ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Հաստատված է ՀՀ կրթության և գիտության նախարարության կողմից որպես դասագիրք բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական մասնագիտությունների ուսանողների համար

ԵՐԵՎԱՆԻ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ – 2007

ՀՏԴ 517
ԳՄԴ 22.16
Պ 505

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Խմբագիր՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Վ. Միքայելյան

Գրախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Հ. Մ. Հայրապետյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Հ. Հովհաննիսյան

Պետրոսյան Ա. Ի.

Պ 505 Բազմաչափ կոմպլեքս անալիզի հիմունքները: – Եր.: Երևանի համալս. հրատ., 2007, 194 էջ:

Գիրքը առաջինն է հայերեն լեզվով բազմաչափ կոմպլեքս անալիզից: Այն բաղկացած է չորս գլխից: Առաջին գլուխը նվիրրված է մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների պարզագույն հատկություններին և կարող է օգտակար լինել նաև ոչ մաթեմատիկական մասնագիտացում ստացող ուսանողների համար: Երկրորդ և երրորդ գլուխներում շարադրված են $\mathbb{C}^n$ -ում հոլոմորֆության տիրույթների և նրանց համարժեք հոլոմորֆ ուռուցիկ և պսևդոուռուցիկ տիրույթների հատկությունները: Չորրորդ գլուխը նվիրված է ինտեգրալային ներկայացումներին:

Գիրքը պարունակում է բազմաթիվ խնդիրներ, որոնց լուծումը կնպաստի համապատասխան թեմաների յուրացմանը:

Նախատեսված է համալսարանների մաթեմատիկայի, կիրառական մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի ֆակուլտետների, ինչպես նաև հարակից մասնագիտությունների ուսանողների, ասպիրանտների և գիտաշխատողների համար:

Պ $\dfrac{1602070000}{704(02)07}$ 2007 ԳՄԴ 22.16

ISBN 978-5-8084-0862-3

Բովանդակություն

Նախաբան

Բազմաչափ կոմպլեքս անալիզը (մի քանի կոմպլեքս փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությունը), ի տարբերություն միաչափ դեպքի, մաթեմատիկայի համեմատաբար նոր բնագավառ է:

Չնայած որ այդ տեսության առաջին հետազոտությունները երևան են եկել դեռ Վայերշտրասի և Պուանկարեի աշխատություններում, նրա էական զարգացումը սկսվել է միայն անցյալ դարի 60-ական թվականներին:

Ինչպես հայտնի է, մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հատկություններից շատերը չունեն իրենց նմանակը մեկ փոփոխականի դեպքում: Դա բացատրվում է նրանով, որ մի քանի փոփոխականի դեպքում Կոշի-Ռիմանի պայմանները կազմում են դիֆերենցիալ հավասարումների գերորոշված համակարգ: Այնպես որ, բազմաչափ կոմպլեքս անալիզի հասկացություններն ու խնդիրները հիմնականում չեն հանդիսանում միաչափ դեպքի ուղղակի ընդհանրացում, այլ ունեն յուրահատուկ դրվածք, որը մեկ փոփոխականի համար կամ անիմաստ է, կամ պարզունակ:

Մեկ փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիաների տեսությունը Հայաստանում բավականին զարգացած է և հայտնի է իր հետազոտություններով և արդյունքներով: Բազմաչափ կոմպլեքս անալիզը, լինելով մաթեմատիկայի համեմատաբար նոր բնագավառ, առավել զարգանալու միտում ունի: Հուսով եմ, որ սույն գիրքը կունենա իր նշանակությունը այդ գործում:

Այս դասընթացը հեղինակը տարիներ շարունակ դասավանդել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ուսանողների և որակավորման բարձրացման ֆակուլտետի ունկնդիրների համար: Նրա բովանդակությունը համապատասխանում է մաթեմատիկայի ֆակուլտետում դասավանդվող «բազմաչափ կոմպլեքս անա լիզ» առարկայի ծրագրին:

Հեղինակը իր խորին շնորհակալությունն է հայտնում ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Մ. Ա. Մկրտչյանին սույն գրքի վերաբերյալ դիտողությունների, օգտակար խորհուրդների համար, և ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Գ. Վ. Միքայելյանին գիրքը խմբագրելու համար:

Գ Լ Ո Ւ Խ I

ՀՈԼՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§ 1. Կոմպլեքս տարածություն

1. $\mathbb{C}^n$ տարածությունը: $\mathbb{C}^n$-ով նշանակվում է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության n-պատիկ դեկարտյան արտադրյալը՝

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n}:$$

$\mathbb{C}^n$-ի կետերը n կոմպլեքս թվերի կարգավորված n-յակներ են՝ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$: Այդ տարածությունում բնական ձևով ներմուծվում է գծային կառուցվածք կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա, մասնավորապես, $\mathbb{C}^1 = \mathbb{C}$: $\mathbb{C}^n$-ը կարելի է նույնացնել $\mathbb{R}^{2n}$-ի հետ, որը բաղկացած է $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ կետերից և որի վրա ներմուծված է կոմպլեքս կառուցվածք, այսինքն տրված է՝ $z_k = x_k + ix_{n+k}$, $k = 1, \ldots, n$: Օգտագործելու ենք նաև $x_{n+k} = y_k$ նշանակումը, այնպես որ $z_k = x_k + iy_k$:

2. Հարթություններ $\mathbb{C}^n$-ում: Կոմպլեքս կառուցվածքի ներմուծումը $\mathbb{C}^n$ տարածությունում առաջ է բերում անհամաչափություն, օրինակ, x_1 և x_{n+1} կոորդինատները կազմում են կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ մասեր, իսկ x_1-ն ու x_n-ը՝ ոչ: Դրա հետևանքով $\mathbb{C}^n$ տարածության հարթությունների մեջ խախտվում է հավասարազորությունը:

Դիտարկենք $2m$-չափանի հարթություն՝

$$S = \left\{x\colon \ \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{ik} x_k = \beta_i, \ i = 1, \ldots, 2n-2m\right\}, \tag{1.1}$$

որտեղ α_{ik} և β_i-երը իրական թվեր են և $\operatorname{rang}\|\alpha_{ik}\| = 2n - 2m$: (1.1)-ի աջ մասում մասնակցող հավասարումները գրենք կոմպլեքս կոորդինատների տեսքով, տեղադրելով նրանց մեջ $x_k = \frac{1}{2}(z_k + \bar{z}_k)$ և $x_{n+k} = \frac{1}{2i}(z_k - \bar{z}_k)$: Կստանանք՝

$$S = \left\{ z\colon\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k + a'_{ik} \bar{z}_k = b_i,\ i = 1, \ldots, n-m \right\}, \tag{1.2}$$

որտեղ a_{ik}, a'_{ik} և b_i-երը կոմպլեքս թվեր են:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1.1. S հարթությունը կոչվում է *կոմպլեքս հարթություն*, եթե (1.2)-ի մեջ բացակայում են $\bar{z}_k$ փոփոխականները, այսինքն՝ $a'_{ik} = 0$. m թիվը համարվում է նրա *կոմպլեքս չափողականությունը*:

Հենց դրանք են $\mathbb{C}^n$ տարածության «իսկական» հարթությունները: Ոչ կոմպլեքս հարթության օրինակներ կարող են ծառայել իրական $\mathbb{R}^n_x$ (կեղծ $\mathbb{R}^n_y$) n չափանի հարթությունները, որոնք փռված են իրական (համապատասխանաբար՝ կեղծ) առանցքների վրա:

Կոմպլեքս միաչափ հարթությունը անվանում են նաև *կոմպլեքս ուղիղ*, իսկ $(n-1)$-չափանի հարթությունը՝ *կոմպլեքս հիպերհարթություն*:

z^0 կետով անցնող կոմպլեքս ուղիղը կարելի է տալ երեք տարբեր ձևերով.

1. հավասարումների համակարգով՝

$$S = \left\{ z\colon\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(z_k - z_k^0) = 0,\ i = 1, \ldots, n-1 \right\},$$
$$\operatorname{rang}\|a_{ik}\| = n - 1,$$

2. պարամետրական տեսքով՝

$$S = \left\{ z\colon\ z_k = z_k^0 + a_k \zeta,\ \ \zeta \in \mathbb{C},\ \ k = 1, \ldots, n \right\},$$

3. կանոնական հավասարումներով՝

$$S = \left\{ z : \ \frac{z_1 - z_1^0}{a_1} = \cdots = \frac{z_n - z_n^0}{a_n} \right\} :$$

Վ ա ր ժ ու թ յ ու ն 1.1. Ցույց տալ, որ $\mathbb{C}^n$ տարածության կամայական երկու կետով անցնում է միակ կոմպլեքս ուղիղ:

3. Մետրիկա: $\mathbb{C}^n$-ում *էրմիտյան սկալյար արտադրյալ* է կոչվում

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{w}_k, \tag{1.3}$$

որը ակնհայտորեն բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}, \qquad \langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$$

կամայական $\lambda \in \mathbb{C}$ թվի համար: Դիցուք $z_k = x_k + i x_{n+k}$ և $w_k = u_k + i u_{n+k}$: (1.3)-ից ստանում ենք

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^{2n} x_k u_k + i \sum_{k=1}^{2n} x_{n+k} u_k - x_k u_{n+k},$$

որտեղից երևում է, որ էրմիտյան սկալյար արտադրյալի $\mathrm{Re}\,\langle z, w \rangle$ իրական մասը z և w վեկտորների էվկլիդյան սկալյար արտադրյալն է $\mathbb{R}^{2n}$ տարածության մեջ:

Էրմիտյան սկալյար արտադրյալով առաջացած

$$|z|^2 = \langle z, z \rangle = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{2n} x_k^2$$

նորմը հանդիսանում է z վեկտորի երկարությունը $\mathbb{R}^{2n}$-ում: Ուրեմն, համապատասխան մետրիկան՝

$$\rho(z, w) = |z - w| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|^2}$$

համընկնում է $\mathbb{R}^{2n}$-ում սովորական *էվկլիդյան մետրիկայի* հետ:

$\mathbb{C}^n$ փարածությունում երբեմն դիտարկում են նաև

$$\delta(z,w) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |z_k - w_k|$$

մետրիկան, որը կոչվում է *պոլիդիսկային մետրիկա*:

4. Պարզագույն փիրույթներ: Դիտարկենք պարզագույն փիրույթ-ները $\mathbb{C}^n$-ում:

1. Գ ու ն դ ը ($a \in \mathbb{C}^n$ կենտրոնով և r շառավղով)

$$B(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z-a| < r\}$$

բազմությունն է: Դա սովորական $2n$ չափանի գունդ է $\mathbb{R}^{2n}$ փարածու-թյան մեջ: Նրա $S(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z-a| = r\}$ եզրը $2n-1$ չափանի գնդոլորտ է:

2. Պ ո լ ի դ ի ս կ ը ($a \in \mathbb{C}^n$ կենտրոնով և $r = (r_1, \ldots, r_n)$ բազմաշառավղով)

$$U(a,r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - a_j| < r_j,\ \ j = 1, \ldots, n\}$$

բազմությունն է: Դա հարթության վրա a_j կենտրոնով և r_j շառավղով սովորական շրջանների դեկարտյան արտադրյալ է: Պոլիդիսկի ∂U եզրը բնական ձևով տրոհվում է

$$\Gamma_k = \{z\colon\ |z_k - a_k| = r_k,\ \ |z_j - a_j| \leqslant r_j,\ \ j \neq k\}$$

բազմությունների, որոնցից յուրաքանչյուրը $2n-1$ չափանի է և $\partial U = \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$: Այդ բազմությունների $\Gamma = \bigcap_{k=1}^{n} \Gamma_k$ ընդհանուր մասը, որի չափողականությունը n է, կոչվում է պոլիդիսկի *հենք* (*остов*): $n > 1$ դեպքում հենքը կազմում է փիրույթի եզրի մի փոքր մասը, սակայն շատ հարցերում նա կատարում էական դեր:

3. Բ ա զ մ ա գ լ ա ն կոչվում է հարթ տիրույթների դեկարտյան արտադրյալը, այսինքն՝

$$D = D_1 \times \cdots \times D_n, \quad D_j \subset \mathbb{C}, \;\; j = 1, \ldots, n :$$

Մասնավորապես, եթե D_k-երը շրջաններ են, ստանում ենք պոլիդիսկ:

4. Ռ ե յ ն հ ա ր տ ի տ ի ր ու յ թ ն ե ր (կամ n-շրջանաձև տիրույթներ), որոնց կենտրոնը $a \in \mathbb{C}^n$ կետն է. դրանք այն տիրույթներն են, որոնք ամեն մի $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ կետի հետ մեկտեղ պարունակում են նաև

$$z = \Big(a_1 + (z_1^0 - a_1)e^{i\theta_1}, \ldots, a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta_n}\Big), \; 0 \leqslant \theta_j \leqslant 2\pi$$

տեսքի բոլոր կետերը: Այսինքն,

$$z^0 \in D \Rightarrow \big\{z\colon \; |z_k - a_k| = |z_k^0 - a_k|, \;\; k = 1, \ldots, n\big\} \subset D :$$

D-ն կոչվում է *լրիվ Ռեյնհարտի տիրույթ*, եթե

$$z^0 \in D \Rightarrow \big\{z\colon \; |z_k - a_k| \leqslant |z_k^0 - a_k|, \;\; k = 1, \ldots, n\big\} \subset D :$$

Եթե $a = 0$, ապա ստացվում են 0 կենտրոնով Ռեյնհարտի տիրույթներ. դրանք ամեն մի $z = (z_1, \ldots, z_n)$ կետի հետ մեկտեղ պարունակում են բոլոր այն կետերը, որոնց համար $|z_k|$-երը նույնն են, իսկ արգումենտները կամայական են, այսինքն, այդպիսի տիրույթները լիովին որոշվում են իրենց պատկանող կետերի մոդուլներով: Այդ պատճառով նրանց ուսումնասիրությունը կարելի է կապարել $\mathbb{R}^n$ տարածության $\mathbb{R}_+^n = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+}_{n}$ դրական օկտանտում, կապարելով $z \mapsto r(z) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$ արտապատկերումը: D տիրույթի պատկերն այդ արտապատկերման ժամանակ կոչվում է *Ռեյնհարտի դիագրամ* և նշանակվում է $|D|$-ով: Քանի որ $|D|$-ի չափողականությունը երկու անգամ փոքր է D-ի չափողականությունից, ապա $n = 2$ և $n = 3$ դեպքերում Ռեյնհարտի դիագրամը տալիս է ակներև պատկերացում տիրույթի մասին:

Ռեյնհարտի փիրույթների պարզագույն օրինակներ կարող են ծառայել գունդը և պոլիդիսկը:

Հետագայում մենք կտեսնենք, որ Ռեյնհարտի փիրույթները սերտորեն կապված են աստիճանային շարքերի հետ:

5. Շ ր ջ ա ն ա ձ և փ ի ր ու յ թ ն ե ր, որոնց կենտրոնը $a \in \mathbb{C}^n$ կետն է. դրանք այն փիրույթներն են, որոնք ամեն մի z^0 կետի հետ մեկտեղ պարունակում են նաև

$$z = a + (z^0 - a)e^{i\theta} = \Big(a_1 + (z_1^0 - a_1)e^{i\theta}, \ldots, a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta}\Big)$$

տեսքի բոլոր կետերը: Ակնհայտ է, որ Ռեյնհարտի փիրույթը շրջանաձև է: Հակառակը ճիշտ չէ (տես խնդիր 1.8-ը): Շրջանաձև փիրույթները կապված են համասեռ բազմանդամներից կազմված շարքերի հետ:

6. Հ ա ր տ ո գ ս ի փ ի ր ու յ թ ն ե ր: Նշանակենք $\widetilde{z} = (z_1, \cdots, z_{n-1})$, այնպես որ $z = (\widetilde{z}, z_n)$: $G \subset \mathbb{C}^n$ փիրույթը կոչվում է *Հարտոգսի փիրույթ* $z_n = a_n$ *համաչափության հարթությամբ*, եթե $z^* \in G$ պայմանից հետևում է, որ $\{(\widetilde{z}^*, z_n)\colon\ |z_n - a_n| = |z_n^* - a_n|\}$ շրջանագիծը ևս պատկանում է G-ին: Հարտոգսի փիրույթը կոչվում է *լրիվ*, եթե նրան պատկանում է ամբողջ $\{(\widetilde{z}^*, z_n)\colon\ |z_n - a_n| \leqslant |z_n^* - a_n|\}$ շրջանը:

Հարտոգսի փիրույթները կազմում են ավելի լայն դաս, քան n-շրջանաձև փիրույթները. նրանցից շրջանաձև լինելու հատկությունը պահանջվում է միայն ըստ մեկ (տվյալ դեպքում՝ վերջին) փոփոխականի: $n = 2$ դեպքում Հարտոգսի փիրույթներն անվանում են նաև *կիսաշրջանաձև*: Հարտոգսի փիրույթը միարժեքորեն որոշվում է իր պատկերով (*Հարտոգսի դիագրամ*) $z \mapsto (\widetilde{z}, |z_n|)$ արտապատկերման ժամանակ և նշանակվում է $|G$: Հարտոգսի դիագրամը $n = 2$ դեպքում տալիս է ակներև պատկերացում փիրույթի մասին, որովհետև նա գտնվում է եռաչափ փարածությունում: Այդ հանգամանքը երբեմն օգնում է խնդիրներ լուծելիս: Պարզության համար հետագայում դիտարկելու ենք Հարտոգսի փիրույթներ, որոնց համաչափության հարթությունը $a_n = 0$ հարթությունն է:

Հարտոգսի լրիվ տիրույթի համար սահմանենք $R(\widetilde{z}) = \sup R$, որտեղ Supremum-ը վերցված է ըստ բոլոր այն R-երի, որոնց համար բավարարվում է $\{(\widetilde{z}, z_n)\colon\ |z_n| \leqslant R\} \subset G$ պայմանը: $R(\widetilde{z})$-ը կոչվում է *Հարտոգսի շառավիղ*, նրա միջոցով Հարտոգսի տիրույթը ներկայացվում է

$$G = \Big\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \widetilde{z} \in \widetilde{G},\ |z_n| < R(\widetilde{z})\Big\}$$

տեսքով, որտեղ $\widetilde{G}$-ով նշանակված է G-ի պրոյեկցիան $\mathbb{C}^{n-1}_{\widetilde{z}}$ ենթատարածության վրա:

Հարտոգսի տիրույթների նկատմամբ հետաքրքրությունը պայմանավորված է նրանով, որ նրանք Հարտոգսի շարքերի համար զուգամիտության տիրույթներ են:

7. Խ ո ղ ո վ ա կ ա ձ և տ ի ր ո ւ յ թ ն ե ր : $T \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը կոչվում է խողովակաձև, եթե ամեն մի z^0 կետի հետ մեկտեղ նա պարունակում է հետևյալ տեսքի կամայական կետ՝

$$z = (z_1^0 + iy_1, \ldots, z_n^0 + iy_n), \quad -\infty < y_j < \infty, \quad j = 1, \ldots, n\ :$$

Խողովակաձև տիրույթը կարելի է ներկայացնել $T = B \times \mathbb{R}^n_y$ տեսքով, որտեղ B-ն $\mathbb{R}^n_x$ իրական տարածության ինչ-որ տիրույթ է (խողովակաձև տիրույթի *հիմք*): Ակնհայտ է, որ խողովակաձև տիրույթը լիովին որոշվում է իր հիմքով:

Հաճախակի օգտագործվում է նաև հետևյալ գրելաձևը՝

$$T = B + i\mathbb{R}^n_y = x + iy\colon\ x \in B \subset \mathbb{R}^n_x,\ y \in \mathbb{R}^n_y\ :$$

Միաչափ դեպքում խողովակաձև տիրույթները կլինեն

$$\{(x, y)\colon\ a < x < b,\ -\infty < y < \infty\}$$

շերտերը, ինչպես նաև $\{(x, y)\colon\ x > a\}$ և $\{(x, y)\colon\ x < a\}$ կիսահարթությունները:

Նշենք, որ $\varphi\colon\ z_k \mapsto e^{z_k},\ k = 1, \ldots, n$ արտապատկերումը ձևափոխում է T խողովակաձև տիրույթը $D = \varphi \circ T$ Ռեյնհարտի տիրույթի, ընդ որում B հիմքին համապատասխանում է $|D|$ Ռեյնհարտի դիա–գրամը:

8. Գ ծ ո ր ե ն ու ռ ու ց ի կ փ ի ր ու յ թ ն ե ր : Ուռուցիկ փիրույթի սահմանումներից մեկը հետևյալն է՝ $D \subset \mathbb{R}^n$ *փիրույթը կոչվում է ուռուցիկ, եթե ամեն մի եզրային x^0 կետի համար գոյություն ունի այդ կետով անցնող և փիրույթի հետ չհատվող հիպերհարթություն (հենման հիպերհարթություն)*: Այս սահմանման մեջ հիպերհարթու–թյունների փոխարեն կարելի է վերցնել ավելի ցածր չափողականու–թյուն (օրինակ, $n-2$) ունեցող հարթություններ, և ստացված փիրույթ–ների դասը կլինի ավելի լայն, քան սովորական ուռուցիկ փիրույթների դասը: Այս դատողությունները կիրառելի են նաև $\mathbb{C}^n$-ում:

$D \subset \mathbb{C}^n$ փիրույթը կոչվում է *գծորեն ուռուցիկ*, եթե ամեն մի եզրային z^0 կետի համար գոյություն ունի այդ կետով անցնող և փի–րույթի հետ չհատվող կոմպլեքս հիպերհարթություն:

§ 2. Աստիճանային շարքեր

1. Զուգամիտության փիրույթ: Նշանակենք $\mathbb{Z}$-ով ամբողջ թվերի բազմությունը, $\mathbb{Z}_+$-ով՝ ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունը, $\mathbb{Z}^n$-ով՝ $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_i \in \mathbb{Z}$ *մուլտիինդեքսների* բազմությունը և $\mathbb{Z}^n_+$-ով՝ այն k-երն $\mathbb{Z}^n$-ից, որոնց համար $k_i \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leqslant i \leqslant n$: Ամեն մի $z \in \mathbb{C}^n$ կետի և k մուլտիինդեքսի համար նշանակենք՝

$$z^k = z_1^{k_1}\, z_2^{k_2}\, \cdots\, z_n^{k_n},$$

$$k! = k_1!\, k_2!\, \cdots\, k_n!,$$

$$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n :$$

Բազմապատիկ աստիճանային (կամ պարզապես աստիճանային) շարք կոչվում է հետևյալ տեսքի շարքը՝

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \left(z - z^0\right)^k, \tag{1.4}$$

որտեղ $z, z^0 \in \mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$: Պարզության համար, ինչպես կանոն, մենք քննարկելու ենք $z^0 = 0$ դեպքը, այսինքն, (1.4) շարքի փոխարեն դիտարկվելու է

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1.5}$$

տեսքի շարքը:

Ինչ-որ ձևով համարակալենք (1.5) բազմապատիկ շարքի անդամները և դիտարկենք ստացված սովորական շարքը: Նրա համար սահմանված են զուգամիտության և գումարի գաղափարները, որոնք, սակայն, կախված են համարակալման եղանակից: Երբ որևէ ձևով համարակալված շարքը զուգամիտում է բացարձակ, ապա զուգամիտությունը կախված չէ համարակալման եղանակից և բնական է նրա գումարը ընդունել որպես բազմապատիկ շարքի գումար: Այսուհետև (1.5) շարքի զուգամիտության մասին խոսելիս մենք նկատի ենք ունենալու բացարձակ զուգամիտությունը:

Դիցուք G-ն այն բոլոր կետերի բազմությունն է, որտեղ զուգամիտում է (1.5) շարքը: Նրա ներքին կետերի G° բազմությունը կոչվում է շարքի *զուգամիտության տիրույթ*: Մեր մոտակա նպատակն է՝ նկարագրել զուգամիտության տիրույթը:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, միշտ չէ, որ G-ն G°-ի և նրա եզրի ինչ-որ ենթաբազմության միավորում է:

Օրինակ 1.1. Հետևյալ շարքի՝

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1+1} z_2^{k_2} = \frac{z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}$$

զուգամիտության բազմությունը միավոր բիդիսկն է, որը լրացված է $\{z_1 = 0\}$ կոմպլեքս ուղղով:

Բազմապատիկ աստիճանային շարքերի, ինչպես և միապատիկների համար, տեղի ունի Աբելի թեորեմը:

Թ ե ո ր ե մ 1.1 (Աբել). *Եթե G°-ն (1.5) շարքի զուգամիտության տիրույթն է և $\zeta \in G^0$, ապա*

$$\{z\colon\ |z_k| \leqslant |\zeta_k|,\ k = 1, \ldots, n\}$$

փակ պոլիդիսկը ևս պատկանում է G^0-ին:

Ա պ ա ց ու յ ց: Բխում է

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k|\,|z^k| \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k|\,|\zeta^k| < \infty$$

անհավասարությունից: □

Աբելի թեորեմից հետևում է, որ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը լրիվ Ռեյնհարտի տիրույթ է:

Մենք կտեսնենք, որ այդ տիրույթները ունեն ևս մի պարզ երկրաչափական հատկություն՝ նրանք ինչ-որ իմաստով ուռուցիկ են: Հիշեցնենք, որ E բազմությունը կոչվում է ուռուցիկ, եթե կամայական x' և x'' կետերի հետ մեկտեղ նրան պատկանում է նաև այդ կետերը միացնող $\{x\colon\ x = tx' + (1-t)x'',\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ հատվածը:

Դիցուք D-ն Ռեյնհարտի տիրույթ է: Նշանակենք $\ln|D|$-ով $|D|$ բազմության պատկերը $|z| \mapsto \ln|z| = (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|)$ արտապատկերման ժամանակ:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1.2. Ռեյնհարտի D տիրույթը կոչվում է լոգարիթմորեն ուռուցիկ, եթե ուռուցիկ է $\ln|D|$ տիրույթը:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1.3. Ռեյնհարտի D տիրույթի լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ թաղանթ անվանենք ամենափոքր լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ Ռեյնհարտի տիրույթը, որը պարունակում է D-ն:

Թ ե ո ր ե մ 1.2. *Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ Ռեյնհարտի տիրույթ է:*

Ապացույց: Դիցուք $z', z'' \in G$, որտեղ G-ն (1.5) շարքի զուգամիտության բազմությունն է: Այդ դեպքում

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||z'|^k < \infty, \qquad \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||z''|^k < \infty : \tag{1.6}$$

Դիցուք $\ln|z| = t\ln|z'| + (1-t)\ln|z''|$, $0 < t < 1$, այսինքն $|z| = |z'|^t\,|z''|^{1-t}$: Քանի որ կամայական $A > 0$ և $B > 0$ թվերի համար

$$A^tB^{1-t} \leqslant (A+B)^t(A+B)^{1-t} = A+B \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

ապա, հաշվի առնելով (1.6)-ը, կստանանք՝

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||z^k| = \sum_{|k|=0}^{\infty} \Big(|a_k||z'|^k\Big)^t \Big(|a_k||z''|^k\Big)^{1-t} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||z'|^k + \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k||z''|^k < \infty :$$

Ուրեմն, $\ln|z| = t\ln|z'| + (1-t)\ln|z''|$ կետը, այսինքն $\ln|z'|$ և $\ln|z''|$ ծայրակետերով հատվածի կամայական կետ, պատկանում է $\ln|G|$ բազմությանը: Դա նշանակում է, որ $\ln|G|$ բազմությունը ուռուցիկ է և, ուրեմն, $\ln|G^0|$-ն ուռուցիկ տիրույթ է: □

Հետևանք 1.1. *Եթե (1.5) շարքը զուգամիտում է Ռեյնհարտի D տիրույթում, ապա նա զուգամիտում է նաև D-ի լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ թաղանթի վրա:*

Օրինակ 1.2. Եթե $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ շարքը զուգամիտում է

$$\{z\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < \infty\} \bigcup \{z\colon\ |z_1| < \infty,\ |z_2| < 1\}$$

բազմության վրա, ապա այն զուգամիտում է նաև ամբողջ $\mathbb{C}^2$-ում:

Պարզվում է, ճիշտ է նաև հակառակը՝ *ամեն մի լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ Ռեյնհարտի տիրույթ ինչ-որ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթ է*: Այս փաստի ապացույցը կբերենք երրորդ գլխում:

2. Գործակիցների գնահատում: Սովորական (միապատիկ) աստիճանային շարքերի դեպքում հայտնի են Կոշիի անհավասարությունները գործակիցների համար. *Եթե* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j z_1^j$ *շարքը զուգամետ է* $|z_1| < r_1$ *շրջանում և նրա գումարի մոդուլը սահմանափակ է* M *թվով, ապա*

$$|a_j| \leqslant \frac{M}{r_1^j} : \tag{1.7}$$

Նման պնդում տեղի ունի նաև բազմապատիկ շարքերի համար:

Թ ե ո ր ե մ 1.3. *Դիցուք* (1.5) *շարքը զուգամետ է* $U(0,r)$ *պոլիդիսկում և*

$$\left|\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z_k\right| \leqslant M, \qquad \forall\, z \in U(0,r) : \tag{1.8}$$

Այդ դեպքում՝

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{r^k}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n : \tag{1.9}$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Խմբավորելով (1.5) շարքի անդամներն ըստ առանձին փոփոխականների (դա կարելի է անել շնորհիվ բացարձակ զուգամիտության), կստանանք հաջորդական շարք.

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z_k = \sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_k z_n^{k_n} :$$

Յուրաքանչյուր ստացված շարքի նկատմամբ հաջորդաբար կիրառելով (1.7) Կոշիի անհավասարությունները, ստանում ենք՝

$$\left|\sum_{k_2=0}^{\infty} z_2^{k_2} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_k z_n^{k_n}\right| \leqslant \frac{M}{r_1^{k_1}},$$

$$\left|\sum_{k_3=0}^{\infty} z_3^{k_3} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} a_k z_n^{k_n}\right| \leqslant \frac{M}{r_1^{k_1}\, r_2^{k_2}},$$

. . . .

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}} = \frac{M}{r^k}: \qquad \square$$

Գործակիցների համար (1.9) գնահատականները կարելի է ճշգրտել:

Թ ե ո ր ե մ 1.4. *Դիցուք (1.5) շարքը զուգամետ է D սահմանափակ Ռեյնհարտի լրիվ տիրույթում և բավարարում է (1.8) պայմանին: Այդ դեպքում տեղի ունեն հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{d_k(D)}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \textit{որտեղ}\ \ d_k(D) = \sup_{z\in D}\left|z^k\right|:$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Տիրույթի լրիվության պայմանից հետևում է, որ նա անվերջ քանակով $U(0,r)$ պոլիդիսկերի միավորում է: Ըստ նախորդ թեորեմի, ամեն մի այդպիսի պոլիդիսկի համար տեղի ունեն Կոշիի $|a_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$ անհավասարությունները: Ֆիքսած k-ի համար այդ անհավասարություններից ընտրենք լավագույնը՝

$$|a_k| \leqslant \inf_{r\in|D|}\frac{M}{r^k} = \frac{M}{\sup\limits_{r\in|D|} r^k} = \frac{M}{d_k(D)}: \qquad \square$$

Աստիճանային շարքի հատկություններն ուսումնասիրելիս $d_k(D)$ մեծությունները կատարում են կարևոր դեր: Որպես վարժություն առաջարկում ենք ապացուցել նրանց հետևյալ պարզ հատկությունները:

1. Եթե $D_1 \subset D_2$, ապա $d_k(D_1) \leqslant d_k(D_2)$:
2. Եթե $\rho D = D_\rho$-ն D տիրույթի ρ գործակցով նմանադրությունն է 0 կետի նկատմամբ, ապա $d_k(D_\rho) = \rho^{|k|} d_k(D)$:
3. $d_{kj}(D) = [d_k(D)]^j$, որտեղ j-ն ամբողջ և ոչ բացասական թիվ է:

Կասենք, որ D_0 տիրույթը *կոմպակտորեն* ընկած է D-ի մեջ և կգրենք $D_0 \Subset D$, եթե D_0-ն սահմանափակ է և $\overline{D}_0 \subset D$:

Լ ե մ մ ա 1.1. Դիցուք (1.5) *շարքը զուգամետ է D Ռեյնհարտի լրիվ տիրույթում և $D_0 \Subset D$: Այդ դեպքում $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} |a_k| d_k(D_0)$ թվային շարքը զուգամետ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Նշանակենք D_1-ով D_0-ն պարունակող ամենափոքր լրիվ n-շրջանաձև տիրույթը: Քանի որ D_0-ն լրիվ է, ապա $D_1 \Subset D$: Ուրեմն գոյություն ունի $\rho > 1$ թիվ այնպիսին, որ $(D_1)_\rho = D_2 \Subset D$, որտեղ $(D_1)_\rho$-ը D_1 տիրույթի նմանադրությունն է: (1.5) շարքի գումարը անընդհատ է $\overline{D}_2$-ի վրա և, ուրեմն, սահմանափակ է ինչ-որ M թվով: Կիրառելով թեորեմ 1.4-ը, կստանանք՝

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{d_k(D_2)},$$

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| d_k(D_0) \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| d_k(D_1) \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{d_k(D_1)}{d_k(D_2)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{d_k(D_1)}{\rho^{|k|} d_k(D_1)} = M \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{|k|}} < \infty : \qquad \square$$

Թ ե ո ր ե մ 1.5. Որպեսզի (1.5) *շարքը զուգամիտի սահմանափակ Ռեյնհարտի լրիվ D տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k d_k(D) z^k \tag{1.10}$$

շարքը զուգամիտի U միավոր պոլիդիսկում:

Ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ու թ յ ու ն: Վերցնենք ρ թիվ, $0 < \rho < 1$ և համապատասխան $D_\rho \Subset D$ տիրույթը: Ըստ լեմմա 1.1-ի

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| d_k(D_\rho) = \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| \rho^{|k|} d_k(D) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{|k|=m} |a_k| d_k(D) \right] \rho^{|k|} \tag{1.11}$$

թվային շարքը զուգամետ է: Ակնհայտ է, որ (1.11)-ի աջ մասը (1.10) շարքի հետքն է միավոր պոլիդիսկի անկյունագծի վրա: Ըստ Աբելի թեորեմի, (1.10) շարքը զուգամետ է ամբողջ պոլիդիսկում:

Բ ա վ ա ր ա ր ո ւ թ յ ո ւ ն: Եթե (1.10) շարքը զուգամետ է ամբողջ U պոլիդիսկում, ապա այն զուգամետ է նաև

$$\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_1| = \cdots = |z_n| = \rho, \ 0 < \rho < 1\}$$

անկյունագծի վրա: Հետևաբար, զուգամետ է (1.11) թվային շարքը: Այստեղից հետևում է (1.5) շարքի զուգամիտությունը D_ρ-ում, որովհետև երբ $z \in D_\rho$, ապա

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k z^k| \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| \sup_{z \in D_\rho} \left| z^k \right| = \sum_{|k|=0}^{\infty} |a_k| d_k(D_\rho) < \infty :$$

Քանի որ $\rho \in (0,1)$ կամայական է, ուրեմն (1.5) շարքը զուգամետ է D-ում: $\square$

Այժմ ներմուծենք մեկ փոփոխականի դեպքում զուգամիտության շառավղի բազմաչափ նմանակը:

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ 1.4. $r_1, \ldots, r_n$ թվերը, որտեղ $r_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, կոչվում են *զուգամիտության համալուծ շառավիղներ* (1.5) շարքի համար, եթե այդ շարքը զուգամիտում է $U(0,r)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ պոլիդիսկում և չի զուգամիտում ոչ մի ուրիշ պոլիդիսկում, որը պարունակում է $\overline{U(0,r)}$-ը:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, որտեղ զուգամիտության շառավիղը որոշվում է միարժեք, բազմաչափ դեպքում համալուծ շառավիղները որոշվում են ոչ միարժեք: Օրինակ, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (z_1 z_2)^m$ շարքի զուգամիտության համալուծ շառավիղները կապված են $r_1 r_2 = 1$ հավասարությամբ:

Համալուծ շառավիղների համար գոյություն ունի Կոշի-Հադամարի բանաձևի նմանակը:

Թ ե ո ր ե մ 1.6. (1.5) *շարքի զուգամիտության համալուծ շառավիղները բավարարում են հետևյալ առնչությանը՝*

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}} \sqrt[|k|]{|a_k| r^k} = 1 : \tag{1.12}$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Տեղադրելով շարքի մեջ $z = r\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$ և վերախմբավորելով նրա անդամները, կստանանք՝

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{|m|=0}^{\infty} a_m r^m \zeta^{|m|} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{|m|=k} a_m r^m \right] \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k : \tag{1.13}$$

Քանի որ (1.5) շարքի համար $r_1, \ldots, r_n$ թվերը համալուծ շառավիղներ են, ապա

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{|m|=0}^{\infty} a_m (r\zeta)^m$$

շարքը զուգամետ է, երբ $|\zeta| < 1$ և տարամետ է, երբ $\zeta > 1$: Ըստ Կոշի-Հադամարի բանաձևի, (1.13)-ից կստանանք՝

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sum_{|m|=k} a_m r^m} = 1, \tag{1.14}$$

ընդ որում այդ հավասարությունը անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $r_1, \ldots, r_n$ թվերը լինեն զուգամիտության համալուծ շառավիղներ: Մնում է ցույց տալ, որ վերին սահմանները (1.12)-ում և (1.14)-ում իրար հավասար են: Դա միանգամից երևում է հետևյալ անհավասարություններից՝

$$|a_{m'}| \leqslant \sum_{|m|=k} a_m r^m \leqslant \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\, k!} |a_{m'}| r^{m'},$$

որտեղ m' ինդեքսին համապատասխանում է $|a_m|r^m$ տեսքի ամենամեծ գումարելին, երբ $|m| = k$, իսկ $\dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}$ թիվը գումարելիների ընդհանուր քանակն է: □

Նկատենք, որ (1.12)-ը կարելի է գրել $\Phi(r_1, \ldots, r_n) = 0$ հարաբերակցության տեսքով, որն իրենից ներկայացնում է շարքի զուգամիտության տիրույթի Ռեյնհարտի դիագրամի եզրի հավասարումը:

§ 3. Հոլոմորֆ ֆունկցիայի սահմանումը

Ս ա հ մ ա ն ո ւ մ 1.5. Կոմպլեքսարժեք f ֆունկցիան կոչվում է *հոլոմորֆ* կամ *անալիտիկ* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում, եթե

(ա) f-ը անընդհատ է Ω-ում,

(բ) f-ը հոլոմորֆ է ըստ ամեն մի փոփոխականի:

Ավելի ճշգրիտ (բ) պայմանը նշանակում է հետևյալը՝ եթե $z \in \Omega$ և $1 \leqslant k \leqslant n$, ապա

$$f_k(\zeta) = f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \zeta, z_{k+1}, \ldots, z_n)$$

մեկ փոփոխականի ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ ζ-ի $\mathbb{C}$ հարթության վրա զրո կետի որևէ շրջակայքում: Հեշտ է այն հանգամանքը, որ (բ) պայմանից հետևում է (ա)-ն:

Թ ե ո ր ե մ 1.7 (Հարտոգս). *Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթի բոլոր կետերում, ապա նա հոլոմորֆ է D-ում:*

Այդ թեորեմի ապացույցը մենք չենք բերի այն պատճառով, որ մինչև հիմա չկա համեմատաբար մատչելի ապացույց: Նկատենք, որ Հարտոգսի թեորեմի նմանակը իրական փոփոխականների համար ճիշտ չէ:

Օ ր ի ն ա կ 1.3. Հետևյալ ֆունկցիան

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{երբ } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{երբ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

անվերջ դիֆերենցելի է ըստ x-ի ֆիքսած y-ի դեպքում և հակառակը, բայց նույնիսկ անընդհատ չէ $(0,0)$ կետում:

Հոլոմորֆության գաղափարը սահմանվում է նաև կամայական բազմության վրա. *f-ը կոչվում է հոլոմորֆ K բազմության վրա, եթե նա հոլոմորֆ է K-ի ինչ-որ բաց շրջակայքում*: Բերված պայմանը չի կարելի փոխարինել հոլոմորֆությամբ K-ին պատկանող յուրաքանչյուր կետում: Այդ նրբությունը լավ երևում է հետևյալ օրինակից:

Օ ր ի ն ա կ 1.4. Դիցուք $K \subset \mathbb{C}^2$ բազմությունը կազմված է $B_1 = \{z\colon\ |z-(0,1)| \leqslant 1/2\}$ և $B_2 = \{z\colon\ |z+(0,1)| \leqslant 1/2\}$ փակ գնդերից ու դրանք միացնող $L = \{z\colon\ z_1 = 0,\ z_2 = x_2,\ |x_2| \leqslant 1/2\}$ հատվածից: K-ի վրա որոշենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$f(z) = \begin{cases} z_1, & \text{երբ } z \in B_1, \\ 0, & \text{երբ } z \in L, \\ -z_1, & \text{երբ } z \in B_2: \end{cases}$$

Ակնհայտորեն, f-ը անընդհատ է K-ի վրա և ամեն մի $z_0 \in K$ կետի համար կարելի է նշել U_{z_0} շրջակայք, ուր f-ը շարունակվում է որպես հոլոմորֆ ֆունկցիա: Իրոք, B_1-ին պատկանող կետերի համար, ներառյալ B_1-ի և L-ի հատման $(0,1/2)$ կետը, որպես U_{z_0} կվերցնենք որևէ գունդ, որը չի հատվում B_2-ի հետ և f-ը կշարունակենք հավասար z_1-ի: B_2-ին պատկանող կետերի համար կկատարենք նման կառուցում, շարունակելով f-ը որպես $-z_1$: Եվ վերջապես, L-ի ներքին կետերի համար կվերցնենք գնդեր, որոնք չեն պարունակում հատվածի ծայրակետերը և f-ը կշարունակենք որպես նույնաբար զրո: Սակայն, միակության թեորեմից, որը մենք կապացուցենք քիչ հետո, հետևում է, որ f-ը հնարավոր չէ շարունակել որպես հոլոմորֆ ֆունկցիա K բազմության որևէ Ω կապակցված շրջակայք: Իրոք, նշված թեորեմից հետևում է, որ Ω-ում գոյություն չունի հոլոմորֆ ֆունկցիա, որը Ω-ին պատկանող մի գնդի վրա հավասար է z_1-ի, իսկ մյուսի վրա՝ $-z_1$-ի:

1. Ֆորմալ ածանցյալներ: Հոլոմորֆության սահմանումից հետևում է, որ $f = u + iv$ ֆունկցիայի համար ըստ ամեն փոփոխականի բավարարվում են Կոշի–Ռիմանի պայմանները.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = \dfrac{\partial v}{\partial y_k}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y_k} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_k}, \qquad k = 1, \ldots, n : \end{cases} \tag{1.15}$$

Կոշի–Ռիմանի պայմանները հարմար է գրել

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right), \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right) : \end{aligned} \tag{1.16}$$

ֆորմալ ածանցյալների միջոցով, որոնք օգտակար են նաև ուրիշ հարցերում: Այդ դեպքում (1.15) $2n$ իրական հավասարումների համակարգը գրվում է որպես n կոմպլեքս հավասարումների համակարգ՝

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n :$$

(1.16)-ում մասնակցող մեծությունները անվանում են ֆորմալ ածանցյալներ նաև այն պատճառով, որ դրանք կարելի է ստանալ ֆորմալ կիրառելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնը՝

$$\frac{\partial f}{\partial z_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial z_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} - i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

և նույն ձևով

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar z_k} + \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial \bar z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right),$$

$k = 1, \ldots, n$: Քանի որ ֆորմալ ածանցյալներն արտահայտվում են սովորական ածանցյալների միջոցով գծորեն, նրանց համար մնում են ճշմարիտ ածանցման բոլոր կանոնները: Հաճախակի դա օգնում է հեշտությամբ ստուգել տվյալ ֆունկցիայի հոլոմորֆ լինելը, ինչպես, օրինակ, ստորև բերված թեորեմում՝

Թ ե ո ր ե մ 1.8. *Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում և g-ն հոլոմորֆ վեկտոր-ֆունկցիա է $G \subset \mathbb{C}^m$-ում, ընդ որում $g(G) \subset D$: Այդ դեպքում $h = f \circ g$ բարդ ֆունկցիան հոլոմորֆ է G-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Հաշվելով h ֆունկցիայի ֆորմալ ածանցյալներն ըստ $\bar\zeta_k$-ի ($k = 1, \ldots, n$), ստանում ենք

$$\frac{\partial h}{\partial \bar\zeta_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial g}{\partial \bar\zeta_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\frac{\partial \bar g}{\partial \bar\zeta_k} = 0,$$

քանի որ ըստ f-ի և g-ի հոլոմորֆության

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z_j} = 0 \quad \text{և} \quad \frac{\partial g}{\partial \bar\zeta_k} = 0 :$$

Այսպիսով, g-ն հոլոմորֆ է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի և, բացի դրանից, նա ակնհայտորեն անընդհատ է: $\square$

Այժմ նկատենք, որ f ֆունկցիայի

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}dy_k$$

առաջին դիֆերենցիալը կարելի է գրել կոմպլեքս տեսքով, օգտվելով (1.16)-ից և տրոհելով այն երկու մասի.

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k}\, dz_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k}\, d\bar{z}_k = \partial f + \bar{\partial} f,$$

որտեղ ∂f-ը df դիֆերենցիալի հոլոմորֆ, իսկ $\bar{\partial} f$-ը՝ հակահոլոմորֆ մասերն են: Հոլոմորֆության պայմանը դիֆերենցիալի տերմիններով գրվում է հակիրճ՝

$$\bar{\partial} f = 0:$$

Սա այսպես կոչված, համասեռ $\bar{\partial}$-հավասարումն է: § 26-ում մենք կծանոթանանք այս հավասարման անհամասեռ տարբերակի հետ:

Այժմ նկատենք, որ (1.15)-ում մասնակցող երկու ֆունկցիաները բավարարում են թվով $2n$ հատ հավասարումների: Երբ $n > 1$, այդ հավասարումների համակարգը լինում է գերորոշված. դրանով է բացատրվում այն հանգամանքը, որ շատ փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաներն ունեն յուրահատկություններ, որոնք բնորոշ չեն մեկ փոփոխականի դեպքին:

Ω տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\mathcal{O}(\Omega)$: Քանի որ հոլոմորֆ ֆունկցիաների գումարն ու արտադրյալը նորից հոլոմորֆ են, ապա $\mathcal{O}(\Omega)$-ն օղակ է: Եթե $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ֆունկցիան անընդհատ է Ω-ի փակման վրա, ապա պարզվում է, որ $n > 1$ դեպքում որոշ տիրույթների համար, օրինակ, բազմագլանների, f-ը ինչ-որ իմաստով հոլոմորֆ է նույնիսկ տիրույթի եզրի վրա: Այդ պնդման ճշգրիտ ձևակերպումը տրվում է լեմմա 1.2-ում, որտեղ նշանակումների պարզության համար դիտարկում ենք միավոր U^n պոլիդիսկի դեպքը:

Լ ե մ մ ա 1.2. Դիցուք $f \in \mathcal{O}(U^n) \bigcap C(\overline{U}^n)$ և $\widetilde{z} \in \overline{U}^{n-1}$ կետը ֆիքսած է: Այդ դեպքում $f(\widetilde{z}, \zeta)$ ֆունկցիան պատկանում է $\mathcal{O}(U) \bigcap C(\overline{U})$-ին:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $g_{\widetilde{z}}(\zeta) = f(\widetilde{z}, \zeta_n)$: Եթե $\widetilde{z} \in U^{n-1}$, ապա լեմմայի պնդումը հետևում է հոլոմորֆության սահմանումից: Ձգտեցնենք $\widetilde{z}$-ը U^{n-1} պոլիդիսկի եզրին: Քանի որ f-ը անընդհատ է $\overline{U}^n$-ի վրա, ապա համապատասխան $g_{\tilde{z}}$ ֆունկցիաները զուգամիտում են հա–վասարաչափ և, ըստ Վայերշտրասի թեորեմի, սահմանային ֆունկցիան պատկանում է $\mathcal{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$-ին: □

§ 4. Պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաներ

Ֆորմալ ածանցյալների (1.16) սահմանումից հետևում է, որ եթե f-ը հոլոմորֆ է, ապա՝

$$\frac{\partial \bar f}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}-i\frac{\partial f}{\partial y_k}\right)=\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\right)}=0, \quad k=1,\dots,n: \tag{1.17}$$

Ածանցելով ըստ z_k-ի f ֆունկցիայի $u=\dfrac{1}{2}(f+\bar f)$ իրական մասը և հաշվի առնելով (1.17)-ը, կստանանք՝

$$\frac{\partial u}{\partial z_k}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_k}: \tag{1.18}$$

Սպորև կապացուցենք, որ հոլոմորֆ ֆունկցիան ունի բոլոր կարգի ածանցյալները, որոնք իրենց հերթին հոլոմորֆ են: Իսկ այժմ օգտվենք այդ փաստից ու ևս մեկ անգամ ածանցելով (1.18)-ը ըստ $\bar z_j$-ի, կստա–նանք՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar z_j}=0, \quad k,j=1,\dots,n: \tag{1.19}$$

∂ և $\bar\partial$ օպերատորների օգնությամբ այս պայմանները կարելի է գրել ավելի հակիրճ տեսքով: Իրոք, քանի որ

$$\partial\bar\partial u=\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar z_j},$$

ապա (1.19)-ը համարժեք է

$$\partial\bar\partial u=0 \tag{1.20}$$

պայմանին:

Սահմանում 1.6. Իրական ֆունկցիան կոչվում է *պլյուրի–հարմոնիկ* D տիրույթում, եթե այն պատկանում է $C^2(D)$ դասին և բավարարում է (1.20) պայմանին:

Անջատելով (1.19)-ի իրական և կեղծ մասերը, կստանանք պլյուրի–հարմոնիկության պայմաններն իրական կոորդինատներով՝

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k\, \partial y_j} = 0, \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial y_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial y_k} = 0, \quad k, j = 1, \ldots, n : \end{aligned} \tag{1.21}$$

Երկրորդ խմբի հավասարումները $k = j$ դեպքում, իհարկե, ակնհայտ են:

Պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաները կապված են մի քանի փոփոխա–կանի հոլոմորֆ ֆունկցիաների հետ ճիշտ այնպես, ինչպես հարթության դեպքում հարմոնիկ ֆունկցիաները կապված են մեկ փոփոխականի հո–լոմորֆ ֆունկցիաների հետ:

Թեորեմ 1.9. *$D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում հոլոմորֆ f ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը պլյուրիհարմոնիկ են:*

Ապացույց: $u = \operatorname{Re} f$ իրական մասի համար թեորեմը փաս–տորեն արդեն ապացուցված է: Մնում է նկատել, որ f-ի հետ մեկտեղ հոլոմորֆ է նաև $-if$ ֆունկցիան և որ $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$: □

Տեղի ունի այս թեորեմի հակադարձը, բայց միայն լոկալ տարբե–րակով:

Թեորեմ 1.10. *Եթե u-ն պլյուրիհարմոնիկ է $z^0 \in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում, ապա գոյություն ունի այդ կետում հոլոմորֆ f ֆունկ–ցիա, որի համար u-ն իրական մաս է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիտարկենք

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_k} dx_k + \frac{\partial u}{\partial x_k} dy_k \right)$$

դիֆերենցիալ ձևը: Հաշվելով նրա դիֆերենցիալը, ստանում ենք՝

$$d\omega = \sum_{k,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial y_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial y_k} \right) (dx_j \wedge dx_k + dy_j \wedge dy_k) +$$
$$+ \sum_{k,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \, \partial y_k} \right) dx_j \wedge dy_k :$$

Այստեղից երևում է, որ $d\omega = 0$ պայմանը, այսինքն՝ ω-ի փակությունը, համարժեք է (1.21)-ին, այսինքն՝ u-ի պլյուրիհարմոնիկությանը: Ինչ–պես հայտնի է, փակ ձևը լոկալ ճշգրիտ է: Ուրեմն, ω-ն z^0 կետի ինչ-որ շրջակայքում ունի նախնական $v(z)$ ֆունկցիա, որը կարելի է գրել

$$v(z) = \int_{z^0}^{z} \omega \tag{1.22}$$

տեսքով: Շնորհիվ ω-ի փակությանը (1.22) ինտեգրալը կախված չէ ին–տեգրման ճանապարհից: (1.22)-ից ստանում ենք $dv = \omega$, կամ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_k} = -\dfrac{\partial u}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \end{cases}$$

պայմանները, որոնք վկայում են, որ $f = u + iv$ ֆունկցիան պատ–կանելով C^2 դասին, բավարարում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններին ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի: Ուրեմն, նա z^0 կետում հոլոմորֆ է, ընդ որում, $u = \operatorname{Re} f$: □

Տեղադրելով (1.19)-ի կամ (1.21)-ի մեջ $j = k$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial z_k\,\partial \bar{z}_k} = 0 \qquad \text{կոմպլեքս կոորդինատների տեսքով, կամ} \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} = 0 \qquad \text{իրական կոորդինատների տեսքով:} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Այս հավասարումներին բավարարող ֆունկցիան կոչվում է n-հարմոնիկ ($n = 2$ դեպքում՝ երկհարմոնիկ) ֆունկցիա: Ստացված պայմանները նշանակում են, որ u-ն հարմոնիկ է ըստ ամեն մի z_k փոփոխականի:

Եթե գումարենք (1.23) հավասարումներն ըստ k-ի, ապա ձախ մասում կունենանք Պուասոնի Δu օպերատորը և կստացվի՝

$$\Delta u = 0,$$

այսինքն, u-ի հարմոնիկության պայմանը:

Դիցուք

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

Պուասոնի սովորական կորիզն է միավոր շրջանի համար: Սահմանենք Պուասոնի կորիզը U^n միավոր պոլիդիսկի համար հետևյալ ձևով՝

$$P(z, \zeta) = P_{r_1}(\theta_1 - \varphi_1) \cdots P_{r_n}(\theta_n - \varphi_n),$$

որտեղ $z \in U^n$, $\zeta \in T^n$, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $\zeta_j = e^{i\varphi_j}$: Բացի դրանից, m_n-ով նշանակենք T^n միավոր տորի վրա Լեբեգի նորմավորված չափը: Այսինքն՝ $dm_n = \dfrac{1}{(2\pi i)^n}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_n$:

Պուասոնի կորիզը վերլուծվում է

$$P(z, \zeta) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} e^{ik\cdot(\theta-\varphi)} \tag{1.24}$$

շարքի, որտեղ $k\cdot\theta = k_1\theta_1 + \cdots + k_n\theta_n$: Եթե f-ը ինտեգրելի է ըստ m_n չափի, ապա նրա համար սահմանվում է $P[f]$ *Պուասոնի ինտեգրալ*.

$$P[f](z) = \int\limits_{T^n} f(\zeta) P(z, \zeta)\, dm_n(\zeta), \quad z \in U^n:$$

Ինչպես հայտնի է, պոլիդիսկը պատկանում է այն տիրույթների դասին, որոնց համար Դիրիխլեի խնդիրը լուծելի է[1]: Դա նշանակում է, որ ամեն մի f ֆունկցիա, որը անընդհատ է U^n-ի եզրի վրա, հնարավոր է անընդհատորեն շարունակել պոլիդիսկի փակման վրա այնպես, որ նա լինի U^n-ում հարմոնիկ: Եթե f-ը շարունակենք ոչ թե եզրից, այլ հենքից, ապա անընդհատ շարունակությունը կարելի է կատարել n-հարմոնիկ ֆունկցիաների դասում: Այսինքն, ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թ ե ո ր ե մ 1.11. *Դիցուք f-ը կամայական ֆունկցիա է, որն անընդհատ է T^n-ի վրա: Այդ դեպքում $u(z) = P[f](z)$ ֆունկցիան U^n-ում n-հարմոնիկ է, անընդհատ է U^n-ի փակման վրա և հենքի վրա համընկնում է f-ի հետ:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Տեղադրելով (1.24) վերլուծությունը Պուասոնի ինտեգրալի մեջ և անդամ առ անդամ ինտեգրելով, կստանանք՝

$$P[f](z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} e^{ik\cdot\theta}, \tag{1.25}$$

որտեղ $\widehat{f}(k)$ թվերը f-ի Фուրյեի գործակիցներն են՝

$$\widehat{f}(k) = \int\limits_{T^n} \bar{\zeta}^k \, dm_n(\zeta), \quad k \in \mathbb{Z}^n :$$

(1.25) ներկայացումից անմիջապես հետևում է, որ $u(z)$-ը n-հարմոնիկ է:

Հիշեցնենք, որ հենքի վրա որոշված $T(\zeta)$ ֆունկցիան կոչվում է եռանկյունաչափական բազմանդամ, եթե նա վերջավոր թվով $e^{ik\cdot\theta}$ էքսպոնենտների գծային կոմբինացիա է: Եռանկյունաչափական բազմանդամի դեպքում (1.25) վերլուծության մեջ մասնակցում են վերջավոր թվով անդամներ, ուստի թեորեմի պնդումը նրա համար ակնհայտ է:

[1] Տես, օրինակ, Axler Sh., Bourdon P., Ramey W. *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 2001, էջ 228–230:

$n=1$ դեպքում Ֆեյերի հայտնի թեորեմը պնդում է, որ ամեն մի անընդհատ ֆունկցիա հավասարաչափ մոտարկվում է եռանկյունաչափական բազմանդամներով: Ընդհանուր դեպքում այդ փաստը ևս ճշմարիտ է ըստ Ստոուն-Վայերշտրասի թեորեմի: Դիցուք $T_m(\zeta)$ եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականությունը հավասարաչափ T^n-ի վրա զուգամիտում է f-ին: Ինչպես հետևում է մաքսիմումի սկզբունքից, Պուասոնի ինտեգրալների $P[T_m](z)$ համապատասխան հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է ամբողջ $\overline{U}^n$-ի վրա, և քանի որ այդ սահմանը հավասար է $P[f]$-ն, ապա $u(z)=P[f](z)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{U}^n$-ում: $\square$

§ 5. Հոլոմորֆ ֆունկցիայի զրոները

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունում հայտնի է հետևյալ պնդումը՝

Թ ե ո ր ե մ 1.12. *Եթե $f(z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է a կետում, $f(a)=0$ և $f\not\equiv 0$, ապա a-ի ինչ-որ շրջակայքում*

$$f(z)=(z-a)^p\cdot h(z),$$

որտեղ $p\geqslant 1$ ամբողջ թիվ է, իսկ $h(z)$-ը հոլոմորֆ է և զրոներ չունի այդ շրջակայքում:

Այս թեորեմը մի փոփոխականի ֆունկցիաների զրոների մասին տալիս է հետևյալ ինֆորմացիան՝

1. զրոները մեկուսացված են,
2. f-ի զրոները համընկնում են $(z-a)^p$ ֆունկցիայի զրոների հետ, ընդ որում, p-ն կոչվում է *զրոյի կարգ*:

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների զրոները հետազոտելիս կարևոր դեր ունի հետևյալ թեորեմը, որն էապես ընդհանրացնում է նախորդ թեորեմի պնդումը:

Թ ե ո ր ե մ 1.13 (Վայերշտրասի նախապատրաստական թեորեմը). *Դիցուք f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $a \in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում, $f(a) = 0$, բայց $f(\widetilde{a}, z_n) \not\equiv 0$: Այդ դեպքում a-ի ինչ-որ V շրջակայքում f-ն ունի հետևյալ ներկայացումը՝*

$$f(z) = W(z) \cdot h(z),$$

որտեղ $h(z)$-ը հոլոմորֆ է այդ շրջակայքում և զրո չի դառնում, իսկ $W(z)$-ը այսպես կոչված, Վայերշտրասի պսևդոբազմանդամ է՝

$$W(z) = (z_n - a_n)^p + \sum_{j=0}^{p-1} c_j(\widetilde{z})(z_n - a_n)^j :$$

Այստեղ $c_j(\widetilde{z})$ գործակիցները հոլոմորֆ են $\widetilde{V}$-ում, ընդ որում $\widetilde{V}$ նշանակում է V-ի պրոյեկցիան $\mathbb{C}^{n-1}_{\widetilde{z}}$ ենթատարածության վրա, $c_j(\widetilde{a}) = 0,\ j = 0, \ldots, p-1$:

Ա պ ա ց ու յ ց: Ընդհանրությունը չխախտելով, կարող ենք ենթադրել $a = 0$: Ըստ միակության թեորեմի մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար, գոյություն ունի $r_n > 0$ այնպիսին, որ $f(\widetilde{0}, z_n) \neq 0$, երբ $0 < |z_n| \leqslant r_n$, իսկ f-ի անընդհատության շնորհիվ կգտնվի այնպիսի մի պոլիդիսկ $\widetilde{V}(\widetilde{0}, r)$, որ

$$f(\widetilde{z}, z_n) \neq 0, \quad \text{երբ} \quad \widetilde{z} \in \widetilde{V} \quad \text{և} \quad |z_n| = r_n :$$

Ամեն մի ֆիքսած $\widetilde{z}^0 \in \widetilde{V}$ կետի համար $f(\widetilde{z}^0, z_n)$ ֆունկցիայի զրոների քանակը $V_n = \{z_n \colon\ |z_n| < r_n\}$ շրջանում հավասար է

$$k_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V_n} \frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n} f(\widetilde{z}^0, z_n)}{f(\widetilde{z}^0, z_n)}\, dz_n : \tag{1.26}$$

Իրոք, (1.26)-ի ձախ մասը ընդունում է միայն ամբողջ արժեքներ և անընդհատ է ըստ $\widetilde{z}^0$-ի $\widetilde{V}$-ում, ուստի նա նույնաբար հաստատուն է: Երբ $\widetilde{z}^0 = \widetilde{0}$, նա հավասար է $f(\widetilde{0}, z_n)$ ֆունկցիայի զրոյի կարգին $z_n = 0$ կետում, այսինքն՝ k-ին:

Այժմ ֆիքսենք $\widetilde{z} \in \widetilde{V}$ և նշանակենք $z_n^{(k)} = z_n^{(k)}(\widetilde{z})$, $k = 1, \ldots, p$, $f(\widetilde{z}, z_n)$ ֆունկցիայի զրոները V_n շրջանում և կառուցենք z_n-ի նկատմամբ

$$P(z) = \prod_{k=1}^{p} \left[z_n - z_n^{(k)}(\widetilde{z})\right] = z_n^p + c_{p-1}(\widetilde{z}) z_n^{p-1} + \cdots + c_0(\widetilde{z}) \quad (1.27)$$

բազմանդամը, որի արմատները նշված զրոներն են: Ցույց տանք, որ նրա գործակիցները հոլոմորֆ են $\widetilde{V}$-ում: Իրոք, կամայական $\omega(z_n)$ ֆունկցիայի համար, որը հոլոմորֆ է $\overline{V}_n$-ում, ըստ արգումենտի ընդհանրացված սկզբունքի՝

$$\sum_{k=1}^{p} \omega(z_n^{(k)}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V_n} \omega(z_n) \frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n} f(\widetilde{z}, z_n)}{f(\widetilde{z}, z_n)}\, dz_n,$$

որտեղից երևում է, որ ձախ մասում գտնվող գումարներն ըստ $\widetilde{z}$-ի հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են $\widetilde{V}$-ում: Այստեղ հաշվի է առնված այն հանգամանքը, որ f-ը տարբեր է զրոյից, երբ $\widetilde{z} \in \widetilde{V}$ և $z_n \in \partial V_n$: Տեղադրելով $\omega(z_n) = z_n^j$, $j = 1, \ldots, p$, ստանում ենք, որ (1.27) բազմանդամի արմատների j-րդ աստիճանի գումարները հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են ըստ $\widetilde{z}$-ի $\widetilde{V}$-ում: Ինչպես հայտնի է հանրահաշվից, բազմանդամի գործակիցները այդ գումարներից ռացիոնալ ֆունկցիաներ են, որտեղից և բխում է նրանց հոլոմորֆությունը: Երբ $\widetilde{z} = \widetilde{0}$, բազմանդամի բոլոր գործակիցները զրո են դառնում, ուստի և բոլոր $c_k(\widetilde{0}) = 0$:

Այնուհետև՝

$$h(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$$

ֆունկցիան ֆիքսած $\widetilde{z} \in \widetilde{V}$ դեպքում հոլոմորֆ է ըստ z_n-ի V_n շրջանում և այնտեղ զրոներ չունի, քանի որ P-ն և f-ը ունեն միևնույն կարգի միևնույն $z_n^{(k)}(\widetilde{z})$ զրոները: Ուրեմն, կամայական $\widetilde{z} \in \widetilde{V}$ դեպքում h-ը ներկայացվում է Կոշիի ինտեգրալով ըստ z_n-ի՝

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial V_n} \frac{f(\widetilde{z}, \zeta_n)}{P(\widetilde{z}, \zeta_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n} :$$

Դրանով նա սահմանվում է $V = \widetilde{V} \times V_n$ բազմության նաև այն կետերում, որտեղ $P = 0$: Քանի որ $P \neq 0$ ∂V_n-ի վրա, ապա աջ մասը, ուստի և h-ը, հոլոմորֆ են ըստ $\widetilde{z}$-ի: Ըստ Հարտոգսի թեորեմի $h(z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է V պոլիդիսկում: □

Վայերշտրասի նախապատրաստական թեորեմի արժեքը կայանում է նրանում, որ նա թույլ է տալիս հետազոտել հոլոմորֆ ֆունկցիայի զրոները որպես պսևդոբազմանդամի զրոներ ֆունկցիայի զրոյական կետի շրջակայքում, այսինքն՝ լոկալ: Այլ բառերով ասած, հոլոմորֆ ֆունկցիայի զրոների հետազոտման խնդիրը բերվում է պսևդոբազմանդամի զրոների հետազոտմանը, այսինքն, ըստ մի փոփոխականի բազմանդամի, որի գործակիցները հոլոմորֆ են ըստ մնացած փոփոխականների:

Այժմ ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է օգտագործել Վայերշտրասի թեորեմն անբացահայտ ֆունկցիաների մասին թեորեմի կոմպլեքս տարբերակը ստանալու համար: Դիցուք $f(a) = 0$ և $\left.\dfrac{\partial f}{\partial z_n}\right|_{z=a} \neq 0$: Կիրառելով այդ թեորեմը (ընդ որում $p = 1$), ստանում ենք, որ $f(z) = 0$ հավասարումը համարժեք է $P(z) = z_n - a_n + c_0(\widetilde{z}) = 0$ հավասարմանը, որը լուծելի է ըստ z_n-ի, և $z_n = a_n - c_0(\widetilde{z})$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ մնացած փոփոխականների:

Սահմանում 1.7. Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ և $A \subset D$: A-ն կոչվում է *անալիտիկ բազմություն* D-ում, եթե կամայական $a \in D$ կետի համար գոյություն ունեն $U \ni a$ շրջակայք և U-ում այնպիսի հոլոմորֆ $f_1, \ldots, f_N$ ֆունկցիաներ, որ

$$A \bigcap U = \{z \in U : \ f_1(z) = \cdots = f_N(z) = 0\} : \qquad (1.28)$$

Այսպիսով, անալիտիկ բազմությունը լոկալ սահմանվում է որպես վերջավոր թվով հոլոմորֆ ֆունկցիաների ընդհանուր զրոների բազմություն:

Թ ե ո ր ե մ 1.14. *D-ում A անալիտիկ բազմությունը ($A \neq D$) փակ է, ամենուրեք նոսր է և նրա $D \setminus A$ լրացումը կապակցված է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $a^m \in A$, $\lim a^m = a$ և $a \in D$. պետք է ապացուցել, որ $a \in A$: a կետի U շրջակայքում $A \bigcap U$ բազմությունը տրվում է (1.28) պայմանով և f_m ֆունկցիաների անընդհատությունից հետևում է, որ $a \in A$:

Ենթադրենք A-ի ներքին կետերի A° ենթաբազմությունը դատարկ չէ: Ցույց տանք, որ A°-ն փակ է D-ում: Դիցուք $a^m \in A^\circ$, $\lim a^m = a$ և $a \in D$. պետք է ապացուցել, որ $a \in A^\circ$: Դա հետևում է այն բանից, որ U շրջակայքում A-ն որոշող f_k ֆունկցիաները հավասար են զրոյի U-ի բաց ենթաբազմության վրա և, ըստ միակության թեորեմի, $f_k \equiv 0$, $k = 1, \ldots, N$ ամբողջ U-ում, այսինքն, $U \subset A^\circ$: Այսպիսով, A°-ն D տիրույթի ոչ դատարկ, միաժամանակ բաց և փակ ենթաբազմություն է, ուրեմն, $A^\circ = D$:

Վերջին պնդումը ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ ամեն մի $a \in A$ կետ ունի այնպիսի U կապակցված շրջակայք, որ $U \setminus A$ բազմությունը կապակցված է: Դիցուք $a \in A$ կամայական կետ է, U-ն նրա որևէ ուռուցիկ շրջակայք է և z^0-ն ու z^1-ը կամայական կետեր են $(U \setminus A)$-ից: Նշանակենք

$$G = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ \zeta z^0 + (1-\zeta) z^1 \in U\right\}\text{-ով}$$

U-ի հատումը z^0 և z^1 կետերը միացնող կոմպլեքս ուղղի հետ: G-ն հարթ ուռուցիկ տիրույթ է: U շրջակայքում A-ն որոշող f_k ֆունկցիաների մեջ կգտնվի այնպիսինը, որ

$$g_k(\zeta) = f_k(\zeta z^0 + (1-\zeta) z^1) \not\equiv 0,$$

հետևաբար,

$$H = \left\{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ \zeta z^0 + (1-\zeta) z^1 \in A\right\}$$

բազմությունը դիսկրետ է: Այդ պատճառով $G \setminus H$ բազմությունը կապակցված է, և քանի որ նա պարունակում է $\zeta_0 = 0$ ու $\zeta_1 = 1$ կետերը, ապա գոյություն ունի այդ կետերը միացնող $\gamma\colon\ I \mapsto G \setminus H$ անընդհատ կոր: Այդ դեպքում $t \mapsto \gamma(t)z^0 + \big(1-\gamma(t)\big)z^1$ ֆունկցիան $(U \setminus A)$ բազմության վրա որոշում է կոր, որը միացնում է z^0-ն և z^1-ը: $\square$

§ 6. Կոշիի բանաձևը և նրա պարզագույն կիրառությունները

Դիցուք

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z_1 \in D_1, \dots, z_n \in D_n\}$$

բազմագլան է և

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z_1 \in \partial D_1, \dots, z_n \in \partial D_n\}$$

նրա հենքն է, որտեղ $D_1, \dots, D_n$ հարթ տիրույթները սահմանափակ են և ունեն կտոր առ կտոր ողորկ եզր:

Թ ե ո ր ե մ 1.15. *Կամայական $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ ֆունկցիա ցանկացած $z \in D$ կետում ներկայացվում է*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} \tag{1.29}$$

Կոշիի բազմապատիկ ինտեգրալով:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Կիրառելով Կոշիի ինտեգրալային բանաձևը $f(\widetilde{z}, z_n)$ ֆունկցիայի նկատմամբ ըստ վերջին փոփոխականի, կստանանք

$$f(\widetilde{z}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\widetilde{z}, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n :$$

Նույն ձևով $f(\widetilde{z}, \zeta_n)$-ի համար

$$f(\widetilde{z}, \zeta_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(z_1, \ldots, z_{n-2}, \zeta_{n-1}, \zeta_n)}{\zeta_{n-1} - z_{n-1}}\, d\zeta_{n-1} :$$

Տեղադրելով այս հավասարությունը նախորդի մեջ և շարունակելով դապողությունները, կստանանք`

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int\limits_{\partial D_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \cdots \int\limits_{\partial D_n} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n :$$

Ստացված հաջորդական ինտեգրալը, ըստ Ֆուբինիի թեորեմի, հավասար է n-պատիկ ինտեգրալին, որը մասնակցում է (1.29) ինտեգրալային ներկայացման աջ մասում: □

Հետագայում (1.29) բանաձևը գրելու ենք

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^I} \tag{1.30}$$

հակիրճ տեսքով, որտեղ $d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_n$, $I = (1, \ldots, 1)$ և, ուրեմն, ըստ մեր ընդունած նշանակումների, $(\zeta - z)^I = (\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)$:

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 1.1. (1.30) բանաձևը էապես տարբերվում է համապատասխան բանաձևից մեկ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների համար: Տվյալ դեպքում (1.30) բանաձևը վերականգնում է ֆունկցիայի արժեքները փիրույթի ներսում ըստ իր արժեքների ոչ թե ամբողջ ∂D եզրի վրա, այլ միայն նրա n չափանի մասի` հենքի վրա: Մյուս կողմից, $n = 1$ դեպքում Կոշիի բանաձևը ճիշտ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով կամայական փիրույթի համար, այնինչ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում տեղի ունի միայն բազմագլանների համար, այսինքն, բավականին նեղ դասի համար, և ճիշտ չէ, օրինակ, գնդի դեպքում: Չորրորդ գլխում մենք կստանանք ինտեգրալային ներկայացումներ փիրույթների ավելի լայն դասի համար:

Պարամետրից կախված ինտեգրալների մասին ընդհանուր թեորեմներից հետևում է, որ (1.30)-ը կարելի է աձանցել ինտեգրալի նշանի տակ և մենք ստանում ենք

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+I}}. \tag{1.31}$$

Կոշիի բանաձևը, ինչպես և միաչափ դեպքում, հնարավորություն է տալիս ստանալու վերլուծություն աստիճանային շարքի:

Հակիրճության համար նշանակենք

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \; |z_j - z_j^0| < r_j, \;\; j = 1, \ldots, n \right\}$$

z^0 կենտրոն և $r = (r_1, \ldots, r_n)$ վեկտորական բազմաշառավիղ ունեցող պոլիդիսկը, և Γ-ով՝ նրա հենքը:

Թ ե ո ր ե մ 1.16. *Եթե $f \in \mathcal{O}(G) \bigcap C(\overline{G})$, ապա ցանկացած $z \in G$ կետում նա ներկայացվում է*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \left(z - z^0\right)^k \tag{1.32}$$

աստիճանային շարքով, որի գործակիցները որոշվում են

$$a_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z^0)^{k+I}}$$

բանաձևով:

Ա պ ա ց ու յ ց: Կոշիի կորիզը վերլուծենք բազմապատիկ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի՝

$$\frac{1}{(\zeta - z)^I} = \frac{1}{(\zeta - z^0)^I} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z_1 - z_1^0}{\zeta_1 - z_1^0}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{z_n - z_n^0}{\zeta_n - z_n^0}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(\zeta - z^0)^I} \sum_{|k|=0}^{\infty} \left(\frac{z - z^0}{\zeta - z^0} \right)^k :$$

Այսպիսով՝

$$\frac{1}{(\zeta - z)^I} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(z - z^0)^k}{(\zeta - z^0)^{k+I}} :$$

Նկատենք, որ այս վերլուծությունը զուգամիտում է հավասարաչափ ըստ ζ-ի, Γ-ի վրա: Բազմապատկելով այն $\dfrac{f(\zeta)}{(2\pi i)^n}$-ով և անդամ առ անդամ ինտեգրելով, ստանում ենք թեորեմի պնդումը: $\square$

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 1.2. Թեորեմի պնդումը ճիշտ լինելու համար բավական է պահանջել, որ $f \in \mathcal{O}(G)$: Իրոք, կամայական z կետ պատկանում է ինչ-որ $G' \subset G$ պոլիդիսկի և մնում է կիրառել թեորեմ 1.16-ը G'-ում:

Թ ե ո ր ե մ 1.17. *Եթե $f \in \mathcal{O}(G)$, ապա ցանկացած $z \in G$ կետում այդ ֆունկցիան ունի բոլոր կարգի մասնակի ածանցյալներ, որոնք նույնպես պատկանում են $\mathcal{O}(G)$-ին:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ըստ թեորեմ 1.16-ի ցանկացած $z \in U$ կետում f-ը ներկայացվում է (1.32) աստիճանային շարքի տեսքով: Քանի որ այդ շարքի անդամները կարելի է խմբավորել ըստ առանձին փոփոխականների աստիճանների, ապա, օգտվելով մի փոփոխականի աստիճանային շարքի հատկություններից, ստանում ենք, որ f-ի բոլոր մասնակի ածանցյալները ներկայացվում են աստիճանային շարքի տեսքով: Ինչպես հետևում է (1.12)-ից, անդամ առ անդամ ածանցված շարքերը U-ի վրա զուգամետ են, ուրեմն՝ դրանց գումարներն անընդհատ են շնորհիվ հավասարաչափ զուգամիտությանը U-ի կոմպակտ ենթաբազմություններ ի վրա:

Կարելի է ապացուցել ուրիշ եղանակով, օգտվելով ածանցյալների համար ստացված (1.31) բանաձևից և պարամետրից կախված ինտեգրալների ընդհանուր հատկություններից: $\square$

1. Վայերշտրասի թեորեմը: Նախ հոլոմորֆ ֆունկցիայի ածանցյալների համար ստանանք գնահատականներ վերևից:

Թ ե ո ր ե մ 1.18. *Դիցուք f ֆունկցիան հոլոմորֆ և սահմանափակ է Ω տիրույթում: Յանկացած $M \Subset D$ կոմպակտ ենթաբազմության և $k = (k_1, \ldots, k_n)$ մուլտիինդեքսի համար գոյություն ունի $C = C(M, k)$ հաստատուն, այնպիսին, որ*

$$\max_{z \in M} \left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right| \leqslant C \max_{z \in \Omega} |f(z)| : \tag{1.33}$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Բավական է ապացուցել կամայական $z^0 \in \Omega$ կետի շրջակայքում: Վերցնենք $U = U(z^0, r) \Subset \Omega$ պոլիդիսկ և օգտվենք Կոշիի ինտեգրալային բանաձևից ածանցյալների համար՝

$$\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+I}},$$

որտեղ Γ-ն U-ի հենքն է: Այստեղից ստանում ենք՝

$$\left| \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k} \right| \leqslant \frac{k!}{(2\pi)^n} \frac{(2\pi)^n\, r_1 \cdots r_n \cdot \max_{\zeta \in \Omega} |f(\zeta)|}{\min\limits_{z \in M,\, \zeta \in \Gamma} |\zeta_1 - z_1|^{k_1+1} \cdots |\zeta_n - z_n|^{k_n+1}},$$

որտեղից և հետևում է (1.33)-ը: □

Կիրառելով (1.33)-ը $f_j - f$ տարբերության նկատմամբ, ստանում ենք հետևյալ պնդումը:

Թ ե ո ր ե մ 1.19 (Վայերշտրաս). *Դիցուք $f_j \in \mathcal{O}(D)$ հաջորդականությունը զուգամիտում է f ֆունկցիային հավասարաչափ D-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա: Այդ դեպքում $f \in \mathcal{O}(D)$, և, բացի դրանից, բոլոր $k = (k_1, \ldots, k_n)$-ի համար*

$$\lim_{j \to \infty} \frac{\partial^{|k|} f_j(z)}{\partial z^k} = \frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k}$$

հավասարաչափ ամեն մի $M \Subset D$ վրա:

2. Միակության թեորեմը: Մի քանի փոփոխականի դեպքում միաչափ պեսության միակության թեորեմը, որում դիտարկվում է ֆունկ–ցիայի զրոների սահմանային կետը, տեղի չունի: Դրանում կարելի է համոզվել $f(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2 \not\equiv 0$ ֆունկցիայի օրինակի վրա, որը զրո է դառնում $\{z\colon\ z_1 = 0\}$ և $\{z\colon\ z_2 = 0\}$ երկու կոմպլեքս ուղիղների վրա: Ճշմարիտ է այդ թեորեմի ավելի թույլ տարբերակը:

Թ ե ո ր ե մ 1.20. *Եթե f-ը հոլոմորֆ է $\Omega \in \mathbb{C}^n$ տիրույթում և $f = 0$ Ω-ի ոչ դատարկ բաց ենթաբազմության վրա, ապա $f \equiv 0$ Ω-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Նշանակենք ω-ով $\{z \in \Omega\colon\ f(z) = 0\}$ բազմու–թյան ներսը: Այդ դեպքում ω-ն Ω-ի բաց ենթաբազմություն է: Դիցուք $z_k \in \omega$ և $z_k \to z' \in \Omega$: Քանի որ z_k կետերում f-ը հավասար է զրոյի իր բոլոր ածանցյալների հետ մեկտեղ, ապա շնորհիվ անընդհա–տությանը, նրանք հավասար են զրոյի նաև z' կետում: Ստացվեց, որ ω-ն փակ է Ω-ում: Ինչպես հայտնի է, կապակցված բազմության բաց և միաժամանակ փակ ոչ դատարկ ենթաբազմությունը համընկնում է նրա հետ, ուստի $\omega = \Omega$: □

3. Մաքսիմումի սկզբունքը:

Թ ե ո ր ե մ 1.21. *Եթե $f \in \mathcal{O}(D)$ և $|f|$-ը ունի լոկալ մաքսիմում ինչ-որ $a \in D$ կետում, ապա $f(z) \equiv \mathrm{const}$ ամբողջ D-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: a կետով անցնող ցանկացած

$$\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z = a + \omega\zeta\}, \quad \omega \in \mathbb{C}^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}$$

կոմպլեքս ուղղի վրա f ֆունկցիայի հետքը, այսինքն՝ $g_\omega(\zeta) = f(a + {} + \omega\zeta)$-ն, մեկ փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիա է, որի մոդուլը $\zeta = {} = 0$ ներքին կետում ունի մաքսիմում, ուրեմն, $g_\omega(\zeta) \equiv c_\omega$: Քանի որ $g_\omega(0) = f(a)$ կախված չէ ω-ից և, մյուս կողմից, ցանկացած երկու կետով անցնում է կոմպլեքս ուղիղ (վարժություն 1.1), ապա ստանում ենք, որ a-ի շրջակայքում $f(z) \equiv f(a)$: Ըստ միակության թեորեմի, $f(z) \equiv \text{const}$ ամբողջ D-ում: □

Եթե D-ն սահմանափակ է և f-ը հոլոմորֆ է $\overline{D}$-ում, ապա $|f|$-ը իր մաքսիմումն ընդունում է ∂D եզրի վրա: Սակայն $n > 1$ դեպքում $\mathbb{C}^n$ պարածությունում հնարավոր են D տիրույթներ, որոնց համար այդ մաքսիմումը ընդունում է ոչ թե ամբողջ եզրի, այլ նրա մի մասի վրա:

Սահմանում 1.8. Սահմանափակ D տիրույթի համար $B(D) \subset \subset \partial D$ փակ բազմությունը կոչվում է *Բերգմանի եզր*, եթե.

1) ամեն մի $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ ֆունկցիայի համար

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in B(D)} |f(z)|,$$

2) ցանկացած այլ բազմություն, որը բավարարում է 1) պայմանին, պարունակում է $B(D)$-ն:

$S(D)$ բազմությունը կոչվում է *Շիլովի եզր*, եթե նշված պայմանները բավարարվում են բոլոր $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ ֆունկցիաների համար:

Քանի որ $\mathcal{O}(\overline{D}) \subset \left\{\mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})\right\}$, ապա պարզ է, որ $B(D) \subset S(D)$:

Երբ D-ն գունդ է, ապա Բերգմանի և Շիլովի եզրերը համընկնում են նրա տոպոլոգիական եզրի (այսինքն՝ սֆերայի) հետ: Երբ D-ն պոլիդիսկ է, ապա Բերգմանի և Շիլովի եզրերը համընկնում են արդեն ոչ թե նրա տոպոլոգիական եզրի, այլ հենքի հետ (տես խնդիրներ 2.12 և 2.13): Հնարավոր են դեպքեր, երբ Բերգմանի և Շիլովի եզրերն իրարից տարբերվում են (խնդիր 2.14):

4. Լիուվիլի թեորեմը: Ինչպես և միաչափ դեպքում, տեղի ունի հետևյալ պնդումը:

Թեորեմ 1.22 (Լիուվիլ). *Եթե $\mathbb{C}^n$-ում ամբողջ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա նա նույնաբար հաստատուն է:*

Ապացույց: Ենթադրենք $|f(z)| \leqslant M$ և վերլուծենք f-ը աստիճանային շարքի՝

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k z^k :$$

Այս շարքը զուգամետ է ամբողջ $\mathbb{C}^n$-ում, ուստի Կոշիի (1.9) անհավասարությունները՝

$$|a_k| \leqslant \frac{M}{r^{|k|}}$$

ճշմարիտ են բոլոր r-երի համար: Այստեղ $r = r_1 = \cdots = r_n$: Անցնելով սահմանի, երբ $r \to \infty$, ստանում ենք, որ $a_k = 0$, եթե $|k| = k_1 + \cdots + k_n > 0$, այսինքն, $f(z) \equiv a_0$: □

§ 7. Այլ շարքեր

1. Լորանի շարքեր: Այժմ դիտարկենք Լորանի շարքի բազմաչափ նմանակը:

Թեորեմ 1.23. *Ամեն մի f ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է*

$$\Pi(r, R) = \{z \in \mathbb{C}^n : \ r_k < |z_k| < R_k, \ k = 1, \ldots, n\}$$

շրջանային օղակների դեկարտյան արտադրյալի վրա, ներկայացվում է

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k z^k \tag{1.34}$$

բազմապատիկ Լորանի շարքի տեսքով, որի գործակիցներն են՝

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{k+I}},$$

և որտեղ $\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n$, $\gamma_j = \big\{\zeta : \ \zeta_j = \rho_j e^{it}, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\big\}$, $r_j < \rho_j < R_j$, $j = 1, \ldots, n$:

Ապացույցը կատարվում է նույն մեթոդով, ինչ միաչափի դեպքում: Տեղի ունի ավելի ընդհանուր պնդում:

Թ ե ո ր ե մ 1.24. *Եթե f-ը հոլոմորֆ է Ռեյնհարտի D տիրույթում, ապա նա D-ի ներսում ներկայացվում է բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ Լորանի* (1.34) *շարքով:*

Ա պ ա ց ու յ ց: D տիրույթը կարելի է ներկայացնել որպես անվերջ քանակով $\Pi(r, R)$ տեսքի բազմազլանային տիրույթների միավորում: Դրանցից յուրաքանչյուրում ըստ թեորեմ 1.23-ի $f(z)$-ը ներկայացվում է Լորանի (1.34) շարքով: Վերլուծության միակությունից հետևում է, որ $\Pi_1(r', R')$ և $\Pi_2(r'', R'')$ հատումների վրա համապատասխան Լորանի շարքերը համընկնում են: Քանի որ D տիրույթի ցանկացած երկու կետ կարելի է միացնել իրար հետ հատվող $\Pi(r, R)$ տեսքի բազմազլաններով, ապա, հաշվի առնելով Լորանի շարքի միակության հատկությունը, ամբողջ D-ում f-ը ներկայացվում է միևնույն Լորանի շարքով: □

Այս թեորեմից որպես հետևանք ստացվում է հետևյալ պնդումը:

Թ ե ո ր ե մ 1.25 (գնդային շերտի մասին). *Եթե f-ը հոլոմորֆ է*

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \; r < |z| < R\right\}$$

գնդային շերտում, ապա այն անալիտիկորեն շարունակվում է

$$B(0, R) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \; |z| < R\right\}$$

գնդի մեջ:

Ա պ ա ց ու յ ց: Ըստ թեորեմ 1.24-ի f-ը D-ում ներկայացվում է (1.34) շարքով: D-ում կգտնվեն երկու բազմազլաններ, որոնք պարունակում են

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \; z_1 = 0\right\} \quad \text{և} \quad \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \; z_2 = 0\right\}$$

կոորդինատային հարթությունների կետերը: Եվ ուրեմն, այդ բազմա-գլաններում f ֆունկցիան ներկայացնող Լորանի շարքը չի կարող ունենալ z_2-ի և համապատասխանաբար z_1-ի բացասական աստիճաններով գումարելիներ: Լորանի շարքի վերլուծության միակությունից հետևում է, որ այդ շարքը Թեյլորի շարք է: Ըստ Աբելի թեորեմի նա զուգամիտում է նաև $B(0, R)$ գնդում և նրա գումարը տալիս է պահանջվելիք շարունակությունը: $\square$

Պարզ է, որ Լորանի (1.34) շարքի զուգամիտության տիրույթը Ռեյնհարտի տիրույթ է, ընդ որում, նա բավարարում է ևս մի լրացուցիչ պայմանի: Եթե նա պարունակում է որևէ z^0 կետ $z_k^0 = 0$ կոորդինատով, ապա (1.34) վերլուծության մեջ բացակայում են այդ կոորդինատի բացասական աստիճանները, այսինքն, z_k-ի նկատմամբ (1.34)-ը Թեյլորի շարք է: Ուստի Լորանի շարքի զուգամիտության տիրույթը ֆիքսած k-ի համար կամ չի հատվում $z_k = 0$ հարթության հետ, կամ էլ ամեն մի z^0 կետի հետ մեկտեղ պարունակում է բոլոր այն z կետերը, որոնց համար $|z_k| \leqslant |z_k^0|$, իսկ մնացած կոորդինատները նույնն են, ինչ z^0-ինը: Այդպիսի տիրույթը կոչվում է *Ռեյնհարտի կիսալրիվ տիրույթ*:

2. Հարտոգսի շարքեր: Անդրադառնանք այլ տիպի շարքերի, որոնցից ամենակարևորը Հ ա ր տ ո գ ս ի շ ա ր ք ն է: Այդպես է կոչվում

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(\widetilde{z})(z_n - a_n)^m$$

տեսքի շարքը, որի g_m գործակիցները հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են:

Թ ե ո ր ե մ 1.26. *Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է Հարտոգսի լրիվ D տիրույթում, որի համար $\{z_n = 0\}$-ն համաչափության հարթություն է, ապա նա ներկայացվում է D-ի ներսում բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m(\widetilde{z}) z_n^m \tag{1.35}$$

Հարտոգսի շարքով, որտեղ g_m ֆունկցիաները հոլոմորֆ են այդ գլիրույթի $\mathbb{C}^{n-1}$-ի վրա $\widetilde{D}$ պրոյեկցիայում:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք $a \in D$: Վերցնենք բավականաչափ փոքր պոլիդիսկ

$$\widetilde{U} = \{\widetilde{z}\colon\ |z_i - a_i| < r_i,\ i = 1, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{C}^{n-1}$$

և $U_n = \{z_n\colon\ \ |z_n| < R\}$ շրջան այնպիսիք, որ $U = \widetilde{U} \times U_n$ պոլիդիսկն ընկած լինի D-ի մեջ: Դա հնարավոր է անել շնորհիվ D-ի լրիվությանը: Այնուհետև f-ը D-ում վերլուծենք աստիճանային շարքի

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \left(\widetilde{z} - \ \widetilde{a}\right)^{\prime k} z_n^{k_n}\ :$$

Խմբավորենք այս շարքի անդամներն ըստ z_n-ի աստիճանների, դրանից նրա գումարը չի փոխվի բացարձակ զուգամիտության շնորհիվ: Կստացվի (1.35) տեսքի շարք, որի g_m գործակիցները հոլոմորֆ են $\widetilde{U}$-ում որպես աստիճանային շարքի գումարներ:

U տեսքի պոլիդիսկերով սպառվում է ամբողջ D-ն, և դրանցից յուրաքանչյուրում f-ը վերլուծվում է Հարտոգսի շարքի: Բայց աստիճանային շարքի վերլուծումը միակն է, ուստի այդ բոլոր ստացված շարքերը համընկնում են իրար հետ: U-երի պրոյեկցիաները լրացնում են ամբողջ D'-ը, ուրեմն, բոլոր g_m-երը հոլոմորֆ են D'-ում: □

Նկատենք, որ աստիճանային շարքի անդամները խմբավորելով ստանում ենք Հարտոգսի շարք, որի զուգամիտության տիրույթը կարող է լինել ավելի լայն: Բերենք համապատասխան օրինակ:

Օ ր ի ն ա կ 1.5. Հետևյալ

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը

$$\{z \in \mathbb{C}^2 \colon \ |z_1| < 1, \ |z_2 < 1\}$$

միավոր բիդիսկն է: Խմբավորելով նրա անդամներն ըստ z_2-ի աստիճանների, ստանում ենք Հարտոգսի շարք՝

$$\sum_{m=0}^{\infty}(\sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1})z_2^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{1-z_1},$$

որի զուգամիտության տիրույթը՝ $\{z \in \mathbb{C}^2 \colon \ z_1 \neq 1, \ |z_2| < 1\}$, ակնհայտորեն, ավելի լայն է:

3. Հարտոգս-Լորանի շարքեր: Ճիշտ այնպես, ինչպես աստիճանային շարքից ստացվում են Հարտոգսի շարքեր, Լորանի շարքից էլ ստացվում են

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\widetilde{z})(z_n - a_n)^m,$$

այսպես կոչված Հ ա ր տ ո գ ս - Լ ո ր ա ն ի շ ա ր ք ե ր: Այդպիսի շարքերի զուգամիտության տիրույթը անվանվում է *Հարտոգսի կիսալրիվ տիրույթ* և բնութագրվում է նրանով, որ կամ չի հատվում համաչափության $z_n = 0$ հարթության հետ, կամ էլ ամեն մի z^0 կետի հետ մեկտեղ պարունակում է բոլոր այն z կետերը, որոնց համար $\widetilde{z} \in \widetilde{D}$ և $|z_n| \leqslant |z_n^0|$:

4. Շարքեր ըստ համասեռ բազմանդամների: $p_k(z)$ բազմանդամը կոչվում է k-*րդ աստիճանի համասեռ*, եթե $p_k(\zeta z) = \zeta p_k(z)$ բոլոր $z \in \mathbb{C}^n$ և $\zeta \in \mathbb{C}$ համար:

Վ ա ր ժ ո ւ թ յ ո ւ ն 1.2. Ապացուցել, որ տրված պայմանը համարժեք է, որ $p_k(z)$-ի բոլոր անդամների աստիճանը հավասար լինի k-ի:

Դիտարկենք *շ ա ր ք ը ս տ հ ա մ ա ս ե ռ* բազմանդամների, կամ, ինչպես երբեմն անվանում են *ա ն կ յ ու ն ա գ ծ ա յ ի ն շ ա ր ք*: Այդպիսի շարք կարելի է ստանալ աստիճանայինից, վերախմբավորելով նրա անդամները՝

$$\sum_{|m|=0}^{\infty} a_m z^m = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|m|=k} a_m z_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) :$$

Այդ վերախմբավորումը կարող է ընդլայնել շարքի զուգամիտության տիրույթը, քանի որ նրանք զուգամիտում են ավելի լայն դասի տիրույթ–ներում՝ շրջանաձև: Բերենք համապատասխան օրինակ:

Օ ր ի ն ա կ 1.6. Դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} : \tag{1.36}$$

Քանի որ աստիճանային շարքի զուգամիտությունը հասկացվում է բա–ցարձակ իմաստով, ապա այս շարքի զուգամիտության տիրույթը չի փոխվի, եթե նրա անդամները վերախմբավորենք հետևյալ ձևով՝

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!} |z_1|^{k_1} |z_2|^{k_2} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{k_1+k_2=m} \frac{m!}{k_1!\,(m-k_1)!} |z_1|^{k_1} |z_1|^{m-k_1}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} (|z_1|+|z_2|)^m ,$$

որի համար զուգամիտության տիրույթն է $D=\{z\colon\ |z_1|+|z_2|<1\}$:

Մյուս կողմից, նույն ձևով վերախմբավորելով (1.36)-ի անդամները, ստանում ենք ըստ համասեռ բազմանդամների

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(k_1+k_2)!}{k_1!\,k_2!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \sum_{m=0}^{\infty} (z_1+z_2)^m$$

շարք, որի համար զուգամիտության տիրույթը $D'=\{z\colon\ |z_1+z_2|<1\}$ բազմությունն է, որն ավելի լայն է, քան D-ն:

Ըստ համասեռ բազմանդամների շարքերի զուգամիտության տիրույթները շրջանաձև լրիվ տիրույթներն են:

Թ ե ո ր ե մ 1.27. *Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է D շրջանաձև լրիվ տիրույթում, ապա նա վերլուծվում է D-ի ներսում բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(z) \tag{1.37}$$

շարքի ըստ համասեռ բազմանդամների: Այստեղ p_k բազմանդամները կազմված են 0 կետում f-ի թեյլորյան վերլուծության այն անդամներից, որոնց համար $|m|=k$:

Ա պ ա ց ու յ ց: Սկզբնակետով և ֆիքսած $z^0\in D\setminus\{0\}$ կետով տանենք կոմպլեքս ուղիղ՝

$$l_{z^0}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n\colon\ \zeta=t\omega,\ t\in\mathbb{C}\}\,,\quad \text{որտեղ}\ \omega=\frac{z^0}{|z^0|}\,:$$

Քանի որ $0\in D$, ապա՝

$$f(\zeta)=\sum_{|m|=0}^{\infty}c_m\zeta^m=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\zeta)$$

աստիճանային շարքը զուգամիտում է սկզբնակետի ինչ-որ շրջակայքում և նրա հետքը l_{z^0} ուղղի վրա հետևյալն է՝

$$g(t)=f(t\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\omega)t^k\,:$$

Քանի որ $f\in\mathcal{O}(D)$, ապա φ-ն հոլոմորֆ է $\{t\in\mathbb{C}\colon\ |t|<R(\omega)\}$ շրջանում, որտեղ $R(\omega)=\sup R$ և ճշգրիտ վերին եզրը վերցված է ըստ բոլոր այն R-երի, որոնց համար բավարարվում է

$$\{t\in\mathbb{C}\colon\ |t|\leqslant R\}\subset D$$

պայմանը: Շրջանաձև լրիվ տիրույթի սահմանումից հետևում է, որ $|z^0| < R(\omega)$ և, ուրեմն, (1.37) շարքը զուգամետ է z^0-ում:

Այժմ ենթադրենք $M \Subset D$: Ընտրենք $r(\omega)$ ֆունկցիա, $0 < r(\omega) < R(\omega)$, և $q \in (0,1)$ թիվ այնպես, որ երբ $z \in M$, ապա $|z| \leqslant qr(\omega)$, որտեղ $\omega = z/|z|$: Ուրեմն բոլոր $z \in M$ կետերի համար

$$|p_k(z)| = |p_k(\omega)||z|^k \leqslant |p_k(\omega)|r^k(\omega)q^k : \tag{1.38}$$

Համաձայն թեյլորյան վերլուծության գործակիցների համար ինտեգրալային բանաձևի

$$p_k(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r(\omega)} \frac{f(t\omega)}{t^{k+1}}\, dt : \tag{1.39}$$

Քանի որ

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^n\colon\ \zeta = t\omega,\ \ |t| = r(\omega)\} \Subset D,$$

ապա այդ բազմության վրա f-ը սահմանափակ է՝ $|f(t\omega)| \leqslant C$: Այստեղից և (1.39)-ից ստանում ենք Կոշիի անհավասարությունները Թեյլորի շարքի գործակիցների համար՝ $|p_k(\omega)| \leqslant \dfrac{C}{r^k(\omega)}$: Տեղադրելով դրանք (1.38)-ի մեջ, ստանում ենք՝

$$|p_k(z)| \leqslant Cq^k, \quad z \in M :$$

Քանի որ $q \in (0,1)$, ապա այստեղից հետևում է (1.37) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը M-ի վրա:

$\square$

§ 8. Հոլոմորֆ արտապատկերումներ

1. Գաղափար հոլոմորֆ արտապատկերումների մասին: Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված է $f = (f_1, \ldots, f_m)$ վեկտոր-ֆունկցիա: f-ը կոչվում է *հոլոմորֆ արտապատկերում*, եթե նրա բոլոր f_k

կոմպոնենտները հոլոմորֆ են D-ում: Մասնավորապես, երբ $D \subset \mathbb{C}$, ապա f-ը կոչվում է *հոլոմորֆ կոր*:

Արտապատկերման համար z^0 կետը կոչվում է *ոչ կրիտիկական*, եթե համապատասխան Յակոբիի $\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial z_i}\right)$ մատրիցը այդ կետում ունի մաքսիմալ ռանգ:

Պարզվում է, որ հոլոմորֆ արտապատկերումների համար ճշմարիտ է մ ա ք ս ի մ ու մ ի ս կ զ բ ու ն ք ը: Որպեսզի այդ սկզբունքը ձևակերպվի բավականաչափ ընդհանուր դեպքի համար, ներմուծենք $\mathbb{C}$-համասեռ նորմի հասկացությունը:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1.9. $\|\cdot\|\colon\ \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}_+$ արտապատկերումը կոչվում է $\mathbb{C}$-համասեռ նորմ, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝

1) $\|z+w\| \leqslant \|z\| + \|w\|$ բոլոր $z, w \in \mathbb{C}^n$ համար,

2) $\|\lambda z\| = |\lambda| \cdot \|z\|$ բոլոր $\lambda \in \mathbb{C}$ և $z \in \mathbb{C}^n$ համար,

3) $\|z\| = 0$ միայն և միայն այն դեպքում, երբ $z = 0$:

Մենք հիմնականում գործ ենք ունենալու էվկլիդյան և պոլիդիսկային նորմերի հետ, որոնք $\mathbb{C}$-համասեռ նորմի պարզագույն օրինակներ են:

Թ ե ո ր ե մ 1.28 (մաքսիմումի սկզբունքը). *Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$, f-ը հոլոմորֆորեն արտապատկերում է D-ն $\mathbb{C}^m$-ի մեջ և $\|\cdot\|$ նշանակում է ինչ-որ $\mathbb{C}$-համասեռ նորմ $\mathbb{C}^m$-ում: Եթե $\|f(z)\|$-ը հասնում է իր մաքսիմումին $a \in D$ կետում, ապա՝*

(a) *f արտապատկերման f_k կոմպոնենտները գծորեն կախյալ են D-ում,*

(b) *$\|f(z)\|$-ը նույնաբար հաստատուն է D-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $b = f(a)$ և

$$B = \{w \in \mathbb{C}^m\colon\ \|w\| < \|b\|\}$$

գունդ է դիտարկվող նորմի նկատմամբ: Նորմի ընդհանուր հատկու– թյուններից հետևում է, որ B-ն բաց ուռուցիկ բազմություն է: Երբ $\|b\| = 0$, թեորեմի պնդումը ակնհայտ է, ենթադրենք, $\|b\| > 0$: Քանի որ $b \in \partial B$, ապա շնորհիվ B-ի ուռուցիկությանը, գոյություն ունի այդ կետում B-ին հենման հիպերհարթություն, որի հավասարումը կգրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\operatorname{Re} l(w) = \beta, \tag{1.40}$$

որտեղ $l(w) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k w^k$ և $\beta = \operatorname{Re}\, l(b)$: Այժմ դիտարկենք D-ում հոլոմորֆ $F(z) = e^{l\circ f(z)}$ ֆունկցիան: Մի կողմից $|F(z)| = e^{\operatorname{Re}\, l\circ f(z)} \leqslant$ $\leqslant e^{\beta}$, մյուս կողմից՝ $|F(a)| = \beta$: Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի սկալյար ֆունկցիաների համար (տես թեորեմ 1.21-ը) $l \circ f(z) \equiv \text{const}$ D-ում: Դա նշանակում է, որ f արտապատկերման f_k կոմպոնենտները բա– վարարում են

$$\sum_{k=1}^{m} a_k f_k(z) \equiv \text{const}$$

առնչությանը, այսինքն նրանք գծորեն կախված են D-ում: Բացի դրա– նից, բոլոր $z \in D$ համար f-ը պատկանում է (1.40) հենման հիպեր– հարթության և ∂B եզրի հատմանը, այսինքն $\|f(z)\| = \|f(b)\|$ բոլոր $z \in D$ կետերի համար: □

Մաքսիմումի սկզբունքից հետևում է Շվարցի լեմմայի հնարավոր ընդհանրացումներից մեկը:

Թեորեմ 1.29. Դիցուք $B_1 \subset \mathbb{C}^n$ և $B_2 \subset \mathbb{C}^m$ միավոր գնդեր են համապատասխանաբար $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ $\mathbb{C}$-համասեռ նորմերով, $f\colon\ B_1 \mapsto B_2$ հոլոմորֆ արտապատկերումը այնպի– սին է, որ $f(0) = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\|f(z)\|_2 \leqslant \|z\|_1 \tag{1.41}$$

բոլոր $z \in B_1$ համար:

Ա պ ա ց ու յ ց: Կոորդինատների սկզբնակետով և որևէ $z^0 \in \partial B_1$ կետով տանենք կոմպլեքս ուղիղ՝ $l(\zeta) = \zeta z_0$, $\zeta \in \mathbb{C}$: Ակնհայտ է, որ նրա հատմանը B_1-ի հետ ζ-ի հարթության վրա համապատասխանում է $U = \{\zeta\colon\ |\zeta| < 1\}$ շրջանը: Դիտարկենք

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta z^0)}{\zeta}\colon\ U \mapsto \mathbb{C}^m$$

հոլոմորֆ կորը, և ֆիքսենք ցանկացած $r \in (0,1)$: Այնուհետև, համաձայն թեորեմ 1.21-ի, $\|g(\zeta)\|_2 \leqslant 1/r$, եթե $\{|\zeta| \leqslant 1\}$: Անցնելով այս անհավասարության մեջ սահմանի, երբ $r \to 1$, կստանանք $\|g(\zeta)\|_2 \leqslant 1$, այսինքն $\|f(\zeta z^0)\|_2 \leqslant \zeta$ կամայական $\zeta \in U$ կետում:

Այժմ ենթադրենք $z \neq 0$ կամայական կետ է B_1-ից: Այդ դեպքում $z^0 = z/\|z\|_1 \in \partial B_1$ և տեղադրելով վերջին անհավասարության մեջ $\zeta = \|z\|_1$, ստանում ենք (1.41): $\square$

2. Բիհոլոմորֆ արտապատկերումներ: Երբ $m = n$, սահմանվում է բիհոլոմորֆ արտապատկերման գաղափար:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 1.10. Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon\ D \mapsto \mathbb{C}^n$ հոլոմորֆ արտապատկերումը բավարարում է հետևյալ լրացուցիչ պայմաններին՝

1. նա փոխմիարժեք է և հակադարձը ևս հոլոմորֆ է,
2. նրա բոլոր կետերը ոչ կրիտիկական են, այսինքն, նրա յակոբիանը՝
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \neq 0$$
բոլոր $z \in D$ կետերում:

Այդ դեպքում f-ը կոչվում է բիհոլոմորֆ արտապատկերում:

Պարզվում է, որ 2-րդ պայմանը հետևում է 1-ից, բայց մենք դրա ապացույցի վրա կանգ չենք առնելու:

$n = 1$ դեպքում բիհոլոմորֆությունը պարզապես համընկնում է կոնֆորմության հետ: $n > 1$ դեպքում դա արդեն այդպես չէ. օրինակ,

$$\begin{cases} w_1 = z_1 \\ w_2 = 2z_2 \end{cases}$$

արտապատկերումը $\mathbb{C}^2$-ից $\mathbb{C}^2$-ի վրա բիհոլոմորֆ է, բայց կոնֆորմ չէ: Մյուս կողմից,

$$z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$$

կոնֆորմ արտապատկերումը ոչ հոլոմորֆ է և ոչ էլ հակահոլոմորֆ:

Լ ե մ մ ա 1.3. *Դիցուք $f_k = u_k + iv_k$, $k = 1, \ldots, n$ ֆունկցիաները հոլոմորֆ են: Տեղի ունի*

$$\frac{\partial(u_1, v_1 \ldots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)} = \left|\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right|^2$$

հավասարությունը:

Ա պ ա ց ու յ ց: Հակիրճության համար մտցնենք նշանակումներ՝

$$\frac{\partial(u_1, v_1 \ldots, u_n, v_n)}{\partial(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)},$$
$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

և դիտարկենք

$$S = \begin{pmatrix} I^{(n)} & -iI^{(n)} \\ I^{(n)} & iI^{(n)} \end{pmatrix}$$

բլոկային մատրիցը, որտեղ $I^{(n)}$-ը n-րդ կարգի միավոր մատրից է: Դժվար չէ տեսնել, որ

$$S^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I^{(n)} & I^{(n)} \\ iI^{(n)} & -iI^{(n)} \end{pmatrix}$$

նրա հակադարձն է: Այնուհետև՝

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} I^{(n)} & -iI^{(n)} \\ I^{(n)} & iI^{(n)} \end{vmatrix} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \begin{vmatrix} I^{(n)} & I^{(n)} \\ iI^{(n)} & -iI^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I^{(n)} & I^{(n)} \\ iI^{(n)} & -iI^{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} - i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} & \frac{\partial(u-iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u-iv)}{\partial y} \\ \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} & \frac{\partial(u-iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u-iv)}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} \\ \frac{\partial f}{\partial \bar z} & \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2, \quad \text{որովհետև } \frac{\partial f}{\partial \bar z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}} = 0 : \qquad \square$$

Հ ե տ և ա ն ք 1.2. *Եթե $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված $f = (f_1, \dots, f_n)\colon D \mapsto \mathbb{C}^n$ հոլոմորֆ արտապատկերումը ունի զրոյից տարբեր $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ յակոբիան, ապա նա լոկալ հոմեոմորֆ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Իրոք, եթե f-ը դիտարկենք որպես $\mathbb{R}^{2n}$-ում որոշված արտապատկերում, ապա ըստ լեմմա 1.3-ի նրա իրական յակոբիանը զրո չի դառնում: Համաձայն իրական անալիզից հայտնի անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմի, f-ը յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում փոխմիարժեք է և ունի անընդհատ հակադարձը՝ դա էլ հենց նշանակում է, որ նա լոկալ հոմեոմորֆ է: $\square$

Այժմ նկատենք, որ լոկալ փոխմիարժեք հոլոմորֆ արտապատկերումը կարող է և չլինել փոխմիարժեք գլոբալ իմաստով, այսինքն, ամբողջ տիրույթում: Բայց եթե նա լինի գլոբալ փոխմիարժեք, ապա կլինի նաև բիհոլոմորֆ: Դրան է նվիրված հաջորդ թեորեմը:

Թ ե ո ր ե մ 1.30. *Ամեն մի հոլոմորֆ և փոխմիարժեք արտապատկերում բիհոլոմորֆ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ըստ պայմանի, $z = z(w)$ հակադարձ արտապատկերումը միարժեք է և մնում է միայն ապացուցել նրա հոլոմորֆությունը: Ինչպես և իրական անալիզում, ճշմարիտ է

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = 1$$

առնչությունը, որտեղից հետևում է, որ $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ յակոբիանը տարբեր է զրոյից:

Հաշվենք $w_k = w_k(z(w)),\ k = 1, \dots, n$ բարդ ֆունկցիաների ֆորմալ ածանցյալները՝

$$\frac{\partial w_k}{\partial \bar{w}_j} = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial w_k}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial \bar{w}_j} + \frac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_m} \frac{\partial \bar{z}_m}{\partial \bar{w}_j} \right) :$$

Աջ մասում ակնհայտորեն $\dfrac{\partial w_k}{\partial \bar{w}_j} = \dfrac{\partial w_k}{\partial \bar{z}_m} = 0$ և ուրեմն,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial z_m} \frac{\partial z_m}{\partial \bar{w}_j} = 0 :$$

Ստացանք n գծային հավասարումների համակարգ, որի որոշիչը $\dfrac{\partial w}{\partial z} \neq 0$: Ուրեմն նա ունի միակ լուծում՝

$$\frac{\partial z_m}{\partial \bar{w}_j} = 0, \quad m, j = 1, \dots, n :$$

Դա նշանակում է, որ $z = z(w)$ հակադարձ արտապատկերումը հոլոմորֆ է: $\square$

3. Ավտոմորֆիզմներ: Բիհոլոմորֆ արտապատկերումը կոչվում է D տիրույթի *ավտոմորֆիզմ*, եթե նա արտապատկերում է D-ն ինքն իր վրա: Կոմպոզիցիայի գործողության նկատմամբ ավտոմորֆիզմները կազմում են խումբ, որը նշանակվում է $\mathrm{Aut}\, D$: Մեր մոտակա նպատակը կլինի նկարագրել գնդի և պոլիդիսկի ավտոմորֆիզմները:

Միավոր գնդի ավտոմորֆիզմները: Հիշեցնենք, որ միավոր շրջանին պատկանող ամեն մի α թվին համապատասխանում է շրջանի ավտոմորֆիզմ, որը տեղափոխում է α և 0 կետերը, այն է՝ $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha} z}$: Պարզվում է, որ նույն պնդումը ճիշտ է նաև $\mathbb{C}^n$-ում միավոր գնդի դեպքում:

Դիցուք $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$: Նախ կառուցենք ավտոմորֆիզմ, որը տվյալ ֆիքսած $a \in B^n$ կետը արտապատկերում է $z = 0$ կենտրոնի: Նշանակենք $p_a(z)$-ով z կետի պրոյեկցիան 0 և a կետերով անցնող l_a կոմպլեքս ուղղի վրա և $q_a(z)$-ով նրա պրոյեկցիան l_a-ի օրթոգոնալ լրացման վրա: Հեշտ է տեսնել, որ

$$p_a(z) = \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a, \quad \text{որտեղ } \langle z, a\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{a}_k,$$

իսկ $q_a(z) = z - p_a(z)$: $a = 0$ դեպքում համարում ենք $p_0(z) \equiv 0$: Ապացուցենք, որ որոնելի ավտոմորֆիզմը հետևյալ տեսքի է՝

$$\varphi_a\colon\ w = \frac{a - p_a(z) - \alpha q_a(z)}{1 - \langle z, a\rangle}, \tag{1.42}$$

որտեղ $\alpha = \sqrt{1 - |a|^2}$: Այս արտապատկերումը որոշված է

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \langle z, a\rangle \neq 1\}$$

տիրույթում, ընդ որում $\Omega \supset \overline{B}^n$, որովհետև ըստ Շվարցի անհավասարության $|\langle z, a\rangle| \leqslant |a|\,|z|$ և $|a| < 1$: Քանի որ $p_a(a) = a$ և $q_a(a) = 0$, ապա $\varphi_a(a) = 0$:

Հարկ եղած դեպքում կատարելով $\mathbb{C}^n$ տարածության ունիտար ձևափոխություն, կարող ենք ենթադրել, որ $a = (\widetilde{0}, a_n)$: Այդ դեպքում $p_a(z) = (\widetilde{0}, z_n)$, $q_n(z) = (\widetilde{z}, 0)$ և (1.23)-ը ընդունում է

$$\widetilde{w} = -\alpha\frac{\widetilde{z}}{1-\bar{a}_n z_n}, \quad w_n = \frac{a_n - z_n}{1 - \bar{\alpha}_n z_n} \tag{1.43}$$

տեսքը: Հաշվելով $|w|^2$, կստանանք՝

$$|w|^2 = \frac{|z|^2 + |a|^2(1-|\widetilde{z}|^2) - 2Re(\bar{a}_n z_n)}{1 + |\bar{a}_n z_n|^2 - 2Re(\bar{a}_n z_n)},$$

որտեղից երևում է, որ եթե $|z| < 1$, ապա $|w| < 1$, իսկ եթե $|z| = 1$, ապա $|w| = 1$: Այսպիսով, φ_a-ն արտապատկերում է $\overline{B}^n$-ն ինքն իր վրա: Օգտվելով (1.43)-ից, կարելի է համոզվել, որ $\varphi_a \circ \varphi_a(z) \equiv z$: Դրանից նախ հետևում է, որ $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, և հետո որ φ_a-ն փոխմիարժեք ձևով է արտապատկերում $\overline{B}^n$-ն $\overline{B}^n$-ի վրա, այսինքն, φ_a-ն բիհոլոմորֆ է:

Պարզ է, որ եթե U-ն ունիտար օպերատոր է $\mathbb{C}^n$-ում, ապա $U \circ \varphi_a$-ն նորից պատկանում է $\mathrm{Aut}\, B^n$-ին: Ապացուցենք, որ դրանցով սպառվում են գնդի բոլոր ավտոմորֆիզմները:

Թ ե ո ր ե մ 1.31. Յանկացած $f \in \mathrm{Aut}\, B^n$-ի համար գոյություն ունեն $a \in B^n$ կետ և U ունիտար օպերատոր $\mathbb{C}^n$-ում այնպիսին, որ $f = U \circ \varphi_a$:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք a-ն 0 կետի նախապատկերն է՝ $f(a) = 0$: Այդ դեպքում $g = f \circ \varphi_a^{-1}$ արտապատկերումը ինչպես և նրա g^{-1} հակադարձը, բիհոլոմորֆ են գնդում և անշարժ են թողնում նրա կենտրոնը: Դրանցից յուրաքանչյուրի նկատմամբ կիրառելով Շվարցի լեմման էվկլիդյան նորմով, կստանանք $|g(z)| \leqslant |z|$ և $|g^{-1}(w)| \leqslant |w|$ ամենուրեք B^n-ում, որտեղից հետևում է՝

$$|g(z)| \equiv |z|, \quad z \in B^n : \tag{1.44}$$

Այժմ ֆիքսենք $z^0 \in \partial B^n$ և $\{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ շրջանում դիտարկենք $G(\zeta) = \dfrac{g(\zeta z^0)}{\zeta}$ վեկտոր-ֆունկցիան: Քանի որ $g(0) = 0$, G-ն հոլոմորֆ է միավոր շրջանում: 1.44-ից հետևում է $|G(\zeta)| \equiv 1$: Հաշվի առնելով գնդի խիստ ուռուցիկությունը, մաքսիմումի սկզբունքից եզրակացնում ենք, որ G-ն հաստատուն է՝ $G(\zeta) = c(z^0)$:

Այսպիսով, $g(\zeta z^0) = c(z^0)\zeta$, ինչը նշանակում է, որ g-ն գծային է B^n-ի և ամեն մի $z = \zeta z^0$ կոմպլեքս հարթության հատման վրա

$$g(\lambda z) = \lambda g(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| < 1 : \tag{1.45}$$

Վերլուծելով g-ի կոորդինատները շարքի ըստ համասեռ բազմանդամ–ների, ստանում ենք

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z)$$

վերլուծություն, որտեղ P_k-երը համասեռ վեկտոր-բազմանդամներ են: Հաշվի առնելով (1.45)-ը, այստեղից ստացվում է, որ ցանկացած $\lambda \in \mathbb{C}$ $(|\lambda| < 1)$ թվի համար՝

$$g(\lambda z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k P_k(z) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) :$$

Դիտարկելով ստացված շարքերը որպես աստիճանային ըստ ζ-ի, միա–կության թեորեմից եզրակացնում ենք, որ բոլոր P_k-երը, բացի P_1-ից, նույնաբար հավասար են զրոյի: Այսպիսով, g-ն գծային է և, ինչպես վկայում է (1.44)-ը, նա ունիտար է՝ $g = f \circ \varphi_a^{-1} = U$: Այսպիսով, $f = U \circ \varphi_a$: □

Իսկ այժմ հաշվենք $\operatorname{Aut} B^n$ խմբի անկախ պարամետրերի քանակը, որոնցից նա կախված է: (1.42)-ից երևում է, որ φ_a-ն որոշվում է a կետով, այսինքն, կախված է $2n$ իրական պարամետրերից: Մյուս կող–մից, ունիտար U ձևափոխությանը համապատասխանում է ունիտար $A = (a_{kj})$ մատրիցը, որի տարրերը բավարարում են n^2 իրական առնչություններին: Իսկապես, ունիտար լինելու պայմանը արտահայտ– վում է $\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\bar{a}_{ji} = \delta_{kj}$ հավասարումներով, որտեղ δ_{kj}-ն Կրոնեկերի սիմվոլն է: Այդ հավասարումների քանակը հավասար է n^2: Դրանցից n հատը (երբ $k = j$) իրական են, իսկ մնացածները՝ զույգ առ զույգ կոմպլեքս համալուծ են, այնպես որ մնում են $(n^2 - n)/2$ կոմպլեքս, այսինքն $n^2 - n$ իրական պայմաններ: Այսպիսով, $\operatorname{Aut} B^n$ *խումբը կախված է $n^2 + n$ իրական պարամետրերից*:

Նկատենք $\operatorname{Aut} B^n$ խմբի մի կարևոր հատկություն. ցանկացած $a \in \in B^n$ և $b \in B^n$ կետերի համար գոյություն ունի φ ավտոմորֆիզմ, որի համար $\varphi(a) = b$: Իրոք, որպես φ կարելի է վերցնել $\varphi = \varphi_b \circ \varphi_a$ արտապատկերումը:

Պ ո լ ի դ ի ս կ ի ա վ տ ո մ ո ր ֆ ի զ մ ն ե ր ը : Նախ նկատենք, որ

$$w_k = e^{i\theta_k} \frac{z_k - a_k}{1 - \bar{a}_k z_k}, \quad k = 1, \dots, n \tag{1.46}$$

կոտորակագծային ձևափոխություններն ակնհայտորեն պատկանում են $\operatorname{Aut} U^n$-ին: Կատարելով կոորդինատների $w_k \mapsto w_{\sigma(k)}$ տեղափոխու– թյուն, կստանանք նոր ավտոմորֆիզմներ: Պարզվում է, որ դրանցով սպառվում են պոլիդիսկի բոլոր ավտոմորֆիզմները:

Թ ե ո ր ե մ 1.32. *$\operatorname{Aut} U^n$ խումբը կազմված է*

$$z_k \mapsto e^{i\theta_{\sigma(k)}} \frac{z_{\sigma(k)} - a_{\sigma(k)}}{1 - \bar{a}_{\sigma(k)} z_{\sigma(k)}}, \quad k = 1, \dots, n \tag{1.47}$$

տեսքի բոլոր ձևափոխություններից, որտեղ σ-ն $(1, \dots, n)$ բազ– մության կամայական տեղափոխություն է:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք $f \in \operatorname{Aut} U^n$, $a = f(0)$ և g-ն (1.46) բա– նաձևով որոշվող արտապատկերում է: Այդ դեպքում $F = g \circ f$-ը բիհո– լոմորֆորեն արտապատկերում է U^n-ը իր վրա այնպես, որ $F(0) = 0$: Կիրառելով F-ի և F^{-1}-ի նկատմամբ Շվարցի լեմման պոլիդիսկային նորմով, կստանանք, ինչպես նախորդ թեորեմում, որ

$$\|F(z)\| = \|z\| \quad \text{բոլոր} \ z \in U^n : \tag{1.48}$$

Այժմ դիտարկենք F արտապատկերման որևէ F_m կոորդինատ: Քանի որ $\|F(z)\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |F_i(z)|$ և $F(U^n) = U^n$, ապա U^n-ում գոյություն ունի բաց ենթաբազմություն, որտեղ $\|F(z)\| = |F_k(z)|$: Այդ ենթաբազմության նախապատկերում ինչ-որ j-ի համար կունենանք $\|z\| = |z_j|$: Կիրառելով F_k ֆունկցիայի նկատմամբ Շվարցի միաչափ լեմման, և հաշվի առնելով (1.48)-ից հետևող $|F_k(z)| = |z_j|$ հավասարությունը, կստանանք $F_k(z) = e^{i\theta(z)} z_j$: Այստեղ θ-ն կարող է կախված լինել մնացած z_i կոորդինատներից, բայց քանի որ $e^{i\theta(z)}$-ը հոլոմորֆ է և հաստատուն է իր մոդուլով, ապա նա հաստատուն է՝ $\theta(z) = \theta_j$: Այսպիսով, $F_k(z) = e^{i\theta_j} z_j$ բաց ենթաբազմության վրա, և ուրեմն ամբողջ U^n-ում ըստ միակության թեորեմի:

Եվ վերջապես, F-ի փոխմիարժեք լինելուց հետևում է, որ $j = j(k)$-ն հանդիսանում է $(1, \ldots, n)$ ինդեքսների տեղափոխություն: Դա նշանակում է, որ $f = g^{-1} \circ F$ արտապատկերումը (1.47) տեսքի է: □

Թեորեմից հետևում է, որ $\mathrm{Aut}\, U^n$ խումբը բնական ձևով տրոհվում է $(1, \ldots, n)$ բազմության տեղափոխություններից առաջացած $n!$ հատ ենթախմբերի, որոնցից յուրաքանչյուրը կախված է $3n$ իրական պարամետրերից. n հատ իրական θ_k և նույնքան կոմպլեքս a_k թվերից: Ստացվեց, որ $\mathrm{Aut}\, U^n$ *խումբը կախված է* $3n$ *իրական պարամետրերից*: Ինչպես տեսնում ենք, B^n-ում և U^n-ում ավտոմորֆիզմները կախված են տարբեր քանակով պարամետրերից. գնդի դեպքում $n^2 + 2n$, իսկ պոլիդիսկի՝ $3n$:

Ունենալով $\mathrm{Aut}\, B^n$ և $\mathrm{Aut}\, U^n$ խմբերի նկարագրությունը, կարող ենք ապացուցել հետևյալ հետաքրքիր փաստը, որը նկատել էր Պուանկարեն դեռ 1907 թվականին:

Թ ե ո ր ե մ 1.33 (Պուանկարե). *$n > 1$ դեպքում գոյություն չունի B^n գնդի և U^n պոլիդիսկի բիհոլոմորֆ արտապատկերում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ենթադրենք, գոյություն ունի $f\colon\ B^n \mapsto U^n$ բիհոլոմորֆ արտապատկերում: Այդ դեպքում գոյություն կունենար

$$f^*\colon\ \mathrm{Aut}\,B^n \mapsto \mathrm{Aut}\,U^n$$

համապատասխան խմբերի իզոմորֆիզմ

$$f^*\colon\ \varphi \mapsto f\circ\varphi\circ f^{-1}, \quad \varphi\in\mathrm{Aut}\,B^n$$

բանաձևով: Բայց դա հնարավոր չէ, որովհետև, ինչպես տեսանք, այդ խմբերը կախված են տարբեր քանակով պարամետրերից.

Բերենք մի այլ ապացույց: Դիցուք $a = f(0)$, որտեղ f-ը վերը նշված ենթադրվելիք արտապատկերումն է և վերցնենք $g\in\mathrm{Aut}\,U^n$ այնպիսին, որ $g(a) = 0$: Այդ դեպքում $F = g\circ f$-ն բիհոլոմորֆորեն արտապատկերում է B^n-ը U^n-ի վրա այնպես, որ $F(0) = 0$: Կիրառելով ինչպես նախորդ թեորեմներում F-ի և F^{-1}-ի նկատմամբ Շվարցի լեմման, կստանանք, որ $\|F(z)\| = |z|$ բոլոր $z\in B^n$ կետերի համար: Այստեղից հետևում է, որ $\{z\colon\ |z| = 1/2\}$ էվկլիդյան գնդոլորտը F-ը արտապատկերում է ոչ ողորկ $\{z\colon\ \|z\| = 1/2\}$ մակերևույթի, ինչը հնարավոր չէ, որովհետև F-ը դիֆեոմորֆիզմ է: □

Այսպիսով, պարզվեց, որ Ռիմանի թեորեմը հարթության վրա միակապ տիրույթների կոնֆորմ համարժեքության մասին $\mathbb{C}^n$ տարածությունում $n > 1$ դեպքում ճշմարիտ չէ:

Ինչպես և միաչափ դեպքում, գնդի ու պոլիդիսկի ավտոմորֆիզմները կոտորակագծային արտապատկերումներ են: Թվում է, թե նմանությամբ ամբողջ $\mathbb{C}^n$ տարածության ավտոմորֆիզմները պետք է լինեն գծային, բայց դա այդպես չէ: Օրինակ,

$$f\colon\ (z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \varphi(z_2), z_2)$$

տեսքի արտապատկերումը, որտեղ φ-ն մեկ փոփոխականի կամայական անբողջ ֆունկցիա է, $\mathbb{C}^2$ տարածության ավտոմորֆիզմ է: Իրոք, և ինքը, և նրա

$$f^{-1}\colon\ (w_1, w_2) \mapsto (w_1 - \varphi(w_2), w_2)$$

հակադարձը հոլոմորֆ են $\mathbb{C}^2$-ում:

Ֆատուի կողմից կառուցվել է $f\colon\ \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ բիհոլոմորֆ արտապատկերման օրինակ, որի դեպքում $\mathbb{C}^2 \setminus f\left(\mathbb{C}^2\right)$ չընդունվող արժեքների բազմությունը պարունակում է ոչ դատարկ բաց բազմություն: Այդ օրինակը վկայում է, որ Պիկարի թեորեմը իր ուղղակի ձևակերպումով բազմաչափ դեպքում ճիշտ չէ: Կան այդ թեորեմի ընդհանրացումներ տարբեր ձևակերպումներով, բայց դրանց վրա կանգ չենք առնի:

§ 9. Գաղափար մերոմորֆ ֆունկցիայի մասին

1. Մերոմորֆ ֆունկցիայի սահմանումը: f ֆունկցիան կոչվում է *մերոմորֆ G տիրույթում*, եթե

1. հոլոմորֆ է ամենուրեք G-ում, բացի ինչ-որ P բազմությունից,
2. անալիտիկորեն չի շարունակվում P-ի ոչ մի կետ,
3. կամայական $z^0 \in P$ կետի համար գոյություն ունի U շրջակայք և U-ում հոլոմորֆ $\psi \not\equiv 0$ ֆունկցիա այնպիսիք, որ $G \bigcap (U \setminus P)$ բազմության վրա հոլոմորֆ $\varphi = f\psi$ ֆունկցիան անալիտիկորեն շարունակվում է U-ի մեջ:

Պարզ է, որ $\psi(z^0) = 0$ յուրաքանչյուր $z^0 \in P \bigcap U$ կետում. հակառակ դեպքում $f\psi$ ֆունկցիայի հետ մեկտեղ f-ը ևս կշարունակվեր z^0 կետի որևէ շրջակայք: Ենթադրենք, կամայական $z^0 \in P$ կետի համար φ և ψ ֆունկցիաները չունեն z^0-ում հոլոմորֆ ընդհանուր արտադրիչներ, որոնք զրո են դառնում այդ կետում. հակառակ դեպքում կարելի է φ-ն և ψ-ն կրճատել այդպիսի արտադրիչների վրա: Այսպիսով, P-ն անալիտիկ բազմություն է, որովհետև իրեն պատկանող կամայական z^0 կետի շրջակայքում նա որոշվում է

$$P = \{z \in U\colon\ \psi(z) = 0\}$$

պայմանով: P բազմությունը կոչվում է f ֆունկցիայի *բևեռային բազմություն:*

Բևեռային բազմության փարբեր կետերում f-ի վարքը կարող է լինել տարբեր: $z^0 \in P$ կետը կոչվում է *բևեռ,* եթե $\varphi = f\psi$ ֆունկցիան տարբեր է զրոյից այդ կետում, և կոչվում է *անորոշության կետ,* եթե $\varphi = 0$: Բևեռին մոտենալիս $f = \dfrac{\varphi}{\psi}$ ֆունկցիան ձգտում է անվերջությանը, իսկ անորոշության կետի շրջակայքում նա ընդունում է կամայական արժեք: Իսկապես, z^0-ն պարունակող

$$\{z \in U: \ \varphi(z) - w_0\psi(z) = 0\}$$

անալիտիկ բազմության վրա $f \equiv w_0$:

Օ ր ի ն ա կ 1.7. $f(z) = \dfrac{z_2}{z_1}$ ֆունկցիան մերոմորֆ է $\mathbb{C}^2$-ում, նրա բևեռային բազմությունը $\{z_1 = 0\}$ կոմպլեքս ուղիղն է: Այդ ուղղի բոլոր կետերը բևեռներ են, բացի $\{z_1 = 0, \ z_2 = 0\}$ կետից, որը անորոշության կետ է:

2. Կուզենի հիմնախնդիրը: Ինչպես հայտնի է, մեկ փոփոխականի դեպքում հնարավոր է կառուցել մերոմորֆ ֆունկցիա, որն ունի տվյալ բևեռներն ու գլխավոր մասերը: Ձևակերպենք այդ խնդիրը հետևյալ ձևով: Դիցուք $G \subset \mathbb{C}$ տիրույթում տրված է G-ում սահմանային կետ չունեցող a_k կետերի և

$$g_k(z) = \sum_{m=1}^{n_k} \frac{c_m^{(k)}}{(z - a_k)^m}$$

ֆունկցիաների հաջորդականություն: Դիտարկենք G տիրույթի ծածկույթ $U_\alpha \subset G$ ենթատիրույթներով, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է վերջավոր թվով a_k կետեր և նշանակենք f_α-ով g_k-երի գումարն ըստ $a_k \in U_\alpha$ կետերի: Եթե U_α-ն a_k կետեր չի պարունակում, ապա կհամարենք $f_\alpha \equiv 0$: Բոլոր f_α-ները մերոմորֆ են, ընդ որում, եթե $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$, ապա այդ հատման վրա $f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է: Անհրաժեշտ է G-ում կառուցել այնպիսի մերոմորֆ f ֆունկցիա, որ $(f - f_\alpha)$ տարբերությունը լինի հոլոմորֆ U_α-ում բոլոր α-ների համար: Ըստ Միտտագ–Լեֆլերի թեորեմի, այդ խնդիրը միշտ ունի լուծում կամայական հարթ G տիրույթի համար:

Այդպիսի տեսքով խնդիրը թույլ է տալիս ընդհանրացում կամայական $G \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթի համար և կոչվում է *Կուզենի առաջին հիմնախնդիր:*

Ստորև G տիրույթի $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ծածկույթ ասելով հասկանալու ենք նրա U_α բաց ենթաբազմությունների այնպիսի համակարգ, որ $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = G$ և ամեն մի $p \in G$ կետ պատկանում է վերջավոր թվով U_α-ներին:

Այդ հիմնախնդրի դրվածքը հետևյալն է.

Տրված է $G \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթի $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ ծածկույթ և յուրաքանչյուր U_α-ում մերոմորֆ f_α ֆունկցիա, ընդ որում ոչ դատարկ $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ հատումների վրա $f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta}$ ֆունկցիաները հոլոմորֆ են: Պահանջվում է G-ում կառուցել այնպիսի մերոմորֆ f ֆունկցիա, որ $(f - f_\alpha)$-ն լինի հոլոմորֆ U_α-ում բոլոր α-ների համար:

Բազմաչափ դեպքում $(n > 1)$ Կուզենի առաջին հիմնախնդիրը ոչ միշտ ունի լուծում (տես խնդիր 2.20):

Խնդիրներ

Խ ն դ ի ր 1.1. Արտահայտել (1.2) հավասարումների մեջ մասնակցող a_{ik}, a'_{ik} և b_i թվերը (1.1)-ի α_{ik} և β_i թվերի միջոցով:

Խ ն դ ի ր 1.2. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$ տարածության $\mathbb{R}^n_x$ և $\mathbb{R}^n_y$ n-չափանի հարթությունները կոմպլեքս հարթություններ չեն:

Խ ն դ ի ր 1.3. Նկարագրել $\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| = 1\}$ գնդոլորտի հատույթները $z = a + \omega\zeta$ $(a, \omega \in \mathbb{C}^n;\ \zeta \in \mathbb{C})$ կոմպլեքս ուղիղներով:

Խ ն դ ի ր 1.4. Նկարագրել $\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z| < 1\}$ գնդի և

$$\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2 < 1\}$$

բիդիսկի հատումները $y_2 = \alpha$ եռաչափ հարթություններով, տարբեր α-ների դեպքում:

Խ ն դ ի ր 1.5. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում իրական S հիպերհարթության ցանկացած կետով անցնում է S-ին պատկանող կոմպլեքս հիպերհարթություն:

Խ ն դ ի ր 1.6. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում ուռուցիկ տիրույթը նաև գծորեն ուռուցիկ է:

Խ ն դ ի ր 1.7. Բերել $\mathbb{C}^n$-ում գծորեն ուռուցիկ տիրույթի օրինակ, որը սակայն ուռուցիկ չէ:

Խ ն դ ի ր 1.8. Բերել $\mathbb{C}^n$-ում տիրույթի օրինակ, որը շրջանաձև է, սակայն n-շրջանաձև չէ:

Խ ն դ ի ր 1.9. Որոշել հետևյալ շարքերի զուգամիտության տիրույթները.

ա) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z_1z_2)^k$,

բ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z_1z_2)^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z_1^k+z_2^k}{2^k}$,

գ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z_1z_2^2)^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}(z_1^2z_2)^k$:

Խ ն դ ի ր 1.10. Կառուցել աստիճանային շարք, որի զուգամիտության տիրույթն է՝

ա) $\{z\in\mathbb{C}^2\colon\ |z_1|+|z_2|<1\}$ տիրույթը,

բ) $\{z\in\mathbb{C}^2\colon\ |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$ գունդը:

Խ ն դ ի ր 1.11. Կառուցել աստիճանային շարք, որի համար զուգամիտության բազմությունն է՝

$$\{z\in\mathbb{C}^n\colon\ |z|<1\}\bigcup\{|z|<2,\ z_2=0\}\ :$$

Խ ն դ ի ր 1.12. Ցույց տալ, որ $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}z_1^mz_2^n$ աստիճանային շարքը, որի գործակիցները կազմում են

$$\begin{array}{ccccc}
0! & 1! & 2! & 3! & \cdots\\
1! & -1! & -2! & -3! & \cdots\\
2! & -2! & 0 & 0 & \cdots\\
3! & -3! & 0 & 0 & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

անվերջ մատրիցը, ոչ բացարձակ զուգամիտում է (1,1) կետում և տարամիտում է $\mathbb{C}^2$ տարածության մնացած բոլոր կետերում (չհաշված, իհարկե, սկզբնակետը): Սա նշանակում է, որ Աբելի թեորեմը իր սովորական ձևակերպումով ճիշտ չէ բազմապատիկ շարքերի համար:

Խ ն դ ի ր 1.13. Բերել n-հարմոնիկ ֆունկցիայի օրինակ, որը պլյուրիհարմոնիկ չէ:

Խ ն դ ի ր 1.14. Ապացուցել, որ $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի $u(z)$ ֆունկցիան պլյուրիհարմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ∂u դիֆերենցիալ ձևը փակ է:

Խ ն դ ի ր 1.15. Ապացուցել, որ որպեսզի $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում $u(z)$ ֆունկցիան լինի պլյուրիհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $a \in D$ կետի շրջակայքում նա լինի հոլոմորֆ ֆունկցիայի իրական մաս:

Խ ն դ ի ր 1.16. Դիցուք $u(z)$ ֆունկցիան $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ $u(z)$-ը պլյու– րիհարմոնիկ է D-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հետքը կա– մայական l կոմպլեքս ուղղի վրա հարմոնիկ է $l \cap D$-ում:

Խ ն դ ի ր 1.17. Դիցուք $u(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է ըստ իրական կոորդինատների $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում և պլյուրիհարմոնիկ է որևէ $V \subset \subset D$ գնդում: Ապացուցել, որ $u(z)$-ը պլյուրիհարմոնիկ է ամբողջ D-ում:

Խ ն դ ի ր 1.18. Դիցուք f-ը $\mathbb{C}^n$-ում ամբողջ ֆունկցիա է, որը բավարարում է

$$|f(z)| \leqslant C\,(1+|z|^m)$$

անհավասարությանը, որտեղ C-ն և m-ը հաստատուն մեծություններ են: Ապացուցել, որ f-ը բազմանդամ է, որի աստիճանը չի գերազանցում m թիվը:

Խ ն դ ի ր 1.19. Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է $E \subset \mathbb{C}^n$ միավոր պոլի– դիսկում, $|f(z)| \leqslant M$ և $f(0) = 0$: Ապացուցել, որ

$$|f(z)| \leqslant M\rho(z), \quad z \in E,$$

որտեղ $\rho(z) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |z_k|$:

(Սա Շվարցի լեմմայի բազմաչափ նմանակներից մեկն է:)

Խ ն դ ի ր 1.20. Դիցուք M-ը կոմպլեքս հարթության վրա միավոր շրջանի ենթաբազմություն է, որի համար 0-ն խտացման կետ է, իսկ $f(z_1, z_2)$-ը միավոր E բիդիսկում որոշված սահմանափակ ֆունկցիա է, որը հոլոմորֆ է ըստ z_1-ի, երբ $|z_2| < 1$, և հոլոմորֆ է ըստ z_2-ի, երբ $z_1 \in M$: Ապացուցել, որ f-ը հոլոմորֆ է E-ում:

Խ ն դ ի ր 1.21. Ապացուցել, որ եթե $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ ֆունկ– ցիան բազմանդամ է ըստ յուրաքանչյուր z_ν-ի, $\nu = 1, \ldots, n$, ապա f-ը բազմանդամ է:

Խ ն դ ի ր 1.22. Ցույց տալ, որ $B = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ գնդում հոլոմորֆ

$$f(z) = \frac{z_1^3}{1 - z_2^2}$$

ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{B}$-ում, բայց չի ներկայացվում

$$f(z) = z_1 \varphi(z_1, z_2)$$

տեսքով, որտեղ φ-ն հոլոմորֆ է B-ում և անընդհատ է $\overline{B}$-ում:

Խ ն դ ի ր 1.23. Դիցուք E-ն միավոր պոլիդիսկն է $\mathbb{C}^n$-ում և $f \in$ $\in \mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$: Ապացուցել, որ f-ը հոլոմորֆ է յուրաքանչյուր

$$\Delta_{j,a} = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z_m = a_m,\ |a_m| \leqslant 1,\ m = 1, \cdots, n,\ m \neq j,\ |\zeta_j| < 1\}$$

շրջանում:

Խ ն դ ի ր 1.24. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $0 \in$ $\in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում և հավասար է զրոյի իրական հարթության վրա, ապա $f \equiv 0$ այդ շրջակայքում:

Խ ն դ ի ր 1.25. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $0 \in \mathbb{C}^2$ կետի շրջակայքում և հավասար է զրոյի $\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ z_1 = \bar{z}_2\}$ հարթության վրա, ապա $f \equiv 0$ այդ շրջակայքում:

Խ ն դ ի ր 1.26. $\mathbb{C}^n$-ում կառուցել կետերի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է E միավոր պոլիդիսկի կենտրոնին և միակության բազմություն է $\mathcal{O}(E)$ դասի համար:

Խ ն դ ի ր 1.27. $B = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ գնդի եզրի վրա կառուցել հաշվելի թվով կորեր, որոնցից ոչ մեկը $\mathcal{O}(B) \cap C(\overline{B})$ դասի համար միակության բազմություն չէ և որոնց միավորումը այդպիսի բազմություն է:

Խ ն դ ի ր 1.28. $B = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ գնդի եզրի վրա կառուցել $\mathcal{O}(B)\cap C(\overline{B})$ դասի համար փակ միակության բազմություն, որի գծային չափը վերջավոր է:

Խ ն դ ի ր 1.29. Ապացուցել, որ $E \subset \mathbb{C}^n$ միավոր պոլիդիսկի հենքի կամայական ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն $\mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$ դասի համար միակության բազմություն է:

Խ ն դ ի ր 1.30. Ապացուցել, որ $E \subset \mathbb{C}^n$ միավոր պոլիդիսկում կամայական n-հարմոնիկ $f(z)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի Պուասոնի բազմաչափ $f(z) = P[f](z)$ բանաձևը:

Խ ն դ ի ր 1.31. Դիցուք $f \in C(\Gamma)$ և $f_k \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է, և $f_k \to f$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{k\to\infty} P[f_k](z) = P[f](z)$$

հավասարաչափ E-ի վրա:

Խ ն դ ի ր 1.32. Ապացուցել, որ եթե $f \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է, ապա նրա $P[f](z)$ Պուասոնի ինտեգրալը անընդհատորեն շարունակվում է $\overline{E}$-ի վրա:

Խ ն դ ի ր 1.33. Դիցուք $f \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է: Ապացուցել, որ որպեսզի f-ը շարունակվի մինչև $\mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^k\, d\zeta = 0$$

բոլոր $k = (k_1, \dots, k_n)$ վեկտորների համար, որտեղ k_ν-երը ամբողջ են և նրանցից գոնե մեկը ոչ բացասական է:

Խ ն դ ի ր 1.34. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է E միավոր պոլիդիսկի ∂E եզրի վրա և յուրաքանչյուր

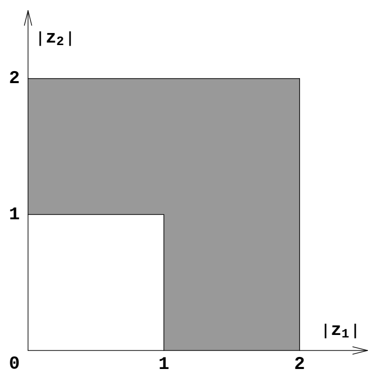
$$\Delta_{j,a} = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \ z_m = a_m, \ |a_m| \leqslant 1, \ m = 1, \cdots, n, \ m \neq j, \ |\zeta_j| < 1\}$$

շրջանում հոլոմորֆ է: Ապացուցել, որ f-ը շարունակվում է մինչև $\mathcal{O}(E) \cap$ $\cap\, C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա:

Խ ն դ ի ր 1.35. Ապացուցել, որ կամայական ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon \ |z_1| < 2, \ |z_2| < 2\right\} \setminus \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1\right\}$$

սնամեջ բիդիսկում, (գծագրում պրվում է D-ի ռեյնհարտյան դիագրամը), անալիտիկորեն շարունակվում է $\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon \ |z_1| < 2, \ |z_2| < 2\right\}$ բիդիսկի մեջ:



Գ Լ ՈՒ Խ II

ՀՈԼՈՄՈՐՖՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐ

§ 10. Անալիտիկ շարունակություն

1. Շարունակություն եզրի շրջակայքից. Առաջին գլխում մենք արդեն հանդիպել ենք մի երևույթի, որը յուրահատուկ է միայն մի քանի փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաներին, այն է՝ այսպես կոչված հարկադիր անալիտիկ շարունակման հետ: Թեորեմ 1.25-ում պնդվում էր, որ գնդային շերտում ամեն մի հոլոմորֆ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է գնդի մեջ (նույնը պոլիդիսկային շերտի համար տես՝ խնդիր 1.35-ում): Ստորև բերված թեորեմ 3.14-ից հետևում է, որ այդ երևույթը ունի ընդհանուր բնույթ. *հոլոմորֆ ֆունկցիան չի կարող ունենալ կոմպակտ եզակիություններ*:

Թ ե ո ր ե մ 2.1. Դիցուք Ω-ն տիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, $n>1$, K-ն այնպիսի կոմպակտ ենթաբազմություն է Ω-ում, որ $\Omega\setminus K$-ն կապակցված է: Այդ դեպքում կամայական $g\in\mathcal{O}(\Omega\setminus K)$ ֆունկցիա կարելի է անալիտիկորեն շարունակել ամբողջ Ω-ի վրա:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $\varphi\in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ այնպիսին է, որ $\varphi\equiv 1$ K կոմպակտ բազմության V շրջակայքում և φ-ն ունի կոմպակտ $K_0\subset\Omega$ կրիչ: Կառուցենք հետևյալ $(0,1)$-ձևը

$$f=\begin{cases} g\,\bar\partial\varphi & \Omega\setminus K\text{-ում},\\ 0 & \mathbb{C}^n\text{-ի մնացած բոլոր կետերում:}\end{cases}$$

Քանի որ $\bar\partial\varphi=0$ V-ում և K_0-ից դուրս, ապա f-ը որոշված է ամբողջ $\mathbb{C}^n$-ում, ունի C^∞-գործակիցներ և նրա կրիչը ընկած է K_0-ի մեջ:

Դիցուք Ω_0-ն $\mathbb{C}^n \setminus \Omega_0$-ի անսահմանափակ կոմպոնենտն է, և դիցուք u-ն $\bar{\partial} u = f$ հավասարման այն լուծումն է, որը հավասար է զրոյի Ω_0-ում: Ըստ թեորեմ 4.14-ի այդպիսի լուծում գոյություն ունի: Այնուհետև կառուցենք

$$G = \begin{cases} u + (1-\varphi) g & \Omega \setminus K\text{-ում} \\ u & V\text{-ում} \end{cases}$$

ֆունկցիան: Քանի որ $\varphi(z) \equiv 1$, երբ $z \in V$, ապա G-ի սահմանումը կոռեկտ է և $G \in C^\infty(\Omega)$: Ցույց տանք, որ $G \in \mathcal{O}(\Omega)$: Իրոք, V-ում տեղի ունի

$$\bar{\partial} G = \bar{\partial} u = f = 0$$

հավասարությունը, իսկ $\Omega \setminus K$-ում՝

$$\bar{\partial} G = \bar{\partial} u - g \bar{\partial} \varphi = f - f = 0,$$

քանի որ $\bar{\partial} g = 0$:

Եվ, վերջապես, $\Omega_0 \cap (\Omega \setminus K)$ բազմության վրա $\varphi = 0$ և $u = 0$, հետևաբար $G = g$: Ու քանի որ $\Omega_0 \cap (\Omega \setminus K)$-ն ոչ դատարկ է և $\Omega \setminus K$-ն կապակցված է, ապա G-ն և g-ն համընկնում են ամենուրեք $\Omega \setminus K$-ի վրա: □

Այսպիսով, ամեն մի ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է փիրույթի եզրի շրջակայքում, անալիտիկորեն շարունակվում է ամբողջ փիրույթի մեջ: Այս պնդումը կարելի է ուժեղացնել, պահանջելով, որ շարունակվող ֆունկցիան որոշված լինի միայն եզրի վրա և ինչ-որ իմաստով լինի հոլոմորֆ, բավարարի այսպես կոչված Կոշի–Ռիմանի շոշափող հավասարումներին: Անցնենք ճշգրիտ սահմանումներին:

2. Կոշի–Ռիմանի շոշափող օպերատոր. Դիցուք D-ն փիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում և ρ-ն իրական C^2-ֆունկցիա է D-ում: Նշանակենք

$$N(\zeta) = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_1}, \ldots, \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_n} \right), \quad \zeta \in D:$$

Դիցուք $\Omega \Subset D$ տիրույթի համար ρ-ն որոշիչ ֆունկցիա է, այսինքն

$$\Omega = \{z \in D\colon\ \rho(z) < 0\}\,, \quad \text{և} \quad N(\zeta) \neq 0, \quad \text{երբ} \quad \zeta \in \partial\Omega\,:$$

Այնուհետև, դիցուք $a\colon\ D \mapsto \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ անընդհատ վեկտոր-ֆունկ–ցիա է և

$$L = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

համապատասխան դիֆերենցիալ օպերատորն է: Ակնհայտ է, որ $Lf = 0$ բոլոր $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիաների համար, և այդ պատճառով L-ը կոչվում է Կոշի–Ռիմանի օպերատոր: Կիրառելով L-ը որոշիչ ρ ֆունկ–ցիայի նկատմամբ, կստանանք

$$L\rho(z) = \langle N(z), a(z) \rangle\,, \quad z \in D\,:$$

Սահմանում 2.1. L-ը կոչվում է *շոշափող օպերատոր*, եթե

$$L\rho(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \partial G,$$

կամ, որը նույնն է, $a \perp N$ ∂G-ի բոլոր կետերում:

Դիցուք $u_1,\, u_2 \in C^1(D)$ և $u_1(\zeta) = u_2(\zeta)$ բոլոր $\zeta \in \partial G$ համար: Նշանակելով $u = u_1 - u_2$ կունենանք $u = 0$ ∂G-ի վրա և ուրեմն, $\operatorname{grad} u$-ն համեմատական է $\operatorname{grad} \rho$-ին ∂G-ի կետերում: Այսպիսով, գոյություն ունի ֆունկցիա $h\colon\ \partial G \mapsto \mathbb{C}$ այնպիսին, որ

$$\frac{\partial u(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k} = h(\zeta) \frac{\partial \rho(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \zeta \in \partial G\,:$$

Հիշելով L-ի սահմանումը, այստեղից ստանում ենք

$$Lu(\zeta) = h(\zeta) L\rho(\zeta), \quad \zeta \in \partial G\,:$$

Հետևաբար $Lu_1 = Lu_2$ ∂G-ի վրա: Այլ բառերով ասած, եթե $f \in C^1(D)$ և $\zeta \in \partial G$, ապա $Lf(\zeta)$-ն կախված է միայն f-ի հետքից ∂G-ի վրա:

Ուրեմն մենք կարող ենք դիտարկել L-ը որպես օպերատոր, որը գործում է $C^1(\partial G)$-ի վրա. եթե $f \in C^1(G)$, ապա Lf-ը կախված չէ f-ի C^1-շարունակությունից որից մենք օգտվում ենք ածանցյալները հաշվելու համար:

Պ ն դ ու մ 2.1. Դիցուք $u \in C^1(D)$: Այդ դեպքում հետևյալ պայմանները համարժեք են

ա) $\bar\partial u \wedge \bar\partial\rho = 0 \quad \partial G$-ի վրա,

բ) $Lu = 0$ Կոշի–Ռիմանի բոլոր L օպերատորների համար, որոնք շոշափող են ∂G-ի համար:

Ա պ ա ց ու յ ց: Հեշտ է տեսնել, որ

$$\bar\partial u \wedge \bar\partial\rho = \sum_{j<k} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar z_k} \frac{\partial u}{\partial\bar z_j} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar z_j} \frac{\partial u}{\partial\bar z_k} \right) d\bar z_j \wedge d\bar z_k :$$

Ներմուծենք

$$L_{jk} = \frac{\partial\rho}{\partial\bar z_k} \frac{\partial}{\partial\bar z_j} - \frac{\partial\rho}{\partial\bar z_j} \frac{\partial}{\partial\bar z_k}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

օպերատորները: Ինչպես երևում է, L_{jk}-երը շոշափում են ∂G-ին և բավարարում են ա) պայմանին այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$L_{jk}u(\zeta) = 0, \quad j < k, \ \ \zeta \in \partial G : \tag{2.1}$$

Վերևում տրված սահմանումների տերմիններով L_{jk}-երի համապա–տասխան վեկտորները կլինեն

$$a = a_{jk} = \frac{\partial\rho(z)}{\partial z_k} e_j - \frac{\partial\rho(z)}{\partial z_j} e_k :$$

Եթե $\zeta \in \partial G$, ապա $\dfrac{\partial\rho(\zeta)}{\partial\zeta_m} \neq 0$ որևէ m-ի համար: Այդ դեպքում a_{jm} և a_{mk} $(1 \leqslant j < m < k \leqslant n)$ $n-1$ հատ վեկտորները գծորեն անկախ են: Ուրեմն, նրանք առաջացնում են ζ կետում ∂G-ին կոմպլեքս շոշափող տարածությունը և, ինչպես հետևում է (2.1)-ից, $Lu = 0$ Կոշի–Ռիմանի ∂G-ին շոշափող կամայական L օպերատորի համար: □

Օ ր ի ն ա կ 2.1. Դիցուք $D = \mathbb{C}^n$, $\rho(z) = |z|^2 - 1$, հետևաբար, G-ն միավոր գունդ է: Վերևում սահմանված L_{jk} օպերատորները փվյալ դեպքում ունեն

$$L_{jk} = \zeta_k \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_j} - \zeta_j \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_k} :$$

տեսքը: Կասենք, որ $S = \partial B$-ի վրա տվյալ $u \in C^1(S)$ ֆունկցիան բավարարում է Կոշի–Ռիմանի շոշափող հավասարումներին, եթե

$$\zeta_k \frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_j} = \zeta_j \frac{\partial u}{\partial\bar{\zeta}_k}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n, \quad \zeta \in S :$$

Նշենք, որ $n = 2$ դեպքում այս համակարգը բերվում է մեկ հավասարման:

Հաջորդ թեորեմը հանդիսանում է թեորեմ 2.1-ի ուժեղացում այն իմաստով, որ շարունակվող ֆունկցիան որոշված է ոչ թե եզրի շրջակայքում, այլ միայն եզրի վրա: Նրա ապացույցը կատարվում է նման մեթոդով, ինչ նշված թեորեմում, $\bar{\partial}$-խնդրի լուծման կիրառությամբ[2]:

Թ ե ո ր ե մ 2.2 (Բոխներ). *Դիցուք $n > 1$, Ω-ն սահմանափակ տիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում C^4-եզրով և $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$-ն կապակցված է: Այդ դեպքում կամայական u ֆունկցիա $C^4(\partial\Omega)$-ից, որը բավարարում է Կոշի–Ռիմանի շոշափող հավասարումներին, կարելի է անալիտիկորեն շարունակել մինչև ֆունկցիա $C^1(\overline{\Omega})$-ից:*

3. Հարտոգսի թեորեմը. Այժմ բերենք Հարտոգսին պատկանող ևս մեկ թեորեմ հարկադիր անալիտիկ շարունակության վերաբերյալ:

Թ ե ո ր ե մ 2.3. *Դիցուք տրված են $G \subset \mathbb{C}^m_z$, $G_0 \subset G$ տիրույթները և $U \subset \mathbb{C}^n_w$ բազմագլանը Γ հենքով: Նշանակենք $U^* = U \cup \Gamma$ և $M = \big(G \times \Gamma\big) \cup \big(G_0 \times U^*\big)$: Եթե M-ի վրա որոշված f ֆունկցիան*

1. *անընդհատ է $\big(G \times \Gamma\big)$-ի վրա և ցանկացած ֆիքսած ω-ի համար Γ-ից հոլոմորֆ է G-ում,*

[2]Լրիվ ապացույցը տես [5]-ում, էջ 53:

2. *ցանկացած ֆիքսած $z \in G_0$ կետի համար հոլոմորֆ է U-ում, ապա այն անալիտիկորեն շարունակվում է $G \times U$ տիրույթի մեջ:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիտարկենք

$$F(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z,\omega)}{\omega - w}\, d\omega$$

ֆունկցիան: Ֆիքսած $z \in G$-ի համար նա հոլոմորֆ է U-ում և ֆիքսած $w \in U$-ի համար հոլոմորֆ է G-ում: Ըստ Հարտոգսի թեորեմի F-ը հոլոմորֆ է $G \times U$ տիրույթում: Բայց երբ $z \in G_0$, ապա շնորհիվ 2-րդ պայմանի f-ը U-ում ներկայացվում է իր Կոշիի ինտեգրալով, այնպես որ

$$f(z,w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(z,\omega)}{\omega - w}\, d\omega = F(z,w) :$$

Այսպիսով, F-ը անալիտիկորեն շարունակում է f ֆունկցիան $G \times U$ տիրույթի մեջ: □

§ 11. Հոլոմորֆության տիրույթներ

Ս ա հ մ ա ն ու մ 2.2. Դիցուք f_1 և f_2 ֆունկցիաները հոլոմորֆ են համապատասխանաբար D_1 և D_2 տիրույթներում: Եթե $f_1 \equiv f_2$ $D_1 \cap D_2$ բազմության կապակցված կոմպոնենտի վրա, ապա կասենք, որ f_2-ը հանդիսանում է f_1-ի անալիտիկ շարունակությունը D_2-ի վրա, իսկ f_1-ը՝ f_2-ի շարունակությունը D_1-ի վրա:

Ինչպես հայտնի է մեկ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից, ամեն մի $D \subset \mathbb{C}^1$ տիրույթի համար գոյություն ունի ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D-ում և անալիտիկորեն չի շարունակվում D-ից դուրս, այլ բառերով ասած D-ն նրա համար բնական որոշման տիրույթ է: Նախորդ պարագրաֆում բերված հարկադիր շարունակման օրինակները հանգեցնում են հետևյալ սահմանմանը՝

Ս ա հ մ ա ն ու մ 2.3. $D \subset \mathbb{C}^n$ փիրույթը կոչվում է *հոլոմորֆության փիրույթ f ֆունկցիայի համար*, եթե f-ը հոլոմորֆ է D-ում և անալիտիկորեն չի շարունակվում D-ից դուրս վերևում նշված իմաստով: D-ն կոչվում է *հոլոմորֆության փիրույթ*, եթե նա հոլոմորֆության փիրույթ է որևէ ֆունկցիայի համար:

Սահմանումից հեշտությամբ բխում է՝

Թ ե ո ր ե մ 2.4. *Եթե D-ն հոլոմորֆության փիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, իսկ G-ն նման փիրույթ է $\mathbb{C}^m$-ում, ապա $D \times G$ դեկարտյան արտադրյալը հոլոմորֆության փիրույթ է $\mathbb{C}^{n+m}$-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Վերցնենք f ֆունկցիա, որի համար D-ն հոլոմորֆության փիրույթ է և նման g ֆունկցիա G-ի համար: Այդ դեպքում $f(z)g(z) \in \mathcal{O}(D \times G)$ և $D \times G$ փիրույթը $f(z)g(z)$-ի համար կլինի հոլոմորֆության փիրույթ: □

1. Թեորեմ արգելքի վերաբերյալ. Կասենք, որ ζ եզրային կետում կա արգելք, եթե յուրաքանչյուր $M \subset D$ կոմպակտ բազմության և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$ այնպիսին, որ $|f(z)| < 1$ երբ $z \in M$, բայց $|f(z')| > 1$ ինչ-որ $z' \in B(\zeta, \varepsilon)$ կետում:

Թ ե ո ր ե մ 2.5 (արգելքի վերաբերյալ). *Ցանկացած $E \subset \partial D$ բազմության համար, որի յուրաքանչյուր կետում կա արգելք, գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$, որը անսահմանափակ է E-ի բոլոր կետերում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ընտրենք E-ում ամենուրեք խիտ հաշվելի $E_1 = \{\zeta^m\}_{m=1}^{\infty}$ ենթաբազմություն: Բավական է կառուցել $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա, որը անսահմանափակ է E_1-ի կետերում: E_1-ի կետերը համարակալենք այնպես, որ ամեն մի կետ հանդիպի անվերջ քանակով անգամ: Թեորեմը կլինի ապացուցված, եթե D-ում գտնվի z^m կետերի հաջորդականություն և հոլոմորֆ f ֆունկցիա այնպիսիք, որ

$$|z^m - \zeta^m| \to 0 \quad \text{և} \quad f(z^m) \to \infty :$$

Այնուհետև վերցնենք B_m կոմպակտ բազմությունների ընդլայնվող ըն– տանիք, որը սպառում է D-ն, այսինքն

$$B_m \subset B_{m+1} \quad \text{և} \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m = D :$$

Ինդուկտիվ եղանակով կառուցենք B_m-ի K_m ենթահաջորդականու– թյուն, z^m կետեր D-ից և $f_m \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիաներ այնպիսիք, որ

(a) $|z^m - \zeta^m| < \dfrac{1}{m}$,

(b) $|f_m(z^m)| < 1$, երբ $z \in K_m$,

(c) $|f_m(z^m)| > 1$:

Դրա համար նախ վերցնենք $K_1 = B_1$: Ըստ արգելքի սահմանմանը ζ^1 կետում, գոյություն ունեն $f_1 \in \mathcal{O}(D)$ ու $z^1 \in D$ այնպիսիք, որ

$$|z^1 - \zeta^1| < 1; \quad |f_1(z)| < 1 \quad \text{երբ} \quad z \in K_1, \quad \text{և} \quad |f_1(z^1)| > 1 :$$

Այժմ ենթադրենք թե կառուցումը կատարված է բոլոր $k \leqslant m-1$ թվերի համար: Վերցնենք m-ն այնքան մեծ, որ

$$K_m \supset \Big(K_{m-1} \bigcup \{z^1, \ldots, z^{m-1}\}\Big) :$$

Ըստ արգելքի սահմանման ζ^m կետում, կգտնվի $z^m \in D$ կետ և $f_m \in$ $\in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա այնպիսիք, որ բավարարվեն (a)–(c) պայմանները:

Հաշվի առնելով, որ $|f_m(z^m)| > 1$, կարելի է ընտրել բնական p_m թվերի այնպիսի հաջորդականություն, որ

$$\frac{1}{m^2}\,|f_m(z^m)|^{p_m} > \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2}\,|f_k(z^m)|^{p_k} + m :$$

Այս պնդումը հեշտությամբ ապացուցվում է ինդուկցիայով, ընդ որում, առաջին քայլը ակնհայտ է՝ կվերցնենք $p_1 = 1$: Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ շարքը

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,|f_k(z)|^{p_k} : \tag{2.2}$$

Եթե $z \in K_m$ և $k \geqslant m$, ապա $|f_k(z)| < 1$, հետևաբար, (2.2) շարքը K_m-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է: Քանի որ K_m-երի միացումը սպառում է ամբողջ D-ն, ապա (2.2) շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է D-ի ներսում և ըստ Վայերշտրասի թեորեմի նրա գումարը հոլոմորֆ է D-ում: Եվ վերջապես

$$|f_m(z^m)| \geqslant \frac{1}{m^2}\,|f_m(z^m)|^{p_m} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2}\,|f_k(z^m)|^{p_k} - \\ - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geqslant m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

որտեղից երևում է, որ $f(z^m) \to \infty$: □

Այդ թեորեմից հետևում են մի քանի պարզ պայմաններ, որոնց դեպքում D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է:

Հ ե տ և ա ն ք 2.1. *Եթե D տիրույթի եզրային բոլոր կետերում կա արգելք, ապա D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ըստ արգելքի մասին թեորեմի գոյություն ունի $f \in \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա, որը անսահմանափակ է եզրային բոլոր կետերում: Հետևաբար նա չի կարող անալիտիկորեն շարունակվել D-ից դուրս, ուրեմն, D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է: □

Հ ե տ և ա ն ք 2.2. *Եթե D տիրույթի եզրային ամեն մի z^0 կետի համար գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$, որը անսահմանափակ է z^0-ում (արգելքի ֆունկցիա), ապա D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Համաձայն 2.17 վարժության եզրի բոլոր կետերում գոյություն ունի արգելք և ըստ հետևանք 2.1-ի D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է: □

Հ ե տ և ա ն ք 2.3. *Յուրաքանչյուր $D \subset \mathbb{C}^1$ տիրույթ հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ապացույց: Եթե z^0-ն եզրային կետ է, ապա $f(z) = \dfrac{1}{z - z^0}$-ն կարող է ծառայել որպես արգելքի ֆունկցիա z^0 կետում, և մնում է կիրառել հետևանք 2.2-ը: $\square$

Հ ե տ և ա ն ք 2.4. *Ամեն մի գծորեն ուռուցիկ տիրույթ $\mathbb{C}^n$-ում հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ապացույց: Գծորեն ուռուցիկ տիրույթի սահմանումից հետևում է, որ գոյություն ունի այնպիսի $l(z) = a_1z_1 + \cdots + a_nz_n + b$ գծային ֆունկցիա, որ $\{z\colon\ l(z) = 0\}$ կոմպլեքս հիպերհարթությունը, անցնելով z^0 կետով, չի հատվում D-ի հետ: Ուրեմն, որպես արգելքի ֆունկցիա z^0 կետի համար կարելի է վերցնել $f(z) = \dfrac{1}{l(z)}$: $\square$

Հ ե տ և ա ն ք 2.5. *Բազմագլանը հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ապացույց: Այդ պնդումը հետևանք է այն փաստի, որ բազմագլանը գծորեն ուռուցիկ տիրույթ է: Բացի դրանից, դա հետևում է նաև թեորեմ 2.4-ից: $\square$

§ 12. Հոլոմորֆ ուռուցիկություն

$\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ D տիրույթի սովորական ուռուցիկությունը կարելի է սահմանել հետևյալ ձևով. եթե $K \Subset D$, ապա K-ի ուռուցիկ թաղանթը ևս կոմպակտորեն պատկանում է D-ին: Իսկ K-ի ուռուցիկ թաղանթը բաղկացած է այն կետերից, որոնցում յուրաքանչյուր գծային ֆունկցիայի արժեքները չեն գերազանցում նրա մաքսիմումից K-ի վրա:

Այդպիսի մոտեցումը թույլ է տալիս ընդհանրացնել ուռուցիկության գաղափարը ֆունկցիաների տարբեր դասերի համար:

Ս աh մ ա ն ու մ 2.4. Դիցուք D-ն փիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, F-ը D-ում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ընտանիք է և $K \subset D$: Հետևյալ բազմությունը

$$\widehat{K} = \left\{ z \in D\colon\ |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|,\ \forall f \in F \right\}$$

կոչվում է K-ի *F-ուռուցիկ թաղանթ*:

Ս ա h մ ա ն ու մ 2.5. D տիրույթը կոչվում է *F-ուռուցիկ* (կամ ուռուցիկ F ընտանիքի նկատմամբ), եթե այն բանից, որ $K \Subset D$, հետևում է, որ $\widehat{K} \Subset D$:

Եթե $F = \mathcal{O}(D)$, ապա F-ուռուցիկ տիրույթը կոչվում է *հոլոմորֆ ուռուցիկ*: Իսկ եթե F-ը համընկնում է գծային ֆունկցիաների, կամ բազմանդամների, կամ էլ ռացիոնալ ֆունկցիաների դասի հետ, ապա F-ուռուցիկ տիրույթը կանվանենք համապատասխանաբար՝ *գծային, բազմանդամային, կամ ռացիոնալ* ուռուցիկ տիրույթ:

Պարզ է, որ ինչքան ավելի լայն է F դասը, այնքան ավելի նեղ է F-ուռուցիկ թաղանթը, հետևաբար, այնքան ավելի լայն է F-ուռուցիկ տիրույթների ընտանիքը:

Ինչպես հետևում է սպորև բերված Կարտանի և Տուլենի երկու թեոrեմներից, տիրույթի հոլոմորֆ ուռուցիկությունը անհրաժեշտ է ու բավարար, որպեսզի նա լինի հոլոմորֆության տիրույթ:

Թ ե ո ր ե մ 2.6 (Կարտան–Տուլեն). *Եթե $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը հոլոմորֆ ուռուցիկ է, ապա նա հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ապացուցվում է արգելքի մասին թեորեմի նման: Միայն թե z_m կետերը և f_m ֆունկցիաներն ընտրում ենք, ելնելով ուրիշ նկատառումներից. D-ի հոլոմորֆ ուռուցիկությունից հետևում է, որ $\widehat{K}_m \Subset D$ և, ուրեմն, գոյություն ունեն $z^m \in D$ կետեր և $g_m \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիաներ այնպիսիք, որ

$$|z^m - \zeta^m| < \frac{1}{m}, \qquad |g_m(z^m)| > \max_{K_m} |g_m|\,:$$

Որպես f_m վերցնում ենք

$$f_m(z) = \frac{g_m(z)}{\max\limits_{K_m} |g_m|}, \quad m = 1, 2, \dots :$$

Ապացույցի մնացած մասը մնում է նույնը՝

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2} |f_m(z)|^{p_m}$$

ֆունկցիան հոլոմորֆ է D-ում և D-ի բոլոր եզրային կետերին մոտենալիս անվերջ աճում է, ինչից հետևում է, որ D-ն հոլոմորֆության փիրույթ է: □

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 2.3. Պարզ է, որ թեորեմի պայմանի մեջ հոլոմորֆ ուռուցիկությունը կարելի էր փոխարինել ուռուցիկությամբ ըստ կամայական $F \subset \mathcal{O}(D)$ ընտանիքի:

Կասենք, որ D փիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների F բազմությունը կազմում է դաս, եթե ամեն մի f ֆունկցիայի հետ մեկտեղ նա պարունակում է նաև f-ի բոլոր կարգի ածանցյալները և af^k-ն, որտեղ k-ն կամայական բնական, իսկ a-ն կամայական կոմպլեքս թվեր են:

Լ ե մ մ ա 2.1 (միաժամանակյա շարունակման վերաբերյալ). *Դիցուք F-ը ֆունկցիաների դաս է, $K \Subset D$ և $\rho = \rho(K, \partial D)$-ն նշանակում է պոլիդիսկային մետրիկայով K-ի հեռավորությունը ∂D եզրից: Ինչպիսին էլ լինի $\widehat{K}_F$ թաղանթին պատկանող a կետը, կամայական $f \in F$ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է $U(a, \rho)$ պոլիդիսկի մեջ: Բացի դրանից, բոլոր $r < \rho$ համար նա բավարարում է մաքսիմումի սկզբունքին՝*

$$\sup_{z \in U(a,r)} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in K_r} |f(z)|, \tag{2.3}$$

որտեղ

$$K_r = \bigcup_{z \in K} U(z, r) :$$

Նշենք, որ այստեղ կարևոր է, որ $U(a,\rho)$ պոլիդիսկը կարող է դուրս գալ D տիրույթի սահմաններից:

Ապացույց: Վերլուծենք $f(z)$-ը a կետի շրջակայքում Թեյլորի շարքի՝

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k : \tag{2.4}$$

Ապացույցի համար բավական է ցույց տալ, որ այս շարքը $U(a,\rho)$-ում զուգամետ է, այդ դեպքում նրա գումարը կտա պահանջվելիք անալիտիկ շարունակությունը:

Դիցուք $r<\rho$; քանի որ $K_r \Subset D$, ապա նշանակելով

$$\sup_{K_r} |f(z)| = M_{f,r},$$

ըստ Կոշիի անհավասարությունների կունենանք

$$\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k}\right| \leqslant \frac{M_{f,r}}{r^{|k|}}, \quad z\in K :$$

Հաշվի առնելով, որ $a\in \widehat{K}_F$ և որ (2.4) շարքի գործակիցների համար $c_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^{|k|} f(a)}{\partial z^k}$, ստանում ենք

$$|c_k| = \frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|} f(a)}{\partial z^k}\right| \leqslant \sup_{z\in K}\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|} f(z)}{\partial z^k}\right| \leqslant \frac{M_{f,r}}{r^{|k|}} : \tag{2.5}$$

Այժմ վերցնելով $r_1<r$, կամայական $z\in U(a,r_1)$ կետում

$$|c_k(z-a)^k| \leqslant M_{f,r}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{|k|},$$

որից հետևում է, որ (2.4) շարքը $U(a,r_1)$ պոլիդիսկում մաժորվում է զուգամետ թվային շարքով: Քանի որ r-ն ու r_1-ը կարելի է վերցնել կամայական չափով մոտ ρ-ին, ստացվում է, որ շարքը զուգամետ է ամբողջ $U(a,\rho)$-ում:

(2.3)-ը ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$|f(z)| \leqslant M_{f,r}, \quad z \in U(a,r_1) \tag{2.6}$$

կամայական $r_1 < r$ դեպքում: Ենթադրենք (2.6)-ը ճիշտ չէ ինչ-որ $r_1 < r$ համար, այսինքն

$$\sup_{z\in U(a,r_1)} \frac{|f(z)|}{M_{f,r}} = \alpha > 1 :$$

Այստեղից հետևում է, որ կամայական բնական q թվի համար

$$\varphi_q(z) = \left[\frac{f(z)}{M_{f,r}}\right]^q$$

ֆունկցիան բավարարում է

$$\sup_{z\in U(a,r_1)} |\varphi_q(z)| = \alpha^q \tag{2.7}$$

հավասարությանը: Մյուս կողմից, $\varphi_q(z) \in F$, $M_{\varphi_q,r} = 1$ և, ըստ ապացուցված (2.5) անհավասարության՝

$$\frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|}\varphi_q(a)}{\partial z^k}\right| \leqslant \frac{1}{r^{|k|}} :$$

Ուրեմն $U(a,r_1)$ պոլիդիսկում φ_q ֆունկցիայի համար տեղի է ունենում

$$|\varphi_q(z)| \leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left|\frac{\partial^{|k|}\varphi_q(a)}{\partial z^k}\right| \cdot |z-a|^{|k|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{|k|} = \left(1-\frac{r_1}{r}\right)^{-n}$$

գնահատականը, որը (2.7)-ի հետ մեկտեղ հանգեցնում է

$$\alpha^q \leqslant \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^{-n}$$

անհավասարությանը կամայական ամբողջ $q > 0$-ի համար: Բայց այդ անհավասարությունը հնարավոր չէ բավականաչափ մեծ q-ի դեպքում, որովհետև $\alpha > 1$: Ստացված հակասությունը ապացուցում է (2.3) անհավասարությունը կամայական $r_1 < r$-ի դեպքում:

□

Թ ե ո ր ե մ 2.7 (Կարտան–Տուլեն). *Կամայական $D \subset \mathbb{C}^n$ հոլոմորֆության տիրույթ հոլոմորֆ ուռուցիկ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $K \Subset D$ և $\rho = \rho(K, \partial D)$: Քանի որ $\mathcal{O}(D)$-ն պարունակում է բոլոր կոորդինատական z_k ֆունկցիաները, ապա $\widehat{K}$-ն սահմանափակ է: Նախորդ լեմմայից հետևում է, որ ցանկացած $a \in \widehat{K}$-ի համար $U(a, \rho) \subset D$, որովհետև կա ֆունկցիա $f \in \mathcal{O}(D)$, որը չի շարունակվում անալիտիկորեն D-ից դուրս: Ուրեմն $\widehat{K} \Subset D$: □

Թեորեմ 2.6 և թեորեմ 2.7-ից հետևում է

Թ ե ո ր ե մ 2.8. *Որպեսզի $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը լինի հոլոմորֆության տիրույթ, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ նա լինի հոլոմորֆ ուռուցիկ:*

Թ ե ո ր ե մ 2.9. *Որպեսզի $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը լինի հոլոմորֆ ուռուցիկ, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ կամայական $K \Subset D$ բազմության համար*

$$\rho\left(\widehat{K}, \partial D\right) = \rho\left(K, \partial D\right):$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Բավարարությունը հետևում է սահմանումներից: Անհրաժեշտությունը ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ միշտ $\rho\left(\widehat{K}, \partial D\right) \leqslant \rho\left(K, \partial D\right)$, քանի որ $\widehat{K} \supseteq K$: Եթե այստեղ լիներ խիստ անհավասարություն, ապա գոյություն կունենար $\widehat{K}$-ին պատկանող a կետ, որի համար $\rho(a, \partial D) < \rho(K, \partial D)$: Այդ դեպքում, համաձայն միաժամանակյա շարունակման վերաբերյալ լեմմայի, ցանկացած $f \in \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա կշարունակվեր a կենտրոնով և $\rho(K, \partial D)$ շառավղով պոլիդիսկի մեջ, այսինքն, D-ից դուրս, և D-ն չէր կարող լինել հոլոմորֆության փիրույթ: □

Թ ե ո ր ե մ 2.10. *Դիցուք D_α-ն հոլոմորֆության փիրույթների կամայական ընտանիք է և $G = \bigcap D_\alpha$: Այդ դեպքում G° բաց կորիզի ամեն մի D կապակցված կոմպոնենտ հոլոմորֆության փիրույթ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $K \Subset D$, պետք է ցույց տալ, որ $\widehat{K} \Subset D$: Ամեն մի ֆունկցիա $\mathcal{O}(D_\alpha)$-ից հոլոմորֆ է D-ում, այսինքն $\mathcal{O}(D) \supset \supset \mathcal{O}(D_\alpha)$: Հետևաբար

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)} \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(D_\alpha)} \Subset D \quad \text{ցանկացած} \quad \alpha\text{-ի համար:}$$

Այնուհետև՝

$$\rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}, \partial D) = \inf_\alpha \rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \inf_\alpha \rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D_\alpha)}, \partial D_\alpha) =$$
$$= \inf_\alpha \rho(K, \partial D_\alpha) = \rho(K, \partial D) > 0 :$$

Այստեղ նաև հաշվի է առնված թեորեմ 2.1-ից բխող $\rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D_\alpha)}, \partial D_\alpha) = = \rho(K, \partial D_\alpha)$ հավասարությունը: □

Նշենք, որ նման պնդում հոլոմորֆության փիրույթների միավորման համար ճիշտ չէ (տես խնդիր 2.18): Առանց ապացույցի բերենք բավարար պայման, որի դեպքում հոլոմորֆության փիրույթների միավորումը ևս հոլոմորֆության փիրույթ է:

Թ ե ո ր ե մ 2.11 (Բեհնկե–Շտեյն). *Հոլոմորֆության փիրույթների ընդլայնվող հաջորդականության*

$$D_1 \Subset D_2 \Subset \ldots \Subset D_k \Subset \ldots$$

միավորումը և հոլոմորֆության փիրույթ է:

Թ ե ո ր ե մ 2.12. *Հոլոմորֆության փիրույթ լինելու հատկությունը ինվարիանտ է բիհոլոմորֆ արտապատկերումների նկատմամբ:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Պետք է ապացուցել, որ եթե $D \subset \mathbb{C}^n$ հոլոմորֆության փիրույթ է և D^*-ը նրա պատկերն է φ բիհոլոմորֆ արտապատկերման ժամանակ, ապա D^*-ն ևս հոլոմորֆության փիրույթ է:

Դիցուք $K^* \Subset D^*$: Ցույց տանք, որ $\widehat{K^*}_{\mathcal{O}(D^*)} \Subset D^*$: Նկատենք, որ եթե $K^* \Subset D^*$ և $K = \varphi^{-1}(K^*)$, ապա φ-ի հոմեոմորֆության շնորհիվ $K \Subset D$: Այդ դեպքում

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)} \Subset D, \tag{2.8}$$

որովհետև D-ն հոլոմորֆ ուռուցիկ է: Այժմ հանոզվենք, որ

$$\varphi\left(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}\right) \supset \widehat{K^*}_{\mathcal{O}(D^*)} : \tag{2.9}$$

Վերցնենք $w^0 \in D^* \setminus \varphi\left(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}\right)$ կետ: Այդ դեպքում

$$z^0 = \varphi^{-1}(w^0) \in D \setminus \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$$

և գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ $|f(z^0)| > > \sup\limits_K |f|$: Դիտարկենք $\psi(w) = f \circ \varphi^{-1}(w)$: Պարզ է, որ $\psi \in \mathcal{O}(D^*)$ և $|\psi(w^0| > \sup\limits_{K^*} |\psi|$: Ուրեմն, $w^0 \notin \widehat{K^*}_{\mathcal{O}(D^*)}$:

Այնուհետև, (2.8)-ից և φ-ի հոմեոմորֆ լինելուց հետևում է, որ $\varphi(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}) \Subset D^*$ և $\widehat{K^*}_{\mathcal{O}(D^*)} \Subset D^*$ ըստ (2.9)-ի: Այսպիսով, D^*-ն հոլոմորֆ ուռուցիկ է և, հետևաբար, հոլոմորֆության փիրույթ է: $\square$

§ 13. Ուռուցիկություն ըստ Լևիի

Կոմպլեքս r-չափանի անալիտիկ S մակերևույթ $\mathbb{C}^n$ պարածությունում կոչվում է $\Delta \subset \mathbb{C}^r$ փիրույթի պատկերը

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \colon \ \Delta \mapsto \mathbb{C}^n \quad (n > r)$$

արտապատկերման ժամանակ, որտեղ Յակոբիի $\left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \zeta_j}\right)$ մատրիցի ռանգը ամենուրեք Δ-ում հավասար է r-ի:

Մասնավորապես, կոմպլեքս մեկ չափանի անալիտիկ մակերևույթը անվանում են նաև անալիտիկ կոր:

S-ը կոչվում է կոմպակտ անալիտիկ մակերևույթ, եթե նա մի ուրիշ r-չափանի անալիտիկ մակերևույթի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Կոմպակտ անալիտիկ մակերևույթների համար տեղի ունի մաքսիմումի սկզբունքը. *եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է S-ում և անընդհատ է նրա փակման վրա, ապա*

$$\max_S |f| = \max_{\partial S} |f| :$$

Թ ե ո ր ե մ 2.13 (Բեհենկե–Զոմեր). *Դիցուք S_k-երը կոմպակտ անալիտիկ մակերևույթներ են, որոնք պատկանում են D փիրույթին իրենց ∂S_k եզրերի հետ միասին: Եթե S_k հաջորդականությունը զուգամիտում է ինչ-որ S բազմությանը, իսկ ∂S_k-ն՝ Γ-ին և $\Gamma \Subset D$, ապա ամեն մի ֆունկցիա $f \in \mathcal{O}(D)$ անալիտիկորեն շարունակվում է S-ի ինչ-որ շրջակայք:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Քանի որ $\Gamma \Subset D$, ապա գոյություն ունի $G \Subset D$ այնպիսի փիրույթ, որ $\Gamma \Subset G$: Նշանակենք $\rho(G, \partial D) = r$: Քանի որ $\partial S_k \to \Gamma$, գոյություն ունի k_0, որ երբ $k \geqslant k_0$

$$\partial S_k \subset G : \tag{2.10}$$

Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի կամայական $f \in \mathcal{O}(D)$ և $z \in S_k$ համար

$$|f(z)| \leqslant \max_{\partial S_k} |f|,$$

և, հաշվի առնելով (2.10)-ը, ստանում ենք

$$|f(z)| \leqslant \max_G |f| :$$

Դա նշանակում է, որ z կետը, և հետևաբար ամբողջ S_k-ն, պատկանում է $\widehat{G}_{\mathcal{O}(D)}$ ուռուցիկ թաղանթին, երբ $k \geqslant k_0$: Միաժամանակյա շարունակման վերաբերյալ լեմմա 2.1-ից հետևում է, որ ամեն մի $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է S_k մակերևույթների S_k^r r-շրջակայքի մեջ:

Այնուհետև, քանի որ $S_k \to S$, գոյություն ունի $k_1 > k_0$ այնպիսին, որ $S \subset S_k^{r/2}$ բոլոր $k > k_1$ համար և, հետևաբար, յուրաքանչյուր $f \in \mathcal{O}(D)$ անալիտիկորեն շարունակվում է $S_k^{r/2}$-ի մեջ: □

Ապացույցից երևում է, որ $\mathcal{O}(D)$-ի փոխարեն կարելի էր վերցնել ֆունկցիաների դաս, որոնք հոլոմորֆ են սահմանային $S \bigcup \Gamma$ բազմության որևէ շրջակայքի և D-ի հատման վրա:

Սահմանում 2.6. $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը կոչվում է ուռուցիկ ըստ Լևիի (կարճ՝ L-ուռուցիկ) եզրային ζ կետում, եթե, ինչպիսին էլ լինի ζ-ն պարունակող S մակերևույթը, այնպիսին, որ $\partial S \subset D$, և կամայական S_k անալիտիկ մակերևույթների հաջորդականություն, որի համար

$$S_k \to S, \quad \partial S_k \to \partial S,$$

և գոյություն ունի k_0 համար, որից սկսած բոլոր S_k-երը պարունակում են D-ին չպատկանող կետեր:

Թեորեմ 2.14. *Եթե D տիրույթի որևէ ζ եզրային կետ կարելի է դրսից շոշափել անալիտիկ $S = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ f(z) = 0\}$ բազմությամբ, որտեղ f-ը ζ-ում հոլոմորֆ ֆունկցիա է, ապա D-ն L-ուռուցիկ է:*

Ապացույց: Թեորեմի պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի f ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է ζ կետի որևէ U_ζ շրջակայքում, հավասար է զրոյի այդ կետում և տարբեր է զրոյից $U_\zeta \bigcap D$-ում: Եթե D-ն L-ուռուցիկ չլիներ ζ-ում, ապա գոյություն կունենար այնպիսի S մակերևույթ, որ $\zeta \in S$, $\partial S \subset D$, և S_k կոմպակտ անալիտիկ մակերևույթների հաջորդականություն, որ $S_k \subset D$, $S_k \to S$, $\partial S_k \to \partial S$: Այդ դեպքում կամայական $f \in \mathcal{O}(D)$ անալիտիկորեն կշարունակվեր ζ կետ, իսկ դա կհակասեր այն բանին, որ $g = 1/f$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է $U_\zeta \bigcap D$-ում և չի շարունակվում ζ-ի շրջակայք: □

Խնդիրներ

Խ ն դ ի ր 2.1. Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է $E \subset \mathbb{C}^n$ պոլիդիսկում և անընդհատ է $E \cup \Gamma$ բազմության վրա, որտեղ Γ-ն E-ի հենքն է: Ապացուցել, որ f-ը անընդհատորեն շարունակվում է $\overline{E}$-ի վրա:

Խ ն դ ի ր 2.2. Դիցուք L-ը $l(z) = c_0 + c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$ գծային ֆունկցիաների ընտանիքն է: Ցույց տալ, որ D տիրույթը L-ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նա ուռուցիկ է սովորական երկրաչափական իմաստով:

Խ ն դ ի ր 2.3. Դիցուք M-ը $cz^k = cz_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ բոլոր միանդամների ընտանիքն է (k_i-երը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, c-ն՝ կոմպլեքս հաստատուն է): Ցույց տալ, որ 0 կենտրոնով Ռեյնհարտի լրիվ տիրույթը լոգարիթմորեն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նա M-ուռուցիկ է:

Խ ն դ ի ր 2.4. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}$ հարթությանը պատկանող K կոմպակտը բազմանդամային ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbb{C} \setminus K$ բազմությունը կապակցված է:

Խ ն դ ի ր 2.5. Ապացուցել, որ կամայական $K \subset \mathbb{C}^n$ կոմպակտի ռացիոնալ ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n : \ P(z) \in P(K) \ \text{ բոլոր } \ P \ \text{ բազմանդամների համար}\}$$

բազմության հետ:

Խ ն դ ի ր 2.6. Դիցուք K-ն կոմպակտ բազմություն է $\mathbb{C}^n$-ում: Ապացուցել, որ $P(K)$ հանրահաշվի բոլոր անընդհատ գծային մուլտի–պլիկատիվ ֆունկցիոնալների M տարածությունը կարելի է նույնացնել $\widehat{K}$ բազմանդամային ուռուցիկ թաղանթի հետ հետևյալ իմաստով. ցանկացած m ֆունկցիոնալ M-ից իրենից ներկայացնում է «արժեք z^0 կետում», $z^0 \in \widehat{K}$, այսինքն, $m(f) = f(z^0)$ ցանկացած f-ի համար $P(K)$-ից:

Խ ն դ ի ր 2.7. Դիցուք K-ն կոմպակտ բազմություն է $\mathbb{C}^n$-ում, որի համար $P(K) = C(K)$: Ապացուցել, որ K-ն բազմանդամային ուռուցիկ է:

Խ ն դ ի ր 2.8. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ի իրական հարթության պատկա–նող կամայական կոմպակտ բազմություն բազմանդամային ուռուցիկ է:

Խ ն դ ի ր 2.9. Ցույց տալ, որ բազմանդամներով որոշվող

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n: \ |P_m(z)| < 1, \ m = 1, \cdots, N\}$$

բազմանիստը բազմանդամային ուռուցիկ փիրույթ է:

Խ ն դ ի ր 2.10. Դիցուք $\delta \in (0, 2\pi)$ և M-ը

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2: \ z_1 = e^{it}, \ \delta \leqslant t \leqslant 2\pi, \ z_2 = 0\right\}$$
$$\left\{z_1 = e^{it}, \ 0 \leqslant t \leqslant \delta, \ |z_2| = 1\right\}$$

բազմությունների միավորումն է: Ապացուցել, որ

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2: \ |z_1| \leqslant 1, \ z_2 = 0\right\}$$

շրջանը պարունակվում է M-ի բազմանդամային ուռուցիկ թաղանթի մեջ:

Խ ն դ ի ր 2.11. Դիցուք K-ն

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z|^2 = 2\right\}$$

գնդոլորտի և

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ z_2 = \bar{z}_1\right\}$$

հարթության հատումն է: Ապացուցել, որ $P(K) = C(K)$:

Խ ն դ ի ր 2.12. Ապացուցել, որ $B = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\}$ գնդի Շիլովի եզրը համընկնում է նրա տոպոլոգիական եզրի հետ:

Խ ն դ ի ր 2.13. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում E պոլիդիսկի Շիլովի $S(E)$ եզրը և Բերգմանի $B(E)$ եզրը համընկնում են նրա հենքի հետ:

Խ ն դ ի ր 2.14. Դիցուք

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |z_1| < 1, \ |z_2| < |z_1|\right\} :$$

Ցույց տալ, որ

ա) D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է,

բ) $\overline{D}$-ն հոլոմորֆության տիրույթների հատում չէ:

Խ ն դ ի ր 2.15. Ապացուցել, որ

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ 0 < |z_1| < 1, \ |z_2| < |z_1|^{-\ln|z_1|}\right\}$$

տիրույթի Շիլովի և Բերգմանի եզրերը իրարից տարբեր են.

$$S(D) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| < 1, \ |z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|}\right\},$$

իսկ

$$B(D) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| = |z_2| = 1\right\} :$$

Խ ն դ ի ր 2.16. Դիցուք D_1-ը և D_2-ը հարթության վրա ողորկ կորերով սահմանափակված փիրույթներ են, որոնք աստղաձև են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ,

$$K = \{tz\colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ z \in \partial D_1 \times \partial D_2\}:$$

Ապացուցել, որ K-ի շրջակայքում կամայական հոլոմորֆ f ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է $D_1 \times D_2$ փիրույթի վրա:

Խ ն դ ի ր 2.17. Դիցուք գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$, որը անսահմանափակ է ζ-ում, այսինքն, գոյություն ունի այնպիսի $z^m \in D$ կետերի հաջորդականություն, որ $\lim z^m = \zeta$ և $\lim f(z^m) = \infty$: Ցույց տալ, որ այդ դեպքում ζ-ում կա արգելք:

Խ ն դ ի ր 2.18. Բերել օրինակ, երբ երկու հոլոմորֆության փիրույթների միավորումը հոլոմորֆության փիրույթ չէ:

Խ ն դ ի ր 2.19. Ապացուցել, որ

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1|^2 + x_2^2 > \rho^2\right\}$$

փիրույթը հոլոմորֆության փիրույթ չէ:

Խ ն դ ի ր 2.20. Ցույց տալ, որ Կուզենի առաջին պրոբլեմը ոչ միշտ լուծում ունի

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 3,\ |z_2| < 3\right\} \setminus \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 3,\ 1 < |z_2| < 3\right\}$$

կրկնակի շրջանաձև փիրույթում, որն, ուրեմն, հոլոմորֆության փիրույթ չէ:

Գ Լ ՈՒ Խ III

ՊՍԵՎԴՈՈՒՌՈՒՑԻԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐ

Այս գլուխը նվիրված է պլյուրիսուբհարմոնիկ (մասնավորապես, ուռուցիկ) ֆունկցիաներին և նրանց համապատասխան պսևդոուռուցիկ (մասնավորապես, ուռուցիկ) տիրույթներին: Հաջորդ գլխում մենք կհամոզվենք, որ հոլոմորֆության տիրույթները ուսումնասիրելիս պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաները ծառայում են որպես հիմնական գործիք :

Մի քանի կոմպլեքս փոփոխականի պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկ– ցիաները սահմանվում են մեկ կոմպլեքս փոփոխականի (կամ, որ նույնն է, երկու իրական փոփոխականի) սուբհարմոնիկ ֆունկցիանե– րի միջոցով: Եվ, ուրեմն, բնական է նախ ուսումնասիրել սուբհարմոնիկ ֆունկցիաները:

§ 14. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաներ

1. Կիսաանընդհատ ֆունկցիաներ. Հետագայի համար կարևոր դեր են կատարում այսպես կոչված կիսաանընդհատ ֆունկցիաները, որոնց սահմանումն ու որոշ հատկություններ բերված են ստորև:

Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված է իրական $u(z)$ ֆունկցիա: Եթե $z^0 \in D$ կետում

$$u(z^0) = \overline{\lim_{z \to z^0}}\, u(z) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{B(z^0,\delta)} u(z),$$

ապա $u(z)$-ը կոչվում է կիսաանընդհատ վերևից z^0-ում: Նմանապես, եթե

$$u(z^0) = \underline{\lim}_{z \to z^0}\, u(z) = \lim_{\delta \to 0} \inf_{B(z^0,\delta)} u(z),$$

ապա $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է ներքևից:

Մասնավորապես, եթե $u(z^0) = +\infty$ ($u(z^0) = -\infty$), ապա $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից (ներքևից) z^0 կետում:

Նշենք, որ եթե $u(z)$-ը z^0-ում կիսաանընդհատ է և վերևից, և ներքևից և $|u(z^0)| \neq \infty$, ապա այն անընդհատ է այդ կետում:

Եթե $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է ներքևից, ապա $-u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից և, ուրեմն, բավական է ուսումնասիրել, օրինակ, վերևից կիսաանընդհատ ֆունկցիաները:

Կասենք, որ $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից D-ում, եթե այն կիսաանընդհատ է վերևից D-ի բոլոր կետերում:

Թվարկենք վերևից կիսաանընդհատ ֆունկցիաների մի քանի հատկություն, որոնց ապացույցը թողնում ենք ընթերցողին:

- Եթե $|u(z^0)| \neq \infty$, ապա $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից այն և միայն այն դեպքում, երբ կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ

$$|z - z^0| < \delta \Rightarrow u(z) < u(z^0) + \varepsilon :$$

- Որպեսզի u ֆունկցիան լինի վերևից կիսաանընդհատ, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ կամայական $a \in (-\infty, +\infty)$ թվի համար $\{z \in D \colon\ u(z) < a\}$ բազմությունը լինի բաց:

- Եթե u ֆունկցիան վերևից կիսաանընդհատ է K կոմպակտի վրա և $u(z) \neq +\infty$, ապա նա K-ի վրա վերևից սահմանափակ է և ընդունում է իր մեծագույն արժեքը:

2. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի սահմանումը. $G \subset \mathbb{C}^1$ տիրույթում որոշված $u(z)$ ֆունկցիան կոչվում է *սուբհարմոնիկ,* եթե

1. $-\infty \leqslant u(z) < +\infty$,

2. $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից G-ում,

3. կամայական $G' \subset G$ ենթատիրույթի և կամայական $h(z)$ ֆունկ–ցիայի համար, որը հարմոնիկ է G'-ում և անընդհատ է $\overline{G'}$-ում, $u(z) \leqslant h(z)$ $\partial G'$-ի վրա պայմանից հետևում է, որ $u(z) \leqslant h(z)$, երբ $z \in G'$:

Եթե $-u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է, ապա $u(z)$-ը կոչվում է սու–պերհարմոնիկ: Հարմոնիկ ֆունկցիան միաժամանակ և սուբհարմոնիկ, և սուպերհարմոնիկ ֆունկցիա է:

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 3.4. Մենք դիտարկում ենք երկու իրական փոփոխականի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաները: Համապատասխան սահ–մանումն ու հատկությունները առանց էական փոփոխությունների մնում են ուժի մեջ նաև ցանկացած թվով փոփոխականի սուբհարմոնիկ ֆունկ–ցիաների համար:

3. Հարնակի թեորեմը. *D տիրույթում $h_k(z)$ նվազող, հարմո–նիկ ֆունկցիաների հաջորդականության սահմանը կամ հարմո–նիկ ֆունկցիա է D-ում, կամ նույնաբար $-\infty$ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $U(z^0, r) \Subset G$: Ինչպես հայտնի է, $U(z^0, r)$ շրջանում հարմոնիկ և նրա փակման վրա անընդհատ ամեն մի $h(z)$ ֆունկցիա ներկայացվում է Պուասոնի ինտեգրալային բանաձևով՝

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z - z^0, re^{i\theta})h(z^0 + re^{i\theta})d\theta, \quad z \in U(z^0, r), \tag{3.1}$$

որտեղ

$$P(z, \zeta) = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}, \quad \zeta = re^{i\theta}, \;\; z = \rho e^{i\varphi}$$

Պուասոնի կորիզն է: Այստեղից հեշտությամբ ստացվում է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\frac{r - \rho}{r + \rho} \leqslant P(z, \zeta) \leqslant \frac{r + \rho}{r - \rho}, \tag{3.2}$$

և միջին արժեքի թեորեմը՝

$$h(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(z+re^{i\theta})d\theta : \tag{3.3}$$

Կիրառելով (3.1) Պուասոնի բանաձևը h_k-h_{k+m} ֆունկցիաների նկատմամբ և օգտվելով (3.2) ու (3.3) հատկություններից, ստանում ենք Հարնակի անհավասարությունը՝

$$\frac{r-\rho}{r+\rho}\left[h_k(z^0)-h_{k+m}(z^0)\right]\leqslant h_k(z)-h_{k+m}(z)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{r+\rho}{r-\rho}\left[h_k(z^0)-h_{k+m}(z^0)\right], \tag{3.4}$$

որը ճիշտ է բոլոր $z\in U(z^0,r)$ կետերի համար:

Դիցուք $h_k(z^0)\to-\infty$: (3.4)-ից հետևում է, որ $h_k(z)\to-\infty$ հավասարաչափ $U(z^0,r/2)$-ում: Այստեղից և Հայնե–Բորելի լեմմայից եզրակացնում ենք, որ $h_k(z)\to-\infty$ հավասարաչափ ամեն մի $G'\Subset G$ ենթատիրույթում, այսինքն, հավասարաչափ G-ում:

Իսկ այժմ ենթադրենք $h_k(z^0)\to a>-\infty$: Ըստ ապացուցածի, $h(z)=\lim h_k(z)>-\infty$ G-ում: (3.4)-ից հետևում է, որ $h_k(z)\to h(z)$ հավասարաչափ $U(z^0,r/2)$-ում: Ըստ Հայնե–Բորելի լեմմայի, $h_k(z)$-ը զուգամիտում է $h(z)$-ին հավասարաչափ ամեն մի $G'\Subset G$ ենթատիրույթում: Ուրեմն, $h(z)$-ը հարմոնիկ է G-ում: □

4. Սուբհարմոնիկության հայտանիշ: *Դիցուք* $u(z)$ *ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է* G *տիրույթում և* $U(z^0,r)\Subset G$: *Այդ դեպքում*

$$u(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(z-z^0,re^{i\theta})u(z^0+re^{i\theta})d\theta,\quad z\in U(z^0,r): \tag{3.5}$$

Հակառակը, եթե G *տիրույթում վերևից կիսաանընդհատ* $u(z)$

ֆունկցիան բավարարում է

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta, \quad z \in G \tag{3.6}$$

անհավասարությանը բոլոր բավականաչափ փոքր $r < r_0$ *համար, ապա* u*-ն սուբհարմոնիկ է* G*-ում:*

Ապացույց: Դիցուք u-ն սուբհարմոնիկ է G-ում: Քանի որ նա վերևից կիսաանընդհատ է $\overline{U}(z^0, r)$-ում, ապա գոյություն ունի անընդհատ u_k ֆունկցիաների նվազող հաջորդականություն, որը $\overline{U}(z^0, r)$-ի վրա զուգամիտում է u-ին (տես խնդիր 3.1): Նշանակենք h_k-ով u_k-ի հարմոնիկ շարունակությունը $U(z^0, r)$ շրջանի վրա: Քանի որ

$$h_{k+1}(\zeta) = u_{k+1}(\zeta) \leqslant u_k(\zeta) = h_k(\zeta), \quad z \in \partial U(z^0, r),$$

ապա, ըստ մաքսիմումի սկզբունքի՝

$$h_{k+1}(z) \leqslant h_k(z), \quad z \in \overline{U}(z^0, r) : \tag{3.7}$$

Այսպեղից ըստ Հարնակի թեորեմի եզրակացնում ենք, որ

$$h^*(z) = \lim_{k \to \infty} h_k(z) \tag{3.8}$$

ֆունկցիան կամ հարմոնիկ է $U(z^0, r)$-ում, կամ նույնաբար հավասար է $-\infty$: Քանի որ u-ն սուբհարմոնիկ է G-ում և

$$u(z) \leqslant u_k(z) = h_k(z), \quad z \in \partial U(z^0, r), \tag{3.9}$$

ապա

$$u(z) \leqslant h_k(z), \quad z \in \overline{U}(z^0, r) :$$

Այսպեղից և (3.8)-ից՝

$$u(z) \leqslant h^*(z), \quad z \in \overline{U}(z^0, r) : \tag{3.10}$$

Այժմ հաշվի առնելով (3.1), (3.7)–(3.9) և Լևիի թեորեմը, ստանում ենք

$$h^*(z) = \lim_{k\to\infty} h_k(z) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta}) h_k(z^0+re^{i\theta})d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta}) \lim_{k\to\infty} h_k(z^0+re^{i\theta})d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta}) \lim_{k\to\infty} u_k(z^0+re^{i\theta})d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta}) u(z^0+re^{i\theta})d\theta : \qquad (3.11)$$

Այստեղից և (3.10)-ից բխում է պահանջվելիք (3.5)-ը:

Հակառակը, դիցուք $u(z) < +\infty$ ֆունկցիան վերևից կիսաանընդհատ է G-ում և բավարարում է (3.6) անհավասարությանը: Դիցուք h-ը հարմոնիկ է $G' \Subset G$-ում, անընդհատ է $\overline{G}'$-ում և $h(z) \geqslant u(z)$ $\partial G'$-ի վրա: Ենթադրենք գոյություն ունի $z' \in G'$ կետ, որ $h(z') < u(z')$: Այդ դեպքում $f(z) = u(z) - h(z)$ ֆունկցիան վերևից կիսաանընդհատ է $\overline{G}'$-ում, ոչ դրական է $\partial G'$-ի վրա և դրական է $z' \in G'$ կետում: Ուրեմն, նա հասնում է իր $M > 0$ մեծագույն արժեքին որևէ $z^0 \in G'$ կետում: Շնորհիվ (3.3)-ի $f(z)$-ը բավարարում է (3.6) անհավասարությանը բոլոր բավականաչափ փոքր $r \leqslant r_0(z^0)$ համար: Այդ դեպքում $f(z) \equiv \equiv M$ $U(z^0, r)$-ում: Իրոք, եթե որևէ $z' \in U(z^0, r)$ կետում $f(z) < M$, ապա վերևից կիսաանընդհատությունից կհետևեր, որ այդ անհավասարությունը պահպանվում է z'-ի որևէ շրջակայքում, իսկ դա կհակասեր (3.6)-ին:

Ըստ Հայնե–Բորելի լեմմայի, կարելի է նշել այնպիսի $r_0 = r_0(G')$ թիվ, որ (3.6)-ը տեղի ունենա բոլոր $z \in \overline{G}'$ և $r \leqslant r_0$ համար: Կիրառելով այդ անհավասարությունը G' փիրույթի այն z կետերի համար, որոնց համար $f(z) = M$, կստանանք $f(z) \equiv M > 0$ G'-ում, ինչը հակասում է $f(z) \leqslant 0$ պայմանին $\partial G'$-ի վրա: Ստացված հակասու– թյունը ապացուցում է, որ $h(z) \geqslant u(z)$ G'-ում: Այսպիսով, $u(z)$-ը սուբհարմոնիկ է G-ում: $\square$

5. Ամենափոքր հարմոնիկ մաժորանտ. Եթե $u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է $U(z^0,r)$-ում և վերևից կիսաանընդհատ է $\overline{U}(z^0,r)$-ում, ապա § 11.4 թեորեմի ապացուցման ընթացքում կառուցած $h^*(z)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է $U(z^0,r)$-ում և վերևից կիսաանընդհատ է $\overline{U}(z^0,r)$-ում: Շնորհիվ (3.11)-ի, նա կախված չէ $u_k \to u$ հաջորդականության ընտրությունից: $h^*(z)$ ֆունկցիան կոչվում է $u(z)$ ֆունկցիայի *ամենափոքր հարմոնիկ մաժորանտ* $U(z^0,r)$ շրջանում: Նա ունի հետևյալ հատկությունը. եթե h ֆունկցիան հարմոնիկ է $U(z^0,r)$-ում, անընդհատ է $\overline{U}(z^0,r)$-ում և $u(z) \leqslant h(z)$ $\partial U(z^0,r)$-ի վրա, ապա $h^*(z) \leqslant h(z)$ $U(z^0,r)$-ում:

Իսկապես, հաշվի առնելով (3.1)-ը և (3.11)-ը, ստանում ենք

$$h^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta})u(z^0+re^{i\theta})d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z-z^0, re^{i\theta})h(z^0+re^{i\theta})d\theta = h(z):$$

Նման ձևով սահմանվում է G տիրույթում սուբհարմոնիկ $u(z)$ ֆունկ– ցիայի ամենափոքր հարմոնիկ մաժորանտը, եթե ∂G եզրը այնպիսին է, որ ∂G-ի վրա տրված կամայական անընդհատ ֆունկցիայի համար Դի– րիխլեի խնդիրը ունի լուծում:

6. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների պարզագույն հատկությունները. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի սահմանումից և § 11.4-ում տրված հայտա– նիշից բխում են հետևյալ հատկությունները.

1. Եթե ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթի յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում, ապա այն սուբհարմոնիկ է G-ում:

2. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների դրական գործակիցներով գծային կոմբինացիան ևս սուբհարմոնիկ է:

3. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների հաջորդականության հավասարաչափ սահմանը սուբհարմոնիկ է:

4. *Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների մոնոտոն նվազող u_k հաջորդականության սահմանը սուբհարմոնիկ է:*

   Իրոք, ըստ կիսաանընդհատ ֆունկցիաների հատկությունների, կամայական $G' \Subset G$ ենթատիրույթի համար գոյություն ունի այնպիսի հաստատուն $C < +\infty$, որ $u_{k+1}(z) \leqslant u_k(z) \leqslant C$: Ուրեմն, $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z)$ ֆունկցիան կիսաանընդհատ է վերևից: Անցնելով (3.6)-ում սահմանի, ըստ Լևիի թեորեմի կստանանք

$$\lim_{k\to\infty} u_k(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \lim_{k\to\infty} u_k(z+re^{i\theta})d\theta :$$

   Ըստ § 11.4-ի հայտանիշի $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է:

5. *Եթե սուբհարմոնիկ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը տիրույթի ներսում, ապա այն նույնաբար հաստատուն է:*

   Իրոք, եթե $u(z)$ ֆունկցիան ընդուներ իր մեծագույն արժեքին $z^0 \in G$ կետում, ապա, ինչպես և § 11.4-ի հակադարձ թեորեմի ապացուցման ժամանակ, կստանայինք $u(z) \equiv M$ G-ում:

6. *Եթե u_α սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ընտանիքի*

$$u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z)$$

վերին պարուրիչը վերևից կիսաանընդհատ է G-ում, ապա այն սուբհարմոնիկ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $r < \Delta_G(z)$: Կիրառելով (3.6) անհավասարությունը յուրաքանչյուր $u_k(z)$ ֆունկցիայի նկատմամբ, կըստանանք

$$u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_\alpha u_\alpha(z + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})d\theta :$$

Ըստ § 11.4-ի հայտանիշի $u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է: □

7. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի միջին արժեքը: Դիցուք $u(z)$-ը սուբհարմոնիկ է G տիրույթում: Հետևյալ ֆունկցիան՝

$$J(r, z^0; u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z^0 + re^{i\theta})d\theta$$

կոչվում է $u(z)$-ի *միջին արժեք:* Պարզ է, որ նա որոշված է բոլոր այն r-երի համար, որոնց համար $\{z\colon\ |z - z^0| = r\} \subset G$:

Եթե $u(z)$-ը սուբհարմոնիկ է G-ում և $\{z\colon\ |z - z^0| < R\} \subset G$, ապա նրա միջին արժեքը աճում է ըստ r-ի $[0, R)$-ում:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $r_1 < r_2$ կամայական թվեր են $[0, R)$-ից և $h^*(z)$-ը $u(z)$-ի ամենափոքր հարմոնիկ մաժորանտն է $|z - z^0| < r_2$ շրջանում: Այդ դեպքում

$$J(r_1, z^0; u) \leqslant J(r_1, z^0; h^*) = J(r_2, z^0; h^*) = J(r_2, z^0; u) : \qquad \square$$

8. Սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի օրինակներ. Եթե $u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում, ապա $e^{u(z)}$-ը ևս սուբհարմոնիկ է, իսկ եթե լրացուցիչ $u(z) \geqslant 0$, ապա $u^p(z)$ ($p \geqslant 1$) ֆունկցիան նույնպես սուբհարմոնիկ է (տես խնդիրներ 3.2 և 3.3):

Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է G-ում: Այդ դեպքում հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$|f(z)|^p = e^{p\ln|f(z)|}, \quad \ln^+|f(z)| = \max(0, \ln|f(z)|)$$

սուբհարմոնիկ են: Շնորհիվ վերևում նշվածի և § 11.6-ի, այս պնդումը բավական է ապացուցել $\ln|f(z)|$-ի համար: Պարզ է, որ այդ ֆունկցիան վերևից կիսաանընդհատ է: Այն կետերում, որտեղ $\ln|f(z)| = -\infty$, (3.6) անհավասարությունը ակնհայտորեն բավարարվում է, մնացած կետերի շրջակայքում $\ln|f(z)| = \mathrm{Re}\,\ln f(z)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է և (3.6)-ը բավարարվում է ըստ (3.3)-ի:

Այսպիսով, եթե f-ը հոլոմորֆ է $\overline{U}(0,r)$-ում, ապա (3.5)-ից բխում է *Յենսենի անհավասարությունը*՝

$$\ln|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\theta})\ln\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta :$$

§ 15. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաներ

Հետագայի համար կարևոր դեր է կատարում այսպես կոչված հեռավորության ֆունկցիան, որի սահմանումը և հատկությունները բերվում են ստորև:

1. Հեռավորության ֆունկցիան: Դիցուք O-ն բաց բազմություն է $\mathbb{R}^n$-ում: Նշանակենք $\Delta_O(x)$-ով *հեռավորության ֆունկցիան,* այսինքն, $x \in O$ կետի հեռավորությունը ∂O եզրից՝

$$\Delta_O(x) = \sup r, \quad \text{որտեղ } B(x,r) \subset O :$$

Եթե $O \neq \mathbb{R}^n$, ապա $\Delta_O(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է O-ում:

Իրոք, $\Delta_O(x)$ ֆունկցիան վերջավոր է O-ում: Դիցուք $|x'-x''|<\varepsilon$: Այդ դեպքում $|x-x'|<|x-x''|+\varepsilon$: Եթե $|x-x'|<\Delta_O(x')-\varepsilon$, կստանանք $|x-x'|<\Delta_O(x')$: Այստեղից հետևում է, որ $x\in O$ և, ըստ սահմանման, $\Delta_O(x'')\geqslant\Delta_O(x')-\varepsilon$: Փոխելով x' և x'' կետերի դերերը, ստանում ենք $\Delta_O(x')\geqslant\Delta_O(x'')-\varepsilon$: Ուրեմն, եթե $|x'-x''|<\varepsilon$, $|\Delta_O(x')-\Delta_O(x'')|\leqslant\varepsilon$:

Եթե $A\subset O$, ապա $\Delta_O(A)$-ով նշանակվում է A-ի հեռավորությունը ∂O-ից՝

$$\Delta_O(A)=\inf_{x\in A}\Delta_O(x):$$

Ակնհայտ է, որ

$$\Delta_O\Big(\bigcup_\alpha A_\alpha\Big)=\inf\nolimits_\alpha\Delta_O(A_\alpha):$$

Այստեղից ու Հայնե–Բորելի լեմմայից հետևում է, որ եթե $A\Subset O$, ապա $\Delta_O(A)>0$, իսկ եթե A-ն սահմանափակ է և $\Delta_O(A)>0$, ապա $A\Subset O$:

Դիցուք O_α-ն $(\alpha=1,2,\dots)$ բաց բազմությունների հաջորդականություն է և $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha=O$: Կամայական $A\Subset O$ բազմության համար գոյություն ունի այնպիսի $N=N(A)$ թիվ, որ

$$\Delta_{O_\alpha}(A)\leqslant\Delta_{O_{\alpha+1}}(A)\leqslant\Delta_O(A),\quad \textit{երբ}\quad \alpha\geqslant N, \tag{3.12}$$
$$\lim_{\alpha\to\infty}\Delta_{O_\alpha}(A)=\Delta_O(A):$$

Ապացույցը անմիջապես բխում է սահմանումներից:

Դիցուք O-ն O_α բաց բազմությունների հատման ներքին է: Կամայական $A\subset O$ բազմության համար

$$\Delta_O(A)=\inf_\alpha\Delta_{O_\alpha}(A): \tag{3.13}$$

Այս հավասարությունը ապացուցելու համար բավական է այն ապացուցել $A=\{x\}$ բազմության և $\Big(\bigcap\limits_\alpha O_\alpha\Big)^\circ$ բազմության ամեն մի B կապակցված կոմպոնենտի համար, այն է՝

$$\Delta_B(x)=\inf_\alpha\Delta_{O_\alpha}(x):$$

Քանի որ $x \in B \subset O_\alpha$, ապա $\Delta_B(x) \leqslant \Delta_{O_\alpha}(x)$ և, ուրեմն

$$\Delta_B(x) \leqslant \inf_\alpha \Delta_{O_\alpha}(x) :$$

Մյուս կողմից, քանի որ $B\big(x, \Delta_{O_\alpha}(x)\big) \subset O_\alpha$ և $x \in B$, ապա

$$B\left(x, \inf_\alpha \Delta_{O_\alpha}(x)\right) \subset B :$$

Այստեղից հետևում է

$$\inf_\alpha \Delta_{O_\alpha}(x) \leqslant \Delta_B(x)$$

անհավասարությունը, որը նախորդի հակադարձն է, ինչից և բխում է պնդումը:

Դիցուք G-ն տիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, a-ն կոմպլեքս վեկտոր է, $|a| = 1$, և λ-ն կոմպլեքս պարամետր է: Նշանակենք $\Delta_{a,G}(z)$-ով z կետի հեռավորությունը մինչև G տիրույթի և $z' = z + \lambda a$ երկչափ անալիտիկ հարթության հատումը, որն իրենից ներկայացնում է երկչափ բաց բազմություն, այնպես որ

$$\Delta_{a,G}(z) = \sup r, \quad \text{եթե} \quad \big\{z' : \ z' = z + \lambda a, \ |\lambda| < r\big\} \subset G :$$

$\Delta_{a,G}(z)$ ֆունկցիան G-ում կիսաանընդհատ է ներքևից կամայական a-ի դեպքում:

Ներմուծելով $G_{z,a} = \{\lambda : \ z + \lambda a \in G\}$ բազմությունը λ կոմպլեքս փոփոխականի հարթության վրա, կարող ենք գրել

$$\Delta_{a,G}(z) = \Delta_{G_{z,a}}(0) :$$

Ակնհայտ է, որ

$$\Delta_G(z) = \inf_{|a|=1} \Delta_{a,G}(z) :$$

2. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի սահմանումը: $u(z)$ ֆունկցիան կոչվում է *պլյուրիսուբհարմոնիկ* $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում, եթե

1. $u(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից D-ում,
2. կամայական $z^0 \in D$ կետի համար նրա հետքը այդ կետով անցնող կամայական կոմպլեքս ուղղի վրա սուբհարմոնիկ է:

Ավելի մանրամասն երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ կամայական $a \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար $u(z^0 + \lambda a)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է ըստ λ-ի

$$D_{z^0,a} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ z^0 + \lambda a \in D\right\}$$

բաց բազմության ամեն մի կապակցված կոմպոնենտի վրա:

Եթե $-u(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է, ապա $u(z)$-ը կոչվում է պլյուրիսուպերհարմոնիկ: Պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիան միաժամանակ և պլյուրիսուբհարմոնիկ է, և պլյուրիսուպերհարմոնիկ:

Որպես պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների օրինակ կարող են ծառայել $\ln|f(z)|$, $\ln^+|f(z)|$ և $|f(z)|^p$ ֆունկցիաները, որտեղ $f(z)$-ը հոլոմորֆ է G-ում (տես § 11.8-ը):

3. Պլյուրիսուբհարմոնիկության հայտանիշ: *Որպեսզի D տիրույթում վերևից կիսաանընդհատ $u(z)$ ֆունկցիան լինի պլյուրիսուբհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $z \in D$ կետի և $\omega \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար գոյություն ունենա այնպիսի $r_0 = r_0(z,\omega)$ թիվ, որ*

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u\left(z + \omega r e^{it}\right) dt \quad \text{երբ}\ \ r < r_0: \tag{3.14}$$

Այդ պնդումը անմիջապես հետևում է § 12.2 սահմանումից և § 11.4 հայտանիշից:

4. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների պարզագույն հատկությունները. Ստորև թվարկած հատկությունները հետևում են սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համապատասխան հատկություններից:

1. Եթե ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է D տիրույթի յուրաքանչյուր կետի շրջակայքում, ապա այն պլյուրիսուբհարմոնիկ է D-ում:
2. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների դրական գործակիցներով գծային կոմբինացիան ևս պլյուրիսուբհարմոնիկ է:
3. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների հաջորդականության հավասարաչափ սահմանը պլյուրիսուբհարմոնիկ է:
4. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների մոնոտոն նվազող հաջորդականության սահմանը պլյուրիսուբհարմոնիկ է:
5. Եթե պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն արժեքը տիրույթի ներսում, ապա այն նույնաբար հաստատուն է:
6. Եթե φ_α պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների ընտանիքի վերին պարուրիչը՝
$$u(z) = \sup_\alpha u_\alpha(z)$$
վերևից կիսաանընդհատ է D-ում, ապա այն պլյուրիսուբհարմոնիկ է:

5. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի միջին արժեքը. Ինտեգրելով (3.14)-ը միավոր սֆերայով, կստանանք

$$\frac{2\pi^n}{(n-1)!}\,\varphi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_S \varphi\left(z+\omega r e^{it}\right) d\sigma(\omega) =$$
$$= \int\limits_S \varphi\left(z+\omega r\right) d\sigma(\omega),$$

որտեղ $\dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$ թիվը միավոր սֆերայի ծավալն է:

Թ ե ո ր ե մ 3.1. *Եթե φ-ն պլյուրիսուբհարմոնիկ է D-ում, ապա բավականաչափ փոքր r-ի համար նրա արժեքը կամայական $z \in \in D$ կետում չի գերազանցում նրա արժեքների միջինից $S(z,r)$ սֆերայով՝*

$$\varphi(z) \leqslant \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_S \varphi\left(z+\omega r\right) d\sigma(\omega): \tag{3.15}$$

Հ ե տ և ա ն ք 3.1. *$D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում կամայական պլյուրի–սուբհարմոնիկ ֆունկցիա $2n$ իրական փոփոխականի սուբհար–մոնիկ ֆունկցիա է:*

Թ ե ո ր ե մ 3.2. *Եթե φ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է z^0 կետի շրջակայքում, ապա նրա*

$$S(r) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_S \varphi\left(z_0+\omega r\right) d\sigma(\omega)$$

միջին արժեքը $\{|z-z_0| = r\}$ սֆերայի վրա r-ից աճող ֆունկցիա է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Իսկապես, (3.15)-ից հետևում է, որ

$$S(r) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_S d\sigma(\omega)\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi\left(z+\omega r e^{it}\right) dt,$$

հետևաբար, բավական է նկատել, որ $u(\zeta) = \varphi\left(z+\omega\zeta\right)$ սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի միջինը, այսինքն

$$s(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(re^{it}) dt$$

մեծությունը աճող ֆունկցիա է r-ից: $\square$

6. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների մոտարկում. Այժմ ապացուցենք, որ կամայական պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիա մոտարկվում է նմանապիպ, բայց անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաներով:

Թ ե ո ր ե մ 3.3. *Կամայական φ ֆունկցիայի համար, որը պլյուրիսուբհարմոնիկ է $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում, կարելի է կառուցել աճող բաց բազմությունների G_k, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = D$ հաջորդականություն և նվազող $\varphi_k \in C^{\infty}(G_k)$ պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է φ-ին ցանկացած $z \in D$ կետում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Եթե $\varphi \equiv -\infty$, ապա որպես φ_k կվերցնենք $\varphi_k(z) \equiv -k$ հաջորդականությունը: Ընդհանուր դեպքում φ_k-ն կառուցվում է միջինացմամբ: Ներմուծենք

$$K(z) = \begin{cases} ce^{-1/(1-|z|^2)}, & \text{եթե} \quad |z| < 1, \\ 0, & \text{եթե} \quad |z| \geqslant 1 \end{cases}$$

ֆունկցիան, որտեղ c հաստատունը ընտրված է այնպես, որ K-ի ինտեգրալը ամբողջ $\mathbb{C}^n$-ով լինի հավասար մեկի: Այդ ֆունկցիան մենք կօգտագործենք որպես միջինացնող կորիզ: Դիտարկենք

$$\varphi_k(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n} \varphi\left(z + \frac{w}{k}\right) K(w) dV(w) \tag{3.16}$$

ֆունկցիաները, որտեղ ինտեգրումը փաստորեն կատարվում է միավոր գնդով, քանի որ գնդից դուրս $K \equiv 0$: Պարզ է, որ յուրաքանչյուր φ_k որոշված է

$$G_k = \left\{ z \in D\colon\ \delta(z, \partial D) > \frac{1}{k} \right\}$$

բաց բազմության վրա, որտեղ δ-ն էվկլիդյան հեռավորությունն է: Պարզ է նաև, որ $G_k \subset G_{k+1}$ բոլոր k-երի համար և որ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = D$:

Կատարելով $z+\dfrac{w}{k}\mapsto w$ փոփոխականի փոխարինում, (3.16)-ը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\varphi_k(z)=k^{2n}\int\limits_{\mathbb{C}^n}\varphi(w)\,K\big(k(w-z)\big)dV(w),$$

որտեղից երևում է, որ $\varphi_k\in C^\infty(G_k)$, որովհետև K-ն անվերջ դիֆերենցելի է: Ցույց տանք, որ φ_k-ն բավարարում է (3.14)-ով արտահայտվող պլյուրիսուբհարմոնիկության հայտանիշին: Իրոք, եթե $z\in G_k$, $\omega\in\mathbb{C}^n$ և r-ը բավականին փոքր է, ապա

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(z+\omega re^{it}\right)dt=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{C}^n}K(w)\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi\left(z+\frac{w}{k}+\omega re^{it}\right)dt\right\}dV(w)\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\mathbb{C}^n}K(w)\varphi\left(z+\frac{w}{k}\right)dV(w)=\varphi_k(z):$$

Այստեղ մենք օգտվել ենք այն բանից, որ φ-ն պլյուրիսուբհարմոնիկ է իսկ K-ն՝ ոչ բացասական:

Անցնելով (3.16)-ում բևեռային կոորդինատների (տես (4.11))

$$dV(r\zeta)=r^{2n-1}dr\,d\sigma(\zeta),$$

որտեղ $r=|w|$ և $\zeta\in S$, կստանանք

$$\varphi_k(z)=\int\limits_0^1 r^{2n-1}K(r)dr\int\limits_S\varphi\left(z+\frac{r\zeta}{k}\right)d\sigma(\zeta)=$$
$$=\frac{2\pi^n}{(n-1)!}\int\limits_0^1 r^{2n-1}K(r)S\left(\frac{r}{k}\right)dr, \tag{3.17}$$

որտեղ $S\left(\dfrac{r}{k}\right)$-ն իրենից ներկայացնում է φ ֆունկցիայի արժեքների միջինը $\{w\colon\ |w-z|=r/k\}$ սֆերայի վրա: Ըստ թեորեմ 3.2-ի, k-ն աճելիս φ_k-ն նվազում է:

Շնորհիվ φ ֆունկցիայի պլյուրիսուբհարմոնիկությանը նրա միջինը $S(r/k)\geqslant\varphi(z)$ ըստ թեորեմ 3.1-ի և, քանի որ

$$\frac{2\pi^n}{(n-1)!}\int\limits_0^1 r^{2n-1}K(r)dr=\int\limits_0^1 r^{2n-1}K(r)\int\limits_S d\sigma(\zeta)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{C}^n}K(w)dV(w)=1,$$

ապա (3.17)-ից հետևում է, որ $\varphi_k(z)\geqslant\varphi(z)$ կամայական $z\in D$, սկսած ինչ-որ k_0 համարից: Մյուս կողմից, φ-ի կիսաանընդհատությունից բխում է, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ համար $\varphi(w)-\varphi(z)<\varepsilon$ բոլոր w-ների համար, որոնք բավականաչափ մոտ են z-ին: Ուրեմն, $S(r/k)\leqslant\varphi(z)+\varepsilon$, երբ $k\geqslant k_0$ և այդպիսի k-երի համար (3.17)-ից ստանում ենք $\varphi_k(z)<\varphi(z)+\varepsilon$: Այսպիսով, ստացվեց, որ

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(z)=\varphi(z)$$

բոլոր $z\in D$ համար: $\square$

Դիտողություն 3.5. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների 4-րդ հատկությունից հետևում է, որ թեորեմ 3.3-ը հակադարձելի է:

7. Լևիի ձևը. Ինչպես հայտնի է, C^2 դասի սուբհարմոնիկ ֆունկցիաները բնութագրվում են նրանով, որ նրանց վրա $\Delta=4\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}$ Լապլասի օպերատորը ոչ բացասական է: Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնից հետևում է՝

$$\frac{\partial^2\varphi(z^0+\omega\zeta)}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}=\sum_{i,k=1}^n\frac{\partial^2\varphi(z^0)}{\partial z_i\,\partial\bar z_k}\,\omega_i\,\bar\omega_k\ :$$

Այստեղ աջ մասում առաջացած ձևը էրմիտյան է, որովհետև $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar z_k} =$
$= \overline{\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar z_k}\right)}$, քանի որ φ-ն իրական է: Այն նշանակվում է

$$H_z(\varphi,\omega)=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_i\,\partial \bar z_k}\,\omega_i\,\bar\omega_k$$

և կոչվում է φ ֆունկցիայի *Լևիի ձև* z կետում: Այսպիսով, մենք ստանում ենք հետևյալ հայտանիշը:

Թ ե ո ր ե մ 3.4. *Որպեսզի $\varphi\in C^2(D)$ ֆունկցիան լինի պլյու–րիսուբհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $z\in D$ կետում նրա $H_z(\varphi,\omega)$ Լևիի ձևը լինի ոչ բացասական բոլոր $\omega\in\mathbb{C}^n$ վեկտորների համար:*

Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաներից առանձնացնենք մի կարևոր դաս:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 3.1. φ ֆունկցիան կոչվում է *խիստ պլյուրի–սուբհարմոնիկ*, եթե

1. $\varphi\in C^2(D)$,

2. յուրաքանչյուր $z\in D$ կետում նրա Լևիի ձևը

$$H_z(\varphi,\omega)>0 \quad \text{բոլոր} \quad \omega\in\ \mathbb{C}^n\setminus\{0\} \quad \text{վեկտորների համար:}$$

Թ ե ո ր ե մ 3.5. *Եթե φ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է $D\subset\mathbb{C}^n$ տիրույթում, իսկ ψ ֆունկցիան իրական, աճող, ուռուցիկ է և $\psi\in C^2(D)$, ապա $(\psi\circ\varphi)$-ն պլյուրիսուբհարմոնիկ է D-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Սկզբից դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\varphi\in C^2(D)$: Դժվար չէ ստուգել Լևիի ձևի հետևյալ հատկությունը՝

$$H_z(\psi\circ\varphi,\omega)=\psi'\circ\varphi(z)H_z(\varphi,\omega)+\psi''\circ\varphi(z)\,|\partial\varphi(\omega)|^2\,,$$

և քանի որ $\psi' \geqslant 0$ և $\psi'' \geqslant 0$, ապա դիտարկվող դեպքում թեորեմի պնդումը ապացուցված է:

Ընդհանուր դեպքում օգտվում ենք թեորեմ 3.3-ից և նրա հակադարձից. φ-ն մոտարկում ենք ողորկ պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների հաջորդականությամբ $\varphi_k \searrow \varphi$: Ըստ վերևում ապացուցածի, $\psi \circ \varphi_k$ ֆունկցիաները պլյուրիսուբհարմոնիկ են: Հաշվի առնելով, որ ψ-ն աճող ֆունկցիա է, ստանում ենք $\psi \circ \varphi_k \searrow \psi \circ \varphi$ և, ուրեմն, $\psi \circ \varphi$-ն պլյուրիսուբհարմոնիկ է: □

8. Ինվարիանտություն բիհոլոմորֆ արտապատկերման նկատմամբ.

Թ ե ո ր ե մ 3.6. *Բիհոլոմորֆ արտապատկերման ժամանակ պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի պատկերը պլյուրիսուբհարմոնիկ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Սկզբից ենթադրենք, որ պլյուրիսուբհարմոնիկ u ֆունկցիան պատկանում է C^2 դասին: Դիցուք $\zeta = \zeta(z)$-ը բիհոլոմորֆ արտապատկերում է B-ն B_1-ի վրա և $z = z(\zeta)$ հակադարձ արտապատկերումն է: Նշանակելով A-ով

$$A = \left\| \frac{\partial z_j}{\partial \zeta_k} \right\|, \quad j,k = 1,\ldots,n$$

մատրիցը, $u_1(\zeta) = u\big[z(\zeta)\big]$ ֆունկցիայի համար կունենանք

$$\big(H(\zeta; u_1)a, \bar{a}\big) = \big(H(z; u)Aa, \overline{Aa}\big) \geqslant 0 :$$

Իսկ եթե $u \notin C^2$, ապա կիրառելով ստացված արդյունքը C^∞ դասի պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների նկատմամբ, որոնք նվազելով ձգտում են u-ին (տես թեորեմ 3.3-ը), ստանում ենք պնդումը ընդհանուր դեպքում: □

9. Պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի հետքը անալիտիկ մակե-րևույթի վրա.

Թ ե ո ր ե մ 3.7. *$D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում պլյուրիսուբհարմոնիկ φ ֆունկցիայի հետքը կամայական m-չափանի $f\colon\ G \mapsto \mathbb{C}^n,\ \ G \subset \subset \mathbb{C}^m$ անալիտիկ մակերևույթի վրա և պլյուրիսուբհարմոնիկ է $\Omega = \{\zeta \in G\colon\ f(\zeta) \in D\}$ բաց բազմությունում:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Պարզության համար սահմանափակվենք $m = 1$ դեպքով, այսինքն, ապացուցենք, որ φ-ի հետքը $z = f(\zeta)$ անալիտիկ կորի վրա սուբհարմոնիկ ֆունկցիա է:

Սկզբից դիտարկենք $\varphi \in C^2(D)$ դեպքը: Կիրառելով բարդ ֆունկ-ցիայի ածանցման կանոնը $u = \varphi \circ \psi$ ֆունկցիայի նկատմամբ, կստա-նանք

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta} = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_i\,\partial \bar z_k}\,\frac{\partial f_i}{\partial\zeta}\overline{\left(\frac{\partial f_k}{\partial\zeta}\right)}\,:$$

Քանի որ φ-ն պլյուրիսուբհարմոնիկ է, ըստ թեորեմ 3.4-ի աջ մասում մասնակցող ձևը ոչ բացասական է, իսկ դա նշանակում է $u(\zeta)$-ի սուբ-հարմոնիկությունը:

Ընդհանուր դեպքը բերվում է դիտարկվածին շնորհիվ թեորեմ 3.3-ի և նրան հետևող դիտողությանը: □

Հ ե տ և ա ն ք 3.2. *Անալիտիկ S մակերևույթի վրա պլյուրիսուբ-հարմոնիկ ֆունկցիայի հետքի համար ճշմարիտ է մաքսիմումի սկզբունքը:*

§ 16. Ուռուցիկ ֆունկցիաներ

Ուռուցիկ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների կարևոր մասնավոր դեպք է:

1. Ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանումը: $u(x) < +\infty$ ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ* (a, b) միջակայքում, եթե ցանկացած x և x' կետերի համար (a, b)-ից տեղի ունի

$$u\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) \leqslant \lambda u(x) + (1-\lambda)u(x') \tag{3.18}$$

անհավասարությունը:

$u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ* $B \subset \mathbb{R}^n$ *տիրույթում*, եթե բոլոր $x^0 \in B$ կետերի և $b \in \mathbb{R}^n$ $(|b| = 1)$ վեկտորների համար $u(x^0 + tb)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է ըստ t-ի

$$B_{x^0,b} = \big\{t\colon\ x^0 + tb \in B\big\}$$

բաց բազմության պատկանող յուրաքանչյուր միջակայքում:

Բերված սահմանումներից հետևում է, որ եթե $u(x)$-ը ուռուցիկ է B-ում, ապա կամ $u(x) \equiv -\infty$, կամ $u(x)$-ը վերջավոր է B-ի բոլոր կետերում:

2. Ուռուցիկ ֆունկցիայի անընդհատությունը: *Եթե $u(x) \not\equiv -\infty$ ֆունկցիան ուռուցիկ է B տիրույթում, ապա նա անընդհատ է:*

Ապացույց: Նախ ապացուցենք, որ $u(x)$-ը վերևից սահմանափակ է ամեն մի $K \subset B$ կոմպակտի վրա: Ըստ Հայնե–Բորելի լեմմայի այդ պնդումը բավական է ապացուցել B-ին պատկանող փակ ուռուցիկ բազմանիստերի համար: Նշանակենք $x^{(k)}$-ով, $k = 1, \ldots, N$, տրված Π բազմանիստի գագաթները: Կամայական $x \in \Pi$ կետ ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$x = \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} t_k x^{(k)}, \quad \text{որտեղ } t_k \geqslant 0 \quad \text{և} \quad \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} t_k = 1\,:$$

Այդ դեպքում տեղի ունի

$$u(x) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant N} t_k u(x^{(k)}), \quad x \in \Pi \tag{3.19}$$

անհավասարությունը: Իրոք, $N = 1$ դեպքում (3.19)-ը ճիշտ է: Ենթադրենք, այն ճիշտ է $(N-1)$-ի դեպքում: Օգտվելով (3.19)-ից, ստանում ենք

$$u(x) = u\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant N-1} t_k x^{(k)} + t_N x^{(N)}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (1-t_N)u\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant N-1} \frac{t_k}{1-t_N} x^{(k)}\Big) +$$
$$+ t_N u\big(x^{(N)}\big) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant N} t_k u\big(x^{(k)}\big) :$$

(3.19)-ից բխում է $u(x)$-ի սահմանափակությունը վերևից Π-ի վրա, որովհետև

$$u(x) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant N}\Big\{u\big(x^{(k)}\big)\Big\}, \quad x \in \Pi :$$

Դիցուք $x^0 \in B$, ապացուցենք, որ u-ն անընդհատ է x^0-ում: Ըստ ապացուցածի, $u(x) \leqslant a$ բավականաչափ փոքր $|x-x^0| \leqslant r$ գնդում: Դիցուք $x_k \to x^0$, ընդ որում $1 \geqslant \varepsilon_k = \dfrac{|x-x^0|}{r} \to 0$: Կիրառելով (3.18)-ը, երբ $\lambda = \varepsilon_k$, $x = \dfrac{x_k - x^0}{\varepsilon_k} + x^0$ և $x' = x^0$, ստանում ենք՝

$$u(x_k) \leqslant \varepsilon_k u\left(\frac{x_k - x^0}{\varepsilon_k} + x^0\right) + (1-\varepsilon_k)u(x^0) :$$

Այստեղից հետևում է, որ

$$u(x_k) - u(x^0) \leqslant \varepsilon_k \left[a - u(x^0)\right] : \tag{3.20}$$

Կիրառելով (3.18)-ը, երբ $\lambda = \dfrac{1}{1+\varepsilon_k}$, $x = x_k$ և $x' = \dfrac{x^0 - x_k}{\varepsilon_k} + x^0$, կստանանք

$$u(x^0) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon_k}\, u(x_k) + \frac{\varepsilon_k}{1+\varepsilon_k}\, u\left(\frac{x_k - x^0}{\varepsilon_k} + x^0\right),$$

որտեղից և
$$u(x^0) - u(x_k) \leqslant \varepsilon_k \left[a - u(x^0)\right],$$
ինչը (3.20)-ի հետ միասին ապացուցում է u-ի անընդհատությունը x^0 կետում: □

3. Ուռուցիկ ֆունկցիայի հատկությունները: Ուռուցիկ ֆունկցիայի հատկությունները նման են անընդհատ պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի հատկություններին և բխում են մեկ փոփոխականի ուռուցիկ ֆունկցիայի հատկություններից ճիշտ այնպես, ինչպես պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիայի հատկությունները բխում են մեկ (կոմպլեքս) փոփոխականի սուբհարմոնիկ ֆունկցիայի հատկություններից:

Նշենք դրանցից մի քանիսը:

1. Եթե $u(x)$ ֆունկցիան պատկանում է $C^2(B)$ դասին, ապա նա ուռուցիկ է B տիրույթում այն և միայն այն դեպքում, երբ
$$\big(H(x;u)b,b\big) = \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\, b_j b_k$$
քառակուսային ձևը B-ում դրական է:

2. Եթե $\{u_\alpha(x)\}$ ուռուցիկ ֆունկցիաների ընտանիքը B-ում լոկալ հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա
$$\sup_\alpha u_\alpha(x)$$
վերին պարուրիչը ևս ուռուցիկ է B-ում:

3. Եթե $u(z) = u(x,y)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $G \subset \mathbb{R}^{2n}$ տիրույթում, ապա այն պլյուրիսուբհարմոնիկ է այդ տիրույթում:

Ապացույց: Դիցուք $a_j = b_j + ic_j$,
$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\,\partial \bar z_k}\, a_j\, \bar a_k = \frac{1}{4}\sum_j \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}\right)(b_j^2 + c_j^2) +$$

$$+\sum_{j\neq k}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_j\,\partial y_k}\right)(b_jb_k+c_jc_k)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial y_k}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial y_j}\right)(c_jb_k-c_kb_j)\right]: \quad (3.21)$$

Նշանակելով $B=(b,c)=(b_1,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_n)$ և $C=(c,-b)$, այստեղից ստանում ենք

$$\big(H(z;u)a,\bar{a}\big)=\frac{1}{4}\big(H(x,y;u)B,B\big)+\frac{1}{4}\big(H(x,y;u)C,C\big),$$

որտեղից և բխում է պնդումը: □

4. Որպեսզի $u(z)$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ $B\subset\mathbb{R}^n$ տիրույթում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա լինի պլյուրիսուբհարմոնիկ $B+i\mathbb{R}^n\subset\subset\mathbb{C}^n$ խողովակաձև տիրույթում:

Ա պ ա ց ու յ ց: Իրոք, քանի որ $\dfrac{\partial u}{\partial y_j}=0$, $j=1,2,\ldots,n$, ապա (3.21)-ից հետևում է

$$\big(H(z;u)a,\bar{a}\big)=\frac{1}{4}\big(H(x;u)b,b\big)+\frac{1}{4}\big(H(x;u)c,c\big),$$

որտեղից և բխում է պնդումը: □

§ 17. Պսևդոուռուցիկ տիրույթներ

1. Պսևդոուռուցիկ տիրույթի սահմանումը: Պսևդոուռուցիկ տիրույթները սահմանվում են պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միջոցով այնպես, ինչպես ուռուցիկ տիրույթները՝ ուռուցիկ ֆունկցիաների միջոցով: Պսևդոուռուցիկությունը հանդիսանում է իրական $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ սահմանված ուռուցիկության գաղափարի ընդհանրացում կոմպլեքս $\mathbb{C}^n$ տարածության դեպքի վրա:

G տիրույթը կոչվում է *պսևդոուռուցիկ*, եթե $-\ln\Delta_G(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում:

G տիրույթում որոշված $-\ln\Delta_G(z)$ ձգտում է $(+\infty)$-ը տիրույթի ∂G եզրի բոլոր վերջավոր կետերում: Ուրեմն, եթե G-ն պսևդոուռուցիկ է, ապա

$$\max\left\{-\ln\Delta_G(z), |z|^2\right\}$$

անընդհատ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում և ձգտում է $(+\infty)$-ը ամենուրեք ∂G-ի վրա:

2. Պսևդոուռուցիկ տիրույթների պարզագույն հատկությունները: *Պսևդոուռուցիկ տիրույթների հատման ներսի յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք G_α-ները պսևդոուռուցիկ տիրույթներ են: Այդ դեպքում $-\ln\Delta_{G_\alpha}(z)$ ֆունկցիաները պլյուրիսուբհարմոնիկ են G_α-ում: Դիցուք G-ն հանդիսանում է $\left(\bigcap\limits_\alpha G_\alpha\right)^\circ$ բազմության որևէ կապակցված կոմպոնենտ: $-\ln\Delta_{G_\alpha}(z)$ ֆունկցիաները լոկալ հավասարաչափ սահմանափակ են G-ում, որովհետև $\Delta_{G_\alpha}(z)\geqslant\Delta_G(G')>$ >0, երբ $z\in G'\Subset G$: Հաշվի առնելով (3.13)-ը, ստանում ենք, որ

$$-\ln\Delta_G(z)=\sup_\alpha\{-\ln\Delta_{G_\alpha}(z)\}$$

ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում (տես § 12.4): Այսպիսով, G-ն պսևդոուռուցիկ տիրույթ է: □

Եթե $G\subset\mathbb{C}^n$ և $D\subset\mathbb{C}^m$ տիրույթները պսևդոուռուցիկ են, ապա $G\times D\subset\mathbb{C}^{n+m}$ տիրույթը նույնպես պսևդոուռուցիկ է:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Քանի որ

$$G\times D=(G\times\mathbb{C}^m)\bigcap(\mathbb{C}^n\times D)\,,$$

ապա ըստ նախորդ արդյունքի բավական է ապացուցել, որ $G \times \mathbb{C}^m$ և $\mathbb{C}^n \times D$ տիրույթները պսևդոուռուցիկ են $\mathbb{C}^{n+m}$-ում: Իսկ այդ պնդումը հետևում է

$$-\ln \Delta_G(z) = -\ln \Delta_{G\times\mathbb{C}^m}(z, w)$$

առնչությունից, որի համաձայն $-\ln \Delta_{G\times\mathbb{C}^m}(z, w)$ ֆունկցիան պլյուրի–սուբհարմոնիկ է $G \times \mathbb{C}^m$-ում, այսինքն՝ $(G \times \mathbb{C}^m)$ տիրույթը պսևդո–ուռուցիկ է: □

Պսևդոուռուցիկ տիրույթների աճող հաջորդականության միա–վորումը նույնպես պսևդոուռուցիկ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $G_\alpha \subset G_{\alpha+1}$ և $G = \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$: Ըստ (3.12)-ի

$$-\ln \Delta_{G_\alpha}(z) \geqslant -\ln \Delta_{G_{\alpha+1}}(z) \to -\ln \Delta_G(z), \quad \text{երբ} \quad \alpha \to \infty$$

կամայական $G' \Subset G$ ենթատիրույթում: □

3. Անընդհատության թույլ սկզբունք: Կասենք, որ $G \subset \mathbb{C}^n$ տի–րույթի համար ճիշտ է *անընդհատության թույլ սկզբունքը*, եթե G-ում տրված կամայական S_α կոմպակտ անալիտիկ կորերի հաջոր–դականության համար

$$\lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha = S_0 \quad \text{և} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \partial S_\alpha = T_0 \Subset G$$

պայմանից հետևում է, որ $S_0 \Subset G$:

Ակնհայտ է, որ $\mathbb{C}^1$-ում ամեն մի տիրույթի համար ճիշտ է անընդ–հատության թույլ սկզբունքը:

4. Պսևդոուռուցիկության հայտանիշ I: *Որպեսզի G տիրույ–թը լինի պսևդոուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա հա–մար տեղի ունենա անընդհատության թույլ սկզբունքը:*

Լ ե մ մ ա 3.1. *Եթե G տիրույթի համար տեղի է ունենում անընդհատության թույլ սկզբունքը, ապա $u(z) = -\ln R(z)$ ֆունկցիան, որտեղ $R(z)$-ը G-ի Հարտոգսի շառավիղն է z կետում, պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ակնհայտ է, որ կամայական G տիրույթի Հարտոգսի շառավղի համար $\varliminf\limits_{z\to a} R(z) \geqslant R(a)$, այնպես որ R-ը կիսաանընդհատ է ներքևից, իսկ $u = -\ln R$-ը կիսաանընդհատ է վերևից: Մնում է ապացուցել, որ $u(z) = -\ln R(z)$ ֆունկցիայի հետքը կամայական

$$l_\omega = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z = l(\zeta) = a + \omega\zeta\}\,, \quad a \in G, \quad \omega \in \mathbb{C}^n \qquad (3.22)$$

կոմպլեքս ուղղի վրա սուբհարմոնիկ է $\zeta = 0$ կետի շրջակայքում: Եթե $\widetilde{\omega} = \widetilde{0}$, այսինքն, եթե l_ω-ն զուգահեռ է z_n առանցքին, ապա

$$R|_{l_\omega} = \inf_{z' \in \partial G \cap l_\omega} \left|z_n - z'_n\right|,$$

և, հետևաբար,

$$u|_{l_\omega} = -\ln R|_{l_\omega} = \sup_{z' \in \partial G \cap l_\omega} \left\{-\ln\left|z_n - z'_n\right|\right\}$$

ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է՝ որպես սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների վերին պարուրիչ:

Այն դեպքում, երբ $\widetilde{\omega} \neq \widetilde{0}$, ապացույցը կատարենք հակասող ենթադրությամբ: Եթե

$$u|_{l_\omega} = -\ln R \circ l(\zeta) = v(\zeta) \qquad (3.23)$$

ֆունկցիան սուբհարմոնիկ չէ $\zeta = 0$ կետի շրջակայքում, ապա գոյություն ունի $U = \{\zeta\colon\ |\zeta| < r\}$ շրջան և նրանում հարմոնիկ h ֆունկցիա, որն անընդհատ է $\overline{U}$-ում, $v(\zeta) \leqslant h(\zeta)$ երբ $\zeta \in \partial G$, բայց ինչ-որ $\zeta_0 \in U$ կետում

$$h(\zeta_0) - v(\zeta_0) = \inf_{\overline{U}}\{h(\zeta) - v(\zeta)\} = -\varepsilon < 0\,:$$

Այստեղ մենք հաշվի ենք առել, որ ներքևից կիսաանընդհատ $h - v$ ֆունկցիան կոմպակտի վրա հասնում է իր ստորին եզրին: Այնուհետև, $g(\zeta) = -h(\zeta) - \varepsilon$ ֆունկցիան, որը անընդհատ է $\overline{U}$-ում և հարմոնիկ է U-ում, բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$\begin{aligned} g(\zeta) &< -v(\zeta) \qquad &&\partial U\text{-ի վրա}, \\ g(\zeta) &\leqslant -v(\zeta) \qquad &&\overline{U}\text{-ի վրա}, \\ g(\zeta_0) &= -v(\zeta_0)\,: \end{aligned} \tag{3.24}$$

Դիցուք (3.22)-ում $l(\zeta) = \big(\widetilde{l}(\zeta), \lambda(\zeta)\big)$, այնպես որ $\widetilde{l}(\zeta) = \widetilde{a} + \widetilde{\omega}\zeta$ և $\lambda(\zeta) = a_n + \omega_n\zeta$: Համաձայն Հարտոգսի շառավղի սահմանմանը, գոյություն ունի $b = (\widetilde{b}, b_n) \in \partial G$ այնպիսի կետ, որ $\widetilde{b} = \widetilde{l}(\zeta_0)$ և $|b_n - -\lambda(\zeta_0)| = R{\circ}l(\zeta_0)$: Կառուցենք U-ում հոլոմորֆ $G = g + ig_*$ ֆունկցիա այնպես, որ $G(\zeta)$-ն համընկնի $\ln\big(b_n - \lambda(\zeta_0)\big)$ արժեքներից որևէ մեկի հետ: Դա հնարավոր է, որովհետև $\ln\big|b_n - \lambda(\zeta_0)\big| = -v(\zeta_0) = g(\zeta_0)$ ըստ (3.23)-ի և (3.24)-ի:

Այժմ դիտարկենք կոմպակտ անալիտիկ կորերի

$$S_t = \Big\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ \widetilde{z} = \widetilde{l}(\zeta),\ z_n = \lambda(\zeta) + te^{G(\zeta)},\ \ \zeta \in \overline{U}\Big\}$$

ընտանիք: Կամայական $z \in S_t$ կետի համար մի կողմից՝ $\widetilde{z} = \widetilde{l}(\zeta)$, մյուս կողմից ըստ (3.24)-ի երկրորդ անհավասարության՝

$$\big|z_n - \lambda(\zeta)\big| = te^{g(\zeta)} \leqslant te^{-u(\zeta)} = tR \circ l(\zeta)\,:$$

Այստեղից և Հարտոգսի շառավղի սահմանումից հետևում է, որ $S_t \subset G$, երբ $t < 1$: Շնորհիվ (3.24)-ի առաջին անհավասարությանը, նման ձևով ստանում ենք՝ $S_t \subset \partial G$, երբ $0 \leqslant t \leqslant 1$: Ակնհայտ է, որ $S_t \to S_1$, երբ $t \to 1$: Մյուս կողմից, S_1-ը պարունակում է $b \in \partial G$ կետը, որովհետև $\zeta = \zeta_0$ կետում ունենք $\widetilde{z} = \widetilde{l}(\zeta_0) = \widetilde{b}$ և $z_n = \lambda(\zeta_0) + te^{G(\zeta_0)} = = b_n$ (հիշենք, որ $\ln G(\zeta_0) = b_0 - \lambda(\zeta_0)$): Ստացանք հակասություն այն պայմանի հետ, որ G-ն բավարարում է անընդհատության թույլ սկզբունքին: $\square$

Ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ո ւ թ յ ո ւ ն: Ենթադրենք հակառակը, G-ն չի բավարարում անընդհատության թույլ սկզբունքին: Այդ դեպքում գոյություն ունի S_k կոմպակտ անալիտիկ մակերևույթների հաջորդականություն, որ $S_k \to S$, $\partial S_k \to \partial S$, ընդ որում $\overline{S}_k, \partial S \in G$, իսկ S-ը պարունակում է որևէ $a \in \partial G$ կետ: Ուրեմն, $-\ln \Delta_G(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում: Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների համար

$$\sup_{S_k}(-\ln \Delta_G) \leqslant \sup_{\partial S_k}(-\ln \Delta_G) < c < \infty, \tag{3.25}$$

որտեղ c-ն կախված չէ k-ից, քանի որ ∂S_k-երի միավորումը կոմպակտ ձևով պատկանում է G-ին: Մյուս կողմից, գոյություն ունի $z^k \in S_k$ կետերի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է $a \in \partial G$ կետին, և $-\ln \Delta_G(z^k) \to \infty$, ինչը հակասում է (3.25)-ին:

Բ ա վ ա ր ա ր ո ւ թ յ ո ւ ն: Պետք է ապացուցել, որ $-\ln \Delta_G(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում:

Նշանակենք l_ω-ով $\zeta \mapsto z + \omega\zeta$ կոմպլեքս ուղիղը, որն անցնում է z կետով ω վեկտորի ուղղությամբ, և դիցուք $R_\omega(z) = \Delta_{a,G}(z)$: Ակնհայտ է, որ

$$\Delta_G(z) = \inf_\omega \Delta_{\omega,G}(z),$$

որտեղ ստորին եզրը վերցված է ըստ բոլոր $\omega \in \mathbb{C}^n$, $|\omega| = 1$:

$z \mapsto Cz$ պտույտի միջոցով, որտեղ C-ն ունիտար օպերատոր է, ω վեկտորի ուղղությունը կարելի է տանել z_n առանցքի ուղղությանը, այնպես որ $R_\omega(z)$-ն կանցնի G փիրույթի Հարտոգսի շառավղին: Քանի որ այդ պտույտը պահպանում է և՛ էվկլիդյան հեռավորությունը, և՛ պսևդոուռուցիկությունը, և՛ L-ուռուցիկությունը, ապա ըստ լեմմա 3.1-ի կարելի է պնդել, որ $-\ln R_\omega(z)$-ը պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում: Այդ դեպքում

$$-\ln \Delta_G(z) = \sup_\omega \big(-\ln \Delta_{\omega,G}(z)\big) \tag{3.26}$$

ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում որպես պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների վերին պարուրիչ: □

5. Պսևդոուռուցիկության հայտանիշ II: *Որպեսզի $G \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը լինի պսևդոուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $-\ln \Delta_{\omega,G}(z)$ ֆունկցիան լինի պլյուրիսուբհարմոնիկ G-ում բոլոր ω-երի ($|\omega| = 1$) դեպքում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Եթե G-ն պսևդոուռուցիկ է, ապա, ինչպես հետևում է պսևդոուռուցիկության հայտանիշ I-ի բավարարության ապացույցից, $-\ln \Delta_{\omega,G}(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է:

Հակառակը, եթե $-\ln \Delta_{\omega,G}(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է, ապա համաձայն (3.26)-ի, $-\ln \Delta_G(z)$-ը ևս պլյուրիսուբհարմոնիկ է, իսկ դա նշանակում է, որ G-ն պսևդոուռուցիկ է: $\square$

6. Պսևդոուռուցիկության հայտանիշ III: *Դիցուք $V(z)$-ը պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիա է*

$$G = \left\{z\colon\ V(z) < 0,\ \ z \in U(\overline{G})\right\}$$

բաց բազմության $U(\overline{G})$ շրջակայքում: Այդ դեպքում G-ի յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Նկատենք, որ G բազմությունը բաց է, որովհետև $V(z)$-ը կիսաանընդհատ է վերևից $U(\overline{G})$-ում: Նախ ենթադրենք թե G-ն սահմանափակ բազմություն է, այդ դեպքում $G \Subset U(\overline{G})$: Սկզբից դիտարկենք անընդհատ $V(z)$-ի դեպքը: Ինչպես պսևդոուռուցիկության հայտանիշի անհրաժեշտության ապացույցի ժամանակ, միայն թե փոխարինելով $-\ln \Delta_G(z)$-ը $V(z)$-ով, ցույց է տրվում, որ G բաց բազմության համար ճիշտ է անընդհատության թույլ սկզբունքը: Ուրեմն՝ G-ի յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է:

Այժմ ազատվենք այն ենթադրությունից, թե $V(z)$-ը անընդհատ է: Ըստ թեորեմ 3.3-ի, գոյություն ունի անընդհատ $V_\alpha(z)$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որոնք պլյուրիսուբհարմոնիկ են G' բաց բազմության վրա, $G' \Subset G \Subset U(\overline{G})$, և զուգամիտում են $V(z)$-ին: Հետևաբար

$$G_\alpha = \left\{z\colon\ \ V_\alpha(z) < 0,\ \ z \in G'\right\}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots$$

բաց բազմությունների հաջորդականությունը աճում է և $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha = G$: Ըստ ապացուցածի, G_α-ի յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է: Համաձայն § 14.2-ի թեորեմի, G-ի յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ է:

Այժմ ենթադրենք G բազմությունը սահմանափակ չէ: Դիտարկենք սահմանափակ բաց բազմությունների $G_R = G \bigcap B(0, R)$, $R = 1, 2, \ldots$ հաջորդականությունը: Պարզ է, որ

$$G_R = \left\{z\colon\ V_R(z) < 0,\ \ z \in U(\overline{G})\right\}, \quad G_R \Subset U(\overline{G}),$$

որտեղ

$$V_R(z) = \max\left\{V(z), |z|^2 - R^2\right\}$$

ֆունկցիան պլյուրիհսուբհարմոնիկ է $U(\overline{G})$-ում: Ըստ ապացուցածի, G_R բազմության ամեն մի կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է: Մյուս կողմից, $G_R \subset G_{R+1}$ և $\bigcup\limits_{R>0} G_R = G$: Ըստ § 14.2-ի, G բազմության յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ է: $\square$

7. Պսևդոուռուցիկության հայտանիշ IV: *Որպեսզի G տիրույթը լինի պսևդոուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ G-ում գոյություն ունենա պլյուրիհսուբհարմոնիկ $V(z)$ ֆունկցիա, որը ձըգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Անհրաժեշտությունը բխում է պսևդոուռուցիկության սահմանումից և այն փաստից, որ $-\ln \Delta_G(z)$ պլյուրիհսուբհարմոնիկ ֆունկցիան ձգտում է $+\infty$-ը ամենուրեք ∂G-ի վրա:

Ապացուցենք բավարարությունը: Քանի որ $V(z)$-ը ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա, ապա

$$G_\alpha = \{z\colon\ V(z) - \alpha < 0,\ z \in G\}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots,$$

բաց բազմությունների հաջորդականությունը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \Subset G, \quad \bigcup_\alpha G_\alpha = G :$$

Քանի որ $G_\alpha \Subset G$ և $V(z) - \alpha$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում, ապա G_α բաց բազմության յուրաքանչյուր կապակցված կոմպոնենտ հանդիսանում է պսևդոուռուցիկ տիրույթ: Ըստ § 14.2-ի, G-ն պսևդոուռուցիկ է: □

8. Պսևդոուռուցիկության հայտանիշ V:

Թ ե ո ր ե մ 3.8. *Դիցուք G-ն պսևդոուռուցիկ տիրույթ է և $V(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում: Հետևյալ բաց բազմության՝*

$$G' = \{z \in G\colon\ V(z) < 0\}$$

ամեն մի կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Ըստ § 14.7-ի, գոյություն ունի G-ում այնպիսի պլյուրիսուբհարմոնիկ $V^*(z)$ ֆունկցիա, որ

$$\{z \in G\colon\ V^*(z) < 0\} \Subset G, \quad \alpha = 1, 2, \ldots :$$

$V_\alpha(z) = \max\{V^*(z) - \alpha, V(z)\}$ ֆունկցիաները պլյուրիսուբհարմոնիկ են G-ում և

$$G_\alpha = \{z \in G\colon\ V_\alpha(z) < 0\}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots$$

բաց բազմությունների հաջորդականությունը բավարարում է

$$G_\alpha \Subset G, \quad G_\alpha \subset G_{\alpha+1} \quad \text{և} \quad \bigcup_\alpha G_\alpha = G'$$

պայմաններին: Ըստ § 14.2-ի պսևդոուռուցիկության հայտանիշի, G-ն պսևդոուռուցիկ է: □

9. Խիստ պսևդոուռուցիկ տիրույթ: Եթե տիրույթի եզրը երկու անգամ ողորկ է, ապա պսևդոուռուցիկությունը կարելի է նկարագրել ոչ թե սպառիչ, ինչպես § 14.1-ում, այլ որոշիչ ֆունկցիայի միջոցով: ρ-ն կանվանենք որոշիչ ֆունկցիա $D\subset\mathbb{C}^n$ տիրույթի համար, եթե ∂D եզրի ինչ-որ Ω շրջակայքում նա պատկանում է C^2 դասին, այդ շրջակայքում

$$D\bigcap\Omega=\{z\in\Omega:\ \rho(z)<0\}\,, \tag{3.27}$$

և $\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0$, երբ $z\in\partial D$:

Սահմանում 3.2. C^2 եզրով $D\subset\mathbb{C}^n$ տիրույթը կոչվում է պսևդոուռուցիկ, եթե նա ունի որոշիչ ρ ֆունկցիա, որի Լևիի ձևը $H_z(\rho,\omega)\geqslant 0$ բոլոր $z\in\partial D$ և $\omega\in T_z^c(\partial D)$ համար, և կոչվում է խիստ պսևդոուռուցիկ, եթե նա սահմանափակ է և $H_z(\rho,\omega)>0$, երբ $z\in\partial D$, $\omega\in T_z^c(\partial D)$, $\omega\neq 0$:

Օրինակ 3.1. Դիտարկենք $B^n=\{z\in\mathbb{C}^n:\ |z|<1\}$ գունդը: Որպես որոշիչ ֆունկցիա կարող է ծառայել $\rho(z)=\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\bar z_k-1$ ֆունկ–ցիան, նրա Լևիի ձևը $H_z(\rho,\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\bar\omega_k=|\omega|^2>0$, երբ $\omega\neq 0$: Ուրեմն, գունդը խիստ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է:

Ցույց տանք, որ 3.2 սահմանման մեջ որոշիչ ֆունկցիայի ընտրու–թյունը դեր չի խաղում: Այդ նպատակով նախ ապացուցենք

Լեմմա 3.2. *Եթե $G\subset\mathbb{R}^n$ տիրույթում որոշված են $\varphi,\psi\in C^k(G)$ ֆունկցիաներ, ընդ որում $\operatorname{grad}\varphi(z)\neq 0$ և $\psi=0$ ամե–նուրեք, որտեղ $\varphi=0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $h\in C^{k-1}(G)$ ֆունկցիա, որ $\psi=h\varphi$ G-ում:*

Ապացույց: Քանի որ լեմմայի պնդումը կրում է լոկալ բնույթ, ապա կարելի է համարել, որ G-ն սկզբնակետի շրջակայք է, որտեղ $\varphi(x)=0$ հավասարումը համարժեք է $x_n=\varphi_1(\widetilde x)$-ին: Կատարե–լով $\widetilde x\mapsto\widetilde x$, $x_n\mapsto x_n-\varphi_1(\widetilde x)$ փոփոխականի փոխարինում, հարցը կհանգեցնենք այն դեպքին, երբ $\varphi(x) = x_n$ և $\psi(\widetilde{x}, 0) = 0$: Հետևյալ պարզ առնչությունից՝

$$\psi(x) = x_n \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \psi(\widetilde{x}, tx_n)\, dt, \quad x \in G,$$

երևում է, որ որպես h կարելի է վերցնել այստեղ մասնակցող ինտեգրալը, որը ակնհայտորեն պատկանում է $C^{k-1}(G)$-ին: $\square$

Այժմ ենթադրենք, որ D տիրույթն ունի φ և ψ որոշիչ ֆունկցիաներ: Ըստ լեմմայի, կամայական եզրային a կետի U_a շրջակայքում գոյություն ունի այնպիսի $h_a \in C^1(U_a)$ ֆունկցիա, որ $\psi = h\varphi$: Քանի որ և φ-ն, և ψ-ն բացասական են $U_a \bigcap D$-ում և դրական են $U_a \setminus \overline{D}$-ում, $U_a \setminus D$ բազմության վրա $h > 0$: Բայց $h \neq 0$ նաև ∂D-ի վրա, որովհետև, ըստ նույն լեմմայի, $\varphi = h_1\psi$, որտեղ $h_1 = 1/h \in C^1(U_a)$, և ուրեմն $h > 0$ ամենուրեք U_a-ում: Մյուս կողմից, դժվար չէ ստուգել, որ

$$H_a(\psi, \omega) = h(a) H_a(\varphi, \omega), \quad \text{երբ} \quad \omega \in T_a^c(\partial D),$$

այնպես որ φ և ψ ֆունկցիաների Լևիի ձևերի հետքերը $T_a^c(\partial D)$-ի վրա տարբերվում են դրական արտադրիչով:

Նշենք պսևդոուռուցիկության և պլյուրիսուբհարմոնիկության կապը:

Թ ե ո ր ե մ 3.9. $D \subset \mathbb{C}^n$ *տիրույթը խիստ պսևդոուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, եթե նա ունի խիստ պլյուրիսուբհարմոնիկ որոշիչ ֆունկցիա:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Պայմանի բավարարությունը ակնհայտ է, ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք ρ-ն (3.27) D տիրույթը որևէ որոշիչ ֆունկցիա է: Եթե Ω շերտը բավականին նեղ է, ապա կամայական k հաստատունի համար որոշիչ է նաև $\psi = \rho + k\rho^2$ ֆունկցիան: Անմիջական հաշվումը ցույց է տալիս, որ

$$H_z(\psi, \omega) = H_z(\rho, \omega) + 2k \left|\partial\rho(\omega)\right|^2, \tag{3.28}$$

որտեղ $\partial\rho(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial\rho}{\partial z_k}\,\omega_k$: Բավական է ապացուցել, որ $H_z(\psi,\omega)$-ն դրական է

$$E = \{(z,\omega)\colon\ z \in \partial D,\ \omega \in \mathbb{C}^n,\ |\omega| = 1\}$$

կոմպակտ բազմության վրա: Նշանակենք

$$E_0 = \{(z,\omega) \in E\colon\ H_z(\rho,\omega) \leqslant 0\}\ :$$

Եթե E_0-ն դատարկ է, ապա կվերցնենք $k = 0$, հակառակ դեպքում ընտրում ենք այնպիսի M հաստատուն, որ $H_z(\rho,\omega) \geqslant -M$ բոլոր $(z,\omega) \in E_0$ կետերի համար: Համաձայն խիստ պսևդոուռուցիկ փիրույթի սահմանմանը, $H_z(\rho,\omega) > 0$ երբ $z \in \partial D$ և $\omega \in T_z^c(\partial D)$, այսինքն՝ $\partial\rho(\omega) = 0$, երբ $\omega \neq 0$, հետևաբար $\partial\rho(\omega) \neq 0$ E_0-ի վրա: Կոմպակտության շնորհիվ գոյություն ունի $m > 0$ թիվ այնպիսին, որ $|\partial\rho(\omega)| \geqslant m$ երբ $\omega \in E_0$: Ընտրելով $k > \dfrac{M}{2m^2}$, (3.28)-ից ստանում ենք, որ

$$H_z(\psi,\omega) \geqslant -M + 2km^2 > 0, \quad z \in E_0,$$

իսկ $E \setminus E_0$-ի վրա $H_z(\psi,\omega)$ ձևի դրական լինելը ակնհայտ է: Անընդհատության նկատառումներից պարզ է, որ եթե Ω-ն բավականին նեղ է, ապա $H_z(\psi,\omega) > 0$ երբ $\omega \neq 0$ ոչ միայն ∂D-ի վրա, այլ նաև բոլոր $z \in \Omega$ կետերի համար, իսկ դա էլ նշանակում է ψ ֆունկցիայի խիստ պլյուրիսուբհարմոնիկությունը: □

10. Ինվարիանտություն բիհոլոմորֆ արտապատկերումների նկատմամբ: Հետագայում մեզ անհրաժեշտ է լինելու հետևյալ լեմման՝

Լ և մ մ ա 3.3. *Դիցուք բիհոլոմորֆ $\zeta = \zeta(z)$ արտապատկերումը G տիրույթը ձևափոխում է G_1 տիրույթի և $u(z)$ ֆունկցիան ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա: Այդ դեպքում $u\big[z(\zeta)\big]$ ֆունկցիան, որտեղ $z = z(\zeta)$-ն հակադարձ արտապատկերումն է, ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G_1-ի վրա:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Կամայական իրական M թվի դեպքում

$$\{z\colon\ u(z) < M,\ \ z \in G\} \Subset G\ :$$

Քանի որ բիհոլոմորֆ արտապատկերումը հոմեոմորֆ է, ապա

$$\big\{\zeta\colon\ u\big[z(\zeta)\big] < M,\ \ \zeta \in G_1\big\} \Subset G_1\ : \qquad \square$$

Բիհոլոմորֆ $\zeta = \zeta(z)$ արտապատկերման ժամանակ պսևդո–ուռուցիկ G տիրույթի G_1 պատկերը ևս պսևդոուռուցիկ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Քանի որ G-ն պսևդոուռուցիկ է, ապա գոյություն ունի G-ում պլյուրիսուբհարմոնիկ $V(z)$ ֆունկցիա, որը ձգտում է $+$ $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա: Այդ դեպքում $V\big[z(\zeta)\big]$ ֆունկցիան, որտեղ $z = z(\zeta)$-ն հակադարձ արտապատկերումն է, պլյուրիսուբհարմոնիկ է G_1-ում և, ըստ նախորդ լեմմայի, ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G_1-ի վրա: Ըստ § 14.7-ի, G_1-ը պսևդոուռուցիկ է: $\square$

11. Պսևդոուռուցիկ տիրույթների հատույթները: *Պսևդոուռու–ցիկ G տիրույթի g հատույթը $2k$-չափանի անալիտիկ F հարթու–թյամբ պսևդոուռուցիկ տիրույթ է $\mathbb{C}^k$-ում:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Քանի որ բիհոլոմորֆ արտապատկերումը պահպանում է պսևդոուռուցիկությունը, կարող ենք համարել, որ F հարթությունը տրվում է $z_{n-k} = \cdots = z_n = 0$ հավասարումներով: Պսևդոուռուցիկ G տիրույթի համար գոյություն ունի G-ում պլյուրի–սուբհարմոնիկ $V(z)$ ֆունկցիա, որը ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա: Այդ դեպքում $V(z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբ–հարմոնիկ է g-ում և ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂G-ի վրա: Ուրեմն, g-ի ամեն մի կապակցված կոմպոնենտ պսևդոուռուցիկ է: $\square$

12. Հարտոգսի պսևդոուռուցիկ տիրույթ: Հարտոգսի պսևդոուռուցիկ լրիվ G տիրույթը կարելի է նկարագրել հետևյալ ձևով՝

$$G = \{z:\ |z_n| < R(\widetilde{z}),\ \ \widetilde{z} \in B\},$$

որտեղ B-ն տիրույթ է $\mathbb{C}^{n-1}$ տարածության մեջ, իսկ $-\ln R(\widetilde{z})$ ֆունկցիան ներքևից կիսաանընդհատ է B-ում:

Թ ե ո ր ե մ 3.10. *Հարտոգսի լրիվ G տիրույթը պսևդոուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ B-ն պսևդոուռուցիկ տիրույթ է և $-\ln R(\widetilde{z})$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է B-ում:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Դիցուք G-ն պսևդոուռուցիկ տիրույթ է: Այդ դեպքում B-ն որպես G-ի հատույթ անալիտիկ $z_n = 0$ հարթությամբ ևս պսևդոուռուցիկ է (տես § 14.11-ը): Ըստ § 14.5-ի, $-\ln \Delta_{a,G}(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում: Վերցնելով $a = (0,\ldots,0,1)$ և նկատելով, որ

$$-\ln \Delta_{a,G}(\widetilde{z}, 0) = -\ln R(\widetilde{z}),$$

ստանում ենք, որ $-\ln R(\widetilde{z})$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է:

Հակադարձը, ենթադրենք, որ B-ն պսևդոուռուցիկ տիրույթ է և $-\ln R(\widetilde{z})$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է B-ում: Ըստ § 14.2-ի, $B \times \mathbb{C}^1$ տիրույթը պսևդոուռուցիկ է և $\ln|z_n| - \ln R(\widetilde{z})$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է $B \times \mathbb{C}^1$-ում: Պարզ է, որ

$$G = \left\{z:\ \ln|z_n| - \ln R(\widetilde{z}) < 0,\ \ z \in B \times \mathbb{C}^1\right\}:$$

Ըստ թեորեմ 3.8-ի, G տիրույթը պսևդոուռուցիկ է: $\square$

13. Օկայի թեորեմը: Բեհենկե–Զոմերի թեորեմից հետևում է, որ հոլոմորֆության տիրույթի համար տեղի է ունենում անընդհատության թույլ սկզբունքը: Այստեղից և պսևդոուռուցիկության I հայտանիշից (տես § 14.4) բխում է, որ հոլոմորֆության տիրույթը պսևդոուռուցիկ է: Հակադարձ պնդումը կազմում է Լևիի հայտնի հիմնախնդրի բովանդակությունը, որն առաջարկվել է դեռ 1911 թ.: Այդ հիմնախնդրի լուծումը տվել է Օկան 1942 թվականին:

Թ ե ո ր ե մ 3.11 (Օկա). *Ամեն մի պսևդոուռուցիկ տիրույթ հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ապացույցը բավականին բարդ է և պահանջում է բազմաչափ կոմպլեքս անալիզի լրացուցիչ միջոցների ներգրավում (օրինակ, Կուզենի խնդրի լուծելիությունը), որոնք սույն դասագրքում չեն դիտարկվում: Այնպես որ այդ թեորեմի ապացույցը չենք բերի:

Սրորև թվարկենք հոլոմորֆության տիրույթը բնութագրող պայմանները:

Թ ե ո ր ե մ 3.12. *Հետևյալ պայմանները համարժեք են.*

1. *G-ն հոլոմորֆության տիրույթ է, այսինքն, գոյություն ունի ֆունկցիա $\mathcal{O}(G)$-ից, որը չի շարունակվում ավելի լայն տիրույթի մեջ (տես § 8-ը);*

2. *G-ն հոլոմորֆ ուռուցիկ է, այսինքն, $K \Subset G$ պայմանից հետևում է, որ K-ի հոլոմորֆ ուռուցիկ թաղանթը $\widehat{K}_{\mathcal{O}} \Subset G$ (տես § 9-ը);*

3. *G-ի համար տեղի է ունենում անընդհատության թույլ սկզբունքը, այսինքն, G-ում տրված կամայական S_α կոմպակտ անալիտիկ կորերի հաջորդականության համար*

$$\lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha = S_0 \quad \text{և} \quad \lim_{\alpha\to\infty} \partial S_\alpha = T_0 \Subset G$$

պայմանից հետևում է, որ $S_0 \Subset G$ (տես § 14.3-ը);

4. *G-ն պսևդոուռուցիկ է, այսինքն, $-\ln \Delta_G(z)$ ֆունկցիան պլյուրիսուբհարմոնիկ է G-ում (տես § 14.1-ը):*

§ 18. Ուռուցիկ փիրույթներ

Ուռուցիկ փիրույթները սահմանվում են ուռուցիկ ֆունկցիաների միջոցով ճիշտ այնպես, ինչպես պսևդոուռուցիկ փիրույթները՝ պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միջոցով: Այնպես որ ուռուցիկ և պսևդոուռուցիկ փիրույթների միջև կա խորը նմանություն: Ստորև մենք կշարադրենք ուռուցիկ փիրույթների մի քանի հատկություն, որոնք ընդգծում են նրանց նմանությունը պսևդոուռուցիկ փիրույթների հետ:

1. Ուռուցիկ փիրույթի սահմանումը: $B \subset \mathbb{R}^n$ փիրույթը կոչվում է ուռուցիկ, եթե $x' \in B$ և $x'' \in B$ պայմանից հետևում է, որ

$$\left\{x\colon\ x = tx' + (1-t)x'',\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1\right\} \subset B:$$

Ինչպես հայտնի է, փիրույթը ուռուցիկ է այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրա կամայական եզրային կետում գոյություն ունի հենման հարթություն:

Այստեղից բխում է. որպեսզի B փիրույթը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա լինի $\left\{x\colon\ a(x-x^0) > 0\right\}$ կիսատարածությունների հատման ներսը, այսինքն,

$$B = \left(\bigcap_{x^0 \in \partial B} \left\{x\colon\ a(x-x^0) > 0\right\}\right)^{\circ}:$$

Այստեղ $\left\{x\colon\ a(x-x^0) = 0\right\}$ բազմությունը հանդիսանում է $x^0 \in \partial B$ կետում B փիրույթի հենման հարթություն:

2. Ուռուցիկության առաջին պայման: *Որպեսզի B փիրույթը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա համար տեղի ունենա հետևյալ թույլ անընդհատության սկզբունքը. եթե S_α-ն*

($\alpha = 1, 2, \dots,$) ուղղագիծ միջակայքերի այնպիսի հաջորդականություն է, որ $S_\alpha \bigcup \partial S_\alpha \Subset B$, $\lim S_\alpha = S_0$ սահմանափակ է, $\lim \partial S_\alpha = T_0 \Subset B$, ապա $S_0 \Subset B$:

Ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ու թ յ ու ն: Դիցուք B-ն ուռուցիկ փիրույթ է: Ապացուցենք, որ

$$\Delta_B(x) \geqslant \Delta_B(\partial S_\alpha), \quad x \in S_\alpha : \tag{3.29}$$

Եթե (3.29)-ը տեղի չունենար, կգտնվեր այնպիսի մի $x^0 \in S_\alpha$ կետ, որի համար

$$\Delta_B(x^0) < \Delta_B(\partial S_\alpha) : \tag{3.30}$$

Նշանակենք x'-ով որևէ կետ ∂B-ից, որի հեռավորությունը x^0-ից հավասար է $\Delta_B(x^0)$: x'-ով տանենք S_α-ին զուգահեռ L ուղիղ: Դիցուք $\partial S_\alpha = \{a_\alpha, b_\alpha\}$: Ըստ կառուցման, L ուղղի վրա կգտնվեն այնպիսի a'_α և b'_α կետեր, որ $|a_\alpha - a'_\alpha| = \Delta_B(x^0)$, $|b_\alpha - b'_\alpha| = \Delta_B(x^0)$: Այստեղից և (3.30)-ից հետևում է, որ $a'_\alpha \in B$ և $b'_\alpha \in B$: Քանի որ x^0 կետը գտնվում է a_α-ի և b_α-ի միջև, ապա x' կետը ևս գտնվում է a'_α-ի և b'_α կետերի միջև: Դա հնարավոր չէ, որովհետև փիրույթը ուռուցիկ է: Ստացված հակասությունը ապացուցում է (3.29) անհավասարությունը: Անցնելով այդ անհավասարության մեջ սահմանի, երբ $\alpha \to \infty$, և օգտվելով $\Delta_B(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից, S_0 ու T_0 բազմությունների սահմանափակությունից, ստանում ենք $\Delta_B(S_0) \geqslant \Delta_B(T_0)$: Շնորհիվ $T_0 \Subset B$ պայմանի, այստեղից բխում է, որ $\Delta_B(S_0) > 0$, ինչը S_0-ի սահմանափակության հետ միասին պալիս է $S_0 \Subset B$: Իսկ դա նշանակում է, որ B փիրույթի համար տեղի է ունենում անընդհատության թույլ սկզբունքը:

Բ ա վ ա ր ա ր ու թ յ ու ն. Դիցուք $x' \in B$ և $x'' \in B$: Այդ կետերը միացնենք կտոր առ կտոր ողորկ կորով՝

$$\{x\colon\ x = x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}, \quad x' = x(0), \quad x'' = x(1),$$

որը լիովին ընկած է B փիրույթի մեջ: Քանի որ x'-ը B-ի ներքին կետ է, բավականաչափ փոքր t-երի համար $x' = x(0)$ և $x(t)$ կետերը միացնող բոլոր ուղղագիծ հատվածները պատկանում են B-ին: Ըստ անընդհատության թույլ սկզբունքի, այդ հատվածները պատկանում են B-ին $\forall\, t \in [0,1]$ դեպքում, մասնավորապես, $t = 1$-ի դեպքում: Ուրեմն, B-ն ուռուցիկ փիրույթ է: □

3. Ուռուցիկության երկրորդ պայման: *Որպեսզի B փիրույթը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $-\ln \Delta_B(x)$ ֆունկցիան լինի ուռուցիկ B-ում:*

Անհրաժեշտություն: Դիցուք B-ն ուռուցիկ փիրույթ է: Յուրաքանչյուր $x^0 \in \partial B$ կետով տանենք $\{x\colon\ a(x - x^0) = 0\}$ հենման հարթություն ($|a| = 1$): Ինչպես հայտնի է, $a(x - x^0)$ թիվը հավասար է $x \in \partial B$ կետի հեռավորությանը մինչև այդ հարթությունը: Ուրեմն՝

$$\Delta_B(x) = \inf_{x^0 \in \partial B} \left\{a(x - x^0)\right\}$$

և, հետևաբար,

$$-\ln \Delta_B(x) = \sup_{x^0 \in \partial B} \left\{-\ln a(x - x^0)\right\} : \tag{3.31}$$

Մյուս կողմից, $-\ln a(x-x^0)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է B-ում, որովհետև

$$\big(H(x; -\ln a(x - x^0))b, b\big) = \sum_{j,k} \frac{a_j a_k b_j b_k}{[a(x - x^0)]^2} = \frac{(ab)^2}{[a(x - x^0)]^2} \geqslant 0 :$$

Այնուհետև, պարզ է, որ $\{-\ln a(x - x^0),\ x^0 \in \partial B\}$ ֆունկցիաների ընտանիքը հավասարաչափ սահմանափակ է վերևից ամեն մի $B' \Subset B$ ենթափիրույթի վրա: Եվ, ուրեմն, (3.31)-ից հետևում է, որ $-\ln \Delta_B(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է B-ում:

Բավարարություն: Դիցուք $-\ln \Delta_B(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է B-ում: Ապացուցենք, որ B փիրույթի համար տեղի է ունենում անընդհատության թույլ սկզբունքը: Դիցուք S_α-ն ($\alpha = 1, 2, \ldots,$) ուղղագիծ միջակայքերի այնպիսի հաջորդականություն է, որ $S_\alpha \bigcup \partial S_\alpha \Subset B$, $\lim S_\alpha = S_0$ սահմանափակ է, $\lim \partial S_\alpha = T_0 \Subset B$: Ուռուցիկ $-\ln \Delta_B(x)$ ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է մաքսիմումի սկզբունքը՝

$$-\ln \Delta_B(x) \leqslant \sup_{x \in \partial S_\alpha} \{-\ln \Delta_B(x)\}, \quad x \in S_\alpha,$$

որը համարժեք է (3.29)-ին: Ինչպես մենք տեսանք ուռուցիկության առաջին պայմանի անհրաժեշտության ապացույցի ժամանակ, (3.29)-ից հետևում էր անընդհատության թույլ սկզբունքը B փիրույթի համար: Ըստ ուռուցիկության առաջին պայմանի, B-ն ուռուցիկ է: □

4. Ուռուցիկ փիրույթների հատկությունները: Սպորև թվարկած հատկություններն ապացուցվում են ճիշտ այնպես, ինչպես և պսևդո–ուռուցիկ փիրույթների դեպքում, համապատասխան պարզեցումներով.

1. Ուռուցիկ փիրույթների հատման ներսը ևս ուռուցիկ է:
2. Ուռուցիկ փիրույթների աճող հաջորդականության գումարը ևս ուռու–ցիկ է:
3. Որպեսզի B փիրույթը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ B-ում գոյություն ունենա ուռուցիկ ֆունկցիա, որը ամենուրեք ∂B-ի վրա ձգտում է $+\infty$:
4. Եթե $V(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է $U(\overline{B})$-ում, ապա

$$B = \left\{x\colon\ V(x) < 0,\ \ x \in U(\overline{B})\right\}$$

փիրույթը ուռուցիկ է:

5. Եթե B-ն ուռուցիկ փիրույթ է և $V(x)$-ը ուռուցիկ է B-ում, ապա $B' = \{x\colon\ V(x) < 0,\ \ x \in B\}$ փիրույթը ևս ուռուցիկ է:
6. Որպեսզի B փիրույթը լինի ուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա լինի խիստ ուռուցիկ փիրույթների աճող հաջորդականության գումար՝

$$B_\alpha = \left\{x\colon\ V_\alpha(x) < 0,\ \ x \in U(\overline{B}_\alpha)\right\}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots :$$

Այստեղ $B_\alpha \Subset B_{\alpha+1} \Subset B$, ընդ որում V_α-ները անվերջ դիֆերենցելի են $U(\overline{B})$-ում: Խիստ ուռուցիկությունը սահմանվում է խիստ պսևդոուռուցիկության նմանությամբ:

Այժմ բերենք ուռուցիկ փիրույթների վերաբերյալ թեորեմների կիրառության օրինակ:

5. Պսևդոուռուցիկ խողովակաձև փիրույթներ: *Որպեսզի խողովակաձև T_B փիրույթը լինի պսևդոուռուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա B հիմքը լինի ուռուցիկ:*

Այս պնդումը հետևում է § 13.3-ից և $-\ln \Delta_{T_B}(z) = -\ln \Delta_B(x)$ բանաձևից:

§ 19. Հոլոմորֆության թաղանթ

1. Հոլոմորֆության թաղանթի սահմանումը: Կասենք, որ G փիրույթը D փիրույթի *հոլոմորֆ ընդլայնում է*, եթե $G \supset D$ և D-ում յուրաքանչյուր հոլոմորֆ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է G-ի մեջ:

Վերը բազմաթիվ օրինակներ վկայում են, որ $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ տարածության մեջ կան փիրույթներ, որոնց համար գոյություն ունի ոչ տրիվիալ հոլոմորֆ ընդլայնում: Այդ փաստը կապված է փիրույթի երկրաչափական բնույթի հետ և կախված չէ որևէ կոնկրետ ֆունկցիայից, որը հոլոմորֆ է փիրույթում: Առաջանում է բնական խնդիր. կառուցել ամենամեծ հոլոմորֆ ընդլայնումը:

Ս ա հ մ ա ն ու մ 3.3. $\widetilde{D}$ փիրույթը կոչվում է D փիրույթի *հոլոմորֆության թաղանթ*, եթե՝

1. ամեն մի ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D-ում, անալիտիկորեն շարունակվում է $\widetilde{D}$-ի մեջ,

2. յուրաքանչյուր $z^0 \in \widetilde{D}$ կետի համար գոյություն ունի $f_0 \in \mathcal{O}(\widetilde{D})$ ֆունկցիա, որի հետքը $U\big(z^0, \rho(z^0, \partial\widetilde{D})\big)$ պոլիդիսկի վրա չի շարունակվում անալիտիկորեն ոչ մի $U(z^0, R)$ պոլիդիսկ, որտեղ $R > \rho(z^0, \partial\widetilde{D})$:

Այս սահմանումից հետևում է, որ $\mathbb{C}^1$ հարթության վրա ամեն մի տիրույթ համընկնում է իր հոլոմորֆության թաղանթի հետ: Այդ պատճառով հոլոմորֆության թաղանթի գաղափարը $\mathbb{C}^1$-ում ոչ մի նշանակություն չունի:

Դ ի տ ո ղ ու թ յ ու ն 3.6. Հոլոմորֆության թաղանթը կարող է և գոյություն չունենալ որպես տիրույթ $\mathbb{C}^n$-ում: Գործը նրանում է, որ որոշ ֆունկցիաներ շարունակման ընթացքում դառնում են բազմարժեք և հարկ է լինում դիտարկել ճյուղավորված տիրույթներ, որոնք ռիմանյան մակերևույթների տարածական նմանակներ են: Այդ տիրույթները կոչվում են *վերադրման տիրույթներ* $\mathbb{C}^n$-ի վրա: Եթե դիտարկենք նաև վերադրման տիրույթները, ապա $\widetilde{D}$ հոլոմորֆության թաղանթը միշտ գոյություն ունի:

2. Թաղանթի հատկությունները:

Թ ե ո ր ե մ 3.13. *D տիրույթի $\widetilde{D}$ հոլոմորֆության թաղանթը հոլոմորֆության տիրույթ է:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Բավական է ապացուցել, որ $\widetilde{D}$-ն հոլոմորֆ ուռուցիկ է: Դիցուք $K \Subset \widetilde{D}$ և $\rho\big(K, \partial\widetilde{D}\big) = r$: Ըստ միաժամանակյա շարունակման վերաբերյալ լեմմա 2.1-ի, ամեն մի $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է $U(z, r)$ պոլիդիսկի մեջ, որի կենտրոնը կամայական $z \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$ կետ է: Քանի որ ըստ պայմանի գոյություն ունի $\widetilde{D}$-ից դուրս չշարունակվող հոլոմորֆ ֆունկցիա, $\rho\big(z, \partial\widetilde{D}\big) \geqslant r$ և, ուրեմն, $\rho\big(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}, \partial\widetilde{D}\big) \geqslant r$: Մյուս կողմից, այդ հեռավորությունը չի կարող r-ից մեծ լինել, ուստի $\rho\big(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}, \partial\widetilde{D}\big) = \rho\big(K, \partial\widetilde{D}\big)$, ինչից հետևում է, որ $\widetilde{D}$-ն հոլոմորֆ ուռուցիկ է: □

Հ ե տ և ա ն ք 3.3. *Եթե D տիրույթն ունի հոլոմորֆության թաղանթ, ապա վերջինս D-ն պարունակող հոլոմորֆության ամենափոքր տիրույթն է (այսինքն, D-ն պարունակող բոլոր հոլոմորֆության տիրույթների հատումը):*

Թ ե ո ր ե մ 3.14. *Եթե G-ն D տիրույթի հոլոմորֆ ընդլայնում է, ապա ամեն մի $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիայի անալիտիկ շարունակությունը $G \backslash D$-ում կարող է ընդունել միայն այն արժեքները, որոնք f-ը ընդունում է D-ում:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ. ենթադրենք, որ որևէ $f \in \mathcal{O}(D)$ ֆունկցիա $G \backslash D$-ում ընդունում է w_0 արժեք, որը չի ընդունում D-ում: Այդ դեպքում

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

ֆունկցիան հոլոմորֆ է D-ում, բայց անալիտիկորեն չի շարունակվում G-ի մեջ, ինչը հակասում է հոլոմորֆ ընդլայնման սահմանմանը: □

Հ ե տ և ա ն ք 3.4. *D սահմանափակ տիրույթի G հոլոմորֆ ընդլայնումը ևս սահմանափակ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ըստ թեորեմ 3.14-ի, $f_k(z) = z_k$ կոորդինատական ֆունկցիաները G-ում ընդունում են նույն արժեքները, ինչ որ D-ում, այսինքն՝

$$\sup_{z \in G} |z_k| = \sup_{z \in D} |z_k|, \quad k = 1, \ldots, n:$$

Քանի որ D-ն սահմանափակ է, ապա այս հավասարությունների աջ կողմերը վերջավոր են, ուրեմն, վերջավոր են ձախ կողմերը ևս, իսկ դա նշանակում է, որ G-ն սահմանափակ է: □

Լ ե մ մ ա 3.4. *Եթե D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է, ապա նրա r-ընդլայնման*

$$D_r = \{z \in D \colon \ \rho(z, \partial D) > r\}$$

կամայական Δ կապակցված կոմպոնենտը ևս հոլոմորֆության փի-րույթ է:

Ապացույց: Դիցուք $K \Subset \Delta$ և $\rho(K, \partial\Delta) = \rho$: Կամայական $z \in K$ և $\zeta \in \partial D$ կետերի համար $[z, \zeta]$ հատվածի վրա կգտնվի այնպիսի մի $z' \in \partial\Delta$ կետ, որ

$$\rho(z, \zeta) = \rho(z, z') + \rho(z', \zeta) \geqslant \rho + r :$$

Հետևաբար, $\rho(K, \partial D) \geqslant \rho + r$ և, քանի որ D-ն հոլոմորֆության փի-րույթ է, ապա ըստ թեորեմ 2.9-ի

$$\rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}, \partial D) \geqslant \rho + r : \tag{3.32}$$

Պետք է ապացուցել, որ $\rho(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)}, \partial\Delta) \geqslant \rho$, այսինքն, որ $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$ կամայական $z^0 \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)}$ և $z' \in \partial\Delta$ կետերի համար: Այն բանից, որ $\Delta \subset D$ բխում է, որ $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Delta)} \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$, հետևաբար, $z^0 \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(D)}$ և, համաձայն (3.32)-ի,

$$\rho + r \leqslant \rho(z^0, \partial D) \leqslant \rho(z^0, z') + \rho(z', \partial D) = \rho(z^0, z') + r :$$

Մենք հաշվի ենք առել, որ $\rho(z', \partial D) = r$, քանի որ $z' \in \partial\Delta$: Այստեղից էլ բխում է, որ $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$: □

Թ ե ո ր ե մ 3.15. *Եթե $D \subset G$ և այդ փիրույթներն ունեն համա-պատասխանաբար $\widetilde{D}$ և $\widetilde{G}$ հոլոմորֆության թաղանթներ, ապա $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$ և*

$$\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant \rho(\partial D, \partial G) :$$

Ապացույց: Քանի որ $\mathcal{O}(G) \subset \mathcal{O}(D)$, ապա ամեն մի $f \in \in \mathcal{O}(G)$ ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է $\widetilde{D}$-ի մեջ, այսինքն, $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$: Դիցուք $\rho(\partial D, \partial G) = r$: Կարելի է ենթադրել $r > 0$, որովհետև $r = 0$ դեպքում թեորեմը ակնհայտորեն ճիշտ է: Պարզ է, որ $D \subset G_r \subset \subset (\widetilde{G})_r$ և որ D-ն պատկանում է $(\widetilde{G})_r$ բազմության որևէ կապակցված կոմպոնենտին, որն ըստ նախորդ լեմմայի հոլոմորֆության փիրույթ է:

Բայց այդ դեպքում նաև $\widetilde{D}$-ն է պատկանում նույն կոմպոնենտին և, ուրեմն, $(\widetilde{G})_r$ բազմությանը: Այստեղից էլ բխում է, որ $\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant r$: □

Հ ե տ և ա ն ք 3.5. *Եթե $\widetilde{D}$-ն սահմանափակ D տիրույթի հոլոմորֆության թաղանթն է, ապա $\partial D \bigcap \partial\widetilde{D}$ հատումը ոչ դատարկ է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Կիրառելով թեորեմ 3.15-ը D և $G = \widetilde{D}$ տիրույթների նկատմամբ, ստանում ենք՝

$$\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) \leqslant \rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{D}) = 0 :$$

Այստեղ հաշվի է առնված, որ հոլոմորֆության տիրույթի թաղանթը համընկնում է իր հետ: Այնուհետև, D-ի սահմանափակությունից հետևում է, որ ∂D-ն կոմպակտ բազմություն է, հետևաբար, $\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) = 0$ հավասարությունից բխում է, որ ∂D-ն ու $\partial\widetilde{D}$-ն հատվում են: □

3. Պարզագույն տիրույթների հոլոմորֆության թաղանթը: Այժմ անցնենք որոշ պարզագույն տիրույթների հոլոմորֆության թաղանթի նկարագրմանը:

Թ ե ո ր ե մ 3.16. *Եթե D-ն Ռեյնհարտի լրիվ տիրույթ է, ապա նրա $\widehat{D}_L$ լոգարիթմորեն ուռուցիկ թաղանթը հոլոմորֆության թաղանթն է:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ամեն մի ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D-ում, անալիտիկորեն շարունակվում է $\widehat{D}_L$-ի մեջ: Այդպիսի շարունակում կատարվում է f-ի Թեյլորի շարքի միջոցով, որի զուգամիտության տիրույթը, ինչպես հայտնի է թեորեմ 1.2-ից, լոգարիթմորեն ուռուցիկ է: Մնում է ապացուցել, որ $\widehat{D}_L$-ը հոլոմորֆության տիրույթ է: Ըստ թեորեմ 2.6-ի դիտողությանը, դրա համար բավական է նշել ֆունկցիաների որևէ $F \subset \mathcal{O}(D)$ ընտանիք, որի նկատմամբ $\widehat{D}_L$-ը F-ուռուցիկ է: Որպես այդպիսի ընտանիք կարող է ծառայել $cz^k = cz_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ միանդամների բազմությունը (տես խնդիր 2.3): □

Թ ե ո ր ե մ 3.17. *T_B խողովակաձև փիրույթի $H(T_B)$ հոլոմոր–ֆության թաղանթը համընկնում է նրա $O(T_B)$ ուռուցիկ թաղանթի հետ, այսինքն՝*

$$H(T_B) = O(T_B) = T_{O(B)}:$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Կապարենք լրացուցիչ ենթադրություն, որ $H(T_B)$-ն միաթերթ է: Ըստ § 15.5-ի $O(T_B) = T_{O(B)}$ փիրույթը պսև–դոուռուցիկ է և, ուրեմն, հոլոմորֆության փիրույթ է: Քանի որ $H(T_B)$-ն հանդիսանում է T_B-ն պարունակող ամենափոքր հոլոմորֆության փիրույթը, ապա $H(T_B) \subset O(T_B)$: Դիցուք T_{B_1}-ը $H(T_B)$-ի մեջ պարունակվող ամենամեծ խողովակաձև փիրույթն է: Այդպիսի փիրույթ գոյություն ունի շնորհիվ ենթադրության, որ $H(T_B)$-ն միաթերթ է: Ապացուցենք, որ $T_{B_1} = H(T_B)$: Կապարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք $T_{B_1} \neq H(T_B)$: Այդ դեպքում ∂T_{B_1}-ի վրա կգտնվի z^0 կետ, որը $H(T_B)$-ի համար ներքին կետ է և որի համար $\Delta_{H(T_B)}(z^0) > 0$: Կարտան–Տուլենի թեորեմից հետևում է, որ $H(T_B)$-ն խողովակաձև փիրույթ է: Ուրեմն՝

$$\Delta_{H(T_B)}(x^0+iy) = \Delta_{H(T_B)}(z^0) > 0, \quad \text{կամայական } |y| < \infty \text{ դեպքում:}$$

Այստեղից հետևում է, որ T_{B_1}-ը կարելի է մեծացնել այնպես, որ մե–ծացված փիրույթը լինի խողովակաձև և պարունակվի $H(T_B)$-ի մեջ: Բայց դա հակասում է T_{B_1}-ի ամենամեծ լինելուն: Ուրեմն $T_{B_1} = H(T_B)$ և T_{B_1}-ը պսևդոուռուցիկ է: Ինչպես հայտնի է, խողովակաձև փիրույթը պսևդոուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հիմքը ուռուցիկ է, այսինքն B_1-ը ուռուցիկ է: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ

$$T_B \subset T_{B_1} = H(T_B) \subset O(T_B) = T_{O(B)},$$

եզրակացնում ենք, որ $B_1 = O(B)$: □

Ս ա հ մ ա ն ու մ 3.4. Եթե

$$G = \left\{z\colon\ |z_n| < R(\widetilde{z}),\ \ \widetilde{z} \in B\right\} \tag{3.33}$$

Հարտոգսի տիրույթ է, ապա G-ի *լոգարիթմորեն պլյուրիսուպեր-հարմոնիկ թաղանթ* կանվանենք

$$G^* = \left\{z\colon\ |z_n| < e^{V(\widetilde{z})},\ \ \widetilde{z} \in B\right\} \tag{3.34}$$

տեսքի Հարտոգսի տիրույթը, որտեղ $V(\widetilde{z})$-ը $\ln R(\widetilde{z})$-ի ամենափոքր պլյուրիսուպերհարմոնիկ մաժորանտն է B տիրույթում:

Թ ե ո ր ե մ 3.18. *Եթե G-ն (3.33) Հարտոգսի տիրույթն է, ապա G-ի հոլոմորֆության թաղանթը համընկնում է նրա (3.34) լոգարիթմորեն պլյուրիսուպերհարմոնիկ թաղանթի հետ:*

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Իրոք, եթե f-ը հոլոմորֆ է G-ում, ապա նա վեր-լուծվում է Հարտոգսի շարքի՝

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} g_k(\widetilde{z}) z_n^k,$$

հետևաբար, նա անալիտիկորեն շարունակվում է այդ շարքի

$$G_f = \left\{z\colon\ |z_n| < R_f(\widetilde{z}),\ \ \widetilde{z} \in B\right\}$$

զուգամիտության տիրույթի մեջ: Այստեղ R_f-ը G_f տիրույթի Հարտոգ-սի շառավիղն է և, ըստ լեմմա 3.1-ի դիտողությանը, $\ln R_f$-ը պլյուրի-սուպերհարմոնիկ է B-ում և $\ln R(\widetilde{z})$-ի պլյուրիսուպերհարմոնիկ մա-ժորանտներից մեկն է: Ուրեմն, կամայական $f \in \mathcal{O}(G)$ ֆունկցիայի համար $F_f \supset G^*$, և քանի որ G տիրույթի $H(G)$ հոլոմորֆության թաղանթը բոլոր այդպիսի G_f-երի հատումն է, ապա $G^* \subset H(G)$:

Մնում է ապացուցել, որ G^*-ն հոլոմորֆության տիրույթ է: Դա հետևում է § 17.12-ից և Օկայի թեորեմից: □

Խնդիրներ

Խ ն դ ի ր 3.1. Ապացուցել, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան կիսաանընդհատ է վերևից K կոմպակտի վրա և $f(x) < +\infty$, ապա գոյություն ունի նվազող անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը ձգտում է $f(x)$-ին:

Խ ն դ ի ր 3.2. Ապացուցել, որ եթե $u(z) \geqslant 0$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում, ապա $u^p(z)$ $(p \geqslant 1)$ ևս սուբհարմոնիկ է:

Խ ն դ ի ր 3.3. Ապացուցել, որ եթե $u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում, ապա $e^{u(z)}$-ը ևս սուբհարմոնիկ է:

Խ ն դ ի ր 3.4. Ապացուցել, որ $C^2(G)$ դասի $u(z)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} \geqslant 0 :$$

Խ ն դ ի ր 3.5. Ապացուցել, որ հարթության վրա ամեն մի տիրույթ պսևդոուռուցիկ է:

Գ Լ ՈՒ Խ IV

ԻՆՏԵԳՐԱԼԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ

§ 20. Դիֆերենցիալ ձև

1. Արտաքին ձևեր $\mathbb{C}^n$-ում. Ենթադրվում է, որ ընթերցողը ծանոթ է իրական $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ դիֆերենցիալ ձևերի տեսության հետ: Այդ տեսությունը, իհարկե, մնում է ուժի մեջ եթե $\mathbb{R}^n$-ը փոխարինենք $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$-ով, սակայն կոմպլեքս կառուցվածքի առկայությունը առաջացնում է դիֆերենցիալ ձևերի լրացուցիչ հատկություններ:

Որպես իրական կոորդինատներ $\mathbb{C}^n$-ում վերցնում ենք

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n :$$

$\mathbb{C}^n$ տարածությունը համարում ենք կողմնորոշված այնպես, որ

$$dV_{2n} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n, \tag{4.1}$$

որտեղ dV_{2n}-ը Լեբեգի չափն է $\mathbb{R}^{2n}$-ում:

Կիրառելով դիֆերենցման օպերատորը $z = x + iy$ և $\bar{z} = x - iy$ ֆունկցիաների նկատմամբ, ստանում ենք հետևյալ 1-ձևերը՝

$$dz_j = dx_j + idy_j, \qquad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j,$$

որտեղից

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + id\bar{z}_j), \qquad dy_j = \frac{1}{2i}(dz_j - id\bar{z}_j) :$$

Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի k-ձև $\mathbb{C}^n$-ում ստանում է

$$\alpha = \sum_{I,J} A_{I,J}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J \tag{4.2}$$

տեսք: Գումարումը կատարվում է ըստ այն $I = (i_1, \ldots, i_p)$ և $J = (j_1, \ldots, j_q)$ աճող p և համապատասխանաբար q-ինդեքսների, որոնց համար $p + q = k$, $A_{I,J}$-երը ֆունկցիաներ են և

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p}, \qquad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{i_q} :$$

Տրված p և q-երի համար (4.2) գումարը կոչվում է (p, q) երկաստիճանի ձև, կամ պարզապես (p, q)-ձև: Ամեն մի k-ձև միարժեքորեն վերլուծ– վում է $(p, k - p)$-ձևերի գումարի, որտեղ $p = 0, \ldots, k$:

Եթե f-ը ֆունկցիա է, ապա նրա

$$df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_j} \, dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \, d\bar{z}_j \right)$$

դիֆերենցիալը բնական ձևով տրոհվում է երկու մասերի՝

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \, dz_j, \qquad \bar{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \, d\bar{z}_j :$$

Դա առաջացնում է d օպերատորի վերլուծությունն՝

$$d = \partial + \bar{\partial} : \tag{4.3}$$

Ինչպես հայտնի է, (4.2) ձևի դիֆերենցիալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$d\alpha = \sum_{I,J} dA_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J :$$

Հետևաբար,

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar{\partial}\alpha,$$

որտեղ

$$\partial\alpha = \sum_{I,J} \partial A_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \qquad \bar{\partial}\alpha = \sum_{I,J} \bar{\partial} A_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J :$$

Նշենք նաև, որ ∂f-ը $(1,0)$-ձև է, իսկ $\bar\partial f$-ը $(0,1)$-ձև է, ուստի ∂ և $\bar\partial$ օպերատորները ամեն մի (p,q)-ձև արտապատկերում են $(p+1,q)$ և համապատասխանաբար $(p,q+1)$ երկաստիճանի ձևերի:

Համաձայն (4.3)-ի, $d^2=0$ դիֆերենցիալ ձևերի հայտնի հատկությունը ստանում է հետևյալ տեսքը՝

$$\partial^2+\left(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial\right)+\bar\partial^2=0:$$

Եթե α-ն (p,q)-ձև է, ապա $\partial^2\alpha$-ն, $\left(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial\right)\alpha$-ն և $\bar\partial^2\alpha$-ն ունեն համապատասխանաբար $(p+2,q)$, $(p+1,q+1)$ և $(p,q+2)$ երկաստիճաններ: Ուրեմն, նրանց գումարը կարող է հավասարվել զրոյի միայն այն դեպքում, երբ նրանցից յուրաքանչյուրն է զրո: Հետևաբար՝

$$\partial^2=0,\quad \partial\bar\partial=-\bar\partial\partial,\quad \bar\partial^2=0:$$

Ներմուծենք հետևյալ դիֆերենցիալ ձևերը՝

$$\begin{aligned}\omega(z)&=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,\\ \omega_j(z)&=(-1)^{j-1}dz_1\wedge\cdots[j]\cdots\wedge dz_n,\end{aligned}\tag{4.4}$$

որտեղ $j=1,\ldots,n$, $[j]$-ն նշանակում է, որ j-րդ dz_j անդամը բաց է թողնված և

$$\omega'(z)=\sum_{j=1}^{n}z_j\omega_j(z):$$

Այդ նշանակումները թեպետ և այնքան էլ հաջող չեն (ω'-ը հիշեցնում է ածանցյալ), բայց ընդունված են:

Եթե $s=(s_1,\ldots,s_n)$-ը իրենից ներկայացնում է $\mathbb{C}^n$-ում որևէ փիրույթի ողորկ արտապատկերում, ապա համապատասխան նախապատկերները նշանակվելու են այսպես՝ $\omega(s)$, $\omega_j(s)$, $\omega'(s)$: Օրինակ,

$$\omega_j(s)=(-1)^{j-1}ds_1\wedge\cdots[j]\cdots\wedge ds_n,$$

$\omega_j(\bar z)$-ը ստացվում է (4.4)-ից, եթե բոլոր z_i-երը փոխարինենք $\bar z_i$-երով,

$$\omega'(\bar z)=\sum_{j=1}^{n}\bar z_j\omega_j(\bar z)$$

ձևը ունի $(0, n-1)$ երկաստիճան:

Պ ն դ ու մ 4.1. *Այդ նշանակումներով հանդերձ*

$$d\bar{z}_j \wedge \omega_j(\bar{z}) = \omega(\bar{z}), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.5}$$

$$d\bar{z}_k \wedge \omega'(\bar{z}) = \bar{z}_k \omega(\bar{z}), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{4.6}$$

$$\bar{\partial}\omega'(\bar{z}) = n\omega(\bar{z}) : \tag{4.7}$$

Ա պ ա ց ու յ ց: (4.5)-ը հետևում է սահմանումներից: Քանի որ

$$d\bar{z}_k \wedge \omega_j(\bar{z}) = 0, \quad \text{երբ} \quad k \neq j,$$

ապա (4.5)-ից հետևում է (4.6)-ը: Բացի դրանից, քանի որ

$$\bar{\partial}\left[\bar{z}_j \omega_j(\bar{z})\right] = d\bar{z}_j \wedge \omega_j(\bar{z}),$$

ապա (4.5)-ից հետևում է նաև (4.7)-ը: □

2. Ինտեգրում սֆերայով. Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները. B_n-ը բաց միավոր գունդն է, S_n-ը՝ նրա եզրը[3], որն իրենից ներկայացնում է միավոր սֆերա: V_n-ով նշանակվելու է ծավալի չափը $\mathbb{C}^n$-ում, իսկ σ_n-ով՝ միավոր սֆերայի մակերեսի չափը:

Սովորաբար այս նշանակումների մեջ n ինդեքսը բաց է թողնվելու, եթե կարիք չկա հատուկ շեշտել տարածության չափողականությունը:

Պ ն դ ու մ 4.2. *Եթե p-ն և q-ն n-ինդեքսներ են և $p \neq q$, ապա*

$$\int\limits_S \zeta^p \bar{\zeta}^q d\sigma(\zeta) = 0 :$$

[3]Հաճախակի օգտագործվում են B_{2n} և S^{2n-1} նշանակումներ, որոնցում շեշտվում է գնդի և սֆերայի չափողականությունը, մեր B_n և S_n նշանակումների մեջ շեշտվում է, որ նրանք $\mathbb{C}^n$-ի միավոր գունդն ու սֆերան են:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $f \in C(\overline{B}_n)$: Ֆիքսած $\widetilde{\zeta}$-ի համար

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\widetilde{\zeta}, e^{i\theta}\zeta_n)\,d\theta$$

ինտեգրալը իրենից ներկայացնում է f-ի միջինացումը

$$\left\{\zeta = (\widetilde{\zeta}, \zeta_n e^{i\theta}) \in S : \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}$$

շրջանագծի վրա: Եվ, ուրեմն, նրա և f-ի ինտեգրալները S մակերևույ–թով միմյանց հավասար են.

$$\int\limits_S f\,d\sigma = \int\limits_S d\sigma(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\widetilde{\zeta}, e^{i\theta}\zeta_n)\,d\theta : \tag{4.8}$$

Չխախտելով ընդհանրությունը, կարելի է ենթադրել, որ $p_n \neq q_n$: Դի–ցուք $f(\zeta) = \zeta^p\bar{\zeta}^q$: Այդ դեպքում (4.8)-ում ինտեգրալը հավասար է զրոյի: □

Լ ե մ մ ա 4.3. *Եթե p-ն n-ինդեքս է, ապա*

$$\int\limits_S |\zeta^p|^2\,d\sigma(\zeta) = \frac{2\pi^n p!}{(n-1+p)!}, \tag{4.9}$$

$$\int\limits_B |z^p|^2\,dV(z) = \frac{\pi^n p!}{(n+|p|)!} : \tag{4.10}$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը.

$$I = \int\limits_{\mathbb{C}^n} |z^p|^2 \exp\left(-|z|^2\right)\,dV_{2n}(z) :$$

Այն հաշվելու համար նկատենք, որ ենթաինտեգրալ արտահայտությունը հավասար է

$$\prod_{j=1}^n |z_j|^{2p_j}\exp\left(-|z_j|^2\right),$$

և, օգտվելով Ֆուբինիի թեորեմից, ստանում ենք

$$I = \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}} |w|^{2p_j} \exp\left(-|w|^2\right) \, dV_2(w) :$$

Յուրաքանչյուր արտադրիչ հեշտությամբ հաշվում է՝

$$\int_{\mathbb{C}} |w|^{2p_j} \exp\left(-|w|^2\right) \, dV_2(w) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{2p_j} \exp\left(-r^2\right) \, r \, dr \, d\varphi =$$

$$= \pi \int_0^{\infty} t^{p_j} \exp\left(-t\right) \, dt = \pi p_j!,$$

որտեղից ստանում ենք $I = \pi^n p\,!$:

Ինչպես հայտնի է, dV_{2n} ծավալի էլեմենտը բևեռային կոորդինատներով արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով[4].

$$dV_{2n}(r\zeta) = r^{2n-1} dr \, d\sigma(\zeta), \tag{4.11}$$

Հաշվելով I-ն բևեռային կոորդինատներով, կստանանք

$$\pi^n p\,! = \int_0^{\infty} r^{2|p|+2n-1} e^{-r^2} dr \int_S |\zeta^p|^2 \, d\sigma(\zeta) =$$

$$= \frac{(n-1+|p|)!}{2} \int_S |\zeta^p|^2 \, d\sigma(\zeta),$$

որտեղից բխում է (4.9)-ը: Ինտեգրելով (4.9)-ն ևս մեկ անգամ բևեռային կոորդինատներով, կստանանք (4.10)-ը.

$$\int_B |z^p|^2 \, dV(z) = \int_0^1 r^{2n-1} dr \int_S |(r\zeta)^p|^2 \, d\sigma(\zeta) =$$

[4]W. Rudin. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987, Chapter 8, ex. 6

$$= \frac{2\pi^n p!}{(n-1+p)!} \int\limits_0^1 r^{2|p|+2n-1} dr = \frac{\pi^n p!}{(n+|p|)!} : \qquad \square$$

Լ ե մ մ ա 4.4. *Տեղի ունի հետևյալ հարաբերակցությունը՝*

$$\omega(\bar{z}) \wedge \omega(z) = (2i)^n \, dV : \tag{4.12}$$

Եթե $f \in C(S)$, ապա

$$\int\limits_{\partial B} f(\zeta)\, \omega_j(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta) = \frac{(2i)^n}{2} \int\limits_S f(\zeta)\zeta_j \, d\sigma(\zeta), \tag{4.13}$$

$$\int\limits_{\partial B} f(\zeta)\, \omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta) = \frac{(2i)^n}{2} \int\limits_S f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) : \tag{4.14}$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Քանի որ $d\bar{z}_k \wedge dz_k = 2i \, dx_k \wedge dy_k$, ապա հաշվելով այն տեղափոխությունների քանակը, որոնք անհրաժեշտ են $d\bar{z}_1 \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_n$ ձևը $\omega(\bar{z}) \wedge \omega(z)$-ին բերելու համար, կստանանք, որ $\omega(\bar{z}) \wedge \omega(z)$ ձևը հավասար է

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2i)^n dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n,$$

որն իր հերթին հավասար է

$$(2i)^n dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = (2i)^n dV_{2n}$$

ըստ (4.1)-ի:

(4.13)-ը ապացուցելու համար կարող ենք սահմանափակվել $C^1(\mathbb{C}^n)$ դասի ֆունկցիաներով: Այդ դեպքում

$$\varphi = f(\zeta)\, \omega_j(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta)$$

ձևը որոշված է $\mathbb{C}^n$-ում և ունի $(n, n-1)$ երկաստիճան: Պարզ է, որ $\partial\varphi = 0$: Ուստի

$$d\varphi = \bar{\partial}\varphi = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_j}\, \omega(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta),$$

և համաձայն Ստոքսի բանաձևի ու (4.12)-ի

$$\int_{\partial B} \varphi = (2i)^n \int_B \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\, dV :$$

Հետևաբար (4.13)-ը բերվում է

$$\int_B \frac{\partial f}{\partial \bar z_j}\, dV = \frac{1}{2} \int_S f(\zeta)\zeta_j\, d\sigma(\zeta) \tag{4.15}$$

առնչությանը: Եթե $f(z) = z^p \bar z^p \bar z_j$ ինչ-որ n-ինդեքս p-ի համար, ապա պնդում 4.3-ից հետևում է, որ (4.15)-ը ճշմարիտ է: Մնացած բոլոր միանդամների համար երկու ինտեգրալներն էլ հավասար են զրոյի: Ուրեմն, (4.15)-ը տեղի ունի բոլոր բազմանդամների (z-ից ու $\bar z$-ից) համար, ինչը և ապացուցում է (4.13)-ը:

Եթե (4.13)-ը կիրառենք $f(\zeta)$-ի փոխարեն $f(\zeta)\bar\zeta_j$-ի նկատմամբ և գումարենք ըստ j-ի 1-ից մինչև n, ապա կստանանք (4.14)-ը: □

§ 21. Կոշի–Պուանկարեի թեորեմը

Ստոքսի բանաձևով հեշտությամբ ապացուցվում է Կոշի–Պուանկարեի թեորեմը, որը Կոշիի թեորեմի բազմաչափ ընդհանրացումն է.

Թեորեմ 4.1 (Կոշի–Պուանկարե). *Դիցուք $V \subset \mathbb{C}^n$-ն սահմանափակ $(n+1)$-չափանի մակերևույթ է կտոր առ կտոր ողորկ ∂V եզրով և $f(z)$-ը հոլոմորֆ է V-ի շրջակայքում: Այդ դեպքում*

$$\int_{\partial V} f(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0 :$$

Ապացույց: Քանի որ $f(z)$-ը հոլոմորֆ է, ապա $\bar\partial f = 0$ և

$$df = \partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j :$$

Ըստ Ստոքսի բանաձևի՝

$$\int\limits_{\partial V} f(z)\,dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n=\int\limits_{V}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}\,dz_j\right)\wedge dz_1\wedge\ldots\wedge dz_n=0: \ \square$$

Ճշմարիտ է նաև Կոշի–Պուանկարեի թեորեմի հակադարձ պնդումը, որը Մորերայի թեորեմի ընդհանրացումն է: Հիշեցնենք, որ հարթության դեպքում անընդհատ ֆունկցիայի հոլոմորֆ լինելու համար բավական է, որ նրանից ինտեգրալը հավասար լինի զրոյի միայն եռանկյուն–ների եզրերով: Նմանապես, պարածական դեպքում բավական է սահմանափակվել $(n+1)$-չափանի «պրիզմաներով», որոնք իրենցից ներկայացնում են $\mathbb{C}^1_{z_m}$ հարթությունում գտնվող Δ_m եռանկյան և $[a_i,z_i]$ մնացած $\mathbb{C}^1_{z_i}$ հարթություններում $(i\neq m)$ հատվածների Λ_m դեկարտյան արտադրյալ:

Թ ե ո ր ե մ 4.2. Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է $D\subset\mathbb{C}^n$ տիրույթում և ցանկացած

$$T_m=\Delta_m\times\Lambda_m$$

պրիզմայի համար, որի փակումը պատկանում է D-ին,

$$\int\limits_{\partial T_m} f(z)\,dz=0, \tag{4.16}$$

ապա f-ը հոլոմորֆ է D-ում:

Ա պ ա ց ու յ ց: Բավական է ապացուցել f-ի հոլոմորֆությունը կամայական $a\in D$ կետի շրջակայքում: Ֆիքսենք a-ն և դիտարկենք

$$F(z)=\int\limits_{a_1}^{z_1}d\zeta_1\ldots\int\limits_{a_n}^{z_n}f(\zeta)\,d\zeta_n$$

ֆունկցիան: Նա որոշված և անընդհատ է a-ի ինչ-որ շրջակայքում: Ամեն մի k-ի համար F-ը կարելի է ներկայացնել

$$F(z) = \int_{a_k}^{z_k} F_k(\zeta)\, d\zeta_k$$

տեսքով, որտեղ $F_k(\zeta)$-ով նշանակված է f-ի ինտեգրալը

$$\Lambda_k = [a_1, z_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, z_{k-1}] \times [a_{k+1}, z_{k+1}] \times \cdots \times [a_n, z_n]$$

բազմությամբ: $F_k(\zeta)$ ֆունկցիան ակնհայտորեն անընդհատ է ըստ ζ_k-ի a_k կետի ինչ-որ U_k շրջակայքում և ըստ (4.16) պայմանի կամայական $\Delta_k \Subset U_k$ եռանկյան համար

$$\int_{\partial\Delta_k} F_k(\zeta)\, d\zeta_k = 0\ :$$

Իրոք, այդ ինտեգրալը կարող է միայն նշանով տարբերվել

$$\int_{\partial\Delta_k \times \Lambda_k} f\, d\zeta = \int_{\partial T_k} f\, d\zeta$$

ինտեգրալից, որտեղ $T_k = \Delta_k \times \Lambda_k$ և $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$: Ըստ Մորերայի թեորեմի մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար, այստեղից բխում է, որ F-ը հոլոմորֆ է ըստ z_k-ի: Այդ դատողությունները ճշմարիտ են ամեն մի k-ի համար, այնպես որ F-ը հոլոմորֆ է ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի և համաձայն Հարտոգսի թեորեմի, նա հոլոմորֆ է a կետի շրջակայքում: Հոլոմորֆ է նաև f-ը, քանի որ

$$f(z) = \frac{\partial^n F(z)}{\partial z_1 \cdots \partial z_n}\ : \quad \square$$

§ 22. Մարտինելլի–Բոխների բանաձևը

Թ ե ո ր ե մ 4.3. *Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ սահմանափակ տիրույթ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով, $f(z)$-ը հոլոմորֆ է D-ում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում: Տեղի ունի ինտեգրալային ներկայացում՝*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, \Omega_{MB}(z,\zeta), \quad z \in D, \tag{4.17}$$

որտեղ

$$\Omega_{MB}(z,\zeta) = \frac{\omega'(\bar\zeta - \bar z) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}}$$

կոչվում է Մարտինելլի–Բոխների կորիզ:

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Նախ ստուգենք, որ $\Omega_{MB}(z,\zeta)$ Մարտինելլի–Բոխների կորիզը փակ է $\mathbb{C}^n \setminus \{z\}$-ում: Իրոք՝

$$d\Omega_{MB}(z,\zeta) = d\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} \omega_k(\bar\zeta) \wedge \omega(\zeta)\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta_k}\left(\frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}}\right) \omega(\bar\zeta) \wedge \omega(\zeta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} - \frac{n(\bar\zeta_k - \bar z_k)(\zeta_k - z_k)}{|\zeta - z|^{2n+2}}\right) \omega(\bar\zeta) \wedge \omega(\zeta) = 0 :$$

Այնուհետև՝

$$d\,[f(\zeta)\Omega_{MB}(z,\zeta)] = df(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta) = \partial f(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta) = 0 :$$

Վերջին հավասարությունը հետևում է նրանից, որ $\Omega_{MB}(z,\zeta)$ դիֆերենցիալ ձևը պարունակում է բոլոր $d\zeta_k$-երը: Կիրառելով Ստոքսի բանաձևը $D \setminus B(z,\varepsilon)$-ում, ստանում ենք

$$\int\limits_{\partial[D \setminus B(z,\varepsilon)]} f(\zeta)\, \Omega_{MB}(z,\zeta) = \int\limits_{D \setminus B(z,\varepsilon)} d\,[f(\zeta)\, \Omega_{MB}(z,\zeta)] = 0,$$

կամ

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) = 0 :$$

Ինտեգրալը $\partial B(z,\varepsilon)$-ով հավասար է

$$\varepsilon^{-2n} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta)\omega'(\bar{\zeta}-\bar{z}) \wedge \omega(\zeta),$$

որը, ինչպես հետևում է (4.14)-ից, տեղաշարժից ու ձգումից հետո հավասար է

$$\int_{\partial B} f(z+\varepsilon\zeta)\omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta) = \frac{(2i)^n}{2} \int_{S} f(z+\varepsilon\zeta)\,d\sigma(\zeta) :$$

Շնորհիվ f-ի անընդհատությանը և հաշվի առնելով, որ միավոր սֆերայի ծավալը $\mathbb{C}^n$-ում հավասար է $\dfrac{2\pi^n}{(n-1)!}$, աջ մասը ակնհայտորեն ձգտում է $\dfrac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}\,f(z)$-ի, երբ $\varepsilon \to 0$, և ստանում ենք (4.17) բանաձևը: $\square$

Երբ $n=1$, կորիզը վերածվում է Կոշիի կորիզի՝

$$\Omega_{MB}(z,\zeta) = \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

և, ուրեմն, (4.17)-ը վերածվում է Կոշիի բավաձևի: Կոշիի բավաձևը ունի երկու կարևոր հատկություն՝

1. նա ունիվերսալ է այն իմաստով, որ ճշմարիտ է բավականաչափ ողորկ եզր ունեցող բոլոր տիրույթների համար, ընդ որում Կոշիի կորիզի տեսքը կախված չէ տիրույթից,

2. այդ կորիզը հոլոմորֆ է ըստ z-ի:

Մարտինելի–Բոխների բանաձևը նշված հատկություններից ունի միայն առաջինը: Շատ փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար չի հաջողվել ստանալ այդ երկու հատկություններով օժտված ինտեգրալային բանաձև: Նրանք կամ ունիվերսալ են, բայց ոչ հոլոմորֆ կորիզով, կամ էլ ունեն հոլոմորֆ կորիզ, բայց ունիվերսալ չեն:

Կոշիի բանաձևը ընդհանրացվում է անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար: Դա Պոմպեյուի (Կոշի–Գրինի) բանաձևն է՝

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \bar\zeta}\frac{d\bar\zeta \wedge d\zeta}{\zeta - z}\ : \qquad (4.18)$$

Առաջանում է բնական խնդիր. ստանալ (4.17)-ի ընդհանրացում անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների համար այնպես, որ $n = 1$ դեպքում նա համընկնի (4.18)-ի հետ: Գոյություն ունի *Մարտինելի–Բոխների բանաձև ողորկ ֆունկցիաների համար*՝

Թ ե ո ր ե մ 4.4. *Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ սահմանափակ տիրույթ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով և $f \in C^1(\overline{D})$: Այդ դեպքում բոլոր $z \in D$-երի համար*

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} f(z) = \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) - \int\limits_{D} \bar\partial f(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta)\ : \qquad (4.19)$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Ի տարբերություն թեորեմ 4.3-ում դիտարկված դեպքի, $f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta)$ ձևը արդեն փակ չէ.

$$df(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta) = \bar\partial f(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta),$$

և Ստոքսի բանաձևից ստանում ենք՝

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) - \int\limits_{\partial B(z,\varepsilon)} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) = \int\limits_{D\setminus B(z,\varepsilon)} \bar\partial f(\zeta) \wedge \Omega_{MB}(z,\zeta)\ : \qquad (4.20)$$

Ինտեգրալը $\partial B(z,\varepsilon)$-ով, ինչպես թեորեմ 4.3-ում, ձգտում է $\dfrac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}f(z)$-ին երբ $\varepsilon \to 0$, իսկ ինտեգրալը $D \setminus B(z,\varepsilon)$-ով ձգտում է ինտեգրալին ամբողջ D-ով, որովհետև Ω_{MB} կորիզը պատկանում է $L^1(D)$-ին: Այսպիսով, անցնելով սահմանի, (4.20)-ից ստանում ենք (4.19)-ը: $\square$

Իսկ այժմ գրենք Մարտինելի–Բոխների բանաձևը մի այլ տեսքով՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int\limits_S \frac{1-\langle \zeta, z\rangle}{|\zeta - z|^{2n}}\, f(\zeta)\, d\sigma(\zeta) - \\ - \frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_B \frac{\langle f(w), w-z\rangle}{|w-z|^{2n}}\, dV(w), \tag{4.21}$$

որտեղ $\langle f(w), w-z\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(w)(\bar{w}_j - \bar{z}_j)$: (4.21)-ը ստացվում է (4.19)-ից, եթե հաշվի առնենք, որ

$$\omega'(\bar{\zeta} - \bar{z}) = \sum_{j=1}^{n} (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j)\omega_j(\bar{\zeta}) = \omega'(\bar{\zeta}) - \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \omega_j(\bar{\zeta}),$$

և օգտվենք (4.12) – (4.14) առնչություններից:

§ 23. Լերեի բանաձևը

Լ ե մ մ ա 4.5. Դիցուք s-ն ու t-ն արտապատկերում են $\Omega \in \mathbb{C}^n$ բաց բազմությունը $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$-ի մեջ և ողորկ են: Եթե գոյություն ունի $g\colon\ \Omega \mapsto \mathbb{C}$ այնպիսին, որ $t = gs$, ապա

$$\omega'(t) = g^n \omega'(s)\ : \tag{4.22}$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Նախ համոզվենք, որ $\{z \in \mathbb{C}^n: \ z_1 \neq 0\}$ բազմու– թյան վրա

$$z_1^{-n}\omega'(z) = d\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{z_n}{z_1}\right): \tag{4.23}$$

Աջ մասում գտնվող ձևը հանդիսանում է $n-1$ հատ բնական ձևով կարգավորված

$$d\left(\frac{z_k}{z_1}\right) = z_1^{-1}dz_k - z_1^{-2}z_k dz_1, \quad k = 2, \ldots, n$$

դիֆերենցիալ ձևերի արտադրյալ: Քանի որ $dz_1 \wedge dz_1 = 0$, ապա (4.23)-ի աջ կողմը հետևյալ ձևերի

$$z_1^{-n+1}dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_n = z_1^{-n}z_1\omega_1(z) \tag{4.24}$$

գումարն է, ավելացված ևս $n-1$ անդամներ՝

$$\begin{aligned} &- z_1^{-n}z_k\, dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_{k-1} \wedge dz_1 \wedge dz_{k+1} \wedge \ldots \wedge dz_n = \\ &= (-1)^{k-1}z_1^{-n}z_k\, dz_1 \wedge \ldots [k] \ldots \wedge dz_n = z_1^{-n}z_k\omega_k(z), \end{aligned} \tag{4.25}$$

որտեղ $k = 2, \ldots, n$: Իրար հետ գումարելով (4.24)-ն ու (4.25)-ը, ստանում ենք (4.23)-ը:

Պարզ է, որ g-ն Ω-ում զրոներ չունի: Ω-ի այն ենթաբազմության վրա, որտեղ $s_1 \neq 0$, բավարարվում է $t_1 \neq 0$ պայմանը ևս: Ուրեմն՝

$$\omega'(s) = s_1^n d\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{s_n}{s_1}\right), \tag{4.26}$$

$$\omega'(t) = t_1^n d\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{t_n}{t_1}\right): \tag{4.27}$$

Քանի որ $s_k/s_1 = t_k/t_1$ և $t_1 = gs_1$, ապա (4.22)-ը հետևում է (4.26)-ից և (4.27)-ից երբ $s_1 \neq 0$: Իսկ Ω-ի այն կետերում, որտեղ $s_1 = 0$, որևէ այլ s_j բաղադրիչ է տարբեր զրոյից և նախորդ դատողությունները s_1-ի փոխարեն կիրառում ենք s_j-ի նկատմամբ: $\square$

Թ ե ո ր ե մ 4.5. Դիցուք D-ն սահմանափակ տիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում կտոր առ կտոր ողորկ եզրով, $z \in D$ ֆիքսած է և $\varphi\colon\ \partial D \mapsto \mathbb{C}^n$ C^1-արտապատկերում է, այնպիսին, որ

$$\langle \zeta - z, \varphi(\zeta) \rangle \neq 0,$$

բոլոր $\zeta \in \partial D$ համար: Այդ դեպքում

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\varphi}(\zeta)) \wedge \omega(\zeta)^n}{\langle \zeta - z, \varphi(\zeta) \rangle} \tag{4.28}$$

ամեն մի $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ ֆունկցիայի համար:

Ա պ ա ց ու յ ց: Կիրառելով (4.22) առնչությունը

$$t = \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \quad \text{և} \quad s = \bar{\zeta} - \bar{z}$$

զույգի նկատմամբ, կստանանք

$$\omega'\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2}\right) = \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} \omega'(\bar{\zeta} - \bar{z}) :$$

Ուրեմն, (4.17)-ը կարելի է գրել

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta)\, \omega'\left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta)$$

տեսքով:

Իսկ այժմ $\mathbb{C}^{2n}$ տարածության մեջ դիտարկենք հետևյալ փակ մակերևույթը՝

$$\gamma_0 = \left\{ (\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^{2n}\colon\ \zeta \in \partial D,\ \ \eta = \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right\},$$

որն անվանում են Մարտինելի–Բոխների ցիկլ: Մարտինելի–Բոխների բանաձևը գրվում է հետևյալ տեսքով՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\gamma_0} f(\zeta)\, \omega'(\eta) \wedge \omega(\zeta) : \tag{4.29}$$

Նման ձևով ներմուծելով

$$\gamma = \big\{(\zeta,\eta)\in\mathbb{C}^{2n}:\ \zeta\in\partial D,\ \ \eta=\varphi(\zeta)\big\}$$

Լերեի ցիկլը, կհամոզվենք, որ (4.28)-ի աջ մասը գրվում է

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) \tag{4.30}$$

տեսքով: Մնում է ապացուցել, որ (4.29)-ում և (4.30)-ում ինտեգրալներն իրար հավասար են: Դրա համար նախ նկատենք, որ γ_0 և γ ցիկլերը գտնվում են

$$T = \big\{(\zeta,\eta)\in\mathbb{C}^{2n}:\ \ \langle\zeta - z,\eta\rangle = 1\big\}$$

մակերևույթի վրա: Ցույց տանք, որ T-ի վրա նրանք իրար հոմոլոգիկ են, այսինքն, նրանց վրա կարելի փռել «թաղանթ»: Դա կարելի է կատարել, միացնելով γ_0-ն և γ-ն իրար հետ ուղղագիծ հատվածներով, այն է՝

$$Q = \left\{(\zeta,\eta):\ \zeta\in\partial D,\ \ \eta = t\varphi(\zeta) + (1-t)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2},\ \ 0\leqslant t\leqslant 1\right\}:$$

Համոզվենք, որ $f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)$ ձևը T-ի վրա փակ է: Իրոք, հաշվի առնելով որ f-ը հոլոմորֆ է, ստանում ենք, որ

$$d\big\{f(\zeta)\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)\big\} = \partial f(\zeta)\wedge\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) + f(\zeta)\cdot\partial\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)$$

ձևն ունի $(2n,0)$ երկաստիճան: Իսկ քանի որ T-ի կոմպլեքս չափողականությունը հավասար է $2n-1$, ապա նրա վրա $2n$ հոլոմորֆ դիֆերենցիալներ գծորեն կախյալ են և նրանց արտաքին արտադրյալը հավասար է զրոյի: Ուրեմն $d\{f(\zeta)\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)\} = 0$ և Ստոքսի բանաձևի շնորհիվ

$$\int\limits_{\partial T} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) = \int\limits_{T} d\big\{f(\zeta)\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)\big\} = 0:$$

Մյուս կողմից, հաշվի առնելով, որ $\partial T = \gamma_0 - \gamma$, ստանում ենք

$$\int\limits_{\gamma_0} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) - \int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta) = 0 : \tag{4.31}$$

(4.29), (4.30) և (4.31)-ից հետևում է՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta),$$

որը, ինչպես տեսանք, համարժեք է (4.28)-ին: □

Իսկ այժմ դիտարկենք սահմանափակ գծորեն ուռուցիկ D տիրույթ C^2-եզրով և ρ որոշիչ ֆունկցիայով: Դա նշանակում է, որ $\rho \in C^2(\mathbb{C}^n)$ և D-ն այն բազմությունն է, որտեղ $\rho < 0$, իսկ ρ-ի գրադիենտը զրո չի դառնում, այսինքն

$$N(\zeta) = \left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta_1}, \dots, \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta_n}\right)$$

վեկտորը բավարարում է $N(\zeta) \neq 0$ պայմանին բոլոր $\zeta \in \partial D$-երի համար:

Եթե $\zeta \in \partial D$, ապա D-ի գծորեն ուռուցիկությունը նշանակում է, որ $(n-1)$-չափանի կոմպլեքս հիպերհարթությունը, որը շոշափում է ∂D-ն ζ կետում, չի հատվում D-ի հետ: Ուրեմն՝

$$\langle \zeta - z, N(\zeta)\rangle \neq 0, \quad z \in D,\ \ \zeta \in \partial D :$$

Այսպիսով, մենք եզրակացնում ենք, որ $N(\zeta)$-ն կարող է կատարել $\varphi(\zeta)$-ի դերը թեորեմ 4.5-ում և մենք ստանում ենք հետևյալ թեորեմը.

Թ ե ո ր ե մ 4.6. Դիցուք D-ն սահմանափակ գծորեն ուռուցիկ տիրույթ է C^2-եզրով, ρ որոշիչ ֆունկցիայով և

$$N(\zeta) = \left(\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta_1}, \dots, \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar\zeta_n}\right)$$

գրադիենտով: Այդ դեպքում ցանկացած $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ *ֆունկ- ցիայի համար*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\omega'(\bar{N}(\zeta)) \wedge \omega(\zeta)}{\langle \zeta - z, N(\zeta) \rangle}^n, \quad z \in D : \tag{4.32}$$

Մասնավոր դեպքում, երբ $D = B$ միավոր գունդն է, կարող ենք վերցնել $\rho(z) = |z|^2 - 1$: Այդ դեպքում $N(\zeta) = \zeta$ և (4.32)-ից ստանում ենք Կոշիի ինտեգրալային բանաձևը գնդի համար՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta}) \wedge \omega(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n} :$$

Հաշվի առնելով (4.14)-ը, այս բանաձևը կարելի է գրել մի այլ տեսքով՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n} :$$

§ 24. Վեյլի բանաձևը

Հետագայի համար մեզ պետք է գալու Հեֆերի *թեորեմը*՝

Թ ե ո ր ե մ 4.7 (Հեֆեր). *Դիցուք* D*-ն հոլոմորֆության տիրույթ է* $\mathbb{C}^n$*-ում և* $\chi \in \mathcal{O}(D)$*: Այդ դեպքում* $D \times D$ *տիրույթում գոյություն ունեն հոլոմորֆ* $q_1(\zeta, z), \ldots, q_n(\zeta, z)$ *այնպիսի ֆունկցիաներ, որ բոլոր* $\zeta, z \in D$ *կետերի համար տեղի ունի*

$$\chi(\zeta) - \chi(z) = \sum_{j=1}^{n} q_j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j)$$

վերլուծությունը:

Ընդհանուր դեպքում Հեֆերի թեորեմի ապացույցը հեշտ չէ և մենք նա կընդունենք առանց ապացույցի: Մասնավոր դեպքերում, երբ χ-ը բազմանդամ է կամ էլ D-ն Ռեյնհարտի տիրույթ է, այդ թեորեմը համարյա ակնհայտ է:

Սահմանում 4.1. Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված են $\chi_1, \ldots, \chi_N$, $N \geqslant n$ հոլոմորֆ ֆունկցիաներ: Δ տիրույթը կոչվում է *անալիտիկ պոլիէդր*, եթե $\Delta \Subset D$ և

$$\Delta = \{z \in D \colon \ |\chi_i(z)| < 1, \quad i = 1, \ldots, N\} : \tag{4.33}$$

Անալիտիկ պոլիէդրը կոչվում է *Վեյլի պոլիէդր*, եթե

1) նրա բոլոր
$$\sigma_i = \left\{z \in \overline{G} \colon \ |\chi_i(\zeta)| = 1\right\}$$
նիստերը $(2n-1)$-չափանի բազմաձևություններ են,

2) ցանկացած k, $2 \leqslant k \leqslant n$ պարբեր «նիստերի» հատումների չափողականությունը $(2n-k)$-ից ոչ ավել է:

n-չափանի $\sigma_{i_1 \ldots i_n} = \{z \colon \ z \in \overline{D}, \quad |\chi_{i_s}(z)| = 1, \quad s = 1, \ldots, n\}$ «կողերի» միացումը կոչվում է պոլիէդրի հենք և նշանակվում է σ-ով՝

$$\sigma = \bigcup_{i_1 < \cdots < i_n} \sigma_{i_1 \ldots i_n} :$$

Այդ «կողերը» համարում ենք բնական ձևով կողմնորոշված, այսինքն, համապատասխան $\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n}$ «նիստերի» հաջորդելու կարգով որոշված:

Ըստ Հեֆերի թեորեմ 4.7-ի

$$\chi_i(\zeta) - \chi_i(z) = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \quad i = 1, \ldots, N :$$

Նշանակենք (q_{ij}), $i = i_1, \ldots, i_n$, $j = 1, \ldots, n$, մատրիցի որոշիչը $Q_{i_1 \ldots i_n}$-ով:

Թ ե ո ր և մ 4.8 (Վեյլ). *Դիցուք Δ-ն Վեյլի փիրույթ է և $f \in \in \mathcal{O}(\Delta)\bigcap C(\overline{\Delta})$: Յանկացած $z \in \Delta$ կետում f ֆունկցիան ներկայացվում է*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1<\dots<i_n} \int\limits_{\sigma_{i_1\dots i_n}} \frac{f(\zeta)Q_{i_1\dots i_n}(\zeta,z)\,d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{n}[\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)]} \tag{4.34}$$

ինտեգրալային բանաձևով:

Ա պ ա ց ու յ ց: Լերեի (4.28) բանաձևում համապատասխան ձևով ընտրենք q արտապատկերումը: Պոլիէդրի $\partial\Delta$ եզրը բաղկացած է N նիստերից՝ $\partial\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{N} \sigma_i$: Յուրաքանչյուր σ_i նիստի համար վերցնենք

$$\varphi^i = \left(\varphi_1^i, \dots, \varphi_N^i\right) = \left(\frac{q_{i1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j)}, \dots, \frac{q_{in}}{\sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}(\zeta_j - z_j)}\right):$$

Դիցուք $\gamma_i = \varphi_i(\sigma_i)$ $(\varphi_i\colon \sigma_i \mapsto \gamma_i)$:

Պարզության համար ապացույցի շարունակությունը կկատարենք $n = 2$ դեպքի համար: γ_i-երի միացումը ցիկլ չէ, որովհետև $\sigma_{i_1,i_2} = = \sigma_{i_1}\bigcap\sigma_{i_2}$ կողերի վրա որոշված չէ: Որոշենք այն հետևյալ կերպ: Նշանակենք՝

$$\gamma_{i_1,i_2} = \left\{(\zeta,\eta) \in \mathbb{C}^4\colon\ \zeta \in \sigma_{i_1,i_2}\ \ \eta = t\varphi^{i_1} + (1-t)\varphi^{i_2},\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1\right\}:$$

γ_{i_1,i_2} 3-չափանի մակերևույթները իրար հետ «սոսնձում են» γ_{i_1} և γ_{i_2} պարբեր կտորները և արդյունքում ստացվում է փակ մակերևույթ՝ ցիկլ, որը կնշանակենք γ-յով.

$$\gamma = \left(\bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i_1<i_2} \gamma_{i_1,i_2}\right):$$

Դժվար չէ ստուգել, որ γ-ն գտնվում է

$$\left\{(\zeta,\eta)\in\mathbb{C}^{2n}:\ \langle\zeta-z,\bar{\eta}\rangle\right\}$$

մակերևույթի վրա: Ճիշտ այնպես, ինչպես դա արվել է Լերեի թեորեմի ապացույցի ժամանակ, ցույց է տրվում, որ γ-ն հոմոլոգային է Մարտինելի–Բոխների ցիկլին, ուրեմն

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\,\omega'(\eta)\wedge\omega(\zeta)\,: \tag{4.35}$$

Այժմ նկատենք, որ (4.35)-ում ինտեգրալներն ըստ γ_i-ի ցիկլի կտորների հավասար են զրոյի, որովհետև φ_i-ն հոլոմորֆ է ըստ ζ-ի: Հաշվենք այդ ինտեգրալներն ըստ մնացած γ_{i_1,i_2} կտորների՝

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_{i_1,i_2}} f(\zeta)\ (\eta_1 d\eta_2-\eta_2 d\eta_1)\wedge d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_0^1 dt\int\limits_{\sigma_{i_1,i_2}} f(\zeta)\left[\left(t\varphi_1^{i_1}+(1-t)\varphi_1^{i_2}\right)\left(\varphi_2^{i_1}-\varphi_2^{i_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(t\varphi_2^{i_1}+(1-t)\varphi_2^{i_2}\right)\left(\varphi_1^{i_1}-\varphi_1^{i_2}\right)\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_0^1 dt\int\limits_{\sigma_{i_1,i_2}} f(\zeta)\left[(1-t)\varphi_1^{i_2}\varphi_2^{i_1}-t\varphi_1^{i_1}\varphi_2^{i_2}-\right.$$

$$\left.-(1-t)\varphi_2^{i_2}\varphi_1^{i_1}+t\varphi_1^{i_2}\varphi_2^{i_1}\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\sigma_{i_1,i_2}} f(\zeta)\frac{Q_{i_1,i_2}\,d\zeta}{\prod\limits_{k=1}^{2}\left(\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)\right)}\,:$$

Այստեղից և (4.35)-ից ստանում ենք (4.34)-ը $n=2$ դեպքի համար:

Բերենք մի այլ ապացույց: Ելնենք Մարտինելի–Բոխների բանաձևից, որը դիտարկվող դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\sigma_i} f(\zeta)\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta : \quad (4.36)$$

Նախ նկատենք, որ (4.36)-ում ենթաինտեգրալ արտահայտությունը ճըշգրիտ ձև է, նա իրենից ներկայացնում է

$$W_i(\zeta,z)=\frac{1}{|\zeta-z|^2\left[W_i(\zeta)-W_i(z)\right]}\begin{vmatrix}P_1^i & P_2^i\\ \bar\zeta_1-\bar z_1 & \bar\zeta_2-\bar z_2\end{vmatrix}d\zeta \quad (4.37)$$

ձևերից յուրաքանչյուրի դիֆերենցիալը: Կատարենք համապատասխան հաշվումները, պարզության համար ենթադրելով $z=0$ և նշանակելով $W_i=W_i(\zeta)-W_i(0)$, կստանանք

$$\begin{aligned}d\Omega_i&=\frac{1}{W_i}\Big\{-\frac{\zeta_1 d\bar\zeta_1+\zeta_2 d\bar\zeta_2}{|\zeta|^4}\left(P_1^i\bar\zeta_2-P_2^i\bar\zeta_1\right)+\\&+\frac{1}{|\zeta|^2}\left(P_1^i\,d\bar\zeta_2-P_2^i\,d\bar\zeta_1\right)\Big\}\wedge d\zeta=\\&=\frac{1}{W_i\,|\zeta|^4}\Big\{-\left(\zeta_1 d\bar\zeta_1+\zeta_2 d\bar\zeta_2\right)\left(P_1^i\bar\zeta_2-P_2^i\bar\zeta_1\right)+\\&+\left(\zeta_1\bar\zeta_1+\zeta_2\bar\zeta_2\right)\left(P_1^i\,d\bar\zeta_2-P_2^i\,d\bar\zeta_1\right)\Big\}\wedge d\zeta=\\&=\frac{1}{W_i\,|\zeta|^4}\left(\bar\zeta_1 d\bar\zeta_2-\bar\zeta_2 d\bar\zeta_1\right)\left(\zeta_1P_1^i+\zeta_2P_2^i\right)\wedge d\zeta=\\&=\frac{1}{|\zeta|^4}\left(\bar\zeta_1 d\bar\zeta_2-\bar\zeta_2 d\bar\zeta_1\right)\wedge d\zeta,\end{aligned}$$

ինչը և պահանջվում էր ստուգել:

Նկատենք նաև, որ երբ $z\in\Delta$ և $\zeta\in\sigma_i$, ապա միայն $W_i(\zeta)-$ $-W_i(z)$ տարբերությունն է, որ զրո չի դառնում (որովհետև $|W_i(\zeta)|=1$ և $|W_i(z)|<1$), իսկ մնացածները ինչ-որ կետերում զրո են դառնում: Դա նշանակում է, որ երբ $z\in\Delta$ և $\zeta\in\sigma_i$, ապա միայն Ω_i ձևն է, որ եզակիություններ չունի, իսկ մնացած Ω_j, $j \neq i$ ձևերը եզակի են, և Ստոքսի բանաձևը կարելի է կիրառել միայն հետևյալ ձևով.

$$\int\limits_{\sigma_i} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) = \int\limits_{\sigma_i} d\,\{f(\zeta)\,\Omega_i(\zeta,z)\} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \int\limits_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\,\Omega_i(\zeta,z):$$

Եթե այդ բոլոր ինտեգրալները գումարենք, ինչը պահանջվում է ըստ (4.36) բանաձևի, ապա ամեն մի σ_{ij} կող հանդիպելու է երկու անգամ, մի անգամ σ_i նիստի կողմից, մյուս անգամ՝ σ_j, ընդ որում, իրար հակառակ կողմնորոշումներով: Ուրեմն

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\sigma_i} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(\zeta,z) = \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\,\{\Omega_i(\zeta,z) - \Omega_j(\zeta,z)\}\,,$$

որտեղ գումարումը կապարվում է ըստ բոլոր ինդեքսների կարգավոր–ված զույգերի $(i<j)$: Մնում է նկատել, որ հանելու գործողությունից (4.37) կորիզների մեջ ոչ անալիտիկ մասերը կրճատվում են՝

$$\Omega_i - \Omega_j = \frac{1}{|\zeta|^2}\frac{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2}{W_i W_j}\left(P_1^i P_2^j - P_1^j P_2^i\right) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{W_i W_j}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta:$$

Այսպիսով, ստանում ենք

$$f(z) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{\sigma_{ij}} \frac{f(\zeta)}{[W_i(\zeta) - W_i(z)]\,[W_j(\zeta) - W_j(z)]}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ P_1^j & P_2^j \end{vmatrix} d\zeta,$$

ինչը համընկնում է Վեյլի բանաձևի հետ $n=2$ դեպքում: □

§ 25. Ռունգեի փիրույթներ

Թ ե ո ր ե մ 4.9. *Ամեն մի f ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է* (4.33) *Վեյլի փիրույթում և անընդհատ է նրա փակման վրա, այդ փիրույթում ներկայացվում է*

$$f(z)=\sum_{i_1<\cdots<i_n}\sum_{|s|=0}^{\infty}A_{i,s}(z)\,[\chi_i(z)]^s \tag{4.38}$$

շարքով, որը զուգամիտում է բացարձակ և Δ-ի ներսում հավասարաչափ:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $K\Subset\Delta$, ընտրենք այնպիսի $\rho=\rho(K)<1$ թիվ, որ $|\chi_i(z)|<\rho$, $i=1,\dots,N$, երբ $z\in K$: Ուրեմն, հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}[\chi_{i_k}(\zeta)-\chi_{i_k}(z)]}=\sum_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}\frac{[\chi_{i_1}(z)]^{s_1}\cdots[\chi_{i_n}(z)]^{s_n}}{[\chi_{i_1}(\zeta)]^{s_1+1}\cdots[\chi_{i_n}(\zeta)]^{s_n+1}}=$$

$$=\sum_{|s|=0}^{\infty}\frac{[\chi_i(z)]^s}{[\chi_i(\zeta)]^{s+I}},$$

կզուգամիտի բացարձակ և հավասարաչափ, երբ $(z,\zeta)\in K\times\sigma_{i_1,\dots,i_n}$: Տեղադրելով (4.33) Վեյլի բանաձևի մեջ, կստանանք (4.38)-ը, որտեղ որպես $A_{i,s}(z)$ գործակիցներ հանդես են գալիս՝

$$A_{i,s}(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\sigma_{i_1\dots i_n}}\frac{f(\zeta)Q_{i_1\dots i_n}(\zeta,z)}{[\chi_i(\zeta)]^{s+I}}\,d\zeta: \quad \square$$

Ս ա հ մ ա ն ու մ 4.2. G փիրույթը կոչվում է *Ռունգեի փիրույթ*, եթե ամեն մի $f\in\mathcal{O}(G)$ ֆունկցիա հավասարաչափ G-ի ներսում մոտարկվում է բազմանդամներով:

Ինչպես հայտնի է, մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար Ռունգեի թեորեմը պնդում է. *որպեսզի $G \subset \mathbb{C}^1$ տիրույթը լինի Ռունգեի տիրույթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա լինի միակապ*[5]:

Երբ $n > 1$, չկա Ռունգեի տիրույթների այդպիսի պարզ երկրաչափական բնութագրում. ոչ ամեն մի միակապ տիրույթ Ռունգեի տիրույթ է, և ոչ ամեն մի Ռունգեի տիրույթ միակապ է:

Լեմմա 4.1. *Եթե G տիրույթը հոլոմորֆ ուռուցիկ է և բազմանդամների դասը խիտ է $\mathcal{O}(G)$-ում, ապա G-ն բազմանդամային ուռուցիկ է:*

Ապացույց: Դիցուք $A \Subset G$: Այդ դեպքում $\widehat{A}_{\mathcal{O}(G)} \Subset G$ և ամեն մի $z^0 \in G \setminus \widehat{A}_{\mathcal{O}(G)}$ կետի համար գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(G)$ այնպիսին, որ

$$\sup_{z \in A} |f(z)| < \left|f(z^0)\right| :$$

Ուրեմն, կգտնվի այնպիսի $\delta > 0$, որ

$$\delta + \sup_{z \in A} |f(z)| < \left|f(z^0)\right| : \tag{4.39}$$

Քանի որ բազմանդամների դասը խիտ է $\mathcal{O}(G)$-ում, կարելի է վերցնել այնպիսի P բազմանդամ, որ

$$|f(z) - P(z)| < \frac{\delta}{2}, \quad z \in A \bigcup \{z^0\} :$$

Այստեղից և (4.39)-ից հետևում է՝

$$\left|P(z^0)\right| > \left|f(z^0)\right| - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} + \sup_{z \in A} |f(z)| > \sup_{z \in A} |P(z)|,$$

իսկ դա նշանակում է, որ G-ն բազմանդամային ուռուցիկ տիրույթ է: $\square$

[5] Տես, օր. Б. В. Шабат, *Введение в Комплексный Анализ*, часть 1, Наука, Москва, 1985.

Լ ե մ մ ա 4.2. Եթե G փիրույթը բազմանդամային ուռուցիկ չէ, ապա կգտնվեն այնպիսի $A \Subset G$ բազմություն և $z^{(k)}$ կետերի հաջորդականություն՝

$$z^{(k)} \in G, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad z^{(k)} \to z^0 \in \partial G,$$

որ ցանկացած $f \in \mathcal{O}(G)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունեն

$$|f(z^{(k)})| \leqslant \sup_{z \in A} |f(z)|, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.40}$$

անհավասարությունները:

Ա պ ա ց ու յ ց: Իսկապես, եթե G փիրույթը բազմանդամային ուռուցիկ չէ, ապա, ինչպես հետևում է սահմանումից, կգտնվեն այնպիսի $A \Subset G$ բազմություն և $z^{(k)} \in G$, $k = 1, 2, \ldots$, կետերի հաջորդականություն, որը G-ում չունի սահմանային կետեր և որ ամեն մի $f \in \mathcal{O}(G)$ ֆունկցիայի համար բոլոր $z^{(k)}$ կետերում տեղի ունեն (4.40) անհավասարությունները: Կիրառելով (4.40) անհավասարությունը կոորդինատական z_j, $j = 1, \ldots, n$ ֆունկցիաների նկատմամբ, համոզվում ենք, որ $z^{(k)}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ըստ Բոլցանո–Վայերշտրասի սկզբունքի, այդ հաջորդականությունից կարելի է անջատել ենթահաջորդականություն, որը զուգամիտում է z^0, ակնհայտորեն եզրային, կետին: □

Թ ե ո ր ե մ 4.10. G-ն Ռունգեի փիրույթ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա $\widetilde{G}$ հոլոմորֆության թաղանթը Ռունգեի փիրույթ է:

Ա պ ա ց ու յ ց: Պնդման մի կողմը ակնհայտ է և բխում է ավելի ընդհանուր փաստից. եթե G-ի որևէ հոլոմորֆ ընդլայնում Ռունգեի փիրույթ է, ապա G-ն ևս Ռունգեի փիրույթ է:

Հակադարձը՝ դիցուք G-ն Ռունգեի փիրույթ է, ապացուցենք, որ $\widetilde{G}$-ն ևս Ռունգեի փիրույթ է: Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է G-ում, այդ դեպքում գոյություն ունի $P_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots$ բազմանդամների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է հավասարաչափ G-ի ներսում f-ին: Նշանակենք G_f-ով P_k հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության ամենամեծ տիրույթը: Ցույց տանք, որ G_f-ը հոլոմորֆ ուռուցիկ է: Ենթադրենք հակառակը՝ այդ դեպքում ըստ լեմմա 4.2-ի գոյություն ունի $A \Subset G_f$, $\rho(A, \partial G_f) = r > 0$ և $z^0 \in G_f$, $\rho(A, \partial G_f) < r$ այնպիսիք, որ կամայական P բազմանդամի համար տեղի ունի

$$\left|P(z^0)\right| \leqslant \sup_{z \in A} |P(z)|$$

անհավասարությունը: Ըստ (2.3) անհավասարությանը լեմմա 2.1-ից՝

$$|P(z)| \leqslant \sup_{z \in A_\rho} |P(z)|, \quad z \in U(z^0, \rho) \tag{4.41}$$

բոլոր ρ-երի համար, $\rho < r$: Քանի որ $A_\rho \Subset G_f$, ապա (4.41)-ից հետևում է, որ P_k հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $U(z^0, \rho)$-ում, հետևաբար, $U(z^0, \rho) \subset G_f$ բոլոր $\rho < r$ համար , ինչը հնարավոր չէ: Ուրեմն, G_f-ը բազմանդամային ուռուցիկ է:

Այսպիսով, ապացուցվեց, որ G_f-ը հոլոմորֆության տիրույթ է: Քանի որ $G_f \supset G$, ապա $\widetilde{G} \subset G_f$: Ուրեմն, P_k-ն հավասարաչափ զուգամիտում է $\widetilde{G}$-ում, որոշելով այնտեղ մի հոլոմորֆ ֆունկցիա: Ըստ միակության թեորեմի, այդ ֆունկցիան համընկնում է f-ի հետ: Դրանով իսկ հաստատվում է, որ ամեն մի ֆունկցիա $f \in \mathcal{O}(G)$ ներկայացվում է որպես բազմանդամների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է հավասարաչափ $\widetilde{G}$-ի ներսում: Դա նշանակում է, որ $\widetilde{G}$-ն Ռունգեի տիրույթ է: $\square$

Թ ե ո ր ե մ 4.11 (Վեյլ). *Որպեսզի G-ն լինի Ռունգեի տիրույթ, անհրաժեշտ է ու բավարար, որ նրա $\widetilde{G}$ հոլոմորֆության թաղանթը լինի բազմանդամային ուռուցիկ:*

Ա ն հ ր ա ժ ե շ տ ո ւ թ յ ո ւ ն: Դիցուք G-ն Ռունգեի տիրույթ է: Ըստ նախորդ թեորեմի $\widetilde{G}$-ն ևս Ռունգեի տիրույթ է և մնում է կիրառել լեմմա 4.1:

Ապացուցում: Դիցուք $\widetilde{G}$-ն բազմանդամային ուռուցիկ փիրույթ է և $K \Subset G$: Ուրեմն $K_P \Subset G$, վերցնենք Վեյլի բազմանդամային պոլիէդր D այնպիսին, որ $\widehat{K}_P \Subset D \Subset G$: Ամեն մի $\zeta \in \partial D$ կետի համար գոյություն ունի P_ζ բազմանդամ, որի համար

$$|P_\zeta(\zeta)| > 1 > \max_{\widehat{K}_P} |P_\zeta| :$$

Ըստ անընդհատության այս անհավասարությունը պահպանվում է ζ-ի ինչ-որ V_ζ շրջակայքում՝

$$|P_\zeta(z)| > 1 > \max_{\widehat{K}_P} |P_\zeta|, \quad z \in V_\zeta :$$

V_ζ շրջակայքերը ծածկում են ∂D կոմպակտ բազմությունը: Ընտրենք վերջավոր թվով $V_{\zeta_1}, \ldots, V_{\zeta_N}$ շրջակայքեր, որոնք ևս ծածկում են ∂D-ն, և թող P_i-երը $(1 \leqslant i \leqslant N)$ լինեն համապատասխան բազմանդամները: Կառուցենք

$$\Delta' = \{z\colon\ |P_i(z)| < 1, \quad i = 1, \ldots, N\}$$

բաց բազմությունը և վերցնենք նրա Δ կապակցված կոմպոնենտը, որը պարունակում է K-ն: Պարզ է, որ Δ-ն Վեյլի բազմանդամային պոլիէդր է: Կիրառելով թեորեմ 4.9-ը, ստանում ենք (4.38) վերլուծությունը f-ի համար, որը K-ի վրա զուգամիտում է հավասարաչափ: Քանի որ (4.38) շարքի անդամները մեր դեպքում բազմանդամներ են, ստացվում է, որ K-ի վրա f-ը հավասարաչափ մոտարկվում է բազմանդամներով: Այսպիսով, $\widetilde{G}$-ն, իսկ նրա հետ նաև G-ն, Ռունգեի փիրույթ է: □

§ 26. $\bar\partial$-խնդիրը

1. Օժանդակ տեղեկություններ մի փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից. Մեր նպատակների համար անհրաժեշտ է մեկ փոփո–

խականի ֆունկցիաների տեսությունից երկու թեորեմ, որոնք կբերենք ապացույցներով հանդերձ:

Թ ե ո ր ե մ 4.12 (Կոշի–Գրինի բանաձև). *Դիցուք G-ն հարթության վրա վերջավոր թվով ողորկ կորերով սահմանափակված տիրույթ է: Եթե $u \in C^1(\overline{G})$, ապա*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{G} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G: \tag{4.42}$$

Ա պ ա ց ո ւ յ ց: Ֆիքսած z կետի համար դիտարկենք

$$U_\varepsilon = \{\zeta\colon\ |\zeta - z| \leqslant \varepsilon\}:$$

Ընտրենք ε-ը այնքան փոքր, որ $U_\varepsilon \subset G$: Այնուհետև $G_\varepsilon = G \setminus U_\varepsilon$ տիրույթում կիրառենք

$$\int\limits_{G_\varepsilon} d\varphi = \int\limits_{\partial G} \varphi - \int\limits_{\partial U_\varepsilon} \varphi$$

Ստոքսի բանաձևը $\varphi = \dfrac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$ ձևի նկատմամբ: Քանի որ $\dfrac{1}{\zeta - z}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է G_ε-ում և φ-ն պարունակում է $d\zeta$ դիֆերենցիալ, ապա

$$d\varphi = \bar{\partial}\varphi = \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

հետևաբար՝

$$\int\limits_{G_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\partial G} \frac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{\partial U_\varepsilon} \frac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\varepsilon \to 0$, այստեղից ստանում ենք (4.42)-ը, քանի որ u-ի անընդհատության շնորհիվ ինտեգրալը ∂U_ε-ով ձգտում է $u(a)$-ին, իսկ ինտեգրալը G_ε-ով ձգտում է ինտեգրալին ամբողջ G-ով, որովհետև $(\zeta - z)^{-1}$ կորիզը ինտեգրելի է G-ում: □

Թ ե ո ր ե մ 4.13. Դիցուք $G \subset \mathbb{C}$-ն բաց սահմանափակ բազմություն է, $f \in C^1(G)$ ֆունկցիան սահմանափակ է և

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\bar\zeta, \quad z \in G : \tag{4.43}$$

Այդ դեպքում $u \in C^1(G)$ և

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar z} = f(z) : \tag{4.44}$$

Ա պ ա ց ու յ ց: Շարունակենք f-ը ամբողջ հարթության վրա, համարելով այն հավասար զրոյի G-ից դուրս: Այդ դեպքում (4.43)-ը կարելի է գրել

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(z+\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \wedge d\bar\zeta$$

տեսքով, որտեղից երևում է, որ $u \in C^1(G)$, քանի որ ինտեգրալի նշանի տակ կարելի է ածանցել:

Բավական է $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = f$ հավասարությունը ապացուցել ֆիքսած կամայական $a \in G$ կետի շրջակայքում: Վերցնենք $\psi \in C_0^1(G)$ այնպիսին, որ $\psi \equiv 1$ a կետի որևէ V շրջակայքում: Այդ դեպքում $u = u_1 + u_2$, որտեղ

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G \frac{\psi(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\bar\zeta,$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G \frac{\big(1-\psi(\zeta)\big)f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \wedge d\bar\zeta :$$

Քանի որ $1-\psi(\zeta) = 0$ V-ում, ապա $\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar z} = 0$, երբ $z \in V$: Կատարելով $\zeta \mapsto \zeta + z$ փոփոխականի փոխարինում, գրենք u_1-ը

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_G \psi(z+\zeta)f(z+\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta}$$

պեսքով: Հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\big(\psi(z+\zeta)f(z+\zeta)\big)=\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(z+\zeta)f(z+\zeta)\big),$$

և վերադառնալով նախկին փոփոխականին, ստանում ենք

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(z)}{\partial \bar z}&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(z+\zeta)f(z+\zeta)\big)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta}=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(\zeta)f(\zeta)\big)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-z}=\psi(z)f(z):\end{aligned}$$

Վերջին հավասարությունը հետևում է (4.42) Կոշի–Գրինի բանաձևից, եթե նրա մեջ u-ի փոխարեն վերցնենք ψf, իսկ որպես G տիրույթ՝ շրջան, որն իր մեջ պարունակում է ψ ֆունկցիայի կրիչը: Հաշվի առնելով, որ $\psi(z)=1$ և $u_1(z)=u(z)$, այստեղից ստանում ենք (4.44)-ը: □

2. $\bar\partial$-խնդիրը բազմագլանում. Նախ դիտարկենք $\bar\partial u = f$ հավասարումը, որտեղ f-ը կոմպակտ կրիչով $(0,1)$-ձև է, իսկ u-ն՝ որոնելի ֆունկցիա է: Հիշեցնենք, որ $\bar\partial f=0$ պայմանը անհրաժեշտ է լուծման գոյության համար: Այլ բառերով ասած, մենք ուզում ենք լուծել հետևյալ գերորոշված հավասարումների համակարգը՝

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_j}=f_j,\quad j=1,\dots,n, \tag{4.45}$$

որի համար բավարարվում են

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar z_k}-\frac{\partial f_k}{\partial \bar z_j}=0,\quad j,\ k=1,\dots,n \tag{4.46}$$

համապատեղելիության պայմանները:

Թ ե ո ր ե մ 4.14. *Դիցուք $n>1$, f-ը $(0,1)$ տիպի ձև է $\mathbb{C}^n$-ում C^1 դասի գործակիցներով, կոմպակտ K կրիչով և այնպիսին, որ*

$$\bar\partial f = 0\,:$$

Այնուհետև, դիցուք Ω_0-ն $\mathbb{C}^n\setminus K$ բաց բազմության անսահմանափակ կոմպոնենտն է: Գոյություն ունի միակ $u\in C^1(\mathbb{C}^n)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է

$$\bar\partial u = f \tag{4.47}$$

հավասարմանը ու նաև $u(z)=0,\ z\in\Omega_0$ պայմանին:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $f=\sum f_j(z)\,d\bar z_j$: Կառուցենք

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} f_1(\zeta,z_2,\dots,z_n)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-z_1},\quad z\in\mathbb{C}, \tag{4.48}$$

ֆունկցիան: Կատարելով փոփոխականի փոխարինում, այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} f_1(z_1+\zeta,z_2,\dots,z_n)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta},\quad z\in\mathbb{C},$$

որտեղից հետևում է, որ $u\in C^1(\mathbb{C}^n)$ և որ $\dfrac{\partial u}{\partial\bar z_1}=f_1$ ըստ թեորեմ 4.13-ի: Երբ $2\leqslant j\leqslant n$, ապա, անցնելով ինտեգրալի նշանի տակ և օգտվելով $\dfrac{\partial f_1}{\partial\bar z_j}=\dfrac{\partial f_j}{\partial\bar z_1}$ հավասարությունից, կստանանք

$$\frac{\partial u(z)}{\partial\bar z_j}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_1(\zeta,z_2,\dots,z_n)}{\partial\bar z_j}\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-z_1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_j(\zeta,z_2,\dots,z_n)}{\partial\bar\zeta_1}\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{\zeta-z_1}=f_j(z)\,:$$

Վերջին հավասարությունը հետևում է Կոշի–Գրինի (4.42) բանաձևից, եթե այն կիրառենք f_j ֆունկցիայի նկատմամբ ֆիքսած $(z_2,\dots,z_n)$-ի դեպքում: Այսպիսով, ստացվեց, որ

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar z_j} = f_j(z), \quad \text{երբ} \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

իսկ դա նույնն է, ինչ (4.47)-ը:

Մասնավորապես, u-ն հոլոմորֆ է Ω_0-ում: (4.48)-ից երևում է, որ $u(z) = 0$ երբ $|z_2|$-ը բավականին մեծ է և Ω_0-ի կապակցվածությունից հետևում է, որ $u \equiv 0$ Ω_0-ում:

Եթե u_1-ը որևէ մի այլ լուծում է, ապա $\bar\partial(u-u_1) = 0$ և, ուրեմն, $(u-u_1)$-ը ամբողջ ֆունկցիա է $\mathbb{C}^n$-ում: Իսկ եթե $u_1(z)$-ը ևս նույնաբար զրո է Ω_0-ում, ապա $u - u_1 \equiv 0$ Ω_0-ում, որտեղից հետևում է, որ $u - u_1 \equiv 0$ $\mathbb{C}^n$-ում: Դա էլ նշանակում է լուծման միակությունը: $\square$

Դ իտ ո ղ ու թ յ ու ն 4.7. Նշենք, որ $n = 1$ դեպքում թեորեմ (4.14)-ը ճիշտ չէ (տես խնդիր 4.9):

Թ ե ո ր ե մ 4.15. *Դիցուք $G \subset \mathbb{C}^n$ բազմազլանը G_k հարթ տիրույթների դեկարտյան արտադրյալ է՝ $G = G_1 \times \cdots \times G_n$; f_j, $j = 1,\dots,n$ ֆունկցիաները պատկանում են $C^1(G)$-ին և բավարարում են* (4.46) *պայմաններին: Այդ դեպքում գոյություն ունի $u \in C^1(G)$ ֆունկցիա, որը բավարարում է* (4.45) *հավասարումների համակարգին:*

Ա պ ա ց ու յ ց: Ապացույցը կատարենք ինդուկցիայով ըստ n-ի: Երբ $n = 1$, պնդումը արդեն ապացուցված է թեորեմ 4.13-ում: Ենթադրենք, թեորեմի պնդումը ճշմարիտ է, երբ փոփոխականների թիվը չի գերազանցում $(n-1)$-ը, և ապացուցենք նրա ճշմարիտ լինելը n փոփոխականի համար: Դիտարկենք (4.45) համակարգի

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z_n} = f_n$$

վերջին հավասարումը և նշանակենք g-ով նրա լուծումը G_n-ում, որն իրենից ներկայացնում է z_n-ի ֆունկցիա, կախված $\widetilde{z}=(z_1,\dots,z_{n-1})$ պարամետրից: (4.45) համակարգի լուծումը որոնենք $u=g+\varphi$ տեսքով: Այդ դեպքում φ-ն պետք է լինի հոլոմորֆ ըստ z_n-ի G_n-ում, իսկ մնացած կոորդինատների նկատմամբ $\widetilde{G}=G_1\times\cdots\times G_{n-1}$ տիրույթում նա պետք է բավարարի

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z_k}=f_k-\frac{\partial g}{\partial\bar z_k}\equiv h_k,\quad k=1,\dots,n-1 \tag{4.49}$$

համակարգին: Քանի որ

$$\frac{\partial f_k}{\partial\bar z_j}=\frac{\partial f_j}{\partial\bar z_k}\quad\text{և}\quad\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z_j\,\partial\bar z_k}=\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z_k\,\partial\bar z_j},\quad j,\ k=1,\dots,n,$$

ապա

$$\frac{\partial h_k}{\partial\bar z_j}=\frac{\partial h_j}{\partial\bar z_k},\quad j,\ k=1,\dots,n-1,$$

ինչը նշանակում է, որ (4.49) համակարգը բավարարում է համատեղելիության պայմաններին: Ըստ ինդուկտիվ ենթադրության, գոյություն ունի այդ համակարգի $\varphi\in C^1(\widetilde{G})$ լուծում, որը կախված է z_n պարամետրից: Մնում է համոզվել, որ φ-ն ըստ z_n-ի հոլոմորֆ է, իսկ դրա համար բավական է ստուգել, որ (4.49)-ի աջ մասերը հոլոմորֆ են ըստ z_n-ի: Իրոք,

$$\frac{\partial h_k}{\partial\bar z_n}=\frac{\partial f_k}{\partial\bar z_n}-\frac{\partial^2 g}{\partial\bar z_n\,\partial\bar z_k}=\frac{\partial f_k}{\partial\bar z_n}-\frac{\partial f_n}{\partial\bar z_k}=0$$

բոլոր $k=1,\dots,n-1$ ըստ (4.46): $\square$

§ 27. Կեռնֆունկցիա

Դիցուք $B^2(\Omega)$ Ω-ում այն հոլոմորֆ ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնց համար

$$\|f\| = \|f\|_\Omega = \left(\int\limits_\Omega |f|^2 \, dV\right)^{1/2} < \infty :$$

$B^2(\Omega)$-ն $L^2(\Omega, dV)$ տարածության ենթատարածություն է:

Ֆիքսած $z \in \Omega$ դեպքում $u \mapsto u(z)$ արտապատկերումը հանդիսանում է գծային ֆունկցիոնալ $B^2(\Omega)$-ի վրա, մենք նա կանվանենք *արժեք z կետում*: Հաջորդ լեմման ցույց է տալիս, որ այդ ֆունկցիոնալը անընդհատ է $B^2(\Omega)$-ում:

Թ ե ո ր ե մ 4.16. *Դիցուք $a \in \Omega$ և $r > 0$ թիվը այնպիսին է, որ $U(a, r) \Subset D$: Այդ դեպքում*

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\|$$

կամայական $f \in B^2(\Omega)$ ֆունկցիայի համար:

Ա պ ա ց ու յ ց: $f(z)$ ֆունկցիան $U(a, r)$-ում վերլուծենք շարքի՝

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z^k - a^k) :$$

Դիցուք $z_m - a_m = \rho_m e^{it_m}$: Ունենք՝

$$\|f\|_U^2 = \int\limits_U \sum_{k,i} c_k \bar{c}_i (z^k - a^k)(\bar{z}^i - \bar{a}^i) \, dV =$$

$$= \sum_{k,i} c_k \bar{c}_i \prod_{m=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{i(k_m - i_m)t_m}\, dt_m \int_0^{r} \rho_m^{k_m+i_m+1}\, d\rho_m =$$

$$= \sum_{k} |c_k|^2 (2\pi)^2 \prod_{m=1}^{n} \frac{r^{2(k_m+1)}}{2(k_m+1)},$$

և քանի որ շարքի անդամները ոչ բացասական են, ապա

$$\|f\|_U^2 \geqslant |c_0| \pi^n r^{2n} = |f(a)|^2 \pi^n r^{2n} :$$

Հետևաբար՝

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\|_U \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|f\| : \quad \square$$

Թ ե ո ր ե մ 4.17. $B^2(\Omega)$-ն հանդիսանում է $L^2(\Omega, dV)$ պարածության փակ ենթապարածություն:

Ա պ ա ց ու յ ց: Դիցուք $\|f_j - f\| \to 0$ երբ $j \to \infty$, որտեղ f_j հաջորդականությունը պատկանում է $B^2(\Omega)$-ին, իսկ $f \in L^2(\Omega, dV)$: Պետք է ապացուցել, որ f-ը համարժեք է Ω-ում որևէ հոլոմորֆ ֆունկցիային:

Դիցուք K-ն Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է: Թեորեմ 4.16-ից հետևում է, որ գոյություն ունի C հաստատուն, այնպիսին, որ $\max\limits_{z \in K} |f(z)| \leqslant C\|f\|$ բոլոր $f \in B^2(\Omega)$ ֆունկցիաների համար: Հետևաբար

$$|f_j(z) - f_k(z)| \leqslant C\|f_j - f_k\|$$

բոլոր $z \in K$ և $j, k = 1, 2 \ldots$: Քանի որ f_j-ն ֆունդամենտալ է $B^2(\Omega)$-ում, ապա այստեղից բխում է, որ Ω-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա f_j հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ-որ h ֆունկցիային, որը հոլոմորֆ է Ω-ում: Բացի դրանից, f_j հաջորդականությունը զուգամիտում է f-ին $L^2(\Omega, dV)$ պարածության մեջ: Ըստ Ռիսի թեորեմի, գոյություն ունի f_j-ի ենթահաջորդականություն, որը կետորեն զուգամիտում է f-ին համարյա ամենուրեք Ω-ում:

Այսպիսով, $f = h$ համարյա ամենուրեք Ω-ում, ուրեմն $f \in B^2(\Omega)$-ին: $\square$

Թեորեմ 4.17-ից բխում է, որ $B^2(\Omega)$-ն հիլբերտյան տարածություն է

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f\bar{g}\,dV$$

ներքին արտադրյալով: Քանի որ $f \mapsto f(z)$ անընդհատ արտապատկերումը գծային ֆունկցիոնալ է $B^2(\Omega)$-ում ամեն մի $z \in \Omega$ կետի համար, ապա հիլբերտյան տարածությունների ընդհանուր տեսությունից հետևում է, որ գոյություն ունի միակ $K_z(\zeta) \in B^2(\Omega)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$f(z) = \int\limits_{\Omega} f(\zeta)\overline{K_z(\zeta)}\,dV(\zeta)\ :$$

Իսկ այժմ $B^2(\Omega)$-ում վերցնենք որևէ u_k օրթոնորմալ բազիս: Ինչպես հայտնի է (նորից հիլբերտյան տարածությունների ընդհանուր տեսությունից),

$$K_z = \sum_{k=0}^{\infty}\langle K_z, u_k\rangle u_k = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u_k(z)}u_k,$$

և շարքը զուգամիտում է $B^2(\Omega)$-ի նորմով ամեն մի $z \in \Omega$ կետի համար: Այստեղից, հաշվի առնելով, որ «արժեքը կետում» անընդհատ ֆունկցիոնալ է, ստանում ենք, որ

$$K_z(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u_k(z)}u_k(\zeta)$$

շարքը զուգամիտում է բոլոր $z, \zeta \in B^2(\Omega)$ համար:

Սահմանում 4.3. $K(z,\zeta) = \overline{K_z(\zeta)}$ ֆունկցիան կոչվում է Ω տիրույթի *կեռնֆունկցիա*:

Կեռնֆունկցիան ունի հետևյալ հատկությունները.

1. այն հոլոմորֆ է ըստ առաջին կոորդինատի և հակահոլոմորֆ է ըստ երկրորդի,

2. կեռնֆունկցիան հակահամաչափ է, այսինքն՝ $K(\zeta, z) = \overline{K(z,\zeta)}$:

Այսպիսով, մենք ապացուցեցինք

$$f(z) = \int\limits_{\Omega} f(\zeta) K(z,\zeta)\, dV(\zeta) \tag{4.50}$$

ինտեգրալային բանաձևը $B^2(\Omega)$ տարածությանը պատկանող ֆունկ–ցիաների համար, որտեղ

$$K(z,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)\overline{u_k(\zeta)}\ : \tag{4.51}$$

Իսկ այժմ հաշվենք միավոր գնդի կեռնֆունկցիան: Որպես օրթոնորմալ բազիս վերցնենք

$$u_k(z) = \lambda_k z^k, \quad k = (k_1, \ldots, k_n), \;\; k_i \geqslant 0,$$

միանդամների համակարգ, որտեղ նորմավորող գործակիցներն ընտրը–ված են այնպես, որ $\langle u_k, u_k \rangle = 1$: Ընդ որում, u_k համակարգի լրիվու–թյունը հետևում է այն բանից, որ ըստ միանդամների վերլուծությունը Թեյլորի շարք է, որով, ինչպես հայտնի է, ներկայացվում է B-ում ամեն մի հոլոմորֆ ֆունկցիա: Այնուհետև, հաշվի առնելով (4.10) առնչությու–նը, ստանում ենք՝

$$\langle u_k, u_k \rangle = \lambda_k^2 \int\limits_B z^k \bar{z}^k\, dV = \lambda_k^2 \frac{k!\,\pi^n}{(|k|+n)!} = 1,$$

որտեղից

$$\lambda_k^2 = \frac{(|k|+n)!}{k!\,\pi^n}\ : \tag{4.52}$$

Ըստ (4.51) բանաձևի (4.52)-ից ստանում ենք

$$K_B(z,\zeta) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \lambda_k^2 z^k \bar{\zeta}^k = \frac{1}{\pi^n} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(|k|+n)!}{k!} z^k \bar{\zeta}^k =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\cdots(m+n) \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} z^k \bar{\zeta}^k :$$

Այնուհետև, ներքին գումարը հավասար է

$$\sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} z^k \bar{\zeta}^k = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!} \left(z_1\bar{\zeta}_1\right)^{k_1} \cdots \left(z_n\bar{\zeta}_n\right)^{k_n} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j \bar{\zeta}_j\right)^m = \langle z, \zeta \rangle^m :$$

Ելնելով հետևյալ պարզական առնչությունից՝

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\cdots(m+n) q^m = \frac{d}{dq^n}\left(\frac{1}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(1-q)^{n+1}}, \quad \text{երբ } |q| < 1,$$

և հաշվի առնելով, որ $q = \langle z, \zeta \rangle$ իր մոդուլով փոքր է մեկից, ստանում ենք

$$K_B(z,\zeta) = \frac{n!}{\pi^n \big(1 - \langle z, \zeta \rangle\big)^{n+1}} :$$

Այսպիսով, (4.50) բանաձևն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$f(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int\limits_B \frac{f(\zeta) dV(\zeta)}{\big(1 - \langle z, \zeta \rangle\big)^{n+1}} :$$

Խնդիրներ

Խ ն դ ի ր 4.1. Գտնել $\mathbb{C}^n$-ում միավոր գնդի ծավալը:

Խ ն դ ի ր 4.2. Գտնել $\mathbb{C}^n$-ում միավոր սֆերայի ծավալը:

Խ ն դ ի ր 4.3. (Բևեռային կոորդինատներով ինտեգրում $\mathbb{R}^n$-ում): Ապացուցել, որ $\mathbb{R}^n$-ում ամեն մի բորելյան f ֆունկցիայի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,dV = \int\limits_0^\infty r^{n-1}dr \int\limits_S f(r\zeta)d\sigma(\zeta)\,:$$

Խ ն դ ի ր 4.4. Ապացուցել, որ Մարտինելի–Բոխների կորիզը կարելի է գրել նաև

$$\Omega_{MB}\,(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}_k}\,d\bar{\zeta}[k]\wedge d\zeta$$

տեսքով, որտեղ $g(\zeta,z) = (1-n)^{-1}\,|\zeta - z|^{2-2n}$ ֆունկցիան Լապլասի $\Delta g = 0$ հավասարման ֆունդամենտալ լուծումն է $\zeta = z$ եզակիությամբ:

Խ ն դ ի ր 4.5. Ցույց տալ, որ (4.17) բանաձևը կարելի է լրացնել հետևյալ ձևով.

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) = 0, \quad \text{երբ } z \notin \overline{D}\,:$$

Խ ն դ ի ր 4.6. Ցույց տալ, որ եթե եզրային ֆունկցիան անընդհատ է, ապա Մարտինելի–Բոխների ինտեգրալը հարմոնիկ ֆունկցիա է ∂D-ից դուրս:

Խ ն դ ի ր 4.7. Գտնել միավոր պոլիդիսկի կեռնֆունկցիան:

Խ ն դ ի ր 4.8. Ապացուցել Հեֆերի թեորեմ 4.7-ը հետևյալ դեպքերի համար.

1. երբ χ-ն բազմանդամ է,

2. երբ D-ն Ռեյնհարտի փիրույթ է:

Խ ն դ ի ր 4.9. Բերել $f \in C_0^1(\mathbb{C})$ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար գոյություն չունի $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ հավասարման կոմպակտ կրիչ ունեցող լուծում:

Գրականություն

1. **Б. В. Шабат.** *Введение в Комплексный Анализ*, Наука, М, 1985.
2. **В. С. Владимиров.** *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М., Физматгиз, 1964.
3. **Б. А. Фукс.** Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.
4. **G. M. Henkin, J. Leiterer.** *Theory of functions on complex manifolds*, Akademie–Verlag, Berlin, 1984.
5. **Л. Хермандер.** *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
6. **Р. Ганнинг, Х. Росси.** *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
7. **У. Рудин.** *Теория функций в поликруге*, Мир, М., 1974.
8. **У. Рудин.** *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$, Мир, М., 1984.
9. **Л. А. Айзенберг, Б. С. Зиновьев.** *Элементарные свойства и интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных*, Красноярск, 1977.
10. **А. Г. Витушкин,** *Замечательные факты комплексного анализа.* В сб.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. М. **8** (1985), 5–23.

Առարկայական ցանկ

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ ԱԼԲԵՐՏ ԻՍՐԱՅԵԼԻ

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Բուհական դասագիրք

Հրատ. խմբագիր՝ Մ. Գ. Ցավրյան
Տեխ. խմբագիր՝ Վ. Ջ. Բդոյան

Ստորագրված է տպագրության 30. 07. 07 թ:
Չափսը՝ 60 × 84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ:
Հրատ. 10,7 մամուլ, տպագր. 12,2 մամուլ = 11,4 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 200: Պատվեր՝

Երևանի համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1

Երևանի պետական համալսարանի տպագրական
արտադրամաս, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1