

Գ.Բ. ԱԼԱԿԵՐԴՅԱՆ
Ա.Ս. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ
ՅՈՒ.Լ. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

ՄԱՍ 1

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՊԱՐԱՏԸ

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ
ՕՐԵՆՔՆԵՐՆ ՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ
ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

ԷԼԵԿՏՐԱՍՏԱՏԻԿԱ

ՄԱԳՆԻՍԱՍՏԱՏԻԿԱ

ՔՎԱԶԻՍՏԱՑԻՈՆԱՐ
ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏ

ՀՏԴ 537.8
ԳՄԴ 22.313
Ա 286

**Հրատարակության է երաշխավորել
Երևանի պետական համալսարանի
ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը**

**Գրախոս՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ.
Խ.Վ. Ներկարարյան**

Ալավերդյան Գ.Բ. և ուրիշ.,
Ա 286 Էլեկտրադինամիկայի խնդիրների ժողովածու /
Ալավերդյան Գ.Բ., Հարությունյան Ա.Ս., Վարդանյան Յու.Լ.:
– Եր.; Դար, 2006, 136 էջ:

Խնդրագիրքը պարունակում է դասական էլեկտրադինամիկայի
ավելի քան 160 խնդիր: Խնդիրների հիմնական մասը ներկա-
յացվում է մանրամասն լուծումներով: Նախատեսված է բարձ-
րագույն ուսումնական հաստատությունների ֆիզիկայի ուղղու-
թյամբ մասնագիտացող ուսանողների համար: Այն կարող է
օգտակար լինել նաև ասպիրանտների և գիտաշխատողների
համար:

ԵՊՀ Գրադարան



SU0207332

Ա 1604050000 2006
0123(01)20061

ԳՄԴ 22.313

ISBN 99941-47-19-0

© ԴԱԲ հրատարակություն 2006

Դասական էլեկտրադինամիկայի այս խնդրագիրքն ընդգրկում է տարբեր բարդության խնդիրներ, որոնք երկար տարիներ հեղինակներն օգտագործել են Երևանի պետական համալսարանի ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետում «էլեկտրադինամիկա և էլեկտրոնային տեսություն» առարկայի դասավանդման ընթացքում: Խնդրագիրքն սկսվում է մաթեմատիկական ներածությունով, որտեղ քվարկվում են խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ մաթեմատիկական առնչություններն ու գաղափարները և բերվում են մաթեմատիկական բնույթի խնդիրներ, որոնց լուծումը թույլ կտա յուրացնել էլեկտրադինամիկական խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ մաթեմատիկական ապարատը:

Յուրաքանչյուր բաժնի սկզբում հակիրճ շարադրված է այդ բաժնի խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ տեսական նյութը: Բերված են խնդիրների պատասխաններն ու գերակշռող մասի լուծումները:

Վստահ ենք, որ խնդրագիրքն օգտակար կլինի այն ուսանողների համար, որոնց ուսումնական ծրագրերում նախատեսված է տեսական ֆիզիկայի «էլեկտրադինամիկա» բաժինը, ինչպես նաև նրանց համար, ովքեր որոշել են ինքնուրույն ուսումնասիրել էլեկտրադինամիկան: Կարծում ենք այն կհետաքրքրի նաև ասպիրանտներին ու սկսնակ դասախոսներին:

Հեղինակները ջանք չեն խնայել խնդրագիրքը թերություններից ու վրիպակներից զերծ պահելու համար, այնուամենայնիվ չեն բացառում դրանց առկայությունը և երախտապարտ կլինեն նրանց, ովքեր նկատված բացթողումների ու վրիպակների մասին իրենց դիտարկումները կհայտնեն հեղինակներին (էլ. փոստ՝ galaverdyan@ysu.am):

Շնորհակալություն ենք հայտնում ԵՊՀ ալիքային պրոցեսների տեսության և ֆիզիկայի ամբիոնի դասախոսներին մեթոդական սեմինարների ժամանակ խնդիրների քննարկումների և պրոֆեսոր Խ. Ներկարարյանին օգտակար խորհուրդների համար:

Հեղինակներ
ք. Երևան, 2006 թ.

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ներկայացնենք դիֆերենցիալ օպերատորների արտահայտությունները տարբեր կոորդինատական համակարգերում:

Դեկարտյան կոորդինատական համակարգ՝

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.1\text{a})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (1.1\text{b})$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \hat{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right), \quad (1.1\text{c})$$

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}: \quad (1.1\text{d})$$

Գլանային կոորդինատական համակարգ՝

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z, \quad dV = r dr d\alpha dz,$$

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \hat{e}_\alpha \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \hat{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (1.2\text{a})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (1.2\text{b})$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{A} = & \hat{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z} \right) + \\ & + \hat{e}_\alpha \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \hat{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (1.2\text{c})$$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.2\text{d})$$

Գնդային կոորդինատական համակարգ՝

$$x = r \sin \vartheta \cos \alpha, \quad y = r \sin \vartheta \sin \alpha, \quad z = r \cos \vartheta,$$

$$dV = r^2 dr d\vartheta d\alpha, \quad d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\alpha,$$

$$\text{grad } \varphi = \hat{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \hat{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \hat{e}_\alpha \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad (1.3\text{a})$$

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial(A_\vartheta \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}, \quad (1.3\text{b})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \hat{e}_r \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(A_\alpha \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right] \right) + \\ &+ \hat{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\alpha)}{\partial r} \right) + \hat{e}_\alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} : \end{aligned} \quad (1.3\text{a})$$

Դիֆերենցիալ օպերատորները բավարարում են հետևյալ նույնություններին՝

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{grad}(\varphi \psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} : \quad (1.12)$$

Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմի համաձայն

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.13)$$

որտեղ S -ը V ծավալը պարփակող փակ մակերևույթ է:

Ստոքսի թեորեմի համաձայն

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.14)$$

որտեղ S -ը L փակ կորի վրա հենված կամայական մակերևույթ է, որի նորմալը կոնտուրի շրջանցման ուղղության հետ կազմում է աջ պտուտակային համակարգ:

Դիրակի δ -ֆունկցիան սահմանվում է

$$\begin{aligned} \delta(x - x_0) &= 0, \quad \text{եթե } x \neq x_0, \\ \int_a^b \delta(x - x_0) dx &= \begin{cases} 1, & \text{եթե } x_0 \in (a, b), \\ 1/2, & \text{եթե } x_0 = a \text{ կամ } x_0 = b, \\ 0, & \text{եթե } x_0 \notin [a, b]: \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

առնչությունների միջոցով: δ -ֆունկցիայի հիմնական հատկություններն են՝

$$\int_a^b f(x) \delta(x-x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{եթե } x_0 \in (a, b), \\ \frac{1}{2} f(x_0), & \text{եթե } x_0 = a \text{ կամ } x_0 = b: \end{cases} \quad (1.16)$$

$$0, \quad \text{եթե } x_0 \notin [a, b]:$$

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (1.17)$$

որտեղ $f(x)$ -ը և $g(x)$ -ը ածանցելի ֆունկցիաներ են, x_i մեծությունները $g(x) = 0$ հավասարման լուծումներն են:

Եռաչափ δ -ֆունկցիան սահմանվում է

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \quad (1.18)$$

առնչությամբ և քավարարում է

$$\int_V f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) dV = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0), & \text{եթե } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0, & \text{եթե } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} \quad (1.19)$$

պայմանին: Եռաչափ δ -ֆունկցիայի համար իրավացի է հետևյալ ինտեգրալ ներկայացումը՝

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}: \quad (1.20)$$

$f(\mathbf{r}, t)$ ֆունկցիայի Ֆուրիե-վերլուծությունը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint f_F(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega: \quad (1.21)$$

$f_F(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}(f(\mathbf{r}, t))$ Ֆուրիե-պատկերը որոշվում է

$$f_F(\mathbf{k}, \omega) = \iint f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} dV dt \quad (1.22)$$

հակադարձ ձևափոխության միջոցով:

$$\hat{L} \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = -4\pi f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.23)$$

գծային անհամասեռ դիֆերանցիալ հավասարման $G(x_1, x'_1, \dots, x_n, x'_n)$ Φ -րիմի ֆունկցիա է կոչվում

$$\hat{L} G(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n) = -4\pi \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) \quad (1.24)$$

հավասարման լուծումը:

- 1.1** Էլեկտրաստատիկայում էլեկտրական դաշտի E լարվածությունը և φ պոտենցիալը կապված են $E = -\text{grad } \varphi$ առնչությամբ: Գտեք E -ն հետևյալ դեպքերում.

$$\begin{aligned} \text{ա) } \varphi &= a \cdot (b \times r), & \text{դ) } \varphi &= p \cdot r / r^3, \\ \text{բ) } \varphi &= (a \times r) \cdot (b \times r), & \text{ե) } \varphi &= f(r)g(r), \\ \text{գ) } \varphi &= (a \cdot r) \cos(k \cdot r), & \text{զ) } \varphi &= f[g(a \cdot r)]: \end{aligned}$$

Ենթադրվում է, որ a, b, k, p վեկտորները հաստատուն են, իսկ $f(r)$ և $g(r)$ ֆունկցիաները՝ անժամանակ:

- 1.2** Դատարկության մեջ էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածությունը բավարարում է $\text{div} E = 0$ և $\text{rot} E = 0$ հավասարումներին: Կարելի՞ է արդյոք տրված դատարկ տիրույթից դուրս լիքների այնպիսի բաշխում ընտրել, որ նրա ներսում դաշտն ունենա այսպիսի տեսք.

- ա) $E = E_0$,
 բ) $E = a(b \cdot r)$,
 գ) $E = (a \cdot b)r$,
 դ) $E = a \times (b \times r)$,
 ե) $E = (a \cdot r)(k \times r)$,
 զ) $E = r \times (b \times r)$,
 լ) $E = a(b \cdot r) \cos(k \cdot r)$,
 լ) $E = E_r \hat{e}_r + E_\vartheta \hat{e}_\vartheta + E_\alpha \hat{e}_\alpha$, որտեղ E դաշտը որոշված է գնդա-
 յին կոորդինատական համակարգում՝

$$E_r = Ar^{-4}(3\cos^2\vartheta - 1), \quad E_\vartheta = Ar^{-4}\sin 2\vartheta, \quad E_\alpha = 0,$$

- թ) $E = E_r \hat{e}_r + E_\alpha \hat{e}_\alpha + E_z \hat{e}_z$, որտեղ E դաշտը որոշված է գլա-
 մային կոորդինատական համակարգում՝

$$E_r = A \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad E_\alpha = A \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right), \quad E_z = 0,$$

Այստեղ E_ϑ, a, b, k վեկտորները կախված չեն կոորդինատ-
 ներից, A -ն հաստատուն է:

- 1.3** Մագնիսատատիկ դաշտը տարածության այն կետերում, որտեղ հոսանքները բացակայում են, բավարարում է $\text{rot} H = 0$ և $\text{div} H = 0$ հավասարումներին: Նման տիրույթից դուրս կարելի՞ է արդյոք էլեկտրական հոսանքների այնպիսի բաշխում ընտրել, որ տիրույթի ներսում մագնիսական դաշտն ունենա այսպիսի տեսք.

- ա) $H = H_0$, որտեղ H_0 -ն հաստատուն վեկտոր է,

բ) $H = a(z\hat{e}_x + x\hat{e}_y + y\hat{e}_z)$, որտեղ a -ն հաստատուն է,

գ) $H = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$, որտեղ $\mathbf{m}$ -ը հաստատուն վեկտոր է, իսկ

$\mathbf{r} = 0$ կետը դիտարկվող տիրույթում չէ:

1.4 Լիցքերի ρ ծավալային խտությունը և նրանց ստեղծած $\mathbf{E}$ լարվածությունը բավարարում են $\text{div}\mathbf{E}=4\pi\rho$ հավասարմանը: Որոշեք լիցքերի ρ խտությունը, եթե

ա) $\mathbf{E} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}$,

բ) $\mathbf{E} = q\mathbf{r}\mathbf{r}$,

գ) $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{er}}{r^3} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right] \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \right\}$,

դ) $\mathbf{E} = E_r\hat{e}_r + E_\vartheta\hat{e}_\vartheta + E_\alpha\hat{e}_\alpha$, որտեղ $\mathbf{E}$ դաշտը որոշված է գնդային կոորդինատական համակարգում՝

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 2\pi\rho_0 \left(r - \frac{2}{3}R \right) \cos\vartheta, \\ E_\vartheta &= \pi\rho_0 \left(\frac{4}{3}R - r \right) \sin\vartheta, \quad E_\alpha = 0 \end{aligned} \right\} \quad (r \leq R)$$

$$E_r = \frac{2\pi}{3}\rho_0 R^4 \frac{\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^4 \frac{\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_\alpha = 0 \quad (r > R)$$

ե) $\mathbf{E} = E_r\hat{e}_r + E_\alpha\hat{e}_\alpha + E_z\hat{e}_z$, որտեղ $\mathbf{E}$ դաշտը որոշված է գլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{4\pi}{3}\rho_0(2r-R)\cos\alpha, \\ E_\alpha &= \frac{4\pi}{3}\rho_0(R-r)\sin\alpha, \quad E_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (r \leq R),$$

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{2\pi}{3}\rho_0 R \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos\alpha, \\ E_\alpha &= \frac{2\pi}{3}\rho_0 R \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) \sin\alpha, \quad E_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (r > R):$$

Այստեղ q, e, a, R, ρ_0 մեծությունները և α վեկտորը կախված չեն կոորդինատներից:

1.5 Մագնիսատատիկայում էլեկտրական հոսանքի j ծավալային խտությունը և մագնիսական դաշտի H լարվածությունը կապված են $\text{rot} H = \frac{4\pi}{c} j$ հավասարումով: Որոշեք j -ն, եթե

ա) $H = f(r)(a \times r)$, որտեղ $f(r)$ -ը կամայական ամանյեի ֆունկցիա է, իսկ a -ն՝ հաստատուն վեկտոր,

բ) $H = (a \cdot r)(b \times r)$, որտեղ a և b հաստատուն վեկտորներ են,

գ) $H = H_r \hat{e}_r + H_\theta \hat{e}_\theta + H_\alpha \hat{e}_\alpha$, որտեղ H դաշտը որոշված է գնդային կոորդինատական համակարգում՝

$$\left. \begin{aligned} H_r &= a \left(\frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos \vartheta, \\ H_\theta &= a \left(\frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right) \sin \vartheta, \quad H_\alpha = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (r \leq R),$$

$$H_r = \frac{2aR}{15r^3} \cos \vartheta, \quad H_\theta = \frac{aR}{15r^3} \sin \vartheta, \quad H_\alpha = 0, \quad (r > R):$$

Այստեղ a և R մեծությունները հաստատուններ են:

դ) $H = H_r \hat{e}_r + H_\alpha \hat{e}_\alpha + H_z \hat{e}_z$, որտեղ H դաշտը որոշված է գլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$H_r = 0, \quad H_\alpha = gr, \quad H_z = b(R - r), \quad (r \leq R),$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\alpha = \frac{gR^2}{r}, \quad (r > R):$$

Այստեղ b , g և R մեծությունները հաստատուններ են:

1.6 j վեկտորը ժամանակից և կոորդինատներից կախված է $j(r, t) = j(t - r/c)$ օրենքով, որտեղ c -ն լույսի արագությունն է: Ցույց տվեք, որ

$$\text{rot} j = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{j \times r}{r} \right):$$

1.7 Օգտվելով δ -ֆունկցիայի հատկություններից գտեք լիցքի $\rho(r)$ ծավալային խտությունը դեկարտյան, գնդային և գլանային կոորդինատական համակարգերում, եթե ունենք՝

ա) $r = r_0$ կետում տեղավորված q կետային լիցք,

բ) σ մակերևութային խտությամբ, համասեռ լիցքավորված R շառավղով գնդային մակերևույթ, որի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում,

- զ) λ գծային խտությամբ, համասեռ լիցքավորված R շառավղով օղակ, որը տեղավորված է XOY հարթության մեջ, իսկ կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում,
- դ) λ գծային խտությամբ, համասեռ լիցքավորված անվերջ լար՝ ուղղված z առանցքով,
- ե) σ մակերևութային խտությամբ, համասեռ լիցքավորված հարթություն, որը համընկնում է XOY հարթության հետ,
- զ) σ մակերևութային խտությամբ, համասեռ լիցքավորված R շառավղով գլանային մակերևույթ, որի համաչափության առանցքը z առանցքն է:

- 1.8 l հեռավորության վրա գտնվող e և $-e$ լիցքերի համախումբն անվանում են p մոմենտով կետային դիպոլ, երբ l -ը ձգտում է զրոյի, իսկ լիցքերի բացարձակ մեծությունը՝ անվերջության, այնպես, որ

$$\lim_{l \rightarrow 0, e \rightarrow \infty} (el) = p:$$

l վեկտորի ուղղությունն ընտրվում է բացասական լիցքից դեպի դրականը:

r_0 կետում գտնվող p մոմենտով կետային դիպոլի լիցքի $\rho(r)$ ծավալային խտությունն արտահայտեք δ -ֆունկցիայի միջոցով:

- 1.9 Գտեք $\Delta \varphi = 0$ Լապլասի հավասարման ընդհանուր լուծումը, եթե φ -ն կախված է միայն $w(r, p)$ և q α գնդային կոորդինատներից:

- 1.10 Գտեք $\Delta \varphi = 0$ Լապլասի հավասարման ընդհանուր լուծումը, եթե φ -ն կախված է միայն $w(r, p)$ α , q z գլանային կոորդինատներից:

- 1.11 Ցույց տվեք, որ r_0 կետում տեղավորված q կետային լիցքի $\varphi = q/|r - r_0|$ պոտենցիալը բավարարում է

$$\Delta \varphi = -4\pi q \delta(r - r_0)$$

հավասարմանը:

- 1.12 Լիցքերի տրված $\rho(r)$ ծավալային բաշխման դեպքում նրանց ստեղծած $\varphi(r)$ պոտենցիալը վերադրման սկզբունքի համաձայն կարելի է հաշվել

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r') dV'}{|r - r'|}$$

բանաձևի օգնությամբ: Որոշեք φ -ն, եթե՝

ա) $\rho(r) = e\delta(r - r_0)$,

բ) $\rho(r) = -(p \cdot \nabla) \delta(r)$, որտեղ p -ն հաստատուն վեկտոր է,

գ) $\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = \text{const} & (r \leq R), \\ 0 & (r > R): \end{cases}$

1.13 Հաշվեք

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

դաշտերի դիվերգենցիան և ռոտորը:

1.14 Հաշվեք համակարգի

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) dV$$

մագնիսական մոմենտը, եթե $\mathbf{j}$ հոսանքի խտությունը հավասար է՝
 ա) $\mathbf{j} = \text{rot}[\mathbf{a}f(r)]$, որտեղ $\mathbf{a}$ -ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ $f(r)$ -ը
 $r \rightarrow \infty$ դեպքում նվազում է ավելի արագ, քան r^{-3} ֆունկցիան:

բ) $\mathbf{j} = (\mathbf{a} \times \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, որտեղ $\mathbf{a}$ և $\mathbf{r}_0$ վեկտորները հաստատուն են:

1.15 Ապացուցեք, որ կամայական $\mathbf{A}$ վեկտորական և φ սկալյար դաշտերի համար ճիշտ են հետևյալ իմտեզրալ նույնությունները՝

$$\text{ա) } \int_V \nabla \varphi(\mathbf{r}) dV = \oint_S \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S}$$

$$\text{բ) } \int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{գ) } \int_V \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = - \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}$$

$$\text{դ) } \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \varphi(\mathbf{r}) = \oint_L \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{l}$$

$$\text{ե) } \int_S (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \oint_L d\mathbf{l} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

1.16 Ապացուցեք, որ եթե V ծավալի ներսում $\mathbf{A}$ վեկտորը բավարարում է $\text{div} \mathbf{A} = 0$ պայմանին, իսկ V ծավալը պարփակող S մակերևույթի վրա նրա նորմալ բաղադրիչը՝ $A_n = 0$, ապա

$$\int_V \mathbf{A} dV = 0:$$

1.17 Ապացուցեք Գրինի նույնությունները՝

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \nabla \psi \nabla \varphi) dV = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

որտեղ $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ -ը և $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ -ը φ և ψ սկալյար ֆունկցիաների գրադիենտների նորմալ բաղադրիչներն են S մակերևույթի նկատմամբ:

1.18 Ցույց տվեք, որ եթե գնդային ծավալի ներսում ամենուրեք $\Delta\varphi = 0$, ապա φ պոտենցիալի միջին արժեքը գնդային մակերևույթի վրա հավասար է նրա արժեքին գնդի կենտրոնում:

1.19 $\varphi_F(\mathbf{k}, \omega)$ -ն և $A_F(\mathbf{k}, \omega)$ -ն $\varphi(\mathbf{r}, t)$ սկալար և $A(\mathbf{r}, t)$ վեկտորական ֆունկցիաների ֆուրիե-պատկերներն են՝

$$\varphi_F(\mathbf{k}, \omega) = F(\varphi(\mathbf{r}, t)), \quad A_F(\mathbf{k}, \omega) = F(A(\mathbf{r}, t))$$

Հաշվեք հետևյալ մեծությունների ֆուրիե-պատկերները՝

ա) $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, բ) $\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$, գ) $\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t)$,

դ) $\Delta \varphi(\mathbf{r}, t)$, ե) $\text{div} A(\mathbf{r}, t)$, զ) $\text{rot} A(\mathbf{r}, t)$

1.20 Ապացույցեք, որ $f(t)$ ֆունկցիան և նրա $f(\omega)$ ժամանակային ֆուրիե-պատկերը բավարարում են

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_F(\omega)|^2 d\omega$$

հավասարմանը (Պարսևալի հավասարում):

1.21 Հաշվեք $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$ ֆունկցիայի $\varphi_F(\mathbf{k})$ ֆուրիե պատկերը:

1.22 v հաստատուն արագությամբ շարժվող լիցքին համապատասխանող հոսանքի խտությունը տրվում է $j(\mathbf{r}, t) = ev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ բանաձևով: Հաշվեք $j(\mathbf{r}, t)$ հոսանքի $j_F(\mathbf{k}, \omega)$ ֆուրիե պատկերը:

1.23 Ստացեք $\Delta\varphi = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ Պուասոնի հավասարման $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ Գրինի ֆունկցիան:

1.24 Ստացեք

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t)$$

Դալամբերի հավասարման Գրինի ֆունկցիան:

1.25 Հաշվեք անհամասեռ ալիքային հավասարման $G(\mathbf{R}, \tau)$ ուշացող Գրինի ֆունկցիայի $G(\mathbf{R}, \omega)$ ժամանակային ֆուրիե-պատկերը:

ԷԼԵԿՏՐՈՂԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐՆ ՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Էլեկտրամագնիսական դաշտը բնութագրող հիմնական մեծություններն են էլեկտրական դաշտի E լարվածությունը և մագնիսական դաշտի B ինդուկցիան, որոնք դատարկության մեջ որոշվում են Մաքսվելի հավասարումներից՝

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c} j + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho: \quad (2.4)$$

Այստեղ c -ն էլեկտրադինամիկական հաստատունն է և հավասար է լույսի արագությանը դատարկության մեջ, ρ -ն էլեկտրական լիցքերի խտությունն է, j -ն՝ էլեկտրական հոսանքի խտությունը, որոնք կապված են էլեկտրական լիցքերի պահպանության օրենքն արտահայտող

$$\operatorname{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

անընդիատության (անխզելիության) հավասարումով:

Էլեկտրական դաշտի կողմից ρ և j խտություններով բաշխված լիցքերի և հոսանքների վրա ազդող ուժի խտությունը որոշվում է

$$f = \rho E + \frac{1}{c} (j \times B) \quad (2.6)$$

բանաձևով: f -ը կոչվում է Լորենցի ուժի խտություն:

Մաքսվելի հավասարումները մի շարք փորձնական փաստերի ընդհանրացումներ են:

(2.1)-ի հիմքում ընկած են Բիո-Սավարի

$$B(r) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dV' \quad (2.7)$$

օրենքը և այն փաստը, որ մրրկային մագնիսական դաշտի պատճառ կարող է լինել ոչ միայն էլեկտրական հոսանքը, այլև փոփոխական էլեկտրական դաշտը:

(2.2) հավասարումը Ֆարադեյի

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.8)$$

օրենքի ընդհանրացումն է:

(2.8)-ում $\mathcal{E}$ -ն մակաձման էլեկտրաշարժ ուժն է L կոնտուրում, իսկ

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

մեծությունը՝ մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորի հոսքը այդ կոնտուրին հենված S մակերևույթով:

(2.3) հավասարումն արտահայտում է մագնիսական լիցքերի բացակայության փաստը:

(2.4)-ի հիմքում Կուլոնի օրենքն է՝

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} : \quad (2.9)$$

Միջավայրերում, որտեղ ներքին դաշտերը պայմանավորված են ինչպես արտաքին դաշտերով, այնպես էլ միջավայրերի էլեկտրական և մագնիսական բևեռացումներով, հարմար է մտցնել էլեկրամագնիսական դաշտի ևս երկու բնութագիր՝ էլեկտրական դաշտի $\mathbf{D}$ ինդուկցիան և մագնիսական դաշտի $\mathbf{H}$ լարվածությունը՝

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}, \quad (2.11)$$

որտեղ $\mathbf{P}$ -ն միավոր ծավալի էլեկտրական դիպոլային մոմենտն է (էլեկտրական բևեռացումը), $\mathbf{I}$ -ն՝ միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտը (մագնիսացումը):

Մաքսվելի հավասարումները միջավայրերում ունեն այսպիսի տեսք՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho : \quad (2.15)$$

Եթե դիտարկվող միջավայրը համասեռ է և իզոտրոպ, իսկ արտաքին դաշտերը շատ ավելի փոքր են ներքին ատոմական դաշտերից, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ և $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ վեկտորները կապված են պարզ գծային օրենքով

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (2.17)$$

որտեղ ε -ը միջավայրի դիէլեկտրական թափանցելիությունն է, μ -ն՝ մագնիսական թափանցելիությունը:

Միջավայրերի բաժանման սահմանին դաշտի վեկտորները բավարարում են

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad (2.18)$$

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}, \quad (2.19)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \quad (2.20)$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \quad (2.21)$$

սահմանային պայմաններին: Այստեղ n և τ ինդեքսներով նշանակվել են վեկտորների նորմալ և տանգենցիալ բաղադրիչները: Բաժանման մակերևույթի $\mathbf{n}$ նորմալը առաջին միջավայրից ուղղված է դեպի երկրորդ միջավայրը: σ -ն ազատ լիցքերի մակերևութային խտությունն է, i -ն՝ մակերևութային լիցքերի հոսանքի խտությունը:

Էլեկտրամագնիսական դաշտը կարելի է բնութագրել φ սկալյար և $\mathbf{A}$ վեկտորական պոտենցիալների միջոցով, որոնք $\mathbf{E}$ և $\mathbf{B}$ վեկտորների հետ կապված են

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.23)$$

առնչություններով:

$$\text{div} \mathbf{A} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

Լորենցի պայմանի դեպքում φ և $\mathbf{A}$ պոտենցիալները բավարարում են Դալանբերի հավասարմանը (անհամասեռ ալիքային հավասարմանը)՝

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad (2.25)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \mu}{c} \mathbf{j} : \quad (2.26)$$

Էներգիայի պահպանության օրենքը էլեկտրադինամիկայում արտահայտվում է, այսպես կոչված, էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումով (Պոյնտինգի թեորեմ)՝

$$Q = -\frac{\partial w}{\partial t} - \text{div} \mathbf{S}, \quad (2.27)$$

որտեղ Q -ն էլեկտրամագնիսական դաշտի կատարած աշխատանքն է միավոր ծավալի ազատ լիցքերի վրա, միավոր ժամանակում՝

$$Q = j \cdot E, \quad (2.28)$$

w -ն էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիայի խտությունն է միջավայրում՝

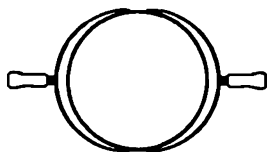
$$w = \frac{1}{8\pi} (E \cdot D + B \cdot H), \quad (2.29)$$

S -ը էլեկտրամագնիսական էներգիայի հոսքի խտությունը միջավայրում (Պոյնտինգի վեկտոր)՝

$$S = \frac{c}{4\pi} (E \times H): \quad (2.30)$$

2.1 1771 թ. անգլիացի ֆիզիկոս Քավենդիշը

փորձով ցույց է տվել, որ եթե լիցքավորված մետաղյա գնդին հալենք մեկուսիչ բռնակներով երկու մետաղյա կիսոլորտներ և հետո հեռացնենք, ապա արդյունքում գնդի լիցքը կհավասարվի զրոյի:



Ենթադրելով, որ երկու էլեկտրական լիցքի փոխազդեցությունը կենտրոնական բնույթի է, այսինքն նրանց փոխազդեցության ուժը կարելի է ներկայացնել $F_{12} = e_1 e_2 f(r) \mathbf{r}/r$ տեսքով, և հենվելով Քավենդիշի փորձի արդյունքների վրա՝ ցույց տվեք, որ $f(r) = 1/r^2$:

2.2 Ընդունելով, որ r_0 շառավիղ վեկտորով կետում գտնվող Idl հոսանքի տարրի ստեղծած $d\mathbf{B}$ դաշտը $\mathbf{r}$ կետում ունի $d\mathbf{l} \times \mathbf{R}$ ուղղություն ($\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$) և գրելով $d\mathbf{B} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{R})f(R)$, գտեք $f(R)$ ֆունկցիան՝ օգտվելով այն փորձնական փաստից, որ հոսանքատար սղենոիդի դաշտը նրանից դուրս հավասար է զրոյի:

2.3 Օգտվելով Կուլոնի օրենքից և վերադրման սկզբունքից, ստացեք Մաքսվելի $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$ հավասարումը:

2.4 Օգտվելով Ֆարադեյի էլեկտրամագնիսական մակածման օրենքից ստացեք Մաքսվելի $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ հավասարումը:

2.5 Օգտվելով Ամպերի բանաձևից՝ $d\mathbf{F} = \frac{I}{c} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, ցույց տվեք, որ $\mathbf{B}$ մագնիսական դաշտում $\mathbf{v}$ արագությամբ շարժվող e կետային լիցքի վրա ազդում է $\mathbf{F} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ ուժը (Լորենցի ուժը):

2.6 Ապացույեք $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D} = 0$ մասնի երկու թեորեմները.

ա) Եթե էլեկտրամագնիսական դաշտը ստեղծում է հաստատուն արագությամբ շարժվող լիցքերի համակարգը, ապա

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E} / c:$$

բ) Եթե էլեկտրամագնիսական դաշտը ստեղծում են հաստատուն արագությամբ շարժվող հաստատուն հոսանքները, ապա

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} / c:$$

2.7 Ցույց տվեք, որ Մաքսվելի (2.3) և (2.4) հավասարումները (2.1) և (2.2) հավասարումների սկզբնական պայմաններն են:

2.8 Ցույց տվեք, որ (2.5) անընդհատության հավասարումը պարունակվում է Մաքսվելի հավասարումների մեջ:

2.9 Ցույց տվեք, որ լիցքերի և հոսանքների բացակայության դեպքում էլեկտրական դաշտի $\mathbf{E}$ լարվածությունը և մագնիսական դաշտի $\mathbf{B}$ ինդուկցիան բավարարում են ալիքային հավասարմանը:

2.10 Ինչպիսի՞ հավասարումների են բավարարում φ և $\mathbf{A}$ պոտենցիալները ε և μ թափանցելիություններով համասեռ միջավայրում, $\text{div} \mathbf{A} = 0$ Կուլոնյան չափաբերման պայմանի դեպքում:

2.11 Ցույց տվեք, որ արտաքին մագնիսական դաշտը չի կարող թափանցել իդեալական հաղորդիչի մեջ:

2.12 Օգտվելով էներգիայի պահպանության օրենքից և էլեկտրամագնիսական դաշտի էներգիայի դրականության պայմանից, ստացեք Լենցի կանոնը:

2.13 Ցույց տվեք, որ միջավայրի բացակայության դեպքում Լորենցի ուժի խտությունը կարելի է ներկայացնել

$$\mathbf{f}_k = -\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial t} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}$$

տեսքով, որտեղ

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}), \quad T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \delta_{ik} \right\}:$$

2.14 Օգտվելով իմպուլսի պահպանության օրենքից և համարելով, որ էլեկտրամագնիսական դաշտին կարելի է վերագրել մեխանիկական իմպուլս, պարզեք նախորդ խնդրում մտցրած $\mathbf{g}$ և T_{ik} մեծությունների ֆիզիկական իմաստը:

2.15 Ցույց տվեք, որ ստատիկ դեպքում T_{ik} լարումների թեճգորի հոսքը V ծավալը պարփակող S մակերևույթով հավասար է այդ ծավալի ներսում գտնվող լիցքավորված մասնիկների վրա ազդող գումարային ուժին:

- 2.16** Օգտվելով էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումից ապացույցեք, որ Մաքսվելի հավասարումների համակարգը $E(r,t)$, $H(r,t)$ դաշտերի համար V ծավալում, ցանկացած t պահին ունի միակ լուծում, եթե ա) V ծավալի յուրաքանչյուր կետում տրված են այդ վեկտորները $t = 0$ պահին, բ) ժամանակի ցանկացած պահին հայտնի է այդ վեկտորներից որևէ մեկի տանգենցիալ բաղադրիչը V ծավալը պարփակող S մակերևույթի յուրաքանչյուր կետում:

- 2.17** Ցույց տվեք, որ երկու միջավայրերի սահմանի վրա հոսանքի խտության նորմալ և տանգենցիալ բաղադրիչները բավարարում են

$$\frac{j_{1\tau}}{\lambda_1} - \frac{j_{1\tau}}{\lambda_2} = 0, \quad j_{2n} - j_{1n} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

պայմաններին, որտեղ λ -ն նյութի տեսակարար հաղորդականությունն է, իսկ σ -ն մակերևութային լիցքերի խտությունը:

- 2.18** Մաքսվելի հավասարումները միջավայրերում գրեք Լորենցի ուժը որոշող E և B դաշտերի և միջավայրում նրանց մակածած $\rho_{կապ}$ և $j_{կապ}$ լիցքերի և հոսանքների խտությունների միջոցով: Ցույց տվեք, որ $\rho_{կապ}$ -ը և $j_{կապ}$ -ը բավարարում են անխզելիության հավասարմանը:

- 2.19** Ցույց տվեք, որ լիցքերի δr անվերջ փոքր տեղափոխության ժամանակ նրանց ρ խտությունը փոխվում է $\delta \rho = -\operatorname{div}(\rho \delta r)$ չափով:

- 2.20** Ստացեք էլեկտրական դիպոլի պոտենցիալն ու լարվածությունը $r \gg l$ հեռու կետերում, որտեղ l -ը դիպոլի լիցքերի հեռավորությունն է: Պատասխանն արտահայտեք $p = el$ դիպոլային մոմենտի միջոցով:

- 2.21** Տրված է էլեկտրական բևեռացման վեկտորի $P(r)$ դաշտը: Հայտնի է, որ $P(r)$ ֆունկցիան շատ հեռվում ավելի արագ է նվազում, քան $1/r^2$ ֆունկցիան: Ապացույցեք, որ բևեռացման վեկտորի այդպիսի բաշխվածությամբ ստեղծված էլեկտրական դաշտը համարժեք է $\rho(r) = -\operatorname{div} P(r)$ ծավալային խտությամբ լիցքի դաշտին:

- 2.22** Ցույց տվեք, որ կապված լիցքերի

$$\int_V \rho_{կապ} dV = 0$$

չեզոքության պայմանից և

$$\frac{\partial \rho_{կապ}}{\partial t} + \operatorname{div} j_{կապ} = 0$$

պահպանության օրենքից հետևում են կապված լիցքերի և հոսանքների հետևյալ ներկայացումները՝

$$\rho_{կապ} = -\operatorname{div} P, \quad j_{կապ} = \frac{\partial P}{\partial t} + c \operatorname{rot} I :$$

Ենթադրվում է, որ այսպես որոշված P և I վեկտորները նյութից դուրս հավասար են զրոյի:

2.23 Նյութի V ծավալով մակրոկտորի p էլեկտրական և m մագնիսական դիպոլային մոմենտները սահմանվում են այսպես՝

$$p = \int_V \rho_{կապ} r dV, \quad m = \frac{1}{2c} \int_V (r \times j_{կապ}) dV:$$

p -ն և m -ը արտահայտելով մախորդ խնդրում մտցրած P և I վեկտորների միջոցով, պարզեք վերջիններիս ֆիզիկական իմաստը:

2.24 Ցույց տվեք, որ կապված լիցքերի չեզոքության պայմանի շնորհիվ p էլեկտրական դիպոլային մոմենտը կախված չէ կոորդինատների սկզբնակետի ընտրությունից:

2.25 Ցույց տվեք, որ $\partial P / \partial t = 0$ պայմանի շնորհիվ m մագնիսական մոմենտը կախված չէ կոորդինատների սկզբնակետի ընտրությունից:

2.26 Ցույց տվեք, որ $j = c \operatorname{rot} I$ մագնիսացումով պայմանավորված հոսանքի խտության ներդրումը մնուշի կամայական կտրվածքով անցնող լրիվ հոսանքի մեջ հավասար է զրոյի:

2.27 Ժամանակի $t = 0$ պահին միանում է $B = B(t)$ լարվածությամբ մագնիսական դաշտը ($B(0) = 0$), որի ուղղությունը չի փոխվում: Դաշտում գտնվող m զանգվածով և Q լիցքով համասեռ գունդը դաշտի ազդեցության տակ սկսում է պտտվել: Ենթադրելով, որ գնդի ներսում B դաշտը համասեռ է և անտեսելով գնդի հակադարձ ազդեցությունը արտաքին մագնիսական դաշտի վրա, որոշեք գնդի պտույտի Ω անկյունային արագությունը:

2.28 Գրեք Մաքսվելի հավասարումները $E(r, t)$ և $B(r, t)$ դաշտերի ժամանակային և լրիվ Ֆուրիե-պատկերների համար (դատարկության դեպքում):

2.29 Լորենցի պայմանը և ալիքային հավասարումները գրեք $\varphi(r, t)$ և $A(r, t)$ պոտենցիալների ժամանակային և լրիվ Ֆուրիե-պատկերների համար (դատարկության դեպքում):

ԷԼԵԿՏՐԱԴՐԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

E արտաքին դաշտում դիէլեկտրական միջավայրը բնութագրվում է $P = \sum_i p_i$, էլեկտրական բևեռացման վեկտորով, որտեղ p_i -ն միջա-

վայրի i -րդ մասնիկի (ատոմի, իոնի, մոլեկուլի) դիպոլային մոմենտն է, իսկ գումարումը կատարվում է ըստ միավոր ծավալի բոլոր մասնիկների: Բևեռացման մեխանիզմի տեսակետից դիէլեկտրիկները բաժանվում են երկու հիմնական խմբի՝ բևեռային և ոչ բևեռային դիէլեկտրիկների:

Բևեռային դիէլեկտրիկներում միջավայրի մասնիկներն օժտված են սեփական դիպոլային մոմենտով (կոշտ դիպոլներ), որոնք, երբ արտաքին դաշտը բացակայում է, ունեն բաոսային ուղղվածություն: Արտաքին դաշտում նրանք ձեռք են բերում գերադասելի ուղղվածություն և միջավայրը բևեռանում է:

Ոչ բևեռային դիէլեկտրիկներում միջավայրի մասնիկները սեփական էլեկտրական դիպոլային մոմենտ չունեն, սակայն արտաքին էլեկտրական դաշտում կառուցվածքային մասնիկների ներսում (ատոմ, մոլեկուլ) դրական և բացասական լիցքերի կենտրոնների հակուղղված տեղաշարժերի պատճառով դրանք ձեռք են բերում դիպոլային մոմենտ: Այդպիսի դիպոլները ստացել են քվադրադոպական դիպոլներ անվանումը: Ներքին ատոմական դաշտերի համեմատությամբ թույլ արտաքին դաշտերում քվադրադոպական դիպոլների ձեռք բերած մոմենտը համեմատական է դաշտին՝ $p = \gamma_e E$, γ_e -ն կոչվում է բևեռացման գործակից (բևեռացվելիություն):

Ոչ նոսր դիէլեկտրիկներում միջավայրի մասնիկների վրա ազդող E' տեղային (լոկալ) դաշտը միջավայրի բևեռացման պատճառով կարող է զգալիորեն տարբերվել E արտաքին դաշտից: Իզոտրոպ միջավայրերում E' տեղային և E արտաքին դաշտերը կապված են

$$E' = E + \frac{4\pi P}{3} \quad (3.1)$$

առնչությամբ, որտեղ $4\pi P/3$ անդամը կոչվում է Լորենցի արդյունաբար դաշտ:

Ներքին ատոմական դաշտերի համեմատությամբ թույլ արտաքին դաշտերում $P(E)$ և $D(E)$ կախվածությունները գծային են: E հաստատուն արտաքին դաշտում տեղավորված իզոտրոպ դիէլեկտրիկներում այդ կապերն ունեն պարզագույն տեսք՝

$$\mathbf{P} = \chi_e^{(0)} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon^{(0)} \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

որտեղ $\chi_e^{(0)}$ -ն միջավայրի ստատիկ դիէլեկտրական ընկալունակությունն է, $\varepsilon^{(0)}$ -ն՝ ստատիկ դիէլեկտրական թափանցելիությունը: Ամիգոտրոպ միջավայրերում (3.2) առնչությունները փոխարինվում են

$$P_i = \chi_{ik} E_k, \quad D_i = \varepsilon_{ik} E_k \quad (3.3)$$

թեմզորական առնչություններով:

Փոփոխական էլեկտրական դաշտում $\mathbf{P}$ և $\mathbf{E}$ վեկտորների միջև ամենաընդհանուր գծային կապը համասեռ միջավայրերում ունի

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t d\mathbf{r}' \int dV' \kappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad (3.4)$$

տեսքը, որտեղ $\kappa(\mathbf{r}, t)$ ֆունկցիան որոշվում է միջավայրի հատկություններով: (3.4)-ում հաշվի է առնված, որ տարածության $\mathbf{r}$ կետում ժամանակի t պահին էլեկտրական քնեռացումը կարող է կախված լինել ինչպես շրջակա կետերում դաշտի արժեքներից (տարածական դիսպերսիայի երևույթ), այնպես էլ t պահին նախորդած պահերին դաշտի արժեքներից (ժամանակային դիսպերսիայի երևույթ): Տարածական դիսպերսիայի բացակայության դեպքում (3.4)-ը դառնում է

$$\mathbf{P}(t) = \int_{-\infty}^t \kappa(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (3.5)$$

կամ անցնելով $\mathbf{P}$ և $\mathbf{E}$ ֆունկցիաների ֆուրիե պատկերներին՝

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (3.6)$$

որտեղ

$$\chi_e(\omega) = \int_0^{\infty} \kappa(t) e^{i\omega t} dt: \quad (3.7)$$

Տարածական դիսպերսիայի բացակայության դեպքում $\mathbf{D}(t)$ և $\mathbf{E}(t)$ վեկտորների միջև կապն ընդունված է գրել

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \kappa(t - t') \mathbf{E}(t') dt' \quad (3.8)$$

տեսքով, կամ, ֆուրիե-պատկերների համար՝

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (3.9)$$

որտեղ

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi_e(\omega): \quad (3.10)$$

(3.6)-ում և (3.9)-ում $\chi(\omega)$ և $\varepsilon(\omega)$ կոմպլեքս գործակիցները նույնպես կոչվում են դիելեկտրական ընկալունակություն և դիելեկտրական թափանցելիություն, սակայն նրանք հիմա կապ են հաստատում տրված հաճախությամբ համապատասխանող $P(\omega)$, $E(\omega)$ և $D(\omega)$, $E(\omega)$ վեկտորների միջև և իրենք էլ կախված են նույն հաճախությունից (այդ պատճառով ժամանակային դիսպերսիայի փոխարենն օգտագործում են մասն հաճախային դիսպերսիա անվանումը):

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \quad (3.11)$$

կոմպլեքս թափանցելիության իրական մասը ω -ից կախված գույզ ֆունկցիա է, կեղծ մասը՝ կենտ ֆունկցիա՝

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega): \quad (3.12)$$

Սրանք իրար հետ կապված են, այսպես կոչված, դիսպերսիոն առնչություններով (Քրամերս-Քրոնիգի առնչություններ)՝

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3.13)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3.14)$$

որտեղ P նշանը սույն է տալիս, որ ինտեգրալները հաշվվում են գլխավոր արժեքի իմաստով:

Մագնետիկների հիմնական բնութագրերից է I մագնիսական բևեռացման (մագնիսացման) վեկտորը, որը թույլ դաշտերի դեպքում գծայնորեն է կախված մագնիսական ինդուկցիայից: Ըստ որում հաստատուն դաշտում գտնվող իզոտրոպ մագնետիկներում

$$I = \chi_m^{(0)} B, \quad H = \frac{1}{\mu^{(0)}} B, \quad (3.15)$$

որտեղ $\chi_m^{(0)}$ -ն ստատիկ մագնիսական ընկալունակությունն է, $\mu^{(0)}$ -ն՝ մագնիսական թափանցելիությունը: Մագնետիկները դասակարգվում են ըստ մագնիսական ընկալունակության մեծության և նշանի: $\chi_m^{(0)} < 0$ հատկությամբ միջավայրերը կոչվում են դիամագնիսներ, $\chi_m^{(0)} > 0$ ՝ պարամագնիսներ: Շատ մեծ մագնիսական ընկալունակությամբ նյութերը ($\chi_m^{(0)} \gg 0$) կոչվում են ֆեռոմագնիսներ, սակայն նրանց համար $I(B)$ կապը գծային չէ:

Արտաքին մագնիսական դաշտի ազդեցության տակ դիամագնիսների ատոմների էլեկտրոնային թաղանթներում էլեկտրամագնիսական մակաձման օրենքի համաձայն առաջանում են մակաձված շրջանային

հոսանքներ, որոնցով պայմանավորված մագնիսական մոմենտները, L -ենյի կանոնի համաձայն, հակառակ են ուղղված մագնիսական դաշտին: Դիամագնիսությունը բնորոշ է բոլոր նյութերին, սակայն դրանով պայմանավորված մագնիսացումը թույլ է ($|\chi_m| \sim 10^{-6}$):

Պարամագնիսներում ատոմներն օժտված են սեփական մագնիսական մոմենտով, սակայն դրանց ուղղվածությունը տարածության մեջ քառսային է, այնպես որ, արտաքին մագնիսական դաշտի բացակայության դեպքում նրանք մագնիսական հատկություններ չեն դրսևորում: Արտաքին մագնիսական դաշտում մագնիսական դիպոլները ձեռք են բերում գերադասելի ուղղվածություն և միջավայրը մագնիսանում է: Պարամագնիսների մագնիսական թափանցելիությունը մեծ չէ ($\chi_m^{(0)} \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$) և կախված է միջավայրի ջերմաստիճանից:

Փոփոխական մագնիսական դաշտերում $\chi_m(\omega)$ և $\mu(\omega)$ մեծությունների հատկությունները մնան են $\chi_e(\omega)$ -ի և $\varepsilon(\omega)$ -ի հատկություններին, միայն թե ω -ի աճի հետ $\mu(\omega)$ մագնիսական թափանցելիությունը արագ ձգտում է մեկի:

Մետաղների էլեկտրոնային տեսությունում (Դրուդե-Լորենցի տեսություն) ենթադրվում է, որ մետաղներում կա ազատ էլեկտրոնային գազ, ըստ որում արտաքին դաշտի բացակայության դեպքում էլեկտրոնները կատարում են չկարգավորված ջերմային շարժում: Արտաքին էլեկտրական դաշտում էլեկտրոնների ջերմային շարժմանը գումարվում է ուղղորդված շարժում և առաջանում է էլեկտրական հոսանք: Ենթադրվում է, որ էլեկտրոնների բախումները միմյանց հետ կարելի է անտեսել, իսկ իոնների հետ բախվելիս էլեկտրոններն ամբողջովին նրանց են հաղորդում արտաքին էլեկտրական դաշտում ձեռք բերած էներգիան, որի հետևանքով միջավայրը տաքանում է (անջատվում է ջոուլյան ջերմություն): Այս ենթադրությունների հիման վրա կարելի է բացատրել Օմի

$$j = \lambda E \quad (3.16)$$

և Ջոուլ-Լենցի

$$q = \lambda E^2 \quad (3.17)$$

օրենքները, որտեղ j -ն հոսանքի խտությունն է, q -ն՝ միջավայրի միավոր ծավալում միավոր ժամանակում անջատված ջերմության քանակը, λ -ն՝ ստատիկ հաղորդականությունը:

Փոփոխական էլեկտրական դաշտում հաղորդականությունը կախված է դաշտի ω հաճախությունից և կապ է հաստատում $j(\omega)$ և $E(\omega)$ վեկտորների միջև՝

$$j(\omega) = \lambda(\omega)E(\omega): \quad (3.18)$$

$\lambda(\omega)$ կոմպլեքս հաղորդականության համար նույնպես տեղի ունեն (3.11)-(3.14) տիպի առնչություններ:

Նշենք, որ $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\lambda(\omega)$ կոմպլեքս մեծությունների իրական մասերը բնութագրում են էլեկտրամագնիսական ակիքների ցրումը միջավայրերում, իսկ կեղծ մասերը՝ միջավայրի կլանող հատկությունները:

3.1 Ելնելով ընդհանուր դատողություններից որոշեք, թե հաստատուն էլեկտրական դաշտում ինչ տեսք ունի ոչ բևեռային դիէլեկտրիկների $\chi_e^{(0)}$ դիէլեկտրական ընկալունակությունը:

3.2 Գտեք ատոմի γ_e բևեռացվելիությունը, եթե էլեկտրոնները շարժվում են շրջանագծային ուղեծրերով:

3.3 Ջրածնի ատոմում էլեկտրոնային ամպի խտությունը նկարագրվում է

$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

բանաձևով, որտեղ e -ն տարրական լիցքն է, a -ն հաստատուն է: Որոշեք ատոմի γ_e բևեռացման գործակիցը (բևեռացվելիությունը)՝ համարելով, որ էլեկտրոնային ամպի տեսքը մնում է անփոփոխ:

3.4 Հավանականությունը, որ p դիպոլային մոմենտով մոլեկուլը արտաքին դաշտի հետ կկազմի $d\Omega$ մարմնային անկյան մեջ ընկած Θ անկյուն, տրվում է Բոլցմանի բաշխումով՝

$$dw = Ge^{-W(\Theta)/kT} d\Omega,$$

որտեղ G -ն չափաբերման հաստատունն է, $W(\Theta) = -p \cdot E$ մեծությունը՝ p դիպոլի և E դաշտի փոխազդեցության էներգիան, k -ն Բոլցմանի հաստատունը, T -ն միջավայրի ջերմաստիճանը: Օգտվելով Բոլցմանի բաշխումից հաշվեք միջավայրի դիէլեկտրական ընկալունակությունը p դիպոլային մոմենտով կոշտ դիպոլներից կազմված բևեռային դիէլեկտրիկում: Առանձին քննարկեք $p \cdot E \ll kT$ և $p \cdot E \gg kT$ դեպքերը:

3.5 Ընդունելով, որ իզոտրոպ դիէլեկտրիկի ներսում գործող E' տեղային դաշտը E արտաքին դաշտի հետ կապված է $E' = E + 4\pi P/3$ առնչությամբ, ստացեք կապ $\varepsilon^{(0)}$ դիէլեկտրական թափանցելիության և $\chi_e^{(0)}$ դիէլեկտրական ընկալունակության միջև (Կլաուզիուս-Մոսսոտիի առնչություն):

- 3.6** Օգտվելով էլեկտրաստատիկ դաշտի էներգիայի խտության $w = E \cdot D / 8\pi$ արտահայտությունից, ցույց տվեք, որ ϵ_{ik} էլեկտրական թնճորը համաչափ է՝ $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$:
- 3.7** Որոշեք ω_0 սեփական հաճախությամբ լիցքավորված տարածական օսյիլյատորի տատանումների հաճախությունը B հաստատուն մագնիսական դաշտում:
- 3.8** Հաշվեք B համասեռ մագնիսական դաշտի միացման ժամանակ մակածված մրրկային էլեկտրական դաշտի կողմից ատոմական էլեկտրոնին հաղորդված ΔP իմպուլսը:
- 3.9** Հաշվեք B համասեռ մագնիսական դաշտի միացման ժամանակ մակածված մրրկային էլեկտրական դաշտի կատարած ΔA աշխատանքը շրջանագծային ուղեծրով շարժվող ատոմական էլեկտրոնի վրա: Ենթադրեք, որ էլեկտրոնի ω_0 անկյունային արագության փոփոխությունը շատ փոքր է:
- 3.10** Հաշվեք միջավայրի էլեկտրոնների L արմոյան պտույտով պայմանավորված մագնիսական բևեռացման I վեկտորը (դիամագնիսայում):
- 3.11** Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից և էլեկտրոնային ամպի խտության համար 3.3 խնդրում բերված բանաձևից՝ հաշվեք ջրածնի ատոմներից կազմված միջավայրի $\chi_m^{(0)}$ մագնիսական ընկալունակությունը:
- 3.12** Հաշվեք m_0 մագնիսական մոմենտով մոլեկուլներից կազմված միջավայրի մագնիսական բևեռացման I վեկտորը (պարամագնիսայում):
- 3.13** Ցույց տվեք, որ B_0 արտաքին հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող պարամագնիսներում I մագնիսացման վեկտորը շրջանային պրեպեսիա է կատարում B_0 վեկտորի ուղղության շուրջը:
- 3.14** Ելնելով մետաղների Դրուդե-Լորենցի էլեկտրոնային տեսության դրույթներից
- ա) ստացեք հոսանքի խտության և արտաքին էլեկտրական դաշտի լարվածության $j(E)$ կախվածությունը: Զննարկեք փոքր և մեծ դաշտերի դեպքը,
 - բ) ստացեք հաղորդիչի միավոր ծավալում միավոր ժամանակում անջատված ջերմության քանակի $q(E)$ կախվածությունը արտաքին էլեկտրական դաշտի E լարվածությունից,

զ) Յույց տվեք, որ եթե համասեռ, հաստատուն B մագնիսական դաշտին ուղղահայաց, երկար, d լայնությամբ մետաղյա ժապավենի երկայնքով անցնում է j խտությամբ հոսանք, ապա ժապավենի եզրերին առաջանում է $\Delta\phi \sim j B d$ պոտենցիալների տարբերություն (Հոլլի էֆեկտ):

3.15 Ընդունելով, որ գերհաղորդիչներում նյութական հավասարումն ունի

$$j = -\frac{c}{4\pi\Lambda_0} A$$

տեսքը (Լոնդոնների հավասարում), որտեղ j -ն հոսանքի խտությունն է, A -ն՝ վեկտոր-պոտենցիալը, $\Lambda_0 = mc^2/4\pi N_e e^2$, N_e -ն էլեկտրոնների խտությունն է, ցույց տվեք, որ մագնիսական դաշտը չի թափանցում գերհաղորդիչի ներսը (Մայսների էֆեկտ):

3.16 Հաշվեք m զանգվածով և q լիցքով չիտխազդող մասնիկներից կազմված նոսր գազի $\chi_e(\omega)$ դիէլեկտրական ընկալունակությունը և $\varepsilon(\omega)$ դիէլեկտրական թափանցելիությունը:

3.17 Ցույց տվեք, որ մեծ հաճախությամբ փոփոխվող էլեկտրամագնիսական դաշտում բոլոր նյութերի $\varepsilon(\omega)$ դիէլեկտրական թափանցելիությունը որոշվում է նախորդ խնդրում ստացված առնչությամբ, որտեղ N -ը միջավայրի էլեկտրոնների խտությունն է:

3.18 Որոշեք նոսր, ոչ բևեռային դիէլեկտրիկների $\chi_e(\omega)$ ընկալունակությունը և $\varepsilon(\omega)$ թափանցելիությունը: Ենթադրվում է, որ ω , հաճախությամբ էլեկտրոնների հարաբերական քիվը f_i է, և որ էլեկտրոնների վրա ազդում է նրանց արագությանը համեմատական դիմադրության ուժ:

3.19 Ինչպե՞ս կփոխվի $\varepsilon(\omega)$ դիէլեկտրական թափանցելիությունը ոչ բևեռային դիէլեկտրիկում ω_0 ռեզոնանսային հաճախությանը մոտ հաճախությունների դեպքում՝ Լորենցի արդյունաբար դաշտի հաշվառմամբ:

3.20 Միջավայրը կազմված է N խտությամբ առաձգականորեն կապված լիցքավորված մասնիկներից, որոնց առաձգականության գործակիցները տարբեր են երեք փոխուղղահայաց ուղղություններով: Գտեք միջավայրի $\varepsilon_{ik}(\omega)$ դիէլեկտրական թափանցելիության թենզորը:

3.21 Հաշվեք լավ հաղորդիչ միջավայրի $\lambda(\omega)$ հաղորդականությունը, $\chi(\omega)$ ընկալունակությունն ու $\varepsilon(\omega)$ թափանցելիությունը՝ համա-

բելով, որ հաղորդականության էլեկտրոնների արգելակման բոլոր պրոցեսները կարելի է նկարագրել նրանց արագությանը համեմատական շփման ուժի միջոցով:

3.22 Ըստ Դեբայի, բևեռային դիէլեկտրիկներում E_0 էլեկտրական դաշտը միացնելիս դիէլեկտրիկը բևեռանում է աստիճանաբար, $P(t) = P_0(1 - e^{-t/\tau})$ օրենքով, որտեղ τ -ն ռելաքսացիայի ժամանակամիջոցն է, $P_0 = \chi_e^{(0)} E_0$ մեծությունը բևեռացման կայունացված արժեքն է E_0 հաստատուն դաշտում, երբ $t \gg \tau$, $\chi_e^{(0)}$ -ն՝ ստատիկ դիէլեկտրական ընկալունակությունը: Հաշվեք բևեռային դիէլեկտրիկի $\varepsilon(\omega)$ դիէլեկտրական թափանցելիությունը:

3.23 Համոզվեք, որ բևեռային դիէլեկտրիկի $\varepsilon(\omega)$ թափանցելիության իրական և կեղծ մասերը բավարարում են Քրամերս-Քրոնիգի դիսպերսիոն առնչություններին:

3.24 Օգտվելով (3.12)-ից՝ (3.13) դիսպերսիոն առնչությունը ներկայացրեք հաճախության միայն ղրական արժեքների տիրույթով ինտեգրալի տեսքով:

3.25 Էլեկտրոնների N խտությունն արտահայտեք $\varepsilon(\omega)$ կոմպլեքս դիէլեկտրական թափանցելիության կեղծ մասի միջոցով:

3.26 Հաշվելով փոփոխական դաշտում ջերմության ձևով անջատված էներգիայի խտությունը, սույց տվեք, որ $\varepsilon(\omega)$ և $\mu(\omega)$ թափանցելիությունների կեղծ մասերը բնութագրում են էներգիայի ոչ դարձելի կորուստները միջավայրերում և որ նրանք ω ղրական հաճախություններից կախված ղրական ֆունկցիաներ են:

3.27 Ցույց տվեք, որ ստատիկ դիէլեկտրական թափանցելիությունը միշտ մեծ է մեկից:

3.28 Պարամագնիսական միջավայրը տեղավորված է $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$ արտաքին մագնիսական դաշտում, որի $\mathbf{B}_0$ բաղադրիչը հաստատուն է, $\mathbf{b}$ -ն փոփոխվում է ω հաճախությամբ, ըստ որում $\mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \neq 0$ և $b \ll B_0$: Ցույց տվեք, որ երբ ω -ն հավասարվում է B_0 դաշտում մագնիսական մոմենտների պրեցեսիայի հաճախությանը, տեղի է ունենում միջավայրի մագնիսական բևեռացման ռեզոնանսային աճ (պարամագնիսական ռեզոնանսի երևույթ):

ԳԼՈՒԽ 4 ԷԼԵԿՏՐՈՍՏԱՏԻԿԱ

Հաստատուն էլեկտրական դաշտի E լարվածությունը և D ինդուկցիան բավարարում են

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho \quad (4.2)$$

Մաքսվելի հավասարումներին: Այստեղ ρ -ն ազատ լիցքերի խտությունն է: Իզոտրոպ դիէլեկտրիկներում թույլ դաշտերի դեպքում

$$D = \epsilon E, \quad (4.3)$$

որտեղ ϵ -ը միջավայրի ստատիկ դիէլեկտրական թափանցելիությունն է (երրորդ գլխում այդ մեծության համար օգտագործել ենք $\epsilon^{(0)}$ նշանակումը):

(4.2) հավասարման ինտեգրալ տեսքը կոչվում է Գաուսի թեորեմ՝

$$\oint_S D \cdot dS = 4\pi q_S, \quad (4.4)$$

որտեղ S -ը կամայական փակ մակերևույթ է, q_S -ը այդ մակերևույթի ներսում պարունակվող լրիվ լիցքը: Լիցքերի բաշխման որոշակի համաչափությունների դեպքում Գաուսի թեորեմը նրանց ստեղծած դաշտը հեշտությամբ հաշվելու հնարավորություն է տալիս:

Հաստատուն էլեկտրական դաշտը բնութագրում են նաև Φ սկալյար պոտենցիալով, որը սահմանվում է

$$E = -\operatorname{grad} \Phi \quad (4.5)$$

առնչությամբ:

Տրված E դաշտին համապատասխանող Φ պոտենցիալը որոշվում է

$$\Phi(r) = - \int_0^r E \cdot dr \quad (4.6)$$

բանաձևով, որտեղ r_0 -ն պոտենցիալի զրոյական արժեքին համապատասխանող շառավիղ վեկտորն է՝ $\Phi(r_0) = 0$:

Տարածության երկու կետերի միջև պոտենցիալների Φ_1 - Φ_2 տարբերությունը հավասար է միավոր լիցքը առաջին կետից երկրորդ կետը տանելու ժամանակ էլեկտրական դաշտի կատարած աշխատանքին:

Համասեռ միջավայրում Φ պոտենցիալը բավարարում է Պուասոնի հավասարմանը՝

$$\Delta \Phi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho: \quad (4.7)$$

Եթե լիցքը V ծավալում բաշխված է $\rho(\mathbf{r})$ ծավալային խտությամբ, ապա պոտենցիալը ներկայացվում է

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.8)$$

տեսքով:

$\sigma(\mathbf{r})$ մակերևութային խտությամբ, S մակերևույթով բաշխված լիցքի ստեղծած դաշտի պոտենցիալը որոշվում է

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.9)$$

քանաձևով:

Նման ձևով, $\chi(\mathbf{r})$ գծային խտությամբ, L կորով բաշխված լիցքի ստեղծած դաշտի պոտենցիալը կարելի է ներկայացնել

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_L \frac{\chi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.10)$$

տեսքով:

Ի բնութագրական չափերով լիցքերի համակարգի $\varphi(\mathbf{r})$ պոտենցիալը $r \gg l$ հեռավորությունների վրա կարելի է ներկայացնել

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{Q_{ik} x_i x_k}{2r^5} + \dots \quad (4.11)$$

զուգամիտող շարքի տեսքով, որտեղ q -ն համակարգի լրիվ լիցքն է, $\mathbf{p}$ -ն՝ համակարգի էլեկտրական դիպոլային մոմենտը՝

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV, \quad (4.12)$$

իսկ Q_{ik} -ն համակարգի էլեկտրական քվադրուպոլ մոմենտի թեմզորը՝

$$Q_{ik} = \int (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) \rho(\mathbf{r}) dV: \quad (4.13)$$

Երկու միջավայրերի բաժանման սահմանին գործում են

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad (4.14)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (4.15)$$

կամ՝

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma \quad (4.17)$$

պայմանները: Այստեղ ենթադրվում է, որ մակերևույթի $\mathbf{n}$ նորմալ վեկտորը ուղղված է առաջին միջավայրից երկրորդը, σ ինդեքսով նշանակ-

ված են վեկտորների բաղադրիչները $\hat{n}$ ուղղության վրա, τ -ինդեքսով՝ մակերևույթին շոշափող ուղղության վրա, իսկ σ -ն ազատ լիցքերի մակերևութային խտությունն է:

Դիէլեկտրիկներում կապված լիցքերի $\rho_{կապ}$ խտությունը արտահայտվում է էլեկտրական բևեռացման P վեկտորի միջոցով՝

$$\rho_{կապ} = -\operatorname{div} P: \quad (4.18)$$

Միջավայրերի բաժանման սահմանին կապված լիցքերի $\sigma_{կապ}$ մակերևութային խտությունը որոշվում է

$$\sigma_{կապ} = P_{1n} - P_{2n} \quad (4.19)$$

առնչությամբ:

Կոնդենսատորի ունակություն կոչվում է

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (4.20)$$

հարաբերությունը, որտեղ q -ն և φ_1 -ը թիթեղներից որևէ մեկի լիցքն ու պոտենցիալն են, իսկ φ_2 -ը՝ մյուս թիթեղի պոտենցիալը:

Էլեկտրաստատիկ դաշտի էներգիան W ծավալում հավասար է՝

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V E \cdot D \, dV: \quad (4.21)$$

Տարածության սահմանափակ տիրույթում բաշխված լիցքերի համակարգի էլեկտրաստատիկ դաշտի էներգիան ամբողջ տարածությունում կարելի է հաշվել

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(r) \varphi(r) \, dV \quad (4.22)$$

քանաձևով:

$\rho(r)$ ծավալային խտությամբ բաշխված լիցքերի համակարգի և $\varphi(r)$ պոտենցիալով արտաքին էլեկտրական դաշտի փոխազդեցության էներգիան որոշվում է

$$W = \int \rho(r) \varphi(r) \, dV \quad (4.23)$$

առնչությամբ:

4.1 Գտեք ρ ծավալային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված

ա) R շառավղով գնդի,

բ) R շառավղով անվերջ գլանի,

գ) $2a$ հաստությամբ անվերջ սալի

ստեղծած էլեկտրական դաշտի E լարվածությունն ու φ պոտենցիալը տարածության բոլոր կետերում: Խնդիրը լուծեք երկու եղա-

մակով՝ Գաուսի թեորեմի (ինտեգրալ եղանակ) և Պուասոնի հավասարման միջոցով (դիֆերենցիալ եղանակ):

4.2 Գտեք σ մակերևութային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված

ա) R շառավղով գնդային մակերևույթի,

բ) R շառավղով անվերջ գլանային մակերևույթի,

գ) անվերջ հարթության

էլեկտրական դաշտի E լարվածությունն ու Φ պոտենցիալը: Խնդիրը լուծեք երկու եղանակով՝ Գաուսի թեորեմի և Պուասոնի հավասարման միջոցով:

4.3 ρ ծավալային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված R շառավղով գնդի ներսում կենտրոնից a հեռավորության վրա կա r շառավղով գնդային խոռոչ ($r + a < R$): Գտեք էլեկտրական դաշտի լարվածությունը խոռոչի ներսում:

4.4 Լիցքը բաշխված է $\rho = \rho(r)$ կենտրոնահամաչափ օրենքով: Էլեկտրաստատիկ դաշտի $\Phi(r)$ պոտենցիալն ու $E(r)$ լարվածությունը արտահայտեք $\rho(r)$ -ի միջոցով՝ ըստ r -ի միապատիկ ինտեգրալների տեսքով:

4.5 Երկու համակենտրոն R_1 և R_2 ($R_1 < R_2$) շառավղյուներով գնդային մակերևույթների միջև լիցքը բաշխված է $\rho = \alpha / r^2$ օրենքով: Գտեք համակարգի լրիվ q լիցքը, Φ պոտենցիալն ու E դաշտը ամբողջ տարածության մեջ:

4.6 Որոշեք ջրածնի ատոմի էլեկտրոնային քաղաճի ստեղծած պոտենցիալը, եթե հիմնական վիճակում էլեկտրոնի լիցքը տարածության մեջ բաշխված է $\rho(r) = -(e / \pi a^3) e^{-2r/a}$ օրենքով (a -ն հաստատուն է, իսկ e -ն՝ տարրական լիցքը):

4.7 Որոշեք q լիցքով հավասարաչափ լիցքավորված $2l$ երկարությամբ հատվածի Φ պոտենցիալը և համապոտենցիալ մակերևույթների տեսքը:

4.8 Կրկնակի էլեկտրական շերտ անվանում են $+\sigma$ և $-\sigma$ մակերևութային խտությամբ լիցքավորված, իրարից l հեռավորության վրա դասավորված զուգահեռ մակերևույթների սահմանային համակարգը, երբ $l \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$, սակայն $\sigma l = \Sigma$ վեկտորի մեծությունը մնում է հաստատուն և վերջավոր (l վեկտորը ուղղված է բացասական լիցքավորված մակերևույթից դեպի դրականը): Ստացեք բանաձև մնան համակարգի պոտենցիալի համար, այն արտա-

հայտնելով կրկնակի շերտի Σ հզորությամբ: Յույց տվեք, որ պտտենցիալն այս դեպքում ունի խզում:

- 4.9** Համասեռ կրկնակի էլեկտրական շերտն ունի R շառավղով սկավառակի տեսք: Z առանցքն ուղղահայաց է սկավառակին և անցնում է սկավառակի կենտրոնով: Համարելով, որ կրկնակի շերտի Σ հզորությունն ուղղված է Z առանցքով, գտեք էլեկտրական դաշտի ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը Z առանցքի վրա:
- 4.10** Կրկնակի էլեկտրական շերտն ունի Z համաչափության առանցքով կիսագնդային մակերևույթի տեսք, որի կենտրոնը համընկնում է կոորդինատական համակարգի սկզբնակետի հետ: Կրկնակի շերտի Σ հզորությունը մոդուլով հաստատուն է և ուղղված շառավղի վեկտորի ուղղությամբ $\Sigma = \Sigma r / r$: Գտեք էլեկտրական դաշտի ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը Z առանցքի վրա:
- 4.11** ($y = 0, x \geq 0$) կիսահարթությունը կրկնակի էլեկտրական շերտ է, որի Σ հզորությունը ուղղված է Y առանցքով և հաստատուն է: Գտեք էլեկտրական դաշտի ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը ամենուրեք:
- 4.12** Լիցքը տարածության մեջ բաշխված է $\rho(r) = r_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$ պարբերական օրենքով: Որոշեք էլեկտրական դաշտի ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը տարածության յուրաքանչյուր կետում:
- 4.13** Լիցքը բաշխված է XOY հարթության մեջ $\sigma(x, y) = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y$ պարբերական օրենքով: Որոշեք էլեկտրական դաշտի ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը:
- 4.14** Գտեք R շառավղով գնդային մակերևույթի ստեղծած ֆ պոտենցիալն ու E լարվածությունը, եթե նրա վրա մակերևութային լիցքը բաշխված է $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ օրենքով:
- 4.15** χ_1 և χ_2 լիցքի գծային բաշխումով երկու զուգահեռ լարերի հեռավորությունը $2h$ է: Գտեք նրանց համապոտենցիալ մակերևութների հավասարումը: Առանձին քննարկեք $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, $\chi_1 = -\chi_2 = \chi$ դեպքերը:
- 4.16** Պարզեք, թե իրարից h հեռավորության վրա գտնվող q_1 և q_2 կետային լիցքերի համակարգի համապոտենցիալ մակերևութների թվում ինչ պայմանի դեպքում կլինի գնդային մակերևութ:

Գտեք վերջինիս կենտրոնի դիրքը և շառավիղը: Ինչի՞նչ է հավասար պոտենցիալն այդ մակերևույթի վրա, եթե $\varphi(\infty) = 0$:

4.17 Գտեք σ մակերևութային խտությամբ հավասարաչափ լիցքավորված R_1 ներքին և R_2 արտաքին շառավիղներով հարթ օղակի φ պոտենցիալն ու E լարվածությունը օղակի հարթությանն ուղղահայաց համաչափության առանցքի վրա: Դիտարկեք սահմանային դեպքեր՝

ա) անվերջ բարակ օղակի դաշտը ($R_2 - R_1 = \Delta R \ll R_1$),

բ) հարթ սկավառակի դաշտը ($R_1 \rightarrow 0$),

գ) լիցքավորված հարթության դեպքը ($R_1 \rightarrow 0, R_2 \rightarrow \infty$):

4.18 R շառավղով բարակ օղակը կազմված է երկու, q և $-q$ լիցքերով հավասարաչափ լիցքավորված կիսօղակներից: Որոշեք էլեկտրական դաշտի φ պոտենցիալն ու E լարվածությունը օղակի առանցքին մոտ կետերում: Ի՞նչ բնույթ ունի դաշտը օղակի շատ հեռու կետերում:

4.19 Գտեք q լիցքով հավասարաչափ լիցքավորված R շառավղով բարակ օղակի φ պոտենցիալն ու E լարվածությունը տարածության կամայական կետում:

4.20 Որոշեք լիցքերի բաշխումը տարածության մեջ, եթե էլեկտրաստատիկ դաշտի φ պոտենցիալն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\text{ա) } \varphi(x) = \begin{cases} ax & (x > 0), \\ -ax & (x < 0), \end{cases} \quad \text{բ) } \varphi(r) = \begin{cases} q/r & (r > R), \\ C = \text{const} & (r < R), \end{cases}$$

որտեղ r -ը հեռավորությունն է կոորդինատների սկզբնակետից:

$$\text{գ) } \varphi(r) = \begin{cases} q \ln r & (r > R), \\ C = \text{const} & (r < R), \end{cases}$$

որտեղ r -ը հեռավորությունն է OZ առանցքից:

Այստեղ a, q և R մեծությունները հաստատուններ են:

4.21 Լիցքերի ինչպիսի՞նչ բաշխումով է ստեղծված գնդային կոորդինատական համակարգում

$$\varphi(r) = \frac{e}{a} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right)$$

տեսք ունեցող պոտենցիալով դաշտը:

4.22 Հաշվեք R շառավղով և q լիցքով հավասարաչափ լիցքավորված գնդի և գնդային մակերևույթի էլեկտրաստատիկ դաշտերի էներգիան:

- 4.23** Իրարից a հեռավորության վրա գտնվող երկու զնդեր լիքավորված են q_1 և q_2 լիքերով: Լիքերի բաշխումը զնդերում կենտրոնահամաչափ է: Որոշեք զնդերի փոխազդեցության էներգիան:
- 4.24** Ցույց տվեք, որ միայն էլեկտրաստատիկ ուժերի ազդեցության տակ լիքերի համակարգը չի կարող գտնվել կայուն հավասարակշռության վիճակում (Իրնշռուի թեորեմը):
- 4.25** Ապացույեք, որ պոտենցիալը չի կարող նվազագույն կամ առավելագույն արժեքներ ընդունել հաղորդչից դուրս գտնվող կետերում:
- 4.26** q կետային լիքը տեղավորված է R_1 և R_2 շառավղներով երկու համակենտրոն հոդակցված հաղորդիչ զնդային մակերևույթների միջև, կենտրոնից R հեռավորության վրա ($R_1 < R < R_2$): Գտեք զնդային մակերևույթների վրա մակածված լիքերը:
- 4.27** q կետային լիքը տեղավորված է իրարից d հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ հաղորդիչ հարթությունների միջև, հարթություններից մեկից l հեռավորության վրա: Գտեք հարթությունների վրա մակածված լիքերը:
- 4.28** q կետային լիքը գտնվում է R շառավղով հոդակցված զնդային հաղորդչի կենտրոնից d հեռավորության վրա: Որոշեք էլեկտրաստատիկական դաշտի Φ պոտենցիալը տարածության մեջ, մակածված լիքերի σ_0 մակերևութային խտությունը զնդի վրա, զնդի կողմից q լիքի վրա ազդող F ուժը: $R \rightarrow \infty$ սահմանային անցման միջոցով գտեք հաղորդիչ, անվերջ հարթությունից և սրանից $h = d - R$ հեռավորության վրա գտնվող q լիքից կազմված համակարգի պոտենցիալը:
- 4.29** Նախորդ խնդիրը լուծեք այն դեպքում, երբ գունդը մեկուսացված է և ունի Q լիք:
- 4.30** R շառավղով հոդակցված հաղորդիչ գունդը տեղավորված է E_0 համասեռ էլեկտրական դաշտում: Որոշեք էլեկտրական դաշտի Φ պոտենցիալը տարածության մեջ:
- 4.31** Ապացույեք, որ եթե լիքերի համակարգը էլեկտրաչեզոք է, ապա այդ համակարգի գումարային դիպոլային մոմենտը կախված չէ կոորդինատների սկզբնական տի ընտրությունից:
- 4.32** Ապացույեք, որ եթե լիքերի համակարգը էլեկտրաչեզոք է և նրա գումարային դիպոլային մոմենտը հավասար է զրոյի, ապա այդ

համակարգի քվադրուպոլ մոմենտի թեմզորը կախված չէ կոորդինատների սկզբնականի ընտրությունից:

4.33 q կետային լիցքը գտնվում է r_1 շառավիղ վեկտորով կետում, իսկ p մոմենտով էլեկտրական դիպոլը՝ r_2 շառավիղ վեկտորով կետում: Որոշեք լիցքի և դիպոլի W փոխազդեցության էներգիան, դիպոլի վրա ազդող F ուժը և K ուժի մոմենտը:

4.34 p_1 մոմենտով էլեկտրական դիպոլը գտնվում է կոորդինատների սկզբնականում, իսկ p_2 մոմենտով դիպոլը՝ r_0 շառավիղ վեկտորով կետում: Որոշեք նրանց փոխազդեցության W էներգիան, յուրաքանչյուր դիպոլի վրա ազդող F ուժը և K ուժի մոմենտը: Դիպոլների ինչպիսի՞ դասավորության դեպքում փոխազդեցության էներգիան և ուժը կունենան առավելագույն արժեք:

4.35 R շառավղով հավասարաչափ բևեռացված գնդի միավոր ծավալի դիպոլային մոմենտը (էլեկտրական բևեռացման վեկտորը) P է: Գտեք էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը:

4.36 ε դիէլեկտրական թափանցելիությամբ գունդը տեղավորված է արտաքին էլեկտրական դաշտում, որը գնդից շատ հեռու տիրույթում համասեռ է և ունի E_0 լարվածություն: Որոշեք E լարվածությունը և P բևեռացումը գնդի ներսում:

4.37 Որոշեք էլեկտրական դաշտի E' լարվածությունը համասեռ բևեռացված ε թափանցելիությամբ դիէլեկտրիկի ներսում համված գնդաձև խոռոչում: Ենթադրվում է, որ խոռոչի ամպայությունը չի փոխում դիէլեկտրիկի բևեռացումը:

4.38 R_1 ներքին և R_2 արտաքին շառավիղներ ունեցող գնդային կոնդենսատորի ներսում դիէլեկտրական թափանցելիությունը բաշխված է հետևյալ օրենքով՝

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1 = \text{const}, & (R_1 \leq r < R), \\ \varepsilon_2 = \text{const}, & (R \leq r \leq R_2), \end{cases}$$

($R_1 < R < R_2$): Որոշեք կոնդենսատորի C ունակությունը և կապված լիցքերի բաշխումը: Ինչի՞ հավասար գումարային կապված լիցքը:

4.39 q կետային լիցքը տեղավորված է ε_1 և ε_2 դիէլեկտրական թափանցելիություններով երկու համասեռ, անվերջ դիէլեկտրիկների հարթ սահմանի վրա: Գտեք էլեկտրական դաշտի φ պոտանցիալը, E լարվածությունը և D ինդուկցիան: Պարզեք կապված լիցքերի բաշխումը և գումարային կապված լիցքը:

4.40 a շառավիղ և q լիցք ունեցող հաղորդիչ գնդի կենտրոնը գտնվում է երկու անվերջ, համասեռ, ε_1 և ε_2 դիէլեկտրական թափանցելիություններով դիէլեկտրիկների հարթ սահմանի վրա: Գտեք էլեկտրական դաշտի պոտենցիալը, գնդի մակերևույթի վրա ազատ և կապված լիցքերի բաշխումը ու գումարային կապված լիցքը:

4.41 q կետային լիցքը գտնվում է ε_1 և ε_2 դիէլեկտրական թափանցելիություններով անվերջ, համասեռ միջավայրերի բաժանման հարթ սահմանից a հեռավորության վրա՝ առաջին միջավայրում: Արտաքույն մեթոդով որոշեք Φ պոտենցիալը, կապված լիցքերի $\sigma_{\text{կապ}}$ խտությունը և գումարային կապված լիցքերը $z=0$ բաժանման սահմանի վրա ու q լիցքի գտնվելու կետում:

4.42 Յույց տվեք, որ կամայական անհամասեռ դիէլեկտրական միջավայրում r_1 կետում գտնվող լիցքի ստեղծած $\Phi_1(r_2)$ պոտենցիալը r_2 կետում հավասար է r_2 կետում գտնվող նույն մեծությամբ լիցքի ստեղծած $\Phi_2(r_2)$ պոտենցիալին r_1 կետում:

4.43 Յույց տվեք, որ եթե լիցքերի տրված համակարգի ստեղծած դաշտի մեջ մտցնենք չեզոք դիէլեկտրիկի կտոր, որի դիէլեկտրական թափանցելիությունը շրջապատի թափանցելիությունից տարբերվում է $\delta\varepsilon$ փոքր մեծությամբ, ապա առաջին մոտավորությամբ համակարգի էներգիայի փոփոխությունը կլինի՝

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon dV:$$

4.44 Յույց տվեք, որ եթե լիցքերի համակարգի ստեղծած դաշտի մեջ մտցնենք չլիցքավորված հաղորդիչ, ապա համակարգի էներգիան կնվազի:

4.45 E լարվածությամբ համասեռ արտաքին էլեկտրական դաշտում գտնվող սահմանափակ տիրույթում լիցքերի ծավալային խտությունը $\rho(r)$ է: Լիցքերի և արտաքին էլեկտրական դաշտի փոխազդեցության (4.23) պոտենցիալ էներգիան արտահայտեք լիցքերի համակարգի p դիպոլային մոմենտի միջոցով:

4.46 Որոշեք կետային լիցքի դաշտը ε_{jk} դիէլեկտրական թափանցելիությամբ համասեռ անիզոտրոպ միջավայրում:

ԳԼՈՒԽ 5

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍՏԻԿԱ

Հաստատում մագնիսական դաշտի $\mathbf{H}$ լարվածությունը և $\mathbf{B}$ ինդուկցիան բավարարում են

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

Մաքսվելի հավասարումներին, որտեղ $\mathbf{j}$ -ն լիցքերի ծավալային խտությունն է: Իզոտրոպ դիամագնետիկներում և պարամագնետիկներում թույլ դաշտերի դեպքում

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.3)$$

որտեղ μ -ն նյութի մագնիսական թափանցելիությունն է (երրորդ գլխում այդ մեծությունը նշանակել ենք $\mu^{(0)}$ -ով):

(5.1) հավասարման ինտեգրալ տեսքը կոչվում է Ամպերի օրենք՝

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I, \quad (5.4)$$

որտեղ I -ն L փակ կորի վրա հենվող կամայական մակերևույթով անցնող լրիվ հոսանքն է:

Հաստատում մագնիսական դաշտը կարելի է բնութագրել $\mathbf{A}$ վեկտորական պոտենցիալով, որը սահմանվում է

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (5.5)$$

առնչությամբ: $\mathbf{A}$ վեկտոր-պոտենցիալի ընտրության կամայականությունը սահմանափակելու նպատակով նրա վրա դրվում է

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (5.6)$$

լրացուցիչ պայմանը: Համասեռ միջավայրերում $\mathbf{A}$ -ն բավարարում է

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} \quad (5.7)$$

Պուասոնի հավասարմանը:

Ծավալային հոսանքների վեկտոր պոտենցիալն ու մագնիսական դաշտի լարվածությունը համասեռ միջավայրերում կարելի է ներկայացնել ծավալային ինտեգրալների տեսքով՝

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (5.8)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (5.9)$$

(վերջինս Բիո-Սավարի օրենքն է):

Հոսանքներից մեծ հեռավորությունների վրա

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (5.10)$$

որտեղ $\mathbf{m}$ -ը հոսանքի մագնիսական մոմենտն է՝

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) dV': \quad (5.11)$$

Երկու միջավայրերի բաժանման սահմանին գործում են

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad (5.12)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (5.13)$$

սահմանային պայմանները:

Այստեղ i -ն հոսանքի մակերևութային խտությունն է: $\hat{n}$ -ը նորմալի միավոր վեկտորն է, որն ուղղված է առաջին միջավայրից երկրորդը:

Տարածության այն կետերում, որտեղ $\mathbf{j} = 0$, բավարարվում է $\text{rot} \mathbf{H} = 0$ հավասարումը, հետևաբար $\mathbf{H}$ -ը կարելի է ներկայացնել

$$\mathbf{H} = -\text{grad} \psi \quad (5.14)$$

տեսքով, որտեղ մագնիսական դաշտի ψ սկալյար պոտենցիալը $\mu = \text{const}$ դեպքում բավարարում է Լապլասի հավասարմանը:

Հոսանքի Idl տարրի վրա ազդող ուժը որոշվում է Ամպերի բա-
նաձևով՝

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}): \quad (5.15)$$

Մագնիսական դաշտի էներգիան V ծավալում՝

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV: \quad (5.16)$$

Վերջավոր տիրույթում բաշխված հոսանքների դեպքում

$$W = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV: \quad (5.17)$$

$\mathbf{j}(\mathbf{r})$ ծավալային խտությամբ բաշխված հոսանքի և $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ վեկ-
տոր-պոտենցիալով արտաքին դաշտի փոխազդեցության էներգիան
հավասար է՝

$$W = \frac{1}{c} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV: \quad (5.19)$$

- 5.1** Յույց տվեք, որ I փակ հոսանքի ստեղծած մագնիսական դաշտի ինդուկցիան կարելի է հաշվել

$$B = \frac{\mu I}{c} \text{ grad} \Omega$$

բանաձևով, որտեղ Ω -ն այն մարմնային անկյունն է, որի տակ դիտման կետից երևում է հոսանքատար կոնտուրը:

- 5.2** Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից ստացեք Ամպերի օրենքը՝

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi\mu}{c} I:$$

- 5.3** R շառավղով անվերջ զլանային հաղորդիչով, որի մագնիսական թափանցելիությունը μ_0 է, անցնում է I հաստատուն հոսանք: Հաղորդիչը շրջապատող նյութի մագնիսական թափանցելիությունը μ է: Որոշեք I հոսանքի ստեղծած $\mathbf{H}$ մագնիսական դաշտն ու $\mathbf{B}$ ինդուկցիան: Խնդիրը լուծեք երկու եղանակով՝ օգտվելով Ամպերի օրենքից (ինտեգրալ եղանակ) և $\mathbf{A}$ վեկտոր-պոտենցիալի միջոցով (դիֆերենցիալ եղանակ):

- 5.4** R_1 շառավղով անվերջ զլանը տեղավորված է R_2 ներքին և R_3 արտաքին շառավիղներ ունեցող անվերջ զլանային խողովակի մեջ, ըստ որում նրանց առանցքները համընկնում են: Դրանցով հոսում են հակադրված, բայց մեծությամբ հավասար I հոսանքներ: Որոշեք հոսանքների ստեղծած $\mathbf{H}$ մագնիսական դաշտը, $\mathbf{B}$ ինդուկցիան, ինչպես նաև $\mathbf{A}$ վեկտոր-պոտենցիալը տարածության բոլոր կետերում:

- 5.5** R_1 շառավղով անվերջ հաղորդիչ զլանի ներսում կա R_2 շառավղով անվերջ զլանային խոռոչ: Նրանց առանցքները զուգահեռ են, առանցքների միջև հեռավորությունը՝ a : Որոշեք մագնիսական դաշտի լարվածությունը խոռոչում:

- 5.6** Գտեք I հոսանքով անվերջ երկար ուղղաձիգ լարի ստեղծած մագնիսական դաշտի ψ սկալյար պոտենցիալը, մագնիսական դաշտի $\mathbf{H}$ լարվածության և $\mathbf{A}$ վեկտոր-պոտենցիալի բաղադրիչները:

- 5.7** Որոշեք անվերջ հարթության ստեղծած $\mathbf{H}$ մագնիսական դաշտը, եթե նրանով անցնում է i մակերևութային խտությամբ համասեռ հոսանք:

- 5.8** Որոշեք իրարից $2a$ հեռավորության վրա գտնվող երկու զուգահեռ հարթությունների ստեղծած մագնիսական դաշտը, եթե նրանցով

անցնում է մույն i խտությամբ մակերևութային հոսանք: Դիտարկեք երկու դեպք.

ա) հոսանքներն ունեն մույն ուղղությունը,

բ) հոսանքները հակառակ են ուղղված:

5.9 Որոշեք երկու անվերջ, ուղղագիծ, հակուղղված I հոսանքների ստեղծած A վեկտոր-պոտենցիալն ու մագնիսական դաշտի H լարվածությունը: Հոսանքների միջև հեռավորությունը $2b$ է:

5.10 Որոշեք նախորդ խնդրում նկարագրված հոսանքների միավոր երկարությանը բաժին ընկնող փոխազդեցության ուժը և էներգիան:

5.11 Ուղղագիծ, անվերջ երկար թիթեղի լայնությունը a է: Թիթեղի երկայնքով հոսում է լայնությամբ հավասարաչափ բաշխված I հոսանք: Որոշեք հոսանքի ստեղծած H մագնիսական դաշտը: Դիտարկեք սահմանային դեպք, երբ $a \rightarrow \infty$: Ի՞նչ կստացվի $a \rightarrow 0$ սահմանում:

5.12 Հակառակ ուղղված մույն I մեծությամբ հոսանքները հոսում են երկու բարակ, անվերջ երկար զուգահեռ թիթեղներով, որոնք համընկնում են ուղղանկյուն կտրվածք ունեցող անվերջ պրիզմայի հակադիր նիստերի հետ: Թիթեղների լայնությունը a է, իսկ հեռավորությունն իրարից՝ b : Գտեք H մագնիսական դաշտը և թիթեղների միավոր երկարությանը բաժին ընկնող փոխազդեցության ուժը: Դիտարկեք սահմանային դեպք, երբ $a \rightarrow 0$:

5.13 Գտեք a շառավղով բարակ օղակով հոսող I հոսանքի ստեղծած A վեկտորական պոտենցիալն ու H մագնիսական դաշտը: Դիտարկեք մասնավոր դեպք, երբ դիտման կետը գտնվում է օղակի առանցքի վրա: Միջավայրը համասեռ է և ունի μ մագնիսական թափանցելիություն:

5.14 a_1 և a_2 շառավղերով երկու համառանցք օղակներով հոսում են համապատասխանաբար I_1 և I_2 հոսանքներ: Օղակների կենտրոնների հեռավորությունը b է: Գտեք օղակների փոխազդեցության ուժը: Միջավայրի մագնիսական թափանցելիությունը μ է:

5.15 Տրված է վերջավոր V ծավալում հոսող հաստատուն հոսանքի $j = j(r)$ ծավալային խտությունը: Դիտարկվող ծավալից դուրս դատարկություն է, իսկ ներսում $j(r)$ ֆունկցիան անընդհատ է: Ապացույցեք, որ

$$\int_V j dV = 0:$$

- 5.16** Ապացույեք, որ $j = j(r)$ ծավալային խտությամբ հոսանքի m մագնիսական մոմենտը կախված չէ կոորդինատների սկզբնական տի ընտրությունից: Ենթադրվում է, որ m -ի արժեքները վերջավոր են:
- 5.17** B լարվածությամբ համասեռ արտաքին մագնիսական դաշտում գտնվող սահմանափակ տիրույթում հոսանքի ծավալային խտությունը $j(r)$ է: Հոսանքի և արտաքին մագնիսական դաշտի փոխազդեցության (5.20) էներգիան արտահայտեք հոսանքի m մագնիսական մոմենտի միջոցով:
- 5.18** Նախորդ խնդրի պայմաններին բավարարող $j(r)$ հոսանքի վրա ազդող ուժի K մոմենտը արտահայտեք հոսանքի m մագնիսական մոմենտի միջոցով: Ապացույեք, որ K -ն կախված չէ սկզբնական տի ընտրությունից, որի նկատմամբ այն հաշվվում է:
- 5.19** R շառավղով, Q լիցքով հավասարաչափ լիցքավորված գլանը ω անկյունային արագությամբ պտտվում է իր առանցքի շուրջը, որը B արտաքին դաշտի հետ կազմում է α անկյուն: Որոշեք գլանի և արտաքին մագնիսական դաշտի փոխազդեցության էներգիան:

ԳԼՈՒԽ 6
ՔՎԱԶԻՍՏԱՑԻՈՆԱՐ
ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏ

Էլեկտրամագնիսական դաշտը կոչվում է քվազիստացիոնար, եթե ա) դաշտի ω հաճախությանը համապատասխանող $\lambda = c/\omega$ ալիքի երկարությունը շատ մեծ է դիտարկվող համակարգի l չափերից՝

$$\omega \ll c/l, \quad (6.1)$$

բ) շեղման հոսանքը կարելի է անտեսել հաղորդականության հոսանքի նկատմամբ՝

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \ll \frac{4\pi j}{c}, \quad (6.2)$$

գ) միջավայրը բնութագրող մեծությունները (ϵ և μ թափանցելիությունները, λ հաղորդականությունը) ունեն մույն արժեքները, ինչ հաստատուն դաշտերում:

Քվազիստացիոնար էլեկտրամագնիսական դաշտի հավասարումներն են՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi j}{c}, \quad (6.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho: \quad (6.6)$$

(6.3) և (6.4) հավասարումներից կարելի է ստանալ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ $\mathbf{E}$ և $\mathbf{H}$ վեկտորների համար՝

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (6.7)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}: \quad (6.8)$$

Արտաքին փոփոխական մագնիսական դաշտը թափանցելով հաղորդիչի մեջ էլեկտրամագնիսական մակաժման երևույթի համաձայն ստեղծում է մրրկային էլեկտրական դաշտ, որը իր հերթին առաջացնում է ծավալային հոսանքներ (Ֆուկոյի հոսանքներ): ω հաճախությամբ փոփոխվող դաշտի թափանցումը հաղորդիչի մեջ բնութագրվում է

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\lambda\omega}} \quad (6.9)$$

մեծությամբ (սկիւն շերտի հաստությամբ):

$\mathcal{E}_{\text{տղմ}}(t)$ կողմնային էլեկտրաշարժ ուժ պարունակող C ունակությամբ, L ինդուկտիվությամբ, R դիմադրությամբ փակ շղթայում $I(t)$ հոսանքը և կոնդենսատորի շրջադիրի $q(t)$ լիցքը քվազիստացիոնար մոտավորությամբ բավարարում են

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_{\text{տղմ}} \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\mathcal{E}_{\text{տղմ}}}{dt} \quad (6.11)$$

հավասարումներին:

Ներդաշնակ օրենքով փոփոխվող $\mathcal{E}_{\text{տղմ}} \sim e^{-i\omega t}$ կողմնային էլշուի դեպքում $I(t)$ -ն և $\mathcal{E}_{\text{տղմ}}(t)$ -ը կապված են՝

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_{\text{տղմ}}(t)}{Z} \quad (6.12)$$

առնչությամբ, որտեղ Z -ը կոչվում է շղթայի կոմպլեքս դիմադրություն (իմպեդանս) և հավասար է՝

$$Z = R + i \left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2} \right): \quad (6.13)$$

Ճյուղավորված շղթաներում առանձին տեղամասերի հոսանքները գտնելու համար կարելի է օգտվել Կիրխհոֆի կանոններից՝

- 1) շղթայի յուրաքանչյուր հանգույցում մտնող և դուրս եկող հոսանքների հանրահաշվական գումարը հավասար է զրոյի,
- 2) Ճյուղավորված շղթայի յուրաքանչյուր կոնտուրում բոլոր աղբյուրների էլշու-ների գումարը հավասար է լարման անկումների գումարին:

Եթե գծային շղթայում էլշու-ն ստեղծվում է էլեկտրամագնիսական մակածման միջոցով, ապա այն կարելի է հաշվել Ֆարադեյի օրենքի օգնությամբ՝

$$\mathcal{E}_{\text{տղմ}} = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6.14)$$

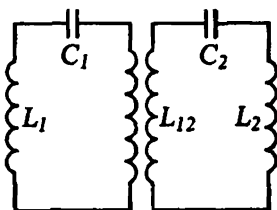
որտեղ Φ -ն մագնիսական ինդուկցիայի վեկտորի հոսքն է շղթայով:

Եթե տրված են ինդուկտիվությամբ կապված մի քանի շղթաներ, ապա i -րդ շղթայով մագնիսական ինդուկցիայի լրիվ հոսքը որոշվում է

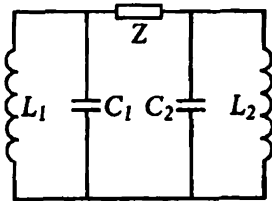
$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} I_k \quad (6.15)$$

բանաձևով, որտեղ I_k -ն հոսանքն է k -րդ շղթայում, L_{ik} -երը փոխհնդուկ-
յիայի ($i \neq k$) և ինքնհնդուկյիայի ($i = k$) գործակիցներն են:

- 6.1** Որոշեք հոսանքի ուժի փոփոխության օրենքը R դիմադրությունից, L ինդուկտիվությունից և $\mathcal{E}$ էլշու ունեցող հոսանքի աղբյուրից կազմված փակ շղթայի ա) միացման և բ) անջատման ժամանակ:
- 6.2** Գտեք սեփական տատանումների ω_0 հաճախությունը իդեալա-
կան տատանողական կոնտուրում:
- 6.3** Գտեք լիքքի $q(t)$ ժամանակային վարքը R ակտիվ դիմադրությամբ
տատանողական կոնտուրում, եթե $t = 0$ պահին կոնդենսատորի
լիքքը q_0 է:
- 6.4** Գտեք $I(t)$ հոսանքի ուժը ներդաշնակ օրենքով փոփոխվող էլեկ-
տրաշարժ ուժ պարունակող R ակտիվ դիմադրությամբ տատանո-
ղական կոնտուրում:
- 6.5** Գտեք $I(t)$ հոսանքի ուժը R ակտիվ դիմադրությամբ տատանողա-
կան կոնտուրում, եթե $t = 0$ պահին միանում է $\mathcal{E}_0$ հաստատուն էլեկ-
տրաշարժ ուժը, իսկ կոնդենսատորի սկզբնական լիքքը q_0 է:
- 6.6** L_1 , C_1 և L_2 , C_2 պարամետրերով երկու
իդեալական տատանողական կոնտուր-
ներ կապված են L_{12} փոխհնդուկյիայի
գործակցով ինդուկտիվությամբ: Որոշեք
էլեկտրական տատանումների սեփա-
կան հաճախությունները: Քննարկեք
սահմանային դեպք, երբ $L_{12} \rightarrow 0$:

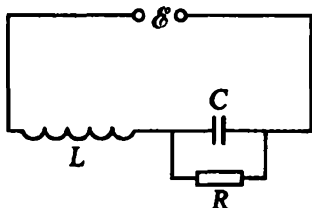


- 6.7** L_1 , C_1 և L_2 , C_2 պարամետրերով երկու
իդեալական տատանողական կոնտուր-
ներ կապված են Z իմպեդանս ունեցող
տարրով, ինչպես պատկերված է նկա-
րում: Ստացեք հավասարում, որին բա-
վարարում են այդ համակարգի սեփա-
կան տատանումների հաճախություն-
ները:



- 6.8** Ստացեք նախորդ խնդրում նկարագրված համակարգի սեփական
հաճախությունները, եթե Z տարրը ա) L ինդուկտիվություն է, բ) C
ունակություն է:

6.9 Յույց տվեք, որ եթե նկարում պատկերված շղթայում $\mathcal{E}$ էլեկտրաշարժ ուժը փոփոխվում է ներդաշնակ օրենքով՝ $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$ հաճախությամբ, ապա R դիմադրությամբ անցնող հոսանքը կախված չէ այդ դիմադրության մեծությունից:



6.10 B_0 հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող հաղորդիչ օղակը ω հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվում է իր տրամագծի շուրջը, որն ուղղահայաց է B_0 -ին: Գտեք $I(t)$ հոսանքի ուժը օղակում, $K(t)$ արգելակող ուժի մոմենտը և պտույտը ապահովելու համար անհրաժեշտ P միջին հզորությունը:

6.11 R , L , C պարամետրերով և S մակերեսով հարթ կոնտուրը հաստատուն անկյունային արագությամբ պտտվում է B_0 հաստատուն մագնիսական դաշտում, այդ դաշտին ուղղահայաց և կոնտուրի հարթության մեջ գտնվող առանցքի շուրջը: Գտեք $\overline{K}$ միջին արգելակող ուժի մոմենտը:

6.12 $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 e^{-i\omega t}$ համասեռ փոփոխական մագնիսական դաշտում տեղավորված է λ հաղորդականություն և μ մագնիսական թափանցելիություն ունեցող անվերջ երկար, R շառավղով մետաղյա գլան, որի առանցքը զուգահեռ է դաշտի ուղղությանը: Գտեք էլեկտրամագնիսական դաշտի E և H լարվածությունները գլանի ներսում և դրսում:

6.13 Գտեք հոսանքի j խտության բաշխումը նախորդ խնդրում նկարագրված գլանում: Զննարկեք մեծ և փոքր հաճախությունների դեպքերը:

6.14 R շառավղով, λ հաղորդականությամբ, μ մագնիսական թափանցելիությամբ անվերջ երկար մետաղյա գլանը գտնվում է հաստատուն, համասեռ, գլանի առանցքին զուգահեռ $\mathcal{H}_0$ դաշտում: Ժամանակի $t=0$ պահին մագնիսական դաշտն անջատվում է: Գտեք մագնիսական դաշտի մարման վարքը գլանում:

6.15 Անվերջ երկար, շրջանային կտրվածքով հաղորդալարով խոսում է ω հաճախությամբ I փոփոխական հոսանք: Գտեք հոսանքի խտության բաշխումը հաղորդալարի ներսում և ցույց տվեք, որ մեծ հաճախությունների դեպքում հոսանքը հիմնականում կանցնի հաղորդիչի մակերևութային բարակ շերտով (Սկին էֆեկտ):

ՊԱՏԱՍԽԱՆՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ 1

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՆԵՐԱՇՈՒԹՅՈՒՆ

- 1.1 ա) $E = b \times a$, ք) $E = a(b \cdot r) + b(a \cdot r) - 2r(a \cdot b)$,
 գ) $E = (a \cdot r)k \sin(k \cdot r) - a \cos(k \cdot r)$, ղ) $E = \frac{3(p \cdot r)r}{r^5} - \frac{p}{r^3}$,
 ե) $E = -\left(f \frac{dg}{dr} + g \frac{df}{dr}\right) \frac{r}{r}$, զ) $E = -\frac{df}{dg} \frac{dg}{d(a \cdot r)} a$:
- 1.2 ա) կարելի է՝ $\operatorname{rot} E_0 = 0$, $\operatorname{div} E_0 = 0$,
 ք) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} E = b \times a$, $\operatorname{div} E = a \cdot b$,
 գ) կարելի է միայն $a \perp b$ դեպքում՝ $\operatorname{rot} E = 0$, $\operatorname{div} E = 3(a \cdot b)$,
 ղ) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} E = a \times b$, $\operatorname{div} E = -2(a \cdot b)$,
 ե) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} E = 3(a \cdot r)k - (a \cdot k)r$, $\operatorname{div} E = a(k \times r)$,
 գ) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} E = 3(r \times a)$, $\operatorname{div} E = -2(a \cdot r)$,
 է) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} E = (b \times a) \cos(k \cdot r) - (b \cdot r)(k \times a) \sin(k \cdot r)$,
 $\operatorname{div} E = (a \cdot b) \cos(k \cdot r) - (a \cdot k)(b \cdot r) \sin(k \cdot r)$,
 ղ) կարելի է՝ $\operatorname{rot} E = 0$, $\operatorname{div} E = 0$,
 ք) կարելի է՝ $\operatorname{rot} E = 0$, $\operatorname{div} E = 0$:
- 1.3 ա) կարելի է՝ $\operatorname{rot} H = 0$, $\operatorname{div} H = 0$,
 ք) չի կարելի՝ $\operatorname{rot} H = (\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z) a$, $\operatorname{div} H = 0$,
 գ) կարելի է՝ $\operatorname{rot} H = 0$, $\operatorname{div} H = 0$:
- 1.4 ա) $\rho = \frac{a^2}{4\pi}$, ք) $\rho = \frac{qr}{\pi}$, զ) $\rho = \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}$
 ղ) $\rho = \rho_0 \cos \vartheta$ ($r \leq R$), $\rho = 0$ ($r > R$),
 ե) $\rho = \rho_0 \cos \alpha$ ($r \leq R$), $\rho = 0$ ($r > R$),
- 1.5 ա) $j = \frac{c}{2\pi} \left[f(r)a + \frac{df}{dr} \frac{r \times (a \times r)}{2r} \right]$, ք) $j = \frac{c}{4\pi} [3(a \cdot r)b - (a \cdot b)r]$,
 գ) $j_r = j_\vartheta = 0$, $j_a = \frac{acr}{4\pi} \sin \vartheta$ ($r \leq R$), $j = 0$ ($r > R$),
 ղ) $j_r = 0$, $j_a = \frac{bcr}{2\pi}$, $j_z = \frac{9c}{2\pi}$ ($r \leq R$), $j = 0$ ($r > R$),
- 1.7 ա) $\rho(x, y, z) = q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \frac{q}{r_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\alpha - \alpha_0),$$

$$\rho(r, \alpha, z) = \frac{q}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\alpha - \alpha_0) \delta(z - z_0),$$

բ) $\rho(x, y, z) = 2R\sigma\delta(x^2 + y^2 + z^2 - R^2), \quad \rho(r, \vartheta, \alpha) = \sigma\delta(r - R),$

$$\rho(r, \alpha, z) = 2R\sigma\delta(r^2 + z^2 - R^2),$$

գ) $\rho(x, y, z) = 2R\lambda\delta(x^2 + y^2 - R^2)\delta(z),$

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\lambda}{R} \delta(r - R) \delta(\cos \vartheta) = \frac{\lambda}{R} \delta(r - R) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\rho(r, \alpha, z) = \lambda \delta(r - R) \delta(z),$$

դ) **Դեկարտյան կոորդինատական համակարգ.**
Քանի որ լիցքը բաշխված է z առանցքով, ապա՝

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } x = y = 0, \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Նշանակում է, կարող ենք գրել՝

$$\rho(x, y, z) = a\delta(x)\delta(y):$$

a գործակիցը կգտնենք պահանջելով, որ dz երկարությամբ լարի dq լիցքը հավասար լինի λdz -ի: Քաի որ

$$dq = dz \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a\delta(x)\delta(y) dx dy = a dz,$$

ապա կստանանք՝ $a = \lambda$ և

$$\rho(x, y, z) = \lambda\delta(x)\delta(y):$$

Գնդային կոորդինատական համակարգ.

Այս դեպքում

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } \vartheta = 0 \text{ կամ } \vartheta = \pi, \\ 0 & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Ծավալի տարրի $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\alpha$ արտահայտությունը հուշում է, որ ավելի նպատակահարմար է $\vartheta = 0$ կամ $\vartheta = \pi$ պայմանները գրել $\cos$ ֆունկցիայի միջոցով՝ $\cos \vartheta = 1$ կամ $\cos \vartheta = -1$: Վերջիններս կարելի է միավորել՝ գրելով $\cos^2 \vartheta = 1$:

Այստեղից կհետևի, որ

$$\rho(r, \vartheta, \beta) = a\delta(1 - \cos^2 \vartheta):$$

a գործակիցը կարելի է գտնել՝ պահանջելով, որ $[r, r+dr]$ զննային շերտում պարունակվող լիցքը լինի $dq=2\lambda dr$: Քանի որ

$$\begin{aligned} dq &= 2\lambda dr = r^2 dr \int_0^\pi a \delta(1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= 2\pi r^2 a dr \int_{-1}^1 \delta(1 - \xi^2) d\xi = 4\pi r^2 a dr \int_0^1 \delta(1 - \xi^2) d\xi = \\ &= 2\pi r^2 a dr \int_0^1 \frac{\delta(1 - \xi^2) d\xi^2}{\xi} = \\ &= 2\pi r^2 a dr \int_0^1 \frac{\delta(1 - \eta) d\eta}{\sqrt{\eta}} = 2\pi r^2 a dr \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ապա $a = 2\lambda/\pi r^2$, և վերջնականապես՝

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \frac{2\lambda}{\pi r^2} \delta(1 - \cos^2 \vartheta):$$

Գլանային կոորդինատական համակարգ.
Քանի որ

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \begin{cases} \infty, & \text{եթե } r = 0, \\ 0, & \text{եթե } r \neq 0, \end{cases}$$

ապա լիցքի խտությունը կարող ենք ներկայացնել

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = a(r) \delta(r)$$

տեսքով: Պահանջենք, որ $[z, z+dz]$ հատվածում լիցքը լինի $dq = \lambda dz$:

$$\begin{aligned} \lambda dz &= dz \int_0^\infty a(r) \delta(r) r dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ &= 2\pi dz \cdot \frac{1}{2} [a(r)r]_{r=0} = \pi [a(r)r]_{r=0} dz, \end{aligned}$$

որտեղից՝ $[a(r)r]_{r=0} = \lambda/\pi$ և $a(r) = \lambda/\pi r$: Արդյունքում ստանում ենք՝

$$\rho(r, \alpha, z) = \frac{\lambda}{\pi r} \delta(r):$$

$$\text{b) } \rho(x, y, z) = \sigma \delta(z), \quad \rho(r, \vartheta, \alpha) = \frac{\sigma}{r} \delta(\cos \vartheta) = \frac{\sigma}{r} \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\rho(r, \alpha, z) = \sigma \delta(z)$$

$$q) \rho(x, y, z) = 2R\sigma\delta(x^2 + y^2 - R^2),$$

$$\rho(r, \vartheta, \alpha) = \sigma \delta(r \sin \vartheta - R), \quad \rho(r, \alpha, z) = \sigma \delta(r - R):$$

- 1.8 $r_+ = r_0 + l$ և $r_- = r_0$ շառավիղ վեկտորներով կետերում գտնվող e և $-e$ լիցքերի ծավալային խտությունը՝

$$\rho_l(r) = e [\delta(r - r_+) - \delta(r - r_-)]:$$

Կամայական ածանցելի $f(r)$ ֆունկցիայի շարքի վերլուծության

$$f(r + \varepsilon) = f(r) + (\varepsilon \cdot \nabla) f(r) + o(\varepsilon^2)$$

քանաձևից, կունենանք

$$\delta(r - r_+) = \delta(r - r_0) - (l \cdot \nabla) \delta(r - r_0) + o(l^2),$$

որտեղից

$$\rho_l(r) = -e(l \cdot \nabla) \delta(r - r_0) + eo(l^2):$$

կատարելով $l \rightarrow 0$, $e \rightarrow \infty$ սահմանային անցում, կստանանք

$$\rho(r) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ e \rightarrow \infty \\ el \rightarrow p}} \rho_l(r) = -(p \cdot \nabla) \delta(r - r_0):$$

$$1.9 \text{ ա) } \varphi(r) = \frac{c_1}{r} + c_2, \quad \text{բ) } \varphi(\vartheta) = c_1 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right) + c_2,$$

գ) $\varphi(\alpha) = c_1 \alpha + c_2$, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը հաստատուններն են:

$$1.10 \text{ ա) } \varphi(r) = c_1 \ln r + c_2, \quad \text{բ) } \varphi(\alpha) = c_1 \alpha + c_2,$$

գ) $\varphi(z) = c_1 z + c_2$, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը հաստատուններն են:

- 1.11 **Ցույցում.** անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ ամենուրեք $\Delta \varphi = 0$, բայցի $r = r_0$ կետից, և որ $r_0 \in V$ դեպքում $\int_V \Delta \varphi dV = -4\pi q$:

$$1.12 \text{ ա) } \varphi(r) = \frac{e}{|r - r_0|},$$

$$\begin{aligned} \text{բ) } \int_V \frac{(p \cdot \nabla') \delta(r')}{|r - r'|} dV' &= p \cdot \int_V \frac{\nabla' \delta(r')}{|r - r'|} dV' = \\ &= p \cdot \int_V \nabla \frac{\delta(r')}{|r - r'|} dV' - p \cdot \int_V \delta(r') \nabla \frac{1}{|r - r'|} dV' = \\ &= p \cdot \oint_S \frac{\delta(r')}{|r - r'|} dS' - p \cdot \int_V \delta(r') \nabla \frac{r - r'}{|r - r'|^3} dV' = -\frac{p \cdot r}{r^3}: \end{aligned}$$

Այստեղ հաշվի առնվեց, որ $\delta(\mathbf{r}')$ ֆունկցիայի շնորհիվ մակերևութային ինտեգրալը հավասարվում է զրոյի, իսկ ∇ -ի վրայի շտրիկը պույս է տալիս, որ ածանցյումը կատարվում է ըստ շտրիկված կոորդինատների: Վերջնականապես՝

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} :$$

գ) Գնդային կոորդինատական համակարգում ծավալային ինտեգրալը դառնում է

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin \vartheta dr' d\vartheta d\alpha}{(r^2 + r'^2 - 2rr \cos \vartheta)^{1/2}} = 2\pi \int_0^\infty \rho(\mathbf{r}') r'^2 F(r, r') dr' ,$$

որտեղ

$$F(r, r') = \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{(r^2 + r'^2 - 2rr \cos \vartheta)^{1/2}} = \begin{cases} \frac{2}{r'} & (r > r'), \\ \frac{2}{r} & (r < r'): \end{cases}$$

Վերջինս տեղադրելով $\varphi(\mathbf{r})$ -ի արտահայտության մեջ, կատանանք

$$\varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{4\pi R^3}{3} \rho_0 \frac{1}{r} & (r > R), \\ \frac{4\pi \rho_0 R^2}{6} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & (r \leq R): \end{cases}$$

1.13 Օգտվելով $\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ առնչությունից և (1.11) խնդրի արդյունքից, կատանանք՝

$$\text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi \rho(\mathbf{r}), \quad \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\text{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}):$$

1.14 ա) Դիտարկվող ինտեգրալը բազմապատկելով $\mathbf{b}$ կամայական հաստատուն վեկտորով և օգտվելով (1.10) նույնությունից ու Գաուսի թեորեմից, կատանանք

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2c} \left\{ \int_S f(\mathbf{r}) \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \int_V f(\mathbf{r}) \mathbf{a} \cdot \text{rot}(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) dV \right\} :$$

Խնդրում նշված պայմանի շնորհիվ մակերևութային ինտեգրալը անվերջ հեռվում ձգտում է զրոյի: Օգտագործելով $\operatorname{rot}(\mathbf{b} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{b}$ առնչությունը, կունենանք

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{c} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \int_V f(r) dV,$$

որտեղից

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{a} \int_0^\infty f(r) r^2 dr:$$

$$\begin{aligned} \text{բ) } \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times [(\mathbf{a} \times \nabla) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] dV = \\ &= -\frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times [(\mathbf{a} \times \nabla_{\mathbf{r}_0}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)] dV = \\ &= \frac{1}{2c} (\mathbf{a} \times \nabla_{\mathbf{r}_0}) \times \int_V \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \frac{1}{2c} (\mathbf{a} \times \nabla_{\mathbf{r}_0}) \times \mathbf{r}_0 = \\ &= \frac{1}{2c} \{ \nabla_{\mathbf{r}_0} (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} (\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{r}_0) \} = -\frac{\mathbf{a}}{c} \end{aligned}$$

1.16 Ցույում Ապացույցելու համար $\int_V A dV$ ինտեգրալը քազմապատկեր կամայական c հաստատուն վեկտորով և օգտագործեք $c = \operatorname{grad}(c \cdot \mathbf{r})$ նույնությունը:

1.17 Պահանջվող նույնությունները ստանալու համար Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմը կիրառեք $\mathbf{a} = \nabla \psi - \psi \nabla \varphi$ և $\mathbf{a} = \psi \nabla \varphi$ վեկտորների նկատմամբ:

1.18 Գրիհի առաջին նույնության մեջ (տես մախորդ խնդիրը) վերցնելով $\psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ և օգտվելով 1.11 խնդրի արդյունքից, կստանանք՝

$$4\pi\varphi(\mathbf{r}_0) = \oint_S \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S}:$$

Որպես ինտեգրման S մակերևույթ վերցնելով $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ շառավղով զնդային մակերևույթը և հաշվի առնելով, որ

$$\oint_S \operatorname{grad} \varphi \cdot d\mathbf{S} = \int_V \Delta \varphi dV = 0,$$

կզանք

$$\varphi(r_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi dS$$

վերջնական արդյունքին:

$$1.19 \text{ ա) } \mathcal{F}\left[\frac{\partial\varphi(r,t)}{\partial t}\right] = -i\omega\varphi_F(\mathbf{k},\omega), \quad \text{բ) } \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2\varphi(r,t)}{\partial t^2}\right] = -\omega^2\varphi_F(\mathbf{k},\omega),$$

$$\text{գ) } \mathcal{F}[\text{grad}\varphi(r,t)] = -i\mathbf{k}\varphi_F(\mathbf{k},\omega), \quad \text{դ) } \mathcal{F}[\Delta\varphi(r,t)] = -k^2\varphi_F(\mathbf{k},\omega),$$

$$\text{ե) } \mathcal{F}[\text{div}\mathbf{A}(r,t)] = i\mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_F(\mathbf{k},\omega), \quad \text{զ) } \mathcal{F}[\text{rot}\mathbf{A}(r,t)] = i\mathbf{k}\times\mathbf{A}_F(\mathbf{k},\omega):$$

1.21 Ընտրենք գնդային կոորդինատական համակարգ, որի θ բևեռային անկյունը հաշվվում է $\mathbf{k}$ վեկտորի ուղղությամբ: Հաշվի առնելով, որ $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\alpha$, կատանանք

$$\varphi_F(\mathbf{k}) = \int_V \varphi(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dV = 2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi e^{ikr\cos\theta} r \sin\theta dr d\theta:$$

Սկզբում կատարենք ըստ r -ի ինտեգրումը՝

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ikr\cos\theta} r dr &= \lim_{a\rightarrow 0} \int_0^\infty e^{r(ik\cos\theta - a)} r dr = \\ &= \lim_{a\rightarrow 0} \frac{1}{(ik\cos\theta - a)^2} = -\frac{1}{k^2 \cos^2\theta}, \end{aligned}$$

$$\varphi_F(\mathbf{k}) = -\frac{2\pi}{k^2} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{4\pi}{k^2}:$$

$$1.22 \quad j_F(\mathbf{k},\omega) = 2\pi e v \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} - \omega):$$

$$1.23 \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \text{ որտեղ } \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \text{ ֆունկցիան}$$

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \text{ Լապլասի հավասարման լուծումն է:}$$

1.24 Դալանքերի հավասարման $G(\mathbf{R},\tau)$ Գրինի ֆունկցիան բավարարում է

$$\Delta G(\mathbf{R},\tau) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{R},\tau)}{\partial \tau^2} = -4\pi\delta(\mathbf{R})\delta(\tau)$$

հավասարմանը, որտեղ $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\tau = t - t'$: Հաշվի առնելով, որ

$$\delta(\mathbf{R})\delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} - \omega\tau)},$$

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3 k \int d\omega g(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega\tau)}, \quad (1)$$

Գրինի ֆունկցիայի $g(\mathbf{k}, \omega)$ ֆուրիե-պատկերի համար կատանանք

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) g(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \quad (2)$$

հավասարումը, որի լուծումը $k^2 \neq \omega^2/c^2$ դեպքում ունի $4\pi/(k^2 - \omega^2/c^2)$ տեսքը: Նկատենք, որ եթե վերջինիս գումարենք միայն $k^2 = \omega^2/c^2$ դեպքում զրոյից տարբերվող կամայական ֆունկցիա, կատանանք (2)-ին բավարարող նոր լուծում: Նշանակում է (2)-ի ընդհանուր լուծումը կարող ենք ներկայացնել

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} + \Phi_0(\mathbf{k}, \omega) \delta(k^2 - \omega^2/c^2) \quad (3)$$

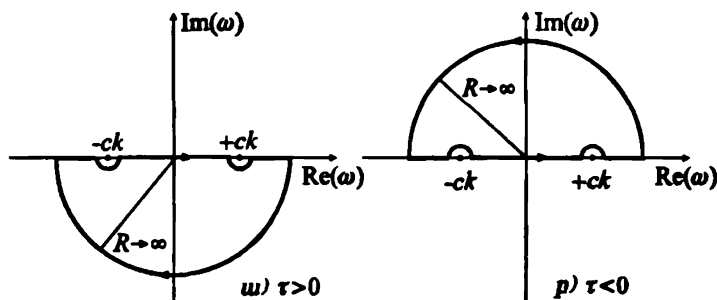
տեսքով, որտեղ $\Phi_0(\mathbf{k}, \omega)$ -ն կամայական վերջավոր ֆունկցիա է: Այժմ (2)-ի օգնությամբ հաշվենք Գրինի ֆունկցիան: Նախ նշենք, որ (1) ձևափոխությունը կիրառելով $\Phi_0(\mathbf{k}, \omega) \delta(k^2 - \omega^2/c^2)$ անդամի վրա ստանում ենք ինչ-որ $G_0(\mathbf{R}, \tau)$ ֆունկցիա, որը Դալանդերի համասեռ հավասարման լուծում է: Հաշվի առնելով այս հանգամանքը, կգրենք

$$G(\mathbf{R}, \tau) = G_1(\mathbf{R}, \tau) + G_0(\mathbf{R}, \tau),$$

որտեղ

$$G_1(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3 k e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2/c^2}: \quad (4)$$

Ըստ ω -ի ինտեգրալը հաշվելու համար այն ներկայացնենք Կոշու ինտեգրալի տեսքով: Ենթինտեգրալ ֆունկցիան ունի երկու հատուկ կետ՝ $\omega_{1,2} = \pm ck$: $\tau > 0$ դեպքում ինտեգրման կոնտուրն ընտ-



քենք նկարում պատկերված ա) ձևով, իսկ $\tau < 0$ դեպքում բ) ձևով, այնպես, որ $R \rightarrow \infty$ դեպքում մենք կիսաշրջանագծերով ինտեգրալը ձգտի զրոյի: Հաշվի առնելով, որ ընտրված տիրույթներում ալևա հաստակ կետեր չկան, իսկ զրոյի ձգտող շառավիղներով փոքր կիսաշրջանագծերով ինտեգրալները հավասար են համապատասխան մնացքների կետերին, կգրենք՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2/c^2} d\omega + \operatorname{sgn}(\tau)\pi i \sum_{m=1}^2 \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2/c^2}; \omega_m \right\} = 0,$$

որտեղից կստացվի՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2/c^2} d\omega = \frac{\pi c}{k} \operatorname{sgn}(\tau) \sin(ck\tau):$$

Ստացվածը տեղադրելով (4)-ի մեջ և օգտվելով $k \cdot R = kR \cos \vartheta$, $d^3k = k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta d\alpha$ ներկայացումներից, ինտեգրելուց հետո կստանանք՝

$$G(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{2R} \left\{ \delta \left(\tau - \frac{R}{c} \right) + \delta \left(\tau + \frac{R}{c} \right) \right\} + G_0(\mathbf{R}, \tau):$$

Եթե Φ_0 կամայական ֆունկցիան ընտրենք $\Phi_0(k, \omega) = \pm 4\pi^2 i \operatorname{sgn}(\omega)$ տեսքով, ապա կստացվեն համասեռ հավասարման

$$G_0^{\pm}(\mathbf{R}, \tau) = \pm \frac{1}{2R} \left\{ \delta \left(\tau - \frac{R}{c} \right) - \delta \left(\tau + \frac{R}{c} \right) \right\}$$

լուծումներ, որոնք բոլր կտան որոշել Գ-ի մի ռշայող (Retarded) և առաջ ընկնող (Advanced) ֆունկցիաները՝

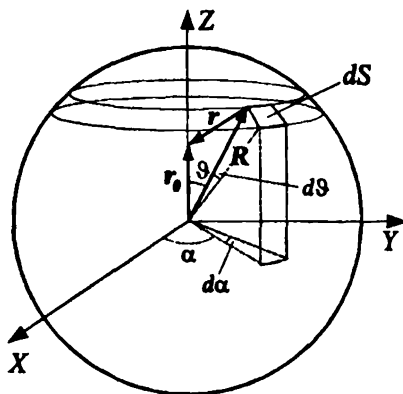
$$G^{(R)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{R} \delta \left(\tau - \frac{R}{c} \right) \text{ և } G^{(A)}(\mathbf{R}, \tau) = \frac{1}{R} \delta \left(\tau + \frac{R}{c} \right):$$

$$1.25 \quad G(\mathbf{R}, \omega) = \frac{1}{R} e^{i k R}:$$

ԳԼՈՒԽ 2

ԷԼԵՏՏՐՈՒԿԱՄԿԱՅԻ ՀԱՄԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐՆ ՈՒ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

2.1 Զավեռնողի փորձից հետևում է, որ լիցքը բաշխվել է գնդի մակերևույթով: Խնդրի գնդային համաչափությունն էլ բույլ է տալիս պնդելու, որ այդ բաշխումը հավասարաչափ է: Կարելի է ցույց տալ, որ գնդի ներսում լիցք կմնար միայն այն դեպքում, եթե հավասարաչափ լիցքավորված գնդային մակերևույթի կողմից գնդի ներսում տեղավորված լիցքի վրա ազդող ուժը զրոյից տարբեր լիներ: Իրոք, այս դեպքում գնդի ներսում գտնվող լիցքի բաշխումը նույնպես պետք է գնդային համաչափություն ունենար, այսինքն բաշխված լիներ գնդային շերտով: Գնդային շերտում գտնվող լիցքի տարրի վրա շերտի մյուս լիցքերի կողմից կազդի վանողական ուժ՝ շառավղային ուղղությամբ: Ակնհայտ է, որ դիտարկվող լիցքը կմնար գնդի ներսում միայն այն դեպքում, եթե գնդի մակերևույթին հավասարաչափ բաշխված լիցքի կողմից այդ տարրի վրա ազդող ուժը լիներ զրոյից տարբեր: Այսպիսով ծավալային լիցքի բացակայությունը խոսում է այն մասին, որ հավասարաչափ լիցքավորված գնդային մակերևույթի կողմից գնդի ներսում տեղավորված լիցքի վրա ազդող ուժը հավասար է զրոյի:



ված գնդային մակերևույթի կողմից գնդի ներսում տեղավորված լիցքի վրա ազդող ուժը հավասար է զրոյի:

q լիցքով հավասարաչափ լիցքավորված R շառավղով գնդային մակերևույթի $dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha$ տարրի կողմից r_0 կետում տեղավորված e լիցքի վրա ազդող ուժը կլինի

$$dF = \frac{eq f(r)r}{4\pi r} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha ,$$

որտեղ $r = r_0 - R$:

Ազդող լրիվ ուժի համար կունենանք

$$F = \frac{eq}{4\pi} \int \frac{f(r)r}{r} \sin \vartheta d\vartheta d\alpha , \quad (1)$$

որտեղ $r = (r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos \vartheta)^{1/2}$:

Նկատի ունենալով, որ $f(r)r/r = \nabla_{r_0} \psi(r)$, որտեղ $\psi'(r) = f(r)$, (1) ինտեգրալը կներկայացնենք այսպես՝

$$\mathbf{F} = \frac{eq}{2} \nabla_{\mathbf{r}_0} \int_0^\pi \psi(r) \sin \vartheta d\vartheta :$$

Ինչպես տեսնում ենք, ազդող ուժը հավասար է զրոյի, երբ

$$I = \int_0^\pi \psi(r) \sin \vartheta d\vartheta \quad (2)$$

ինտեգրալը կախված չէ r_0 -ից: (2) ինտեգրալի մեջ ϑ փոփոխականի անցնելով r փոփոխականի, կստանանք

$$I = \frac{1}{r_0 R} \int_{R-r_0}^{R+r_0} \psi(r) r dr :$$

Կարելի է ցույց տալ, որ միայն $\psi(r) = a + b/r$ ֆունկցիայի դեպքում, որտեղ a -ն և b -ն հաստատուններ են, I ինտեգրալը կախված չի լինի r_0 -ից: Հետևաբար միայն $f(r) = \psi'(r) = -b/r^2$ կախվածության դեպքում ազդող ուժը ներսում հավասար կլինի զրոյի:

- 2.2** x, y, z առանցքներն ընտրենք այնպես, ինչպես ցույց է տրված նկարում: Քանի որ խնդիրն ունի առանցքային համաչափություն, ապա ընդհանրությունը խախտած չենք լինի, եթե քննարկենք դաշտը x առանցքի վրա գտնվող կետերում: $(x, 0, 0)$ կետում մագնիսական դաշտի ինդուկցիան հավասար կլինի զրոյի

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \oint (d\mathbf{l} \times \mathbf{R}) f(R) = 0 \quad (1)$$

պայմանի դեպքում: Օգտագործելով $d\mathbf{l}$ և $\mathbf{R}$ վեկտորների

$$d\mathbf{l}(-a \sin \alpha d\alpha, a \cos \alpha d\alpha, 0),$$

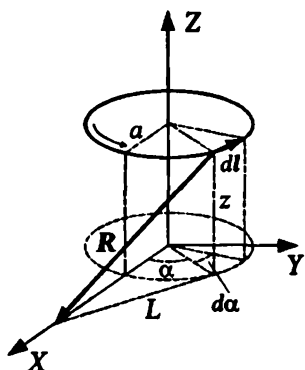
$$\mathbf{R}(x - a \cos \alpha, -a \sin \alpha, z)$$

քաղաղրիչները, (1)-ը կգրենք այսպես.

$$\int_{-\infty}^{\infty} z dz \int_{-\pi}^{\pi} f(R) \cos \alpha d\alpha = 0, \quad (2a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z dz \int_{-\pi}^{\pi} f(R) \sin \alpha d\alpha = 0, \quad (2b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\pi}^{\pi} f(R)(a - x \cos \alpha) d\alpha = 0, \quad (2a)$$



որտեղ $R(x, z, \alpha; a) = (L^2 + z^2)^{1/2}$, $L(x, \alpha; a) = (x^2 + a^2 - 2ax \cos \alpha)^{1/2}$,
 իսկ a -ն սուլենոիդի շառավիղն է: Քանի որ $R(x, z, \alpha; a)$ ֆունկցիան
 z -ի զույգ ֆունկցիա է, ապա $zf(R)$ ֆունկցիան կլինի կենտ
 ֆունկցիա, որի շնորհիվ (2ա) և (2բ) հավասարումները
 կբավարարվեն կամայական $f(R)$ ֆունկցիայի դեպքում: (2գ)-ում
 հաշվի առնելով ինտեգրվող ֆունկցիայի զույգ լինելը և անցնելով
 $\xi = R/L$ նոր փոփոխականի, կստանանք

$$\int_0^{\pi} (a - x \cos \alpha) \int_1^{\infty} \frac{L \xi f(L \xi) d\xi}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} d\alpha = 0: \quad (3)$$

Յույց տանք, որ միայն $f(R) = c/R^3$ ֆունկցիայի դեպքում տեղի
 կունենա (3) առնչությունը: Ենթադրենք $f(R) = cR^{\delta}$: Այս դեպքում
 (3)-ը կգրվի այսպես

$$\int_0^{\pi} (a - x \cos \alpha) L(x, \alpha; a)^{\delta+1} d\alpha \int_1^{\infty} \frac{\xi^{\delta+1} d\xi}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} = 0: \quad (4)$$

Նկատենք, որ $\delta \neq -3$ դեպքում այս հավասարումը տեղի չունի:
 Իրոք, նկատի ունենալով

$$\frac{\partial L(x, \alpha; a)}{\partial a} = \frac{a - x \cos \alpha}{L(x, \alpha; a)}$$

առնչությունը, $\delta \neq -3$ ենթադրության դեպքում կունենանք

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\pi} L(x, \alpha; a)^{\delta+3} d\alpha \int_1^{\infty} \frac{\xi^{\delta+1} d\xi}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} = 0,$$

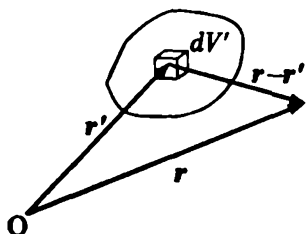
այսինքն $\int_0^{\pi} L(x, \alpha; a)^{\delta+3} d\alpha$ ինտեգրալը կախված չէ a -ից: Ակնհայտ

է, որ $\delta \neq -3$ դեպքում վերջին ինտեգրալը կախված կլինի a -ից: Ինչ
 վերաբերում է $\delta = -3$ դեպքին, ապա այս դեպքում (4) հավասար-
 ւան մեջ հանդես եկող ինտեգրալը կդառնա

$$\int_0^{\pi} \frac{(a - x \cos \alpha) d\alpha}{\xi^2 + a^2 - 2ax \cos \alpha},$$

որը, ինչպես կարելի է համոզվել, հավասար է զրոյի: Այսպիսով,
 միայն $f(R) = C/R^3$ ֆունկցիայի դեպքում մագնիսական դաշտը
 սուլենոիդից դուրս հավասար կլինի զրոյի:

2.3 Ենթադրենք ունենք $\rho(\mathbf{r})$ խտությանը լիցքերի տարածական բաշխում: $\mathbf{r}'$ շառավիղ վեկտորով բնութագրվող կետի շուրջը վերցրած տարրական dV' ծավալում գտնվող $\rho(\mathbf{r}')dV'$ լիցքի ստեղծած էլեկտրական դաշտի լարվածությունը $\mathbf{r}$ շառավիղ վեկտորով կետում համաձայն Կուլոնի օրենքի կլինի՝



$$d\mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r}')dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

Վերադրման սկզբունքից հետևում է, որ բոլոր լիցքերի ստեղծած դաշտը հավասար է՝

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV',$$

որտեղից՝

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \operatorname{div} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV':$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

կստանանք

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = - \int \rho(\mathbf{r}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV':$$

Օգտվելով 1.11 խնդրի արդյունքից վերջնականապես՝

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}):$$

2.6 ա) Դիտարկենք $\mathbf{a} = \mathbf{B} - (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c$ վեկտորը: Օգտվելով Մաքսվելի հավասարումներից կստանանք՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = -\frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ կունենանք՝

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}): \tag{2}$$

(1)-ից հետևում է, որ $\mathbf{a}$ -ն կարելի է ներկայացնել $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \psi$ տեսքով, որը տեղադրելով (2)-ի մեջ, կստանանք հավասարում ψ -ի համար՝

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \psi : \quad (3)$$

Ստացված հավասարումը բազմապատկենք ψ -ով և ինտեգրենք ըստ ամբողջ տարածության՝

$$\int_V \psi \Delta\psi dV = \oint_S \psi \nabla\psi \cdot d\mathbf{S} - \int_V (\nabla\psi)^2 dV,$$

$$\int_V \psi (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \psi dV = \mathbf{v} \cdot \oint_S \psi (\mathbf{v} \cdot \nabla\psi) d\mathbf{S} - \int_V ((\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi)^2 dV:$$

Այստեղ մակերևութային ինտեգրալները հավասար են զրոյի, որովհետև լիքքերի սահմանափակ համակարգի դեպքում մեծ հեռավորությունների վրա $\nabla\psi \sim 1/r^2$, $\psi \sim 1/r$, իսկ $dS \sim r^2$: Նշանակում է

$$\int \left[(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla\psi)^2 \right] dV = 0:$$

Քանի որ միշտ $v < c$, ապա ենթինտեգրալային արտահայտությունը զրոյի հավասար կլինի միայն այն դեպքում, երբ $\nabla\psi = \mathbf{a} = 0$, որտեղից հետևում է պահանջվող առնչությունը:

$\mathbf{p}$ Դիտարկենք $\mathbf{b} = \mathbf{E} - (\mathbf{v} \times \mathbf{B})/c$ վեկտորը: Որա համար

$$\text{rot } \mathbf{b} = 0, \quad \text{div } \mathbf{b} - c^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = 4\pi \left[\rho - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \right],$$

որտեղ $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$:

Ըստ խնդրի պայմանի դիտարկվում են հաստատուն հոսանքներ: Լիքքերի հավասարաչափ շարժման համար անհրաժեշտ է, որ տարածության բոլոր այն կետերում, որտեղ $\rho \neq 0$ լիքքերի վրա ազդող Լորենցի ուժը հավասար լինի զրոյի

$$\mathbf{F} = e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] = 0,$$

կամ $\mathbf{b} = 0$, որտեղից հետևում է, որ այդ կետերում $\rho = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})/c^2$: Նշանակում է տարածության բոլոր կետերում

$$\text{div } \mathbf{b} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}) = 0:$$

Այսպիսով խնդիրը բերվում է ա) դեպքին և $\mathbf{b} = 0$:

$$2.10 \quad \Delta A - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \text{grad} \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho:$$

2.14 Ենթադրենք էլեկտրամագնիսական դաշտի աղբյուրներ հանդիսացող ազատ լիցքերն ու հոսանքները գտնվում են S անշարժ մակերևութով պարփակված V ծավալում, իսկ նրանց գումարային մեխանիկական իմպուլսը $\mathbf{p}$ -է: Իմպուլսի պահպանության օրենքը V ծավալում կարող ենք գրել

$$\frac{\partial(\mathbf{p} + \mathbf{p}_e)}{\partial t} = - \oint_S \Pi_i dS_i \quad (1)$$

տեսքով, որտեղ $\mathbf{p}_e$ -ն էլեկտրամագնիսական դաշտի իմպուլսն է V ծավալում, Π_i -ն՝ էլեկտրամագնիսական դաշտի իմպուլսի հոսքի խտությունը: Մյուս կողմից, աղբյուրների վրա էլեկտրամագնիսական դաշտի կողմից ազդող ուժի k -րդ բաղադրիչի համար կարող ենք գրել

$$\frac{\partial P_k}{\partial t} = \int_V f_k dV = \frac{d}{dt} \int_V g_k dV + \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV,$$

կամ՝ օգտվելով Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից՝

$$\frac{d}{dt} \left(P_k + \int_V g_k dV \right) = \oint_S T_{ik} dS_i :$$

Ստացված արտահայտության համեմատությունը (1)-ի հետ ցույց է տալիս, որ $\mathbf{g}$ -ն էլեկտրամագնիսական դաշտի իմպուլսի խտությունն է, իսկ T_{ik} -ն էլեկտրամագնիսական դաշտի իմպուլսի k -րդ բաղադրիչի հոսքի խտությունը i ուղղությամբ:

2.16 Դիպուք հայտնի է $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ վեկտորի տանգենցիալ բաղադրիչը մակերևութի վրա՝ $\mathbf{E}_\tau(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_\tau(\mathbf{r}, t)$: Ենթադրենք Մաքսվելի հավասարումներն ունեն երկու լուծում՝ $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ և $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$: Այդ երկու լուծումներն էլ բավարարում են նույն սկզբնական և եզրային պայմաններին: Նշանակում է նրանց $\mathbf{E}'' = \mathbf{E} - \mathbf{E}', \mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$ տարբերությունները կբավարարեն հետևյալ պայմաններին՝

ա) $\mathbf{E}''(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{H}''(\mathbf{r}, t) = 0$ ամբողջ ծավալում,

բ) $\mathbf{E}''_\tau(\mathbf{r}, t) = 0$ ժամանակի ցանկացած պահի, V ծավալը պարփակող S մակերևութի վրա:

Մաքսվելի հավասարումների գծայնությունից հետևում է, որ $\mathbf{E}''$ և $\mathbf{H}''$ դաշտերը ևս կբավարարեն այդ հավասարումներին: Նշանակում է նրանց համար կարելի է գրել էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը՝

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\epsilon \mathbf{E}''^2 + \mu \mathbf{H}''^2) dV = - \int_V \lambda \mathbf{E}''^2 dV - \frac{1}{8\pi} \oint_S (\mathbf{E}'' \times \mathbf{H}'') \cdot d\mathbf{S} :$$

բ) պայմանից հետևում է, որ մակերևութային ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Օգտվելով $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ Օհմի օրենքից, վերևի հավասարումը կգրենք այսպես՝

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\epsilon E^2 + \mu H^2) dV = - \int_V \lambda E^2 dV:$$

Ստացված առնչության ձախ կողմը չի կարող լինել բացասական, իսկ աջ կողմը՝ դրական: Հետևաբար նրանք հավասար են զրոյի, որտեղից կհետևի, որ $\mathbf{E}'' = 0$, $\mathbf{H}'' = 0$:

2.18

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{կապ}}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{կապ}}), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

որտեղ

$$\rho_{\text{կապ}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{j}_{\text{կապ}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{I}:$$

2.20

$$\varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}}{r^5}:$$

2.21 Համաձայն մախորդ խնդրում էլեկտրական դիպոլի պոտենցիալի համար ստացած բանաձևի և վերադրման սկզբունքի, տարածության $\mathbf{r}$ կետում պոտենցիալը կլինի՝

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV',$$

որը կարելի է քերել հետևյալ տեսքի՝

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \int_V \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV':$$

Ջանի որ $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ ֆունկցիան մեծ հեռավորությունների վրա նվազում է r^{-2} օրենքով, ապա մակերևութային ինտեգրալը ձգտում է զրոյի, երբ ինտեգրման ծավալը ձգտում է անվերջի: Այնպես որ

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{-\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

այսինքն ստեղծվում է այնպիսի դաշտ, որը կստեղծեն $\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ ծավալային բաշխվածություն ունեցող էլեկտրական լիցքը:

2.23 Օգտվելով վեկտորական հաշվի $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}$ հայտնի նույնությունից և Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից, կստանանք՝

$$\mathbf{p} = - \int_V \mathbf{r} \text{div} \mathbf{P} dV = - \oint_S \mathbf{r} (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}) + \int_V \mathbf{P} dV :$$

Հաշվի առնելով, որ նյութից դուրս $\mathbf{P} = 0$ կունենանք

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV$$

այսինքն $\mathbf{P}$ -ն նյութի միավոր ծավալի էլեկտրական դիպոլային մոմենտն է, կամ, որ նույնն է, էլեկտրական բևեռացման վեկտորն է: $\mathbf{m}$ վեկտորի համար ունենք

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{I}) dV :$$

Օգտվելով վեկտորական հաշվի $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ նույնությունից և Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից, երկրորդ ինտեգրալի համար կստանանք

$$\int_V (\mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{I}) dV = - \oint_S \mathbf{r} \times (\mathbf{I} \times d\mathbf{S}) + 2 \int_V \mathbf{I} dV :$$

Հաշվի առնելով, որ նյութից դուրս $\mathbf{I} = 0$, վերջնականապես կունենանք՝

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int_V \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{I} dV ,$$

այսինքն, երբ բևեռացման հոսանքը բացակայում է ($\partial \mathbf{P} / \partial t = 0$), $\mathbf{I}$ -ն միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտն է, կամ, որ նույնն է՝ մագնիսական բևեռացման վեկտորն է:

2.27 Ընտրենք գլանային կոորդինատական համակարգ, որի OZ առանցքն ուղղված է $\mathbf{B}$ դաշտով, իսկ $z = 0$ կետում գտնվում է զնդի կենտրոնը: Գունդը պտտվում է մագնիսական դաշտի մակաձած $\mathbf{E}$ էլեկտրական դաշտի ազդեցության տակ, որը ունի $E_r = E_z = 0$, $E_\alpha = E_\alpha(r, t)$ տեսք: Մաքսվելի (2.2) հավասարումից

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\alpha)}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} :$$

Վերջինս ըստ r -ի ինտեգրելով ստանում ենք՝ $E_\alpha = -r\dot{B}/2c$, կամ վեկտորական տեսքով՝

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2c} (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{B}}) : \quad (1)$$

Այստեղ R -ը գնդի կենտրոնը դիտման կետին միացնող շառավիղ վեկտորն է՝ $R = \hat{e}_z z + \hat{e}_r r$ ։ Պինդ մարմնի պտտական շարժման հիմնական հավասարման համաձայն

$$I_0 \frac{d\Omega}{dt} = M, \quad (2)$$

որտեղ $I_0 = 2mR_0^2/5$ գնդի իներցիայի մոմենտն է կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ, R_0 -ն գնդի շառավիղն է, M -ը գնդի վրա ազդող ուժի մոմենտը՝

$$M = \int (R \times \rho E) dV : \quad (3)$$

(1)-ը տեղադրենք (3)-ի մեջ և ինտեգրենք։ Կստանանք

$$M = -\frac{1}{5c} QR_0^2 \dot{B} :$$

Վերջինս տեղադրենք (2)-ի մեջ և ինտեգրենք ըստ ժամանակի։ Արդյունքում կստանանք

$$\Omega = -\frac{QB}{2mc} :$$

$$2.28 \quad \text{rot} B(r, \omega) = \frac{4\pi}{c} j(r, \omega) - i \frac{\omega}{c} E(r, \omega), \quad \text{rot} E(r, \omega) = i \frac{\omega}{c} B(r, \omega),$$

$$\text{div} B(r, \omega) = 0, \quad \text{div} E(r, \omega) = 4\pi \rho(r, \omega) :$$

$$i k \times B_F(k, \omega) = \frac{4\pi}{c} j_F(k, \omega) - i \frac{\omega}{c} E_F(k, \omega),$$

$$i k \times E_F(k, \omega) = i \frac{\omega}{c} B_F(k, \omega),$$

$$i k \cdot B_F(k, \omega) = 0, \quad i k \cdot E_F(k, \omega) = 4\pi \rho_F(k, \omega) :$$

$$2.29 \quad \text{div} A(r, \omega) - i \frac{\omega}{c} \varphi(r, \omega) = 0, \quad \Delta \varphi(r, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(r, \omega) = -4\pi \rho(r, \omega),$$

$$\Delta A(r, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} A(r, \omega) = -\frac{4\pi}{c} j(r, \omega),$$

$$i k \cdot A_F(k, \omega) - i \frac{\omega}{c} \varphi_F(k, \omega) = 0,$$

$$k^2 \varphi_F(k, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi_F(k, \omega) = -4\pi \rho_F(k, \omega),$$

$$k^2 A_F(k, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} A_F(k, \omega) = -\frac{4\pi}{c} j_F(k, \omega) :$$

ԷԼԵԿՏՐՈՄԵԿԱՆԻԿԱԿԱՆ
ՆՅՈՒԹԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

3.1 Ոչ բևեռային դիէլեկտրիկների մոլեկուլներում արտաքին դաշտի քայակայության դեպքում լիցքի բաշխումը կենտրոնահամաչափ է: Համարելով, որ արտաքին դաշտի ազդեցության տակ էլեկտրոնների և իոնների x_i շեղումները փոքր են, կարող ենք ենթադրել, որ նրանց վրա ազդում է վերադարձնող քվադրադոպական $-m_i\omega_{0i}^2x_i$ ուժ, որտեղ ω_{0i} -ն m_i զանգվածով i -րդ էլեկտրոնի (իոնի) բնութագրական հաճախությունն է: Հավասարակշռության դեպքում i -րդ մասնիկի վրա E' տեղային դաշտի կողմից ազդող ուժը հավասարակշռվում է քվադրադոպական ուժով՝

$$-m_i\omega_{0i}^2x_i + e_iE' = 0$$

որտեղից մոլեկուլի i -րդ մասնիկի $p_i = e_ix_i$ դիպոլային մոմենտի համար կունենանք

$$p_i = \frac{e_i^2}{m_i\omega_{0i}^2} E' :$$

Մեկ մոլեկուլի դիպոլային մոմենտը կլինի՝

$$p = \sum_i p_i = \gamma_e E', \quad \gamma_e = \sum_i \frac{e_i^2}{m_i\omega_{0i}^2} ,$$

որտեղ γ_e -ն մոլեկուլի բևեռացելիությունն է և ունի ծավալի չափողականություն:

Եթե դիէլեկտրիկի միավոր ծավալում կա N մոլեկուլ, ապա

$$P = Np = N\gamma_e E' :$$

Այսպիսով $\chi_e^{(0)}$ դիէլեկտրական ընկալունակության և ε դիէլեկտրական թափանցելիության համար ստանում ենք՝

$$\chi_e = N\gamma_e = N \sum_i \frac{e_i^2}{m_i\omega_{0i}^2} ,$$

$$\varepsilon = 1 + 4\pi N \sum_i \frac{e_i^2}{m_i\omega_{0i}^2} ,$$

որտեղ գումարումը կատարվում է ըստ մոլեկուլի բոլոր լիցքերի: Քանի որ γ_e -ն հակադարձ համեմատական է մասնիկի զանգվածին, ապա χ_e -ի մեջ կարելի է սահմանափակվել միայն էլեկտրոնների ներդրումով:

- 3.2** Շրջանագծով շարժվող i -րդ էլեկտրոնի վրա միջուկի կողմից ազդող կուլոնյան ուժը կատարում է կենտրոնաձիգ ուժի դեր՝

$$\frac{Ze^2}{r_i^2} = m r_i \omega_{0i}^2,$$

որտեղ ω_{0i} -ն i -րդ էլեկտրոնի պտույտի հաճախությունն է, իսկ Z -ը՝ էլեկտրոնների թիվը: Այստեղից՝ $Ze^2/m\omega_{0i}^2 = r_i^3$: Օգտվելով նախորդ խնդրի արդյունքից, կստանանք՝

$$\gamma_e = \sum_i \frac{e^2}{m\omega_{0i}^2} = \frac{1}{Z} \sum_i r_i^3 = \overline{r^3},$$

որտեղ արտահայտության վերևի հորիզոնական գծիկով նշանակված է դրա միջին արժեքը:

- 3.3** Արտաքին E դաշտի ազդեցությամբ ջրածնի միջուկը (պրոտոնը) կշեղվի դաշտի ուղղությամբ: Այն կհավասարակշռվի r_0 շառավիղ-վեկտորով կետում, որը բավարարում է

$$E + E_e(r_0) = 0$$

սլայմանին, որտեղ E_e -ն էլեկտրոնային ամպի դաշտն է:

Գաուսի թեորեմից օգտվելով՝ E_e դաշտի համար կգրենք

$$E_e(r_0) = \frac{r_0}{r_0} \frac{\int_0^{r_0} \rho(r) 4\pi r^2 dr}{r_0^2}:$$

Թույլ արտաքին դաշտի դեպքում $r_0 \ll a$ և ինտեգրման ողջ տիրույթում $\exp(-2r/a)$ -ն կարելի է փոխարինել 1-ով: Կստանանք՝

$$E_e(r_0) = -\frac{4e}{a^3} \frac{r_0}{r} \int_0^{r_0} r^2 dr,$$

$$E - \frac{4}{3} \frac{e r_0}{a^3} = 0:$$

Դիպոլային մոմենտի համար կունենանք՝

$$p = e r_0 = \frac{3}{4} a^3 E:$$

Այսպիսով ջրածնի ատոմի γ_e քննապնդելիությունը կլինի՝

$$\gamma_e = \frac{3}{4} a^3:$$

Նկատենք, որ լիցքի համասեռ բաշխման դեպքում կստացվեր $\gamma_e = R^3$ արդյունքը, որտեղ R -ը լիցքի հավասարաչափ բաշխման տիրույթի շառավիղն է:

- 3.4** Երբ արտաքին դաշտը բացակայում է, քառասյին ջերմային շարժում կատարող կոշտ դիպոլների ուղղվածությունը հավասարա-
հավանական է և միջավայրի գումարային դիպոլային մոմենտը
հավասար է զրոյի: Արտաքին դաշտը դիպոլների ուղղվածության
մեջ կարգավորություն է մտցնում, որի շնորհիվ միջավայրը դաշտի
ուղղությամբ ձեռք է բերում P էլեկտրական բևեռացում՝

$$P = p \sum_{i=1}^N \cos \vartheta_i = p N \overline{\cos \vartheta},$$

որտեղ N -ը մոլեկուլների թիվն է միավոր ծավալում, ϑ_i -ն անկյունն
է i -րդ մոլեկուլի p_i մոմենտի և E դաշտի միջև, $\cos \vartheta$ -ն ϑ , անկյան
կոսինուսի միջինացված արժեքն է ըստ բոլոր մոլեկուլների: Բուլ-
մանի բաշխման համաձայն

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{\int \cos \vartheta dw}{\int dw} = \frac{\int_0^\pi \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta} d\vartheta}{\int_0^\pi \sin \vartheta e^{\frac{pE}{kT} \cos \vartheta} d\vartheta}:$$

Կատարելով $z = \cos \vartheta$ փոփոխականի փոխարինում և նշանակելով
 $\xi = pE/kT$, ինտեգրելույ հետո կստանանք

$$\overline{\cos \vartheta} = \operatorname{cth} \xi - \frac{1}{\xi} = L(\xi),$$

որտեղ $L(\xi)$ -ն այսպես կոչված Լանժևենի ֆունկցիան է: Այսպիսով

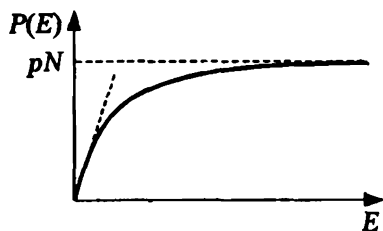
$$P = pNL(pE/kT):$$

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ

$$L(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } \xi \gg 1, \\ \xi/3, & \text{եթե } \xi \ll 1, \end{cases}$$

որտեղից

$$P = \begin{cases} Np, & \text{եթե } pE \gg kT, \\ Np^2 E/3kT, & \text{եթե } pE \ll kT: \end{cases}$$



$P(E)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը բերված է նկարում: Ուժեղ դաշտերի դեպքում, երբ մոլեկուլի և արտաքին դաշտի փոխազդեցության էներգիան շատ անգամ գերակշռում է ջերմային էներգիան, բոլոր դիպոլներ դասավորվում են դաշտի ուղղությամբ և P -ն հաս-

նում է հագեցման արժեքին: $pE \ll kT$ թույլ դաշտերի դեպքում $P(E)$ կապը գծային է և կարելի է ներմուծել միջավայրի դիէլեկտրական ընկալունակության հասկացությունը՝

$$\chi_e^0 = \frac{Np^2}{3kT} \sim \frac{1}{T} \quad (\text{Կյուրիի օրենք}):$$

$$3.5 \quad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi\chi_e}{1 - 4\pi\chi_e/3} \quad \text{կամ} \quad \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi\chi_e}{3}:$$

3.7 Էլեկտրոնի շարժման հավասարումն է

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = -\frac{e}{mc} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1)$$

որտեղ e -ն տարրական լիցքն է, իսկ $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$: Z առանցքն ուղղենք $\mathbf{B}$ դաշտի ուղղությամբ և (1) հավասարումը գրենք պոլյեկլիաներով՝

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{eB}{mc} \dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y - \frac{eB}{mc} \dot{x} = 0,$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0:$$

Վերջին հավասարումից հետևում է, որ դաշտի ուղղությամբ տարածական օսցիլյատորի հաճախությունը չի փոխվում: Մտցնենք $\xi = x + iy$ նոր փոփոխականը: Այն բավարարում է

$$\ddot{\xi} - 2i\omega_L \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0 \quad (2)$$

հավասարմանը: Այստեղ կատարել ենք $\omega_L = eB/2mc$ նշանակումը:

(2)-ի լուծումը փնտրենք $e^{\pm i\omega t}$ տեսքով: Կստանանք

$$\omega^2 \mp 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0$$

բնութագրական հավասարումը, որտեղից՝

$$\omega = \pm\omega_L + \omega_0\sqrt{1 + \omega_L^2/\omega_0^2}$$

Գնահատելով կարելի է համոզվել, որ $B \ll 10^6$ Գս լարվածությամբ դաշտերի դեպքում $\omega_L^2/\omega_0^2 \ll 1$ և

$$\omega \approx \omega_0 \pm \omega_L:$$

ω_L -ը կոչվում է Լարմորի հաճախություն:

3.8

$$\Delta P = -e \int_0^{\tau} E dt,$$

որտեղ e -ն տարրական լիցքն է, իսկ τ -ն B դաշտի միայնակ ժամանակամիջոցն է, որի ընթացքում մականծվում է $E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$ մրրկային

էլեկտրական դաշտ (A -ն մագնիսական դաշտի վեկտոր-պոտենցիալն է): Վերջինս տեղադրելով ΔP -ի ինտեգրալի մեջ և հաշվի առնելով, որ համասեռ դաշտերի դեպքում

$$A = \frac{1}{2} (B \times r),$$

կստանանք

$$\Delta P = \frac{e}{c} A(\tau) = \frac{e}{2c} (B \times r) = m \omega_L \times r,$$

որտեղ $\omega_L = eB/2mc$ -ը լարմորյան անկյունային արագությունն է:

3.9 Կոորդինատների սկզբնակետն ընտրենք շրջանագծային ուղեծրի կենտրոնում: Էլեկտրոնի արագությունը՝ $v = \omega_0 \times r$: Օգտվելով մախորդ խնդրում բերված առնչություններից և $\omega_L \ll \omega_0$ պայմանից, կունենանք՝

$$\Delta A = -e \int_0^{\tau} (E \cdot v) dt = \frac{e}{2c} \int_0^{\tau} (\dot{B} \times r) \cdot (\omega_0 \times r) dt \approx$$

$$\approx \frac{e}{2c} r^2 (\omega_0 \cdot B(\tau)) = m r^2 (\omega_L \cdot \omega_0):$$

3.10 i -րդ ատոմական էլեկտրոնի v_i արագությունը B համասեռ մագնիսական դաշտում հավասար է՝

$$v_i = v_{0i} + \omega_L \times r_i,$$

որտեղ $\mathbf{v}_{0i}$ -ն այդ էլեկտրոնի արագությունն է դաշտի բացակայության դեպքում, $\omega_L = eB/2mc$ -ն լարմոյան անկյունային արագությունն է: Ատոմի մագնիսական մոմենտը B դաշտում՝

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2c} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = -\frac{e}{2c} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{0i}) - \frac{e}{2c} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{r}_i \times (\omega_L \times \mathbf{r}_i))$$

Ստացված արտահայտության մեջ

$$\mathbf{m}_0 = -\frac{e}{2c} \sum_{i=1}^Z (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_{0i})$$

անդամը ատոմի մագնիսական մոմենտն է դաշտի բացակայության դեպքում: Երկրորդ անդամը՝

$$\mathbf{m}_\eta = -\frac{e}{2c} \sum_{i=1}^Z (\omega_L \mathbf{r}_i^2 - \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \omega_L)),$$

ատոմի լարմոյան պրեցեսիայով պայմանավորված մագնիսական մոմենտն է (դիամագնիսական մոմենտ): Եթե կոորդինատական համակարգի Z առանցքն ուղղենք B վեկտորով, ապա կունենանք

$$m_{\eta x} = +\frac{e \omega_L}{2c} \sum_{i=1}^Z x_i z_i,$$

$$m_{\eta y} = +\frac{e \omega_L}{2c} \sum_{i=1}^Z y_i z_i,$$

$$m_{\eta z} = -\frac{e \omega_L}{2c} \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2):$$

Եթե արտաքին դաշտի ազդեցությունը շատ փոքր է և էլեկտրոնների բաշխումը ատոմում կարելի է կենտրոնահամաչափ համարել, ապա

$$\sum_{i=1}^Z x_i z_i = \sum_{i=1}^Z y_i z_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^Z x_i^2 = \sum_{i=1}^Z y_i^2 = \sum_{i=1}^Z z_i^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^Z (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{3} Z \overline{r^2},$$

որտեղ $\overline{r^2}$ -ը էլեկտրոնների միջին քառակուսային հեռավորությունն է միջուկից: Այսպիսով ատոմի լարմոյան պրեցեսիայով պայմանավորված մագնիսական մոմենտի համար կունենանք

$$\mathbf{m}_\eta = -\frac{e}{3c} \omega_L Z \overline{r^2} \hat{\mathbf{k}} = -\frac{e^2}{6mc} Z \overline{r^2} \mathbf{B}:$$

Եթե միջավայրի ատոմների կոնցենտրացիան N է, ապա

$$\mathbf{I}_q = N\mathbf{m}_q = -\frac{e^2 N Z \overline{r^2}}{6mc^2} \mathbf{B}:$$

Համապատասխան մագնիսական ընկալունակության համար կստանանք՝

$$\chi_q^{(0)} = -\frac{e^2 N Z \overline{r^2}}{6mc^2}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիամագնիսներում $\chi_q^{(0)}$ մագնիսական ընկալունակությունը բացասական մեծություն է:

3.11 Լարնորյան պրեցեսիայով պայմանավորված մագնիսական մոմենտի համար կունենանք՝

$$\mathbf{m}_q = \frac{1}{2c} \int \rho(\mathbf{r}) [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r})] dV: \quad (1)$$

Հաշվի առնելով լիպբերի բաշխման կենտրոնահամաչափ լինելը մախորդ խնդրի նման այս դեպքում կստանանք՝

$$\mathbf{m}_q = \frac{\boldsymbol{\omega}_L}{3c} \int \rho(\mathbf{r}) r^2 dV: \quad (2)$$

Օգտվելով $\boldsymbol{\omega}_L = e\mathbf{B}/(2mc)$ բանաձևից և 3.3 խնդրում բերված բաշխման տեսքից, կգրենք՝

$$\mathbf{m}_q = -\frac{2e^2 \mathbf{B}}{3mc^2 a^3} \int_0^\infty e^{-2r/a} r^4 dr: \quad (3)$$

Ինտեգրումից հետո ստացվում է՝

$$\mathbf{m}_q = -\frac{e^2 a^2}{2mc^2} \mathbf{B}:$$

Միջավայրում ատոմների խտությունը նշանակելով N -ով՝ մագնիսական $\chi_q^{(0)}$ ընկալունակության համար վերջնականապես կստանանք՝

$$\chi_q^{(0)} = -\frac{e^2 a^2 N}{2mc^2}:$$

3.12 Խնդիրը լուծվում է 3.4-ի նման, միայն Բոլցմանի բաշխման մեջ $W(\vartheta)$ ֆունկցիան այս դեպքում $W(\vartheta) = -\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B}$ է, որտեղ $\mathbf{B}$ -ն արտաքին մագնիսական դաշտի ինդուկցիան է՝

$$I = Nm_0 L \left(\frac{m_0 B}{kT} \right) = \begin{cases} Nm_0, & \text{եթե } m_0 B \gg kT, \\ Nm_0^2 B / 3kT, & \text{եթե } m_0 B \ll kT: \end{cases}$$

Թույլ դաշտերի դեպքում $I(B)$ կախվածությունը գծային է և կարելի է ներմուծել մագնիսական ընկալունակության հասկացողությունը՝

$$I = \chi_m^{(0)} B, \quad \chi_m^{(0)} = \frac{Nm^2}{3kT} \sim \frac{1}{T} \quad (\text{Այուրիի օրենք}):$$

3.13 Օգտվելով մագնիսական մոմենտի

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_i \mathbf{e}_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

և իմպուլսի մոմենտի

$$\mathbf{l} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i)$$

սահմանումներից և հաշվի առնելով, որ ատոմական էլեկտրոնների համար $e_i/m_i = -e/m$, կստանանք՝

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2mc} \mathbf{l}:$$

Հաշվի առնելով, որ $\mathbf{m}$ մագնիսական մոմենտի վրա $\mathbf{B}_0$ դաշտի կողմից ազդող ուժի մոմենտը $\mathbf{m} \times \mathbf{B}_0$ է, մոմենտների հավասարումը մեկ ատոմի համար կգրենք այսպես՝

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\frac{e}{2mc} \mathbf{m} \times \mathbf{B}_0:$$

Միավոր ծավալի մագնիսական մոմենտի (մագնիսացման) համար կունենանք՝

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{e}{2mc} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{I}$$

Նկատենք, որ այս հավասարումից հետևում է $I^2 = \text{const}$ պայմանը: Հիշելով, որ $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ դիֆերենցիալ հավասարումը նկարագրում է մոդուլով հաստատուն $\mathbf{r}$ վեկտորի պտույտը $\boldsymbol{\omega}$ հաստատուն անկյունային արագությամբ, կարող ենք պնդել, որ $\mathbf{I}$ մագնիսացման վեկտորը

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{B}_0$$

հաստատումն անկյունային արագությամբ (վարմության հաճախությամբ) պտտվում է B_0 վեկտորի շուրջը:

3.14 ա) Ըստ սահմանման

$$\mathbf{j} = -Ne\bar{\mathbf{v}}, \quad (1)$$

որտեղ N -ը էլեկտրոնների կոնցենտրացիան է, $\bar{\mathbf{v}}$ -ը էլեկտրոնների միջին արագությունը: Համաձայն Նյուտոնի երկրորդ օրենքի երկու հաջորդական բախումների միջև

$$m\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}:$$

Եթե $\mathbf{E}$ -ն կախված չէ ժամանակից՝

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \frac{e}{m} \mathbf{E}t:$$

Այստեղ $\mathbf{v}_0$ սկզբնական արագությունը էլեկտրոնը ձեռք է բերում միջավայրի իոնների հետ հերթական բախումից հետո և մեծությամբ էլեկտրոնների ջերմային շարժման u միջին արագության կարգի է՝ $v_0 \approx u = (8kT/\pi m)^{1/2}$:

Հաշվենք երկու իրար հաջորդող բախումների միջև արագության ըստ ժամանակի միջին արժեքը՝

$$\bar{\mathbf{v}}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathbf{v} dt = \mathbf{v}_0 - \frac{e\tau}{2m} \mathbf{E}: \quad (2)$$

Այստեղ τ -ն էլեկտրոնի ազատ վազքի միջին ժամանակն է: $\bar{\mathbf{v}}$ -ը որոշելու համար $\bar{\mathbf{v}}_\tau$ -ն այժմ պետք է միջինացնել ըստ բոլոր էլեկտրոնների: Քանի որ բախումներից հետո էլեկտրոնի ձեռք բերած $\mathbf{v}_0$ արագությունը հավասար հավանականությամբ կարող է ունենալ կամայական ուղղություն, ապա այդ միջինացումից հետո կստանանք

$$\bar{\mathbf{v}} = -\frac{e\tau}{2m} \mathbf{E}: \quad (3)$$

Հետևաբար (1)-ից՝

$$\mathbf{j} = \frac{Ne^2\tau}{2m} \mathbf{E}: \quad (4)$$

Եթե $\mathbf{E}$ -ն այնքան փոքր է, որ $\bar{v} \ll u$, ապա $\tau = l/u$, որտեղ l -ը էլեկտրոնի ազատ վազքի միջին երկարությունն է: Այս դեպքում $\mathbf{j}$ և $\mathbf{E}$ մեծությունների միջև ստացվում է գծային կապ (Օմի օրենքը)՝

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad \lambda = \frac{Ne^2 l}{2mu}: \quad (5)$$

էլեկտրական դաշտի լարվածության մեծ արժեքների դեպքում համաձայն (3)-ի $\bar{v}$ -ը մեծանում է: $\bar{v} \gg u$ ($E \gg 2\sqrt{2mkT/\pi/e\tau}$) պայմանի դեպքում

$$\tau = \frac{l}{\bar{v}} = \frac{Nel}{j}:$$

Վերջինս տեղադրելով (4)-ի մեջ ստանում ենք $j(E)$ կախվածությունը մեծ դաշտերի դեպքում՝

$$j = Ne \sqrt{\frac{el}{2m}} E \frac{E}{E}$$

(Ռիչարդսոնի օրենքը):

Էլեկտրական դաշտի $E_{տանի}$ արժեքը, որից հետո (5) գծային կախվածությունը ճիշտ չէ, կորոշենք $\bar{v} = u$ պայմանից: Մետաղներում (արծաթ, պղինձ)

$$l \sim 10^{-6} \text{ սմ}, u \sim 10^7 \text{ սմ/վրկ}, \tau = l/\bar{v}_r = l/2u \sim 5 \cdot 10^{-14} \text{ վ}:$$

Սենյակային ջերմաստիճանում ($T = 300\text{K}$)

$$E_{տանի} = 2(2mkT/\pi)^{1/2}/e\tau \approx 400 \text{ CGSE միավ} \approx 10^7 \text{ Վ/սմ}:$$

Այսպիսի մեծ դաշտերում մետաղներն անմիջապես կգոլորշանան: Օրինակ, պղնձի համար տեխնիկապես բույլատրելի էլեկտրական դաշտի լարվածությունը 0.15 Վ/սմ է: Նշանակում է մետաղներում Օմի օրենքը միշտ ճիշտ է: Սակայն պլազմայում, որտեղ էլեկտրոնների ազատ վազքի երկարությունը շատ մեծ է, վերջիններս արագ ձեռք են բերում $\bar{v} \geq u$ արագություններ, այնպես որ այստեղ $j(E)$ կախվածությունը ոչ գծային է և Ռիչարդսոնի օրենքը գործում է մեծ ճշտությամբ:

բ) Բախման ժամանակ իոնին հաղորդված կինետիկ էներգիան հավասար է

$$\Delta E_y = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -e\tau v_0 \cdot E + \frac{e^2 \tau^2}{2m} E^2:$$

ΔE_y -ը ըստ բոլոր էլեկտրոնների միջինացնելիս առաջին անդամի ներդրումը հավասար է զրոյի՝

$$\overline{\Delta E_y} = \frac{e^2 \tau^2}{2m} E^2$$

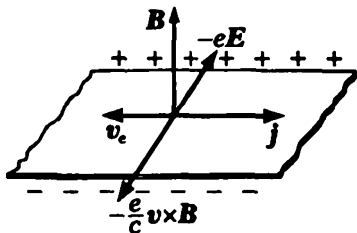
Ստացիոնար ռեժիմում միավոր ժամանակում, միավոր ծավալում պարունակվող իոններին հաղորդված էներգիան հավասար է միավոր ժամանակում, միավոր ծավալում անջատվող q ջերմության քանակին՝

$$q = \frac{N\Delta E_k}{\tau} = \frac{Ne^2\tau}{2m} E^2,$$

կամ հաշվի առնելով, որ մետաղներում $\tau = l/u$, ստանում ենք Ջոուլ-Լենցի օրենքը՝

$$q = \lambda E^2:$$

զ) Քանի որ էլեկտրոնների լիքը բացասական է, ապա նրանց ուղղորդված շարժման $v_e = \bar{v}$ ուղղությունը հակառակ է ուղղված j հոսանքին: B մագնիսական դաշտում v_e արագությամբ շարժվող էլեկտրոնի վրա ազդում է Լորենցի $F = -(e/c)(v_e \times B)$ մագնիսական ուժը, որի ազդեցության տակ ժապավենի մի եզրին բացասական, մյուսին՝ դրական լիք է կուտակվում: Այս պրոցեսը կշարունակվի, մինչև որ Լորենցի մագնիսական ուժը հավասարակշռվի կուտակված լիքի ստեղծած eE Լորենցի էլեկտրական ուժով՝ $eE = ev_e B/c$ ($v_e \perp B$) որտեղից



$$E = \frac{jB}{Nec}:$$

Վերջինս բազմապատկելով d -ով ստանում ենք

$$\Delta\varphi = Ed = \frac{jBd}{Nec} = RjBd:$$

$R = (Nec)^{-1}$ մեծությունը կոչվում է Հոլի գործակից:

3.15 Հաշվի առնելով $\text{rot} A = B$ առնչությունը, Լոնդոնների հավասարումը գրենք

$$\frac{4\pi\Lambda_0^2}{c} \text{rot} j + B = 0$$

տեսքով: Օգտվելով Մաքսվելի (2.12) և (2.14) հավասարումներից, կստանանք՝

$$\Delta B = \Lambda_0^{-2} B:$$

Ենթադրենք, թե միջավայրը զբաղեցնում է $x \geq 0$ կիսատարածությունը: Այդ դեպքում վերջին հավասարումը դառնում է

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \Lambda_0^{-2} B,$$

որի լուծումն ունի

$$B(x) = B(0)e^{-x/\Lambda_0}$$

տեսքը: Վերջինից հետևում է, որ $x > \Lambda_0 \propto 10^{-6}$ սմ խորությունների վրա $B(x)$ -ը գործնականորեն հավասար է զրոյի:

3.16 $m\ddot{x} = qE$ շարժման հավասարումից, որտեղ $E = E_0 e^{-i\omega t}$, x շեղման համար կստանանք՝ $x = -qE/m\omega^2$: Հաշվի առնելով, որ

$$P(\omega) = Nq x(\omega) \text{ և } \varepsilon(\omega)E(\omega) = E(\omega) + 4\pi P(\omega)$$

(N -ը մասնիկների կոնցենտրացիան է), կստանանք

$$\chi_e(\omega) = -\frac{Nq^2}{m\omega^2}, \quad \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

որտեղ ω_p -ն այսպես կոչված պլազմային հաճախությունն է՝

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi Nq^2}{m} \right)^{1/2}$$

3.18 Գրենք $E = E_0 e^{-i\omega t}$ դաշտում քվազիառաձգական ուժով կապված i -րդ տիպի էլեկտրոնի շարժման հավասարումը՝

$$\ddot{r}_i + \gamma_i \dot{r}_i + \omega_{0i}^2 r_i = -\frac{e}{m} E, \quad (1)$$

որտեղ ω_{0i} -ն i -րդ տիպի էլեկտրոնի սեփական հաճախությունն է, γ_i -ն՝ մարման գործակիցը, իսկ e -ն՝ տարրական լիցքը: (1)-ի մասնավոր լուծումը փնտրենք $r_i = r_{0i} e^{-i\omega t}$ տեսքով, որը տեղադրելով (1)-ի մեջ, կունենանք

$$(-\omega^2 - i\gamma_i \omega + \omega_{0i}^2) r_i = -\frac{e}{m} E:$$

Հաշվի առնելով, որ

$$P = N \sum_i f_i p_i = -Ne \sum_i f_i r_i,$$

կստանանք՝

$$\chi_e(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i}: \quad (2)$$

$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega)$ առնչությունից՝

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i},$$

որտեղ $\omega_p = (4\pi Ne^2/m)^{1/2}$ -ը պլազմային հաճախությունն է:

Անջատելով $\varepsilon(\omega)$ -ի իրական և կեղծ մասերը, կստանանք՝

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i (\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_i^2},$$

$$\varepsilon''(\omega) = \omega_p^2 \omega \sum_i \frac{f_i \gamma_i}{(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_i^2}:$$

3.19 ω_0 ռեզոնանսային հաճախությանը մոտ հաճախությունների դեպքում 3.18 խնդրի լուծման մեջ ստացված (2) բանաձևը կդառնա՝

$$\chi_e(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}:$$

Օգտագործելով Կլաուզիուս-Մոսոտիի առնչությունը (տես 3.5 խնդիրը), կստանանք

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2 f}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma - \omega_p^2 f/3},$$

այսինքն Լորենցի արդյունաբար դաշտի ազդեցությունը արտահայտվում է ռեզոնանսային հաճախության քառակուսու շեղմամբ $\omega_p^2 f/3$ չափով:

3.20 Էլեկտրոնի $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ դիպոլային մոմենտի պրոյեկցիաների համար շարժման հավասարումներից ունենք

$$\ddot{p}_x + \omega_{01}^2 p_x = \frac{e^2}{m} E_x, \quad \ddot{p}_y + \omega_{02}^2 p_y = \frac{e^2}{m} E_y, \quad \ddot{p}_z + \omega_{03}^2 p_z = \frac{e^2}{m} E_z:$$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ դաշտում սրանց լուծումները փնտրենք $p_x = p_{x0} e^{-i\omega t}$, $p_y = p_{y0} e^{-i\omega t}$, $p_z = p_{z0} e^{-i\omega t}$ տեսքով: Միջավայրի էլեկտրական թնեալան համար կստանանք

$$P_x = N p_x = \frac{Ne^2}{m(\omega_{01}^2 - \omega^2)} E_x,$$

$$P_y = N p_y = \frac{Ne^2}{m(\omega_{02}^2 - \omega^2)} E_y,$$

$$P_z = N p_z = \frac{Ne^2}{m(\omega_{03}^2 - \omega^2)} E_z,$$

որտեղից

$$\chi_{ik}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{Ne^2}{m(\omega_{01}^2 - \omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ne^2}{m(\omega_{02}^2 - \omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ne^2}{m(\omega_{03}^2 - \omega^2)} \end{pmatrix}$$

իսկ

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = 1 + 4\pi\chi_{ik}(\omega)$$

3.21 Հաղորդականության էլեկտրոնների շարժման հավասարումն է

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m}\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

որտեղ $\mathbf{r}$ -ը էլեկտրոնների շեղման վեկտորն է $\mathbf{E}$ դաշտում, $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$ -ն էլեկտրոնների միջին արագությունն է դաշտի երկայնքով: $\mathbf{r}$ ֆունկցիան փնտրելով $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t}$ տեսքով, կստանանք՝

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m\omega} \frac{1}{\omega + i\gamma}, \quad \mathbf{v} = -\frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega}:$$

Օգտվելով $\mathbf{j} = -Ne\mathbf{v}$ և $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ առնչություններից կստանանք՝

$$\lambda(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\gamma - i\omega} = \frac{\lambda_0}{1 - i\omega/\gamma}:$$

Այստեղ $\lambda_0 = \lambda(\omega \rightarrow \infty) = Ne^2/m\gamma$ ստատիկ էլեկտրահաղորդականությունն է հաստատուն էլեկտրական դաշտում, որը Դրուդե-Լորենցի տեսության սահմաններում ունի $\lambda_0 = Ne^2\tau/2m$ տեսքը (տես 3.14 խնդիրը), որտեղ τ -ն ազատ վազի միջին ժամանակն է: Նշանակում է γ պարամետրը հաղորդականության էլեկտրոնների բախումների հաճախության կարգի է ($\gamma \sim 1/\tau$):

$\mathbf{P} = -Ne\mathbf{r}$ և $\mathbf{P} = \chi_e(\omega)\mathbf{E}$ առնչություններից ստանում ենք

$$\chi_e(\omega) = -\frac{Ne^2}{m\omega} \frac{1}{\omega + i\gamma},$$

կամ անջատելով իրական և կեղծ մասերը՝

$$\chi'_e(\omega) = -\frac{\lambda_0\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \chi''_e(\omega) = \frac{\lambda_0\gamma^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}:$$

$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi_e(\omega)$ անցնությունից՝

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{4\pi\lambda_0\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\lambda_0\gamma^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)};$$

3.22 Համարելով, որ $E(t) = 0$ երբ $t < 0$ և $E(t) = E_0 = \text{const}$, երբ $t \geq 0$, (3.5)-ից կստանանք

$$P(t) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } t < 0, \\ E_0 \int_0^t \kappa(t') dt', & \text{եթե } t \geq 0, \end{cases}$$

որտեղից՝

$$\kappa(t) = \frac{1}{E_0} \frac{dP}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{եթե } t < 0, \\ \frac{\chi_e^{(0)}}{\tau} e^{-t/\tau}, & \text{եթե } t \geq 0: \end{cases}$$

(3.7)-ից

$$\chi(\omega) = \frac{\chi_e^{(0)}}{\tau} \int_0^\infty e^{\left(i\omega - \frac{1}{\tau}\right)t} dt = \frac{\chi_e^{(0)}}{1 - i\omega\tau},$$

որի օգնությամբ՝

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 + \frac{4\pi\chi_e^{(0)}}{1 - i\omega\tau}$$

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{4\pi\chi_e^{(0)}}{1 + (\omega\tau)^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\omega\tau\chi_e^{(0)}}{1 + (\omega\tau)^2};$$

3.24

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} &= \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} + \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega} = \\ &= \int_0^{\infty} \varepsilon''(\omega') \left\{ \frac{1}{\omega' - \omega} + \frac{1}{\omega' + \omega} \right\} d\omega' = 2 \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') \omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}, \end{aligned}$$

որի օգնությամբ (3.13)-ը կդառնա՝

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon''(\omega') \omega' d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2};$$

3.25 Ենթադրենք ω հաճախությունը շատ մեծ է և որ ω' հաճախությունները, որոնց դեպքում կլանումը զգալի է, բավարարում են $\omega' \ll \omega$ պայմանին: Այդ դեպքում մի կողմից 3.17 խնդրի համաձայն $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 - 4\pi Ne^2 / m\omega^2$, մյուս կողմից 3.24 խնդրում ստացված առնչությունից կարելի է գրել

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^\infty \varepsilon''(\omega') \omega' d\omega',$$

Այս երկուսի համեմատությունից ստանում ենք

$$N = \frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^\infty \varepsilon''(\omega') \omega' d\omega':$$

3.26 Դիտարկենք մոնոքրոմատիկ էլեկտրամագնիսական դաշտի դեպքը՝ $E = E_0 e^{-i\omega t}$, $H = H_0 e^{-i\omega t}$: Էներգիայի փոփոխությունը միավոր ժամանակում, միավոր ծավալում տրվում

$$\text{div} S = (c/4\pi) \text{div}(\text{Re} E \times \text{Re} H)$$

քանաձևով, որտեղ S -ը Պոյնտինգի վեկտորն է: Ըստ ժամանակի միջինացված $-\text{div} S$ մեծությունը հավասար կլինի էլեկտրամագնիսական դաշտի աղբյուրների կողմից միավոր ժամանակում միջավայրի միավոր ծավալին տրված էներգիային, որը ծախսվում է էներգիայի կորուստները չեզոքացնելու վրա, այսինքն այն հավասար կլինի միջավայրում միավոր ժամանակում, միավոր ծավալում անջատված q ջերմության քանակին:

Հաշվի առնելով, որ

$$\text{Re} E = \frac{1}{2}(E + E^*), \quad \text{Re} H = \frac{1}{2}(H + H^*),$$

$$\overline{E \times H} = (E_0 \times H_0) e^{-2i\omega t} = 0,$$

$$\overline{E^* \times H^*} = (E_0^* \times H_0^*) e^{2i\omega t} = 0,$$

$$\overline{E \times H^*} = E \times H^*,$$

$$\overline{E^* \times H} = E^* \times H,$$

կունենանք

$$q = -\text{div} S = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \text{div}(E \times H^* + E^* \times H) =$$

$$= -\frac{c}{8\pi} \text{Re} \text{div}(E \times H^*) = -\frac{c}{8\pi} \text{Re}(H^* \cdot \text{rot} E - E \cdot \text{rot} H^*):$$

Օգտվելով

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mu(\omega) \mathbf{H}$$

Մաքսվելի հավասարումներից, կստանանք՝

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Re}(i\mu(\omega)|\mathbf{H}|^2 - i\varepsilon^*(\omega)|\mathbf{E}|^2) = \\ &= -\frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Re}(i(\mu' + i\mu'')|\mathbf{H}|^2 - i(\varepsilon' - i\varepsilon'')|\mathbf{E}|^2) = \\ &= \frac{\omega}{8\pi} (\mu''|\mathbf{H}|^2 + \varepsilon''|\mathbf{E}|^2): \end{aligned}$$

Ստացված առնչությունից հետևում է, որ $\varepsilon''(\omega)$ և $\mu''(\omega)$ մեծությունները նկարագրում են էլեկտրամագնիսական ալիքների կլանումը միջավայրերում: Բացի դրանից, քանի որ q անջատված ջերմության քանակը դրական մեծություն է, ապա $\varepsilon''(\omega) > 0$, $\mu''(\omega) > 0$: Այս հետևությունները ճիշտ են կամայական փոփոխական դաշտերի համար, որովհետև Ֆուրիե վերլուծության միջոցով նրանց միշտ կարելի է ներկայացնել մոնոքրոմատիկ ալիքների գումարի տեսքով:

3.28 $\mathbf{b} = b_0 e^{-i\omega t}$ փոփոխական դաշտի առկայությամբ միջավայրի մագնիսական բևեռացումը կարելի է ներկայացնել

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_b(t)$$

տեսքով, որտեղ $\mathbf{I}_0 = \chi_m^{(0)} \mathbf{B}_0$ -ն մագնիսացման հաստատուն բաղադրիչն է, իսկ $\mathbf{I}_b(t)$ -ն՝ $\mathbf{b}(t)$ -ով պայմանավորված մասն է, որը $b \ll B_0$ պայմանի շնորհիվ մույնպես կբավարարի $I_b(t) \ll I_0$ պայմանին: 3.13 խնդրի մասնությամբ կարող ենք գրել

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{e}{2mc} (\mathbf{B} \times \mathbf{I}):$$

Սահմանափակվելով $\mathbf{b}$ և $\mathbf{I}_b$ փոքր մեծությունների գծային անդամներով, կարող ենք գրել

$$\frac{d\mathbf{I}_b}{dt} = \frac{e}{2mc} (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{I}_b) + \frac{e}{2mc} (\mathbf{b} \times \mathbf{I}_0):$$

Հաշվի առնելով, որ $\mathbf{I}_0 = \chi_m^{(0)} \mathbf{B}_0$ և օգտվելով Լարմորի անկյունային արագության $\omega_L = eB_0/(2mc)$ բանաձևից, կգրենք՝

$$\frac{d\mathbf{I}_b}{dt} = \omega_L \times \mathbf{I}_b - \chi_m^{(0)} (\omega_L \times \mathbf{b}): \quad (1)$$

(1) հավասարման լուծումը փնտրենք $I_b = I_{b0} e^{-i\omega t}$ տեսքով, որը տեղադրելույ հետո կստանանք՝

$$-i\omega I_b = \omega_L \times I_b - \chi_m^{(0)} (\omega_L \times b) : \quad (2)$$

Այս հավասարումը ձախից վեկտորապես բազմապատկելով $i\omega_L/\omega$ վեկտորով և ստալաված հավասարումը գումարելով (2)-ին, կունենանք՝

$$(\omega^2 - \omega_L^2) I_b = -\chi_m^{(0)} \omega_L^2 b_{\perp} - i\omega \chi_m^{(0)} (\omega_L \times b_{\perp}),$$

որտեղ $b_{\perp}$ -ը b դաշտի ω_L Լարմորի անկյունային արագությանն ուղղահայաց բաղադրիչն է:

Այսպիսով՝

$$I_b = \chi(\omega) b_{\perp} - ig(\omega) \times b_{\perp}, \quad (3)$$

որտեղ՝

$$\chi(\omega) = \chi_m^{(0)} \frac{\omega_L^2}{\omega_L^2 - \omega^2}, \quad g(\omega) = -\chi_m^{(0)} \frac{\omega \omega_L}{\omega_L^2 - \omega^2} B_0 :$$

(3)-ից հետևում է, որ b դաշտի $b_{\parallel}$ երկայնական բաղադրիչը գծային մոտավորությամբ I_b -ի վրա ազդեցություն չի թողնում, և եթե այն ունի B_0 հաստատուն դաշտին ուղղահայաց $b_{\perp}$ բաղադրիչ, ապա $\omega \rightarrow \omega_0$ դեպքում դիտվում է I_b -ի ռեզոնանսային աճ: Ենթադրելով, որ դեկարտյան կոորդինատական համակարգի z առանցքն ուղղված է B_0 -ով, (3)-ը կարող ենք գրել

$$I_{bi} = \chi_{ik} b_k$$

թենզորական տեսքով, որտեղ χ_{ik} -ն մագնիսական թափանցելիության թենզորն է՝

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi & ig & 0 \\ -ig & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} :$$

ԳԼՈՒԽ 4
ԷԼԵԿՏՐՈՍՏԱՏԻԿԱ

4.1 ա) $E_1 = \frac{4\pi}{3}\rho r$, $\varphi_1 = \frac{2\pi R^2\rho}{3}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, ($r \leq R$),

$$E_2 = \frac{4\pi R^3\rho}{3} \frac{r}{r^3}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi R^3\rho}{3} \frac{1}{r}, \quad (r \geq R):$$

բ) $E_1 = 2\pi\rho r$, $\varphi_1 = \pi\rho(R^2 - r^2)$, ($r \leq R$)

$$E_2 = 2\pi R^2\rho \frac{r}{r^2}, \quad \varphi_2 = 2\pi R^2\rho \ln \frac{R}{r}, \quad (r \geq R):$$

գ) $E_1 = 4\pi\rho x\hat{e}_x$, $\varphi_1 = -2\pi\rho x^2$, ($|x| \leq a$),

$$E_2 = 4\pi a\rho (x/|x|)\hat{e}_x, \quad \varphi_2 = -2\pi\rho a(a - 2|x|), \quad (|x| \geq a),$$

Դեկարտյան կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը սալի հարթությանը զուգահեռ համաչափության հարթության մեջ է, իսկ x առանցքն ուղղահայաց է նրան:

4.2 ա) $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 4\pi R\sigma$, ($r < R$),

$$E_2 = 4\pi R^2\sigma \frac{r}{r^3}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi R^2\sigma}{r}, \quad (r \geq R):$$

բ) $E_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, ($r < R$)

$$E_2 = 4\pi R\sigma \frac{r}{r^2}, \quad \varphi_2 = 4\pi R\sigma \ln \frac{R}{r}, \quad (r \geq R):$$

գ) $E = 2\pi\sigma \frac{x}{|x|}\hat{e}_x$, $\varphi = -2\pi\sigma|x|$, այստեղ x -ը լիցքավորված

հարթությանն ուղղահայաց առանցքն է:

4.3 Խոռոչի ներսում դաշտը համասեռ է՝ $E = \frac{4\pi}{3}\rho a$:

4.4

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^\infty \rho(r') r' dr',$$

$$E = \frac{4\pi r}{r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr':$$

$$4.5 \quad q = 4\pi a(R_2 - R_1),$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}, & \text{եթե } (r \leq R_1), \\ \frac{q}{R_2 - R_1} \left(1 - \frac{R_1}{r} + \ln \frac{R_2}{r} \right), & \text{եթե } (R_1 \leq r \leq R_2), \\ \frac{q}{r}, & \text{եթե } (r \geq R_2): \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } (r \leq R_1), \\ q \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \frac{r}{r^3}, & \text{եթե } (R_1 \leq r \leq R_2), \\ q \frac{r}{r^3}, & \text{եթե } (r \geq R_2): \end{cases}$$

$$4.6 \quad \varphi(r) = \frac{e}{a} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right) - \frac{e}{r}:$$

4.7 Եթե հատվածը զրադեցնում է կոորդինատական համակարգի z առանցքի $[-l, l]$ մասը, ապա

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{2l} \ln \frac{z + l + r_1}{z - l + r_2},$$

$$\text{որտեղ } r_{1,2} = \sqrt{(z \pm l)^2 + x^2 + y^2}:$$

$$E_x = \frac{qx}{2l} \left[\frac{1}{r_2(z - l + r_2)} - \frac{1}{r_1(z + l + r_1)} \right],$$

$$E_y = \frac{qy}{2l} \left[\frac{1}{r_2(z - l + r_2)} - \frac{1}{r_1(z + l + r_1)} \right],$$

$$E_z = \frac{qz}{2l} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]:$$

Φ_0 պոտենցիալ ունեցող կետերի երկրաչափական տեղը կորոշվի

$$\frac{z + l + \sqrt{(z + l)^2 + x^2 + y^2}}{z - l + \sqrt{(z - l)^2 + x^2 + y^2}} = e^{2\Phi_0/lq} = C \quad (1)$$

հավասարումով: (1) հավասարման աջ և ձախ մասերը բազմապատկելով ձախ մասի հայտարարով, մի կողմ տեղափոխելով արմատները, քառակուսի բարձրացնելով և կատարելով կրճատումներ, կստանանք՝

$$(1+C^2)(x^2+y^2)+2C(z^2-l^2)=2C\sqrt{(x^2+y^2+z^2+l^2)^2-4z^2l^2}:$$

Ստացված հավասարումը նորից քառակուսի բարձրացնենք: Չկափոխությունից հետո կստանանք՝

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2+y^2}{b^2} = 1, \quad (2)$$

որտեղ

$$a = \frac{C+1}{C-1}l, \quad b = \frac{2}{\sqrt{C(C-1)}}: \quad (3)$$

(2)-ը պտտման էլիպսոիդի հավասարում է, որի կիսառանցքները որոշվում են (3) առնչություններով, իսկ կենտրոնը համընկնում է լիքավորված հատվածի երկրաչափական կենտրոնի հետ: C-ն արտահայտելով φ_0 -ով, կունենանք՝

$$a = l \operatorname{cth} \frac{l\varphi_0}{q}, \quad b = \frac{l}{\operatorname{sh} \frac{l\varphi_0}{q}}:$$

4.8 Սահմանումից հետևում է, որ կրկնակի էլեկտրական շերտը համարժեք է մակերևութով բաշխված տարրական դիպոլների համախմբի, որոնց դիպոլային մոմենտներն ուղղված են մակերևութի նորմալի ուղղությամբ: dS' մակերևութի տարրը կունենա

$$d\mathbf{p}' = \Sigma dS' \quad (1)$$

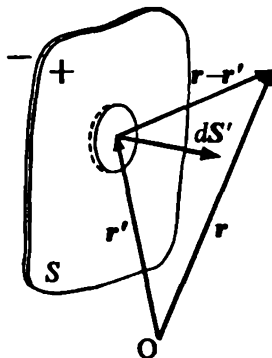
դիպոլային մոմենտ, որի պոտենցիալը r շառավիղ-վեկտորով կետում կլինի

$$\Delta\varphi = \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \cdot (\Sigma(\mathbf{r}') dS')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}: \quad (2)$$

Հաշվի առնելով մարմնային անկյան

$$d\Omega' = \frac{(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^3} \quad (3)$$

սահմանումը, կգրենք



$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_S \Sigma(\mathbf{r}') d\Omega' \quad (4)$$

Եթե կրկնակի շերտի հզորությունը մոդուլով հաստատուն է, ապա՝

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\Sigma\Omega, \quad (5)$$

որտեղ Ω -ն այն մարմնային անկյունն է, որով երևում է կրկնակի շերտը:

Գտնենք սահմանային պայման պոտենցիալի համար: Կրկնակի շերտի վրա գտնվող $\mathbf{r}'$ շառավիղ-վեկտորով կետի շուրջը մտովի առանձնացնենք կրկնակի շերտի անվերջ փոքր dS' մակերես: Կրկնակի շերտի մնացած մասի կողմից $\mathbf{r}'$ կետում ստեղծված դաշտի պոտենցիալը նշանակենք $\varphi_0(\mathbf{r}')$ -ով: dS' անվերջ փոքր տարրի ստեղծած դաշտի պոտենցիալի սահմանային արժեքը $\mathbf{r}'$ կետին կրկնակի շերտի դրական երեսից մոտենալիս կլինի

$$\varphi'_+ = 2\pi\Sigma(\mathbf{r}'), \quad (6)$$

իսկ բացասական երեսի կողմից՝

$$\varphi'_- = -2\pi\Sigma(\mathbf{r}'): \quad (7)$$

Վերադրման սկզբունքից օգտվելով կրկնակի էլեկտրական շերտի պոտենցիալի համար կգրենք՝

$$\varphi_+(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') + 2\pi\Sigma(\mathbf{r}'), \quad (8)$$

$$\varphi_-(\mathbf{r}') = \varphi_0(\mathbf{r}') - 2\pi\Sigma(\mathbf{r}'): \quad (9)$$

Ստացվածից երևում է, որ կրկնակի էլեկտրական շերտի վրա պոտենցիալը կրում է

$$\varphi_+(\mathbf{r}') - \varphi_-(\mathbf{r}') = 4\pi\Sigma(\mathbf{r}') \quad (10)$$

թռիչք:

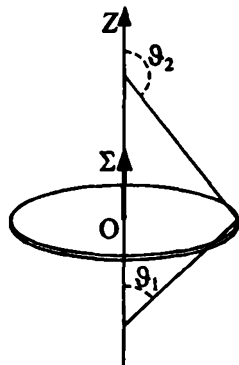
4.9 Կոորդինատական համակարգի սկզբնակետն ընտրենք սկավառակի կենտրոնում և օգտվենք նախորդ խնդրի

$$\varphi = -\Sigma\Omega \quad (1)$$

արդյունքից:

$z < 0$ դեպքում

$$\begin{aligned} \Omega &= -2\pi \cos\vartheta \Big|_0^{\vartheta} = -2\pi(\cos\vartheta_1 - 1) = \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), \end{aligned} \quad (2)$$



$$z = 0 \text{ դեպքում } \Omega = 0: \quad (3)$$

$z > 0$ դեպքում

$$\Omega = -2\pi \cos \vartheta|_{\pi}^{\vartheta_2} = -2\pi(\cos \vartheta_2 + 1) = -2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right): \quad (4)$$

Այսպիսով՝

$$\varphi = \begin{cases} -2\pi \Sigma \left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & \text{եթե } z < 0, \\ 0, & \text{եթե } z = 0, \\ 2\pi \Sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & \text{եթե } z > 0: \end{cases} \quad (5)$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = 2\pi \Sigma \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}: \quad (6)$$

4.10 4.8 խնդրի (5) բանաձևի համաձայն

$$\varphi = -\Sigma \Omega,$$

որտեղ Ω -ն այն մարմնային անկյունն է, որով երևում է կրկնակի շերտը: $\Omega > 0$, եթե երևում է շերտի բացասական լիցքավորված երեսը՝ $z < R$, և $\Omega < 0$, եթե երևում է դրական երեսը՝ $z > R$:

$z < R$ դեպքում՝

$$\begin{aligned} \Omega &= -2\pi \cos \vartheta|_0^{\vartheta_1} = 2\pi(1 - \cos \vartheta_1) = \\ &= 2\pi \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right): \end{aligned}$$

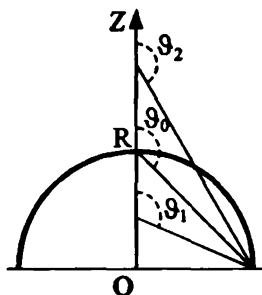
$z > R$ դեպքում՝

$$\Omega = -2\pi \cos \vartheta|_{\pi}^{\vartheta_2} = -2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right):$$

$z = R$ դեպքում՝

$$\Omega = -2\pi \cos \vartheta|_{\pi/2}^{\vartheta_0} = -\cos \vartheta_0 = \sqrt{2}\pi:$$

Այսպիսով՝



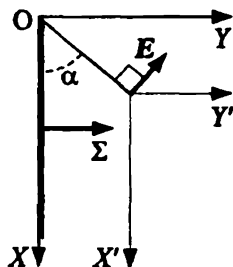
$$\varphi = \begin{cases} -2\pi\Sigma \left(1 + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & \text{եթե } z < R, \\ -\sqrt{2}\pi\Sigma, & \text{եթե } z = R, \\ 2\pi\Sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right), & \text{եթե } z > R: \end{cases}$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi\Sigma R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

4.11 4.8 խնդրի լուծման համաձայն

$$\varphi = -\Sigma\Omega,$$

որտեղ Ω -ն այն մարմնային անկյունն է որով երևում է կրկնակի շերտը: Մարմնային անկյունը որոշելու համար ընտրենք դիտման կետի կենտրոնով (x', y', z') օժանդակ կոորդինատական համակարգ:



$$|\Omega| = \left| \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_{\pi+\alpha}^{2\pi} d\alpha \right| = 2|\pi - \alpha|:$$

Հաշվի առնելով, որ $\Omega < 0$, եթե երևում է դրական երեսը ($0 < \alpha < \pi$) և $\Omega > 0$, եթե երևում է բացասական երեսը ($\pi < \alpha < 2\pi$), կարող ենք գրել

$$\Omega = 2(\alpha - \pi):$$

Այսպիսով՝

$$\varphi = \begin{cases} 2\Sigma(\pi - \alpha), & \text{եթե } 0 < \alpha < 2\pi, \\ 0, & \text{եթե } \alpha = 0, 2\pi: \end{cases}$$

$$E_r = E_z = 0, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{2\Sigma}{r}:$$

Նկատենք, որ ($y = 0, x \geq 0$) հարթության վրա φ պոտենցիալն իսկապես ունի թռիչք՝

$$\varphi(\alpha \rightarrow 0) - \varphi(\alpha \rightarrow 2\pi) = 4\pi\Sigma:$$

$$4.12 \quad \varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z,$$

$$E_x(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sin \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z,$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \sin \beta y \cos \gamma z,$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma z:$$

4.13 Պոտենցիալը $z < 0$ և $z > 0$ կիսատարածություններում որոշվում է

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (z < 0) \quad \text{և} \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad (z > 0) \quad (1)$$

Լապլասի հավասարումներից, ըստ որում φ_1 և φ_2 ֆունկցիաները բավարարում են

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = 4\pi\sigma(x, y), \quad (2)$$

$$\varphi_1(x, y, 0) = \varphi_2(x, y, 0)$$

սահմանային պայմաններին:

Քանի որ Լապլասի օպերատորը ազդելով $\sin$ ֆունկցիայի վրա նրա տեսքը չի փոխում, ապա (1) հավասարումների լուծումները կարելի է փնտրել

$$\varphi_{1,2}(x, y, z) = \phi_{1,2}(z) \sigma(x, y)$$

տեսքով, որոնք տեղադրելով (1)-ի մեջ ϕ_1 և ϕ_2 -ի համար ստանում ենք

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial z^2} - \lambda^2 \phi_{1,2} = 0, \quad (z \neq 0), \quad (3)$$

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2:$$

Քանի որ լրիվ մակերևութային լիցքը հավասար է զրոյի, ապա (1) հավասարումների լուծումները պետք է նվազեն $|z| \rightarrow \infty$ դեպքում, որի շնորհիվ

$$\phi_1(z) = C_1 e^{\lambda z}, \quad \phi_2(z) = C_2 e^{-\lambda z}:$$

(2) սահմանային պայմաններից կհետևի $C_1 = C_2 = 2\pi/\lambda$ և վերջ-նականապես կստանանք՝

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} e^{-\lambda|z|} \sigma(x, y),$$

$$E_x(x, y, z) = -\frac{2\pi\alpha}{\lambda} e^{-\lambda|z|} \cos(\alpha x) \sin(\beta y),$$

$$E_y(x, y, z) = -\frac{2\pi\beta}{\lambda} e^{-\lambda|z|} \sin(\alpha x) \cos(\beta y),$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{z}{|z|} e^{-\lambda|z|} \sigma(x, y):$$

4.14 Առաջին եղանակ: Գնդային կոորդինատական համակարգում գրված Լապլասի օպերատորի բևեռային մասը ազդելով $\cos\vartheta$ ֆունկցիայի վրա նրա տեսքը չի փոխում: Դա հնարավորություն է տալիս Պուասոնի

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi(r, \vartheta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi(r, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right) =$$

$$= -4\pi\sigma_0 \delta(r-R) \cos \vartheta$$

հավասարման լուծումը փնտրել $\varphi(r, \vartheta) = \phi(r) \cos \vartheta$ տեսքով, որի շառավղային մասի համար կստանանք

$$\frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \phi(r) = -4\pi\sigma_0 \delta(r-R)$$

հավասարումը: Ամբողջ տարածության մեջ, բացի $r=R$ կետերից, այս հավասարման լուծումը փնտրենք $\phi(r) = \sum C_n r^n$ աստիճանային շարքի տեսքով, որը տեղադրելով վերևի հավասարման մեջ n -ի համար ստանում ենք $n(n+1) = 2$ բնութագրական հավասարումը: Այստեղից ստանում ենք n -ի երկու հնարավոր արժեքներ՝ $n_1 = 1$, $n_2 = -2$: Այսպիսով պոտենցիալի շառավղային մասի ընդհանուր լուծումն է՝

$$\phi(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}:$$

$r \rightarrow \infty$ դեպքում $\phi(r) \rightarrow 0$ պայմանից հետևում է, որ $r > R$ դեպքում $C_1 = 0$, իսկ գնդային մակերևույթի ներսում ϕ -ի վերջավոր լինելու պայմանից՝ $C_2 = 0$, երբ $r < R$: Այսպիսով

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_1(r) = C_1 r, & (r < R), \\ \phi_2(r) = \frac{C_2}{r^2}, & (r > R): \end{cases}$$

C_1 և C_2 հաստատունները կգտնենք

$$\phi_1(R) = \phi_2(R), \quad \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=R} - \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=R} = 4\pi\sigma_0$$

սահմանային պայմաններից՝ $C_1 = 4\pi\sigma_0/3$, $C_2 = 4\pi R^3 \sigma_0/3$:

Վերջնականապես պոտենցիալի համար կստանանք՝

$$\varphi(r, \vartheta) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos \vartheta, & (r \leq R), \\ \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta, & (r \geq R): \end{cases}$$

$r > R$ դեպքում գնդի պոտենցիալը համարժեք է $p = (4\pi/3) \sigma_0 R^3$ մոմենտով էլեկտրական դիպոլի պոտենցիալին:

Էլեկտրական դաշտի լարվածության համար կստանանք

$$E_r = -\frac{4\pi}{3} \sigma_0 \cos \vartheta, \quad E_\vartheta = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \sin \vartheta, \quad E_\alpha = 0, \quad (r \leq R)$$

$$E_r = -\frac{8\pi}{3} \sigma_0 \frac{R^3}{r^3} \cos \vartheta, \quad E_\vartheta = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 \frac{R^3}{r^3} \sin \vartheta, \quad E_\alpha = 0, \quad (r \geq R)$$

Երկրորդ եղանակ: Դիտարկենք միատեսակ

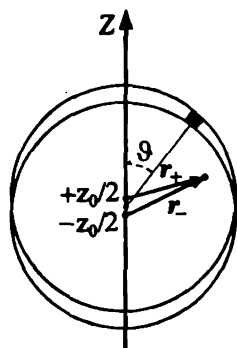
R շառավղով $+\rho$ և $-\rho$ ծավալային խտությոններով հավասարաչափ լիցքավորված երկու գնդերի համակարգ, որոնց կենտրոններն են համապատասխանաբար $+z_0/2$ և $-z_0/2$ ($z_0 \ll R$): Պարզ է, որ գումարային լիցքերի խտությունը գնդերի վերադրված մասում կլինի զրո: Ցանկյան տակ երևացող միավոր մակերեսին բաժին ընկնող լիցքը կլինի $z_0 \rho \cos \vartheta$:

Եթե կատարենք սահմանային անցում, որի ժամանակ $z_0 \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$ սակայն $z_0 \rho$ արտադրյալը մնում է հաստատուն և հավասար σ_0 -ի, ապա գնդերի համակարգը կանցնի $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ մակերևութային խտությամբ լիցքավորված գնդային մակերևութի:

Օգտվելով հավասարաչափ լիցքավորված գնդի էլեկտրական դաշտի լարվածության (տե՛ս խնդիր 4.1ա) արտահայտությունից, $r \leq R$ տիրույթի համար կգրենք (տե՛ս նկ.)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{4}{3} \pi \rho (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{4}{3} \pi \rho z_0 \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{4}{3} \pi \sigma_0 \hat{\mathbf{e}}_z:$$

Դաշտը գնդային մակերևութով սահմանափակված տիրույթում համասեռ է և z առանցքին հակառակ ուղղված: Գնդից դուրս տարածությունում ($z > R$) դաշտը կհամընկնի



$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho z_0 \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \hat{\mathbf{e}}_z$$

դիպոլային մոմենտով դիպոլի դաշտի հետ՝

$$\mathbf{E} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \frac{3\mathbf{r}(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{e}}_z r^2}{r^5} :$$

Այսպիսով

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{4}{3} \pi \sigma_0 \hat{\mathbf{e}}_z, & \text{եթե } r \leq R, \\ \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \frac{3\mathbf{r}(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \mathbf{r}) - \hat{\mathbf{e}}_z r^2}{r^5}, & \text{եթե } r \geq R: \end{cases}$$

Պոտենցիալի համար կունենանք՝

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{4}{3} \pi \sigma_0 r \cos \vartheta, & \text{եթե } r \leq R, \\ -\frac{4}{3} \pi \sigma_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta, & \text{եթե } r \geq R: \end{cases}$$

4.15 Ենթադրենք լարերը կոորդինատական համակարգի OX առանցքը հատում են $-h$ և h կետերում, իսկ OZ առանցքը զուգահեռ է լարերին: Խնդրի համաչափությունից հետևում է, որ լարերի գումարային պոտենցիալը z կոորդինատից կախված չէ և համապոտենցիալ մակերևութների մասին լրիվ տեղեկություն կստանանք, եթե դիտարկենք նրանց պրոյեկցիաները XOY հարթության վրա: XOY հարթության (x, y) կետում լարերի ստեղծած պոտենցիալը համաձայն 4.1 խնդրի կլինի՝

$$\varphi(x, y) = -2\chi_1 \ln r_1 - 2\chi_2 \ln r_2 = -\ln [(r_1^2)^{\chi_1} (r_2^2)^{\chi_2}],$$

$$\text{որտեղ } r_1 = \sqrt{(x+h)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-h)^2 + y^2} :$$

Համապոտենցիալ մակերևութների հավասարումն է՝

$$(r_1^2)^{\chi_1} (r_2^2)^{\chi_2} = \text{const} :$$

Մասնավոր դեպքում, եթե $\chi_1 = \chi_2 = \chi$, ստանում ենք՝

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2h^2x^2 + 2h^2y^2 + h^4 = C,$$

որտեղ C -ն կամայական հաստատուն է:

$\chi_1 = -\chi_2 = \chi$ դեպքում համապատենցիալ մակերևույթների հավասարումը դառնում է

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2,$$

որտեղ

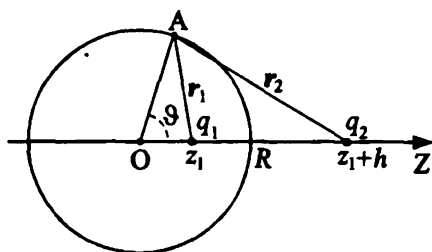
$$a = h \frac{1+C_1}{1-C_1}, \quad R^2 = \frac{4C_1 h^2}{(1-C_1)^2},$$

իսկ C_1 -ը կամայական դրական հաստատուն է:

Այսպիսով վերջին դեպքում համապատենցիալ մակերևույթները R շառավղով շրջանային գլաններ են, որոնց առանցքներն հատում են X առանցքը՝ $x > h$ կետերում, երբ $C_1 < 1$ և $x < -h$ կետերում, երբ $C_1 > 1$:

4.16 Կոորդինատական համա-

կարգի Z առանքն ուղղենք կետային լիցքերը միացնող գծով՝ բացարձակ արժեքով փոքր լիցքից դեպի բացարձակ արժեքով մեծ լիցքը: Խնդրի համաչա-



փությունից հետևում է, որ եթե գոյություն ունի համապատենցիալ գնդային մակերևույթ, ապա նրա կենտրոնը գտնվում է Z առանցքի վրա: Որպես սկզբնական ընտրենք փնտրվող համապատենցիալ գնդային մակերևույթի կենտրոնը: Բացարձակ արժեքով փոքր q_1 լիցքի կոորդինատը նշանակենք z_1 -ով: q_2 լիցքի կոորդինատը կլինի $z_2 = z_1 + h$: Պահանջենք, որ գնդային մակերևույթի վրա

$$\varphi = \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}$$

պատենցիալը, որտեղ $r_{1,2} = \sqrt{R^2 + z_{1,2}^2 - 2Rz_{1,2} \cos \vartheta}$, կախված չլինի ϑ անկյունից: Մաթեմատիկորեն դա համարժեք է ϑ -ի բոլոր արժեքների համար

$$\frac{d\varphi}{d \cos \vartheta} = 0$$

պայմանի բավարարմանը, որն այս դեպքում ունի

$$\frac{q_1 z_1}{r_1^3} + \frac{q_2 z_2}{r_2^3} = 0 \quad (1)$$

տեսքը: Պարզ է, որ այն կարող է իրականացնել միայն տարանուն լիցքերի դեպքում ($q_1 q_2 < 0$): (1)-ը վերափոխելով $\cos \theta$ -ի նկատմամբ գծային արտահայտության և աջ ու ձախ մասերում հավասարեցնելով $\cos \theta$ -ի միատեսակ աստիճաններով անդամների գործակիցները, կստանանք՝

$$\begin{aligned} q_1^2 z_2 &= q_2^2 z_1, \\ z_1 z_2 &= R^2: \end{aligned} \quad (2)$$

Լուծելով (2) հավասարումների համակարգը, կարելի է որոշել z_1 , z_2 և R մեծությունները՝

$$z_1 = \frac{q_1^2}{q_2^2 - q_1^2} h, \quad z_2 = \frac{q_2^2}{q_2^2 - q_1^2} h, \quad R = \frac{|q_1 q_2|}{q_2^2 - q_1^2} h: \quad (3)$$

Այսպիսով, համապատասխան գնդային մակերևույթ գոյություն կունենա միայն, եթե լիցքերը տարբեր նշանի լինեն: Այդ համապատասխան գնդային մակերևույթով պարփակված տարածական տիրույթի մեջ ընկած կլինի բացարձակ արժեքով փոքր լիցքը:

Հեշտ է ստուգել, որ այդ գնդային մակերևույթի վրա $\varphi_R = 0$:

Եթե z_1 և z_2 կոորդինատների փոխարեն գործածենք գնդային մակերևույթի մերձակա կետից (նկարում՝ $z = R$ կոորդինատով կետը) q_1 և q_2 կետային լիցքերի համապատասխանաբար $h_1 = R - z_1$ և $h_2 = z_2 - R$ հեռավորությունները, ապա (3)-ը կդառնա՝

$$h_1 = \frac{|q_1|}{|q_1| + |q_2|} h, \quad h_2 = \frac{|q_2|}{|q_1| + |q_2|} h:$$

$q_1 = -q_2$ մասնավոր դեպքում գնդային մակերևույթը վերածվում է երկու լիցքերից հավասարահեռ անվերջ հարթության՝

$$q_2 \rightarrow -q_1, \quad R \rightarrow \infty, \quad h_1 \rightarrow \frac{h}{2}, \quad h_2 \rightarrow \frac{h}{2}:$$

4.17

$$\varphi(z) = 2\pi\sigma \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right),$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z(z) = 2\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right):$$

$$\text{ա) } \Delta R \ll R_1, \quad \varphi(z) = \frac{2\pi R_1 \sigma \Delta R}{\sqrt{R_1^2 + z^2}}, \quad E_z(z) = \frac{2\pi R_1 \sigma \Delta R z}{(R_1^2 + z^2)^{3/2}}:$$

$$p) \quad R_1 \rightarrow 0, \quad \varphi(z) = 2\pi\sigma \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - |z| \right),$$

$$E_z(z) = 2\pi\sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right);$$

$$q) \quad R_1 \rightarrow 0, \quad R_2 \rightarrow \infty, \quad E_z(z) = 2\pi\sigma \frac{z}{|z|}.$$

4.18 z առանքն ուղղենք օղակի համաչափության առանցքով, սկզբնական ընտրենք օղակի կենտրոնը, իսկ առանցքներն ուղղենք այնպես, որ $+q$ լիցքով կիսօղակը գրավի $y > 0$ տիրույթը: Օղակի պոտենցիալը տարածության (x, y, z) կետում հավասար կլինի՝

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{\pi} \left\{ \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} - \int_\pi^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{(x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 + z^2}} \right\};$$

Օղակի առանցքին մոտ կետերում $x, y \ll R$: Ենթինտեգրալ արտահայտությունը շարքի վերլուծելով ըստ x -ի և y -ի և սահմանափակվելով առաջին կարգի անդամներով, կստանանք

$$\varphi = \frac{4qRy}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

որտեղից՝

$$E_x = 0, \quad E_y = -\frac{4qR}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_z = \frac{12qRyz}{\pi(R^2 + z^2)^{5/2}};$$

$|z| \gg R$ դեպքում ստանում ենք՝ $\varphi = 4qRy/\pi z^3$, այսինքն մեծ հեռավորությունների վրա օղակը համարժեք է $p = 4qR\hat{e}_y/\pi$ մոմենտով էլեկտրական դիպոլի:

4.19 Կոորդինատական համակարգի Z առանցքն ընտրենք օղակի հարթությանն ուղղահայաց, այնպես, որ սկզբնական տրամվի օղակի կենտրոնում: Լիցքավորված համակարգի գլանային համաչափությունից հետևում է, որ φ պոտենցիալը կախված չէ դիտման կետի α գլանային կոորդինատից: Նշանակում է, առանց ընդհանրությունը խախտելու, դիտման կետը կարելի է ընտրել XOZ հարթության մեջ,

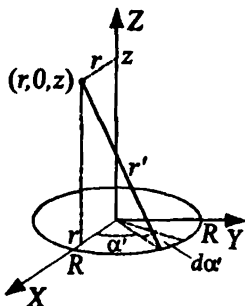
զլանային համակարգի $(r, 0, z)$ կետում:
Օղակի $dl' = R d\alpha'$ տարրի պոտենցիալն
այդ կետում կլինի՝

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi} \frac{d\alpha'}{r'},$$

որտեղ

$$r' = \sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \alpha'}:$$

Օղակի պոտենցիալը դիտման կետում
կլինի



$$\varphi(r, z) = \frac{q}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\alpha'}{\sqrt{R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \alpha'}}: \quad (1)$$

Ընդհանուր դեպքում (1) ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաների
միջոցով չի արտահայտվում: Այն կարելի է ներկայացնել

$$\mathcal{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

առաջին սեռի լրիվ էլիպտիկական ինտեգրալի միջոցով (տե՛ս հավել-
վածի (Հ.3) բանաձևը): Իսկապես, կատարելով $\alpha' = \pi - 2\psi$ փոփո-
խականի փոխարինում (1)-ը կարող ենք ներկայացնել

$$\varphi(r, z) = \frac{2q}{\pi \sqrt{(r+R)^2 + z^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (2)$$

տեսքով, որտեղ

$$k^2 = \frac{4Rr}{(r+R)^2 + z^2}:$$

Արդյունքում՝ սկալյար պոտենցիալի համար կստանանք՝

$$\varphi(r, z) = \frac{qk}{\pi \sqrt{Rr}} \mathcal{K}(k): \quad (3)$$

Էլեկտրական դաշտի E լարվածությունը հաշվելու համար
կօգտվենք

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial k} = \frac{\mathcal{E}(k)}{k(1-k^2)} - \frac{\mathcal{K}(k)}{k} \quad (4)$$

առնչությունից, որտեղ

$$\mathcal{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi$$

մեծությունը երկրորդ սեռի լրիվ էլիպտական ինտեգրալն է՝ (Հ.4):
Օգտվելով պոտենցիալի (3) արտահայտությունից և հաշվի առնելով (4) -ը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{qk}{2\pi r \sqrt{Rr}} \left\{ \mathcal{K}(k) - \frac{R^2 + z^2 - r^2}{(R-r)^2 + z^2} \mathcal{E}(k) \right\}, \\ E_\alpha &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{qk}{\pi \sqrt{Rr}} \frac{z}{(R-r)^2 + z^2} \mathcal{E}(k): \end{aligned} \quad (5)$$

Օղակի առանցքին մոտ կետերում դաշտը որոշելու համար (5) արտահայտությունները կարելի է շարքի վերլուծել ըստ k փոքր պարամետրի: Մենք ավելի նպատակահարմար ենք համարում պոտենցիալի (1) արտահայտությունը շարքի վերլուծել ըստ $r/\sqrt{R^2 + z^2} \ll 1$ պարամետրի՝

$$\varphi(r, z) = \frac{q}{\sqrt{R^2 + z^2}} \left(1 + \frac{R^2 - 2z^2}{4(R^2 + z^2)^2} r^2 \right):$$

E դաշտի համար այս դեպքում կունենանք՝

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= -\frac{q(R^2 - 2z^2)}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} r, \\ E_z(r, z) &= \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{4} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^2} r^2 \right]: \end{aligned}$$

4.20 ա) $\sigma = a/2\pi$ մակերևութային խտությամբ լիցքը բաշխված է XOY հարթության վրա:

բ) $\sigma = q/4\pi R^2$ մակերևութային խտությամբ լիցքը բաշխված է R շառավղով գնդային մակերևույթով:

գ) $s = q/2\pi R^2$ մակերևութային խտությամբ լիցքը բաշխված է R շառավղով անվերջ գլանային մակերևույթով:

4.21 $\rho(r) = e\delta(r) - (e/\pi a^3)e^{-2r/a}$: e կետային լիցքը գտնվում է կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում, իսկ նրա շուրջը $\rho(r) = -(e/\pi a^3)e^{-2r/a}$ տարածական խտությամբ հոծ բաշխված է $-e$ լիցքը:

4.22 ա) $W = \frac{3}{5} \frac{q^2}{R}$, բ) $W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{R}$:

4.23 $W_{\Phi_{\text{դի}}} = \frac{q_1 q_2}{a}$

4.26 Հաղորդիչ գնդային մակերևույթներին մակածված q_1, q_2 լիցքերը չեն փոխվի, եթե q կետային լիցքի փոխարեն դիտարկենք R շառավղով գնդային մակերևույթով հավասարաչափ բաշխված q լիցք: Ստացված նոր համակարգը ունի լրիվ կենտրոնական համաչափություն և նրա պոտենցիալը գտնելու խնդիրը դժվարություն չի ներկայացնում: Օգտվելով

$$\varphi(R_1) = 0, \quad \varphi(R_2) = 0$$

պայմաններից, կստանանք

$$q_1 = -\frac{R_1(R_2 - R)}{R(R_2 - R_1)} q, \quad q_2 = -\frac{R_2(R - R_1)}{R(R_2 - R_1)} q:$$

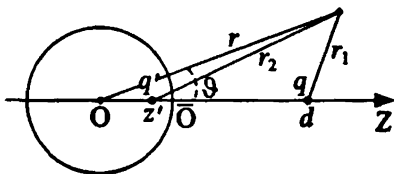
Նկատենք, որ

$$q_1 + q_2 = -q:$$

4.27 $q_1 = -\left(1 - \frac{l}{d}\right)q, \quad q_2 = -\frac{l}{d}q,$

որտեղ q_1 -ը q լիցքից l հեռավորության վրա գտնվող հարթության վրա մակածված լիցքն է:

4.28 Գնդային կոորդինատական համակարգի սկզբնակետն ընտրենք գնդի կենտրոնում, իսկ OZ բևեռային առանցքն ուղղենք q լիցքի ուղղությամբ: Խնդրի զլանային համաչափությունից հետևում է, որ ար-



դյունքը կախված չի լինի α -լայնական անկյունից: Խնդիրը լուծենք արտացոլման մեթոդով: Գտնենք այնպիսի $\varphi_0(r, \theta)$ ֆունկցիա, որը գնդից դուրս տիրություն բավարարի Պուասոնի հավասարմանը, իսկ գնդի մակերևույթի վրա $\varphi_0(r, \theta) = 0$ եզրային պայ-

մանին: Էլեկտրաստատիկայի եզրային խնդրի լուծման միարժեքության շնորհիվ այն կլինի տվյալ խնդրի լուծումը: Ինչպես ցույց է տրված (4.16) խնդրի լուծման մեջ, երկու տարանուն կետային լիպքերի համակարգի համապատենցիալ մակերևութների թվում կա գնդային մակերևութ, որի վրա $\varphi_R = 0$:

Գնդի կենտրոնը q կետային լիպքին միացնող հատվածի վրա, կենտրոնից $z' < R$ հեռավորության վրա վերցնենք այնպիսի q' պատկեր-լիպք, որ համապատենցիալ մակերևութը համընկնի գնդի մակերևութի հետ: Գնդից դուրս տիրություն

$$\varphi_0(r, \vartheta) = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2},$$

որտեղ

$$r_1 = (d^2 + r^2 - 2rd \cos \vartheta)^{1/2}, \quad r_2 = (z'^2 + r^2 - 2z'r \cos \vartheta)^{1/2}:$$

Պահանջելով, որ θ -ի բոլոր արժեքների համար բավարարվի $\varphi_0(R, \vartheta) = 0$ պայմանը, կստանանք՝

$$z' = \frac{R^2}{d}, \quad q' = -\frac{R}{d} q: \quad (1)$$

Այսպիսով՝

$$\varphi_0(r, \vartheta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \vartheta}} - \frac{R}{d} \frac{q}{\sqrt{r^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2r \frac{R^2}{d} \cos \vartheta}}: \quad (2)$$

Լիպքերի σ_0 մակերևութային բաշխումը գնդային մակերևութի վրա կորոշենք $\sigma_0 = -(1/4\pi)(\partial\varphi_0/\partial r)|_{r=R}$ սահմանային պայմանից՝

$$\sigma_0(\vartheta) = -\frac{q(d^2 - R^2)}{R(d^2 + R^2 - 2Rd \cos \vartheta)^{3/2}}: \quad (3)$$

$\sigma_0(\vartheta)$ ֆունկցիան բացարձակ արժեքով իր առավելագույն արժեքն ընդունում է $\vartheta = 0$ դեպքում և θ -ի աճի հետ բացարձակ արժեքով նվազում է: q կետային լիպքի վրա ազդող ուժը հավասար է q և q' լիպքերի փոխազդեցության ուժին՝

$$F_z = \frac{qq'}{(d-z')^2} = -\frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}: \quad (4)$$

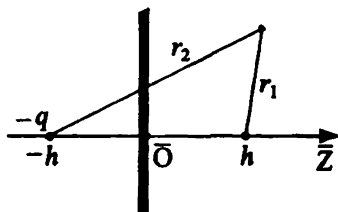
Նկատենք, որ (1)-ը կարելի է արտահայտել գնդի մակերևութի $z=R$ (O) կետից q և q' լիպքերի $h=d-R$ և h' հեռավորություններով՝

$$h' = \frac{R}{d}h, \quad q' = -\frac{R}{d}q: \quad (5)$$

Եթե $R \rightarrow \infty$ և միաժամանակ $d \rightarrow \infty$, այնպես, որ h -ը մնա վերջավոր, ապա (5) -ից ստանում ենք

$$h' = h, \quad q' = -q:$$

Այս սահմանային դեպքը համապատասխանում է այնպիսի խնդրի, երբ $\bar{z} \leq 0$ կիսատարածությունը լցված է հաղորդիչով և $\bar{z}_0 = h$ հեռավորության վրա տեղավորված է q կետային լիցքը: Այս դեպքում պոտենցիալը ներկայացվում է



$$\varphi_0(x, y, z) = \begin{cases} 0 & (\bar{z} \leq 0), \\ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\bar{z} - h)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\bar{z} + h)^2}} & (\bar{z} > 0): \end{cases}$$

տեսքով:

$$4.29 \quad \varphi(r, \vartheta) = \varphi_0(r, \vartheta) + \frac{Q + q \frac{R}{d}}{r}, \quad \sigma(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + \frac{Q + q \frac{R}{d}}{4\pi R^2}: \quad (1)$$

Այստեղ $\varphi_0(r, \vartheta)$ -ն և $\sigma_0(\vartheta)$ -ն հողակցված գնդի պոտենցիալն ու մակերևութային լիցքի բաշխումն են (տես նախորդ խնդիրը):

$$F_z = \frac{q}{d^2} \left[Q - \frac{qR^3(2d^2 - R^2)}{d(d^2 - R^2)^2} \right]: \quad (2)$$

Ստացվածից երևում է, որ $d \gg R$ դեպքում երկրորդ անդամի ներդրումը կարելի է անտեսել: Այս դեպքում ստացվում է երկու կետային լիցքերի փոխազդեցության $F_z = qQ/d^2$ Կուլոնի օրենքը: Գնդային մակերևութի մերձակայքում $h = d - R \ll R$ ($d \approx R$), երկրորդ անդամը գերակշռող է և $F_z = -q^2/(4h^2)$, այսինքն ուժը ձգողական բնույթի է անկախ այն բանից, թե լիցքերը մույանում են, թե տարանում:

Միաժամանակ (2)-ից բխում է, որ Q և q նույնանուն լիպերի համակարգի համար գոյություն ունի այնպիսի d_0 հեռավորություն, որի դեպքում ուժը հավասար է զրոյի: $d > d_0$ դեպքում լիպը վանվում է նույնանուն լիպքով գնդից ($F_z > 0$), իսկ $d < d_0$ դեպքում՝ ձգվում նույնանուն լիպքով գնդի կողմից ($F_z < 0$):

4.30 Ենթադրենք գնդի կենտրոնը գտնվում է կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում, իսկ OZ առանցքն ուղղված է E_0 դաշտով: Համասեռ դաշտը կարելի է նույնացնել անվերջ հեռվում գտնվող դրական և բացասական լիպերի էլեկտրաստատիկ դաշտի հետ: Իսկապես, եթե q և $-q$ լիպերը գտնվում են $z = -d$ և $z = d$ կետերում, ապա կոորդինատների սկզբնակետում $z \ll d$ չափերով տիրույթում էլեկտրական դաշտը համարյա հաստատուն է, ունի $E_0 = 2q/d^2$ լարվածություն և նրա ուժագծերը համարյա զուգահեռ են առանցքին: $d \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$, $q/d^2 = \text{const}$ սահմանում դաշտը ճշգրտորեն կարելի է հաստատուն և համասեռ համարել: Համաձայն 4.24 խնդրի $z = d$ կետում տեղավորված $-q$ լիպի $q_1 = qR/d$ պատկեր լիպը գտնվում է $z_1 = R^2/d$ կետում, իսկ $z = -d$ կետում տեղավորված q լիպի $q_2 = -qR/d$ պատկեր լիպը՝ $z_2 = R^2/d$ կետում:

$P(r, \vartheta)$ կետում պոտենցիալը հավասար է՝

$$\varphi(r, \vartheta) = -\frac{q}{r_1} + \frac{q_1}{r'_1} + \frac{q}{r_2} + \frac{q_2}{r'_2} = -\frac{q}{r_1} + \frac{R}{d} \frac{q}{r'_1} + \frac{q}{r_2} - \frac{R}{d} \frac{q}{r'_2},$$

որտեղ

$$r_1 = (d^2 + r^2 - 2rd \cos \vartheta)^{1/2}, \quad r_2 = (d^2 + r^2 + 2rd \cos \vartheta)^{1/2},$$

$$r'_1 = \left(\frac{R^4}{d^2} + r^2 - \frac{2rR^2}{d} \cos \vartheta \right)^{1/2}, \quad r'_2 = \left(\frac{R^4}{d^2} + r^2 + \frac{2rR^2}{d} \cos \vartheta \right)^{1/2}$$

Հաշվի առնելով, որ համաձայն վերևում արված ենթադրության $d \gg r$, ստացված արտահայտությունը կարող ենք շարքի վերլուծել ըստ R^2/d փոքր մեծության, որից հետո, հիշելով, որ $2q/d^2 = E_0$, կստանանք

$$\varphi(r, \vartheta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \vartheta:$$

Այստեղ $-E_0 r \cos \vartheta = -E_0 z$ անդամը E_0 համասեռ դաշտի պոտենցիալն է: Երկրորդ գումարելին պատկեր լիպերի, կամ, որ նույնն է՝ գնդի մակերևույթին մակածված $\sigma(r, \vartheta)$ խտությամբ լիպի ստեղծած պոտենցիալն է:

$$\sigma(r, \vartheta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \bigg|_{r=R} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \vartheta :$$

4.33

$$W = -q \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad (\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

$$\mathbf{F} = q \left[\frac{\mathbf{p}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} \right], \quad \mathbf{K} = q \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{R}}{R^3} :$$

4.34 Դիպուք $\mathbf{p}_1$ դիպուղը գտնվում է կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում: $\mathbf{p}_2$ դիպուղը պատկերացնենք որպես $+e$ և $-e$ երկու լիցքերի համակարգ, որոնք գտնվում են, համապատասխանաբար, $\mathbf{r}_0 + \mathbf{p}_2/2e$ և $\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}_2/2e$ կետերում, ընդ որում $e \rightarrow \infty$: $\mathbf{p}_1$ դիպուղի ստեղծած էլեկտրաստատիկ դաշտի լարվածությունը $\mathbf{r}_0$ կետում նշանակելով $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ -ով, $\mathbf{p}_2$ դիպուղի վրա ազդող ուժը կզրենք այսպես

$$\mathbf{F}_2 = \lim_{e \rightarrow \infty} \left[e\mathbf{E}_1 \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) - e\mathbf{E}_1 \left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) \right]:$$

Օգտվելով $\mathbf{E}_1$ ֆունկցիայի

$$\mathbf{E}_1 \left(\mathbf{r}_0 \pm \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0) \pm \frac{1}{2e} (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0) + o \left(\frac{p_2^2}{e^2 r_0^2} \right)$$

վերլուծությունից ըստ $\mathbf{p}_2/e\mathbf{r}_0$ անվերջ փոքր մեծության, կունենանք՝

$$\mathbf{F}_2 = (\mathbf{p}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0):$$

Հիշելով, որ $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = (3\mathbf{r}_0(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{p}_1 r_0^2)/r_0^5$ (տես խնդիր 2.20), դիպուղի վրա ազդող ուժի համար կստանանք

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1 = \frac{3}{r_0^7} \{ -5\mathbf{r}_0 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_0) (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_0) +$$

$$+ r_0^2 [\mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_0) + \mathbf{p}_1 (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_0) + \mathbf{r}_0 (\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1)] \}$$

$\mathbf{p}_2$ դիպուղի վրա ազդող ուժի մոմենտը այդ դիպուղի երկրաչափական կենտրոնի նկատմամբ ($\mathbf{r}_0$ վեկտորով բնութագրվող կետը) կորոշվի

$$\mathbf{K}_2 = \lim_{e \rightarrow \infty} \left[e \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \times \mathbf{E}_1 \left(\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) + (-e) \left(-\frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) \times \mathbf{E}_1 \left(\mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{p}_2}{2e} \right) \right]$$

առնչությունից, որտեղից՝

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{p}_2 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_0) = \frac{3(\mathbf{p}_2 \times \mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_0) - (\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_1)r_0^2}{r_0^5}.$$

Նման ձևով կատանանք՝

$$\mathbf{K}_1 = \frac{3(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{r}_0)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_0) - (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)r_0^2}{r_0^5}.$$

4.35 Օգտվելով $\mathbf{p}$ տարրական դիպոլի պոտենցիալի $\varphi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} / r^3$ արտահայտությունից և վերադրման սկզբունքից, կատանանք

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV',$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է ըստ գնդի V ծավալի: Օգտվելով Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից և $\mathbf{P} = \text{const}$ պայմանից $\varphi(\mathbf{r})$ -ը կներկայացնենք մակերևութային ինտեգրալի տեսքով՝

$$\varphi(\mathbf{r}) = \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \oint_S \frac{P \cos \vartheta dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Այստեղ ինտեգրումը կատարվում է ըստ R շառավղով գնդային մակերևութի, իսկ z առանցքն ուղղված է $\mathbf{P}$ վեկտորի ուղղությամբ: Փաստորեն $\varphi(\mathbf{r})$ -ը $\sigma(\vartheta) = P \cos \vartheta$ մակերևութային խտությամբ լիցքերի բաշխումով գնդային մակերևութի պոտենցիալն է: Համաձայն 4.14 խնդրի

$$\varphi(r, \vartheta) = \begin{cases} \frac{4\pi P}{3} r \cos \vartheta & (r \leq R), \\ \frac{4\pi P R^3}{3r^2} \cos \vartheta & (r \geq R): \end{cases}$$

Գնդից դուրս ($r \geq R$) դաշտը համընկնում է գնդի կենտրոնում տեղադրված $\mathbf{p} = (4\pi R^3/3)\mathbf{P}$ մոմենտով տարրական դիպոլի դաշտի հետ:

4.36
$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon + 2}, \quad \mathbf{P} = \frac{3}{4\pi} \mathbf{E}_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}.$$

4.37
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P} = \frac{\varepsilon + 2}{3} \mathbf{E},$$

որտեղ $\mathbf{E}$ -ն արտաքին դաշտն է դիէլեկտրիկի ներսում, $\mathbf{P}$ -ն էլեկտրական քնեռացման վեկտորը:

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1}$$

Կապված լիցքերը կուտակվում են դիէլեկտրիկի այն մասերում, որտեղ անհամասեռություններ կան, այսինքն կոնդենսատորի փթեղների հետ հպման մակերևույթներին ($r = R_1$, $r = R_2$) և բաժանման սահմանի վրա ($r = R$)

$$\sigma_{\text{կապ}}^{(R_1)} = -\frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{4\pi R_1^2 \varepsilon_1}, \quad \sigma_{\text{կապ}}^{(R_2)} = \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{4\pi R_2^2 \varepsilon_2}, \quad \sigma_{\text{կապ}}^{(R)} = \frac{q}{4\pi R^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right);$$

Այստեղ q -ն ներքին շրջադիրի լիքն է:

Գումարային կապված լիքի համար կունենանք՝

$$q_{\text{կապ}} = \sigma_{\text{կապ}}^{(R_1)} \cdot 4\pi R_1^2 + \sigma_{\text{կապ}}^{(R_2)} \cdot 4\pi R_2^2 + \sigma_{\text{կապ}}^{(R)} \cdot 4\pi R^2 = 0:$$

4.39 Որևէ միջավայրում E դաշտը այդ միջավայրում q կետային լիքի և դիէլեկտրիկի սահմանի վրա մակածված մակերևութային լիքերի ստեղծած դաշտերի գումարն է՝

$$E_{1,2} = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} \frac{qr}{r^3} + E_{1,2}^{(0)}$$

Ցույց տանք, որ այս դեպքում մակերևութային կապված լիքը կետային է և գտնվում է q կետային լիքի անմիջական շրջակայքում: D վեկտորի ուղղահայաց բաղադրիչի անընդհատության պայմանից հարթության բոլոր կետերում, բացառությամբ $r = 0$ կետի, $D_{1n}(z=0) = D_{2n}(z=0)$ կամ $\varepsilon_1 E_{1n}(z=0) = \varepsilon_2 E_{2n}(z=0)$: Դիէլեկտրիկների բաժանման $z = 0$ հարթության $r\hat{\tau}$ կետում, որտեղ $\hat{\tau}$ -ն այդ հարթության մեջ ընկած միավոր վեկտորն է, ունենք

$$E_1(r\hat{\tau}) = \frac{q\hat{\tau}}{\varepsilon_1 r^2} + E_1^{(\sigma)}(r\hat{\tau}), \quad E_2(r\hat{\tau}) = \frac{q\hat{\tau}}{\varepsilon_2 r^2} + E_2^{(\sigma)}(r\hat{\tau}):$$

Այնպես, որ $E_{1n} = E_{1n}^{(\sigma)}$, $E_{2n} = E_{2n}^{(\sigma)}$: Դիէլեկտրիկների հարթ սահմանի մոտ կապված լիքերի կողմից ստեղծված դաշտը կլինի՝

$$E_1^{(\sigma)}(r\hat{\tau}) = -2\pi\sigma'\hat{n}, \quad E_2^{(\sigma)}(r\hat{\tau}) = 2\pi\sigma'\hat{n},$$

որտեղ σ' -ը կապված լիքերի մակերևութային խտությունն է $r\hat{\tau}$ կետում: Հաշվի առնելով վերջինս, D վեկտորի ուղղահայաց բաղադրիչների անընդհատության պայմանը կգրենք այսպես՝

$$-\varepsilon_1 2\pi\sigma' = \varepsilon_2 2\pi\sigma',$$

որտեղից կհետևի, որ բաժանման սահմանի բոլոր կետերում, բացառությամբ $z = 0$ կետի, $\sigma' = 0$:

Այսպիսով, կապված լիցքերը մակածվում են q կետային լիցքի անմիջական շրջակայքում: Հետևաբար, ստեղծված դաշտը կունենա կենտրոնական համաչափություն: Որպես ինտեգրման մակերևույթ վերցնենք գնդային մակերևույթ, որի կենտրոնը համընկնում է q կետային լիցքի հետ: Օգտվելով Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմից, կունենանք՝

$$2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = 4\pi q: \quad (1)$$

Բացի այդ E վեկտորի շոշափող բաղադրիչների անընդհատության պայմանի համաձայն՝ $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ կամ $D_{1\tau}/\varepsilon_1 = D_{2\tau}/\varepsilon_2$: Հաշվի առնելով, որ բաժանման սահմանի վրա D վեկտորն ունի շոշափողի ուղղություն ($D_\tau = D$) կստանանք

$$\varepsilon_2 D_1 = \varepsilon_1 D_2: \quad (2)$$

(1) և (2) հավասարումների համատեղ լուծումը տալիս է D_1 և D_2 մեծությունները

$$D_1 = \frac{2q\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{r}{r^3}, \quad D_2 = \frac{2q\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{r}{r^3}:$$

Դաշտի լարվածությունը երկու միջավայրերում էլ կորոշվի

$$E = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{qr}{r^3}$$

առնչությամբ: Պոտենցիալի համար կունենանք՝

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r}:$$

4.40

$$\varphi = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r},$$

$$\sigma_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

$$\sigma_{1\text{հապ}} = -\frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_{2\text{հապ}} = -\frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}:$$

Գումարային կապված լիցքը կլինի

$$q_{\text{հապ}} = -q(1 - 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)),$$

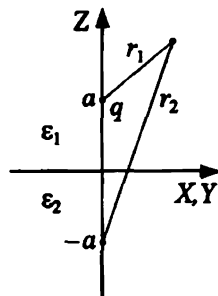
ինչը համընկնում է նախորդ խնդրի արդյունքի հետ:

4.41 Օգտվենք արտացոլման մեթոդից: Պոտենցիալը առաջին միջավայրում, որտեղ q լիցքն է, փնտրենք

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{\alpha q}{\varepsilon_1 r_2} \quad (1)$$

տեսքով, իսկ երկրորդ միջավայրում՝

$$\varphi_2 = \frac{\beta q}{\varepsilon_2 r_1} \quad (2)$$



տեսքով, որտեղ α և β -ն հաստատուններ են,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}$$

α և β հաստատունները կորոշվեն

$$E_{1z} = E_{2z}, \quad D_{1n} = D_{2n} \quad (3)$$

սահմանային պայմաններից:

(1)-ի և (2)-ի օգնությամբ հաշվենք դաշտերի լարվածություններն ու ինդուկցիաները՝

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{q\mathbf{r}_1}{\varepsilon_1 r_1^3} + \frac{\alpha q\mathbf{r}_2}{\varepsilon_1 r_2^3}, \quad \mathbf{E}_2 = -\nabla\varphi_2 = \frac{\beta q\mathbf{r}_1}{\varepsilon_2 r_1^3},$$

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2:$$

(3) պայմաններից α -ի և β -ի համար կունենանք

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \quad \beta = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2},$$

որոնք տեղադրելով (1) և (2)-ի մեջ, կստանանք պոտենցիալները երկու միջավայրերում՝

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{\varepsilon_1 r_2} & (z \geq 0), \\ \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r_1} & (z \leq 0): \end{cases}$$

Բաժանման $z = 0$ հարթության վրա կապված լիցքի քաշխումը կլինի՝

$$\sigma_{\text{կապ}} = P_{2z} - P_{1z} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{qa}{2\pi r^3} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

որտեղ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$:

Գումարային կապված լիցքը նույն հարթության մեջ՝

$$q_{կապ}^{(մակ)} = \frac{q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}:$$

q լիցքի գտնվելու տեղում առաջացած կապված լիցքը կլինի՝

$$q_{կապ}^{(կետ)} = - \int \operatorname{div} P dV = - \int \operatorname{div} \left(\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \mathbf{D}_1 \right) dV = - \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} q$$

Ամբողջ կապված լիցքի համար կստանանք

$$q_{կապ} = q_{կապ}^{(մակ)} + q_{կապ}^{(կետ)} = -q \left(1 - \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right),$$

որը համընկնում է (4.39) խնդրի դեպքում $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ քափանցելիություններով միջավայրերի հարթ սահմանի վրա գտնվող q կետային լիցքի մակածած կապված լիցքի հետ:

4.42 $\varphi_1(\mathbf{r})$ և $\varphi_2(\mathbf{r})$ պոտենցիալները բավարարում են

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi_1(\mathbf{r})) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1),$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi_2(\mathbf{r})) = -4\pi e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$$

հավասարումներին, որտեղ ε -ը միջավայրի դիէլեկտրական քափանցելիությունն է: Առաջին հավասարումը բազմապատկենք $\varphi_2(\mathbf{r})$ -ով, երկրորդը $\varphi_1(\mathbf{r})$ -ով և իրարից հանենք. կստանանք՝

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varepsilon \varphi_2 \nabla \varphi_1) - \operatorname{div}(\varepsilon \varphi_1 \nabla \varphi_2) = \\ = 4\pi e [\varphi_1(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - \varphi_2(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)]: \end{aligned}$$

Այս հավասարումն ինտեգրենք ըստ ամբողջ տարածության և հաշվի առնենք, որ կետային լիցքերի դաշտն անվերջում ձգտում է զրոյի: Կստանանք՝ $\varphi_1(\mathbf{r}_2) = \varphi_2(\mathbf{r}_1)$:

4.43 Ենթադրենք $\mathbf{E}$ -ն և $\mathbf{D}$ -ն դաշտերն են միմյանց դիէլեկտրիկ մտցնելը, իսկ $\mathbf{E}'$ -ը և $\mathbf{D}'$ -ը՝ հետո: Դաշտի էներգիայի փոփոխությունը կլինի

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}' - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV, \quad (1)$$

որտեղ ինտեգրումը կատարվում է ըստ ամբողջ տարածության:

Ցույց տանք, որ $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}' dV$: Իսկապես, օգտագործելով

Գաուս-Օստոգրադսկու թեորեմը, կունենանք՝

$$\begin{aligned}
\int_V \mathbf{E} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}') dV &= - \int_V \text{grad } \varphi \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}') dV = \\
&= - \int_V \text{div}[\varphi(\mathbf{D} - \mathbf{D}')] dV + \int_V \varphi \text{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}') dV = \\
&= - \oint_S \varphi(\mathbf{D} - \mathbf{D}') \cdot d\mathbf{S} + \int_V \varphi \text{div}(\mathbf{D} - \mathbf{D}') dV = 0:
\end{aligned}$$

Քանի որ առաջին ինտեգրումը կատարվում է ըստ անվերջ հեռացված մակերևույթի, իսկ լիցքերի բաշխումը երկու դեպքում էլ նույնն է, ապա $\text{div} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D}'$: Նման ձևով կարելի է ցույց տալ, որ

$$\int \mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}' dV = \int \mathbf{E}' \cdot \mathbf{D} dV:$$

Օգտվելով այս առնչություններից (1)-ը կգրենք այսպես

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}') dV = - \frac{1}{8\pi} \int (\epsilon' - \epsilon) \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E} dV:$$

Քանի որ զրոյական մոտավորությամբ $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$, ապա դիէլեկտրիկ թափանցելիության $\delta\epsilon = \epsilon' - \epsilon$ անվերջ փոքր փոփոխության դեպքում էներգիայի փոփոխությունը առաջին մոտավորությամբ կլինի

$$\delta W = - \frac{1}{8\pi} \int \delta\epsilon E^2 dV:$$

4.41 Ենթադրենք V_0 -ն հաղորդչի զբաղեցրած տիրույթն է, իսկ V_1 -ը՝ հաղորդչի դուրս գտնվող տիրույթը: Ինչպես նախորդ խնդրում, էներգիայի փոփոխությունը կլինի՝

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}' - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV:$$

Հաշվի առնելով, որ հաղորդչի ներսում ($\mathbf{r} \in V_0$) $\mathbf{E}' = \mathbf{D}' = 0$, կունենանք՝

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}' - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV$$

V_1 ծավալի համար կիրառելով Գաուս-Օստրոգրադսկու թեորեմը, հաշվենք հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\begin{aligned}
\int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV &= - \int_{V_1} \text{grad } \varphi' \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = \\
&= - \oint_{S_1} \varphi'(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} - \oint_{S_0} \varphi'(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{V_1} \varphi' \text{div}(\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0:
\end{aligned}$$

Նշենք, որ առաջին ինտեգրալը հավասար է զրոյի, քանի որ հաղորդչի S_0 մակերևույթի վրա $\varphi' = \text{const}$, իսկ հաղորդչի լրիվ լիցքը հավասար է զրոյի: Երկրորդ ինտեգրումը զրոյի է բերում, քանի որ կատարվում է անվերջ հեռացված մակերևույթով, երրորդը՝ որովհետև լիցքերի տեղաշարժ տեղի չի ունեցել ($\text{div} \mathbf{D} = \text{div} \mathbf{D}'$): Այսպիսով՝

$$\int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{D}' dV = \int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{D} dV:$$

Օգտվելով այս առնչությունից, կունենանք՝

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV,$$

կամ, նկատի ունենալով, որ V_1 տիրույթում դիէլեկտրիկ թափանցելիության փոփոխություն տեղի չի ունեցել ($\epsilon' = \epsilon$)՝

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot \mathbf{E} dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV:$$

Քանի որ $\int_{V_1} \mathbf{E}' \cdot (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) dV = 0$ ապա

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_1} (\mathbf{D}' - \mathbf{D}) \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{E}) dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV < 0:$$

4.45

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}, \text{ որտեղ } \mathbf{p} = \int \rho \mathbf{r} dV:$$

4.46 Անիզոտրոպ միջավայրում $D_i = \epsilon_{ik} E_k = -\epsilon_{ik} \partial \varphi / \partial x_k$, որը տեղադրելով Մաքսվելի $\partial D_i / \partial x_i = 4\pi e \delta(\mathbf{r})$ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = -4\pi e_0 \delta(\mathbf{r}),$$

կամ դեկարտյան կոորդինատական համակարգի առանցքներն ուղղելով ϵ_{ik} թեմզորի գլխավոր առանցքների ուղղությամբ՝

$$\epsilon^{(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \epsilon^{(y)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \epsilon^{(z)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi e \delta(\mathbf{r}):$$

Եթե անցնենք

$$x' = \frac{x}{\sqrt{\epsilon^{(x)}}}, \quad y' = \frac{y}{\sqrt{\epsilon^{(y)}}}, \quad z' = \frac{z}{\sqrt{\epsilon^{(z)}}}.$$

Այդ փոփոխականների, վերևի հավասարումը կդառնա

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = - \frac{4\pi e}{\sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}} \delta(\mathbf{r}'),$$

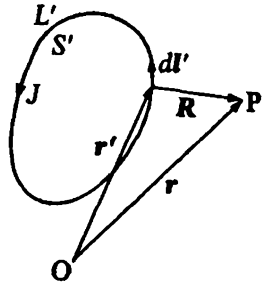
որը փաստորեն $e' = e / \sqrt{\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}}$ կետային լիցքի ստեղծած պոտենցիալի հավասարումն է դատարկության մեջ: Այսպիսով

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{\epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)} x^2 + \epsilon^{(z)} \epsilon^{(x)} y^2 + \epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} z^2}}:$$

5.1 Բիո-Մավարի օրենքից

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{c} \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu I}{c} \mathbf{A},$$

որտեղ $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{r}$ -ը դիտման կետի, $\mathbf{r}'$ -ը՝ փակ հոսանքի $Id\mathbf{l}'$ տարրի շառավիղ վեկտորներն են: $\mathbf{A}$ զծային ինտեգրալը հաշվելու համար այն բազմապատկենք կամայական $\mathbf{a}$ հաստատուն վեկտորով և օգտվենք Ստոքսի թեորեմից՝



$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{a} \cdot \oint_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \oint_{L'} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{a}}{R^3} \cdot d\mathbf{l}' = \\ &= \oint_{S'} \text{rot}' \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{a}}{R^3} \cdot d\mathbf{S}' = \oint_{S'} (\mathbf{a} \cdot \nabla') \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{S}' = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \int_{S'} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}'}{R^3}: \end{aligned}$$

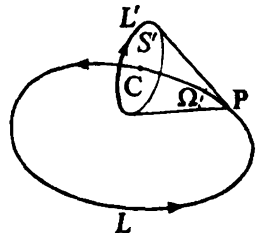
Այստեղ rot և ∇ օպերատորների վրա շտրիկը նշանակում է, որ ածանցյունը կատարվում է ըստ $\mathbf{r}'$ կոորդինատի: Հաշվի առնելով, որ $\mathbf{R}$ վեկտորը S' մակերևույթի $d\mathbf{S}'$ տարրը դիտման կետին միացնող վեկտորն է, կգրենք $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}'/R^3 = -d\Omega$ և կստանանք

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \Omega = \mathbf{a} \cdot \text{grad} \Omega,$$

որտեղից ստացվում է պահանջվող առնչությունը:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu I}{c} \text{grad} \Omega$$

5.2 Ընտրենք որևէ L փակ կոնտուր, որը C կետում հատում է մախտրոլ խնդրում քննարկված L' կոնտուրով շրջափակված S' մակերևույթը: L' -ի շրջանցման ուղղությունը համընկնում է I հոսանքի ուղղության հետ, իսկ L -ի շրջանցման ուղղությունը նրա հետ կազմում է աջ պտուտակային համակարգ: Դիտարկենք



$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{c} \oint_L \text{grad} \Omega \cdot d\mathbf{l}$$

կորագիծ ինտեգրալը: Այստեղ χ -ի կարելի օգտվել Ստոքսի թեորեմից, որովհետև ենթինտեգրալ արտահայտությունը անընդհատ չէ: Ω մարմնային անկյունը, որի տակ P կետից երևում է S' մակերևույթը, կոնտուրով մեկ լրիվ պտույտ կատարելու դեպքում 4π -ի հավասար թոփք է կրում: Զանի որ $\oint_L \text{grad} \Omega \cdot d\mathbf{l}$ -ը Ω մարմ-

նային անկյան փոփոխությունն է կոնտուրով մեկ լրիվ պտույտ կատարելիս, ապա ստանում ենք

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi\mu}{c} I:$$

$$5.3 \quad H_r = H_z = 0, \quad ,$$

$$H_\alpha = \begin{cases} \frac{2I}{cR^2} r, & \text{եթե } (r < R), \\ \frac{2I}{cr}, & \text{եթե } (r > R): \end{cases} \quad B_\alpha = \begin{cases} \frac{2\mu_0 I}{cR^2} r, & \text{եթե } (r < R), \\ \frac{2\mu I}{cr}, & \text{եթե } (r > R): \end{cases}$$

$$5.4 \quad H_\alpha = \frac{2Ir}{cR_1^2}, \quad B_\alpha = \frac{2\mu_0 Ir}{cR_1^2} \quad (r < R_1),$$

$$H_\alpha = \frac{2I}{cr}, \quad B_\alpha = \frac{2\mu I}{cr} \quad (R_1 < r < R_2),$$

$$H_\alpha = \frac{2I}{cr} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}, \quad B_\alpha = \frac{2\mu_0 I}{cr} \frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2} \quad (R_2 < r < R_3),$$

$$H_\alpha = 0, \quad B_\alpha = 0 \quad (r > R_3);$$

$$5.5 \quad \text{Խոռոչում դաշտը համասեռ է՝ } H = \frac{2Ia}{c(R_1^2 - R_2^2)}:$$

$$5.6 \quad \psi = -\frac{2I\alpha}{c}, \quad H_\alpha = \frac{2I}{cr}, \quad H_r = H_z = 0, \quad A_z = -\frac{2\mu I}{c} \ln r + \text{const}$$

Դեկարտյան կոորդինատներով՝

$$H_x = -\frac{2I}{cr^2} y, \quad H_y = \frac{2I}{cr^2} x, \quad H_z = 0, \quad \text{որտեղ } r = \sqrt{x^2 + y^2}:$$

5.7 Կոորդինատական համակարգի X առանցքն ուղղենք հարթության նորմալով, Z առանցքը՝ հոսանքի ուղղությամբ: Սահմանային պայմաններից կհետևի

$$H_y = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c} i & (x < 0), \\ \frac{2\pi}{c} i & (x > 0): \end{cases}$$

5.8 Կոորդինատական համակարգի սկզբնակետը տեղավորենք հարթությունների մեջտեղում, X առանցքն ուղղենք հարթություններից ուղղահայաց, Z -ը՝ $x = a$ հարթության հոսանքի ուղղությամբ:

$$\text{ա) } H_y = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} i, & (x < -a), \\ 0, & (-a < x < a), \\ \frac{4\pi}{c} i, & (x > a): \end{cases} \quad \text{բ) } H_y = \begin{cases} 0, & (x < -a), \\ -\frac{4\pi}{c} i, & (-a < x < a), \\ 0, & (x > a): \end{cases}$$

5.9 Ենթադրենք լարերը կոորդինատական համակարգի X առանցքը հատում են $b/2$ և $-b/2$ կետերում, Z առանցքն ուղղենք $x=b/2$ կետով անցնող հոսանքի ուղղությամբ: Օգտվելով z առանցքով ուղղված անվերջ երկար I գծային հոսանքի ստեղծած դաշտի վեկտոր-պոտենցիալի A_z բաղադրիչի

$$A_z = -\frac{2\mu I}{c} \ln r$$

բանաձևից (տե՛ս խնդիր 5.6) և վերադրման սկզբունքից, կգրենք՝

$$A_z = -\frac{2\mu I}{c} \ln \frac{r_1}{r_2}:$$

Այստեղ r_1 -ը և r_2 -ը դիտման կետի հեռավորություններն են համապատասխանաբար $x=b/2$ և $x=-b/2$ կետերով անցնող լարերից՝

$$r_{1,2}^2 = (x \mp b/2)^2 + y^2:$$

Այսպիսով՝

$$A_z = \frac{\mu I}{c} \ln \frac{(x+b/2)^2 + y^2}{(x-b/2)^2 + y^2},$$

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{4I}{c} \frac{bxy}{r_1^2 r_2^2},$$

$$H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2I}{c} \left(\frac{x+b/2}{r_2^2} - \frac{x-b/2}{r_1^2} \right), \quad H_z = 0:$$

5.10 Կոորդինատական համակարգն ընտրենք նախորդ խնդրի նման: $x=b/2$ կետով անցնող հոսանքի ստեղծած դաշտը երկրորդ հոսանքատար լարի վրա կլինի

$$H_{1x} = \frac{2I}{c} \frac{y}{(x-b/2)^2 + y^2} = 0,$$

$$H_{1y} = \frac{2I}{c} \frac{x-b/2}{(x-b/2)^2 + y^2} = -\frac{2I}{cb},$$

$$H_{1z} = 0:$$

Օգտվելով Ամպերի ուժի $d\mathbf{F} = (I_2/c)(d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1)$ բանաձևից և հաշվի առնելով, որ I_2 -ը z առանցքին հակառակ է ուղղված, երկրորդ լարի միավոր երկարությանը բաժին ընկնող ուժի համար կստանանք՝

$$f_x = \frac{I}{c} B_{1y} = -\frac{2\mu I^2}{c^2 b}, \quad f_y = -\frac{I}{c} B_{1x} = 0, \quad f_z = 0:$$

Էներգիան կլինի՝

$$W_{12} = \frac{2I^2}{c^2} \ln b + \text{const}:$$

5.11 Կոորդինատական համակարգն ընտրենք այնպես, որ թիթեղը (y, z) հարթության մեջ զբաղեցնի $-a/2 \leq y \leq a/2$ տիրույթը, իսկ հոսանքն ուղղված լինի z առանցքով: Թիթեղի $[y', y' + dy']$ անվերջ բարակ շերտի ստեղծած դաշտի համար 5.6 խնդրի համաձայն կունենանք՝

$$dH_x = -\frac{2I}{ca} dy' \frac{y-y'}{(y-y')^2 + x^2},$$

$$dH_y = \frac{2I}{ca} dy' \frac{x}{(y-y')^2 + x^2},$$

$$dH_z = 0:$$

Կատարելով ինտեգրման գործողությունը, կստանանք՝

$$H_x = \frac{I}{ac} \ln \frac{(y-a/2)^2 + x^2}{(y+a/2)^2 + x^2},$$

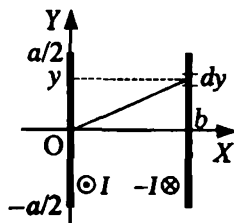
$$H_y = \frac{2I}{ac} \left(\arctg \frac{y+a/2}{x} - \arctg \frac{y-a/2}{x} \right), \quad H_z = 0:$$

$a \rightarrow \infty$ դեպքում՝

$$\lim_{a \rightarrow \infty} H_x = 0, \quad \lim_{\substack{a \rightarrow \infty \\ I \rightarrow \infty \\ I/a \rightarrow i}} H_y = \begin{cases} -\frac{2\pi}{c} i, & (x < 0), \\ \frac{2\pi}{c} i, & (x > 0), \end{cases}$$

որը համընկնում է 5.7 խնդրի արդյունքի հետ:

5.12 Կոորդինատների սկզբնակետը ընտրենք քիթեղներից մեկի մեջտեղում, Z առանցքն ուղղենք նրանով անցնող հոսանքով, X -ը՝ քիթեղին ուղահայաց, այնպես, որ երկրորդ քիթեղը հատի $x = b$ կետում: Առաջին քիթեղի դաշտը երկրորդ քիթեղի $[y, y + dy]$ անվերջ բարակ շերտի վրա կլինի (խնդիր 5.11)



$$H_{1x} = \frac{I}{ac} \ln \frac{(y - a/2)^2 + b^2}{(y + a/2)^2 + b^2},$$

$$H_{1y} = \frac{2I}{ac} \left(\arctg \frac{y + a/2}{b} - \arctg \frac{y - a/2}{b} \right), \quad H_{1z} = 0:$$

Օգտվելով Ամպերի ուժի $dF_{21} = (I_2/c)(dl_2 \times B_1)$ բանաձևից և հաշվի առնելով, որ I_2 հոսանքն ուղղված է z առանցքին հակառակ, երկրորդ քիթեղի $[y, y + dy]$ շերտի միավոր երկարության վրա ազդող ուժի համար կգրենք՝

$$df_x = \frac{I}{ac} B_{1y} dy, \quad df_y = -\frac{I}{ac} B_{1x} dy, \quad df_z = 0:$$

Ջանի որ B_{1x} ֆունկցիան կենտ է, ուրեմն՝

$$f_y = -\frac{I}{ac} \int_{-a/2}^{a/2} B_{1x} dy = 0:$$

Կատարելով ինտեգրումը, ուժի գրոյից տարրեր f_x պրոյեկցիայի համար կունենանք՝

$$f_x = \frac{4I^2\mu}{ac^2} \left[\arctg \frac{a}{b} - \frac{b}{2a} \ln \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \right]:$$

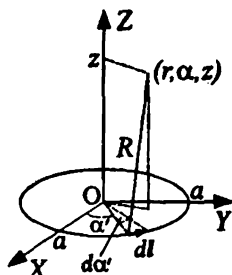
$a \rightarrow 0$ դեպքում ստացվում է

$$f_x = -\frac{2\mu I^2}{c^2 b},$$

որը համընկնում է 5.10 խնդրի արդյունքի հետ:

5.13 Կոորդինատական համակարգի սկզբնական տն ընտրենք օղակի կենտրոնում և Z առանցքն ուղղենք նրա հարթությանն ուղղահայաց այնպես, որ այդ հոսանքի ուղղության հետ կազմի աջ պտուտակային համակարգ: Վեկտոր-պոտենցիալի համարումները

$$A = \frac{\mu I}{c} \int \frac{dl}{R},$$



որտեղ

$$R = \sqrt{(a \cos \alpha' - r \cos \alpha)^2 + (a \sin \alpha' - r \sin \alpha)^2 + z^2} = \\ = \sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos(\alpha' - \alpha)}:$$

Հաշվի առնելով, որ

$$dl_r = -a d\alpha' \sin(\alpha' - \alpha), \quad dl_\alpha = a d\alpha' \cos(\alpha' - \alpha), \quad dl_z = 0$$

և օգտվելով ֆունկցիաների պարբերականությունից, կստանանք՝

$$A_r = -\frac{\mu I a}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \alpha' d\alpha'}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha'}} = 0,$$

$$A_\alpha = \frac{\mu I a}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha' d\alpha'}{\sqrt{a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha'}},$$

$$A_z = 0:$$

Կատարելով $\alpha' = \pi - 2\beta$ նշանակում, կարող ենք A_α -ն արտահայտել K և E լրիվ էլիպտական ինտեգրալներով (տե՛ս հավելվածի (Հ.3) և (Հ.4) բանաձևերը)

$$A_\alpha = \frac{2\mu I}{c} \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{2}{k} - k\right) \mathcal{K}(k) - \frac{2}{k} \mathcal{E}(k) \right],$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2 + z^2}:$$

Մագնիսական դաշտի բաղադրիչները հաշվելիս, օգտագործելով (Հ.5) և (Հ.6) առնչությունները, կստանանք՝

$$H_r = \frac{2I}{c} \frac{z}{r \sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} \mathcal{E}(k) - \mathcal{K}(k) \right], \quad H_\alpha = 0,$$

$$H_z = \frac{2I}{c} \frac{1}{\sqrt{(a+r)^2 + z^2}} \left[\frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} \mathcal{E}(k) + \mathcal{K}(k) \right]:$$

Դաշտը օղակի առանցքի վրա ստանալու համար կատարենք $r \rightarrow 0$ սահմանային անցում: Օգտվելով (Հ-7) և (Հ-8) վերլուծություններից կստանանք

$$H_r = 0, \quad H_\alpha = 0, \quad H_z = \frac{2\pi a^2 I}{c(a^2 + z^2)^{3/2}}:$$

5.14 Ամպերի բանաձևից և նախորդ խնդրի արդյունքից կհետևի՝

$$F_z = -\frac{4\pi}{c^2} I_1 I_2 \frac{b}{\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + b^2}} \left[\frac{a_1^2 + a_2^2 + b^2}{(a_1 - a_2)^2 + b^2} \mathcal{E}(k) - \mathcal{K}(k) \right],$$

որտեղ

$$k^2 = \frac{4a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2 + b^2}:$$

5.15 Մաքսվելի $\text{rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{j}$ հավասարումից հետևում է, որ $\text{div} \mathbf{j} = 0$:

Նշանակում է դիտարկվող սահմանափակ տիրույթում հոսում են հոսանքներ, որոնց հոսանքի գծերը փակ կորեր են: Կատարելով $\int j_i dV_i \rightarrow I_i d\ell_i$ սահմանային անցում ծավալային ինտեգրալից գծային ինտեգրալների՝

$$\int j dV = \sum_i I_i \oint d\ell_i,$$

որտեղ $d\ell_i$ ը i -րդ փակ հոսանքատար գծի տարրն է: Հաշվի առնելով, որ $\oint d\ell = 0$, ստանում ենք պահանջվող առնչությունը՝ $\int j dV = 0$: Նույն եզրակացությանը կարող ենք գալ, օգտվելով 1.16 խնդրի արդյունքից:

5.16 Քկոորդինատական համակարգում $\mathbf{m} = (1/2c) \int (\mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r})) dV$: Անցնենք կոորդինատական $\mathcal{K}'$ համակարգի, որտեղ $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$, հոսանքի ծավալային խտությունը՝ $\mathbf{j}'(\mathbf{r}') = \mathbf{j}(\mathbf{r})$, իսկ մագնիսական մոմենտը՝

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}'(\mathbf{r}')) dV':$$

Կատարենք $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ փոփոխականի փոխարինում՝

$$\mathbf{m}' = \mathbf{m} - \frac{1}{2c} (\mathbf{a} \times \int \mathbf{j} dV):$$

Վերջավոր տիրույթների դեպքում, ինչպես ցույց է տրվել 5.15 խնդրում, $\int \mathbf{j} dV = 0$: Ցույց տանք, որ այս պայմանը ճիշտ է նաև

այն դեպքում, երբ հոսանքները պարփակված չեն վերջավոր ծավալում: $\mathbf{G} = \int_{V \rightarrow \infty} \mathbf{j} dV$ ինտեգրալը բազմապատկենք կամայական $\mathbf{b}$

հաստատուն վեկտորով և հաշվի առնենք $\text{grad}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{b}$ առնչությունը՝

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{G} = \int_{V \rightarrow \infty} \mathbf{j} \cdot \text{grad}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) dV$$

որը $\text{div} \mathbf{j} = 0$ պայմանի շնորհիվ կդառնա՝

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{G} = \int_{V \rightarrow \infty} \text{div}((\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}) dV = \oint_{S \rightarrow \infty} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j} dS:$$

Քանի որ $\mathbf{m}$ -ի արժեքները միշտ վերջավոր են, նշանակում է $\mathbf{j}$ -ն մեծությամբ անվերջում նվազում է ավելի արագ, քան r^{-4} -ը: Քանի որ S -ը աճում է որպես r^2 ապա ստացված մակերևութային ինտեգրալը $S \rightarrow \infty$ դեպքում ձգտում է զրոյի: Նշանակում է $\mathbf{b} \cdot \mathbf{G} = 0$: Քանի որ $\mathbf{b}$ վեկտորը կամայական է, ապա $\mathbf{G} = 0$, որտեղից էլ հետևում է՝ $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$:

5.17 Համասեռ դաշտի դեպքում $\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{B}$, որտեղից $\mathbf{A}$ վեկտոր-պոտենցիալի համար ստացվում է

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{r}}{2}:$$

Վերջինս տեղադրելով մագնիսական դաշտի էներգիայի արտահայտության մեջ ստանում ենք

$$W = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}:$$

5.18 Ուժի մոմենտի սահմանումից և Ամպերի բանաձևից, կգրենք

$$\mathbf{K} = \frac{1}{c} \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})] dV: \quad (1)$$

Հաշվի առնելով

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{B}$$

վեկտորական նույնությունը և մագնիսական մոմենտի (5.11) սահմանումը, (1)-ը կներկայացնենք այսպես՝

$$\mathbf{K} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} + \frac{1}{c} \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \mathbf{j} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})] dV: \quad (2)$$

Այժմ ցույց տանք, որ (2) արտահայտության մեջ ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Նկատենք, որ

$$\int j \, dV = \sum_i I_i \oint dl_i$$

փոխարինումը հնարավորություն կտա այդ ծավալային ինտեգրալը գրել անվերջ բարակ փակ հոսանքի գծերի երկայնքով իրականացվող գծային ինտեգրալների տեսքով՝

$$\begin{aligned} \sum_i I_i \oint_{L_i} [r \times (dl_i \times B) + dl_i \times (r \times B)] &= \\ &= \sum_i I_i \oint_{L_i} [dl_i (r \cdot B) + r (dl_i \cdot B) - 2B (r \cdot dl_i)]: \end{aligned}$$

Վերջինս բազմապատկենք a կամայական հաստատուն վեկտորով և օգտվենք Ստոքսի թեորեմից՝

$$\begin{aligned} \oint_{L_i} [(r \cdot B) \cdot a + (a \cdot r)B - 2(a \cdot B)r] dl_i &= \\ &= \int_{S_i} [\text{rot}[(r \cdot B) \cdot a + (a \cdot r)B - 2(a \cdot B)r] dS = \int_{S_i} [(B \times a) + (a \times B)] dS = 0: \end{aligned}$$

5.19 (5.17) խնդրի արդյունքից՝ $W = m \cdot B$, որտեղ m -ը գլանի մագնիսական մոմենտն է՝

$$m = \frac{1}{2c} \int (r \times j) \, dV = \frac{\rho_e}{2c} \int (r \times (\omega \times r)) \, dV:$$

Այստեղ $j = \rho_e (\omega \times r)$ -ը գլանի պտույտով պայմանավորված հոսանքի ծավալային խտությունն է, $\rho_e = Q/\pi R^2 h$, h -ը գլանի բարձրությունն է: Հաշվի առնելով, որ գլանային կոորդինատական համակարգում $r = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z)$, $\omega = (0, 0, \omega)$, $dV = r dr d\alpha dz$ կստանանք՝

$$m = \frac{QR^2 \omega}{4c},$$

որտեղից

$$W = \frac{QR^2 (\omega \cdot B)}{4c} = \frac{QR^2 \omega B \cos \alpha}{4c}:$$

ԶՎԱԶԻՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ

$$6.1 \quad \text{ա) } I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\gamma t}), \quad \text{բ) } I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\gamma t},$$

այստեղ $\tau = L/R^2$ մեծությունը ռելաքսացիայի ժամանակն է:

$$6.2 \quad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

6.3 (6.10) հավասարումը ներկայացնենք

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1)$$

տեսքով, որտեղ $\omega_0 = c/\sqrt{LC}$ մեծությունը LC իդեալական կոնտուրի սեփական հաճախությունն է, իսկ $\delta = Rc^2/2L$ -ը՝ մարման գործակիցը: (1)-ի լուծումը փնտրենք $q(t) \sim e^{-i\omega t}$ տեսքով:

$$\omega^2 + 2i\delta\omega - \omega_0^2 = 0$$

բնութագրական հավասարումը լուծելով կգտնենք հնարավոր հաճախությունները՝

$$\omega_{1,2} = -i\delta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}:$$

ω_0 և δ մեծությունների փոխհարաբերությունից կախված հնարավոր են երեք տարբեր տեսքի լուծումներ:

ա) Թույլ մարման դեպքում ($\delta < \omega_0$)

$$q(t) = \text{Re}\{e^{-\delta t}(q_1 e^{i\Omega t} + q_2 e^{-i\Omega t})\}$$

որտեղ $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, իսկ $q_1 = q_{1r} + iq_{1i}$ և $q_2 = q_{2r} + iq_{2i}$ գործակիցները կոմպլեքս մեծություններ են: $q(t)$ ֆունկցիայի իրական մասը կլինի՝

$$q = e^{-\delta t}[(q_{1r} + q_{2r}) \cos \Omega t + (q_{2i} - q_{1i}) \sin \Omega t]:$$

$q(0) = q_0$ պայմանից ստացվում է $q_{1r} + q_{2r} = q_0$: Նման ձևով $I(0) = \dot{q}(0) = 0$ պայմանից կարելի է ստանալ՝ $q_{2i} - q_{1i} = \delta q_0 / \Omega$:

Այսպիսով $\delta < \omega_0$ դեպքում

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \left(\cos \Omega t + \frac{\delta}{\Omega} \sin \Omega t \right): \quad (1)$$

բ) $\delta = \omega_0$ դեպքում կունենանք

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} (1 + \delta t): \quad (2)$$

զ) Ուժեղ մարման դեպքում ($\delta > \omega_0$)

$$\omega_{1,2} = i(-\delta \pm \Omega'),$$

որտեղ $\Omega' = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = i\Omega$: Լիցքի և հոսանքի համար կունենանք՝

$$q(t) = e^{-\delta t} (q_1 e^{\Omega' t} + q_2 e^{\Omega'' t}), \quad (3)$$

$$I(t) = q_1 (\Omega' - \delta) e^{\Omega' t} - q_2 (\Omega' + \delta) e^{-\Omega' t}:$$

Սկզբնական պայմանները այստեղ բերում են

$$q_1 + q_2 = q_0, \quad q_1 - q_2 = \frac{\delta}{\Omega'} q_0$$

հավասարումների համակարգին, որի լուծումը տեղադրելով (3)-ի մեջ վերջնականապես կստանանք՝

$$q(t) = q_0 e^{-\delta t} \left(\operatorname{ch} \Omega' t + \frac{\delta}{\Omega'} \operatorname{sh} \Omega' t \right):$$

Նկատենք, որ վերջին արդյունքը կարելի է ստանալ (1)-ից, եթե օգտվենք $\cos(ix) = \operatorname{ch}(x)$ և $\sin(ix) = i \operatorname{sh}(x)$ հայտնի բանաձևերից:

Տեսնում ենք, որ թույլ մարման դեպքում ($\delta < \omega_0$) կոնդենսատորի լիցքը կատարում է մարդդ տատանումներ, իսկ ուժեղ մարման դեպքում ($\delta > \omega_0$) մոնոտոն նվազելով ձգտում է զրոյի:

6.4

$$\frac{L}{c^2} \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{I}{C} = \mathcal{E} \quad (1)$$

հավասարման լուծումները $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$ էլշուի դեպքում կփնտրենք

$I = I_0 e^{-i\omega t}$ տեսքով: Վերջինս տեղադրելով (1)-ի մեջ, կստանանք

$$ZI = \mathcal{E}$$

որտեղ

$$Z = R - i \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right):$$

Այսպիսով

$$I = \operatorname{Re} \left(\frac{\mathcal{E}}{Z} \right) = \frac{\mathcal{E}_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}},$$

որտեղ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{R} \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right):$$

6.5 $t > 0$ դեպքում տեղի ունի

$$\frac{L}{c^2} \ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}_0$$

հավասարումը: Այս անհամասեռ հավասարման լուծումը կարող ենք ներկայացնել

$$q_{\text{ստաց}} = \mathcal{E}_0 C$$

մասնավոր լուծման և

$$\frac{L}{c^2} \ddot{f} + R\dot{f} + \frac{1}{C} f = 0 \quad (1)$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման գումարի տեսքով՝

$$q(t) = \mathcal{E}_0 C + f(t):$$

$f(t)$ ընդհանուր լուծման սկզբնական պայմաններն են՝
 $f(0) = q_0 - \mathcal{E}_0 C$ և $\dot{f}(0) = \dot{q}(0) = 0$:

Օգտվելով 6.3 խնդրում օգտագործված եղանակից (1) հավասարման լուծումը կգրենք

$$f_1(t) = (q_0 - \mathcal{E}_0 C) e^{-\delta t} \left(\cos \Omega t + \frac{\delta}{\Omega} \sin \Omega \right)$$

տեսքով, եթե $\delta < \omega_0$,

$$f_2(t) = (q_0 - \mathcal{E}_0 C) e^{-\delta t} (1 + \delta t)$$

տեսքով, եթե $\delta = \omega_0$ և

$$f_3(t) = (q_0 - \mathcal{E}_0 C) e^{-\delta t} \left(\operatorname{ch} \Omega' t + \frac{\delta}{\Omega} \operatorname{sh} \Omega' \right)$$

տեսքով, եթե $\delta > \omega_0$: Այստեղ

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad \Omega' = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{Rc^2}{2L}:$$

Օգտվելով $I(t) = \dot{q}(t) = \dot{f}(t)$ բանաձևից՝ կստանանք՝

$$I(t) = \begin{cases} \frac{c^2 (\mathcal{E}_0 - q_0 / C)}{L \Omega} e^{-\delta t} \sin \Omega t, & \text{եթե } \delta < \omega_0, \\ \frac{c^2 (\mathcal{E}_0 - q_0 / C)}{L} t e^{-\delta t}, & \text{եթե } \delta = \omega_0, \\ \frac{c^2 (\mathcal{E}_0 - q_0 / C)}{L \Omega'} e^{-\delta t} \operatorname{sh} \Omega' t, & \text{եթե } \delta > \omega_0. \end{cases}$$

Նկատենք, որ $\delta < \omega_0$ դեպքում հոսանքը մարում է տատանումներ կատարելով, $\delta = \omega_0$ դեպքում՝ մինչև $t_m = 1/\delta$ պահը հոսանքն աճում է, իսկ այնուհետև մոնոտոն նվազելով ձգտում է զրոյի, իսկ $\delta > \omega_0$ դեպքում՝ մոնոտոն նվազելով ձգտում է զրոյի:

6.6 Կոնտուրներով անցնող I_1 և I_2 հոսանքները բավարարում են

$$\frac{L_1}{c^2} \ddot{I}_1 + \frac{L_{12}}{c^2} \ddot{I}_2 + \frac{I_1}{C_1} = 0,$$

$$\frac{L_{12}}{c^2} \ddot{I}_1 + \frac{L_2}{c^2} \ddot{I}_2 + \frac{I_2}{C_2} = 0$$

հավասարումների համակարգին, որի լուծումները կվնտրենք $I_1 = I_{10} e^{-i\omega t}$ և $I_2 = I_{20} e^{-i\omega t}$ տեսքով: Օգտվելով I_1 և I_2 մեծությունների համար ստացվող հանրահաշվական հավասարումների համակարգի ոչ զրոյական լուծումներ ունենալու

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\omega^2 L_1}{c^2} - \frac{1}{C_1} & \frac{\omega^2 L_{12}}{c^2} \\ \frac{\omega^2 L_{12}}{c^2} & \frac{\omega^2 L_2}{c^2} - \frac{1}{C_2} \end{pmatrix} = 0$$

պայմանից, կստանանք՝

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}}}{2 C_1 C_2 (L_1 L_2 - L_{12}^2)} c^2.$$

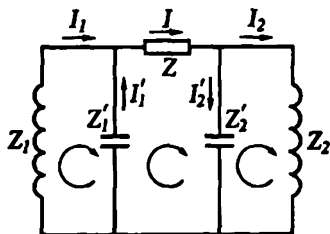
$L_1 \rightarrow 0$ դեպքում ստացվում են անկախ իդեալական տատանողական կոնտուրների սեփական հաճախությունները՝

$$\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2 C_2}}:$$

6.7 Դիտարկվող համակարգի տարրերի իմպեդանսներն են

$$Z_1 = -\frac{i\omega L_1}{c^2}, \quad Z_2 = -\frac{i\omega L_2}{c^2},$$

$$Z'_1 = \frac{i}{\omega C_1}, \quad Z'_2 = \frac{i}{\omega C_2}:$$



Օգտվելով Կիրխոֆի օրենքներից, կարող ենք գրել

$$I_1 + I'_1 - I = 0,$$

$$I - I_2 - I'_2 = 0,$$

$$Z_1 I_1 - Z'_1 I'_1 = 0,$$

$$Z_2 I_2 - Z'_2 I'_2 = 0,$$

$$Z'_1 I'_1 + Z I + Z'_2 I'_2 = 0:$$

Ստացված զծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի ոչ զրոյական լուծումների գոյություն

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ Z_1 & -Z'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z'_1 & 0 & Z'_2 & Z \\ 0 & 0 & Z_2 & -Z'_2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

սլայմանից կստանանք պահանջվող հավասարումը՝

$$(Z_1 + Z'_1)(Z'_2 Z + Z_2 Z + Z_2 Z'_2) + Z_1 Z'_1 (Z_2 + Z'_2) = 0,$$

կամ տեղադրելով հայտնի իմպեդանսների արտահայտությունները՝

$$\begin{aligned} & \frac{L_1}{c^2 C_1} \left(\frac{\omega^2 L_2}{c^2} - \frac{1}{C_2} \right) + \frac{L_2}{c^2 C_2} \left(\frac{\omega^2 L_1}{c^2} - \frac{1}{C_1} \right) - \\ & - i \frac{Z(\omega)}{\omega} \left(\frac{\omega^2 L_1}{c^2} - \frac{1}{C_1} \right) \left(\frac{\omega^2 L_2}{c^2} - \frac{1}{C_2} \right) = 0 \end{aligned}$$

6.8 ա)

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{c^2}{2} \left\{ \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) + \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_2} \right) + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right) - \frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_2} \right) \right)^2 + \frac{4}{C_1 C_2 L^2} \right]^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

բ)

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{L_1(C + C_1) + L_2(C + C_2) \pm \sqrt{K}}{2L_1 L_2 (CC_1 + CC_2 + C_1 C_2)},$$

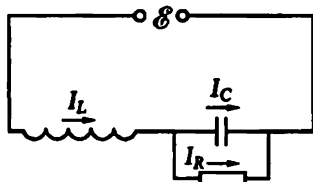
որտեղ $K = [L_1(C + C_1) - L_2(C + C_2)]^2 - 4L_1 L_2 C^2$:

6.9 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$ օրենքով փոփոխվող էլեկտրաշարժ ուժի դեպքում I_L , I_R և I_C հոսանքները բավարարում են

$$\frac{L}{c^2} I_L + R I_R = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0),$$

$$-\frac{I_C}{C} + R I_R = 0,$$

$$I_L = I_R + I_C:$$



հավասարումների համակարգին:

Արտաքսելով I_L և I_C հոսանքի ուժերը, կստանանք

$$\frac{RLC}{c^2} \dot{I}_R + \frac{L}{c^2} \dot{I}_R + R I_R = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \alpha_0):$$

Լուծելով ստացված հավասարումը, կունենանք

$$I_R(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{c^2}\right)^2 + \frac{\omega^2 L^2}{c^4}}} \cos(\omega t + \alpha_0 - \varphi),$$

որտեղ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{c^2 R \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{c^2}\right)}:$$

Մասնավոր դեպքում, եթե $\omega = \omega_0 = c/\sqrt{LC}$ ստանում ենք

$$I_R(t) = \mathcal{E}_0 c \sqrt{C/L} \sin(\omega_0 t + \alpha_0),$$

որտեղից երևում է, որ R դիմադրությունով անցնող I_R հոսանքը իսկապես կախված չէ R դիմադրության մեծությունից: Այսինքն, այսպիսի շղթան փոփոխական հոսանքի կայունացուցիչի պարզագույն օրինակ է:

6.10 Օղակում առաջացող հոսանքը որոշվում է

$$\frac{L}{c^2} \dot{I} + R I = \mathcal{E}_{\text{ind}} \quad (1)$$

հավասարումից: Կողմնային էլեկտրաշարժ ուժը այս դեպքում պայմանավորված է մակաժման երևույթով: Քանի որ մագնիսական հոսքի համար ունենք

$$\Phi = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{S} = B_0 S \cos(\omega t + \alpha_0),$$

որտեղ S -ը օղակի մակերեսն է, իսկ α_0 -ն $t=0$ պահին օղակի հարթության նորմալի կազմած անկյունը B_0 վեկտորի հետ, ուստի

$$\mathcal{E}_{\text{հոդ}} = \mathcal{E}_{\text{մակ}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi a^2 B_0 \omega}{c} \sin(\omega t + \alpha_0):$$

Այսպիսով, (1) հավասարումը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\frac{L}{c^2} I + RI = \frac{\pi a^2 B_0 \omega}{c} \sin(\omega t + \alpha_0):$$

Լուծելով ստացված հավասարումը, կունենանք՝

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi),$$

որտեղ

$$I_0 = \frac{\pi a^2 B_0 \omega}{c \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R c^2}:$$

Այժմ գտնենք արգելակող մոմենտը: Օգտվելով B_0 մագնիսական դաշտում m մագնիսական մոմենտի վրա ազդող ուժի մոմենտի

$$\mathbf{K} = m \times \mathbf{B}_0$$

արտահայտությունից (տես (5.18) խնդիրը) և այն հանգամանքից, որ հարթ զծային հաղորդչի համար

$$m = \frac{I}{2c} \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = \frac{I}{2c} \mathbf{S},$$

կգրենք

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{I\omega}{c\omega} \pi a^2 B_0 \sin(\omega t + \alpha_0),$$

կամ՝

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{\omega (\pi a^2 B_0)^2}{c^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \sin(\omega t + \alpha_0) \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi):$$

Միջին հզորության համար կունենանք՝

$$\bar{P} = -\overline{\mathbf{K}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}} = \frac{\omega^2 (\pi a^2 B_0)^2}{2c^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2}} \cos \varphi = \frac{\omega^2 (\pi a^2 B_0)^2 R}{2c^2 \left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2 \right]} = \frac{1}{2} I_0^2 R:$$

6.11 Կոնտուրում առաջացած հոսանքը որոշվում է

$$\frac{L}{c^2} \ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \frac{B_0 S \omega^2}{c} \cos(\omega t + \alpha_0),$$

հավասարումով (տես նախորդ խնդրի լուծումը), որտեղ α_0 -ն անկյունն է $t = 0$ պահին կոնտուրի հարթության նորմալի և B_0 վեկտորի միջև: Լուծելով (1) հավասարումը, կստանանք՝

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi),$$

որտեղ

$$I_0 = \frac{B_0 S \omega}{c \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right);$$

Օգտվելով ուժի մոմենտի արտահայտությունից, ինչպես այդ արված է նախորդ խնդրում, կստանանք՝

$$K(t) = \frac{(B_0 S)^2 \omega}{c^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t + \alpha_0) \sin(\omega t + \alpha_0 - \varphi):$$

Կատարելով միջինացում ըստ t -ի կունենանք՝

$$\begin{aligned} \overline{K(t)} &= - \frac{(B_0 S)^2 \omega}{2c^2 \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos \varphi = \\ &= - \frac{(B_0 S)^2 R \omega}{2c^2 \left[R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]} = - \frac{I_0^2 R}{2\omega^2} \omega: \end{aligned}$$

6.12 Խնդրի համաչափությունից հետևում է, որ $\vec{H}(t)$ արտաքին մագնիսական դաշտի ստեղծած մրրկային հոսանքները գլանում կհոսեն համաչափության առանցքին համառանցք շրջանագծերով: Կարելի է համոզվել, որ այդ հոսանքների ստեղծած մագնիսական դաշտը գլանից դուրս հավասար է զրոյի, իսկ ներսում ուղղված է գլանի առանցքով (Z առանցքով) և կախված է միայն r կոորդինատից: $H_z(r, t)$ մագնիսական դաշտը գլանի ներսում որոշելու համար (6.7)

հավասարումը գրենք զլանային կոորդինատական համակարգում՝

$$\frac{\partial^2 H_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z(r,t)}{\partial r} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial H_z(r,t)}{\partial t} \quad (1)$$

և $H_z(r,t)$ -ն փնտրենք $H_z(r,t) = H_{z0}(r)e^{-i\omega t}$ տեսքով: $H_{z0}(r)$ ֆունկցիան բավարարում է

$$\frac{\partial^2 H_{z0}(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{z0}(r)}{\partial r} + k^2 H_{z0}(r) = 0 \quad (2)$$

հավասարմանը, որտեղ $k^2 = i4\pi\mu\lambda/c^2$: (2)-ը Բեսելի հավասարումն է, որի $r = 0$ կետում վերջավոր լինելու պայմանին բավարարող լուծումը $J_0(kr)$ ֆունկցիան է (տես հավելվածի (Հ.9) և (Հ.11) բանաձևերը): Հաշվի առնելով $H_{r0}(R) = \mathcal{H}_0$ սահմանային պայմանը, կունենանք՝

$$H_0(r) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}, & (r \leq R), \\ \tilde{\mathcal{H}}_0, & (r > R): \end{cases} \quad (3)$$

էլեկտրական դաշտը որոշելու համար կօգտվենք (6.4) հավասարման ինտեգրալ տեսքից՝

$$\oint_L E_0(r) \cdot dl = \frac{i\omega}{c} \int_S B_0(r) \cdot dS: \quad (4)$$

Որպես L կոնտուր ընտրենք զլանին համառանցք r շառավղով շրջանագիծ և օգտվենք

$$B_0(r) = \begin{cases} \mu \tilde{\mathcal{H}}_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}, & (r \leq R), \\ \tilde{\mathcal{H}}_0, & (r > R) \end{cases}$$

արտահայտությունից, կատանանք՝ $E_r = E_z = 0$,

$$E_{\alpha 0} = \begin{cases} \frac{i\omega \mathcal{H}_0}{rc} \frac{\mu}{J_0(kR)} \int_0^r J_0(kr) r dr, & (r \leq R), \\ \frac{i\omega \mathcal{H}_0}{rc} \left[\frac{\mu}{J_0(kR)} \int_0^R J_0(kr) r dr + \frac{1}{2} (r^2 - R^2) \right], & (r > R): \end{cases}$$

նկատի ունենալով (Հ-15) առնչությունը, վերջնականապես կունենանք

$$E_0(r) = \begin{cases} \frac{kc}{4\pi\lambda} \mathcal{H}_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} \hat{e}_\alpha, & (r \leq R), \\ \frac{kc}{4\pi\lambda} \mathcal{H}_0 \left[\frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} \frac{R}{r} + \frac{k}{2\mu r} (r^2 - R^2) \right] \hat{e}_\alpha, & (r > R): \end{cases} \quad (5)$$

6.13 Գլանում մակածված մրրկային էլեկտրական դաշտի ստեղծած հոսանքի խտությունը հավասար է (տես նախորդ խնդրում ստացված (5) առնչությունը)՝

$$j_\alpha(r, t) = \frac{kc}{4\pi} \mathcal{H}_0 \frac{J_1(kr)}{J_0(kR)} e^{-i\omega t}, \quad j_r = j_z = 0: \quad (1)$$

Փոքր հաճախությունների դեպքում ($kR \ll 1$ կամ $\omega \ll c^2/4\pi\mu\lambda R^2$) համաձայն (Հ-12)-(Հ-13) վերլուծությունների՝

$$j_\alpha(r, t) \approx \frac{ck^2}{8\pi} \mathcal{H}_0 r e^{-i\omega t},$$

կամ հիշելով, որ $k^2 = i4\pi\omega\mu\lambda/c^2$,

$$j_\alpha(r, t) \approx \frac{i\omega\mu\lambda}{2c} \mathcal{H}_0 r e^{-i\omega t},$$

այսինքն՝ հոսանքի խտության մոդուլը գծայնորեն է կախված r -ից և համեմատական է ω հաճախությանը:

$\omega \gg c^2/4\pi\mu\lambda R^2$ մեծ հաճախությունների դեպքում ($kR \gg 1$) կարող ենք օգտվել (Հ-14) ասիմպտոտական արտահայտությունից: Սահմանափակվելով $0 \leq R-r \ll R$ հեռավորությունների դեպքով, կստանանք՝

$$\begin{aligned} j_\alpha(r, t) &= \frac{kc}{4\pi} \mathcal{H}_0 e^{-i\omega t} \sqrt{R/r} \frac{\cos(kr - 3\pi/4)}{\cos(kR - \pi/4)} = \\ &= i \frac{kc}{4\pi} \mathcal{H}_0 e^{-i\omega t} \sqrt{R/r} e^{-ik(r-R)}: \end{aligned}$$

k -ն ներկայացնենք $k = (1+i)/\delta$ տեսքով, որից հետո $j_\alpha(r, t)$ -ն կդառնա

$$j_\alpha(r, t) = \frac{(i-1)c}{4\pi\delta} \mathcal{H}_0 \sqrt{\frac{R}{r}} e^{-\frac{R-r}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{R-r}{\delta}\right)}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, մեծ հաճախությունների դեպքում հոսանքը հիմնականում անցնում է $\delta = c/\sqrt{2\pi\omega\lambda\mu}$ հաստությամբ բարակ մակերևութային շերտով:

6.14 Գլանի ներսում մագնիսական դաշտն ուղղված է համաչափության առանցքով՝ $H = (0, 0, H(r, t))$ և բավարարում է

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{4\pi\mu\lambda}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

հավասարմանը: Հաշվի առնելով, որ $t > 0$ պահերին մագնիսական դաշտը մարում է, (1)-ի լուծումը փնտրենք $H(r, t) = H_0(r)e^{-\gamma t}$ տեսքով ($\gamma > 0$): $H_0(r)$ -ը բավարարում է

$$\frac{d^2 H_0(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_0(r)}{dr} + k^2 H_0(r) = 0 \quad (2)$$

հավասարմանը, որտեղ $k^2 = 4\pi\mu\lambda\gamma/c^2$: (2) Բեսելի հավասարման $r = 0$ կետում վերջավոր լուծումը I_0 ֆունկցիան է՝ $H_0(r) = CI_0(kr)$: Զանի որ $t \geq 0$ պահերին $H_0 = 0$, իսկ մրկային հոսանքների ստեղծած լրացուցիչ դաշտը գլանից դուրս հավասար է զրոյի, ապա պետք է տեղի ունենա

$$J_0(kR) = 0 \quad (3)$$

եզրային պայմանը: (3) հավասարման արմատները նշանակենք k_m -ով՝ $J_0((k_m R)) \equiv 0$: (1) հավասարման լուծումը կունենա

$$H(r, t) = \sum_m C_m J_0(k_m r) e^{-\gamma_m t} \quad (4)$$

տեսքը, որտեղ $\gamma_m = c^2 k_m^2 / 4\pi\mu\lambda$:

Հաշվի առնելով, որ $H(r, 0) = H_0$, (4)-ից կունենանք

$$H_0 = \sum C_m J_0(k_m r):$$

Վերջին հավասարման երկու կողմը բազմապատկենք $rJ_0(k_n r)$ -ով, ինտեգրենք ըստ r -ի՝ 0-ից R սահմաններում, օգտվենք (Հ.16) օրթոգոնալության պայմանից և (Հ.15)-ից, կստանանք՝

$$C_n = \frac{2H_0}{k_n R J_1(k_n R)}:$$

Դաշտի մարման արագությունը կորոշվի ամենափոքր γ_n -ով (k_n -ով), այնպես, որ մարման բնութագրական ժամանակը $\tau = 1/\gamma_{\min}$: Հայտնի է, որ $J_0(x) = 0$ հավասարման ամենափոքր արմատի արժեքը՝ $x_1 \approx 2.4$, այնպես որ $k_{\min} = 2.4/R$, իսկ $\tau = 4\pi\mu\lambda R^2 / 5.76c^2$:

6.15 Համաչափությունից հետևում է, որ ժամանակի ցանկապատ պահին էլեկտրական դաշտի լարվածության մոդուլը հաղորդալարի

մակերևույթի բոլոր կետերում մույնն է: Այսպիսի եզրային պայմանի դեպքում $E = \text{const}$ գլանից դուրս ամբողջ տարածության մեջ:

Հաղորդալարի ներսում E լեկտրական դաշտը ուղղված է հաղորդալարի առանցքով (Z առանցքով) և բավարարում է (6.8) հավասարմանը, որը գլանային կոորդինատական համակարգում ունի 6.12 խնդրի (1) հավասարման տեսքը: (6.12) խնդրի նմանությամբ կարող ենք գրել

$$E_z(r, t) = E_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} e^{-i\omega t} \quad (r \leq R),$$

որտեղ $k^2 = i4\pi\omega\mu\lambda/c^2$, իսկ E_0 -ն դաշտի արժեքն է հաղորդալարի մակերևույթի վրա: $j = \lambda \vec{E}$ առնչությունից հետևում է, որ հոսանքի խտության բաշխումը հաղորդալարի ներսում տրվում է

$$j_z(r, t) = \lambda E_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)} e^{-i\omega t} \quad (r \leq R)$$

օրենքով:

$|kR| \gg 1$ մեծ հաճախությունների դեպքում ($\omega \gg c^2/4\pi\mu\lambda R^2$) կարող ենք օգտվել (Հ.16) ասիմպտոտական վերլուծությունից: Սահմանափակվելով $0 \leq R - r \ll R$ հեռավորություններով՝

$$\begin{aligned} j_z(r, t) &= \lambda E_0 e^{-i\omega t} \sqrt{R/r} \frac{\cos(kr - \pi/4)}{\cos(kR - \pi/4)} \approx \\ &\approx \lambda E_0 \sqrt{R/r} e^{-\frac{R-r}{\delta}} e^{-i\left(\omega t - \frac{R-r}{\delta}\right)}: \end{aligned}$$

որտեղ $\delta = (1+i)/k = c/\sqrt{2\pi\omega\mu\lambda}$:

Ստացված արտահայտության մեջ $e^{-(R-r)/\delta}$ արտադրիչը ցույց է տալիս, որ մեծ հաճախությունների դեպքում հոսանքն անցնում է մակերևութային շերտով, որի հաստությունը հաճախությունից կախված $\delta \sim \omega^{-1/2}$ օրենքով ձգտում է զրոյի:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ

1. ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Առաջին և երկրորդ սեռի էլիպտական ինտեգրալներ են կոչվում համապատասխանաբար՝

$$K(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (4.1)$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (4.2)$$

ինտեգրալները:

Առաջին և երկրորդ սեռի լրիվ էլիպտական ինտեգրալները սահմանվում են այսպես՝

$$\mathcal{K}(k) = K\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{E}(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right): \quad (4.4)$$

Լրիվ էլիպտական ինտեգրալներն իրար հետ կապված են

$$\frac{d\mathcal{K}(k)}{dk} = \frac{\mathcal{E}(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{\mathcal{K}(k)}{k}, \quad (4.5)$$

$$\frac{d\mathcal{E}(k)}{dk} = \frac{\mathcal{E}(k) - \mathcal{K}(k)}{k} \quad (4.6)$$

Ֆունկցիոնալ առնչություններով:

Էլիպտական ինտեգրալները կարելի է ներկայացնել շարքերի տեսքով՝

$$\mathcal{K}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{E}(k) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots - \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\}: \quad (4.8)$$

2. ԲԵՍԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Բեսելի հավասարում է կոչվում

$$x^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} + x \frac{dY}{dx} + (x^2 - \nu^2)Y = 0 \quad (2.9)$$

երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումը: Սրա լուծումները կոչվում են գլանային ֆունկցիաներ: (2.9)-ի լուծումները, որոնք $\nu \geq 0$ դեպքում սահմանափակ են $x = 0$ կետում, կոչվում են առաջին սեռի գլանային ֆունկցիաներ կամ Բեսելի ֆունկցիաներ և ունեն այսպիսի տեսք՝

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (2.10)$$

որտեղ Γ -ն Էյլերի գամմա-ֆունկցիան է: Եթե ν -ն ամբողջ թիվ է՝ $\nu = n$, ապա

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}: \quad (2.11)$$

Երբ $|x| \ll 1$

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \quad (n \geq 1), \quad (2.12)$$

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4}: \quad (2.13)$$

$|x| \gg 1$ դեպքում՝

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right): \quad (2.14)$$

Թվարկենք հետևյալ առնչությունները՝

$$\int x^{\nu+1} J_\nu(x) dx = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x), \quad (2.15)$$

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \begin{cases} 0, & (\alpha \neq \beta), \\ \frac{1}{2} (J_{\nu+1}(\alpha))^2, & (\alpha = \beta), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$(J_\nu(\alpha) = J_\nu(\beta) = 0, \quad \nu > -1):$$

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Յոհ.Լ.Վարդանյան, Էլեկտրադինամիկա, հ.1, Երևան, ԵՊՀ հրատ., 2000 թ.:
2. А.И. Алексеев, Сборник задач по классической электродинамике. М., "Наука", 1977.
3. В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин, Сборник задач по электродинамике. М., "Наука", 1970.
4. Л.Г. Гречко и др., Сборник задач по теоретической физике. М., "Высшая школа", 1972.
5. Я.П. Терлецкий, Ю.П.Рыбаков, Электродинамика. М., "Высшая школа", 1980.
6. Е.А.Туров, Материальные уравнения электродинамики, М., "Наука", 1983.
7. М.М.Бредов, В.В.Румянцев, И.Н.Топтыгин, Классическая электродинамика, М., "Наука", 1985.
8. М.И. Рязанов, Электродинамика конденсированного вещества, М., "Наука", 1984.
9. Дж. Джексон, Классическая электродинамика, М., "Мир", 1965.
- 10.Дж. Кронин, Д. Гринберг, В. Телегди, Сборник задач по физике с решениями, "Атомиздат", 1971.
- 11.Мин Чен, Задачи по физике с решениями, М., "Мир", 1978.
- 12.Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц, Теория поля, М., "Наука", 1988.
13. Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., "Наука", 1982.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ 1. Մաթեմատիկական ներածություն	5	47
ԳԼՈՒԽ 2. Էլեկտրադինամիկայի հիմնական օրենքներն ու հավասարումները	14	56
ԳԼՈՒԽ 3. Էլեկտրադինամիկայի մյուսական հավասարումները	21	65
ԳԼՈՒԽ 4. Էլեկտրաստատիկա	29	83
ԳԼՈՒԽ 5. Մագնիսաստատիկա	38	111
ԳԼՈՒԽ 6. Քվադխտապիտմար երևույթներ	43	120
ՀԱՎԵԼՎԱԾ		
1. Էլիպտական ինտեգրալներ		132
2. Բեսելի ֆունկցիաներ		133

**ԷԼԵԿՏՐԱԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ
ՄԱՍ 1**

**Մինչտպագրական աշխատանքները՝ «ԴԱՐ» ՍՊԸ
Հեռ. 274839**

**Տպագրությունը՝ «ԷԴԻԹ-ՊՐԻՆՏ» ՍՊԸ
Տպաքանակ՝ 200**