ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԱՆԱԼԻԶԻՑ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 51(07)
ԳՄԴ 22.1 զ7
Պ 505

Հրապարակության է երաշխավորել ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Խմբագիր՝ ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Ռ. Ս. ԴԱՎԹՅԱՆ
ֆիզմաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ Ա. Ի.

Պ 505 Խնդիրներ բազմաչափ կոմպլեքս անալիզից: – Եր.: ԵՊՀ-ի հրատ., 2008, 60 էջ:

Խնդրագրքում բերված են մի քանի կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսության խնդիրներ՝ մեծամասամբ իրենց լուծումներով, պատասխաններով կամ ցուցումներով:

Նախատեսված է մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի ուսանողների ու որակավորման բարձրացման ֆակուլտետի ունկնդիրների համար:

ԳՄԴ 22.1 զ7

ISBN 978-5-8084-0926-2

Հիմնական գաղափարներ և փաստեր

1. Կոմպլեքս տարածություն: $\mathbb{C}^n$-ով նշանակվում է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության n-պատիկ դեկարտյան արտադրյալը, այսինքն, $\mathbb{C}^n$-ի կետերը n կոմպլեքս թվերի կարգավորված n-յակներ են՝ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$: $\mathbb{C}^n$-ը կարելի է նույնացնել $\mathbb{R}^{2n}$-ի հետ, որը բաղկացած է $x = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ կետերից և որի վրա ներմուծված է կոմպլեքս կառուցվածք, այսինքն տրված է $z_k = x_k + iy_k,\ \ k = 1, \ldots, n$:

Կամայական $2m$-չափանի հարթություն $\mathbb{C}^n$-ում կարելի է տալ

$$S = \left\{ z\colon\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k + a'_{ik} \bar{z}_k = b_i,\ i = 1, \ldots, n-m \right\} \tag{1}$$

հավասարումների միջոցով, որտեղ a_{ik}, a'_{ik} և b_i-երը կոմպլեքս թվեր են: S հարթությունը կոչվում է *կոմպլեքս հարթություն*, եթե (1)-ի մեջ բացակայում են $\bar{z}_k$ փոփոխականները, այսինքն՝ $a'_{ik} = 0$: m թիվը համարվում է S-ի *կոմպլեքս չափողականությունը*: Կոմպլեքս միաչափ հարթությունը անվանում են նաև *կոմպլեքս ուղիղ*, իսկ $(n-1)$-չափանի հարթությունը՝ *կոմպլեքս հիպերհարթություն*:

2. Պարզագույն տիրույթներ: Շրջանների դեկարտյան արտադրյալը, այսինքն

$$U(a, r) = \{ z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_j - a_j| < r_j,\ \ j = 1, \ldots, n \}$$

տիրույթը կոչվում է պոլիդիսկ ($n = 2$ դեպքում՝ բիդիսկ): Պոլիդիսկի եզրի

$$\Gamma = \{ z\colon\ |z_j - a_j| = r_j,\ \ j = 1, \ldots, n \}$$

ենթաբազմությունը կոչվում է *հենք* (*остов*):

D տիրույթը կոչվում է a կենտրոնով n*-շրջանաձև տիրույթ*, (կամ *Ռեյնհարտի տիրույթ*), եթե

$$z^0 \in D \Rightarrow \left\{ z\colon\ |z_k - a_k| = |z_k^0 - a_k|,\ \ k = 1, \ldots, n \right\} \subset D :$$

D-ն կոչվում է *լրիվ Ռեյնհարտի տիրույթ*, եթե

$$z^0 \in D \Rightarrow \left\{ z\colon\ |z_k - a_k| \leqslant |z_k^0 - a_k|,\ \ k = 1, \ldots, n \right\} \subset D :$$

Եթե $a = 0$, ապա այդպիսի տիրույթները լիովին որոշվում են իրենց պատկանող կետերի մոդուլներով: Այդ պատճառով նրանց ուսումնասիրությունը կարելի է կատարել $\mathbb{R}^n$ տարածության $\mathbb{R}^n_+$ դրական օկտանտում, կատարելով $r(z) = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$ արտապատկերում: D տիրույթի պատկերն այդ արտապատկերման ժամանակ կոչվում է *Ռեյնհարտի դիագրամ* և նշանակվում է $|D|$-ով: Քանի որ $|D|$-ի չափողականությունը երկու անգամ փոքր է D-ի չափողականությունից, ապա $n = 2$ և $n = 3$ դեպքերում Ռեյնհարտի դիագրամը տալիս է ակներև պատկերացում տիրույթի մասին:

Ռեյնհարտի տիրույթների պարզագույն օրինակներ կարող են ծառայել գունդը և պոլիդիսկը:

Տիրույթը կոչվում է *շրջանաձև a կենտրոնով,* եթե ամեն մի z^0 կետի հետ մեկտեղ այն պարունակում է նաև

$$z = a+(z^0-a)e^{i\theta} = \left(a_1 + (z_1^0 - a_1)e^{i\theta}, \ldots, a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta}\right), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

տեսքի բոլոր կետերը:

Նշանակենք $\widetilde{z} = (z_1, \cdots, z_{n-1})$, այնպես որ $z = (\widetilde{z}, z_n)$: $G \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը կոչվում է *Հարտոգսի տիրույթ $z_n = a_n$ համաչափության հարթությամբ*, եթե $z^* \in G$ պայմանից հետևում է, որ $\{(\widetilde{z}^*, z_n): \ |z_n - a_n| = |z_n^* - a_n|\}$ շրջանագիծը ևս պարունակվում է G-ում: Հարտոգսի տիրույթը կոչվում է *լրիվ*, եթե այն պարունակում է ամբողջ $\{(\widetilde{z}^*, z_n): \ |z_n - a_n| \leqslant |z_n^* - a_n|\}$ շրջանը:

$D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթը կոչվում է *գծորեն ուռուցիկ*, եթե ամեն մի եզրային կետի համար գոյություն ունի այդ կետով անցնող և տիրույթի հետ չհատվող կոմպլեքս հիպերհարթություն:

3. Հոլոմորֆ ֆունկցիաներ: $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված f ֆունկցիան կոչվում է *հոլոմորֆ* կամ *անալիտիկ*, եթե

(ա) f-ը անընդհատ է Ω-ում,

(բ) f-ը հոլոմորֆ է ըստ ամեն մի փոփոխականի:

Ավելի ճշգրիտ (բ) պայմանը նշանակում է հետևյալը՝ եթե $z \in \Omega$ և $1 \leqslant k \leqslant n$, ապա

$$f_k(\zeta) = f(z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k + \zeta, z_{k+1}, \ldots, z_n)$$

մեկ փոփոխականի ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ ζ-ի $\mathbb{C}$ հարթության վրա զրո կետի որևէ շրջակայքում: Պարզվում է, որ (բ) պայմանից հետևում է (ա)-ն:

Թ ե ո ր ե մ (Հարտոգս)*: Եթե f ֆունկցիան ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի հոլոմորֆ է $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթի բոլոր կետերում, ապա այն հոլոմորֆ է D-ում:*

D տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\mathcal{O}(D)$:

4. Մաքսիմումի սկզբունքը: Հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար տեղի ունի մոդուլի մաքսիմումի սկզբունքը՝ *եթե f-ը հոլոմորֆ է D-ում և $|f|$-ը ունի լոկալ մաքսիմում ինչ-որ $a \in D$ կետում, ապա $f(z) \equiv \mathrm{const}$ ամբողջ D-ում:* Մասնավորապես, եթե D-ն սահմանափակ է և f-ը անընդհատ է $\overline{D}$-ում, ապա $|f|$-ը իր մաքսիմումն ընդունում է ∂D եզրի վրա: Սակայն $n > 1$ դեպքում $\mathbb{C}^n$ տարածությունում հնարավոր են D տիրույթներ, որոնց համար այդ մաքսիմումը ընդունվում է ոչ թե ամբողջ եզրի, այլ նրա մի մասի վրա:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: Սահմանափակ D տիրույթի համար $B(D) \subset \partial D$ փակ բազմությունը կոչվում է *Բերգմանի եզր*, եթե.

1) ամեն մի $f \in \mathcal{O}(\overline{D})$ ֆունկցիայի համար $\max\limits_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{z\in B(D)} |f(z)|$,

2) ցանկացած այլ բազմություն, որը բավարարում է 1) պայմանին, պարունակում է $B(D)$-ն:

$S(D)$ բազմությունը կոչվում է *Շիլովի եզր*, եթե նշված պայմանները բավարարվում են բոլոր $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ ֆունկցիաների համար:

Քանի որ $\mathcal{O}(\overline{D}) \subset \left\{\mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})\right\}$, ապա պարզ է, որ $B(D) \subset S(D)$:

Երբ D-ն գունդ է, ապա Բերգմանի և Շիլովի եզրերը համընկնում են նրա տոպոլոգիական եզրի (այսինքն՝ սֆերայի) հետ: Երբ D-ն պոլիդիսկ է, ապա Բերգմանի և Շիլովի եզրերը համընկնում են արդեն ոչ թե նրա տոպոլոգիական եզրի, այլ հենքի հետ (տես խնդիր 42): Հնարավոր են դեպքեր, երբ Բերգմանի և Շիլովի եզրերն իրարից տարբերվում են (խնդիր 44):

5. Հոլոմորֆ ֆունկցիայի զրոները: Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար հայտնի է հետևյալ պնդումը՝

Թ ե ո ր ե մ: Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է a կետում, $f(a) = 0$ և $f \not\equiv 0$, ապա a-ի ինչ-որ շրջակայքում

$$f(z) = (z-a)^p \cdot h(z),$$

որտեղ $p \geqslant 1$ ամբողջ թիվ է, իսկ $h(z)$-ը հոլոմորֆ է և զրոներ չունի այդ շրջակայքում:

Այս թեորեմը մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների զրոների մասին պալիս է հետևյալ ինֆորմացիան՝

1. զրոները մեկուսացված են,
2. f-ի զրոները համընկնում են $(z-a)^p$ ֆունկցիայի զրոների հետ, ընդ որում, p-ն կոչվում է *զրոյի կարգ*:

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների զրոները հետազոտելիս կարևոր դեր ունի հետևյալ թեորեմը, որն էապես ընդհանրացնում է նախորդ թեորեմի պնդումը:

Թ ե ո ր ե մ (Վայերշտրասի նախապատրաստական թեորեմը)*: Դիցուք f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $a \in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում, $f(a)=0$, բայց $f(\widetilde{a}, z_n) \not\equiv 0$: Այդ դեպքում a-ի ինչ-որ V շրջակայքում f-ը ներկայաց– վում է*

$$f(z) = W(z) \cdot h(z)$$

տեսքով, որտեղ h-ը հոլոմորֆ է այդ շրջակայքում և զրո չի դառնում, իսկ $W(z)$-ը, այսպես կոչված, Վայերշտրասի պսևդոբազմանդամն է՝

$$W(z) = (z_n - a_n)^p + \sum_{j=0}^{p-1} c_j(\widetilde{z})(z_n - a_n)^j :$$

Այստեղ $p \geqslant 1$ ամբողջ թիվ է, $c_j(\widetilde{z})$ գործակիցները հոլոմորֆ են $\widetilde{V}$-ում, ընդ որում $\widetilde{V}$ նշանակում է V-ի պրոյեկցիան $\mathbb{C}^{n-1}_{\widetilde{z}}$ ենթատարածության վրա, $c_j(\widetilde{a}) = 0,\ j = 0, \ldots, p-1$:

Դիցուք A-ն X-ի վրա որոշված ինչ-որ ֆունկցիաների դաս է: X-ի K ենթաբազմությունը կոչվում է A-ի համար միակության բազմություն, եթե $f|_K = 0,\ (f \in A)$ պայմանից հետևում է $f \equiv 0$:

6. Պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիաներ: Եթե u-ն ողորկ ֆունկցիա է, ապա նրա

$$du = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial z_j}\, dz_j + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \right)$$

դիֆերենցիալը բնական ձևով տրոհվում է երկու մասերի՝

$$\partial u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_j}\, dz_j, \qquad \bar{\partial} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j :$$

Դա առաջացնում է d օպերատորի $d = \partial + \bar{\partial}$ վերլուծություն:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: $C^2(D)$ դասին պատկանող u ֆունկցիան կոչվում է *պլյուրիհարմոնիկ*, եթե այն բավարարում է $\partial\bar{\partial}u = 0$ պայմանին, այսինքն՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_k \, \partial \bar{z}_j} = 0, \quad k, j = 1, \ldots, n : \tag{2}$$

Ֆունկցիան կոչվում է n*-հարմոնիկ*, եթե այն բավարարում է (2) պայմաններին $j = k$ դեպքում:

Հոլոմորֆ f ֆունկցիայի իրական և կեղծ մասերը պլյուրիհարմոնիկ են:

Թ ե ո ր ե մ: Որպեսզի իրական u ֆունկցիան լինի պլյուրիհարմոնիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լոկալ լինի հոլոմորֆ ֆունկցիայի իրական մաս:

7. Աստիճանային շարքեր: Բազմապատիկ աստիճանային շարք կոչվում է

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \left(z - z^0\right)^k \tag{3}$$

տեսքի շարքը: Այստեղ $z, z^0 \in \mathbb{C}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $z^k = z_1^{k_1} \, z_2^{k_2} \, \cdots \, z_n^{k_n}$, $k! = k_1! \, k_2! \cdots k_n!$, $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$:

Դիցուք G-ն այն բոլոր կետերի բազմությունն է, որտեղ (3) շարքը բացարձակ զուգամիտում է: Նրա ներքին կետերի G° բազմությունը կոչվում է շարքի *զուգամիտության տիրույթ*:

Թ ե ո ր ե մ (Աբել)*: Եթե G°-ն (3) շարքի զուգամիտության տիրույթն է և $\zeta \in G^0$, ապա G°-ն պարունակում է նաև*

$$\left\{z : \ |z_k - z_k^0| \leqslant |\zeta_k - z_k^0|, \ k = 1, \ldots, n\right\}$$

փակ պոլիդիսկը:

Աբելի թեորեմից հետևում է, որ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը լրիվ Ռեյնհարտի տիրույթ է: Պարզվում է, որ այդ տիրույթները ունեն ևս մի պարզ երկրաչափական հատկություն՝ նրանք ինչ-որ իմաստով ուռուցիկ են:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: Դիցուք D-ն Ռեյնհարտի տիրույթ է: Նշանակենք $\ln|D|$-ով $|D|$ բազմության պատկերը $|z| \mapsto \ln|z| = (\ln|z_1|, \ldots, \ln|z_n|)$ արտապատկերման ժամանակ: Ռեյնհարտի D տիրույթը կոչվում է *լոգարիթմորեն ուռուցիկ*, եթե ուռուցիկ է $\ln|D|$ տիրույթը:

Թ ե ո ր ե մ: Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը լրիվ, լոգարիթմորեն ուռուցիկ Ռեյնհարտի տիրույթ է:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: $r_1, \ldots, r_n$ թվերը, որտեղ $r_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n$, կոչվում են *զուգամիտության համալուծ շառավիղներ* (3) շարքի համար, եթե այդ շարքը զուգամիտում է $U(z^0, r)$, $r = (r_1, \ldots, r_n)$ պոլիդիսկում և չի զուգամիտում ոչ մի ուրիշ պոլիդիսկում, որը պարունակում է $\overline{U(z^0, r)}$-ը:

Ի տարբերություն միաչափ դեպքի, որտեղ զուգամիտության շառավիղը որոշվում է միարժեք, բազմաչափ դեպքում համալուծ շառավիղները որոշվում են ոչ միարժեք:

Համալուծ շառավիղների համար գոյություն ունի Կոշի-Հադամարի բանաձևի նմանակը:

Թ ե ո ր ե մ: (3) *շարքի զուգամիտության համալուծ շառավիղները բավարարում են* $\overline{\lim\limits_{|k|\to\infty}} \sqrt[|k|]{|a_k| r^k} = 1$ *առնչությանը:*

Բացի աստիճանային շարքերից, կարևոր դեր են կատարում նաև հոլոմորֆ ֆունկցիաների վերլուծություններն այլ շարքերի: Հետևյալ շարքը

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{4}$$

ինչպես և մեկ փոփոխականի դեպքում, կոչվում է Լորանի շարք:

Թ ե ո ր ե մ: Եթե f*-ը հոլոմորֆ է Ռեյնհարտի* D *տիրույթում, ապա այն* D*-ի ներսում ներկայացվում է բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ Լորանի* (4) *շարքով:*

Հարտոգսի շարք կոչվում է

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(\widetilde{z})(z_n - a_n)^m \tag{5}$$

տեսքի շարքը, որտեղ g_m գործակիցները հոլոմորֆ ֆունկցիաներ են:

Թ ե ո ր ե մ: Եթե f *ֆունկցիան հոլոմորֆ է Հարտոգսի լրիվ* D *տիրույթում, որի համար* $\{z_n = a_n\}$ *համաչափության հարթություն է, ապա այն ներկայացվում է* D*-ի ներսում բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ* (5) *Հարտոգսի շարքով, որտեղ* g_m *ֆունկցիաները հոլոմորֆ են* D *տիրույթի պրոյեկցիայում* $\mathbb{C}^{n-1}_{\widetilde{z}}$ *ենթատարածության վրա:*

Եթե $p_k(z)$-երը k-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամներ են, ապա

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(z) \tag{6}$$

տեսքի շարքը կոչվում է *անկյունագծային շարք*:

Թ ե ո ր ե մ: Եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է D շրջանաձև լրիվ տիրույթում, ապա այն վերլուծվում է D-ի ներսում բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ (6) *անկյունագծային շարքի:*

8. Բիհոլոմորֆ արտապատկերումներ: Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում որոշված է $f = (f_1, \dots, f_m)$ վեկտոր-ֆունկցիա: f-ը կոչվում է *հոլոմորֆ արտապատկերում*, եթե նրա բոլոր f_k կոմպոնենտները հոլոմորֆ են D-ում: Մասնավորապես, երբ $n = 1$, f-ը կոչվում է *հոլոմորֆ կոր*:

Արտապատկերումը կոչվում է *բիհոլոմորֆ*, եթե այն բավարարում է հետևյալ լրացուցիչ պայմաններին՝

1. f-ը փոխմիարժեք է և հակադարձը ևս հոլոմորֆ է,
2. D-ի բոլոր կետերը f-ի համար ոչ կրիտիկական են, այսինքն.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(z_1, \dots, z_n)} \neq 0 \quad \text{բոլոր } \ z \in D \ \text{ կետերում:}$$

Բիհոլոմորֆ արտապատկերումը կոչվում է D տիրույթի *ավտոմորֆիզմ*, եթե այն D-ն արտապատկերում է ինքն իր վրա: Կոմպոզիցիայի գործողության նկատմամբ ավտոմորֆիզմները կազմում են խումբ, որը նշանակվում է $\operatorname{Aut} D$:

Միաչափ դեպքում բիհոլոմորֆությունը համարժեք է կոնֆորմությանը: Համաձայն Ռիմանի թեորեմի, հարթության ցանկացած միակապ տիրույթ, որի եզրը բաղկացած է ավելի քան մեկ կետից, կոնֆորմ ձևով արտապատկերվում է միավոր շրջանի վրա: Դեռ Պուանկարեն 1907 թվականին նկատել էր, որ Ռիմանի թեորեմը $n > 1$ դեպքում ճշմարիտ չէ:

Թ ե ո ր ե մ (Պուանկարե)*: Եթե $n > 1$, ապա գոյություն չունի B^n գնդի բիհոլոմորֆ արտապատկերում U^n պոլիդիսկի վրա:*

Այդ թեորեմի ապացույցը հիմնված է այն բանի վրա, որ $\operatorname{Aut} B^n$ և $\operatorname{Aut} U^n$ խմբերը կախված են տարբեր քանակով պարամետրերից:

9. F-ուռուցիկություն: Դիցուք D-ն փիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, F-ը D-ում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ընտանիք է և $K \subset D$: Հետևյալ բազմությունը

$$\widehat{K} = \left\{ z \in D\colon\ |f(z)| \leqslant \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|,\ \forall f \in F \right\}$$

կոչվում է K-ի F-*ուռուցիկ թաղանթ*:

Սահմանում: D փիրույթը կոչվում է F-*ուռուցիկ* (կամ ուռուցիկ F ընտանիքի նկատմամբ), եթե $K \Subset D$ պայմանից հետևում է, որ $\widehat{K} \Subset D$:

Եթե $F = \mathcal{O}(D)$, ապա F-ուռուցիկ փիրույթը կոչվում է *հոլոմորֆ ուռուցիկ*: Իսկ եթե F-ը համընկնում է գծային ֆունկցիաների, կամ բազմանդամների, կամ էլ ռացիոնալ ֆունկցիաների դասի հետ, ապա F-ուռուցիկ փիրույթը կանվանենք համապատասխանաբար՝ *գծային, բազմանդամային, կամ ռացիոնալ* ուռուցիկ փիրույթ:

10. Հոլոմորֆության փիրույթներ: Ինչպես հայտնի է մեկ կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիաների տեսությունից, ամեն մի $D \subset \mathbb{C}^1$ փիրույթի համար գոյություն ունի ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է D-ում և անալիտիկորեն չի շարունակվում D-ից դուրս, այսինքն D-ն նրա համար բնական որոշման փիրույթ է: Բազմաչափ դեպքում դա արդեն այդպես չէ:

Սահմանում: $D \subset \mathbb{C}^n$ փիրույթը կոչվում է *հոլոմորֆության փիրույթ f ֆունկցիայի համար*, եթե f-ը հոլոմորֆ է D-ում և D-ից դուրս անալիտիկորեն չի շարունակվում: D-ն կոչվում է *հոլոմորֆության փիրույթ*, եթե այն հոլոմորֆության փիրույթ է որևէ ֆունկցիայի համար:

Կասենք, որ ζ եզրային կետում կա արգելք, եթե յուրաքանչյուր $M \subset D$ կոմպակտ բազմության և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$ այնպիսին, որ $|f(z)| < 1$ երբ $z \in M$, բայց $|f(z')| > 1$ ինչ-որ $z' \in B(\zeta, \varepsilon)$ կետում:

Թեորեմ (արգելքի վերաբերյալ)*: Եթե D փիրույթի բոլոր եզրային կետերում կա արգելք, ապա D-ն հոլոմորֆության փիրույթ է:*

11. Պսևդոուռուցիկ փիրույթներ: u ֆունկցիան կոչվում է *պլյուրիսուբհարմոնիկ* $D \subset \mathbb{C}^n$ փիրույթում, եթե

1. u-ն կիսաանընդհատ է վերևից D-ում,
2. կամայական $z^0 \in D$ կետի համար նրա հետքը այդ կետով անցնող յուրաքանչյուր կոմպլեքս ուղղի վրա սուբհարմոնիկ է:

Ավելի մանրամասն երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ կամայական $a \in \mathbb{C}^n$ վեկտորի համար $u(z^0 + \lambda a)$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է ըստ λ-ի

$$D_{z^0,a} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}: \ z^0 + \lambda a \in D\right\}$$

բաց բազմության ամեն մի կապակցված բաղադրիչի վրա:

Որպես պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների օրինակներ կարող են ծառայել $\ln|f|$, $\ln^+|f|$ և $|f|^p$ $(p > 0)$ ֆունկցիաները, որտեղ f-ը հոլոմորֆ է:

Պսևդոուռուցիկ տիրույթները կապված են պլյուրիսուբհարմոնիկ ֆունկցիաների հետ այնպես, ինչպես ուռուցիկ տիրույթները՝ ուռուցիկ ֆունկցիաների հետ: Պսևդոուռուցիկությունը հանդիսանում է իրական $\mathbb{R}^n$ տարածության մեջ սահմանված ուռուցիկության գաղափարի ընդհանրացում կոմպլեքս $\mathbb{C}^n$ տարածության դեպքի համար:

Ս ա հ մ ա ն ու մ: D տիրույթը կոչվում է պսևդոուռուցիկ, եթե D-ում գոյություն ունի պլյուրիսուբհարմոնիկ V ֆունկցիա, որը ձգտում է $+\infty$ ամենուրեք ∂D-ի վրա:

Թ ե ո ր ե մ: Որպեսզի D-ն լինի հոլոմորֆության տիրույթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի պսևդոուռուցիկ:

12. Ինտեգրալային ներկայացումներ: Հետևյալ թեորեմը Կոշիի ինտեգրալային թեորեմի նմանակն է $n > 1$ դեպքի համար:

Թ ե ո ր ե մ (Կոշի–Պուանկարե)*: Դիցուք V-ն $(n+1)$-չափանի սահմանափակ մակերևույթ է $\mathbb{C}^n$-ում, կտոր առ կտոր ողորկ ∂V եզրով, և f-ը հոլոմորֆ է V-ի շրջակայքում: Այդ դեպքում*

$$\int_{\partial V} f(z)\, dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = 0\, :$$

Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ սահմանափակ տիրույթ է, կտոր առ կտոր ողորկ եզրով, f-ը հոլոմորֆ է D-ում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում: Այդ դեպքում

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} f(\zeta)\, \Omega_{MB}(z,\zeta), \quad z \in D \tag{7}$$

ինտեգրալային ներկայացում, որտեղ

$$\Omega_{MB}(z,\zeta) = \frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\bar{\zeta}_j - \bar{z}_j) d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots [j] \cdots \wedge d\bar{\zeta}_n \wedge d\zeta$$

դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է Մարտինելի–Բոխների կորիզ: Այստեղ $[j]$-ն նշանակում է, որ $d\bar{\zeta}_j$ դիֆերենցիալը բաց է թողնված:

Երբ $n = 1$, կորիզը վերածվում է Կոշիի կորիզի՝

$$\Omega_{MB}(z,\zeta) = \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

և, ուրեմն, (7)-ը վերածվում է Կոշիի բանաձևին: Կոշիի բանաձևն ունի երկու կարևոր հատկություն՝

1. այն ունիվերսալ է այն իմաստով, որ ճշմարիտ է բավականաչափ ողորկ եզր ունեցող բոլոր տիրույթների համար, ընդ որում Կոշիի կորիզի տեսքը կախված չէ տիրույթից,
2. այդ կորիզը հոլոմորֆ է ըստ z-ի:

Մարտինելի–Բոխների բանաձևը նշված հատկություններից ունի միայն առաջինը: Շատ փոփոխականի հոլոմորֆ ֆունկցիաների համար չի հաջողվել ստանալ այդ երկու հատկություններով օժտված ինտեգրալային բանաձև: Նրանք կամ ունիվերսալ են, բայց ոչ հոլոմորֆ կորիզով, կամ էլ ունեն հոլոմորֆ կորիզ, բայց ունիվերսալ չեն: Որպես երկրորդ տեսակի բանաձևի օրինակ բերենք Կոշիի ինտեգրալային բանաձևը գնդի համար՝

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)\, d\sigma(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^n} :$$

13. Կեռնֆունկցիա: Նշանակենք $B^2(\Omega)$-ով $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում հոլոմորֆ այն f ֆունկցիաների բազմությունը, որոնց համար

$$\|f\| = \left(\int_\Omega |f|^2 \, dV \right)^{1/2} < +\infty :$$

$B^2(\Omega)$-ն հիլբերտյան տարածություն է $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_\Omega f\bar{g}\, dV$ ներքին արտադրյալով:

Ֆիքսած $z \in \Omega$ դեպքում $f \mapsto f(z)$ արտապատկերումը $B^2(\Omega)$-ում գծային անընդհատ ֆունկցիոնալ է: Հիլբերտյան տարածությունների ընդհանուր տեսությունից հետևում է, որ գոյություն ունի միակ $K_z \in B^2(\Omega)$ ֆունկցիա այնպիսին, որ

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle = \int_\Omega f(\zeta) \overline{K_z(\zeta)}\, dV(\zeta) :$$

Սահմանում: $K(z,\zeta) = \overline{K_z(\zeta)}$ ֆունկցիան կոչվում է Ω տիրույթի *կեռնֆունկցիա*:

Եթե $\{u_k\}$-ն օրթոնորմալ բազիս է $B^2(\Omega)$-ում, ապա կեռնֆունկցիան ներ– կայացվում է $K(z,\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(z)\overline{u_k(\zeta)}$ շարքի տեսքով, որտեղից հետևում է, որ $K(z,\zeta)$-ն հոլոմորֆ է ըստ առաջին կոորդինատի և հակահոլոմորֆ է ըստ երկրորդի:

14. Ամբողջ ֆունկցիաներ: Դիցուք f-ը ամբողջ ֆունկցիա է $\mathbb{C}^n$-ում, իսկ G-ն սահմանափակ n-շրջանաձև լրիվ տիրույթ է: Նշանակենք

$$M_f(R,G) = \sup_{z\in RG} |f(z)| :$$

Սահմանում: *f ֆունկցիայի $\rho_f(G)$ կարգ և $\sigma_f(G)$ տիպ* կոչվում են, համապատասխանաբար, այն ν-երի և μ-երի բազմությունների ճշգրիտ ստորին եզրերը, որոնք ասիմպտոտորեն բավարարում են

$$M_f(R,G) \overset{as}{<} \exp\{R^\nu\}, \quad M_f(R,G) \overset{as}{<} \exp\left\{\mu R^{\rho_f(G)}\right\}$$

անհավասարություններին:

Դիցուք $M_f(r) = M_f(r_1,\ldots,r_n) = \sup_{\substack{|z_i|=r_i,\\ i=1,\ldots,n}} |f(z)|$: Նշանակենք $B_\rho = B_\rho(f)$-ով բոլոր այն $a \in \mathbb{R}^n_+$ կետերի բազմությունը, որոնց համար

$$\ln M_f(r) \overset{as}{<} r_1^{a_1} + \cdots + r_n^{a_n} :$$

Սահմանում: B_ρ բազմության S_ρ եզրը կոչվում է f ֆունկցիայի *համալուծ կարգերի հիպերմակերևույթ*, իսկ $\rho_1,\ldots,\rho_n$ թվերի ամեն մի համա– կարգ, որոնց համար $(\rho_1,\ldots,\rho_n) \in S_\rho$, կոչվում է այդ ֆունկցիայի *համալուծ կարգերի համակարգ:*

Դիցուք $\rho_1,\ldots,\rho_n$ թվերը f-ի համալուծ կարգեր են: Նշանակենք $B_\sigma = B_\sigma(f,\rho)$-ով բոլոր այն $b \in \mathbb{R}^n_+$ կետերի բազմությունը, որոնց համար

$$\ln M_f(r) \overset{as}{<} b_1 r_1^{\rho_1} + \cdots + b_n r_n^{\rho_n} :$$

Սահմանում: B_σ բազմության S_σ եզրը կոչվում է f ֆունկցիայի *$\rho_1,\ldots,\rho_n$ կարգերին կից համալուծ տիպերի հիպերմակերևույթ*, իսկ $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ թվերի ամեն մի համակարգ, որոնց համար $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in S_\sigma$, կոչվում է այդ ֆունկցիայի *$\rho_1,\ldots,\rho_n$ կարգերին կից համալուծ տիպերի համակարգ:*

Խնդիրներ

Խնդիր 1. Նկարագրել $\{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| = 1\}$ գնդոլորտի հատույթները $z = a + \omega\zeta$ $(a, \omega \in \mathbb{C}^n;\ \zeta \in \mathbb{C})$ կոմպլեքս ուղիղներով:

Խնդիր 2. Նկարագրել $\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z| < 1\}$ միավոր գնդի և $\{z \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$ բիդիսկի հատումները $y_2 = \alpha$ եռաչափ հարթություններով, տարբեր α-ների դեպքում:

Խնդիր 3. Ցույց տալ, որ $\mathbb{C}^n$ տարածության կամայական երկու կետով անցնում է միակ կոմպլեքս ուղիղը:

Խնդիր 4. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում իրական S հիպերհարթության ցանկացած կետով անցնում է S-ին պատկանող կոմպլեքս հիպերհարթություն:

Խնդիր 5. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$ տարածության $\mathbb{R}^n_x$ և $\mathbb{R}^n_y$ n-չափանի հարթությունները կոմպլեքս հարթություններ չեն:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում ուռուցիկ տիրույթը նաև գծորեն ուռուցիկ է:

Խնդիր 7. Բերել $\mathbb{C}^n$-ում գծորեն ուռուցիկ տիրույթի օրինակ, որը սակայն ուռուցիկ չէ:

Խնդիր 8. Բերել $\mathbb{C}^n$-ում տիրույթի օրինակ, որը շրջանաձև է, սակայն n-շրջանաձև չէ:

Խնդիր 9. Որոշել հետևյալ շարքերի զուգամիտության տիրույթները.

ա) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (z_1 z_2)^k,$

բ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (z_1 z_2)^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z_1^k + z_2^k}{2^k},$

գ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (z_1 z_2^2)^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (z_1^2 z_2)^k:$

Խնդիր 10. Կառուցել աստիճանային շարք, որի զուգամիտության տիրույթն է՝

ա) $\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| + |z_2| < 1\}$ տիրույթը,

բ) $\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$ գունդը:

Խնդիր 11. Կառուցել աստիճանային շարք, որի համար զուգամիտության բազմությունն է՝

$$\{z \in \mathbb{C}^n \colon\ |z| < 1\} \bigcup \{|z| < 2,\ z_2 = 0\} :$$

Խնդիր 12. Գտնել $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2}$ աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը, եթե հայտնի է, որ այն

$$\{z \colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < \infty\} \bigcup \{z \colon\ |z_1| < \infty,\ |z_2| < 1\}$$

բազմության վրա զուգամիտում է:

Խնդիր 13. Գտնել $\displaystyle\sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1+1} z_2^{k_2} = \frac{z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}$ շարքի զուգամիտության բազմությունը:

Խնդիր 14. Ցույց տալ, որ $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n$ աստիճանային շարքը, որի գործակիցները կազմում են

$$\begin{array}{ccccc}
0! & 1! & 2! & 3! & \cdots \\
1! & -1! & -2! & -3! & \cdots \\
2! & -2! & 0 & 0 & \cdots \\
3! & -3! & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

անվերջ մատրիցը, ոչ բացարձակ զուգամիտում է (1,1) կետում և տարամիտում է $\mathbb{C}^2$ տարածության մնացած բոլոր կետերում (չհաշված, իհարկե, սկզբնակետը): Սա նշանակում է, որ Աբելի թեորեմը իր սովորական ձևակերպումով ճիշտ չէ բազմապատիկ շարքերի համար:

Խնդիր 15. Բերել n-հարմոնիկ ֆունկցիայի օրինակ, որը սակայն պլյուրիհարմոնիկ չէ:

Խնդիր 16. Ապացուցել, որ $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի u ֆունկցիան պլյուրիհարմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ∂u դիֆերենցիալ ձևը փակ է:

Խնդիր 17. Ապացուցել, որ $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում u ֆունկցիան պլյուրիհարմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $a \in D$ կետի շրջակայքում այն հոլոմորֆ ֆունկցիայի իրական մաս է:

Խնդիր 18. Դիցուք u ֆունկցիան $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ u-ն պլյուրիհարմոնիկ է D-ում այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա հետքը կամայական l կոմպլեքս ուղղի վրա հարմոնիկ է $l \cap D$-ում:

Խնդիր 19. Դիցուք u ֆունկցիան ըստ իրական կոորդինատների անալիտիկ է $D \subset \mathbb{C}^n$ տիրույթում և պլյուրիհարմոնիկ է որևէ $V \subset D$ գնդում: Ապացուցել, որ u-ն պլյուրիհարմոնիկ է ամբողջ D-ում:

Խնդիր 20. Դիցուք f-ը $\mathbb{C}^n$-ում ամբողջ ֆունկցիա է, որը բավարարում է

$$|f(z)| \leqslant C\,(1+|z|^m)$$

անհավասարությանը, որտեղ C-ն և m-ը հաստատուն մեծություններ են: Ապացուցել, որ f-ը բազմանդամ է, որի աստիճանը չի գերազանցում m թիվը:

Խնդիր 21 (Շվարցի լեմմայի բազմաչափ նմանակներից մեկը)**.** Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է $E \subset \mathbb{C}^n$ միավոր պոլիդիսկում, $|f(z)| \leqslant M$ և $f(0) = 0$: Ապացուցել, որ

$$|f(z)| \leqslant M\rho(z), \quad z \in E,$$

որտեղ $\rho(z) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |z_k|$:

Խնդիր 22. Դիցուք M-ը կոմպլեքս հարթության միավոր շրջանի ենթաբազմություն է, որի համար 0-ն խտացման կետ է, իսկ $f(z_1, z_2)$-ը միավոր E բիդիսկում որոշված սահմանափակ ֆունկցիա է, որը հոլոմորֆ է ըստ z_1-ի, երբ $|z_2| < 1$, և հոլոմորֆ է ըստ z_2-ի, երբ $z_1 \in M$: Ապացուցել, որ f-ը հոլոմորֆ է E-ում:

Խնդիր 23. Ապացուցել, որ եթե $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$ ֆունկցիան բազմանդամ է ըստ յուրաքանչյուր z_ν-ի, $\nu = 1, \ldots, n$, ապա f-ը բազմանդամ է:

Խնդիր 24. Ցույց տալ, որ չնայած $f(z) = \dfrac{z_1^3}{1 - z_2^2}$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է $B = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z| < 1\}$ գնդում և անընդհատ է $\overline{B}$-ում՝ այն հնարավոր չէ ներկայացնել $f(z) = z_1 \varphi(z_1, z_2)$ տեսքով, որտեղ φ-ն հոլոմորֆ է B-ում և անընդհատ է $\overline{B}$-ում:

Խնդիր 25. Դիցուք E-ն միավոր պոլիդիսկն է $\mathbb{C}^n$-ում և $f \in \mathcal{O}(E) \cap$ $\cap\, C(\overline{E})$: Ապացուցել, որ f-ը հոլոմորֆ է յուրաքանչյուր

$$\Delta_{j,a} = \{z \in \mathbb{C}^n \colon\ z_m = a_m,\ |a_m| \leqslant 1,\ m = 1, \cdots, n,\ m \neq j,\ |\zeta_j| < 1\}$$

շրջանում:

Խնդիր 26. Դիցուք f-ը հոլոմորֆ է $E \subset \mathbb{C}^n$ միավոր պոլիդիսկում և անընդհատ է $E \cup \Gamma$ բազմության վրա, որտեղ Γ-ն E-ի հենքն է: Ապացուցել, որ f-ը անընդհատորեն շարունակվում է $\overline{E}$-ի վրա:

Խնդիր 27. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $0 \in \mathbb{C}^n$ կետի շրջակայքում և հավասար է զրոյի իրական հարթության վրա, ապա $f \equiv 0$ այդ շրջակայքում:

Խնդիր 28. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան հոլոմորֆ է $0 \in \mathbb{C}^2$ կետի շրջակայքում և հավասար է զրոյի $\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ z_1 = \bar{z}_2\}$ հարթության վրա, ապա $f \equiv 0$ այդ շրջակայքում:

Խնդիր 29. $\mathbb{C}^n$-ում կառուցել կետերի հաջորդականություն, որը զուգամիտում է E միավոր պոլիդիսկի կենտրոնին և միակության բազմություն է $\mathcal{O}(E)$ դասի համար:

Խնդիր 30. $B = \{z \in \mathbb{C}^n \colon\ |z| < 1\}$ գնդի եզրի վրա կառուցել հաշվելի թվով կորեր, որոնցից ոչ մեկը $\mathcal{O}(B) \cap C(\overline{B})$ դասի համար միակության բազմություն չէ, և որոնց միավորումը այդպիսի բազմություն է:

Խնդիր 31. $B = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ գնդի եզրի վրա կառուցել $\mathcal{O}(B) \cap$ $\cap\ C(\overline{B})$ դասի համար փակ միակության բազմություն, որի գծային չափը վերջավոր է:

Խնդիր 32. Ապացուցել, որ E պոլիդիսկի հենքի կամայական ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն $\mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$ դասի համար միակության բազմություն է:

Խնդիր 33. Ապացուցել, որ կամայական $K \subset \mathbb{C}^n$ կոմպակտի ռացիոնալ ուռուցիկ թաղանթը համընկնում է

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ P(z) \in P(K) \ \text{ բոլոր } \ P \ \text{ բազմանդամների համար}\}$$

բազմության հետ:

Խնդիր 34. Դիցուք K-ն կոմպակտ բազմություն է $\mathbb{C}^n$-ում, $\mathcal{P}(K)$-ն բազմանդամների հավասարաչափ փակույթն է K-ի վրա: Ապացուցել, որ $\mathcal{P}(K)$ բանախյան հանրահաշվի բոլոր անընդհատ գծային մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների M տարածությունը կարելի է նույնացնել $\widehat{K}$ բազմանդամային ուռուցիկ թաղանթի հետ հետևյալ իմաստով. ցանկացած m ֆունկցիոնալ M-ից իրենից ներկայացնում է «արժեք z^0 կետում», $z^0 \in \widehat{K}$, այսինքն, $m(f) = f(z^0)$ ցանկացած f-ի համար $\mathcal{P}(K)$-ից:

Խնդիր 35. Դիցուք K-ն $\mathbb{C}^n$-ի կոմպակտ ենթաբազմություն է, որի համար $\mathcal{P}(K) = \mathcal{C}(K)$: Ապացուցել, որ K-ն բազմանդամային ուռուցիկ է:

Խնդիր 36. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ի իրական հարթության պատկանող կամայական կոմպակտ բազմություն բազմանդամային ուռուցիկ է:

Խնդիր 37. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}$ հարթությանը պատկանող K կոմպակտը բազմանդամային ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbb{C} \setminus K$ բազմությունը կապակցված է:

Խնդիր 38. Ցույց տալ, որ P_m բազմանդամներով որոշվող

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |P_m(z)| < 1,\ m = 1, \cdots, N\}$$

բազմանիստը բազմանդամային ուռուցիկ տիրույթ է:

Խնդիր 39. Դիցուք $\delta \in (0, 2\pi)$ և M-ը

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ z_1 = e^{it},\ \delta \leqslant t \leqslant 2\pi,\ z_2 = 0\right\}$$
$$\left\{z_1 = e^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant \delta,\ |z_2| = 1\right\}$$

բազմությունների միավորումն է: Ապացուցել, որ

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| \leqslant 1,\ z_2 = 0\right\}$$

շրջանը պարունակվում է M-ի բազմանդամային ուռուցիկ թաղանթի մեջ:

Խնդիր 40. Դիցուք K բազմությունը $\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z| = \sqrt{2}\right\}$ գնդոլորտի և $\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ z_2 = \bar{z}_1\right\}$ հարթության հատումն է: Ապացուցել, որ $P(K) = C(K)$:

Խնդիր 41. Ապացուցել, որ $B = \{z \in \mathbb{C}^n \colon\ |z| < 1\}$ գնդի Շիլովի եզրը համընկնում է նրա տոպոլոգիական եզրի հետ:

Խնդիր 42. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$-ում E պոլիդիսկի Շիլովի $S(E)$ և Բերգմանի $B(E)$ եզրերը համընկնում են նրա հենքի հետ:

Խնդիր 43. Դիցուք $D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ 0 < |z_1| < 1,\ |z_2| < |z_1|\right\}$: Ցույց տալ, որ

ա) D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է,

բ) $\overline{D}$-ն հոլոմորֆության տիրույթների հատում չէ:

Խնդիր 44. Ապացուցել, որ

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ 0 < |z_1| < 1,\ |z_2| < |z_1|^{-\ln|z_1|}\right\}$$

տիրույթի Շիլովի և Բերգմանի եզրերը իրարից տարբեր են.

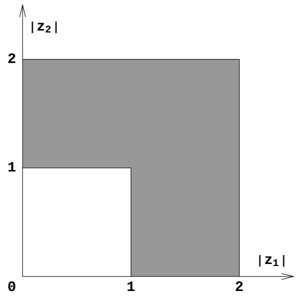
$$S(D) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|}\right\},$$

և $B(D) = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| = |z_2| = 1\right\}$:

Խնդիր 45. Ապացուցել, որ կամայական ֆունկցիա, որը հոլոմորֆ է

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 2\right\} \setminus \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\right\}$$

սնամեջ բիդիսկում (գծագրում պրվում է D-ի ռեյնհարպյան դիագրամը), անալիտիկորեն շարունակվում է $\left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 2\right\}$ բիդիսկի մեջ:



Խնդիր 46. Դիցուք D_1-ը և D_2-ը հարթության վրա ողորկ կորերով սահմանափակված փիրույթներ են, որոնք աստղաձև են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ, իսկ K-ն որոշվում է հետևյալ հավասարությունով՝ $K = \{tz \colon\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ z \in \partial D_1 \times \partial D_2\}$: Ապացուցել, որ K-ի շրջակայքում կամայական հոլոմորֆ f ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է $D_1 \times D_2$ փիրույթի վրա:

Խնդիր 47. Ապացուցել, որ

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1|^2 + x_2^2 > \rho^2\right\}$$

փիրույթը հոլոմորֆության փիրույթ չէ:

Խնդիր 48. Բերել օրինակ, երբ երկու հոլոմորֆության փիրույթների միավորումը հոլոմորֆության փիրույթ չէ:

Խնդիր 49. Ապացուցել, որ $\mathbb{C}^n$ պարածության միավոր պոլիդիսկում կամայական n-հարմոնիկ f ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է Պուասոնի բազմաչափ $f(z) = P[f](z)$ բանաձևը:

Խնդիր 50. Դիցուք $f \in C(\Gamma)$ և $f_k \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է, և $f_k \to f$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{k\to\infty} P[f_k](z) = P[f](z)$$

հավասարաչափ E-ի վրա:

Խնդիր 51. Ցույց տալ, որ Կուզենի առաջին հիմնախնդիրը ոչ միշտ ունի լուծում

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 3,\ |z_2| < 3\right\} \setminus \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 3,\ 1 < |z_2| < 3\right\}$$

կրկնակի շրջանաձև տիրույթում, ինչից հետևում է, որ D-ն հոլոմոր– ֆության տիրույթ չէ:

Խնդիր 52. Ապացուցել, որ եթե $f \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է, ապա նրա $P[f](z)$ Պուասոնի ինտեգրալը անընդ– հատորեն շարունակվում է $\overline{E}$-ի վրա:

Խնդիր 53. Դիցուք $f \in C(\Gamma)$, որտեղ Γ-ն E միավոր պոլիդիսկի հենքն է: Ապացուցել, որ որպեսզի f-ը շարունակվի մինչև $\mathcal{O}(E)\cap C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^k\, d\zeta = 0$$

բոլոր $k = (k_1, \ldots, k_n)$ վեկտորների համար, որտեղ k_ν-երը ամբողջ են և նրանցից գոնե մեկը ոչ բացասական է:

Խնդիր 54. Դիցուք f ֆունկցիան որոշված և անընդհատ է E միավոր պոլիդիսկի ∂E եզրի վրա և յուրաքանչյուր

$$\Delta_{j,a} = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ z_m = a_m,\ |a_m| \leqslant 1,\ m = 1, \cdots, n,\ m \neq j,\ |\zeta_j| < 1\}$$

շրջանում հոլոմորֆ է: Ապացուցել, որ f-ը շարունակվում է մինչև $\mathcal{O}(E)\cap$ $\cap\, C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա:

Խնդիր 55. Դիցուք գոյություն ունի $f \in \mathcal{O}(D)$, որը անսահմանափակ է ζ-ում, այսինքն, գոյություն ունի հաջորդականություն $z^m \in D$ այնպիսին, որ $\lim z^m = \zeta$ և $\lim f(z^m) = \infty$: Ցույց տալ, որ այդ դեպքում ζ-ում կա արգելք:

Խնդիր 56. Դիցուք L-ը $l(z) = c_0 + c_1 z_1 + \cdots + c_n z_n$ գծային ֆունկցիաների ընտանիքն է: Ցույց տալ, որ D տիրույթը L-ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նա ուռուցիկ է սովորական երկրաչափական իմաստով:

Խնդիր 57. Դիցուք M-ը $cz^k = cz_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ բոլոր միանդամների ընտանիքն է (k_i-երը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են, c-ն՝ կոմպլեքս հաստատուն է): Ցույց տալ, որ 0 կենտրոնով Ռեյնհարտի լրիվ տիրույթը լոգարիթմորեն ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նա M-ուռուցիկ է:

Խնդիր 58. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան կիսաանընդհատ է վերևից K կոմպակտի վրա և $f(x) < +\infty$, ապա գոյություն ունի նվազող անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը ձգտում է f-ին:

Խնդիր 59. Ապացուցել, որ եթե $u \geqslant 0$ ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում, ապա u^p $(p \geqslant 1)$ ֆունկցիան ևս սուբհարմոնիկ է:

Խնդիր 60. Ապացուցել, որ եթե u ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում, ապա e^u ֆունկցիան ևս սուբհարմոնիկ է:

Խնդիր 61. Ապացուցել, որ $C^2(G)$ դասի u ֆունկցիան սուբհարմոնիկ է G տիրույթում այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial \bar{z}} \geqslant 0 :$$

Խնդիր 62. Ապացուցել, որ հարթության վրա ամեն մի տիրույթ պսևդոուռուցիկ է:

Խնդիր 63. Գտնել $\mathbb{C}^n$-ում միավոր գնդի ծավալը:

Խնդիր 64. Գտնել $\mathbb{C}^n$-ում միավոր սֆերայի ծավալը:

Խնդիր 65. (Բևեռային կոորդինատներով ինտեգրում $\mathbb{R}^n$-ում)։ Ապացուցել, որ $\mathbb{R}^n$-ում ամեն մի բորելյան f ֆունկցիայի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,dV = \int\limits_0^{\infty} r^{n-1}dr \int\limits_S f(r\zeta)d\sigma(\zeta)\,:$$

Խնդիր 66. Ապացուցել, որ Մարտինելի–Բոխների կորիզը կարելի է գրել նաև

$$\Omega_{MB}\,(\zeta,z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\partial g}{\partial\bar{\zeta}_k}\,d\bar{\zeta}[k]\wedge d\zeta$$

տեսքով, որտեղ $g(\zeta,z) = (1-n)^{-1}\,|\zeta - z|^{2-2n}$ ֆունկցիան Լապլասի $\Delta g = 0$ հավասարման ֆունդամենտալ լուծումն է $\zeta = z$ եզակիությամբ։

Խնդիր 67. Դիցուք $D \subset \mathbb{C}^n$ սահմանափակ տիրույթ է կտոր առ կտոր ողորկ եզրով, f-ը հոլոմորֆ է D-ում և անընդհատ է $\overline{D}$-ում։ Ապացուցել, որ

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta)\,\Omega_{MB}(z,\zeta) = 0, \quad \text{երբ}\;\; z \notin \overline{D},$$

որտեղ Ω_{MB}-ն Մարտինելի–Բոխների կորիզն է։

Խնդիր 68. Ցույց տալ, որ եթե եզրային ֆունկցիան անընդհատ է, ապա Մարտինելի–Բոխների ինտեգրալը հարմոնիկ ֆունկցիա է ∂D-ի լրացման վրա։

Խնդիր 69. Գտնել միավոր պոլիդիսկի կեռնֆունկցիան։

Խնդիր 70. Հեֆերի թեորեմը պնդում է, որ *եթե D-ն հոլոմորֆության տիրույթ է $\mathbb{C}^n$-ում և $\chi \in \mathcal{O}(D)$, ապա գոյություն ունեն $D \times D$-ում հոլոմորֆ $q_1(\zeta,z),\ldots,q_n(\zeta,z)$ այնպիսի ֆունկցիաներ, որ բոլոր $\zeta, z \in D$ կետերի համար տեղի ունի*

$$\chi(\zeta) - \chi(z) = \sum_{j=1}^{n} q_j(\zeta,z)(\zeta_j - z_j)$$

վերլուծությունը: Ապացուցել այդ թեորեմը հետևյալ դեպքերի համար՝

1. երբ χ-ն բազմանդամ է,

2. երբ D-ն Ռեյնհարտի տիրույթ է:

Խնդիր 71. Բերել $f \in C_0^1(\mathbb{C})$ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար գոյություն չունի $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ հավասարման կոմպակտ կրիչ ունեցող լուծում:

Խնդիր 72. $p_k(z)$ բազմանդամը կոչվում է k-րդ աստիճանի համասեռ բազմանդամ, եթե $p_k(\zeta z) = \zeta p_k(z)$ բոլոր $z \in \mathbb{C}^n$ և $\zeta \in \mathbb{C}$ համար: Ապացուցել, որ այդ պայմանը համարժեք է նրան, որ $p_k(z)$-ի բոլոր անդամների աստիճանը լինի հավասար k-ի:

Խնդիր 73. Ապացուցել, որ $B = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z| < 1\}$ գունդը բիհոլոմորֆորեն համարժեք է $D = \left\{y_n > |\widetilde{z}|^2\right\}$ տիրույթին, որտեղ $\widetilde{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1})$:

Նշենք, որ $\left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ y_2 = |z_1|^2\right\}$ մակերևույթը առաջին անգամ դիտարկել է Պուանկարեն:

Խնդիր 74 (Ռուդին)**.** Դիցուք f-ը ամբողջ ֆունկցիա է և $A = \{f(z) = 0\}$ անալիտիկ բազմության բոլոր $z = (\widetilde{z}, z_n)$ կետերի համար տեղի ունի $|z_n| < c\,(1 + |\widetilde{z}|^m)$ անհավասարությունը, որտեղ c-ն ու m-ը հաստատուններ են: Ապացուցել, որ A-ն ինչ-որ բազմանդամի զրոյական բազմություն է:

Խնդիր 75. Տրված են

$$\omega' = \sum_{k=1}^{n} a_k\, dz_k \quad \text{և} \quad \omega'' = \sum_{k=1}^{n} b_k\, dz_k$$

$(0, 1)$ տիպի դիֆերենցիալ ձևերը, որոնց համապատասխան $a = (a_1, \ldots, a_n)$ և $b = (b_1, \ldots, b_n)$ վեկտորները օրթոգոնալ են էվկլիդյան սկալյար արտադրյալի իմաստով: Ապացուցել, որ $\omega' \wedge \omega'' = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\omega' = 0$ կամ $\omega'' = 0$:

Խնդիր 76. Դիցուք p-ն ու q-ն իրարից պարբեր մուլտիինդեքսներ են, S-ը $\mathbb{C}^n$ պարածության միավոր սֆերան է: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_S \zeta^p \bar{\zeta}^q d\sigma(\zeta) = 0 :$$

Խնդիր 77. Ապացուցել, որ եթե G տիրույթը հոլոմորֆ ուռուցիկ է և բազմանդամների դասը խիտ է $\mathcal{O}(G)$-ում, ապա G-ն բազմանդամա– յին ուռուցիկ է:

Խնդիր 78. Դիցուք G-ն հարթության վրա վերջավոր թվով ողորկ կո– րերով սահմանափակված տիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե $u \in C^1(\overline{G})$, ապա

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{u(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{G} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G : \tag{8}$$

Խնդիր 79. Դիցուք $G \subset \mathbb{C}$-ն բաց սահմանափակ բազմություն է, $f \in C^1(G)$ ֆունկցիան սահմանափակ է և

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in G : \tag{9}$$

Ապացուցել, որ $u \in C^1(G)$ և

$$\frac{\partial u(z)}{\partial \bar{z}} = f(z) : \tag{10}$$

Խնդիր 80. Ապացուցել ∂ և $\bar{\partial}$ օպերատորների

$$\partial^2 = 0, \quad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial, \quad \bar{\partial}^2 = 0$$

հատկությունները:

Խնդիր 81. Ցույց տալ, որ f ամբողջ ֆունկցիայի $\rho_f(G)$ կարգն ու $\sigma_f(G)$ տիպը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ բանաձևով

$$\rho_f(G) = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\ln\ln M_f(R,G)}{\ln R}, \qquad \sigma_f(G) = \varlimsup_{R\to\infty} \frac{\ln M_f(R,G)}{R^\rho} :$$

Խնդիր 82. Ապացուցել, որ $\rho_f(G)$ կարգը իրականում կախված չէ G փիրույթից, ինչը ճիշտ չէ $\sigma_f(G)$ փիպի (G-փիպի) մասին:

Խնդիր 83. Գտնել $f(z_1, z_2) = e^{z_1 z_2}$ ֆունկցիայի կարգն ու G-փիպը, եթե

$$G_1 = \{(z_1, z_2) \colon \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1\},$$
$$G_2 = \{(z_1, z_2) \colon \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 2\},$$
$$G_3 = \left\{(z_1, z_2) \colon \ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\right\} :$$

Խնդիր 84. Որպեսզի $\rho_1, \ldots, \rho_n$ թվերը f ֆունկցիայի համար լինեն համալուծ կարգեր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\overline{\lim_{|r|\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\left(r_1^{\rho_1} + \cdots + r_n^{\rho_n}\right)} = 1 :$$

Խնդիր 85. Որպեսզի $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ թվերը f ֆունկցիայի համար լինեն $\rho_1, \ldots, \rho_n$ կարգերին կից համալուծ փիպեր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\overline{\lim_{|r|\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \cdots + \sigma_n r_n^{\rho_n}} = 1 :$$

Խնդիր 86. Գտնել $f(z) = \exp\left(z_1^{p_1} + \cdots + z_n^{p_n}\right)$ ամբողջ ֆունկցիայի համալուծ կարգերի հիպերմակերևույթը:

Խնդիր 87. Գտնել $f(z) = \exp\left(z_1 z_2 \cdots z_n\right)$ ամբողջ ֆունկցիայի համալուծ կարգերի հիպերմակերևույթը:

Խնդիր 88. Գտնել $1, 1$ համալուծ կարգերին կից

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(z_1 z_2)^m}{(2m)!} = \cos\sqrt{z_1 z_2}$$

ամբողջ ֆունկցիայի համալուծ փիպերի կորը:

Լուծումներ և պատասխաններ

Խնդիր 1. Վերցնենք միավոր երկարության ուղղորդ ω վեկտոր: Հատույթի կետերը բավարարում են

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k = 1 \\ z_k = a_k + \omega_k \zeta \end{cases}$$

պայմաններին, որտեղից և ստանում ենք հատույթի

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + \omega_k \zeta)(\overline{a_k + \omega_k \zeta}) = 1$$

հավասարումը: Ձևափոխենք ձախ մասը:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (a_k + \omega_k \zeta)(\overline{a_k + \omega_k \zeta}) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \zeta \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \omega_k + |\zeta|^2 \sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^2 = \\ = |a|^2 + \zeta \overline{\langle a, \omega \rangle} + \bar{\zeta} \langle a, \omega \rangle + |\zeta|^2 = \\ = |a|^2 + (\zeta + \langle a, \omega \rangle) \overline{(\zeta + \langle a, \omega \rangle)} - \langle a, \omega \rangle \overline{\langle a, \omega \rangle} = \\ = |a|^2 + |\zeta + \langle a, \omega \rangle|^2 - |\langle a, \omega \rangle|^2 :\end{aligned}$$

Հատույթի հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$|\zeta + \langle a, \omega \rangle|^2 = 1 + |\langle a, \omega \rangle|^2 - |a|^2 : \tag{11}$$

Հնարավոր է երեք դեպք.

ա) $1 + |\langle a, \omega \rangle|^2 - |a|^2 > 0$: Այս դեպքում (11) հավասարմանը ζ պարամետրի հարթության վրա համապատասխանում է շրջանագիծ՝ $\zeta_0 = -\langle a, \omega \rangle$ կենտրոնով և $r_0 = \sqrt{1 + |\langle a, \omega \rangle|^2 - |a|^2}$ շառավղով:

բ) $1+|\langle a,\omega\rangle|^2-|a|^2=0$: (11) հավասարմանը բավարարում է միայն մեկ կետ՝ $z^0=a-\langle a,\omega\rangle$:

գ) $1+|\langle a,\omega\rangle|^2-|a|^2<0$: Հատույթը դատարկ բազմություն է:

Խնդիր 2. *Գնդի դեպքը:* Հատույթի կետերը բավարարում են հետևյալ պայմաններին՝

$$\begin{cases} |z_1|^2+|z_2|^2<1 \\ y_2=\alpha, \end{cases}$$

որտեղից հետևում է, որ $|z_1|^2+x_2^2+\alpha^2<1$ կամ $|z_1|^2+x_2^2<1-\alpha^2$: Այստեղից պարզ է, որ եթե $|\alpha|<1$, ապա հատույթը եռաչափ գունդ է $(0,i\alpha)$ կենտրոնով և $\sqrt{1-\alpha^2}$ շառավղով: Իսկ եթե $|\alpha|\geqslant 1$, ապա հատույթը դատարկ բազմություն է:
Բիդիսկի դեպքը: Հատույթը

$$\begin{aligned}&\left\{z\in\mathbb{C}^2:\ |z_1|<1,\ |z_2|<1,\ y_2=\alpha\right\}=\\ &=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\ |z_1|<1,\ |x_2|<\sqrt{1-\alpha^2},\ y_2=\alpha\right\}\end{aligned}$$

բազմությունն է: Պարզ է, որ $|\alpha|<1$ դեպքում այն $(0,i\alpha)$ կենտրոնով և $2\sqrt{1-\alpha^2}$ բարձրությամբ եռաչափ գլան է, որի հիմքի շառավիղը հավասար է մեկի, իսկ $|\alpha|\geqslant 1$ դեպքում դատարկ բազմություն է:

Խնդիր 4. $z^0=(x^0,y^0)$ կետով անցնող S իրական հիպերհարթության հավասարումն է՝

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\left[a_k(x_k-x_k^0)+b_k(y_k-y_k^0)\right]=0,$$

որտեղ a_k-ն և b_k-ն իրական թվեր են: Ակնհայտ է, որ $u(x,y)= =\operatorname{Re} l(z)$, որտեղ

$$l(z)=\sum_{k=0}^{n}(a_k-ib_k)(z_k-z_k^0):$$

$l(z) = 0$ հավասարումը որոշում է կոմպլեքս հիպերհարթություն, որը անցնում է z^0 կետով և պարկանում է S-ին, քանի որ $l(z) = 0$ հավա–սարումից հետևում է

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, l(z) = 0 :$$

Խնդիր 6. Ուռուցիկ D տիրույթի ցանկացած z^0 եզրային կետի համար գոյություն ունի այդ կետով անցնող M հենման հիպերհարթություն: z^0 կետով անցնող և M-ին պարկանող կոմպլեքս հիպերհարթությունը (տես խնդիր 3) ևս հանդիսանում է հենման հիպերհարթություն D-ի համար, այսինքն՝ D-ն գծորեն ուռուցիկ է:

Խնդիր 7. Դիցուք D-ն հարթ տիրույթների դեկարտյան արտադրյալ է, այսինքն

$$D = D_1 \times \cdots \times D_n,$$

որտեղ $D_k \subset \mathbb{C}, \quad k = 1, \ldots, n$: Վերցնենք $z^0 = \left(z_1^0, \ldots, z_n^0\right) \in \partial D$, դա նշանակում է որ $z_k^0 \in \partial D_k$ որևէ k-ի համար: Պարզ է, որ

$$\left\{z \in \mathbb{C}^n : \; z_k = z_k^0\right\}$$

կոմպլեքս հիպերհարթությունը, անցնելով z^0 կետով, հենվում է D-ին, ուրեմն, D տիրույթը գծորեն ուռուցիկ է: Մյուս կողմից, D-ն ուռուցիկ չէ, եթե D_k-երից որևէ մեկը ուռուցիկ չէ:

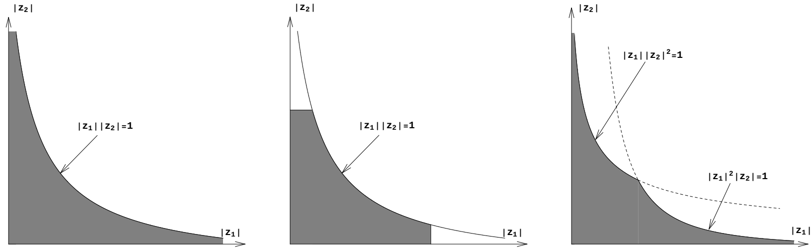
Խնդիր 8. Դիտարկենք

$$D = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \; |z_1 + z_2| < 1\right\}$$

տիրույթը: Սա շրջանաձև տիրույթ է, որովհետև $|z_1 + z_2| < 1$ պայմանից հետևում է, որ $|z_1 e^{i\theta} + z_2 e^{i\theta}| < 1$ ցանկացած իրական θ-ի համար: Մյուս կողմից, D-ն երկակի շրջանաձև չէ, քանի որ

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in D \quad \text{և} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin D :$$

Խնդիր 9. Պատասխան: Գծագրերում տրված են որոնելի տիրույթների ռեյնհարտյան դիագրամները:



Խնդիր 10. ա) Դիտարկենք

$$S(z_1, z_2) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} z_1^p z_2^q$$

շարքը: Այս շարքի բացարձակ զուգամիտության տիրույթը միավոր բիդիսկն է: Իրոք,

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} |z_1|^p\, |z_2|^q = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} |z_1|^p\, |z_2|^q =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (|z_1| + |z_2|) :$$

Վերջին շարքի զուգամիտության պայմանն է՝ $|z_1| + |z_2| < 1$:

բ) Նման ձևով համոզվում ենք, որ

$$S^*(z_1, z_2) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} z_1^{2p} z_2^{2q}$$

շարքի զուգամիտության տիրույթը միավոր գունդն է:

Խնդիր 11. Հետևյալ շարքը՝

$$\sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!\, q!} z_1^{2p} z_2^{2q+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{2}\right)^k \tag{12}$$

բավարարում է խնդրի պայմաններին: Իրոք, (12)-ի առաջին շարքը ներկայացնելով

$$z_2 \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} z_1^{2p} z_2^{2q}$$

տեսքով, տեսնում ենք, որ նրա զուգամիտության բազմությունն է՝

$$\{|z|<1\} \bigcup \{|z|<2,\ z_2=0\}$$

(տես խնդիր 8-ի պատասխանը), իսկ երկրորդ շարքի զուգամիտության բազմությունը $\{|z_1|<2\}$ շրջանն է: Ակնհայտ է, որ

$$\begin{gathered}(\{|z|<1\} \bigcup \{|z|<2,\ z_2=0\}) \bigcap \{|z_1|<2\} = \\ \{z \in \mathbb{C}^n:\ |z|<1\} \bigcup \{|z|<2,\ z_2=0\} :\end{gathered}$$

Խնդիր 14. Տվյալ շարքի մասնակի գումարը հավասար է

$$S_{kl}(z_1,z_2) = 1 + z_1 z_2 + (1-z_2) \sum_{m=1}^{k} m!\, z_1^m + (1-z_1) \sum_{n=1}^{l} n!\, z_2^n : \quad (13)$$

Այստեղից նախ ստանում ենք, որ $S_{kl}(1,1) = 1$, այսինքն, շարքը զուգամետ է $(1,1)$ կետում: Այնուհետև, ինչպես երևում է (13)-ից, գոյություն չունի $\lim\limits_{k,l\to\infty} S_{kl}(z_1,z_2)$, եթե միայն $(z_1,z_2) \neq (1,1)$ կամ $(z_1,z_2) \neq (0,0)$:

Խնդիր 15. Օրինակ, $u(z_1,z_2) = z_1 \bar{z}_2$ ֆունկցիան n-հարմոնիկ է, որովհետև

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} = 0,$$

բայց պլյուրիհարմոնիկ չէ, քանի որ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} = 1 \neq 0 :$$

Խնդիր 16. Պլյուրիհարմոնիկության պայմանն է՝

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

որը կարելի է գրել $\partial\bar{\partial}u = 0$ տեսքով, հաշվի առնելով

$$\partial\bar{\partial}u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

հավասարությունը: Այնուհետև,

$$d(\partial u) = (\partial + \bar{\partial})\partial u = \partial^2 u + \bar{\partial} u = -\partial\bar{\partial}u,$$

որտեղից երևում է, որ $d(\partial u)$ և $\partial\bar{\partial}u$ դիֆերենցիալ ձևերը զրո են դառ–նում միաժամանակ:

Խնդիր 17. *Բավարարություն:* Դիցուք $u = \operatorname{Re} f$, որտեղ f-ը հոլո–մորֆ է: Ուրեմն, $\bar{\partial} f(z) = \partial \bar{f}(z) = 0$: Ունենք

$$\partial u = \frac{1}{2}\,\partial\left(f + \bar{f}\right) = \frac{1}{2}\,\left(\partial f + \bar{\partial} f\right) = \frac{1}{2}\,df,$$

ուրեմն, ∂u ձևը փակ է, քանի որ ճշգրիտ է: Խնդիր 12-ից հետևում է, որ u-ն պլյուրիհարմոնիկ ֆունկցիա է:

Անհրաժեշտություն: Այժմ ենթադրենք u-ն պլյուրիհարմոնիկ է: Ըստ խնդիր 12-ի ∂u ձևը փակ է, ուստի կամայական $a \in D$ կետի որևէ շրջակայքում $\int_a^z \partial u$ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապար–հից: Դիտարկենք այդ շրջակայքում որոշված

$$f(z) = 2\int_a^z \partial u + u(a) \tag{14}$$

ֆունկցիան: Կորագիծ ինտեգրալի հատկություններից հետևում է, որ $df = 2\partial u$ կամ

$$\partial f + \bar{\partial} f = 2\partial u\, :$$

Այսպեղից նախ հետևում է, որ $\bar{\partial} f = 0$, այսինքն f-ը հոլոմորֆ է, և

$$\partial f(z) = 2\partial u(z) : \tag{15}$$

Դիցուք $u_1 = \operatorname{Re} f$, ուրեմն $\partial f = 2\partial u_1$: Այսպեղից և (15)-ից սպանում ենք $\partial u = \partial u_1$, որպեղից՝

$$\partial(u - u_1) = 0 : \tag{16}$$

Հաշվի առնելով, որ $(u - u_1)$-ը իրական ֆունկցիա է, սպանում ենք $\bar{\partial}(u - u_1) = \overline{\partial(u - u_1)} = 0$: Այսպեղից և (16)-ից հետևում է՝ $u - u_1 = c = \text{const}$: (14)-ից բխում է, որ $f(a) = u(a)$: Ունենք $u_1(a) = = \operatorname{Re} f(a) = u(a)$, այսինքն՝ $c = 0$: Ուրեմն՝

$$u(z) = u_1(z) = \operatorname{Re} f(z) :$$

Խնդիր 18. Դիցուք $a \in D$ և l-ը a կեպով անցնող կոմպլեքս ուղիղ է, որի պարամետրական հավասարումներն են

$$z_k = a_k + \omega_k t, \quad t \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \ldots, n :$$

$F_{a,\omega}(t)$-ով նշանակենք $u(z)$ ֆունկցիայի հետքը l ուղղի վրա՝

$$F_{a,\omega}(t) = u(a_1 + \omega_1 t, \ldots, a_n + \omega_n t) :$$

Բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոններից սպանում ենք

$$\frac{\partial^2 F_{a,\omega}}{\partial t \, \partial \bar{t}} = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} \, \omega_j \, \overline{\omega}_k :$$

Այսպեղից բխում է, որ հետևյալ պայմանները

ա) $\left. \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} \right|_{z=a} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, n$ բոլոր a-երի համար D-ից,

բ) $\dfrac{\partial^2 F_{a,\omega}}{\partial t \, \partial \bar{t}} = 0$ բոլոր $a \in D$ և $\omega \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ համար, բավարարվում են միաժամանակ: ա) պայմանը նշանակում է u-ի պլյուրիհարմոնիկությունը, իսկ բ)-ն նշանակում է u-ի հարմոնիկությունը բոլոր l կոմպլեքս ուղիղների վրա, ավելի ճշգրիտ՝ $l\bigcap D$-ի վրա:

Խնդիր 19. D տիրույթում u ֆունկցիայի հետ միասին ըստ իրական կոորդինատների անալիտիկ են նաև $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_i\,\partial \bar{z}_k}$, $i, k = 1, \ldots, n$ ֆունկցիաները: Ըստ խնդրի պայմանի այդ ֆունկցիաները զրո են դառնում D-ին պարփակող V գնդի մեջ: Ըստ միակության թեորեմի նրանք նույնաբար հավասար են զրոյի D տիրույթում, իսկ դա նշանակում է u-ի պլյուրիհարմոնիկությունը D-ում:

Խնդիր 20. f ամբողջ ֆունկցիայի $f(z) = \sum\limits_{\|k\|=0}^{\infty} a_k z^k$ Թեյլորի շարքը զուգամիտում է ամբողջ $\mathbb{C}^n$ տարածությունում: Նշանակենք

$$U_R = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| < R,\ k = 1, \ldots, n\}\,,$$
$$\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C}^n\colon\ |z_k| = R,\ k = 1, \ldots, n\}\,:$$

Եթե $z \in \Gamma_R$, ապա $|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} = R\sqrt{n}$: Համաձայն խնդրի պայմանի՝

$$\max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \leqslant C\left(1 + \left(R\sqrt{n}\right)^m\right)\,:$$

Ըստ Կոշիի անհավասարությունների

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{R^{\|k\|}}\ \max_{z\in\Gamma_R} |f(z)| \leqslant \frac{1}{R^{\|k\|}}\left(1 + \left(R\sqrt{n}\right)^m\right)\,:$$

Եթե $\|k\| > m$, ապա անհավասարության աջ մասը ձգտում է զրոյի, երբ $R \to \infty$: Ուստի $a_k = 0$, երբ $\|k\| > m$, այսինքն, f-ի Թեյլորի շարքը իրենից ներկայացնում է

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{[m]} a_k z^k$$

վերջավոր գումար:

Խնդիր 21. Կոորդինատների սկզբնակետով և որևէ $z^0 \in E$ կետով տանենք կոմպլեքս ուղիղ: Նրա պարամետրական հավասարումներն են

$$z_k = z_k^0 \zeta, \;\; \zeta \in \mathbb{C}, \;\; k = 1, \dots, n :$$

Այդ ուղղի և պոլիդիսկի հատույթի կետերը բավարարում են

$$\begin{cases} |z_k| < 1 \\ z_k = z_k^0 \zeta, \;\; k = 1, \dots, n \end{cases}$$

պայմաններին, որոնցից հետևում է՝

$$\left| z_k^0 \zeta \right| < 1, \;\; k = 1, \dots, n,$$

կամ

$$|\zeta| < \min_k \frac{1}{\left| z_k^0 \right|} = \frac{1}{\max\limits_k \left| z_k^0 \right|} = \frac{1}{\rho(z^0)} :$$

Այսպիսով, հատույթը իրենից ներկայացնում է

$$|\zeta| < \frac{1}{\rho(z^0)}$$

շրջանը: Դիտարկենք այդ շրջանում հոլոմորֆ $g(\zeta) = f(z_1^0 \zeta, \dots, z_n^0 \zeta)$ ֆունկցիան: Ըստ Շվարցի լեմմայի

$$|g(\zeta)| \leqslant M \rho(z^0) |\zeta| :$$

$\zeta = 1$ դեպքում ստանում ենք

$$|g(1)| = \left| f(z^0) \right| \leqslant M \rho(z^0) :$$

Խնդիր 22. Վերցնենք $r \in (0, 1)$ և դիտարկենք

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_2| = r} \frac{f(z_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} \, d\zeta_2, \tag{17}$$

ֆունկցիան: Պարամետրից կախված ինտեգրալների հայտնի հատկություններից հետևում է, որ $F(z_1, z_2)$-ը հոլոմորֆ է ըստ z_1-ի $\{z_1 \in \mathbb{C}\colon\ |z_1| < 1\}$ շրջանում և ըստ z_2-ի $\{z_2 \in \mathbb{C}\colon\ |z_2| < r\}$ շրջանում: Ըստ Հարտոգսի թեորեմի F-ը հոլոմորֆ է

$$E_r = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < r\right\}$$

բիդիսկում: Խնդրի պայմաններից հետևում է, որ f ֆունկցիայի համար տեղի ունի Կոշիի բանաձևը

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_2| = r} \frac{f(z_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}\, d\zeta_2, \tag{18}$$

որտեղ $z_1 \in M$ և $|z_2| \leqslant r$: Համեմատելով (17)-ը և (18)-ը, եզրակացնում ենք, որ ֆիքսած z_2-ի ($z_2 < r$) դեպքում $\{z_1 \in \mathbb{C}\colon\ |z_1| < 1\}$ շրջանում հոլոմորֆ $f(z_1, z_2)$ և $F(z_1, z_2)$ ֆունկցիաները համընկնում են M բազմության վրա և, ըստ միակության թեորեմի, համընկնում են նաև ամբողջ $\{z_1 \in \mathbb{C}\colon\ |z_1| < 1\}$ շրջանում: Այսպիսով՝ $f(z) = F(z)$ E_r բիդիսկում, այսինքն՝ f-ը հոլոմորֆ է E_r-ում: Քանի որ r-ը կարելի է վերցնել ցանկացած չափով մոտ 1-ին, ստանում ենք, որ f-ը հոլոմորֆ է E-ում:

Խնդիր 23. Ըստ Հարտոգսի թեորեմի f-ը ամբողջ ֆունկցիա է և

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}^n : \tag{19}$$

Այս շարքի անդամները խմբավորելով ըստ z_ν-ի աստիճանների՝ ստանում ենք

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\left(z_1, \ldots, [z_\nu], \ldots, z_n\right) z_\nu^{p_k},$$

որտեղ $g_k\left(z_1, \ldots, [z_\nu], \ldots, z_n\right)$-երը ամբողջ ֆունկցիաներ են և g_k-ն նույնաբար զրո չէ: Այստեղ $[z_\nu]$ նշանը ցույց է տալիս, որ ν-րդ կոորդինատը բաց է թողնված: g_k ֆունկցիաների քանակը վերջավոր է.

հակառակ դեպքում, վերցնելով այնպիսի $\left(z_1^0,\ldots,[z_\nu],\ldots,z_n^0\right)$ կետ, որ

$$g_k\left(z_1,\ldots,[z_\nu],\ldots,z_n\right)\neq 0,\quad k=0,1,\ldots,$$

կստանանք, որ

$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k\left(z_1^0,\ldots,[z_\nu],\ldots,z_n^0\right) z_\nu^{p_k}$$

ֆունկցիան, հակառակ խնդրի պայմանի, բազմանդամ չէ ըստ z_ν-ի: Այսպիսով, (19) շարքում z_ν-ի ($\nu=1,\ldots,n$) աստիճանների ցուցիչնե– րը սահմանափակ են վերևից, իսկ դա նշանակում է, որ f-ը բազման– դամ է:

Խնդիր 24. Նախ ցույց տանք, որ $f(z)=\dfrac{z_1^3}{1-z_2^2}$ ֆունկցիան փակ միավոր $\overline{B}$ գնդում անընդհատ է, ընդ որում, այդ փաստը $\overline{B}$-ի բոլոր կետերի համար ակնհայտ է, բացի $(0,\pm 1)$ կետերից: $\overline{B}$-ում տեղի ունի

$$\left|\frac{z_1^3}{1-z_2^2}\right|\leqslant \frac{|z_1|^2}{1-|z_2|^2}|z_1|\leqslant |z_1|$$

գնահատականը, որից բխում է, որ

$$\lim \frac{z_1^3}{1-z_2^2}=0,\quad \text{երբ}\ \ z\to(0,\pm 1),\ z\in\overline{B}:$$

Դիցուք $\overline{B}$-ում տեղի ունի

$$\frac{z_1^3}{1-z_2^2}=z_1\varphi(z_1,z_2)$$

ներկայացումը: Այստեղից ստանում ենք

$$\varphi(z_1,z_2)=\frac{z_1^2}{1-z_2^2},\quad \text{երբ}\ \ z\neq(0,\pm 1):$$

Այնուհետև հեշտ է ստուգել, որ

$$z_n'=\left(0,\frac{1}{n}\right)\quad \text{և}\ \ z_n''=\left(\frac{1}{n},\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right),\quad n=1,2,\ldots$$

կետերի հաջորդականությունները, պապկանելով $\overline{B}$-ին, ձգտում են $(0,1)$ կետին: Մյուս կողմից, φ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքների հաջորդականությունները ունեն տարբեր սահմաններ՝

$$\lim \varphi(z_n') = 0, \quad \lim \varphi(z_n'') = 1 :$$

Ուրեմն, φ-ն չի կարող լինել անընդհատ $(0,1)$ կետում:

Խնդիր 25. Ֆիքսած j-ի համար ներմուծենք $\{z_j \in \mathbb{C}\colon\ |z_j| < 1\}$ բաց շրջանում անընդհատ

$$f_k(z_j) = f\Big(\left(1-\tfrac{1}{k}\right)a_1, \ldots, \left(1-\tfrac{1}{k}\right)a_{j-1}, z_j, \left(1-\tfrac{1}{k}\right)a_{j+1}, \ldots \\ \ldots, \left(1-\tfrac{1}{k}\right)a_n\Big), \quad k = 1, 2, \ldots$$

ֆունկցիաների հաջորդականությունը: $\overline{E}$-ում f-ի հավասարաչափ անընդհատությունից հետևում է, որ

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z_j) = f\left(a_1, \ldots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \ldots, a_n\right)$$

հավասարաչափ $\{z_j \in \mathbb{C}\colon\ |z_j| \leqslant 1\}$ շրջանում: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի, սահմանային $f\left(a_1, \ldots, a_{j-1}, z_j, a_{j+1}, \ldots, a_n\right)$ ֆունկցիան, որը f-ի հետքն է $\Delta_{j,a}$ շրջանի վրա, և հոլոմորֆ է:

Խնդիր 26. Դիտարկենք $f_\delta(z) = f((1-\delta)z)$ ֆունկցիան, որտեղ $\delta > 0$: Քանի որ f-ը անընդհատ է $E \cup \Gamma$-ի վրա, գոյություն ունի այնպիսի δ_n դրական թվերի հաջորդականություն, որ

$$\max_{z\in\Gamma} |f(z) - f_{\delta_n}(z)| < \frac{1}{n} :$$

Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի՝ նման անհավասարություն տեղի ունի նաև ամբողջ պոլիդիսկում՝

$$\max_{z\in E} |f(z) - f_{\delta_n}(z)| < \frac{1}{n} : \tag{20}$$

Ակնհայտ է, որ $f_{\delta_n}(z)$ ֆունկցիաները հոլոմորֆ են $\overline{E}$-ի շրջակայքում: Ուստի գոյություն ունեն այնպիսի $P_n(z)$ բազմանդամներ (օրինակ, $f_{\delta_n}(z)$-ի Թեյլորի շարքի համապատասխան հատվածները), որ

$$\max_{z\in\overline{E}} |f_{\delta_n}(z) - P_n(z)| < \frac{1}{n} : \tag{21}$$

(20)-ից և (21)-ից հետևում է

$$\max_{z\in E} |f(z) - P_n(z)| < \frac{2}{n} :$$

Այսպիսով՝ P_n բազմանդամների հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է E-ի, հետևաբար, և $\overline{E}$-ի վրա: Սահմանային ֆունկցիան, որը անընդհատ է $\overline{E}$-ի վրա որպես անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ սահման, f-ի անընդհատ շարունակությունն է:

Խնդիր 27. Կոորդինատների սկզբնակետի շրջակայքում f-ը վերլուծենք

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$$

Թեյլորի շարքի: Վերցնելով այստեղ $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, համաձայն խնդրի պայմանի, կունենանք

$$f(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n} \equiv 0 :$$

Հաջորդաբար ածանցելով այս նույնությունը, ստանում ենք

$$a_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\,\frac{\partial^{\|k\|} f(0)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_1^{k_1}} = 0$$

բոլոր $(k_1,\ldots,k_n)$-երի համար: Այսպիսով, f-ի բոլոր Թեյլորի գործակիցները հավասար են զրոյի, հետևաբար, $f(z)\equiv 0$:

Խնդիր 28. Կատարենք փոփոխականների փոխարինում՝

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \\ w_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2), \end{cases}$$

որի հակադարձն է

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + iw_2 \\ z_2 = w_1 - iw_2 : \end{cases}$$

Բանաձևերից երևում է, որ $\mathbb{C}_z^2$ պարածության $\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ z_1 = \bar{z}_2\right\}$ հարթությանը $\mathbb{C}_w^2$-ում համապատասխանում է իրական հարթությունը, իսկ հոլոմորֆ $f(z_1, z_2)$ ֆունկցիային համապատասխանում է նույնպես հոլոմորֆ $f(w_1 + iw_2, w_1 - iw_2)$ ֆունկցիա, որն ըստ խնդիր 27-ի նույնաբար հավասար է զրոյի: Հետևաբար, $f(z_1, z_2) \equiv 0$:

Խնդիր 29. Լուծումը բերենք

$$E = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| < 1, \ |z_2| < 1\right\}$$

միավոր բիդիսկի դեպքի համար: Նշանակենք

$$\Pi_k = E \cap \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ z_2 = kz_1\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots :$$

$B_m = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ |z| < 1/m\right\}$ գնդում $(m = 1, 2, \ldots)$ վերցնենք կենտրոնից տարբեր $w_m^{(k)}$ կետեր, $w_m^{(k)} \in \Pi_k, \ \ k = 1, \ldots, m$: Այդ կետերից կազմված հաջորդականությունը ձգտում է E-ի կենտրոնին և յուրաքանչյուր Π_k-ի վրա ունի անվերջ թվով իրարից տարբեր անդամներ:

Դիցուք $f \in \mathcal{O}(E)$: Ըստ միաչափ միակության թեորեմի $f|_{\Pi_k} = 0$: Միավոր շրջանին պատկանող կամայական c կետի համար $f(z_1, c)$ ֆունկցիան զրո է դառնում $z_1 = c/k, \ \ k = 1, 2, \ldots$ կետերում: Համաձայն վերը նշված թեորեմի,

$$f(z_1, c) \equiv 0, \ \ \text{երբ } |z_1| < 1,$$

այսինքն՝ $f(z) \equiv 0$ E-ում:

Խնդիր 30. Դիտարկենք

$$\gamma_k = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z| = 1,\ z_2 = kz_1\right\},\ \ k = 1, 2, \ldots$$

շրջանագծերը: Նրանց վրա $f_k(z) = z_2 - kz_1$ հոլոմորֆ ֆունկցիաները զրո են դառնում, ուրեմն, γ_k-երը միակության բազմություններ չեն: Դիցուք $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \gamma_k$ և $f \in \mathcal{O}(B) \cap C(\overline{B})$ ֆունկցիան զրո է դառնում Γ-ի վրա: Քանի որ γ_k-ն

$$\Pi_k = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| \leqslant 1,\ z_2 = kz_1\right\}$$

շրջանի եզրն է, ըստ միաչափ միակության թեորեմի $f|_{\Pi_k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$: Ուրեմն՝ $f(z) \equiv 0$ (տես խնդիր 25-ի լուծումը):

Խնդիր 31. Նշանակենք E_k-ով

$$\gamma_k = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z| = 1,\ z_2 = kz_1\right\},\ \ k = 1, 2, \ldots$$

շրջանագծի այն աղեղը, որը z_2 հարթության վրա պրոյեկտվում է $0 \leqslant \arg z_2 \leqslant 2^{-2}$ անկյան մեջ: Պարզ է, որ

$$E = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \bigcup \{(0, 1)\}$$

փակ բազմությունը ունի վերջավոր գծային չափ: Ճիշտ այնպես, ինչպես 26-րդ խնդրի լուծման մեջ, ցույց է տրվում, որ E-ն միակության բազմություն է:

Խնդիր 32. Դիցուք $f \in \mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$ ֆունկցիան զրո է դառնում E միավոր բիդիսկի հենքի ոչ-դատարկ բաց S ենթաբազմության վրա: Այնուհետև $\{|z_1| = 1\}$ և $\{|z_2| = 1\}$ շրջանագծերի վրա վերցնենք γ_1 և γ_2 աղեղներ այնպես, որ $\gamma_1 \times \gamma_2 \subset S$:

Դիցուք $z^0 \in E$: Ֆիքսած $z_1 \in \gamma_1$ դեպքում $f(z_1, z_2)$ ֆունկցիան հոլոմորֆ է ըստ z_2-ի $\{|z_2| < 1\}$ շրջանում (տես խնդիր 25-ը), անընդհատ է $\{|z_2| \leqslant 1\}$ շրջանում և հավասար է զրոյի γ_2-ի վրա: Ըստ միակության թեորեմի $f(z_1, z_2) = 0$ երբ $\{|z_2| < 1\}$, մասնավորապես, $f(z_1, z_2^0) = 0$: Այնուհետև, $f(z_1, z_2^0)$-ն հոլոմորֆ է ըստ z_1-ի $\{|z_1| < 1\}$ շրջանում, անընդհատ է $\{|z_1| \leqslant 1\}$-ում և հավասար է զրոյի γ_1-ի վրա: Նույն պատճառով $f(z_1, z_2^0) = 0$, երբ $\{|z_1| \leqslant 1\}$, մասնավորապես, $f(z_1^0, z_2^0) = 0$: Այսպիսով, կամայական $z^0 \in E$ կետում f-ը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ $f(z) \equiv 0$:

Խնդիր 33. Դիցուք $z^0 \notin A$, այսինքն, գոյություն ունի այնպիսի $P(z)$ բազմանդամ, որ $P(z^0) \notin P(K)$: Այդ դեպքում

$$\frac{1}{P(z) - P(z^0)}$$

ռացիոնալ ֆունկցիան հոլոմորֆ է K-ի վրա, իսկ z^0 կետում ունի բևեռ, ուրեմն, z^0-ն չի պատկանում K-ի $\widehat{K}_r$ ռացիոնալ ուռուցիկ թաղանթին:

Այժմ ենթադրենք $z^0 \notin \widehat{K}_r$, այսինքն՝ գոյություն ունի այնպիսի $r(z)$ ռացիոնալ ֆունկցիա, որ $\left|r(z^0)\right| \geqslant \|r\|_K$: Դիտարկենք

$$r_1(z) = \frac{1}{r(z) - r(z^0)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ռացիոնալ ֆունկցիան, որտեղ P-ն և Q-ն փոխադարձաբար պարզ բազմանդամներ են: Քանի որ $r_1(z)$-ը հոլոմորֆ է K-ի վրա, ապա Q-ն K-ի վրա զրոներ չունի: Մյուս կողմից, $Q(z^0) = 0$, այնպես որ $Q(z^0) \notin Q(K)$, այսինքն՝ $z^0 \notin A$:

Խնդիր 34. Դիցուք $z^0 \in \widehat{K}$, այսինքն $\left|P(z^0)\right| \leqslant \|P\|_K$ ցանկացած P բազմանդամի համար: Անընդհատության շնորհիվ ցանկացած $f \in$ $\in P(K)$ ֆունկցիայի համար $\left|f(z^0)\right| \leqslant \|f\|_K$: Այս անհավասարությունը նշանակում է, որ «z^0 կետում արժեք» ֆունկցիոնալը անընդհատ է (նրա նորմը չի գերազանցում մեկ թիվը): Ակնհայտ է, որ այդ ֆունկցիոնալը և գծային է, և մուլտիպլիկատիվ:

Այժմ ենթադրենք $m \in M$ և $z_k^0 = m(z_k)$, $k = 1, \ldots, n$: m-ի գծային և մուլտիպլիկատիվ լինելուց հետևում է, որ ամեն մի P բազմանդամի համար

$$P(z^0) = P\left(m(z_1), \ldots, m(z_n)\right) = m\left(P(z_1, \ldots, z_n)\right),$$

իսկ m-ի անընդհատության շնորհիվ $m(f) = f(z^0)$ ցանկացած $f \in$ $\in P(K)$ համար: Այսպիսով, m ֆունկցիոնալը «z^0 կետում արժեք» է: Ինչպես հայտնի է, M-ին պատկանող ֆունկցիոնալի նորմը հավասար է մեկի: Հետևաբար,

$$\left|P(z^0)\right| = |m(P)| \leqslant \|m\| \cdot \|P\|_K = \|P\|_K \,,$$

այսինքն, $z^0 \in \widehat{K}$:

Խնդիր 35. Եթե $P(K)$ և $C(K)$ հանրահաշիվները համընկնում են, ապա համընկնում են նաև համապատասխան $M_{P(K)}$ և $M_{C(K)}$ անընդհատ գծային մուլտիպլիկատիվ ֆունկցիոնալների տարածությունները: Ինչպես հայտնի է, $M_{C(K)} = K$, իսկ ըստ 30-րդ խնդրի $M_{C(K)} = \widehat{K}$: Այսպիսով՝ $K = \widehat{K}$, այսինքն՝ K-ն բազմանդամային ուռուցիկ է:

Խնդիր 36. Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի իրական ենթատարածությանը պատկանող K կոմպակտի համար $P(K) = C(K)$, և այս փաստից հետևում է, որ K-ն բազմանդամային ուռուցիկ է (տես 31-րդ խնդիրը):

Խնդիր 37. Եթե $\mathbb{C} \setminus K$ բազմությունը կապակցված չէ, ապա գոյություն ունի այդ բազմության սահմանափակ կապակցված D կոմպոնենտ: Հաշվի առնելով մաքսիմումի սկզբունքը և այն, որ $\partial D \subset K$, ցանկացած $P(z)$ բազմանդամի համար ստանում ենք

$$|P(z)| \leqslant \|P\|_{\partial D} \leqslant \|P\|_K \,, \quad \text{երբ } z \in D \,:$$

Ուրեմն՝ $D \subset \widehat{K}$ և $K = \widehat{K}$:

Հակառակը, դիցուք $\mathbb{C} \setminus K$ բազմությունը կապակցված է և $z^0 \in$ $\in \mathbb{C} \setminus K$: Վերցնենք իրար հետ չհատվող V_1 և V_2 այնպիսի բաց բազմություններ, որ $K \subset V_1$ և $z^0 \in V_2$: Այնուհետև,

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{երբ } z \in V_1, \\ 1, & \text{երբ } z \in V_2 \end{cases}$$

ֆունկցիան հոլոմորֆ է $K \bigcup \{z^0\}$-ի շրջակայքում: Քանի որ $K \bigcup \{z^0\}$ կոմպակտի լրացումը կապակցված է, ապա ըստ Ռունգեի թեորեմի f-ը այդ կոմպակտի վրա հավասարաչափ մոտարկվում է բազմանդամնե– րով: Վերցնելով այնպիսի P բազմանդամ, որ

$$\|P - f\|_{K\cup\{z^0\}} < 1/2,$$

կստանանք $\|P\|_K < 1/2$ և $|P(z^0) - 1| < 1/2$, և ուրեմն՝ $|P(z^0)| > \|P\|_K$: Քանի որ z^0-ն ցանկացած կետ է $\mathbb{C} \setminus K$-ից, ստանում ենք, որ $K = \widehat{K}$:

Խնդիր 38. Եթե $K \Subset D$, ապա

$$\sup_{z\in K} |P_m(z)| \leqslant r < 1, \ \ m = 1, \ldots, N :$$

Բազմանդամային ուռուցիկ թաղանթի սահմանումից հետևում է

$$\sup_{z\in \widehat{K}} |P_m(z)| = \sup_{z\in K} |P_m(z)| \leqslant r,$$

որտեղից բխում է, որ $\widehat{K} \Subset D$:

Խնդիր 39. Դիցուք $P(z)$-ը բազմանդամ է և

$$z^0 \in \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon \ |z_1| \leqslant 1, \ \ z_2 = 0\right\} :$$

Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի՝

$$|P(z^0)| = \left|P(z_1^0, 0)\right| \leqslant \max_{|z_1|=1} |P(z_1, 0)| = m :$$

Ենթադրենք, թե m արժեքը P ֆունկցիան ընդունում է a կետում: Քննարկենք երկու դեպք.

ա) եթե $a_1 = e^{it}$ և $\delta \leqslant t \leqslant 2\pi$, ապա $a \in M$ և $m = |P(a)| \leqslant \leqslant \max_{z\in M} |P(z)|$,

բ) եթե $a_1 = e^{it}$ և $0 < t < \delta$, ապա $m = |P(a_1, 0)|$ և ըստ մաքսիմումի սկզբունքի՝

$$|P(a_1, 0)| \leqslant \max_{|z_2|=1} |P(a_1, z_2)| \leqslant \max_{z\in M} |P(z)| :$$

Երկու դեպքում էլ

$$\left|P(z^0)\right| \leqslant m \leqslant \max_{z\in M} |P(z)| :$$

Այստեղից հետևում է, որ $z^0 \in \widehat{M}$:

Խնդիր 40. Հապման կետերը բավարարում են

$$\begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2 \\ z_2 = \bar{z}_1 \end{cases}$$

պայմաններին, որոնցից հետևում է, որ $|z_1| = 1$, այսինքն K-ի պրոյեկ– ցիան z_1 հարթության վրա (ինչպես նաև z_2 հարթության վրա) միավոր շրջանագիծ է: Ուրեմն, K-ն կարելի է ներկայացնել

$$\begin{cases} z_1 = e^{it} \\ z_2 = e^{-it} \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

պարամետրական հավասարումների միջոցով: Այստեղից երևում է, որ կամայական $P(z_1, z_2)$ բազմանդամի հետքը K-ի վրա, այսինքն $P(e^{it}, e^{-it})$ ֆունկցիան, t պարամետրից եռանկյունաչափական բազ– մանդամ է: Ըստ Ֆեյերի թեորեմի այդպիսի բազմանդամները հավա– սարաչափ մետրիկայով ամենուրեք խիտ են $C\left([0, 2\pi]\right)$ ֆունկցիաների տարածության մեջ: Վերադառնալով (z_1, z_2) փոփոխականներին, եզ– րակացնում ենք, որ $P(K) = C(K)$:

Խնդիրը լուծենք ուրիշ մեթոդով: Գծային ձևափոխության միջոցով

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ z_2 = \bar{z}_1\right\}$$

հարթությունը արտապատկերենք իրական հարթության վրա (տես 28-րդ խնդրի լուծումը) և ապա կիրառենք Վայերշտրասի թեորեմը: Նկատենք, որ այս եղանակը պիտանի է $\left\{z \in \mathbb{C}^2 : \ z_2 = \bar{z}_1\right\}$ հարթության վրա գտնվող ցանկացած K կոմպակտի համար:

Խնդիր 41. Գնդի եզրի վրա գտնվող կամայական z^0 կետի համար դիտարկենք

$$f(z) = \exp\left\langle \mathrm{z}, \mathrm{z}^0 \right\rangle$$

ֆունկցիան: Կիրառելով Բունյակովսկի–Շվարցի անհավասարությունը, ստանում ենք

$$|f(z)| = \exp \operatorname{Re} \left\langle \mathrm{z}, \mathrm{z}^0 \right\rangle \leqslant \exp \left| \left\langle \mathrm{z}, \mathrm{z}^0 \right\rangle \right| \leqslant \\ \leqslant \exp \left(|\mathrm{z}| \cdot |\mathrm{z}^0| \right) \leqslant \exp 1 = \mathrm{e}, \quad \text{երբ} \quad |\mathrm{z}| \leqslant 1,$$

ընդ որում $\operatorname{Re} \left\langle \mathrm{z}, \mathrm{z}^0 \right\rangle = 1$ հավասարությունը $\overline{B}$-ում տեղի է ունենում միայն z^0 կետում: Այսպիսով՝

$$\begin{cases} |f(z)| < 1, & \text{երբ} \quad z \in \overline{B} \setminus \{z^0\} \\ |f(z^0)| = \exp 1 = \mathrm{e}, \end{cases}$$

այսինքն՝

$$|f(z^0)| > |f(z)|, \quad \text{երբ} \quad z \in \overline{B} \setminus \{z^0\} :$$

Դա նշանակում է, որ կամայական եզրային z^0 կետ պիկի կետ է, որտեղից հետևում է պնդումը:

Խնդիր 42. Պարզության համար դիտարկենք

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^2 \colon \; |z_1| < 1, \; |z_2 < 1 \right\}$$

միավոր բիդիսկի դեպքը: Վերցնենք $f \in \mathcal{O}(E) \cap C(\overline{E})$ ֆունկցիան: Ըստ մաքսիմումի սկզբունքի, $M = \max\limits_{z \in \overline{E}} |f(z)|$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է ինչ-որ $a = (a_1, a_2)$ եզրային կետում: a_1 և a_2 թվերից գոնե մեկը մոդուլով հավասար է մեկի. որոշակիության համար դիցուք $|a_2| = 1$: $f(z_1, a_2)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\{|z_1| \leqslant 1\}$ փակ շրջանում, հոլոմորֆ է $\{|z_1| < 1\}$-ում (տես 25-րդ խնդիրը) և մոդուլով հասնում է մաքսիմումին a_1 կետում: Ուրեմն, կամ $|a_1| = 1$, և այս դեպքում a-ն պատկանում է Γ հենքին, կամ

$$|f(z_1, a_2)| \equiv M, \quad \text{երբ} \quad \{|z_1| \leqslant 1\} :$$

Մասնավորապես, $|f(1, a_2)| = 1$, և այս դեպքում M արժեքը նորից ընդունվում է Γ-ին պատկանող $(1, a_2)$ կետում: Այսպիսով՝ $\mathcal{O}(E) \bigcap C(\overline{E})$

դասի կամայական ֆունկցիա իր մոդուլի մաքսիմումը ընդունում է Γ հենքի վրա, ուրեմն, $S(E) \subset \Gamma$: Մյուս կողմից, ցանկացած $z^0 \in \Gamma$ կետի համար $f(z) = (z_1 + z_1^0)(z_2 + z_2^0)$ ֆունկցիան ունի պիկ z^0-ում, այսինքն՝

$$\left|f(z^0)\right| > |f(z)|, \quad \text{երբ} \;\; z \in \overline{E} \setminus \{z^0\}:$$

Հետևաբար, $\Gamma \subset B(E)$: Հաշվի առնելով, որ միշտ $B(E) \subset S(E)$, ստանում ենք $B(E) = S(E) = \Gamma$:

Խնդիր 43.

ա) Դիցուք $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \partial D$: Եթե $|z_1^0| = 1$, ապա $\dfrac{1}{z_1 - z_1^0}$ ֆունկցիան z^0 կետում արգելքի ֆունկցիա է, այսինքն՝ այն D-ում հոլոմորֆ է և z^0 կետին մոտենալիս սահմանափակ չէ: Իսկ եթե $|z_1^0| < 1$, ապա որպես արգելքի ֆունկցիա հանդես է գալիս $\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1^0 - z_2\bar{z}_2^0}$ ֆունկցիան: Ըստ արգելքի մասին թեորեմի D-ն հոլոմորֆության փիրույթ է:

բ) Դիցուք $\overline{D} \subset G$ և G-ն հոլոմորֆության փիրույթ է: Քանի որ $(0,0) \in G$, ապա $\left\{z \in \mathbb{C}^2\colon \; |z_1| < \varepsilon, \; |z_2| < \varepsilon\right\} \subset G$ բավականաչափ փոքր ε-ի համար: Այնուհետև, E միավոր բիդիսկը

$$D_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon \; |z_1| < 1, \; |z_2| < \varepsilon\right\} \bigcup D$$

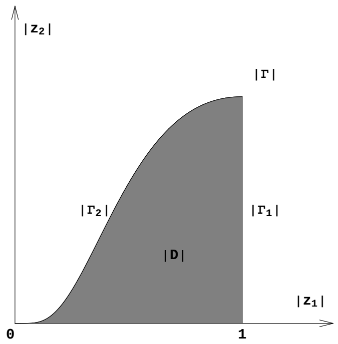
կրկնակի շրջանաձև փիրույթի հոլոմորֆ ընդլայնումն է, որովհետև E-ն D_1-ը պարունակող ամենափոքր լրիվ կրկնակի շրջանաձև փիրույթն է: Հաշվի առնելով, որ $G \supset D$ և որ G-ն հոլոմորֆության փիրույթ է, այստեղից եզրակացնում ենք, որ $G \supset \supset E$: Ստացվեց, որ $\overline{D}$-ն պարունակող ցանկացած հոլոմորֆության փիրույթ պարունակում է նաև E-ն, այսինքն $\overline{D}$-ն չի կարող լինել հոլոմորֆության փիրույթների հատում:

Խնդիր 44. D փիրույթի եզրը բաղկացած է

$$\Gamma_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon \; |z_1| = 1, \; |z_2| \leqslant 1\right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| \leqslant 1, \ |z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|} \right\}$$

փակ բազմություններից, որոնց $\Gamma = \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ հատումը միավոր բիդիսկի հենքն է (գծագրում տրված է D տիրույթի ռեյնհարտյան դիագրամը):



Վերցնենք $f \in \mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ և $z^0 = (z_1^0, z_2^0) \in \Gamma_1$: Ճիշտ այնպես, ինչպես 38-րդ խնդրի լուծման մեջ, ապացուցվում է, որ եթե $|f|$-ը ընդունում է իր ամենամեծ արժեքը z^0 կետում, ապա այդ արժեքը այն ընդունում է նաև Γ-ին պատկանող ինչ-որ կետում: Ուրեմն, $S(D) \subset \subset \Gamma_2$: Դիտարկենք

$f_{n,m}(z) = z_1^{-n} z_2^m, \ n, m = 1, 2, \ldots$

ֆունկցիաները: Հեշտ է տեսնել, որ նրանք պատկանում են $\mathcal{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ դասին: Անալիզի սովորական մեթոդներով ցույց է տրրվում, որ $\max\limits_{\overline{D}} |f_{n,m}|$ արժեքը ֆունկցիան ընդունում է $(z_1^{n,m}, z_2^{n,m}) \in \Gamma_2$ կետում, որտեղ $|z_1^{n,m}| = \exp(-n/2m)$: Այդ կետերը Γ_2-ի վրա կազմում են ամենուրեք խիտ բազմություն, հետևաբար $\Gamma_2 \subset S(D)$: Այնուհետև նկատենք, որ $\mathcal{O}(D)$-ին պատկանող կամայական ֆունկցիա անալիտիկորեն շարունակվում է E միավոր բիդիսկի փակման վրա: Ուստի $B(D) = \Gamma$ (տես 38-րդ խնդիրը):

Խնդիր 45. Պարզության համար ենթադրենք որ f-ը հոլոմորֆ է D-ի փակման վրա: Դիտարկենք

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1|=2} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} \, d\zeta_1$$

Կոշիի տիպի ինտեգրալը: Պարամետրից կախված ինտեգրալների հայտնի հատկություններից հետևում է, որ F-ը հոլոմորֆ է ըստ z_1-ի $\{|z_1| < 2\}$ շրջանում և ըստ z_2-ի $\{|z_2| < 2\}$-ում: Համաձայն Հարտոգսի թեորեմի, F-ը հոլոմորֆ է $\left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 2\right\}$ բիդիսկում: Ըստ Կոշիի ինտեգրալային բանաձևի

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1|=2} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1,$$

երբ $z \in G = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 2,\ 1 < |z_2| < 2\right\} \subset D$: Միակության թեորեմի համաձայն $f(z) \equiv F(z)$ ամենուրեք D-ում, այսինքն F-ը հանդիսանում է f-ի հոլոմորֆ շարունակությունը

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 2\right\}$$

երկշրջանի վրա:

Բերենք խնդրի մի այլ լուծում: D տիրույթում f-ը վերլուծենք

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k_1 k_2} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \tag{22}$$

Լորանի շարքի: Քանի որ D-ն պարունակում է կետեր, որոնց համար $z_1 = 0$ (կամ $z_2 = 0$), ապա (22) շարքում մասնակցում են z_1-ի (համապատասխանաբար՝ z_2-ի) միայն ոչ բացասական աստիճանները, այսինքն՝ (22)-ը աստիճանային շարք է: Ըստ Աբելի թեորեմի այն զուգամիտում է ամբողջ

$$\left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 2\right\}$$

բիդիսկում և նրա գումարը հանդիսանում է f ֆունկցիայի որոնելի շարունակությունը:

Խնդիր 46. Ապացուցենք, որ $D_1 \times D_2$ տիրույթում հոլոմորֆ

$$F(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\partial D_1 \times \partial D_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2$$

ֆունկցիան f-ի հոլոմորֆ շարունակությունն է:

Դիցուք $\varepsilon > 0$ և $D_k^{\varepsilon} = \{tz_k\colon\ z_k \in D_k,\ \ 0 \leqslant t < \varepsilon\}$, $\ k = 1, 2$: Բավականաչափ փոքր ε-ի համար $D_1^{\varepsilon} \times D_2^{\varepsilon}$ փիրույթը իր փակման հետ միասին ընկած է $(0, 0)$ կետի այն շրջակայքում, որտեղ f-ը հոլոմորֆ է: Ըստ Կոշիի բանաձևի՝

$$f(z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\partial D_1^{\varepsilon} \times \partial D_2^{\varepsilon}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2, \quad \text{երբ } z \in D_1^{\varepsilon} \times D_2^{\varepsilon}:$$

Կառուցենք

$$K^{\varepsilon} = \left\{tz \in \mathbb{C}^2\colon\ z \in \partial D_1 \times \partial D_2,\ \ \varepsilon < t < 1\right\}$$

եռաչափ մակերևույթը, որը սահմանափակված է մի կողմից $\partial D_1^{\varepsilon} \times$ $\times\ \partial D_2^{\varepsilon}$-ով, իսկ մյուս կողմից՝ $\partial D_1 \times \partial D_2$-ով: Քանի որ

$$\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$$

ֆունկցիան հոլոմորֆ է $\overline{K^{\varepsilon}}$-ի շրջակայքում, երբ $z \in D_1^{\varepsilon} \times D_2^{\varepsilon}$, ապա ըստ Կոշի–Պուանկարեի թեորեմի

$$\iint\limits_{\partial D_1^{\varepsilon} \times \partial D_2^{\varepsilon}} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 = \\ = \iint\limits_{\partial D_1 \times \partial D_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1 \wedge d\zeta_2,$$

այսինքն, $f(z) = F(z)$, երբ $z \in D_1^{\varepsilon} \times D_2^{\varepsilon}$: Նկատենք, որ D_1 և D_2 փիրույթների աստղաձև լինելուց հետևում է, որ $K \subset \overline{D_1} \times \overline{D_2}$: Ըստ միակության թեորեմի $f(z) = F(z)$ ամենուրեք K-ի շրջակայքում, ինչը նշանակում է, որ F ֆունկցիան f-ի շարունակությունն է:

Խնդիր 47. Դիցուք $\zeta^0 = (0, \rho)$ կետը պատկանում է D փիրույթի եզրին: Այդ դեպքում

$$S = \left\{z \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1| < \rho,\ z_2 = \rho\right\}$$

անալիտիկ մակերևույթը պարունակում է ζ^0-ն, իսկ նրա

$$\partial S = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| = \rho,\ z_2 = \rho\right\}$$

եզրը ընկած է D-ում: Դիտարկենք

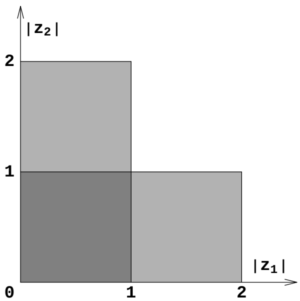
$$S_n = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < \rho,\ z_2 = \rho + \frac{1}{n}\right\}$$

անալիտիկ մակերևույթների հաջորդականությունը: Պարզ է, որ

$$S_n \subset D, \quad S_n \to S \quad \text{և} \ \partial S_n \to \partial S :$$

Դա նշանակում է, որ D տիրույթը ζ^0 եզրային կետում Լևիի իմաստով ոչ ուռուցիկ է, ուրեմն, D-ն հոլոմորֆության տիրույթ չէ:

Խնդիր 48. Դիտարկենք հետևյալ բիդիսկերը՝



$D_1 = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 2\right\}$ և $D_2 = \left\{z \in \mathbb{C}^2 \colon\ |z_1| < 2,\ |z_2| < 1\right\}$: (Գծագրում տրված են նրանց ռեյնհարդթյան դիագրամները): Նրանք հոլոմորֆության տիրույթներ են: Մյուս կողմից, $D = D_1 \bigcup D_2$ միավորումը հանդիսանում է լրիվ, կրկնակի շրջանաձև, բայց լոգարիթմորեն ոչ ուռուցիկ տիրույթ: Ըստ Հարտոգսի թեորեմի D-ն հոլոմորֆության տիրույթ չէ:

Խնդիր 49. Ցուցում: Հաջորդաբար n անգամ կիրառել Պուասոնի բանաձևը միաչափ դեպքի համար:

Խնդիր 50. Նախ նկատենք, որ կամայական $f \in C(\Gamma)$ ֆունկցիայի համար

$$\sup_{z \in E} |P[f](z)| \leqslant \|f\|_\Gamma :$$

Դա հետևում է այն բանից, որ Պուասոնի կորիզը դրական է և նրա ինտեգրալը հենքով հավասար է մեկի: Այնուհետև

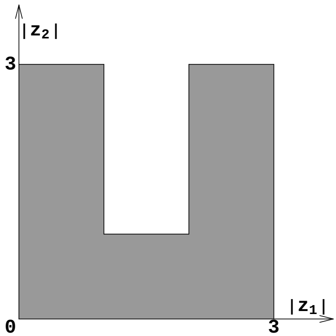
$$0 \leqslant \sup_{z\in E} |P[f_k](z) - |P[f](z)| = \sup_{z\in E} |P[f_k - f](z)| \leqslant \|f_k - f\|_\Gamma \to 0,$$

որտեղից հետևում է, որ $\lim_{k\to\infty} = P[f]$ հավասարաչափ E-ի վրա:

Խնդիր 51. D տիրույթը ծածկենք

$$U_1 = \{z\colon\ |z_1| < 1,\ |z_2| < 3\} \bigcup \{z\colon\ |z_1| < 3,\ |z_2| < 1\}$$
$$U_2 = \{z\colon\ |z_1| < 3,\ |z_2| < 1\} \bigcup \{z\colon\ 2 < |z_1| < 3,\ |z_2| < 3\}$$

երկու շրջակայքերից կազմված համակարգով: Վերցնենք U_1-ում $f_1(z) = 1/(z_2 - 2)$ մերոմորֆ ֆունկցիան, իսկ U_2-ում՝ $f_2(z) \equiv 0$: Ենթադրենք թե (U_k, f_k), $k = 1, 2$ տվյալներով Կուզենի առաջին հիմնախնդիրն ունի լուծում: Դա նշանակում է, որ գոյություն ունի D-ում մերոմորֆ f ֆունկցիա,



որը U_1-ում համարժեք է f_1-ին, իսկ U_2-ում՝ f_2-ին (հիշեցնենք, որ մերոմորֆ ֆունկցիաները համարվում են համարժեք որևէ տիրույթում, եթե նրանց տարբերությունը հոլոմորֆ է այդ տիրույթում): Բայց այդ դեպքում $f - f_2 = f$ ֆունկցիան անալիտիկորեն կշարունակվեր $\{z\colon\ |z_1| < 3,\ |z_2| < 3\}$ երկշրջանի մեջ և չէր լինի համարժեք f_1-ին U_1-ում: Ստացանք հակասություն:

Խնդիր 52. Ըստ Ֆեյերի թեորեմի գոյություն ունի $R_k(e^{i\theta})$ եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականություն, որը հավասարաչափ ճգտում է f-ին: $R_k(e^{i\theta})$ ֆունկցիաները հանդիսանում են համապատասխան $R_k(z)$ n-հարմոնիկ ֆունկցիաների հետքերը Γ-ի վրա, ուրեմն (տես 46-րդ խնդիրը),

$$R_k(z) = P[R_k](z), \quad z \in E:$$

Համաձայն 47-րդ խնդրի՝ $R_k(z)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է E-ի, ուստի նաև $\overline{E}$-ի վրա: Սահմանային ֆունկցիան, որպես անընդհատ ֆունկցիաների հավասարաչափ սահման անընդհատ է $\overline{E}$-ի վրա, իսկ E-ում այն համընկնում է $P[f]$-ի հետ, ուստի այդ ֆունկցիան հանդիսանում է $P[f]$-ի անընդհատ շարունակությունը $\overline{E}$-ի վրա:

Խնդիր 53. *Անհրաժեշտություն*: Դիցուք $F \in \mathcal{O}(E)\bigcap C(\overline{E})$ և $F|_\Gamma = f$: Որոշակիության համար ենթադրենք, թե $k_n \geqslant 0$: Ունենք

$$\int\limits_\Gamma f(\zeta)\zeta^k d\zeta = \int\limits_\Gamma F(\zeta)\zeta^k d\zeta =$$

$$= \int\limits_{|\zeta_1|=1} \zeta_1^{k_1}\, d\zeta_1 \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=1} \zeta_n^{k_n} F\left(\zeta_1, \ldots, \zeta_n\right)\, d\zeta_n = 0,$$

քանի որ F-ը հոլոմորֆ է ըստ ζ_n-ի $\{|\zeta_n| < 1\}$ շրջանում (տես 25-րդ խնդիրը), և ըստ Կոշիի թեորեմի ներքին ինտեգրալը հավասար է զրոյի:

Բավարարություն: Պուասոնի կորիզը վերլուծենք շարքի

$$P\left(re^{i\varphi}; e^{i\theta}\right) = P\left(r_1e^{i\varphi_1}, \ldots, r_ne^{i\varphi_n}; e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k_1 \ldots k_n = -\infty}^{+\infty} r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} e^{ik\cdot(\theta-\varphi)},$$

որտեղ $k \cdot \theta = k_1\theta_1 + \cdots + k_n\theta_n$: Այդ վերլուծությունից հետևում է, որ

$$P[f] = \int\limits_\Gamma P\left(re^{i\varphi}; e^{i\theta}\right) f(e^{i\theta})\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k_1 \ldots k_n = -\infty}^{+\infty} r_1^{|k_1|} \cdots r_n^{|k_n|} \int\limits_\Gamma f(e^{i\theta}) e^{ik\cdot\theta}\, d\theta : \qquad (23)$$

Եթե $k_1, \ldots, k_n$ թվերից որևէ մեկը դրական է, ապա

$$\int\limits_\Gamma f(e^{i\theta}) e^{ik\cdot\theta}\, d\theta = \int\limits_\Gamma f(e^{i\theta}) e^{ik_1\theta_1} \cdots e^{ik_n\theta_n}\, d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\zeta_1^{k_1}\cdots\zeta_n^{k_n}\frac{d\zeta_1}{i\zeta_1}\wedge\cdots\wedge\frac{d\zeta_n}{i\zeta_n} = \frac{1}{i^n}\int\limits_{\Gamma}\zeta^{k-1}f(\zeta)\,d\zeta = 0$$

համաձայն խնդրի պայմանի: Այսպիսով, (23) շարքում մնում են միայն ոչ դրական k_i-երին համապատասխանող գումարելիները: Նշանակե–լով $k=-m$ և

$$a_m = \int\limits_{\Gamma} f(e^{i\theta})e^{-im\cdot\theta}\,d\theta,$$

(23)-ից ստանում ենք, որ

$$P[f] = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{m_1\ldots m_n=0}^{+\infty} a_m r_1^{m_1}\cdots r_n^{m_n}e^{im\cdot\varphi} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{m_1\ldots m_n=0}^{+\infty} a_m z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}, \qquad z\in E:$$

Ուրեմն, $P[f]$-ը հոլոմորֆ է և շարունակվում է մինչև $\mathcal{O}(E)\bigcap C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա (տես 48-րդ խնդիրը):

Խնդիր 54. Դիցուք $k=(k_1,\ldots,k_n)$, որտեղ k_ν թվերը ամբողջ են և գոնե մեկը ոչ բացասական է, օրինակ, $k_n\geqslant 0$: Ունենք

$$\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\zeta^k d\zeta = \int\limits_{|\zeta_1|=1}\zeta_1^{k_1}\,d\zeta_1\cdots\int\limits_{|\zeta_n|=1}\zeta_n^{k_n}f\left(\zeta_1,\ldots,\zeta_n\right)\,d\zeta_n = 0,$$

քանի որ ըստ պայմանի f-ը $\{|\zeta_n|<1\}$ շրջանում հոլոմորֆ է ζ_n-ի նկատմամբ: Համաձայն 49-րդ խնդրի գոյություն ունի $F\in\mathcal{O}(E)\bigcap C(\overline{E})$ ֆունկցիա, որը համընկնում է f-ի հետ Γ հենքի վրա: ∂E-ին պատկա–նող $\Delta_{j,a}$ շրջաններում f և F ֆունկցիաները հոլոմորֆ են (f-ը՝ ըստ պայմանի, իսկ F-ը՝ ըստ 21-րդ խնդրի): Այն փաստից, որ $F|_{\Gamma}=f|_{\Gamma}$, օգտվելով միակության թեորեմից, հեշտությամբ ցույց է տրվում, որ $F|_{\Delta_{j,a}}=f|_{\Delta_{j,a}}$: E պոլիդիսկի եզրը սպառվում է $\Delta_{j,a}$ փիպի շրջաններով, ուստի $F|_{\partial E}=f|_{\partial E}$, այսինքն, F-ը հանդիսանում է f-ի շարունակությունը մինչև $\mathcal{O}(E)\bigcap C(\overline{E})$ դասի ֆունկցիա:

Խնդիր 59. Ցուցում: Օգտվել Հյոլդերի անհավասարությունից:

Խնդիր 60. Ցուցում: Օգտվել միջին երկրաչափականի և միջին թվաբանականի վերաբերյալ հետևյալ անհավասարությունից՝

$$e^{\int p \ln f\,dx} \leqslant \int p\,f\,dx, \quad \text{եթե} \quad \int p\,dx = 1, \;\; p \geqslant 0, \;\; f \geqslant 0 :$$

Խնդիր 63. Որոնելի $V_{2n}(B_n)$ ծավալի համար ակնհայտորեն ունենք

$$V_{2n}(B_n) = \int\limits_{x_1^2+y_1^2+\cdots+x_n^2+y_n^2\leqslant 1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n :$$

Անցնենք բևեռային $x_k + iy_k = r_k e^{i\varphi_k}$ կոորդինատների: Քանի որ $dx_k \wedge dy_k = r_k\,dr_k \wedge d\varphi_k$, ապա

$$V_{2n}(B_n) = \int\limits_{r_1^2+\cdots+r_n^2\leqslant 1} r_1\cdots r_n\,dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n \int\limits_{\substack{0\leqslant\varphi_i\leqslant 2\pi\\ i=1,\ldots,n}} d\varphi_1 \wedge \ldots \wedge d\varphi_n =$$

$$= \pi^n \int\limits_{\substack{t_1\geqslant 0,\ldots,t_n\geqslant 0\\ t_1+\cdots+t_n\leqslant 1}} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n : \qquad (24)$$

Ստացված ինտեգրալը հաշվելու համար նշանակենք

$$T_n(h) = \int\limits_{\substack{t_1\geqslant 0,\ldots,t_n\geqslant 0\\ t_1+\cdots+t_n\leqslant h}} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n :$$

Կատարելով $t_1 = ht_1', \ldots, t_n = ht_n'$ փոփոխականների փոխարինում՝ համոզվում ենք, որ $T_n(h) = h^n T_n(1)$: Այնուհետև՝

$$T_n(1) = \int\limits_0^1 dt_n \int\limits_{\substack{t_1\geqslant 0,\ldots,t_{n-1}\geqslant 0\\ t_1+\cdots+t_{n-1}\leqslant 1-t_n}} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_{n-1} =$$

$$= \int\limits_0^1 T_{n-1}(1-t_n)dt_n = T_{n-1}(1)\int\limits_0^1 (1-t_n)^{n-1}dt_n = \frac{1}{n}T_{n-1}(1):$$

Ստացված անդրադարձ հարաբերակցությունից բխում է $T_n(1) = \dfrac{1}{n!}$: Տեղադրելով (24)-ի մեջ, ստանում ենք

$$V_{2n}(B_n) = \frac{\pi^n}{n!}:$$

Ուրիշ ապացույց: $\mathbb{C}^n$-ի կետը նշանակենք (z,w)-ով, որտեղ $z \in \mathbb{C}^1$ և $w \in \mathbb{C}^{n-1}$: Այդ դեպքում

$$V_{2n}(B_n) = \int_{B_n} dV_{2n} = \int_{B_1}\int_{(1-|z|^2)^{1/2}B_{n-1}} dV_{2n-2}(w)\,dV_2(z):$$

Աջ մասի ներքին ինտեգրալը հավասար է $\mathbb{C}^{n-1}$ տարածության $(1-|z|^2)^{1/2}$ շառավղով գնդի ծավալին: Ուրեմն

$$V_{2n}(B_n) = V_{2n-2}(B_{n-1})\int_{B_1}(1-|z|^2)^{(2n-2)/2}dV_2(z):$$

Անցնելով հարթության վրա բևեռային կոորդինատների՝ կստանանք

$$V_{2n}(B_n) = V_{2n-2}(B_{n-1})\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{2n-2}{2}} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{n}V_{2n-2}(B_{n-1}):$$

Ստացված անդրադարձ բանաձևից և $V_2(B_1) = \pi$ հավասարությունից կստանանք

$$V_{2n}(B_n) = \frac{\pi^n}{n!}:$$

Խնդիր 64. Գտնենք կապ $V_n(B_n)$-ի և $s_n(S_n)$-ի միջև:

$$V_n\big((1+h)B_n\big) - V_n(B_n) = \big((1+h)^n - 1\big)V_n(B_n) = s_n(S_n)h + o(h):$$

Բաժանելով h-ի վրա և անցնելով սահմանի երբ $h \to 0$, ստանում ենք $nV_n(B_n) = s_n(S_n)$:

Խնդիր 65. Ցուցում: Դիցուք $r_1 < r_2$ և A-ն որևէ բաց բազմություն է S-ի վրա: E-ով նշանակենք բոլոր $r\zeta$ կետերի բազմությունը, որոնց համար $r_1 < r < r_2$ և $\zeta \in A$: Ստուգել, որ բանաձևը ճիշտ է E-ի բնութագրիչ ֆունկցիայի համար, այնուհետև կատարել անցում կամա–յական բորելյան բազմության բնութագրիչ ֆունկցիայի դեպքին:

Խնդիր 69. Պատասխան:

$$K_U(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1 - z_j\bar{\zeta}_j\right)^2}:$$

Խնդիր 73. Ցուցում: Դիտարկել $\widetilde{z} \mapsto \widetilde{z}/(1+z_n),\ z_n \mapsto i(1-z_n)/(1+z_n)$ արտապատկերումը:

Խնդիր 74. Ցուցում: Դիտարկել

$$\sigma_\mu(\widetilde{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r(\widetilde{z})} \zeta^\mu \,\frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n} f(\widetilde{z}, z_n)}{f(\widetilde{z}, z_n)}\, dz_n$$

ինտեգրալը, որտեղ $r(\widetilde{z}) = c\,(1 + |\widetilde{z}|^m),\ \mu = 0, 1, 2, \ldots,$ և կիրառել Վայերշտրասի նախապատրաստական թեորեմի ապացուցման մեթոդը (տես [11], էջ 34):

Խնդիր 76. Ցուցում: Օգտվել

$$\int\limits_S f\, d\sigma = \int\limits_S d\sigma(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\widetilde{\zeta}, e^{i\theta}\zeta_n)\, d\theta$$

հավասարությունից, որտեղ $f \in C(S)$:

Խնդիր 79. Շարունակենք f-ը ամբողջ հարթության վրա՝ G-ից դուրս համարելով այն հավասար զրոյի: Այդ դեպքում (9)-ը կարելի է գրել

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{f(z+\zeta)}{\zeta}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

պեսքով, որտեղից երևում է, որ $u \in C^1(G)$, քանի որ ինտեգրալի նշանի տակ կարելի է ածանցել:

Բավական է $\dfrac{\partial u}{\partial \bar z} = f$ հավասարությունը ապացուցել կամայական ֆիքսած $a \in G$ կետի շրջակայքում: Վերցնենք $\psi \in C_0^1(G)$ այնպիսին, որ $\psi \equiv 1$ a կետի որևէ V շրջակայքում: Այդ դեպքում $u = u_1 + u_2$, որտեղ

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G \frac{\psi(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta,$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G \frac{\big(1 - \psi(\zeta)\big) f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar\zeta :$$

Քանի որ $1 - \psi(\zeta) = 0$ V-ում, ապա $\dfrac{\partial u_2}{\partial \bar z} = 0$, երբ $z \in V$: Կատարելով $\zeta \mapsto \zeta + z$ փոփոխականի փոխարինում, գրենք u_1-ը

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G \psi(z+\zeta) f(z+\zeta) \frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta}$$

տեսքով: Հաշվի առնելով, որ

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\big(\psi(z+\zeta) f(z+\zeta)\big) = \frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(z+\zeta) f(z+\zeta)\big)$$

և վերադառնալով նախկին փոփոխականին, ստանում ենք

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1(z)}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(z+\zeta) f(z+\zeta)\big) \frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta}\big(\psi(\zeta) f(\zeta)\big) \frac{d\zeta \wedge d\bar\zeta}{\zeta - z} = \psi(z) f(z) :\end{aligned}$$

Վերջին հավասարությունը հետևում է Կոշի–Գրինի (8) բանաձևից, եթե նրա մեջ u-ի փոխարեն վերցնենք ψf, իսկ որպես G տիրույթ՝ շրջան, որն իր մեջ պարունակում է ψ ֆունկցիայի կրիչը: Հաշվի առնելով, որ $\psi(z)=1$ և $u_1(z)=u(z)$, այստեղից ստանում ենք (10)-ը:

Խնդիր 83. Հեշտ է տեսնել, որ

$$M_f(R,G_1)=e^{R^2},\quad M_f(R,G_2)=e^{2R^2},\quad M_f(R,G_3)=e^{\frac{1}{2}R^2}:$$

Ուրեմն՝ $\rho_f=2,\quad \sigma_f(G_1)=1,\quad \sigma_f(G_2)=2,\quad \sigma_f(G_3)=\frac{1}{2}$:

Խնդիր 87. Պատասխան: $\left\{\rho:\ \rho\in\mathbb{R}^n_+,\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\rho_i}=1\right\}$:

Խնդիր 88. Պատասխան: $\sigma_1\sigma_2=\dfrac{1}{4}$:

Գրականություն

1. **Б. В. Шабат.** *Введение в Комплексный Анализ*, Наука, М, 1985.
2. **В. С. Владимиров.** *Методы теории функций многих комплексных переменных*, М., Физматгиз, 1964.
3. **Б. А. Фукс.** Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., 1962.
4. **G. M. Henkin, J. Leiterer.** *Theory of functions on complex manifolds*, Akademie–Verlag, Berlin, 1984.
5. **Л. Хермандер.** *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.
6. **Р. Ганнинг, Х. Росси.** *Аналитические функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1969.
7. **У. Рудин.** *Теория функций в поликруге*, Мир, М., 1974.
8. **У. Рудин.** *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$, Мир, М., 1984.
9. **Л. А. Айзенберг, Б. С. Зиновьев.** *Элементарные свойства и интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных*, Красноярск, 1977.

10. **А. Г. Витушкин,** *Замечательные факты комплексного анализа.* В сб.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. М. **8** (1985), 5–23.

11. **Ա. Ի. Պետրոսյան,** *Բազմաչափ կոմպլեքս անալիզի հիմունքները*, Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն, Երևան, 2007.

Բովանդակություն

ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ ԱԼԲԵՐՏ ԻՍՐԱՅԵԼԻ

ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԿՈՄՊԼԵՔՍ
ԱՆԱԼԻԶԻՑ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Ստորագրված է տպագրության 15. 01. 08 թ.:
Չափսը՝ 60×84 1/16: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 3.2 մամուլ,
տպագր. 4.0 մամուլ = 3.72 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 200: Պատվեր՝ 8:

Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: