



НОВЫЕ РАЗДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКОГО ТРУДА

Искусство программирования

ТОМ 4

Генерация
всех сочетаний
и разбиений

ВЫПУСК

3

ДОНАЛЬД Э. КНУТ

Новинка

КНУТ

Искусство программирования

Том 4 Выпуск 3

Т 4
В 3



AW

ИСКУССТВО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ТОМ 4, ВЫПУСК 3

THE ART OF COMPUTER PROGRAMMING

VOLUME 4, FASCICLE 3

Generating All Combinations and Partitions

DONALD E. KNUTH *Stanford University*



ADDISON-WESLEY

Upper Saddle River, NJ · Boston · Indianapolis · San Francisco
New York · Toronto · Montréal · London · Munich · Paris · Madrid
Capetown · Sydney · Tokyo · Singapore · Mexico City

ИСКУССТВО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ТОМ 4, ВЫПУСК 3

Генерация всех сочетаний и разбиений

ДОНАЛЬД Э. КНУТ *Станфордский университет*



Москва · Санкт-Петербург · Киев
2007

ББК 32.973.26–018.2.75

К53

УДК 681.142.2

Издательский дом “Вильямс”

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского и редакция канд. техн. наук *И.В. Красикова*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом “Вильямс” по адресу:

info@williamspublishing.com, <http://www.williamspublishing.com>

115419 , Москва, а/я 783; 03150, Киев, а/я 152

Кнут, Дональд, Э.

К53 Искусство программирования, том 4, выпуск 3: генерация всех сочетаний и разбиений. : Пер. с англ. — М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2007. — 208 с. : ил. — Парал. тит. англ.

ISBN 978-5-8459-1132-2 (рус.)

Эта книга представляет собой один из выпусков очередных томов всемирно известной работы *Искусство программирования*, не нуждающейся ни в представлении, ни в рекламе. В данный выпуск вошли разделы четвертого тома, посвященные вопросам генерации всех сочетаний и разбиений. Материалы выпуска в будущем войдут в четвертый том серии, посвященный комбинаторным алгоритмам — возможно, с определенными дополнениями и исправлениями на основе отзывов читателей данного выпуска.

ББК 32.973.26–018.2.75

Все названия программных продуктов являются зарегистрированными торговыми марками соответствующих фирм.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издательства Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Rights to this book were obtained by arrangement with Addison-Wesley Longman, Inc.

Copyright © 2005 by Pearson Education

Russian language edition published by Williams Publishing House according to the Agreement with R&I Enterprises International, Copyright © 2007

ISBN 978-5-8459-1132-2 (рус.)

ISBN 0-201-85394-9 (англ.)

© Издательский дом “Вильямс”, 2007

© by Pearson Education, Inc., 2005

Оглавление

Предисловие	7
7 Комбинаторный поиск	9
7.2 Генерация всех возможных объектов	9
7.2.1 Генерация основных комбинаторных объектов	9
7.2.1.1 Генерация всех n -кортежей	9
7.2.1.2 Генерация всех перестановок	9
7.2.1.3 Генерация всех сочетаний	9
7.2.1.4 Генерация всех разбиений	52
7.2.1.5 Генерация всех разбиений множеств	83
Ответы к упражнениям	114
Предметный указатель	189

От издательства

Вы, читатель этой книги, и есть главный ее критик и комментатор. Мы ценим ваше мнение и хотим знать, что было сделано нами правильно, что можно было сделать лучше и что еще вы хотели бы увидеть изданным нами. Нам интересно услышать и любые другие замечания, которые вам хотелось бы высказать в наш адрес.

Мы ждем ваших комментариев и надеемся на них. Вы можете прислать нам бумажное или электронное письмо, либо просто посетить наш Web-сервер и оставить свои замечания там. Одним словом, любым удобным для вас способом дайте нам знать, нравится или нет вам эта книга, а также выскажите свое мнение о том, как сделать наши книги более интересными для вас.

Посылая письмо или сообщение, не забудьте указать название книги и ее авторов, а также ваш обратный адрес. Мы внимательно ознакомимся с вашим мнением и обязательно учтем его при отборе и подготовке к изданию последующих книг. Наши координаты:

E-mail: info@williamspublishing.com
WWW: <http://www.williamspublishing.com>

Информация для писем из:

России: 115419, Москва, а/я 783
Украины: 03150, Киев, а/я 152

Предисловие

В предисловии к первому изданию я просил читателей не обращать внимания на ошибки. В этом издании я так не поступаю и выражаю благодарность тем читателям, кто не внял моей просьбе.

— *Стюарт Сатерленд (Stuart Sutherland),
Международный словарь психологии (The International Dictionary of
Psychology) (1996)*

Эта брошюра представляет собой третий выпуск книги *Искусство программирования, том 4: Комбинаторные алгоритмы*. Как пояснялось в выпуске 1 к тому 1, я издаю материалы в такой форме в связи с тем, что работа над томом 4 займет еще много лет. Я не могу заставлять читателей ждать так долго; кроме того, мне нужна обратная связь с ними.

В этом выпуске содержатся разделы 7.2.1.3, 7.2.1.4 и 7.2.1.5 очень большой главы, посвященной комбинаторному поиску. В окончательном виде глава 7 должна будет состоять из трех томов (4А, 4В и 4С) — конечно, если это позволит мое здоровье. Глава будет начинаться с краткого обзора теории графов, после которого в разделе 7.1 будут рассматриваться вопросы работы с битами и алгоритмы для работы с булевыми функциями. Раздел 7.2 посвящен генерации всех возможных объектов и начинается с подраздела 7.2.1 — генерации основных комбинаторных объектов. В разделе 7.2.1.1 детально рассматривается вопрос о генерации всех n -элементных кортежей, а генерации всех перестановок посвящен раздел 7.2.1.2. Затем наступает очередь данной брошюры, в которой содержатся разделы 7.2.1.3, где рассматриваются вопросы генерации сочетаний t элементов из n -элементного множества, 7.2.1.4 о разделении целых чисел на слагаемые и 7.2.1.5 о разбиении множеств. Выпуск 4 содержит разделы 7.2.1.6, посвященный деревьям, и 7.2.1.7, темой которого является история комбинаторной генерации. Раздел 7.2.2 посвящен перебору с возвратом в целом. набросок содержания всей главы 7 можно найти на Web-сайте книги *Искусство программирования*.

Написание этого материала доставило мне такое же удовольствие, которое я испытал много лет назад при работе над томом 2 *Искусства программирования*. К своему немалому удовольствию я тогда обнаружил, что основные принципы теории вероятности и теории чисел естественным образом проявляются при изучении алгоритмов для генерации случайных чисел и арифметики; при подготовке к написанию раздела 7.2.1 я нашел, что основные принципы элементарной комбинаторики точно

так же естественным образом проявляются при изучении алгоритмов комбинаторной генерации.

В настоящей брошюре вы найдете множество красивых узоров, образованных сочетаниями, с повторениями и без них, и узнаете об их связи со знаменитыми теоремами экстремальной комбинаторики. Затем я расскажу вам занимательнейшую историю о разбиениях. Поверьте, теория разбиений — одна из интереснейших глав во всей математике. В разделе 7.2.1.5 малоизвестный числовой треугольник, открытый Пирсом (C. S. Peirce), поможет упростить и унифицировать изучение разбиений множеств — еще одной интереснейшей темы. Попутно вы познакомитесь с двумя важными математическими методами анализа алгоритмов — формулой сложения Пуассона и мощным методом седловой точки. Как и в предыдущих выпусках, здесь тоже есть игры и головоломки.

Изначально я намеревался изложить эти темы существенно более кратко, но когда увидел, сколь фундаментальные идеи заложены в комбинаторике, то понял, что не успокоюсь до тех пор, пока не смогу полностью изложить их.

Я благодарю Франка Раски (Frank Ruskey) за смелое решение предложить ранние черновые варианты этого материала студентам и за то, что он поделился со мной результатами этого эксперимента. Мне помогли и многие другие читатели моих черновиков; особенно хочу отметить весьма ценные комментарии Джорджа Клементса (George Clements) и Сванте Янсона (Svante Janson).

Я с удовольствием заплачу 2 доллара 56 центов тому, кто первым сообщит мне о любой замеченной в данном выпуске¹ ошибке — неважно, типографской, технической или исторической. Все существенные предложения по улучшению текста я оцениваю в 32 цента каждое. (Кроме того, если вы найдете лучшее решение упражнения, то сможете покрыть себя неувядающей славой — ваше имя будет опубликовано в окончательном издании книги. :-)

Обозначения, используемые в этой брошюре и не поясненные отдельно, имеют тот же смысл, что и в первых трех томах *Искусства программирования*; их описания приведены в конце каждого тома. Естественно, аналогичное описание обозначений будет приведено в свое время и в томе 4.

Все примеры на машинном языке во всех будущих изданиях *Искусства программирования* основаны на компьютере MMIX, который описан в выпуске 1 к тому 1.

Перекрестные ссылки на пока еще не написанный материал могут выглядеть в тексте как '00'; это заполнитель, который будет заменен реальным числом в будущем.

Приятного чтения!

Стэнфорд, Калифорния

Июнь 2005 Д.Э.К.

*Слово "Каролева" не может находиться в канце страки, в таком слутчай
страку надо разбить в тругом месте.*

*— Александр Хьюм (Alexander Hume), Орфографика аглицкого языка
(Orthographie. . . of the Britan Tongue)*

¹Конечно же, имеется в виду оригинальное издание. — *Примеч. пер.*

Глава 7

Комбинаторный поиск



Начальные разделы этой главы представлены в выпусках 0 и 1 тома 4, запланированным к выпуску в 2006–2007 г.

7.2 Генерация всех возможных объектов

7.2.1 Генерация основных комбинаторных объектов

В этом разделе рассматриваются методы обхода всех возможных объектов некоторого комбинаторного универсума, поскольку часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходим или желателен исчерпывающий перебор...

7.2.1.1 Генерация всех n -кортежей

Начнем с малого — рассмотрим, как получить все 2^n строк из n бинарных цифр...

7.2.1.2 Генерация всех перестановок

Следующей по важности после генерации кортежей из n элементов является задача генерации всех *перестановок* некоторого заданного множества или мультимножества...



Полностью тексты разделов 7.2.1.1 и 7.2.1.2 можно найти в выпуске 2 тома 4.

7.2.1.3 Генерация всех сочетаний

Комбинаторика часто определяется как “изучение перестановок, сочетаний и т.п.”, так что теперь обратим наше внимание на сочетания. *Сочетание из n элементов по t* (combination of n things, taken t at a time), которое часто называют просто t -сочетанием n элементов, представляет собой способ выбора подмножества размера t из данного множества размера n . Из уравнения 1.2.6–(2) мы знаем, что имеется ровно $\binom{n}{t}$ способов сделать это, а из раздела 3.4.2 — как выбрать t -сочетание случайным образом.

Выбор t из n объектов эквивалентен выбору $n - t$ оставшихся элементов. Эту симметрию можно подчеркнуть, полагая везде далее, что

$$n = s + t, \quad (1)$$

и говоря о t -сочетании n элементов как о (s, t) -сочетании. Таким образом, (s, t) -сочетание представляет собой способ разделить $s + t$ объектов на два набора размеров s и t .

Если я спрашиваю, сколько существует способов выбрать 21 элемент из 25, то на самом деле спрашиваю, сколькими способами можно выбрать 4 элемента из 25. Способов выбрать 21 элемент столько же, сколько и оставить 4.

— Август де Морган (*Augustus de Morgan*),
Эссе о вероятностях (*An Essay on Probabilities*) (1838)

Имеется два основных способа представления (s, t) -сочетаний: можно перечислить выбранные элементы $c_t \dots c_2 c_1$, а можно работать с бинарными строками $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, для которых

$$a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = t. \quad (2)$$

Последнее представление содержит s нулей и t единиц, соответствующих невыбранным и выбранным элементам. Представление в виде списка $c_t \dots c_2 c_1$ лучше подходит для случаев, когда элементы являются членами множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ и мы перечисляем их в *убывающем* порядке:

$$n > c_t > \dots > c_2 > c_1 \geq 0. \quad (3)$$

Бинарная запись объединяет эти два представления, поскольку список элементов $c_t \dots c_2 c_1$ соответствует сумме

$$2^{c_t} + \dots + 2^{c_2} + 2^{c_1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k = (a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2. \quad (4)$$

Конечно, мы также можем перечислить позиции $b_s \dots b_2 b_1$ нулей в строке $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, где

$$n > b_s > \dots > b_2 > b_1 \geq 0. \quad (5)$$

Сочетания важны не только потому, что они вездесущи в математике, но и потому, что они эквивалентны многим другим конфигурациям. Например, каждое (s, t) -сочетание соответствует сочетанию $s + 1$ объекта по t с *повторениями*, именуемому также *мультисочетанием* (multicombination), а именно последовательности целых чисел $d_t \dots d_2 d_1$, обладающей тем свойством, что

$$s \geq d_t \geq \dots \geq d_2 \geq d_1 \geq 0. \quad (6)$$

Одна из причин заключается в том, что $d_t \dots d_2 d_1$ удовлетворяет (6) тогда и только тогда, когда $c_t \dots c_2 c_1$ удовлетворяет (3), где

$$c_t = d_t + t - 1, \quad \dots, \quad c_2 = d_2 + 1, \quad c_1 = d_1 \quad (7)$$

Таблица 1. (3, 3)-сочетания и их эквиваленты

$a_5a_4a_3a_2a_1a_0$	$b_3b_2b_1$	$c_3c_2c_1$	$d_3d_2d_1$	$e_3e_2e_1$	$p_3p_2p_1p_0$	$q_3q_2q_1q_0$	Путь
000111	543	210	000	210	4111	3000	
001011	542	310	100	310	3211	2100	
001101	541	320	110	320	3121	2010	
001110	540	321	111	321	3112	2001	
010011	532	410	200	010	2311	1200	
010101	531	420	210	020	2221	1110	
010110	530	421	211	121	2212	1101	
011001	521	430	220	030	2131	1020	
011010	520	431	221	131	2122	1011	
011100	510	432	222	232	2113	1002	
100011	432	510	300	110	1411	0300	
100101	431	520	310	220	1321	0210	
100110	430	521	311	221	1312	0201	
101001	421	530	320	330	1231	0120	
101010	420	531	321	331	1222	0111	
101100	410	532	322	332	1213	0102	
110001	321	540	330	000	1141	0030	
110010	320	541	331	111	1132	0021	
110100	310	542	332	222	1123	0012	
111000	210	543	333	333	1114	0003	

(см. упражнение 1.2.6–60). Есть и другой полезный способ связать сочетания с повторениями и обычные сочетания, предложенный Соломоном Голомбом (Solomon Golomb) [АММ, **75** (1968), 530–531], а именно: определить

$$e_j = \begin{cases} c_j, & \text{если } c_j \leq s; \\ e_{c_j-s}, & \text{если } c_j > s. \end{cases} \quad (8)$$

В этом виде числа $e_t \dots e_1$ не обязательно находятся в убывающем порядке, но мультимножество $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ эквивалентно $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ тогда и только тогда, когда $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$ является множеством (см. табл. 1 и упражнение 1).

Следует отметить, что (s, t) -сочетание также эквивалентно *композиции*¹ (composition) $n + 1$ из $t + 1$ частей в виде упорядоченной суммы

$$n + 1 = p_t + \dots + p_1 + p_0, \quad \text{где } p_t, \dots, p_1, p_0 \geq 1. \quad (9)$$

Связь с (3) в этом случае выглядит следующим образом:

$$p_t = n - c_t, \quad p_{t-1} = c_t - c_{t-1}, \quad \dots, \quad p_1 = c_2 - c_1, \quad p_0 = c_1 + 1. \quad (10)$$

¹Здесь можно было бы говорить о *разбиении*, однако во избежание путаницы в дальнейшем, будем переводить composition как “композиция”, чтобы отличать ее от неупорядоченной суммы, которой является разбиение. — *Примеч. пер.*

Аналогично: если $q_j = p_j - 1$, то мы получаем композицию s из $t + 1$ неотрицательных частей:

$$s = q_t + \dots + q_1 + q_0, \quad \text{где } q_t, \dots, q_1, q_0 \geq 0, \quad (11)$$

которая связана с (6) соотношениями

$$q_t = s - d_t, \quad q_{t-1} = d_t - d_{t-1}, \quad \dots, \quad q_1 = d_2 - d_1, \quad q_0 = d_1. \quad (12)$$

Кроме того, легко видеть, что (s, t) -сочетание эквивалентно пути длиной $s + t$ из угла в угол на сетке $s \times t$, поскольку такой путь содержит s вертикальных и t горизонтальных шагов. Итак, сочетания можно изучать, как минимум, в восьми различных обликах. В табл. 1 проиллюстрированы все $\binom{6}{3} = 20$ возможных сочетаний для случая $s = t = 3$.

На первый взгляд такое количество представлений может только запутать, но большинство из них можно легко вывести непосредственно из бинарного представления $a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Рассмотрим, например, “случайную” битовую строку

$$a_{23} \dots a_1 a_0 = 011001001000011111101101, \quad (13)$$

в которой имеется $s = 11$ нулей и $t = 11$ единиц, так что $n = 24$. Дуальное сочетание $b_s \dots b_1$ перечисляет позиции нулей, а именно:

$$23201917161413121141$$

поскольку крайняя слева позиция имеет номер $n - 1$, а крайняя справа — 0. Основное сочетание $c_t \dots c_1$ перечисляет позиции единиц:

$$222118151098765320.$$

Соответствующее мультисочетание $d_t \dots d_1$ указывает количество нулей справа от каждой единицы:

$$101086222222110.$$

Сочетание $p_t \dots p_0$ перечисляет расстояния между последовательными единицами, если представить наличие дополнительных фиктивных единиц слева и справа от бинарной строки:

$$21335111112121.$$

И наконец, неотрицательное сочетание $q_t \dots q_0$ подсчитывает, сколько нулей находится между “ограждениями”-единицами:

$$10224000001010;$$

т.е. мы имеем

$$a_{n-1} \dots a_1 a_0 = 0^{q_t} 10^{q_{t-1}} 1 \dots 10^{q_1} 10^{q_0}. \quad (14)$$

Пути в табл. 1 также имеют простую интерпретацию (см. упражнение 2).

Лексикографическая генерация. В табл. 1 сочетания $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ и $c_t \dots c_1$ приведены в лексикографическом порядке, который одновременно представляет собой лексикографический порядок $d_t \dots d_1$. Заметим, что дуальные сочетания $b_s \dots b_1$ и соответствующие композиции $p_t \dots p_0$ и $q_t \dots q_0$ расположены в *обратном* лексикографическом порядке.

Лексикографический порядок обычно предлагает наиболее удобный способ генерации комбинаторных конфигураций. На самом деле алгоритм 7.2.1.2L уже решает задачу генерации сочетаний в виде $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, поскольку (s, t) -сочетания в форме битовой строки представляют собой не что иное, как перестановки мультимножества $\{s \cdot 0, t \cdot 1\}$. Этот алгоритм общего назначения может быть упрощен при использовании для данного частного случая (см. также упражнение 7.1.3–19, в котором представлена замечательная последовательность из семи битовых операций, преобразующих любое заданное бинарное число $(a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2$ в лексикографически следующее t -сочетание в предположении, что n не превосходит длину машинного слова).

Однако обратимся к генерации сочетаний в ином виде, а именно $c_t \dots c_2 c_1$; такой вид в большей степени подходит для тех применений сочетаний, которые обычно требуются, и является более компактным, чем битовая строка, при значениях t , малых по сравнению с n . В первую очередь мы должны вспомнить о том, что при очень небольших значениях t с задачей отлично справляются вложенные циклы. Например, при $t = 3$ достаточно приведенных ниже инструкций.

Для $c_3 = 2, 3, \dots, n - 1$ (в указанном порядке) выполнить:

Для $c_2 = 1, 2, \dots, c_3 - 1$ (в указанном порядке) выполнить:

Для $c_1 = 0, 1, \dots, c_2 - 1$ (в указанном порядке) выполнить:

Посетить сочетание $c_3 c_2 c_1$.

(15)

(См. аналогичную ситуацию в 7.2.1.1–(3).)

С другой стороны, когда t — переменная или ее значение не столь малое, мы можем лексикографически генерировать сочетания при помощи следующего общего способа, обсуждавшегося после алгоритма 7.2.1.2L: поиска крайнего справа элемента c_j , который может быть увеличен, после чего все последующие элементы $c_{j-1} \dots c_1$ получают минимально возможные значения.

Алгоритм L (Сочетания в лексикографическом порядке). Этот алгоритм генерирует все t -сочетания $c_t \dots c_2 c_1$ из n чисел $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ для данных $n \geq t \geq 0$. В качестве ограничителей используются дополнительные переменные c_{t+1} и c_{t+2} .

L1. [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow j - 1$ для $1 \leq j \leq t$; установить также $c_{t+1} \leftarrow n$ и $c_{t+2} \leftarrow 0$.

L2. [Посещение.] Посетить сочетание $c_t \dots c_2 c_1$.

L3. [Поиск j .] Установить $j \leftarrow 1$. Затем, пока $c_j + 1 = c_{j+1}$, установить $c_j \leftarrow j - 1$ и $j \leftarrow j + 1$. Эти действия повторяются до тех пор, пока в конечном итоге не выполнится условие $c_j + 1 \neq c_{j+1}$.

L4. [Выполнено?] Завершить выполнение алгоритма, если $j > t$.

L5. [Увеличение c_j .] Установить $c_j \leftarrow c_j + 1$ и перейти к шагу L2. I

Проанализировать время работы этого алгоритма несложно. Шаг L3 устанавливает $c_j \leftarrow j - 1$ сразу после посещения сочетания, для которого $c_{j+1} = c_1 + j$, а количество таких сочетаний равно количеству решений неравенств

$$n > c_t > \dots > c_{j+1} \geq j. \quad (16)$$

Эта формула представляет собой эквивалент $(t - j)$ -сочетания из $n - j$ объектов $\{n - 1, \dots, j\}$, так что присваивание $c_j \leftarrow j - 1$ выполняется в точности $\binom{n-j}{t-j}$ раз. Суммирование для $1 \leq j \leq t$ говорит нам, что количество выполнений шага L3 составляет

$$\binom{n-1}{t-1} + \binom{n-2}{t-2} + \dots + \binom{n-t}{0} = \binom{n-1}{s} + \binom{n-2}{s} + \dots + \binom{s}{s} = \binom{n}{s+1}, \quad (17)$$

или в среднем

$$\binom{n}{s+1} / \binom{n}{t} = \frac{n!}{(s+1)!(t-1)!} / \frac{n!}{s!t!} = \frac{t}{s+1} \quad (18)$$

выполнений за одно посещение. Это отношение меньше 1 при $t \leq s$, так что алгоритм L достаточно эффективен для таких случаев.

Однако значение $t / (s + 1)$ может оказаться весьма большим, когда t близко к n , а s малó. Иногда алгоритм L выполняет присваивание $c_j \leftarrow j - 1$ без необходимости, когда c_j и так равно $j - 1$. Дальнейшее исследование показывает, что не всегда нужно искать индекс j , необходимый в шагах L4 и L5, поскольку зачастую корректное значение j можно предсказать на основе только что выполненных действий. Например, после того как мы увеличили c_4 и сбросили последовательность $c_3c_2c_1$ в начальное значение 210, очередное сочетание неизбежно приведет к увеличению c_3 . Эти наблюдения приводят нас к более эффективной версии алгоритма.

Алгоритм T (Сочетания в лексикографическом порядке). Этот алгоритм подобен алгоритму L, но работает быстрее. В нем также предполагается, что $t < n$.

T1. [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow j - 1$ для $1 \leq j \leq t$; затем установить $c_{t+1} \leftarrow n$, $c_{t+2} \leftarrow 0$ и $j \leftarrow t$.

T2. [Посещение.] (В этот момент j — наименьший индекс, такой, что $c_{j+1} > j$.) Посетить сочетание $c_t \dots c_2c_1$. Затем, если $j > 0$, установить $x \leftarrow j$ и перейти к шагу T6.

T3. [Простой случай?] Если $c_1 + 1 < c_2$, установить $c_1 \leftarrow c_1 + 1$ и вернуться к шагу T2. В противном случае установить $j \leftarrow 2$.

T4. [Поиск j .] Установить $c_{j-1} \leftarrow j - 2$ и $x \leftarrow c_j + 1$. Если $x = c_{j+1}$, установить $j \leftarrow j + 1$ и повторять этот шаг, пока не выполнится условие $x \neq c_{j+1}$.

T5. [Выполнено?] Завершить выполнение алгоритма, если $j > t$.

T6. [Увеличение c_j .] Установить $c_j \leftarrow x$, $j \leftarrow j - 1$ и вернуться к шагу T2. I

Теперь на шаге T2 $j = 0$ тогда и только тогда, когда $c_1 > 0$, так что присваивания на шаге T4 никогда не будут избыточными. В упражнении 6 выполняется полный анализ алгоритма T.

Заметим, что параметр n используется только инициализирующими шагами L1 и T1 алгоритмов L и T, но не в основной их части. Таким образом можно рассматривать процесс генерации первых $\binom{n}{t}$ сочетаний из *бесконечного* списка, которые зависят только от t . Это упрощение является результатом того, что при наших соглашениях список t -сочетаний $n + 1$ элемента начинается со списка t -сочетаний для n элементов; именно поэтому мы использовали лексикографический порядок уменьшающихся последовательностей $c_t \dots c_1$, а не возрастающие последовательности $c_1 \dots c_t$.

Деррик Лемер (Derrick Lehmer) заметил еще одно приятное свойство алгоритмов L и T [*Applied Combinatorial Mathematics*, ed. by E. F. Beckenbach (1964), 27–30]:

Теорема L. Сочетание $c_t \dots c_2 c_1$ посещается после посещения ровно

$$\binom{c_t}{t} + \dots + \binom{c_2}{2} + \binom{c_1}{1} \quad (19)$$

других сочетаний.

Доказательство. Имеется $\binom{c_k}{k}$ сочетаний $c'_t \dots c'_2 c'_1$, таких, что $c'_j = c_j$ для $t \geq j > k$ и $c'_k < c_k$, а именно $c_t \dots c_{k+1}$, за которыми следуют k -сочетания из $\{0, \dots, c_k - 1\}$. ▮

Когда, например, $t = 3$, числа

$$\binom{2}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \binom{3}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}, \binom{3}{3} + \binom{2}{2} + \binom{0}{1}, \dots, \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{3}{1},$$

соответствующие сочетаниям $c_3 c_2 c_1$ в табл. 1, просто пробегают последовательность $0, 1, 2, \dots, 19$. Теорема L дает нам простой способ для понимания *комбинаторной системы счисления* степени t , которая позволяет представить каждое неотрицательное целое N в виде суммы

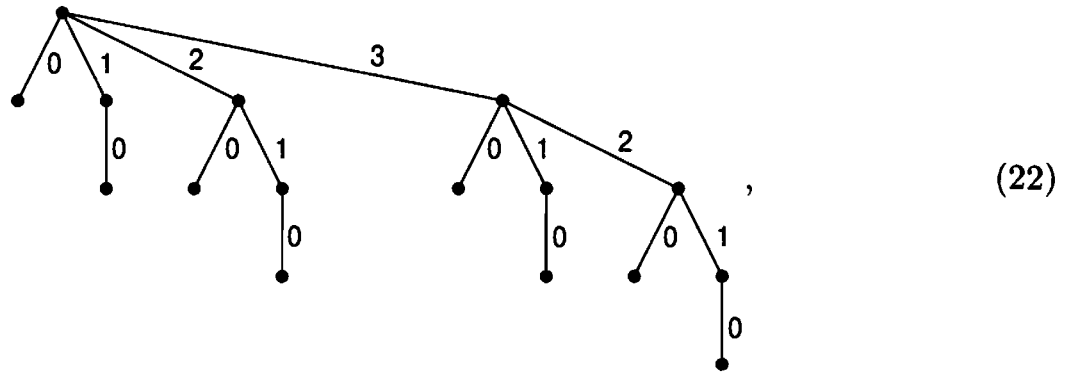
$$N = \binom{n_t}{t} + \dots + \binom{n_2}{2} + \binom{n_1}{1}, \quad n_t > \dots > n_2 > n_1 \geq 0 \quad (20)$$

единственным образом. [См. Ernesto Pascal, *Giornale di Matematiche*, 25 (1887), 45–49.]

Биномиальные деревья. Семейство деревьев, определяемое следующим образом:

$$T_0 = \bullet, \quad T_n = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ T_0 \quad T_1 \quad \dots \quad T_{n-1} \end{array} \quad \text{для } n > 0, \quad (21)$$

возникает в различных важных контекстах и проливает новый свет на генерацию сочетаний. Например, T_4 представляет собой



а дерево T_5 в более художественном исполнении можно увидеть на фронтиспise тома 1 этой серии книг.

Заметим, что T_n очень похоже на T_{n-1} , за исключением дополнительной копии T_{n-1} ; таким образом, всего дерево T_n имеет 2^n узлов. Кроме того, количество узлов на уровне t равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{t}$ — именно благодаря этому факту дерево и называется биномиальным. Последовательность меток, встречающихся на пути от корня к каждому узлу на уровне t , определяет сочетание $c_t \dots c_1$, и все сочетания слева направо расположены в лексикографическом порядке. Таким образом, алгоритмы L и T могут рассматриваться как процедуры обхода узлов биномиального дерева T_n , находящихся на уровне t .

Бесконечное биномиальное дерево T_∞ получается из (21) при $n \rightarrow \infty$. Корень этого дерева имеет бесконечно много ветвей, но каждый узел, за исключением корня на уровне 0, представляет собой корень конечного биномиального поддерева. Все возможные t -сочетания появляются в лексикографическом порядке на уровне t дерева T_∞ .

Давайте познакомимся с биномиальными деревьями поближе, рассматривая все возможные способы упаковки рюкзака. Говоря более строго, предположим, что у нас есть n предметов, которые занимают соответственно w_{n-1}, \dots, w_1, w_0 единиц емкости рюкзака, где

$$w_{n-1} \geq \dots \geq w_1 \geq w_0 \geq 0. \tag{23}$$

Мы хотим сгенерировать все бинарные векторы $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, такие, что

$$a \cdot w = a_{n-1}w_{n-1} + \dots + a_1w_1 + a_0w_0 \leq N, \tag{24}$$

где N — общая емкость рюкзака. Задачу можно сформулировать эквивалентным образом — найти все подмножества C множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$, такие, что $w(C) = \sum_{c \in C} w_c \leq N$; такие подмножества будем называть *допустимыми*. Мы будем записывать допустимые подмножества как $c_1 \dots c_t$, где $c_1 > \dots > c_t \geq 0$. Нумерация индексов отличается от нумерации, принятой в соглашении (3), поскольку в данной задаче t является переменной.

Каждое допустимое подмножество соответствует узлу T_n , и наша цель состоит в том, чтобы обойти все допустимые узлы. Ясно, что родительский узел допустимого узла также является допустимым; это же утверждение справедливо и для левого “братского” узла, если таковой имеется. Следовательно, описанная ниже простая процедура вполне работоспособна.

Алгоритм F (Заполнение рюкзака). Этот алгоритм генерирует все возможные способы $c_1 \dots c_t$ заполнения рюкзака для данных w_{n-1}, \dots, w_1, w_0 и N . Обозначим $\delta_j = w_j - w_{j-1}$ для $1 \leq j < n$.

F1. [Инициализация.] Установить $t \leftarrow 0$, $c_0 \leftarrow n$ и $r \leftarrow N$.

F2. [Посещение.] Посетить сочетание $c_1 \dots c_t$, которое использует $N - r$ единиц емкости рюкзака.

F3. [Попытка добавить w_0 .] Если $c_t > 0$ и $r \geq w_0$, установить $t \leftarrow t + 1$, $c_t \leftarrow 0$, $r \leftarrow r - w_0$ и вернуться к шагу F2.

F4. [Попытка увеличения c_t .] Завершить работу алгоритма при $t = 0$. В противном случае, если $c_{t-1} > c_t + 1$ и $r \geq \delta_{c_t+1}$, установить $c_t \leftarrow c_t + 1$, $r \leftarrow r - \delta_{c_t}$ и вернуться к шагу F2.

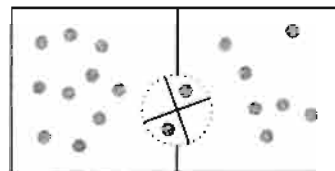
F5. [Удаление c_t .] Установить $r \leftarrow r + w_{c_t}$, $t \leftarrow t - 1$ и вернуться к шагу F4. I

Обратите внимание, что этот алгоритм неявно посещает узлы T_n в прямом порядке, пропуская недопустимые поддеревья. Элемент $c > 0$ размещается в рюкзаке, если он может поместиться в нем, сразу после того, как процедура исследует все возможности использования на этом месте элемента $c - 1$. Время работы алгоритма пропорционально количеству посещенных допустимых сочетаний (см. упражнение 20).

Кстати, классическая “задача о рюкзаке” из исследования операций отличается от описанной: в ней требуется найти допустимое подмножество C , такое, что $v(C) = \sum_{c \in C} v(c)$ максимально, а каждому предмету c назначается значение $v(c)$. Алгоритм F не особенно хорош для решения этой задачи, так как он часто рассматривает случаи, которые могут быть исключены. Например, если C и C' являются подмножествами $\{1, \dots, n - 1\}$, причем $w(C) \leq w(C') \leq N - w_0$ и $v(C) \geq v(C')$, алгоритм F исследует как $C \cup \{0\}$, так и $C' \cup \{0\}$, но последнее подмножество никогда не улучшит максимум. Мы рассмотрим методы для решения классической задачи о рюкзаке позже; алгоритм F предназначен только для случаев, когда все допустимые решения потенциально могут оказаться оптимальными.

Коды Грея для сочетаний. Вместо простой генерации всех сочетаний зачастую предпочтительно посещение их таким образом, что каждое из них получается путем малого изменения его предшественника.

Например, мы можем потребовать того, что Ньенхуис (Nijenhuis) и Вильф (Wilf) называют “алгоритмом двери-вертушки” (revolving door). Представим две комнаты, в которых находятся соответственно s и t человек, и дверь-вертушку между ними. Когда кто-то входит в соседнюю комнату, другой одновременно покидает ее. Можно ли разработать такую последовательность шагов, чтобы каждое (s, t) -сочетание встречалось ровно по одному разу?



Ответ — да, причем существует огромное количество таких схем. Например, одну из них можно получить, если исследовать все n -битовые строки $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ в хорошо известном порядке, соответствующем бинарному коду Грея (раздел 7.2.1.1), но выбрать из них только те, которые имеют ровно s нулей и t единиц. В результате мы получим строки, образующие код двери-вертушки.

Вот доказательство этого факта. Код Грея определяется рекуррентным соотношением $\Gamma_n = 0\Gamma_{n-1}, 1\Gamma_{n-1}^R$ из 7.2.1.1–(5), так что его (s, t) -подпоследовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Gamma_{st} = 0\Gamma_{(s-1)t}, 1\Gamma_{s(t-1)}^R, \quad (25)$$

где $st > 0$. Мы также имеем $\Gamma_{s0} = 0^s$ и $\Gamma_{0t} = 1^t$. Следовательно, по индукции понятно, что Γ_{st} начинается с $0^s 1^t$ и заканчивается $10^s 1^{t-1}$ при $st > 0$. Переход, соответствующий запятой в (25), выполняется от последнего элемента $0\Gamma_{(s-1)t}$ к последнему элементу $1\Gamma_{s(t-1)}$, а именно от $010^{s-1}1^{t-1} = 010^{s-1}11^{t-2}$ к $110^s 1^{t-2} = 110^{s-1}01^{t-2}$ при $t \geq 2$, и удовлетворяет ограничению, накладываемому правилом двери-вертушки. Случай $t = 1$ также подтверждается. Например, Γ_{33} задается столбцами

$$\begin{array}{cccc} 000111 & 011010 & 110001 & 101010 \\ 001101 & 011100 & 110010 & 101100 \\ 001110 & 010101 & 110100 & 100101 \\ 001011 & 010110 & 111000 & 100110 \\ 011001 & 010011 & 101001 & 100011 \end{array} \quad (26)$$

и Γ_{23} можно обнаружить в первых двух столбцах этого массива. Еще один поворот двери выполняет переход от последнего элемента к первому. (Эти свойства Γ_{st} были открыты Д.Э. Миллер (J.E. Miller) в ее диссертации [Columbia University, 1971], а затем независимо Д.Т. Тангом (D.T. Tang) и Ч.Н. Лю (C.N. Liu) [IEEE Trans., C-22 (1973), 176–180]; реализация без использования циклов была представлена Дж.Р. Битнером (J.R. Bitner), Г. Эрлихом (G. Ehrlich) и Э.М. Рейнгольдом (E.M. Reingold), [CACM, 19 (1976), 517–521].)

Когда мы преобразуем битовые строки $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ из (26) в соответствующие списки индексов $c_3 c_2 c_1$, схема сочетаний становится очевидной:

$$\begin{array}{cccc} 210 & 431 & 540 & 531 \\ 320 & 432 & 541 & 532 \\ 321 & 420 & 542 & 520 \\ 310 & 421 & 543 & 521 \\ 430 & 410 & 530 & 510 \end{array} \quad (27)$$

Первый компонент c_3 появляется в неубывающем порядке, но для каждого фиксированного значения c_3 значения c_2 находятся в *невозрастающем* порядке. Для фиксированных же пар значений $c_3 c_2$ значения c_1 вновь находятся в неубывающем порядке. То же самое справедливо и в общем случае: *все сочетания $c_t \dots c_2 c_1$ в коде Грея двери-вертушки Γ_{st} находятся в лексикографическом порядке*

$$\left(c_t, -c_{t-1}, c_{t-2}, \dots, (-1)^{t-1} c_1 \right). \quad (28)$$

Это свойство доказывается по индукции, поскольку при использовании списка индексов при $st > 0$ (25) записывается как

$$\Gamma_{st} = \Gamma_{(s-1)t}, (s+t-1)\Gamma_{s(t-1)}^R. \quad (29)$$

Таким образом, эта последовательность может эффективно генерироваться при помощи следующего алгоритма В.Г. Пейна (W.H. Payne) [ACM Trans. Math. Software, 5 (1979), 163–172].

Алгоритм R (Сочетания двери-вертушки). Этот алгоритм генерирует все t -сочетания $c_t \dots c_2 c_1$ из $\{0, 1, \dots, n-1\}$ в лексикографическом порядке чередующейся последовательности (28) в предположении, что $n > t > 1$. Шаг R3 имеет два варианта — в зависимости от того, четно значение t или нет.

R1. [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow j-1$ для $t \geq j \geq 1$, и $c_{n+1} \leftarrow n$.

R2. [Посещение.] Посетить сочетание $c_t \dots c_2 c_1$.

R3. [Простой случай?] Если t нечетно: если $c_1 + 1 < c_2$, увеличить c_1 на 1 и вернуться к шагу R2, в противном случае установить $j \leftarrow 2$ и перейти к шагу R4. Если t четно: если $c_1 > 0$, уменьшить c_1 на 1 и вернуться к шагу R2, в противном случае установить $j \leftarrow 2$ и перейти к шагу R5.

R4. [Попытка уменьшения c_j .] (В этот момент $c_j = c_{j-1} + 1$.) Если $c_j \geq j$, установить $c_j \leftarrow c_{j-1}$, $c_{j-1} \leftarrow j-2$ и вернуться к шагу R2. В противном случае увеличить j на 1.

R5. [Попытка увеличения c_j .] (В этот момент $c_{j-1} = j-2$.) Если $c_j + 1 < c_{j+1}$, установить $c_{j-1} \leftarrow c_j$, $c_j \leftarrow c_j + 1$ и вернуться к шагу R2. В противном случае увеличить j на 1 и, если $j \leq t$, перейти к шагу R4. **I**

Упражнения 21–25 открывают новые свойства этой интересной последовательности. Одно из них представляет собой красивую пару теореме L: сочетание $c_t c_{t-1} \dots c_2 c_1$ посещается алгоритмом R в точности после посещения

$$N = \binom{c_t + 1}{t} - \binom{c_{t-1} + 1}{t-1} + \dots + (-1)^t \binom{c_2 + 1}{2} - (-1)^t \binom{c_1 + 1}{1} - [t \text{ нечетно}] \quad (30)$$

других сочетаний. Это представление числа N можно назвать “знакопеременной комбинаторной системой счисления” степени t . Одно из следствий, например, заключается в том, что любое положительное целое число может быть единственным образом представлено в виде $N = \binom{a}{3} - \binom{b}{2} + \binom{c}{1}$, где $a > b > c > 0$. Алгоритм R говорит нам, как добавить 1 к числу N в этой системе счисления.

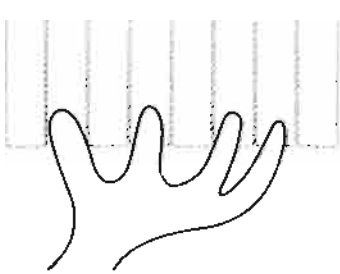
Хотя строки (26) и (27) не расположены в лексикографическом порядке, они представляют собой пример более общей концепции, называющейся *облексным порядком (genlex order)*, название которой придумано Тимоти Волшем (Timothy Walsh). Говорится, что строки последовательности $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ находятся в облексном порядке, когда все строки с общим префиксом расположены последовательно. Например, все 3-сочетания, начинающиеся с 53, в (27) находятся рядом.

Облексный порядок означает, что строки могут быть размещены в структуре луча (trie), как показано на рис. 31 в разделе 6.3, но с произвольным упорядочением дочерних узлов каждого узла. При обходе луча в любом порядке, таком, что каждый узел посещается непосредственно до или непосредственно после своих потомков, все узлы с общим префиксом — т.е. все узлы подлуча — обходятся последовательно.

Это делает облексный порядок весьма удобным, поскольку он соответствует рекурсивным схемам генерации. Многие алгоритмы генерации n -кортежей, с которыми мы встречались, выдают тот или иной облексный порядок. Подобным образом метод “простых изменений” (plain changes) (алгоритм 7.2.1.2Р) посещает перестановки в облексном порядке соответствующей таблицы инверсий.

Метод двери-вертушки из алгоритма R представляет собой облексную подпрограмму, которая на каждом шаге изменяет только один элемент сочетания. Однако этот принцип не всегда выдерживается, так как зачастую приходится одновременно изменять два индекса c_j , чтобы сохранялось условие $c_t > \dots > c_2 > c_1$. Например, алгоритм R изменяет 210 на 320, и в (27) можно найти девять таких изменений.

Источник этого дефекта может быть отслежен в доказательстве того, что (25) удовлетворяет свойству двери-вертушки: мы заметили, что за строкой $010^{s-1}11^{t-2}$ следует строка $110^{s-1}01^{t-2}$, когда $t \geq 2$. Следовательно, рекурсивное построение Γ_{st} включает переходы вида $110^a0 \leftrightarrow 010^a1$, когда подстрока типа 11000 сменяется строкой 01001 или наоборот — словом, когда две единицы пересекают одна другую.



Путь Грея для сочетаний называется *гомогенным*, или *однородным* (*homogeneous*), если на каждом шаге изменяется только один из индексов c_j . Гомогенная схема в виде битовой строки характеризуется тем, что содержит только переходы вида $10^a \leftrightarrow 0^a1$, $a \geq 1$, при переходе от строки к следующей. При гомогенной схеме мы можем, например, сыграть все t -нотные аккорды на n -нотной клавиатуре, перемещая только один палец при переходе от одного аккорда к следующему.

Небольшая модификация (25) дает нам гомогенную облексную схему для (s, t) -сочетаний. Основная идея состоит в построении последовательности, которая начинается с 0^s1^t и заканчивается 1^t0^s — при этом тут же напрашивается следующая рекурсия: пусть $K_{s0} = 0^s$, $K_{0t} = 1^t$, $K_{s(-1)} = \emptyset$ и

$$K_{st} = 0K_{(s-1)t}, 10K_{(s-1)(t-1)}^R, 11K_{s(t-2)} \quad \text{для } st > 0. \tag{31}$$

В местах запятых в этой последовательности расположена строка 01^t0^{s-1} , за которой следует $101^{t-1}0^{s-1}$, и 10^s1^{t-1} , за которой следует 110^s1^{t-2} . Оба эти перехода однородны, хотя второй и требует переноса единицы через s нулей. Сочетания K_{33} при $s = t = 3$ представляют собой

000111	010101	101100	100011	(32)
001011	010011	101001	110001	
001101	011001	101010	110010	
001110	011010	100110	110100	
010110	011100	100101	111000	

в форме битовых строк, а соответствующая схема расположения пальцев имеет вид

210	420	532	510	
310	410	530	540	
320	430	531	541	(33)
321	431	521	542	
421	432	520	543	

При преобразовании однородной схемы для обычных сочетаний $c_t \dots c_1$ в соответствующую схему (6) для сочетаний с повторениями $d_t \dots d_1$ сохраняется свойство, что на каждом шаге изменяется только один индекс d_j . При конвертировании в соответствующие схемы (9) или (11) для сочетаний $p_t \dots p_0$ или $q_t \dots q_0$ при изменении c_j происходит изменение только двух (соседних) частей.

Схемы, близкие к идеальной. Однако мы можем сделать еще лучше! Все (s, t) -сочетания могут быть сгенерированы последовательностью строго гомогенных переходов, представляющих собой либо $01 \leftrightarrow 10$, либо $001 \leftrightarrow 100$. Другими словами, мы можем потребовать, чтобы на каждом шаге единственный индекс c_j изменялся не более чем на 2. Назовем такие схемы *близкими к идеальной* (*near-perfect*).

Столь строгое требование в действительности делает разработку близких к идеальной схем достаточно простой, поскольку доступным оказывается только сравнительно небольшое количество вариантов. Т.А. Дженкинс (Т.А. Jenkyns) и Д. МакКарти (D. McCarthy) заметили, что если ограничиться облексными методами, близкими к идеальному на n -битовых строках, то все такие методы можно легко охарактеризовать следующей теоремой [Ars Combinatoria, 40 (1995), 153–159].

Теорема N. Если $st > 0$, существует ровно $2s$ близких к идеальному способов перечисления всех (s, t) -сочетаний в облексном порядке. В действительности для каждого значения a , $1 \leq a \leq s$ имеется единственная такая последовательность N_{sta} , которая начинается с $1^t 0^s$ и заканчивается $0^a 1^t 0^{s-a}$; прочие s возможностей получаются из них изменением порядка следования их элементов на обратный, т.е. являются последовательностями вида N_{sta}^R .

Доказательство. Теорема определено справедлива при $s = t = 1$; в остальных случаях мы используем индукцию по $s + t$. Последовательность N_{sta} (если таковая существует) должна иметь вид $1X_{s(t-1)}, 0Y_{(s-1)t}$ для некоторых близких к идеальному облексных последовательностей $X_{s(t-1)}$ и $Y_{(s-1)t}$. Если $t = 1$, то последовательность $X_{s(t-1)}$ представляет собой единственную строку 0^s ; следовательно, $Y_{(s-1)t}$ должна представлять собой $N_{(s-1)1(a-1)}$ при $a > 1$ и $N_{(s-1)11}^R$ при $a = 1$. С другой стороны, если $t > 1$, из условия близости к идеалу вытекает, что последняя строка $X_{(s-1)t}$ не может начинаться с 1; следовательно, $X_{(s-1)t} = N_{s(t-1)b}$ для некоторого b . Если $a > 1$, $Y_{(s-1)t}$ должно представлять собой $N_{(s-1)t(a-1)}$, следовательно, b должно быть 1. Аналогично: b должно быть 1 и при $s = 1$. В противном случае мы имеем $a = 1 < s$, и это приводит к $Y_{(s-1)t} = N_{(s-1)tc}^R$ для некоторого c . Переход от $10^b 1^{t-1} 0^{s-b}$ к $0^{c+1} 1^t 0^{s-1-c}$ является близким к идеальному, только если $c = 1$ и $b = 2$. ▮

Таблица 2. Последовательности Чейза для (3, 3)-сочетаний

$A_{33} = \widehat{C}_{33}^R$				$B_{33} = C_{33}$			
543	531	321	420	543	520	432	410
541	530	320	421	542	510	430	210
540	510	310	431	540	530	431	310
542	520	210	430	541	531	421	320
532	521	410	432	521	532	420	321

Доказательство теоремы N дает следующую рекурсивную формулу, когда $st > 0$:

$$N_{sta} = \begin{cases} 1N_{s(t-1)1}, 0N_{(s-1)t(a-1)}, & \text{если } 1 < a \leq s; \\ 1N_{s(t-1)2}, 0N_{(s-1)t1}^R, & \text{если } 1 = a < s; \\ 1N_{1(t-1)1}, 01^t, & \text{если } 1 = a = s. \end{cases} \quad (34)$$

Конечно, также $N_{s0a} = 0^s$.

Пусть $A_{st} = N_{st1}$ и $B_{st} = N_{st2}$. Эти близкие к идеальному последовательности, впервые рассмотренные Филлипом Дж. Чейзом (Phillip J. Chase) в 1976 году, образуются в результате сдвига крайнего слева блока единиц вправо на одну или две позиции соответственно и удовлетворяют следующим взаимно рекуррентным соотношениям:

$$A_{st} = 1B_{s(t-1)}, 0A_{(s-1)t}^R; \quad B_{st} = 1A_{s(t-1)}, 0A_{(s-1)t}. \quad (35)$$

“Чтобы сделать один шаг вперед, сделайте два шага вперед и один шаг назад; чтобы сделать два шага вперед — сделайте первый шаг, а затем второй”. Эти уравнения выполняются для всех целых значений s и t , если мы определим A_{st} и B_{st} как \emptyset при отрицательных s или t , за исключением $A_{00} = B_{00} = \varepsilon$ (пустая строка). Таким образом, A_{st} в действительности выполняет $\min(s, 1)$ шагов вперед, а B_{st} — $\min(s, 2)$ шагов вперед. Например, в табл. 2 приведены листинги для $s = t = 3$ с использованием эквивалентной записи в виде списка индексов $c_3c_2c_1$ вместо битовой строки $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$.

Чейз заметил, что компьютерная реализация этих последовательностей становится проще, если мы определим

$$C_{st} = \begin{cases} A_{st}, & \text{если } s + t \text{ нечетно;} \\ B_{st}, & \text{если } s + t \text{ четно;} \end{cases} \quad \widehat{C}_{st} = \begin{cases} A_{st}^R, & \text{если } s + t \text{ четно;} \\ B_{st}^R, & \text{если } s + t \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (36)$$

[*Congressus Numerantium*, 69 (1989), 215–242.] Тогда мы имеем

$$C_{st} = \begin{cases} 1C_{s(t-1)}, 0\widehat{C}_{(s-1)t}, & \text{если } s + t \text{ нечетно;} \\ 1C_{s(t-1)}, 0C_{(s-1)t}, & \text{если } s + t \text{ четно;} \end{cases} \quad (37)$$

$$\widehat{C}_{st} = \begin{cases} 0C_{(s-1)t}, 1\widehat{C}_{s(t-1)}, & \text{если } s + t \text{ четно;} \\ 0\widehat{C}_{(s-1)t}, 1\widehat{C}_{s(t-1)}, & \text{если } s + t \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (38)$$

Когда бит a_j готов к изменению, путем проверки на четность j можно сказать, в каком месте рекурсии мы находимся.

На самом деле последовательность C_{st} может быть сгенерирована удивительно простым алгоритмом, основанным на общих идеях, применимых к *любой* облексной схеме. Назовем бит a_j в облексном алгоритме *активным*, если его изменение предполагается до того, как будет изменено что-либо слева от него (другими словами, узел активного бита в соответствующем луче не является крайним правым дочерним узлом своего родителя). Предположим, что у нас есть вспомогательная таблица $w_n \dots w_1 w_0$, где $w_j = 1$ тогда и только тогда, когда либо бит a_j активен, либо $j < r$, где r — наименьший индекс, такой, что $a_r \neq a_0$; мы также полагаем $w_n = 1$. В таком случае для поиска следующей за $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ битовой строки можно использовать приведенный ниже метод.

Установить $j \leftarrow r$. Если $w_j = 0$, установить $w_j \leftarrow 1$, $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия, пока не будет достигнуто $w_j = 1$. Выполнение прекращается при $j = n$; в противном случае установить $w_j \leftarrow 0$. Изменить a_j на $1 - a_j$ и выполнить все прочие изменения в $a_{j-1} \dots a_0$ и r , которые применяются в конкретной используемой облексной схеме. (39)

Красота этого подхода основана на том факте, что цикл гарантированно эффективен: можно доказать, что операция $j \leftarrow j + 1$ будет выполняться в среднем менее одного раза для каждого шага генерации (см. упражнение 36).

Анализируя переходы при изменении битов в (37) и (38), можно легко конкретизировать остальные детали.

Алгоритм С (Последовательность Чейза). Этот алгоритм посещает все (s, t) -сочетания $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, где $n = s + t$, в близкой к идеальной последовательности Чейза C_{st} .

- C1.** [Инициализация.] Установить $a_j \leftarrow 0$ для $0 \leq j < s$, $a_j \leftarrow 1$ для $s \leq j < n$ и $w_j \leftarrow 1$ для $0 \leq j \leq n$. Если $s > 0$, установить $r \leftarrow s$; в противном случае установить $r \leftarrow t$.
- C2.** [Посещение.] Посетить сочетание $a_{n-1} \dots a_1 a_0$.
- C3.** [Поиск j и ветвление.] Установить $j \leftarrow r$. Если $w_j = 0$, установить $w_j \leftarrow 1$, $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $w_j = 1$. Прекратить работу алгоритма, если $j = n$; в противном случае установить $w_j \leftarrow 0$ и выполнить ветвление: перейти к C4, если j нечетно и $a_j \neq 0$, к C5, если j четно и $a_j \neq 0$, к C6, если j четно и $a_j = 0$, и к C7, если j нечетно и $a_j = 0$.
- C4.** [Переход вправо на единицу.] Установить $a_{j-1} \leftarrow 1$, $a_j \leftarrow 0$. Если $r = j > 1$, установить $r \leftarrow j - 1$; если же $r = j - 1$, установить $r \leftarrow j$. Вернуться к C2.
- C5.** [Переход вправо на два.] Если $a_{j-2} \neq 0$, перейти к шагу C4. В противном случае установить $a_{j-2} \leftarrow 1$, $a_j \leftarrow 0$. Если $r = j$, установить $r \leftarrow \max(j - 2, 1)$; если же $r = j - 2$, установить $r \leftarrow j - 1$. Вернуться к C2.
- C6.** [Переход влево на единицу.] Установить $a_j \leftarrow 1$, $a_{j-1} \leftarrow 0$. Если $r = j > 1$, установить $r \leftarrow j - 1$; если же $r = j - 1$, установить $r \leftarrow j$. Вернуться к C2.

С7. [Переход влево на два.] Если $a_{j-1} \neq 0$, перейти к шагу С6. В противном случае установить $a_j \leftarrow 1$, $a_{j-2} \leftarrow 0$. Если $r = j - 2$, установить $r \leftarrow j$; если же $r = j - 1$, установить $r \leftarrow j - 2$. Вернуться к шагу С2. **■**

***Анализ последовательности Чейза.** Магические свойства алгоритма С требуют дальнейшего исследования, и более близкое рассмотрение оказывается весьма поучительным. Для данной битовой строки $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ определим $a_n = 1$, $u_n = n \bmod 2$ и

$$u_j = (1 - u_{j+1}) a_{j+1}, \quad v_j = (u_j + j) \bmod 2, \quad w_j = (v_j + a_j) \bmod 2 \quad (40)$$

для $n > j \geq 0$. Например, у нас может быть $n = 26$ и

$$\begin{aligned} a_{25} \dots a_1 a_0 &= 11001001000011111101101010, \\ u_{25} \dots u_1 u_0 &= 10100100100001010100100101, \\ v_{25} \dots v_1 v_0 &= 0000111000101111110001111, \\ w_{25} \dots w_1 w_0 &= 11000111001000000011100101. \end{aligned} \quad (41)$$

Используя эти определения, можно по индукции доказать, что $v_j = 0$ тогда и только тогда, когда бит a_j в рекуррентных соотношениях (37)–(38), которые генерируют $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, “управляется” С, а не \widehat{C} , за исключением случая, когда a_j является частью заключительной серии нулей или единиц с правого конца. Следовательно, w_j согласуется со значением, вычисленным алгоритмом С в момент, когда посещается $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, для $r \leq j < n$. Эти формулы могут использоваться для определения точного места появления данного сочетания в последовательности Чейза (см. упражнение 39).

Если мы хотим работать со списком индексов $c_t \dots c_2 c_1$, а не с битовыми строками $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, удобно слегка изменить обозначения, записав $C_t(n)$ вместо C_{st} и $\widehat{C}_t(n)$ вместо \widehat{C}_{st} , где $s + t = n$. Тогда $C_0(n) = \widehat{C}_0(n) = \varepsilon$, а рекуррентные соотношения для $t \geq 0$ приобретают вид

$$C_{t+1}(n+1) = \begin{cases} nC_t(n), \widehat{C}_{t+1}(n), & \text{если } n \text{ четно;} \\ nC_t(n), C_{t+1}(n), & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases} \quad (42)$$

$$\widehat{C}_{t+1}(n+1) = \begin{cases} C_{t+1}(n), n\widehat{C}_t(n), & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ \widehat{C}_{t+1}(n), n\widehat{C}_t(n), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad (43)$$

Эти новые уравнения могут быть развернуты, что дает, например,

$$\begin{aligned} C_{t+1}(9) &= 8C_t(8), 6C_t(6), 4C_t(4), \dots, 3\widehat{C}_t(3), 5\widehat{C}_t(5), 7\widehat{C}_t(7); \\ C_{t+1}(8) &= 7C_t(7), 6C_t(6), 4C_t(4), \dots, 3\widehat{C}_t(3), 5\widehat{C}_t(5); \\ \widehat{C}_{t+1}(9) &= 6C_t(6), 4C_t(4), \dots, 3\widehat{C}_t(3), 5\widehat{C}_t(5), 7\widehat{C}_t(7), 8\widehat{C}_t(8); \\ \widehat{C}_{t+1}(8) &= 6C_t(6), 4C_t(4), \dots, 3\widehat{C}_t(3), 5\widehat{C}_t(5), 7\widehat{C}_t(7). \end{aligned} \quad (44)$$

Обратите внимание на то, что одна и та же схема доминирует во всех четырех последовательностях. Смысл “...” в середине зависит от значения t : мы просто пропускаем все члены $nC_t(n)$ и $n\widehat{C}_t(n)$ при $n < t$.

За исключением краевых эффектов в самом начале и конце, все раскрытия формул в (44) основаны на бесконечной прогрессии

$$\dots, 10, 8, 6, 4, 2, 0, 1, 3, 5, 7, 9, \dots, \quad (45)$$

которая представляет собой естественный способ размещения неотрицательных целых чисел в бесконечной в обе стороны последовательности. Если мы опустим в (45) все члены, меньшие t для некоторого заданного числа $t \geq 0$, то оставшиеся члены будут поддерживать то свойство, что соседние элементы отличаются либо на 1, либо на 2. Ричард Стенли (Richard Stanley) предложил для этой последовательности название *endo-order*, исходя из первых букв фразы “even numbers decreasing, odd...” (“четные числа уменьшаются, нечетные...”²). (Заметим, что если оставить только члены, меньшие N и дополнить их до N , то эта последовательность превратится в последовательность “органых труб”; см. упражнение 6.1–18.)

Можно запрограммировать рекурсии (42) и (43) непосредственно, но интереснее развернуть их с использованием (44), получив таким образом итеративный алгоритм, аналогичный алгоритму С. Такой алгоритм требует только $O(t)$ памяти и особенно эффективен, когда t мало по сравнению с n . Детальнее этот вопрос рассматривается в упражнении 45.

***Перестановки мультимножества, близкие к идеальной.** Последовательности Чейза естественным образом приводят к алгоритму, который будет генерировать перестановки любого мультимножества $\{s_0 \cdot 0, s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$ близким к идеальному способом, что означает следующее:

- i) каждый переход имеет вид либо $a_{j+1}a_j \leftrightarrow a_ja_{j+1}$, либо $a_{j+1}a_ja_{j-1} \leftrightarrow a_{j-1}a_ja_{j+1}$
- ii) переходы второго вида обладают тем свойством, что $a_j = \min(a_{j-1}, a_{j+1})$.

Алгоритм С говорит нам, как добиться этого при $d = 1$, и мы можем распространить его на большие значения d при помощи следующей рекурсивной конструкции [САСМ 13 (1970), 368–369, 376]. Предположим, что

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} -$$

произвольный близкий к идеальному список перестановок $\{s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$. После этого алгоритм С с $s = s_0$ и $t = s_1 + \dots + s_d$ говорит нам, каким образом сгенерировать список

$$\Lambda_j = \alpha_j 0^s, \dots, 0^\alpha \alpha_j 0^{s-\alpha}, \quad (46)$$

в котором все переходы представляют собой либо $0x \leftrightarrow x0$, либо $00x \leftrightarrow x00$; последняя запись содержит $a = 1$ или 2 ведущих нуля, в зависимости от значений s и t . Таким образом, все переходы последовательности

$$\Lambda_0, \Lambda_1^R, \Lambda_2, \dots, (\Lambda_{N-1} \text{ или } \Lambda_{N-1}^R) \quad (47)$$

близки к идеальным; понятно, что этот список содержит все перестановки.

²По всей видимости, наиболее адекватным переводом на русский язык могла бы быть “чунупорядоченная последовательность”. — *Примеч. пер.*

Например, вот перестановки $\{0, 0, 0, 1, 1, 2\}$, сгенерированные таким способом:

211000, 210100, 210001, 210010, 200110, 200101, 200011, 201001, 201010, 201100,
 021100, 021001, 021010, 020110, 020101, 020011, 000211, 002011, 002101, 002110,
 001120, 001102, 001012, 000112, 010012, 010102, 010120, 011020, 011002, 011200,
 101200, 101020, 101002, 100012, 100102, 100120, 110020, 110002, 110200, 112000,
 121000, 120100, 120001, 120010, 100210, 100201, 100021, 102001, 102010, 102100,
 012100, 012001, 012010, 010210, 010201, 010021, 000121, 001021, 001201, 001210.

***Идеальные схемы.** Почему мы должны заниматься близкими к идеальным генераторами наподобие C_{st} , вместо того чтобы потребовать, чтобы все переходы имели наиболее простой вид $01 \leftrightarrow 10$?

Одна из причин в том, что идеальные схемы не всегда существуют. Например, в 7.2.1.2–(2) было показано, что нет способа сгенерировать все шесть перестановок множества $\{1, 1, 2, 2\}$ с перестановками смежных элементов; таким образом, нет и идеальной схемы для $(2, 2)$ -сочетаний. В действительности наши шансы получить идеал составляют примерно 1 к 4.

Теорема Р. Генерация всех (s, t) -сочетаний $a_{s+t-1} \dots a_1 a_0$ путем обменов смежных элементов $01 \leftrightarrow 10$ возможна тогда и только тогда, когда $s \leq 1$, или $t \leq 1$, или st нечетно.

Доказательство. Рассмотрим все перестановки мультимножества $\{s \cdot 0, t \cdot 1\}$. Из упражнения 5.1.2–16 мы знаем, что число таких перестановок m_k , имеющих k инверсий, представляет собой коэффициент при z^k в z -номиальном коэффициенте

$$\binom{s+t}{t}_z = \prod_{k=s+1}^{s+t} (1+z+\dots+z^{k-1}) / \prod_{k=1}^t (1+z+\dots+z^{k-1}). \quad (48)$$

Каждый обмен смежных элементов изменяет количество инверсий на ± 1 , так что идеальная схема генерации возможна, только если приблизительно половина всех перестановок имеет нечетное количество инверсий. Более точно значение $\binom{s+t}{t}_{-1} = m_0 - m_1 + m_2 - \dots$ должно быть равно 0 или ± 1 . Однако в упражнении 49 показано, что

$$\binom{s+t}{t}_{-1} = \binom{\lfloor (s+t)/2 \rfloor}{\lfloor t/2 \rfloor} [st \text{ четно}] \quad (49)$$

и если не выполняется ни одно из условий $s \leq 1$, $t \leq 1$, st нечетно, то эта величина превышает 1.

И наоборот: идеальные схемы легко построить при $s \leq 1$ или $t \leq 1$, и они также возможны при нечетном st . Первый нетривиальный случай — $s = t = 3$, для которого имеется четыре существенно разных решения; наиболее симметричный из них следующий:

$$\begin{aligned} &210-310-410-510-520-521-531-532-432-431- \\ &421-321-320-420-430-530-540-541-542-543 \end{aligned} \quad (50)$$

(см. упражнение 51). Несколько авторов построили Гамильтоновы цепи в соответствующих графах для произвольных нечетных чисел s и t ; например, метод Идеса

(Eades), Хикки (Hickey) и Рида (Read) [JACM, 31 (1984), 19–29] представляет собой интересный пример программы с рекурсивными подпрограммами. Однако, к сожалению, ни одна из известных конструкций не является достаточно простой, чтобы можно было кратко описать ее или реализовать с приемлемой эффективностью. Таким образом, практическая важность генераторов идеальных сочетаний все еще не доказана. |

Резюмируя, мы увидели, что изучение (s, t) -сочетаний приводит ко многим привлекательным схемам, одни из которых имеют большую практическую ценность, а другие — просто элегантны и красивы. На рис. 26 показаны основные схемы, доступные для $s = t = 5$ (в этом случае имеется $\binom{10}{5} = 252$ сочетаний). Лексикографический порядок (алгоритм L), код Грея двери-вертушки (алгоритм R), гомогенная схема K_{55} из (31) и близкая к идеальной схема Чейза (алгоритм C) показаны на рис. 26, *a–г* соответственно. На рис. 26, *д* показана близкая к идеальной схема, которая настолько близка к идеальной, насколько это возможно, оставаясь в облексном порядке массива c (см. упражнение 34); на рис. 26, *е* представлена идеальная схема Идеса–Хикки–Рида. И наконец, на рис. 26, *ж–з* показаны сочетания, полученные путем поворотов $a_j a_{j-1} \dots a_0 \leftarrow a_{j-1} \dots a_0 a_j$ и обменов $a_j \leftrightarrow a_0$, наподобие алгоритмов 7.2.1.2С и 7.2.1.2Е (см. упражнения 55 и 56).

***Сочетания мультимножества.** Если мультимножество может иметь перестановки, то оно может иметь и сочетания. Например, рассмотрим мультимножество $\{b, b, b, b, g, g, g, r, r, r, w, w\}$, представляющее корзину, в которой содержатся четыре синих мяча, по три зеленых и красных и два белых. Есть 37 способов выбрать пять мячей из этой корзины; вот эти способы в лексикографическом порядке:

$$\begin{aligned} & gbbbb, ggbbb, gggbb, rbbbbb, rgbbb, rggbb, rgggb, rrrbbb, rrrgbb, rrrgg, \\ & rrrggg, wbbbbb, wgbbb, wggbb, wgggb, wrbbbb, wrgbbb, wrggb, wrggg, \\ & wrtbbb, wrtgb, wrtgg, wrrtbb, wrrtgb, wrrtgg, wwbbbb, wwgbbb, wwggbb, \\ & wwggg, wwrbbb, wwrgb, wwrgh, wwrrbb, wwrrgb, wwrrtbb, wwrrtgb, wwrrtgg, wwrrtggg. \end{aligned} \quad (51)$$

Этот факт может показаться незначительным и/или понятным лишь посвященным, но, как мы увидим из теоремы W, лексикографическая генерация сочетаний мультимножества дает оптимальное решение важной комбинаторной задачи.

Якоб Бернулли (James Bernoulli) заметил в своей работе [Ars Conjectandi (1713), 119–123], что мы можем перечислить все такие сочетания, рассматривая коэффициент при z^5 в произведении $(1 + z + z^2) (1 + z + z^2 + z^3)^2 (1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$. Это наблюдение легко понять, поскольку мы получим все возможные варианты выбора из корзины, если перемножим полиномы

$$(1 + w + ww) (1 + r + rr + rrr) (1 + g + gg + ggg) (1 + b + bb + bbb + bbbb).$$

Сочетаниям мультимножества можно поставить в соответствие разбиения чисел с ограничениями на слагаемые (bounded compositions). Например, 37 мультисочетаний, перечисленных в (51), соответствуют 37 решениям

$$5 = r_3 + r_2 + r_1 + r_0, \quad 0 \leq r_3 \leq 2, \quad 0 \leq r_2, r_1 \leq 3, \quad 0 \leq r_0 \leq 4,$$

а именно:

$$5 = 0 + 0 + 1 + 4 = 0 + 0 + 2 + 3 = 0 + 0 + 3 + 2 = 0 + 1 + 0 + 4 = \dots = 2 + 3 + 0 + 0.$$

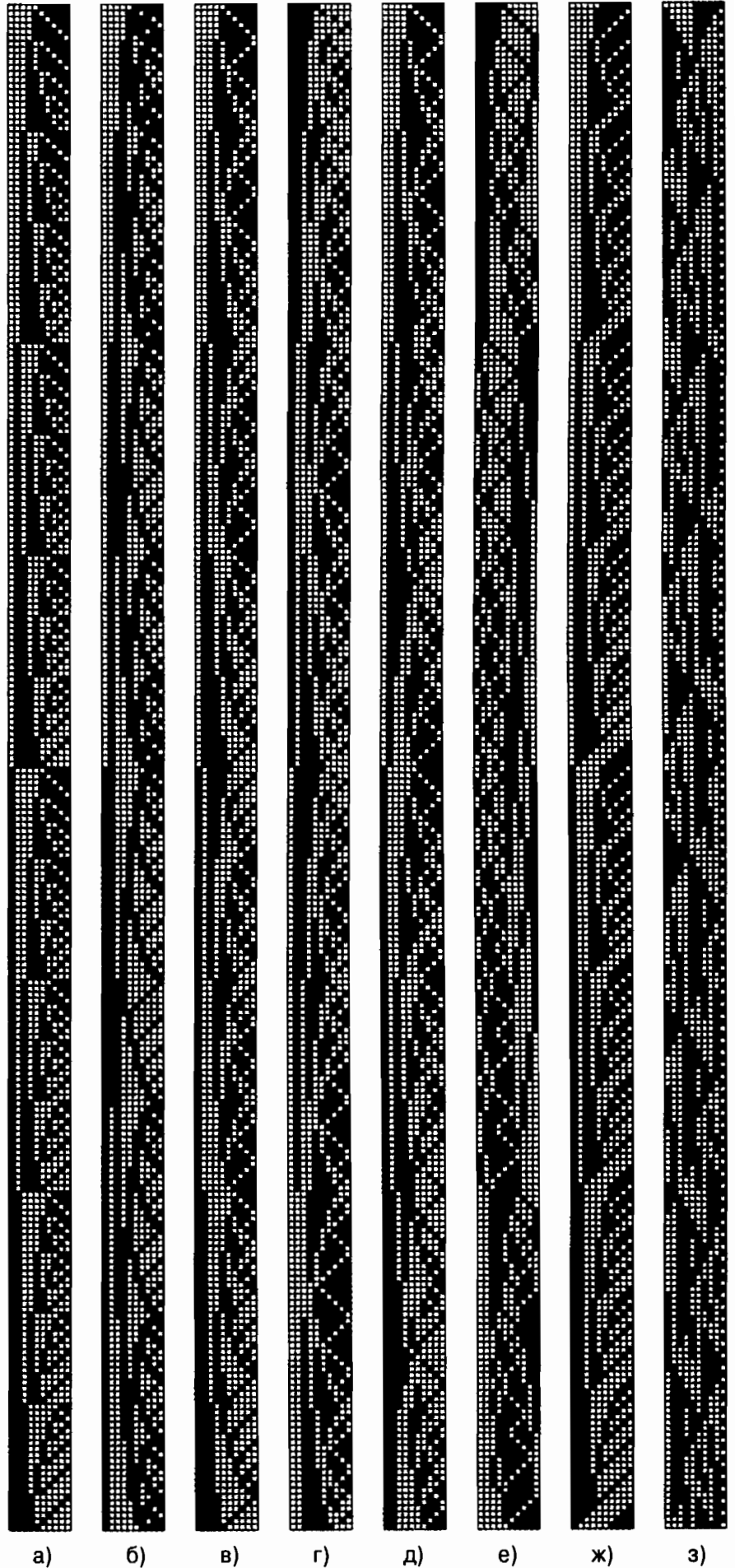


Рис. 26. Примеры схем (5,5)-сочетаний: а) лексикографическая; б) дверивертушки; в) гомогенная; г) близкая к идеальной; д) еще более близкая к идеальной; е) идеальная; ж) суффиксная; з) с правым обменом

а)

б)

в)

г)

д)

е)

ж)

з)

Разбиения чисел с ограничениями на слагаемые, в свою очередь, являются частным случаем *факторных таблиц* (contingency table), играющих важную роль в статистике. И все эти комбинаторные конфигурации могут быть сгенерированы как при помощи кодов наподобие кода Грея, так и в лексикографическом порядке. В упражнениях 60–63 раскрываются некоторые из основных используемых при этом идей.

***Тени.** В математике часто встречаются множества сочетаний. Например, множество 2-сочетаний (множество неупорядоченных пар), по сути, представляет собой граф, а множество t -сочетаний для произвольного t называется однородным гиперграфом (uniform hypergraph). Если вершины выпуклого многогранника несколько смещены, так что никакие три из них не лежат на одной прямой, никакие четыре — в одной плоскости и вообще, никакие $t + 1$ из них не лежат в $(t - 1)$ -мерной гиперплоскости, то получившиеся $(t - 1)$ -мерные грани представляют собой “симплексы”, вершины которых имеют большое значение в компьютерных приложениях. Исследователи выяснили, что такие множества сочетаний имеют важные свойства, связанные с лексикографической генерацией.

Если α — произвольное t -сочетание $c_t \dots c_2 c_1$, его *тенью* (shadow) $\partial\alpha$ является множество всех его $(t - 1)$ -элементных подмножеств $c_{t-1} \dots c_2 c_1, \dots, c_t \dots c_3 c_1, c_t \dots c_3 c_2$, например $\partial 5310 = \{310, 510, 530, 531\}$. Мы можем также представить t -сочетание как битовую строку $a_{n-1} \dots a_1 a_0$; в этом случае $\partial\alpha$ является множеством всех строк, полученных заменой 1 на 0: $\partial 101011 = \{001011, 100011, 101001, 101010\}$. Если A — произвольное множество t -сочетаний мы определим его тень

$$\partial A = \bigcup \{\partial\alpha \mid \alpha \in A\} \quad (52)$$

как множество всех $(t - 1)$ -сочетаний в тенях его членов, например $\partial\partial 5310 = \{10, 30, 31, 50, 51, 53\}$.

Эти определения применимы также к сочетаниям с повторениями, т.е. к мульти-сочетаниям: $\partial 5330 = \{330, 530, 533\}$ и $\partial\partial 5330 = \{30, 33, 50, 53\}$. В общем случае, если A — множество t -элементных мультимножеств, ∂A является множеством $(t - 1)$ -элементных мультимножеств. Заметим, однако, что само ∂A никогда не содержит повторяющихся элементов.

Верхняя тень (upper shadow) $\varrho\alpha$ по отношению к универсуму U определяется аналогично, но идет от t -сочетаний к $(t + 1)$ -сочетаниям:

$$\varrho\alpha = \{\beta \subseteq U \mid \alpha \in \partial\beta\} \quad \text{для } \alpha \in U; \quad (53)$$

$$\varrho A = \bigcup \{\varrho\alpha \mid \alpha \in A\} \quad \text{для } A \subseteq U. \quad (54)$$

Если, например, $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, то мы получим $\varrho 5310 = \{53210, 54310, 65310\}$; с другой стороны, если $U = \{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \dots, \infty \cdot 6\}$, то $\varrho 5310 = \{53100, 53110, 53210, 53310, 54310, 55310, 65310\}$.

Следующая фундаментальная теорема, имеющая множество применений в различных отраслях математики и информатики, говорит нам, насколько малыми могут быть тени множеств.

Теорема К. Если A — множество, состоящее из N t -сочетаний универсума $U = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, то

$$|\partial A| \geq |\partial P_{Nt}| \quad \text{и} \quad |\varrho A| \geq |\varrho Q_{Nnt}|, \quad (55)$$

где P_{Nt} обозначает первые N сочетаний, сгенерированные алгоритмом L , а именно первые N в лексикографическом порядке сочетаний $c_t \dots c_2 c_1$, удовлетворяющих условию (3), а Q_{Nnt} обозначает последние N в лексикографическом порядке сочетаний, удовлетворяющих условию (3). \blacksquare

Теорема М. Если A — множество, состоящее из N t -мультисочетаний элементов универсума $U = \{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \dots, \infty \cdot s\}$, то

$$|\partial A| \geq |\partial \widehat{P}_{Nt}| \quad \text{и} \quad |\varrho A| \geq |\varrho \widehat{Q}_{Nst}|, \quad (56)$$

где \widehat{P}_{Nt} обозначает первые N в лексикографическом порядке мультисочетаний $d_t \dots d_2 d_1$, удовлетворяющих условию (6), а \widehat{Q}_{Nst} обозначает последние N в лексикографическом порядке мультисочетаний, удовлетворяющих условию (6). \blacksquare

Обе эти теоремы являются следствием более строгого результата, который будет доказан позже. Теорема К называется теоремой Крускала–Катоны, поскольку она была открыта И.Б. Крускалом (J.V. Kruskal) [*Math. Optimization Techniques*, ed. by R. Bellman (1963), 251–278], а позже заново открыта Г. Катоной (G. Katona) [*Theory of Graphs*, Tihany 1966, ed. by Erdos and Katona (Academic Press, 1968), 187–207]; ранее неполное доказательство было приведено М.П. Шютценбергером (M.P. Schützenberger) в его менее известной публикации [*RLE Quarterly Progress Report*, 55 (1959), 117–118]. Теорема М была доказана Ф.С. Маколеем (F.S. Macaulay) многими годами ранее [*Proc. London Math. Soc.*, (2) 26 (1927), 531–555].

Перед тем как приступить к доказательству (55) и (56), рассмотрим более внимательно, что означают эти формулы. Из теоремы L мы знаем, что первые N из всех t -сочетаний, посещенных алгоритмом L, — те, которые предшествуют $n_t \dots n_2 n_1$, где

$$N = \binom{n_t}{t} + \dots + \binom{n_2}{2} + \binom{n_1}{1}, \quad n_t > \dots > n_2 > n_1 \geq 0$$

является комбинаторным представлением N степени t . Иногда такое представление имеет меньше t ненулевых членов, потому что n_j может быть равно $j - 1$; уберем нули и запишем

$$N = \binom{n_t}{t} + \binom{n_{t-1}}{t-1} + \dots + \binom{n_v}{v}, \quad n_t > n_{t-1} > \dots > n_v \geq v \geq 1. \quad (57)$$

Теперь первые $\binom{n_t}{t}$ сочетаний $c_t \dots c_1$ представляют собой t -сочетания $\{0, \dots, n_t - 1\}$; следующие $\binom{n_{t-1}}{t-1}$ — те, в которых $c_t = n_t$ и $c_{t-1} \dots c_1$ — $(t-1)$ -сочетание из $\{0, \dots, n_{t-1} - 1\}$ и т.д. Например, если $t = 5$ и $N = \binom{9}{5} + \binom{7}{4} + \binom{4}{3}$, то первые N сочетаний будут

$$P_{N5} = \{43210, \dots, 87654\} \cup \{93210, \dots, 96543\} \cup \{97210, \dots, 97321\}. \quad (58)$$

Тень данного множества P_{N5} , к счастью, легко представить — это

$$\partial P_{N5} = \{3210, \dots, 8765\} \cup \{9210, \dots, 9654\} \cup \{9710, \dots, 9732\}, \quad (59)$$

т.е. первые $\binom{9}{4} + \binom{7}{3} + \binom{4}{2}$ сочетаний в лексикографическом порядке для $t = 4$.

Другими словами, если мы определим функцию Крускала κ_t как

$$\kappa_t N = \binom{n_t}{t-1} + \binom{n_{t-1}}{t-2} + \cdots + \binom{n_v}{v-1}, \quad (60)$$

где N имеет единственное представление (57), то

$$\partial P_{Nt} = P_{(\kappa_t N)(t-1)}. \quad (61)$$

Теорема К говорит нам, например, что граф с миллионом ребер может содержать не более

$$\binom{1414}{3} + \binom{1009}{2} = 470\,700\,300$$

треугольников, т.е. не более 470 700 300 множеств вершин $\{u, v, w\}$ с ребрами $u-v$, $w-u$. Дело в том, что, согласно упражнению 17, $1\,000\,000 = \binom{1414}{2} + \binom{1009}{1}$ и ребра $P_{(1000000)2}$ поддерживают $\binom{1414}{2} + \binom{1009}{1}$ треугольников; если бы треугольников было больше, граф должен был бы содержать, как минимум, $\kappa_3 470700301 = \binom{1414}{2} + \binom{1009}{1} + \binom{1}{0} = 1\,000\,001$ ребер в их тенях.

Крускал определил сопутствующую функцию

$$\lambda_t N = \binom{n_t}{t+1} + \binom{n_{t-1}}{t} + \cdots + \binom{n_v}{v} \quad (62)$$

для работы с подобными задачами. Функции κ и λ связаны интересным соотношением, доказываемым в упражнении 72:

$$\text{из } M + N = \binom{s+t}{t} \text{ следует } \kappa_s M + \lambda_t N = \binom{s+t}{t+1}, \text{ если } st > 0. \quad (63)$$

Возвращаясь к теореме М, размеры $\partial \widehat{P}_{Nt}$ и $\varrho \widehat{Q}_{Nst}$ оказываются равными

$$\left| \partial \widehat{P}_{Nt} \right| = \mu_t N \quad \text{и} \quad \left| \varrho \widehat{Q}_{Nst} \right| = N + \kappa_s N \quad (64)$$

(см. упражнение 81), где функция μ_t удовлетворяет уравнению

$$\mu_t N = \binom{n_t-1}{t-1} + \binom{n_{t-1}-1}{t-2} + \cdots + \binom{n_v-1}{v-1} \quad (65)$$

при N , имеющем комбинаторное представление (57).

В табл. 3 показано, как ведут себя упомянутые функции $\kappa_t N$, $\lambda_t N$ и $\mu_t N$ для малых значений t и N . Когда t и N велики, эти функции могут быть хорошо аппроксимированы при помощи замечательной функции $\tau(x)$, введенной Теиджи Такаги (Teiji Takagi) в 1903 г. (рис. 27 и упражнения 82–85).

Теоремы К и М являются следствиями более общей теоремы дискретной геометрии, открытой Да-Лун Вангом (Da-Lun Wang) и Пинг Вангом (Ping Wang) [*SIAM J. Applied Math.*, **33** (1977), 55–59], с которой мы сейчас познакомимся. Рассмотрим *дискретный n -мерный тор* $T(m_1, \dots, m_n)$, элементы которого представляют собой целочисленные векторы $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $0 \leq x_1 < m_1, \dots, 0 \leq x_n < m_n$.

Таблица 3. Примеры функций Крускала-Маколея κ , λ и μ

$N = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\kappa_1 N = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\kappa_2 N = 0$	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7
$\kappa_3 N = 0$	3	5	6	6	8	9	9	10	10	10	12	13	13	14	14	14	15	15	15	15
$\kappa_4 N = 0$	4	7	9	10	10	13	15	16	16	18	19	19	20	20	20	23	25	26	26	28
$\kappa_5 N = 0$	5	9	12	14	15	15	19	22	24	25	25	28	30	31	31	33	34	34	35	35
$\lambda_1 N = 0$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190
$\lambda_2 N = 0$	0	0	1	1	2	4	4	5	7	10	10	11	13	16	20	20	21	23	26	30
$\lambda_3 N = 0$	0	0	0	1	1	1	2	2	3	5	5	5	6	6	7	9	9	10	12	15
$\lambda_4 N = 0$	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	6	6	6	6	7	7
$\lambda_5 N = 0$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
$\mu_1 N = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\mu_2 N = 0$	1	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
$\mu_3 N = 0$	1	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
$\mu_4 N = 0$	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	10	11	12	13	13	14
$\mu_5 N = 0$	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	9	10	11	12	12	13	14	14	15	15

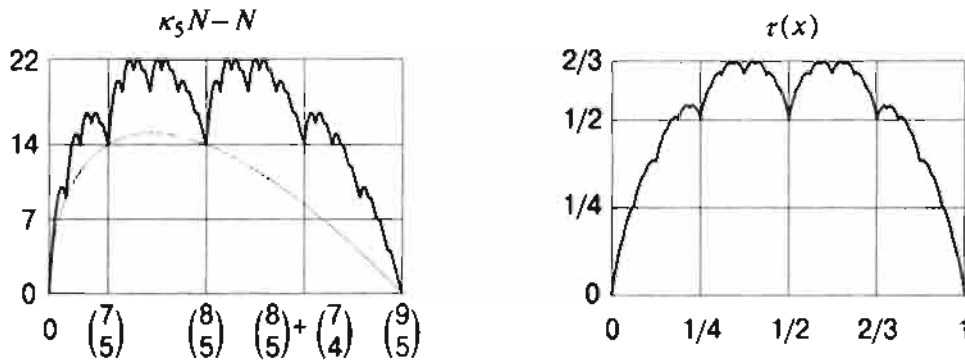


Рис. 27. Аппроксимация функции Крускала функцией Такаги (гладкая кривая на левом графике представляет собой нижнюю границу $\kappa_5 N - N$ из упражнения 80)

Определим сумму и разность двух таких векторов x и y как в формулах 4.3.2-(2) и 4.3.2-(3):

$$x + y = ((x_1 + y_1) \bmod m_1, \dots, (x_n + y_n) \bmod m_n), \tag{66}$$

$$x - y = ((x_1 - y_1) \bmod m_1, \dots, (x_n - y_n) \bmod m_n). \tag{67}$$

Определим также так называемый *перекрестный порядок* (cross order) таких векторов, говоря, что $x \preccurlyeq y$ тогда и только тогда, когда

$$vx < vy \quad \text{или} \quad (vx = vy \text{ и } x \geq y \text{ лексикографически}); \tag{68}$$

здесь, как обычно, $v(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$. Например, при $m_1 = m_2 = 2$ и $m_3 = 3$ 12 векторов $x_1 x_2 x_3$ в перекрестном порядке представляют собой

$$000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 002, 111, 102, 012, 112 \tag{69}$$

(скобки и запятые для удобства опущены). *Дополнением* (complement) вектора в $T(m_1, \dots, m_n)$ является вектор

$$\bar{x} = (m_1 - 1 - x_1, \dots, m_n - 1 - x_n). \tag{70}$$

Заметим, что $x \preceq y$ выполняется тогда и только тогда, когда $\bar{x} \succeq \bar{y}$. Следовательно,

$$\text{rank}(x) + \text{rank}(\bar{x}) = T - 1, \quad \text{где } T = m_1 \dots m_n, \tag{71}$$

если $\text{rank}(x)$ обозначает количество векторов, предшествующих x в перекрестном порядке.

Удобно называть векторы “точками” и именовать точки e_0, e_1, \dots, e_{T-1} в возрастающем перекрестном порядке. Таким образом, мы имеем $e_7 = 002$ в (69), а в общем случае $\bar{e}_r = e_{T-1-r}$. Заметим, что

$$e_1 = 100 \dots 00, \quad e_2 = 010 \dots 00, \quad \dots, \quad e_n = 000 \dots 01; \tag{72}$$

это так называемые *единичные векторы* (unit vectors). Множество

$$S_N = \{e_0, e_1, \dots, e_{N-1}\}, \tag{73}$$

состоящее из первых N в возрастающем перекрестном порядке точек, называется *стандартным множеством* (standard set), и в случае $N = n + 1$ будем писать

$$E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\} = \{000 \dots 00, 100 \dots 00, 010 \dots 00, \dots, 000 \dots 01\}. \tag{74}$$

Любое множество точек X имеет *размах* (spread) X^+ , *ядро* (core) X° и *двойника* (dual) X^\sim , определяемых правилами

$$X^+ = \{x \in S_T \mid x \in X \text{ или } x - e_1 \in X \text{ или } \dots \text{ или } x - e_n \in X\}; \tag{75}$$

$$X^\circ = \{x \in S_T \mid x \in X \text{ и } x + e_1 \in X \text{ и } \dots \text{ и } x + e_n \in X\}; \tag{76}$$

$$X^\sim = \{x \in S_T \mid \bar{x} \notin X\}. \tag{77}$$

Можно определить размах X алгебраически, записав

$$X^+ = X + E, \tag{78}$$

где $X + Y$ означает $\{x + y \mid x \in X \text{ и } y \in Y\}$. Понятно, что

$$X^+ \subseteq Y \text{ тогда и только тогда, когда } X \subseteq Y^\circ. \tag{79}$$

Эти понятия могут быть проиллюстрированы в двухмерном случае $m_1 = 4, m_2 = 6$ при помощи более или менее случайного тороидального размещения $X = \{00, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 25\}$, для которого мы имеем (графически)

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td></td><td>●</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		●	●			●				●				●	●					●	●				<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td></td><td>●</td><td>●</td><td>+</td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>●</td><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>○</td><td>●</td><td>+</td></tr> <tr><td>+</td><td></td><td>●</td><td>+</td></tr> <tr><td>●</td><td>+</td><td>+</td><td></td></tr> </table>		●	●	+		●	+			●	+			○	●	+	+		●	+	●	+	+		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td></td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td>●</td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td>●</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td>●</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td>●</td><td></td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td></td><td></td><td>●</td></tr> </table>	●	●	●		●		●	●	●	●		●	●	●		●	●	●		●	●			●	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 40px; height: 40px;"> <tr><td>○</td><td>●</td><td>●</td><td>+</td></tr> <tr><td>●</td><td>+</td><td>○</td><td>●</td></tr> <tr><td>●</td><td>+</td><td></td><td>○</td></tr> <tr><td>○</td><td>●</td><td>+</td><td>○</td></tr> <tr><td>○</td><td>●</td><td>+</td><td>○</td></tr> <tr><td>●</td><td>+</td><td>+</td><td>○</td></tr> </table>	○	●	●	+	●	+	○	●	●	+		○	○	●	+	○	○	●	+	○	●	+	+	○
	●	●																																																																																																	
	●																																																																																																		
	●																																																																																																		
	●	●																																																																																																	
			●																																																																																																
●																																																																																																			
	●	●	+																																																																																																
	●	+																																																																																																	
	●	+																																																																																																	
	○	●	+																																																																																																
+		●	+																																																																																																
●	+	+																																																																																																	
●	●	●																																																																																																	
●		●	●																																																																																																
●	●		●																																																																																																
●	●		●																																																																																																
●	●		●																																																																																																
●			●																																																																																																
○	●	●	+																																																																																																
●	+	○	●																																																																																																
●	+		○																																																																																																
○	●	+	○																																																																																																
○	●	+	○																																																																																																
●	+	+	○																																																																																																
X	X° и X^+	X^\sim	$X^{\sim\circ}$ и $X^{\sim+}$																																																																																																

(80)

Здесь X на первых двух диаграммах состоит из точек, помеченных как \bullet и \circ , X° включает только \circ , а X^+ состоит из $+$, \bullet и \circ . Заметим, что если мы повернем диаграмму для $X^{\sim\circ}$ и $X^{\sim+}$ на 180° , то получим диаграмму для X° и X^+ , но с $(\bullet, \circ, +,)$, замененными соответственно на $(+, , \bullet, \circ)$. В действительности тождества

$$X^\circ = X^{\sim+\sim} \text{ и } X^+ = X^{\sim\circ\sim} \quad (81)$$

выполняются в общем случае (см. упражнение 86).

Теперь мы готовы к изложению теоремы Ванга и Ванга.

Теорема W. Пусть X — произвольное множество, состоящее из N точек дискретного тора $T(m_1, \dots, m_n)$, где $m_1 \leq \dots \leq m_n$. Тогда $|X^+| \geq |S_N^+|$ и $|X^\circ| \leq |S_N^\circ|$.

Другими словами, стандартные множества S_N имеют наименьший размах и наибольшее ядро среди всех N -точечных множеств. Мы докажем этот результат при помощи следующего общего подхода, впервые использованного Ф.Д.В. Випплом (F.J.W. Whipple) для доказательства теоремы М [*Proc. London Math. Soc.*, (2) **28** (1928), 431–437]. Первый шаг состоит в доказательстве того, что размах и ядро стандартных множеств стандартны.

Лемма S. Существуют функции α и β , такие, что $S_N^+ = S_{\alpha N}$ и $S_N^\circ = S_{\beta N}$.

Доказательство. Мы можем считать, что $N > 0$. Пусть r — максимальное значение, для которого $e_r \in S_N^+$, и пусть $\alpha N = r + 1$; мы должны доказать, что $e_q \in S_N^+$ для $0 \leq q < r$. Допустим, что $e_q = x = (x_1, \dots, x_n)$ и $e_r = y = (y_1, \dots, y_n)$, и пусть k — наибольший индекс, для которого $x_k > 0$. Поскольку $y \in S_N^+$, существует индекс j , такой, что $y - e_j \in S_N$. Этого достаточно для доказательства того, что $x - e_k \preceq y - e_j$, и упражнение 88 делает это.

Вторая часть следует из (81) при $\beta N = T - \alpha(T - N)$, поскольку $S_N^\sim = S_{T-N}$. \blacksquare

Очевидно, что теорема W справедлива при $n = 1$, поэтому по индукции предположим, что она доказана для $n - 1$ размерностей. Следующий шаг состоит в *сжатии* (compress) данного множества X в k -й позиции путем разделения его на два непесекающихся множества

$$X_k(a) = \{x \in X \mid x_k = a\} \quad (82)$$

для $0 \leq a \leq m_k$ и замены каждого $X_k(a)$ множеством

$$X'_k(a) = \{(s_1, \dots, s_{k-1}, a, s_k, \dots, s_n) \mid (s_1, \dots, s_{n-1}) \in S_{|X_k(a)|}\} \quad (83)$$

с тем же количеством элементов. Множества S , используемые в (83), стандартны в $(n - 1)$ -мерном торе $T(m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_n)$. Заметим, что $(x_1, \dots, x_{k-1}, a, x_{k+1}, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_{k-1}, a, y_{k+1}, \dots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \preceq (y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$; следовательно, $X'_k(a) = X_k(a)$ тогда и только тогда, когда $(n - 1)$ -мерные точки $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_{k-1}, a, x_{k+1}, \dots, x_n) \in X$ малы настолько, насколько это возможно при проекции на $(n - 1)$ -мерный тор. Пусть

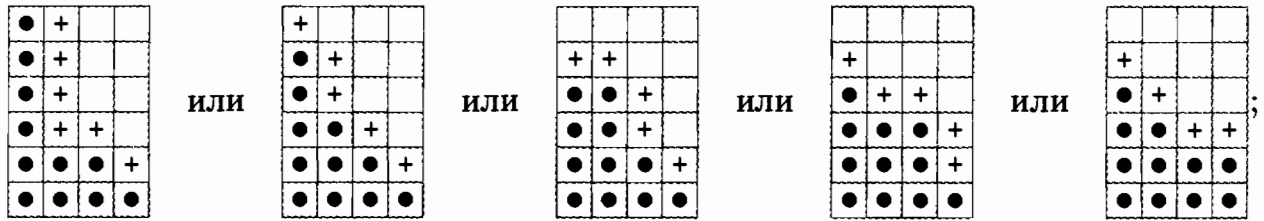
$$C_k X = X'_k(0) \cup X'_k(1) \cup \dots \cup X'_k(m_k - 1) \quad (84)$$

представляет собой сжатие X по k -ой координате. Упражнение 90 доказывает тот фундаментальный факт, что сжатие не увеличивает размер размаха:

$$|X^+| \geq |(C_k X)^+| \quad \text{для } 1 \leq k \leq n. \tag{85}$$

Кроме того, если сжатие изменяет X , то оно заменяет некоторые элементы другими элементами меньшего ранга. Таким образом, достаточно доказать теорему W только для полностью сжатых множеств X , у которых $X = C_k X$ для всех k .

Рассмотрим, например, случай $n = 2$. У полностью сжатого в двух измерениях множества все точки передвинуты влево в своих строках и вниз в своих столбцах, как в одиннадцатиточечных множествах



крайнее справа множество стандартное и имеет наименьший размах. Упражнение 91 завершает доказательство теоремы W для двух размерностей.

Если $n > 2$, пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ и $x_j > 0$. Из условия $C_k X = X$ вытекает, что если $0 \leq i < j$ и $i \neq k \neq j$, то $x + e_i - e_j \in X$. Применение этого факта к трем значениям k дает нам, что $x + e_i - e_j \in X$ для любых $0 \leq i < j$. Следовательно,

$$X_n(a) + E_n(0) \subseteq X_n(a-1) + e_n \quad \text{для } 0 < a < m, \tag{86}$$

где $m = m_n$ и $E_n(0)$ — сокращенная запись множества $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$.

Пусть $X_n(a)$ содержит N_a элементов, так что $N = |X| = N_0 + N_1 + \dots + N_{m-1}$, и пусть $Y = X^+$. Тогда

$$Y_n(a) = (X_n((a-1) \bmod m) + e_n) \cup (X_n(a) + E_n(0))$$

представляет собой стандартное множество в $n-1$ размерностях и (86) говорит нам, что

$$N_{m-1} \leq \beta N_{m-2} \leq N_{m-2} \leq \dots \leq N_1 \leq \beta N_0 \leq N_0 \leq \alpha N_0,$$

где α и β относятся к координатам от 1 до $n-1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |Y| &= |Y_n(0)| + |Y_n(1)| + |Y_n(2)| + \dots + |Y_n(m-1)| = \\ &= \alpha N_0 + N_0 + N_1 + \dots + N_{m-2} = \alpha N_0 + N - N_{m-1}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы W теперь имеет красивое завершение. Пусть $Z = S_N$ и положим $|Z_n(a)| = M_a$. Мы хотим доказать, что $|X^+| \geq |Z^+|$, т.е. что

$$\alpha N_0 + N - N_{m-1} \geq \alpha M_0 + N - M_{m-1}, \tag{87}$$

поскольку аргументы из предыдущего абзаца применимы как к X , так и к Z . Мы докажем (87), показав, что $N_{m-1} \leq M_{m-1}$ и $N_0 \geq M_0$.

Используя $(n - 1)$ -мерные функции α и β , определим

$$N'_{m-1} = N_{m-1}, N'_{m-2} = \alpha N'_{m-1}, \dots, N'_1 = \alpha N'_2, N'_0 = \alpha N'_1; \quad (88)$$

$$N''_0 = N_0, N''_1 = \beta N''_0, N''_2 = \beta N''_1, \dots, N''_{m-1} = \beta N''_{m-2}. \quad (89)$$

Тогда $N'_a \leq N_a \leq N''_a$ для $0 \leq a < m$ и отсюда следует, что

$$N' = N'_0 + N'_1 + \dots + N'_{m-1} \leq N \leq N'' = N''_0 + N''_1 + \dots + N''_{m-1}. \quad (90)$$

В упражнении 92 доказывается, что стандартное множество $Z' = S'_N$ имеет ровно N'_a элементов с n -й координатой, равной a , для каждого a . Из дуальности α и β аналогично доказывается, что стандартное множество $Z'' = S''_N$ содержит ровно N''_a элементов с n -й координатой, равной a . Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{m-1} &= |Z_n(m-1)| \geq |Z'_n(m-1)| = N_{m-1}, \\ M_0 &= |Z_n(0)| \leq |Z''_n(0)| = N_0, \end{aligned}$$

поскольку, согласно (90), $Z' \subseteq Z \subseteq Z''$. Из (81) мы также имеем $|X^\circ| \leq |Z^\circ|$. \blacksquare

Теперь мы готовы доказать теоремы К и М, которые в действительности являются частными случаями более общей теоремы Клементса (Clements) и Линдстрема (Lindström), которая применима к произвольным мультимножествам [*J. Combinatorial Theory*, **7** (1969), 230–238]:

Следствие С. Если A — множество N t -сочетаний, содержащееся в мультимножестве $U = \{s_0 \cdot 0, s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$, где $s_0 \geq s_1 \geq \dots \geq s_d$, то

$$|\partial A| \geq |\partial P_{Nt}| \quad \text{и} \quad |\varrho A| \geq |\varrho Q_{Nt}|, \quad (91)$$

где P_{Nt} обозначает N лексикографически наименьших мультисочетаний $d_t \dots d_2 d_1$ из U , а Q_{Nt} обозначает N лексикографически наибольших мультисочетаний.

Доказательство. Мультисочетания из U могут быть представлены как точки x_1, \dots, x_n тора $T(m_1, \dots, m_n)$, где $n = d + 1$ и $m_j = s_{n-j} + 1$; пусть x_j — количество вхождений $n - j$ в мультисочетание. Такое соответствие сохраняет лексикографический порядок. Например, если $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 2, 3\}$, его 3-сочетаниями в лексикографическом порядке являются

$$000, 100, 110, 200, 210, 211, 300, 310, 311, 320, 321, \quad (92)$$

а соответствующие им точки $x_1 x_2 x_3 x_4$ выглядят как

$$0003, 0012, 0021, 0102, 0111, 0120, 1002, 1011, 1020, 1101, 1110. \quad (93)$$

Пусть T_w — точки тора, вес которых $x_1 + \dots + x_n = w$. Тогда каждое допустимое множество A t -сочетаний является подмножеством T_t . Более того — и в этом главное — размах $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{t-1} \cup A$ равен

$$\begin{aligned} (T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{t-1} \cup A)^+ &= T_0^+ \cup T_1^+ \cup \dots \cup T_{t-1}^+ \cup A^+ = \\ &= T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{t-1} \cup \varrho A. \end{aligned} \quad (94)$$

Таким образом, верхняя тень ϱA просто равна $(T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{t-1} \cup A)^+ \cap T_{t+1}$, и теорема W, по существу, гласит, что из $|A| = N$ следует $|\varrho A| \geq |\varrho(S_{M+N} \cap T_t)|$, где $M = |T_0 \cup \dots \cup T_{t-1}|$. Следовательно, по определению перекрестного порядка $S_{M+N} \cap T_t$ состоит из N лексикографически наибольших t -мультисочетаний, а именно Q_{Nt} .

Доказательство того факта, что $|\partial A| \geq |\partial P_{Nt}|$, теперь вытекает из дополнителности (см. упражнение 94). |

Упражнения

1. [M23] Поясните, почему правило Голомба (8) устанавливает однозначное соответствие между множествами $\{c_1, \dots, c_t\} \subseteq \{0, \dots, n-1\}$ и мультисочетаниями $\{e_1, \dots, e_t\} \subseteq \{\infty \cdot 0, \dots, \infty \cdot n-t\}$.
2. [16] Какой путь в сетке 11×13 соответствует битовой строке (13)?
- ▶ 3. [21] (Р.Р. Феничел (R.R. Fenichel), 1968.) Покажите, что разложения $q_t + \dots + q_1 + q_0$ числа s на $t+1$ неотрицательных частей могут быть сгенерированы в лексикографическом порядке при помощи простого алгоритма без циклов.
4. [16] Покажите, что любая композиция $q_t \dots q_0$ числа s из $t+1$ неотрицательных частей соответствует композиции $r_s \dots r_0$ числа t из $s+1$ неотрицательных частей. Какая композиция соответствует 10224000001010 при таком соответствии?
- ▶ 5. [20] Какой хороший способ генерации всех целых решений следующей системы неравенств можно предложить?
 - а) $n > x_t \geq x_{t-1} > x_{t-2} \geq x_{t-3} > \dots > x_1 \geq 0$, где t нечетно.
 - б) $n \gg x_t \gg x_{t-1} \gg \dots \gg x_2 \gg x_1 \gg 0$, где $a \gg b$ означает $a \geq b+2$.
6. [M22] Как часто выполняется каждый шаг алгоритма T?
7. [22] Разработайте алгоритм, который обходит бы “дуальные” сочетания $b_s \dots b_2 b_1$ в *уменьшающемся* лексикографическом порядке (см. формулу (5) и табл. 1). Подобно алгоритму T, ваш алгоритм должен избегать излишних присваиваний и ненужных поисков.
8. [M23] Разработайте алгоритм, который генерирует все (s, t) -сочетания $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ лексикографически в виде битовых строк. Общее время работы алгоритма должно составлять $O\left(\binom{n}{t}\right)$, в предположении, что $st > 0$.
9. [M26] Пусть все (s, t) -сочетания $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ перечислены в лексикографическом порядке и $2A_{st}$ — общее количество изменений битов между соседними строками. Например, $A_{33} = 25$, поскольку в табл. 1 между 20 строками всего

$$2 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 6 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 + 2 + 2 = 50$$
 изменений битов.
 - а) Покажите, что $A_{st} = \min(s, t) + A_{(s-1)t} + A_{s(t-1)}$ при $st > 0$; $A_{st} = 0$ при $st = 0$.
 - б) Докажите, что $A_{st} < 2\binom{s+t}{t}$.

► 10. [21] Чемпионат США по бейсболу (World Series) является состязанием, в котором чемпион Американской лиги (А) играет с чемпионом Национальной лиги (N), пока один из них не выиграет у другого четыре раза. Как лучше всего перечислить все возможные сценарии AAAA, AAANA, AAANNA, ..., NNNN? Каков простейший способ назначить последовательные целые числа этим сценариям?

11. [19] Какой из сценариев упражнения 10 чаще всего встречался в XX веке? Какой не встречался ни разу? [Указание: результаты чемпионата World Series легко найти в Интернете.]

12. [HM32] Множество V n -битовых векторов, замкнутое относительно сложения по модулю 2, называется *бинарным векторным пространством* (binary vector space).

а) Докажите, что каждое такое V содержит 2^t элементов для некоторого целого числа t и может быть представлено как множество $\{x_1\alpha_1 \oplus \dots \oplus x_t\alpha_t \mid 0 \leq x_1, \dots, x_t \leq t\}$, где векторы $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ образуют “канонический базис” со следующим свойством: существует t -сочетание $c_t \dots c_2 c_1$ из $0, 1, \dots, n-1$, такое, что если α_k — бинарный вектор $a_{k(n-1)} \dots a_{k1} a_{k0}$, то мы имеем

$$a_{kc_j} = [j = k] \text{ для } 1 \leq j, k \leq t; \quad a_{kl} = 0 \text{ для } 0 \leq l < c_k, 1 \leq k \leq t.$$

Например, канонические базисы при $n = 9$, $t = 4$ и $c_4 c_3 c_2 c_1 = 7641$ имеют общий вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= * 0 0 * 0 * * 1 0, \\ \alpha_2 &= * 0 0 * 1 0 0 0 0, \\ \alpha_3 &= * 0 1 0 0 0 0 0 0, \\ \alpha_4 &= * 1 0 0 0 0 0 0 0; \end{aligned}$$

существует 2^8 способов заменить восемь звездочек нулями и/или единицами, и каждый из них образует канонический базис. Назовем t размерностью V .

б) Сколько может быть t -мерных пространств с n -битовыми векторами?

с) Разработайте алгоритм для генерации всех канонических базисов $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ размерности t . Указание: соответствующие сочетания $c_t \dots c_1$ должны лексикографически возрастать, как в алгоритме L.

д) Каким будет миллионный посещенный вашим алгоритмом базис при $n = 9$ и $t = 4$?

13. [25] Одномерная *конфигурация Изинга* (Ising configuration) длины n , весом t и с энергией r представляет собой бинарную строку $a_{n-1} \dots a_0$, такую, что $\sum_{j=0}^{n-1} a_j = t$ и $\sum_{j=1}^{n-1} b_j = r$, где $b_j = a_j \oplus a_{j-1}$. Например, $a_{12} \dots a_0 = 1100100100011$ имеет вес 6 и энергию 6, поскольку $b_{12} \dots b_1 = 010110110010$.

Разработайте алгоритм для генерации всех таких конфигураций для данных n , t и r .

14. [26] При генерации бинарных строк $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ (s, t) -сочетаний в лексикографическом порядке нам иногда требуется изменять $2 \min(s, t)$ бит при переходе

от одного сочетания к следующему. Например, в табл. 1 за 011100 следует 100011. Следовательно, мы, по-видимому, не можем надеяться сгенерировать все сочетания при помощи алгоритма без циклов, если только не будем посещать их в некотором другом порядке.

Покажите, что в действительности все же есть способ вычисления лексикографического предшественника данного сочетания за $O(1)$ шагов, если каждое сочетание представлено в виде двухсвязного списка следующим образом: имеются массивы $l[0], \dots, l[n]$ и $r[0], \dots, r[n]$, такие, что $l[r[j]] = j$ для $0 \leq j \leq n$. Если $x_0 = l[0]$ и $x_j = l[x_{j-1}]$ для $0 < j < n$, то $a_j = [x_j > s]$ для $0 \leq j < n$.

15. [M22] Используйте то, что дуальные сочетания $b_s \dots b_2 b_1$ располагаются в обратном лексикографическом порядке, для доказательства простой связи суммы

$$\binom{b_s}{s} + \dots + \binom{b_2}{2} + \binom{b_1}{1}$$

с суммой

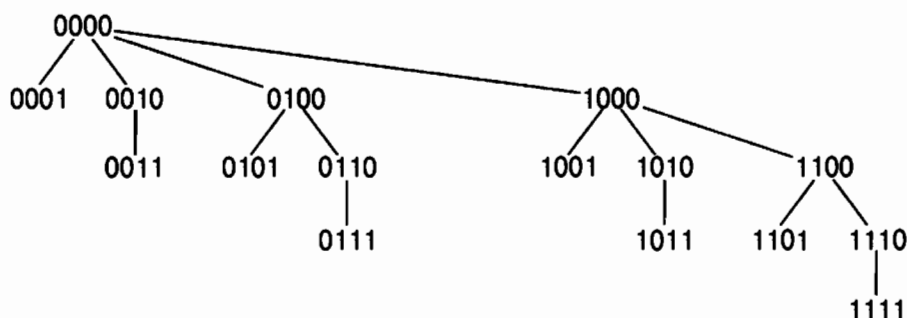
$$\binom{c_t}{t} + \dots + \binom{c_2}{2} + \binom{c_1}{1}.$$

16. [M21] Каково миллионное сочетание, сгенерированное алгоритмом L, при t , равном (a) 2? (b) 3? (c) 4? (d) 5? (e) 1 000 000?

17. [HM25] Каким образом можно вычислить комбинаторное представление (20) для данных N и t ?

► 18. [20] Какое бинарное дерево мы получим при представлении биномиального дерева T_n с указателями на “правого ребенка” и “левого брата”, как в упражнении 2.3.2–5?

19. [21] Вместо того чтобы пометить ветви биномиального дерева T_4 так, как показано в (22), мы можем пометить каждый узел битовой строкой соответствующего сочетания:



Если пометить таким образом T_∞ , опуская начальные нули, то прямой порядок обхода даст нам бинарные числа в обычном возрастающем порядке; так, миллионный узел превратится в 11110100001000111111. А каким будет миллионный узел T_∞ при обходе в обратном порядке?

20. [M20] Найдите производящие функции g и h , такие, что алгоритм F находит ровно $[z^N] g(z)$ возможных сочетаний и устанавливает $t \leftarrow t + 1$ ровно $[z^N] h(z)$ раз.

21. [M22] (Д.Э. Миллер (J.E. Miller), 1971) Докажите закон знакопеременных сочетаний (30).

22. [M23] Каково миллионное сочетание, посещенное алгоритмом R, если t равно (a) 2? (b) 3? (c) 4? (d) 5? (e) 1000000?

23. [M23] Предположим, мы изменили алгоритм R, добавив установку $j \leftarrow t + 1$ на шаге R1, и $j \leftarrow 1$, если из R3 осуществляется непосредственный переход в R2. Найдите распределение вероятности j и его среднее значение. Как эта величина связана со временем работы алгоритма?

► 24. [M25] (В.Г. Пейн (W.H. Payne), 1974.) Продолжим выполнение предыдущего упражнения. Пусть j_k — значение j при k -м посещении в алгоритме R. Покажите, что $|j_{k+1} - j_k| \leq 2$, и поясните, как отказаться от использования циклов в алгоритме с применением данного свойства.

25. [M35] Пусть $c_t \dots c_2 c_1$ и $c'_t \dots c'_2 c'_1$ — N -е и N' -е сочетания, сгенерированные методом двери-вертушки (алгоритм R). Докажите, что $|N - N'| > \sum_{k=1}^{m-1} \binom{2k}{k-1}$, если множество $C = \{c_t, \dots, c_2 c_1\}$ имеет $m > 0$ элементов, не входящих в $C' = \{c'_t, \dots, c'_2, c'_1\}$.

26. [26] Обладают ли элементы *тернарного* (троичного) рефлексивного кода Грея свойствами, аналогичными свойствам кода Грея двери-вертушки Γ_{st} , если мы возьмем только те n -кортежи $a_{n-1} \dots a_1 a_0$, у которых

a) $a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 = t$;

b) $\{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\} = \{r \cdot 0, s \cdot 1, t \cdot 2\}$?

► 27. [25] Покажите, что существует простой способ генерации всех сочетаний *не более* t элементов из $\{0, 1, \dots, n-1\}$ с использованием только лишь переходов в духе кода Грея $0 \leftrightarrow 1$ и $01 \leftrightarrow 10$. (Другими словами, на каждом шаге должны выполняться вставка элемента, удаление элемента или сдвиг элемента на ± 1 .) Примером такой последовательности является

0000, 0001, 0011, 0010, 0110, 0101, 0100, 1100, 1010, 1001, 1000

при $n = 4$ и $t = 2$. *Указание:* подумайте о китайских кольцах.

28. [M21] Истинно или ложно следующее утверждение: последовательность всех (s, t) -сочетаний $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ в виде битовых строк находится в облексном порядке тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности в индексном виде $b_s \dots b_2 b_1$ (для нулей) и $c_t \dots c_2 c_1$ (для единиц) находятся в облексном порядке.

► 29. [M28] (Ф.Д. Чейз (P.J. Chase)) Для данной строки символов +, - и 0 назовем *R-блоком* подстроку вида $-^{k+1}$, которой предшествует 0 и за которой не следует -. *L-блоком* назовем подстроку вида $+^{-k}$, за которой следует 0; в обоих случаях $k \geq 0$. Например, строка $\boxplus 00+-+ \boxminus \boxminus 000 \boxminus$ имеет два L-блока и один R-блок, выделенные рамкой. Заметим, что блоки не могут пересекаться.

Для таких строк мы образуем *последующую* строку при наличии хотя бы одного блока путем замены крайнего справа 0^{-k+1} на $-^{k+1}0$, если крайний справа блок является R-блоком; в противном случае заменяем крайний справа $+^{-k}0$ на $0+^{k+1}$. Кроме

того, обращаем первый знак, если таковой имеется, который находится справа от измененного блока, например:

$$-\boxed{0}00++- \rightarrow -0\boxed{0}0+- \rightarrow -0+\boxed{0}0- \rightarrow -0+-\boxed{0} \rightarrow -0\boxed{+}0+ \rightarrow -00++++-$$

где запись $\alpha \rightarrow \beta$ означает, что β является следующим за α элементом.

- Какие строки не содержат блоков (а значит, не имеют последующих элементов)?
- Может ли существовать цикл строк $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{k-1} \rightarrow \alpha_0$?
- Докажите, что если $\alpha \rightarrow \beta$, то $-\beta \rightarrow -\alpha$, где “-” означает “обратить все знаки” (следовательно, каждая строка имеет не более одного предшественника).
- Покажите, что если $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k$ и $k > 0$, то строки α_0 и α_k не содержат все их нули в одних и тех же позициях (таким образом, если α_0 имеет s знаков и t нулей, k должно быть меньше, чем $\binom{s+t}{t}$).
- Докажите, что каждая строка α , содержащая s знаков и t нулей, принадлежит ровно одной цепочке $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{\binom{s+t}{t}-1}$.

30. [M32] В предыдущем упражнении определены 2^s способов генерации всех сочетаний из s нулей и t единиц посредством отображений $+ \mapsto 0$, $- \mapsto 0$ и $0 \mapsto 1$. Покажите, что каждый из этих способов дает однородную облексную последовательность, определяемую соответствующим рекуррентным соотношением. Является ли последовательность Чейза (37) частным случаем этой более общей конструкции?

31. [M23] Сколько всего облексных последовательностей (s, t) -сочетаний может быть при использовании представления

- в виде битовых строк $a_{n-1} \dots a_1 a_0$;
- в виде списка индексов $c_t \dots c_2 c_1$?

► **32.** [M32] Сколько всего облексных последовательностей строк (s, t) -сочетаний $a_{n-1} \dots a_1 a_0$

- обладают свойством двери-вертушки;
- однородны?

33. [HM33] Сколько облексных последовательностей в упражнении 31, b близки к идеальным?

34. [M32] Продолжая выполнение упражнения 33, поясните, как при не слишком больших s и t найти такие схемы, которые как можно более близки к идеальным в том смысле, что количество “неидеальных” переходов $c_j \leftarrow c_j \pm 2$ минимально.

35. [M26] Сколько шагов последовательности Чейза C_{st} используют неидеальные переходы?

- **36.** [M21] Докажите, что метод (39) при генерации всех (s, t) -сочетаний $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ выполняет операцию $j \leftarrow j + 1$ ровно $\binom{s+t}{t} - 1$ раз, для любой облексной схемы сочетаний в виде битовых строк.
- **37.** [27] Какой алгоритм получается при использовании общего облексного метода (39) для получения (s, t) -сочетаний $a_{n-1} \dots a_1 a_0$:

- в лексикографическом порядке;
- в порядке двери-вертушки из алгоритма R;
- в однородном порядке (31)?

38. [26] Разработайте облексный алгоритм наподобие алгоритма C для *обратной* последовательности C_{st}^R .

39. [M21] Сколько сочетаний предшествует битовой строке

11001001000011111101101010

в последовательности Чейза C_{st} при $s = 12$ и $t = 14$? (См. пример (41).)

40. [M22] Каково миллионное сочетание в последовательности Чейза C_{st} при $s = 12$ и $t = 14$?

41. [M27] Покажите, что имеется перестановка $c(0), c(1), c(2), \dots$ неотрицательных целых чисел, такая, что элементы последовательности Чейза C_{st} получаются путем дополнения $s + t$ младших битов элементов $c(k)$ для $0 \leq k < 2^{s+t}$, которые имеют вес $v(c(k)) = s$. (Таким образом, последовательность $\bar{c}(0), \dots, \bar{c}(2^n - 1)$ содержит в качестве подпоследовательности все C_{st} , для которых $s + t = n$, так же, как бинарный код Грея $g(0), \dots, g(2^n - 1)$ содержит все последовательности двери-вертушки Γ_{st} .) Поясните, как вычислить бинарное представление $c(k) = (\dots a_2 a_1 a_0)_2$ на основе бинарного представления $k = (\dots b_2 b_1 b_0)_2$.

42. [HM34] Используйте производящую функцию вида $\sum_{s,t} g_{st} w^s z^t$ для анализа каждого шага алгоритма C.

43. [20] Докажите или опровергните следующее утверждение: если $s(x)$ и $p(x)$ обозначают соответственно преемника и предшественника x в чун-порядке (см. с. 25), то $s(x + 1) = p(x) + 1$.

- **44.** [M21] Пусть $C_t(n) - 1$ обозначает последовательность, получаемую из $C_t(n)$ путем исключения всех сочетаний с $c_1 = 0$ и последующей заменой $c_t \dots c_1$ на $(c_t - 1) \dots (c_1 - 1)$ в оставшихся сочетаниях. Покажите, что последовательность $C_t(n) - 1$ близка к идеальной.

45. [32] Воспользуйтесь чун-порядком и наброском расширения из уравнений (44) для генерации сочетаний $c_t \dots c_2 c_1$ последовательности Чейза $C_t(n)$ при помощи нерекурсивной процедуры.

- **46.** [33] Постройте нерекурсивный алгоритм для дуальных сочетаний $b_s \dots b_2 b_1$ последовательности Чейза C_{st} , а именно для позиций нулей в $a_{n-1} \dots a_1 a_0$.

47. [26] Реализуйте близкий к идеальному метод генерации перестановок множества из (46) и (47).

48. [M21] Предположим, что $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$ — любая последовательность перестановок мультимножества $\{s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$, где α_k отличается от α_{k+1} обменом двух элементов. Пусть $\beta_0, \dots, \beta_{M-1}$ — любая последовательность (s, t) сочетаний двери-вертушки, где $s = s_0$, $t = s_1 + \dots + s_d$, а $M = \binom{s+t}{t}$. Далее, пусть Λ_j — последовательность из M элементов, полученная путем применения обменов двери-вертушки к начальной строке $\alpha_j \uparrow \beta_0$, где $\alpha \uparrow \beta$ означает строку, полученную заменой элементами α единиц в β с сохранением порядка слева направо. Например, если $\beta_0, \dots, \beta_{M-1} = 0110, 0101, 1100, 1001, 0011, 1010$, а $\alpha_j = 12$, то Λ_j представляет собой $0120, 0102, 1200, 1002, 0012, 1020$. (Последовательность двери-вертушки не обязательно однородна.)

Докажите, что последовательность (47) содержит все перестановки $\{s_0 \cdot 0, s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$ и что соседние перестановки отличаются друг от друга обменом двух элементов.

49. [HM23] Пусть q — первообразный m -корень корень единицы, такой, как $e^{2\pi i/m}$. Покажите, что

$$\binom{n}{k}_q = \binom{\lfloor n/m \rfloor}{\lfloor k/m \rfloor} \binom{n \bmod m}{k \bmod m}_q.$$

► **50.** [HM25] Распространите формулу из предыдущего упражнения на q -мультиномимальные (q -multinomial) коэффициенты

$$\binom{n_1 + \dots + n_t}{n_1, \dots, n_t}_q.$$

51. [25] Найдите все Гамильтоновы пути в графе, вершины которого представляют собой перестановки $\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$, причем дуги соединяют вершины, получающиеся при перестановке двух соседних элементов. Какие из этих путей эквивалентны относительно операции замены нулей единицами и/или лево-правого отражения?

52. [M37] Обобщая теорему P, найдите необходимое и достаточное условие того, что все перестановки мультимножества $\{s_0 \cdot 0, \dots, s_d \cdot d\}$ могут быть сгенерированы при помощи переходов $a_j a_{j-1} \leftrightarrow a_{j-1} a_j$.

53. [M46] (Д.Г. Лемер (D.H. Lehmer), 1965.) Предположим, что N перестановок $\{s_0 \cdot 0, \dots, s_d \cdot d\}$ не могут быть сгенерированы при помощи идеальной схемы, поскольку $(N+x)/2$ из них имеют четное количество инверсий, где $x \geq 2$. Можно ли сгенерировать их все при помощи последовательности $N+x-2$ обменов $a_{\delta_k} \leftrightarrow a_{\delta_{k-1}}$ для $1 \leq k < N+x-1$, где имеется $x-1$ случаев “шпор” с $\delta_k = \delta_{k-1}$, возвращающих нас к перестановкам, с которыми мы только что сталкивались? Например, подходящая последовательность $\delta_1 \dots \delta_{94}$ для 90 перестановок $\{0, 0, 1, 1, 2, 2\}$, где $x = \binom{2+2+2}{2,2,2}_{-1} = 6$, имеет вид $234535432523451\alpha 42\alpha^R 51\alpha 42\alpha^R 51\alpha 4$, где $\alpha = 45352542345355$, если начать с $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 = 221100$.

54. [M40] Для каких значений s и t могут быть сгенерированы все (s, t) -сочетания, если в дополнение к обменам смежных элементов $a_j \leftrightarrow a_{j-1}$ разрешить обмен конечных элементов $a_{n-1} \leftrightarrow a_0$?

► 55. [33] (Франк Раски (Frack Ruskey), 2004.)

- a) Покажите, что все (s, t) -сочетания $a_{s+t-1} \dots a_1 a_0$ можно эффективно сгенерировать путем последовательных циклических сдвигов $a_j a_{j-1} \dots a_0 \leftarrow a_{j-1} \dots a_0 a_j$.
- b) Какие команды MIX превращают $(a_{s+t-1} \dots a_1 a_0)_2$ в следующий за ним элемент при $s + t < 64$?

56. [M49] (Бак (Buck) и Видеманн (Wiedemann), 1984.) Можно ли сгенерировать все (t, t) -сочетания $a_{2t-1} \dots a_1 a_0$ путем повторных обменов a_0 с некоторыми другими элементами?

► 57. [22] (Франк Раски (Frack Ruskey).) Может ли пианист проиграть все 4-нотные аккорды, размах которых не превышает одной октавы, перемещая всякий раз при переходе к новому аккорду только один палец? Это задача генерации всех сочетаний $c_t \dots c_1$, таких, что $n > c_t > \dots > c_1 \geq 0$ и $c_t - c_1 < m$, где $t = 4$ и

- a) $m = 8, n = 52$, если рассматривать только белые клавиши пианино;
- b) $m = 13, n = 88$, если учесть и черные клавиши.

58. [20] Рассмотрите задачу о пианисте из упражнения 57 с дополнительным условием, что аккорды не содержат соседних нот. (Другими словами, $c_{j+1} > c_j + 1$ при $t > j \geq 1$. Такие аккорды обычно более гармоничны.)

59. [M25] Имеется ли *идеальное* решение задачи о пианисте с четырьмя нотами, в которой на каждом шаге палец перемещался бы на *соседнюю* клавишу?

60. [23] Разработайте алгоритм для генерации всех *ограниченных* композиций

$$t = r_s + \dots + r_1 + r_0, \text{ где } 0 \leq r_j \leq m_j \text{ для } s \geq j \geq 0.$$

61. [32] Покажите, что все ограниченные композиции могут быть сгенерированы путем изменения на каждом шаге только двух из частей.

► 62. [M27] *Факторная таблица* представляет собой матрицу размером $m \times n$ из неотрицательных целых чисел (a_{ij}) , обладающую заданными суммами строк $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ и столбцов $c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}$, причем $r_1 + \dots + r_m = c_1 + \dots + c_n$.

- a) Покажите, что факторные таблицы размером $2 \times n$ эквивалентны ограниченными композициям.
- b) Какая факторная таблица является наибольшей в лексикографическом порядке для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$, если считывать элементы матрицы построчно слева направо и сверху вниз в порядке $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{mn})$?
- c) Какая факторная таблица является наибольшей в лексикографическом порядке для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$, если считывать элементы матрицы по столбцам сверху вниз и по строкам слева направо в порядке $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{mn})$?

- d) Какая факторная таблица является наименьшей в лексикографическом порядке для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$ при построчном и постолбцовом считывании?
- e) Поясните, как сгенерировать все факторные таблицы для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$ в лексикографическом порядке?

63. [M41] Покажите, что все факторные таблицы для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$ могут быть сгенерированы при помощи изменений на каждом шаге ровно четырех элементов матрицы.

- **64.** [M30] Постройте облексный цикл Грея для всех из $2^s \binom{s+t}{t}$ подкубов, которые имеют s цифр и t звездочек, с использованием только следующих преобразований: $*0 \leftrightarrow 0*$, $*1 \leftrightarrow 1*$, $0 \leftrightarrow 1$. Например, вот один такой цикл при $s = t = 2$:

(00 **, 01 **, 0 * 1*, 0 ** 1, 0 * * 0, 0 * 0*, *00*, *01*, *0 * 1, *0 * 0, ** 00, ** 01, * * 11, * * 10, *1 * 0, *1 * 1, *11*, *10*, 1 * 0*, 1 * * 0, 1 * * 1, 1 * 1*, 11 * *, 10 * *).

65. [M40] Подсчитайте общее количество облексных путей Грея в подкубах, в которых используются только преобразования, разрешенные в упражнении 64. Сколько из этих путей являются циклами?

- **66.** [22] Покажите, что для данных $n \geq t \geq 0$ существует путь Грея через все канонические базисы $(\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ из упражнения 12, в котором на каждом шаге выполняется изменение только одного бита. Например, приведем один такой путь для $n = 3$ и $t = 2$:

001 101 101 001 001 011 010
010' 010' 110' 110' 100' 100' 100'

67. [46] Рассмотрим конфигурации Изинга из упражнения 13, для которых $a_0 = 0$. Существует ли цикл Грея для этих конфигураций при заданных n , t и r , в котором все переходы имеют вид $0^k 1 \leftrightarrow 10^k$ или $01^k \leftrightarrow 1^k 0$? Например, в случае $n = 9$, $t = 5$, $n = 6$ имеется единственный цикл

(010101110, 010110110, 011010110, 011011010, 011101010, 010111010).

- 68.** [M01] Если α является t -сочетанием, то что такое (a) $\partial^t \alpha$; (b) $\partial^{t+1} \alpha$?
- **69.** [M22] Насколько велико наименьшее множество t -сочетаний A , для которого выполняется соотношение $|\partial A| < |A|$?
- 70.** [M25] Чему равно максимальное значение $\kappa_t N - N$ при $N \geq 0$?
- 71.** [M20] Сколько t -клик может иметь граф с миллионом ребер?
- **72.** [M22] Покажите, что если N имеет комбинаторное представление степени t (57), то существует простой способ найти комбинаторное представление степени s дополняющего числа $M = \binom{s+t}{t} - N$ для $N < \binom{s+t}{t}$. Как следствие, выведите (63).

73. [M23] (Э.Д.В. Хилтон (A.J.W. Hilton), 1976.) Пусть A — множество s -сочетаний, а B — множество t -сочетаний, и оба содержатся в $U = \{0, \dots, n-1\}$, где $n \geq s+t$. Покажите, что если A и B *перекрестно пересекающиеся* (cross-intersecting) в том смысле, что $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ для всех $\alpha \in A$ и $\beta \in B$, то такими же являются и множества Q_{Mns} и Q_{Nnt} , определенные в теореме К, где $M = |A|$ и $N = |B|$.

74. [M21] Чему равны $|\varrho P_{Nt}|$ и $|\varrho Q_{Nnt}|$ в теореме К?

75. [M20] Правая часть (60) не всегда является комбинаторным представлением степени $(t-1)$ для $\kappa_t N$, поскольку $v-1$ может быть равно 0. Покажите, однако, что положительное целое N имеет не больше двух представлений, если мы допустим $v=0$ в (57), и оба они дают одно и то же значение $\kappa_t N$ в соответствии с (60). Следовательно,

$$\kappa_k \kappa_{k+1} \dots \kappa_t N = \binom{n_t}{k-1} + \binom{n_{t-1}}{k-2} + \dots + \binom{n_v}{k-1+v-t} \quad \text{для } 1 \leq k \leq t.$$

76. [M20] Найдите простую формулу для $\kappa_t(N+1) - \kappa_t N$.

► 77. [M26] Докажите следующие свойства функции κ , работая только с биномиальными коэффициентами, без привлечения теоремы К:

a) $\kappa_t(M+N) \leq \kappa_t M + \kappa_t N$.

b) $\kappa_t(M+N) \leq \max(\kappa_t M, N) + \kappa_{t-1} N$.

Указание: $\binom{m_t}{t} + \dots + \binom{m_1}{1} + \binom{n_t}{t} + \binom{n_1}{1}$ равно $\binom{m_t \vee n_t}{t} + \dots + \binom{m_1 \vee n_1}{1} + \binom{m_t \wedge n_t}{t} + \dots + \binom{m_1 \wedge n_1}{1}$, где \vee и \wedge обозначают максимум и минимум.

78. [M22] Покажите, что теорема К следует из неравенства (b) (см. предыдущее упражнение), и наоборот: оба неравенства являются следствиями теоремы К. Указание: любое множество t -сочетаний A может быть записано как $A = A_1 + A_0 0$, где $A_1 = \{\alpha \in A \mid 0 \notin \alpha\}$.

79. [M23] Докажите, что для $t \geq 2$ соотношение $M \geq \mu_t N$ справедливо тогда и только тогда, когда $M + \lambda_{t-1} M \geq N$.

80. [HM26] (Л. Ловас (L. Lovász), 1979.) Функция $\binom{x}{t}$ монотонно возрастает от 0 до ∞ при увеличении x от $t-1$ до ∞ ; следовательно, мы можем определить

$$\underline{\kappa}_t N = \binom{x}{t-1}, \quad \text{если } N = \binom{x}{t} \text{ и } x \geq t-1.$$

Докажите, что $\kappa_t N \geq \underline{\kappa}_t N$ для всех целых $t \geq 1$ и $N \geq 0$. Указание: неравенство становится равенством при целых значениях x .

► 81. [M27] Покажите, что формула (64) дает минимальный размер тени в теореме М.

82. [HM31] Функция Такаги на рис. 27 определяется для $0 \leq x \leq 1$ формулой

$$\tau(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x r_k(t) dt,$$

где $r_k(t) = (-1)^{\lfloor 2^k t \rfloor}$ — функция Радемахера из 7.2.1.1-(16).

a) Докажите, что $\tau(x)$ непрерывна на отрезке $[0..1]$, но ее производная не существует ни в одной точке.

- b) Покажите, что $\tau(x)$ — единственная непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению $\tau\left(\frac{1}{2}x\right) = \tau\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tau(x)$ при $0 \leq x \leq 1$.
- c) Чему равно асимптотическое значение $\tau(\varepsilon)$ при малых ε ?
- d) Докажите, что значение $\tau(x)$ при рациональном x рационально.
- e) Найдите все корни уравнения $\tau(x) = 1/2$.
- f) Найдите все корни уравнения $\tau(x) = \max_{0 \leq x \leq 1} \tau(x)$.

83. [HM46] Определите множество R всех рациональных чисел r , таких, что уравнение $\tau(x) = r$ имеет несчетное количество решений. Если $\tau(x)$ рационально, а x — иррационально, верно ли, что $\tau(x) \in R$? (*Предупреждение:* эта задача может оказаться настоящим наркотиком.)

84. [HM27] Докажите для $T = \binom{2t-1}{t}$ следующую асимптотическую формулу:

$$\kappa_t N - N = \frac{T}{t} \left(\tau\left(\frac{N}{T}\right) + O\left(\frac{(\log t)^3}{t}\right) \right) \quad \text{при } 0 \leq N \leq T.$$

85. [HM21] Свяжите функции $\lambda_t N$ и $\mu_t N$ с функцией Такаги $\tau(x)$.

86. [M20] Докажите закон дуальности размаха/ядра $X^{\sim+} = X^{\circ\sim}$.

87. [M21] Истинны или ложны утверждения:

- a) $X \subseteq Y^\circ$ тогда и только тогда, когда $Y^\sim \subseteq X^{\circ\sim}$;
- b) $X^{\circ+\circ} = X^\circ$;
- c) $\alpha M \leq N$ тогда и только тогда, когда $M \leq \beta N$.

88. [M20] Поясните, в чем полезность перекрестного порядка, завершив доказательство леммы S.

89. [16] Вычислите функции α и β для тора $2 \times 2 \times 3$ (69).

90. [M22] Докажите фундаментальную лемму о сжатии (85).

91. [M24] Докажите теорему W для двухмерных торов $T(l, m)$, $l \leq m$.

92. [M28] Пусть $x = x_1 \dots x_{n-1}$ — N -й элемент тора $T(m_1, \dots, m_{n-1})$ и пусть S — множество всех элементов $T(m_1, \dots, m_{n-1}, m)$, которые $\preceq x_1 \dots x_{n-1} (m-1)$ в перекрестном порядке. Пусть N_a элементов S имеют последним компонентом a ($0 \leq a < m$). Докажите, что $N_{m-1} = N$ и $N_{a-1} = \alpha N_a$ для $1 \leq a < m$, где α — функция размаха для стандартных множеств в $T(m_1, \dots, m_{n-1})$.

93. [M25] (a) Найдите N , для которого результат теоремы W ложен, если параметры m_1, m_2, \dots, m_n не располагаются в неубывающем порядке. (b) Где в доказательстве теоремы используется гипотеза о том, что $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$?

94. [M20] Покажите, что ∂ -часть следствия С вытекает из ϱ -части. Указание: дополнениями мультисочетаний (92) по отношению к U являются 3211, 3210, 3200, 3110, 3100, 3000, 2110, 2100, 2000, 1100, 1000.

95. [17] Объясните, почему теоремы К и М вытекают из следствия С.

► 96. [M22] Пусть S — бесконечная последовательность (s_0, s_1, s_2, \dots) положительных целых чисел, и пусть

$$\binom{S(n)}{k} = [z^k] \prod_{j=0}^{n-1} (1 + z + \dots + z^{s_j});$$

таким образом, $\binom{S(n)}{k}$ при $s_0 = s_1 = s_2 = \dots = 1$ — обычный биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$.

Обобщая комбинаторную систему счисления, покажите, что каждое неотрицательное целое N имеет единственное представление

$$N = \binom{S(n_t)}{t} + \binom{S(n_{t-1})}{t-1} + \dots + \binom{S(n_1)}{1},$$

где $n_t \geq n_{t-1} \geq \dots \geq n_1 \geq 0$ и $\{n_t, n_{t-1}, \dots, n_1\} \subseteq \{s_0 \cdot 0, s_1 \cdot 1, s_2 \cdot 2, \dots\}$. Воспользуйтесь этим представлением для получения простой формулы для чисел $|\partial P_{Nt}|$ в следствии С.

► 97. [M26] В тексте раздела было замечено, что вершины выпуклого многогранника могут быть слегка смещены так, что все его грани будут представлять собой симплексы. В общем случае любое множество сочетаний, которое содержит тени всех своих элементов, называется *симплициальным комплексом* (simplicial complex); таким образом, C является симплициальным комплексом тогда и только тогда, когда из $\alpha \subseteq \beta$ и $\beta \in C$ вытекает, что $\alpha \in C$.

Если C содержит в точности N_t сочетаний размера t , то (N_0, N_1, \dots, N_n) является *вектором размеров* симплициального комплекса C из n вершин.

- Чему равны векторы размеров пяти правильных многогранников (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр) при небольшой подстройке их вершин?
- Постройте симплициальный комплекс с вектором размеров $(1, 4, 5, 2, 0)$.
- Найдите необходимое и достаточное условие допустимости данного вектора (N_0, N_1, \dots, N_n) .
- Докажите, что вектор (N_0, N_1, \dots, N_n) является допустимым тогда и только тогда, когда допустим его “дуальный” вектор $(\bar{N}_0, \bar{N}_1, \dots, \bar{N}_n)$, где $\bar{N}_t = \binom{n}{t} - N_{n-t}$.
- Перечислите все допустимые векторы размеров $(N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5)$ и дуальные им. Какие из этих векторов самодуальны?

98. [30] Продолжая выполнение упражнения 97, найдите эффективный способ подсчета количества допустимых векторов (N_0, N_1, \dots, N_n) при $n \leq 100$.

99. [M25] Клаттером (clutter)³ называется множество C сочетаний, несравнимых в том смысле, что из $\alpha \subseteq \beta$ и $\alpha, \beta \in C$ вытекает $\alpha = \beta$. Вектор размеров клаттера определяется так же, как и в упражнении 97.

а) Найдите необходимое и достаточное условие того, что (M_0, M_1, \dots, M_n) — вектор размеров клаттера.

б) Перечислите все такие векторы размеров для $n = 4$.

► **100.** [M30] (Клементс (Clements) и Линдстрем (Lindström).) Пусть A — “симплициальный мультикомплекс”, множество подмультимножеств мультимножества U в следствии C , обладающее тем свойством, что $\partial A \subseteq A$. Насколько большим может быть общий вес $\nu A = \sum \{|\alpha| \mid \alpha \in A\}$ при $|A| = N$?

101. [M25] Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева формула, обозначим через $F(p)$ вероятность того, что $f(x_1, \dots, x_n) = 1$, если каждая переменная x_j независимо равна 1 с вероятностью p .

а) Вычислите $G(p)$ и $H(p)$ для булевых формул $g(w, x, y, z) = wxz \vee wyz \vee xy\bar{z}$, $h(w, x, y, z) = \bar{w}yz \vee xyz$.

б) Покажите, что существует *монотонная* булева функция $f(w, x, y, z)$ такая, что $F(p) = G(p)$, но не существует такой функции, что $F(p) = H(p)$. Поясните, как проверить это условие в общем случае.

102. [HM35] (Ф.С. Маколей (F.S. Macaulay), 1927.) *Полиномиальным идеалом* (polynomial ideal) I для переменных $\{x_1, \dots, x_s\}$ является множество полиномов, замкнутое по отношению к операциям сложения, умножения на константу и умножения на любую из переменных. Он называется *однородным* (homogeneous), если состоит из линейных комбинаций множества однородных полиномов, т.е. полиномов наподобие $xy + z^2$, у которых все члены имеют одну и ту же степень. Пусть N_t — максимальное число линейно независимых элементов степени t в I . Например, при $s = 2$ множество всех $\alpha(x_0, x_1, x_2)(x_0x_1^2 - 2x_1x_2^2) + \beta(x_0, x_1, x_2)x_0x_1x_2^2$, где α и β пробегает по всем возможным полиномам от $\{x_0, x_1, x_2\}$, представляет собой однородный полиномиальный идеал с $N_0 = N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 4$, $N_5 = 9$, $N_6 = 15, \dots$

а) Докажите, что для любого такого идеала I существует другой идеал I' , в котором все однородные полиномы степени t представляют собой линейные комбинации N_t независимых *одночленов* (monomial). (Одночлен представляет собой произведение переменных наподобие $x_1^3x_2x_5^4$.)

б) Используйте теорему М и (64) для того, чтобы доказать, что $N_{t+1} \geq N_t + \kappa_s N_t$ для всех $t \geq 0$.

с) Покажите, что неравенство $N_{t+1} > N_t + \kappa_s N_t$ выполняется только для конечного количества t (это утверждение эквивалентно “основной теореме Гильберта”, доказанной Д. Гильбертом (D. Hilbert) в *Göttinger Nachrichten* (1988), 450–457; *Math. Annalen*, **36** (1890), 473–534.)

³Дословно — беспорядком. — *Примеч. пер.*

- **103.** [M38] Тень подкуба $a_1 \dots a_n$, где каждое a_j является 0, 1 либо *, получается путем замены некоторых * на 0 или 1, например:

$$\partial 0 * 11 * 0 = \{0011 * 0, 0111 * 0, 0 * 1100, 0 * 1110\}.$$

Найдите множество P_{Nst} , такое, что если A — произвольное множество N подкубов $a_1 \dots a_n$ с s цифрами и t звездочками, то $|\partial A| \geq |P_{Nst}|$.

- 104.** [M41] Тень бинарной строки $a_1 \dots a_n$ получается путем удаления одного из ее битов, например:

$$\partial 110010010 = \{10010010, 11010010, 11000010, 11001000, 11001010, 11001001\}.$$

Найдите множество P_{Nn} , такое, что если A — произвольное множество N бинарных строк $a_1 \dots a_n$, то $|\partial A| \geq |P_{Nn}|$.

- 105.** [M20] *Универсальным циклом t -сочетаний* (universal cycle of t -combinations) $\{0, 1, \dots, n-1\}$ является цикл из $\binom{n}{t}$ чисел, блоки которых из t последовательных элементов пробегают все t -сочетания $\{c_1, \dots, c_t\}$. Например,

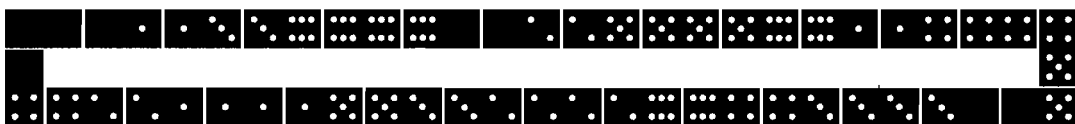
$$(02145061320516243152630425364103546)$$

является универсальным циклом для $t = 3$ и $n = 7$.

Докажите, что такие циклы невозможны, если только $\binom{n}{t}$ не кратно n .

- 106.** [M21] (Л. Пуансо (L. Poinsot), 1809.) Найдите “красивый” универсальный цикл 2-сочетаний $\{0, 1, \dots, 2m\}$. *Указание:* рассмотрите разности последовательных элементов по модулю $(2m+1)$.

- 107.** [22] (О. Терквем (O. Terquem), 1849.) Из теоремы Пуансо следует, что все 28 костей домино из традиционного набора “дубль-шесть” можно расположить циклически так, что очки на соседних домино будут одинаковы:



Сколько всего таких циклов может быть?

- 108.** [M31] Найдите универсальные циклы 3-сочетаний множеств $\{0, \dots, n-1\}$, у которых $n \bmod 3 \neq 0$.

- 109.** [M31] Найдите универсальные циклы 3-мультисочетаний множеств $\{0, \dots, n-1\}$, у которых $n \bmod 3 \neq 0$ (т.е. сочетаний $d_1 d_2 d_3$, в которых разрешены повторения). Например, при $n = 5$ таким циклом является

$$(00012241112330222344133340024440113).$$

- 110.** [26] *Криббедж* (cribbage) — карточная игра для колоды из 52 карт, каждая из которых имеет масть ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit$) и достоинство (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K). Одна из особенностей игры состоит в вычислении счета для сочетания 5 карт $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$, где одна карта c_k называется *стартером*. Счет представляет собой сумму очков, вычисляемую следующим образом для каждого подмножества S множества C и каждого выбора k . Пусть $|S| = s$.

- i) Пятнадцать: если $\sum \{v(c) \mid c \in S\} = 15$, где $(v(A), v(2), v(3), \dots, v(9), v(10), v(J), v(Q), v(K)) = (1, 2, 3, \dots, 9, 10, 10, 10, 10)$, то засчитывается два очка.
- ii) Пары: если $s = 2$ и обе карты одного и того же достоинства, засчитывается два очка.
- iii) “Тропа” (run): если $s \geq 3$ и достоинства карт следуют друг за другом, и если S не содержит тропы длиной $s + 1$, засчитывается s очков.
- iv) Масть (flush): если $s = 4$ и все карты S имеют одну и ту же масть, и если $c_k \notin S$, засчитывается $4 + [c_k \text{ имеет ту же масть, что и другие карты}]$ очков.
- v) Козырный валет (nob): если $s = 1$ и $c_k \notin S$, засчитывается 1 очко, если карта — валет (J) той же масти, что и c_k .

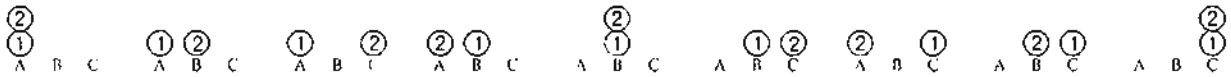
Например, если у вас на руках $\{J\clubsuit, 5\clubsuit, 5\diamond, 6\heartsuit\}$ и стартером является $4\clubsuit$, то ваш счет 4×2 за пятнадцать, 2 — за пару, 2×3 за тропы и 1 за козырного валета, итого — 17 очков.

Сколько в точности вариантов сочетаний карт и стартера приводят к счету, равному x очкам ($x = 0, 1, 2, \dots$)?

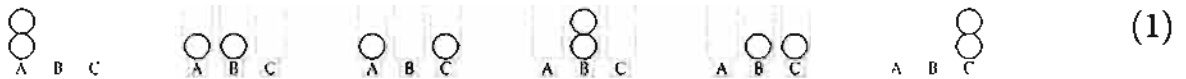
- 111. [M26] (П. Эрдеши (P. Erdős), Ч. Ко (C. Ko) и Р. Радо (R. Rado).) Предположим, что A — множество r -сочетаний n -множества, причем $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ для любых $\alpha, \beta \in A$. Покажите, что $|A| \leq \binom{n-1}{r-1}$, если $r \leq n/2$. Указание: рассмотрите $\partial^{n-2r} B$, где B — множество дополнений A .

7.2.1.4 Генерация всех разбиений

Великолепная книга Ричарда Стенли (Richard Stanley) *Перечислительная комбинаторика* (*Enumerative Combinatorics*, 1986) начинается с рассмотрения “двенадцатизадача” — массива размером $2 \times 2 \times 3$ фундаментальных комбинаторных задач, часто возникающих на практике (табл. 1). Все 12 задач Стенли можно описать в терминах распределения заданного количества шаров по заданному количеству урн. Например, имеется девять способов поместить два шара в три урны, если и шары и урны помечены.



(Порядок шаров *внутри* урны игнорируется.) Но если шары не помечены, то некоторые из размещений неразличимы, так что возможны только шесть различных способов размещения.



Если урны не помечены, то размещения наподобие $\begin{matrix} \textcircled{1} \textcircled{2} \\ | \\ \text{A} \end{matrix}$ и $\begin{matrix} \textcircled{2} \\ | \\ \text{A} \end{matrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ | \\ \text{B} \end{matrix}$, по сути, одинаковы, следовательно, различимы только два из исходных девяти размещений. Если же у нас имеется три помеченных шара, то вот все различные способы их размещения в трех непомеченных урнах.



И наконец, если ни шары, ни урны не помечены, то приведенные пять способов размещения сводятся только к трем.



Двенадцатизадача рассматривает все возможные распределения для помеченных и непомеченных урн и шаров, а также необязательное требование, чтобы в каждой урне содержалось не менее (не более) одного шара.

В предыдущих разделах данной главы мы рассмотрели n -кортежи, перестановки, сочетания и композиции; две из двенадцати записей табл. 1 тривиальны — размещение n вещей по m приемным карманам. Таким образом, мы можем завершить наше изучение классической комбинаторной математики рассмотрением оставшихся пяти записей таблицы, которые включают *разбиения* (partitions).

Начнем с того, что слово “разбиение” в математике имеет множество значений. Оно возникает всякий раз, когда выполняется разделение некоторого объекта на подобъекты.

— Джордж Эндрюс (*George Andrews*), *Теория разбиений* (*The Theory of Partitions*) (1976)

Таблица 1. Двенадцатизадачие

Шары в урнах	Без ограничений	≤ 1	≥ 1
n помеченных шаров, m помеченных урн	n -кортежи из m вещей	n -перестановки m вещей	разбиения $\{1, \dots, n\}$ на m упорядоченных частей
n непомеченных шаров, m помеченных урн	n -мультисочетания из m вещей	n -сочетания m вещей	композиции n из m частей
n помеченных шаров, m непомеченных урн	разбиения $\{1, \dots, n\}$ на $\leq m$ частей	n вещей в m приемных карманов	разбиения $\{1, \dots, n\}$ на m частей
n непомеченных шаров, m непомеченных урн	разбиения n на $\leq m$ частей	n вещей в m приемных карманов	разбиения n на m частей

Одно и то же имя имеют две достаточно разные концепции: *разбиение множества* — это способы его разделения на непересекающиеся подмножества; таким образом, (2) представляет собой иллюстрацию пяти разбиений $\{1, 2, 3\}$, а именно:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}\{3\}, \{1, 3\}\{2\}, \{1\}\{2, 3\}, \{1\}\{2\}\{3\}. \quad (4)$$

Разбиения целого числа представляют собой способы записи его в виде суммы положительных целых чисел, независимо от их порядка. Так, в (3) показаны три разбиения числа 3, а именно

$$3, \quad 2 + 1, \quad 1 + 1 + 1. \quad (5)$$

Мы будем следовать общей практике и называть разбиения целых чисел просто “разбиениями”, не указывая их объекта; другой вид мы будем называть “разбиениями множеств”, чтобы ясно указывать различия между этими видами разбиений. Оба вида разбиений важны, так что мы изучим их по очереди.

Генерация всех разбиений целых чисел. Разбиение числа n формально можно определить как последовательность неотрицательных целых чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, такую, что $n = a_1 + a_2 + \dots$; например, одно из разбиений $7 - a_1 = a_2 = 3, a_3 = 1$ и $a_4 = a_5 = \dots = 0$. Количество ненулевых членов называется количеством *частей*, а нулевые члены обычно опускаются. Таким образом, мы записываем $7 = 3 + 3 + 1$, или просто 331, чтобы сэкономить место, если контекст очевиден.

Простейший (и один из быстрейших) способ сгенерировать все разбиения — посетить их в обратном лексикографическом порядке, начиная с ‘ n ’ и заканчивая ‘11...1’. Например, разбиения 8 в указанном порядке представляют собой

$$8, 71, 62, 611, 53, 521, 5111, 44, 431, 422, 4211, 41111, 332, 3311, \\ 3221, 32111, 311111, 2222, 22211, 221111, 2111111, 11111111. \quad (6)$$

Если разбиение состоит не из одних единиц, оно завершается некоторым числом $(x + 1)$, где $x \geq 1$, за которым следует ноль или несколько единиц. Следовательно, очередное наименьшее разбиение в лексикографическом порядке получается путем

замены суффикса $(x + 1) 1 \dots 1$ на $x \dots xr$ для некоторого соответствующего остатка $r \leq x$. Процесс достаточно эффективен, если отслеживать наибольший индекс q , такой, что $a_q \neq 1$, как предложено Д.К.С. Маккеем (J.K.S. McKay) [CACM, **13** (1970), 52], и заполнять массив единицами, как предложили А. Зогби (A. Zoghbi) и И. Стойменович (I. Stojmenovic) [International Journal of Computer Math., **70** (1998), 319–332].

Алгоритм Р (Разбиения в обратном лексикографическом порядке). Этот алгоритм генерирует все разбиения $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 1$ с $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ и $1 \leq m \leq n$ при $n \geq 1$. Значение a_0 также устанавливается равным 0.

- Р1.** [Инициализация.] Установить $a_m \leftarrow 1$ для $n \geq m > 1$. Затем установить $m \leftarrow 1$ и $a_0 \leftarrow 0$.
- Р2.** [Сохранить заключительную часть.] Установить $a_m \leftarrow n$ и $q \leftarrow m - [n = 1]$.
- Р3.** [Посещение.] Посетить разбиение $a_1 a_2 \dots a_m$. Затем, если $a_q \neq 2$, перейти к шагу Р5.
- Р4.** [Замена 2 на 1+1.] Установить $a_q \leftarrow 1$, $q \leftarrow q - 1$, $m \leftarrow m + 1$ и вернуться к шагу Р3. (В этот момент $a_k = 1$ для $q < k \leq n$.)
- Р5.** [Уменьшение a_q .] Завершить работу, если $q = 0$. В противном случае установить $x \leftarrow a_q - 1$, $a_q \leftarrow x$, $n \leftarrow m - q + 1$ и $m \leftarrow q + 1$.
- Р6.** [Копирование x при необходимости.] Если $n \leq x$, вернуться к шагу Р2. В противном случае установить $a_m \leftarrow x$, $m \leftarrow m + 1$, $n \leftarrow n - x$ и повторить данный шаг. ▮

Обратите внимание, что переход от одного разбиения к следующему выполняется особенно просто, если имеется двойка; шаг Р4 просто изменяет крайнюю справа двойку на единицу и добавляет единицу справа. Эта приятная ситуация, к счастью, представляет собой наиболее распространенный случай. Например, при $n = 100$ около 79% всех разбиений содержат 2.

Если мы хотим генерировать все разбиения числа n на фиксированное количество частей, к нашим услугам другой простой алгоритм. Приведенный далее метод, разработанный в диссертации К.Ф. Гинденбурга (C.F. Hindenburg) в 18-м веке [Infininomii Dignitatum Exponentis Indeterminati (Göttingen, 1779), 73–91], посещает все разбиения в *солексном* (colex) порядке, т.е. лексикографическом порядке “отраженных” последовательностей $a_m \dots a_2 a_1$.

Алгоритм Н (Разбиение на m частей). Этот алгоритм генерирует все целые m -кортежи $a_1 \dots a_m$, такие, что $a_1 \geq \dots \geq a_m \geq 1$ и $a_1 + \dots + a_m = n$, в предположении, что $n \geq m \geq 2$.

- Н1.** [Инициализация.] Установить $a_1 \leftarrow n - m + 1$ и $a_j \leftarrow 1$ для $1 < j \leq m$. Установить также $a_{m+1} \leftarrow -1$.
- Н2.** [Посещение.] Посетить разбиение $a_1 \dots a_m$. Затем, если $a_2 \geq a_1 - 1$, перейти к шагу Н4.
- Н3.** [Настройка a_1 и a_2 .] Установить $a_1 \leftarrow a_1 - 1$, $a_2 \leftarrow a_2 + 1$ и вернуться к шагу Н2.

- Н4.** [Поиск j .] Установить $j \leftarrow 3$ и $s \leftarrow a_1 + a_2 - 1$. Затем, если $a_j \geq a_1 - 1$, установить $s \leftarrow s + a_j$, $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $a_j < a_1 - 1$. (Теперь $s = a_1 + \dots + a_{j-1} - 1$.)
- Н5.** [Увеличение a_j .] Завершить работу, если $j > m$. В противном случае установить $x \leftarrow a_j + 1$, $a_j \leftarrow x$, $j \leftarrow j - 1$.
- Н6.** [Настройка $a_1 \dots a_j$.] Пока $j > 1$, установить $a_j \leftarrow x$, $s \leftarrow s - x$ и $j \leftarrow j - 1$. В конце установить $a_1 \leftarrow s$ и вернуться к шагу Н2. \blacksquare

Например, при $n = 11$ и $m = 4$ посещаемые алгоритмом разбиения —

$$8111, 7211, 6311, 5411, 6221, 5321, 4421, 4331, 5222, 4322, 3332. \quad (7)$$

Основная идея состоит в том, что солексный порядок переходит от одного разбиения $a_1 \dots a_m$ к другому путем поиска наименьшего j , такого, что a_j можно увеличить без изменения $a_{j+1} \dots a_m$. Новое разбиение $a'_1 \dots a'_m$ будет иметь $a'_1 \geq \dots \geq a'_j = a_j + 1$ и $a'_1 + \dots + a'_j = a_1 + \dots + a_j$, и эти условия достижимы тогда и только тогда, когда $a_j < a_1 - 1$. Кроме того, наименьшее такое разбиение $a'_1 \dots a'_m$ в солексном порядке имеет $a'_2 = \dots = a'_j = a_j + 1$.

Шаг Н3 обрабатывает простой случай $j = 2$, который наиболее распространен. Следует отметить, что значение j практически всегда достаточно мало; позже мы докажем, что общее время работы алгоритма Н не превышает количества посещенных разбиений, умноженного на небольшую константу, плюс $O(m)$.

Другие представления разбиений. Мы определили разбиение как последовательность неотрицательных целых чисел $a_1 a_2 \dots$, обладающую теми свойствами, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ и $a_1 + a_2 + \dots = n$, но можно также рассматривать его как n -кортеж неотрицательных целых чисел $c_1 c_2 \dots c_n$, таких, что

$$c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n. \quad (8)$$

Здесь c_j — количество появлений числа j в последовательности $a_1 a_2 \dots$; например, разбиение 331 соответствует количествам $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 2$, $c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = \dots = 0$. Количество частей в таком случае составляет $c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Можно легко разработать процедуру, аналогичную алгоритму Р, для генерации разбиений в виде количества частей (см. упражнение 5).

Мы уже встречались с неявным представлением в виде количества частей в формулах наподобие 1.2.9–(38), которые выражают симметричную функцию

$$h_n = \sum_{N \geq d_n \geq \dots \geq d_2 \geq d_1 \geq 1} x_{d_1} x_{d_2} \dots x_{d_n} \quad (9)$$

как

$$\sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_n \geq 0 \\ c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n}} \frac{S_1^{c_1}}{1^{c_1} c_1!} \frac{S_2^{c_2}}{2^{c_2} c_2!} \dots \frac{S_n^{c_n}}{n^{c_n} c_n!}, \quad (10)$$

где S_j — симметричная функция $x_1^j + x_2^j + \dots + x_N^j$. Сумма в (9), по сути, берется по всем n -мультисочетаниям N , в то время как сумма (10) берется по всем разбиениям

n . Таким образом, например, $h_3 = \frac{1}{6}S_1^3 + \frac{1}{2}S_1S_2 + \frac{1}{3}S_3$ и при $N = 2$ мы имеем

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = \frac{1}{6}(x+y)^3 + \frac{1}{2}(x+y)(x^2+y^2) + \frac{1}{3}(x^3+y^3).$$

Другие суммы по всем разбиениям встречаются в упражнениях 1.2.5–21, 1.2.9–11, 1.2.10–12 и т.д.; по этой причине разбиения занимают важное место в изучении симметричных функций — класса функций, широко распространенного в математике. [Глава 7 работы Ричарда Стенли (Richard Stanley) *Enumerative Combinatorics*, 2 (1999) представляет собой превосходное введение в современные аспекты теории симметричных функций.]

Разбиения можно весьма привлекательно визуализировать, рассматривая массив из n точек, у которого a_1 точек в верхней строке, a_2 точек во второй строке и т.д. Такое размещение точек называется *диаграммой Феррерса* в честь Н.М. Феррерса (N.M. Ferrers) [*Philosophical Mag.*, 5 (1853), 199–202]; наибольший квадрат подмассива точек, содержащийся в такой диаграмме, называется *квадратом Дюрфи* по имени В.П. Дюрфи (W.P. Durfee) [*Johns Hopkins Univ. Circular*, 2 (December 1882), 23]. Например, на рис. 28, а показана диаграмма Феррерса для разбиения 8887211 с квадратом Дюрфи размером 4×4 . Квадрат Дюрфи содержит k^2 точек, где k — наибольший индекс, такой, что $a_k \geq k$; можно называть k *следом* (trace) разбиения.

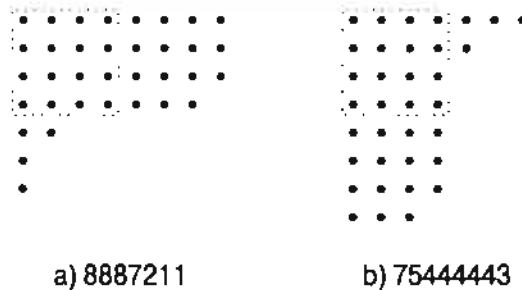


Рис. 28. Диаграмма Феррерса и квадрат Дюрфи двух сопряженных разбиений

Для произвольного разбиения α вида $a_1a_2\dots$ *сопряженным* (conjugate) с ним является разбиение $\alpha^T = b_1b_2\dots$, которое получается путем транспонирования строк и столбцов соответствующей диаграммы Феррерса. Например, на рис. 28, б показано, что $(8887211)^T = (75444443)$. Если $\beta = \alpha^T$, то очевидно, что $\alpha = \beta^T$; разбиение β имеет a_1 частей, а β — b_1 частей. Имеется простое соотношение между представлениями в виде количества частей $c_1\dots c_n$ разбиения α и сопряженного разбиения $b_1b_2\dots$, а именно:

$$b_j - b_{j+1} = c_j \quad \text{для всех } j \geq 1. \quad (11)$$

Это соотношение позволяет легко вычислить сопряженное для данного разбиения (см. упражнение 6).

Понятие сопряженности часто поясняет свойства разбиений, которые иначе выглядели бы весьма загадочными. Например, теперь, зная определение α^T , мы можем легко увидеть, что значение $j-1$ на шаге Н5 алгоритма Н представляет собой вторую наименьшую часть сопряженного разбиения $(a_1\dots a_m)^T$. Следовательно, среднее количество работы, которую необходимо выполнить на шагах Н4 и Н6, по сути, пропорционально среднему размеру второй наименьшей части случайного разбиения,

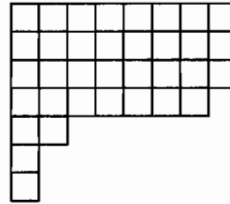
наибольшая часть которого равна m . Ниже мы увидим, что эта вторая наименьшая часть почти всегда достаточно мала.

Кроме того, алгоритм H выводит разбиения в лексикографическом порядке сопряженных к ним. Например, соответствующими сопряженными к (7) являются

$$41111111, 4211111, 422111, 42221, 431111, 43211, 4322, 4331, 44111, 4421, 443; \quad (12)$$

они представляют собой разбиения $n = 11$ с наибольшей частью, равной 4. Один из способов генерации всех разбиений n состоит в том, чтобы начать с тривиального разбиения ' n ', затем поочередно применить алгоритм H для $m = 2, 3, \dots, n$; такой процесс даст все α в лексикографическом порядке α^T (см. упражнение 7). Таким образом, алгоритм H можно рассматривать как дуальный к алгоритму P .

Имеется, как минимум, еще один способ представления разбиений, называющийся *краевым представлением* (rim representation). Предположим, что мы заменили точки на диаграмме Феррерса квадратами, получив таким образом подобие таблицы, как мы делали в разделе 5.1.4; например, разбиение 8887211 с рис. 28, a превращается в



(13)

Правая граница этого образа может рассматриваться как путь от нижнего левого угла в правый верхний угол квадрата размером $n \times n$, а из табл. 7.2.1.3–1 мы знаем, что такой путь соответствует (n, n) -сочетанию.

Например, (13) соответствует 70-битовой строке

$$0 \dots 01001011111010001 \dots 1 = 0^{28} 1^1 0^2 1^1 0^1 1^5 0^1 1^1 0^3 1^{27}, \quad (14)$$

в которой мы размещаем в начале достаточное количество нулей, а в конце — единиц, чтобы получить в точности по n каждой из них. Нули представляют шаги вверх, а единицы — вправо. Легко видеть, что определенная таким образом битовая строка имеет ровно n инверсий; и наоборот: каждая перестановка мультимножества $\{n \cdot 0, n \cdot 1\}$, которая содержит ровно n инверсий, соответствует разбиению n . Если разбиение имеет t различных частей, его битовая строка может быть записана в виде

$$0^{n-q_1-q_2-\dots-q_t} 1^{p_1} 0^{q_1} 1^{p_2} 0^{q_2} \dots 1^{p_t} 0^{q_t} 1^{n-p_1-p_2-\dots-p_t}, \quad (15)$$

где показатели степени p_j и q_j представляют собой положительные целые числа. В таком случае стандартным представлением разбиения является

$$a_1 a_2 \dots = (p_1 + \dots + p_t)^{q_t} (p_1 + \dots + p_{t-1})^{q_{t-1}} \dots (p_1)^{q_1}, \quad (16)$$

т.е. в нашем примере $(1 + 1 + 5 + 1)^3 (1 + 1 + 5)^1 (1 + 1)^1 (1)^2 = 8887211$.

Количество разбиений. Вопрос, заданный в 1740 году Филиппом Ноде (Philipp Naudé), побудил Леонарда Эйлера (Leonhard Euler) написать две фундаментальные статьи, в которых он подсчитывал количества разбиений различного вида, изучая

их производящие функции [*Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, **13** (1741), 64–93; *Novi Comment. Acad. Sci. Pet.*, **3** (1750), 125–169]. Он заметил, что коэффициент при z^n в бесконечном произведении

$$(1 + z + z^2 + \dots + z^j + \dots) (1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2k} + \dots) \\ (1 + z^3 + z^6 + \dots + z^{3l} + \dots) \dots$$

равен количеству неотрицательных целых решений уравнения $j + 2k + 3l + \dots = n$; а $1 + z^m + z^{2m} + \dots$ равно $1/(1 - z^m)$. Следовательно, если мы запишем

$$P(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^m} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n, \quad (17)$$

то количество разбиений n равно $p(n)$. Функция $P(z)$, в свою очередь, обладает рядом поразительных математических свойств.

Например, Эйлер открыл наличие большого количества сокращений при раскрытии скобок знаменателя $P(z)$:

$$(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + z^{22} + z^{26} - \dots = \\ = \sum_{-\infty < n < \infty} (-1)^n z^{(3n^2+n)/2}. \quad (18)$$

Комбинаторное доказательство этого замечательного тождества, основанное на диаграммах Феррерса, имеется в упражнении 5.1.1–14; можно также доказать его, положив $u = z$ и $v = z^2$ в еще более замечательном тождестве Якоби

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - u^k v^{k-1}) (1 - u^{k-1} v^k) (1 - u^k v^k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n u^{\binom{n}{2}} v^{\binom{-n}{2}}, \quad (19)$$

поскольку левая часть при этом становится равной

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^{3k-2}) (1 - z^{3k-1}) (1 - z^{3k});$$

см. упражнение 5.1.1–20. Из тождества Эйлера (18) вытекает, что количество разбиений удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \dots, \quad (20)$$

на основании которого можно вычислить соответствующие значения быстрее, чем выполняя вычисление степенных рядов (17).

n	=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$p(n)$	=	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176

Из раздела 1.2.8 мы знаем, что решение рекуррентного соотношения Фибоначчи $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ при положительных $f(0)$ и $f(1)$ растет экспоненциально: $f(n) = \Theta(\phi^n)$. Дополнительные члены ‘ $-p(n-5) - p(n-7)$ ’ в (20) оказывают подавляющее влияние на количество разбиений; более того, если ограничиться

в рекуррентном соотношении только этими членами, полученный в результате ряд осциллирует между положительными и отрицательными значениями. Следующие члены, '+p(n-12) + p(n-15)', восстанавливают экспоненциальный рост.

Реальная скорость роста $p(n)$ имеет порядок $A\sqrt{n}/n$ для некоторой константы A . Например, в упражнении 33 доказывается, что $p(n)$ растет со скоростью, как минимум, $e^{2\sqrt{n}}/n$. Еще один простой способ получить неплохую *верхнюю* границу состоит в логарифмировании (17)

$$\ln P(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \ln \frac{1}{1-z^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{mn}}{n}; \quad (21)$$

затем следует рассмотреть его поведение вблизи $z=1$, положив $z=e^{-t}$:

$$\ln P(e^{-t}) = \sum_{m,n \geq 1} \frac{e^{-mnt}}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{tn} - 1} < \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 t} = \frac{\zeta(2)}{t}. \quad (22)$$

Далее, поскольку $p(n) \leq p(n+1) < p(n+2) < \dots$ и $e^t > 1$, получаем

$$\frac{p(n)}{1-e^{-t}} < \sum_{k=0}^{\infty} p(k) e^{(n-k)t} = e^{nt} P(e^{-t}) < e^{nt + \zeta(2)/t} \quad (23)$$

для всех $t > 0$. Приравнивание $t = \sqrt{\zeta(2)/n}$ дает

$$p(n) < C e^{2C\sqrt{n}}/\sqrt{n}, \quad \text{где } C = \sqrt{\zeta(2)} = \pi/\sqrt{6}. \quad (24)$$

Более точную информацию о величине $\ln P(e^{-t})$ можно получить, воспользовавшись формулой суммирования Эйлера (раздел 1.2.11.2) или преобразованием Меллина (раздел 5.2.2); см. упражнение 25. Однако рассмотренные методы недостаточно мощны для определения точного поведения $P(e^{-t})$, так что самое время добавить в наш арсенал новые методы.

Производящая функция Эйлера $P(z)$ идеально подходит для *формулы суммирования Пуассона* [J. *École Royale Polytechnique*, 12 (1823), 404–509, § 63], в соответствии с которой

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+\theta) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M e^{2\pi m i \theta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi m i y} f(y) dy, \quad (25)$$

где f — “хорошо себя ведущая” функция. Эта формула основана на том факте, что в левой части находится периодическая функция от θ , а в правой — ее разложение в ряд Фурье. Функция f достаточно хорошая, если, например, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty$, а также

- i) либо $f(n+\theta)$ является аналитической функцией комплексной переменной θ в области $|\Im \theta| \leq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $0 \leq \Re \theta \leq 1$, и левая часть равномерно сходится в этом прямоугольнике;
- ii) либо $f(\theta) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(\theta - \varepsilon) + f(\theta + \varepsilon)) = g(\theta) - h(\theta)$ для всех действительных чисел θ , где g и h — монотонно возрастающие, а $g(\pm\infty)$ и $h(\pm\infty)$ конечны.

[Peter Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, **2** (New York: Wiley, 1977), Theorem 10.6.2.] Формула Пуассона не панацея для задач суммирования любого вида, но если она применима, то ее результаты, как мы увидим, могут быть впечатляющи.

Умножим формулу Эйлера (18) на $z^{1/24}$ для “завершения квадрата”:

$$\frac{z^{1/24}}{P(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n z^{\frac{3}{2}(n+\frac{1}{6})^2}. \quad (26)$$

Тогда для всех $t > 0$ имеем $e^{-t/24}/P(e^{-t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, где

$$f(y) = e^{-\frac{3}{2}t(y+\frac{1}{6})^2} \cos \pi y; \quad (27)$$

и эта функция f подходит для формулы суммирования Пуассона, так как удовлетворяет обоим критериям, приведенным выше. Таким образом, мы можем попытаться проинтегрировать $e^{-2\pi m i y} f(y)$ и для $m = 0$ получить результат

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-\pi^2/6t}. \quad (28)$$

К этому мы должны добавить

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{2\pi m i y} + e^{-2\pi m i y}) f(y) dy = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos 2\pi m y dy; \quad (29)$$

этот интеграл также оказывается берущимся. Будучи объединены, все результаты (см. упражнение 27) дают

$$\frac{e^{-t/24}}{P(e^{-t})} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-6\pi^2(n+\frac{1}{6})^2/t} = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{e^{-\pi^2/6t}}{P(e^{-4\pi^2/t})}. \quad (30)$$

Небольшой сюрприз — мы доказали еще один замечательный факт о $P(z)$ — приведенную далее теорему.

Теорема D. Производящая функция (17) для разбиений удовлетворяет функциональному соотношению

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\zeta(2)}{t} + \frac{1}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{24} + \ln P(e^{-4\pi^2/t}) \quad (31)$$

при $\Re t > 0$. ▮

Эта теорема была открыта Дедекиндом (Dedekind) [*Crelle*, **83** (1877), 265–292, § 6], который для функции $z^{1/24}/P(z)$ использовал запись $\eta(\tau)$, где $z = e^{2\pi i \tau}$; его доказательство основано на существенно более сложной теории эллиптических функций. Заметим, что, когда t — малое положительное число, $\ln P(e^{-4\pi^2/t})$ крайне мало; например, при $t = 0.1$ получаем $\exp(-4\pi^2/t) \approx 3.5 \times 10^{-172}$. Таким образом, теорема D дает нам практически все, что необходимо знать о значении $P(z)$ при z , близком к 1.

Г.Г. Харди (G.H. Hardy) и С. Рамануджан (S. Ramanujan) использовали это знание для вывода асимптотического поведения $p(n)$ при больших n , и их работа была продолжена многие годы спустя Х. Радемахером (H. Rademacher), открывшим ряд, который не только асимптотичен, но и сходится [*Proc. London Math. Soc.* (2), **17** (1918), 75–115; **43** (1937), 241–254]. Формула Харди–Рамануджана–Радемахера для $p(n)$ поистине одно из наиболее изумительных тождеств; она гласит, что

$$p(n) = \frac{\pi}{2^{5/4} 3^{3/4} (n - 1/24)^{3/4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_{3/2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{k} \sqrt{n - 1/24} \right). \quad (32)$$

Здесь $I_{3/2}$ означает модифицированную сферическую функцию Бесселя

$$I_{3/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k + 5/2)} \frac{(z^2/4)^k}{k!} = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \left(\frac{\cosh z}{z} - \frac{\sinh z}{z^2} \right), \quad (33)$$

а коэффициент $A_k(n)$ определяется формулой

$$A_k(n) = \sum_{h=0}^{k-1} [h \perp k] \exp \left(2\pi i \left(\frac{\sigma(h, k, 0)}{24} - \frac{nh}{k} \right) \right), \quad (34)$$

где $\sigma(h, k, 0)$ — сумма Дедекинда, определенная в уравнении 3.3.3–(16). В результате

$$A_1(n) = 1, \quad A_2(n) = (-1)^n, \quad A_3(n) = 2 \cos \frac{(24n + 1)\pi}{18}, \quad (35)$$

и в общем случае $A_k(n)$ лежит между $-k$ и k .

Доказательство (32) может увести нас слишком далеко, но основная идея состоит в использовании “метода седловой точки”, рассматривающегося в разделе 7.2.1.5. Член для $k = 1$ выводится из поведения $P(z)$ при z , близком к 1; следующий член выводится из поведения z вблизи -1 , здесь можно применить преобразование, подобное (31). В общем случае k -й член (32) учитывает поведение $P(z)$ при z , стремящемся к $e^{2\pi i h/k}$ для несократимых дробей h/k со знаменателем k ; каждый k -й корень единицы представляет собой полюс для каждой из дробей $1/(1 - z^k)$, $1/(1 - z^{2k})$, $1/(1 - z^{3k})$, ... в бесконечном произведении $P(z)$.

Старший член (32) может быть существенно упрощен, если нам достаточно грубого приближения:

$$p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}} \left(1 + O\left(n^{-1/2}\right) \right). \quad (36)$$

Если же такой точности недостаточно, можно воспользоваться более детальным приближением:

$$p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2n'/3}}}{4n'\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2n'}} \right) \left(1 + O\left(e^{-\pi\sqrt{n'/6}}\right) \right), \quad n' = n - \frac{1}{24}. \quad (37)$$

Например, $p(100)$ имеет точное значение 190 569 292; формула (36) дает нам $p(100) \approx 1.993 \times 10^8$, в то время как (37) — гораздо лучшую оценку 190 568 944.783.

Э. Одлышко (A. Odlyzko) заметил, что при больших n формула Харди–Рамануджана–Радемахера дает близкий к оптимальному способ вычисления точного значения $p(n)$, поскольку арифметические операции могут быть выполнены примерно за $O(\log p(n)) = O(n^{1/2})$ шагов. Основной вклад вносят несколько первых членов (32); затем ряд стремится к членам, не превышающим порядка $k^{-3/2}$, обычно порядка k^{-2} . Кроме того, около половины коэффициентов $A_k(n)$ оказываются равными 0 (см. упражнение 28). Например, при $n = 10^6$ члены для $k = 1, 2, 3$ приблизительно равны 1.47×10^{1107} , 1.23×10^{550} и -1.23×10^{364} соответственно. Сумма первых 250 членов приближенно равна $1471684986 \dots 73818.01$, в то время как истинное значение равно $1471684986 \dots 73818$; при этом 123 из 250 членов равны нулю.

Количество частей. Удобно ввести обозначение

$$\left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right| \quad (38)$$

для количества разбиений n , состоящих ровно из m частей. Тогда для всех целых m и n выполняется рекуррентное соотношение

$$\left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} n-m \\ m \end{array} \right|, \quad (39)$$

поскольку $\left| \begin{array}{c} n-1 \\ m-1 \end{array} \right|$ подсчитывает разбиения, наименьшая часть которых равна 1, а $\left| \begin{array}{c} n-m \\ m \end{array} \right|$ — прочие разбиения. (Если наименьшая часть равна 2 или больше, мы можем вычесть 1 из каждой части и получить разбиение $n-m$ на m частей.) Аналогичные рассуждения приводят к заключению, что $\left| \begin{array}{c} m+n \\ m \end{array} \right|$ — количество разбиений n на не более чем m частей, а именно на m неотрицательных слагаемых. Мы также знаем из транспонирования диаграмм Феррерса, что $\left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right|$ представляет собой количество разбиений n , у которых *наибольшая* часть равна m . Таким образом, $\left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right|$ — число, которое стоит того, чтобы его изучить. Граничные условия

$$\left| \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right| = \delta_{n0} \text{ и } \left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right| = 0 \text{ для } m < 0 \text{ или } n < 0 \quad (40)$$

делают простой табуляцию $\left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right|$ для небольших значений параметров, и мы можем получить массив чисел аналогично знакомым треугольникам для $\binom{n}{m}$, $[n]_m$, $\left\{ \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right\}$ и $\left\langle \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right\rangle$, с которыми мы встречались ранее (табл. 2). Производящая функция имеет вид

$$\sum_n \left| \begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right| z^n = \frac{z^m}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^m)}. \quad (41)$$

Почти все разбиения n состоят из $\Theta(\sqrt{n} \log n)$ частей. Этот факт, открытый П. Эрдемем (P. Erdős) и Д. Ленером (J. Lehner) [*Duke Math. J.*, 8 (1941), 335–345], имеет весьма поучительное доказательство.

Теорема Е. Пусть $C = \pi/\sqrt{6}$ и $m = \frac{1}{2C}\sqrt{n} \ln n + x\sqrt{n} + O(1)$. Тогда

$$\frac{1}{p(n)} \left| \begin{array}{c} m+n \\ n \end{array} \right| = F(x) \left(1 + O\left(n^{-1/2+\varepsilon}\right) \right) \quad (42)$$

Таблица 2. Количества разбиений

n	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 7 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 8 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 9 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 10 \end{smallmatrix} \right $	$\left \begin{smallmatrix} n \\ 11 \end{smallmatrix} \right $
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0
6	0	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0	0
7	0	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0	0
8	0	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0	0
9	0	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0	0
10	0	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	0
11	0	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1

для всех $\varepsilon > 0$ и всех фиксированных x при $n \rightarrow \infty$, где

$$F(x) = e^{-e^{-Cx}/C}. \quad (43)$$

Эта функция $F(x)$ достаточно быстро стремится к 0 при $x \rightarrow -\infty$ и быстро возрастает до 1 при $x \rightarrow +\infty$; таким образом, это функция распределения вероятностей. На рис. 29, б показана соответствующая функция плотности распределения вероятностей $f(x) = F'(x)$, которая сосредоточена в основном в области $-2 \leq x \leq 4$. Для сравнения на рис. 29, а показаны значения $\left| \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} m-1+n \\ m-1 \end{smallmatrix} \right|$ при $n = 100$; в этом случае $\frac{1}{2C} \sqrt{n} \ln n \approx 18$.

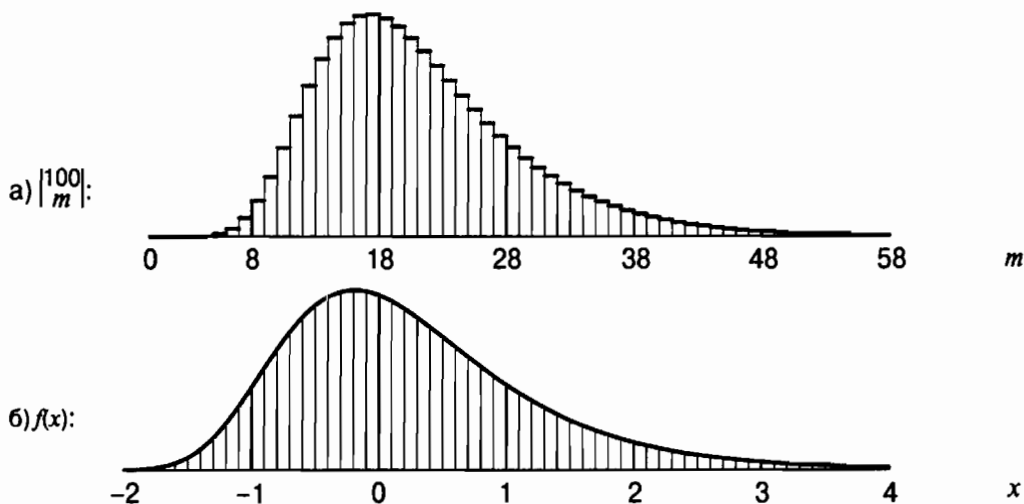


Рис. 29. Разбиения n на m частей, при а) $n = 100$; б) $n \rightarrow \infty$ (см. теорему E)

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что $\left| \begin{smallmatrix} m+n \\ m \end{smallmatrix} \right|$ — количество разбиений n , у которых большая часть $\leq m$. Тогда, согласно принципу включения и исключения

(формула 1.3.3–(29)), имеем

$$\begin{aligned} \left| \begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right| &= p(n) - \sum_{j>m} p(n-j) + \sum_{j_2>j_1>m} p(n-j_1-j_2) - \\ &\quad - \sum_{j_3>j_2>j_1>m} p(n-j_1-j_2-j_3) + \dots, \end{aligned}$$

поскольку $p(n-j_1-\dots-j_r)$ — количество разбиений n , которые используют каждую из частей $\{j_1, \dots, j_r\}$ хотя бы один раз. Запишем это как

$$\frac{1}{p(n)} \left| \begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right| = 1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \dots, \quad \Sigma_r = \sum_{j_r>\dots>j_1>m} \frac{p(n-j_1-\dots-j_r)}{p(n)}. \quad (44)$$

Для того чтобы вычислить Σ_r , нам нужна хорошая оценка отношения $\frac{p(n-t)}{p(n)}$. Нам везет, поскольку из (36) вытекает, что

$$\begin{aligned} \frac{p(n-t)}{p(n)} &= \exp\left(2C\sqrt{n-t} - \ln(n-t) + O\left((n-t)^{-1/2}\right) - 2C\sqrt{n} + \ln n\right) = \\ &= \exp\left(-Ctn^{-1/2} + O\left(n^{-1/2+2\varepsilon}\right)\right) \text{ при } 0 \leq t \leq n^{1/2+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (45)$$

Далее, если $t \geq n^{1/2+\varepsilon}$, мы имеем $p(n-t)/p(n) \leq p(n-n^{1/2+\varepsilon})/p(n) \approx \exp(-Cn^\varepsilon)$, значение, которое асимптотически меньше, чем любая степень n . Следовательно, мы безопасно можем использовать приближение

$$\frac{p(n-t)}{p(n)} \approx \alpha^t, \quad \alpha = \exp\left(-Cn^{-1/2}\right), \quad (46)$$

для всех значений $t \geq 0$. Например, мы имеем

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{j>m} \frac{p(n-j)}{p(n)} = \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \left(1 + O\left(n^{-1/2+2\varepsilon}\right)\right) + \sum_{n \geq j > n^{1/2+\varepsilon}} \frac{p(n-j)}{p(n)} = \\ &= \frac{e^{-Cx}}{C} \left(1 + O\left(n^{-1/2+2\varepsilon}\right)\right) + O\left(ne^{-Cn^\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

поскольку $\alpha/(1-\alpha) = n^{1/2}/C + O(1)$ и $\alpha^m = n^{-1/2}e^{-Cx}$. Аналогичные доводы (см. упражнение 36) доказывают, что при $r = O(\log n)$

$$\Sigma_r = \frac{e^{-Crx}}{C^r r!} \left(1 + O\left(n^{-1/2+2\varepsilon}\right)\right) + O\left(e^{-n^\varepsilon/2}\right). \quad (47)$$

Наконец — и это замечательное свойство принципа включения-исключения в общем случае — частичные суммы (44) всегда “берут в вилку” истинное значение, в том смысле, что

$$1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \dots - \Sigma_{2r-1} \leq \frac{1}{p(n)} \left| \begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right| \leq 1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \dots - \Sigma_{2r-1} + \Sigma_{2r} \quad (48)$$

при всех r (см. упражнение 37). Когда $2r$ близко к $\ln n$ и n велико, член Σ_{2r} чрезвычайно мал; таким образом, мы получаем (42), за исключением того, что вместо ε используется 2ε . |

Теорема Е говорит о том, что наибольшая часть случайного разбиения почти всегда представляет собой $\frac{1}{2C} \sqrt{n} \ln n + O(\sqrt{n})$ и при достаточно большом n остальные части также имеют тенденцию к предсказуемости. Предположим, например, что мы берем все разбиения числа 25 и накладываем одну на другую их диаграммы Феррерса, заменяя точки квадратами, как в случае краевого представления. Какие ячейки будут занимать наиболее часто? На рис. 30 показан результат: случайное разбиение стремится к типичному виду, приближающемуся к предельной кривой при $n \rightarrow \infty$.

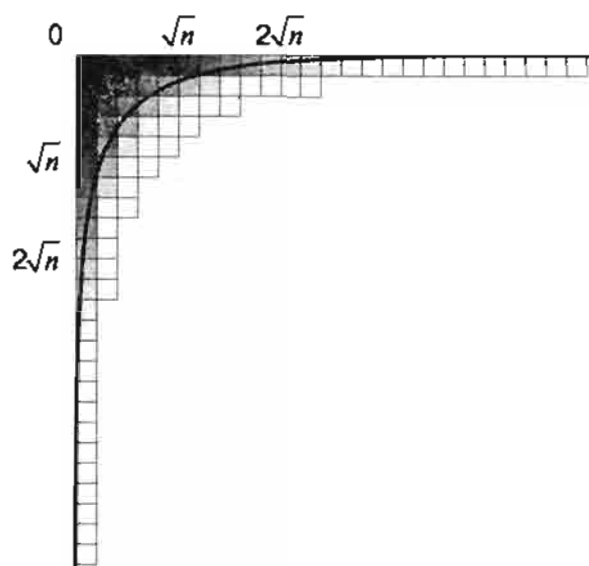


Рис. 30. Кривая Темперли (49), ограничивающая случайное разбиение

Г. Темперли (H. Temperley) [*Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 48 (1952), 683–697] привел эвристические обоснования того, что основные части a_k большого случайного разбиения $a_1 \dots a_m$ будут удовлетворять приближенному закону

$$e^{-Ck/\sqrt{n}} + e^{-Ca_k/\sqrt{n}} \approx 1, \quad (49)$$

и его формула была впоследствии подтверждена в строгом виде. Например, теорема Б. Питтеля [*Advanced in Applied Math.*, 18 (1997), 432–488] позволяет нам заключить, что след случайного разбиения почти всегда равен $\frac{\ln 2}{C} \sqrt{n} \approx 0.54 \sqrt{n}$, что согласуется с (49) с ошибкой не более $O(\sqrt{n} \ln n)^{1/2}$; таким образом, около 29% всех точек Феррерса лежат в пределах квадрата Дюрфи.

С другой стороны, если мы рассмотрим только разбиения n на m частей, где m — фиксированная величина, ограничивающая кривая будет иной: почти все разбиения имеют

$$a_k \approx \frac{n}{m} \ln \frac{m}{k} \quad (50)$$

при достаточно большом m . На рис. 31 показан случай $n = 50$, $m = 5$. В действительности тот же предел справедлив при m , растущем с ростом n , но со скоростью, меньшей \sqrt{n} [см. А. Вершик и Ю. Якубович, *Moscow Math. J.*, 1 (2001), 457–468].

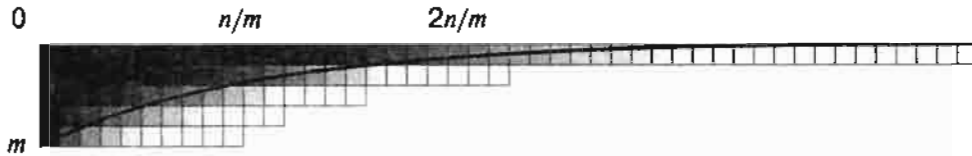


Рис. 31. Ограничивающая кривая (50) при наличии m частей

Краевое представление разбиений дает нам дальнейшую информацию о *дважды* ограниченных разбиениях, когда ограничено не только количество частей, но и размер каждой части. Разбиение, которое имеет не более m частей, каждая из которых не превосходит l , располагается в пределах прямоугольника $m \times l$. Все такие разбиения соответствуют перестановкам мультимножества $\{m \cdot 0, l \cdot 1\}$, имеющим ровно n инверсий; инверсии перестановок мультимножества мы уже изучали в упражнении 5.1.2–16. В частности, в упомянутом упражнении выводится неочевидная формула для количества способов получения n инверсий.

Теорема С. *Количество разбиений n , которые состоят не более чем из m частей, не превышающих по размеру l , равно*

$$[z^n] \binom{l+m}{m}_z = [z^n] \frac{(1-z^{l+1})}{(1-z)} \frac{(1-z^{l+2})}{(1-z^2)} \dots \frac{(1-z^{l+m})}{(1-z^m)}. \quad (51)$$

Этот результат получен А. Коши (А. Cauchy) [*Comptes Rendus Acad. Sci.*, 17 (Paris, 1843), 523–531]. Обратите внимание, что при $n \rightarrow \infty$ числитель становится равным просто 1. Интересное комбинаторное доказательство более общего результата приведено в упражнении 39. |

Анализ алгоритмов. Теперь мы знаем более чем достаточно о количественных аспектах разбиений, чтобы с высокой степенью точности вывести поведение алгоритма Р. Предположим, что шаги Р1, ..., Р6 этого алгоритма выполняются соответственно $T_1(n), \dots, T_6(n)$ раз. Очевидно, что $T_1(n) = 1$ и $T_3(n) = p(n)$; из закона Киргофа вытекает, что $T_2(n) = T_5(n)$ и $T_4(n) + T_5(n) = T_3(n)$. Мы переходим к шагу Р4 по одному разу для каждого разбиения, содержащего 2; понятно, что это происходит $p(n-2)$ раз.

Таким образом, единственная возможная загадка алгоритма Р — количество выполнений шага Р6, в котором возможен переход к самому себе. Однако небольшое размышление открывает нам, что алгоритм сохраняет значение ≥ 2 в массиве $a_1 a_2 \dots$ только на шагах Р2 и Р6; и каждое такое значение в конечном итоге уменьшается на 1 либо на шаге Р4, либо на шаге Р5. Следовательно,

$$T_2''(n) + T_6(n) = p(n) - 1, \quad (52)$$

где $T_2''(n)$ — количество раз, когда шаг Р2 устанавливает a_m равным значению ≥ 2 . Пусть $T_2(n) = T_2'(n) + T_2''(n)$, так что $T_2'(n)$ — количество раз, когда шаг Р2 устанавливает $a_m \leftarrow 1$. Тогда $T_2'(n) + T_4(n)$ — количество разбиений, заканчивающихся на 1, следовательно,

$$T_2'(n) + T_4(n) = p(n-1). \quad (53)$$

Итак, мы получили достаточное количество уравнений, чтобы определить все искомые величины:

$$(T_1(n), \dots, T_6(n)) = (1, p(n) - p(n-2), p(n), p(n-2), p(n) - p(n-2), p(n-1) - 1). \quad (54)$$

Из асимптотики $p(n)$ мы также знаем среднее количество вычислений на одно разбиение:

$$\left(\frac{T_1(n)}{p(n)}, \dots, \frac{T_6(n)}{p(n)} \right) = \left(0, \frac{2C}{\sqrt{n}}, 1, 1 - \frac{2C}{\sqrt{n}}, \frac{2C}{\sqrt{n}}, 1 - \frac{C}{\sqrt{n}} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (55)$$

где $C = \pi/\sqrt{6} \approx 1.283$ (см. упражнение 45). Общее количество обращений к памяти на одно разбиение составляет, таким образом, $4 - 3C/\sqrt{n} + O(1/n)$.

Если кто-то захочет сгенерировать все разбиения, он не только должен выполнить непомерную работу, но и быть безмерно внимательным, чтобы не ошибиться.

*— Леонард Эйлер (Leonard Euler),
Разбиение чисел (De Partitione Numerorum) (1750)*

Алгоритм А более сложен для анализа, но мы можем, как минимум, доказать верхнюю границу времени его работы. Ключевой величиной является значение j , наименьшего индекса, для которого $a_j < a_1 - 1$. Последовательные значения j для $m = 4$ и $n = 11$ равны $(2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 4, 2, 3, 5)$, и мы замечаем, что $j = b_{l-1} + 1$, где $b_1 \dots b_l$ — сопряженное разбиение $(a_1 \dots a_m)^T$ (см. (7) и (12)). Шаг Н3 выделяет случай $j = 2$, поскольку он не только наиболее часто встречается, но и очень легко обрабатывается.

Пусть $c_m(n)$ — суммарное общее значение $j - 1$, просуммированное по всем $|\frac{n}{m}|$ разбиениям, сгенерированным алгоритмом Н. Например, $c_4(11) = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 4 = 19$. Мы можем рассматривать $c_m(n)/|\frac{n}{m}|$ как хороший показатель времени работы на одно разбиение, поскольку время работы наиболее трудоемких шагов Н4 и Н6 грубо пропорционально $j - 2$. Это отношение $c_m(n)/|\frac{n}{m}|$ не ограничено, поскольку $c_m(m) = m$, в то время как $|\frac{m}{m}| = 1$. Однако следующая теорема показывает, что алгоритм Н достаточно эффективен.

Теорема Н. Мера стоимости $c_m(n)$ алгоритма Н не превышает $3|\frac{n}{m}| + m$.

Доказательство. Мы можем легко проверить, что $c_m(n)$ удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и $|\frac{n}{m}|$, а именно

$$c_m(n) = c_{m-1}(n-1) + c_m(n-m) \quad \text{для } m, n \geq 1, \quad (56)$$

если мы искусственно определим $c_m(n) = 1$ при $1 \leq n < m$ (см. (39)). Однако граничные условия теперь иные:

$$c_m(0) = [m > 0]; \quad c_0(n) = 0. \quad (57)$$

В табл. 3 показано поведение $c_m(n)$ при малых m и n .

Таблица 3. Стоимости алгоритма Н

n	$c_0(n)$	$c_1(n)$	$c_2(n)$	$c_3(n)$	$c_4(n)$	$c_5(n)$	$c_6(n)$	$c_7(n)$	$c_8(n)$	$c_9(n)$	$c_{10}(n)$	$c_{11}(n)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	0	1	3	3	4	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	3	4	4	5	1	1	1	1	1	1
6	0	1	4	6	5	5	6	1	1	1	1	1
7	0	1	4	7	7	6	6	7	1	1	1	1
8	0	1	5	8	11	8	7	7	8	1	1	1
9	0	1	5	11	12	12	9	8	8	9	1	1
10	0	1	6	12	16	17	13	10	9	9	10	1
11	0	1	6	14	19	21	18	14	11	10	10	11

Для доказательства теоремы мы докажем на самом деле более строгий результат:

$$c_m(n) \leq 3 \binom{n}{m} + 2m - n - 1 \text{ при } n \geq m \geq 2. \quad (58)$$

В упражнении 50 показано, что это неравенство выполняется при $m \leq n \leq 2m$, а значит, доказательство будет завершено, если мы докажем его для $n > 2m$. В этом случае по индукции мы имеем

$$\begin{aligned} c_m(n) &= c_1(n-m) + c_2(n-m) + c_3(n-m) + \dots + c_m(n-m) \leq \\ &\leq 1 + \left(3 \binom{n-m}{2} + 3 - n + m \right) + \left(3 \binom{n-m}{3} + 5 - n + m \right) + \dots + \\ &\quad + \left(3 \binom{n-m}{m} + 2m - 1 - n + m \right) = \\ &= 3 \binom{n-m}{1} + 3 \binom{n-m}{2} + \dots + 3 \binom{n-m}{m} - 3 + m^2 - (m-1)(n-m) = \\ &= 3 \binom{n}{m} + 2m^2 - m - (m-1)n - 3; \end{aligned}$$

а $2m^2 - m - (m-1)n - 3 \leq 2m - n - 1$, так как $n \geq 2m + 1$. |

***Код Грея для разбиений.** При генерации разбиений в виде количества частей $c_1 \dots c_n$ (как в упражнении 5) на каждом шаге изменяется не более четырех значений c_j . Однако мы можем предпочесть минимизировать изменения отдельных частей, генерируя разбиения таким образом, чтобы следующее за $a_1 a_2 \dots a_n$ разбиение получалось простой установкой $a_j \leftarrow a_j + 1$ и $a_k \leftarrow a_k - 1$ для некоторых j и k , как

в алгоритме двери-вертушки в разделе 7.2.1.3. Это оказывается всегда возможным; для $n = 6$ имеется единственный способ такой генерации:

$$111111, 211111, 3111, 2211, 222, 321, 33, 42, 411, 51, 6. \quad (59)$$

В общем случае $\binom{n+m}{m}$ разбиений n не более чем на m частей всегда могут быть сгенерированы подходящим путем Грея.

Заметим, что $\alpha \rightarrow \beta$ — допустимый переход от одного разбиения к другому тогда и только тогда, когда мы получаем диаграмму Феррерса для β путем перемещения только одной точки в диаграмме Феррерса для α . Таким образом, $\alpha^T \rightarrow \beta^T$ также является допустимым переходом. Отсюда следует, что каждый код Грея для разбиения не более чем на m частей соответствует коду Грея для разбиений на части, не превосходящие m . Мы будем работать именно с этим последним ограничением.

Общее количество кодов Грея для разбиений очень велико: для $n = 7$ их 52, для $n = 8$ — 652, для $n = 9$ — 298 896, для $n = 10$ — 2 291 100 484. Однако реально простое построение их неизвестно. Вероятно, причина в том, что лишь некоторые разбиения имеют только двух соседей, а именно разбиения $d^{n/d}$ при $1 < d < n$ и n , кратном d . У таких разбиений предшествующими и последующими должны быть разбиения $\{(d+1)d^{n/d-2}(d-1), d^{n/d-1}(d-1)1\}$, и это требование, похоже, исключает любой простой рекурсивный подход.

Карла Сэведж (Carla Savage) [*J. Algorithms*, 10 (1989), 577–595] нашла способ преодоления этих трудностей ценой всего лишь небольшой сложности. Пусть

$$\mu(m, n) = \overbrace{m \ m \ \dots \ m}^{\lfloor n/m \rfloor} (n \bmod m) \quad (60)$$

представляет собой лексикографически наибольшее разбиение n с частями, не превышающими m . Наша цель состоит в построении рекурсивно определенных путей Грея $L(m, n)$ и $M(m, n)$ от разбиения 1^n до $\mu(m, n)$, где $L(m, n)$ проходит по всем разбиениям, части которых ограничены m , в то время как $M(m, n)$ пробегает не только по этим разбиениям, но и включает разбиения, наибольшая часть которых равна $m+1$, при условии, что все прочие части строго меньше m . Например, $L(3, 8) = 11111111, 21111111, 3111111, 2211111, 22211, 2222, 3221, 32111, 3311, 332$, в то время как $M(3, 8) =$

$$11111111, 21111111, 2211111, 22211, 2222, 3221, \\ 3311, 32111, 311111, 41111, 4211, 422, 332; \quad (61)$$

дополнительные разбиения, начинающиеся с 4, дают нам “пространство подгонки” (wiggle room) в других частях рекурсии. Мы определим $L(m, n)$ для всех $n \geq 0$, а $M(m, n)$ — только для $n > 2m$.

Почти работоспособна следующая конструкция, проиллюстрированная для упрощения при $m = 5$:

$$L(5) = \left\{ \begin{array}{l} L(3) \\ 4L(\infty)^R \\ 5L(\infty) \end{array} \right\} \text{ при } n \leq 7; \quad \left\{ \begin{array}{l} L(3) \\ 4L(2)^R \\ 5L(2) \\ 431 \\ 44 \\ 53 \end{array} \right\} \text{ при } n = 8; \quad (62)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(4) \\ 54L(4)^R \\ 55L(5) \end{array} \right\} \text{ при } n \geq 9;$$

$$M(5) = \left\{ \begin{array}{l} L(4) \\ 5L(4)^R \\ 6L(3) \\ 64L(\infty)^R \\ 55L(\infty) \end{array} \right\} \text{ при } 11 \leq n \leq 13; \quad \left\{ \begin{array}{l} L(4) \\ 5M(4)^R \\ 6L(4) \\ 554L(4)^R \\ 555L(5) \end{array} \right\} \text{ при } n \geq 14. \quad (63)$$

Здесь параметр n в $L(m, n)$ и $M(m, n)$ опущен, поскольку может быть выведен из контекста; предполагается, что каждые L и M генерируют разбиения для любого количества, остающегося после вычитания предыдущих частей. Так, например, (63) указывает, что

$$M(5, 14) = L(4, 14), 5M(4, 9)^R, 6L(4, 8), 554L(4, 0)^R, 555L(5, -1);$$

последовательность $L(5, -1)$ в действительности пустая, а $L(4, 0)$ представляет собой пустую строку, так что последняя часть $M(5, 14)$ равна $554 = \mu(5, 14)$, как и должно быть. Запись $L(\infty)$ означает $L(\infty, n) = L(n, n)$, путь Грея всех разбиений n , начинающихся с 1^n и заканчивающихся n^1 .

В общем случае $L(m)$ и $M(m)$ определяются для всех $m \geq 3$, по сути, одними и теми же правилами, если цифры 2, 3, 4, 5 и 6 в (62) и (63) заменить соответственно на $m-3$, $m-2$, $m-1$, m и $m+1$. Диапазоны $n \leq 7$, $n = 8$ и $n \geq 9$ превращаются в $n \leq 2m-3$, $n = 2m-2$, $n \geq 2m-1$; диапазоны $11 \leq n \leq 13$ и $n \geq 14$ становятся диапазонами $2m+1 \leq n \leq 3m-2$ и $n \geq 3m-1$. Последовательности $L(0)$, $L(1)$, $L(2)$ имеют очевидные определения, поскольку эти пути единственны при $m \leq 2$. Последовательность $M(2)$ представляет собой $1^n, 21^{n-2}, 31^{n-3}, 221^{n-4}, 2221^{n-6}, \dots, \mu(2, n)$ при $n \geq 5$.

Теорема S. Пути Грея $L'(m, n)$ для $m, n \geq 0$ и $M'(m, n)$ для $n \geq 2m+1 \geq 5$ существуют для всех разбиений с описанными выше свойствами, за исключением случая $L'(4, 6)$. Кроме того, L' и M' удовлетворяют взаимным рекурсиям (62) и (63), за исключением нескольких случаев.

Доказательство. Выше мы отмечали, что (62) и (63) почти работоспособны; читатель может убедиться, что затруднения возникают только в случае $L(4, 6)$, ко-

гда (62) дает

$$\begin{aligned} L(4, 6) &= L(2, 6), 3L(1, 3)^R, 4L(1, 2), 321, 33, 42 = \\ &= 111111, 21111, 2211, 222, 3111, 411, 321, 33, 42. \end{aligned} \quad (64)$$

Если $m > 4$, все в порядке, поскольку переход от конца $L(m-2, 2m-2)$ к началу $(m-1)L(m-3, m-1)^R$ является переходом от $(m-2)(m-2)2$ к $(m-1)(m-3)2$. Удовлетворительного пути $L(4, 6)$ не существует, поскольку все коды Грея через эти девять разбиений должны заканчиваться одним из следующих разбиений: 411, 33, 3111, 222, 2211.

Для того чтобы нейтрализовать эту аномалию, необходимо исправить определения $L(m, n)$ и $M(m, n)$ в восьми местах, где вызывается “некорректная подпрограмма” $L(4, 6)$. Один из простых путей состоит в следующих определениях:

$$\begin{aligned} L'(4, 6) &= 111111, 21111, 3111, 411, 321, 33, 42; \\ L'(3, 5) &= 11111, 2111, 221, 311, 32. \end{aligned} \quad (65)$$

Таким образом, мы опускаем в $L(4, 6)$ 222 и 2211; мы также перепрограммируем $L(3, 5)$ так, чтобы 2111 было по соседству с 221. В этом случае, как демонстрирует упражнение 60, всегда легко “состыковать” два разбиения, отсутствующие в $L(4, 6)$. ■

Упражнения

- 1. [M21] Найдите формулу для общего количества размещений в каждой из задач двенадцати задач. Например, количество n -кортежей из m вещей равно m^n . (Воспользуйтесь обозначением из (38) там, где это можно, и будьте аккуратны, чтобы ваши формулы выполнялись даже при значениях $m = 0$ или $n = 0$.)
- 2. [20] Покажите, что небольшое изменение шага Н1 дает алгоритм, который генерирует все разбиения n не более чем на m частей.
 - 3. [M17] Разбиение $a_1 + \dots + a_m$ числа n на m частей $a_1 \geq \dots \geq a_m$ оптимально сбалансировано, если $|a_i - a_j| \leq 1$ для $1 \leq i, j \leq m$. Докажите, что имеется ровно одно такое разбиение, какими бы ни были $n \geq m \geq 1$, и приведите простую формулу, выражающую j -ю часть a_j как функцию от j , m и n .
 - 4. [M22] (Гидеон Эрлих (Gideon Ehrlich), 1974.) Каково лексикографически наименьшее разбиение n , в котором все части $\geq r$? Например, при $n = 19$ и $r = 5$ ответ — 766.
- 5. [23] Разработайте алгоритм, который генерирует все разбиения n в виде количества частей $c_1 \dots c_n$ из (8). Сгенерируйте их в солексном порядке, т.е. лексикографическом порядке $c_n \dots c_1$, который эквивалентен лексикографическому порядку соответствующих разбиений $a_1 a_2 \dots$. Для эффективности поддерживайте таблицу связей $l_0 l_1 \dots l_n$, такую, что если различные значения k , для которых $c_k > 0$, представляют собой $k_1 < \dots < k_t$, то

$$l_0 = k_1, \quad l_{k_1} = k_2, \quad \dots, \quad l_{k_{t-1}} = k_t, \quad l_{k_t} = 0.$$

(Так, разбиение 331 будет представлено как $c_1 \dots c_7 = 1020000$, $l_0 = 1$, $l_1 = 3$ и $l_3 = 0$; прочие связи l_2, l_4, l_5, l_6, l_7 могут принимать любые значения.)

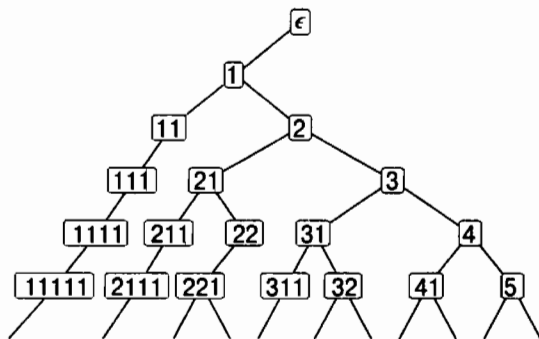
6. [20] Разработайте алгоритм для вычисления $b_1 b_2 \dots = (a_1 a_2 \dots)^T$ для заданного $a_1 a_2 \dots$.

7. [M20] Предположим, что $a_1 \dots a_n$ и $a'_1 \dots a'_n$ — разбиения n , такие, что $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ и $a'_1 \geq \dots \geq a'_n \geq 0$, и пусть им соответствуют сопряженные разбиения $b_1 \dots b_n = (a_1 \dots a_n)^T$ и $b'_1 \dots b'_n = (a'_1 \dots a'_n)^T$. Покажите, что $b_1 \dots b_n < b'_1 \dots b'_n$ тогда и только тогда, когда $a_n \dots a_1 < a'_n \dots a'_1$.

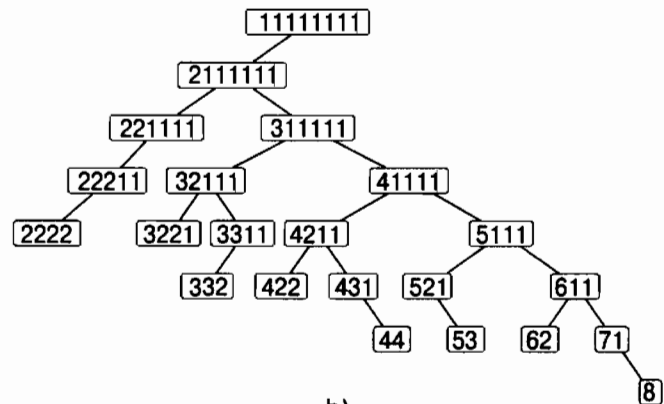
8. [15] Пусть $(p_1 \dots p_t, q_1 \dots q_t)$ — крайнее представление разбиения $a_1 a_2 \dots$, как приведено в (15) и (16). Какой вид в этом случае имеет сопряженное разбиение $(a_1 a_2 \dots)^T = b_1 b_2 \dots$?

9. [22] Пусть $a_1 a_2 \dots a_m$ и $b_1 b_2 \dots b_m = (a_1 a_2 \dots a_m)^T$ — сопряженные разбиения. Покажите, что мультимножества $\{a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_m + m\}$ и $\{b_1 + 1, b_2 + 2, \dots, b_m + m\}$ равны.

10. [21] При рассмотрении разбиений зачастую полезными оказываются бинарные деревья двух простых видов: а) дерево, которое включает все разбиения всех целых чисел; б) дерево, которое включает все разбиения данного целого n (на рисунке показано дерево для $n = 8$).



a)



b)

Выведите общее правило, лежащее в основе этих конструкций. Какой порядок обхода дерева соответствует лексикографическому порядку разбиений?

11. [M22] Сколько имеется способов заплатить один евро монетами достоинством 1, 2, 5, 10, 20, 50 и/или 100 центов? А если можно использовать не больше двух монет каждого достоинства?

- 12. [M21] (Л. Эйлер (L. Euler), 1750.) Воспользуйтесь производящей функцией для доказательства того, что количество способов разбиения n на *различные* части равно количеству способов разбиения n на *нечетные* части. Например, $5 = 4 + 1 = 3 + 2$; $5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Примечание: два следующих упражнения используют комбинаторные методы для доказательства расширений этой знаменитой теоремы.

- 13. [M22] (Ф. Франклин (F. Franklin), 1882.) Найдите взаимно однозначное соответствие между разбиениями n , которые имеют ровно k четных частей, и разбиениями n , в которых можно сформировать k пар равных частей. (Например, в разбиении 8666433211111 имеются пары 66, 33, 11 и 11, так что $k = 4$. Случай $k = 0$ соответствует результату, полученному Эйлером.)

14. [M28] (Д.Д. Сильвестер (J.J. Sylvester), 1882.) Найдите взаимно однозначное соответствие между разбиениями n на различные части $a_1 > a_2 > \dots > a_m$, в которых имеется ровно k “просветов” $a_j > a_{j+1} + 1$, и разбиениями n на нечетные части с $k + 1$ разными значениями. (Например, при $k = 0$ это построение доказывает, что количество способов записать n как сумму последовательных целых чисел равно количеству четных делителей n .)

15. [M20] (Д.Д. Сильвестер (J.J. Sylvester).) Найдите производящую функцию для количества разбиений, являющихся *самосопряженными* (т.е. таких, что $\alpha = \alpha^T$).

16. [M21] Найдите производящую функцию для разбиений следа k и просуммируйте ее по k для получения нетривиального тождества.

17. [M26] *Объединенным разбиением* (joint partition) n называется пара последовательностей $(a_1, \dots, a_r; b_1, \dots, b_s)$ положительных целых чисел, у которых

$$a_1 \geq \dots \geq a_r, \quad b_1 > \dots > b_s \quad \text{и} \quad a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_s = n.$$

Таким образом, при $s = 0$ мы получаем обычное разбиение, а при $r = 0$ — разбиение на различные части.

а) Найдите простую формулу для производящей функции $\sum u^{r+s} v^s z^n$, где суммирование выполняется по всем объединенным разбиениям n с r обычных частей a_i и s различных частей b_j .

б) Аналогично, найдите простую формулу для $\sum v^s z^n$, где суммирование выполняется по всем объединенным разбиениям, которые состоят ровно из $r + s = t$ частей, для заданного значения t .

с) Какое тождество вы вывели?

► 18. [M23] (Дорон Зайльбергер (Doron Zeilberger).) Покажите, что существует взаимно однозначное соответствие между парами последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s)$, таких, что

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r, \quad b_1 > b_2 > \dots > b_s,$$

и парами последовательностей целых чисел $(c_1, c_2, \dots, c_{r+s}; d_1, d_2, \dots, d_{r+s})$, таких, что

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{r+s}, \quad d_j \in \{0, 1\} \quad \text{для} \quad 1 \leq j \leq r + s,$$

связанных уравнениями для мультимножеств

$$\{a_1, a_2, \dots, a_r\} = \{c_j | d_j = 0\} \quad \text{и} \quad \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \{c_j + r + s - j | d_j = 1\}.$$

В результате получаем интересное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_r \\ b_1 > \dots > b_s > 0}} u^{r+s} v^s z^{a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_s} &= \\ &= \sum_{\substack{c_1 \geq \dots \geq c_t > 0 \\ d_1, \dots, d_t \in \{0, 1\}}} u^t v^{d_1 + \dots + d_t} z^{c_1 + \dots + c_t + (t-1)d_1 + \dots + d_{t-1}}. \end{aligned}$$

19. [M21] (Э. Гейне (E. Heine), 1847.) Докажите четырехпараметрическое тождество

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - wxz^m)(1 - wyz^m)}{(1 - wz^m)(1 - wxyz^m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k (x-1)(z-1) \cdots (x-z^{k-1})(y-1)(y-z) \cdots (y-z^{k-1}) z^k}{(1-z)(1-z^2) \cdots (1-z^k)(1-wz)(1-wz^2) \cdots (1-wz^k)}.$$

Указание: выполните суммирование по k или l в формуле

$$\sum_{k,l \geq 0} u^k v^l z^{kl} \frac{(z-az)(z-az^2) \cdots (z-az^k)}{(1-z)(1-z^2) \cdots (1-z^k)} \frac{(z-bz)(z-bz^2) \cdots (z-bz^l)}{(1-z)(1-z^2) \cdots (1-z^l)}$$

и рассмотрите упрощение, возникающее при $b = auz$.

► **20.** [M21] Сколько приблизительно времени займет вычисление таблицы разбиений чисел $p(n)$ для $1 \leq n \leq N$ с использованием рекуррентного соотношения Эйлера (20)?

21. [M21] (Л. Эйлер (L. Euler).) Пусть $q(n)$ — количество разбиений на различные части. Как лучше вычислить $q(n)$, зная значения $p(1), \dots, p(n)$?

22. [HM21] (Л. Эйлер (L. Euler).) Пусть $\sigma(n)$ — сумма всех положительных делителей положительного целого числа n . Тогда $\sigma(n) = n + 1$ для простого n и может оказаться существенно больше n для “высокосоставного” n . Докажите, что, несмотря на достаточно хаотичное поведение, $\sigma(n)$ удовлетворяет почти такому же рекуррентному соотношению (20), что и количество разбиений:

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \dots$$

для $n \geq 1$, с тем отличием, что, если в правой части встречается член ‘ $\sigma(0)$ ’, вместо него используется значение ‘ n ’. Например, $\sigma(11) = 1 + 11 = \sigma(10) + \sigma(9) - \sigma(6) - \sigma(4) = 18 + 13 - 12 - 7$; $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12$.

23. [HM25] Используйте тождество Якоби (19) для доказательства еще одной открытой им формулы:

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^3 = 1 - 3z + 5z^3 - 7z^6 + 9z^{10} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) z^{\binom{n+1}{2}}.$$

24. [M26] (С. Рамануджан (S. Ramanujan), 1919.) Пусть $A(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^4$.

а) Докажите, что $[z^n] A(z)$ кратно 5, если $n \bmod 5 = 4$.

б) Докажите, что тем же свойством обладает $[z^n] A(z) B(z)^5$, где B — произвольный степенной ряд с целыми коэффициентами.

с) Следовательно, $p(n)$ кратно пяти, если $n \bmod 5 = 4$.

25. [HM27] Улучшите оценку $\ln P(e^{-t})$ (22) при помощи (а) формулы суммирования Эйлера и (б) преобразования Меллина. *Указание:* дилогарифмическая функция $\text{Li}_2(x) = x/1^2 + x^2/2^2 + x^3/3^2 + \dots$ удовлетворяет соотношению $\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x) = \zeta(2) - (\ln x) \ln(1-x)$.

26. [NM22] В упражнении 5.2.2–44 и 5.2.2–51 мы рассмотрели два способа доказательства того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/n} = \frac{1}{2} (\sqrt{\pi n} - 1) + O(n^{-M}) \text{ для всех } M > 0.$$

Покажите, что формула суммирования Пуассона дает более строгий результат.

27. [HM23] Вычислите (29) и завершите вычисления, приводящие к теореме D.

28. [HM42] (Д.Г. Лемер (D.H. Lehmer).) Покажите, что коэффициенты Харди–Рамануджана–Радемахера $A_k(n)$, определенные в (34), обладают следующими замечательными свойствами:

а) если k нечетно, то $A_{2k}(km + 4n + (k^2 - 1)/8) = A_2(m) A_k(n)$;

б) если p — простое, $p^e > 2$ и $k \perp 2p$, то

$$A_{p^e k}(k^2 m + p^{2e} n - (k^2 + p^{2e} - 1)/24) = (-1)^{[p^e=4]} A_{p^e}(m) A_k(n);$$

в) в этой формуле $k^2 + p^{2e} - 1$ кратно 24, если p или k делятся на 2 или 3; в противном случае деление на 24 должно выполняться по модулю $p^e k$;

д) если p — простое, $|A_{p^e}(n)| < 2^{[p>2]} p^{e/2}$;

е) если p — простое, $A_{p^e}(n) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $1 - 24n$ — квадратичный вычет по модулю p и либо $e = 1$, либо $24n \bmod p \neq 1$;

ф) вероятность того, что $A_k(n) = 0$, если k делится ровно на t простых чисел, не меньших 5, а n — случайное число, приблизительно равна $1 - 2^{-t}$.

► **29.** [M16] Обобщая (41), вычислите сумму $\sum_{a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 1} z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_m^{a_m}$.

30. [M17] Найдите формулы для сумм

$$(a) \sum_{k \geq 0} \left| \begin{matrix} n - km \\ m - 1 \end{matrix} \right|; \quad (b) \sum_{k \geq 0} \left| \begin{matrix} n \\ m - k \end{matrix} \right|.$$

(Эти суммы конечны, поскольку при больших k суммируемые члены равны 0.)

31. [M24] (А. де Морган (A. De Morgan), 1843.) Покажите, что $\left| \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right| = \lfloor n/2 \rfloor$ и $\left| \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right| = \lfloor (n^2 + 6)/12 \rfloor$; найдите аналогичную формулу для $\left| \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right|$.

32. [M15] Докажите, что $\left| \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right| \leq p(n - m)$ для всех $m, n \geq 0$. В каком случае неравенство превращается в равенство?

33. [HM20] Воспользуйтесь тем фактом, что имеется ровно $\binom{n-1}{m-1}$ композиций n из m частей (см. определение композиции в 7.2.1.3–(9)), для доказательства нижней границы $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$. Затем установите $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ для получения элементарной нижней границы $p(n)$.

► **34.** [HM21] Покажите, что $\lfloor n - m \binom{m-1}{m} / 2 \rfloor$ — количество разбиений n на m различных частей. Таким образом,

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!} \left(1 + O\left(\frac{m^3}{n}\right) \right) \quad \text{при } m \leq n^{1/3}.$$

35. [HM21] Рассмотрим распределение вероятностей Эрдеша–Ленера (43).

- Какое значение x наиболее вероятно?
- Какое значение x является медианой?
- Какое значение x является средним значением?
- Чему равно стандартное отклонение?

36. [HM24] Докажите ключевую оценку (47), необходимую для теоремы E.

37. [M22] Докажите лемму (48) о том, что при использовании принципа включения–исключения частичные суммы “берут в вилку” истинное значение, проанализировав, сколько раз разбиение ровно с q различными частями, превосходящими m , учитывается в r -й частичной сумме.

38. [M20] Какова производящая функция для разбиений n ровно на m частей с наибольшей частью l ?

► **39.** [M25] (Ф. Франклин (F. Franklin).) Обобщая теорему C, покажите, что при $0 \leq k \leq m$

$$[z^n] \frac{(1 - z^{l+1}) \dots (1 - z^{l+k})}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^m)}$$

представляет собой количество разбиений $a_1 a_2 \dots$ числа n на m или меньшее количество частей, обладающих тем свойством, что $a_1 \leq a_{k+1} + l$.

40. [M22] (А. Коши (A. Cauchy).) Что представляет собой производящая функция для разбиений на m частей, где все части *различны* и меньше l ?

41. [HM42] Расширьте формулу Харди–Рамануджана–Радемахера (32) для получения сходящегося ряда для разбиений n не более чем на m частей, ни одна из которых не превосходит l .

42. [HM42] Найдите ограничивающую область, аналогичную (49), для случайных разбиений n не более чем на $\theta\sqrt{n}$ частей, причем части не превосходят $\varphi\sqrt{n}$, в предположении, что $\theta\varphi > 1$.

43. [M21] Сколько для заданных n и k имеется разбиений числа n , таких, что $a_1 > a_2 > \dots > a_k$?

- 44. [M22] У какого количества разбиений числа n две наименьшие части равны?
45. [HM21] Вычислите асимптотическое значение $p(n-1)/p(n)$ с относительной ошибкой $O(n^{-2})$.
46. [M20] Что больше — $T'_2(n)$ или $T''_2(n)$ — в тексте анализа алгоритма P?
- 47. [HM22] (А. Ньенхуис (A. Nijenhuis) и Г.С. Вильф (H.S. Wilf), 1975.) Приведенный далее простой алгоритм, основываясь на таблице количеств разбиений $p(0), p(1), \dots, p(n)$, генерирует случайное разбиение числа n с использованием представления в виде количества частей (8). Докажите, что он генерирует все разбиения с одинаковой вероятностью.
- N1.** [Инициализация.] Установить $m \leftarrow n$ и $c_1 \dots c_n \leftarrow 0 \dots 0$.
- N2.** [Выполнено?] Завершить работу, если $m = 0$.
- N3.** [Генерация.] Сгенерировать случайное целое число M в диапазоне $0 \leq M < mp(m)$.
- N4.** [Выбор частей.] Установить $s \leftarrow 0$. Затем для $j = 1, 2, \dots, n$ и для $k = 1, 2, \dots, \lfloor m/j \rfloor$ многократно устанавливая $s \leftarrow s + kp(m - jk)$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $s > M$.
- N5.** [Обновление.] Установить $c_k \leftarrow c_k + j$, $m \leftarrow m - jk$ и вернуться к шагу N2. **▮**

Указание: на шаге N4, основанном на тождестве

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\lfloor m/j \rfloor} kp(m - jk) = mp(m),$$

выбирается пара значений (j, k) с вероятностью $kp(m - jk)/(mp(m))$.

48. [HM40] Проанализируйте время работы алгоритма из предыдущего упражнения.
- 49. [HM26]
- a) Какой вид имеет производящая функция $F(z)$ для суммы наименьших частей всех разбиений n ? (Ряд начинается с $z + 3z^2 + 5z^3 + 9z^4 + 12z^5 + \dots$)
- b) Найдите асимптотическое значение $[z^n] F(z)$ с относительной ошибкой $O(n^{-1})$.
50. [HM33] Обозначим в рекуррентных соотношениях (56) и (57) $c(m) = c_m(2m)$.
- a) Докажите, что $c_m(m+k) = m-k + c(k)$ для $0 \leq k \leq m$.
- b) Следовательно, (58) выполняется для $m \leq n \leq 2m$, если $c(m) < 3p(m)$ для всех m .
- c) Покажите, что $c(m) - m$ равно сумме вторых наименьших частей всех разбиений m .

- d) Найдите взаимно однозначное соответствие между всеми разбиениями n , у которых вторая наименьшая часть равна k , и всеми разбиениями чисел, не превышающих n , у которых наименьшая часть равна $k + 1$.
- e) Опишите производящую функцию $\sum_{m \geq 0} c(m) z^m$.
- f) Сделайте вывод, что $c(m) < 3p(m)$ для всех $m \geq 0$.

51. [M46] Выполните детальный анализ алгоритма Н.

- 52. [M21] Какой вид имеет миллионное разбиение, сгенерированное алгоритмом Р для $n = 64$? Указание: $p(64) = 1\,741\,630 = 1\,000\,000 + \binom{77}{13} + \binom{60}{10} + \binom{47}{8} + \binom{35}{5} + \binom{27}{3} + \binom{22}{2} + \binom{18}{1} + \binom{15}{0}$.
- 53. [M21] Какой вид имеет миллионное разбиение, сгенерированное алгоритмом Н для $m = 32$ и $n = 100$? Указание: $999\,999 = \binom{80}{12} + \binom{66}{11} + \binom{50}{7} + \binom{41}{6} + \binom{33}{5} + \binom{26}{4} + \binom{21}{4}$.
- 54. [M30] Разбиение $\alpha = a_1 a_2 \dots$ мажоризирует (majorize) разбиение $\beta = b_1 b_2 \dots$, что записывается как $\alpha \succcurlyeq \beta$ или $\beta \preccurlyeq \alpha$, если $a_1 + \dots + a_k \geq b_1 + \dots + b_k$ для всех $k \geq 0$.

- a) Истинно или ложно утверждение: из $\alpha \succcurlyeq \beta$ вытекает $\alpha \geq \beta$ (лексикографически)?
- b) Истинно или ложно утверждение: из $\alpha \succcurlyeq \beta$ вытекает $\beta^T \succcurlyeq \alpha^T$?
- c) Покажите, что два любых разбиения n имеют наибольшую нижнюю границу $\alpha \wedge \beta$, такую, что $\alpha \succcurlyeq \gamma$ и $\beta \succcurlyeq \gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha \wedge \beta \succcurlyeq \gamma$. Поясните, как можно вычислить $\alpha \wedge \beta$.
- d) Аналогично, поясните, как вычислить наименьшую верхнюю границу $\alpha \vee \beta$, такую, что $\gamma \succcurlyeq \alpha$ и $\gamma \succcurlyeq \beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma \succcurlyeq \alpha \vee \beta$.
- e) Если α имеет l частей, а β имеет m частей, то сколько частей имеют $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \vee \beta$?
- f) Истинно или ложно утверждение: если α состоит из различных частей и β состоит из различных частей, то же самое можно сказать и об $\alpha \wedge \beta$ и $\alpha \vee \beta$.
- 55. [M37] Продолжая выполнение предыдущего упражнения, назовем α покрытием (cover) β , если $\alpha \succcurlyeq \beta$, $\alpha \neq \beta$ и из $\alpha \succcurlyeq \gamma \succcurlyeq \beta$ следует $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$. Например, на рис. 32 показано отношение покрытия между разбиениями числа 12.
- a) Будем записывать $\alpha \triangleright \beta$, если $\alpha = a_1 a_2 \dots$ и $\beta = b_1 b_2 \dots$ представляют собой разбиения, для которых $b_k = a_k - [k = l] + [k = l + 1]$ для всех $k \geq 1$ и некоторого $l \geq 1$. Докажите, что α покрывает β тогда и только тогда, когда $\alpha \triangleright \beta$ или $\beta^T \triangleright \alpha^T$.
- b) Покажите, что есть простой способ выяснить, верно ли, что α покрывает β , путем рассмотрения краевого представления α и β .
- c) Пусть $n = \binom{n_2}{2} + \binom{n_1}{1}$, где $n_2 > n_1 \geq 0$. Покажите, что ни одно разбиение n не покрывает больше $n_2 - 2$ разбиений.

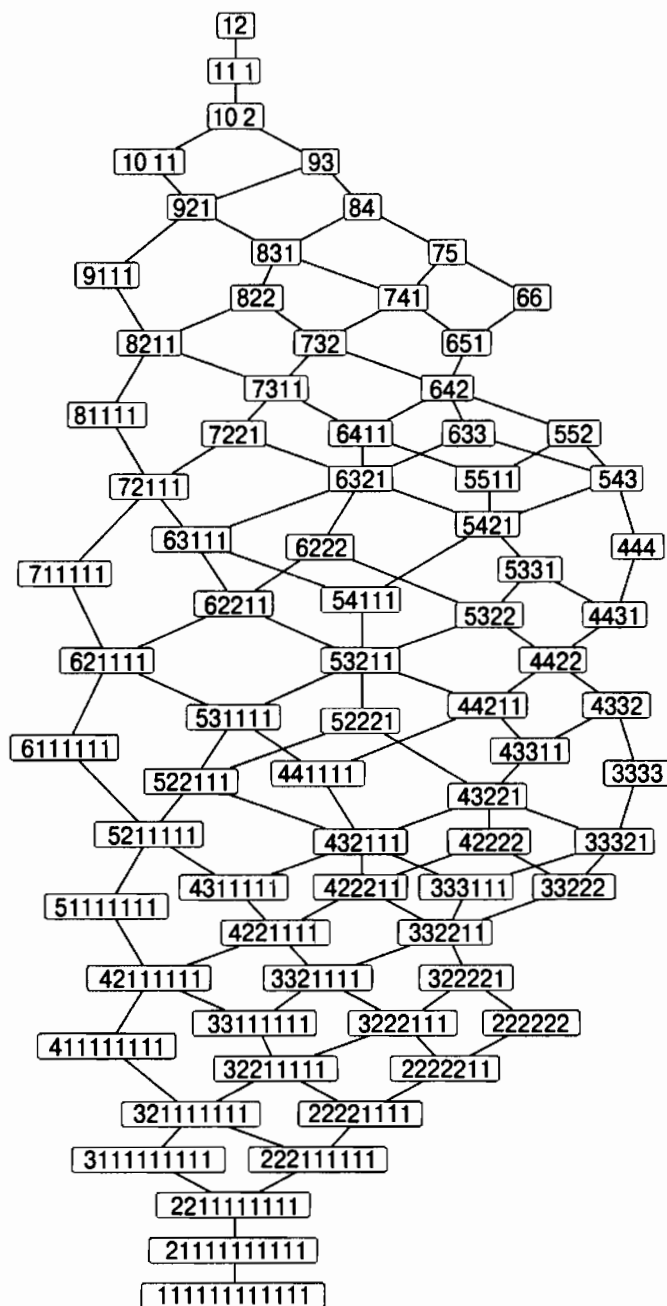


Рис. 32. Решетка мажоризации для разбиений 12 (см. упражнения 54–58)

- d) Будем называть разбиение μ *минимальным*, если не существует разбиения λ , такого, что $\mu \triangleright \lambda$. Докажите, что μ минимально тогда и только тогда, когда μ^T имеет различные части.
- e) Предположим, что $\alpha = \alpha_0 \triangleright \alpha_1 \triangleright \dots \triangleright \alpha_k$ и $\alpha = \alpha'_0 \triangleright \alpha'_1 \triangleright \dots \triangleright \alpha'_{k'}$, где α_k и $\alpha'_{k'}$ — минимальные разбиения. Докажите, что $k = k'$ и $\alpha_k = \alpha'_{k'}$.
- f) Поясните, как вычислить лексикографически наименьшее разбиение на различные части, которое мажоризирует данное разбиение α .
- g) Опишите лексикографически наименьшее разбиение λ_n числа n на различные части. Чему равна длина всех путей $n^1 = \alpha_0 \triangleright \alpha_1 \triangleright \dots \triangleright \lambda_n^T$?

h) Чему равна длина длиннейшего и кратчайшего путей вида $n^1 = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l = 1^n$, где α_j покрывает α_{j+1} для всех $0 \leq j < l$?

► **56.** [M27] Разработайте алгоритм для генерации всех разбиений α , таких, что $\lambda \preceq \alpha \preceq \mu$, для данных разбиений λ и μ , $\lambda \preceq \mu$.

Примечание. Такой алгоритм имеет множество применений. Например, для генерации всех разбиений, которые имеют m частей, причем ни одна из частей не превосходит l , мы можем положить λ минимальным разбиением такого вида, т.е., как в упражнении 3, $[n/m] \dots [n/m]$, а μ — наибольшим, т.е. $((n - m + 1) 1^{m-1}) \wedge (l^{\lfloor n/l \rfloor} (n \bmod l))$. Аналогично, согласно известной теореме Х.Г. Ландау (H.G. Landau) [Bull. Math. Biophysics, 15 (1953), 143–148], разбиения $(\frac{m}{2})$, такие, что

$$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor^{\lfloor m/2 \rfloor} \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor^{\lfloor m/2 \rfloor} \preceq \alpha \preceq (m-1)(m-2) \dots 21,$$

представляют собой “векторы счетов” в круговом турнире, т.е. разбиения $a_1 \dots a_m$, когда игрок на j -м месте побеждает в a_j играх.

57. [M22] Предположим, что матрица (a_{ij}) из нулей и единиц имеет суммы элементов строк $r_i = \sum_j a_{ij}$ и суммы элементов столбцов $c_j = \sum_i a_{ij}$. Тогда $\lambda = r_1 r_2 \dots$ и $\mu = c_1 c_2 \dots$ — разбиения $n = \sum_{i,j} a_{ij}$. Докажите, что такая матрица существует тогда и только тогда, когда $\lambda \preceq \mu^T$.

58. [M23] (Симметричные средние.) Пусть $\alpha = a_1 \dots a_m$ и $\beta = b_1 \dots b_m$ — разбиения n . Докажите, что неравенство

$$\frac{1}{m!} \sum x_{p_1}^{a_1} \dots x_{p_m}^{a_m} \geq \frac{1}{m!} \sum x_{p_1}^{b_1} \dots x_{p_m}^{b_m}$$

выполняется для любых неотрицательных значений переменных (x_1, \dots, x_m) , где сумма берется по всем $m!$ перестановкам $\{1, \dots, m\}$, тогда и только тогда, когда $\alpha \succeq \beta$. (Например, это неравенство сводится к $(y_1 + \dots + y_n)/n \geq (y_1 \dots y_n)^{1/n}$ в частном случае $m = n$, $\alpha = n0 \dots 0$, $\beta = 11 \dots 1$, $x_j = y_j^{1/n}$.)

59. [M22] Путь Грея (59) симметричен в том смысле, что обращенная последовательность $6, 51, \dots, 111111$ имеет тот же вид, что и сопряженная последовательность $(111111)^T, (21111)^T, \dots, (6)^T$. Найдите все пути Грея $\alpha_1, \dots, \alpha_{p(n)}$, симметричные в данном смысле.

60. [23] Завершите доказательство теоремы S, изменяя определения $L(m, n)$ и $M(m, n)$ во всех местах, где в (62) и (63) вызывается $L(4, 6)$.

61. [26] Реализуйте схему генерации разбиений на основе теоремы S, всегда указывающей две части, которые должны измениться между посещениями.

62. [46] Докажите или опровергните следующее утверждение: для всех достаточно больших целых чисел n и $3 \leq m < n$, таких, что $n \bmod m \neq 0$, и для всех разбиений α числа n , у которых $a_1 \leq m$, существует путь Грея для всех разбиений с частями, не превышающими m , начинающийся с 1^n и заканчивающийся α , за исключением $\alpha = 1^n$ и $\alpha = 21^{n-2}$.

63. [47] Для каких разбиений λ и μ имеется код Грея по всем разбиениям α , таким, что $\lambda \preceq \alpha \preceq \mu$?

► **64.** [32] (*Бинарные разбиения.*) Разработайте алгоритм без применения циклов, который посещает все разбиения n на степени 2, где каждый шаг заменяет $2^k + 2^k$ на 2^{k+1} или наоборот.

65. [23] Хорошо известно, что каждая коммутативная группа из m элементов может быть представлена в виде дискретного тора $T(m_1, \dots, m_n)$ с операцией сложения 7.2.1.3–(66), где $m = m_1 \dots m_n$, а m_j кратно m_{j+1} при $1 \leq j < n$. Например, для $m = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ имеется шесть групп, соответствующих разложениям $(m_1, m_2, m_3) = (30, 6, 2)$, $(60, 6, 1)$, $(90, 2, 2)$, $(120, 3, 1)$, $(180, 2, 1)$ и $(360, 1, 1)$.

Поясните, как систематически сгенерировать все такие разложения при помощи алгоритма, который на каждом шаге изменяет ровно два множителя m_j .

► **66.** [M25] (*P-разбиения.*) Предположим, что вместо требования $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ мы рассматриваем все неотрицательные композиции n , удовлетворяющие некоторому заданному *частичному* порядку. Например, П.А. Мак-Мэган (P.A. MacMahon) заметил, что все решения “холмистых” (up-down) неравенств $a_4 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_1$ можно разделить на пять неперекрывающихся типов:

$$\begin{aligned} a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4; \quad a_1 \geq a_2 \geq a_4 > a_3; \\ a_2 > a_1 \geq a_3 \geq a_4; \quad a_2 > a_1 \geq a_4 > a_3; \quad a_2 \geq a_4 > a_1 \geq a_3. \end{aligned}$$

Все эти типы легко перечислимы, поскольку, например, $a_2 > a_1 \geq a_4 > a_3$ эквивалентно $a_2 - 2 \geq a_1 - 1 \geq a_4 - 1 \geq a_3$; количество решений при $a_3 \geq 0$ и $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = n$ равно количеству разбиений $n - 1 - 2 - 0 - 1$ не более чем на четыре части.

Объясните, как решить общую задачу такого вида: дано отношение \prec некоторого частичного порядка для m элементов. Рассмотрим все m -кортежи $a_1 \dots a_m$ с тем свойством, что $a_j \geq a_k$, если $j \prec k$. Полагая, что индексы выбраны таким образом, что из $j \prec k$ вытекает $j \leq k$, покажите, что все соответствующие m -кортежи делятся на N классов, по одному для каждого из выходов алгоритма топологической сортировки 7.2.1.2V. Какой вид имеет производящая функция для всех неотрицательных $a_1 \dots a_m$, сумма которых равна n ? Каким образом можно сгенерировать их всех?

67. [M25] (П.А. Мак-Мэган (P.A. MacMahon), 1886.) *Идеальным разбиением* n является мультимножество, которое имеет ровно $n + 1$ подмультимножеств, и эти мультимножества представляют собой разбиения целых чисел $0, 1, \dots, n$. Например, мультимножества $\{1, 1, 1, 1, 1\}$, $\{2, 2, 1\}$ и $\{3, 1, 1\}$ являются идеальными разбиениями 5.

Поясните, как построить идеальные разбиения n , имеющие наименьшее количество элементов.

68. [M23] Какое разбиение n на m частей имеет наибольшее произведение $a_1 \dots a_m$ при (а) заданном m ; (б) произвольном m ?

69. [M30] Найдите все $n < 10^9$, такие, что уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 x_2 \dots x_n$ имеет единственное решение в натуральных числах $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. (Имеются, например, единственные решения для $n = 2, 3$ и 4 ; однако $5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, $3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ и $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$.)

70. [M30] (“Болгарский пасьянс”.) Даны n карт, разделенные произвольным образом на одну или несколько стопок. Затем многократно выполняются следующие действия — из каждой стопки берется по одной карте, и они образуют новую стопку.

Покажите, что, если $n = 1 + 2 + \dots + m$, этот процесс всегда достигает самовоспроизводящегося состояния со стопками размером $\{m, m - 1, \dots, 1\}$. например, если $n = 10$, и мы начинаем со стопок размером $\{3, 3, 2, 2\}$, то получим такую последовательность разбиений:

$$3322 \rightarrow 42211 \rightarrow 5311 \rightarrow 442 \rightarrow 3331 \rightarrow 4222 \rightarrow 43111 \rightarrow 532 \rightarrow 4321 \rightarrow 4321 \rightarrow \dots$$

Какие циклы состояний возможны для других значений n ?

71. [M46] Продолжая предыдущее упражнение, чему равно максимальное количество шагов, которые могут быть выполнены до того, как Болгарский пасьянс с n картами достигнет циклического состояния?

72. [M25] Предположим, мы записали все разбиения n , например

$$6, 51, 42, 411, 33, 321, 3111, 222, 2211, 21111, 111111$$

для $n = 6$, и заменили все j -е появления числа k на j :

$$1, 11, 11, 112, 12, 111, 1123, 123, 1212, 11234, 123456.$$

- Докажите, что эта операция порождает перестановку отдельных элементов.
- Сколько всего раз встречается элемент k ?

7.2.1.5 Генерация всех разбиений множеств

Перейдем теперь к рассмотрению другого вида разбиений. *Разбиения множества* представляют собой способы рассматривать множество как объединение непустых непересекающихся подмножеств, именуемых *блоками* (block). Например, в начале предыдущего раздела были перечислены пять различных разбиений множества $\{1, 2, 3\}$ (7.2.1.4–(2) и 7.2.1.4–(4)). Эти пять разбиений более компактно можно записать в виде

$$123, \quad 12|3, \quad 13|2, \quad 1|23, \quad 1|2|3 \quad (1)$$

с использованием вертикальной черты для отделения одного блока от другого. В этом списке элементы каждого блока могут быть записаны в любом порядке, как и сами блоки, так что ‘13|2’, ‘31|2’, ‘2|13’ и ‘2|31’ — это одно и то же разбиение. Можно стандартизировать представление путем соглашения, например, о перечислении элементов каждого блока в возрастающем порядке, а сами блоки располагать в порядке возрастания их наименьших элементов. При этих соглашениях разбиениями множества $\{1, 2, 3, 4\}$ являются

$$\begin{aligned} 1234, 123|4, 124|3, 12|34, 12|3|4, 134|2, 13|24, 13|2|4, \\ 14|23, 1|234, 1|23|4, 14|2|3, 1|24|3, 1|2|34, 1|2|3|4, \end{aligned} \quad (2)$$

получаемые путем добавления 4 всеми возможными способами к блокам (1).

Разбиения множеств появляются в самых разных контекстах. Политики и экономисты, например, часто говорят о “коалициях”; архитекторы вычислительных систем — о “шаблонах обращения к кэш-памяти”, поэты — о “схемах рифм” (см. упражнения 34–37). В разделе 2.3.3 мы встречались с *отношением эквивалентности* между объектами, а именно бинарным отношением, обладающим свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, определяющим разбиение этих объектов на так называемые “классы эквивалентности”. Верно и обратное: каждое разбиение множества определяет отношение эквивалентности; в частности, если Π является разбиением множества $\{1, 2, \dots, n\}$, можно записать

$$j \equiv k \quad (\text{modulo } \Pi), \quad (3)$$

если j и k принадлежат одному и тому же блоку Π .

Один из наиболее удобных способов представления разбиения множества в компьютере состоит в кодировании его *ограниченно растущей строкой* (restricted growth string), т.е. строкой $a_1 a_2 \dots a_n$, в которой

$$a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_{j+1} \leq 1 + \max(a_1, \dots, a_j) \quad \text{для} \quad 1 \leq j < n. \quad (4)$$

Идея заключается в том, чтобы $a_j = a_k$ тогда и только тогда, когда $j \equiv k$, причем выбирать наименьшее доступное число для a_j , где j — наименьшее число в своем блоке. Например, ограниченно растущие строки для 15 разбиений (2) представляют собой соответственно

$$\begin{aligned} 0000, 0001, 0010, 0011, 0012, 0100, 0101, 0102, \\ 0110, 0111, 0112, 0120, 0121, 0122, 0123. \end{aligned} \quad (5)$$

Такое соглашение наводит на мысль о следующей простой схеме генерации разбиений, предложенной Джорджем Хатчинсоном (George Hutchinson) [САСМ, 6 (1963), 613–614].

Алгоритм Н (Ограниченно растущие строки в лексикографическом порядке). Для данного $n \geq 2$ этот алгоритм генерирует все разбиения $\{1, 2, \dots, n\}$ путем посещения всех строк $a_1 a_2 \dots a_n$, удовлетворяющих условию ограниченного роста (4). Поддерживается вспомогательный массив $b_1 b_2 \dots b_n$, где $b_{j+1} = 1 + \max(a_1, \dots, a_j)$; значение b_n из соображений эффективности реально содержится в отдельной переменной m .

- Н1.** [Инициализация.] Установить $a_1 \dots a_n \leftarrow 0 \dots 0$, $b_1 \dots b_{n-1} \leftarrow 1 \dots 1$, $m \leftarrow 1$.
- Н2.** [Посещение.] Посетить ограниченно растущую строку $a_1 \dots a_n$, которая представляет разбиение на $m + [a_n = m]$ блоков. Затем, если $a_n = m$, перейти к шагу Н4.
- Н3.** [Увеличение a_n .] Установить $a_n \leftarrow a_n + 1$ и вернуться к шагу Н2.
- Н4.** [Поиск j .] Установить $j \leftarrow n - 1$; затем, пока $a_j = b_j$, устанавливая $j \leftarrow j - 1$.
- Н5.** [Увеличение a_j .] Завершить работу алгоритма, если $j = 1$. В противном случае установить $a_j \leftarrow a_j + 1$.
- Н6.** [Обнуление $a_{j+1} \dots a_n$.] Установить $m \leftarrow b_j + [a_j = b_j]$ и $j \leftarrow j + 1$. Затем, пока $j < n$, устанавливая $a_j \leftarrow 0$, $b_j \leftarrow m$ и $j \leftarrow j + 1$. Наконец, установить $a_n \leftarrow 0$ и вернуться к шагу Н2. ▮

В упражнении 47 доказывается, что шаги Н4–Н6 выполняются редко, а циклы в шагах Н4 и Н6 почти всегда короткие. Вариант этого алгоритма с использованием связанного списка имеется в упражнении 2.

Коды Грея для разбиения множества. Один из способов быстрого прохода по всем разбиениям множества состоит в изменении только одной цифры в ограниченно растущей строке $a_1 \dots a_n$ на каждом шаге, поскольку изменение a_j просто означает перемещение элемента j из одного блока в другой. Элегантный способ построения такого списка был предложен Гидеоном Эрлихом (Gideon Ehrlich) [JАСМ, 20 (1973), 507–508]. Можно последовательно добавлять цифры

$$0, m, m - 1, \dots, 1 \quad \text{или} \quad 1, \dots, m - 1, m, 0 \quad (6)$$

к каждой строке $a_1 \dots a_{n-1}$ в списке разбиений $n - 1$ элементов, где $m = 1 + \max(a_1, \dots, a_{n-1})$, чередуя оба варианта. Таким образом, список '00, 01' для $n = 2$ превращается в '000, 001, 011, 012, 010' для $n = 3$, который, в свою очередь, для $n = 4$ превращается в

$$\begin{aligned} &0000, 0001, 0011, 0012, 0010, 0110, 0112, 0111, \\ &0121, 0122, 0123, 0120, 0100, 0102, 0101. \end{aligned} \quad (7)$$

В упражнении 14 показано, что схема Эрлиха приводит к простому алгоритму, который дает порядок кода Грея без особых дополнительных усилий по сравнению с алгоритмом Н.

Предположим, однако, что нас не интересуют *все* разбиения; мы можем захотеть рассмотреть только те из них, которые состоят ровно из m блоков. Можно ли пройти по этой меньшей коллекции ограниченно растущих строк так, чтобы на каждом шаге изменялась только одна цифра строки? Да; очень красивый способ генерации такого списка был открыт Франком Раски (Frank Ruskey) [*Lecture Notes in Comp. Sci.*, **762** (1993), 205–206]. Он определил две такие последовательности, A_{mn} и A'_{mn} , которые начинаются с лексикографически наименьшей m -блочной строки $0^{n-m}01 \dots (m-1)$. Различие между ними в том, что если $n > m+1$, то A_{mn} заканчивается $01 \dots (m-1)0^{n-m}$, а A'_{mn} заканчивается $0^{n-m-1}01 \dots (m-1)0$. Вот рекурсивные соотношения Раски для $1 < m < n$:

$$A_{m(n+1)} = \begin{cases} A_{(m-1)n}(m-1), A_{mn}^R(m-1), \dots, A_{mn}^R 1, A_{mn} 0, & \text{если } m \text{ четно;} \\ A'_{(m-1)n}(m-1), A_{mn}(m-1), \dots, A_{mn}^R 1, A_{mn} 0, & \text{если } m \text{ нечетно;} \end{cases} \quad (8)$$

$$A'_{m(n+1)} = \begin{cases} A'_{(m-1)n}(m-1), A_{mn}(m-1), \dots, A_{mn} 1, A_{mn}^R 0, & \text{если } m \text{ четно;} \\ A_{(m-1)n}(m-1), A_{mn}^R(m-1), \dots, A_{mn} 1, A_{mn}^R 0, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (9)$$

Конечно, базовые случаи представляют собой простые одноэлементные списки

$$A_{1n} = A'_{1n} = \{0^n\} \quad \text{и} \quad A_{nn} = \{01 \dots (n-1)\}. \quad (10)$$

При таких определениях $\left\{ \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = 25$ разбиений $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ на три блока представляют собой

$$\begin{aligned} &00012, 00112, 01112, 01012, 01002, 01102, 00102, \\ &00122, 01122, 01022, 01222, 01212, 01202, \\ &01201, 01211, 01221, 01021, 01121, 00121, \\ &00120, 01120, 01020, 01220, 01210, 01200. \end{aligned} \quad (11)$$

(Эффективная реализация этого метода приведена в упражнении 17.)

В схеме Эрлиха (7) крайние справа цифры строки $a_1 \dots a_n$ меняются наиболее часто, но в схеме Раски основные изменения происходят ближе к левому краю. Однако в обоих случаях на каждом шаге изменяется только один элемент a_j , и эти изменения очень просты: либо a_j изменяется на ± 1 , либо происходит переход между двумя крайними значениями 0 и $1 + \max(a_1, \dots, a_{j-1})$. При тех же ограничениях последовательность $A'_{1n}, A'_{2n}, \dots, A'_{nn}$ проходит по *всем* разбиениям в возрастающем порядке количества блоков.

Количество разбиений множества. Мы видели, что имеется 5 разбиений множества $\{1, 2, 3\}$ и 15 разбиений множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Быстрый способ вычисления этих величин был открыт Ч.С. Пирсом (C.S. Peirce) [*American J. of Mathematics*, **3** (1880), 48], который представил следующий треугольник чисел:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & \\ 5 & 3 & 2 & & & \\ 15 & 10 & 7 & 5 & & \\ 52 & 37 & 27 & 20 & 15 & \\ 203 & 151 & 114 & 87 & 67 & 52 \end{array} \quad (12)$$

Здесь элементы $\varpi_{n1}, \varpi_{n2}, \dots, \varpi_{nn}$ n -й строки подчиняются простому рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned}\varpi_{nk} &= \varpi_{(n-1)k} + \varpi_{n(k+1)} \text{ для } 1 \leq k < n; \\ \varpi_{nn} &= \varpi_{(n-1)1} \text{ при } n > 1, \text{ а } \varpi_{11} = 1.\end{aligned}\quad (13)$$

Треугольник Пирса имеет много замечательных свойств, некоторые из них рассматриваются в упражнениях 26–31. Например, ϖ_{nk} представляет собой количество разбиений $\{1, 2, \dots, n\}$, у которых k — наименьший из блоков.

Элементы диагонали и первого столбца треугольника Пирса, которые говорят об общем количестве разбиений, широко известны как *числа Белла*, в связи с тем, что Э.Т. Белл (E.T. Bell) написал ряд важных статей о них [АММ, 41 (1934), 411–419; *Annals of Math.*, 35 (1934), 258–277; 39 (1938), 539–557]. Следуя Луи Комте (Louis Comtet), мы будем обозначать числа Белла как ϖ_n , чтобы не путать их с числами Бернулли B_n . Вот несколько первых чисел Белла:

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varpi_n = 1$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597

Обратите внимание на быстрый рост последовательности, но не такой быстрый, как $n!$; ниже мы докажем, что $\varpi_n = \Theta(n/\log n)^n$.

Числа Белла $\varpi_n = \varpi_{n1}$ при $n \geq 0$ должны удовлетворять рекуррентной формуле

$$\varpi_{n+1} = \varpi_n + \binom{n}{1}\varpi_{n-1} + \binom{n}{2}\varpi_{n-2} + \dots = \sum_k \binom{n}{k}\varpi_{n-k}, \quad (14)$$

поскольку каждое разбиение множества $\{1, \dots, n+1\}$ получается для некоторого k путем выбора k элементов из $\{1, \dots, n\}$ для размещения в блоке, содержащем элемент $n+1$, с последующим разбиением оставшихся элементов ϖ_{n-k} способами. Это рекуррентное соотношение, найденное Ёшисуке Мацунагой (Yoshisuke Matsunaga) в 18-м веке (см. раздел 7.2.1.7), приводит к красивой производящей функции

$$\Pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varpi_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z} - 1, \quad (15)$$

открытой У.А. Уитвортом (W.A. Whitworth) [*Choice and Chance*, 3rd ed. (1878), 3.XXIV]. Если мы умножим обе части (14) на $z^n/n!$ и просуммируем по n , то получим

$$\Pi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varpi_{n+1} \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varpi_m \frac{z^m}{m!} \right) = e^z \Pi(z),$$

и (15) является решением данного дифференциального уравнения при $\Pi(0) = 1$.

Числа ϖ_n много лет изучались из-за их любопытных свойств, связанных с данной формулой, задолго до того, как Уитворт указал их комбинаторную связь с разбиениями множества. Например,

$$\varpi_n = \frac{n!}{e} [z^n] e^{e^z} = \frac{n!}{e} [z^n] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kz}}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad (16)$$

[*Mat. Sbornik*, **3** (1868), 62; **4** (1869), 39; G. Dobiński, *Archiv der Math. und Physik*, **61** (1877), 333–336; **63** (1879), 108–110]. Христиан Крамп (Christian Kramp), рассматривая разложение e^{e^z} [*Der polynomische Lehrsatz*, ed. by C.F. Hindenburg (Leipzig: 1796), 112–113], привел два способа вычисления коэффициентов, а именно: либо с использованием (14), либо суммируя $p(n)$ членов, по одному для каждого обычного разбиения n . (См. формулу Арбогаста (Arbogast), упражнение 1.2.5–21. Крамп, близко подошедший к открытию этой формулы, похоже, предпочитал свой метод, основанный на разбиениях, не понимая, что он требует более чем полиномиального времени при все больших и больших n ; для коэффициента при z^{10} он вычислил значение 116015 вместо верного 115975.)

***Асимптотические оценки.** Изучить, насколько быстро с ростом n увеличивается значение ϖ_n , можно с использованием теории комплексных вычетов: если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ сходится везде в области $|z| < r$, то

$$a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{z^n} dz, \quad (17)$$

где интеграл берется по простому замкнутому пути, который обходит против часовой стрелки начало координат и остается внутри окружности $|z| = r$. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-n}$ — подынтегральная функция. Мы можем выбрать любой описанный путь, но зачастую имеются специальные методы, применимые, когда путь проходит через точку z_0 , в которой производная $f'(z_0)$ равна нулю, поскольку вблизи этой точки

$$f(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} \varepsilon^2 e^{2i\theta} + O(\varepsilon^3). \quad (18)$$

Если, например, $f(z_0)$ и $f''(z_0)$ действительны и положительны, скажем, $f(z_0) = u$ и $f''(z_0) = 2v$, то эта формула гласит, что значение $f(z_0 \pm \varepsilon)$ приближенно равно $u + v\varepsilon^2$, в то время как $f(z_0 \pm i\varepsilon)$ приближенно равно $u - v\varepsilon^2$. Если z проходит от $z_0 - i\varepsilon$ до $z_0 + i\varepsilon$, то значение $f(z)$ возрастает до максимального значения u , после чего вновь снижается; однако большее значение $u + v\varepsilon^2$ достигается функцией слева и справа от этого пути. Другими словами, альпинист, путешествующий по комплексной плоскости с рельефом, высота которого в точке z равна $\Re f(z)$, в точке z_0 обнаруживает “перевал”; рельеф здесь имеет вид седла (рис. 33). Полный интеграл от $f(z)$ одинаков для любого пути, но получить результат лучше при выборе пути, проходящего через седловую точку z_0 в направлении возрастания мнимой части. Этот важный метод, разработанный П. Дебаем (P. Debye) [*Math. Annalen*, **67** (1909), 535–558], так и называется — “метод седловой точки”.

Познакомимся с методом седловой точки на примере, для которого мы знаем ответ:

$$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^n} dz. \quad (19)$$

Наша задача — найти хорошее приближение значения интеграла в правой части при больших n . Будет удобнее работать с функцией $f(z) = e^z/z^n$, если записать ее как $e^{g(z)}$, где $g(z) = z - n \ln z$; тогда седловая точка достигается там, где значение производной $g'(z_0) = 1 - n/z_0$ равно 0, т.е. в точке $z_0 = n$. Если $z = n + it$, мы

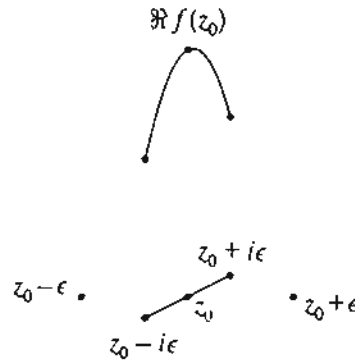


Рис. 33. Поведение аналитической функции вблизи седловой точки

получим

$$g(z) = g(n) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g^{(k)}(n)}{k!} (it)^k = n - n \ln n - \frac{t^2}{2n} + \frac{it^3}{3n^2} + \frac{t^4}{4n^3} - \frac{it^5}{5n^4} + \dots,$$

поскольку $g^{(k)}(z) = (-1)^k (k-1)! n/z^k$ при $k \geq 2$. Проинтегрируем $f(z)$ по прямоугольному пути от $n - im$ через $n + im$, $-n + im$ и $-n - im$ назад к $n - im$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^n} dz &= \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m f(n+it) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_n^{-n} f(t+im) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_m^{-m} f(-n+it) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-n}^n f(t-im) dt. \end{aligned}$$

Ясно, что если выбрать $m = 2n$, то на трех последних отрезках пути $|f(z)| \leq 2^{-n} f(n)$, поскольку $|e^z| = e^{\Re z}$ и $|z| \geq \max(\Re z, \Im z)$; так что мы остаемся с

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^n} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-m}^m e^{g(n+it)} dt + O\left(\frac{ne^n}{2^n n^n}\right).$$

Теперь вернемся к методике, которой мы неоднократно пользовались ранее, например для вывода формулы 5.1.4-(53): если $\hat{f}(t)$ — хорошее приближение $f(t)$ при $t \in A$ и если суммы $\sum_{t \in B \setminus A} f(t)$ и $\sum_{t \in C \setminus A} \hat{f}(t)$ малы, то $\sum_{t \in C} \hat{f}(t)$ является хорошим приближением для $\sum_{t \in B} f(t)$. Эта идея применима как к суммам, так и к интегралам. [Этот общий метод, разработанный Лапласом (Laplace) в 1782 году,

часто называется “trading tails”⁴; см. *CMath* § 9.4.] Если $|t| \leq n^{1/2+\varepsilon}$, мы имеем

$$\begin{aligned} e^{g(n+it)} &= \exp\left(g(n) - \frac{t^2}{2n} + \frac{it^3}{3n^2} + \dots\right) = \\ &= \frac{e^n}{n^n} \exp\left(-\frac{t^2}{2n} + \frac{it^3}{3n^2} + \frac{t^4}{4n^3} + O\left(n^{5\varepsilon-3/2}\right)\right) = \\ &= \frac{e^n}{n^n} e^{-t^2/(2n)} \left(1 + \frac{it^3}{3n^2} + \frac{t^4}{4n^3} - \frac{t^6}{18n^4} + O\left(n^{9\varepsilon-3/2}\right)\right). \end{aligned}$$

При $|t| > n^{1/2+\varepsilon}$ мы имеем

$$\left|e^{g(n+it)}\right| < \left|f\left(n + in^{1/2+\varepsilon}\right)\right| = \frac{e^n}{n^n} \exp\left(-\frac{n}{2} \ln(1 + n^{2\varepsilon-1})\right) = O\left(\frac{e^{n-n^{2\varepsilon}/2}}{n^n}\right).$$

Кроме того, можно пренебречь неполной гамма-функцией

$$\int_{n^{1/2+\varepsilon}}^{\infty} e^{-t^2/(2n)} t^k dt = 2^{(k-1)/2} n^{(k+1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}, \frac{n^{2\varepsilon}}{2}\right) = O\left(n^{O(1)} e^{-n^{2\varepsilon}/2}\right).$$

Таким образом, мы можем применить метод Лапласа и получить приближение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^n} dz &= \frac{e^n}{2\pi n^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2n)} \left(1 + \frac{it^3}{3n^2} + \frac{t^4}{4n^3} - \frac{t^6}{18n^4} + O\left(n^{9\varepsilon-3/2}\right)\right) dt = \\ &= \frac{e^n}{2\pi n^n} \left(I_0 + \frac{i}{3n^2} I_3 + \frac{1}{4n^3} I_4 - \frac{1}{18n^4} I_6 + O\left(n^{9\varepsilon-3/2}\right)\right), \end{aligned}$$

где $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/(2n)} t^k dt$. Конечно, $I_k = 0$ при нечетном k . В противном случае можно оценить значение I_k при помощи широко известного факта

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} t^{2l} dt = \frac{\Gamma((2l+1)/2)}{a^{(2l+1)/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(2a)^{(2l+1)/2}} \prod_{j=1}^l (2j-1) \quad (20)$$

при $a > 0$ (см. упражнение 39). Собирая воедино все рассмотренные результаты, получаем для всех $\varepsilon > 0$ асимптотическую оценку

$$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n-1/2}} \left(1 + 0 + \frac{3}{4n} - \frac{15}{18n} + O\left(n^{9\varepsilon-3/2}\right)\right), \quad (21)$$

полностью согласующуюся с приближением Стирлинга, которое мы выводили совершенно иным методом в 1.2.11.2–(19). Прочие члены в разложении $g(n+it)$ позволяют доказать, что истинная ошибка в (21) всего лишь $O(n^{-2})$, поскольку та же процедура дает асимптотический ряд общего вида $e^n/(\sqrt{2\pi} n^{n-1/2})(1 + c_1/n + c_2/n^2 + \dots + c_m/n^m + O(n^{-m-1}))$ для всех m .

⁴Дословно — “торговля хвостами”. — *Примеч. пер.*

То, что мы занялись выводом этого результата, оправдывается важной технической деталью: функция $\ln z$ не является однозначной на пути интегрирования, поскольку возрастает на $2\pi i$ при движении вокруг начала координат. На самом деле этот факт лежит в основе механизма, который заставляет работать теорему о вычетах. Однако наш вывод корректен, поскольку неоднозначность логарифма не влияет на подынтегральную функцию $f(z) = e^z/z^n$ при целом n . Кроме того, если n не целое, мы можем немного изменить вывод, оставив его совершенно строгим, путем взятия интеграла по пути, начинающемуся в $-\infty$, обходящему начало координат против часовой стрелки и возвращающемуся в $-\infty$. Это даст нам интеграл Ганкеля для гамма-функции 1.2.5–(17); таким образом мы можем вывести асимптотическую формулу

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^x} dz = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x^{x-1/2}}} \left(1 - \frac{1}{12x} + O(x^{-2}) \right), \quad (22)$$

справедливую для всех действительных чисел $x \rightarrow \infty$.

Так что метод седловой точки работает — хотя это и не простейший способ получения этого конкретного результата. Теперь применим его к выводу приближения чисел Белла:

$$\frac{\varpi_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{2\pi i e} \oint e^{g(z)} dz, \quad g(z) = e^z - n \ln z. \quad (23)$$

Седловая точка для нового подынтегрального выражения теперь находится в точке $z_0 = \xi > 0$, где

$$\xi e^\xi = n. \quad (24)$$

(В действительности мы должны писать $\xi(n)$, чтобы указать, что ξ зависит от n ; однако это излишне загромодило бы следующие далее формулы.) Предположим на минутку, что добрый волшебник сказал нам, чему равно значение ξ . Тогда мы можем взять интеграл по пути $z = \xi + it$, и получить

$$g(\xi + it) = e^\xi - n \left(\ln \xi - \frac{(it)^2 \xi + 1}{2! \xi^2} - \frac{(it)^3 \xi^2 - 2!}{3! \xi^3} - \frac{(it)^4 \xi^3 + 3!}{4! \xi^4} + \dots \right).$$

Путем интегрирования по соответствующему прямоугольному пути можно доказать, как мы делали это выше, что хорошим приближением интеграла в (23) является

$$\int_{-n^{\varepsilon-1/2}}^{n^{\varepsilon-1/2}} e^{g(\xi) - na_2 t^2 - na_3 t^3 + na_4 t^4 + \dots} dt, \quad a_k = \frac{\xi^{k-1} + (-1)^k (k-1)!}{k! \xi^k} \quad (25)$$

(см. упражнение 43). Замечая, что $a_k t^k$ под знаком интеграла представляет собой $O(n^{k\varepsilon - k/2})$, мы получим асимптотическое разложение в виде

$$\varpi_{n-1} = \frac{e^{e^\xi - 1} (n-1)!}{\xi^{n-1} \sqrt{2\pi n} (\xi + 1)} \left(1 + \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n^2} + \dots + \frac{b_m}{n^m} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)^{m+1} \right), \quad (26)$$

где $(\xi + 1)^{3k} b_k$ — полином степени $4k$ от ξ (см. упражнение 44). Например:

$$b_1 = -\frac{2\xi^4 - 3\xi^3 - 20\xi^2 - 18\xi + 2}{24(\xi + 1)^3}; \quad (27)$$

$$b_2 = \frac{4\xi^8 - 156\xi^7 - 695\xi^6 - 696\xi^5 + 1092\xi^4 + 2916\xi^3 + 1972\xi^2 - 72\xi + 4}{1152(\xi + 1)^6}. \quad (28)$$

В (26) можно воспользоваться приближением Стирлинга (21) для доказательства того, что

$$\varpi_{n-1} = \exp\left(n\left(\xi - 1 + \frac{1}{\xi}\right) - \xi - \frac{1}{2}\ln(\xi + 1) - 1 - \frac{\xi}{12n} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right); \quad (29)$$

а в упражнении 45 доказывается аналогичная формула:

$$\varpi_n = \exp\left(n\left(\xi - 1 + \frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{2}\ln(\xi + 1) - 1 - \frac{\xi}{12n} + O\left(\frac{\log n}{n}\right)^2\right). \quad (30)$$

Следовательно, мы имеем $\varpi_n/\varpi_{n-1} \approx e^\xi = n/\xi$. Точнее,

$$\frac{\varpi_{n-1}}{\varpi_n} = \frac{\xi}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (31)$$

Но чему равно асимптотическое значение ξ ? Из определения (24) вытекает, что

$$\xi = \ln n - \ln \xi = \ln n - \ln(\ln n - \ln \xi) = \ln n - \ln \ln n + O\left(\frac{\log \log n}{\log n}\right); \quad (32)$$

и мы можем идти по этому пути, как показано в упражнении 49. Однако асимптотический ряд для ξ , полученный таким образом, никогда не даст точность лучше, чем $O(1/(\log n)^m)$ для все большего и большего значения m ; таким образом, при умножении на n в формуле (29) для ϖ_{n-1} или формуле (30) для ϖ_n мы получим огромную неточность.

Следовательно, если мы хотим использовать (29) или (30) для вычисления хорошего приближения чисел Белла, то наилучшая стратегия — начать с вычисления точного значения ξ , не используя плохо сходящиеся ряды. Метод Ньютона, рассматривавшийся в примечаниях перед описанием алгоритма 4.7N, дает эффективную итеративную схему

$$\xi_0 = \ln n, \quad \xi_{k+1} = \frac{\xi_k}{\xi_k + 1} (1 + \xi_0 - \ln \xi_k), \quad (33)$$

которая быстро сходится к точному значению. Например, для $n = 100$ пятая итерация дает значение

$$\xi_5 = 3.3856301402900501848882443645297268674917-, \quad (34)$$

верное до сорокового знака. Использование этого значения в (29) приводит к последовательным приближениям

$$(1.6176088053\dots, 1.6187421339\dots, 1.6187065391\dots, 1.6187060254\dots) \times 10^{114}$$

при учете соответственно членов до b_0, b_1, b_2, b_3 ; истинное значение ϖ_{99} представляет собой 115-значное целое число 16187060274460...20741.

Теперь, когда мы знаем количества разбиений множества ϖ_n , попробуем выяснить, сколько из них состоят ровно из m блоков. Оказывается, что почти все разбиения $\{1, \dots, n\}$ имеют порядка $n/\xi = e^\xi$ блоков с примерно ξ элементами в каждом блоке. Например, на рис. 34 показана гистограмма чисел $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ для $n = 100$ и $e^\xi \approx 29.54$.

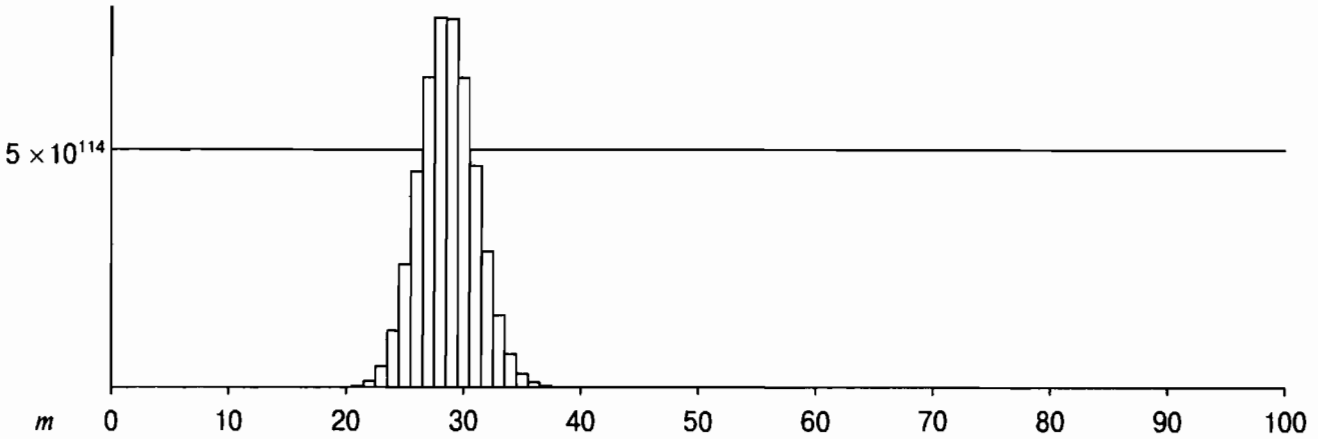


Рис. 34. Числа Стирлинга $\left\{ \begin{smallmatrix} 100 \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ имеют наибольшие значения при $m = 28$ и $m = 29$

Величину $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ можно исследовать при помощи применения метода седловой точки к формуле 1.2.9--(23), которая гласит, что

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \frac{n!}{m!} [z^n] (e^z - 1)^m = \frac{n!}{m!} \frac{1}{2\pi i} \oint e^{m \ln(e^z - 1) - (n+1) \ln z} dz. \quad (35)$$

Пусть $\alpha = (n + 1)/m$. Функция $g(z) = \alpha^{-1} \ln(e^z - 1) - \ln z$ имеет седловую точку $\sigma > 0$ при

$$\frac{\sigma}{1 - e^{-\sigma}} = \alpha. \quad (36)$$

Заметим, что $\alpha > 1$ при $1 \leq m \leq n$. Это значение σ можно получить как

$$\sigma = \alpha - \beta, \quad \beta = T(\alpha e^{-\alpha}), \quad (37)$$

где T — “функция дерева” из 2.3.4.4--(30). Фактически β — значение в диапазоне от 0 до 1, для которого

$$\beta e^{-\beta} = \alpha e^{-\alpha}; \quad (38)$$

функция $x e^{-x}$ возрастает от 0 до e^{-1} при увеличении x от 0 до 1, после чего вновь уменьшается до 0. Поэтому β определяется единственным образом и мы имеем

$$e^\sigma = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (39)$$

Все такие пары α и β можно получить с использованием обратных формул

$$\alpha = \frac{\sigma e^\sigma}{e^\sigma - 1}, \quad \beta = \frac{\sigma}{e^\sigma - 1}; \quad (40)$$

например, значения $\alpha = \ln 4$ и $\beta = \ln 2$ соответствуют $\sigma = \ln 2$.

Можно, как ранее, показать, что интеграл в (35) асимптотически эквивалентен интегралу от $e^{(n+1)g(z)} dz$ по пути $z = \sigma + it$ (см. упражнение 58). В упражнении 56 доказывается, что ряд Тейлора вблизи $z = \sigma$

$$g(\sigma + it) = g(\sigma) - \frac{t^2(1-\beta)}{2\sigma^2} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} g^{(k)}(\sigma) \quad (41)$$

обладает тем свойством, что

$$\left| g^{(k)}(\sigma) \right| < 2(k-1)!(1-\beta)/\sigma^k \quad \text{для всех } k > 0. \quad (42)$$

Таким образом, мы можем легко убрать множитель $N = (n+1)(1-\beta)$ из степенного ряда $(n+1)g(z)$, и метод седловой точки приводит нас к формуле

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = \frac{n!}{m!} \frac{1}{(\alpha-\beta)^{n-m} \beta^m \sqrt{2\pi N}} \left(1 + \frac{b_1}{N} + \frac{b_2}{N^2} + \dots + \frac{b_l}{N^l} + O\left(\frac{1}{N^{l+1}}\right) \right) \quad (43)$$

при $N \rightarrow \infty$, где $(1-\beta)^{2k} b_k$ — полином от α и β . (Величина $(\alpha-\beta)^{n-m} \beta^m$ в знаменателе проистекает из того факта, что $(e^\sigma - 1)^m / \sigma^n = (\alpha/\beta - 1)^m / (\alpha - \beta)^n$, в соответствии с (37) и (39).) Например:

$$b_1 = \frac{6 - \beta^3 - 4\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta}{8(1-\beta)} - \frac{5(2 - \beta^2 - \alpha\beta)^2}{24(1-\beta)^2}. \quad (44)$$

В упражнении 57 доказывается, что $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $n - m \rightarrow \infty$. Асимптотическое разложение для $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$, аналогичное (43), но несколько более сложное, было впервые получено Лео Мозером (Leo Moser) и Максом Виманом (Max Wyman) [*Duke Math. J.*, **25** (1957), 29–43].

Формула (43) выглядит немного страшновато из-за того, что она создана с учетом применимости для всего диапазона количества блоков m . Значительное упрощение формулы возможно при относительно малых и относительно больших значениях m (см. упражнения 60 и 61); однако эти упрощения не дают точных результатов в важных случаях, когда $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ имеет наибольшее значение. Рассмотрим подробнее эти важные случаи, определяющие форму пика на рис. 34.

Пусть $\xi e^\xi = n$, как в (24), и положим $m = \exp(\xi + r/\sqrt{n}) = n e^{r/\sqrt{n}} / \xi$; мы будем считать, что $|r| \leq n^\epsilon$, а значит, m близко к e^ξ . Старший член (43) можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{n!}{m!} \frac{1}{(\alpha-\beta)^{n-m} \beta^m \sqrt{2\pi(n+1)(1-\beta)}} &= \\ &= \frac{m^n}{m!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{e^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)}} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-n} \frac{e^{-\beta m}}{\sqrt{1-\beta}}, \quad (45) \end{aligned}$$

и приближение Стирлинга для $(n+1)!$ приводит к очевидным сокращениям в этом выражении. При помощи вычислительной алгебры мы находим

$$\frac{m^n}{m!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(n \left(\xi - 1 + \frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{2} \left(\xi + r^2 + \frac{r^2}{\xi} \right) - \left(\frac{r}{2} + \frac{r^3}{6} + \frac{r^3}{3\xi} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + O(n^{4\varepsilon-1}) \right);$$

а также

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\xi}{n} + \frac{r\xi^2}{n\sqrt{n}} + O(\xi^3 n^{2\varepsilon-2}); \\ e^{-\beta m} &= \exp \left(-\xi - \frac{r\xi^2}{\sqrt{n}} + O(\xi^3 n^{2\varepsilon-1}) \right); \\ \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} \right)^{m-n} &= \exp \left(\xi - 1 + \frac{r(\xi^2 - \xi - 1)}{\sqrt{n}} + O(\xi^3 n^{2\varepsilon-1}) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательный результат имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ e^{\xi+r/\sqrt{n}} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(n \left(\xi - 1 + \frac{1}{\xi} \right) - \frac{\xi}{2} - 1 - \frac{\xi+1}{2\xi} \left(r + \frac{3\xi(2\xi+3) + (\xi+2)r^2}{6(\xi+1)\sqrt{n}} \right)^2 + O(\xi^3 n^{4\varepsilon-1}) \right). \quad (46)$$

Возведенное в квадрат выражение равно нулю, когда

$$r = -\frac{\xi(2\xi+3)}{2(\xi+1)\sqrt{n}} + O(\xi^2 n^{-3/2});$$

таким образом, максимум достигается, когда количество блоков равно

$$m = \frac{n}{\xi} - \frac{3+2\xi}{2+2\xi} + O\left(\frac{\xi}{n}\right). \quad (47)$$

Сравнивая (47) и (30), мы видим, что наибольшее число Стирлинга $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ для данного значения n приблизительно равно $\xi \varpi_n / \sqrt{2\pi n}$.

Метод седловой точки применим к существенно более сложным задачам, чем рассмотренные в этом разделе. Превосходное описание ряда эффективных методов можно найти в книгах N.G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (1958), главы 5 и 6; F.W.J. Olver, *Asymptotics and Special Functions* (1974), глава 4; R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals* (2001), главы 2 и 7.

***Случайные разбиения множества.** Размеры блоков в разбиении множества $\{1, \dots, n\}$ представляют собой обычное разбиение числа n . Следовательно, нас может заинтересовать, к какому виду разбиений оно может относиться. На рис. 30 в разделе 7.2.1.4 показан результат суперпозиций диаграмм Феррерса для всех

$p(25) = 1958$ разбиений 25; эти разбиения стремятся к симметричной кривой 7.2.1.4–(49). В отличие от этого, на рис. 35 показан результат суперпозиции соответствующих диаграмм для всех $\varpi_{25} \approx 4.6386 \times 10^{18}$ разбиений множества $\{1, \dots, 25\}$. Очевидно, что “форма” случайного разбиения множества существенно отличается от таковой для случайного разбиения целого числа.

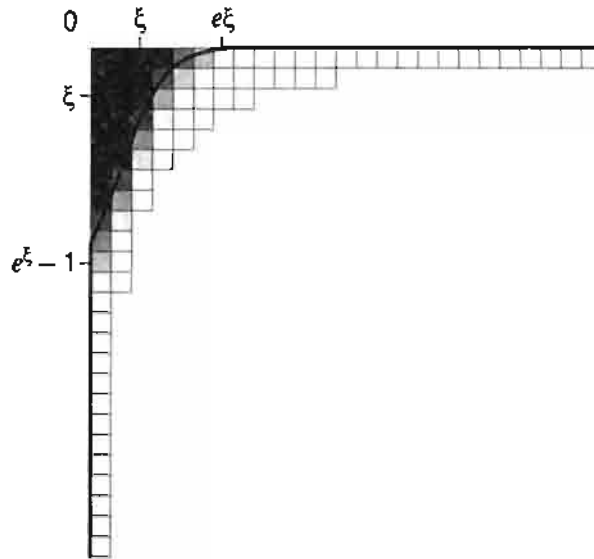


Рис. 35. Случайное разбиение множества при $n = 25$

Это изменение связано с тем, что некоторые разбиения целого числа появляются в виде размеров блоков разбиения множества только в редких случаях, в то время как другие весьма распространены. Например, разбиение $n = 1 + 1 + \dots + 1$ возможно только единственным способом, в то время как разбиение $n = 2 + 2 + \dots + 2$ может реализоваться $(n - 1)(n - 3) \dots (1)$ способами. При $n = 25$ разбиение целого числа

$$25 = 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1$$

в действительности возникает более чем в 2% случаев от общего количества разбиений множества. (Это конкретное разбиение наиболее частое в случае $n = 25$. Ответ к упражнению 1.2.5–21 гласит, что равно

$$\frac{n!}{c_1!1!^{c_1} c_2!2!^{c_2} \dots c_n!n!^{c_n}} \quad (48)$$

разбиений множества соответствуют разбиению целого числа $n = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \dots + c_n \cdot n$.)

Можно легко определить среднее количество k -блоков в случайном разбиении множества $\{1, \dots, n\}$: если мы запишем все ϖ_n возможных разбиений, каждый конкретный k -блок встретится ровно ϖ_{n-k} раз. Следовательно, среднее количество составляет

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \frac{\varpi_{n-k}}{\varpi_n}. \quad (49)$$

Разложение (31), как доказываем в упражнении 64, дает нам

$$\frac{\varpi_{n-k}}{\varpi_n} = \left(\frac{\xi}{k}\right)^k \left(1 + \frac{k\xi(k\xi + k + 1)}{2(\xi + 1)^2 n} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right) \quad \text{при } k \leq n^{2/3}, \quad (50)$$

где ξ определено в (24). Следовательно, если, скажем, $k \leq n^\varepsilon$, формула (49) упрощается до

$$\frac{n^k}{k!} \left(\frac{\xi}{n}\right)^k \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\xi^k}{k!} (1 + O(n^{2\varepsilon-1})). \quad (51)$$

В среднем имеется около ξ блоков размером 1, $\xi^2/2!$ блоков размером 2 и т.д.

Дисперсия этих величин мала (см. упражнение 65), и оказывается, что случайное разбиение ведет себя, по сути, так, как если бы количество k -блоков подчинялось распределению Пуассона со средним $\xi^k/k!$. Гладкая кривая, показанная на рис. 35, проходит через точки $(f(k), k)$ в координатах диаграммы Феррерса, где

$$f(k) = \xi^{k+1}/(k+1)! + \xi^{k+2}/(k+2)! + \xi^{k+3}/(k+3)! + \dots \quad (52)$$

представляет собой приближенное расстояние от верхней линии, соответствующей размеру блока $k \geq 0$ (при больших n эта кривая становится все более близкой к вертикали).

Наибольший блок стремится содержать примерно $e\xi$ элементов. И еще: вероятность того, что блок, содержащий элемент 1, имеет размер менее $\xi + a\sqrt{\xi}$, приближается к вероятности того, что нормальное отклонение не превышает a . [См. John Haigh, *J. Combinatorial Theory*, **A13** (1972), 287–295; V.N. Sachkov, *Probabilistic Methods in Combinatorial Analysis* (1997), глава 4 — перевод книги на русском языке, изданной в 1978 г.; Yu. Yakubovich, *J. Mathematical Sciences*, **87** (1997), 4124–4137 — перевод статьи на русском языке, опубликованной в 1995 г.; V. Pittel, *J. Combinatorial Theory*, **A79** (1997), 326–359.]

Красивый способ генерации случайного разбиения множества $\{1, \dots, n\}$ был предложен А.Д. Стамом (A.J. Stam) [*Journal of Combinatorial Theory*, **A35** (1983), 231–240]: пусть M — случайное целое число, принимающее значение m с вероятностью

$$p_m = \frac{m^n}{em! \varpi_n}; \quad (53)$$

в силу (16) сумма всех вероятностей равна 1. После того как M выбрано, генерируем случайный n -кортеж $X_1 X_2 \dots X_n$, где каждое X_j независимо равномерно распределено между 0 и $M - 1$. Тогда в разбиении $i \equiv j$ тогда и только тогда, когда $X_i = X_j$. Эта процедура корректно работает, поскольку каждый k -блок разбиения получается с вероятностью $\sum_{m \geq 0} (m^k/m^n) p_m = 1/\varpi_n$.

Например, для $n = 25$ имеем

$p_4 \approx .00000372$	$p_9 \approx .15689865$	$p_{14} \approx .04093663$	$P_{19} \approx .00006068$
$p_5 \approx .00019696$	$p_{10} \approx .21855285$	$p_{15} \approx .01531445$	$p_{20} \approx .00001094$
$p_6 \approx .00313161$	$p_{11} \approx .21526871$	$p_{16} \approx .00480507$	$p_{21} \approx .00000176$
$p_7 \approx .02110279$	$p_{12} \approx .15794784$	$p_{17} \approx .00128669$	$p_{22} \approx .00000026$
$p_8 \approx .07431024$	$p_{13} \approx .08987171$	$p_{18} \approx .00029839$	$p_{23} \approx .00000003,$

а всеми остальными вероятностями можно пренебречь. Так, в большинстве случаев можно получить случайное разбиение 25 элементов, рассматривая случайное 25-значное число в системе счисления с основанием 9, 10, 11 или 12. Число M может быть сгенерировано с использованием метода 3.4.1–(3); оно стремится приближенно к $n/\xi = e^\xi$ (см. упражнение 67).

***Разбиения мультимножеств.** Разбиения целых чисел и разбиения множеств представляют собой крайние случаи существенно более общей задачи — разбиений мультимножеств. Действительно, разбиения n , по сути, не что иное, как разбиения мультимножества $\{1, 1, \dots, 1\}$, в котором имеется n единиц.

С этой точки зрения имеется, по сути, $p(n)$ различных мультимножеств с n элементами. Например, при $n = 4$ имеется пять различных случаев разбиений мультимножества:

$$\begin{aligned}
 &1234, 123|4, 124|3, 12|34, 12|3|4, 134|2, 13|24, 13|2|4, \\
 &\quad 14|23, 14|2|3, 1|234, 1|23|4, 1|24|3, 1|2|34, 1|2|3|4; \\
 &1123, 112|3, 113|2, 11|23, 11|2|3, 123|1, 12|13, 12|1|3, 13|1|2, 1|1|23, 1|1|2|3; \\
 &\quad 1122, 112|2, 11|22, 11|2|2, 122|1, 12|12, 12|1|2, 1|1|22, 1|1|2|2; \\
 &\quad 1112, 111|2, 112|1, 11|12, 11|1|2, 12|1|1, 1|1|1|2; \\
 &\quad 1111, 111|1, 11|11, 11|1|1, 1|1|1|1.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Когда мультимножество содержит m различных элементов, n_1 первого вида, n_2 второго, \dots , n_m последнего, общее количество разбиений мы обозначаем через $p(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Пример (54) показывает, что

$$p(1, 1, 1, 1) = 15, \quad p(2, 1, 1) = 11, \quad p(2, 2) = 9, \quad p(3, 1) = 7, \quad p(4) = 5. \tag{55}$$

Разбиения с $m = 2$ часто называют “бипазбиениями” (bipartitions), с $m = 3$ — “трипазбиениями” (tripartitions), а в общем случае эти комбинаторные объекты известны под названием *мультипазбиений* (multipartitions). Изучение мультипазбиений было начато много лет назад П.А. Мак-Мэганом (P.A. MacMahon) [*Philosophical Transactions*, **181** (1890), 481–536; **217** (1917), 81–113; *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1925), 951–963]; однако предмет изучения настолько обширен, что до сих пор остается масса нерешенных вопросов. В оставшейся части этого раздела и упражнениях к нему мы бегло ознакомимся с некоторыми наиболее интересными и поучительными аспектами этой теории.

Прежде всего стоит отметить, что мультипазбиения, по сути, являются разбиениями *векторов* с неотрицательными целыми компонентами, а именно способами разложения такого вектора на сумму векторов с теми же свойствами. Например, девять разбиений мультимножества $\{1, 1, 2, 2\}$, перечисленные в (54), представляют собой не что иное, как девять разбиений двухкомпонентного вектора-столбца $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, а именно:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Для краткости здесь опущены знаки “+”, как и в случае одномерных разбиений целых чисел. Каждое разбиение можно записать в каноническом виде, если перечислить его части в невозрастающем лексикографическом порядке.

Для генерации разбиений любого заданного мультимножества достаточно простого алгоритма. В приведенной далее процедуре мы представляем разбиения в стеке, который содержит тройки элементов (c, u, v) , где c обозначает номер компонента, $u > 0$ — пока не разбитый остаток в компоненте c , а $v \leq u$ — c -й компонент текущей части. Тройки для удобства в действительности располагаются в трех массивах (c_0, c_1, \dots) , (u_0, u_1, \dots) и (v_0, v_1, \dots) , а кроме того, поддерживается массив “кадров стека” (f_0, f_1, \dots) , так что $(l + 1)$ -й вектор разбиения состоит из элементов от f_l до $f_{l+1} - 1$ в массивах c , u и v . Например, биразбиение $\begin{smallmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{smallmatrix}$ представлено следующими массивами:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 j & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
 c_j & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
 u_j & 9 & 9 & 6 & 8 & 4 & 6 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 1 \\
 v_j & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\
 \hline
 f_0 = 0 & & & & & & & & & & & & \\
 f_1 = 2 & & & & & & & & & & & & \\
 f_2 = 4 & & & & & & & & & & & & \\
 f_3 = 6 & & & & & & & & & & & & \\
 f_4 = 8 & & & & & & & & & & & & \\
 f_5 = 10 & & & & & & & & & & & & \\
 f_6 = 11 & & & & & & & & & & & & \\
 f_7 = 12 & & & & & & & & & & & &
 \end{array} \tag{57}$$

Алгоритм М (Мультиразбиения в убывающем лексикографическом порядке). Для данного мультимножества $\{n_1 \cdot 1, \dots, n_m \cdot m\}$ этот алгоритм посещает все его разбиения с использованием массивов $f_0 f_1 \dots f_n$, $c_0 c_1 \dots c_{mn}$, $u_0 u_1 \dots u_{mn}$ и $v_0 v_1 \dots v_{mn}$, описанных выше, где $n = n_1 + \dots + n_m$. Мы полагаем, что $m > 0$ и $n_1, \dots, n_m > 0$.

- М1.** [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow j + 1$ и $u_j \leftarrow v_j \leftarrow n_{j+1}$ для $0 \leq j < m$; установить также $f_0 \leftarrow a \leftarrow l \leftarrow 0$ и $f_1 \leftarrow b \leftarrow m$. (В последующих шагах текущий кадр стека пробегает от a до $b - 1$ включительно.)
- М2.** [Вычесть v из u .] (Здесь мы хотим найти все разбиения вектора u в текущем кадре на части, лексикографически не превосходящие v . Сначала мы используем само v .) Установить $j \leftarrow a$ и $k \leftarrow b$. Затем, пока $j < b$, выполнять следующее: установить $u_k \leftarrow u_j - v_j$, и если $u_k \geq v_j$, установить $c_k \leftarrow c_j$, $v_k \leftarrow v_j$, $k \leftarrow k + 1$, $j \leftarrow j + 1$. Но если u_k меньше v_j после того, как оно было уменьшено, действия изменяются: сначала установить $c_k \leftarrow c_j$, $v_k \leftarrow u_k$ и $k \leftarrow k + 1$, если u_k не равно нулю; затем установить $j \leftarrow j + 1$. Пока $j < b$, устанавливая $u_k \leftarrow u_j - v_j$, $c_k \leftarrow c_j$, $v_k \leftarrow u_k$ и $k \leftarrow k + 1$, если $u_j \neq v_j$; затем снова установить $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $j = b$.
- М3.** [Внесение в стек, если не ноль.] Если $k > b$, установить $a \leftarrow b$, $b \leftarrow k$, $l \leftarrow l + 1$, $f_{l+1} \leftarrow b$ и вернуться к шагу М2.
- М4.** [Посещение разбиения.] Посетить разбиение, представленное $l + 1$ векторами, находящимися в стеке. (Для $0 \leq k \leq l$ вектор имеет v_j в качестве компонента c_j для $f_k \leq j < f_{k+1}$.)
- М5.** [Уменьшение v .] Установить $j \leftarrow b - 1$ и, если $v_j = 0$, установить $j \leftarrow j - 1$ и повторять это действие до тех пор, пока не будет выполнено условие $v_j > 0$.

Таблица 1. Поразрядная сортировка и мультиразбиения

Шаг (0): исходное разбиение	Шаг (1): сортировка строки 4	Шаг (2): сортировка строки 3
6 5 5 4 3 2 1 0 0	0 6 4 3 5 0 5 2 1	0 6 5 2 5 1 4 3 0
3 2 1 0 4 5 6 4 2	2 3 0 4 2 4 1 5 6	2 3 2 5 1 6 0 4 4
6 6 3 1 1 5 2 0 7	7 6 1 1 6 0 3 5 2	7 6 6 5 [^] 3 2 [^] 1 1 0
4 2 1 3 3 1 1 2 5	5 [^] 4 3 3 [^] 2 2 [^] 1 1 1	5 4 2 1 1 1 3 3 2
①②③④⑤⑥⑦⑧⑨	⑨①④⑤②⑧③⑥⑦	⑨①②⑥③⑦④⑤⑧
	$\alpha_4 = (9\wedge 1 4 5\wedge 2 8\wedge 3 6 7)$	$\alpha_3 = (1 2 5 8\wedge 7 9\wedge 3 4 6)$
	Шаг (3): сортировка строки 2	Шаг (4): сортировка строки 1
	1 2 3 0 6 0 5 5 4	6 5 5 4 [^] 3 [^] 2 [^] 1 0 0
	6 [^] 5 4 4 [^] 3 [^] 2 2 1 0	3 2 1 0 4 5 6 4 2
	2 5 1 0 6 7 6 3 1	6 6 3 1 1 5 2 0 7
	1 1 3 2 4 5 2 1 3	4 2 1 3 3 1 1 2 5
	⑦⑥⑤⑧①⑨②③④	①②③④⑤⑥⑦⑧⑨
	$\alpha_2 = (6\wedge 4 8 9\wedge 2\wedge 1 3 5 7)$	$\alpha_1 = (5 7 8 9\wedge 3\wedge 2\wedge 1 4 6)$

Затем, если $j = a$ и $v_j = 1$, перейти к шагу М6. В противном случае установить $v_j \leftarrow v_j - 1$ и $v_k \leftarrow u_k$ для $j < k < b$. Вернуться к шагу М2.

М6. [Возврат.] Завершить работу алгоритма, если $l = 0$. В противном случае установить $l \leftarrow l - 1$, $b \leftarrow a$, $a \leftarrow f_l$ и вернуться к шагу М5. |

Ключевым в этом алгоритме является шаг М2, который уменьшает текущий остаточный вектор u на наибольшую разрешенную часть v ; этот шаг также при необходимости уменьшает v до лексикографически наибольшего вектора, не превосходящего v , который меньше или равен новому остаточному значению в каждом компоненте. (См. упражнение 68.)

Завершим этот раздел рассмотрением интересной связи между мультиразбиениями и процедурой сортировки по младшим цифрам из алгоритма поразрядной сортировки 5.2.5R. Легче всего понять идею путем рассмотрения конкретного примера. Взгляните на табл. 1, где шаг (0) представляет собой четырехкомпонентные векторы-столбцы, упорядоченные лексикографически. В строке ниже приведены используемые для идентификации векторов их порядковые номера ①–⑨. На шаге (1) выполняется устойчивая сортировка векторов с расположением четвертого (младшего) компонента в порядке уменьшения; аналогично, шаги (2), (3) и (4) выполняют устойчивую сортировку третьей, второй и первой строк. Теория поразрядной сортировки гласит, что таким образом восстанавливается исходный лексикографический порядок.

Предположим, что последовательности порядковых номеров после этих операций устойчивой сортировки есть соответственно α_4 , $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ и $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, где все α являются перестановками. В табл. 1 значения α_4 , α_3 , α_2 и α_1 приведены в скобках. А теперь перейдем к главному: где бы перестановка α_j не имела спуск, числа в строке j после сортировки также должны иметь спуск, поскольку сортировка устойчива (эти спуски в таблице указаны символами “ \wedge ”). Например, там, где в α_3 за 8 идет 7, мы имеем 3, следующее за 5 в строке 3. Следовательно, элементы $a_1 \dots a_9$ в строке 3 после шага (2) не являются произвольным разбиением их суммы; они должны

удовлетворять условиям

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 > a_5 \geq a_6 > a_7 \geq a_8 \geq a_9. \quad (58)$$

Однако числа $(a_1 - 2, a_2 - 2, a_3 - 2, a_4 - 2, a_5 - 1, a_6 - 1, a_7, a_8, a_9)$ образуют, по сути, произвольное разбиение исходной суммы минус $(4 + 6)$. Величина уменьшения $4 + 6$ представляет собой сумму индексов, где наблюдается спуск; это число является тем, что в разделе 5.1.1 мы называли “индексом” α_3 и обозначали как $\text{ind } \alpha_3$.

Итак, мы видим, что любое разбиение m -компонентного числа не более чем на r частей (с дополнительными нулями, добавленными для того, чтобы количество столбцов было равно r), можно закодировать как последовательность перестановок $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ множества $\{1, \dots, r\}$, такую, что произведение $\alpha_1 \dots \alpha_m$ представляет собой тождественную перестановку, вместе с последовательностью обычных одномерных разбиений чисел $(n_1 - \text{ind } \alpha_1, \dots, n_m - \text{ind } \alpha_m)$ не более чем на r частей. Например, вектор в табл. 1 представляет разбиение $(26, 27, 31, 22)$ на 9 частей; перестановки $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ приведены в таблице, и мы имеем $(\text{ind } \alpha_1, \dots, \text{ind } \alpha_4) = (15, 10, 10, 11)$; соответственно разбиения представляют собой

$$\begin{aligned} 26 - 15 &= (322111100), & 27 - 10 &= (332222210), \\ 31 - 10 &= (544321110), & 22 - 11 &= (221111111). \end{aligned}$$

И обратно: любые такие перестановки и разбиения дают мультиразбиения (n_1, \dots, n_m) . Если r и m малы, при перечислении или доказательствах свойств мультиразбиений может оказаться полезным рассмотрение $r!^{m-1}$ последовательностей одномерных разбиений, особенно в случае биразбиений. [См. Basil Gordon, *J. London Math. Soc.*, **38** (1963), 459–464.]

Неплохой обзор ранних работ, посвященных изучению разбиений на различные части и/или на строго положительные части, можно найти в статье M.S. Cheema and T.S. Motzkin, *Proc. Symp. Pure Math.*, **19** (Amer. Math. Soc., 1971), 39–70.

Упражнения

1. [20] (Д. Хатчинсон (G. Hutchinson).) Покажите, что простое изменение алгоритма Н приводит к генерации всех разбиений $\{1, \dots, n\}$ не более чем на r блоков для заданных n и r .
- ▶ 2. [22] При использовании разбиений множества на практике нам часто требуется связать вместе элементы каждого блока. Соответственно удобно иметь массив связей $l_1 \dots l_n$ и массив заголовков $h_1 \dots h_t$, так что элементами j -го блока t -блочного разбиения являются $i_1 > \dots > i_k$, где

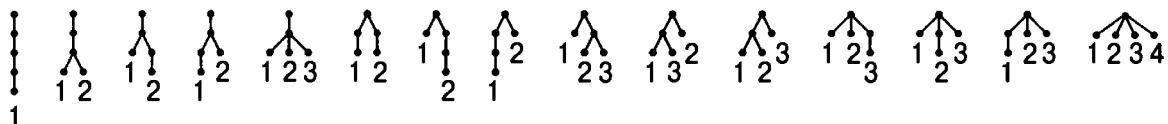
$$i_1 = h_j, \quad i_2 = l_{i_1}, \quad \dots, \quad i_k = l_{i_{k-1}}, \quad \text{и} \quad l_{i_k} = 0.$$

Например, представление $137|25|489|6$ должно иметь $t = 4$, $l_1 \dots l_9 = 001020348$, а $h_1 \dots h_4 = 7596$.

Разработайте вариант алгоритма Н, который генерирует разбиения с использованием этого представления.

3. [M23] Каково миллионное разбиение множества $\{1, \dots, 12\}$, сгенерированное алгоритмом Н?

- 4. [21] Обозначим через $\rho(x_1 \dots x_n)$ для произвольной строки $x_1 \dots x_n$ ограниченно растущую строку, которая соответствует отношению эквивалентности $j \equiv k \Leftrightarrow x_j = x_k$. Классифицируем каждое пятибуквенное английское слово из Stanford Graph-Base путем применения функции ρ ; например $\rho(\text{tooth}) = 01102$. Сколько из 52 разбиений пятиэлементного множества представлено таким способом английскими словами? Каковы наиболее распространенные слова каждого типа?
5. [22] Угадайте очередные элементы двух последовательностей:
- a) 0, 1, 1, 1, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 100, 121, 122, 123, 123, ...
- b) 0, 1, 12, 100, 112, 121, 122, 123, ...
- 6. [25] Предложите алгоритм для генерации всех разбиений множества $\{1, \dots, n\}$, в которых имеется ровно c_1 блоков размером 1, c_2 блоков размером 2 и т.д.
7. [M20] Сколько перестановок $a_1 \dots a_n$ множества $\{1, \dots, n\}$ обладают тем свойством, что из $a_{k-1} > a_k > a_j$ вытекает $j > k$?
8. [20] Предложите способ генерации всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$, которые имеют ровно m минимумов при проходе слева направо.
9. [M20] Сколько ограниченно растущих строк $a_1 \dots a_n$ содержат ровно k_j вхождений j для заданных целых значений k_0, k_1, \dots, k_{n-1} ?
10. [25] *Полупомеченным* (semilabeled) деревом называется ориентированное дерево, листья которого помечены целыми числами $\{1, \dots, k\}$, но прочие узлы остаются не помеченными. Так, имеется 15 полупомеченных деревьев с 5 вершинами:

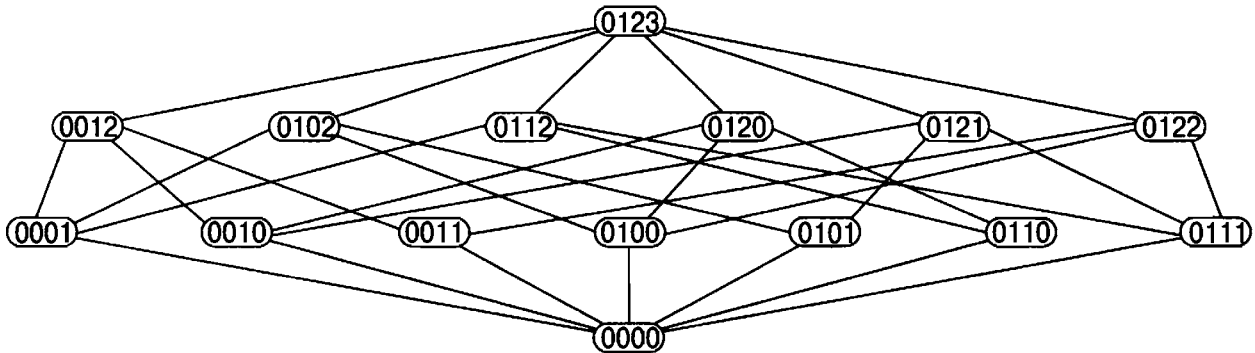


Найдите взаимнооднозначное соответствие между разбиениями множества $\{1, \dots, n\}$ и полупомеченными деревьями с $n + 1$ вершинами.

- 11. [28] В разделе 7.2.1.2 мы узнали, что знаменитая головоломка Дьюдени (Dudeney) `send + more = money` имеет единственное решение. Эта головоломка соответствует разбиению множества в 13 позициях цифр, для которого соответствующая ограниченно растущая строка $\rho(\text{sendmoremoney})$ равна 0123456145217. Можно заинтересоваться вопросом — насколько везучим надо быть, чтобы встретиться с такой конструкцией? Сколько ограниченно растущих строк длиной 13 определяют головоломку вида $a_1 a_2 a_3 a_4 + a_5 a_6 a_7 a_8 = a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13}$?

12. [M31] (*Решетка разбиений.*) Если Π и Π' — разбиения одного и того же множества, мы записываем $\Pi \preceq \Pi'$, если $x \equiv y \pmod{\Pi}$ всегда, когда $x \equiv y \pmod{\Pi'}$. Другими словами, $\Pi \preceq \Pi'$ означает, что Π' представляет собой “уточнение” Π , получаемое путем разбиения нескольких (возможно, ни одного) блоков последнего; Π , в свою очередь, представляет собой “огрубление”, или *коалесценцию* (coalescence) Π' , получаемую путем объединения вместе нескольких (возможно, ни одного) блоков. Это частичное упорядочение, как легко видеть, представляет собой решетку, причем

$\Pi \vee \Pi'$ является наибольшим общим уточнением Π и Π' , а $\Pi \wedge \Pi'$ — их наименьшую общую коалесценцию. Например, если представить разбиения ограниченно растущими строками $a_1 a_2 a_3 a_4$, то соответствующая решетка для разбиений множества $\{1, 2, 3, 4\}$ имеет вид



Пути, ведущие на приведенной диаграмме вверх, ведут от разбиения к его уточнению. Разбиения на t блоков находятся на уровне t снизу, а их потомки образуют решетку разбиений множества $\{1, \dots, t\}$.

- Объясните, как для заданных $a_1 \dots a_n$ и $a'_1 \dots a'_n$ вычислить $\Pi \vee \Pi'$.
- Объясните, как для заданных $a_1 \dots a_n$ и $a'_1 \dots a'_n$ вычислить $\Pi \wedge \Pi'$.
- Когда в этой решетке Π' покрывает Π ? (См. упражнение 7.2.1.4–55.)
- Если Π имеет t блоков с размерами s_1, \dots, s_t , то сколько разбиений оно покрывает?
- Если Π имеет t блоков с размерами s_1, \dots, s_t , то сколькими разбиениями оно покрывается?
- Истинно или ложно утверждение: если $\Pi \vee \Pi'$ покрывает Π , то Π' покрывает $\Pi \wedge \Pi'$.
- Истинно или ложно утверждение: если Π' покрывает $\Pi \wedge \Pi'$, то $\Pi \vee \Pi'$ покрывает Π .
- Пусть $b(\Pi)$ обозначает количество блоков Π . Докажите, что

$$b(\Pi) + b(\Pi') \leq b(\Pi \vee \Pi') + b(\Pi \wedge \Pi').$$

13. [M28] (Стефен К. Милн (Stephen C. Milne), 1977.) Если A — множество разбиений $\{1, \dots, n\}$, его *тенью* ∂A является множество всех разбиений Π' , такое, что Π покрывает Π' для некоторого $\Pi \in A$ (подобная концепция рассматривалась в 7.2.1.3–(54).)

Пусть Π_1, Π_2, \dots — разбиения множества $\{1, \dots, n\}$ на t блоков в лексикографическом порядке их ограниченно растущих строк. Пусть также Π'_1, Π'_2, \dots — $(t-1)$ -блочные разбиения, также находящиеся в лексикографическом порядке. Докажите, что имеется функция $f_{nt}(N)$, такая, что

$$\partial \{\Pi_1, \dots, \Pi_N\} = \{\Pi'_1, \dots, \Pi'_{f_{nt}(N)}\} \quad \text{для } 0 \leq N \leq \binom{n}{t}.$$

Указание: диаграмма из упражнения 12 демонстрирует, что $(f_{43}(0), \dots, f_{43}(6)) = (0, 3, 5, 7, 7, 7, 7)$.

14. [23] Разработайте алгоритм для генерации разбиений множества в порядке кода Грея наподобие (7).

15. [M21] Каково последнее разбиение, сгенерированное алгоритмом из упражнения 14?

16. [16] Список (11) представляет собой последовательность Раски A_{35} . Какой вид имеет A'_{35} ?

17. [26] Реализуйте код Грея для m -блочных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$, определяемый рекурсивными соотношениями Раски (8).

18. [M46] Для каких n можно сгенерировать все ограниченно растущие строки $a_1 \dots a_n$ так, чтобы на каждом шаге некоторое a_j изменялось на ± 1 ?

19. [28] Докажите существование кода Грея для ограниченно растущих строк, в котором на каждом шаге значение некоторого a_j изменяется либо на ± 1 , либо на ± 2 , когда мы хотим сгенерировать

а) все ϖ_n строк $a_1 \dots a_n$;

б) только $\binom{n}{m}$ случаев, удовлетворяющих условию $\max(a_1, \dots, a_n) = m - 1$.

20. [17] Если Π — разбиение множества $\{1, \dots, n\}$, сопряженное к нему разбиение Π^T определяется правилом

$$j \equiv k \pmod{\Pi^T} \Leftrightarrow n + 1 - j \equiv n + 1 - k \pmod{\Pi}.$$

Предположим, Π содержит ограниченно растущую строку 001010202013; какова соответствующая ограниченно растущая строка Π^T ?

21. [M27] Сколько разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ являются самосопряженными?

22. [M23] Если X — случайная переменная с заданным распределением, то математическое ожидание X^n называется n -м моментом этого распределения. Чему равен n -й момент, если X представляет собой

а) распределение Пуассона со средним значением 1 (формула 3.4.1–(40))?

б) количество фиксированных элементов в случайной перестановке множества $\{1, \dots, m\}$, где $m \geq n$ (формула 1.3.3–(27))?

23. [HM30] Пусть $f(x) = \sum a_k x^k$ и пусть $f(\varpi)$ обозначает $\sum a_k \varpi_k$.

а) Докажите символьную формулу $f(\varpi + 1) = \varpi f(\varpi)$. (Например, если $f(x)$ — полином x^2 , эта формула гласит, что $\varpi_2 + 2\varpi_1 + \varpi_0 = \varpi_3$.)

б) Аналогично, докажите, что $f(\varpi + k) = \varpi^k f(\varpi)$ для всех положительных целых k .

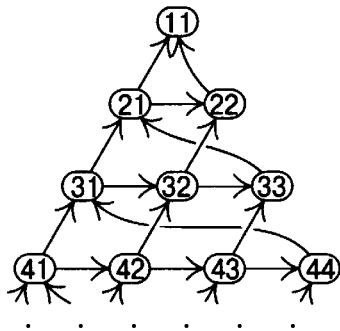
- c) Докажите, что если p — простое число, то $\varpi_{n+p} \equiv \varpi_n + \varpi_{n+1} \pmod{p}$. *Указание:* сначала покажите, что $x^p \equiv x^p - x$.
- d) Следовательно, если $N = p^{p-1} + p^{p-2} + \dots + p + 1$, то $\varpi_{n+N} \equiv \varpi_n \pmod{p}$.

24. [HM35] Продолжая предыдущее упражнение, докажите, что числа Белла удовлетворяют периодическому закону: $\varpi_{n+p^{e-1}N} \equiv \varpi_n \pmod{p}$, если p — нечетное простое число. *Указание:* покажите, что

$$x^{p^e} \equiv g_e(x) + 1 \pmod{p^e, p^{e-1}g_1(x), \dots, \text{ и } pg_{e-1}(x)}, \quad \text{где } g_j(x) = (x^p - x - 1)^{p^j}.$$

25. [M27] Докажите, что $\varpi_n/\varpi_{n-1} \leq \varpi_{n+1}/\varpi_n \leq \varpi_n/\varpi_{n-1} + 1$.

26. [M35] В соответствии с рекуррентными уравнениями (13) числа ϖ_{nk} в треугольнике Пирса подсчитывают пути от (nk) до (11) в бесконечном ориентированном графе



Поясните, почему каждый путь от $(n1)$ до (11) соответствует разбиению множества $\{1, \dots, n\}$.

► 27. [M35] “Циклом колеблющейся диаграммы” (vacillating tableau loop) порядка n является последовательность разбиений целых чисел $\lambda_k = a_{k1}a_{k2}a_{k3} \dots$, у которых $a_{k1} \geq a_{k2} \geq a_{k3} \geq \dots$ для $0 \leq k \leq 2n$, такая, что $\lambda_0 = \lambda_{2n} = e_0$, и $\lambda_k = \lambda_{k-1} + (-1)^k e_{t_k}$ для $1 \leq k \leq 2n$ и некоторых $0 \leq t_k \leq n$; e_t здесь обозначает единичный вектор $0^{t-1}10^{n-t}$ с $0 < t \leq n$, а e_0 состоит из нулей.

- a) Перечислите все такие циклы порядка 4. [*Указание:* их всего 15.]
- b) Докажите, что $t_{2k-1} = 0$ ровно у ϖ_{nk} циклов порядка n .

28. [M25] (Обобщенные ладейные полиномы.) Рассмотрим расстановку $a_1 + \dots + a_m$ квадратных ячеек по строкам и столбцам, когда строка k содержит ячейки в столбцах $1, \dots, a_k$. Поместим ноль или большее количество ладей в ячейки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было не более одной ладьи. Пустую ячейку назовем “свободной”, если ни справа, ни снизу от нее нет ладьи. Например, на рис. 35 показаны два таких размещения. Одно — с четырьмя ладьями и строками длиной $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5)$; второе — с девятью ладьями на квадратной доске размером 9×9 . Ладьи на рисунке показаны черными кружками; белые кружки размещаются слева и над ладьями, так что свободные ячейки не содержат никаких кружков.

Пусть $R(a_1, \dots, a_m)$ — полином от x и y , полученный суммированием $x^r y^f$ по всем корректным расстановкам ладей, причем r — количество ладей, а f — количество свободных ячеек; например, левое размещение на рис. 35 добавляет $x^4 y^{17}$ в полином $R(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5)$.

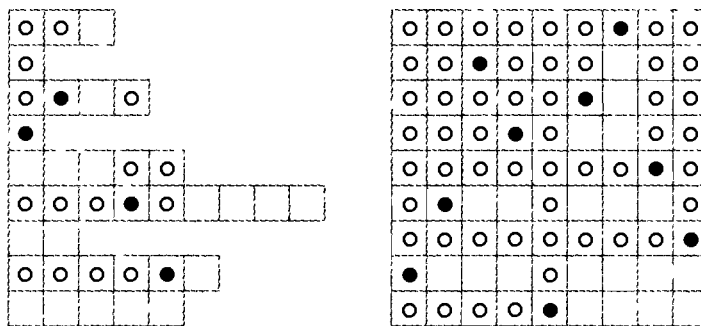


Рис. 36. Размещение ладей и свободные ячейки

- a) Докажите, что $R(a_1, \dots, a_m) = R(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_j, a_{j+2}, \dots, a_m)$; другими словами, порядок длин строк значения не имеет, и можно считать, что $a_1 \geq \dots \geq a_m$, как и в диаграмме Феррерса наподобие 7.2.1.4–(13).
- b) Докажите, что если $a_1 \geq \dots \geq a_m$, и $b_1 \dots b_n = (a_1 \dots a_m)^T$ — сопряженное разбиение, то $R(a_1, \dots, a_m) = R(b_1, \dots, b_n)$.
- c) Найдите рекуррентное соотношение для вычисления $R(a_1, \dots, a_m)$, и воспользуйтесь им для вычисления $R(3, 2, 1)$.
- d) Обобщите треугольник Пирса (12) путем замены правила сложения (13) на

$$\varpi_{nk}(x, y) = x\varpi_{(n-1)k}(x, y) + y\varpi_{n(k+1)}(x, y), \quad 1 \leq k < n.$$

Таким образом, $\varpi_{21}(x, y) = x + y$, $\varpi_{32}(x, y) = x + xy + y^2$, $\varpi_{31}(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2 + y^3$ и т.д. Докажите, что получающееся таким образом значение $\varpi_{nk}(x, y)$ представляет собой “ладейный” полином $R(a_1, \dots, a_{n-1})$, где $a_j = n - j - [j < k]$.

- e) Полином $\varpi_{n1}(x, y)$ из пункта (d) можно рассматривать как обобщенное число Белла $\varpi_n(x, y)$, представляющее пути от $(\overline{n1})$ до $(\underline{11})$ в ориентированном графе из упражнения 26, которые имеют данное количество “шагов x ” на северо-восток и “шагов y ” на восток. Докажите, что

$$\varpi_n(x, y) = \sum_{a_1 \dots a_n} x^{n-1-\max(a_1, \dots, a_n)} y^{a_1 + \dots + a_n},$$

где сумма берется по всем ограниченно растущим строкам $a_1 \dots a_n$ длины n .

29. [M26] Продолжая предыдущее упражнение, обозначим через $R_r(a_1, \dots, a_m) = [x^r] R(a_1, \dots, a_m)$ полином от y , который перечисляет все свободные ячейки при расстановке r ладей.

- a) Покажите, что количество способов расставить n ладей на доске размером $n \times n$, оставив при этом свободными f ячеек, представляет количество перестановок $\{1, \dots, n\}$, в которых имеется f инверсий. Таким образом, в соответствии с формулой 5.1.1–(8) и упражнением 5.1.2–16 мы имеем

$$R_n\left(\overbrace{n, \dots, n}^n\right) = n!_y = \prod_{k=1}^n (1 + y + \dots + y^{k-1}).$$

- b) Что собой представляет $R_r \overbrace{(n, \dots, n)}^m$ — производящая функция для r ладей на доске размером $m \times n$?
- c) Докажите обобщенную формулу

$$\prod_{j=1}^m \frac{1 - y^{a_j + m - j + t}}{1 - y} = \sum_{k=0}^m \frac{t!_y}{(t-k)!_y} R_{m-k}(a_1, \dots, a_m),$$

где $a_1 \geq \dots \geq a_m$, а t — неотрицательное целое число.

[Примечание: величина $t!_y / (t-k)!_y = \prod_{j=0}^{k-1} ((1 - y^{t-j}) / (1 - y))$ равна нулю при $k > t \geq 0$. Таким образом, например, при $t = 0$ правая часть сводится к $R_m(a_1, \dots, a_m)$. Можно вычислить R_m, R_{m-1}, \dots, R_0 , последовательно устанавливая $t = 0, 1, \dots, m$.]

- d) Покажите, что если $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m \geq 0$ и $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_m \geq 0$, то $R(a_1, a_2, \dots, a_m) = R(a'_1, a'_2, \dots, a'_m)$ тогда и только тогда, когда соответствующие мультимножества $\{a_1 + m, a_2 + m - 1, \dots, a_m + 1\}$ и $\{a'_1 + m, a'_2 + m - 1, \dots, a'_m + 1\}$ одинаковы.

30. [HM30] Обобщенное число Стирлинга $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_q$ определяется рекуррентным соотношением

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m \end{matrix} \right\}_q = (1 + q + \dots + q^{m-1}) \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_q + \left\{ \begin{matrix} n \\ m-1 \end{matrix} \right\}_q; \quad \left\{ \begin{matrix} 0 \\ m \end{matrix} \right\}_q = \delta_{m0}.$$

Таким образом, $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_q$ представляет собой полином от q , а $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_1$ является обычным числом Стирлинга $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$, поскольку оно удовлетворяет рекуррентному соотношению 1.2.6–(46).

- a) Докажите, что обобщенное число Белла $\varpi_n(x, y) = R(n-1, \dots, 1)$ из упражнения 28 (е) имеет явный вид

$$\varpi_n(x, y) = \sum_{m=0}^n x^{n-m} y^{\binom{m}{2}} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_y.$$

- b) Покажите, что обобщенные числа Стирлинга подчиняются рекуррентному соотношению

$$q^m \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m+1 \end{matrix} \right\}_q = q^n \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_q + \binom{n}{1} q^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\}_q + \dots = \sum_k \binom{n}{k} q^k \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\}_q.$$

- c) Найдите производящую функцию для $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_q$, обобщающую формулы 1.2.9–(23) и 1.2.9–(28).

31. [HM23] Обобщая (15), покажите, что элементы треугольника Пирса имеют простую производящую функцию, если вычислить сумму

$$\sum_{n,k} \varpi_{nk} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}.$$

32. [M22] Пусть δ_n равно количеству ограниченно растущих строк $a_1 \dots a_n$, у которых сумма $a_1 + \dots + a_n$ четна, минус количество строк, у которых эта сумма нечетна. Докажите, что

$$\delta_n = (1, 0, -1, -1, 0, 1) \quad \text{при } n \bmod 6 = (1, 2, 3, 4, 5, 0).$$

Указание: см. упражнение 28 (е).

33. [M21] Сколько имеется разбиений множества $\{1, 2, \dots, n\}$, у которых $1 \not\equiv 2, 2 \not\equiv 3, \dots, k-1 \not\equiv k$?

34. [14] Поэтические произведения характеризуются *схемами рифм* (rhyme schemes), которые представляют собой разбиения строк строфы, обладающие теми свойствами, что $j \equiv k$ тогда и только тогда, когда строка j рифмуется со строкой k . Например, лимерик обычно представляет собой 5-строчное стихотворение с определенными ритмическими ограничениями и со схемой рифм, описываемой ограниченно растущей строкой 00110.

Какие схемы рифм используются в классических *сонетах* (а) Джиттоне д'Ареццо (около 1270); (б) Петрарки (около 1350); (с) Спенсера (1595); (д) Шекспира (1609); (е) Элизабет Браунинг (1850)?

35. [M21] Пусть ϖ'_n — количество схем n -строчных стихотворений, которые являются “полностью рифмованными”, в том смысле, что каждая строка рифмуется, как минимум, еще с одной. Таким образом, мы имеем $\langle \varpi'_0, \varpi'_1, \varpi'_2, \dots \rangle = \langle 1, 0, 1, 1, 4, 11, 41, \dots \rangle$. Дайте комбинаторное доказательство того, что $\varpi'_n + \varpi'_{n+1} = \varpi_n$.

36. [M22] Продолжая предыдущее упражнение, что собой представляет производящая функция $\sum_n \varpi'_n z^n / n!$?

37. [M18] А.С. Пушкин в своем романе в стихах “Евгений Онегин” (1833) использовал тщательно разработанную структуру клаузул (т.е. стиховых окончаний, состоящих из последнего ударного слога и следующих за ним безударных), основанную не только на “мужских” окончаниях, состоящих из одного ударного слога (стрóй–водóй, старóжыл–давóйл), но и на “женских” окончаниях, состоящих из ударного и следующего за ним безударного слога (пράвил–застáвил, расхóда–гóда).

*Он в том покое поселился, / Где деревенский старожил
Лет сорок с ключницей бранился, / В окно смотрел и мух давил.
Все было просто: пол дубовый, / Два шкафа, стол, диван пуховый,
Нигде ни пятнышка чернил. / Онегин шкафы отворил:
В одном нашел тетрадь расхода, / В другом наливки целый строй,
Кувшины с яблочной водой, / И календарь осьмого года;
Старик, имея много дел, / В иные книги не глядел.*

А.С. Пушкин.
Евгений Онегин

Каждая так называемая онегинская строфа состоит из 14 строк со строгой схемой 01012233455477, причем рифмы являются женскими или мужскими в соответствии с тем, четна ли соответствующая цифра или нечетна. Несколько современных

переводчиков Пушкина сумели выдержать эти правила при переводе на английский и немецкий языки.

*How do I justify this stanza? / These feminine rhymes? My wrinkled muse?
This whole passe extravaganza? / How can I (careless of time) use
The dusty bread molds of Onegin / In the brave bakery of Reagan?
The loaves will surely fail to rise / Or else go stale before my eyes.
The truth is, I can't justify it. / But as no shroud of critical terms
Can save my corpse from boring worms, / I may as well have fun and try it.
If it works, good; and if not, well, / A theory won't postpone its knell.*

— Викрам Сет (Vikram Seth),
Золотые ворота (The Golden Gate) (1986)

14-строчный стих согласно упражнению 35 может иметь любую из $\varpi'_{14} = 24011157$ полных схем рифм. Но сколько имеется схем, если мы получим возможность наложить на каждый блок условие использования женской или мужской рифм?

- **38.** [M30] Пусть σ_k — циклическая перестановка $(1, 2, \dots, k)$. Темой данного упражнения является изучение последовательностей $k_1 k_2 \dots k_n$, именуемых σ -циклами, для которых $\sigma_{k_1} \sigma_{k_2} \dots \sigma_{k_n}$ представляет собой тождественную перестановку. Например, при $n = 4$ имеется 15 σ -циклов, а именно

1111, 1122, 1212, 1221, 1333, 2112, 2121, 2211, 2222, 2323, 3133, 3232, 3313, 3331, 4444.

- Найдите взаимно однозначное соответствие между разбиениями $\{1, 2, \dots, n\}$ и σ -циклами длиной n .
- Сколько σ -циклов длиной n обладают тем свойством, что $1 \leq k_1, \dots, k_n \leq m$ для заданных m и n ?
- Сколько σ -циклов длиной n обладают тем свойством, что $k_i = j$ для заданных i, j и n ?
- Сколько σ -циклов длиной n обладают тем свойством, что $k_1, \dots, k_n \geq 2$?
- Сколько разбиений $\{1, \dots, n\}$ обладают тем свойством, что $1 \not\equiv 2, 2 \not\equiv 3, \dots, n-1 \not\equiv n$ и $n \not\equiv 1$?

39. [HM16] Вычислите $\int_0^\infty e^{-t^{p+1}} t^q dt$, где p и q — неотрицательные целые числа.
Указание: см. упр. 1.2.5–20.

40. [HM20] Предположим, что метод седловой точки используется для оценки $[z^{n-1}] e^{cz}$. В тексте при выводе (21) из (19) $c = 1$. Как должен измениться вывод, если c — произвольная положительная константа?

41. [HM21] Решите предыдущее упражнение при $c = -1$.

42. [HM23] Воспользуйтесь методом седловой точки для оценки $[z^{n-1}] e^{z^2}$ с относительной ошибкой $O(1/n^2)$.

43. [HM22] Обоснуйте замену интеграла в (23) на (25).

44. [HM22] Поясните, как вычислить b_1, b_2, \dots в (26) на основании a_2, a_3, \dots из (25).

► 45. [HM23] Покажите, что в дополнение к (26) имеется также разложение

$$\varpi_n = \frac{e^{e^\xi - 1} n!}{\xi^n \sqrt{2\pi n} (\xi + 1)} \left(1 + \frac{b'_1}{n} + \frac{b'_2}{n^2} + \dots + \frac{b'_m}{n^m} + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \right),$$

где $b'_1 = -(2\xi^4 + 9\xi^3 + 16\xi^2 + 6\xi + 2) / (24(\xi + 1)^3)$.

46. [HM25] Оцените значение ϖ_{nk} в треугольнике Пирса при $n \rightarrow \infty$.

47. [M21] Проанализируйте время работы алгоритма Н.

48. [HM25] Если n не является целым числом, интеграл в (23) может быть взят по контуру Ганкеля для определения обобщенного числа Белла ϖ_x для всех действительных x . Покажите, что, как в (16),

$$\varpi_x = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^x}{k!}.$$

► 49. [HM35] Докажите, что для больших n число ξ , определяемое уравнением (24), равно

$$\ln n - \ln \ln n + \sum_{j,k \geq 0} \binom{j+k}{j+1} \alpha^j \frac{\beta^k}{k!}, \quad \alpha = -\frac{1}{\ln n}, \quad \beta = \frac{\ln \ln n}{\ln n}.$$

► 50. [HM21] Если $\xi(n) e^{\xi(n)} = n$ и $\xi(n) > 0$, то как между собой соотносятся $\xi(k+n)$ и $\xi(n)$?

51. [HM27] Воспользуйтесь методом седловой точки для оценки $t_n = n! [z^n] e^{z+z^2/2}$, количества *инволюций* на n элементах (или разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на блоки, размеры которых не превышают 2).

52. [HM22] *Семиинварианты*, или *кумулянты* (cumulants) распределения вероятностей определяются правилом 1.2.10–(23). Чему равны семиинварианты, когда вероятность того, что случайное целое число равно k , равна (а) $e^{1-e^\xi} \varpi_n \xi^k / k!$; (б) $\sum_j \binom{k}{j} e^{e^{-1}-1-j} / k!$?

► 53. [HM30] Пусть $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ — производящая функция для дискретного распределения вероятностей, сходящаяся при $|z| < 1 + \delta$; итак, коэффициенты p_k неотрицательны, $G(1) = 1$, а среднее и дисперсия равны соответственно $\mu = G'(1)$ и $\sigma^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$. Если X_1, \dots, X_n — независимые случайные переменные с указанным распределением, то вероятность того, что $X_1 + \dots + X_n = m$, равна $[z^m] G(z)^n$ и часто возникает необходимость оценить эту вероятность при m , близком к среднему значению μn .

Будем считать, что $p_0 \neq 0$ и что не существует целого $d > 1$, которое является общим делителем всех индексов k , для которых $p_k \neq 0$; эти предположения означают,

что m не обязано удовлетворять никаким специальным условиям конгруэнтности по модулю d при больших n . Докажите, что

$$[z^{\mu n+r}] G(z)^n = \frac{e^{-r^2/(2\sigma^2 n)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $\mu n + r$ является целым числом. *Указание:* проинтегрируйте $G(z)^n/z^{\mu n+r}$ по окружности $|z| = 1$.

54. [HM20] Пусть α и β определены формулами (40). Покажите, что их арифметическое и геометрическое средние равны соответственно $\frac{\alpha+\beta}{2} = s \coth s$ и $\sqrt{\alpha\beta} = s \operatorname{csch} s$, где $s = \sigma/2$.

55. [HM20] Предложите метод вычисления числа β , требующегося в формуле (43).

► 56. [HM26] Пусть $g(z) = \alpha^{-1} \ln(e^z - 1) - \ln z$ и $\sigma = \alpha - \beta$, как в (37).

a) Докажите, что $(-\sigma)^{n+1} g^{(n+1)}(\sigma) = n! - \sum_{k=0}^n \langle \frac{n}{k} \rangle \alpha^k \beta^{n-k}$; числа Эйлера $\langle \frac{n}{k} \rangle$ определены в разделе 5.1.3.

b) Докажите, что $\frac{\beta}{\alpha} n! < \sum_{k=0}^n \langle \frac{n}{k} \rangle \alpha^k \beta^{n-k} < n!$ для всех $\sigma > 0$. *Указание:* см. упражнение 5.1.3–25.

c) Проверьте неравенство (42).

57. [HM22] С использованием обозначений из (43) докажите, что (a) $n+1-m < 2N$; (b) $N < 2(n+1-m)$.

58. [HM31] Завершите доказательство (43) следующим образом:

a) покажите, что для всех $\sigma > 0$ существует число $\tau \geq 2\sigma$, такое, что τ кратно 2π и $|e^{\sigma+it} - 1|/|\sigma+it|$ монотонно убывает при $0 \leq t \leq \tau$;

b) докажите, что $\int_{-\tau}^{\tau} \exp((n+1)g(\sigma+it)) dt$ приводит к (43);

c) покажите, что соответствующими интегралами по прямолинейным путям $z = t \pm i\tau$, где $-n \leq t \leq \sigma$, и $z = -n \pm it$, где $-\tau \leq t \leq \tau$, можно пренебречь.

► 59. [HM23] Какое предсказание дает (43) для приближенного значения $\left\{ \frac{n}{n} \right\}$?

60. [HM25]

a) Покажите, что частичные суммы в тождестве

$$\left\{ \frac{n}{m} \right\} = \frac{m^n}{m!} - \frac{(m-1)^n}{1!(m-1)!} + \frac{(m-2)^n}{2!(m-2)!} - \dots + (-1)^m \frac{0^n}{m!0!}$$

поочередно приближаются к конечному значению сверху и снизу.

b) Сделайте вывод о том, что

$$\left\{ \frac{n}{m} \right\} = \frac{m^n}{m!} \left(1 - O\left(ne^{-n^\epsilon} \right) \right) \quad \text{при } m \leq n^{1-\epsilon}.$$

c) Выведите аналогичный результат из (43).

61. [HM26] Докажите, что, если $m = n - r$, где $r \leq n^\varepsilon$ и $\varepsilon \leq n^{1/2}$, формула (43) дает

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-r \end{matrix} \right\} = \frac{n^{2r}}{2^r r!} \left(1 + O(n^{2\varepsilon-1}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right).$$

62. [HM40] Докажите строго, что если $\xi e^\xi = n$, то максимум $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ достигается либо при $m = \lfloor e^\xi - 1 \rfloor$, либо при $m = \lceil e^\xi - 1 \rceil$.

► **63.** [M35] (Д. Питман (J. Pitman).) Докажите, что имеется следующий элементарный способ определить максимум чисел Стирлинга, как и многих других величин: предположим, что $0 \leq p_j \leq 1$.

a) Пусть $f(z) = (1 + p_1(z-1)) \dots (1 + p_n(z-1))$ и $a_k = [z^k] f(z)$; таким образом, a_k представляет собой вероятность получить k “орлов” при n независимых подбрасываниях монет с вероятностями выпадения орла p_1, \dots, p_n соответственно. Докажите, что $a_{k-1} < a_k$ при $k \leq \mu = p_1 + \dots + p_n$ и $a_k \neq 0$.

b) Аналогично докажите, что $a_{k+1} < a_k$ при $k \geq \mu$ и $a_k \neq 0$.

c) Если $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ — некоторый ненулевой полином с неотрицательными коэффициентами и n действительными корнями, докажите, что $a_{k-1} < a_k$ при $k \leq \mu$ и $a_{k+1} < a_k$ при $k \geq \mu$, где $\mu = f'(1)/f(1)$. Следовательно, если $a_m = \max(a_0, \dots, a_n)$, то либо $m = \lfloor \mu \rfloor$, либо $m = \lceil \mu \rceil$.

d) Используя гипотезу (c) и полагая $a_j = 0$ при $j < 0$ или $j > n$, покажите, что существуют индексы $s \leq t$, такие, что $a_{k+1} - a_k < a_k - a_{k-1}$ тогда и только тогда, когда $s \leq k \leq t$ (т.е. гистограмма последовательности (a_0, a_1, \dots, a_n) всегда имеет колоколообразный вид).

e) Что говорят полученные результаты о числах Стирлинга?

64. [HM21] Докажите приближенное отношение (50) с использованием (30) и упражнения 50.

► **65.** [HM22] Чему равна дисперсия количества блоков размером k в случайном разбиении множества $\{1, \dots, n\}$?

66. [M46] Какое разбиение числа n дает больше всего разбиений множества $\{1, \dots, n\}$?

67. [HM20] Чему равно среднее и дисперсия M в методе Стама (53)?

68. [20] До каких значений могут вырасти переменные l и b в алгоритме M при генерации всех $p(n_1, \dots, n_m)$ разбиений мультимножества $\{n_1 \cdot 1, \dots, n_m \cdot m\}$?

► **69.** [21] Модифицируйте алгоритм M таким образом, чтобы он выдавал только разбиения не более чем на r частей.

► **70.** [M22] Проанализируйте количество возможных r -блочных разбиений в n -элементных мультимножествах (a) $\{0, \dots, 0, 1\}$; (b) $\{1, 2, \dots, n-1, n-1\}$. Чему равно общее количество разбиений, просуммированное по всем r ?

71. [M20] Сколько разбиений мультимножества $\{n_1 \cdot 1, \dots, n_m \cdot m\}$ состоит ровно из двух частей?
72. [M26] Можно ли вычислить $p(n, n)$ за полиномиальное время?
- 73. [M32] Можно ли вычислить за полиномиальное время $p(2, \dots, 2)$ (всего n двоек)?
74. [M46] Можно ли вычислить за полиномиальное время $p(n, \dots, n)$ (всего n значений n)?
75. [HM41] Найдите асимптотическое значение $p(n, n)$.
76. [HM36] Найдите асимптотическое значение $p(2, \dots, 2)$ (всего в скобках n двоек).
77. [HM46] Найдите асимптотическое значение $p(n, \dots, n)$ (всего в скобках n значений n).
78. [20] Какие разбиения $(15, 10, 10, 11)$ приводят к перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 , показанным в табл. 1?
79. [22] Последовательность u_1, u_2, u_3, \dots называется *универсальной* для разбиений множества $\{1, \dots, n\}$, если ее подпоследовательности $(u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{m+n})$ при $0 \leq m < \varpi_n$ представляют все возможные разбиения множества с выполнением соглашения “ $j \equiv k$ тогда и только тогда, когда $u_{m+j} = u_{m+k}$ ”. Например, $(0, 0, 0, 1, 0, 2, 2)$ — универсальная последовательность для разбиений множества $\{1, 2, 3\}$.
- Напишите программу для поиска всех универсальных последовательностей разбиений множества $\{1, 2, 3, 4\}$ с такими свойствами:
- i) $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$;
 - ii) последовательность обладает свойством ограниченного роста;
 - iii) $0 \leq u_j \leq 3$; и
 - iv) $u_{16} = u_{17} = u_{18} = 0$ (т.е. последовательность, по существу, циклична).
80. [M28] Докажите, что универсальные циклы для разбиений $\{1, 2, \dots, n\}$ существуют в смысле предыдущего упражнения при $n \geq 4$.
81. [29] Найдите способ так сложить обычную колоду из 52 карт, чтобы был возможен следующий фокус. Пять игроков по очереди снимают колоду (выполняя циклическую перестановку) столько раз, сколько хотят. Затем каждый игрок берет по одной карте с вершины колоды. Фокусник говорит им, чтобы они взглянули на свои карты и образовали аффинную группу, объединив карты с другими обладателями той же масти (валет пик, однако, рассматривается как “джокер” — его владелец остается в одиночестве).
- Увидев аффинные группы, но ничего не зная об их масти, фокусник, тем не менее, может назвать все пять карт (если изначально они были сложены в колоду соответствующим образом).

82. [22] Сколькими способами можно разделить следующие 15 костей домино (возможно, перевернув часть из них) на три части по пять костей в каждой, чтобы суммы частей (рассматривая кости как дроби) были одинаковы?

Ответы к упражнениям

Раздел 7.2.1.3

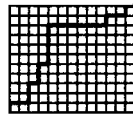
1. Для данного мультисочетания сформируем последовательность $e_t \dots e_2 e_1$ путем перечисления справа налево сначала несовпадающих элементов, затем элементов, встречающихся дважды, потом трижды и т.д. Установим $e_{-j} \leftarrow s-j$ для $0 \leq j \leq s = n-t$ так, что каждый элемент e_j для $1 \leq j \leq t$ равен некоторому элементу справа от него в последовательности $e_t \dots e_1 e_0 \dots e_{-s}$. Если первый такой элемент равен e_{c_j-s} , мы получаем решение (3). И наоборот: каждое решение (3) дает единственное мультисочетание $\{e_1, \dots, e_t\}$, потому что $c_j < s+j$ для $1 \leq j \leq t$.

[Подобное соответствие было предложено Э. Каталаном (E. Catalan): если $0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_t \leq s$, то примем

$$\{c_1, \dots, c_t\} = \{e_1, \dots, e_t\} \cup \{s+j \mid 1 \leq j < t \text{ и } e_j = e_{j+1}\}.$$

См. *Memoires de la Soc. roy. des Sciences de Liege* (2), **12** (1885), *Mélanges Math.*, 3.]

2. Начнем с нижнего левого угла; затем будем идти вверх при каждом 0 и вправо — при каждой 1. В результате получим путь



3. В этом алгоритме переменная r представляет собой наименьший положительный индекс, такой, что $q_r > 0$.

F1. [Инициализация.] Установить $q_j \leftarrow 0$ для $1 \leq j \leq t$, и $q_0 \leftarrow s$ (считаем, что $st > 0$).

F2. [Посещение.] Посетить разложение $q_t \dots q_0$. Перейти к шагу F4, если $q_0 = 0$.

F3. [Простой случай.] Установить $q_0 \leftarrow q_0 - 1$, $r \leftarrow 1$ и перейти к шагу F5.

F4. [Сложный случай.] Завершить работу алгоритма при $r = t$. В противном случае установить $q_0 \leftarrow q_r - 1$, $q_r \leftarrow 0$, $r \leftarrow r + 1$.

F5. [Увеличение q_r .] Установить $q_r \leftarrow q_r + 1$ и вернуться к F2. |

[См. *SACM*, **11** (1968), 430; **12** (1969), 187. Задача генерации таких разложений в *уменьшающемся* лексикографическом порядке существенно сложнее.]

4. Можно обратить роль 0 и 1 в (14) так, что $0^{q_t} 10^{q_{t-1}} \dots 10^{q_1} 10^{q_0} = 1^{r_s} 01^{r_{s-1}} 0 \dots 01^{r_1} 01^{r_0}$. Это дает нам

$$\begin{aligned} 0^1 10^0 10^2 10^2 10^4 10^0 10^0 10^0 10^0 10^1 10^0 10^1 10^0 &= \\ &= 1^0 01^2 01^0 01^1 01^0 01^1 01^0 01^0 01^0 01^6 01^2 01^1. \end{aligned}$$

Лексикографический порядок $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ соответствует лексикографическому порядку $r_s \dots r_1 r_0$.

Кстати, имеется также связь мультисочетаний: $\{d_t, \dots, d_1\} = \{r_s \cdot s, \dots, r_0 \cdot 0\}$. Например, $\{10, 10, 8, 6, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0\} = \{0 \cdot 11, 2 \cdot 10, 0 \cdot 9, 1 \cdot 8, 0 \cdot 7, 1 \cdot 6, 0 \cdot 5, 0 \cdot 4, 0 \cdot 3, 6 \cdot 2, 2 \cdot 1, 1 \cdot 0\}$.

5. (а) Установить $x_j = c_j - \lfloor (j-1)/2 \rfloor$ в каждом t -сочетании из $n + \lfloor t/2 \rfloor$. (б) Установить $x_j = c_j + j + 1$ в каждом t -сочетании из $n - t - 2$.

(Аналогичный подход находит все решения (x_t, \dots, x_1) неравенств $x_{j+1} \geq x_j + \delta_j$ для $0 \leq j \leq t$ для заданных значений x_{t+1} , $(\delta_t, \dots, \delta_0)$ и x_0 .)

6. Положим $t > 0$. Мы добираемся до шага Т3, когда $c_1 > 0$, до Т5 — когда $c_2 = c_1 + 1 > 1$, и до Т4 — для тех $2 \leq j \leq t+1$, для которых $c_j = c_1 + j - 1 \geq j$. Таким образом, соответствующие величины равны:

Т1: 1

Т2: $\binom{n}{t}$

Т3: $\binom{n-1}{t}$

Т4: $\binom{n-2}{t-1} + \binom{n-2}{t-2} + \dots + \binom{n-t-1}{0} = \binom{n-1}{t-1}$

Т5: $\binom{n-2}{t-1}$

Т6: $\binom{n-1}{t-1} + \binom{n-2}{t-1} - 1$

7. Процедура немного проще, чем требуется для алгоритма Т. Примем, что $s < t$.

S1. [Инициализация.] Установить $b_j \leftarrow j + n - s - 1$ для $1 \leq j \leq s$; затем установить $j \leftarrow 1$.

S2. [Посещение.] Посетить сочетание $b_s \dots b_2 b_1$. Завершить работу алгоритма, если $j > s$.

S3. [Уменьшение b_j .] Установить $b_j \leftarrow b_j - 1$. Если $b_j < j$, установить $j \leftarrow j + 1$ и вернуться к S2.

S4. [Сброс $b_{j-1} \dots b_1$.] Пока $j > 1$, установить $b_{j-1} \leftarrow b_j - 1$, $j \leftarrow j - 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока j не станет равным 1. Перейти к S2. **■**

(См. С. Дворжак (S. Dvořák), *Сопр. Ж.*, **33** (1990), 188. Заметим, что если $x_k = n - b_k$ при $1 \leq k \leq s$, то этот алгоритм проходит по всем сочетаниям $x_s \dots x_2 x_1$ из $\{1, 2, \dots, n\}$ с $1 \leq x_s < \dots < x_2 < x_1 \leq n$ в *возрастающем* лексикографическом порядке.)

8. А1. [Инициализация.] Установить $a_n \dots a_0 \leftarrow 0^{s+1} 1^t$, $q \leftarrow t$, $r \leftarrow 0$ (мы считаем, что $0 < t < n$).

А2. [Посещение.] Посетить сочетание $a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Если $q = 0$, перейти к шагу А4.

А3. [Замена $\dots 01^q$ на $\dots 101^{q-1}$.] Установить $a_q \leftarrow 1$, $a_{q-1} \leftarrow 0$, $q \leftarrow q - 1$. Затем, если $q = 0$, установить $r \leftarrow 1$. Вернуться к шагу А2.

A4. [Сдвиг блока единиц.] Установить $a_r \leftarrow 0$ и $r \leftarrow r + 1$. Затем, если $a_r = 1$, установить $a_q \leftarrow 1$, $q \leftarrow q + 1$ и повторить шаг A4.

A5. [Перенос влево.] Завершить работу, если $r = n$; в противном случае установить $a_r \leftarrow 1$.

A6. [Нечетно?] Если $q > 0$, установить $r \leftarrow 0$. Вернуться к шагу A2. ▮

На шаге A2 q и r указывают на крайние справа 0 и 1 в $a_{n-1} \dots a_0$ соответственно. Шаги A1, ..., A6 выполняются с частотой $1, \binom{n}{t}, \binom{n-1}{t-1}, \binom{n}{t} - 1, \binom{n-1}{t}, \binom{n-1}{t} - 1$.

9. (а) Первые $\binom{n-1}{t}$ строк начинаются с 0 и имеют $2A_{(s-1)t}$ изменений битов; другие $\binom{n-1}{t-1}$ строк начинаются с 1 и имеют $2A_{s(t-1)}$ изменений. А $\nu(01^t 0^{s-1} \oplus 10^s 1^{t-1}) = 2 \min(s, t)$.

(б) Решение 1 (прямое). Пусть $B_{st} = A_{st} + \min(s, t) + 1$. Тогда

$$B_{st} = B_{(s-1)t} + B_{s(t-1)} + [s = t] \text{ при } st > 0; \quad B_{st} = 1 \text{ при } st = 0.$$

Следовательно,

$$B_{st} = \sum_{k=0}^{\min(s,t)} \binom{s+t-2k}{s-k}.$$

Если $s \leq t$, то эта величина

$$\leq \sum_{k=0}^s \binom{s+t-k}{s-k} = \binom{s+t+1}{s} = \binom{s+t}{s} \frac{s+t+1}{t+1} < 2 \binom{s+t}{t}.$$

Решение 2 (непрямое). Алгоритм в ответе к упражнению 8 выполняет $2(x+y)$ изменений битов, если шаги (A3, A4) выполняются (x, y) раз. Таким образом,

$$A_{st} \leq \binom{n-1}{t-1} + \binom{n}{t} - 1 < 2 \binom{n}{t}.$$

[Таким образом, комментарий в ответе 7.2.1.1–3 применим и сочетаниям.]

10. Каждый сценарий соответствует $(4, 4)$ -сочетанию $b_4 b_3 b_2 b_1$ или $c_4 c_3 c_2 c_1$, в котором А побеждает в играх $\{8 - b_4, 8 - b_3, 8 - b_2, 8 - b_1\}$, а N побеждает в играх $\{8 - c_4, 8 - c_3, 8 - c_2, 8 - c_1\}$, поскольку мы можем считать, что проигравшая команда побеждает в оставшихся играх в серии из 8 игр. (Или, что то же самое, мы можем сгенерировать все перестановки $\{A, A, A, A, N, N, N, N\}$ и опустить завершающие серии А и N.) Американская лига побеждает тогда и только тогда, когда $b_1 \neq 0$, что, в свою очередь, выполняется тогда и только тогда, когда $c_1 = 0$. Формула

$$\binom{c_4}{4} + \binom{c_3}{3} + \binom{c_2}{2} + \binom{c_1}{1}$$

позволяет назначить каждому сценарию уникальный номер от 0 до 69.

Например:

$$ANANA \Leftrightarrow a_7 \dots a_1 a_0 = 01010011 \Leftrightarrow b_4 b_3 b_2 b_1 = 7532 \Leftrightarrow c_4 c_3 c_2 c_1 = 6410,$$

и этот сценарий имеет ранг

$$\binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1} = 19$$

в лексикографическом порядке. (Заметим, что член $\binom{c_j}{j}$ равен нулю тогда и только тогда, когда он соответствует завершающему N.)

11. АААА (9 раз), NNNN (8 раз) и ANAAA (7 раз) встречались наиболее часто. Из 70 возможных серий 27 не встречались ни разу, включая все четыре варианта, начинающиеся с NNNA. Сценарий NNAAANN встретился первый раз в 2001 году.

12. (а) Пусть V_j — подпространство $\{a_{n-1} \dots a_0 \in V \mid a_k = 0 \text{ для } 0 \leq k < j\}$, так что $\{0 \dots 0\} = V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \dots \subseteq V_0 = V$. Тогда $\{c_1, \dots, c_t\} = \{c \mid V_c \neq V_{c+1}\}$ и α_k — единственный элемент $a_{n-1} \dots a_0$ из V с $a_{c_j} = [j = k]$ для $1 \leq j \leq t$.

Кстати, матрица размером $t \times n$, соответствующая каноническому базису, называется *приведенной к построчно-эшелонному виду*. Ее можно получить при помощи стандартного алгоритма “триангуляризации” (см. упражнение 4.6.1–19 и алгоритм 4.6.2N).

(б) 2-номиальный коэффициент $\binom{n}{t}_2 = 2^t \binom{n-1}{t}_2 + \binom{n-1}{t-1}_2$ из упражнения 1.2.6–58 обладает требуемыми свойствами, поскольку $2^t \binom{n-1}{t}_2$ бинарных векторных пространств имеют $c_t < n - 1$ и $\binom{n-1}{t-1}_2$ имеют $c_t = n - 1$. [Вообще говоря, количество канонических базисов с r звездочками равно количеству разбиений r на не более чем t частей, причем никакая часть не превосходит $n - t$, и это количество равно $[z^r] \binom{n}{t}_2$ согласно формуле 7.2.1.4–(51). См. D.E. Knuth, *J. Combinatorial Theory*, **10** (1971), 178–180.]

(с) В приведенном далее алгоритме предполагается, что $n > t > 0$ и что $a_{(t+1)j} = 0$ для $t \leq j \leq n$.

V1. [Инициализация.] Установить $a_{kj} \leftarrow [j = k - 1]$ для $1 \leq k \leq t$ и $0 \leq j < n$. Установить также $q \leftarrow t$, $r \leftarrow 0$.

V2. [Посещение.] (В этот момент мы имеем $a_{k(k-1)} = 1$ для $1 \leq k \leq q$, $a_{(q+1)q} = 0$ и $a_{1r} = 1$.) Посетить канонический базис $(a_{1(n-1)} \dots a_{11}a_{10}, \dots, a_{t(n-1)} \dots a_{t1}a_{t0})$. Перейти к шагу V4, если $q > 0$.

V3. [Поиск блока единиц.] Устанавливать $q \leftarrow 1, 2, \dots$, пока не выполнится условие $a_{(q+1)(q+r)} = 0$. Завершить работу алгоритма, если $q + r = n$.

V4. [Добавление 1 к столбцу $q + r$.] Установить $k \leftarrow 1$. Если $a_{k(q+r)} = 1$, установить $a_{k(q+r)} \leftarrow 0$, $k \leftarrow k + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не выполнится условие $a_{k(q+r)} = 0$. Затем, если $k \leq q$, установить $a_{k(q+r)} \leftarrow 1$; в противном случае установить $a_{q(q+r)} \leftarrow 1$, $a_{q(q+r-1)} \leftarrow 0$, $q \leftarrow q - 1$.

V5. [Сдвиг блока вправо.] Если $q = 0$, установить $r \leftarrow r + 1$. В противном случае, если $r > 0$, установить $a_{k(k-1)} \leftarrow 1$ и $a_{k(r+k-1)} \leftarrow 0$ для $1 \leq k \leq 1$, затем установить $r \leftarrow 0$. Перейти к шагу V2. ▮

Шаг V2 находит $q > 0$ с вероятностью $1 - (2^{n-t} - 1) / (2^n - 1) \approx 1 - 2^{-t}$, так что можно сэкономить время, рассматривая этот случай отдельно.

(d) Поскольку

$$999\,999 = 4 \binom{8}{4}_2 + 16 \binom{7}{4}_2 + 5 \binom{6}{3}_2 + 5 \binom{5}{3}_2 + 8 \binom{4}{3}_2 + 0 \binom{3}{2}_2 + 4 \binom{2}{2}_2 + 1 \binom{1}{1}_2 + 2 \binom{0}{1}_2,$$

миллионное посещение дает бинарные столбцы 4, 16/2, 5, 5, 8/2, 0, 4/2, 1, 2/2, т.е.

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1, \\ \alpha_2 &= 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0, \\ \alpha_3 &= 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0, \\ \alpha_4 &= 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.\end{aligned}$$

[Источник: E. Calabi and H.S. Wilf, *J. Combinatorial Theory*, **A22** (1977), 107–109.]

13. Пусть $n = s + t$. Имеется

$$\binom{s-1}{\lceil (r-1)/2 \rceil} \binom{t-1}{\lfloor (r-1)/2 \rfloor}$$

конфигураций, начинающихся с 0, и

$$\binom{s-1}{\lfloor (r-1)/2 \rfloor} \binom{t-1}{\lceil (r-1)/2 \rceil}$$

конфигураций, начинающихся с 1, поскольку конфигурация Изинга, начинающаяся с 0, соответствует разбиению s нулей на $\lceil (r+1)/2 \rceil$ групп и разбиению t единиц на $\lfloor (r+1)/2 \rfloor$ групп. Мы можем сгенерировать все такие пары разбиений и объединить их в конфигурации. [См. E. Ising, *Zeitschrift für Physik*, **31** (1925), 253–258; J.M.S. Simões Pereira, *CACM*, **12** (1969), 562.]

14. Начнем с $l[j] \leftarrow j - 1$ и $r[j - 1] \leftarrow j$ для $1 \leq j \leq n$; $l[0] \leftarrow n$, $r[n] \leftarrow 0$. Чтобы получить следующее сочетание в предположении, что $t > 0$, установим $p \leftarrow s$, если $l[0] > s$; в противном случае $p \leftarrow r[n] - 1$. Завершаем работу алгоритма, если $p \leq 0$; в противном случае устанавливаем $q \leftarrow r[p]$, $l[q] \leftarrow l[p]$ и $r[l[p]] \leftarrow q$. Затем, если $r[q] > s$ и $p < s$, устанавливаем $r[p] \leftarrow r[n]$, $l[r[n]] \leftarrow p$, $r[s] \leftarrow r[q]$, $l[r[q]] \leftarrow s$, $r[n] \leftarrow 0$, $l[0] \leftarrow n$; в противном случае устанавливаем $r[p] \leftarrow r[q]$, $l[r[q]] \leftarrow p$. И наконец, устанавливаем $r[q] \leftarrow p$ и $l[p] \leftarrow q$.

[См. Korsh and Lipschutz, *J. Algorithms* **25** (1997), 321–335, где идея распространена на алгоритм без циклов для перестановок мультимножеств. *Предупреждение*: это упражнение, как и упражнение 7.2.1.1–16, носит в большей степени академический, чем практический характер, поскольку подпрограмма для обхода связанного списка может потребовать использования цикла, который сведет на нет все преимущества генерации без использования цикла.]

15. (Указанный факт верен, поскольку лексикографический порядок $c_t \dots c_1$ соответствует лексикографическому порядку $a_{n-1} \dots a_0$, который представляет собой обратный лексикографический порядок последовательности дополнений $1 \dots 1 \oplus a_{n-1} \dots a_0$.) По теореме L сочетание $c_t \dots c_1$ посещается *перед* тем, как посещаются ровно

$$\binom{b_s}{s} + \dots + \binom{b_2}{2} + \binom{b_1}{1}$$

других сочетаний, так что должно выполняться

$$\binom{b_s}{s} + \dots + \binom{b_1}{1} + \binom{c_t}{t} + \dots + \binom{c_1}{1} = \binom{s+t}{t} - 1.$$

Общее тождество может быть записано как

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j \binom{j}{x_0 + \dots + x_j} + \sum_{j=0}^{n-1} \bar{x}_j \binom{j}{\bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_j} = \binom{n}{x_0 + \dots + x_{n-1}} - 1,$$

где каждое x_j может быть только 0 или 1, и $\bar{x}_j = 1 - x_j$; это также следует из уравнения

$$x_n \binom{n}{x_0 + \dots + x_n} + \bar{x}_n \binom{n}{\bar{x}_0 + \dots + \bar{x}_n} = \binom{n+1}{x_0 + \dots + x_n} - \binom{n}{x_0 + \dots + x_{n-1}}.$$

16. Поскольку

$$\begin{aligned} 999999 &= \binom{1414}{2} + \binom{1008}{1} = \\ &= \binom{182}{3} + \binom{153}{2} + \binom{111}{1} = \\ &= \binom{71}{4} + \binom{56}{3} + \binom{36}{2} + \binom{14}{1} = \\ &= \binom{43}{5} + \binom{32}{4} + \binom{21}{3} + \binom{15}{2} + \binom{6}{1}, \end{aligned}$$

ответы к упражнению следующие:

- (a) 1414 1008;
- (b) 182 153 111;
- (c) 71 56 36 14;
- (d) 43 32 21 15 6;
- (e) 1000000 999999 ... 2 0.

17. По теореме L n_t — наибольшее целое, такое, что $N \geq \binom{n_t}{t}$; остальные члены образуют представление числа $N - \binom{n_t}{t}$ степени $t - 1$.

Простой последовательный метод для $t > 1$ начинается с $x = 1$, $c = t$ и устанавливает $c \leftarrow c + 1$, $x \leftarrow xc / (c - t)$ ноль или несколько раз, пока не выполнится условие $x > N$. После этого первая фаза завершается установкой $x \leftarrow x(c - t)/c$, $c \leftarrow c - 1$, и мы получаем $x = \binom{c}{t} \leq N < \binom{c+1}{t}$. Установим $n_t \leftarrow c$, $N \leftarrow N - x$. Алгоритм завершает работу установкой $n_1 \leftarrow N$ при $t = 2$; в противном случае установим $x \leftarrow xt/c$, $t \leftarrow t - 1$, $c \leftarrow c - 1$. До тех пор пока $x > N$, устанавливаем $x \leftarrow x(c - t)/c$, $c \leftarrow c - 1$ и повторяем данное действие. Этот метод требует $O(n)$ арифметических операций, если $N < \binom{n}{t}$, так что он вполне подходит для решения поставленной задачи, если только t не слишком мал, а N — не слишком велико.

При $t = 2$ упражнение. 1.2.4–41 говорит нам, что $n_2 = \lfloor \sqrt{2N+2} + \frac{1}{2} \rfloor$. В общем случае n_t равно $\lfloor x \rfloor$, где x — наибольший корень уравнения $x^t = t!N$. Этот корень можно приближенно найти, обращая ряд $y = (x^t)^{1/t} = x - \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{24}(t^2-1)x^{-1} + \dots$, что дает $x = y + \frac{1}{2}(t-1) + \frac{1}{24}(t^2-1)/y + O(y^{-3})$. Если в этой формуле принять $y = (t!N)^{1/t}$, то получается хорошее приближение, после которого мы можем убедиться, что $\binom{\lfloor x \rfloor}{t} \leq N < \binom{\lfloor x \rfloor + 1}{t}$, или выполнить необходимое уточнение. [См. A.S. Fraenkel and M. Mor, *Comp. J.*, **26** (1983), 336–343.]

18. Получится полное бинарное дерево с $2^n - 1$ узлами, с дополнительным узлом наверху наподобие “дерева проигравших” в сортировке выбором с замещением (рис. 63 в разделе 5.4.1). Таким образом, явные связи не являются необходимыми; правый дочерний узел узла k — это $2k + 1$, а левый “братский” узел — $2k$, для $1 \leq k < 2^{n-1}$.

Такое представление биномиального дерева имеет любопытное свойство, заключающееся в том, что узел $k = (0^\alpha 1 \alpha)_2$ соответствует сочетанию, бинарная строка которого $0^\alpha 1 \alpha^R$.

19. Это бинарное представление $\text{post}(1000000)$, где $\text{post}(2^{k+1} - 1) = 2^k$, а $\text{post}(n) = 2^k + \text{post}(n - 2^k + 1)$ при $2^k \leq n < 2^{k+1} - 1$, где $k \geq 0$. Таким образом, искомый узел — 11110100001001000100. [Кстати, представление T_∞ с указателями на “левого ребенка” и “правого брата” представляет собой перевернутую пирамиду.]

20. $f(z) = (1 + z^{w_{n-1}}) \dots (1 + z^{w_1}) / (1 - z)$, $g(z) = (1 + z^{w_0}) f(z)$, $h(z) = z^{w_0} f(z)$.

21. Ранг $c_t \dots c_2 c_1$ равен $\binom{c_t+1}{t} - 1$ минус ранг $c_{t-1} \dots c_2 c_1$. [См. H. Lüneburg, *Abh. Math. Sem. Hamburg*, **52** (1982), 208–227.]

22. Поскольку

$$\begin{aligned} 999999 &= \binom{1415}{2} - \binom{406}{1} = \\ &= \binom{183}{3} - \binom{98}{2} + \binom{21}{1} = \\ &= \binom{72}{4} - \binom{57}{3} + \binom{32}{2} - \binom{27}{1} = \\ &= \binom{44}{5} - \binom{40}{4} + \binom{33}{3} - \binom{13}{2} + \binom{3}{1}, \end{aligned}$$

ответы к упражнению следующие:

(a) 1414 405;

(b) 182 97 21;

(c) 71 56 31 26;

(d) 43 39 32 12 3;

(e) 1000000 999999 999998 999996 ... 0.

23. Имеется $\binom{n-r}{t-r}$ сочетаний с $j > r$, при $r = 1, 2, \dots, t$. (Если $r = 1$, то $c_2 = c_1 + 1$; если $r = 2$, то $c_1 = 0$, $c_2 = 1$; если $r = 3$, то $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_4 = c_3 + 1$ и т.д.) Таким

образом, среднее значение равно $\left(\binom{n}{t} + \binom{n-1}{t-1} + \dots + \binom{n-t}{0} \right) / \binom{n}{t} = \binom{n+1}{t} / \binom{n}{t} = (n+1) / (n+1-t)$. Среднее время работы одного шага приблизительно пропорционально этой величине; таким образом, алгоритм достаточно быстр при малых t , но становится медленным при t , близком к n .

24. В действительности $j_k - 2 \leq j_{k+1} \leq j_k + 1$, когда $j_k \equiv t \pmod{2}$, и $j_k - 1 \leq j_{k+1} \leq j_k + 2$, когда $j_k \not\equiv t$, поскольку R5 выполняется только тогда, когда $c_i = i - 1$ для $1 \leq i < j$.

Таким образом, в конце R2 мы можем добавить “если $j \geq 4$, установить $j \leftarrow j - 1 - [j \text{ нечетно}]$ и перейти к R5”, если t нечетно, и “если $j \geq 3$, установить $j \leftarrow j - 1 - [j \text{ четно}]$ и перейти к R5”, если t четно. В этом случае алгоритм не будет содержать циклов, поскольку R4 и R5 будут выполняться не более чем 2 раза на одно посещение.

25. Положим, что $N > N'$ и $N - N'$ минимально; кроме того, пусть t и c_t — минимальны при этих предположениях. Тогда $c_t > c'_t$.

Если существует элемент $x \notin C \cup C'$, такой, что $0 \leq x < c_t$, отображим каждое t -сочетание из $C \cup C'$ путем замены $j \mapsto j - 1$ для $j > x$; или, если имеется элемент $x \in C \cap C'$, отображим каждое t -сочетание, которое содержит x , на $(t - 1)$ -сочетание, опуская x и заменяя $j \mapsto x - j$ для $j < x$. В любом случае отображение сохраняет чередующийся лексикографический порядок; следовательно, величина $N - N'$ должна превосходить количество сочетаний между образами C и C' . Но c_t — минимально, так что такое x не существует. Следовательно, $t = m$ и $c_t = 2m - 1$.

Теперь если $c'_m < c_m - 1$, мы можем уменьшить $N - N'$ путем увеличения c'_m . Поэтому $c'_m = 2m - 2$, и задача сводится к поиску максимума $\text{rank}(c_{m-1} \dots c_1) - \text{rank}(c'_{m-1} \dots c'_1)$, где ранг вычисляется так, как в (30).

Пусть $f(s, t) = \max(\text{rank}(b_s \dots b_1) - \text{rank}(c_t \dots c_1))$ по всем $\{b_s, \dots, b_1, c_t, \dots, c_1\} = \{0, \dots, s + t - 1\}$. Тогда $f(s, t)$ удовлетворяет любопытному рекуррентному соотношению

$$f(s, 0) = f(0, t) = 0; \quad f(1, t) = t;$$

$$f(s, t) = \binom{s+t-1}{s} + \max(f(t-1, s-1), f(s-2, t)) \text{ если } st > 0 \text{ и } s > 1.$$

Когда $s + t = 2u + 2$, решение становится

$$f(s, t) = \binom{2u+1}{t-1} + \sum_{j=1}^{u-r} \binom{2u+1-2j}{r} + \sum_{j=0}^{r-1} \binom{2j+1}{j}, \quad r = \min(s-2, t-1),$$

с максимумом $f(t-1, s-1)$ при $s \leq t$, и $f(s-2, t)$ при $s \geq t+2$.

Следовательно, минимум $N - N'$ достигается при

$$C = \{2m-1\} \cup \{2m-2-x \mid 1 \leq x \leq 2m-2, \quad x \bmod 4 \leq 1\},$$

$$C' = \{2m-2\} \cup \{2m-2-x \mid 1 \leq x \leq 2m-2, \quad \bmod 4 \geq 2\},$$

и равен $\binom{2m-1}{m-1} - \sum_{k=0}^{m-2} \binom{2k+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{2k}{k-1}$. [См. A.J. van Zanten, *IEEE Trans.*, IT-37 (1991), 1229-1233.]

26. (а) Да: первый элемент $0^{n-\lceil t/2 \rceil} 1^{t \bmod 2} 2^{\lfloor t/2 \rfloor}$, последний — $2^{\lfloor t/2 \rfloor} 1^{t \bmod 2} 0^{n-\lceil t/2 \rceil}$; переходы представляют собой подстроки вида $02^a 1 \leftrightarrow 12^a 0$, $02^a 2 \leftrightarrow 12^a 1$, $10^a 1 \leftrightarrow 20^a 0$, $10^a 2 \leftrightarrow 20^a 1$.

(б) Нет: если $s = 0$, имеется большой переход от $02^t 0^{r-1}$ к $20^r 2^{t-1}$.

27. Следующая процедура выбирает все сочетания $c_1 \dots c_k$ из Γ_n , которые имеют вес $\leq t$. Начнем с $k \leftarrow 0$ и $c_0 \leftarrow n$. Посетим $c_1 \dots c_k$. Если k четно и $c_k = 0$, установим $k \leftarrow k - 1$; если k четно и $c_k > 0$, установим $c_k \leftarrow c_k - 1$, если $k = t$, иначе выполним $k \leftarrow k + 1$ и $c_k \leftarrow 0$. С другой стороны, если k нечетно и $c_k + 1 = c_{k-1}$, установим $k \leftarrow k - 1$ и $c_k \leftarrow c_k + 1$ (но если $k = 0$, завершим работу); если k нечетно и $c_k + 1 < c_{k-1}$, установим $c_k \leftarrow c_k + 1$, если $k = t$, иначе установим $k \leftarrow k + 1$, $c_k \leftarrow c_{k-1}$, $c_{k-1} \leftarrow c_k + 1$. Повторим описанные действия.

(Этот алгоритм без применения циклов приводится к алгоритму из упражнения 7.2.1.1–12б при $t = n$, с небольшими изменениями обозначений.)

28. Истинно. Битовые строки $a_{n-1} \dots a_0 = \alpha\beta$ и $a'_{n-1} \dots a'_0 = \alpha'\beta'$ соответствуют индексным последовательностям $(b_s \dots b_1 = \theta\chi, c_t \dots c_1 = \phi\psi)$ и $(b'_s \dots b'_1 = \theta\chi', c'_t \dots c'_1 = \phi\psi')$, таким, что все строки между $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$ начинаются с α тогда и только тогда, когда все элементы между $\phi\psi$ и $\phi\psi'$ начинаются с ϕ . Например, если $n = 10$, префикс $\alpha = 01101$ соответствует префиксам $\theta = 96$ и $\phi = 875$.

(Условие, что только $c_t \dots c_2 c_1$ находится в облексном порядке, гораздо более слабое. Например, при $t = 1$ каждая такая последовательность находится в облексном порядке.)

29. (а) $-k0^{l+1}$ или $-k0^{l+1} + \pm^m$ или \pm^k при $k, l, m \geq 0$.

(б) Нет, последующий элемент всегда меньше в уравновешенной троичной системе счисления.

(с) Для всех α и всех $k, l, m \geq 0$ имеем $\alpha 0 - k+1 0^l + \pm^m \rightarrow \alpha - +k 0^{l+1} - \pm^m$ и $\alpha + -k 0^{l+1} + \pm^m \rightarrow \alpha 0 + k+1 0^l - \pm^m$; также $\alpha 0 - k+1 0^l \rightarrow \alpha - +k 0^{l+1}$ и $\alpha + -k 0^{l+1} \rightarrow \alpha 0 + k+1 0^l$.

(д) Пусть j -й знак $\alpha_i = (-1)^{a_{ij}}$, и пусть он находится в позиции b_{ij} . Тогда мы имеем $(-1)^{a_{ij} + b_{i(j-1)}} = (-1)^{a_{(i+1)j} + b_{(i+1)(j-1)}}$ для $0 \leq i < k$ и $1 \leq j \leq t$, если положить $b_{i0} = 0$.

(е) Согласно первым трем ответам, α принадлежит некоторой цепочке $\alpha_0 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_k$, где α_k — конечный элемент, не имеющий последующего, α_0 — начальный элемент, не имеющий предшественника. Согласно пункту (д) каждая такая цепочка имеет не более $\binom{s+t}{t}$ элементов. Однако, согласно пункту (а), всего имеется 2^s окончательных строк и $2^s \binom{s+t}{t}$ строк, содержащих s знаков и t нулей; так что k должно быть равно $\binom{s+t}{t} - 1$.

[Источник: SICOMP, 2 (1973), 128–133.]

30. Предположим, что $t > 0$. Начальные строки являются отрицательными окончательными строками. Пусть σ_j — начальная строка $0^t - \tau_j$ для $0 \leq j < 2^{s-1}$, причем k -й символ τ_j для $1 \leq k < s$ представляет собой знак $(-1)^{a_k}$, где j — двоичное число $(a_{s-1} \dots a_1)_2$; таким образом, $\sigma_0 = 0^t - ++ \dots +$, $\sigma_1 = 0^t - + \dots +$, \dots , $\sigma_{2^{s-1}-1} = 0^t - - \dots -$. Пусть ρ_j — окончательная строка, полученная вставкой -0^t после первой (возможно, пустой) серии минусов в τ_j ; таким образом, $\rho_0 = -0^t ++ \dots +$, $\rho_1 = -0^t + \dots +$, \dots , $\rho_{2^{s-1}-1} = - \dots - 0^t$. Пусть также $\sigma_{2^{s-1}} = \sigma_0$ и $\rho_{2^{s-1}} = \rho_0$. Тогда мы можем по индукции доказать, что цепочка, начинающаяся с σ_j , заканчивается ρ_j , если t четно,

и ρ_{j-1} , если t нечетно, при $1 \leq j \leq 2^{s-1}$. Следовательно, цепочка, начинающаяся с $-\rho_j$, заканчивается $-\sigma_j$ или $-\sigma_{j+1}$.

Пусть $A_j(s, t)$ — последовательность (s, t) сочетаний, порожденных отображением цепочки, начинающейся с σ_j , и пусть $B_j(s, t)$ — аналогичная последовательность, порожденная из $-\rho_j$. Тогда для $1 \leq j \leq 2^{s-1}$ обратная последовательность $A_j(s, t)^R$ представляет собой последовательность $B_j(s, t)$ при четном t и $B_{j-1}(s, t)$ при t нечетном. Соответствующие рекуррентные соотношения для $st > 0$ имеют вид

$$A_j(s, t) = \begin{cases} 1A_j(s, t-1), 0A_{\lfloor (2^{s-1}-1-j)/2 \rfloor}(s-1, t)^R, & \text{если } j+t \text{ четно;} \\ 1A_j(s, t-1), 0A_{\lfloor j/2 \rfloor}(s-1, t), & \text{если } j+t \text{ нечетно;} \end{cases}$$

и, когда $st > 0$, все 2^{s-1} этих последовательностей различны.

Последовательность Чейза C_{st} представляет собой $A_{\lfloor 2^s/3 \rfloor}(s, t)$, а $\widehat{C}_{st} = A_{\lfloor 2^{s-1}/3 \rfloor}(s, t)$. Кстати, однородная последовательность K_{st} из (31) представляет собой $A_{2^{s-1}-\lfloor t \text{ четно} \rfloor}(s, t)^R$.

31. (а) $2^{\binom{s+t}{t}-1}$ является решением рекуррентного соотношения $f(s, t) = 2f(s-1, t)f(s, t-1)$ при $f(s, 0) = f(0, t) = 1$.

(б) Рекуррентное соотношение $f(s, t) = (s+1)!f(s, t-1) \cdots f(0, t-1)$ имеет решение

$$(s+1)!^t s!^{\binom{t}{2}} (s-1)!^{\binom{t+1}{3}} \dots 2!^{\binom{s+t-2}{s}} = \prod_{r=1}^s (r+1)!^{\binom{s+t-1-r}{t-2} + [r=s]}.$$

32. (а) Простой формулы, похоже, не существует, но для малых s и t можно подсчитать количества последовательностей посредством вычисления количества облексных путей, которые проходят по всем строкам веса t из заданной начальной точки в заданную конечную точку, выполняя только перемещения со свойством двери-вертушки. Вот общие количества для $s+t \leq 6$:

				1					
					1				
						1			
			1		2		1		
		1		4		4		1	
	1		8		20		8	1	
		1	16		160		160	16	
1			32		2264		17152	2264	
	1			32		2264		32	
		1							1

$f(4, 4) = 95\,304\,112\,865\,280$, $f(5, 5) \approx 5.92646 \times 10^{48}$. [Этот класс генераторов сочетаний был впервые изучен Г. Эрлихом (G. Ehrlich), *JACM*, **20** (1973), 500–513, но он не пытался их сосчитать.]

(б) Расширяя доказательство теоремы N, можно показать, что все такие последовательности или обратные к ним должны проходить от $1^t 0^s$ до $0^a 1^t 0^{s-a}$ для некоторого $1 \leq a \leq s$. Кроме того, количество возможностей n_{sta} для данных s, t и a при $st > 0$ удовлетворяет условию $n_{1t1} = 1$ и соотношению

$$n_{sta} = \begin{cases} n_{s(t-1)1} n_{(s-1)t(a-1)}, & \text{если } a > 1; \\ n_{s(t-1)2} n_{(s-1)t1} + \dots + n_{s(t-1)s} n_{(s-1)t(s-1)}, & \text{если } a = 1 < s. \end{cases}$$

Это рекуррентное соотношение имеет замечательное решение $n_{sta} = 2^{m(s,t,a)}$, где

$$m(s, t, a) = \begin{cases} \binom{s+t-3}{t} + \binom{s+t-5}{t-2} + \dots + \binom{s-1}{2}, & \text{если } t \text{ четно;} \\ \binom{s+t-3}{t} + \binom{s+t-5}{t-2} + \dots + \binom{s}{3} + s - a - [a < s], & \text{если } t \text{ нечетно.} \end{cases}$$

33. Рассмотрим сначала случай $t = 1$: количество близких к идеальным путей от i до $j > i$ равно $f(j - i - [i > 0] - [j < n - 1])$, где $\sum_j f(j) z^j = 1/(1 - z - z^3)$. (По случайному совпадению, та же последовательность $f(j)$ возникает в многофазном слиянии Карона (Caron) для шести лент, табл. 5.4.2-2.) Сумма по $0 \leq i < j < n$ равна $3f(n) + f(n - 1) + f(n - 2) + 2 - n$, и мы должны удвоить ее, чтобы охватить случаи $j > i$.

Когда $t > 1$, мы можем построить $\binom{n}{t} \times \binom{n}{t}$ матриц, которые подскажут нам, сколько облексных последовательностей начинаются и заканчиваются определенными сочетаниями. Элементы этих матриц представляют собой суммы произведений матриц для случая $t - 1$, просуммированные по всем путям типов, рассмотренных для случая $t = 1$. Вот общие количества для $s + t \leq 6$:

			1						1
			1	1					1 1
			1	2	1				1 2 1
		1	6	2	1				1 2 0 1
	1	12	10	2	1				1 2 2 0 1
	1	20	44	10	2	1			1 2 0 0 0 1
	1	34	238	68	10	2	1		1 2 6 0 0 0 1

Здесь в правом треугольнике показаны количества *циклов* $g(s, t)$. Прочие значения включают $f(4, 4) = 17\,736$, $f(5, 5) = 9\,900\,888\,879\,984$, $g(4, 4) = 96$, $g(5, 5) = 30\,961\,456\,320$.

Имеется ровно 10 таких схем при $s = 2$ и $n \geq 4$. Например, когда $n = 7$, они пробегают от 43 210 до 65 431 или 65 432, либо от 54 321 до 65 420 или 65 430, или 65 432, или в обратном порядке.

34. Минимум может быть вычислен, как в предыдущем ответе, но с использованием вместо обычного матричного умножения $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ операции $c_{ij} = \min_k (a_{ik} + b_{kj})$. (Когда $s = t = 5$, облексный путь на рис. 26, e с 49 неидеальными переходами по сути единственный. Имеется облексный цикл для $s = t = 5$, который содержит только 55 неидеальностей.)

35. Из рекуррентных соотношений (35) мы имеем $a_{st} = b_{s(t-1)} + [s > 1][t > 0] + a_{(s-1)t}$, $b_{st} = a_{s(t-1)} + a_{(s-1)t}$. Таким образом, $a_{st} = b_{st} + [s > 1][t \text{ нечетно}]$ и $a_{st} = a_{s(t-1)} + a_{(s-1)t} + [s > 1][t \text{ нечетно}]$. Решение имеет следующий вид:

$$a_{st} = \sum_{k=0}^{t/2} \binom{s+t-2-2k}{s-2} - [s > 1][t \text{ четно}];$$

эта сумма приблизительно равна $(s/(s + 2t)) \binom{s+t}{t}$.

36. Рассмотрим бинарное дерево с корневым узлом (s, t) и с рекурсивно определяемыми поддеревьями с корнями $(s-1, t)$ и $(s, t-1)$, пока $st > 0$; при $st = 0$ узел (s, t) является листом. Тогда дерево с корнем (s, t) имеет $\binom{s+t}{t}$ листьев, соответствующих всем (s, t) -сочетаниям $a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Узлы на уровне l соответствуют префиксам $a_{n-1} \dots a_{n-l}$, а листья на уровне l соответствуют сочетаниям с $r = n - l$.

Любой облексный алгоритм для сочетаний $a_{n-1} \dots a_1 a_0$ соответствует прямому порядку обхода такого дерева, после того как дочерние узлы $\binom{s+t}{s} - 1$ узлов с ветвлениями упорядочены в некотором требуемом порядке; вот почему имеется $2^{\binom{s+t}{t}-1}$ таких облексных схем (упражнение 31, а). Операция $j \leftarrow j+1$ выполняется в точности один раз для каждого узла с ветвлением, а именно после того, как обработаны его дочерние узлы.

Кстати, из упражнения 7.2.1.2-6, а следует, что среднее значение r равно величине $s/(t+1) + t/(s+1)$, которая может представлять собой $\Omega(n)$; таким образом, дополнительное время, необходимое для отслеживания r , теряется не даром.

37. (а) В лексикографическом случае нам не нужно поддерживать таблицу w_j , поскольку a_j активно для $j \geq r$ тогда и только тогда, когда $a_j = 0$. После установки $a_j \leftarrow 1$ и $a_{j-1} \leftarrow 0$ имеется два случая, которые следует рассмотреть при $j > 1$: если $r = j$, установить $r \leftarrow j - 1$; в противном случае установить $a_{j-2} \dots a_0 \leftarrow 0^r 1^{j-1-r}$ и $r \leftarrow j - 1 - r$ (или $r \leftarrow j$, если r было равно $j - 1$).

(б) Теперь переходы, обрабатываемые при $j > 1$, состоят в изменении $a_j \dots a_0$ следующим образом: $01^r \rightarrow 1101^{r-2}$, $010^r \rightarrow 10^{r+1}$, $010^a 1^r \rightarrow 110^{a+1} 1^{r-1}$, $10^r \rightarrow 010^{r-1}$, $110^r \rightarrow 010^{r-1} 1$, $10^a 1^r \rightarrow 0^a 1^{r+1}$; эти шесть случаев легко различимы. Значение r должно изменяться соответствующим образом.

(с) Вновь случай $j = 1$ тривиален. В противном случае $01^a 0^r \rightarrow 101^{a-1} 0^r$; $0^a 1^r \rightarrow 10^a 1^{r-1}$; $101^a 0^r \rightarrow 01^{a+1} 0^r$; $10^a 1^r \rightarrow 0^a 1^{r+1}$; имеется также один неоднозначный случай, который может произойти, только если $a_{n-1} \dots a_{j+1}$ содержит, как минимум, один 0: пусть $k > j$ — минимальное, для которого $a_k = 0$. Тогда $10^r \rightarrow 010^{r-1}$, если k нечетно, и $10^r \rightarrow 0^r 1$, если k четно.

38. Годится тот же алгоритм С с небольшими отличиями. 1) Шаг С1 устанавливает $a_{n-1} \dots a_0 \leftarrow 01^t 0^{s-1}$, если n нечетно или $s = 1$, $a_{n-1} \dots a_0 \leftarrow 001^t 0^{s-2}$, если n четно и $s > 1$, и соответствующее значение r . 2) Шаг С3 меняет роли четных и нечетных значений. 3) Шаг С5 переходит к шагу С4 и при $j = 1$.

39. В общем случае работа начинается с $r \leftarrow 0$, $j \leftarrow s + t - 1$, и до тех пор, пока не будет выполнено условие $st = 0$, повторяются следующие действия:

$$r \leftarrow r + [w_j = 0] \binom{j}{s - a_j}, s \leftarrow s - [a_j = 0], t \leftarrow t - [a_j = 1], j \leftarrow j - 1.$$

Тогда r представляет собой ранг $a_{n-1} \dots a_1 a_0$. Так что ранг

$$11001001000011111101101010$$

равен

$$\begin{aligned} & \binom{23}{12} + \binom{22}{11} + \binom{21}{9} + \binom{17}{8} + \binom{16}{7} + \binom{14}{5} + \binom{13}{3} + \binom{12}{3} + \\ & + \binom{11}{3} + \binom{10}{3} + \binom{9}{3} + \binom{8}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{1} + \binom{1}{0} = 2\,390\,131. \end{aligned}$$

40. Начнем с $N \leftarrow 999\,999$, $v \leftarrow 0$ и будем повторять следующие шаги до выполнения условия $st = 0$: если $v = 0$, установить $t \leftarrow t - 1$ и $a_{s+t} \leftarrow 1$, если $N < \binom{s+t-1}{s}$; в противном случае установить $N \leftarrow N - \binom{s+t-1}{s}$, $v \leftarrow (s+t) \bmod 2$, $s \leftarrow s - 1$, $a_{s+t} \leftarrow 0$. Если $v = 1$, установить $v \leftarrow (s+t) \bmod 2$, $s \leftarrow s - 1$ и $a_{s+t} \leftarrow 0$, если $N < \binom{s+t-1}{t}$; в противном случае установить $N \leftarrow N - \binom{s+t-1}{t}$, $t \leftarrow t - 1$, $a_{s+t} \leftarrow 1$. Наконец, если $s = 0$, установить $a_{t-1} \dots a_0 \leftarrow 1^t$; если $t = 0$, установить $a_{s-1} \dots a_0 \leftarrow 0^s$. Окончательный ответ — $a_{25} \dots a_0 = 11101001111110101001000001$.

41. Пусть $c(0), \dots, c(2^n - 1) = C_n$, где $C_{2n} = 0C_{2n-1}, 1C_{2n-1}$; $C_{2n+1} = 0C_{2n}, 1\widehat{C}_{2n}$; $\widehat{C}_{2n} = 1C_{2n-1}, 0\widehat{C}_{2n-1}$; $\widehat{C}_{2n+1} = 1\widehat{C}_{2n}, 0\widehat{C}_{2n}$; $C_0 = \widehat{C}_0 = \varepsilon$. Тогда $a_j \oplus b_j = b_{j+1} \& (b_{j+2} | (b_{j+3} \& (b_{j+4} | \dots)))$, если j четно, и $b_{j+1} | (b_{j+2} \& (b_{j+3} | (b_{j+4} \& \dots)))$, если j нечетно. Любопытно, что мы получаем также обратное соотношение $c((\dots a_4 \bar{a}_3 a_2 \bar{a}_1 a_0)_2) = (\dots b_4 \bar{b}_3 b_2 \bar{b}_1 b_0)_2$.

42. Уравнение (40) показывает, что левый контекст $a_{n-1} \dots a_{l+1}$ не влияет на поведение алгоритма для $a_{l-1} \dots a_0$, если $a_l = 0$ и $l > r$. Следовательно, мы можем проанализировать алгоритм С путем подсчета сочетаний, завершающихся определенным битовым шаблоном, и отсюда следует, что количество выполнений каждой операции может быть представлено как $[w^s z^t] p(w, z) / (1 - w^2)^2 (1 - z^2)^2 (1 - w - z)$ при подходящем многочлене $p(w, z)$.

Например, алгоритм переходит от С5 к С4 по одному разу для каждого сочетания, которое оканчивается на $01^{2a+1}01^{2b+1}$ или имеет вид $1^{a+1}01^{2b+1}$ для целых $a, b \geq 0$; соответствующие производящие функции — $w^2 z^2 / (1 - z^2)^2 (1 - w - z)$ и $w(z^2 + z^3) / (1 - z^2)^2$.

Вот как выглядят многочлены $p(w, z)$ для ключевых операций. Здесь $W = 1 - w^2$, $Z = 1 - z^2$.

$$\begin{aligned}
 C3 \rightarrow C4 &: wzW(1 + wz)(1 - w - z^2); \\
 C3 \rightarrow C5 &: wzW(w + z)(1 - wz - z^2); \\
 C3 \rightarrow C6 &: w^2 z^2 W(w + z); \\
 C3 \rightarrow C7 &: w^2 z W(1 + wz); \\
 C4(j = 1) &: wzW^2 Z(1 - w - z^2); \\
 C4(r \leftarrow j - 1) &: w^3 z W Z(1 - w - z^2); \\
 C4(r \leftarrow j) &: wz^2 W^2(1 + z - 2wz - z^2 - z^3); \\
 C5 \rightarrow C4 &: wz^2 W^2(1 - wz - z^2); \\
 C5(r \leftarrow j - 2) &: w^4 z W Z(1 - wz - z^2); \\
 C5(r \leftarrow 1) &: w^2 z W^2 Z(1 - wz - z^2); \\
 C5(r \leftarrow j - 1) &: w^2 z^3 W^2(1 - wz - z^2); \\
 C6(j = 1) &: w^2 z W^2 Z; \\
 C6(r \leftarrow j - 1) &: w^2 z^3 W^2; \\
 C6(r \leftarrow j) &: w^3 z^2 W Z; \\
 C7 \rightarrow C6 &: w^2 z W^2;
 \end{aligned}$$

$$C7(r \leftarrow j) : w^4 z W Z;$$

$$C7(r \leftarrow j - 2) : w^3 z^2 W^2.$$

Асимптотическое значение равно $\binom{s+t}{t} \left(p(1-x, x) / (2x-x^2)^2 (1-x^2)^2 + O(n^{-1}) \right)$ для фиксированного $0 < x < 1$, если $t = xn + O(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы находим, например, что четыре пути ветвления на шаге СЗ имеют относительные частоты $x + x^2 - x^3 : 1 : x : 1 + x - x^2$.

Кстати, количество случаев нечетного j превосходит количество случаев четного j на

$$\sum_{k, l \geq 1} \binom{s+t-2k-2l}{s-2k} [2k+2l \leq s+t] + [s \text{ нечетно}] [t \text{ нечетно}]$$

для любой облексной схемы, использующей метод (39). Эта величина имеет интересную производящую функцию $wz/(1+w)(1+z)(1-w-z)$.

43. Тождество истинно для всех неотрицательных целых x , за исключением $x = 1$. (Кстати, $s(x) = f(x) \oplus 1$ и $p(x) = f(x \oplus 1)$, где $f(x) = (x-1) + ((x \& 1) \ll 1)$.)

44. В действительности $C_t(n) = \widehat{C}_t(n-1)^R$ и $\widehat{C}_t(n) - 1 = C_t(n-1)^R$. (Следовательно, $C_t(n) - 2 = C_t(n-2)$ и т.д.)

45. В приведенном далее алгоритме r — наименьший индекс, для которого $c_r \geq r$.

СС1. [Инициализация.] Установить $c_j \leftarrow n - t - 1 + j$ и $z_j \leftarrow 0$ для $1 \leq j \leq t + 1$. Установить также $r \leftarrow 1$. (Считаем, что $0 < t < n$.)

СС2. [Посещение.] Посетить сочетание $c_t \dots c_2 c_1$. Затем установить $j \leftarrow r$.

СС3. [Ветвление.] Перейти к шагу СС5, если $z_j \neq 0$.

СС4. [Попытка уменьшения c_j .] Установить $x \leftarrow c_j + (c_j \bmod 2) - 2$. Если $x \geq j$, установить $c_j \leftarrow x$, $r \leftarrow 1$; иначе если $c_j = j$, установить $c_j \leftarrow j - 1$, $z_j \leftarrow c_{j+1} - ((c_{j+1} + 1) \bmod 2)$, $r \leftarrow j$; иначе если $c_j < j$, установить $c_j \leftarrow j$, $z_j \leftarrow c_{j+1} - ((c_{j+1} + 1) \bmod 2)$, $r \leftarrow \max(1, j - 1)$; иначе установить $c_j \leftarrow x$, $r \leftarrow j$. Вернуться к шагу СС2.

СС5. [Попытка увеличения c_j .] Установить $x \leftarrow c_j + 1$. Если $x < z_j$, установить $c_j \leftarrow x$, иначе если $x = z_j$ и $z_{j+1} \neq 0$, установить $c_j \leftarrow x - (c_{j+1} \bmod 2)$; в противном случае установить $z_j \leftarrow 0$, $j \leftarrow j + 1$ и перейти к шагу СС3 (но если $j > t$, завершить работу алгоритма). Если $c_1 > 0$, установить $r \leftarrow 1$; в противном случае установить $r \leftarrow j - 1$. Вернуться к шагу СС2. **■**

46. Из уравнения (40) следует, что $u_k = (b_j + k + 1) \bmod 2$, где j — минимальное значение, при котором выполняется условие $b_j > k$. Тогда (37) и (38) дают следующий алгоритм, в котором для удобства полагается, что $3 \leq s < n$.

СВ1. [Инициализация.] Установить $b_j \leftarrow j - 1$ для $1 \leq j \leq s$; установить также $z \leftarrow s + 1$, $b_z \leftarrow 1$. (Когда последующие шаги проверяют значение z , оно представляет собой наименьший индекс такой, что $b_z \neq z - 1$.)

СВ2. [Посещение.] Посетить дуальное сочетание $b_s \dots b_2 b_1$.

СВ3. [Ветвление.] Если b_2 нечетно: перейти к шагу СВ4, если $b_2 \neq b_1 + 1$, в противном случае перейти к шагу СВ5, если $b_1 > 0$, в противном случае перейти к шагу СВ6, если b_z нечетно. Перейти к шагу СВ9, если b_2 четно и $b_1 > 0$. В противном случае перейти к шагу СВ8, если $b_{z+1} = b_z + 1$, в противном случае перейти к шагу СВ7.

СВ4. [Увеличение b_1 .] Установить $b_1 \leftarrow b_1 + 1$ и вернуться к шагу СВ2.

СВ5. [Смещение b_1 и b_2 .] Если b_3 нечетно, установить $b_1 \leftarrow b_1 + 1$ и $b_2 \leftarrow b_2 + 1$; в противном случае установить $b_1 \leftarrow b_1 - 1$ и $b_2 \leftarrow b_2 - 1$, $z \leftarrow 3$. Перейти к СВ2.

СВ6. [Смещение влево.] Если z нечетно, установить $z \leftarrow z - 2$, $b_{z+1} \leftarrow z + 1$, $b_z \leftarrow z$; в противном случае установить $z \leftarrow z - 1$, $b_z \leftarrow z$. Перейти к шагу СВ2.

СВ7. [Смещение b_z .] Если b_{z+1} нечетно, установить $b_z \leftarrow b_z + 1$ и завершить работу при $b_z \geq n$; в противном случае установить $b_z \leftarrow b_z - 1$, затем, если $b_z < z$, установить $z \leftarrow z + 1$. Перейти к шагу СВ2.

СВ8. [Смещение b_z и b_{z+1} .] Если b_{z+2} нечетно, установить $b_z \leftarrow b_{z+1}$, $b_{z+1} \leftarrow b_z + 1$ и завершить работу, если $b_{z+1} \geq n$. В противном случае установить $b_{z+1} \leftarrow b_z$, $b_z \leftarrow b_z - 1$, затем, если $b_z < z$, установить $z \leftarrow z + 2$. Перейти к шагу СВ2.

СВ9. [Уменьшение b_1 .] Установить $b_1 \leftarrow b_1 - 1$, $z \leftarrow 2$ и вернуться к шагу СВ2. **I**

Обратите внимание, что это алгоритм *без циклов*. Чейз приводит похожую процедуру для последовательности \hat{C}_{st}^R в *Cong. Num.*, **69** (1989), 233–237. Удивительно, что этот алгоритм определяет точное дополнение индексов $c_t \dots c_1$, полученных при помощи алгоритма из предыдущего упражнения.

47. Мы можем, например, использовать алгоритм С и обратный к нему (упражнение 38) с заменой w_j d -битовым числом, биты которого представляют активность на разных уровнях рекурсии. Для отслеживания r -значений на каждом уровне требуются отдельные указатели r_0, r_1, \dots, r_{d-1} . (Возможно множество других решений.)

48. Существуют такие перестановки π_1, \dots, π_M , что k -й элемент Λ_j равен $\pi_k \alpha_j \uparrow \beta_{k-1}$, а $\pi_k \alpha_j$ пробегает все перестановки $\{s_1 \cdot 1, \dots, s_d \cdot d\}$ при изменении j от 0 до $N - 1$.

Историческое примечание: первая публикация однородной схемы двери-вертушки для (s, t) -сочетаний — [Éva Torok, *Matematikai Lapok* **19**, (1968), 143–146], посвященная генерации перестановок мультимножества. Позже многие исследователи опирались на условие однородности при подобных построениях, но данное упражнение показывает, что однородность не является необходимой.

49. Мы имеем $\lim_{z \rightarrow q} (z^{km+r} - 1) / (z^{lm+r} - 1) = 1$ при $0 < r < m$, а при $r = 0$ — $\lim_{z \rightarrow q} (kmz^{km-1}) / (lmz^{lm-1}) = k/l$. Так что мы можем объединить в пары множители числителя $\prod_{n-k < a \leq n} (z^a - 1)$ и знаменателя $\prod_{0 < b \leq k} (z^b - 1)$, когда $a \equiv b \pmod{m}$.

Примечания: Эта формула открыта Г. Оливе (G. Olive) [АММ, **72** (1965), 619]. В частном случае $m = 2$, $q = -1$ второй множитель равен нулю тогда и только тогда, когда n — четно, а k — нечетно. Формула $\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$ выполняется при всех $n \geq 0$, но $\binom{\lfloor n/m \rfloor}{\lfloor k/m \rfloor}$ не всегда равно $\binom{\lfloor n/m \rfloor}{\lfloor (n-k)/m \rfloor}$. Однако в случае, когда $n \bmod m \geq k \bmod m$,

мы имеем $\lfloor k/m \rfloor + \lfloor (n-k)/m \rfloor = \lfloor n/m \rfloor$; в противном случае второй множитель равен нулю.

50. Указанный коэффициент равен нулю, когда $n_1 \bmod m + \dots + n_t \bmod m \geq m$. В противном случае он равен

$$\binom{\lfloor (n_1 + \dots + n_t)/m \rfloor}{\lfloor n_1/m \rfloor, \dots, \lfloor n_t/m \rfloor} \binom{(n_1 + \dots + n_t) \bmod m}{n_1 \bmod m, \dots, n_t \bmod m}_q$$

согласно формуле 1.2.6–(43); здесь каждый верхний индекс равен сумме нижних.

51. Понятно, что все пути проходят между 000111 и 111000, поскольку эти вершины имеют степень 1. Все 14 путей при указанных условиях эквивалентности сводятся к четырем. Путь из (50), эквивалентный самому себе при отражении и обращении, может быть описан дельта-последовательностью $A = 3452132523414354123$; три других класса — $B = 3452541453414512543$, $C = 3452541453252154123$, $D = 3452134145341432543$. Д.Г. Леммер (D.H. Lehmer) открыл путь C [АММ, **72** (1965), Part II, 36–46]; D , по сути, является путем, построенным Идесом (Eades), Хикки (Hickey) и Ридом (Read).

(Кстати, идеальные схемы в действительности не редкость, хотя, похоже, их сложно строить систематически. Для случая $(s, t) = (3, 5)$ имеется 4 050 046 таких схем.)

52. Мы можем считать, что каждый элемент s_j не равен 0 и что $d > 1$. Тогда разница между перестановками с четными и нечетными количествами инверсий равна $\binom{\lfloor (s_0 + \dots + s_d)/2 \rfloor}{\lfloor s_0/2 \rfloor, \dots, \lfloor s_d/2 \rfloor} \geq 2$ в соответствии с упражнением 50, за исключением случая, когда как минимум две из кратностей s_j нечетны.

И обратно: если как минимум две кратности нечетны, обобщенное построение Г. Стаховяка (G. Stachowiak) [SIAM J Discrete Math., **5** (1992), 199–206] показывает, что идеальная схема существует. Его построение применимо к ряду задач топологической сортировки; в частном случае мультимножеств оно дает Гамильтонов цикл во всех случаях при $d > 1$ и нечетном $s_0 s_1$, за исключением случая $d = 2$, $s_0 = s_1 = 1$ и четного s_2 .

53. См. АММ, **72** (1965), Part II, 36–46.

54. В предположении, что $st \neq 0$, Гамильтонов путь существует тогда и только тогда, когда s и t не являются одновременно четными; Гамильтонов цикл существует тогда и только тогда, когда дополнительно ($s \neq 2$ и $t \neq 2$) или $n = 5$. [Т.С. Enns, Discrete Math., **122** (1993), 153–165.]

55. (а) [Решение Аарона Вильямса (Aaron Williams).] Последовательность $0^s 1^t$, W_{st} обладает корректными свойствами, если

$$W_{st} = 0W_{(s-1)t}, 1W_{s(t-1)}, 10^s 1^{t-1} \text{ для } st > 0; W_{0t} = W_{s0} = \emptyset.$$

А вот удивительно эффективная реализация без использования циклов. Полагаем, что $t > 0$.

W1. [Инициализация.] Установить $n \leftarrow s + t$, $a_j \leftarrow 1$ для $0 \leq j < t$ и $a_j \leftarrow 0$ для $t \leq j \leq n$. Установить также $j \leftarrow k \leftarrow t - 1$. (Это трюк, но он работает.)

W2. [Посещение.] Посетить (s, t) сочетание $a_{n-1} \dots a_1 a_0$.

- W3.** [Обнуление a_j .] Установить $a_j \leftarrow 0$ и $j \leftarrow j + 1$.
- W4.** [Простой случай?] Если $a_j = 1$, установить $a_k \leftarrow 1$, $k \leftarrow k + 1$ и вернуться к шагу W2.
- W5.** [Оборот.] Если $j = n$, завершить работу. В противном случае установить $a_j \leftarrow 1$. Затем, если $k > 0$, установить $a_k \leftarrow 1$, $a_0 \leftarrow 0$, $j \leftarrow 1$ и $k \leftarrow 0$. Вернуться к шагу W2. ▮

После второго посещения j — наименьший индекс, для которого $a_j a_{j-1} = 10$, а k — наименьший индекс, для которого $a_k = 0$. Простой случай встречается ровно $\binom{s+t-1}{s} - 1$ раз; условие $k = 0$ на шаге W5 выполняется ровно $\binom{s+t-2}{t} + \delta_{t1}$ раз. Любопытно, что если N имеет комбинаторное представление (57), то сочетание ранга N в алгоритме L имеет ранг $N - t + \binom{n_v}{v-1} + v - 1$ в алгоритме W. [*Lecture Notes in Comp. Sci.*, **3595** (2005), 570–576.]

(b)

SET bits, (1<<t)-1	(В программе предполагается $s > 0$ и $t > 0$.)
1H PUSHJ \$0, Visit	Посещение bits = $(a_{s+t-1} \dots a_1 a_0)_2$.
ADDU \$0, bits, 1; AND \$0, \$0, bits	Установить $\$0 \leftarrow \text{bits} \& (\text{bits} + 1)$.
SUBU \$1, \$0, 1; XOR \$1, \$0, \$1	Установить $\$1 \leftarrow \$0 \oplus (\$0 - 1)$.
ADDU \$0, \$1, 1; AND \$1, \$1, bits	Установить $\$0 \leftarrow \$1 + 1$, $\$1 \leftarrow \$1 \& \text{bits}$.
AND \$0, \$0, bits; ODIF \$0, \$0, 1	Установить $\$0 \leftarrow (\$0 \& \text{bits}) - 1$.
SUBU \$1, \$1, \$0; ADDU bits, bits, \$1	Установить bits $\leftarrow \text{bits} + \$1 - \$0$.
SRU \$0, bits, s+t; PBZ \$0, 1B	Повторять до выполнения условия $a_{s+t} = 1$.

56. [*Discrete Math.*, **48** (1984), 163–171.] Эта задача эквивалентна “гипотезе средних уровней”, которая гласит, что существует путь Грея по всем бинарным строкам длиной $2t - 1$ и весами $\{t - 1, t\}$. В действительности такие строки могут быть сгенерированы при помощи дельта-последовательности специального вида $\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{2t-2}$, в которой элементы α_k представляют собой элемент α_0 , сдвинутый на k позиций по модулю $2t - 1$. Например, при $t = 3$ можно начать с $a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 = 000111$ и повторно выполнять обмены $a_0 \leftrightarrow a_\delta$, где δ пробегает цикл (4134 5245 1351 2412 3523). Известно, что гипотеза средних уровней справедлива для $t \leq 15$ [см. I. Shields and C.D. Savage, *Cong. Num.*, **140** (1999), 161–178.]

57. Да; существует три близких к идеальному облексных решения для всех m , n и t , когда $n \geq m > t$. Одна такая схема с применением обозначений битовых строк представляет собой $1A_{(m-t)(t-1)}0^{n-m}$, $01A_{(m-t)(t-1)}0^{n-m-1}$, \dots , $0^{n-m}1A_{(m-t)(t-1)}$, $0^{n-m+1}1A_{(m-1-t)(t-1)}$, \dots , $0^{n-t}1A_{0(t-1)}$ с использованием последовательности A_{st} из (35).

58. Решите предыдущую задачу с m и n , уменьшенными на $t - 1$, а затем добавьте $j - 1$ к каждому c_j . (Случай a), который особенно прост, вероятно, был известен Черны (Czerny.)

59. Производящая функция $G_{mnt}(z) = \sum g_{mntk} z^k$ для количества аккордов g_{mntk} , достижимых за k шагов от $0^{n-t}1^t$, удовлетворяет уравнениям $G_{mmt}(z) = \binom{m}{t}_z$ и $G_{m(n+1)t}(z) = G_{mnt}(z) + z^{tn-(t-1)m} \binom{m-1}{t-1}_z$, потому что последний член учитывает случаи $c_t = n$ и $c_1 > n - m$. Идеальная схема возможна, только если $|G_{mnt}(-1)| \leq 1$.

Но, если $n \geq m > t \geq 2$, эти условия, в соответствии с (49), выполняются только тогда, когда $m = t + 1$ или $(n - t)t$ нечетно. Таким образом, идеального решения для $t = 4$ и $m > 5$ не существует. (Многие аккорды имеют только двух соседей, когда $n = t + 2$, так что можно легко исключить этот случай. Все случаи с $n \geq m > 5$ и $t = 3$, вероятно, не имеют идеальных путей при четном n .)

60. В приведенном решении используется лексикографический порядок, принимаются меры для того, чтобы среднее количество вычислений на одно посещение было ограниченным. Считаем, что $stm_s \dots m_0 \neq 0$ и $t \leq m_s + \dots + m_1 + m_0$.

Q1. [Инициализация.] Установить $q_j \leftarrow 0$ для $s \geq j \geq 1$, и $x = t$.

Q2. [Распределение.] Установить $j \leftarrow 0$. Затем, пока $x > m_j$, установить $q_j \leftarrow m_j$, $x \leftarrow x - m_j$, $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $x \leq m_j$. В конце установить $q_j \leftarrow x$.

Q3. [Посещение.] Посетить композицию $q_s + \dots + q_1 + q_0$.

Q4. [Выбрать крайние справа единицы.] Если $j = 0$, установить $x \leftarrow q_0 - 1$, $j \leftarrow 1$. Иначе если $q_0 = 0$, установить $x \leftarrow q_j - 1$, $q_j \leftarrow 0$ и $j \leftarrow j + 1$; в противном случае перейти к шагу Q7.

Q5. [Завершение?] Завершить работу алгоритма, если $j > s$. Иначе если $q_j = m_j$, установить $x \leftarrow x + m_j$, $q_j \leftarrow 0$, $j \leftarrow j + 1$ и повторить данный шаг.

Q6. [Увеличение q_j .] Установить $q_j \leftarrow q_j + 1$. Затем, если $x = 0$, установить $q_0 \leftarrow 0$ и вернуться к шагу Q3. (В этом случае $q_{j-1} = \dots = q_0 = 0$.) В противном случае перейти к шагу Q2.

Q7. [Увеличение и уменьшение.] (Сейчас $q_i = m_i$ для $j > i \geq 0$.) Пока $q_j = m_j$, установить $j \leftarrow j + 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $q_j < m_j$ (но завершить работу алгоритма, если $j > s$). Затем установить $q_j \leftarrow q_j + 1$, $j \leftarrow j - 1$, $q_j \leftarrow q_j - 1$. Если $q_0 = 0$, установить $j \leftarrow 1$. Вернуться к шагу Q3. ▮

Например, если $m_s = \dots = m_0 = 9$, то следующей после композиции $3+9+9+7+0+0$ будут $4 + 0 + 0 + 6 + 9 + 9$, $4 + 0 + 0 + 7 + 8 + 9$, $4 + 0 + 0 + 8 + 7 + 9$, ...

61. Пусть $F_s(t) = \emptyset$, если $t < 0$ или $t > m_s + \dots + m_0$; в противном случае пусть $F_0(t) = t$, а

$$F_s(t) = 0 + F_{s-1}(t), 1 + F_{s-1}(t-1)^R, 2 + F_{s-1}(t-2), \dots, m_s + F_{s-1}(t-m_s)^{R^{m_s}},$$

где $s > 0$. Можно показать, что эта последовательность обладает требуемыми свойствами. В действительности она эквивалентна композициям, определенным однородной последовательностью K_{st} из (31) при использовании соответствия из упражнения 4, при наложенных на подпоследовательности ограничениях, которые определяются границами m_s, \dots, m_0 . [См. T. Walsh, *J. Combinatorial Math. and Combinatorial Computing*, **33** (2000), 323–345, где последовательность реализована без применения циклов.]

62. (а) Факторная таблица размером $2 \times n$ с суммами строк r и $c_1 + \dots + c_n - r$ эквивалентна решению $r = a_1 + \dots + a_n$ при $0 \leq a_1 \leq c_1, \dots, 0 \leq a_n \leq c_n$.

(б) Мы можем вычислить ее, последовательно устанавливая $a_{ij} \leftarrow \min(r_i - a_{i1} - \dots - a_{i(j-1)}, c_j - a_{1j} - \dots - a_{(i-1)j})$ для $j = 1, \dots, n$ и $i = 1, \dots, m$. В качестве другого решения можно, если $r_1 \leq c_1$, установить $a_{11} \leftarrow r_1, a_{12} \leftarrow \dots \leftarrow a_{1n} \leftarrow 0$ и работать с остальными строками с c_1 , уменьшенным на r_1 ; если же $r_1 > c_1$, установить $a_{11} \leftarrow c_1, a_{21} \leftarrow \dots \leftarrow a_{m1} \leftarrow 0$ и работать с остальными столбцами с r_1 , уменьшенным на c_1 . Из второго подхода видно, что ненулевыми являются не более $m + n - 1$ элементов. Можно указать и явную формулу

$$a_{ij} = \max(0, \min(r_i, c_j, r_1 + \dots + r_i - c_1 - \dots - c_{j-1}, c_1 + \dots + c_j - r_1 - \dots - r_{i-1})).$$

(с) Получается такая же матрица, как и в пункте (б).

(д) Поменяйте местами левые и правые части в пунктах (б) и (с); в обоих случаях ответ

$$a_{ij} = \max(0, \min(r_i, c_j, r_{i+1} + \dots + r_m - c_1 - \dots - c_{j-1}, c_1 + \dots + c_j - r_i - \dots - r_m)).$$

(е) Давайте выберем, например, построчный порядок. Сгенерируем первую строку так же, как и для ограниченной композиции r_1 с границами (c_1, \dots, c_n) ; для каждой строки (a_{11}, \dots, a_{1n}) сгенерируем оставшиеся строки рекурсивно тем же способом, но с суммами столбцов $(c_1 - a_{11}, \dots, c_n - a_{1n})$. Большинство действий этого алгоритма выполняются только с нижними двумя строками; когда же изменения затрагивают более высокие строки, то строки, идущие за ними, должны быть инициализированы заново.

63. Если a_{ij} и a_{kl} положительны, мы получим другую факторную таблицу путем установки $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - 1, a_{il} \leftarrow a_{il} + 1, a_{kj} \leftarrow a_{kj} + 1, a_{kl} \leftarrow a_{kl} - 1$. Мы хотим показать, что граф G , вершины которого являются факторными таблицами для $(r_1, \dots, r_m; c_1, \dots, c_n)$ и смежны, если они могут быть получены друг из друга при помощи указанного преобразования, имеет Гамильтонов путь.

При $m = n = 2$ граф G представляет собой простой путь. При $m = 2$ и $n = 3$ граф G имеет двухмерную структуру, из которой видно, что каждая вершина является начальной по крайней мере для двух Гамильтоновых путей с разными конечными точками. При $m = 2$ и $n \geq 4$ можно по индукции показать, что граф G имеет Гамильтоновы пути из каждой вершины в любую другую.

При $m \geq 3$ и $n \geq 3$ задачу можно свести от m к $m - 1$ так же, как в ответе к упражнению 62, е, если быть достаточно аккуратным, чтобы не загнать себя в угол. В частности, следует избегать состояний, когда ненулевые элементы в последних двух строках имеют вид $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$ для некоторых $a, b, c > 0$, и когда изменения в строке $m - 2$ приводят к виду $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$. Предыдущий цикл изменений в строках $m - 1$ и m может избежать данной ловушки, если только c не равно 1 и строки не начинаются с $\begin{pmatrix} 0 & a+1 & 0 \\ 1 & b-1 & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 \end{pmatrix}$. Однако этих ситуаций также можно избежать.

(Облексный метод, основанный на упражнении 61, существенно проще и почти всегда требует только четырех изменений на каждом шаге. Однако иногда ему требуется обновить одновременно $2 \min(m, n)$ элементов.)

64. Пусть $x_1 \dots x_s$ — бинарная строка, A — список подкубов, и пусть $A \oplus x_1 \dots x_s$ означает замену цифр (a_1, \dots, a_s) в каждом подкубе A на $(a_1 \oplus x_1, \dots, a_s \oplus x_s)$ слева

направо. Например, $0 * 1 * * 10 \oplus 1010 = 1 * 1 * * 00$. Тогда цикл Грея определяется приведенной далее взаимной рекурсией, поскольку A_{st} дает путь Грея от $0^s *^t$ до $10^{s-1} *^t$, а B_{st} дает путь Грея от $0^s *^t$ до $*01^{s-1} *^{t-1}$ при $st > 0$:

$$A_{st} = 0B_{(s-1)t}, *A_{s(t-1)} \oplus 001^{s-2}, 1B_{(s-1)t}^R;$$

$$B_{st} = 0A_{(s-1)t}, 1B_{(s-1)t} \oplus 010^{s-2}, *A_{s(t-1)} \oplus 1^s.$$

Строки 001^{s-2} и 010^{s-2} при $s < 2$ представляют собой просто 0^s ; A_{s0} — бинарный код Грея; $A_{0t} = B_{0t} = *^t$. (Кстати, несколько более простая конструкция

$$G_{st} = *G_{s(t-1)}, a_t G_{(s-1)t}, a_{t-1} G_{(s-1)t}^R, \quad a_t = t \bmod 2$$

определяет *путь* Грея от $*^t 0^s$ до $a_{t-1} *^t 0^{s-1}$.)

65. Если рассматривать путь P как эквивалентный путям P^R и $P \oplus x_1 \dots x_s$, то общее количество может быть вычислено систематически, как в упражнении 33, со следующими результатами для $s + t \leq 6$:

пути						циклы							
1						1							
		1	1					1	1				
		1	2	1				1	1	1			
	1	3	3	1			1	1	1	1			
	1	5	10	4	1		1	2	1	1	1		
	1	6	36	35	5	1		1	2	3	1	1	1
1	9	310	4630	218	6	1	1	3	46	4	1	1	1

В общем случае имеется $t + 1$ путей при $s = 1$ и $\binom{\lceil s/2 \rceil + 2}{2} - (s \bmod 2)$ при $t = 1$. Циклы при $s \leq 2$ единственны. При $s = t = 5$ имеется приблизительно 6.869×10^{170} путей и 2.495×10^{70} циклов.

66. Пусть $G(n, 0) = \varepsilon$; $G(n, t) = \emptyset$ при $n < t$; пусть также $G(n, t)$ для $1 \leq t \leq n$ представляет собой

$$\hat{g}(0) G(n-1, t), \hat{g}(1) G(n-1, t)^R, \dots,$$

$$\hat{g}(2^t - 1) G(n-1, t)^R, \hat{g}(2^t - 1) G(n-1, t-1),$$

где $\hat{g}(k)$ — t -битовый столбец, содержащий на вершине бинарное число Грея $g(k)$ с наименьшим значащим битом. В этой общей формуле мы неявно добавляем строку нулей под базисом $G(n-1, t-1)$.

Это замечательное правило дает обычный бинарный код Грея при $t = 1$ с пропущенным $0 \dots 00$. Циклический код Грея невозможен, поскольку $\binom{n}{t}_2$ нечетно.

67. Из пути Грея для композиций, соответствующих алгоритму С, вытекает, что существует путь, в котором все переходы имеют вид $0^k 1^l \leftrightarrow 1^l 0^k$, где $\min(k, l) \leq 2$. Возможно, существует цикл, у каждого перехода которого $\min(k, l) = 1$.

68. (a) $\{\emptyset\}$; (b) \emptyset .

69. Наименьшее N , для которого $\kappa_t N < N$, равно $\binom{2t-1}{t} + \binom{2t-3}{t-1} + \dots + \binom{1}{1} + 1 = \frac{1}{2} \left(\binom{2t}{t} + \binom{2t-2}{t-1} + \dots + \binom{0}{0} + 1 \right)$, поскольку $\binom{n}{t-1} \leq \binom{n}{t}$ тогда и только тогда, когда $n \geq 2t - 1$.

70. Из тождества

$$\begin{aligned} \kappa_t \left(\binom{2t-3}{t} + N' \right) - \left(\binom{2t-3}{t} N' \right) &= \\ &= \kappa_t \left(\binom{2t-2}{t} + N' \right) - \left(\binom{2t-2}{t} N' \right) = \\ &= \binom{2t-2}{t} \frac{1}{t-1} + \kappa_{t-1} N' - N' \end{aligned}$$

при $N' < \binom{2t-3}{t}$ можно заключить, что максимум равен $\binom{2t-2}{t} \frac{1}{t} + \binom{2t-4}{t-1} \frac{1}{t-2} + \dots + \binom{2}{2} \frac{1}{1}$, и достигается при 2^{t-1} значениях N при $t > 1$.

71. Пусть C_t — t -клики. Первые $\binom{1414}{t} + \binom{1009}{t-1}$ t -сочетаний, посещаемых алгоритмом L, определяют граф из 1 415 вершин с 1 000 000 ребер. Если значение $|C_t|$ превышает указанное, то $|\partial^{t-2} C_t|$ должно превосходить 1 000 000. Таким образом, единственный граф, определяемый $P_{(1000000)2}$, имеет наибольшее количество t -клик для всех $t \geq 2$.

72. $M = \binom{m_s}{s} + \dots + \binom{m_u}{u}$ для $m_s > \dots > m_u \geq u \geq 1$, где $\{m_s, \dots, m_u\} = \{s+t-1, \dots, n_v\} \setminus \{n_t, \dots, n_{v+1}\}$ (сравните с упражнением 15, которое дает $\binom{s+t}{t} - 1 - N$).

Если $\alpha = a_{n-1}, \dots, a_0$ — битовая строка, соответствующая сочетанию n_t, \dots, n_1 , то v на 1 больше количества завершающих единиц в α , а u — длина крайней справа последовательности нулей. Например, для $\alpha = 1010001111$ получаем $s = 4$, $t = 6$, $M = \binom{8}{4} + \binom{7}{3}$, $u = 3$, $N = 96 + \binom{7}{5}$, $v = 5$.

73. A и B перекрестно пересекающиеся $\Leftrightarrow \alpha \notin U \setminus \beta$ для всех $\alpha \in A$ и $\beta \in B \Leftrightarrow A \cap \partial^{n-s-t} B^- = \emptyset$, где $B^- = \{U \setminus \beta \mid \beta \in B\}$ — множество $(n-t)$ -сочетаний. Поскольку $Q_{Nnt}^- = P_{N(n-t)}$, имеем $|\partial^{n-s-t} B^-| \geq |\partial^{n-s-t} P_{N(n-t)}|$, и $\partial^{n-s-t} P_{N(n-t)} = P_{N's}$, где $N' = \kappa_{s+1} \dots \kappa_{n-t} N$. Таким образом, если A и B перекрестно пересекающиеся, то $M + N' \leq |A| + |\partial^{n-s-t} B^-| \leq \binom{n}{s}$ и $Q_{Mns} \cap P_{N's} = \emptyset$.

И наоборот: если $Q_{Mns} \cap P_{N's} \neq \emptyset$, то имеем $\binom{n}{s} < M + N' \leq |A| + |\partial^{n-s-t} B^-|$, так что A и B не могут быть перекрестно пересекающимися.

74. $|\rho Q_{Nnt}| = \kappa_{n-t} N$ (см. упражнение 94). Кроме того, применяя те же рассуждения, что в (58) и (59), находим $\rho P_{N5} = (n-1) P_{N5} \cup \dots \cup 10 P_{N5} \cup \{543210, \dots, 987654\}$ в данном частном случае; в общем случае $|\rho P_{Nt}| = (n+1-n_t) N + \binom{n_t+1}{t+1}$.

75. Тождество $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{0}$ из 1.2.6-(10) дает другое представление, если $n_v > v$. Но (60) при этом не затрагивается, так как $\binom{n+1}{k-1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} + \dots + \binom{n-k+1}{0}$.

76. Представим $N+1$ путем добавления $\binom{v-1}{v-1}$ к (57); затем воспользуемся предыдущим упражнением для вывода $\kappa_t(N-1) - \kappa_t N = \binom{v-1}{v-2} = v-1$.

77. [D.E. Daykin, *Nanta Math.*, **8**, 2 (1975), 78–83.] Мы работаем с расширенными представлениями $M = \binom{m_t}{t} + \dots + \binom{m_u}{u}$ и $N = \binom{n_t}{t} + \dots + \binom{n_v}{v}$, как и в упражне-

нии 75, называя их *некорректными*, если последний индекс u или v равен 0. Назовем N *гибким*, если оно имеет и корректное и некорректное представление, т.е. если $n_v > v > 0$.

(а) Для данного числа S найдем $M + N$, такие, что $M + N = S$ и $\kappa_t M + \kappa_t N$ минимально; при этом M должно быть велико, насколько это возможно. Если $N = 0$, задача решена. В противном случае данная операция максимума-минимума сохраняет как $M + N$, так и $\kappa_t M + \kappa_t N$, поэтому можно считать, что в корректных представлениях M и N $v \geq u \geq 1$. Если N не гибко, $\kappa_t(M + 1) + \kappa_t(N - 1) = (\kappa_t M + u - 1) + (\kappa_t N - v) < \kappa_t M + \kappa_t N$ согласно упражнению 76. Следовательно, N должно быть гибким. Но тогда можно применить операцию максимума-минимума к M и некорректному представлению N , увеличивая M . Таким образом, получено противоречие.

Это доказательство показывает, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда $MN = 0$ (факт, замеченный в 1927 г. Ф.С. Маколеем (F.S. Macaulay)).

(б) Теперь попытаемся минимизировать $\max(\kappa_t M, N) + \kappa_{t-1} N$ при $M + N = S$, представляя в этот раз N как $\binom{n_{t-1}}{t-1} + \dots + \binom{n_v}{v}$. Если $n_{t-1} < m_t$, можно использовать операцию максимума-минимума. Оставляя m_t неизменным, она сохраняет $M + N$ и $\kappa_t M + \kappa_{t-1} N$, как и соотношение $\kappa_t M > N$. Если $N \neq 0$, как и в случае (а), мы приходим к противоречию, так что можно считать, что $n_{t-1} \geq m_t$.

Если $n_{t-1} \geq m_t$, имеем $N > \kappa_t M$, а также $\lambda_t N > M$; следовательно, $M + N < \lambda_t N + N = \binom{n_{t-1}+1}{t} + \dots + \binom{n_v+1}{v}$ и мы получаем $\kappa_t(M + N) \leq \kappa_t(\lambda_t N + N) = N + \kappa_{t-1} N$.

Наконец, если $n_{t-1} = m_t = a$, положим $M = \binom{a}{t} + M'$ и $N = \binom{a}{t-1} + N'$. Тогда $\kappa_t(M + N) = \binom{a+1}{t-1} + \kappa_{t-1}(M' + N')$, $\kappa_t M = \binom{a}{t-1} + \kappa_{t-1} M'$ и $\kappa_{t-1} N = \binom{a}{t-2} + \kappa_{t-2} N'$. Требуемый результат получается путем индукции по t .

78. [J. Eckhoff and G. Wegner, *Periodica Math. Hung.*, **6** (1975), 137–142; A.J.W. Hilton, *Periodica Math. Hung.*, **10** (1979), 25–30.] Пусть $M = |A_1|$ и $N = |A_0|$; можно считать, что $t > 0$ и $N > 0$. Тогда $|\partial A| = |\partial A_1 \cup A_0| + |\partial A_0| \geq \max(|\partial A_1|, |A_0|) + |\partial A_0| \geq \max(\kappa_t M, N) + \kappa_{t-1} N \geq \kappa_t(M + N) = |P_{|A|t}|$ по индукции по $m + n + t$.

И наоборот: пусть $A_1 = P_{Mt+1}$ и $A_0 = P_{N(t-1)+1}$; эта запись означает, например, что $\{210, 320\} + 1 = \{321, 431\}$. Тогда $\kappa_t(M + N) \leq |\partial A| = |\partial A_1 \cup A_0| + |(\partial A_0) 0| = \max(\kappa_t M, N) + \kappa_{t-1} N$, поскольку $\partial A_1 = P_{(\kappa_t M)(t-1)+1}$. [Шутценбергер в 1959 году заметил, что $\kappa_t(M + N) \leq \kappa_t M + \kappa_{t-1} N$ тогда и только тогда, когда $\kappa_t M \geq N$.]

Перейдем к первому неравенству. Пусть A и B — непересекающиеся множества t -сочетаний, для которых $|A| = M$, $|\partial A| = \kappa_t M$, $|B| = N$, $|\partial B| = \kappa_t N$. Тогда $\kappa_t(M + N) = \kappa_t |A \cup B| \leq |\partial(A \cup B)| = |\partial A \cup \partial B| = |\partial A| + |\partial B| = \kappa_t M + \kappa_t N$.

79. В действительности $\mu_t(M + \lambda_{t-1} M) = M$ и $\mu_t N + \lambda_{t-1} \mu_t N = N + (n_2 - n_1)$ [$v = 1$], если N задается формулой (57).

80. Если $N > 0$ и $t > 1$, представим N в том виде, как это сделано в (57), и пусть $N = N_0 + N_1$, где

$$N_0 = \binom{n_t - 1}{t} + \dots + \binom{n_v - 1}{v}, \quad N_1 = \binom{n_t - 1}{t-1} + \dots + \binom{n_v - 1}{v-1}.$$

Пусть $N_0 = \binom{y}{t}$ и $N_1 = \binom{z}{t-1}$. Тогда по индукции по t и $[x]$ имеем $\binom{x}{t} = N_0 + \kappa_t N_0 \geq \binom{y}{t} + \binom{y}{t-1} = \binom{y+1}{t}$, $N_1 = \binom{x}{t} - \binom{y}{t} \geq \binom{x}{t} - \binom{x-1}{t} = \binom{x-1}{t-1}$, а $\kappa_t N = N_1 + \kappa_{t-1} N_1 \geq \binom{z}{t-1} + \binom{z}{t-2} = \binom{z+1}{t-1} \geq \binom{x}{t-1}$.

[В действительности Ловас доказал более сильное утверждение; см. упражнение 1.2.6–66. Аналогично $\mu_t N \geq \binom{x-1}{t-1}$; см. Björner, Frankl and Stanley, *Combinatorica*, 7 (1987), 27–28.]

81. Например, если наибольший элемент $\widehat{P}_{N5} = 66433$, то

$$\widehat{P}_{N5} = \{00000, \dots, 55555\} \cup \{60000, \dots, 65555\} \cup \{66000, \dots, 66333\} \cup \{66400, \dots, 66433\},$$

так что $N = \binom{10}{5} + \binom{9}{4} + \binom{6}{3} + \binom{5}{2}$. Его нижняя тень,

$$\partial \widehat{P}_{N5} = \{0000, \dots, 5555\} \cup \{6000, \dots, 6555\} \cup \{6600, \dots, 6633\} \cup \{6640, \dots, 6643\},$$

имеет размер $\binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{5}{2} + \binom{4}{1}$.

Если наименьший элемент $\widehat{Q}_{N95} = 66433$, то

$$\widehat{Q}_{N95} = \{99999, \dots, 70000\} \cup \{66666, \dots, 66500\} \cup \{66444, \dots, 66440\} \cup \{66433\},$$

так что $N = (\binom{13}{9} + \binom{12}{8} + \binom{11}{7}) + (\binom{8}{6} + \binom{7}{5}) + \binom{5}{4} + \binom{3}{3}$. Его верхняя тень,

$$\begin{aligned} \partial \widehat{Q}_{N95} = \{999999, \dots, 700000\} \cup \{666666, \dots, 665000\} \cup \\ \cup \{664444, \dots, 664400\} \cup \{664333, \dots, 664330\}, \end{aligned}$$

имеет размер $(\binom{14}{9} + \binom{13}{8} + \binom{12}{7}) + (\binom{9}{6} + \binom{8}{5}) + \binom{6}{4} + \binom{4}{3} = N + \kappa_9 N$. Размер t каждого сочетания, по сути, неважен, пока $N \leq \binom{s}{t}$; например, в рассмотренном нами случае наименьший элемент $\widehat{Q}_{N98} = 99966433$.

82. (а) Производная должна быть равна $\sum_{k>0} r_k(x)$, но этот ряд расходится.

[Говоря неформально, график $\tau(x)$ выглядит как множество “ям” с относительной глубиной 2^{-k} во всех точках, представляющих собой нечетные кратные 2^{-k} . Оригинальная статья Такаги в *Proc. Physico-Math. Soc. Japan*, (2) 1 (1903), 176–177, была переведена на английский язык и опубликована в его *Collected Papers* (Iwanami Shoten, 1973).]

(b) Поскольку $r_k(1-t) = (-1)^{\lceil 2^k t \rceil}$ при $k > 0$, имеем $\int_0^{1-x} r_k(t) dt = \int_x^1 r_k(1-u) du = -\int_x^1 r_k(u) du = \int_0^x r_k(u) du$. Второе уравнение следует из того факта, что $r_k(\frac{1}{2}t) = r_{k-1}(t)$. В пункте (d) показано, что этих двух уравнений достаточно для определения $\tau(x)$ при рациональном x .

(c) Поскольку $\tau(2^{-a}x) = a2^{-a}x + 2^{-a}\tau(x)$ при $0 \leq x \leq 1$, имеем $\tau(\varepsilon) = a\varepsilon + O(\varepsilon)$ при $2^{-a-1} \leq \varepsilon \leq 2^{-a}$. Следовательно, $\tau(\varepsilon) = \varepsilon \lg \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ при $0 < \varepsilon \leq 1$.

(d) Предположим, что $0 \leq p/q \leq 1$. Если $p/q \leq 1/2$, имеем $\tau(p/q) = p/q + \tau(2p/q)/2$; в противном случае $\tau(p/q) = (q-p)/q + \tau(2(q-p)/q)/2$. Следовательно, можно считать, что q нечетно. Пусть в этом случае $p' = p/2$, если p четно, и $p' = (q-p)/2$, если p нечетно. Тогда $\tau(p/q) = 2\tau(p'/q) - 2p'/q$ при $0 < p < q$; эта система $q-1$ уравнений имеет единственное решение. Например, для $q = 3, 4, 5, 6, 7$ получаем значения $2/3, 2/3; 1/2, 1/2, 1/2; 8/15, 2/3, 2/3, 8/15; 1/2, 2/3, 1/2, 2/3, 1/2; 22/49, 30/49, 32/49, 32/49, 30/49, 22/49$.

(e) Решения, меньшие $\frac{1}{2}$: $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{4} - \frac{1}{16}, \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64}, \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{1}{256}, \dots, \frac{1}{6}$.

(f) Значение $\frac{2}{3}$ достигается при $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{32} \pm \frac{1}{128} \pm \dots$, несчетном множестве значений.

83. Для любых данных целых чисел $q > p > 0$ рассмотрим пути, начинающиеся с 0 в диграфе

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \leftarrow & 1 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 3 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & 5 & \leftarrow & \dots \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \\ 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & 5 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Вычислим связанное с путем значение v . Изначально $v \leftarrow -p$; горизонтальные перемещения удваивают v : $v \leftarrow 2v$; вертикальные перемещения из узла a изменяют v следующим образом: $v \leftarrow 2(qa - v)$. Путь завершается, когда дважды достигается узел с одним и тем же значением v . Переход в верхний узел a не разрешен, если в этом узле $v \leq -q$ или $v \geq qa$; в нижний узел a переход запрещен, если в нем $v \leq 0$ или $v \geq q(a + 1)$. Эти ограничения определяют большинство шагов пути. (Узел a в верхней строке означает “Решение уравнения $\tau(x) = ax - v/q$ ”; нижняя строка означает “Решение уравнения $\tau(x) = v/q - ax$ ”). Эмпирические тесты приводят к гипотезе о конечности всех таких путей. Тогда уравнение $\tau(x) = p/q$ имеет решения $x = x_0$, определяемые последовательностью x_0, x_1, x_2, \dots , где $x_k = \frac{1}{2}x_{k+1}$ на горизонтальном шаге и $x_k = 1 - \frac{1}{2}x_{k+1}$ на вертикальном шаге; в конечном итоге $x_k = x_j$ для некоторого $j < k$. Если $j > 0$ и если q не является степенью 2, то это все решения уравнения $\tau(x) = p/q$ при $x > 1/2$.

Например, описанная процедура устанавливает, что $\tau(x) = 1/5$ и $x > 1/2$ только при x , равном $83\,581/87\,040$; единственный путь дает нам $x_0 = 1 - \frac{1}{2}x_1$, $x_2 = \frac{1}{2}x_1$, \dots , $x_{18} = \frac{1}{2}x_{19}$ и $x_{19} = x_{11}$. Аналогично можно определить, что имеется только два значения $x > 1/2$, для которых $\tau(x) = 3/5$, и знаменатели равны $2^{46} (2^{56} - 1)/3$.

Кроме того, похоже, все циклы диграфа, которые проходят через узел 0, определяют значения p и q , такие, что уравнение $\tau(x) = p/q$ имеет несчетное количество решений. Такими значениями, например, являются $2/3$, $8/15$, $8/21$, соответствующие циклам (01), (0121), (012321). Значение $32/63$ соответствует как (012121), так и (012101234545454321), а также еще двум другим путям, не возвращающимся в 0.

84. [Frankl, Matsumoto, Ruzsa and Tokushige, *J. Combinatorial Theory*, **A69** (1995), 125–148.] Если $a \leq b$, имеем

$$\binom{2t-1-b}{t-a} / T = t^a (t-1)^{b-a} / (2t-1)^b = 2^{-b} (1 + f(a, b)t^{-1} + O(b^4/t^2)),$$

где $f(a, b) = a(1+b) - a^2 - b(1+b)/4 = f(a+1, b) - b + 2a$. Следовательно, если N имеет комбинаторное представление (57) и если положить $n_j = 2t - 1 - b_j$, то получим

$$\frac{t}{T} (\kappa_t N - N) = \frac{b_t}{2^{b_t}} + \frac{b_{t-1} - 2}{2^{b_{t-1}}} + \frac{b_{t-2} - 4}{2^{b_{t-2}}} + \dots + \frac{O(\log t)^3}{t}.$$

Этими членами можно пренебречь, когда b_j превышает $2 \lg t$. Можно также показать, что

$$\tau \left(\sum_{j=0}^l 2^{-e_j} \right) = \sum_{j=0}^l (e_j - 2j) 2^{-e_j}.$$

85. В соответствии с (63) $N - \lambda_{t-1}N$ имеет тот же асимптотический вид, что и $\kappa_t N - N$, поскольку $\tau(x) = \tau(1-x)$. То же относится и к $2\mu_t N - N$ с точностью до $O\left(T(\log t)^3/t^2\right)$, так как $\binom{2t-1-b}{t-a} = 2\binom{2t-2-b}{t-a}(1 + O(\log t)/t)$ при $b < 2\lg t$.

86. $x \in X^{\circ\sim} \Leftrightarrow \bar{x} \notin X^\circ \Leftrightarrow \bar{x} \notin X$ или $\bar{x} \notin X + e_1$ или ... или $\bar{x} \notin X + e_n \Leftrightarrow x \in X^\sim$ или $x \in X^\sim - e_1$ или ... или $x \in X^\sim - e_n \Leftrightarrow x \in X^{\sim+}$.

87. Все три утверждения истинны. Воспользуемся тем, что $X \subseteq Y^?$ тогда и только тогда, когда $X^+ \subseteq Y$.

a) $X \subseteq Y^\circ \Leftrightarrow X^\sim \supseteq Y^{\circ\sim} = Y^{\sim+} \Leftrightarrow Y^\sim \subseteq X^{\circ\sim}$.

b) $X^+ \subseteq X^+ \Rightarrow X \subseteq X^{+\circ}$; следовательно, $X^\circ \subseteq X^{\circ+\circ}$. Также $X^\circ \subseteq X^\circ \Rightarrow X^{\circ+} \subseteq X$; следовательно, $X^{\circ+\circ} \subseteq X^\circ$.

c) $\alpha M \leq N \Leftrightarrow S_M^+ \subseteq S_N \Leftrightarrow S_M \subseteq S_N^\circ \Leftrightarrow M \leq \beta N$.

88. Если $vx < vy$, то $v(x - e_k) < v(y - e_j)$, поэтому можно считать, что $vx = vy$ и что $x > y$ в лексикографическом порядке. Должно выполняться условие $y_j > 0$; в противном случае $v(y - e_j)$ превышало бы $v(x - e_k)$. Если $x_i = y_i$ при $1 \leq i \leq j$, понятно, что $k > j$ и $x - e_k \prec y - e_j$. В противном случае $x_i > y_i$ для некоторого $i \leq j$ и мы вновь получаем $x - e_k \prec y - e_j$, если только не выполняется равенство $x - e_k = y - e_j$.

89. Из таблицы

j	$=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$e_j + e_1$	$=$	e_1	e_0	e_4	e_5	e_2	e_3	e_8	e_9	e_6	e_7	e_{11}	e_{10}
$e_j + e_2$	$=$	e_2	e_4	e_0	e_6	e_1	e_8	e_3	e_{10}	e_5	e_{11}	e_7	e_9
$e_j + e_3$	$=$	e_3	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_0	e_{11}	e_1	e_2	e_4

находим $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{12}) = (0, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12)$; $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{12}) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12)$.

90. Пусть $Y = X^+$ и $Z = C_k X$, а также пусть $N_a = |X_k(a)|$ для $0 \leq a < m_k$. Тогда

$$\begin{aligned}
 |Y| &= \sum_{a=0}^{m_k-1} |Y_k(a)| = \\
 &= \sum_{a=0}^{m_k-1} |(X_k(a-1) + e_k) \cup (X_k(a) + E_k(0))| \geq \\
 &\geq \sum_{a=0}^{m_k-1} \max(N_{a-1}, \alpha N_a),
 \end{aligned}$$

где $a - 1$ означает $(a - 1) \bmod m_k$, а функция α получается из $(n - 1)$ -мерного тора, поскольку по индукции $|X_k(a) + E_k(0)| \geq \alpha N_a$. Кроме того,

$$\begin{aligned} |Z^+| &= \sum_{a=0}^{m_k-1} |Z_k^+(a)| = \\ &= \sum_{a=0}^{m_k-1} |(Z_k(a-1) + e_k) \cup (Z_k(a) + E_k(0))| = \\ &= \sum_{a=0}^{m_k-1} \max(N_{a-1}, \alpha N_a), \end{aligned}$$

поскольку как $Z_k(a-1) + e_k$, так и $Z_k(a) + E_k(0)$ — стандартные множества в $n - 1$ измерениях.

91. Пусть в полностью сжатом массиве, где строка 0 находится внизу, имеется N_a точек. Тогда $l = N_{-1} \geq N_0 \geq \dots \geq N_{m-1} \geq N_m = 0$. Покажем сначала, что существует оптимальное значение X , для которого “плохое” условие $N_a = N_{a+1}$ никогда не выполняется, за исключением случаев $N_a = 0$ или $N_a = l$. Если a — наименьший плохой индекс, предположим, что $N_{a-1} > N_a = N_{a+1} = \dots = N_{a+k} > N_{a+k+1}$. Тогда мы всегда можем уменьшить N_{a+k} на 1 и добавить 1 к некоторому N_b ($b \leq a$) без увеличения $|X^+|$, за исключением случаев, когда $k = 1$, $N_{a+2} = N_{a+1} - 1$ и $N_b = N_a + a - b < l$, где $0 \leq b \leq a$. Исследуя эти случаи далее, при $N_{c+1} < N_c = N_{c-1}$ для некоторого $c > a + 1$ можно установить $N_c \leftarrow N_c - 1$ и $N_a \leftarrow N_a + 1$, таким образом либо уменьшая a , либо увеличивая N_0 . В противном случае можно найти такой индекс d , что $N_c = N_{a+1} + a + 1 - c > 0$ для $a < c < d$, и либо $N_d = 0$, либо $N_d < N_{d-1} - 1$. тогда можно уменьшить N_c на 1 для $a < c < d$, после чего увеличить N_b на 1 для $0 \leq b < d - a - 1$. (Важно заметить, что если $N_d = 0$, то $N_0 \geq d - 1$; следовательно, из $d = m$ вытекает $l = m$.)

Повторяя такие преобразования до тех пор, пока не будет выполнено условие $N_a > N_{a+1}$, при этом $N_a \neq l$ и $N_{a+1} \neq 0$, мы достигнем ситуации (86), после чего доказательство может быть завершено так, как это сделано в тексте.

92. Пусть $x + k$ — лексикографически наименьший элемент $T(m_1, \dots, m_{n-1})$, который превышает x и имеет вес $vx + k$ (если такой элемент существует). Например, если $m_1 = m_2 = m_3 = 4$ и $x = 211$, имеем $x + 1 = 212$, $x + 2 = 213$, $x + 3 = 223$, $x + 4 = 233$, $x + 5 = 333$, а $x + 6$ не существует; в общем случае $x + k + 1$ получается из $x + k$ путем увеличения самого правого компонента, который может быть увеличен. Если $x + k = (m_1 - 1, \dots, m_{n-1} - 1)$, положим $x + k + 1 = x + k$. Тогда, если $S(k)$ — множество всех элементов $T(m_1, \dots, m_{n-1})$, которые $\leq x + k$, получаем $S(k + 1) = S(k)^+$. Кроме того, элементы S , заканчивающиеся компонентом a , — те, у которых первые $n - 1$ компонентов находятся в $S(m - 1 - a)$.

Результат этого упражнения можно сформулировать более интуитивным образом: при генерации n -мерных стандартных множеств S_1, S_2, \dots $(n - 1)$ -мерные стандартные множества на всех уровнях становятся размахами друг друга после добавления каждой точки к уровню $m - 1$. Аналогично, они становятся ядрами друг друга перед тем, как каждая точка добавляется к уровню 0.

93. (а) Предположим, что параметрами являются $2 \leq m'_1 \leq m'_2 \leq \dots \leq m'_n$ (в отсортированном порядке), и пусть k — наименьшее значение, для которого $m_k \neq m'_k$.

Тогда получим $N = 1 + \text{rank}(0, \dots, 0, m'_k - 1, 0, \dots, 0)$. (Мы должны считать, что $\min(m_1, \dots, m_n) \geq 2$, поскольку параметры, равные 1, могут быть расположены где угодно.)

(b) Только в доказательстве для $n = 2$, скрытом в ответе к упражнению 91. По индукции это доказательство распространяется и на случаи больших n .

94. Дополнение сохраняет лексикографический порядок и изменяет ϱ на ∂ .

95. Для теоремы К положим $d = n - 1$ и $s_0 = \dots = s_d = 1$. Для теоремы М — $d = s$ и $s_0 = \dots = s_d = t + 1$.

96. В таком представлении N является числом t -мультисочетаний $\{s_0 \cdot 0, s_1 \cdot 1, s_2 \cdot 2, \dots\}$, предшествующих $n_t n_{t-1} \dots n_1$ в лексикографическом порядке, поскольку обобщенный коэффициент $\binom{S(n)}{t}$ дает количество мультисочетаний, крайний левый компонент которых меньше n .

Если мы оборвем представление, остановившись на крайнем справа ненулевом члене $\binom{S(n_v)}{v}$, то получим красивое обобщение (60):

$$|\partial P_{Nt}| = \binom{S(n_t)}{t-1} + \binom{S(n_{t-1})}{t-2} + \dots + \binom{S(n_v)}{v-1}.$$

[См. G.F. Clements, *J. Combinatorial Theory*, **A37** (1984), 91–97. Неравенства $s_0 \geq s_1 \geq \dots \geq s_d$ необходимы для корректности следствия С, но не для вычисления $|\partial P_{Nt}|$. Некоторые члены $\binom{S(n_k)}{k}$ для $t \geq k > v$ могут быть нулевыми. Например, при $N = 1$, $t = 4$, $s_0 = 3$ и $s_1 = 2$ получим $N = \binom{S(1)}{4} + \binom{S(1)}{3} = 0 + 1$.]

97. (a) Тетраэдр имеет четыре вершины, шесть ребер и четыре грани: $(N_0, \dots, N_4) = (1, 4, 6, 4, 1)$. Аналогично, октаэдр имеет $(N_0, \dots, N_6) = (1, 6, 8, 8, 0, 0, 0)$, а икосаэдр — $(N_0, \dots, N_{12}) = (1, 12, 30, 20, 0, \dots, 0)$. Гексаэдр, он же трехмерный куб, имеет восемь вершин, 12 ребер и шесть квадратных граней; смещение разбивает каждый квадрат на два треугольника и вносит новые ребра, так что мы имеем $(N_0, \dots, N_8) = (1, 8, 18, 12, 0, \dots, 0)$. Наконец, смещение вершин, образующих пятиугольные грани додекаэдра, дает нам $(N_0, \dots, N_{20}) = (1, 20, 54, 36, 0, \dots, 0)$.

(b) $\{210, 310\} \cup \{10, 20, 21, 30, 31\} \cup \{0, 1, 2, 3\} \cup \{\varepsilon\}$.

(c) $0 \leq N_t \leq \binom{n}{t}$ для $0 \leq t \leq n$ и $N_{t-1} \geq \kappa_t N_t$ для $1 \leq t \leq n$. Второе условие эквивалентно $\lambda_{t-1} N_{t-1} \geq N_t$ для $1 \leq t \leq n$, если мы определим $\lambda_0 1 = \infty$. Эти условия необходимы по теореме К и достаточны, если $A = \bigcup P_{Nt}$.

(d) Дополнения элементов, не входящих в симплициальный комплекс, а именно множества $\{\{0, \dots, n-1\} \setminus \alpha \mid \alpha \notin C\}$, образуют симплициальный комплекс. (Можно также убедиться в выполнении необходимого и достаточного условия: $N_{t-1} \geq \kappa_t N_t \Leftrightarrow \lambda_{t-1} N_{t-1} \geq N_t \Leftrightarrow \kappa_{n-t+1} \bar{N}_{n-t+1} \leq \bar{N}_{n-t}$, так как в соответствии с упражнением 94 $\kappa_{n-t} \bar{N}_{n-t+1} = \binom{n}{t} - \lambda_{t-1} N_{t-1}$.)

(e) 00000 \leftrightarrow 14641; 10000 \leftrightarrow 14640; 11000 \leftrightarrow 14630; 12000 \leftrightarrow 14620; 13000 \leftrightarrow 14610; 14000 \leftrightarrow 14600; 12100 \leftrightarrow 14520; 13100 \leftrightarrow 14510; 14100 \leftrightarrow 14500; 13200 \leftrightarrow 14410; 14200 \leftrightarrow 14400; 13300 \leftrightarrow 14400; самодуальны 14300 и 13310.

98. Приведенная далее процедура предложена С. Линуссоном (S. Linusson) [*Combinatorica*, **19** (1999), 255–266], который рассматривал более общую задачу для мультимножеств, и является существенно более быстрой, чем другие очевидные подходы к решению поставленной задачи. Пусть $L(n, h, l)$ — количество допустимых векторов с $N_t = \binom{n}{t}$ при $0 \leq t \leq l$, $N_{t+1} < \binom{n}{t+1}$ и $N_t = 0$ при $t > h$. Тогда $L(n, h, l) =$

$= 0$ для всех значений, за исключением $-1 \leq l \leq h \leq n$; кроме того, $L(n, h, h) = L(n, h, -1) = 1$ и $L(n, n, l) = L(n, n-1, l)$ для $l < n$. При $n > h \geq l \geq 0$ можно вычислить $L(n, h, l) = \sum_{j=l}^h L(n-1, h, j) L(n-1, j-1, l-1)$; данное рекуррентное соотношение следует из теоремы К. (Каждый вектор размеров соответствует комплексу $\bigcup P_{N_t t}$, причем $L(n-1, h, j)$ представляет сочетания, которые не содержат максимальный элемент $n-1$, а $L(n-1, j-1, l-1)$ — сочетания, которые его содержат.) Окончательно общее количество составляет $L(n) = \sum_{l=1}^n L(n, n, l)$.

Вычисления дают $L(0), L(1), L(2), \dots = 2, 3, 5, 10, 26, 96, 553, 5461, 100709, 3718354, 289725509, \dots$; $L(100) \approx 3.2299 \times 10^{1842}$.

99. Максимальные элементы симплициального комплекса образуют клаттер; и обратно, сочетания, содержащиеся в элементах клаттера, образуют симплициальный комплекс. Таким образом, эти две концепции по сути эквивалентны.

(а) Если (M_0, M_1, \dots, M_n) — вектор размеров клаттера, то (N_0, N_1, \dots, N_n) является вектором размеров симплициального комплекса, если $N_n = M_n$ и $N_t = M_t + \kappa_{t+1} N_{t+1}$ для $0 \leq t < n$. И обратно: каждый такой вектор (N_0, N_1, \dots, N_n) дает (M_0, M_1, \dots, M_n) , если использовать первые N_t t -сочетаний. [Д.Ф. Клементс (G.F. Clements) распространил этот результат на мультимножества в своей работе в *Discrete Math.*, 4 (1973), 123–128.]

(б) В порядке из ответа к упражнению 97, e , это 00000, 00001, 10000, 00040, 01000, 00030, 02000, 00120, 03000, 00310, 04000, 00600, 00100, 00020, 01100, 00210, 02100, 00500, 00200, 00110, 01200, 00400, 00300, 01010, 01300, 00010. Заметим, что (M_0, \dots, M_n) является допустимым тогда и только тогда, когда допустим (M_n, \dots, M_0) , так что в данной интерпретации мы сталкиваемся с дуальностью другого вида.

100. Представим A в виде подмножества $T(m_1, \dots, m_n)$, как в доказательстве следствия С. Тогда максимальное значение νA достигается, когда A состоит из N лексикографически наименьших точек $x_1 \dots x_n$.

Доказательство начинается с приведения к случаю сжатого A в том смысле, что его t -мультисочетания представляют собой $P_{|A \cap T_t| t}$ для каждого t . Тогда, если y — наибольший элемент, принадлежащий A , и если x — наименьший элемент, не принадлежащий A , можно доказать, что из $x < y$ вытекает $\nu x > \nu y$, а следовательно, $\nu(A \setminus \{y\} \cup \{x\}) > \nu A$. Если $\nu x = \nu y - k$, можно найти элемент $\partial^k y$, больший x , что приводит к противоречию с предположением о сжатости A .

101. (а) В общем случае $F(p) = N_0 p^n + N_1 p^{n-1} (1-p) + \dots + N_n (1-p)^n$, если $f(x_1, \dots, x_n)$ равна 1 для N_t бинарных строк $x_1 \dots x_n$ веса t . Таким образом, $G(p) = p^4 + 3p^3(1-p) + p^2(1-p)^2$ и $H(p) = p^4 + p^3(1-p) + p^2(1-p)^2$.

(б) Монотонная формула f при соответствии $f(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow \{j-1 | x_j = 0\} \in C$ эквивалентна симплициальному комплексу C . Следовательно, функции $f(p)$ для монотонных булевых функций те, которые удовлетворяют условию из упражнения 97 (с), и мы получаем подходящую функцию путем выбора лексикографически последних N_t t -сочетаний (которые являются дополнениями первых N_s s -сочетаний): $\{3210\}$, $\{321, 320, 310\}$, $\{32\}$ дают $f(w, x, y, z) = wxyz \vee xyz \vee wyz \vee wxz \vee yz = wxz \vee yz$.

М.П. Шутценбергер (M.P. Schützenberger) заметил, что можно легко найти параметры N_t из $f(p)$, если обратить внимание на то, что $f(1/(1+u)) = (N_0 + N_1 u + \dots + N_n u^n)/(1+u)^n$. Можно показать, что $H(p)$ не эквивалентна монотонной

формуле при любом количестве переменных, поскольку из $(1 + u + u^2)/(1 + u)^4 = (N_0 + N_1u + \dots + N_nu^n)/(1 + u)^n$ вытекает, что $N_1 = n - 3$, $N_2 = \binom{n-3}{2} + 1$ и $\kappa_2 N_2 = n - 2$.

Однако ответить на поставленный вопрос в общем случае не так просто. Например, функция $(1 + 5u + 5u^2 + 5u^3)/(1 + u)^5$ не соответствует ни одной монотонной формуле с пятью переменными, поскольку $\kappa_3 5 = 7$, но она равна $(1 + 6u + 10u^2 + 10u^3 + 5u^4)/(1 + u)^6$, что дает решение с шестью переменными.

102. (а) Выберем N_t линейно независимых полиномов степени t из I ; лексикографически упорядочим их члены и возьмем линейные комбинации так, чтобы лексикографически наименьшие члены были различными одночленами. Составим I' из всех произведений этих одночленов.

(б) Каждый одночлен степени t в I' , по сути, представляет собой t -мультисочетание; например $x_1^3 x_2 x_5^4$ соответствует 55552111. Если M_t — множество независимых одночленов степени t , свойство идеала эквивалентно тому, что $M_{t+1} \supseteq \varrho M_t$.

В данном примере $M_3 = \{x_0 x_1^2\}$, $M_4 = \varrho M_3 \cup \{x_0 x_1 x_2^2\}$, $M_5 = \varrho M_4 \cup \{x_1 x_2^4\}$, поскольку $x_2^2 (x_0 x_1^2 - 2x_1 x_2^2) - x_1 (x_0 x_1 x_2^2) = -2x_1 x_2^4$; соответственно $M_{t+1} = \varrho M_t$.

(с) По теореме М можно считать, что $M_t = \widehat{Q}_{Mst}$. Пусть $N_t = \binom{n_{ts}}{s} + \dots + \binom{n_{t2}}{2} + \binom{n_{t1}}{1}$, где $s + t \geq n_{ts} > \dots > n_{t2} > n_{t1} \geq 0$; в этом случае $n_{ts} = s + t$ тогда и только тогда, когда $n_{t(s-1)} = s - 2, \dots, n_{t1} = 0$. Кроме того,

$$N_{t+1} \geq N_t + \kappa_s N_t = \binom{n_{ts} + [n_{ts} \geq s]}{s} + \dots + \binom{n_{t2} + [n_{t2} \geq 2]}{2} + \binom{n_{t1} + [n_{t1} \geq 1]}{1}.$$

Таким образом, последовательность

$$(n_{ts} - t - \infty [n_{ts} < s], \dots, n_{t2} - t - \infty [n_{t2} < 2], n_{t1} - t - \infty [n_{t1} < 1])$$

лексикографически неубывающая при возрастающем t , где ‘ $-\infty$ ’ вставляется в компоненты, у которых $n_{tj} = j - 1$. Такая последовательность не может увеличиваться бесконечно много раз без того, чтобы не превысить максимальное значение $(s, -\infty, \dots, -\infty)$ согласно упражнению 1.2.1-15 (d).

103. Пусть P_{Nst} — первые N элементов последовательности, определяемой следующим образом: для каждой бинарной строки $x = x_{s+t-1} \dots x_0$ (в лексикографическом порядке) записываем $\binom{\nu x}{t}$ подкубов путем замены t единиц звездочками всеми возможными способами в лексикографическом порядке (считая $1 < *$). Например, если $x = 0101101$ и $t = 2$, мы генерируем подкубы $0101 * 0*$, $010 * 10*$, $010 * *01$, $0 * 0110*$, $0 * 01 * 01$, $0 * 0 * 101$.

[См. В. Lindström, *Aktiv för Mat.*, 8 (1971), 245–257; обобщение, аналогичное следствию С, появляется в К. Engel, *Sperner Theory* (Cambridge Univ. Press, 1997), Theorem 8.1.1.]

104. Первые N строк в перекрестном порядке обладают искомым свойством. [Т.Н. Данх and Д.Е. Дэйкин, *J. London Math. Soc.* (2), 55 (1997), 417–426.]

Примечание. Начав с наблюдения, что “1-тень” N лексикографически первых строк веса t (т.е. строк, полученных удалением только единичных битов) состоит из первых $\mu_t N$ строк веса t , Р. Альсведе (R. Ahlswede) и Н. Кай (N. Cai) распространили теорему Дана–Дэйкина на вставку, удаление и/или перемещение битов [*Combinatorica*, 17 (1997), 11–29; *Applied Math. Letters*, 11, 5 (1998), 121–126]. Уве Лек (Uwe

Lesk) доказал, что не имеется глобального упорядочения *тернарных строк* с аналогичным свойством минимальных теней [Preprint 98/6 (Univ. Rostock, 1998), 6 p.].

105. В цикле каждое число должно встречаться одинаковое количество раз, т.е. $\binom{n-1}{t-1}$ должно быть кратно t . Это необходимое условие, похоже, является одновременно и достаточным, если n не слишком мало по отношению к t . Однако это пока что невозможно доказать [См. Chung, Graham and Diaconis, *Discrete Math.*, **110** (1992), 55–57.]

В нескольких следующих упражнениях рассматриваются случаи $t = 2$ и $t = 3$, для которых известны элегантные решения. Аналогичные, но более сложные результаты были выведены для $t = 4$ и $t = 5$; случай $t = 6$ решен частично. В настоящее время случай $(n, t) = (12, 6)$ — минимальный, для которого неизвестно наличие универсального цикла.

106. Пусть разности последовательных элементов по модулю $(2m + 1)$ равны $1, 2, \dots, m, 1, 2, \dots, m, \dots$, повторенные $2m + 1$ раз; например, цикл для $m = 3$ представляет собой (013602561450346235124) . Этот способ работает потому, что $1 + \dots + m = \binom{m+1}{2}$ является взаимно простым с $2m + 1$. [*J. École Polytechnique*, **4**, Cahier 10 (1810), 16–48.]

107. Существует 3^7 способов, которыми можно вставить семь дублей \blacksquare , \blacksquare , \dots , \blacksquare в любой универсальный цикл 2-сочетаний множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Количество таких универсальных циклов равно количеству цепей Эйлера в полном графе K_7 , что, как можно показать, составляет 129 976 320, если рассматривать $(a_0 a_1 \dots a_{20})$ эквивалентным $(a_1 \dots a_{20} a_0)$, но не эквивалентным циклу в обратном направлении $(a_{20} \dots a_1 a_0)$. Таким образом, окончательный ответ — 284 258 211 840.

[Эта задача была впервые решена в 1859 году М. Рейссом (M. Reiss), метод которого был столь сложен, что полученный им результат вызывал сомнения; см. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, **8** (1849), 74; **11** (1852), 115; *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (2), **5** (1871–1873), 63–120. Существенно более простое решение, подтверждающее достижение Рейсса, было найдено Ф. Жоливальдом (P. Jolivald) и Г. Тарри (G. Tarry), которые также подсчитали количество цепей Эйлера в K_9 ; см. *Comptes Rendus Association Française pour l'Avancement des Sciences*, **15**, part 2 (1886), 49–53; É. Lucas, *Récréations Mathématiques*, **4** (1894), 123–151. Подход, найденный Б. Маккеем (B. McKay) и Р. Робинзоном (R. Robinson), оказался еще лучше, позволив продолжить подсчет вплоть до E_{21} с использованием того факта, что количество путей равно

$$(m-1)!^{2m+1} [z_0^{2m} z_1^{2m-2} \dots z_{2m}^{2m-2}] \det(a_{jk}) \prod_{1 \leq j < k \leq 2m} (z_j^2 + z_k^2),$$

где $a_{jk} = -1/(z_j^2 + z_k^2)$ при $j \neq k$; $a_{jj} = -1/(2z_j^2) + \sum_{0 \leq k \leq 2m} 1/(z_j^2 + z_k^2)$; см. *Combinatorics, Probability, and Computing*, **7** (1998), 437–449.]

К. Фли Сан-Мари (C. Flye Sainte-Marie) [*L'Intermédiaire des Mathématiciens*, **1** (1894), 164–165], заметила, что цепи Эйлера в K_7 включают 2×720 путей с 7-кратной симметрией относительно перестановок $\{0, 1, \dots, 6\}$ (цикл Пуансо и обратный к нему), $32 \times 1\,680$ путей с 3-кратной симметрией и $25\,778 \times 5\,040$ асимметричных путей.

108. При $n < 7$ решение невозможно, за исключением тривиального случая $n = 4$. При $n = 7$ имеется $12\,255\,208 \times 7!$ универсальных циклов, не считая эквивалентными

циклы $(a_0 a_1 \dots a_{34})$ и $(a_1 \dots a_{34} a_0)$ и включая случаи 5-кратной симметрии наподобие цикла, приведенного в упражнении 105.

При $n \geq 8$ к решению задачи можно подойти систематическим путем, предложенным Б. Джексоном (B. Jackson) [*Discrete Math.*, **117** (1993), 141–150; см. также G. Hurlbert, *SIAM J. Disc. Math.*, **7** (1994), 598–604]. Поместим каждое 3-сочетание в “стандартном циклическом порядке” $c_1 c_2 c_3$, где $c_2 = (c_1 + \delta) \bmod n$, $c_3 = (c_2 + \delta') \bmod n$, $0 < \delta, \delta' < n/2$, и либо $\delta = \delta'$, либо $\max(\delta, \delta') < n - \delta - \delta' \neq (n - 1)/2$, либо $(1 < \delta < n/4$ и $\delta' = (n - 1)/2)$, либо $(\delta = (n - 1)/2$ и $1 < \delta' < n/4)$. Например, при $n = 8$ допустимыми значениями (δ, δ') являются $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(3, 3)$; при $n = 11$ они равны $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$, $(4, 4)$, $(5, 2)$, $(5, 5)$. Затем строим ориентированный граф с вершинами (c, δ) для $0 \leq c < n$ и $1 \leq \delta < n/2$ и дугами $(c_1, \delta) \rightarrow (c_2, \delta')$ для каждого сочетания $c_1 c_2 c_3$ в стандартном циклическом порядке. Такой ориентированный граф связный и сбалансированный, так что по теореме 2.3.4.2D он имеет цепь Эйлера. (Можно выбрать цепь Эйлера с n -кратной симметрией для $n = 8$, но не для $n = 12$.)

109. При $n = 1$ цикл (000) тривиален; при $n = 2$ цикл не существует; имеется ровно два таких цикла при $n = 4$, а именно (00011122233302021313) и (00011120203332221313) . При рассмотрении $n \geq 5$ примем, что мультисочетание $d_1 d_2 d_3$ находится в стандартном циклическом порядке, если $d_2 = (d_1 + \delta - 1) \bmod n$, $d_3 = (d_2 + \delta' - 1) \bmod n$ и (δ, δ') является допустимым в смысле предыдущего упражнения для $n + 3$. Построим ориентированный граф с вершинами (d, δ) для $0 \leq d < n$ и $1 \leq \delta < (n + 3)/2$ и дугами $(d_1, \delta) \rightarrow (d_2, \delta')$ для каждого мультисочетания в стандартном циклическом порядке; затем найдем цепь Эйлера.

Вероятно, универсальный цикл t -мультисочетаний существует для $\{0, 1, \dots, n - 1\}$ тогда и только тогда, когда существует универсальный цикл t -сочетаний для $\{0, 1, \dots, n + t - 1\}$.

110. Неплохой способ проверки троп состоит в вычислении чисел

$$b(S) = \sum \{2^{p(c)} \mid c \in S\},$$

где $(p(A), \dots, p(K)) = (1, \dots, 13)$; затем следует установить $l \leftarrow b(S) \ \& \ -b(S)$ и проверить, что $b(S) + l = l \ll s$, а также что $((l \ll s) \mid (l \gg 1)) \ \& \ a = 0$, где $a = 2^{p(c_1)} \mid \dots \mid 2^{p(c_s)}$. Значения $b(S)$ и $\sum \{v(c) \mid c \in S\}$ легко поддерживаются при проходе S по всем 31 непустым подмножествам в порядке кода Грея. Ответами к упражнению для $x = (0, \dots, 29)$ являются значения 1 009 008, 99 792, 2 813 796, 505 008, 2 855 676, 697 508, 1 800 268, 751 324, 1 137 236, 361 224, 388 740, 51 680, 317 340, 19 656, 90 100, 9 168, 58 248, 11 196, 2 708, 0, 8 068, 2 496, 444, 356, 3 680, 0, 0, 0, 76, 4; таким образом, средний счет равен ≈ 4.769 , а дисперсия — ≈ 9.768 .

Карты с нулевым счетом иногда в шутку называют “девятнадцать”, поскольку такой счет невозможно получить ни при каком наборе карт.

— Д.Г. Девидсон (G.H. Davidson), *Справочник по игре в криббедж (Dee's Hand-Book of Cribbage) (1869)*

Примечание: в ограниченном варианте криббеджа (“crib”) не допускается “масть” из четырех карт. В этом случае распределение вычисляется немного проще, и по-

лучается следующий ответ: 1 022 208, 99 792, 2 839 800, 508 908, 2 868 960, 703 496, 1 787 176, 755 320, 1 118 336, 358 368, 378 240, 43 880, 310 956, 16 548, 88 132, 9 072, 57 288, 11 196, 2 264, 0, 7 828, 2 472, 444, 356, 3 680, 0, 0, 0, 76, 4. Среднее значение и дисперсия приблизительно равны 4.735 и 9.667.

111. $\partial^{n-2r} B$ представляет собой множество всех r -подмножеств B ; эти подмножества не должны содержаться в A . Если $|A| = |B| = \binom{x}{n-r}$ для некоторого действительного $x > n - 1$, то согласно упражнению 80 должно выполняться $\binom{n}{r} \geq |A| + |\partial^{n-2r} B| \geq \binom{x}{n-r} + \binom{x}{r} > \binom{n-1}{n-r} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$. [См. *Quart. J. Math. Oxford*, **12** (1961), 313–320.]

Раздел 7.2.1.4

1.

m^n	$m^{\underline{n}}$	$m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$
$\binom{m+n-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{n-m}$
$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$	$[m \geq n]$	$\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$
$\left \begin{matrix} m+n \\ m \end{matrix} \right $	$[m \geq n]$	$\left \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right $

2. В общем случае для произвольных чисел $x_1 \geq \dots \geq x_m$ мы получаем все целые m -кортежи $a_1 \dots a_m$, такие, что $a_1 \geq \dots \geq a_m$, $a_1 + \dots + a_m = x_1 + \dots + x_m$, и $a_m \dots a_1 \geq x_m \dots x_1$, путем инициализации $a_1 \dots a_m \leftarrow x_1 \dots x_m$ и $a_{m+1} \leftarrow x_m - 2$. В частности, если c — произвольная целая константа, мы получим все целые m -кортежи, такие, что $a_1 \geq \dots \geq a_m \geq c$ и $a_1 + \dots + a_m = n$, путем инициализации $a_1 \leftarrow n - mc + c$, $a_j \leftarrow c$ для $1 < j \leq m$ и $a_{m+1} \leftarrow c - 2$ в предположении, что $n \geq cm$.

3. $a_j = \lfloor (n + m - j)/m \rfloor = \lceil (n + 1 - j)/m \rceil$ при $1 \leq j \leq m$ [см. *SMath* § 3.4].

4. У нас должно выполняться $a_m \geq a_1 - 1$; следовательно, $a_j = \lfloor (n + m - j)/m \rfloor$ для $1 \leq j \leq m$, где m — наибольшее целое, для которого $\lfloor n/m \rfloor \geq r$, т.е. $m = \lfloor n/r \rfloor$.

5. [См. Ю. Клишко (Eugene M. Klimko), *VIT*, **13** (1973), 38–49.]

C1. [Инициализация.] Установить $c_0 \leftarrow 1$, $c_1 \leftarrow n$, $c_2 \dots c_n \leftarrow 0 \dots 0$, $l_0 \leftarrow 1$, $l_1 \leftarrow 0$. (Считаем, что $n > 0$.)

C2. [Посещение.] Посетить разбиение, представленное количеством частей $c_1 \dots c_n$ и связями $l_0 l_1 \dots l_n$.

C3. [Ветвление.] Установить $j \leftarrow l_0$ и $k \leftarrow l_j$. Если $c_j = 1$, перейти к шагу C6; в противном случае, если $j > 1$, перейти к шагу C5.

C4. [Замена $1 + 1$ на 2 .] Установить $c_1 \leftarrow c_1 - 2$, $c_2 \leftarrow c_2 + 1$. Затем, если $c_1 = 0$, установить $l_0 \leftarrow 2$ и установить $l_2 \leftarrow l_1$, если $k \neq 2$. Если $c_1 > 0$ и $k \neq 2$, установить $l_2 \leftarrow l_1$ и $l_1 \leftarrow 2$. Вернуться к шагу C2.

C5. [Замена $j \cdot c_j$ на $(j + 1) + 1 + \dots + 1$.] Установить $c_1 \leftarrow j(c_j - 1) - 1$ и перейти к шагу C7.

C6. [Замена $k \cdot c_k + j$ на $(k + 1) + 1 + \dots + 1$.] Завершить работу, если $k = 0$. В противном случае установить $c_j \leftarrow 0$; затем установить $c_1 \leftarrow k(c_k - 1) + j - 1$, $j \leftarrow k$ и $k \leftarrow l_k$.

C7. [Обновить связи.] Если $c_1 > 0$, установить $l_0 \leftarrow 1$, $l_1 \leftarrow j + 1$; в противном случае установить $l_0 \leftarrow j + 1$. Затем установить $c_j \leftarrow 0$ и $c_{j+1} \leftarrow c_{j+1} + 1$. Если $k \neq j + 1$, установить $l_{j+1} \leftarrow k$. Вернуться к шагу C2. **I**

Заметим, что этот алгоритм — без циклов, но он не быстрее алгоритма Р. Шаги C4, C5 и C6 выполняются $p(n-2)$, $2p(n) - p(n+1) - p(n-2)$ и $p(n+1) - p(n)$ раз соответственно. Таким образом, при больших n наиболее важным становится шаг C4. (См. упражнение 45 и детальный анализ Феннера (Fenner) и Лоизоу (Loizou) [Acta Inf., 16 (1981), 237–252].)

6. Установить $k \leftarrow a_1$ и $j \leftarrow 1$. Затем, пока $k > a_{j+1}$, установить $b_k \leftarrow j$ и $k \leftarrow k - 1$ и повторять эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $k = a_{j+1}$. Если $k > 0$, установить $j \leftarrow j + 1$ и повторять это действие до тех пор, пока не будет выполнено условие $k = 0$. (Мы использовали (11) в дуальной форме $a_j - a_{j+1} = d_j$, где $d_1 \dots d_n$ — представление в виде количества частей $b_1 b_2 \dots$. Заметим, что время работы этого алгоритма, по сути, пропорционально $a_1 + b_1$, сумме длин входных и выходных данных.)

7. Из дуальности (11) мы имеем $b_1 \dots b_n = n^{a_n} (n-1)^{a_{n-1}-a_n} \dots 1^{a_1-a_2} 0^{n-a_1}$.

8. Транспонирование диаграммы Феррерса соответствует зеркальному отражению и дополнению битовой строки (15). Таким образом, мы можем просто поменять местами и обратить p и q , получив разбиение $b_1 b_2 \dots = (q_t + \dots + q_1)^{p_1} (q_t + \dots + q_2)^{p_2} \dots (q_t)^{p_t}$.

9. Доказательство по индукции: если $a_k = l - 1$ и $b_l = k - 1$, увеличение a_k и b_l сохраняет равенство.

10. В первом дереве левый дочерний узел каждого узла получается путем добавления '1'. Правый дочерний узел получается путем увеличения крайней правой цифры; этот дочерний узел существует тогда и только тогда, когда родительский узел заканчивается разными цифрами. Все разбиения n на уровне n находятся в лексикографическом порядке.

Во втором дереве левый дочерний узел получается путем замены '11' на '2'. Этот дочерний узел существует тогда и только тогда, когда родительский узел содержит по крайней мере две единицы. Правый дочерний узел получается путем удаления 1 и увеличения наименьшей части, превосходящей 1. Этот дочерний узел существует тогда и только тогда, когда в родительском узле имеется по крайней мере одна единица и наименьшая превосходящая единицу часть ровно одна. Все разбиения n на m частей появляются на уровне $n - m$ в лексикографическом порядке; прямой порядок обхода всего дерева дает лексикографический порядок всех узлов. [Т.И. Fenner and G. Loizou, *Comp. J.*, 23 (1980), 332–337.]

11. $[z^{100}] 1/((1-z)(1-z^2)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{20})(1-z^{50})(1-z^{100})) = 4563$ и $[z^{100}] (1+z+z^2)(1+z^2+z^4) \dots (1+z^{100}+z^{200}) = 7$. [См. G. Pólya, *АММ* 63 (1956), 689–697.] В бесконечном ряде

$$\prod_{k \geq 1} (1 + z^k + z^{2k}) (1 + z^{2k} + z^{4k}) (1 + z^{5k} + z^{10k})$$

коэффициент при z^{10^n} равен $2^{n+1} - 1$, а коэффициент при $z^{10^n - 1}$ равен 2^n .

12. Для доказательства того, что

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots = \frac{1}{((1-z)(1-z^3)(1-z^5)\cdots)},$$

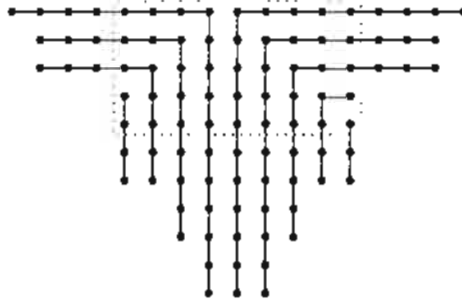
перепишем левую часть в виде

$$\frac{(1-z^2)(1-z^4)(1-z^6)\cdots}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)\cdots}$$

и сократим общие множители в числителе и знаменателе. Другой способ состоит в замене z на z^1, z^3, z^5, \dots в тождестве $(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots = 1/(1-z)$ и перемножении получившихся результатов. [*Novi Comment. Acad. Sci. Pet.*, 3 (1750), 125–169, § 47.]

13. Отобразим разбиение $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + c_3 \cdot 3 \cdots$ на $r_1 \cdot 1 + \lfloor c_1/2 \rfloor \cdot 2 + r_3 \cdot 3 + \lfloor c_2/2 \rfloor \cdot 4 + r_5 \cdot 5 + \lfloor c_3/2 \rfloor \cdot 6 + \cdots$, где $r_m = (c_m \bmod 2) + 2(c_{2m} \bmod 2) + 4(c_{4m} \bmod 2) + 8(c_{8m} \bmod 2) + \cdots$. [*Johns Hopkins Univ. Circular*, 2 (1882), 72.]

14. Легче всего понять соответствие Сильвестера, представив его диаграммой, в которой точки нечетных перестановок центрированы и разделены на непересекающиеся “крюки”. Например, разбиение $17 + 15 + 15 + 9 + 9 + 9 + 9 + 5 + 5 + 3 + 3$, состоящее из пяти различных нечетных частей, посредством диаграммы



ставится в соответствие разбиению с разными частями $19 + 18 + 16 + 13 + 12 + 9 + 5 + 4 + 3$ с четырьмя просветами.

И наоборот: разбиение на $2t$ различных неотрицательных частей можно единственным образом записать в виде

$$(a_1 + b_1 - 1) + (a_1 + b_2 - 2) + (a_2 + b_2 - 3) + (a_2 + b_3 - 4) + \cdots + \\ + (a_{t-1} + b_t - 2t + 2) + (a_t + b_t - 2t + 1) + (a_t + b_{t+1} - 2t),$$

где $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_t \geq t$ и $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_t \geq b_{t+1} = t$. Эта запись соответствует $(2a_1 - 1) + \cdots + (2a_t - 1) + (2A_1 - 1) + \cdots + (2A_r - 1)$, где $A_1 + \cdots + A_r$ — сопряженное с $(b_1 - t) + \cdots + (b_t - t)$. Значение t , по сути, представляет собой размер “прямоугольника Дюрфи”.

Так, разбиения на нечетные части при $n = 10$ представляют собой $9 + 1, 7 + 3, 7 + 1 + 1 + 1, 5 + 5, 5 + 3 + 1 + 1, 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 3 + 3 + 1, 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1, 3 + 1 + \cdots + 1, 1 + \cdots + 1$, которые соответствуют разбиениям с разными частями $6 + 4, 5 + 4 + 1, 7 + 3, 4 + 3 + 2 + 1, 6 + 3 + 1, 8 + 2, 5 + 3 + 2, 7 + 2 + 1, 9 + 1, 10$ соответственно. [См. замечательную статью Сильвестера в *Amer. J. Math.*, 5 (1882), 251–330; 6 (1883), 334–336.]

15. Каждое самосопряженное разбиение следа k соответствует разбиению n на k различных нечетных частей (“крюков”). Следовательно, можно записать производящую функцию либо как произведение $(1+z)(1+z^3)(1+z^5)\dots$, либо как сумму $1+z^1/(1-z^2)+z^4/((1-z^2)(1-z^4))+z^9/((1-z^2)(1-z^4)(1-z^6))+\dots$. [Johns Hopkins Univ. Circular, **3** (1883), 42–43.]

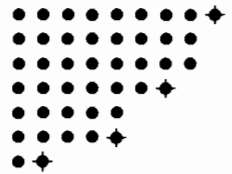
16. Квадрат Дюрфи содержит k^2 точек, а остальные точки соответствуют двум независимым разбиениям с наибольшей частью, не превышающей k . Таким образом, если обозначить через w количество частей, а через z — количество точек, получим

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-wz^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k z^{k^2}}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^k)(1-wz)(1-wz^2)\dots(1-wz^k)}.$$

[Эта страшно выглядящая формула представляет собой частный случай $x=y=0$, еще более страшной формулы из упражнения 19.]

17. (a) $((1+uvz)(1+uvz^2)(1+uvz^3)\dots)/((1-uz)(1-uz^2)(1-uz^3)\dots)$.

(b) Объединенное разбиение можно представить в виде обобщенной диаграммы Феррерса, в которой мы объединяем все части, помещая a_i над b_j , если $a_i \geq b_j$, и затем помечая крайнюю справа точку каждого b_j . Например, объединенное разбиение $(8, 8, 5; 9, 7, 5, 2)$ показано на приведенной диаграмме, где помеченные точки имеют вид ‘♦’. Пометки появляются только у угловых точек; таким образом, транспонированная диаграмма соответствует другому объединенному разбиению, в данном случае — $(7, 6, 6, 4, 3; 7, 6, 4, 1)$. [См. J.T. Joichi and D. Stanton, *Pacific J. Math.*, **127** (1987), 103–120; S. Corteel and J. Lovejoy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 1623–1635; I. Pak, *The Ramanujan Journal*, **12** (2006), 5–75.]



Каждое объединенное разбиение с $t > 0$ частями соответствует таким образом “сопряженному” разбиению, в котором наибольшая часть равна t . Производящая функция для такого объединенного разбиения —

$$\frac{((1+uz)\dots(1+uz^{t-1}))}{((1-z)\dots(1-z^t))},$$

умноженное на $(vz^t + z^t)$, где vz^t соответствует случаю $b_1 = t$, а z^t соответствует случаю $r = 0$ или $b_1 < t$.

(c) Так мы получили вариант общей z -номиальной теоремы из ответа к упражнению 1.2.6–58:

$$\frac{(1+uvz)(1+uvz^2)(1+uvz^3)\dots}{(1-uz)(1-uz^2)(1-uz^3)\dots} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(1+v)(1+uz)\dots(1+uz^{t-1})}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^t)} u^t z^t.$$

18. Уравнения очевидным образом определяют a и b для заданных c и d ; так что надо показать, что c и d однозначно определяются величинами a и b . Приведенный далее алгоритм определяет c и d справа налево.

A1. [Инициализация.] Установить $i \leftarrow r$, $j \leftarrow s$, $k \leftarrow 0$ и $a_0 \leftarrow b_0 \leftarrow \infty$.

A2. [Ветвление.] Прекратить работу, если $i + j = 0$. В противном случае перейти к шагу A4, если $a_i \geq b_j - k$.

A3. [Поглощение a_i .] Установить $c_{i+j} \leftarrow a_i$, $d_{i+j} \leftarrow 0$, $i \leftarrow i-1$, $k \leftarrow k+1$ и вернуться к шагу A2.

A4. [Поглощение b_j .] Установить $c_{i+j} \leftarrow b_j - k$, $d_{i+j} \leftarrow 1$, $j \leftarrow j-1$, $k \leftarrow k+1$ и вернуться к шагу A2. ▮

Имеется также и метод, работающий слева направо.

B1. [Инициализация.] Установить $i \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$, $k \leftarrow r+s$ и $a_{r+1} \leftarrow b_{s+1} \leftarrow -\infty$.

B2. [Ветвление.] Прекратить работу, если $k = 0$. В противном случае установить $k \leftarrow k-1$, затем перейти к шагу B4, если $a_i \leq b_j - k$.

B3. [Поглощение a_i .] Установить $c_{i+j-1} \leftarrow a_i$, $d_{i+j-1} \leftarrow 0$, $i \leftarrow i+1$ и вернуться к шагу B2.

B4. [Поглощение b_j .] Установить $c_{i+j-1} \leftarrow b_j - k$, $d_{i+j-1} \leftarrow 1$, $j \leftarrow j+1$ и вернуться к шагу B2. ▮

В обоих случаях ветвление заставляет полученную последовательность удовлетворять условию $c_1 \geq \dots \geq c_{r+s}$. Заметим, что $c_{r+s} = \min(a_r, b_s)$ и $c_1 = \max(a_1, b_1 - r - s + 1)$.

Таким образом, мы доказали тождество из упражнения 17 (с) другим способом. Расширение этой идеи приводит к комбинаторному доказательству “замечательной формулы с многими параметрами” Рамануджана:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} w^n \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - bz^{k+n}}{1 - az^{k+n}} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - a^{-1}bz^k)(1 - a^{-1}w^{-1}z^{k+1})(1 - awz^k)(1 - z^{k+1})}{(1 - a^{-1}bw^{-1}z^k)(1 - a^{-1}z^{k+1})(1 - az^k)(1 - wz^k)}.$$

[Ссылки: G.H. Hardy, *Ramanujan* (1940), Eq. (12.12.2); D. Zeilberger, *Europ. J. Combinatorics*, **8** (1987), 461–463; A.J. Yee, *J. Comb. Theory*, **A105** (2004), 63–77.]

19. [*Crelle*, **34** (1847), 285–328.] Согласно упражнению 17 (с), сумма по k , упомянутая в указании, равна

$$\left(\sum_{l \geq 0} v^l \frac{(z - bz) \cdots (z - bz^l)}{(1 - z) \cdots (1 - z^l)} \frac{(1 - uz) \cdots (1 - uz^l)}{(1 - auz) \cdots (1 - auz^l)} \right) \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - auz^m}{1 - uz^m};$$

суммирование по l аналогично, с заменой $u \leftrightarrow v$, $a \leftrightarrow b$ и $k \leftrightarrow l$. Дальнейшее суммирование по k и l приводит при $b = auz$ к

$$\prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - uvz^{m+1})(1 - auz^m)}{(1 - uz^m)(1 - vz^m)}.$$

Положим теперь $u = wxy$, $v = 1/(yz)$, $a = 1/x$ и $b = wuz$. Приравняйте это бесконечное произведение к сумме по l .

20. Для получения $p(n)$ нужно сложить или вычесть примерно $\sqrt{8n/3}$ ранее вычисленных значений, большинство из которых имеют длину $\Theta(\sqrt{n})$ бит. Следовательно, $p(n)$ можно вычислить за $\Theta(n)$ шагов, т.е. общее время составляет $\Theta(n^2)$.

(Непосредственное использование (17) дает $\Theta(n^{5/2})$ шагов.)

21. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} q(n) z^n = (1+z)(1+z^2) \dots$ равно $(1-z^2)(1-z^4) \dots P(z) = (1-z^2-z^4+z^{10}+z^{14}-z^{24}-\dots) P(z)$, имеем

$$q(n) = p(n) - p(n-2) - p(n-4) + p(n-10) + p(n-14) - p(n-24) - \dots$$

[Имеется также “чисто рекуррентное соотношение”, в котором используется только $q(n)$, аналогичное рекуррентному соотношению для $\sigma(n)$ из следующего упражнения.]

22. Из (21) мы имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) z^n = \sum_{m,n \geq 1} m z^{mn} = z \frac{d}{dz} \ln P(z) = (z + 2z^2 - 5z^5 - 7z^7 + \dots) / (1 - z - z^2 + z^5 + z^7 + \dots)$. [*Bibliothèque Impartiale*, **3** (1751), 10–31.]

23. Установим $u = w$ и $v = z/w$. Это даст нам

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k w) (1 - z^k / w) (1 - z^k) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n w^n z^{n(n+1)/2} / (1 - w) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w^{-n} - w^{n+1}) z^{n(n+1)/2} / (1 - w) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w^{-n} + \dots + w^n) z^{n(n+1)/2}. \end{aligned}$$

Эти преобразования корректны при $|z| < 1$ и w , близком к 1. Теперь положите $w = 1$.

[См. § 57 статьи Сильвестера, упомянутой в ответе к упражнению 14. Доказательство Якоби можно найти в § 66 его монографии *Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum* (1829).]

24. (а) Согласно (18) и упражнения 23, $[z^n] A(z) = \sum (-1)^{j+k} (2k+1) [3j^2 + j + k^2 + k = 2n]$, где сумма берется по всем целым числам j и k . Если $n \bmod 5 = 4$, ненулевые члены образуются только при $j \bmod 5 = 4$ и $k \bmod 5 = 2$; однако тогда $(2k+1) \bmod 5 = 0$.

(б) В соответствии с формулой 4.6.2–(5), если p — простое число, то $B(z)^p \equiv B(z^p) \pmod{p}$.

(в) Поскольку $A(z) = P(z)^{-4}$, примем $B(z) = P(z)$ [*Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1919), 207–210. Аналогично доказывается, что $p(n)$ кратно 7 при $n \bmod 7 = 5$. Рамануджан дошел до получения красивых формул $p(5n+4)/5 = [z^n] P(z)^6 / P(z^5)$; $p(7n+5)/7 = [z^n] (P(z)^4 / P(z^7)^3 + 7zP(z)^8 / P(z^7)^7)$. Аткин и Свиннертон-Дайр в работе *Proc. London Math. Soc.* (3), **4** (1953), 84–106 показали, что разбиения $5n+4$ и $7n+5$ можно разделить на классы равного размера в соответствии со значениями (наибольшая часть — количество частей), взятыми по модулю 5 или 7, как предположил Ф. Дайсон (F. Dyson). Имеется немного более сложное доказательство с использованием комбинаторной статистики того, что $p(n) \bmod 11 = 0$, если $n \bmod 11 = 6$; см. F.G. Garvan, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **305** (1988), 47–77.]

25. [Соотношение из указания можно доказать, дифференцируя обе части приведенного тождества. Оно представляет собой частный случай $y = 1 - x$ красивой

формулы, открытой Абелем в 1826 году:

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2(y) &= \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \\ &\quad - \operatorname{Li}_2\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) - \ln(1-x)\ln(1-y). \end{aligned}$$

См. статью Абеля *Œuvres Complètes*, 2 (Christiania: Grøndahl, 1881), 189–193.]

(а) Пусть $f(x) = \ln(1/(1 - e^{-xt}))$. Тогда $\int_1^x f(x) dx = -\operatorname{Li}_2(e^{-tx})/t$ и $f^{(n)}(x) = (-t)^n e^{tx} \sum_k \langle n-1 \rangle e^{ktx} / (e^{tx} - 1)^n$, так что формула суммирования Эйлера дает нам

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(e^{-t})/t + \frac{1}{2} \ln(1/(1 - e^{-t})) + O(1) &= \\ &= \frac{(\zeta(2) + t \ln(1 - e^{-t}) - \operatorname{Li}_2(1 - e^{-t}))}{t - 1/2 \ln t + O(1)} = \\ &= \zeta(2)/t + \frac{1}{2} \ln t + O(1) \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$.

(б) Мы имеем $\sum_{m,n \geq 1} e^{-mnt}/n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{m,n \geq 1} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} (mnt)^{-z} \Gamma(z) dz/n$; суммирование дает $\frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \zeta(z+1) \zeta(z) t^{-z} \Gamma(z) dz$. Полюс в $z=1$ дает $\zeta(2)/t$; двойной полюс в $z=0$ дает $-\zeta(0) \ln t + \zeta'(0) = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln 2\pi$; полюс в $z=-1$ дает $-\zeta(-1) \zeta(0) t = B_2 B_1 t = -t/24$. Нули $\zeta(z+1) \zeta(z)$ сокращают другие полюса $\Gamma(z)$, так что результатом является $\ln P(e^{-t}) = \zeta(2)/t + \frac{1}{2} \ln(t/2\pi) - t/24 + O(t^M)$ для произвольно большого M .

26. Пусть $F(n) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2/n}$. Мы можем использовать (25) либо с $f(x) = e^{-x^2/n}$ [$x > 0$] + $\frac{1}{2} \delta_{x0}$, либо с $f(x) = e^{-x^2/n}$ для всех x , поскольку $2F(n) + 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2/n}$. Выберем второй способ. Тогда правая часть (25), при $\theta = 0$, представляет собой быстро сходящийся ряд

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=-M}^M \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi m i y - y^2/n} dy = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 m^2 n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/n} du,$$

если мы выполним подстановку $u = y + \pi m i$; значение интеграла равно $\sqrt{\pi n}$. [Этот результат представляет собой формулу (15) на с. 420 оригинала статьи Пуассона.]

27. Пусть $g_n = \sqrt{\pi/6t} e^{-n^2 \pi^2/6t} \cos \frac{n\pi}{6}$. Тогда $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos 2\pi m y dy = g_{2m+1} + g_{2m-1}$, так что

$$\frac{e^{-t/24}}{P(e^{-t})} = g_1 + g_{-1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (g_{2m+1} + g_{2m-1}) = 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{2m+1}.$$

Члены g_{6n+1} и g_{-6n-1} , объединяясь, дают n -й член (30). [См. М.И. Кноп, *Modular Functions in Analytic Number Theory* (1970), Chapter 3.]

28. (а–д) [См. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 (1938), 271–295.] В действительности Лемер нашел точные формулы для $A_{p^e}(n)$ с использованием символов Якоби из упражнения 4.5.4–23:

$$A_{2^e}(n) = (-1)^e \left(\frac{-1}{m}\right) 2^{e/2} \sin \frac{4\pi m}{2^{e+3}}, \quad \text{если } (3m)^2 \equiv 1 - 24n \pmod{2^{e+3}};$$

$$A_{3^e}(n) = (-1)^{e+1} \left(\frac{m}{3}\right) \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{e/2} \sin \frac{4\pi m}{3^{e+1}}, \quad \text{если } (8m)^2 \equiv 1 - 24n \pmod{3^{e+1}};$$

$$A_{p^e}(n) = \begin{cases} 2 \left(\frac{3}{p^e}\right) p^{e/2} \cos \frac{4\pi m}{p^e}, & \text{если } (24m)^2 \equiv 1 - 24n \pmod{p^e}, \\ \left(\frac{3}{p^e}\right) p^{e/2} [e = 1], & p \geq 5 \text{ и } 24n \pmod{p} \neq 1; \\ & \text{если } 24n \pmod{p} = 1 \text{ и } p \geq 5. \end{cases}$$

(е) Если $n = 2^a 3^b p_1^{e_1} \cdots p_t^{e_t}$, где $3 < p_1 < \cdots < p_t$ и $e_1 \cdots e_t \neq 0$, вероятность того, что $A_k(n) \neq 0$, равна $2^{-t} \left(1 + (-1)^{[e_1=1]}/p_1\right) \cdots \left(1 + (-1)^{[e_t=1]}/p_t\right)$.

29. $z_1 z_2 \cdots z_m / ((1 - z_1)(1 - z_1 z_2) \cdots (1 - z_1 z_2 \cdots z_m))$.

30. (а) $|\binom{n+1}{m}|$; (б) $|\binom{m+n}{m}|$ согласно (39).

31. *Первое решение* [Marshall Hall, Jr., *Combinatorial Theory* (1967), § 4.1]: непосредственно из рекуррентного соотношения (39) можно показать, что для $0 \leq r < k!$ существует полином $f_{k,r}(n) = n^{k-1}/(k!(k-1)!) + O(n^{k-2})$, такой, что $|\binom{n}{k}| = f_{n, n \pmod{k!}}(n)$.

Второе решение: поскольку $(1 - z) \cdots (1 - z^m) = \prod_{p \perp q} (1 - e^{2\pi i p/q} z)^{\lfloor m/q \rfloor}$, где произведение берется по всем сокращенным дробям p/q , $0 \leq p < q$, коэффициент при z^n в (41) может быть выражен как сумма корней единицы, умноженных на полиномы степени n , т.е. $\sum_{p \perp q} e^{2\pi i p n/q} f_{pq}(n)$, где $f_{pq}(n)$ — полином степени, меньшей чем m/q . Таким образом, существуют константы, такие, что $|\binom{n}{2}| = a_1 n + a_2 + (-1)^n a_3$; $|\binom{n}{3}| = b_1 n^2 + b_2 n + b_3 + (-1)^n b_4 + \omega^n b_5 + \omega^{-n} b_6$, где $\omega = e^{2\pi i/3}$, и т.д. Эти константы определяются при помощи значений для малых n , и для первых двух случаев

$$\left| \binom{n}{2} \right| = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^n; \quad \left| \binom{n}{3} \right| = \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{72} - \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}\omega^n + \frac{1}{9}\omega^{-n}.$$

Отсюда следует, что $|\binom{n}{3}|$ равно целому числу, ближайшему к $n^2/12$. Аналогично: $|\binom{n}{4}|$ — ближайшее к $(n^3 + 3n^2 - 9n [n \text{ нечетно}])/144$ целое число.

[Точные формулы для $|\binom{n}{2}|$, $|\binom{n}{3}|$ и $|\binom{n}{4}|$, без упрощения с использованием функции “пол”, были найдены в работе G.F. Malfatti, *Memorie di Mat. e Fis. Società Italiana*, **3** (1786), 571–663. В.Д.А. Колмэн (W.J.A. Colman) в *Fibonacci Quarterly*, **21** (1983), 272–284, показал, что $|\binom{n}{5}|$ — ближайшее к $(n^4 + 10n^3 + 10n^2 - 75n - 45n(-1)^n)/2880$, и привел аналогичные формулы для $|\binom{n}{6}|$ и $|\binom{n}{7}|$.]

32. Поскольку $|\binom{m+n}{m}| \leq p(n)$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $m \geq n$, получаем, что $|\binom{n}{m}| \leq p(n - m)$, и равенство достигается тогда и только тогда, когда $2m \geq n$.

33. Разбиение на m частей соответствует не более чем $m!$ композициям; следовательно, $\binom{n-1}{m-1} \leq m! |\binom{n}{m}|$. Следовательно, $p(n) \geq (n-1)! / ((n-m)! m! (m-1)!)$, и при $m = \sqrt{n}$ приближенная формула Стирлинга доказывает, что $\ln p(n) \geq 2\sqrt{n} - \ln n - \frac{1}{2} - \ln 2\pi$.

34. $a_1 > a_2 > \cdots > a_m > 0$ тогда и только тогда, когда $a_1 - m + 1 \geq a_2 - m + 2 \geq \cdots \geq a_m \geq 1$, а разбиения на m различных частей соответствуют $m!$ композициям.

Таким образом, с учетом ответа к предыдущему упражнению,

$$\frac{1}{m!} \binom{n-1}{m-1} \leq \left| \frac{n}{m} \right| \leq \frac{1}{m!} \binom{n+m(m-1)/2}{m-1}.$$

[См. Н. Gupta, *Proc. Indian Acad. Sci.*, **A16** (1942), 101–102. Подробная асимптотическая формула для $\left| \frac{n}{m} \right|$ при $n = \Theta(m^3)$ имеется в упражнении 3.3.2–30.]

35. (a) $x = \frac{1}{C} \ln \frac{1}{C} \approx -0.194$.

(b) $x = \frac{1}{C} \ln \frac{1}{C} - \frac{1}{C} \ln \ln 2 \approx 0.092$; в общем случае $x = \frac{1}{C} \left(\ln \frac{1}{C} - \ln \ln \frac{1}{F(x)} \right)$.

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} (Cu)^{-2} (\ln u) e^{-1/(Cu)} du = -\frac{1}{C} \int_0^{\infty} (\ln C + \ln v) e^{-v} dv = (\gamma - \ln C)/C \approx 0.256$.

(d) Аналогично, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Cx} \exp(-e^{-Cx}/C) dx = (\gamma^2 + \zeta(2) - 2\gamma \ln C + (\ln C)^2)/C^2 \approx 1.0656$. Таким образом, дисперсия равна $\zeta(2)/C^2 = 1$ (в точности!).

[Распределение вероятности $e^{-e^{(a-x)/b}}$ обычно называется распределением Фишера–Типпетта; см. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **24** (1928), 180–190.]

36. Сумма по всем $j_r - (m+r-1) \geq \dots \geq j_2 - (m+1) \geq j_1 - m \geq 1$ дает

$$\begin{aligned} \Sigma_r &= \sum_t \left| \binom{t-rm-r(r-1)/2}{r} \frac{p(n-t)}{p(n)} \right| = \\ &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \dots \frac{\alpha^r}{1-\alpha^r} \alpha^{rm} \left(1 + O\left(n^{-1/2+2\varepsilon}\right) \right) + E = \\ &= \frac{n^{-1/2}}{\alpha^{-1}-1} \frac{n^{-1/2}}{\alpha^{-2}-1} \dots \frac{n^{-1/2}}{\alpha^{-r}-1} \exp\left(-Crx + O\left(rn^{-1/2+2\varepsilon}\right)\right) + E, \end{aligned}$$

где E — член ошибки, учитывающий случай $t > n^{1/2+\varepsilon}$. Старший член $n^{-1/2}/(\alpha^{-j}-1)$ равен $\frac{1}{jC} (1 + O(jn^{-1/2}))$. Легко убедиться, что $E = O(n^{\log n} e^{-Cn^\varepsilon})$, даже если мы воспользуемся грубой верхней границей $\left| \binom{t-rm-r(r-1)/2}{r} \right| \leq t^r$, так как

$$\sum_{t \geq xN} t^r e^{-t/N} = O\left(\int_{xN}^{\infty} t^r e^{-t/N} dt\right) = O(N^{r+1} x^r e^{-x}/(1-r/x)),$$

где $N = \Theta(\sqrt{n})$, $x = \Theta(n^\varepsilon)$, $r = O(\log n)$.

37. Такое разбиение учитывается один раз в Σ_0 , q раз в Σ_1 , $\binom{q}{2}$ раз в Σ_2 , ...; т.е. оно учитывается ровно $\sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{q}{j} = (-1)^r \binom{q-1}{r}$ раз в частичной сумме, оканчивающейся членом $(-1)^r \Sigma_r$. Это количество не превышает δ_{q0} при нечетном r , и не меньше δ_{q0} при r четном. [Схожая аргументация показывает, что обобщенный принцип из упражнения 1.3.3–26 также обладает указанным свойством. Ссылка: С. Vopferoni, *Pubblicazioni del Reale Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze*, **8** (1936), 3–62.]

38. $z^{l+m-1} \binom{l+m-2}{m-1}_z = z^{l+m-1} (1-z^l) \dots (1-z^{l+m-2}) / ((1-z) \dots (1-z^{m-1}))$.

39. Пусть $\alpha = a_1 \dots a_m$ — разбиение не более чем на m частей; пусть также $f(\alpha) = \infty$, если $a_1 \leq l$; в противном случае $f(\alpha) = \min\{j | a_j > l + a_{j+1}\}$. Пусть g_k —

производящая функция для разбиений с $f(\alpha) > k$. Разбиения с $f(\alpha) = k < \infty$ характеризуются неравенствами

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq a_1 - l > a_{k+1} \geq \dots \geq a_{m+1} = 0.$$

Таким образом, $a_1 a_2 \dots a_m = (b_k + l + 1)(b_1 + 1) \dots (b_{k-1} + 1) b_{k+1} \dots b_m$, где $f(b_1 \dots b_m) \geq k$; обратное также верно. Отсюда следует, что $g_k = g_{k-1} - z^{l+k} g_{k-1}$.

[См. *American J. Math.*, **5** (1882), 254–257.]

40. $z^{m(m+1)/2} \binom{l}{m}_z = (z - z^l)(z^2 - z^l) \dots (z^m - z^l) / ((1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^m))$. Эта формула, по сути, представляет собой z -номиальную теорему из упражнения 1.2.6–58.

41. См. G. Almkvist and G.E. Andrews, *J. Number Theory*, **38** (1991), 135–144.

42. А. Вершик [*Functional Anal. Applic.*, **30** (1996), 90–105, Theorem 4.7] привел формулу

$$\frac{1 - e^{-c\varphi}}{1 - e^{-c(\theta+\varphi)}} e^{-ck/\sqrt{n}} + \frac{1 - e^{-c\theta}}{1 - e^{-c(\theta+\varphi)}} e^{-ca_k/\sqrt{n}} \approx 1,$$

где константа c должна быть выбрана как функция от θ и φ так, чтобы площадь области была равна n . Эта константа c отрицательна, если $\theta\varphi < 2$, и положительна, если $\theta\varphi > 2$; при $\theta\varphi = 2$ область вырождается в прямую линию

$$\frac{k}{\theta\sqrt{n}} + \frac{a_k}{\varphi\sqrt{n}} \approx 1.$$

При $\varphi = \infty$ мы получаем $c = \sqrt{Li_2(t)}$, где t удовлетворяет соотношению $\theta = (\ln \frac{1}{1-t}) / \sqrt{Li_2(t)}$.

43. Мы имеем $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ тогда и только тогда, когда сопряженное разбиение включает каждую из частей $1, 2, \dots, k - 1$ минимум один раз. Количество таких разбиений равно $p(n - k(k - 1)/2)$; это общее количество включает $\left| \begin{matrix} n - (k-1)(k-2)/2 \\ k-1 \end{matrix} \right|$ случаев $a_k = 0$.

44. Считаем, что $n > 0$. Количество разбиений с *разными* наименьшими частями (или с одной единственной частью) равно $p(n + 1) - p(n)$ — количеству разбиений $n + 1$, которые не заканчиваются единицей, так как мы получаем первые из вторых путем изменения наименьшей части. Таким образом, окончательный ответ — $2p(n) - p(n + 1)$. [См. R.J. Воšković, *Giornale de' Letterati* (Rome, 1748), 15. Количество разбиений, в которых равны *три* меньшие части, равно $3p(n) - p(n + 1) - 2p(n + 2) + p(n + 3)$; аналогичные формулы могут быть выведены и для других ограничений на меньшие части разбиений.]

45. В соответствии с формулой (37) мы имеем

$$p(n - j)/p(n) = 1 - Cjn^{-1/2} + (C^2j^2 + 2j)/(2n) - (8C^3j^3 + 60Cj^2 + Cj + 12C^{-1}j)/(48n^{3/2}) + O(j^4n^{-2}).$$

46. Если $n > 1$, то $T'_2(n) = p(n - 1) - p(n - 2) \leq p(n) - p(n - 1) = T''_2(n)$, так как $p(n) - p(n - 1)$ — количество разбиений n , не оканчивающихся единицей. Каждое такое разбиение $n - 1$ дает разбиение для n при увеличении наибольшей его части. Однако эта разность весьма мала: $(T''_2(n) - T'_2(n))/p(n) = C^2/n + O(n^{-3/2})$.

47. Тождество в указании получается путем дифференцирования (21); см. упражнение 22. Вероятность получения количества частей $c_1 \dots c_n$ при $c_1 + 2c_2 + \dots + nc_n = n$ по индукции по n равна

$$\begin{aligned} \Pr(c_1 \dots c_n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{c_k} \frac{kp(n-jk)}{np(n)} \Pr(c_1 \dots c_{k-1} (c_k - j) c_{k+1} \dots c_n) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{c_k} \frac{k}{np(n)} = \frac{1}{p(n)}. \end{aligned}$$

[Combinatorial Algorithms (Academic Press, 1975), Chapter 10.]

48. Вероятность того, что j имеет определенное фиксированное значение на шаге N5, равна $6/(\pi^2 j^2) + O(n^{-1/2})$, а среднее значение jk имеет порядок \sqrt{n} . Среднее время, затрачиваемое на шаге N4, равно $\Theta(n)$, так что среднее время работы имеет порядок $n^{3/2}$. (Попробуйте самостоятельно провести более точный анализ.)

49. (a) Имеем $F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)$, где $F_k(z)$ — производящая функция для всех разбиений, наименьшая часть которых не меньше k , а именно $\frac{1}{((1-z^k)(1-z^{k+1})\dots)} - 1$.

(b) Пусть $f_k(n) = [z^n] F_k(z)/p(n)$. Тогда $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = 1 - p(n-1)/p(n) = Cn^{-1/2} + O(n^{-1})$, $f_3(n) = (p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-3))/p(n) = 2C^2n^{-1} + O(n^{-3/2})$, $f_4(n) = 6C^3n^{-3/2} + O(n^{-2})$ (см. упражнение 45). Оказывается, что $f_{k+1}(n) = k!C^k n^{-k/2} + O(n^{-(k+1)/2})$; в частности, $f_5(n) = O(n^{-2})$. Следовательно, $f_5(n) + \dots + f_n(n) = O(n^{-1})$, так как $f_{k+1}(n) \leq f_k(n)$.

Полученные результаты дают нам $[z^n] F(z) = p(n)(1 + C/\sqrt{n} + O(n^{-1}))$.

50. (a) $c_m(m+k) = c_{m-1}(m-1+k) + c_m(k) = m-1-k+c(k)+1$ по индукции при $0 \leq k < m$.

(b) Потому что $| \binom{m+k}{m} | = p(k)$ для $0 \leq k \leq m$.

(c) Когда $n = 2m$, алгоритм Н, по сути, генерирует разбиения m , и $j-1$ является второй наименьшей частью в разбиении, сопряженном к только что сгенерированному (исключение составляет случай $j-1 = m$ после генерации разбиения $1 \dots 1$, поскольку сопряженное к нему разбиение состоит из одной части).

(d) Если все части α превышают k , то пусть $\alpha k^{q+1} j$ соответствует $\alpha(k+1)$.

(e) Производящая функция $G_k(z)$ для всех разбиений, вторая наименьшая часть которых не меньше k , представляет собой $(z + \dots + z^{k-1}) F_k(z) + F_k(z) - z^k/(1-z) = F_{k+1}(z)/(1-z)$, где $F_k(z)$ определена в предыдущем упражнении. Следовательно, $C(z) = (F(z) - F_1(z))/(1-z) + z/(1-z)^2$.

(f) Как и в предыдущем упражнении, можно показать, что $[z^n] G_k(n)/p(n) = O(n^{-k/2})$ при $k \leq 5$; следовательно, $c(m)/p(m) = 1 + O(m^{-1/2})$. Отношения $(c(m)+1)/p(m)$, которые быстро вычисляются для малых m , достигают максимального значения 2.6 при $m = 7$, после чего монотонно уменьшаются. Таким образом, внимательное рассмотрение асимптотической ошибки завершает доказательство.

Примечание: Б. Фристетт (B. Fristedt) [Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), 703–735] доказал среди прочего, что количество k в случайном разбиении n больше $Cx\sqrt{n}$ с асимптотической вероятностью e^{-x} .

52. В лексикографическом порядке $\left| \binom{64+13}{13} \right|$ разбиений 64 имеют $a_1 \leq 13$; $\left| \binom{50+10}{10} \right|$ разбиений имеют $a_1 = 14$ и $a_2 \leq 10$ и т.д. Таким образом, с учетом указания, раз-

биение $14\ 11\ 9\ 6\ 4\ 3\ 2\ 1^{15}$ предшествует в лексикографическом порядке ровно $p(64) - 1\ 000\ 000$ разбиениям, что делает его миллионным в *обратном* лексикографическом порядке.

53. Как и в предыдущем упражнении, $\left| \begin{smallmatrix} 80 \\ 12 \end{smallmatrix} \right|$ разбиений 100 имеют $a_1 = 32$ и $a_2 \leq 12$ и т.д. Таким образом, лексикографически миллионное разбиение, в котором $a_1 = 32$, имеет вид $32\ 13\ 12\ 8\ 7\ 6\ 5\ 5\ 1^{12}$. Алгоритм Н дает сопряженное к нему, а именно $20\ 8\ 8\ 8\ 6\ 5\ 4\ 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1^{19}$.

54. (а) Очевидно, истинно. Этот вопрос — всего лишь разминка.

(б) Истинно, хотя это не так очевидно. Если $\alpha^T = a'_1 a'_2 \dots$, то, рассматривая диаграмму Феррерса, получим

$$a_1 + \dots + a_k + a'_1 + \dots + a'_k \leq n + kl \quad \text{при } k \leq a'_l,$$

причем равенство достигается при $k = a'_l$. Таким образом, если $\alpha \succcurlyeq \beta$ и $a'_1 + \dots + a'_l > b'_1 + \dots + b'_l$ для некоторого l , при минимальном l мы получаем $n + kl = b_1 + \dots + b_k + b'_1 + \dots + b'_l < a_1 + \dots + a_k + a'_1 + \dots + a'_l \leq n + kl$, где $k = b'_l$, т.е. приходим к противоречию.

(с) Рекуррентное соотношение $c_k = \min(a_1 + \dots + a_k, b_1 + \dots + b_k) - (c_1 + \dots + c_{k-1})$, очевидно, определяет наибольшую нижнюю границу, если $c_1 c_2 \dots$ представляет собой разбиение. Это так, поскольку если $c_1 + \dots + c_k = a_1 + \dots + a_k$, то

$$\begin{aligned} 0 \leq \min(a_{k+1}, b_{k+1}) &\leq \min(a_{k+1}, b_{k+1} + b_1 + \dots + b_k - a_1 - \dots - a_k) = \\ &= c_{k+1} \leq a_{k+1} \leq a_k = c_k + (c_1 + \dots + c_{k-1}) - (a_1 + \dots + a_{k-1}) \leq c_k. \end{aligned}$$

(д) $\alpha \vee \beta = (\alpha^T \wedge \beta^T)^T$ (двойное сопряжение необходимо потому, что ориентированное на максимум рекуррентное соотношение, аналогичное соотношению из пункта (с), может не выполняться).

(е) $\alpha \wedge \beta$ имеет $\max(l, m)$ частей, а $\alpha \vee \beta - \min(l, m)$ частей. (Рассмотрите первые компоненты их сопряжений.)

(ф) Истинно для $\alpha \wedge \beta$, в соответствии с выводом (с). Ложно для $\alpha \vee \beta$ (хотя и истинно на рис. 32); например, $(17\ 16\ 5\ 4\ 3\ 2) \vee (17\ 9\ 8\ 7\ 6) = (17\ 16\ 5\ 5\ 4)$.

[Источник: Т. Brylawski, *Discrete Mathematics*, 6 (1973), 201–219.]

55. (а) Если $\alpha \triangleright \beta$ и $\alpha \succcurlyeq \gamma \succcurlyeq \beta$, где $\gamma = c_1 c_2 \dots$, то мы имеем $a_1 + \dots + a_k = c_1 + \dots + c_k = b_1 + \dots + b_k$ для всех k , за исключением $k = l$ и $k = l + 1$; таким образом, α покрывает β . Следовательно, β^T покрывает α^T .

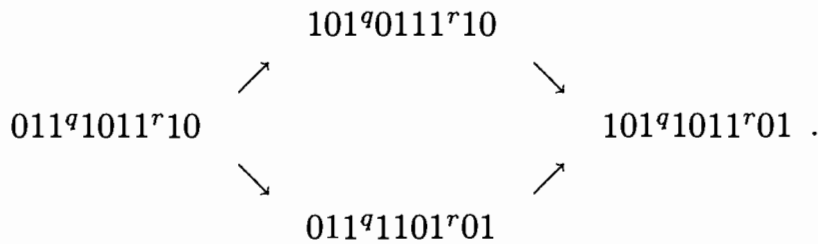
Обратно, если $\alpha \succcurlyeq \beta$ и $\alpha \neq \beta$, можно найти $\gamma \succcurlyeq \beta$, такое, что $\alpha \triangleright \gamma$ или $\gamma^T \triangleright \alpha^T$, следующим образом: найдем наименьшее k , для которого $a_k > b_k$, и наименьшее l , для которого $a_k > a_{l+1}$. Если $a_l > a_{l+1} + 1$, определим $\gamma = c_1 c_2 \dots$ следующим образом: $c_k = a_k - [k = l] + [k = l + 1]$. Если $a_l = a_{l+1} + 1$, найдем наименьшее l' , такое, что $a_{l+1} > a_{l'+1}$, и $c_k = a_k - [k = l'] + [k = l' + 1]$, если $a'_l > a_{l'+1} + 1$; в противном случае $c_k = a_k - [k = l] + [k = l' + 1]$.

(б) Пусть α и β представляют собой строки из n нулей и n единиц, как в (15). В этом случае $\alpha \triangleright \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \rightarrow \beta$, а $\beta^T \triangleright \alpha^T$ тогда и только тогда, когда $\alpha \Rightarrow \beta$, где ' \rightarrow ' означает замену подстроки вида 011^q10 подстрокой 101^q01 , а ' \Rightarrow ' означает замену подстроки вида 010^q10 подстрокой 100^q01 для некоторого $q \geq 0$.

(с) Разбиение покрывает не более $[a_1 > a_2] + \dots + [a_{m-1} > a_m] + [a_m > 2]$ других разбиений. Разбиение $\alpha = (n_2 + n_1 - 1)(n_2 - 2)(n_3 - 3) \dots 21$ максимизирует эту величину в случае $a_m = 1$; случаи с $a_m \geq 2$ не дают никакого улучшения. (Сопряженное разбиение $(n_2 - 1)(n_2 - 2) \dots 21^{n_1+1}$ обеспечивает ту же степень покрытия. Следовательно, и α и α^T также *покрываются* максимальным количеством других.)

(d) Что то же самое, последовательные части μ отличаются не более чем на 1, и наименьшая часть равна 1; краевое представление не содержит единиц, следующих одна за другой.

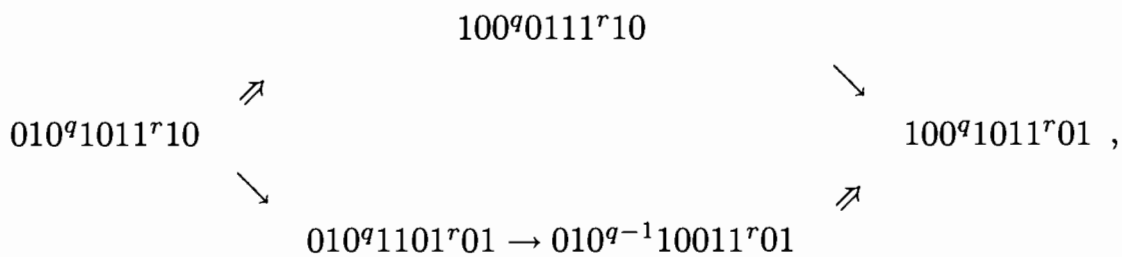
(е) Используем краевое представление и заменим \triangleright отношением \rightarrow . Если $\alpha \rightarrow \alpha_1$ и $\alpha \rightarrow \alpha'_1$, можно легко показать наличие строки β , такой, что $\alpha_1 \rightarrow \beta$ и $\alpha'_1 \rightarrow \beta$, например:



Пусть $\beta = \beta_2 \triangleright \dots \triangleright \beta_m$, где β_m минимально. Тогда по индукции по $\max(k, k')$ получаем $k = m$ и $\alpha_k = \beta_m$; также $k' = m$ и $\alpha'_{k'} = \beta_m$.

(f) Установить $\beta \leftarrow \alpha^T$; затем устанавливать $\beta \leftarrow \beta'$ до тех пор, пока β не станет минимальным, используя любые подходящие разбиения β' , такие, что $\beta \triangleright \beta'$. Искомое разбиение — β^T .

Доказательство: пусть $\mu(\alpha)$ — общее значение $\alpha_k = \alpha'_{k'}$ из пункта (е); мы должны доказать, что из $\alpha \triangleright \beta$ вытекает $\mu(\alpha) \triangleright \mu(\beta)$. Существует последовательность $\alpha = \alpha_0, \dots, \alpha_k = \beta$, в которой $\alpha_j \rightarrow \alpha_{j+1}$ или $\alpha_j \Rightarrow \alpha_{j+1}$ для всех $0 \leq j < k$. Если $\alpha_0 \rightarrow \alpha_1$, мы имеем $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_1)$; таким образом, этого достаточно, чтобы доказать, что из $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\alpha \rightarrow \alpha'$ вытекает $\alpha' \triangleright \mu(\beta)$. Однако мы имеем, например,



поскольку можем считать, что $q > 0$; прочие случаи аналогичны.

(g) Частями λ_n являются $a_k = n_2 + [k \leq n_1] - k$ для $1 \leq k < n_2$; частями λ_n^T являются $b_k = n_2 - k + [n_2 - k < n_1]$ для $1 \leq k \leq n_2$. Алгоритм из пункта (f) достигает λ_n^T из n^1 после $\binom{n_2+1}{3} - \binom{n_2-n_1}{2}$ шагов, поскольку каждый шаг увеличивает $\sum kb_k = \sum \binom{a_k+1}{2}$ на 1.

(h) Путь $n, (n-1)1, (n-2)2, (n-2)11, (n-3)21, \dots, 321^{n-5}, 31^{n-3}, 221^{n-4}, 21^{n-2}, 1^n$ длиной $2n - 4$ при $n \geq 3$ является кратчайшим.

Можно показать, что самый длинный путь имеет $m = 2 \binom{n_2}{3} + n_1(n_2 - 1)$ шагов. Один из таких путей имеет вид $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_l, \dots, \alpha_m$, где $\alpha_0 = n^1$; $\alpha_k = \lambda_n$; $\alpha_l = \lambda_n^T$; $\alpha_j \triangleright \alpha_{j+1}$ для $0 \leq j < l$; кроме того, $\alpha_{j+1}^T \triangleright \alpha_j^T$ для $k \leq j < m$.

[Источник: С. Greene and D.J. Kleitman, *Europ. J. Combinatorics*, **7** (1986), 1–10.]

56. Положим $\lambda = u_1 \dots u_m$ и $\mu = v_1 \dots v_m$. Приведенный далее (неоптимизированный) алгоритм применяет теорию из упражнения 54 для генерации разбиений в солексном порядке, поддерживая $\alpha = a_1 a_2 \dots a_m \preceq \mu$ и $\alpha^T = b_1 b_2 \dots b_l \preceq \lambda^T$. Для того чтобы найти следующий за α элемент, мы должны сначала найти наибольшее j , такое, что b_j может быть увеличено. Тогда мы имеем $\beta = b_1 \dots b_{j-1} (b_j + 1) 1 \dots 1 \preceq \lambda^T$, следовательно, искомым следующим элементом — $\beta^T \wedge \mu$. Алгоритм поддерживает вспомогательные таблицы $r_j = b_j + \dots + b_l$, $s_j = v_1 + \dots + v_j$ и $t_j = w_j + w_{j+1} + \dots$, где $\lambda^T = w_1 w_2 \dots$.

M1. [Инициализация.] Установить $q \leftarrow 0$, $k \leftarrow u_1$. Для $j = 1, \dots, m$, пока $u_{j+1} < k$, установить $t_k \leftarrow q \leftarrow q + j$ и $k \leftarrow k - 1$. Затем вновь установить $q \leftarrow 0$ и для $j = 1, \dots, m$ установить $a_j \leftarrow v_j$, $s_j \leftarrow q \leftarrow q + a_j$. Затем еще раз установить $q \leftarrow 0$ и $k \leftarrow l \leftarrow a_1$. Для $j = 1, \dots, m$, пока $a_{j+1} < k$, устанавливая $b_k \leftarrow j$, $r_k \leftarrow q \leftarrow q + j$, и $k \leftarrow k - 1$. И наконец установить $t_1 \leftarrow 0$, $b_0 \leftarrow 0$, $b_{-1} \leftarrow -1$.

M2. [Посещение.] Посетить разбиение $a_1 \dots a_m$ и/или сопряженное разбиение $b_1 \dots b_l$.

M3. [Поиск j .] Пусть j — наибольшее целое число, меньшее l , такое, что $r_{j+1} > t_{j+1}$ и $b_j \neq b_{j-1}$. Завершить работу алгоритма, если $j = 0$.

M4. [Увеличение b_j .] Установить $x \leftarrow r_{j+1} - 1$, $k \leftarrow b_j$, $b_j \leftarrow k + 1$ и $a_{k+1} \leftarrow j$. (Предыдущее значение a_{k+1} было равно $j - 1$. Теперь мы переходим к обновлению $a_1 \dots a_k$ с использованием, по сути, метода из упражнения 54 (с) для распределения x точек по столбцам $j + 1, j + 2, \dots$)

M5. [Мажоризация.] Установить $z \leftarrow 0$, а затем для $j = 1, \dots, k$ выполнить следующее: установить $x \leftarrow x + j$, $y \leftarrow \min(x, s_i)$, $a_i \leftarrow y - z$, $z \leftarrow y$. Если $i = 1$, установить $l \leftarrow p \leftarrow a_i$ и $q \leftarrow 0$; если $i > 1$, то, пока $p > a_i$, устанавливая $b_p \leftarrow i - 1$, $r_p \leftarrow q \leftarrow q + i - 1$, $p \leftarrow p - 1$. Наконец, пока $p > j$, устанавливая $b_p \leftarrow k$, $r_p \leftarrow q \leftarrow q + k$, $p \leftarrow p - 1$. Вернуться к шагу M2. \blacksquare

57. Если $\lambda = \mu^T$, очевидно, что существует только одна такая матрица, по сути представляющая собой диаграмму Феррерса для λ . Условие $\lambda \preceq \mu^T$ необходимое, поскольку, если $\mu^T = b_1 b_2 \dots$, мы имеем $b_1 + \dots + b_k = \min(c_1, k) + \min(c_2, k) + \dots$, и эта величина не должна быть меньше, чем количество единиц в первых k строках. Наконец, если существует матрица для λ и μ и если λ покрывает α , то можно легко построить матрицу для α и μ путем перемещения 1 из любой заданной строки в другую, которая имеет меньшее количество единиц.

Примечания: полученный результат часто называют теоремой Гейла-Райзера по знаменитым статьям Д. Гейла (D. Gale) [*Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1073–1082] и Г.Д. Райзера (H.J. Ryser) [*Canadian J. Math.*, **9** (1957), 371–377]. Однако количество 0–1 матриц с суммами строк λ и суммами столбцов μ представляет собой коэффициент при мономиальной симметричной функции $\sum x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots$ в произведении элементарных симметричных функций $e_{r_1} e_{r_2} \dots$, где

$$e_r = [z^r] (1 + x_1 z) (1 + x_2 z) (1 + x_3 z) \dots$$

В этом контексте полученный результат известен, как минимум, с 1930-х годов; см. формулу Д.Э. Литтлвуда (J.E. Littlewood) для $\prod_{m, n \geq 0} (1 + x_m y_n)$ в *Proc. London*

Math. Soc. (2), **40** (1936), 40–70. [Гораздо ранее, в *Philosophical Trans.*, **147** (1857), 489–499, А. Кейли (A. Cayley) показал, что лексикографическое условие $\lambda \leq \mu^T$ является необходимым.]

58. [R.F. Muirhead, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **21** (1903), 144–157.] Условие $\alpha \succcurlyeq \beta$ является необходимым, поскольку мы можем положить $x_1 = \dots x_k = x$ и $x_{k+1} = \dots = x_n = 1$ и при этом устремить $x \rightarrow \infty$. Оно достаточное, поскольку мы должны доказать его, только когда α покрывает β . Тогда, если, например, части (a_1, a_2) становятся $(a_1 - 1, a_2 + 1)$, левая часть равна правой плюс неотрицательная величина

$$\frac{1}{2m!} \sum x_{p_1}^{a_1} x_{p_2}^{a_2} \dots x_{p_m}^{a_m} (x_{p_1}^{a_1 - a_2 - 1} - x_{p_2}^{a_1 - a_2 - 1}) (x_{p_1} - x_{p_2}).$$

[*Исторические примечания:* статья Мюрхеда — наиболее раннее упоминание концепции, ныне известной как мажоризация; вскоре после Мюрхеда эквивалентное определение было дано М.О. Лоренцем в *Quarterly Publ. Amer. Stat. Assoc.*, **9** (1905), 209–219, где он интересовался исследованиями неравномерного распределения богатства. Еще одна эквивалентная концепция была сформулирована И. Шуром в *Sitzungsberichte Berliner Math. Gesellschaft*, **22** (1923), 9–20. Название “мажоризация” было введено Харди (Hardy), Литтлвудом (Littlewood) и Пойа (Polya), которые описали ее наиболее важные свойства в *Messenger of Math.*, **58** (1929), 145–152; см. упражнение 2.3.4.5–17. Полностью посвящена данной теме прекрасная книга А.В. Маршалла (A.W. Marshall) и И. Олкина (I. Olkin) *Inequalities* (Academic Press, 1979).]

59. Данной симметрией должны обладать по одному пути для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и 6 . Существует один такой путь для $n = 5$, а именно 11111, 2111, 221, 311, 32, 41, 5. Для $n = 7$ имеется четыре таких пути:

1111111, 211111, 22111, 2221, 322, 3211, 31111, 4111, 511, 421, 331, 43, 52, 61, 7;
 1111111, 211111, 22111, 2221, 322, 421, 511, 4111, 31111, 3211, 331, 43, 52, 61, 7;
 1111111, 211111, 31111, 22111, 2221, 322, 3211, 4111, 421, 331, 43, 52, 511, 61, 7;
 1111111, 211111, 31111, 22111, 2221, 322, 421, 4111, 3211, 331, 43, 52, 511, 61, 7.

Других путей нет, поскольку для всех $n \geq 8$ имеется, как минимум, по два самосопреженных разбиения (см. упражнение 16).

60. Вместо $L(6, 6)$ используйте (59); в противном случае везде используйте $L'(4, 6)$ и $L'(3, 5)$.

В $M(4, 18)$ вставьте 444222, 4442211 между 443322 и 4432221.

В $M(5, 11)$ вставьте 52211, 5222 между 62111 и 6221.

В $M(5, 20)$ вставьте 5542211, 554222 между 5552111 и 555221.

В $M(6, 13)$ вставьте 72211, 7222 между 62221 и 6322.

В $L(4, 14)$ вставьте 44222, 442211 между 43322 и 432221.

В $L(5, 15)$ вставьте 542211, 54222 между 552111 и 55221.

В $L(7, 12)$ вставьте 62211, 6222 между 72111 и 7221.

62. Утверждение выполняется при $n = 7, 8$ и 9 , за исключением двух случаев: $n = 8$, $m = 3$, $\alpha = 3221$; $n = 9$, $m = 4$, $\alpha = 432$.

64. Если $n = 2^k q$, где q нечетно, обозначим через ω_n разбиение $(2^k)^q$, т.е. q частей, равных 2^k . Рекурсивное правило

$$B(n) = B(n-1)^R 1, 2 \times B(n/2)$$

при $n > 0$, где $2 \times B(n/2)$, означает удвоение всех частей $B(n/2)$ (или пустой последовательности, если n нечетно), определяет путь Грея, начинающийся с $\omega_{n-1}1$ и заканчивающийся ω_n (в предположении, что $B(0)$ — единственное разбиение 0). Таким образом,

$$B(1) = 1; \quad B(2) = 11, 2; \quad B(3) = 21, 111; \quad B(4) = 1111, 211, 22, 4.$$

Среди множества замечательных свойств этой последовательности имеется следующее: при четном n

$$B(n) = (2 \times B(0))1^n, (2 \times B(1))1^{n-2}, (2 \times B(2))1^{n-4}, \dots, (2 \times B(n/2))1^0;$$

например:

$$B(8) = 11111111, 21111111, 2211111, 41111, 4211, 22211, 2222, 422, 44, 8.$$

Приведенный далее алгоритм без использования циклов генерирует $B(n)$ для $n \geq 2$.

- К1.** [Инициализация.] Установить $c_0 \leftarrow p_0 \leftarrow 0$, $p_1 \leftarrow 1$. Если n четно, установить $c_1 \leftarrow n$, $t \leftarrow 1$; в противном случае пусть $n-1 = 2^k q$, где q нечетно, и установить $c_1 \leftarrow 1$, $c_2 \leftarrow q$, $p_2 \leftarrow 2^k$, $t \leftarrow 2$.
- К2.** [Четное посещение.] Посетить разбиение $p_t^{c_t} \dots p_1^{c_1}$. (Сейчас $c_t + \dots + c_1$ четно.)
- К3.** [Изменение наибольшей части.] Если $c_t = 1$, разделить наибольшую часть: если $p_t \neq 2p_{t-1}$, установить $c_t \leftarrow 2$, $p_t \leftarrow p_t/2$; в противном случае установить $c_{t-1} \leftarrow c_{t-1} + 2$, $t \leftarrow t - 1$. Но, если $c_t > 1$, следует объединить две наибольшие части: если $c_t = 2$, установить $c_t \leftarrow 1$, $p_t \leftarrow 2p_t$; в противном случае установить $c_t \leftarrow c_t - 2$, $c_{t+1} \leftarrow 1$, $p_{t+1} \leftarrow 2p_t$, $t \leftarrow t + 1$.
- К4.** [Нечетное посещение.] Посетить разбиение $p_t^{c_t} \dots p_1^{c_1}$. (Сейчас $c_t + \dots + c_1$ нечетно.)
- К5.** [Изменение части, следующей за наибольшей.] Сейчас необходимо применить следующее преобразование: “Временно удалить $c_t - [t \text{ четно}]$ наибольших частей, затем применить шаг К3, после чего восстановить временно удаленные части”. Говоря более точно, имеется девять случаев:
- (1a) Если c_t нечетно и $t = 1$, завершить работу алгоритма.
- (1b1) Если c_t нечетно, $c_{t-1} = 1$ и $p_{t-1} = 2p_{t-2}$, установить $c_{t-2} \leftarrow c_{t-2} + 2$, $c_{t-1} \leftarrow c_t$, $p_{t-1} \leftarrow p_t$, $t \leftarrow t - 1$.
- (1b2) Если c_t нечетно, $c_{t-1} = 1$ и $p_{t-1} \neq 2p_{t-2}$, установить $c_{t-1} \leftarrow 2$, $p_{t-1} \leftarrow p_{t-1}/2$.
- (1c1) Если c_t нечетно, $c_{t-1} = 2$ и $p_t = 2p_{t-1}$, установить $c_{t-1} \leftarrow c_t + 1$, $p_{t-1} \leftarrow p_t$, $t = t - 1$.

- (1c2) Если c_t нечетно, $c_{t-1} = 2$ и $p_t \neq 2p_{t-1}$, установить $c_{t-1} \leftarrow 1$, $p_{t-1} \leftarrow 2p_{t-1}$.
- (1d1) Если c_t нечетно, $c_{t-1} > 2$ и $p_t = 2p_{t-1}$, установить $c_{t-1} \leftarrow c_{t-1} - 2$, $c_t \leftarrow c_t + 1$.
- (1d2) Если c_t нечетно, $c_{t-1} > 2$ и $p_t \neq 2p_{t-1}$, установить $c_{t+1} \leftarrow c_t$, $p_{t+1} \leftarrow p_t$, $c_t \leftarrow 1$, $p_t \leftarrow 2p_{t-1}$, $c_{t-1} \leftarrow c_{t-1} - 2$, $t \leftarrow t + 1$.
- (2a) Если c_t четно и $p_t = 2p_{t-1}$, установить $c_t \leftarrow c_t - 1$, $c_{t-1} \leftarrow c_{t-1} + 2$.
- (2b) Если c_t четно и $p_t \neq 2p_{t-1}$, установить $c_{t+1} \leftarrow c_t - 1$, $p_{t+1} \leftarrow p_t$, $c_t \leftarrow 2$, $p_t \leftarrow p_t/2$, $t \leftarrow t + 1$. Вернуться к шагу К2. \blacksquare

[Преобразование в шагах К3 и К5 аннулируют сами себя при повторном выполнении в строке. Это построение разработано Т. Колтарстом (Т. Colthurst) и М. Клебером (М. Kleber) в "A Gray path on binary partitions" (в печати). Эйлер рассматривал количество таких разбиений в § 50 своей статьи в 1750 году.]

65. Если $p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ — разложение m на простые множители, количество таких разложений равно $p(e_1) \dots p(e_r)$, и мы можем положить $n = \max(e_1, \dots, e_r)$. В самом деле, для каждого r -кортежа (x_1, \dots, x_r) , где $0 \leq x_k < p(e_k)$, мы можем положить $m_j = p_1^{a_{1j}} \dots p_r^{a_{rj}}$, где $a_{k1} \dots a_{kn} = (x_k + 1)$ -е разбиение e_k . Таким образом, мы можем использовать рефлексивный код Грея для r -кортежей совместно с кодом Грея для разбиений.

66. Пусть $a_1 \dots a_m$ — m -кортеж, удовлетворяющий указанным неравенствам. Мы можем отсортировать их в невозрастающем порядке $a_{x_1} \geq \dots \geq a_{x_m}$, где перестановка $x_1 \dots x_m$ однозначно определяется при условии *устойчивой* сортировки; см. формулу 5-(2).

Если $j < k$, имеем $a_j \geq a_k$, следовательно, j появляется слева от k в перестановке $x_1 \dots x_m$. Таким образом, $x_1 \dots x_m$ — одна из перестановок, получающихся на выходе алгоритма 7.2.1.2V. Кроме того, j находится слева от k и при $a_j = a_k$ и $j < k$ в соответствии со свойством устойчивости. Следовательно, a_{x_i} строго больше $a_{x_{i+1}}$, когда $x_i > x_{i+1}$ является "спуском".

Для генерации всех соответствующих разбиений n возьмем каждую из топологических перестановок $x_1 \dots x_m$ и сгенерируем разбиения $y_1 \dots y_m$ числа $n - t$, где t — индекс $x_1 \dots x_m$ (см. раздел 5.1.1). Для $1 \leq j \leq m$ установим $a_{x_j} \leftarrow y_j + t_j$, где t_j — количество спусков справа от x_j в $x_1 \dots x_m$.

Пусть, например, $x_1 \dots x_m = 314592687$, и мы хотим сгенерировать все случаи, для которых $a_3 > a_1 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_9 > a_2 \geq a_6 \geq a_8 > a_7$. В этом случае $t = 1 + 5 + 8 = 14$, так что мы устанавливаем $a_1 \leftarrow y_2 + 2$, $a_2 \leftarrow y_6 + 1$, $a_3 \leftarrow y_1 + 3$, $a_4 \leftarrow y_3 + 2$, $a_5 \leftarrow y_4 + 2$, $a_6 \leftarrow y_7 + 1$, $a_7 \leftarrow y_9$, $a_8 \leftarrow y_8 + 1$ и $a_9 \leftarrow y_5 + 2$. Обобщенная производящая функция $\sum z_1^{a_1} \dots z_9^{a_9}$ в смысле упражнения 29 имеет вид

$$\frac{z_1^2 z_2 z_3^3 z_4^2 z_5^2 z_6 z_8 z_9^2}{(1 - z_3)(1 - z_3 z_1)(1 - z_3 z_1 z_4)(1 - z_3 z_1 z_4 z_5) \dots (1 - z_3 z_1 z_4 z_5 z_9 z_2 z_6 z_8 z_7)}$$

Когда любым данным частичным упорядочением является \prec , обычная производящая функция для всех таких разбиений n имеет вид

$$\frac{\sum z^{\text{ind } \alpha}}{((1-z)(1-z^2)\dots(1-z^m))},$$

где сумма берется по всем выходам α алгоритма 7.2.1.2V.

[См. расширения и приложения этих идей в работе R.P. Stanley, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, **119** (1972). Информация о “холмистых” разбиениях имеется в L. Carlitz, *Studies in Foundations and Combinatorics* (New York: Academic Press, 1978), 101–129.]

67. Если $n + 1 = q_1 \dots q_r$, где все множители q_1, \dots, q_r не меньше 2, мы получим идеальное разбиение $\{(q_1 - 1) \cdot 1, (q_2 - 1) \cdot q_1, (q_3 - 1) \cdot q_1 q_2, \dots, (q_r - 1) \cdot q_1 \dots q_{r-1}\}$, которое очевидным образом соответствует смешанной позиционной системе счисления (имеет значение порядок множителей q_j).

И наоборот, таким образом можно получить все идеальные разбиения. Предположим, что мультимножество $M = \{k_1 \cdot p_1, \dots, k_m \cdot p_m\}$ является идеальным разбиением, причем $p_1 < \dots < p_m$. Тогда должно выполняться условие $p_j = (k_1 + 1) \dots (k_{j-1} + 1)$ для $1 \leq j \leq m$, поскольку p_j представляет собой наименьшую сумму подмультимножества M , которое не является подмультимножеством $\{k_1 \cdot p_1, \dots, k_{j-1} \cdot p_{j-1}\}$.

Идеальное разбиение n с наименьшим числом элементов получается тогда и только тогда, когда все q_j — простые, поскольку $pq - 1 > (p - 1) + (q - 1)$ для любых $p > 1$ и $q > 1$. Таким образом, например, минимальные идеальные разбиения 11 соответствуют упорядоченным разложениям $2 \cdot 2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 2$ и $3 \cdot 2 \cdot 2$. [Источник: *Quarterly Journal of Mathematics*, **21** (1886), 367–373.]

68. (а) Если $a_i + 1 \leq a_j - 1$ для некоторых i и j , мы можем заменить $\{a_i, a_j\}$ на $\{a_i + 1, a_j - 1\}$, таким образом увеличивая произведение на $a_j - a_i - 1 > 0$. Следовательно, оптимум достигается только при оптимально сбалансированном разбиении из упражнения 3. [L. Oettinger and J. Derbès, *Nouv. Ann. Math.*, **18** (1859), 442; **19** (1860), 117–118.]

(б) Ни одна из частей не равна 1; если $a_j \geq 4$, можно заменить эту часть на $2 + (a_j - 2)$ без уменьшения произведения. Таким образом, можно считать, что все части равны 2 или 3. Мы можем улучшить результат, заменяя $2 + 2 + 2$ на $3 + 3$, следовательно, в разложении имеется не более двух 2. Оптимум, таким образом, равен $3^{n/3}$, при $n \bmod 3 = 0$; при $n \bmod 3 = 1$ оптимум равен $4 \cdot 3^{(n-4)/3} = 3^{(n-4)/3} \cdot 2$. $\cdot 2 = (4/3^{4/3}) 3^{n/3}$; при $n \bmod 3 = 2$ оптимум — $3^{(n-2)/3} \cdot 2 = (2/3^{2/3}) 3^{n/3}$. [O. Meißner, *Mathematischnaturwissenschaftliche Blätter*, **4** (1907), 85.]

69. Все $n > 2$ имеют решение $(n, 2, 1, \dots, 1)$. Можно “отсеять” прочие случаи $\leq N$, начиная с $s_2 \dots s_N \leftarrow 1 \dots 1$, а затем устанавливая $s_{ak-b} \leftarrow 0$ для всех $ak - b \leq N$, где $a = x_1 \dots x_t - 1$, $b = x_1 + \dots + x_t - t - 1$, $k \geq x_1 \geq \dots \geq x_t$, и $a > 1$, поскольку $k + x_1 + \dots + x_t + (ak - b - t - 1) = kx_1 \dots x_t$. Последовательность (x_1, \dots, x_t) должна рассматриваться, только когда $(x_1 \dots x_t - 1)x_1 - (x_1 + \dots + x_t) < N - t$; можно также продолжать уменьшать N , с тем чтобы $s_N = 1$. Таким образом, следует испытать только (32 766, 1 486 539, 254 887, 1 511, 937, 478, 4) последовательностей (x_1, \dots, x_t) при начальном значении $N = 2^{30}$, при этом останутся только значения 2, 3, 4, 6, 24, 114, 174 и 444. [См. E. Trost, *Elemente der Math.*, **11** (1956), 135; M. Misiurewicz, *Elemente der Math.*, **21** (1966), 90.]

Примечания. Похоже, новых значений при $N \rightarrow \infty$ не появится, но для их исключения требуется новая идея. Простейшие последовательности $(x_1, \dots, x_t) = (3)$ и $(2, 2)$ исключают все $n > 5$, для которых $n \bmod 6 \neq 0$; этот факт можно использовать для ускорения вычислений в 6 раз. Последовательности (6) и $(3, 2)$ исключают 40% оставшихся значений (а именно все n вида $5k - 4$ и $5k - 2$); последовательности (8) , $(4, 2)$ и $(2, 2, 2)$ исключают $3/7$ остатка; последовательности с $t = 1$ требуют, чтобы $n - 1$ было простым. Последовательности, в которых $x_1 \dots x_t = 2^r$, исключают около $p(r)$ вычетов $n \bmod (2^r - 1)$. Последовательности, в которых $x_1 \dots x_t$ является произведением r различных простых чисел, исключают около ϖ_r вычетов $n \bmod (x_1 \dots x_t - 1)$.

70. Каждый шаг превращает одно разбиение n в другое, и в конечном счете мы получаем повторяющийся цикл. У многих разбиений просто выполняется циклический сдвиг по диагоналям, идущим сверху справа влево вниз на диаграмме Феррерса, превращая ее

	x_1	x_2	x_4	x_7	x_{11}	x_{16}	\dots		x_1	x_3	x_6	x_{10}	x_{15}	x_{21}	\dots
	x_3	x_5	x_8	x_{12}	x_{17}	x_{23}	\dots		x_2	x_4	x_7	x_{11}	x_{16}	x_{22}	\dots
	x_6	x_9	x_{13}	x_{18}	x_{24}	x_{31}	\dots		x_5	x_8	x_{12}	x_{17}	x_{23}	x_{30}	\dots
из	x_{10}	x_{14}	x_{19}	x_{25}	x_{32}	x_{40}	\dots	в	x_9	x_{13}	x_{18}	x_{24}	x_{31}	x_{39}	\dots
	x_{15}	x_{20}	x_{26}	x_{33}	x_{41}	x_{50}	\dots		x_{14}	x_{19}	x_{25}	x_{32}	x_{40}	x_{49}	\dots
	x_{21}	x_{27}	x_{34}	x_{42}	x_{51}	x_{61}	\dots		x_{20}	x_{26}	x_{33}	x_{41}	x_{50}	x_{60}	\dots
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

другими словами, к ячейкам применяется перестановка $\rho = (1)(23)(456)(78910) \dots$. Исключения возникают только тогда, когда ρ попадает на пустую ячейку над точкой; например, x_{10} может быть пустой, а x_{11} — нет. Однако в таких случаях новую корректную диаграмму можно получить, перемещая верхнюю строку вниз в корректное место после применения ρ . Такое перемещение всегда снижает количество занятых диагоналей, так что оно не может быть частью цикла. Таким образом, каждый цикл состоит только из перестановок ρ .

Если некоторый элемент на диагонали в циклическом разбиении пуст, то все элементы следующей диагонали должны быть пусты. Если, скажем, x_5 пуст, многократное применение ρ сделает x_5 соседним с каждой из ячеек x_7, x_8, x_9, x_{10} следующей диагонали. Следовательно, если $n = \binom{n_2}{2} + \binom{n_1}{1}$ при $n_2 > n_1 \geq 0$, циклические состояния те же, что при $n_2 - 1$ полностью заполненных диагоналях и n_1 точках в следующей. [Этот результат получен Й. Брандтом (J. Brandt) и описан в *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85** (1982), 483–486. Происхождение задачи неизвестно; см. Martin Gardner, *The Last Recreations* (1997), Chapter 2.]

71. Когда $n = 1 + \dots + m > 1$, начальное разбиение $(m - 1)(m - 1)(m - 2) \dots 211$ имеет расстояние $m(m - 1)$ от циклического, и это расстояние максимально. [K. Igusa, *Math. Magazine*, **58** (1985), 259–271; G. Etienne, *J. Combin. Theory*, **A58** (1991), 181–197.] В общем случае Григгс (Griggs) и Хо (Ho) высказали гипотезу, что максимальное расстояние до цикла равно $\max(2n + 2 - n_1(n_2 + 1), n + n_2 + 1, n_1(n_2 + 1)) - 2n_2$ для всех $n > 1$; их гипотеза проверена для $n \leq 100$. Кроме того, наихудшее разбиение, похоже, единственно при $n_2 = 2n_1 + \{-1, 0, 2\}$.

72. (а) Обменяем j -е появление k в разбиении $n = j \cdot k + \alpha$ с k -м появлением j в разбиении $k \cdot j + \alpha$, для каждого разбиения α числа $n - jk$. Например, при $n = 6$ обмены представляют собой

6, 51, 42, 411, 33, 321, 3111, 222, 2211, 21111, 111111.
 a b1 fg c1g hi jk1 d1kh n2i m21n e1mjf 1edcba

(b) $p(n-k) + p(n-2k) + p(n-3k) + \dots$ [А.Н.М. Ноаре, АММ, 93 (1986), 475–476.]

Раздел 7.2.1.5

1. Всякий раз, когда на шаге Н6 m устанавливается равным r , следует заменить его значение на $r - 1$.

2. L1. [Инициализация.] Установить $l_j \leftarrow j - 1$ и $a_j \leftarrow 0$ для $0 \leq j \leq n$. Установить также $h_1 \leftarrow n$, $t_1 \leftarrow 1$ и установить l_0 равным любому подходящему ненулевому значению.

L2. [Посещение.] Посетить t -блочное разбиение, представленное $l_1 \dots l_n$ и $h_1 \dots h_t$. (Ограниченно растущая строка, соответствующая этому разбиению — $a_1 \dots a_n$.)

L3. [Поиск j .] Установить $j \leftarrow n$; затем, пока $l_j = 0$, устанавливать $j \leftarrow j - 1$ и $t \leftarrow t - 1$.

L4. [Перемещение j в следующий блок.] Завершить работу алгоритма, если $j = 0$. В противном случае установить $k \leftarrow a_j + 1$, $h_k \leftarrow l_j$, $a_j \leftarrow k$. Если $k = t$, установить $t \leftarrow t + 1$ и $l_j \leftarrow 0$; в противном случае установить $l_j \leftarrow h_{k+1}$. И наконец, установить $h_{k+1} \leftarrow j$.

L5. [Перемещение $j+1, \dots, n$ в блок 1.] Пока $j < n$, устанавливать $j \leftarrow j+1$, $l_j \leftarrow h_1$, $a_j \leftarrow 0$, $h_1 \leftarrow j$. Вернуться к шагу L2. ▮

3. Пусть $\tau(k, n)$ — количество строк $a_1 \dots a_n$, удовлетворяющих условию $0 \leq a_j \leq 1 + \max(k-1, a_1, \dots, a_{j-1})$ для $1 \leq j \leq n$; так, $\tau(k, 0) = 1$, $\tau(0, n) = \varpi_n$ и $\tau(k, n) = k\tau(k, n-1) + \tau(k+1, n-1)$. [С.Д. Вильямсон (S.G. Williamson) назвал $\tau(k, n)$ “хвостовым коэффициентом” (tail coefficient); см. SICOMP, 5 (1976), 602–617.] Количество строк, которые генерируются алгоритмом Н перед заданной ограниченно растущей строкой $a_1 \dots a_n$ равно $\sum_{j=1}^n a_j \tau(b_j, n-j)$, где $b_j = 1 + \max(a_1, \dots, a_{j-1})$. Выполняя расчеты при помощи предвычисленной таблицы хвостовых коэффициентов, мы находим, что приведенная формула дает 999999 при $a_1 \dots a_{12} = 010220345041$.

4. Наиболее распространенные представители каждого типа следующие (индекс указывает количество таких слов в GraphBase): zzzzz₀, ooooh₀, xxxix₀, xxxii₀, oops₀, llull₀, llala₀, eeler₀, iitti₀, xxiii₀, ccxxv₀, eerie₁, llama₁, xxvii₀, oozed₅, uhuuu₀, mamma₁, puppy₂₈, anana₀, hehee₀, vivid₁₅, rarer₃, etext₁, amass₂, again₁₃₇, ahhaa₀, esses₁, teeth₂₅, yaaay₀, ahhhh₂, pssst₂, seems₇, added₆, lxxii₀, books₁₈₄, swiss₃, sense₁₀, ended₃, check₁₆₀, level₁₈, tepee₄, slyly₅, never₁₅₄, sells₆, motto₂₁, whooo₂, trees₃₈₄, going₃₀₇, which₁₅₁, there₁₇₄, three₁₇₄, their₃₈₃₄. [См. S. Golomb, Math. Mag., 53 (1980), 219–221. Слова только с двумя различными буквами, редки. Восемнадцать представителей, перечисленные здесь с индексом 0, можно найти в больших словарях или на англоязычных страницах в Интернете.]

5. (a) $112 = \rho(0225)$. Это последовательность $r(0), r(1), r(4), r(16), \dots$, где $r(n)$ получается путем записи n в виде десятичного числа (с одним или несколькими ведущими нулями), применения функции ρ из упражнения 4 и удаления ведущих нулей. Обратите внимание, что $n/9 \leq r(n) \leq n$.

(b) $1012 = r(45^2)$. Последовательность та же, что и в пункте (a), но отсортированная и с удаленными дубликатами. (Кто же думал, что $88^2 = 7744$, $212^2 = 44944$, а $264^2 = 69696$?)

6. Воспользуемся подходом с применением топологической сортировки из алгоритма 7.2.1.2V: включаем c_j цепочек длины j с упорядоченными наименьшими элементами. Например, если $n = 20$, $c_2 = 3$ и $c_3 = c_4 = 2$, мы используем упомянутый алгоритм для поиска всех перестановок $a_1 \dots a_{20}$ множества $\{1, \dots, 20\}$, таких, что $1 < 2, 3 < 4, 5 < 6, 1 < 3 < 5, 7 < 8 < 9, 10 < 11 < 12, 7 < 10, 13 < 14 < 15 < 16, 17 < 18 < 19 < 20, 13 < 17$, образуем ограниченно растущие строки $\rho(f(a_1) \dots f(a_{20}))$, где ρ — определенная в упражнении 4 функция, а $(f(1), \dots, f(20)) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7)$. Общее количество выходных данных определяется формулой (48).

7. Ровно ϖ_n . Это перестановки, которые мы получим обращением порядка слева направо блоков в (2) и опусканием символа '|': 1234, 4123, 3124, 3412, ..., 4321. [См. A. Claesson, *European J. Combinatorics*, **22** (2001), 961–971. С.В. Китаев в своей работе “Partially ordered generalized patterns”, *Discrete Math.* (в печати) открыл далеко идущее обобщение. Пусть π — перестановка $\{0, \dots, r\}$, g_n — количество перестановок $a_1 \dots a_n$ множества $\{1, \dots, n\}$, таких, что из $a_{k-0\pi} > a_{k-1\pi} > \dots > a_{k-r\pi} > a_j$ вытекает $j > k$, и пусть f_n — количество перестановок $a_1 \dots a_n$, для которых шаблон $a_{k-0\pi} > a_{k-1\pi} > \dots > a_{k-r\pi}$ полностью отсутствует для $r < k \leq n$. Тогда $\sum_{n \geq 0} g_n z^n / n! = \exp\left(\sum_{n \geq 1} f_{n-1} z^n / n!\right)$.]

8. Для каждого разбиения множества $\{1, \dots, n\}$ на m блоков расположим блоки в порядке убывания их наименьших элементов и будем переставлять все элементы блоков, кроме наименьших, всеми возможными способами. Например, при $n = 9$ и $m = 3$ разбиение 126|38|4579 дает нам 457938126 и 11 прочих случаев, полученных из данного путем перестановок элементов множеств $\{5, 7, 9\}$ и $\{2, 6\}$ в рамках этих множеств. (По сути, тот же метод генерирует все перестановки, имеющие ровно k циклов; см. подраздел “Замечательное соответствие” в разделе 1.3.3.)

9. Среди перестановок мультимножества $\{k_0 \cdot 0, k_1 \cdot 1, \dots, k_{n-1} \cdot (n-1)\}$ ограниченным ростом обладают ровно

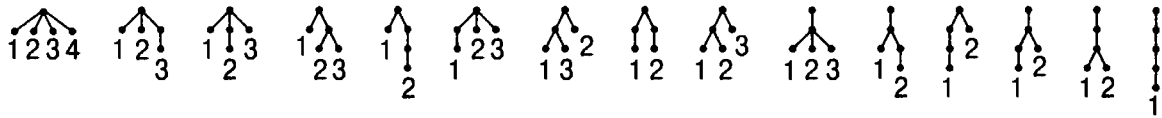
$$\binom{k_0 + k_1 + \dots + k_{n-1}}{k_0, k_1, \dots, k_{n-1}} \frac{k_0}{(k_0 + k_1 + \dots + k_{n-1})} \frac{k_1}{(k_1 + \dots + k_{n-1})} \dots \frac{k_{n-1}}{k_{n-1}}$$

из них, поскольку $k_j / (k_j + \dots + k_{n-1})$ представляет собой вероятность того, что j предшествует значениям $\{j+1, \dots, n-1\}$.

Среднее количество нулей при $n > 0$ равно $1 + (n-1) \varpi_{n-1} / \varpi_n = \Theta(\log n)$, поскольку общее количество нулей во всех ϖ_n случаях равно $\sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} \varpi_{n-k} = \varpi_n + (n-1) \varpi_{n-1}$.

10. Для данного разбиения построим ориентированное дерево на множестве $\{0, 1, \dots, n\}$ так, что $j-1$ является родительским узлом по отношению к блоку, наи-

меньший член которого — j . Затем пометим листья, сохраняя порядок, и удалим остальные метки. Например, 15 разбиений в (2) соответствуют деревьям



Чтобы обратить процесс, возьмем полупомеченное дерево и присвоим новые номера его узлам, рассматривая сначала узлы, встречающиеся на пути от корня к наименьшему листу, затем ко второму по величине листу и т.д. Количество листьев равно $n + 1$ минус количество блоков. [Эта конструкция тесно связана с упражнением 2.3.4.4–18 и многими перечислениями в соответствующем разделе. См. P.L. Erdős and L.A. Székely, *Advances in Applied Math.*, **10** (1989), 488–496.]

11. Мы получим головоломки в 900 из 64 855 разбиений множества не более чем на 10 блоков, для которых $\rho(a_1 \dots a_{13}) = \rho(a_5 \dots a_8 a_1 \dots a_4 a_9 \dots a_{13})$, и в 563 527 из 13 788 536 разбиений, для которых $\rho(a_1 \dots a_{13}) < \rho(a_5 \dots a_8 a_1 \dots a_4 a_9 \dots a_{13})$. Примерами первого типа являются $aaaa + aaaa = baaac$, $aaaa + aaaa = bbbbc$ и $aaaa + aaab = baaac$; примерами последнего типа — $abcd + efcd = dceab$ ($goat + newt = tango$) и $abcd + efcd = dceaf$ ($clad + nerd = dance$). [Идея использования генератора разбиений для решения головоломок принадлежит Алану Сатклиффу (Alan Sutcliffe).]

12. (a) Строим $\rho((a_1 a'_1) \dots (a_n a'_n))$, где ρ определено в упражнении 4, поскольку $x \equiv y \pmod{\Pi \vee \Pi'}$ тогда и только тогда, когда $x \equiv y \pmod{\Pi}$ и $x \equiv y \pmod{\Pi'}$.

(b) Представим Π при помощи связей, как это было сделано в упражнении 2; представим Π' как в алгоритме 2.3.3E и используем этот алгоритм для того, чтобы сделать $j \equiv l_j$ при $l_j \neq 0$ (для повышения эффективности можно считать, что Π имеет столько же блоков, что и Π').

(c) Когда один блок Π разбивается на две части; т.е. когда два блока Π' были слиты.

(d) $\binom{t}{2}$.

(e) $(2^{s_1-1} - 1) + \dots + (2^{s_t-1} - 1)$.

(f) Истинно. Пусть $\Pi \vee \Pi'$ содержит блоки $B_1 | B_2 | \dots | B_t$, где $\Pi = B_1 B_2 | B_3 | \dots | B_t$. Тогда Π' , по сути, является разбиением множества $\{B_1, \dots, B_t\}$, таким, что $B_1 \equiv B_2$, а $\Pi \wedge \Pi'$ получается путем слияния блока Π' , который содержит B_1 , с блоком, который содержит B_2 . [Конечная решетка, которая удовлетворяет этому условию, называется *нижней полумодулярной* (lower semimodular); см. G. Birkhoff, *Lattice Theory* (1940), § I.8. Решетка мажоризации из упражнения 7.2.1.4–54 не обладает данным свойством; например, когда $\alpha = 4111$, а $\alpha' = 331$.]

(g) Ложно. Пусть, например, $\Pi = 0011$, $\Pi' = 0101$.

(h) Блоки Π и Π' представляют собой объединения блоков $\Pi \vee \Pi'$, так что можно считать, что $\Pi \vee \Pi' = \{1, \dots, t\}$. Как и в пункте (b), объединим j с l_j для получения за r шагов Π , имеющего $t - r$ блоков. Будучи примененными к Π' , каждое из этих объединений снижает количество блоков на 0 или 1. Следовательно, $b(\Pi') - b(\Pi \wedge \Pi') \leq r = b(\Pi \vee \Pi') - b(\Pi)$.

[В *Algebra Universalis*, **10** (1980), 74–95, П. Пудлак (P. Pudlák) и И. Тума (J. Tuma) доказали, что каждая конечная решетка представляет собой подрешетку решетки разбиений $\{1, \dots, n\}$ для соответствующего большого значения n .]

13. [См. *Advances in Math.*, **26** (1977), 290–305.] Если j наибольших элементов t -блочного разбиения находятся в отдельных блоках, состоящих из одного элемента, а следующие $n - j$ элементов — нет, то будем говорить, что разбиение имеет порядок $t - j$. Определим “строку Стирлинга” Σ_{nt} как последовательность порядков t -блочных разбиений Π_1, Π_2, \dots ; например, $\Sigma_{43} = 122333$. Тогда $\Sigma_{tt} = 0$, и мы получаем $\Sigma_{(n+1)t}$ из Σ_{nt} путем замены в строке Σ_{nt} каждой цифры d строкой $d^d (d+1)^{d+1} \dots t^t$ длиной $\binom{t+1}{2} - \binom{d}{2}$; например,

$$\Sigma_{53} = 1223332233322333333333333333.$$

Основная идея состоит в рассмотрении процесса лексикографической генерации алгоритма Н. Предположим, что $\Pi = a_1 \dots a_n$ — t -блочное разбиение порядка j ; тогда оно является лексикографически наименьшим t -блочным разбиением, ограниченно растущая строка которого начинается с $a_1 \dots a_{n-t+j}$. Разбиениями, покрываемыми разбиением Π , являются (в лексикографическом порядке) $\Pi_{12}, \Pi_{13}, \Pi_{23}, \Pi_{14}, \Pi_{24}, \Pi_{34}, \dots, \Pi_{(t-1)t}$, где Π_{rs} означает “объединение блоков s и r разбиения Π ” (т.е. “замена всех появлений $s - 1$ на $r - 1$ и применение функции ρ для получения ограниченно растущей строки). Если Π' представляет собой одно из последних $\binom{t}{2} - \binom{j}{2}$ из указанных разбиений, от $\Pi_{1(j+1)}$ и далее, то Π — наименьшее t -блочное разбиение, за которым следует Π' . Например, если $\Pi = 001012034$, то $n = 9$, $t = 5$, $j = 3$, а соответствующие разбиения Π' представляют собой $\rho(001012004)$, $\rho(001012014)$, $\rho(001012024)$, $\rho(001012030)$, $\rho(001012031)$, $\rho(001012032)$, $\rho(001012033)$.

Следовательно, $f_{nt}(N) = f_{nt}(N-1) + \binom{t}{2} - \binom{j}{2}$, где j — N -я цифра Σ_{nt} .

14. Е1. [Инициализация.] Установить $a_j \leftarrow 0$ и $b_j \leftarrow d_j \leftarrow 1$ для $1 \leq j \leq n$.

Е2. [Посещение.] Посетить ограниченно растущую строку $a_1 \dots a_n$.

Е3. [Поиск j .] Установить $j \leftarrow n$; затем, пока $a_j = d_j$, устанавливать $d_j \leftarrow 1 - d_j$ и $j \leftarrow j - 1$.

Е4. [Выполнено?] Завершить работу алгоритма, если $j = 1$. Иначе если $d_j = 0$, перейти к шагу Е6.

Е5. [Перемещение вниз.] Если $a_j = 0$, установить $a_j \leftarrow b_j$, $m \leftarrow a_j + 1$ и перейти к шагу Е7. Иначе если $a_j = b_j$, установить $a_j \leftarrow b_j - 1$, $m \leftarrow b_j$ и перейти к шагу Е7. В противном случае установить $a_j \leftarrow a_j - 1$ и вернуться к шагу Е2.

Е6. [Перемещение вверх.] Если $a_j = b_j - 1$, установить $a_j \leftarrow b_j$, $m \leftarrow a_j + 1$ и перейти к шагу Е7. Иначе если $a_j = b_j$, установить $a_j \leftarrow 0$, $m \leftarrow b_j$ и перейти к шагу Е7. В противном случае установить $a_j \leftarrow a_j + 1$ и вернуться к шагу Е2.

Е7. [Установка $b_{j+1} \dots b_n$.] Установить $b_k \leftarrow m$ для $k = j + 1, \dots, n$. Вернуться к шагу Е2. |

[Этот алгоритм можно существенно оптимизировать, поскольку, как и в алгоритме Н, j почти всегда равно n .]

15. Оно соответствует первым n цифрам бесконечной бинарной строки $01011011011\dots$, поскольку ϖ_{n-1} четно тогда и только тогда, когда $n \bmod 3 = 0$ (см. упражнение 23).

16. 00012, 01012, 01112, 00112, 00102, 01102, 01002, 01202, 01212, 01222, 01022, 01122, 00122, 00121, 01121, 01021, 01221, 01211, 01201, 01200, 01210, 01220, 01020, 01120, 00120.

17. Описанное далее решение использует две взаимно рекурсивные процедуры, $f(\mu, \nu, \sigma)$ и $b(\mu, \nu, \sigma)$ для “прямой” и “обратной” генерации $A_{\mu\nu}$ при $\sigma = 0$ и $A'_{\mu\nu}$ при $\sigma = 1$. Чтобы начать процесс, полагая, что $1 < m < n$, нужно сначала установить $a_j \leftarrow 0$ для $1 \leq j \leq n - m$ и $a_{n-m+j} \leftarrow j - 1$ для $1 \leq j \leq m$, а затем вызвать $f(m, n, 0)$.

Процедура $f(\mu, \nu, \sigma)$. Если $\mu = 2$, посетить $a_1 \dots a_n$; в противном случае вызвать $f(\mu - 1, \nu - 1, (\mu + \sigma) \bmod 2)$. Затем, если $\nu = \mu + 1$, выполнить следующие действия: изменить значение a_μ с 0 на $\mu - 1$ и посетить $a_1 \dots a_n$; затем установить $a_\nu \leftarrow a_\nu - 1$ и посетить $a_1 \dots a_n$, повторяя эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $a_\nu = 0$. Но если $\nu > \mu + 1$, изменить $a_{\nu-1}$ (если $\mu + \sigma$ нечетно) или a_μ (если $\mu + \sigma$ четно) с 0 на $\mu - 1$; затем вызвать $b(\mu, \nu - 1, 0)$, если $a_\nu + \sigma$ нечетно, или $f(\mu, \nu - 1, 0)$, если $a_\nu + \sigma$ четно; и пока $a_\nu > 0$, устанавливая $a_\nu \leftarrow a_\nu - 1$ и вызывая $b(\mu, \nu - 1, 0)$ или $f(\mu, \nu - 1, 0)$, как описано выше, повторяя эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $a_\nu = 0$.

Процедура $b(\mu, \nu, \sigma)$. Если $\nu = \mu + 1$, сначала выполнить следующее: посетить $a_1 \dots a_n$ и установить $a_\nu \leftarrow a_\nu + 1$, повторяя эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $a_\nu = \mu - 1$; затем посетить $a_1 \dots a_n$ и изменить a_μ с $\mu - 1$ до 0. Но если $\nu > \mu + 1$, вызвать $f(\mu, \nu - 1, 0)$, если $a_\nu + \sigma$ нечетно, или $b(\mu, \nu - 1, 0)$, если $a_\nu + \sigma$ четно; затем, пока $a_\nu < \mu - 1$, устанавливая $a_\nu \leftarrow a_\nu + 1$ и вызывая $f(\mu, \nu - 1, 0)$ или $b(\mu, \nu - 1, 0)$, как описано выше, повторяя эти действия до тех пор, пока не будет выполнено условие $a_\nu = \mu - 1$; наконец, изменить $a_{\nu-1}$ (если $\mu + \sigma$ нечетно) или a_μ (если $\mu + \sigma$ четно) с $\mu - 1$ на 0. В конце, в обоих случаях, если $\mu = 2$, посетить $a_1 \dots a_n$, в противном случае вызвать $b(\mu - 1, \nu - 1, (\mu + \sigma) \bmod 2)$.

Большая часть времени тратится на обработку случая $\mu = 2$; в этом случае можно применить более быстрые подпрограммы, основанные на бинарном коде Грея (и отличающиеся от последовательности Раски). Более эффективная процедура может использоваться и при $\mu = \nu - 1$.

18. Последовательность должна начинаться (или заканчиваться) элементом $01 \dots (n - 1)$. В соответствии с упражнением 32 указанный код Грея не существует, если $0 \neq \delta_n \neq (1)^{0+1+\dots+(n-1)}$, т.е. когда $n \bmod 12$ равно 4, 6, 7 или 9.

Случай $n = 1, 2, 3$ легко разрешимы; при $n = 5$ имеется 1 927 683 326 решений. Следовательно, вероятно, имеется несчетное количество решений при $n \geq 8$, за исключением указанных значений n . На самом деле, вероятно, можно найти такой путь Грея по всем ϖ_{nk} рассматриваемым в упражнении 28 (е) строкам, за исключением случаев $n \equiv 2k + (2, 4, 5, 7) \pmod{12}$.

Примечание: обобщенное число Стирлинга $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}_{-1}$ из упражнения 30 больше 1 при $2 < m < n$, так что такого кода Грея для разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на m блоков может не быть.

19. (а) Необходимо заменить (6) шаблоном $0, 2, \dots, m, \dots, 3, 1$ или обратным к нему, как в случае чун-упорядоченной (endo-order) последовательности 7.2.1.3-(45).

(б) Можно обобщить (8) и (9) для получения последовательностей A_{mna} и A'_{mna} , которые начинаются с $0^{n-m}01 \dots (m - 1)$ и заканчиваются $01 \dots (m - 1)\alpha$ и $0^{n-m-1}01 \dots (m - 1)a$ соответственно, где $0 \leq a \leq m - 2$, а α — любая строка

$a_1 \dots a_{n-m}$, такая, что $0 \leq a_j \leq m - 2$. При $2 < m < n$ новые рекурсивные соотношения выглядят следующим образом:

$$A_{m(n+1)(\alpha\alpha)} = \begin{cases} A_{(m-1)n(b\beta)}x_1, A_{mn\beta}^R x_1, A_{mn\alpha}x_2, \dots, A_{mn\alpha}x_m, & \text{если } m \text{ четно;} \\ A'_{(m-1)nb}x_1, A_{mn\alpha}x_1, A_{mn\alpha}^R x_2, \dots, A_{mn\alpha}x_m, & \text{если } m \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$A'_{m(n+1)a} = \begin{cases} A'_{(m-1)nb}x_1, A_{mn\beta}x_1, A_{mn\beta}^R x_2, \dots, A_{mn\beta}^R x_m, & \text{если } m \text{ четно;} \\ A_{(m-1)n(b\beta)}x_1, A_{mn\beta}^R x_1, A_{mn\beta}x_2, \dots, A_{mn\beta}^R x_m, & \text{если } m \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Здесь $b = m - 3$, $\beta = b^{n-m}$, а (x_1, \dots, x_m) — путь от $x_1 = m - 1$ до $x_m = a$.

20. 012323212122; в общем случае $(a_1 \dots a_n)^T = \rho(a_n \dots a_1)$, с использованием обозначения из упражнения 4.

21. Числа $\langle s_0, s_1, s_2, \dots \rangle = \langle 1, 1, 2, 3, 7, 12, 31, 59, 164, 339, 999, \dots \rangle$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $s_{2n+1} = \sum_k \binom{n}{k} s_{2n-2k}$, $s_{2n+2} = \sum_k \binom{n}{k} (2^k + 1) s_{2n-2k}$ из-за связи средних элементов с другими. Поэтому $s_{2n} = n! [z^n] \exp((e^{2z} - 1)/2 + e^z - 1)$ и $s_{2n+1} = n! [z^n] \exp((e^{2z} - 1)/2 + e^z + z - 1)$. Рассматривая разбиения множества в первой половине, мы также получим $s_{2n} = \sum_k \binom{n}{k} x_k$ и $s_{2n+1} = \sum_k \binom{n+1}{k} x_{k-1}$, где $x_n = 2x_{n-1} + (n-1)x_{n-2} = n! [z^n] \exp(2z + z^2/2)$. [Т.С. Моцкин (T.S. Motzkin) рассматривает последовательность $\langle s_{2n} \rangle$ в *Proc. Symp. Pure Math.*, **19** (1971), 173.]

22. (a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^n \Pr(X = k) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} k^n / k! = \varpi_n$ в соответствии с (16).

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} k^n \Pr(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \sum_{j=0}^m \binom{j}{k} (-1)^{j-k} / j!$; внутреннюю сумму можно расширить до $j = \infty$, поскольку $\sum_k \binom{j}{k} (-1)^k k^n = 0$ при $j > n$. Таким образом, получаем $\sum_{k=0}^{\infty} (k^n / k!) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l / l! = \varpi_n$. [См. J.O. Irwin, *J. Royal Stat. Soc.*, **A118** (1955), 389–404; J. Pitman, *АММ*, **104** (1997), 201–209.]

23. (a) В соответствии с (14) формула справедлива для $f(x) = x^n$, так что она выполняется и в общем случае. (Таким образом, с учетом (16) мы также получаем $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)/k! = ef(\varpi)$.)

(b) Предположим, что мы доказали данное отношение для k , и пусть $h(x) = (x-1)^k f(x)$, $g(x) = f(x+1)$. Тогда $f(\varpi+k+1) = g(\varpi+k) = \varpi^k g(\varpi) = h(\varpi+1) = \varpi h(\varpi) = \varpi^{k+1} f(\varpi)$. [См. J. Touchard, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, **53** (1933), 21–31. Такое символическое “теневое вычисление”, открытое Джоном Блиссардом (John Blissard) и описанное в *Quart. j. Pure and Applied Math.*, **4** (1861), 279–305, оказывается весьма полезным; однако пользоваться им нужно осторожно, поскольку из $f(\varpi) = g(\varpi)$ не следует, что $f(\varpi)h(\varpi) = g(\varpi)h(\varpi)$.]

(c) Указание представляет собой частный случай упражнения 4.6.2–16 (c). Использование в (b) $f(x) = x^n$ и $k = p$ приводит к $\varpi_n \equiv \varpi_{p+n} - \varpi_{1+n}$.

(d) Полином $x^N - 1$ делится на $g(x) = x^p - x - 1$ по модулю p , поскольку $x^{p^k} \equiv x + k$ и $x^N \equiv x^{\bar{p}} \equiv x^p \equiv x^p - x \equiv 1 \pmod{g(x) \text{ и } p}$. Таким образом, если $h(x) = (x^N - 1)x^n / g(x)$, то мы получаем $h(\varpi) \equiv h(\varpi + p) = \varpi^p h(\varpi) \equiv (\varpi^p - \varpi)h(\varpi)$, и $0 \equiv g(\varpi)h(\varpi) = \varpi^{N+n} - \varpi^n \pmod{p}$.

24. Указание следует из индукции по e , поскольку $x^{p^e} = \prod_{k=0}^{p-1} (x - kp^{e-1})^{p^{e-1}}$. Можно также доказать по индукции по n , что из $x^n \equiv r_n(x) \pmod{g_1(x) \text{ и } p}$ вытекает

$$x^{p^{e-1}n} \equiv r_n(x)^{p^{e-1}} \pmod{g_e(x), pg_{e-1}(x), \dots, p^{e-1}g_1(x), \text{ и } p^e}.$$

Следовательно, $x^{p^{e-1}N} = 1 + h_0(x)g_e(x) + ph_1(x)g_{e-1}(x) + \dots + p^{e-1}h_{e-1}(x)g_1(x) + p^e h_e(x)$ для некоторых полиномов $h_k(x)$ с целыми коэффициентами. Мы имеем $h_0(\varpi)\varpi^n \equiv h_0(\varpi + p^e)(\varpi + p^e)^n = \varpi^{p^e} h_0(\varpi)\varpi^n \equiv (g_e(\varpi) + 1)h_0(\varpi)\varpi^n$ по модулю p^e ; следовательно,

$$\varpi^{p^{e-1}N+n} = \varpi^n + h_0(\varpi)g_e(\varpi)\varpi^n + ph_1(\varpi)g_{e-1}(\varpi)\varpi^n + \dots \equiv \varpi^n.$$

[Аналогичный вывод применим и тогда, когда $p = 2$, но следует положить $g_{j+1}(x) = g_j(x)^2 + 2 [j = 2]$, и мы получим $\varpi_n \equiv \varpi_{n+3 \cdot 2^e} \pmod{2^e}$. Эти результаты получены Маршаллом Холлом (Marshall Hall); см. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 387; *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 387–388. Дополнительную информацию можно найти в W.F. Lunnon, P.A.V. Pleasants and N.M. Stephens, *Acta Arith.*, **35** (1979), 1–16.]

25. Первое неравенство следует из применения более общего принципа к дереву ограниченно растущих строк: в любом дереве, для которого $\deg(p) \geq \deg(\text{parent}(p))$ для всех некорневых узлов p , мы имеем $w_k/w_{k-1} \leq w_{k+1}/w_k$, где w_k — общее количество узлов на уровне k . Если $m = w_{k-1}$ узлов на уровне $k-1$ имеют соответственно a_1, \dots, a_m дочерних узлов, то они имеют, как минимум, $a_1^2 + \dots + a_m^2$ “внучатых” узлов; следовательно, $w_{k-1}w_{k+1} \geq m(a_1^2 + \dots + a_m^2) \geq (a_1 + \dots + a_m)^2 = w_k^2$.

При рассмотрении второго неравенства заметим, что

$$\varpi_{n+1} - \varpi_n = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} \right) \varpi_{n-k};$$

таким образом,

$$\frac{\varpi_{n+1}}{\varpi_n} - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\varpi_{n-k}}{\varpi_n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\varpi_{n-k-1}}{\varpi_{n-1}} = \frac{\varpi_n}{\varpi_{n-1}},$$

поскольку, например, $\varpi_{n-3}/\varpi_n = (\varpi_{n-3}/\varpi_{n-2})(\varpi_{n-2}/\varpi_{n-1})(\varpi_{n-1}/\varpi_n)$ меньше или равно $(\varpi_{n-4}/\varpi_{n-3})(\varpi_{n-3}/\varpi_{n-2})(\varpi_{n-2}/\varpi_{n-1}) = \varpi_{n-4}/\varpi_{n-1}$.

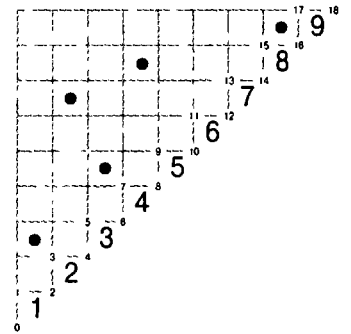
26. Имеется $\binom{n-1}{n-t}$ направленных вправо путей от $(n1)$ до (tt) ; можно представить их нулями и единицами, где 0 означает “вправо”, 1 — “вверх”, а позиции единиц говорят нам, какие $n-t$ из элементов находятся в блоке с единицей. Следующий шаг (при $t > 1$) представляет собой дальний переход влево; так что мы можем продолжить путь, который определяет разбиение оставшихся $t-1$ элементов. Например, разбиение $14|2|3$ соответствует при использовании данных соглашений пути 0010 , где соответствующие биты означают, что $1 \not\equiv 2$, $1 \not\equiv 3$, $1 \equiv 4$, $2 \not\equiv 3$. [Возможны и многие другие интерпретации. Предложенное здесь соглашение показывает, что ϖ_{nk} подсчитывает разбиения с $1 \not\equiv 2, \dots, 1 \not\equiv k$ — комбинаторное свойство, открытое Г.В. Беккером (H.W. Becker); см. *АММ*, **51** (1944), 47 и *Mathematics Magazine*, **22** (1948), 23–26.]

27. (а) В общем случае $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = 0$. В приведенном далее списке показаны также ограниченно растущие строки, соответствующие каждому циклу

при использовании алгоритма из (b).

0,0,0,0,0,0,0,0,0	0123	0,0,1,0,0,0,0,0,0	0012	0,0,1,1,1,0,0,0,0	0102
0,0,0,0,0,0,1,0,0	0122	0,0,1,0,0,0,1,0,0	0011	0,0,1,1,1,0,1,0,0	0100
0,0,0,0,1,0,0,0,0	0112	0,0,1,0,1,0,0,0,0	0001	0,0,1,1,1,1,1,0,0	0120
0,0,0,0,1,0,1,0,0	0111	0,0,1,0,1,0,1,0,0	0000	0,0,1,1,11,1,1,0,0	0101
0,0,0,0,1,1,1,0,0	0121	0,0,1,0,1,1,1,0,0	0010	0,0,1,1,2,1,1,0,0	0110

(b) Название “диаграмма” вызвано связью с разделом 5.1.4 и разработанной там теорией, приводящей к интересному взаимно однозначному соответствию. Можно представить разбиения множества на треугольной шахматной доске, помещая ладью в столбец l_j строки $n + 1 - j$, если $l_j \neq 0$ в представлении со связанным списком из упражнения 2 (см. ответ к упражнению 5.1.3–19). Например, представление 135|27|489|6 показано на приведенном рисунке. Ненулевые связи могут также быть эквивалентно определены при помощи двустрочных массивов наподобие $(\frac{1}{3} \frac{2}{7} \frac{3}{5} \frac{4}{8} \frac{8}{9})$; см. 5.1.4–(11).



Рассмотрим путь длины $2n$, который начинается в нижнем левом углу этой треугольной диаграммы и следует по ребрам правой границы, заканчиваясь в верхнем правом углу: этот путь проходит через точки $z_k = (\lfloor k/2 \rfloor, \lceil k/2 \rceil)$ при $0 \leq k \leq 2n$. Более того, прямоугольник вверху и слева от z_k содержит те ладьи, которые добавляют пары координат $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}$ в двустрочный массив, при этом $i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ и $j > \lceil k/2 \rceil$; в нашем примере для $9 \leq k \leq 12$ имеется ровно две таких ладьи, а именно $(\frac{2}{7} \frac{4}{8})$. Теорема 5.1.4А гласит, что такие двустрочные массивы эквивалентны диаграмме (P_k, Q_k) , где элементы P_k берутся из нижней строки, а элементы Q_k — из верхней, причем P_k и Q_k имеют одну форму. В диаграмме P выгодно использовать элементы в порядке уменьшения, а в Q — в порядке увеличения, так что в нашем примере они представляют собой

k	P_k	Q_k	k	P_k	Q_k	k	P_k	Q_k
2	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	7	$\boxed{7} \boxed{5}$	$\boxed{2} \boxed{3}$	12	$\boxed{8}$ $\boxed{7}$	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$
3	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	8	$\boxed{8} \boxed{5}$ $\boxed{7}$	$\boxed{2} \boxed{3}$ $\boxed{4}$	13	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$
4	$\boxed{7}$ $\boxed{3}$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	9	$\boxed{8}$ $\boxed{7}$	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$	14	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$
5	$\boxed{7}$	$\boxed{2}$	10	$\boxed{8}$ $\boxed{7}$	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$	15	.	.
6	$\boxed{7} \boxed{5}$	$\boxed{2} \boxed{3}$	11	$\boxed{8}$ $\boxed{7}$	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$	16	$\boxed{9}$	$\boxed{8}$

P_k и Q_k пустые при $k = 0, 1, 17$ и 18 .

Таким образом, каждое разбиение множества приводит к циклу колеблющейся диаграммы $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$, если положить, что λ_k — разбиение целого числа, определяющее общую форму P_k и Q_k . (В нашем примере это цикл $0, 0, 1, 1, 11, 1, 2,$

2, 21, 11, 11, 11, 11, 1, 1, 0, 1, 0, 0.) Кроме того, $t_{2k-1} = 0$ тогда и только тогда, когда строка $n + 1 - k$ не содержит ни одной ладьи, тогда и только тогда, когда k — наименьшее значение в своем блоке.

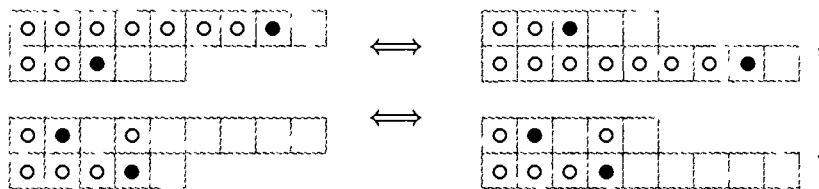
И обратно: элементы P_k и Q_k могут быть однозначно восстановлены из последовательности λ_k , а именно: $Q_k = Q_{k-1}$, если $t_k = 0$. В противном случае, если k четно, Q_k представляет собой Q_{k-1} с числом $k/2$, помещенным в новую ячейку справа в строке t_k ; если k нечетно, Q_k получается из Q_{k-1} с использованием алгоритма 5.1.4D для удаления крайнего справа элемента строки t_k . Аналогичная процедура определяет P_k на основе значений P_{k+1} и t_{k+1} , так что мы можем пройти путь вычислений от P_{2n} до P_0 . Таким образом, последовательности λ_k достаточно для того, чтобы указать, где именно следует размещать ладьи.

Циклы колеблющихся диаграмм были разработаны в статье W.Y.C. Chen, E.Y.P. Deng, R.P. Stanley and C.H. Yan, “Crossings and nestings of matchings and partitions” (препринт, 2005), в которой было показано, что эта конструкция приводит к важным (и удивительным) следствиям. Например, если разбиение множества Π соответствует циклу $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$, назовем *дуальным* к нему разбиение Π^D , которое соответствует последовательности транспонированных форм $\lambda_0^T, \lambda_1^T, \dots, \lambda_{2n}^T$. Тогда, в соответствии с упражнением 5.1.4–7, Π содержит “ k -пересечение в l ”, т.е. последовательность индексов $i_1 < \dots < i_k \leq l < j_1 < \dots < j_k$ и $i_1 \equiv j_1, \dots, i_k \equiv j_k \pmod{\Pi}$ тогда и только тогда, когда Π^D содержит “ k -вложение в l ”, которое представляет собой последовательность индексов, такую, что $i'_1 < \dots < i'_k \leq l < j'_k < \dots < j'_1$ и $i'_1 \equiv j'_1, \dots, i'_k \equiv j'_k \pmod{\Pi^D}$. Заметим также, что инволюция, по сути, представляет собой разбиение множества, в котором все блоки имеют размер 1 или 2; дуальной к инволюции является инволюция, имеющая те же множества с одним элементом. В частности, дуальным идеальному соответствию (когда отсутствуют множества с одним элементом) является идеальное соответствие.

Кроме того, аналогичная конструкция применима для размещения ладей в *любой* диаграмме Феррерса, а не только в диаграмме ступенчатой формы, соответствующей разбиениям множества. Для заданной диаграммы Феррерса, которая имеет не более m частей, ни одна из которых не превышает n , мы просто рассматриваем путь $z_0 = (0, 0), z_1, \dots, z_{m+n} = (n, m)$, который идет по правому ребру диаграммы и обуславливает, что $\lambda_k = \lambda_{k-1} + e_{t_k}$ при $z_k = z_{k-1} + (1, 0)$ и $\lambda_k = \lambda_{k-1} - e_{t_k}$ при $z_k = z_{k-1} + (0, 1)$. Доказательство, приведенное для ступенчатых диаграмм, показывает также, что любое размещение ладей на диаграмме Феррерса, когда в каждой строке и каждом столбце имеется не более одной ладьи, соответствует единственному циклу диаграммы.

[См. также A. Berele, *J. Combinatorial Theory*, **A43** (1986), 320–328; S. Fomin, *J. Combinatorial Theory*, **A72** (1995), 277–292; M. van Leeuwen, *Electronic J. Combinatorics*, **3**, 2 (1996), paper #R15.]

28. (а) Определим взаимно однозначное соответствие между расстановкой ладей путем обмена позиций ладей в строках j и $j + 1$ тогда и только тогда, когда ладья находится в выступающей части более длинной строки.



(b) Если выполнить транспонирование всех ладей, это соотношение становится очевидным из определения полинома.

(c) Предположим, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ и $a_k > a_{k+1}$. Тогда мы имеем

$$R(a_1, a_2, \dots) = xR(a_1 - 1, \dots, a_{k-1} - 1, a_{k+1}, \dots) + yR(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_{k+1}, \dots),$$

поскольку первый член учитывает случаи, когда ладья находится в строке k и столбце a_k . Кроме того, исходя из пустой расстановки, $R(0) = 1$. Далее из этих рекуррентных соотношений мы находим:

$$R(1) = x + y; \quad R(2) = R(1, 1) = x + xy + y^2;$$

$$R(3) = R(1, 1, 1) = x + xy + xy^2 + y^3;$$

$$R(2, 1) = x^2 + 2xy + xy^2 + y^3;$$

$$R(3, 1) = R(2, 2) = R(2, 1, 1) = x^2 + x^2y + xy + 2xy^2 + xy^3 + y^4;$$

$$R(3, 1, 1) = R(3, 2) = R(2, 2, 1) = x^2 + 2x^2y + x^2y^2 + 2xy^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5;$$

$$R(3, 2, 1) = x^3 + 3x^2y + 3x^2y^2 + x^2y^3 + 3xy^3 + 2xy^4 + xy^5 + y^6.$$

(d) Например, формула $\varpi_{73}(x, y) = x\varpi_{63}(x, y) + y\varpi_{74}(x, y)$ эквивалентна $R(5, 4, 4, 3, 2, 1) = xR(4, 3, 3, 2, 1) + yR(5, 4, 3, 3, 2, 1)$, частному случаю (c); очевидно, что $\varpi_{nn}(x, y) = R(n-2, \dots, 0)$ эквивалентно $\varpi_{(n-1)1}(x, y) = R(n-2, \dots, 1)$.

(e) В действительности $y^{k-1}\varpi_{nk}(x, y)$ — указанная сумма по всем ограниченно растущим строкам $a_1 \dots a_n$, для которых $a_2 > 0, \dots, a_k > 0$.

29. (a) Если ладьи находятся в столбцах (c_1, \dots, c_n) , то количество свободных ячеек равно количеству инверсий перестановок $(n+1-c_1) \dots (n+1-c_n)$. [Разверните правую часть примера на рис. 35 на 180° и сравните результат с иллюстрацией после соотношения 5.1.1-(5).]

(b) Каждая конфигурация $r \times r$ может быть размещена, скажем, в строках $i_1 < \dots < i_r$ и столбцах $j_1 < \dots < j_r$, что дает $(m-r)(n-r)$ свободных ячеек в невыбранных строках и столбцах; $(i_2 - i_1 + 1) + 2(i_3 - i_2 - 1) + \dots + (r-1)(i_r - i_{r-1} - 1) + r(m - i_r)$ — в невыбранных строках и выбранных столбцах и аналогичное количество в выбранных строках и невыбранных столбцах. Кроме того, сумма

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} y^{(i_2 - i_1 + 1) + 2(i_3 - i_2 - 1) + \dots + (r-1)(i_r - i_{r-1} - 1) + r(m - i_r)}$$

может рассматриваться как сумма $y^{a_1 + a_2 + \dots + a_{m-r}}$ по всем разбиениям $r \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{m-r} \geq 0$, так что она равна $\binom{m}{r}_y$ согласно теореме С. В соответствии с (a) полином $r!_y$ генерирует свободные ячейки для выбранных строк и столбцов. Следовательно, искомый ответ —

$$y^{(m-r)(n-r)} \binom{m}{r}_y \binom{n}{r}_y r!_y = \frac{y^{(m-r)(n-r)} m!_y n!_y}{((m-r)!_y (n-r)!_y r!_y)}.$$

(с) Левая часть формулы представляет собой производящую функцию $R_m(t + a_1, \dots, t + a_m)$ для диаграммы Феррерса с t дополнительными столбцами высотой m . Поскольку существует $t + a_m$ способов разместить ладью в строке m , это дает нам $1 + y + \dots + y^{t+a_m-1} = (1 - y^{t+a_m}) / (1 - y)$ свободных ячеек, связанных с этими выборами; в строке $m - 1$ имеется $t + a_{m-1} - 1$ доступных ячеек и т.д.

Аналогично, правая часть равна $R_m(t + a_1, \dots, t + a_m)$. Если $m - k$ ладей расставляются в столбцах, больших t , мы должны поместить k ладей в столбцах $\leq t$ в k неиспользованных строках; но мы видели, что производящая функция для свободных ячеек при расстановке k ладей на доске размером $k \times t - t!_y / (t - k)!_y$.

Примечания. Доказываемая здесь формула может рассматриваться как полиномиальное тождество в переменных y и y^t ; следовательно, она корректна при произвольном t , хотя наше доказательство предполагает, что t — неотрицательное целое число. Этот результат был открыт для $y = 1$ в работе J. Goldman, J. Joichi and D. White, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **52** (1975), 485–492. Справедливость для общего случая установлена в статье A. M. Garsia and J. B. Remmel, *J. Combinatorial Theory*, **A41** (1986), 246–275, в которой подобная аргументация использовалась для доказательства дополнительной формулы

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t \prod_{j=1}^m \frac{1 - y^{a_j+m-j+t}}{1 - y} = \sum_{k=0}^n k!_y \left(\frac{z}{1 - yz} \right) \dots \left(\frac{z}{1 - y^k z} \right) R_{m-k}(a_1, \dots, a_m).$$

(d) Это утверждение, которое непосредственно следует из (с), влечет за собой также то, что $R(a_1, \dots, a_m) = R(a'_1, \dots, a'_m)$ тогда и только тогда, когда равенство выполняется для всех x и любого неотрицательного значения y . Полином Пирса $\varpi_{nk}(x, y)$ из упражнения 28 (d) представляет собой “ладейный” полином для $\binom{n-1}{k-1}$ различных диаграмм Феррерса; например, $\varpi_{63}(x, y)$ перечисляет расстановки ладей для форм 43321, 44221, 44311, 4432, 53221, 53311, 5332, 54211, 5422 и 5431.

30. (а) Имеем $\varpi_n(x, y) = \sum_m x^{n-m} A_{mn}$, где $A_{mn} = R_{n-m}(n - 1, \dots, 1)$ подчиняется простому закону: если мы не помещаем ладью в строке 1 формы $(n - 1, \dots, 1)$, то эта строка содержит $m - 1$ пустых ячеек, поскольку $n - m$ ладей находятся в других строках. Но если мы разместим здесь ладью, то оставим 0, 1, или \dots , или $m - 1$ ее ячеек свободными. Следовательно, $A_{mn} = y^{m-1} A_{(m-1)(n-1)} + (1 + y + \dots + y^{m-1}) \times A_{m(n-1)}$ и по индукции $A_{mn} = y^{m(m-1)/2} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}_y$.

(b) Формула $\varpi_{n+1}(x, y) = \sum_k \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \varpi_k(x, y)$ дает

$$A_{m(n+1)} = \sum_k \binom{n}{k} y^k A_{(m-1)k}.$$

(с) Из (а) и (b) мы получаем

$$\frac{z}{(1 - z)(1 - (1 + q)z) \dots (1 - (1 + q + \dots + q^{n-1})z)} = \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}_q z^k;$$

$$\sum_k \binom{n}{k}_q (-1)^k q^{\binom{k}{2}} e^{(1+q+\dots+q^{n-k-1})z} = q^{\binom{n}{2}} n!_q \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ n \end{matrix} \right\}_q \frac{z^k}{k!}.$$

[Вторая формула доказывается по индукции по n , поскольку обе части формулы удовлетворяют дифференциальному уравнению $G'_{n+1}(z) = (1 + q + \dots + q^n) e^z G_n(qz)$; в упражнении 1.2.6–58 доказывается равенство при $z = 0$.]

Историческое примечание: Леонард Карлиц (Leonard Carlitz) ввел q -числа Стирлинга в *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **33** (1933), 127–129. Затем в *Duke Math. J.*, **15** (1948), 987–1000, он вывел (помимо прочего) соответствующее обобщение формулы 1.2.6–(45):

$$(1 + q + \dots + q^{m-1})^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_q q^{\binom{k}{2}} \frac{m!_q}{(m-k)!_q}.$$

31. $\exp(e^{w+z} + w - 1)$; таким образом, $\varpi_{nk} = (\varpi + 1)^{n-k} \varpi^{k-1} = \varpi^{n+1-k} (\varpi - 1)^{k-1}$ в обозначениях упражнения 23. [L. Moser and M. Wyman, *Trans. Royal Soc. Canada* (3), **43** (1954), Section 3, 31–37.] Фактически число $\varpi_{nk}(x, 1)$ из упражнения 28 (d) генерируется при помощи $\exp((e^{xw+xz} - 1)/x + xw)$.

32. Мы имеем $\delta_n = \varpi_n(1, -1)$, а в обобщенном треугольнике Пирса из упражнения 28 (d) при $x = 1$ и $y = -1$ легко обнаружить простую схему: $|\varpi_{nk}(1, -1)| \leq 1$ и $\varpi_{n(k+1)}(1, -1) \equiv \varpi_{nk}(1, -1) + (-1)^n \pmod{3}$ при $1 \leq k < n$. [В *JACM*, **20** (1973), 512–513, Гидеон Эрлих (Gideon Ehrlich) дал комбинаторное доказательство эквивалентного результата.]

33. Представление разбиения множества при помощи расстановки ладей, как в ответе к упражнению 27, приводит к ответу ϖ_{nk} (путем установки $x = y = 1$ в упражнении 28 (d)). [Случай $k = n$ был рассмотрен в Н. Prodinger, *Fibonacci Quarterly*, **19** (1981), 463–465.]

34. (a) *Sonetti* Джиттоне включают 149 сонетов со схемой 01010101232323, 64 сонета со схемой 01010101234234, два — со схемой 01010101234342, семь — со схемами, использованными по одному разу (наподобие 01100110234432), и 29 стихов, которые не могут считаться сонетами, так как в них нет 14 строк.

(b) *Canzoniere* Петрарки включают 115 сонетов со схемой 01100110234234, 109 — со схемой 01100110232323, 66 — со схемой 01100110234324, семь — со схемой 01100110232232, и 20 других со схемами наподобие 01010101232323, причем ни одна из этих схем не повторяется более 3 раз.

(c) В *Amoretti* Спенсера 88 из 89 сонетов используют схему 01011212232344; исключение — сонет номер 8 — использует шекспировскую схему.

(d) Все 154 сонета Шекспира используют очень плавную схему 01012323454566; исключениями являются два сонета (99 и 126), которые не состоят из 14 строк.

(e) Все 44 сонета Браунинг из *Sonnets From the Portuguese* подчиняются схеме Петрарки 01100110232323.

Иногда строки рифмуются (случайно?), даже когда они не обязаны рифмоваться; например, последний сонет Браунинг на самом деле имеет схему 01100110121212.

Кстати, длинная песнь в *Божественной комедии* Данте использует замкнутую схему рифм, в которой $1 \equiv 3$ и $3n - 1 \equiv 3n + 1 \equiv 3n + 3$ для $n = 1, 2, \dots$

35. Каждая неполная n -строчная схема Π соответствует разбиению $\{1, \dots, n + 1\}$ без частей с одним элементом, в котором $(n + 1)$ группируется со всеми одноэлементными частями Π . [Г.В. Беккер (H.W. Becker) привел алгебраическое доказательство в *АММ*, **48** (1941), 702. Заметим, что согласно принципу включения и исключе-

ния $\varpi'_n = \sum_k \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \varpi_k$, а $\varpi_n = \sum_k \binom{n}{k} \varpi'_k$; с использованием обозначений из упражнения 23 мы можем записать $\varpi' = \varpi - 1$. Д.А. Шаллит (J.O. Shallit) предложил расширение треугольника Пирса путем установки $\varpi_{n(n+1)} = \varpi'_n$; см. упражнения 38 (е) и 33. Фактически ϖ_{nk} представляет собой количество разбиений $\{1, \dots, n\}$, обладающих тем свойством, что $1, \dots, k-1$ не являются одноэлементными частями; см. H.W. Becker, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1954), 63.]

36. $\exp(e^z - 1 - z)$. (В общем случае, если ϑ_n — количество разбиений $\{1, \dots, n\}$ на подмножества допустимых размеров $s_1 < s_2 < \dots$, экспоненциальной производящей функцией $\sum_n \vartheta_n z^n / n!$ является $\exp(z^{s_1}/s_1! + z^{s_2}/s_2! + \dots)$, поскольку $(z^{s_1}/s_1! + z^{s_2}/s_2! + \dots)^k$ представляет собой экспоненциальную производящую функцию для разбиений ровно на k частей.)

37. Всего имеется $\sum_k \binom{n}{k} \varpi'_k \varpi'_{n-k}$ возможных вариантов длины n , так что при $n = 14$ имеется 784 071 966 схем. (Но превзойти схему Пушкина очень трудно.)

38. (а) Представим, что мы начинаем с $x_1 x_2 \dots x_n = 01 \dots (n-1)$, затем последовательно удаляем некоторый элемент b_j и помещаем его слева, выполняя эти действия для $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда x_k представляет собой k -й перемещенный элемент, считая от последнего, для $1 \leq k \leq |\{b_1, \dots, b_n\}|$; см. упражнение 5.2.3–36. Следовательно, массив $x_1 \dots x_n$ вернется в первоначальное состояние тогда и только тогда, когда $b_n \dots b_1$ является ограниченно растущей строкой. [Robbins and Volker, *Aequat. Math.*, **22** (1981), 281–282.]

Другими словами, пусть $a_1 \dots a_n$ — ограниченно растущая строка. Установим $b_{-j} \leftarrow j$ и $b_{j+1} \leftarrow a_{n-j}$ для $0 \leq j < n$. Тогда для $1 \leq j \leq n$ определим k_j при помощи правила, согласно которому b_j есть k_j -й отличный от других элемент в последовательности b_{j-1}, b_{j-2}, \dots . Например, строка $a_1 \dots a_{16} = 0123032303456745$ соответствует таким способом σ -циклу 6688448628232384.

(b) Такие пути соответствуют ограниченно растущим строкам с $\max(a_1, \dots, a_n) \leq m$, так что искомым ответ — $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$.

(c) Можно считать, что $i = 1$, так как последовательность $k_2 \dots k_n k_1$ является σ -циклом, если таковым является последовательность $k_1 k_2 \dots k_n$. Таким образом, ответ представляет собой количество ограниченно растущих строк с $a_n = j - 1$, а именно $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j-1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right\} + \dots$.

(d) Если ответ — f_n , то должно выполняться $\sum_k \binom{n}{k} f_k = \varpi_n$, поскольку σ_1 представляет собой тождественную перестановку. Следовательно, f_n равно ϖ'_n , количеству разбиений множества без одноэлементных частей (см. упражнение 35).

(e) Вновь ответ ϖ'_n в соответствии с (а) и (d). [Следовательно, $\varpi'_p \bmod p = 1$, когда p простое.]

39. Замена $u = t^{p+1}$ дает $\frac{1}{p+1} \int_0^\infty e^{-u} u^{(q-p)/(p+1)} du = \frac{1}{p+1} \Gamma\left(\frac{q+1}{p+1}\right)$.

40. Мы имеем $g(z) = cz - n \ln z$, так что седловая точка находится в n/c . Прямоугольный путь теперь имеет углы в точках $\pm n/c \pm mi/c$, а $\exp(g(n/c + it)) = (e^n c^n / n^n) \exp(-t^2 c^2 / (2n) + it^3 c^3 / (3n^2) + \dots)$. Окончательный результат представляет собой $e^n (c/n)^{n-1} / \sqrt{2\pi n}$, умноженное на $1 + n/12 + O(n^{-2})$.

(Конечно, этот результат можно получить и быстрее, положив в интеграле $w = cz$. Но приведенный здесь ответ просто механически применяет метод седловой точки, не пытаясь прояснить суть дела.)

41. Конечный результат опять же представляет простое умножение (21) на c^{n-1} ; однако в данном случае более существенно *левое* ребро прямоугольного пути, а не правое. (Кстати, при $c = -1$ мы не можем вывести аналог (22) с использованием контура Ганкеля, когда x действительно и положительно, поскольку интеграл по такому пути расходится. Но при обычном определении z^x подходящий путь интегрирования дает формулу $-(\cos \pi x)/\Gamma(x)$ при $n = x > 0$.)

42. При четном n мы имеем $\oint e^{z^2} dz/z^n = 0$. В противном случае как левое, так и правое ребро прямоугольника с вершинами $\pm\sqrt{n/2} \pm in$ при больших n дают приближенный вклад

$$\frac{e^{n/2}}{2\pi (n/2)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2t^2 - \frac{(-it)^3}{3} \frac{2^{3/2}}{n^{1/2}} + \frac{(it)^4}{n} - \dots\right) dt.$$

Мы можем ограничить $|t| \leq n^\varepsilon$, чтобы показать, что этот интеграл равен $I_0 + (I_4 - \frac{4}{9}I_6)/n$ с относительной ошибкой $O(n^{9\varepsilon-3/2})$, где $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} t^k dt$. Как и ранее, в действительности относительная ошибка равна $O(n^{-2})$; и мы выводим окончательный ответ, равный

$$\frac{1}{((n-1)/2)!} = \frac{e^{n/2}}{\sqrt{2\pi} (n/2)^{n/2}} \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{при нечетном } n.$$

(Аналогом (22) является $(\sin \frac{\pi x}{2})^2/\Gamma((x-1)/2)$ при $n = x > 0$.)

43. Пусть $f(z) = e^z/z^n$. Когда $z = -n + it$, мы имеем $|f(z)| < en^{-n}$; когда $z = t + 2\pi in + i\pi/2$, мы имеем $|f(z)| = |z|^{-n} < (2\pi n)^{-n}$. Так что интегралом можно пренебречь везде, кроме пути $z = \xi + it$; на этом пути $|f|$ уменьшается с возрастанием $|t|$ от 0 до π . Мы уже имеем при $t = n^{\varepsilon-1/2}$ $|f(z)|/f(\xi) = O\left(\exp\left(-n^{2\varepsilon}/(\log n)^2\right)\right)$; а когда $|t| > \pi$, то $|f(z)|/f(\xi) < 1/|1 + i\pi/\xi|^n = \exp\left(-\frac{n}{2} \ln(1 + \pi^2/\xi^2)\right)$.

44. Положим $u = na_2 t^2$ в (25), чтобы получить

$$\Re \int_0^\infty e^{-u} \exp\left(n^{-1/2} c_3 (-u)^{3/2} + n^{-1} c_4 (-u)^2 + n^{-3/2} c_5 (-u)^{5/2} + \dots\right) du / \sqrt{na_2 u},$$

где $c_k = (2/(\xi+1))^{k/2} (\xi^{k-1} + (-1)^k (k-1)!)/k! = a_k/a_2^{k/2}$. Это выражение приводит к сумме

$$b'_l = \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3+\dots=2l \\ k_1+k_2+k_3+\dots=m \\ k_1, k_2, k_3, \dots \geq 0}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{l+m} \frac{c_3^{k_1} c_4^{k_2} c_5^{k_3} \dots}{k_1! k_2! k_3! \dots},$$

по всем разбиениям $2l$. Например, $b_1 = \frac{3}{4}c_4 - \frac{15}{16}c_3^2$.

45. Чтобы получить $\varpi_n/n!$, заменим $g(z)$ в выводе (26) на $e^z - (n+1)\ln z$. Это изменение приводит к умножению подынтегрального выражения в предыдущем ответе на $1/(1+it/\xi)$, которое представляет собой $1/\left(1 - n^{-1/2}a(-u)^{1/2}\right)$, где

$a = -\sqrt{2/(\xi + 1)}$. Таким образом, мы получаем

$$b'_l = \sum_{\substack{k+k_1+2k_2+3k_3+\dots=2l \\ k_1+k_2+k_3+\dots=m \\ k, k_1, k_2, k_3, \dots \geq 0}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{l+m} a^k \frac{c_3^{k_1}}{k_1!} \frac{c_4^{k_2}}{k_2!} \frac{c_5^{k_3}}{k_3!} \dots,$$

сумму $p(2l) + p(2l-1) + \dots + p(0)$ членов; $b'_1 = \frac{3}{4}c_4 - \frac{15}{16}c_3^2 + \frac{3}{4}ac_3 - \frac{1}{2}a^2$. [Коэффициент b'_1 был получен другим способом в работе L. Moser and M. Wyman, *Trans. Royal Soc. Canada* (3), **49**, Section 3 (1955), 49–54, авторы которой впервые вывели асимптотический ряд для ϖ_n . Их приближение немного менее точное, чем (26) с n , замененным на $n+1$, поскольку оно не проходит через седловую точку. Формула (26) получена в I.J. Good, *Iranian J. Science and Tech.*, **4** (1975), 77–83.]

46. Из (13) и (31) видно, что для фиксированного значения k и $n \rightarrow \infty$ $\varpi_{nk} = (1 - \xi/n)^k \varpi_n (1 + O(n^{-1}))$. Это приближение справедливо и при $k = n$, но в этом случае относительная ошибка равна $O((\log n)^2/n)$.

47. Шаги (Н1, ..., Н6) выполняются соответственно $(1, \varpi_n, \varpi_n - \varpi_{n-1}, \varpi_{n-1}, \varpi_{n-1}, \varpi_{n-1} - 1)$ раз. Общее количество выполнений установки $j \leftarrow j-1$ в цикле на шаге Н4 равно $\varpi_{n-2} + \varpi_{n-3} + \dots + \varpi_1$ раз; общее количество выполнений установки $b_j \leftarrow m$ в цикле на шаге Н6 равно $(\varpi_{n-2} - 1) + \dots + (\varpi_1 - 1)$ раз. Отношение ϖ_{n-1}/ϖ_n приблизительно равно $(\ln n)/n$, а $(\varpi_{n-2} + \dots + \varpi_1)/\varpi_n \approx (\ln n)^2/n^2$.

48. Можно легко проверить взаимозамену суммирования и интегрирования в

$$\begin{aligned} \frac{e\varpi_x}{\Gamma(x+1)} &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{e^z}}{z^{x+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k! z^{x+1}} dz = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{kz}}{z^{x+1}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{k^x}{\Gamma(x+1)}. \end{aligned}$$

49. Если $\xi = \ln n - \ln \ln n + x$, то мы получаем $\beta = 1 - e^{-x} - \alpha x$. Следовательно, по формуле обращения Лагранжа (упражнение 4.7–8)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} [t^{k-1}] \left(\frac{f(t)}{1 - \alpha f(t)} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \alpha^j \binom{k+j-1}{j} [t^{k-1}] f(t)^{j+k},$$

где $f(t) = t/(1 - e^{-t})$. Так что окончательный результат следует из известного тождества

$$\left(\frac{z}{1 - e^{-z}} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} m \\ m-n \end{matrix} \right] \frac{z^n}{(m-1)(m-2)\dots(m-n)}.$$

(С этим тождеством следует быть осторожным при $n \geq m$; коэффициент при z^n представляет собой полином от m степени n , как поясняется в уравнении (7.59) в *СMath*.)

Формула из этого упражнения открыта Л. Комте (L. Comtet) [*Comptes Rendus Acad. Sci. (A)*, 270 (Paris, 1970), 1085–1088], который распознал коэффициенты, ранее вычисленные в работе N.G. de Bruijn [*Asymptotic Methods in Analysis* (1958), 25–28].

Сходимость для $n \geq e$ была показана Джефффри (Jeffrey), Корлессом (Corless), Харе (Hare) и Кнудом (Knuth) [*Comptes Rendus Acad. Sci. (I)*, **320** (1995), 1449–1452], которые также вывели несколько более быстро сходящуюся формулу.

(Уравнение $\xi e^\xi = n$ имеет также и комплексные корни. Их можно получить, используя $\ln n + 2\pi im$ вместо $\ln n$ в формуле из этого упражнения; при $m \neq 0$ сумма быстро сходится. [См. Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey and Knuth, *Advances in Computational Math.*, **5** (1996), 347–350].)

50. Пусть $\xi = \xi(n)$. Тогда $\xi'(n) = \xi/((\xi + 1)n)$ и можно показать, что ряд Тейлора

$$\xi(n+k) = \xi + k\xi'(n) + \frac{k^2}{2}\xi''(n) + \dots$$

сходится при $|k| < n + 1/e$.

На самом деле справедливо гораздо большее, поскольку функция $\xi(n) = -T(-n)$ получается из функции дерева $T(z)$ путем аналитического продолжения на отрицательные значения действительной оси. (Функция дерева имеет квадратичную сингулярность при $z = e^{-1}$; после обхода этой сингулярности мы встретимся с логарифмической сингулярностью в точке $z = 0$, представляющей собой часть интересной многоуровневой поверхности Римана, на которой квадратичная сингулярность появляется только на уровне 0.) Производные функции дерева удовлетворяют соотношению $z^k T^{(k)}(z) = R(z)^k p_k(R(z))$, где $R(z) = T(z)/(1 - T(z))$, а $p_k(x)$ — полином степени $k-1$, определяемый соотношением $p_{k+1}(x) = (1+x)^2 p'_k(x) + k(2+x)p_k(x)$. Например,

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 2+x, \quad p_3(x) = 9+10x+3x^2, \quad p_4(x) = 64+113x+70x^2+15x^3.$$

(Коэффициенты $p_k(x)$, кстати, перечисляют некие филогенетические деревья, именуемые деревьями Грега: $[x^j] p_k(x)$ представляет собой количество ориентированных деревьев с j непомеченными узлами и k помеченными узлами, причем все листья должны быть помечены, а непомеченные узлы должны иметь не менее двух дочерних. [См. J. Felsenstein, *Systematic Zoology*, **27** (1978), 27–33; L.R. Foulds and R.W. Robinson, *Lecture Notes in Math.*, **829** (1980), 110–126; C. Flight, *Manuscripta*, **34** (1990), 122–128].) Если $q_k(x) = p_k(-x)$, то по индукции можно доказать, что $(-1)^m q_k^{(m)}(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$. Таким образом, $q_k(x)$ монотонно убывает от k^{k-1} до $(k-1)!$ при x , возрастающем от 0 до 1, для всех $k, m \geq 1$. Отсюда следует, что

$$\xi(n+k) = \xi + \frac{kx}{n} - \left(\frac{kx}{n}\right)^2 \frac{q_2(x)}{2!} + \left(\frac{kx}{n}\right)^3 \frac{q_3(x)}{3!} - \dots, \quad x = \frac{\xi}{\xi+1},$$

где частичные суммы при $k > 0$ оказываются поочередно больше и меньше точного значения.

51. Имеются две седловые точки, $\sigma = \sqrt{n+5/4} - 1/2$ и $\sigma' = -1 - \sigma$. Интегрирование по прямоугольному пути с вершинами $\sigma \pm im$ и $\sigma' \pm im$ показывает, что при $n \rightarrow \infty$ можно рассматривать только σ (хотя σ' вносит относительную ошибку порядка $e^{-\sqrt{n}}$, которая может оказаться значительной при малых n). Рассуждая почти так же, как в (25), но с $g(z) = z + z^2/2 - (n+1) \ln z$, мы найдем, что хорошим

приближением для t_n является

$$\frac{n!}{2\pi} \int_{-n^\varepsilon}^{n^\varepsilon} e^{g(\sigma) - a_2 t^2 + a_3 i t^3 + \dots + a_l (-it)^l + O(n^{(l+1)\varepsilon - (l-1)/2})} dt, \quad a_k = \frac{\sigma + 1}{k\sigma^{k-1}} + \frac{[k=2]}{2}.$$

Интеграл раскладывается в ряд, как и в упражнении 44:

$$\frac{n! e^{(n+\sigma)/2}}{2\sigma^{n+1} \sqrt{\pi a_2}} (1 + b_1 + b_2 + \dots + b_m + O(n^{-m-1})).$$

Сейчас $c_k = (\sigma + 1) \sigma^{1-k} (1 + 1/(2\sigma))^{-k/2} / k$ при $k \geq 3$, следовательно, $(2\sigma + 1)^{3k} \sigma^k b_k$ представляет собой полином от σ степени $2k$, например:

$$b_1 = \frac{3}{4} c_4 - \frac{15}{16} c_3^2 = \frac{8\sigma^2 + 7\sigma - 1}{12\sigma(2\sigma + 1)^3}.$$

В частности, формула Стирлинга и член b_1 после подстановки значения σ дают нам

$$t_n = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{n/2} e^{-n/2 + \sqrt{n} - 1/4} \left(1 + \frac{7}{24} n^{-1/2} - \frac{119}{1152} n^{-1} - \frac{7933}{414720} n^{-3/2} + O(n^{-2}) \right),$$

результат существенно более точный, чем формула 5.1.4–(53), причем полученный со значительно меньшими усилиями.

52. Пусть $G(z) = \sum_k \text{Pr}(X = k) z^k$, так что j -й семинвариант κ_j равен $j! [t^j] \ln G(e^t)$. В случае (а) $G(z) = e^{e^z - e}$; следовательно,

$$\ln G(e^t) = e^{\xi e^t} - e^\xi = e^\xi (e^{\xi(e^t - 1)} - 1) = e^\xi \sum_{k=1}^{\infty} (e^t - 1)^k \frac{\xi^k}{k!},$$

$$\kappa_j = e^\xi \sum_k \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} \xi^k [j \neq 0].$$

Случай (б) представляет собой дуальную ситуацию: здесь $\kappa = j = \varpi_j [j \neq 0]$, поскольку

$$G(z) = e^{e^{-1} - 1} \sum_{j,k} \left\{ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right\} e^{-j} \frac{z^k}{k!} = e^{e^{-1} - 1} \sum_j \frac{(e^{z-1} - e^{-1})^j}{j!} = e^{e^{z-1} - 1}.$$

[Если $\xi e^\xi = 1$, в случае (а) мы имеем $\kappa_j = e\varpi [j \neq 0]$. Но если $\xi e^\xi = n$, то среднее равно $\kappa_1 = n$, а дисперсия σ^2 равна $(\xi + 1)n$. Таким образом, формула в упражнении 45 утверждает, что среднее значение n встречается приблизительно с вероятностью $1/\sqrt{2\pi\sigma}$ и относительной ошибкой $O(1/n)$. Данное наблюдение приводит к другому способу доказательства этой формулы.]

53. Можно записать $\ln G(e^t) = \mu t + \sigma^2 t^2/2 + \kappa_3 t^3/3! + \dots$, как в формуле 1.2.10–(23); и существует такая положительная константа δ , что $\sum_{j=3}^{\infty} |\kappa_j| t^j/j! < \sigma^2 t^2/6$ при

$|t| \leq \delta$. Следовательно, если $0 < \varepsilon < 1/2$, можно доказать, что

$$\begin{aligned} [z^{\mu n+r}] G(z)^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{G(e^{it})^n dt}{e^{it(\mu n+r)}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{\varepsilon-1/2}}^{n^{\varepsilon-1/2}} \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2} + O\left(n^{3\varepsilon-1/2}\right)\right) dt + O\left(e^{-cn^{2\varepsilon}}\right) \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$ для некоторой константы $c > 0$: подынтегральная функция при $n^{\varepsilon-1/2} \leq |t| \leq \delta$ ограничена по абсолютному значению величиной $\exp(-\sigma^2 n^{2\varepsilon}/3)$, а при $\delta \leq |t| \leq \pi$ ее величина не превышает α^n , где $\alpha = \max |G(e^{it})|$ меньше 1, поскольку отдельные члены $p_k e^{kit}$ в силу нашего предположения не лежат на прямой линии. Таким образом,

$$\begin{aligned} [z^{\mu n+r}] G(z)^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2} + O\left(n^{3\varepsilon-1/2}\right)\right) dt + O\left(e^{-cn^{2\varepsilon}}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\sigma^2 n}{2} \left(t + \frac{ir}{\sigma^2 n}\right)^2 - \frac{r^2}{2\sigma^2 n} + O\left(n^{3\varepsilon-1/2}\right)\right) dt + \\ &\quad + O\left(e^{-cn^{2\varepsilon}}\right) = \frac{e^{-r^2/(2\sigma^2 n)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} + O\left(n^{3\varepsilon-1}\right). \end{aligned}$$

Аналогично учитывая $\kappa_3, \kappa_4, \dots$, можно улучшить оценку до $O(n^{-m})$ для произвольно большого m ; таким образом, результат верен также при $\varepsilon = 0$. [В действительности такое уточнение приводит к “разложению Эджворта”, в соответствии с которым $[z^{\mu n+r}] G(z)^n$ асимптотически стремится к

$$\frac{e^{-r^2/(2\sigma^2 n)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \sum_{\substack{k_1+2k_2+3k_3+\dots=m \\ k_1+k_2+k_3+\dots=l \\ k_1, k_2, k_3, \dots \geq 0 \\ 0 \leq s \leq l+m/2}} \frac{(-1)^s (2l+m)^{2s} r^{2l+m-2s}}{\sigma^{4l+2m-2s} 2^s s!} \frac{1}{n^{l+m-s}} \frac{1}{k_1! k_2! \dots} \left(\frac{\kappa_3}{3!}\right)^{k_1} \left(\frac{\kappa_4}{4!}\right)^{k_2} \dots$$

Абсолютная ошибка равна $O(n^{-p/2})$, где константа, скрытая в O , зависит только от p и G , но не от r или n , если мы ограничимся случаями $m < p - 1$. Например, при $p = 3$ мы получим

$$[z^{\mu n+r}] G(z)^n = \frac{e^{-r^2/(2\sigma^2 n)}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \left(1 - \frac{\kappa_3}{2\sigma^4} \left(\frac{r}{n}\right) + \frac{\kappa_3}{6\sigma^6} \left(\frac{r^3}{n^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

и еще семь членов при $p = 4$. См. П.Л. Чебышев, *Записки Импер. Акад. Наук*, **55** (1887), № 6, 1–16; *Acta Math.*, **14** (1890), 305–315; F.Y. Edgeworth, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **20** (1905), 36–65, 113–141; Н. Cramér, *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, **11** (1928), 13–74, 141–180.]

54. Формулы (40) эквивалентны записи $\alpha = s \coth s + s$, $\beta = s \coth s - s$.

55. Пусть $c = \alpha e^{-\alpha}$. Итерации метода Ньютона $\beta_0 = c$, $\beta_{k+1} = (1 - \beta_k) c e^{\beta_k} / (1 - c e^{-\beta_k})$ быстро сходятся к точному значению, за исключением случаев, когда α очень близко к 1. Например, при $\alpha = \ln 4$ величина β_7 отличается от $\ln 2$ менее чем на 10^{-75} .

56. (а) По индукции по n $g^{(n+1)}(z) = (-1)^n \left(\frac{\sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k e^{(n-k)z}}{\alpha(e^z - 1)^{n+1}} - \frac{n!}{z^{n+1}} \right)$.

$$(b) \sum_{k=0}^n \langle n \rangle_k e^{k\sigma} / n! = \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp([u_1 + \dots + u_n] \sigma) du_1 \dots du_n < \\ < \int_0^1 \dots \int_0^1 \exp((u_1 + \dots + u_n) \sigma) du_1 \dots du_n = (e^\sigma - 1)^n / \sigma^n.$$

Нижняя граница выводится аналогично, поскольку $[u_1 + \dots + u_n] > u_1 + \dots + u_n - 1$.

(с) Таким образом, $n!(1 - \beta/\alpha) < (-\sigma)^n g^{(n+1)}(\sigma) < 0$, и мы должны только проверить, что $1 - \beta/\alpha < 2(1 - \beta)$, т.е. что $2\alpha\beta < \alpha + \beta$. Однако в соответствии с упражнением 54 $\alpha\beta < 1$, а $\alpha + \beta > 2$.

57. (а) $n + 1 - m = (n + 1)(1 - 1/\alpha) < (n + 1)(1 - \beta/\alpha) = (n + 1)\sigma/\alpha \leq 2N$, как в ответе к упражнению 56 (с).

(б) Величина $\alpha + \alpha\beta$ возрастает с возрастанием α , поскольку ее производная по α равна $1 + \beta + \beta(1 - \alpha)/(1 - \beta) = (1 - \alpha\beta)/(1 - \beta) + \beta > 0$. Следовательно, $1 - \beta < 2(1 - 1/\alpha)$.

58. (а) Производная $|e^{\sigma+it} - 1|^2 / |\sigma + it|^2 = (e^{\sigma+it} - 1)(e^{\sigma-it} - 1) / (\sigma^2 + t^2)$ по t равна $(\sigma^2 + t^2) \sin t - t(2 \sin \frac{t}{2})^2 - (2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2})^2 t$, умноженное на положительную функцию. Эта производная всегда отрицательна при $0 < t \leq 2\pi$, поскольку она меньше чем $t^2 \sin t - t(2 \sin \frac{t}{2})^2 = 8u \sin u \cos u (u - \operatorname{tg} u)$, где $t = 2u$.

Пусть $s = 2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{2}$. При $\sigma \geq \pi$ и $2\pi \leq t \leq 4\pi$ производная остается отрицательной, поскольку $t \leq 4\pi \leq s^2 - \sigma^2 / (2\pi) \leq s^2 - \sigma^2 / t$. Аналогично, когда $\sigma \geq 2\pi$, производная остается отрицательной при $4\pi \leq t \leq 168\pi$; доказательство становится все легче и легче.

(б) Пусть $t = u\sigma / \sqrt{N}$. Тогда (41) и (42) доказывают, что

$$\int_{-\tau}^{\tau} e^{(n+1)g(\sigma+it)} dt = \\ = \frac{(e^\sigma - 1)^m}{\sigma^n \sqrt{N}} \int_{-N^\varepsilon}^{N^\varepsilon} \exp \left(-\frac{u^2}{2} + \frac{(-iu)^3 a_3}{N^{1/2}} + \dots + \frac{(-iu)^l a_l}{N^{l/2-1}} + O \left(N^{(l+1)\varepsilon - (l-1)/2} \right) \right) du,$$

где $(1 - \beta) a_k$ — полином степени $k - 1$ от α и β , причем $0 \leq a_k \leq 2/k$. (Например, $ba_3 = (2 - \beta(\alpha + \beta)) / (1 - \beta)$ и $24a_4 = (6 - \beta(\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2)) / (1 - \beta)$.) Монотонность подынтегральной функции показывает, что интегралом по оставшемуся диапазону можно пренебречь. Теперь применим метод Лапласа и распространим интеграл на $-\infty < u < \infty$, а затем воспользуемся формулой из ответа к упражнению 44, полагая $c_k = 2^{k/2} a_k$, для определения b_1, b_2, \dots

(с) Мы докажем, что $|e^z - 1|^m \sigma^{n+1} / ((e^\sigma - 1)^m |z|^{n+1})$ экспоненциально мало на этих трех путях. Если $\sigma \leq 1$, эта величина меньше, чем $1/(2\pi)^{n+1}$ (поскольку, например, $e^\sigma - 1 > \sigma$). При $\sigma > 1$ получаем $\sigma < 2|z|$ и $|e^z - 1| \leq e^\sigma - 1$.

59. В этом предельном случае $\alpha = 1 + n^{-1}$, а $\beta = 1 - n^{-1} + \frac{2}{3}n^{-2} + O(n^{-3})$; следовательно, $N = 1 + \frac{1}{3}n^{-1} + O(n^{-2})$. Старший член $\beta^{-n} / \sqrt{2\pi N}$ равен $e/\sqrt{2\pi}$, умноженному на $1 - \frac{1}{3}n^{-1} + O(n^{-2})$ (заметим, что $e/\sqrt{2\pi} \approx 1.0844$). Значение a_k в ответе к упражнению 58 (b) становится равным $1/k + O(n^{-1})$. Так что уточняющие члены в первом приближении равны

$$\frac{b_j}{N^j} = [z^j] \exp \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k} z^{2k-1}}{2k(2k-1)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

т.е. члены в (расходящемся) ряде соответствуют приближению Стирлинга

$$\frac{1}{1!} \sim \frac{e}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{288} + \frac{139}{51840} - \frac{571}{2488320} - \dots \right).$$

60. (а) Количество m -арных строк длины n , в которых встречаются все m цифр, равно $m! \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$, и принцип включения-исключения приводит к выражению этой величины в виде $\binom{m}{0} m^n - \binom{m}{1} (m-1)^n + \dots$. Теперь обратитесь к упражнению 7.2.1.4–37.

(b) Мы имеем $(m-1)^n / (m-1)! = (m^n / m!) m \exp(n \ln(1 - 1/m))$, а $\ln(1 - 1/m)$ меньше, чем $-n^{\varepsilon-1}$.

(с) В этом случае $\alpha > n^\varepsilon$ и $\beta = \alpha e^{-\alpha} e^\beta < \alpha e^{1-\alpha}$. Таким образом,

$$1 < (1 - \beta/\alpha)^{m-n} < \exp(nO(e^{-\alpha}));$$

а также $1 > e^{-\beta m} = e^{-(n+1)\beta/\alpha} > \exp(-nO(e^{-\alpha}))$. Так (45) превращается в $(m^n / m!) (1 + O(n^{-1}) + O(ne^{-n^\varepsilon}))$.

61. Сейчас $\alpha = 1 + \frac{r}{n} + O(n^{2\varepsilon-2})$ и $\beta = 1 - \frac{r}{n} + O(n^{2\varepsilon-2})$. Таким образом, $N = r + O(n^{2\varepsilon-1})$, и случай $l = 0$ в (43) сводится к

$$n^r \left(\frac{n}{2}\right)^r \frac{e^r}{r^r \sqrt{2\pi r}} \left(1 + O(n^{2\varepsilon-1}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right).$$

(Это приближение хорошо соответствует таким тождествам, как $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}$ и $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} = 2 \binom{n}{4} + \binom{n+1}{4}$; на самом деле мы имеем

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-r \end{matrix} \right\} = \frac{n^{2r}}{2^r r!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где r — константа, в соответствии с формулами (6.42) и (6.43) из *Math.*)

62. Предположение истинно при $1 \leq n \leq 10\,000$ (причем в 5648 случаях $m = \lfloor e^\xi - 1 \rfloor$). Е.Р. Канфилд (E.R. Canfield) и К. Померанц (C. Pomerance) в статье, содержащей прекрасный обзор более ранних работ по связанным темам, показали, что указанное утверждение выполняется для всех достаточно больших n и что максимум достигается в *обоих* случаях, только если $e^\xi \bmod 1$ очень близко к $\frac{1}{2}$. [*Integers*, 2 (2002), A1, 1–13.]

63. (а) Результат выполняется при $p_1 = \dots = p_n = p$, потому что $a_{k-1}/a_k = (k/(n+1-k))((n-\mu)/\mu) \leq (n-\mu)/(n+1-\mu) < 1$. Он также верен по индукции и при $p_n = 0$ или 1 . В общем случае рассмотрим минимум $a_k - a_{k-1}$ по всем вариантам выбора (p_1, \dots, p_n) , таким, что $p_0 + \dots + p_n = \mu$. Если $0 < p_1 < p_2 < 1$, пусть $p'_1 = p_1 - \delta$ и $p'_2 = p_2 + \delta$, и заметим, что $a'_k - a'_{k-1} = a_k - a_{k-1} + \delta(p_1 - p_2 - \delta)\alpha$ для некоторого α , зависящего только от p_3, \dots, p_n . В точке минимума должно быть $\alpha = 0$; таким образом, можно выбрать δ так, чтобы либо $p'_1 = 0$, либо $p'_2 = 1$. Следовательно, минимума можно достичь, когда все p_j имеют одно из трех значений $\{0, 1, p\}$. Но мы должны доказать, что в таких случаях $a_k - a_{k-1} > 0$.

(б) Изменение каждого p_j на $1 - p_j$ изменяет μ на $n - \mu$ и a_k на a_{n-k} .

(с) У $f(x)$ нет положительных корней. Следовательно, $f(z)/f(1)$ имеет вид, представленный в (а) и (б).

(д) Пусть $C(f)$ — количество изменений знака в последовательности коэффициентов f ; мы хотим показать, что $C((1-x)^2 f) = 2$. В действительности $C((1-x)^m f) = m$ для всех $m \geq 0$. $C((1-x)^m) = m$, и $C((a+bx)f) \leq C(f)$ при положительных a и b . Следовательно, $C((1-x)^m f) \leq m$. Если $f(x)$ — любой ненулевой полином, то $C((1-x)f) > C(f)$; следовательно, $C((1-x)^m f) \geq m$.

(е) Поскольку $\sum_k \binom{n}{k} x^k = x(x+1)\dots(x+n-1)$, гипотеза (с) применима непосредственно с $\mu = H_n$. Для полиномов $f_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k$ гипотезу (с) можно использовать с $\mu = \varpi_{n+1}/\varpi_n - 1$, если $f_n(x)$ имеет n действительных корней. Последнее утверждение следует по индукции, поскольку $f_{n+1}(x) = x(f_n(x) + f'_n(x))$: если $a > 0$ и $f(x)$ имеет n действительных корней, то столько же их и у функции $g(x) = e^{ax}f(x)$. Но $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$; следовательно, $g'(x) = e^{ax}(af(x) + f'(x))$ также имеет n действительных корней (один слева, а $n-1$ — между корнями $g(x)$).

[См. E. Laguerre, *J. de Math.* (3), **9** (1883), 99–146; W. Hoeffding, *Annals Math. Stat.*, **27** (1956), 713–721; J. N. Darroch, *Annals Math. Stat.*, **35** (1964), 1317–1321; J. Pitman, *J. Combinatorial Theory*, **A77** (1997), 297–303.]

64. Нужно применить алгебру, чтобы вычесть $\ln \varpi_n$ из $\ln \varpi_{n-k}$.

65. Она равна ϖ_n^{-1} , умноженному на количество встречающихся k -блоков и упорядоченных пар k -блоков в списке всех разбиений, а именно

$$\left(\binom{n}{k} \varpi_{n-k} + \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} \varpi_{n-2k} \right) / \varpi_n,$$

минус квадрат от (49). Асимптотически это значение представляет собой

$$(\xi^k/k!) (1 + O(n^{4\varepsilon-1})).$$

66. (Максимум (48) при $n = 100$ достигается для разбиений $7^1 6^2 5^4 4^6 3^7 2^6 1^4$ и $7^1 6^2 5^4 4^6 3^8 2^5 1^3$.)

67. Математическое ожидание значения M^k равно ϖ_{n+k}/ϖ_n . Таким образом, согласно (50), среднее значение равно $\varpi_{n+1}/\varpi_n = n/\xi + \xi/(2(\xi+1)^2) + O(n^{-1})$,

а дисперсия равна

$$\begin{aligned} \frac{\varpi_{n+2}}{\varpi_n} - \frac{\varpi_{n+1}^2}{\varpi_n^2} &= \\ &= \left(\frac{n}{\xi}\right)^2 \left(1 + \frac{\xi(2\xi+1)}{(\xi+1)^2 n} - 1 - \frac{\xi^2}{(\xi+1)^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{n}{\xi(\xi+1)} + O(1). \end{aligned}$$

68. Максимальное количество ненулевых компонентов во всех частях разбиения равно $n = n_1 + \dots + n_m$; оно встречается тогда и только тогда, когда все части компонентов равны 0 или 1. Тогда значения $l+1 = n$ и $b = mn_1 + (m-1)n_2 + \dots + n_m$ достигают максимумов. [Вот почему лучше выбирать имена элементов мультимножества так, чтобы $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$.]

69. В начале шага МЗ, если $k > b$ и $l = r-1$, перейти к шагу М5. На шаге М5, если $j = a$ и $(v_j - 1)(r-l) < u_j$, перейти к шагу М6 вместо уменьшения v_j .

70. (а) $\left| \begin{smallmatrix} n-1 \\ r-1 \end{smallmatrix} \right| + \left| \begin{smallmatrix} n-2 \\ r-1 \end{smallmatrix} \right| + \dots + \left| \begin{smallmatrix} r-1 \\ r-1 \end{smallmatrix} \right|$, поскольку $\left| \begin{smallmatrix} n-k \\ r-1 \end{smallmatrix} \right|$ включает блок $\{0, \dots, 0, 1\}$ с k нулями. Общее количество, также известное как $p(n-1, n)$, равно $p(n-1) + \dots + p(1) + p(0)$.

(б) Ровно $N = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ r \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-2 \\ r-2 \end{smallmatrix} \right\}$ r -блочных разбиений $\{1, \dots, n-1, n\}$ останутся теми же при взаимообмене $n-1 \leftrightarrow n$. Таким образом, искомый ответ равен $N + \frac{1}{2}(\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\} - N) = \frac{1}{2}(\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right\} + N)$, что также равно числу ограниченно растущих строк $a_1 \dots a_n$, у которых $\max(a_1, \dots, a_n) = r-1$ и $a_{n-1} \leq a_n$. Общее количество равно $\frac{1}{2}(\varpi_n + \varpi_{n-1} + \varpi_{n-2})$.

71. $\left\lfloor \frac{1}{2}(n_1+1) \dots (n_m+1) - \frac{1}{2} \right\rfloor$, поскольку имеется $(n_1+1) \dots (n_m+1) - 2$ композиций из двух частей, и половина из них находится не в лексикографическом порядке, если только все n_j не являются четными. (См. упражнение 7.1.2.4–31. Формулы вплоть до 5 частей были выведены в работе Е.М. Wright, *Proc. London Math. Soc.* (3), **11** (1961), 499–510.)

72. Да. Описанный далее алгоритм вычисляет $a_{jk} = p(j, k)$ для $0 \leq j, k \leq n$ за $\Theta(n^4)$ шагов. Начнем с установки $a_{jk} \leftarrow 1$ для всех j и k . Затем для $l = 0, 1, \dots, n$ и $m = 0, 1, \dots, n$ (в любом порядке), если $l+m > 1$, устанавливаем $a_{jk} \leftarrow a_{jk} + a_{(j-l)(k-m)}$ для $j = l, \dots, n$ и $k = m, \dots, n$ (в возрастающем порядке).

(См. табл. А.1. Аналогичный метод вычисляет $p(n_1, \dots, n_m)$ за $O(n_1 \dots n_m)^2$ шагов. В цитированной ранее статье Чима (Cheema) и Моцкин (Motzkin) вывели

Таблица А.1. Количество мультиразбиений

n	0	1	2	3	4	5	6	n	0	1	2	3	4	5
$p(0, n)$	1	1	2	3	5	7	11	$P(0, n)$	1	2	9	66	712	10457
$p(1, n)$	1	2	4	7	12	19	30	$P(1, n)$	1	4	26	249	3274	56135
$p(2, n)$	2	4	9	16	29	47	77	$P(2, n)$	2	11	92	1075	16601	325269
$p(3, n)$	3	7	16	31	57	97	162	$P(3, n)$	5	36	371	5133	91226	2014321
$p(4, n)$	5	12	29	57	109	189	323	$P(4, n)$	15	135	1663	26683	537813	13241402
$p(5, n)$	7	19	47	97	189	339	589	$P(5, n)$	52	566	8155	149410	3376696	91914202

рекуррентное соотношение

$$n_1 p(n_1, \dots, n_m) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} k_1 p(n_1 - k_1 l, \dots, n_m - k_m l),$$

но эта интересная формула облегчает вычисления только в отдельных случаях.)

73. Да. Пусть $P(m, n) = p(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$, где всего имеется m единиц и n двоек. Тогда $P(m, 0) = \varpi_m$, и можно воспользоваться рекуррентным соотношением

$$2P(m, n+1) = P(m+2, n) + P(m+1, n) + \sum_k \binom{n}{k} P(m, k).$$

Это рекуррентное соотношение можно доказать, рассматривая, что произойдет, если мы заменим два x в мультимножестве для $P(m, n+1)$ на два разных элемента x и x' . Мы получим $2P(m, n+1)$ разбиений, представляющих собой разбиения $P(m+2, n)$, не считая $P(m+1, n)$ случаев, когда x и x' принадлежат одному и тому же блоку, и $\binom{n}{k} P(m, n-k)$ случаев, когда блоки, содержащие x и x' , идентичны и имеют k дополнительных элементов.

Примечания: см. табл. А.1. Вот еще одно рекуррентное соотношение, менее удобное для вычислений:

$$P(m+1, n) = \sum_{j, k} \binom{n}{k} \binom{n-k+m}{j} P(j, k).$$

Последовательность $P(0, n)$ впервые была изучена в работах Е.К. Lloyd, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **103** (1988), 277–284, и G. Labelle, *Discrete Math.*, **217** (2000), 237–248, где вычисления выполнялись совершенно иным образом. В упражнении 70 (b) показано, что $P(m, 1) = (\varpi_m + \varpi_{m+1} + \varpi_{m+2})/2$; в общем случае $P(m, n)$ можно записать с использованием обозначений из упражнения 23 как $\varpi^m q_n(\varpi)$, где $q_n(x)$ — полином степени $2n$, определяемый производящей функцией $\sum_{n=0}^{\infty} q_n(x) z^n/n! = \exp((e^z + (x+x^2)z - 1)/2)$. Таким образом, в соответствии с упражнением 31

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(m, n) \frac{z^n}{n!} = e^{(e^z-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varpi^{(2k+m+1)(k+m+1)}}{2^k} \frac{z^k}{k!}.$$

Лабель (Labelle) доказал как частный случай гораздо более общего результата, что количество разбиений $\{1, 1, \dots, n, n\}$ ровно на r блоков равно

$$n! [x^r z^n] e^{-x+x^2(e^z-1)/2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{zk(k+1)/2} \frac{x^k}{k!}.$$

75. Метод седловой точки дает $Ce^{An^{2/3}+Bn^{1/3}}/n^{55/36}$, где $A = 3\zeta(3)^{1/3}$, $B = \pi^2\zeta(3)^{-1/3}/2$ и $C = \zeta(3)^{19/36}(2\pi)^{-5/6}3^{-1/2} \exp(1/3 + B^2/4 + \zeta'(2)/(2\pi^2) - \gamma/12)$. [F.C. Auluck, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 72–83; E.M. Wright, *American J. Math.*, **80** (1958), 643–658.]

76. Воспользовавшись тем фактом, что $p(n_1, n_2, n_3, \dots) \geq p(n_1 + n_2, n_3, \dots)$, а следовательно, $P(m + 2, n) \geq P(m, n + 1)$, можно по индукции доказать, что $P(m, n + 1) \geq (m + n + 1)P(m, n)$. Таким образом,

$$2P(m, n) \leq P(m + 2, n - 1) + P(m + 1, n - 1) + eP(m, n - 1).$$

Итерируя это неравенство, получаем, что

$$2^n P(0, n) = (\varpi^2 + \varpi)^n + O\left(n(\varpi^2 + \varpi)^{n-1}\right) = (n\varpi_{2n-1} + \varpi_{2n}) \left(1 + O\left((\log n)^3/n\right)\right).$$

(Более точная асимптотическая формула может быть получена из производящей функции в ответе к упражнению 75.)

78. 3 3 3 3 2 1 0 0 0

1 0 0 0 2 2 3 2 0 Поскольку все кодированные

2 2 1 0 0 2 1 0 2 разбиения должны быть (000000000)

2 1 0 2 2 0 0 1 3

79. Имеется 432 таких цикла. Однако они дают только 304 различных цикла разбиений множества, поскольку различные циклы могут описывать одну и ту же последовательность разбиений. Например, (000012022332321) и (000012022112123) в этом смысле эквивалентны.

80. [См. F. Chung, P. Diaconis and R. Graham, *Discrete Mathematics*, **110** (1992), 52–55.] Построим ориентированный граф с ϖ_{n-1} вершинами и ϖ_n дугами; каждая ограниченно растущая строка $a_1 \dots a_n$ определяет дугу от вершины $a_1 \dots a_n$ к вершине $\rho(a_1 \dots a_n)$, где ρ — функция из упражнения 4 (например, дуга 01001213 идет от 0100121 к 0110203). Каждый универсальный цикл определяет в этом ориентированном графе цепь Эйлера; и обратно: каждая цепь Эйлера может использоваться для определения одного или нескольких ограниченно растущих универсальных последовательностей на элементах множества $\{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Цепь Эйлера существует согласно методу из раздела 2.3.4.2, если мы положим, что последний выход из каждой ненулевой вершины $a_1 \dots a_{n-1}$ идет по дуге $a_1 \dots a_{n-1} a_{n-1}$. Однако последовательность может не быть циклической. Например, не существует универсального цикла при $n < 4$, а при $n = 4$ универсальная последовательность 000012030110100222 определяет цикл разбиений множества, который не соответствует ни одному универсальному циклу.

Существование цикла можно доказать при $n \geq 6$, если начать с цепи Эйлера, которая начинается с $0^n x y x^{n-3} u (uv)^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} u^{\lfloor n \text{ нечетно} \rfloor}$ для некоторых различных элементов $\{u, v, x, y\}$. Такой шаблон возможен, если заменить последний выход из $0^k 121^{n-3-k}$ с $0^{k-1} 121^{n-2-k}$ на $0^{k-1} 121^{n-3-k} 2$ для $2 \leq k \leq n - 4$, а последними выходами из 0121^{n-4} и $01^{n-3} 2$ будут соответственно $010^{n-4} 1$ и $0^{n-3} 10$. Теперь, если мы будем выбирать числа цикла в обратном порядке, таким образом определяя u и v , то можем положить x и y наименьшими элементами, отличными от $\{0, u, v\}$.

Можно найти, что количество универсальных циклов такого специального типа огромно — как минимум

$$\left(\prod_{k=2}^{n-1} (k!(n-k)) \binom{n-1}{k} \right) / \left((n-1)!(n-2)^3 3^{2n-5} 2^2 \right) \quad \text{при } n \geq 6.$$

Пока что среди них не известен ни один, который был бы легко декодируем. Случай $n = 5$ рассматривается ниже.

81. Заметив, что $\varpi_5 = 52$, мы используем универсальный цикл для $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, элементами которого являются 13 трэф, 13 бубен, 13 червей, 12 пик и джокер. Один такой цикл, найденный методом проб и ошибок с использованием цепи Эйлера, описанной в предыдущем упражнении, представляет собой

(♠♠♠♠♠♣♥♦J♣♥♦♥♠♣♣♦♥♣♦♣♥♦♦♣♥♣♥♣♠♣♣♦♣♦♦♣♦♠♦♥♥♥♥♠♥♥♥♠♠♦♦).

(В действительности всего имеется 114 056 таких циклов, если прибегать к расстановке $a_k = a_{k-1}$ в последнюю очередь и вводить джокер в колоду, как только это становится возможным.) Если джокер считать обычной картой пик, фокус получится с вероятностью $\frac{47}{52}$.

82. Имеется 13 644 решения, хотя это количество снижается до 1 981, если считать

$$\begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}.$$

Наименьшая сумма равна $5/2$, наибольшая — $25/2$; замечательное решение

$$\begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} = \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} = \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix} + \begin{matrix} \blacksquare \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}$$

представляет собой один из двух разных способов получить сумму $118/15$. [Эта задача была предложена Б.А. Кордемским в *Математической смекалке* (1954) (задача 78 в английском переводе *The Moscow Puzzles* (1972)).]

Предметный указатель

σ-цикл, 108

Abel, Niels Henrik, 151

Ahlsvede, Rudolph, 142

Almkvist, Gert Einar Torsten, 154

Andrews, George W. Eyre, 52; 154

Arbogast, Louis Francois Antoine, 87

Atkin, Arthur Oliver Lonsdale, 150

Auluck, Faqir Chand, 186

Beckenbach, Edwin Ford, 15

Becker, Harold W., 170; 175

Bell, Eric Temple, 86

Bellman, Richard Ernest, 30

Berele, Allan, 172

Bernoulli, Jacques (Jakob, James), 27; 86

Bessel, Friedrich Wilhelm, 61

Birkhoff, Garrett, 166

Bitner, James Richard, 18

Björner, Anders, 136

Blissard, John, 169

Bošković, Ruđer Josip (Бошкович, Ругер Ђосип), 154

Bolker, Ethan David, 176

Bonferroni, Carlo Emilio, 153

Brandt, Jorgen, 163

Browning, Elizabeth Barrett, 107

Bruijn, Nicolaas Govert de, 94; 178

Brylawski, Thomas Henry, 156

Buck, Marshall Wilbert, 44

Cai, Ning, 142

Calabi, Eugenio, 118

Canfield, Earl Rodney, 183

Carlitz, Leonard, 162; 175

Caron, Jacques, 124

Catalan, Eugene Charles, 114

Cauchy, Augustin Louis, 66; 76

Cayley, Arthur, 159

Chase, Phillip John, 22; 23; 27; 40; 128

Cheema, Mohindar Singh, 100; 185

Chen, William Yong-Chuan, 172

Chung Graham, Fan Rong King, 143; 187

Claesson, Anders Karl, 165

Clements, George Francis, 8; 36; 49; 140; 141

Colman, Walter John Alexander, 152

Colthurst, Thomas Wallace, 161

Comtet, Louis, 86; 178

Corless, Robert Malcolm, 179

Corteel, Sylvie Marie-Claude, 148

Cramér, Carl Harald, 181

Czerny, Carl, 130

Danh, Tran-Ngoc, 142

Dante Alighieri, 175

Darroch, John Newton, 184

Davidson, George Henry, 144

Daykin, David Edward, 134; 142

Debye, Peter Joseph William, 87

Dedekind, Julius Wilhelm Richard, 60; 61

Deng, Eva Yu-Ping, 172

Derbès, Joseph, 162

Diaconis, Persi Warren, 143; 187

Dobiński, G., 87

Dudeney, Henry Ernest, 101

Durfee, William Pitt, 56; 147

Dvořák, Stanislav, 115

Dyson, Freeman John, 150

Eades, Peter Dennis, 27; 129

Eckhoff, Jurgen, 135

Edgeworth, Francis Ysidro, 181

Ehrlich, Gideon, 18; 71; 84; 85; 123; 175

Endo-order, 25; 42

Engel, Konrad Wolfgang, 142

Enns, Theodore Christian, 129

Erdős, Pál, 30; 51; 62; 76

Erdős, Péter L., 166

Etienne, Gwihen, 163

Euler, Leonhard, 57; 67; 72; 74; 110; 161

Felsenstein, Joseph, 179

- Fenichel, Robert Ross, 37
 Fenner, Trevor Ian, 146
 Ferrers, Norman Macleod, 56
 Fibonacci, Leonardo, of Pisa; Leonardo filio
 Bonacci Pisano, 58
 Fisher, Ronald Aylmer, 153
 Flight, Colin, 179
 Flye Sainte-Marie, Camille, 143
 Foulds, Leslie Richard, 179
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 59
 Fraenkel, Aviezri S., 120
 Frankl, Péter, 136; 137
 Franklin, Fabian, 72; 76
 Fristedt, Bert, 155

 Gale, David, 158
 Gardner, Martin, 163
 Garsia, Adriano Mario, 174
 Garvan, Francis Gerard, 150
 Goldman, Alan Joseph, 174
 Golomb, Solomon Wolf, 11; 37; 164
 Gonnet Haas, Gaston Henry, 179
 Good, Irving John, 178
 Gordon, Basil, 100
 Graham, Ronald Lewis, 143; 187
 Greene, Curtis, 157
 Greg, Walter Wilson, 179
 Griggs, Jerrold Robinson, 163
 Guittone d'Arezzo, 107
 Gupta, Hansraj, 153

 Haigh, John, 96
 Hall, Marshall, Jr., 152; 170
 Hankel, Hermann, 90; 177
 Hardy, Godfrey Harold, 61; 149; 159
 Hare, David Edwin George, 179
 Heine, Heinrich Eduard, 74
 Henrici, Peter Karl Eugen, 60
 Hickey, Thomas Butler, 27; 129
 Hilbert, David, 49
 Hilton, Anthony John William, 45; 135
 Hindenburg, Carl Friedrich, 54; 87
 Ho, Chih-Chang Daniel, 163
 Hoare, Arthur Howard Malortie, 164
 Hoeffding, Wassily, 184
 Hume, Alexander, 8
 Hurlbert, Glenn Howland, 144
 Hutchinson, George Allen, 84; 100

 Igusa, Kiyoshi, 163
 Irwin, Joseph Oscar, 169
 Ising, Ernst, 38; 118

 Jackson, Bradley Warren, 144
 Jacobi, Carl Gustav Jacob, 58; 74; 150
 Janson, Carl Svante, 8
 Jeffrey, David John, 179
 Jenkyns, Thomas Arnold, 21
 Joichi, James Tomei, 148; 174

 Katona, Gyula, 30
 Kirchhoff, Gustav Robert, 66
 Kleber, Michael Steven, 161
 Kleitman, Daniel J., 157
 Klimko, Eugene Martin, 145
 Knopp, Marvin Isadore, 151
 Knuth, Donald Ervin, 8; 117; 179
 Ko, Chao, 51
 Korsh, James F., 118
 Kramp, Christian, 87
 Kruskal, Joseph Bernard, Jr., 30

 Labelle, Gilbert, 186
 Lagrange (= de la Grange), Joseph Louis, 178
 Laguerre, Edmond Nicolas, 184
 Landau, Hyman Garshin, 80
 Laplace (= de la Place), Pierre Simon,
 Marquis de, 88
 Leck, Uwe, 143
 Lehmer, Derrick Henry, 15; 43; 75; 129
 Lehner, Joseph, 62; 76
 Lindström, Bernt Lennart Daniel, 36; 49; 142
 Linusson, Hans Svante, 140
 Lipschutz, Seymour Saul, 118
 Littlewood, John Edensor, 158; 159
 Liu, Chao-Ning, 18
 Lloyd, Edward Keith, 186
 Loizou, Georghios (Λοιζου, Γεωργιος), 146
 Lorenz, Max Otto, 159
 Lovász, László, 46; 136
 Lovejoy, Jeremy Kenneth, 148
 Lucas, Francois Edouard Anatole, 143
 Lüneburg, Heinz, 120
 Lunnon, William Frederick, 170

 Macaulay, Francis Sowerby, 30; 49; 135
 MacMahon, Percy Alexander, 81; 97
 Malfatti, Giovanni Francesco Giuseppe, 152
 Marshall, Albert Waldron, 159
 Matsumoto, Makoto, 137
 Matsunaga, Yoshisuke, 86
 McCarthy, David, 21
 McKay, Brendan Damien, 143

- McKay, John Keith Stuart, 54
 Meißner, Otto, 162
 Mellin, Robert Hjalmar, 59; 75
 Miller, Joan Elizabeth, 18; 40
 Milne, Stephen Carl, 102
 Misiurewicz, Michal, 162
 Mor, Moshe, 120
 Morgan, Augustus de, 10; 75
 Moser, Leo, 93; 175; 178
 Motzkin, Theodor Samuel, 100; 169; 185
 Muirhead, Robert Franklin, 159

 Naudé, Philippe, 57
 Newton, Isaac, 91; 182
 Nijenhuis, Albert, 17; 77

 Odlyzko, Andrew Michael, 62
 Oettinger, Ludwig, 162
 Olive, Gloria, 128
 Olkin, Ingram, 159
 Olver, Frank William John, 94

 Partition, 52
 Pascal, Ernesto, 15
 Payne, William Harris, 19; 40
 Peirce, Charles Santiago Sanders, 8; 85
 Petrarca, Francesco, 107
 Pitman, James William, 111; 169; 184
 Pleasants, Peter Arthur Barry, 170
 Poinsoot, Louis, 50
 Poisson, Siméon Denis, 59
 Poisson, Simeon Denis, 75; 96
 Pólya, György, 146
 Polya, Gyorgy, 159
 Pomerance, Carl, 183
 Prodingler, Helmut, 175
 Pudlák, Pavel, 166

 Rademacher, Hans, 46; 61
 Rado, Richard, 51
 Ramanujan Iyengar, Srinivasa, 61; 74; 149
 Read, Ronald Cedric, 27; 129
 Reingold, Edward Martin, 18
 Reiss, Michel, 143
 Rimmel, Jeffrey Brian, 174
 Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 179
 Robbins, David Peter, 176
 Robinson, Robert William, 143; 179
 Ruskey, Frank, 8; 44; 85; 103
 Ruzsa, Imre Zoltán, 137
 Ryser, Herbert John, 158

 Savage, Carla Diane, 69; 130
 Schur, Issai, 159
 Schützenberger, Marcel Paul, 30; 135; 141
 Shakespeare (= Shakspeare), William, 107
 Shallit, Jeffrey Outlaw, 176
 Shields, Ian Beaumont, 130
 Simões Pereira, José Manuel dos Santos, 118
 Spenser, Edmund, 107
 Stachowiak, Grzegorz, 129
 Stam, Aart Johannes, 96
 Stanley, Richard Peter, 25; 52; 56; 136; 162;
 172
 Stanton, Dennis Warren, 148
 Stephens, Nelson Malcolm, 170
 Stirling, James, 89; 167
 Stojmenovic, Ivan Danca (Стојменовић,
 Иван Данча), 54
 Sutcliffe, Alan, 166
 Sutherland, Norman Stuart, 7
 Swinnerton-Dyer, Henry Peter Francis, 150
 Sylvester, James Joseph, 73; 150
 Székely, László Aladar, 166

 Takagi, Teiji, 31; 46; 136
 Tang, Donald Tao-Nan, 18
 Tarry, Gaston, 143
 Taylor, Brook, 93
 Temperley, Harold Neville Vazeille, 65
 Terquem, Orly, 50
 Tippet, Leonard Henry Caleb, 153
 Tokushige, Norihide, 137
 Török, Éva, 128
 Touchard, Jacques, 169
 Trost, Ernst, 162
 Tuma, Jiri, 166

 Walsh, Timothy Robert Stephen, 19; 131
 Wang, Da-Lun, 31; 34
 Wang, Ping Yang, 31; 34
 Wegner, Gerd, 135
 Whipple, Francis John Welsh, 34
 White, Dennis Edward, 174
 Whitworth, William Allen, 86
 Wiedemann, Douglas Henry, 44
 Wilf, Herbert Saul, 17; 77; 118
 Williams, Aaron Michael, 129
 Williamson, Stanley Gill, 164
 Wong, Roderick Sue-Chuen, 94
 Wright, Edward Maitland, 185; 186
 Wyman, Max, 93; 175; 178

- Yan, Catherine Huafei, 172
 Yee, Ae Ja, 149
- Zanten, Arend Jan van, 121
 Zeilberger, Doron, 73; 149
 Zoghbi, Antoine Chaiban, 54
- Абель, Нильс Хенрик (Abel, Niels Henrik), 151
- Алгоритм
 Вычисления сопряженного разбиения, 146
 Генерации дуальных сочетаний в уменьшающемся лексикографическом порядке, 115
 Генерации сочетаний в виде битовых строк, 115
 Генерация бинарных разбиений, 160
 Генерация дуальной последовательности Чейза, 127
 Генерация последовательности Чейза, 127
 Генерация разбиений в порядке кода Грея, 167
 Генерация разбиений с использованием связей, 164
 Заполнение рюкзака, 17
 Климко генерации разбиений, 145
 Мультиразбиения в убывающем лексикографическом порядке, 98
 Ограниченно растущие строки в лексикографическом порядке, 84
 Пейна, 19
 Последовательность Чейза, 23
 Разбиение на m частей, 54
 Разбиения в обратном лексикографическом порядке, 54
 Сочетания в лексикографическом порядке, 13; 14
 Сочетания двери-вертушки, 19
- Алмквист, Герт Эйнар Торстен (Almkvist, Gert Einar Torsten), 154
 Альсведе, Рудольф (Ahlsvede, Rudolph), 142
 Алюк, Факир Чанд (Auluck, Faqir Chand), 186
 Арбогаст, Луи Франсуа Антуан (Arbogast, Louis Francois Antoine), 87
 Арбогаста формула, 87
 Аткин, Артур Оливер Лонсдейл (Atkin, Arthur Oliver Lonsdale), 150
- Бак, Маршалл Вильберт (Buck, Marshall Wilbert), 44
 Бекенбах, Эрвин Форд (Beckenbach, Edwin Ford), 15
 Беккер, Гарольд В. (Becker, Harold W.), 170; 175
 Белл, Эрик Темпл (Bell, Eric Temple), 86
 Белла числа, 86; 90; 104
 Обобщенные, 105; 106; 109
 Беллман, Ричард Эрнест (Bellman, Richard Ernest), 30
 Береле, Аллан (Berele, Allan), 172
 Бернулли числа, 86
 Бернулли, Якоб (Bernoulli, Jacques (Jakob, James)), 27; 86
 Бессель, Фридрих Вильгельм (Bessel, Friedrich Wilhelm), 61
 Бесселя функция, 61
 Бёрнер, Андерс (Björner, Anders), 136
 Бинарное векторное пространство, 38
 Бинарное разбиение, 81
 Биномиальное дерево, 15; 39
 Биркхофф, Гарретт (Birkhoff, Garrett), 166
 Битнер, Джеймс Ричард (Bitner, James Richard), 18
 Блиссард, Джон (Blissard, John), 169
 Болкер, Этан Дэвид (Bolker, Ethan David), 176
 Бонферрони, Карло Эмилио (Bonferroni, Carlo Emilio), 153
 Бошкович, Ругер Йосип (Bošković, Ruđer Josip), 154
 Брандт, Йорген (Brandt, Jørgen), 163
 Браунинг, Элизабет Барретт (Browning, Elizabeth Barrett), 107
 Брейн, Николаас Говерт де (Bruijn, Nicolaas Govert de), 94; 178
 Брилавски, Томас Генри (Brylawski, Thomas Henry), 156
- Ванг, Да-Лун (Wang, Da-Lun), 31; 34
 Ванг, Пинг Янг (Wang, Ping Yang), 31; 34
 Ванга и Ванга теорема, 34
 Вегнер, Герд (Wegner, Gerd), 135
 Вершик, Анатолий Моисеевич, 65; 154
 Видеманн, Дуглас Генри (Wiedemann, Douglas Henry), 44
 Вильф, Герберт Саул (Wilf, Herbert Saul), 17; 77; 118

- Вильямс, Аарон Майкл (Williams, Aaron Michael), 129
- Вильямсон, Стенли Джилл (Williamson, Stanley Gill), 164
- Виман, Макс (Wyman, Max), 93; 175; 178
- Виппл, Френсис Джон Велш (Whipple, Francis John Welsh), 34
- Включения и исключения принцип, 63
- Волш, Тимоти Роберт Стефен (Walsh, Timothy Robert Stephen), 19; 131
- Вонг, Родерик Су-Чен (Wong, Roderick Sue-Chuen), 94
- Ганкель, Герман (Hankel, Hermann), 90; 177
- Ганкеля интеграл, 90
- Ганкеля контур, 109; 177
- Гарван, Френсис Джерард (Garvan, Francis Gerard), 150
- Гарднер, Мартин (Gardner, Martin), 163
- Гарсия, Адриано Марио (Garsia, Adriano Mario), 174
- Гейл, Дэвид (Gale, David), 158
- Гейла-Райзера теорема, 158
- Гейне, Генрих Эдуард (Heine, Heinrich Eduard), 74
- Генерация разбиений целых чисел, 53
- Генриси, Питер Карл Юджин (Henrici, Peter Karl Eugen), 60
- Гильберт, Давид (Hilbert, David), 49
- Гильберта основная теорема, 49
- Гинденбург, Карл Фридрих (Hindenburg, Carl Friedrich), 54; 87
- Гипотеза средних уровней, 130
- Голдман, Алан Джозеф (Goldman, Alan Joseph), 174
- Голомб, Соломон Вольф (Golomb, Solomon Wolf), 11; 37; 164
- Гонне Хаас, Гастон Генри (Gonnet Haas, Gaston Henry), 179
- Гордон, Базиль (Gordon, Basil), 100
- Грег, Вальтер Вильсон (Greg, Walter Wilson), 179
- Грега дерево, 179
- Грехэм, Рональд Льюис (Graham, Ronald Lewis), 143; 187
- Грея код, 17
- Грея цикл, 45
- Григгс, Джеррольд Робинзон (Griggs, Jerrold Robinson), 163
- Грин, Кертис (Greene, Curtis), 157
- Гуд, Ирвинг Джон (Good, Irving John), 178
- Гупта, Хансрай (Gupta, Hansraj), 153
- Дайсон, Фриман Джон (Dyson, Freeman John), 150
- Дан, Тран-Нгок (Danh, Tran-Ngoc), 142
- Данте Алигьери (Dante Alighieri), 175
- Дарроч, Джон Ньютон (Darroch, John Newton), 184
- Двенадцатизадачие, 52
- Дворжак, Станислав (Dvořák, Stanislav), 115
- Дебай, Питер Йозеф Вильям (Debye, Peter Joseph William), 87
- Девидсон, Джордж Генри (Davidson, George Henry), 144
- Дедекинд, Юлиус Вильгельм Рихард (Dedekind, Julius Wilhelm Richard), 60; 61
- Дедекинда сумма, 61
- Дедекинда теорема, 60
- Денг, Ева Ю-Пинг (Deng, Eva Yu-Ping), 172
- Дербе, Йозеф (Derbès, Joseph), 162
- Дерева функция, 179
- Дерево
- Биномиальное, 15; 39
 - Грега, 179
 - Полупомеченное, 101
- Джексон, Бредли Уоррен (Jackson, Bradley Warren), 144
- Дженкинс, Томас Арнольд (Jenkyns, Thomas Arnold), 21
- Джефффри, Дэвид Джон (Jeffrey, David John), 179
- Джиттоне д'Ареццо (Guittone d'Arezzo), 107
- Джочи, Джеймс Томеи (Joichi, James Tomei), 148; 174
- Диаграмма
- Феррерса, 56; 69; 94; 146; 158; 172; 174
 - Феррерса, обобщенная, 148
- Диаконис, Перси Уоррен (Diaconis, Persi Warren), 143; 187
- Дилогарифмическая функция, 75
- Добински, Г. (Dobiński, G.), 87
- Дьюдени, Генри Эрнст (Dudeney, Henry Ernest), 101
- Дэйкин, Дэвид Эдвард (Daykin, David Edward), 134; 142
- Дюрфи прямоугольник, 147
- Дюрфи, Вильям Питт (Durfee, William Pitt), 56; 147

- Жоливальд, Филипп (Jolivald, Philippe), 143
- Зайльбергер, Дорон (Zeilberger, Doron), 73; 149
- Закон Киргофа, 66
- Зантен, Аренд Ян ван (Zanten, Arend Jan van), 121
- Зогби, Антуан Шабан (Zoghbi, Antoine Chaiban), 54
- Игуса, Киеси (Igusa, Kiyoshi), 163
- Идеальное разбиение, 81; 162
- Идес, Питер Деннис (Eades, Peter Dennis), 27; 129
- Изинг, Эрнст (Ising, Ernst), 38; 118
- Изинга конфигурация, 38; 45
- Инволюция, 109
- Интеграл Ганкеля, 90
- Ирвин, Джозеф Оскар (Irwin, Joseph Oscar), 169
- Йии, Ае Я (Yee, Ae Ja), 149
- Кай, Нинг (Cai, Ning), 142
- Калаби, Эженио (Calabi, Eugenio), 118
- Канфилд, Эрл Родни (Canfield, Earl Rodney), 183
- Карлиц, Леонард (Carlitz, Leonard), 162; 175
- Карон, Жак (Caron, Jacques), 124
- Карона многофазное слияние, 124
- Каталан, Эген Шарль (Catalan, Eugene Charles), 114
- Катона, Гюла (Katona, Gyula), 30
- Квадрат
Дюрфи, 56
- Кейли, Артур (Cayley, Arthur), 159
- Киргоф, Густав Роберт (Kirchhoff, Gustav Robert), 66
- Киргофа закон, 66
- Китаев, Сергей Владимирович, 165
- Классон, Андерс Карл (Claesson, Anders Karl), 165
- Клаттер, 49
- Клебер, Майкл Стивен (Kleber, Michael Steven), 161
- Клементс, Джордж Френсис (Clements, George Francis), 8; 36; 49; 140; 141
- Клементса–Линдстрема теорема, 36
- Клика, 45
- Климко, Юджин Мартин (Klimko, Eugene Martin), 145
- Кляйтман, Даниэл (Kleitman, Daniel J.), 157
- Кноп, Марвин Исадор (Knopp, Marvin Isadore), 151
- Кнут, Дональд Эрвин (Knuth, Donald Ervin), 8; 117; 179
- Ко, Чао (Ko, Chao), 51
- Код Грея, 17
Схемы, близкие к идеальной, 21
- Количество разбиений, 57
Верхняя граница, 59
- Количество частей разбиения, 62
- Колмэн, Вальтер Джон Александер (Colman, Walter John Alexander), 152
- Колтарст, Томас Уоллес (Colthurst, Thomas Wallace), 161
- Композиция, 11; 76
- Комте, Луи (Comtet, Louis), 86; 178
- Контур Ганкеля, 109; 177
- Конфигурация Изинга, 38; 45
- Кордемский, Борис Анастасьевич, 188
- Корлесс, Роберт Малкольм (Corless, Robert Malcolm), 179
- Кортил, Сильвия Мари-Клод (Corteel, Sylvie Marie-Claude), 148
- Корш, Джеймс Ф. (Korsh, James F.), 118
- Коши, Августин Луи (Cauchy, Augustin Louis), 66; 76
- Краевое представление разбиения, 57; 66
- Крамер, Карл Гаральд (Cramér, Carl Harald), 181
- Крамп, Христиан (Kramp, Christian), 87
- Криббедж, 50
- Кривая Темперли, 65
- Крускал, Иосиф Бернард мл. (Kruskal, Joseph Bernard, Jr.), 30
- Крускала функция, 31
- Крускала–Катоны теорема, 30
- Лабель, Жильберт (Labelle, Gilbert), 186
- Лавджой, Джереми Кеннет (Lovejoy, Jeremy Kenneth), 148
- Лагер, Эдмонд Николя (Laguerre, Edmond Nicolas), 184
- Лагранж, Жозе Луи (Lagrange (= de la Grange), Joseph Louis), 178
- Лагранжа
Формула обращения, 178
- Ландау теорема, 80

- Ландау, Хайман Гаршин (Landau, Hyman Garshin), 80
- Ланнон, Вильям Фредерик (Lunnon, William Frederick), 170
- Лаплас (де ла Плас), Пьер Симон, маркиз де (Laplace (= de la Place), Pierre Simon, Marquis de), 88
- Лапласа метод, 88
- Лек, Уве (Leck, Uwe), 143
- Лексикографическая генерация сочетаний, 13
- Лемер, Деррик Генри (Lehmer, Derrick Henry), 15; 43; 75; 129
- Ленер, Джозеф (Lehner, Joseph), 62; 76
- Линдстрем, Бернт Леннарт Даниэль (Lindström, Bernt Lennart Daniel), 36; 49; 142
- Линуссон, Ханс Сванте (Linusson, Hans Svante), 140
- Липшуц, Сеймур Саул (Lipschutz, Seymour Saul), 118
- Литтлвуд, Джон Эденсор (Littlewood, John Edensor), 158; 159
- Литтлвуда формула, 158
- Ллойд, Эдвард Кейт (Lloyd, Edward Keith), 186
- Ловас, Ласло (Lovász, László), 46; 136
- Лоизоу, Георгиос (Loizou, Georghios Λοιζου, Γεωργιος), 146
- Лоренц, Макс Отто (Lorenz, Max Otto), 159
- Луч, 19
- Лю, Чао-Нинг (Liu, Chao-Ning), 18
- Люка, Франсуа Эдуард Анатоль (Lucas, Francois Edouard Anatole), 143
- Люнебург, Хайнц (Lüneburg, Heinz), 120
- Мажоризация, 78; 159
- Майснер, Отто (Meißner, Otto), 162
- Мак-Карти, Дэвид (McCarthy, David), 21
- Мак-Мэган, Перси Александер (MacMahon, Percy Alexander), 81; 97
- Маккей, Брендон Дамьен (McKay, Brendan Damien), 143
- Маккей, Джон Кейт Стюарт (McKay, John Keith Stuart), 54
- Маколей, Френсис Соверби (Macaulay, Francis Sowerby), 30; 49; 135
- Малфатти, Джованни Франческо Джузеппе (Malfatti, Giovanni Francesco Giuseppe), 152
- Маршалл, Альберт Вальдрон (Marshall, Albert Waldron), 159
- Мацумото, Макото (Matsumoto, Makoto), 137
- Мацунага, Ёшисуке (Matsunaga, Yoshisuke), 86
- Меллин, Роберт Хяльмар (Mellin, Robert Hjalmar), 59; 75
- Меллина преобразование, 59; 75
- Метод
Лапласа, 88
Седловой точки, 61; 87; 108; 109; 186
Стама, 96; 111
- Метод Ньютона, 91; 182
- Миллер, Джоан Элизабет (Miller, Joan Elizabeth), 18; 40
- Милн, Стефен Карл (Milne, Stephen Carl), 102
- Мисюревич, Михал (Misiurewicz, Michal), 162
- Многофазное слияние Карона, 124
- Множество
Двойник, 33
Размах, 33
Стандартное, 33
Ядро, 33
- Мозер, Лео (Moser, Leo), 93; 175; 178
- Мор, Моше (Mor, Moshe), 120
- Морган, Август де (Morgan, Augustus de), 10; 75
- Моцкин, Теодор Сэмюэль (Motzkin, Theodor Samuel), 100; 169; 185
- Мультимножество
Перестановка, 43
- Мультиномиальные коэффициенты, 43
- Мультисочетание, 10
- Мюрхед, Роберт Франклин (Muirhead, Robert Franklin), 159
- Нижняя полумодулярная решетка, 166
- Ноде, Филипп (Naudé, Philippe), 57
- Ньенхуис, Альберт (Nijenhuis, Albert), 17; 77
- Ньютон, Исаак (Newton, Isaac), 91; 182
- Ньютона метод, 91; 182
- Облексный порядок, 19
- Объединенное разбиение, 73; 148
- Ограниченно растущая строка, 83
- Ограниченные разбиения, 62
- Одлызко, Эндрю Майкл (Odlyzko, Andrew Michael), 62

- Оливе, Глория (Olive, Gloria), 128
 Олкин, Инграм (Olkin, Ingram), 159
 Ольвер, Франк Вильям Джон (Olver, Frank William John), 94
 Оттингер, Людвиг (Oettinger, Ludwig), 162
 Пак, Игорь Маркович, 148
 Паскаль, Эрнесто (Pascal Ernesto), 15
 Пейн, Вильям Гаррис (Payne, William Harris), 19; 40
 Перекрестный порядок, 32; 47; 142
 Перестановка мультимножества, 43
 Перестановки мультимножества, 25
 Петрарка, Франческо (Petrarca, Francesco), 107
 Пирс, Чарльз Сантьяго Сандерс (Peirce, Charles Santiago Sanders), 8; 85
 Пирса треугольник, 86; 104; 106; 109
 Обобщенный, 105; 175
 Расширение, 176
 Питман, Джеймс Вильям (Pitman, James William), 111; 169; 184
 Питтель, Борис Гершонович, 96
 Питтель, Борис Гершонович (Pittel, Boris Gershon), 65
 Питтеля теорема, 65
 Плезантс, Питер Артур Берри (Pleasant, Peter Arthur Barry), 170
 Поверхность Римана, 179
 По́я, Герги (Polya, Gyorgy), 159
 По́я, Гёрги (Pólya, György), 146
 Покрытие, 78
 Полиномиальный идеал, 49
 Полупомеченное дерево, 101
 Померанц, Карл (Pomerance, Carl), 183
 Порядок
 Перекрестный, 32
 Последовательность
 Раски, 103
 Чейза, 22; 41
 Последовательность Чейза, 41; 42; 123
 Построение Стаховяка, 129
 Преобразование
 Меллина, 59; 75
 Принцип
 Включения и исключения, 63
 Продинггер, Гельмут (Prodingger, Helmut), 175
 Прямоугольник Дюрфи, 147
 Пуансо цикл, 143
 Пуансо, Луи (Poincot, Louis), 50
 Пуассон, Симон Дени (Poisson, Siméon Denis), 59
 Пуассон, Симон Дени (Poisson, Simeon Denis), 75; 96
 Пуассона распределение, 96
 Пуассона формула суммирования, 59; 75
 Пудлак, Павел (Pudlák, Pavel), 166
 Пушкин, Александр Сергеевич, 107
 Радемахер, Ханс (Rademacher, Hans), 46; 61
 Радемахера функция, 46
 Радо, Ричард (Rado, Richard), 51
 Разбиение, 52
 Бинарное, 81
 Векторов, 97
 Идеальное, 81; 162
 Код Грея, 68
 Количество, 57
 Количество частей, 62
 Краевое представление, 57; 66
 Множества, 53
 Мультимножества, 97
 Объединенное, 73; 148
 Ограниченное, 62
 Представления, 55
 Решетка, 101
 Самосопряженное, 73; 148
 След, 56
 Сопряженное, 56
 Целого числа, 53
 Генерация, 53
 Разбиение множества, 83
 Код Грея, 84
 Количество, 85
 Случайное, 94
 Универсальная последовательность, 112
 Разложение Эджворта, 181
 Райзер, Герберт Джон (Ryser, Herbert John), 158
 Райт, Эдвард Мейтланд (Wright, Edward Maitland), 185; 186
 Рамануджан Иенгар, Сриниваза (Ramanujan Iyengar, Srinivasa), 61; 74; 149
 Раски последовательность, 103
 Раски схема, 85
 Раски, Франк (Ruskey, Frank), 8; 44; 85; 103
 Распределение
 Пуассона, 96

- Распределение вероятностей
 Фишера–Типпетта, 153
 Эрдеша–Ленера, 63; 76
- Рейнгольд, Эдвард Мартин (Reingold, Edward Martin), 18
- Рейсс, Мишель (Reiss, Michel), 143
- Рекуррентное соотношение
 Фибоначчи, 58
- Реммель, Джефффри Брайан (Rommel, Jeffrey Brian), 174
- Решетка
 Нижняя полумодулярная, 166
- Решетка разбиений, 101
- Рид, Рональд Седрик (Read, Ronald Cedric), 27; 129
- Риман, Георг Фридрих Бернгард (Riemann, Georg Friedrich Bernhard), 179
- Римана поверхность, 179
- Роббинс, Дэвид Питер (Robbins, David Peter), 176
- Робинзон, Роберт Вильям (Robinson, Robert William), 143; 179
- Руза, Имре Золтан (Ruzsa, Imre Zoltán), 137
- Ряд Тейлора, 93
- Ряд Фурье, 59
- Сатерленд, Норман Стюарт (Sutherland, Norman Stuart), 7
- Сатклифф, Алан (Sutcliffe, Alan), 166
- Сачков, Владимир Николаевич, 96
- Свиннертон-Дайр, Генри Питер Френсис (Swinnerton-Dyer, Henry Peter Francis), 150
- Седловая точка, 87
- Секели, Ласло Аладар (Székely, László Aladar), 166
- Семиинвариант, 109
- Сильвестер, Джеймс Джозеф (Sylvester, James Joseph), 73; 150
- Символ Якоби, 151
- Симметричная функция, 56
- Симоз Перейра, Хосе Мануэль дос Сантос (Simões Pereira, José Manuel dos Santos), 118
- Симплициальный комплекс, 48
- След разбиения, 56
- Солексный порядок, 54
- Сопряженное разбиение, 56
- Сочетание, 9
 Лексикографическая генерация, 13
- Мультимножества, 27
- Представления, 10
 С повторениями, 10
- Спенсер, Эдмунд (Spenser, Edmund), 107
- Стам, Аарт Джоаннес (Stam, Aart Johannes), 96
- Стама метод, 96; 111
- Стандартное множество, 33
- Стаховяк, Гжегож (Stachowiak, Grzegorz), 129
- Стаховяка построение, 129
- Стенли, Ричард Питер (Stanley, Richard Peter), 25; 52; 56; 136; 162; 172
- Стефенс, Нельсон Малкольм (Stephens, Nelson Malcolm), 170
- Стирлинг, Джеймс (Stirling, James), 89; 167
- Стирлинга строка, 167
- Стирлинга формула, 89
- Стирлинга числа, 92; 111
 Обобщенные, 106; 168
- Стойменович, Иван Данча (Stojmenovic, Ivan Danca Стојменовић, Иван Данча), 54
- Строка Стирлинга, 167
- Стэнтон, Денис Уоррен (Stanton, Dennis Warren), 148
- Сумма
 Дедекинда, 61
- Схема
 Раски, 85
- Схема рифмы, 107
- Схема Эрлиха, 84
- Сэведж, Карла Диана (Savage, Carla Diane), 69; 130
- Таблица
 Факторная, 29; 44; 45
- Такаги функция, 31; 46; 47
- Такаги, Теиджи (Takagi, Teiji), 31; 46; 136
- Танг, Дональд Тао-Нан (Tang, Donald Tao-Nan), 18
- Тарри, Гастон (Tarry, Gaston), 143
- Тейлор, Брук (Taylor, Brook), 93
- Тейлора ряд, 93
- Темперли кривая, 65
- Темперли, Гарольд Невилл Вазелл (Temperley, Harold Neville Vazeille), 65
- Тень, 29; 50
 Верхняя, 29

- Теорема
 Ванга и Ванга, 34
 Гейла-Райзера, 158
 Гильберта основная, 49
 Дедекинда, 60
 Клементса-Линдстрема, 36
 Ландау, 80
 Питтеля, 65
 Терквем, Орли (Terquem, Orly), 50
 Тёрёк, Эва (Török, Éva), 128
 Типпетт, Леонард Генри Кейлеб (Tippett, Leonard Henry Caleb), 153
 Тождество
 Эйлера, 58
 Якоби, 58; 74
 Токушиге, Норихиде (Tokushige, Norihide), 137
 Треугольник
 Пирса, 86; 104; 106; 109
 Обобщенный, 105; 175
 Расширение, 176
 Трост, Эрнст (Trost, Ernst), 162
 Тума, Иржи (Tuma, Jiri), 166
 Тушард, Жак (Touchard, Jacques), 169
 Уайт, Деннис Эдвард (White, Dennis Edward), 174
 Уитворт, Уильям Аллен (Whitworth, William Allen), 86
 Универсальная последовательность для разбиений множества, 112
 Универсальный цикл t -сочетаний, 50
 Факторная таблица, 29; 44; 45
 Фаулдс, Лесли Ричард (Foulds, Leslie Richard), 179
 Фелсенштайн, Джозеф (Felsenstein, Joseph), 179
 Феничел, Роберт Росс (Fenichel, Robert Ross), 37
 Феннер, Тревор Ян (Fenner, Trevor Ian), 146
 Феррерс, Норман Маклеод (Ferrers, Norman Macleod), 56
 Феррерса диаграмма, 56; 69; 94; 146; 158; 172; 174
 Фибоначчи рекуррентное соотношение, 58
 Фибоначчи, Леонардо (Fibonacci, Leonardo, of Pisa; Leonardo filio Bonacci Pisano), 58
 Фишер, Рональд Эйлмер (Fisher, Ronald Aylmer), 153
 Флайт, Колин (Flight, Colin), 179
 Фли Сан-Мари, Камилла (Flye Sainte-Marie, Camille), 143
 Формула
 Арбогаста, 87
 Литтлвуда, 158
 Обращения Лагранжа, 178
 Стирлинга, 89
 Суммирования Пуассона, 59; 75
 Суммирования Эйлера, 59; 151
 Харди-Рамануджана-Радемахера, 61; 75; 76
 Франкл, Петер (Frankl, Péter), 136; 137
 Франклин, Фабиан (Franklin, Fabian), 72; 76
 Френкель, Авизри С. (Fraenkel, Aviezri S.), 120
 Фристедт, Берт (Fristedt, Bert), 155
 Функция
 Бесселя, 61
 Деревя, 179
 Дилогарифмическая, 75
 Крускала, 31
 Радемахера, 46
 Такаги, 31; 46; 47
 Фурье ряд, 59
 Фурье, Жан Батист Жозе (Fourier, Jean Baptiste Joseph), 59
 Хай, Джон (Haigh, John), 96
 Хальберт, Гленн Холанд (Hurlbert, Glenn Howland), 144
 Харди, Годфри Гарольд (Hardy, Godfrey Harold), 61; 149; 159
 Харе, Дэвид Эдвин Джордж (Hare, David Edwin George), 179
 Хатчинсон, Джордж Аллен (Hutchinson, George Allen), 84; 100
 Хвостовой коэффициент, 164
 Хикки, Томас Батлер (Hickey, Thomas Butler), 27; 129
 Хилтон, Энтони Джон Вильям (Hilton, Anthony John William), 45; 135
 Хо, Чин-Чанг Дэниел (Ho, Chih-Chang Daniel), 163
 Хоар, Артур Говард Малорти (Hoare, Arthur Howard Malortie), 164
 Холл, Маршалл, мл. (Hall, Marshall, Jr.), 152; 170
 Хоффдинг, Вассили (Hoeffding, Wassily), 184

Хьюм, Александр (Hume, Alexander), 8

Цикл

Грея, 45
Колеплющейся диаграммы, 104; 172
Пуансо, 143

Чанг, Грэхем (Chung Graham, Fan Rong King), 143; 187

Чебышев, Пафнутий Львович, 181

Чейз, Филлип Джон (Chase, Phillip John), 22; 23; 27; 40; 128

Чейза последовательность, 22; 41; 42; 123

Чен, Вильям Юнг-Чуан (Chen, William Yong-Chuan), 172

Черны, Карл (Czerny, Carl), 130

Чима, Мохиндар Сингх (Cheema, Mohindar Singh), 100; 185

Числа

Белла, 86; 90; 104
Обобщенные, 105; 106; 109
Бернулли, 86
Стирлинга, 92; 111
Обобщенные, 106; 168
Эйлера, 110

Шаллит, Джеффри Аутлоу (Shallit, Jeffrey Outlaw), 176

Шекспир, Уильям (Shakespeare (= Shakspeare), William), 107

Шилдс, Ян Бомонт (Shields, Ian Beaumont), 130

Шур, Исай (Schur, Issai), 159

Шутценбергер, Марсель Пауль (Schützenberger, Marcel Paul), 30; 135; 141

Эджворт, Френсис Исидро (Edgeworth, Francis Ysidro), 181

Эджворта разложение, 181

Эйлер, Леонард (Euler, Leonhard Ейлерь, Леонардъ), 57; 67; 72; 74; 110; 161

Эйлера тождество, 58

Эйлера формула суммирования, 59; 151

Эйлера числа, 110

Экхофф, Юрген (Eckhoff, Jurgen), 135

Энгель, Конрад Вольфганг (Engel, Konrad Wolfgang), 142

Эндрюс, Джордж В. Эйр (Andrews, George W. Eyre), 52; 154

Эннс, Теодор Христиан (Enns, Theodore Christian), 129

Эрдеш, Пал (Erdős, Pál), 30; 51; 62; 76

Эрдеш, Петер (Erdős, Péter L.), 166

Эрлих, Гидеон (Ehrlich, Gideon), 18; 71; 84; 85; 123; 175

Эрлиха схема, 84

Этьен, Гвен (Etienne, Gwihen), 163

Якоби символ, 151

Якоби тождество, 58; 74

Якоби, Карл Густав Якоб (Jacobi, Carl Gustav Jacob), 58; 74; 150

Якубович, Юрий Владимирович, 65; 96

Ян, Катрин Хуафей (Yan, Catherine Huafei), 172

Янсон, Карл Сванте (Janson, Carl Svante), 8

Научно-популярное издание

Дональд Э. Кнут

Искусство программирования
Том 4, выпуск 3
Генерация всех сочетаний
и разбиений

Литературный редактор *Т.П. Кайгородова*
Верстка *А.Н. Полинчик*
Художественный редактор *С.А. Чернокозинский*
Корректор *Л.А. Гордиенко*

Издательский дом “Вильямс”
127055, г. Москва, ул. Лесная, д. 43, стр. 1

Подписано в печать 10.03.2007. Формат 70×100/16.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 13,0. Уч.-изд. л. 14,9.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4014

Отпечатано по технологии StP
в ОАО “Печатный двор” им. А. М. Горького
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

ASCII СИМВОЛЫ

	#0	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#a	#b	#c	#d	#e	#f	
#2x		!	"	#	\$	%	&	'	()	*	+	,	-	.	/	#2x
#3x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?	#3x
#4x	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	#4x
#5x	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[\]	^	_	#5x
#6x	'	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	#6x
#7x	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{		}	~	□	#7x
	#0	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#a	#b	#c	#d	#e	#f	

MMIX КОДЫ ОПЕРАЦИЙ (ОПКОДЫ)

	#0	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	
#0x	TRAP $5v$	FCMP v	FUN v	FEQL v	FADD $4v$	FIX $4v$	FSUB $4v$	FIXU $4v$	#0x
	FLOT[I] $4v$		FLOTU[I] $4v$		SFLOT[I] $4v$		SFLOTU[I] $4v$		
#1x	FMUL $4v$	FCMPE $4v$	FUNE v	FEQLE $4v$	FDIV $40v$	FSQRT $40v$	FREM $4v$	FINT $4v$	#1x
	MUL[I] $10v$		MULU[I] $10v$		DIV[I] $60v$		DIVU[I] $60v$		
#2x	ADD[I] v		ADDU[I] v		SUB[I] v		SUBU[I] v		#2x
	2ADDU[I] v		4ADDU[I] v		8ADDU[I] v		16ADDU[I] v		
#3x	CMP[I] v		CMPU[I] v		NEG[I] v		NEGU[I] v		#3x
	SL[I] v		SLU[I] v		SR[I] v		SRU[I] v		
#4x	BN[B] $v+\pi$		BZ[B] $v+\pi$		BP[B] $v+\pi$		BOD[B] $v+\pi$		#4x
	BNN[B] $v+\pi$		BNZ[B] $v+\pi$		BNP[B] $v+\pi$		BEV[B] $v+\pi$		
#5x	PBN[B] $3v-\pi$		PBZ[B] $3v-\pi$		PBP[B] $3v-\pi$		PBOD[B] $3v-\pi$		#5x
	PBNN[B] $3v-\pi$		PBNZ[B] $3v-\pi$		PBNP[B] $3v-\pi$		PBEV[B] $3v-\pi$		
#6x	CSN[I] v		CSZ[I] v		CSP[I] v		CSOD[I] v		#6x
	CSNN[I] v		CSNZ[I] v		CSNP[I] v		CSEV[I] v		
#7x	ZSN[I] v		ZSZ[I] v		ZSP[I] v		ZSOD[I] v		#7x
	ZSNN[I] v		ZSNZ[I] v		ZSNP[I] v		ZSEV[I] v		
#8x	LDB[I] $\mu+v$		LDBU[I] $\mu+v$		LDW[I] $\mu+v$		LDWU[I] $\mu+v$		#8x
	LDT[I] $\mu+v$		LDTU[I] $\mu+v$		LDO[I] $\mu+v$		LDOU[I] $\mu+v$		
#9x	LDSF[I] $\mu+v$		LDHT[I] $\mu+v$		CSWAP[I] $2\mu+2v$		LDUNC[I] $\mu+v$		#9x
	LDVTS[I] v		PRELD[I] v		PREGO[I] v		GO[I] $3v$		
#Ax	STB[I] $\mu+v$		STBU[I] $\mu+v$		STW[I] $\mu+v$		STWU[I] $\mu+v$		#Ax
	STT[I] $\mu+v$		STTU[I] $\mu+v$		STO[I] $\mu+v$		STOU[I] $\mu+v$		
#Bx	STSF[I] $\mu+v$		STHT[I] $\mu+v$		STCO[I] $\mu+v$		STUNC[I] $\mu+v$		#Bx
	SYNCD[I] v		PREST[I] v		SYNCID[I] v		PUSHGO[I] $3v$		
#Cx	OR[I] v		ORN[I] v		NOR[I] v		XOR[I] v		#Cx
	AND[I] v		ANDN[I] v		NAND[I] v		NXOR[I] v		
#Dx	BDIF[I] v		WDIF[I] v		TDIF[I] v		ODIF[I] v		#Dx
	MUX[I] v		SADD[I] v		MOR[I] v		MXOR[I] v		
#Ex	SETH v	SETMH v	SETML v	SETL v	INCH v	INCMH v	INCML v	INCL v	#Ex
	ORH v	ORMH v	ORML v	ORL v	ANDNH v	ANDNMH v	ANDNML v	ANDNL v	
#Fx	JMP[B] v		PUSHJ[B] v		GETA[B] v		PUT[I] v		#Fx
	POP $3v$	RESUME $5v$	[UN]SAVE $20\mu+v$		SYNC v	SWYM v	GET v	TRIP $5v$	
	#8	#9	#A	#B	#C	#D	#E	#F	

$\pi = 2v$, если условный переход выполняется; $\pi = 0$, если условный переход не выполняется.

Искусство программирования

ДОНАЛЬД Э. КНУТ

Эта многотомная работа по анализу алгоритмов давно считается исчерпывающим описанием классической информатики. Три завершенных тома, вышедших в свет к этому времени, представляют собой неоценимый источник информации для теории и практики программирования. Многочисленные читатели этого труда говорят о его огромном влиянии на них и их профессионализм. Ученых потрясает красота и элегантность анализа Кнута, программисты-практики используют эти книги как справочник для решения возникающих перед ними проблем. И все восхищены обширностью, ясностью, точностью и юмором *Искусства программирования*.

В настоящее время, работая над четвертым и последующими томами и над обновлением уже вышедших, Кнут создал серию небольших брошюр, называемых *выпусками*, которые планирует регулярно издавать. Каждый выпуск содержит один или несколько разделов с новым или обновленным материалом. В конечном счете материалы выпусков войдут в окончательные версии каждого тома, и начатая в 1962 году гигантская работа будет завершена.

Том 4, выпуск 3

Данный выпуск представляет собой продолжение главы о комбинаторных алгоритмах, которая будет включена в четвертый том *Искусства программирования*. Предыдущий выпуск, посвященный генерации всех кортежей и перестановок, дополнен методами генерации всех сочетаний и разбиений. Здесь читатели найдут как очень много нового материала, так и на удивление большое количество связей с материалом первых трех томов и с другими разделами информатики и математики. Как обычно, этот выпуск включает множество творческих упражнений, а также некоторые задачи, которые все еще ожидают решения.

Дональд Э. Кнут известен всему миру своей пионерской работой по алгоритмам и методам программирования, разработками издательских систем TEX и METAFONT, а также научными работами. Заслуженный профессор Искусства программирования Станфордского университета в настоящее время посвящает все свое время работе над завершением данных выпусков и всех семи томов своей великой работы.

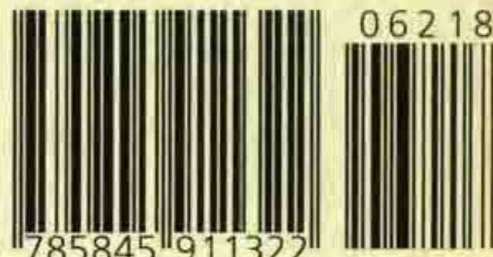


Издательский дом "ВИЛЬЯМС"
www.williamspublishing.com

ADDISON-WESLEY
Pearson Education

www.awprofessional.com

ISBN 978-5-8459-1132-2



9 785845 911322