(e^{(i)}_{\alpha_i}\otimes e^{(i)}_{\beta_i})=\mathbb{R}(u)(e^{(i)}_{\alpha_i}\otimes e^{(i)}_{\beta_i}),\quad i=1,2 \tag{I7}$$

также будут пучками Янга-Бакстера. Очевидно также, что приводимый пучок не может быть регулярным.

Как мы увидим в дальнейшем, пучки Я-Б играют большую роль в теории квантовых вполне интегрируемых систем. Аналогичную роль в теории классических вполне интегрируемых систем играют <u>классические пучки Янга-Бакстера</u>, определение которых мы сейчас приведем. Пусть $\mathbb{R}(u,\eta)$ – квазиклассическое семейство пучков Янга-Бакстера, гладким образом зависящее от параметра η. Тогда, продифференцировав уравнение (4) по η и положив $\eta=0$, мы получим, приняв во внимание условие (9), для величины

$$r(u)=\frac{\partial}{\partial\eta}\,\mathbb{R}(u,\eta)\Big|_{\eta=0} \tag{I8}$$

следующее уравнение

$$\begin{aligned} &r_{12}(u-v)\,r_{13}(u)+r_{12}(u-v)\,r_{23}(v)+r_{13}(u)\,r_{23}(v)= \\ &=r_{23}(v)\,r_{13}(u)+r_{23}(v)\,r_{12}(u-v)+r_{13}(u)\,r_{12}(u-v)\,, \end{aligned} \tag{I9}$$

которое можно переписать в следующем коммутаторном виде:

$$[r_{12}(u-v), r_{13}(u)+r_{23}(v)]+[r_{13}(u), r_{23}(v)] \doteq 0 \quad . \tag{20}$$

Классическим пучком Янга-Бакстера будем называть всякое решение функционального уравнения (20). Вышеприведенная выкладка показывает, что по известному квазиклассическому семейству пучков Я-Б всегда можно построить классический пучок Янга-Бакстера. Справедливо ли обратное, т.е. можно ли по всякому классическому пучку Я-Б восстановить соответствующее квазиклассическое семейство пучков Я-Б, пока неизвестно. Пользуясь соотношением (18), можно перенести почти все введенные нами для пучков Я-Б понятия на случай классических пучков Я-Б. В частности, вместо инвариантности относительно преобразования гомотетии (11) классические пучки Я-Б инвариантны относительно преобразования сдвига

$$r'(u) = r(u)+f(u)\,\mathbb{I} \quad . \tag{21}$$

Определение преобразования подобия (12) и групповой инвариатности (13) переносятся на классические пучки Я-Б без изменений. Два классических пучка Я-Б мы будем называть эквивалентными, если один из них может быть переведен в другой преобразованием подобия и сдвига.

Классический пучок Я-Б $r(u)$ мы будем называть каноническим, если для него справедливо следующее равенство:

$$r(u) = -\mathbb{P}r(-u)\,\mathbb{P} \quad . \tag{22}$$

Связь между понятиями каноничности классических и квантовых пучков Я-Б устанавливает следующая

ТЕОРЕМА. Всякое каноническое семейство пучков Я-Б $\mathbb{R}(u,\eta)$ порождает по формуле (18) классический пучок Я-Б $r(u)$, эквивалентный каноническому.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем уравнение (4) по η и положим $u=0$, $\eta=0$. Умножая полученный результат

$$r_{12}(-v)\,\mathbb{P}_{13}+\mathbb{P}_{13}\,r_{23}(v) = \mathbb{P}_{13}\,r_{12}(-v)+r_{23}(v)\,\mathbb{P}_{13} \tag{23}$$

справа на $\mathbb{P}_{13}$ и воспользовавшись очевидными равенствами

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{13}\,r_{23}(v)\,\mathbb{P}_{13} &= r_{21}(v) = \mathbb{P}_{12}\,r_{12}(v)\,\mathbb{P}_{12} \quad , \\ \mathbb{P}_{13}\,r_{12}(-v)\,\mathbb{P}_{13} &= r_{32}(-v) = \mathbb{P}_{23}\,r_{23}(-v)\,\mathbb{P}_{23} \; , \end{aligned} \tag{24}$$

мы придем к равенству

$$r_{12}(-v)+r_{21}(v) = r_{32}(-v)+r_{23}(v). \tag{25}$$

В силу очевидной симметрии уравнения Я-Б относительно перестановки пространств V_1, V_2, V_3, справедливо также равенство

$$r_{12}(-v)+r_{21}(v) = r_{13}(-v)+r_{31}(v). \tag{26}$$

Сопоставляя (25) и (26), приходим к выводу, что оператор $r_{12}(-v)+$ $+r_{21}(v)$ тривиально действует во всех трех пространствах V_1, V_2 и V_3, т.е.

$$r_{12}(-v)+r_{12}(v) = \varphi(v)I_1\otimes I_2\otimes I_3,$$

где скалярная функция $\varphi(v)$ должна быть четной $\varphi(v)=\varphi(-v)$. Переопределив $r(v)\to r(v)+\frac{1}{2}\varphi(v)$, получим равенство

$$r_{12}(-v)=-r_{21}(v),$$

эквивалентное равенству (22), ч. и т.д.

Тензорное произведение $(r^{(1)}\otimes r^{(2)})(u)$ классических пучков Я-Б $r^{(1)}(u)$ и $r^{(2)}(u)$ задается формулой:

$$(r^{(1)}\otimes r^{(2)})(u) = r^{(1)}(u)\otimes I^{(2)}+I^{(1)}\otimes r^{(2)}(u); \tag{27}$$

а прямая суммы $(r^{(1)}+r^{(2)})(u)$ - формулой

$$(r^{(1)}+r^{(2)})(u) = r^{(1)}(u)+r^{(2)}(u). \tag{28}$$

Определения приводимого и неприводимого пучка переносятся на случай классических пучков Я-Б без изменений.

Сформулируем в заключение этого параграфа ряд нерешенных задач, стоящих перед теорией квантовых и классических пучков Янга-Бакстера:

I) Перечислить все решения уравнения Янга-Бакстера (4) данной размерности N с точностью до эквивалентности. Аналогичная задача представляет интерес для регулярных, квазиклассических и канонических пучков и семейств пучков Я-Б, а также для пучков Я-Б, обладающих групповой инвариантностью. Интересна также задача перечисления всех постоянных, т.е. не зависящих от спектрального параметра u решений уравнения Я-Б:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \tag{29}$$

Легко видеть, что уравнению (29) удовлетворяет, в частности, оператор перестановки P (6, 8) и единичный оператор I (I0). Полагая в уравнении (4) $u=v=0$, мы получаем, что для любого пучка Я-Б $\mathbb{R}(u)$, его значение при $u=0$ также удовлетворяет уравнению (29).

2) Те же задачи естественно формулируются и для классических пучков Янга-Бакстера. Кроме постоянных решений здесь представляют интерес также решения классического уравнения Янга-Бакстера (20) вида

$$r(u) = \frac{r}{u} \quad , \tag{30}$$

где оператор r должен в силу (20) удовлетворять уравнениям

$$[r_{12}, r_{13}+r_{23}] = 0, \quad [r_{12}+r_{13}, r_{23}] = 0 . \tag{31}$$

(Для канонических пучков $r = \mathbb{P} r \mathbb{P}$, и уравнения в (31) эквивалентны).

Легко построить широкий класс решений системы уравнений (31). Действительно, пусть $\mathcal{G}$ - произвольная полупростая алгебра Ли, J_α $(\alpha=1,2,\ldots,N)$ - базис ее генераторов в произвольном представлении, $k^{\alpha\beta}$ - матрица, обратная к матрице формы Киллинга алгебры Ли $\mathcal{G}$ в базисе генераторов J_α. Тогда, как нетрудно проверить, оператор r, задаваемый формулой

$$r = k^{\alpha\beta} J_\alpha \otimes J_\beta \quad , \tag{32}$$

удовлетворяет уравнениям (31). Это решение было получено также в работе [6], где содержится утверждение о том, что формула (32) дает полное описание решений уравнения (31).

3) Всякому ли классическому пучку Я-Б $r(u)$ можно сопоставить квазиклассическое семейство пучков Я-Б $\mathbb{R}(u,\eta)$ так, чтобы выполнялось равенство (18)?

2. Обсудим теперь приложения уравнения Янга-Бакстера к теории квантовых и классических вполне интегрируемых систем.

1) Покажем прежде всего, что всякому регулярному пучку Янга-Бакстера может быть сопоставлена квантовая вполне интегрируемая система с локальными взаимно коммутирующими интегралами движения. Действительно, пусть $\mathbb{R}(u)$ - регулярный пучок Я-Б размерности N. Возьмем в качестве пространства состояний $\mathcal{H}$ искомой квантовой системы пространство $\mathcal{H} = V_1 \otimes V_2 \ldots \otimes V_M$ ($V_k \equiv C^N$; $k=1,2,\ldots,M$), где M - произвольное натуральное число $\geqslant 2$, и зададим в этом пространстве гамильтониан $\mathbb{H}$ формулой:

$$\mathbb{H} = \sum_{k=1}^{M-1} \mathbb{H}_{k+1,k} + \mathbb{H}_{1,M} \quad , \tag{33}$$

где локальная плотность гамильтониана $\mathbb{H}_{k+1,k}$ дается выражением

$$\mathbb{H}_{n+1,n} = \left(\frac{d}{du} \mathbb{R}_{n+1,n}(u) \Big|_{u=0} \right) \mathbb{P}_{n+1,n} \, . \tag{34}$$

Поясним обозначения. Оператор $\mathbb{R}_{n+1,n}(u)$ действует в пространстве $V_{n+1} \otimes V_n$, как соответствующий пучок Янга-Бакстера $\mathbb{R}(u)$, а на остальные компоненты тензорного произведения $V_1 \otimes \ldots \otimes V_M$ он действует как единичный оператор. То же относится к оператору перестановки $\mathbb{P}_{n+1,n}$. Построенную нами квантовую систему удобно представлять себе, как кольцо из M "атомов", каждый из которых имеет N квантовых состояний, причем взаимодействуют только ближайшие соседи. Заметим, что хотя гамильтониан $\mathbb{H}$, определенный выше, вообще говоря, не обязан быть самосопряженным оператором (что, впрочем, никак не отразится на последующих выкладках), на практике, в большинстве случаев его можно сделать самосопряженным, умножив на подходящую константу.

Последовательность коммутирующих с $\mathbb{H}$ операторов строится следующим образом. Расширим наше пространство $\mathcal{H}$ до пространства $\mathcal{H} = Q \otimes Q' \otimes \mathcal{H}$, введя два вспомогательных пространства Q и Q' изоморфных C^N. Определим <u>оператор перехода</u> $\mathbb{T}_1^M(u)$ формулой

$$\mathbb{T}_1^M(u) = \mathbb{L}_M(u) \mathbb{L}_{M-1}(u) \ldots \mathbb{L}_1(u) \, , \tag{35}$$

где $\mathbb{L}_n(u) = \mathbb{R}_{qn}(u)$ (обозначения те же, что и выше, индекс n относится к пространству V_n, индекс q – к пространству Q). Аналогично, с заменой Q на Q' определяются операторы $\mathbb{L}'_n(u)$ и $\mathbb{T}_1'^M(u)$.

Пользуясь введенными обозначениями, можно переписать уравнение (4) в виде

$$\mathbb{R}_{qq'}(u-v) \mathbb{L}_n(u) \mathbb{L}'_n(v) = \mathbb{L}'_n(v) \mathbb{L}_n(u) \mathbb{R}_{qq'}(u-v) \, . \tag{36}$$

Исходя из уравнения (36), можно доказать [2-4] следующее замечательное равенство:

$$\mathbb{R}_{qq'}(u-v) \mathbb{T}_1^M(u) \mathbb{T}_1'^M(v) = \mathbb{T}_1'^M(v) \mathbb{T}_1^M(u) \mathbb{R}_{qq'}(u-v) \, . \tag{37}$$

Производящая функция $t(u)$ интегралов движения рассматриваемой квантовой системы определяется, как след оператора перехода $\mathbb{T}_1^M(u)$, взятый по вспомогательному пространству Q

$$t(u) = tr_q \mathbb{T}_1^M(u) \, . \tag{38}$$

Из равенства (37) следует [2 - 4] , что $t(u)$ представляет собой семейство коммутирующих друг с другом операторов в $\mathcal{H}$:

$$[t(u), t(v)] = 0 . \tag{39}$$

Как показано в работе [7] , $\ln(t^{-1}(0)t(u))$ является производящим функционалом локальных интегралов движения $\mathcal{J}_n$ для гамильтониана $\mathbb{H}$:

$$\mathcal{J}_n = \frac{d^n}{du^n} \ln(t^{-1}(0)t(u))\Big|_{u=0} \tag{40}$$

(локальность означает, что оператор $\mathcal{J}_n$ представим в виде суммы операторов, каждый из которых нетривиально действует не более, чем на $n+1$ соседний узел решетки). В частности, при $n=1$ формула (40) дает гамильтониан $\mathbb{H} = \mathcal{J}_1$.

Вопрос о полноте системы интегралов движения $\mathcal{J}_n$ в пространстве $\mathcal{H}$ изучен пока слабо (полнота строго доказана только для одной простейшей модели - ферромагнетика Гейзенберга [8]). Гипотеза о полноте интегралов движения (40) для известных пучков Я-Б размерности $N=2$ представляется весьма правдоподобной. С другой стороны, для размерности $N>2$, полнота системы $\mathcal{J}_n$ заведомо не имеет места, как показывает сравнение с соответствующими классическими вполне интегрируемыми уравнениями [9, 10] . Задача о построении недостающих интегралов движения в этом случае пока не решена.

Не исключено, что существуют способы строить по данному пучку Я-Б и другие вполне интегрируемые квантовые модели. Например, в недавно появившейся статье [11] построена релятивистски инвариантная модель квантовой теории поля, тесно связанная с XYZ - пучком Я-Б (II8). Вероятно, этот результат можно обобщить на случай произвольного пучка Я-Б.

2) Приведенная выше конструкция интегралов движения для квантовой модели на решетке основывалась на равенстве (37). Это равество играет важнейшую роль в квантовом методе обратной задачи [3, 4] . Помимо построения коммутирующих интегралов движения, оно позволяет во многих случаях найти собственные функции гамильтониана $\mathbb{H}$ и его спектр [3, 4] .

Если пучок Янга-Бакстера $\mathbb{R}$, по которому описанным выше способом строится квантовая вполне интегрируемая модель на решетке, зависит также от дополнительных параметров $\eta, \xi, \ldots$, то часто оказывается возможным совершить такой предельный переход, в результате которого получается уже непрерывная вполне интегрируемая модель квантовой теории поля на прямой. Например, из модели XXZ

таким образом получается нелинейное уравнение Шредингера [12], из XYZ-модели - модель Тирринга [7] и квантовое уравнение синус-Гордон.

Упомянутый предельный переход выполняется обычно следующим образом. В зависимости от характера модели выбираются "критические" точки спектрального параметра и констант связи и совершается скейлинговый предельный переход по размеру решетки $a \to 0$, так что $an = x$ остается фиксированным (n - номер узла решетки). При выборе "критических" значений и параметра скейлинга учитываются естественные требования разложимости $\mathbb{L}_n(u)$ из соотношения (36) в ряд по параметру скейлинга и простоты (диагональности или кратности I) старшего члена

$$\mathbb{L}_n(u,\eta,\dots) \sim \mathbb{L}^{(0)}(\alpha,\gamma,\dots) + a\,\mathbb{L}^{(1)}(\alpha,\gamma,\dots) + O(a^2)\,. \tag{41}$$

Важно подчеркнуть, что величины $\mathbb{R}_{qq'}(\alpha,\gamma,\dots)$ и $\mathbb{L}(x,a) \equiv \mathbb{L}^{(0)} + a\mathbb{L}^{(1)}$ в уравнении (36) получают теперь (после предельного перехода) совершенно различную интерпретацию в отличие от решеточного случая, где $\mathbb{R}_{qq'}(u)$ и $\mathbb{L}_n(u)$ представляют собой один и тот же пучок Янга-Бакстера размерности N. В то время как $\mathbb{R}_{qq'}(\alpha,\gamma,\dots)$ остается числовой матрицей $N^2 \times N^2$, оператор $\mathbb{L}(x,a,\dots)$ интерпретируется как матрица $N \times N$, элементы которой суть операторно-значные функции на прямой, например $\psi(x), \psi^+(x)$ для нелинейного уравнения Шредингера [12, 13] и $\pi(x)$, $exp(\pm i\varphi(x))$ для квантового уравнения синус-Гордон [14].

Выберем следующую параметризацию пучка Я-Б (П8), связанного с XYZ - моделью, [2]

$$\mathbb{R}(u,\eta,k) = \sum_{j=1}^{4} w_j(u,\eta,k)\,\sigma_j \otimes \sigma_j'\,,$$

где $\sigma_j, \sigma_j', j=1,2,3$ - матрицы Паули, действующие в $V = V' = C^2$, а σ_4, σ_4' - единичные матрицы в этих пространствах,

$$w_1 = \frac{sn\,\eta}{sn\,u}\,, \quad w_2 = \frac{sn\,\eta\, dn\,u}{sn\,u\, dn\,\eta}\,, \quad w_3 = \frac{sn\,\eta\, cn\,u}{sn\,u\, cn\,\eta}\,, \quad w_4 = 1\,.$$

Коэффициенты w_j выражены через эллиптические функции модуля k. Совершая подстановку (K, K' - полные эллиптические интегралы первого рода модуля k и $k' = \sqrt{1-k^2}$)

$$u = i\alpha - iK'\,, \quad \eta = \gamma + \frac{\pi}{2} - K$$

и устремляя $k \to 0$ ($k \sim a$) получаем $\mathbb{L}$ - оператор квантового уравнения синус-Гордон [14]

$$\mathbb{L}(x,\alpha,\gamma,\ldots)\sim\begin{pmatrix} e^{i\gamma p} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma p}\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha}u^{-}-e^{\alpha}u^{+} \\ e^{\alpha}u^{-}-e^{-\alpha}u^{+} & 0\end{pmatrix},$$

$$p=\int\limits_{x}^{x+a}\pi(y)\,dy\,,\qquad u^{\pm}=\exp\Big(\pm i\frac{1}{a}\int\limits_{x}^{x+a}\varphi(y)\,dy\Big)\,.$$

Линейная задача для квантового нелинейного уравнения Шредингера [13] получается следующим образом. Вначале произведем вырождение пучка Я-Б (П8) в пучок XXZ – модели на решетке (П9) (модуль эллиптических функций $k=0$). Затем перейдем к скейлингову пределу в (П9) [12]

$$\eta=i\sqrt{2\gamma a}\,,\qquad u=\frac{\pi}{2}+i\Big(\alpha-\frac{\gamma}{2}\Big)\sqrt{\frac{a}{2\gamma}}\,,$$

где γ – константа связи нелинейного уравнения Шредингера, α – спектральный параметр линейной задачи. В результате получаем $(\sigma_n^{\pm}/2\sqrt{a}\longrightarrow\psi^{\pm}(x))$

$$\mathbb{L}_n(u,\eta)\sim\begin{pmatrix} 1+i\frac{\alpha}{2}a\,; & i\sqrt{2\gamma}\int\limits_{x}^{x+a}\psi^{-}(y)\,dy \\ i\sqrt{2\gamma}\int\limits_{x}^{x+a}\psi^{+}(y)\,dy, & 1-i\frac{\alpha}{2}a\end{pmatrix}.$$

Уравнение (36), в котором $\mathbb{R}_{qq'}(u)$ заменена предельной матрицей, а $\mathbb{L}_n$ заменена приближенным оператором перехода на интервале $(x,x+a)$, выполняется лишь с точностью до a. Соотношение же (37) остается справедливым и после предельного перехода, что позволяет применять для моделей на прямой квантовый метод обратной задачи. Соответствующую матрицу $\mathbb{R}$, осуществляющую подобие тензорных произведений матриц перехода квантовых линейных задач $\mathbb{T}(\lambda)\otimes\mathbb{T}(\mu)$ и $\mathbb{T}(\mu)\otimes\mathbb{T}(\lambda)$ будем называть <u>квантовой R - матрицей.</u>

3) Большинство результатов первых двух разделов этого пункта, относящихся к квантовым вполне интегрируемым системам, могут быть перенесены и на классический случай. Роль квантовых пучков Янга-Бакстера будут играть при этом классические пучки. Например, аналогично тому, как по квантовому пучку Янга-Бакстера строилась квантовая вполне интегрируемая система, всякому классическому пучку Янга-Бакстера может быть каноническим образом сопоставлена классическая вполне интегрируемая система типа ферромагнетика

Гейзенберга [I5] . Не описывая подробно эту конструкцию, отметим только, что квантовым уравнениям (36) и (37) соответствуют при этом классические уравнения.

$$\{ L'(x,u), L''(y,v)\} = -i\left[r(u-v), L'(x,u)+L''(y,v)\right] , \tag{42}$$

$$\{ T'^{x}_{y}(u), T''^{x}_{y}(v) \} = -i\left[r(u-v), T'^{x}_{y}(u)+T''^{x}_{y}(v)\right] . \tag{43}$$

Уравнение (42) воспроизводит уравнение (20) с тем отличием, что в разложении $r_{13}(u)$ и $r_{23}(v)$ по генераторам некоторой алгебры Ли $\mathcal{J}^{(i)}_{\alpha}$, $i=1,2,3$ генераторы $\mathcal{J}^{(3)}_{\alpha}$ заменены функциями $S_{\alpha}(x)$, скобки Пуассона для которых воспроизводят коммутационные соотношения для генераторов $\mathcal{J}_{\alpha}$ и коммутатор $[r_{13}(u), r_{23}(v)]$ заменен на скобку Пуассона $L'(x,u)$ и $L''(y,v)$. Таким образом $L(x,u)$ - матрица $N \times N$, матричные элементы которой являются функциями на фазовом пространстве динамической системы со скобкой Пуассона

$$\{ S_{\alpha}(x), S_{\beta}(y)\} = -c^{\gamma}_{\alpha\beta} S_{\gamma}(x)\delta(x-y), \ \left([\mathcal{J}_{\alpha},\mathcal{J}_{\beta}]=ic^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathcal{J}_{\gamma}\right) .$$

Классическая матрица перехода определяется как фундаментальное решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} T^{x}_{y}(u) = L(x,u) T^{x}_{y}(u), \qquad T^{x}_{x}(u) = I \ , \tag{44}$$

а матрицы $L'(x,u)$ и $L''(y,v)$ задаются формулами

$$L'(x,u) = L(x,u)\otimes I, \quad L''(y,v) = I\otimes L(y,v) \ . \tag{45}$$

Чтобы получить формулу (43) из формулы (37), необходимо разложить (37) по степеням квазиклассического параметра η при $\eta \to 0$ и воспользоваться соотношением $[\cdot,\cdot]\to -i\hbar\{\cdot,\cdot\}$ между квантовым коммутатором и классической скобкой Пуассона, удерживая в (37) члены порядка η . Параметр η играет при этом роль постоянной Планка $\hbar$ [I5] .

Как и в квантовом случае, соотношение (43) позволяет вычислить скобки Пуассона между матричными элементами матрицы перехода и построить коммутирующие интегралы движения и переменные действие-угол [I5] . Матрицу, фигурирующую в уравнениях (42), (43), будем называть <u>классической r - матрицей</u>.

В вышеописанную схему укладывается большое число вполне интегрируемых классических моделей, например, нелинейное уравнение Шредингера [I3] , уравнение синус-Гордон, уравнение Ландау-Лифшица [I5] , цепочка Тода [3, I6] и другие [30] . При этом существенно однако, что скобки Пуассона между динамическими переменными ультралокальны по терминологии [3], т.е. не содержат производных от δ - функции. Представляет интерес задача обобщения этой схемы на уравнения с неультралокальными скобками Пуассона, например, уравнение Кортевега-де-Фриза. Первые шаги в этом направлении сделаны С.А.Цыпляевым, который показал, что для уравнения синус-Гордон классические r - матрицы в лабораторной системе ($\{\pi(x),\varphi(y)\}=\delta(x-y)$) и в системе светового конуса ($\{\varphi'(x),\varphi'(y)\}=\delta'(x-y)$) совпадают.

4) В заключение этого пункта отметим, что существует еще одна важная интерпретация уравнения Янга-Бакстера (I), как условия факторизации многочастичных S - матриц. Функции ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(\theta_1-\theta_2)$ интерпретируются при этом как матрица рассеяния двух частиц одинаковой массы с релятивистскими быстротами θ_1 и θ_2 и имеющими N состояний ("поляризаций") каждая, которые задаются индексами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Уравнение (I) при этом означает условие сводимости любых многочастичных столкновений к двухчастичным (свойство факторизуемости многочастичных S - матриц). Уравнение (I) в этом качестве было впервые получено в работе Янга [I], как свойство двухчастичной S - матрицы нерелятивистских одномерных бозе-частиц с точечным взаимодействием. Впоследствии, когда была установлена тесная связь между полной интегрируемостью модели и факторизуемостью ее S - матрицы [I7], уравнение (I) было положено в основу метода вычисления факторизованных релятивистских S - матриц (см.обзор [I9] и имеющиеся там ссылки). При этом, помимо (I) на S - матрицу накладываются условия унитарности, аналитичности и кроссинг-симметрии. В рамках этого подхода вычислено большое количество S - матриц. Обнадеживающим является тот факт, что S - матрицы, найденные в ряде моделей динамически [20, 30] в рамках квантового гамильтонова подхода, совпали с ответами, полученными ранее методом факторизованных S - матриц.

Используя S - матричную трактовку уравнения Янга-Бакстера можно дать наглядную интерпретацию введенным в пункте I операциям над пучками Я-Б. Тензорное произведение пучков описывает конструкцию S - матрицы для составных частиц. Прямая сумма отвечает возможности разбить рассматриваемые частицы по изотопическим индексам на два сорта так, что частицы разных сортов не взаимодействуют друг с другом. Приводимость означает возможность разбиения частиц на группы так, что для частиц из различных групп рассеяние является безотражательным.

Помимо перечисленных выше применений, уравнение Янга-Бакстeра используется также в теории точно решаемых моделей статистической физики. Первой работой в этой области является работа Р.Бакстера [2] . Не имея возможности обсудить это интересное направление подробно, мы отсылаем заинтересованных читателей к работам [2 , 4 , 21] .

3. В этом пункте мы перечислим основные способы нахождения решений уравнения Янга-Бакстера, известные из литературы.

1) Самый прямолинейный способ решения уравнения (1) состоит в том, чтобы выбрать какую-либо более или менее удачную подстановку для матрицы ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u)$ (например, наложить какое-нибудь условие симметрии) и выписать получившуюся кубическую систему функциональных уравнений для матричных элементов ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u)$. Полученную систему уравнений можно либо решать непосредственно, как это сделал Р.Бакстер в работе [2] , либо продифференцировать ее по v и положить $v=0$, получив систему дифференциальных уравнений, которую при некотором везении и навыке можно решить. Хотя этот способ весьма громоздок и не гарантирует успеха, именно таким образом было получено подавляющее большинство известных пучков Янга-Бакстера. Ввиду большого объема вычислений по проверке соотношений Янга-Бакстера для конкретных пучков, здесь может оказаться полезным использование ЭВМ, в частности языков программирования, позволяющих делать аналитические выкладки [22] .

2) Важное усовершенствование предыдущего способа связано с алгеброй А.Б.Замолодчикова [19] . Рассмотрим алгебру, порождаемую элементами $A_\alpha(\theta)$ и перестановочными соотношениями

$$A_\alpha(u)\,A_\beta(v) = {}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u-v)\,A_\delta(v)\,A_\gamma(u)\,. \tag{46}$$

Уравнение Янга-Бакстера представляет собой условие ассоциативности этой алгебры в предположении линейной независимости мономов третьей степени по A_α . Использование алгебры Замолодчикова в практических выкладках позволяет легко выписать матричные элементы уравнения Янга-Бакстера, рассматривая моном вида $A_\alpha(u)A_{\alpha'}(v)A_{\alpha''}(w)$ и производя коммутации согласно (46).

И.В.Чередник построил реализацию операторов $A_\alpha(u)$ для XYZ-пучка (П8) размерности 2 [23] в виде суперпозиций операторов умножения и сдвига в пространстве функций на эллиптической кривой. Аналогичные реализации алгебр Замолодчикова при $N>2$ были получены в работах [5, 24] . Хотя метод Чередника позволяет получать новые пучки Янга-Бакстера, для соответствующих реализаций алгебры Замолодчикова при $N>2$ не имеет место независимость мономов третьей степени, и соотношение (1) каждый раз приходится проверять независимо.

3) И, наконец, третий способ решения уравнения Янга-Бакстера, состоит в поиске пучка Я-Б $\mathbb{R}(u)$ как R - матрицы $\mathbb{R}_{qq'}(u)$, участвующей в соотношениях типа (36), (37) (или (42), (43) в классическом случае) для некоторой вполне интегрируемой модели. Преимущество этого метода состоит в том, что в классическом случае оператор $L(u)$ бывает, как правило известен заранее из классического метода обратной задачи рассеяния, и задача сводится просто к определению $r(u)$ из (правда, переопределенной) системы линейных уравнений (42). Знание классического L - оператора существенно облегчает поиск квантового L - оператора для соответствующей квантовой задачи (который вовсе не обязан совпадать с классическим L - оператором [14]).

Конечно, как и в реализации Чередника, уравнение Янга-Бакстера (4) следует из (37) лишь при условии независимости мономов 3-ей степени по $\mathbb{T}(u)$, проверить которое трудно. Поэтому для получающихся пучков $\mathbb{R}(u)$ необходимо проверять уравнение (4) каждый раз непосредственно.

4. В этом пункте мы рассмотрим некоторые обобщения уравнений Янга-Бакстера.

Одно из естественных обобщений уравнения Янга-Бакстера связано с введением градуировки [25] . К этому обобщению приводят в частности классические и квантовые уравнения, которые можно решать методом обратной задачи, и которые наряду с обычными функциями содержат функции с антикоммутирующими значениями, а в квантовой теории - ферми-поля [26-28] . Далее мы будем говорить только о Z_2 - градуировке и символ Z_2 иногда будем опускать.

Векторное пространство V называется Z_2 - градуированным, если оно разложено в прямую сумму двух подпространств $V_0 \oplus V_1$. Элементы V , имеющие нулевую проекцию на одно из этих подпространств, называются <u>однородными</u>. Для однородных элементов x определена функция $p(x)$ со значениями в групе Z_2 :

$p(x) = 0$, если $x \in V_0$ (четные элементы);

$p(x) = 1$, если $x \in V_1$ (нечетные элементы).

Если размерности подпространств V_0 и V_1 равны n и m соответственно, то размерность градуированного пространства пишут так: $\dim V = (n, m)$.

Алгебра $\mathcal{A}$ называется градуированной, если она градуирована как векторное пространство $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ и для любых однородных элементов $a_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$ выполняется свойство: $a_\alpha a_\beta \in \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$, т.е. $p(a_\alpha a_\beta) = p(a_\alpha) + p(a_\beta)$ (сложение α и β производится по $\mathrm{mod}\, 2$).

Z_2 - градуированные алгебры называют также **супералгебрами**. Если для однородных элементов градуированной алгебры $\mathcal{A}$ справедливо соотношение $ab=(-1)^{p(a)p(b)}ba$, то $\mathcal{A}$ называется **коммутативной супералгеброй**. Примером такой алгебры является алгебра Грассмана $\mathcal{G}$ [29].

Выберем в пространстве $V=V_0\oplus V_1$ базис из однородных элементов $e_1,\dots,e_n\in V_0$ и $e_{n+1},\dots,e_{n+m}\in V_1$. Коэффициенты разложения вектора $x\in V$ принадлежат алгебре Грассмана $x=\sum_{i=1}^{n+m} e_i x_i$, $x_i\in\mathcal{G}$ (V есть правый $\mathcal{G}$ - модуль). Линейные справа операторы в V в выбранном базисе можно представить в виде матриц

$$F(x)=F(e_i x_i)=F(e_i)x_i=e_j F_{ji}x_i \quad .$$

Такие матрицы F_{ij} являются градуированными - их строкам и столбцам приписывается четность: $p_r(i)=p(e_i)$, $p_c(j)=p(e_j)$, $i,j=1,\dots,n+m$. Градуировка вводится и в линейное пространство таких матриц. Матрице F приписывают определенную четность $p(F)$, если выражение

$$p(F)\equiv p(i)+p(j)+p(F_{ij})$$

не зависит от i и j (матричный элемент $F_{ij}\in\mathcal{G}$ и $p(F_{ij})$ его четность, как элемента алгебры Грассмана). Далее нас будут интересовать только матрицы нулевой четности, для которых $p(F_{ij})=$ $=p(i)+p(j)$.

Рассмотрим градуированную алгебру Замолодчикова с образующими $A_\alpha(u)$, часть из которых четна $p(A_\alpha(u))\equiv p(\alpha)=0$, а остальные нечетны $p(A_\beta(u))\equiv p(\beta)=1$. Основное перестановочное соотношение (46) запишем в виде

$$A_\alpha(u)A_\beta(v)=(-1)^{p(\alpha)p(\beta)}\,{}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u-v)A_\delta(v)A_\gamma(u)\,, \tag{47}$$

предполагая, что все ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}$ - четные элементы $\mathcal{G}$. Если ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}$, то введенная алгебра становится коммутативной супералгеброй. Как и для обычной алгебры (46) условием ассоциативности, в предположении независимости мономов третьей степени по образующим $A_\alpha(u)$, будет соотношение

$$\begin{gathered}{}_{\alpha\alpha'}R_{\gamma\gamma'}(u-v)\,{}_{\gamma\alpha''}R_{\beta\gamma''}(u)\,{}_{\gamma'\gamma''}R_{\beta'\beta''}(v)(-1)^{p(\gamma')(p(\alpha'')+p(\gamma''))}=\\ ={}_{\alpha\alpha''}R_{\gamma'\gamma''}(v)\,{}_{\alpha\gamma''}R_{\gamma\beta''}(u)\,{}_{\gamma\gamma'}R_{\beta\beta'}(u-v)(-1)^{p(\gamma')(p(\gamma'')+p(\beta''))}\end{gathered} \tag{48}$$

10 2018

Между решениями уравнения Янга-Бакстера (I) и его градуированного аналога (48) имеется взаимно однозначное соответствие. Действительно, переопределим коэффициенты в формуле (48)

$$ {}_{\alpha\beta}\widetilde{R}_{\gamma\delta}(u) = (-1)^{p(\alpha)p(\beta)}\,{}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}(u) . \tag{49}$$

Тогда для $\widetilde{\mathbb{R}}(u)$ мы получим уравнение (I). При этом существенно, что $p({}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta})=0$ для любых ненулевых ${}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}$ и как матрица $\mathbb{R}$ обладает нулевой четностью $p(\mathbb{R})=0$.

$\mathbb{R}(u)$ можно рассматривать как матрицу в тензорном произведении двух градуированных пространств $V\otimes V$, $dim\, V=(n,m)$. Для компактной записи (48) нам понадобится оператор перестановки в тензорном произведении градуированных пространств и операция тензорного произведения градуированных матриц.

В качестве базиса в тензорном произведении двух пространств $V\otimes W$ выберем $v_i\otimes w_j$ (v_i, w_j -- однородные элементы). Компоненты вектора $x\otimes y$ в этом базисе равны $x_i y_j (-1)^{p(x_i)p(j)}$:

$$ x\otimes y = (v_i x_i)\otimes(w_j y_j) = (v_i\otimes w_j)\,x_i y_j (-1)^{p(x_i)p(j)} . $$

Определим действие линейного (справа) оператора $F\otimes G$ в пространстве $V\otimes W$ как $(F\otimes G)(x\otimes y) = F(x)\otimes G(y)$ (мы рассматриваем операторы нулевой четности $p(F)=p(G)=0$, в противном случае возникает дополнительный множитель $(-1)^{p(x)p(G)}$). В результате матричный элемент тензорного произведения четных матриц $\{F_{ij}\}$, $\{G_{ab}\}$ имеет вид

$$ {}_{ia}(F\otimes G)_{jb} = F_{ij}G_{ab}(-1)^{p(a)(p(i)+p(j))} . \tag{50}$$

Оператор перестановки $\mathbb{P}$ в $V\otimes V$, определяемый своим действием на произведения однородных элементов x, y имеет вид

$$ \mathbb{P}(x\otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)}\, y\otimes x, \quad {}_{ab}P_{cd} = \delta_{ad}\delta_{bc}(-1)^{p(c)p(d)} . \tag{51}$$

Также как оператор обычной перестановки удовлетворяет уравнению (I), оператор (51) удовлетворяет (48). Используя этот оператор можно написать одно из решений уравнения (48) для произвольной размерности пространства V и градуировки

$$ \mathbb{R}(u) = a(u) + b(u)\,\mathbb{P}, \quad a(u) = 1 - b(u) = u/u+1 . \tag{52}$$

Отметим, что описанное выше соответствие между $\mathbb{R}(u)$ и $\widetilde{\mathbb{R}}(u)$

(см.(49)),сохраняет свойство регулярности пучков Я-Б, но не квазиклассичности.

Воспользуемся определением тензорного произведения (50) и оператором градуированной перестановки (5I). Тогда для оператора

$$\check{\mathbb{R}}(u) = \mathbb{P}\mathbb{R}(u)$$

уравнение (48) примет тот же вид, что и в пункте I (7)

$$\begin{gathered}(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(u-v))(\check{\mathbb{R}}(u)\otimes \mathbb{I})(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(v)) = \\ = (\check{\mathbb{R}}(v)\otimes \mathbb{I})(\mathbb{I}\otimes \check{\mathbb{R}}(u))(\check{\mathbb{R}}(u-v)\otimes \mathbb{I}) \ .\end{gathered} \tag{53}$$

Так же как и в неградуированном случае, для квазиклассического семейства пучков Я-Б($\mathbb{R}(u,\eta)\big|_{\eta=0} = \mathbb{I}$) вводится классический пучок Я-Б:

$$r(u) = \frac{d}{d\eta}\,\mathbb{R}(u,\eta)\Big|_{\eta=0} \ . \tag{54}$$

Уравнение на $r(u)$ удобно получать из следующей операторной формы соотношения (48)

$$\mathbb{R}_{12}(u-v)\,\overline{\mathbb{R}}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v)\,\overline{\mathbb{R}}_{13}(u)\,\mathbb{R}_{23}(u-v) \ , \tag{55}$$

где нижние индексы показывают в каких из трех пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ действует нетривиально пучок Я-Б, а

$$\overline{\mathbb{R}}_{13}(u) = \mathbb{P}_{23}\,\mathbb{R}_{12}(u)\,\mathbb{P}_{23} = \mathbb{P}_{12}\,\mathbb{R}_{23}(u)\,\mathbb{P}_{12} \ . \tag{56}$$

Дифференцируя (55) дважды по η и положив $\eta = 0$, получаем

$$\left[r_{12}(u-v), \bar{r}_{13}(u) + r_{23}(v) \right] + \left[\bar{r}_{13}(u),\ r_{23}(v) \right] = 0 \ . \tag{57}$$

Произвол, связанный с умножением $\mathbb{R}(u)$ на произвольную функцию, приводит к аддитивному произволу в r : если $r(u)$ - решение (57), то и $r(u) + \varphi(u)\mathbb{I}$ - тоже решение. Этим произволом можно воспользоваться и выбирать $\varphi(u)$ так, чтобы для $r(u)$ выполнялось свойство

$$r(u) = - \mathbb{P} r(-u)\, \mathbb{P} \ . \tag{58}$$

Скажем несколько слов о приложениях. Градуированные пучки Янга-Бакстера, также как и обычные, о которых речь шла в пункте 2, возникают, если применять квантовый метод обратной задачи к уравнениям, в которые входят антикоммутирующие квантовые поля. Таковыми являются, например, матричное нелинейное уравнение Шредингера с бозе- и ферми - полями, массивная модель Тирринга с антикоммутирующими полями [26], суперсимметричное уравнение синус-Гордон [27] и другие. Если $\mathbb{R}(u-v)$ сплетает квантовые матрицы перехода $\mathbb{T}(u)$, $\mathbb{T}(v)$, то $r(u-v)$ определяет скобки Пуассона матричных элементов $\mathbb{T}(u), \mathbb{T}(v)$ в классической теории. Свойства (57) и (58) являются отражением соответственно тождества Якоби и свойства антисимметрии скобок Пуассона.

Другое возможное обобщение уравнения Янга-Бакстера состоит в том, чтобы рассматривать уравнение (4), как функциональное уравнение для трех различных операторов $\mathbb{R}_{12}(u-v), \mathbb{R}_{13}(u)$ и $\mathbb{R}_{23}(v)$ действующих в произведении трех различных пространств $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ с размерностями N_1, N_2, N_3 соответственно, причем оператор $\mathbb{R}_{\alpha\beta}(u)$ нетривиально действует лишь в $V_\alpha \otimes V_\beta$. На языке S - матричной интерпретации, обсуждавшейся в конце п.2, это означает, что мы рассматриваем рассеяние трех сортов частиц, причем N_α есть число внутренних состояний α -го сорта частиц ($\alpha = 1, 2, 3$). Коэффициент отражения для рассеяния частиц разных сортов при этом должен быть равен нулю.

Особенно просто такое обобщение получается для классических пучков Я-Б. Действительно всякий классический пучок Я-Б размерности N можно разложить, как оператор в $C^N \otimes C^N$ по базисным элементам вида $\mathcal{J}_\alpha \otimes \mathcal{J}_\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N^2$), где $\mathcal{J}_\alpha$ - какой-либо базис в алгебре Ли $gl(N, C)$:

$$r(u) = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{N^2} r_{\alpha\beta}(u)\, \mathcal{J}_\alpha \otimes \mathcal{J}_\beta \quad . \tag{59}$$

Но поскольку в классическом уравнении Янга-Бакстера (20) участвуют только коммутаторы, его можно рассматривать, как уравнение на алгебре Ли $gl(N, C)$ и брать в качестве $\mathcal{J}_\alpha$ генераторы $gl(N, C)$ в любом другом представлении помимо фундаментального. Если генераторы $\mathcal{J}_\alpha$, появляющиеся в разложении (59) при ненулевых коэффициентах $r_{\alpha\beta}(u)$ образуют подалгебру $\mathcal{A} \subset gl(N, C)$, то те же рассуждения годятся для алгебры Ли $\mathcal{A}$. Таким образом по любому классическому пучку Я-Б можно построить бесконечную серию классических пучков Я-Б любых размерностей, а также решений обобщенного в вышеуказанном смысле уравнения Я-Б.

Если справедлива обсуждавшаяся в п.I гипотеза о том, что всякому классическому пучку Я-Б соответствует квантовый квазиклассический пучок Я-Б, то аналогичных результатов следует ожидать и в квантовом случае. Однако, поскольку квантовое уравнение Янга-

Бакстера (4) не выражается в коммутаторах, задача о распространении заданного пучка Я-Б на высшие представления $gl(N,C)$ (или других алгебр Ли) становится гораздо более сложной, чем в классическом случае. Разумно предположить, что, аналогично тому, как классическое уравнение Я-Б (20) можно рассматривать, как уравнение на алгебре Ли, квантовое уравнение Я-Б (4) можно рассматривать на универсальной обертывающей алгебре Ли и получать конечномерные пучки Я-Б редукцией "универсального" пучка. Справедливость этой гипотезы проверена одним из авторов (Е.К.С.) для простейшего $gl(2,C)$ инвариантного пучка (см.Приложение, ф-ла (П3))[ж]. Воспользовавшись обобщением квантовой линейной задачи для уравнения синус-Гордон на высшие представления по вспомогательному пространству и применяя третий способ (п.3) нахождения решений уравнения Я-Б как квантовой R - матрицы, можно получить обобщение XXZ - пучка (П9) в терминах универсальной обертывающей алгебры $gl(2,c)$ [44].

Приложение.

В Приложении мы приводим сводку известных решений квантового уравнения Янга-Бакстера. Поскольку в ряде случаев проверка уравнения (I) требует долгих и утомительных выкладок, не все приводимые ниже пучки были нами перепроверены. В большинстве примеров мы указываем авторов, которым принадлежит утверждение о том, что данный пучок удовлетворяет уравнению (I).

Тензор $_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta}$ нам будет удобно представлять в виде квадратной блок-матрицы, рассматривая индекс α, как номер блок-строки, β - номер строки в блоке α, γ - как номер блок-столбца, и δ - как номер столбца в блоке γ.

Спектральный параметр всюду обозначается u, квазиклассический параметр (для квазиклассических пучков) - η. Нормировка квазиклассических пучков выбрана так, чтобы $R(u,\eta)=I$ при $\eta=0$. Для квазиклассических пучков приводится соответствующий классический пучок $r(u)=\frac{d}{d\eta}R(u,\eta)\big|_{\eta=0}$ (I8).

I) GL(N,C)- инвариантный пучок (Ч.Н.Янг [I]).

$$R(u)=\frac{u}{u+\eta}I+\frac{\eta}{u+\eta}P,\quad \dim R = N\geqslant 2. \tag{ПI}$$

Очевидно, что I и P - единственные операторы в $C^N\otimes C^N$, инвариантные относительно группы $GL(N,C)$ в смысле (I3). Пучок (ПI)

ж) Как сообщил нам В.А.Фатеев, им совместно с А.Б.Замолодчиковым получен аналогичный результат.

регулярен и квазиклассичен, соответствующий классический пучок $r(u)$ имеет вид

$$r(u)=\frac{1}{u}\,\mathbb{P}+\varphi(u)\,\mathbb{I}\quad. \tag{П2}$$

Пучок $\mathbb{R}(u)$ широко используется в квантовом методе обратной задачи [3] . При $N=2$ он возникает при исследовании квантового нелинейного уравнения Шредингера [13], XXX - модели (ферромагнетика Гейзенберга) [3, 12], цепочки Тода [3, 16] . Пучки с $N\geqslant 3$ используются при рассмотрении многокомпонентных аналогов упомянутых уравнений: векторного и матричного нелинейного уравнения Шредингера [10] , обобщенного ферромагнетика Гейзенберга [30] , неабелевой цепочки Тода [16] , системы n - волн (модель Ли) [31] Кроме того пучок (П1) используется как S - матрица для нерелятивистских частиц с точечным взаимодействием [1] .

Как отмечалось в конце п.4, при $N=2$ известны аналоги пучка (П1) для любого конечномерного неприводимого представления группы $GL(2,C)$. Пусть в пространстве $V=C^{\ell}$ действует ℓ - мерное неприводимое представление $\mathcal{D}_\ell(g)$ группы $GL(2,C)$. Тогда обобщенный пучок (П1) имеет вид:

$$\mathbb{R}(u)=\sum_{j=0}^{2\ell}\prod_{k=1}^{j}\frac{u-k\eta}{u+k\eta}\,P_j\quad, \tag{П3}$$

где P_j - проектор на пространство j - мерного неприводимого представления в разложении тензорного произведения $\mathcal{D}_\ell\otimes\mathcal{D}_\ell$ на неприводимые представления. Полученный пучок является каноническим. Доказательство формулы (П3) будет опубликовано отдельно.

2) <u>$SO(N,C)$- инвариантные пучки</u>.

В пространстве $C^N\otimes C^N$ имеется всего три оператора, инвариантных относительно действия группы $SO(N,C)$. Это уже встречавшиеся нам операторы $\mathbb{I}$ и $\mathbb{P}$ и, кроме того, проектор $\mathbb{K}$:

$${}_{\alpha\beta}K_{\gamma\delta}=\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta}\quad. \tag{П4}$$

Соответствующий $SO(N,C)$ инвариантный пучок Я-Б был найден в [18] , как S - матрица для модели Гросса-Неве:

$$\mathbb{R}(u)=\frac{u}{u+\eta}\,\mathbb{I}+\frac{\eta}{u+\eta}\,\mathbb{P}+\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g-u)}\,\mathbb{K},\quad g=-\frac{N-2}{2}\quad. \tag{П5}$$

Пучок (П5) каноничен. Соответствующий классический пучок:

$$r(u)=\frac{1}{u}\,\mathbb{P}-\frac{1}{u}\,\mathbb{K}+\varphi(u)\,\mathbb{I}\quad. \tag{П6}$$

Интересно, отметить, что если взять линейную комбинацию только $\mathbb{I}$ и $\mathbb{P}$, мы получим $GL(N,C)$ - инвариантное решение (П1), для комбинации $\mathbb{P}$ и $\mathbb{K}$ получаем новый пучок

$$\mathbb{R}(u)=\mathbb{P}-\frac{sh(u)}{sh(u+\gamma)}\mathbb{K}, \quad e^{\gamma}=\frac{1}{2}(N-\sqrt{N^2-4}), \tag{П7}$$

который регулярен, но не квазиклассичен, и, наконец, для комбинации только $\mathbb{I}$ и $\mathbb{K}$ решения не существует.

3) <u>XYZ - пучок (Р.Бакстер [2])</u>.

$$\mathbb{R}(u,\eta,k)=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{vmatrix} . \tag{П8}$$

Табл.I.

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\|_{\eta=0}$
a	1	1	1	0
b	$\frac{sn\, u}{sn(u+\eta)}$	0	1	$-\frac{cn\, u\, dn\, u}{sn\, u}$
c	$\frac{sn\,\eta}{sn(u+\eta)}$	1	0	$\frac{1}{sn\, u}$
d	$k\, sn\, u\, sn\,\eta$	0	0	$k\, sn\, u$

В формулах Табл.I все эллиптические функции имеют модуль k . XYZ - пучок каноничен. Квантовому XYZ - пучку отвечает вполне интегрируемая решеточная XYZ - модель [4, 32] . Соответствующему классическому пучку отвечает уравнение Ландау-Лифшица [I5] . Наличие в XYZ-пучке двух параметров: η и k позволяет получать различные вырожденные случаи, например, XXZ - и XXX-пучки (см.далее), и квантовые модели на прямой (уравнение синус-Гордон, нелинейное уравнение Шредингера).

4) <u>XXZ - пучок</u>.

$$\mathbb{R}(u,\eta)=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} . \tag{П9}$$

Табл.2.

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\|_{\eta=0}$
a	1	1	1	0
b	$\frac{\sin u}{\sin(u+\eta)}$	0	1	$-\operatorname{ctg} u$
c	$\frac{\sin\eta}{\sin(u+\eta)}$	1	0	$\frac{1}{\sin u}$

XXZ - пучок получается из XYZ - пучка (Табл.I) в пределе $k \to 0$. Как и XYZ - пучок, XXZ - пучок каноничен. Ему отвечает квантовая решеточная XXZ - модель, которая рассматривалась в рамках квантового метода обратной задачи (КМОЗ) в [I2]. Этот пучок возникает также при квантовании уравнения синус-Гордон посредством КМОЗ [I4].

При дальнейшем вырождении $u=\varepsilon v$, $\eta=\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\to 0$, XXZ - пучок вырождается в XXX - пучок, совпадающий с пучком (П1) для $N=2$.

5) <u>XYZ - пучок для спина I (В.А.Фатеев [33]).</u>

$$R(u,\eta,k)=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} s_1 & & & & \alpha & & & & \beta \\ & t & & r & & & & & \\ & & T & & & & R & & \\ \hline & r & & t & & & & & \\ \alpha & & & & s_2 & & & & \gamma \\ & & & & & a & & q & \\ \hline & & R & & & & T & & \\ & & & & & q & & a & \\ \beta & & & & \gamma & & & & s_3 \end{array}\right| \qquad \text{(П10)}$$

Табл.3

	R		R
s_1	$\mathcal{J}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,2\eta+\frac{\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,2\eta}{\mathrm{sn}(u+\eta)}$	t	$\varepsilon_3\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,2\eta$
s_2	$\mathcal{J}(\mathrm{sn}\,u(\mathrm{cn}\,2\eta+\mathrm{dn}\,2\eta-1)+\frac{\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,2\eta}{\mathrm{sn}(u+\eta)})$	T	$\varepsilon_4\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u$
s_3	$\mathcal{J}(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,2\eta+\frac{\mathrm{sn}\,\eta\,\mathrm{sn}\,2\eta}{\mathrm{sn}(u+\eta)})$	R	$\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,2\eta$
α	$\varepsilon_1\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(u+\eta)\,\mathrm{sn}\,2\eta/\mathrm{sn}(u+\eta)$	a	$\varepsilon_5\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,2\eta$
β	$\varepsilon_2\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,2\eta/\mathrm{sn}(u+\eta)$	r	$\mathcal{J}\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,2\eta$
γ	$-\varepsilon_1\varepsilon_2\mathcal{J}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,2\eta/\mathrm{sn}(u+\eta)$	q	$\mathcal{J}\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,2\eta$

$$\mathcal{J}=1/\mathrm{sn}(u+2\eta)\,, \qquad \varepsilon_i=\pm 1\,.$$

Как и в Табл.I, эллиптические функции в Табл.3 имеют модуль k. Пучок (П10) - канонический. Соответствующий классический пучок, который из-за громоздкости мы не выписываем, представляет собой пучок (П8), переписанный в базисе генераторов трехмерного неприводимого представления $gl(2,C)$, что позволяет рассматривать пучок (П10) как обобщение пучка (П8) на высшее представление (см.конец п.4).

6) XXZ – пучок для спина I (А.Б.Замолодчиков, В.А.Фатеев [34]).

$$\mathbb{R}(u,\eta)=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} s & & & & & & & & \\ & t & & r & & & & & \\ & & T & & a & & R & & \\ \hline & r & & t & & & & & \\ & & a & & \sigma & & a & & \\ & & & & & t & & r & \\ \hline & & R & & a & & T & & \\ & & & & & r & & t & \\ & & & & & & & & s \end{array}\right| \qquad \text{(III)}$$

Табл.4,

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\vert_{\eta=0}$
s	1	1	1	0
t	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,u$	0	1	$-2\,\mathrm{cth}\,u$
r	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,2\eta$	1	0	$\dfrac{2}{\mathrm{sh}\,u}$
a	$\varepsilon\mathcal{J}\dfrac{\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,2\eta}{\mathrm{sh}(u+\eta)}$	0	0	$\dfrac{2\varepsilon}{\mathrm{sh}\,u}$
R	$\mathcal{J}\dfrac{\mathrm{sh}\,\eta\,\mathrm{sh}\,2\eta}{\mathrm{sh}(u+\eta)}$	1	0	0
T	$\mathcal{J}\dfrac{\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}(u-\eta)}{\mathrm{sh}(u+\eta)}$	0	1	$-4\,\mathrm{cth}\,u$
σ	$t+R$	1	1	$-2\,\mathrm{cth}\,u$

$$\mathcal{J}=1/\mathrm{sh}(u+2\eta)\,.$$

В Табл.4 $\varepsilon=\pm 1$. Пучок (III) при $\varepsilon=1$ получается из (IIO) с $\varepsilon_i=1$ после перехода к пределу $k\to 0$ и преобразования подобия (I2) с матрицей

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\begin{array}{ccc} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -i & 1 & 0 \end{array}\right|\,.$$

Свойство каноничности (IIO) сохраняется и для (III).

7) Z_N – инвариантный пучок (И.В.Чередник [24]).

Для $N=3$

$$
\mathbb{R}(u,\eta) = \left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a & & & & & & & & \\
 & b & & c & & & & & \\
 & & \bar b & & & & \bar c & & \\
\hline
 & \bar c & & \bar b & & & & & \\
 & & & & a & & & & \\
 & & & & & b & & c & \\
\hline
 & & c & & & & b & & \\
 & & & & & \bar c & & \bar b & \\
 & & & & & & & & a
\end{array}\right| \qquad \text{(III2)}
$$

Табл.5

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta \cdot \mid_{\eta=0}$
a	1	1	1	0
b	$g(\eta)\dfrac{sh\,u}{sh(u+\eta)}$	0	$g(0)$	$g'(0)-g(0)\,cth\,u$
$\bar b$	$g^{-1}(\eta)\dfrac{sh\,u}{sh(u+\eta)}$	0	$g^{-1}(0)$	$\dfrac{-g'(0)}{g^2(0)}-g^{-1}(0)\,cth\,u$
c	$e^{-\frac{1}{3}u}\dfrac{sh\,\eta}{sh(u+\eta)}$	1	0	$e^{-\frac{1}{3}u}/sh\,u$
$\bar c$	$e^{-\frac{1}{3}u}\dfrac{sh\,\eta}{sh(u+\eta)}$	1	0	$e^{\frac{1}{3}u}/sh\,u$

Пучок (II2) регулярен, а если $g(0)=1$, то и квазиклассичен. Кроме того, пучок инвариантен относительно преобразования подобия (I2) с матрицей T .

$$
T = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} .
$$

Ввиду тождества $T^3 = 1$, соответствующая группа преобразований изоморфна Z_3 . При $g(\eta)=1$ пучок (II2) возникает при квантовании двумеризованной цепочки Тода [36] с помощью КМОЗ (Н.Ю.Решетихин).

Аналогично строятся N - мерные Z_N - инвариантные пучки для любого $N \geqslant 3$ [24] :

$$
{}_{\alpha\beta}R_{\gamma\delta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha+\beta \neq \gamma+\delta \ (mod\,N);\ \alpha,\beta,\gamma,\delta = 0,1,\dots,N-1,
$$

$$
{}_{\alpha\alpha}R_{\alpha\alpha} = 1,
$$

$$
{}_{\alpha\beta}R_{\beta\alpha} = exp\left(2u\frac{\alpha-\beta}{N} - sign(\alpha-\beta)\right)\frac{sh\,\eta}{sh(u+\eta)}\ , \qquad \text{(II3)}
$$

$$ {}_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = exp\left(2\eta\frac{\beta-\alpha}{N} - sign(\beta-\alpha)\right)\frac{sh\, u}{sh(u+\eta)} \, . $$

В алгебраических терминах систем корней данный пучок, как мы отмечали, является квантовой R – матрицей для релятивистской теоретико-полевой модели, отвечающей системе корней A_{N-1} [36] . Несложно вычислить классическую r – матрицу для остальных систем корней ($B_N, C_N, \dots, E_8$), интересно найти соответствующие квантовые R – матрицы.

8) <u>Пучок размерности 3 (А.Г.Изергин, В.Е.Корепин [5])</u>.

$$ R(u,\eta) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & & & & & \bar{g} & g & & \\ & b & & \bar{e} & & & & & \\ & & b & & & & e & & \\ \hline & e & & b & & & & & \\ & & & & c & & & & \\ g & & & & & d & & f & \\ \hline & & \bar{e} & & & & b & & \\ & & & & & \bar{f} & & d & \\ \bar{g} & & & & & & & & c \end{array}\right) \qquad (\text{П4}) $$

Табл.6.

	R	$\partial/\partial\eta \cdot \vert_{\eta=0}$
a	$\mathcal{I}(sh(u-3\eta)-sh\,5\eta+sh\,3\eta+sh\,\eta)$	$X(ch\,u-1)$
b	$\mathcal{I}(sh(u-3\eta)+sh\,3\eta)$	$X(ch\,u+1)$
c	1	0
d	$\mathcal{I}(sh(u-\eta)+sh\,\eta)$	$2X\,ch\,u$
e	$-2\mathcal{I}e^{-\frac{1}{2}u}sh\,2\eta\,ch(\frac{1}{2}u-3\eta)$	$-X(1+e^{-u})$
$\bar{e}$	$-2\mathcal{I}e^{\frac{1}{2}u}sh\,2\eta\,ch(\frac{1}{2}u-3\eta)$	$-X(1+e^{u})$
f	$-\mathcal{I}(2e^{-u}e^{2\eta}sh\,\eta\,sh\,2\eta+e^{-\eta}sh\,4\eta)$	$-2X$
$\bar{f}$	$\mathcal{I}(2e^{u}e^{-2\eta}sh\,\eta\,sh\,2\eta-e^{\eta}sh\,4\eta)$	$-2X$
g	$\mathcal{I}(e^{-\frac{1}{2}u}e^{2\eta}2sh\frac{1}{2}u\,sh\,2\eta)$	$X(1-e^{-u})$
$\bar{g}$	$-\mathcal{I}(e^{\frac{1}{2}u}e^{-2\eta}2sh\frac{1}{2}u\,sh\,2\eta)$	$-X(1-e^{u})$

$$ \mathcal{I} = (sh(u-5\eta)+sh\,\eta)^{-1}, \qquad X = 2/sh\,u \, . $$

Пучок (П4) – канонический, он является R – матрицей для квантовой релятивистской модели Михайлова-Шабата [5] .

9) <u>Блочные $O(N)$ – инвариантные пучки [35]</u> .

$$\mathbb{R}(u) = \begin{vmatrix} A & & & \\ & B & C & \\ & C & B & \\ & & & A \end{vmatrix} \,, \qquad (\Pi 15)$$

A, B, C – $N^2 \times N^2$ блоки вида $A = a_1 I + a_2 \mathbb{P} + a_3 \mathbb{K}$ и аналогично для B и C, где $\mathbb{K}$ – проектор (П4).

Табл.7.

	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	g
I	$\frac{u}{u+\eta}$	$\frac{\eta}{u+\eta}$	0	$\frac{u}{u+\eta}$	0	$\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g-u)}$	0	0	0	$-\frac{N}{2}$
II	$\frac{u}{u+\eta}$	$\frac{\eta}{u+\eta}$	0	$\frac{u}{u+\eta}$	0	$\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g-u)}$	0	$\frac{\eta}{u+\eta}$	$\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g-u)}$	$-(N-1)$
III	$\frac{u}{u+\eta}$	$\frac{\eta}{u+\eta}$	0	$\frac{-u}{u+\eta}$	0	$\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g+u)}$	0	$\frac{\eta}{u+\eta}$	$\frac{u\eta}{(u+\eta)(\eta g+u)}$	$1+N$
IV	0	1	0	0	0	$\frac{-\operatorname{sh}(u+\mu)}{\operatorname{sh} u}$	0	1	$\frac{-\operatorname{sh}(u+\mu)}{\operatorname{sh} u}$	$g=\operatorname{ch}\mu = N$
V	0	e^u	0	0	0	$-e^{-u-\mu}\frac{\operatorname{sh}(u+\mu)}{\operatorname{sh} u}$	0	1	$\frac{-\operatorname{sh}(u+\mu)}{\operatorname{sh} u}$	$g=e^{\mu}=N$

Эти пучки были получены в [35], как примеры факторизованных $SU(N)$ – инвариантных S – матриц. Это не противоречит нашему определению их как $O(N)$ – инвариантных, так как действие группы преобразований на S – матрицу определяется иначе, чем это сделали мы в (I3).

Пучок II каноничен, I – квазиклассичен, III – регулярен.

Приведем теперь несколько примеров $\mathbb{Z}_2$ – градуированных пучков Янга-Бакстера, удовлетворяющих уравнению (48).

IO) <u>$GL(n,m,C)$ – инвариантный пучок</u>.

$GL(n,m,C)$ – аналог группы $GL(N,C)$ [25] в градуированном пространстве C^{n+m} с градуировкой (n,m). Пучок имеет вид

$$\mathbb{R}(u) = \frac{u}{u+\eta} I + \frac{\eta}{u+\eta} P_{n,m} \,, \qquad (\Pi 16)$$

где $P_{n,m}$ – градуированный оператор перестановки (5I). Приведенный пучок является естественным обобщением на градуированный случай пучка (ПI). Он используется при применении КМОЗ к уравнениям, содержащим ферми-поля [26, 27, 30].

II) <u>Пучок, связанный с массивной моделью Тирринга для ферми-</u>

полей.

Вспомогательная линейная задача для модели Тирринга [26] определяется матричным 3x3 дифференциальным оператором I-го порядка. Градуировка равна (2, I). В базисе, где $p(1)=p(2)=0$, $p(3)=1$, R - матрица, сплетающая операторы монодромии для вспомогательной линейной задачи (37), имеет вид:

$$\mathbb{R}(u,\eta)=\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
a & & & & & & & & y\\
 & b & & r & & & & & \\
 & & c & & & & x & & \\
\hline
 & r & & b & & & & & y\\
 & & & & a & & & & \\
 & & & & & c & & x & \\
\hline
 & & x & & & & c & & \\
 & & & & & x & & c & \\
 & y & & y & & & & & d
\end{array}\right| \qquad (\text{П}17)$$

Табл.8

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\vert_{\eta=0}$
a	1	1	1	0
b	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{ch}(u-\eta)/\mathrm{ch}(u+\eta)$	0	1	$-4\,\mathrm{cth}\,2u$
c	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,u$	0	1	$-2\,\mathrm{cth}\,u$
d	$\mathcal{J}(\mathrm{sh}\,u-\mathrm{sh}\,2\eta\,\mathrm{ch}\,\eta/\mathrm{ch}(u+\eta))$	-1	1	$-2\dfrac{\mathrm{ch}\,2u+3}{\mathrm{sh}\,2u}$
r	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,2\eta\,\mathrm{ch}\,\eta/\mathrm{ch}(u+\eta)$	1	0	$\dfrac{4}{\mathrm{sh}\,2u}$
x	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,2\eta$	1	0	$\dfrac{2}{\mathrm{sh}\,u}$
y	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,2\eta/\mathrm{ch}(u+\eta)$	0	0	$\dfrac{2}{\mathrm{ch}\,u}$

$$\mathcal{J}=1/\mathrm{sh}(u+2\eta)$$

I2) <u>Градуированный аналог XYZ - пучка</u>, (но в гиперболических функциях).

$$\mathbb{R}(u,\eta)=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & d\\ 0 & b & c & 0\\ 0 & c & b & 0\\ d & 0 & 0 & \bar{a}\end{vmatrix} \qquad (\text{П}18)$$

Табл.9.

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\vert_{\eta=0}$
a	$\mathcal{J}(\mathrm{sh}\,u+\mathrm{sh}\,\eta/\mathrm{ch}\,u)$	1	1	$-\mathrm{cth}\,u+2/\mathrm{sh}\,u$
$\bar{a}$	$\mathcal{J}(\mathrm{sh}\,u-\mathrm{sh}\,\eta/\mathrm{ch}\,u)$	-1	1	$-\mathrm{cth}\,u-2/\mathrm{sh}\,u$
b	$\mathcal{J}\,\mathrm{sh}\,u$	0	1	$-\mathrm{cth}\,u$

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\|_{\eta=0}$
c	$\mathcal{Y}\,\mathrm{sh}\,\eta$	1	0	$1/\mathrm{sh}\,u$
d	$\mathcal{Y}\,\mathrm{sh}\,u\,\mathrm{sh}\,\eta/\mathrm{ch}\,u$	0	0	$1/\mathrm{ch}\,u$

$$\mathcal{Y}=1/\,\mathrm{sh}(u+\eta)\,.$$

Этот пучок возникает как часть сплетающей R - матрицы для квантового суперсимметричного уравнения синус-Гордон [27], отвечающая майорановскому полю.

I3) <u>Градуированный аналог XXZ - пучка</u>.

$$\mathbb{R}(u,\eta)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & c & 0\\ 0 & c & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \qquad \text{(II9)}$$

Табл.I0.

	R	$u=0$	$\eta=0$	$\partial/\partial\eta\cdot\|_{\eta=0}$
a	$\mathcal{Y}\,\mathrm{sh}(u-\eta)$	-1	1	$-2\,\mathrm{cth}\,u$
b	$\mathcal{Y}\,\mathrm{sh}\,u$	0	1	$-\mathrm{cth}\,u$
c	$\mathcal{Y}\,\mathrm{sh}\,\eta$	1	0	$1/\mathrm{sh}\,u$

$$\mathcal{Y}=1/\mathrm{sh}(u+\eta)\,.$$

Литература

I. Y a n g C.N. Phys.Rev.Lett., 1967, v.19, N 23, p.1312-1314.

2. B a x t e r R.J. Ann.Phys., 1972, v.70, N 1, p.193-228.

3. Ф а д д е е в Л.Д., сб."Проблемы квантовой теории поля"(Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля, Алушта, I979), Дубна I979, с.249-299.

4. Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. УМН, I979, т.34, с.I3-63.

5. I z e r g i n A.G., K o r e p i n V.E. Comm.Math.Phys. (to be published); LOMI preprint, E-3-80, Leningrad 1980, p.3-28.

6. B e l a v i n A.A. Comm.Math.Phys. (to be published); Landau Institite for Theor.Physics, preprint, 1980, p.1-15.

7. L ü s c h e r M. Nucl.Phys., 1976, v.B117, N 2, p.475-492.

8. B a b b i t t D., T h o m a s L. Preprint Univ.ofVirginia,UB. А н м е л е в и ч В.В., ТМФ, I980, т.43, № I, с.I07-II0.

9. М а н а к о в С.В. ЖЭТФ, I973, т.65, № 2, с.505-5I6.

10. К у л и ш П.П. Препринт ЛОМИ, Р-3-79, Ленинград 1979.
11. Д у т ы ш е в В.Н. ЖЭТФ, 1980, 78, № 4, с.1332-1342.
12. K u l i s h P.P., S k l y a n i n E.K. Phys.Lett., 1979, v.70A, N 5-6, p.461-463.
13. С к л я н и н Е.К. ДАН СССР, 1979, т.244, № 6, с.1337-1341. С к л я н и н Е.К. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.95, с.57-132.
14. С к л я н и н Е.К., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. ТМФ, 1979, т.40, № 2, с.194-220.
15. S k l y a n i n E.K. LOMI preprint E-3-79, Leningrad 1979.
16. К о р е п и н В.Е. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.101, с.79-90.
17. К у л и ш П.П. ТМФ, 1976, т.26, № 2, 198-205. Арефьева И.Я. Корепин В.Е. Письма ЖЭТФ, 1974, т.20, № 5, с.680-683. S c h r o e r B. at al. Phys.Lett., 1976, v.B63, p.422-425.
18. Z a m o l o d c h i k o v A.B., Z a m o l o d c h i k o v Al.B. Nucl.Physics, 1978, v.B133, N 3, p.525-535.
19. Z a m o l o d c h i k o v A.B., Z a m o l o d c h i k o v Al.B. Ann.Phys., v.120, N 2, p.253-291.
20. К о р е п и н В.Е. ТМФ, 1979, т.41, № 2, с.169-189. A n d r i e N., L o w e n s t e i n J.H. Phys.Lett., 1980, v.91B, N 3-4, p.401-405.
21. Z a m o l o d c h i k o v A.B. Sov.Sci.Rev; Phys.Rev., 1980, v.2, p.3-50.
22. Г е р д т В.П., Т а р а с о в О.В., Ш и р о к о в Д.В. УФН, 1980, т.130, № 1, с.113-148.
23. Ч е р е д н и к И.В. ДАН СССР, 1979, т.249, № 5, с.1095-1098.
24. Ч е р е д н и к И.В. ТМФ, 1980, т.43, № 1, с.117-119.
25. Б е р е з и н Ф.А. Ядерная физика, 1979, т.29, № 6, с.1670-1687. Лейтес Д.А. УМН, 1980, т.35, № 1, с.3-57.
26. И з е р г и н А.Г., К у л и ш П.П. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1978, т.77, с.76-83.
27. C h a i c h i a n M., K u l i s h P. Phys.Lett., 1978, v.78B, N 4, p.413-416. Кулиш П.П., Цыпляев С.А. ТМФ (в печати).
28. М и х а й л о в А.В. Письма ЖЭТФ, 1978, т.28, № 8, с.554-558.
29. Б е р е з и н Ф.А. Метод вторичного квантования. М., 1965.
30. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu. LOMI preprint, E-4-79, Leningrad 1979.
31. М а н а к о в С.В. ТМФ, 1976, т.28, № 2, с.172-179.
32. B a x t e r R.J. Ann.Phys., 1972, v.70, N 2, p.323-337.
33. Ф а т е е в В.А. Ядерная физика (в печати).
34. З а м о л о д ч и к о в А.Б., Ф а т е е в В.А. Ядерная физика, 1980, т.32, с.587.

35. B e r g B., K a r o w s k i M., W e i s z P., K u r a k V. Nucl.Phys., 1978, v.B134, N 1, p.125-132.

36. M i k h a i l o v A., O l s h a n e t s k y M., P e r e l o m o v A. preprint ITEP-64, 1980, p.1-26.

37. B u l g a d a e v S.A. Landau Institute for Theor.Physics preprint, 1980, p.1-7.

38. B a s h i l o v Yu.A., P o k r o v s k y S.V. Comm.Math. Phys. (to be published); Landau Institute for Theor.Physics, preprint, 1980, p.1-23.

39. B e r g B., W e i s z P. preprint FUB-HEP-21-78, 1978, p.1-15.

40. P i s a r s k i R.D. Princeton University, preprint, 1979, p.1-15.

41. М и х а й л о в А.В. Письма ЖЭТФ, 1979, т.30, № 7, с.443-448.

42. Б а р и е в Р.З. Письма ЖЭТФ, 1980, т.32, № 1, с.10-14.

43. Т а х т а д ж я н Л.А. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1980, т.101, с.121-150.

44. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1980, т.101, с.71-93.

РЕФЕРАТЫ

УДК 519.4

Интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с градуированными алгебрами Ли. Рейман А.Г. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.Ш (Зап.науч.семин.ЛОМИ, т.95). Л., "Наука", 1980, с.3-54.

В работе предложена геометрическая схема построения интегрируемых гамильтоновых систем на основе групп Ли, обобщающая конструкцию М.Адлера. Рассмотрено действие этой схемы для параболических разложений полупростых групп Ли. Основные примеры интегрируемых систем связаны с градуированными алгебрами Ли. Среди них – обобщенные периодические цепочки Тоды, многомерные волчки, движение точки на различных однородных пространствах в квадратичном потенциале. Библ. – 36 назв.

УДК 517.43+530.145

Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния. Склянин Е.К. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.Ш (Зап.науч.семин.ЛОМИ, т.95). Л., "Наука", 1980, с.55-128.

Статья представляет собой развернутое и последовательное изложение квантового варианта метода обратной задачи рассеяния на примере нелинейного уравнения Шредингера. В основу рассмотрения положен разработанный автором метод R -матрицы. Получены производящая функция квантовых интегралов движения и переменные действие-угол для квантового нелинейного уравнения Шредингера. Описан также классический вариант метода R -матрицы. Библ. – 41 назв.

УДК 517.43+530.145

О решениях уравнения Янга – Бакстера. Кулиш П.П., Склянин Е.К.– В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика.Ш (Зап. науч. семин.ЛОМИ, т.95). Л., "Наука", 1980, с.129-160.

Приводятся основные определения, связанные с уравнением Янга – Бакстера (условие факторизации многочастичной S -матрицы) и формулируется задача классификации его решений. Перечисляются известные способы решения уравнения Я-Б, а также различные приложения этого уравнения к теории вполне интегрируемых квантовых и классических систем. Получено обобщение уравнения Я-Б на случай Z_2 -градуировки, отмечается возможная связь с теорией представлений. Приложение содержит около двадцати явных решений. Библ. – 44 назв.