

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Վ.Հ. ՕՀԱՆՅԱՆ, Է.Է. ՊԻՎԱԶՅԱՆ,
Ա.Գ. ԽԱԶԱՏՐՅԱՆ, Վ.Խ. ՆԱԿՈՅԱՆ

**ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ
ԵՐԿՐԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆ
ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԵՎ ՎԱՐԺՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ**

ՈՒՍՈՒՄՆԱՄԵԹՈՂԱԿԱՆ ԶԵՈՆԱՐԿ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 514.12 (07)
ԳՄԴ 22.151.5 Գ73
Վ 499

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ-ի
ռադիոֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Գրախոսներ՝ ֆ. Գ. Թ., դոցենտ Վ.Ա. ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ
ֆ. Գ. Թ., դոցենտ Ա.Ղ. ԱՖՅԱՆ

*ՕՀԱՆՅԱՆ Վ.Հ., ՊԻՎԱԶՅԱՆ Է.Է.,
ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ Ա.Գ., ՆԱԿՈՅԱՆ Վ.Խ.*

Վ 499 Վերլուծական երկրաչափություն, (խնդիրներ և վար-
ժություններ), ուսումնամեթոդական ծեռնարկ: – Եր.:
ԵՊՀ-ի հրատ., 2008 թ., 76 էջ:

Զեռնարկում շարադրված են «Վերլուծական երկրա-
չափություն» դասընթացի գաղափարներն ու փաստերը,
իսկ լսարանային և ինքնուրույն աշխատանքի համար
առաջադրված են ավելի քան 350 խնդիրներ:

Նախատեսվում է ռադիոֆիզիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի
և երկրաբանության ֆակուլտետների ուսանողների համար:

ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ԵՊՀ ԿՈՄՊՅՈՒՏԵՐԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ
ՀԱՅԿԱՍՏԱՆԻ ԵՊՀ ԿՈՄՊՅՈՒՏԵՐԱԿԱՆ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ԳՄԴ 22.151.5 Գ73

ISBN 978-5-8084-1048-0

© ԵՊՀ հրատարակչություն, 2008 թ.
© Հեղինակային կոլեկտիվ, 2008 թ.

ԿՈՈՐԴԻՆԱՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Թվային առանցքի վրա A կետի դիրքը O սկզբնակետի նկատմամբ որոշվում է OA ուղղորդված հատվածի մեծությամբ, այն նշանակենք OA -ով:

1. Եթե առանցքի վրա տրված են $M_1(x_1)$ և $M_2(x_2)$ կետերը, ապա M_1 սկիզբ և M_2 ծայրակետ ունեցող հատվածի մեծությունը՝ $M_1M_2 = x_2 - x_1$, իսկ կետերի հեռավորությունը՝ $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$:
2. Հարթության $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերի հեռավորությունն է՝

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
:

Եթե $M(x, y)$ կետը M_1M_2 հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ՝

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \lambda \neq -1, \text{ ապա}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}:$$

3. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ զազաթններով եռանկյան մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|:$$

4. Եթե համակարգը բաղկացած է n նյութական կետերից՝ $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$, որոնցում կենտրոնացված են համապատասխանաբար $m_1, m_2, \dots, m_n$ զանգվածներ, ապա այդ համակարգի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ բանաձևերով՝

$$x = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n},$$

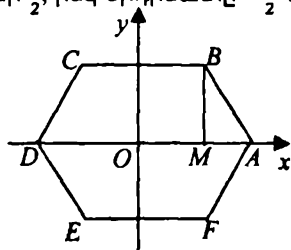
$$y = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}:$$

5. Եթե $M(x, y)$ կետի բևեռային կոորդինատներն են՝ (ρ, φ) -ն ($\rho \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi$), ապա

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \text{ և } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}: \end{cases}$$

Օրինակ 1. Քտնել կանոնավոր վեցանկյան գագաթների կոորդինատները, որի կողմը հավասար է a -ի, կոորդինատային սկզբնակետը գտնվում է վեցանկյան կենտրոնում, իսկ արագիսների առանցքն անցնում է երկու հակադիր գագաթներով:

Լուծում. $|OA| = |AB| = a$: OY առանցքի նկատմամբ A կետի համաչափ կետը կլինի՝ $D(-a; 0)$: Դիտարկենք $\triangle ABM$: $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle ABM = 30^\circ$, $AM = \frac{a}{2}$, որտեղից ստանում ենք, որ B կետի արագիսը կլինի $\frac{a}{2}$, իսկ օրդինատը՝ $\frac{\sqrt{3}a}{2}$: Հետևաբար՝



$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \text{ և } F\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right):$$

$$\text{Պատ. } A(a; 0), B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), C\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), D(-a; 0), E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \text{ և } F\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right):$$

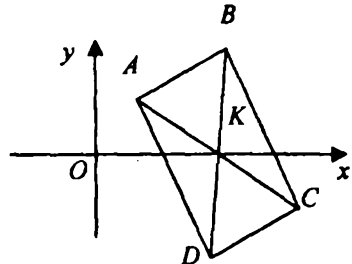
Օրինակ 2. Ուղիղն անցնում է $A(-1; -3)$ կետով և OX -ի հետ կազմում է 45° անկյուն: Այդ ուղիղի վրա գտնել կետ, որի օրդինատը հավասար է 2 -ի:

Լուծում. Դիցուք որոնելի B կետի արագիսն x է: Ունենք՝ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{2 + 3}{x + 1}$, $1 = \frac{5}{x + 1}$, $x + 1 = 5$, $x = 4$:

Պատ. $B(4; 2)$:

Օրինակ 3. Տրված են զուգահեռագծի երեք հաջորդական գագաթները՝ $A(1; 1)$, $B(2; 2)$, $C(3; -1)$: Քտնել նրա չորրորդ D գագաթը:

Լուծում.



Քտնենք AC և BD անկյունագծերի հատման K կետի կոորդինատները.

$$x_k = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad x_k = \frac{1 + 3}{2} = 2,$$

$$y_k = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad y_k = \frac{1 - 1}{2} = 0; K(2; 0):$$

$$\text{Սյուս կողմից՝ } x_k = \frac{x_B + x_D}{2}, \quad y_k = \frac{y_B + y_D}{2},$$

որտեղից $x_D = 2x_k - x_B$, $y_D = 2y_k - y_B$, $x_D = 2 \cdot 2 - 2 = 2$, $y_D = 2 \cdot 0 - 2 = -2$: Պատ.՝ $(2; -2)$:

Օրինակ 4. Չտնել $A(2; 0)$, $B(1; 4)$, $C(5; 4)$ գագաթներով եռանկյան մակերեսը:

Լուծում. Եռանկյան մակերեսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|,$$

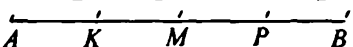
Այստեղ՝

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [(2 - 5) \cdot (4 - 4) - (1 - 5) \cdot (0 - 4)] = 8:$$

Պատ.՝ 8 քառ. միավոր:

Օրինակ 5. Լարի ծայրակետերն են $A(-2; 1)$ և $B(5; 4)$ կետերը: Լարի կեսը պղնձից է, մյուս կեսը ալյումինից: Որոշել ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա լայնական հատույթն ամենուրեք նույնն է (պղնձի խտությունը՝ $8,9 \text{ գ/սմ}^3$ է, ալյումինինը՝ $2,7 \text{ գ/սմ}^3$):

Լուծում. Ենթադրենք լայնական հատույթի մակերեսը $S \text{ սմ}^2$ է: Որոշենք ծողի միջնակետի x_M , y_M կոորդինատները.

$$x_M = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_M = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}:$$


Չտնենք ծողի երկարությունը՝ $|AB| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$, իսկ $|AM| = |BM| = \frac{\sqrt{58}}{2}$: Չողի AM և BM մասերի զանգվածները կլինեն՝

$$m_1 = 8,9 \frac{\sqrt{58}}{2} \cdot S, \quad m_2 = 2,7 \frac{\sqrt{58}}{2} \cdot S:$$

AM և BM մասերի ծանրության կենտրոնների կոորդինատները կլինեն՝

$$x_K = \frac{-2+5/2}{2} = -\frac{1}{4}, \quad y_K = \frac{1+5/2}{2} = \frac{7}{4}, \quad x_P = \frac{5+3/2}{2} = \frac{13}{4}, \quad y_P = \frac{4+5/2}{2} = \frac{13}{4}: AB \text{ ծողի}$$

ծանրության կենտրոնի կոորդինատները կլինեն՝

$$x = \frac{x_K m_1 + x_P m_2}{m_1 + m_2} = \frac{131}{232}, \quad y = \frac{y_K m_1 + y_P m_2}{m_1 + m_2} = \frac{427}{232}:$$

Պատ.՝ $\left(\frac{131}{232}; \frac{427}{232}\right)$:

Խնդիրներ

- 1.1. Թվային ուղղի վրա կառուցել $A(-5)$, $B(7)$, $C(\sqrt{3})$, $D(17)$ կետերը:
- 1.2. Թվային առանցքի վրա նշել այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.

ա) $x > 3$, բ) $x - 5 \leq 0$, գ) $3 < x < 4$, դ) $|x| = 3$, ե) $|2 - x| = 4$, զ) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$, լ) $x^2 - 4x + 5 > 0$:

- 1.3. Որոշել AB հատվածի մեծությունը և երկարությունը, եթե
ա) $A(-1)$, $B(10)$; բ) $A(3)$, $B(7)$; գ) $A(-4)$, $B(-1)$; դ) $A(5)$, $B(-3)$;
- 1.4. Որոշել A կետի կոորդինատը, եթե հայտնի է՝
ա) $B(5)$ և $AB = 7$; բ) $B(-3)$ և $AB = 5$; գ) $B(4)$ և $|AB| = 3$;
դ) $B(-7)$ և $|AB| = 10$:
- 1.5. Որոշել $\lambda = \frac{AC}{CB}$ հարաբերությունը, եթե.
ա) $A(3)$, $B(9)$, $C(6)$; բ) $A(3)$, $B(6)$, $C(9)$; գ) $A(-2)$, $B(4)$, $C(8)$;
դ) $A(-2)$, $B(2)$, $C(0)$
- 1.6. Որոշել C կետի կոորդինատը, եթե $\lambda = \frac{AC}{CB}$.
ա) $A(-2)$, $B(6)$, $\lambda = 3$; բ) $A(-1)$, $B(1)$, $\lambda = -3$;
գ) $A(-3)$, $B(2)$, $\lambda = \frac{1}{4}$; դ) $A(4)$, $B(1)$, $\lambda = -\frac{1}{4}$:
- 1.7. Որոշել AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատը, եթե.
ա) $A(-3)$, $B(1)$; բ) $A(25)$, $B(-1)$; գ) $A(7)$, $B(13)$; դ) $A(-5)$, $B(-3)$;
- 1.8. $A(-2)$ և $B(18)$ կետերով սահմանափակված հատվածը բաժանել չորս հավասար մասերի և որոշել տրոհման կետերի կոորդինատները:
- 1.9. $A(-5)$ և $B(10)$ կետերով սահմանափակված հատվածը բաժանել երեք հավասար մասերի և որոշել տրոհման կետերի կոորդինատները:
- 1.10. Որոշել AB հատվածի ծայրակետերի կոորդինատները, որը C և D կետերով բաժանված է երեք հավասար մասերի.
ա) $C(8)$, $D(13)$; բ) $C(-6)$, $D(-3)$:
- 1.11. Կոորդինատային հարթության վրա կառուցել $A(3, 2)$, $B(5, -4)$, $C(-1, -2)$, $D(-7, 10)$, $E(9, 0)$, $F(0, 7)$ կետերը:
- 1.12. Հարթության վրա տրված է A կետը: Գտնել հարթության այն $M(N)$ կետի կոորդինատը, որը համաչափ է A կետին աբսցիսների (օրդինատների) առանցքի նկատմամբ.
ա) $A(2, 3)$; բ) $A(-2, 4)$, գ) $A(1, -3)$, դ) $A(0, 4)$:
- 1.13. Գտնել AB հատվածի M միջնակետի կոորդինատները.
ա) $A(-1, 5)$ և $B(-3, 3)$; բ) $A(0, 6)$ և $B(3, 4)$;
գ) $A(-2, 8)$ և $B(2, 6)$; դ) $A(-1, -3)$ և $B(-3, -5)$:
- 1.14. Գտնել A, B, C զազաթներով եռանկյան պարագիծը.
ա) $A(3, 6)$, $B(-3, 5)$, $C(1, 0)$; բ) $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$;
գ) $A(-2, 3)$, $B(5, -2)$, $C(-3, -1)$; դ) $A(7, 4)$, $B(3, -6)$, $C(-5, 2)$:

- 1.15. Որոշել այն M կետի կոորդինատները, որը AB հատվածը բաժանում է λ հարաբերությամբ՝ $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ և
 ա) $\lambda = 1$; բ) $\lambda = -2$; գ) $\lambda = \frac{1}{2}$; դ) $\lambda = -\frac{1}{3}$:
- 1.16. Տրված են զուգահեռագծի $A(-4, 4)$, $B(2, 8)$ կից գագաթները և անկյունագծերի հատման $M(2, 2)$ կետը: Գտնել մյուս երկու գագաթները:
- 1.17. Տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $A(-1, 4)$, $C(5, -2)$: Գտնել մյուս երկու գագաթները:
- 1.18. Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի երեք գագաթները՝ $A(2, 3)$, $B(4, -1)$, $C(0, 5)$: Գտնել չորրորդ գագաթը:
- 1.19. Կետը, ուղղածիզ շարժվելով, անցել է $M(5, 5)$ և $N(1, 3)$ կետերով: Որոշել այն P կետը, որում նրա շարժման հետագիծը հատում է Ox առանցքը:
- 1.20. Տրված են եռանկյան $A(1, 4)$, $B(3, -9)$, $C(-5, 2)$ գագաթները: Որոշել B գագաթից տարված միջնագծի երկարությունը:
- 1.21. Ապացուցել, որ A, B, C գագաթներով եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատներն են՝

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}:$$
- 1.22. Որոշել ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները, եթե.
 ա) $A(3, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(1, 1)$;
 բ) $A(-2, 3)$, $B(5, -2)$, $C(-3, -1)$;
 գ) $A(7, 4)$, $B(3, -6)$, $C(-5, 2)$;
 դ) $A(-3, -3)$, $B(-1, -3)$, $C(1, 1)$:
- 1.23. Կառուցել կետերը, եթե տրված են նրանց բևեռային կոորդինատները՝ $A(3, \frac{\pi}{3})$, $B(1, \frac{5\pi}{3})$, $C(3, 0)$, $D(10, \frac{\pi}{2})$, $E(\frac{3}{2}, \frac{7\pi}{4})$:
- 1.24. Գտնել այն կետերի բազմությունը, որոնց բևեռային կոորդինատները բավարարում են հետևյալ հավասարմանը.
 ա) $r = 2$, բ) $r = \text{const}$, գ) $\varphi = \frac{\pi}{6}$, դ) $\varphi = \pi$:
- 1.25. Տրված է կանոնավոր վեցանկյուն, որի կողմը հավասար է a -ի: Ընդունելով որևէ գագաթ որպես բևեռ, նրանով անցնող կողմերից մեկը բևեռային առանցք, որոշել գագաթների բևեռային կոորդինատները:
- 1.26. Գտնել M կետի բևեռային կոորդինատները, եթե բևեռը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ բևեռային առանցքը՝ աբսցիսների դրական կիսաառանցքի հետ.
 ա) $M(1, -\sqrt{3})$, բ) $M(-\sqrt{3}, 1)$, գ) $M(-2, 2)$, դ) $M(1, 1)$:

1.27. Տրված են M կետի բևեռային կոորդինատները: Գտնել այդ կետի դեկարտյան կոորդինատները, եթե բևեռը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի, իսկ բևեռային առանցքը աբսցիսների դրական կիսառանցքի հետ:

ա) $M(2, \frac{\pi}{3})$, բ) $M(2, \frac{4\pi}{3})$, գ) $M(1, \frac{7\pi}{4})$, դ) $M(2, \frac{3\pi}{4})$:

1.28. Ապացուցել, որ $A(\rho_1, \varphi_1)$ և $B(\rho_2, \varphi_2)$ կետերի հեռավորությունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով.

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}:$$

1.29. Գտնել A և B կետերի հեռավորությունը, եթե

ա) $A(5, \frac{\pi}{6})$, $B(3, -\frac{\pi}{6})$; բ) $A(4, \frac{11\pi}{9})$, $B(3, \frac{8\pi}{9})$; գ) $A(4, \frac{\pi}{5})$, $B(6, \frac{6\pi}{5})$;
դ) $A(10, \frac{\pi}{2})$, $B(16, \frac{5\pi}{4})$:

1.30. Հաշվել ABC եռանկյան մակերեսը, եթե.

ա) $A(0, 9)$, $B(-4, -1)$, $C(3, 2)$;
բ) $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(1, 6)$;
գ) $A(10, 5)$, $B(3, 2)$, $C(6, -5)$;
դ) $A(5, 4)$, $B(11, 0)$, $C(0, 3)$:

1.31. Գտնել $A(1, 3)$, $B(-2, 0)$, $C(4, 3)$, $D(-3, 5)$ գագաթներով քառանկյան մակերեսը:

1.32. Գտնել $A(6, -8)$ կետի հեռավորությունը $C(-5, 0)$ և $D(3, 6)$ կետերով անցնող ուղիղից:

1.33. Ապացուցել, որ $A(2, -3)$, $B(-1, 5)$ և $C(-4, 13)$ կետերը գտնվում են մի ուղիղի վրա:

1.34. Եռանկյան գագաթներն են՝ $A(2, 1)$, $B(2, -2)$, $C(8, 6)$ կետերը: Գտնել նրա պարագիծը, մակերեսը և բարձրությունների երկարությունները:

1.35. Եռանկյան երկու գագաթներն են $A(5, 1)$ -ն և $B(-2, 2)$ -ն, իսկ C գագաթը գտնվում է OX առանցքի վրա: Գտնել C գագաթի կոորդինատները, եթե եռանկյան մակերեսը հավասար է 10-ի:

1.36. Գտնել հնգանկյան մակերեսը, որի գագաթներն են $A(3, 2)$, $B(1, 5)$, $C(-5, 0)$, $D(0, -1)$, $E(2, -3)$ կետերը:

1.37. Ապացուցել, որ բևեռային կոորդինատային համակարգում OAB եռանկյան մակերեսը, որտեղ O -ն բևեռն է և՝ $A(\rho_1, \varphi_1)$, $B(\rho_2, \varphi_2)$: կարելի է հաշվել հետևյալ բանաձևով՝

$$S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2|\sin(\varphi_2 - \varphi_1)|$$

1.38. Գտնել բևեռային համակարգում տրված OAB եռանկյան մակերեսը, եթե O -ն բևեռն է և.

ա) $A(3, \frac{7\pi}{12}), B(5, \frac{\pi}{3});$

բ) $A(3, \frac{\pi}{6}), B(2, \frac{\pi}{3});$

գ) $A(4, \frac{\pi}{9}), B(1, \frac{5\pi}{18});$

դ) $A(4, \frac{\pi}{3}), B(5, \frac{5\pi}{6});$

1.39. Բևեռային համակարգում տրված են քառակուսու երկու հակադիր գագաթները՝ $P(6, -\frac{7\pi}{12}), Q(4, \frac{\pi}{6})$: Որոշել նրա մակերեսը:

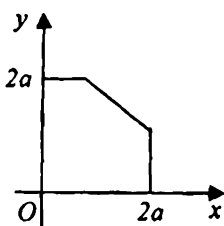
1.40. Համասեռ եռանկյունաձև հարթ սալիկի գագաթներն են $A(-1, 2), B(3, 3), C(1, -1)$ կետերը: Որոշել նրա ծանրության կենտրոնի կոորդինատները:

1.41. Գտնել համասեռ լարից պատրաստված ABC եռանկյան ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե նրա գագաթներն են $A(2, -1), B(5, -1), C(2, 3)$ կետերը:

1.42. Տրված են համասեռ եռանկյունաձև սալիկի գագաթները՝ $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$: Եթե եռանկյունաձև սալիկը կտրենք միջին գծերով, կստացվի նոր եռանկյունաձև համասեռ սալիկ, որի գագաթները տրված եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Ապացուցել, որ այդ երկու սալիկների ծանրության կենտրոնները համընկնում են:

1.43. Գտնել համասեռ քառանկյունաձև սալիկի ծանրության կենտրոնը, եթե նրա գագաթներն են $A(4, 4), B(5, 7), C(10, 10), D(12, 4)$ կետերը:

1.44.



(գծ. 1)

Համասեռ քառակուսի սալիկից, որի կողմը $2a$ է, կտրված է եռանկյուն: Կտրվածքը ուղիղ գծով միացնում է կից կողմերի միջնակետերը: Որոշել ստացված սալիկի (գծ. 1) ծանրության կենտրոնի կոորդինատները, եթե կոորդինատային առանցքները ուղղված են քառակուսու կից կողմերով:

1.45. $O(0, 0), A(2, -5)$ և $B(4, 2)$ կետերում կենտրոնացված են համապատասխանաբար 500գր, 200գր և 100գր զանգվածներ: Գտնել այդ համակարգի ծանրության C կենտրոնի կոորդինատները:

1.46. $A(1, 8), B(3, 4), C(4, 2)$ կետերում կենտրոնացված են համապատասխանաբար 30գր, 40գր, և 60գր զանգվածներ: Որոշել A, B, C նյութական կետերի համակարգի ծանրության P կենտրոնի կոորդինատները:

Գտնել այդ նույն համակարգի ծանրության P կենտրոնը, ենթադրելով, որ A, B, C կետերում կենտրոնացված են հավասար զանգվածներ:

Պատասխաններ

1.3. ա) $AB = 11$, $|AB| = 11$; բ) $AB = 4$, $|AB| = 4$; գ) $AB = 3$, $|AB| = 3$;
դ) $AB = -8$, $|AB| = 8$:

1.4. ա) $A(-2)$; բ) $A(2)$; գ) $A(1)$ կամ $A(7)$; դ) $A(3)$ կամ $A(-10)$:

1.5. ա) $\lambda = 1$; բ) $\lambda = -2$; գ) $\lambda = -\frac{5}{2}$; դ) $\lambda = 1$:

1.6. ա) $C(4)$; բ) $C(2)$; գ) $C(-2)$; դ) $C(5)$:

1.7. ա) $M(-1)$; բ) $M(12)$; բ) $M(10)$; դ) $M(-4)$:

1.8. $M_1(3)$; $M_2(8)$; $M_3(13)$:

1.9. $M_1(0)$; $M_2(5)$:

1.10. ա) $A(3)$; $B(18)$: Ցուցում. C -ն AD հատվածի միջնակետն է;
բ) $A(-9)$; $B(10)$:

1.12. ա) $M(2, -3)$ և $N(-2, 3)$;

բ) $M(-2, -4)$ և $N(2, 4)$;

գ) $M(1, 3)$ և $N(-1, -3)$;

դ) $M(0, -4)$, $N(0, 4)$:

1.13. ա) $M(-2; 4)$; բ) $M(\frac{3}{2}; 1)$; գ) $M(0; 1)$; դ) $M(-2; -4)$:

1.14. ա) $\sqrt{37} + \sqrt{41} + \sqrt{40}$;

բ) $7 + \sqrt{13}$;

գ) $\sqrt{74} + \sqrt{65} + \sqrt{17}$;

դ) $\sqrt{116} + \sqrt{128} + \sqrt{148}$:

1.15. ա) $M(0,5; 2,5)$; բ) $M(-4; 1)$; գ) $M(1; \frac{8}{3})$; դ) $M(\frac{7}{2}; \frac{7}{2})$:

1.16. $C(8; 0)$; $D(2; -4)$:

1.17. $B(-1; -2)$; $D(5; 4)$: Ցուցում. $B(x, y)$ կետի համար՝ $|AB| = |BC| = 6$:

1.18. $D(-2; 9)$:

1.19. $P(-5; 0)$:

1.20. 13:

1.22. ա) $(1; 2)$; բ) $(0; 0)$; գ) $(\frac{5}{3}; 0)$; դ) $(-1; -\frac{5}{3})$:

1.25. $A(0; 0)$; $B(a; 0)$; $C(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{6})$; $D(2a; \frac{\pi}{3})$; $E(a\sqrt{3}; \frac{\pi}{2})$; $F(a; \frac{2\pi}{3})$:

1.26. ա) $(2, \frac{5\pi}{3})$; բ) $(2, \frac{5\pi}{6})$; գ) $(\sqrt{8}, \frac{5\pi}{4})$; դ) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$:

1.27. ա) $(1, \sqrt{3})$; բ) $(-1, -\sqrt{3})$; գ) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$; դ) $(-\sqrt{3}, 1)$:

1.29. ա) $\sqrt{19}$; բ) $\sqrt{13}$; գ) 10; դ) $\sqrt{356 + 160\sqrt{2}}$:

$$1.30. \omega) S = 29; \rho) S = 4; \text{q)} S = 29; \eta) S = 13:$$

$$1.31. S = \frac{15}{2} \text{ քառ. միավոր:}$$

$$1.32. 13:$$

$$1.34. p = 15 + 5\sqrt{5}; S = 25; h_a = 5; h_b = 2\sqrt{5}; h_c = 10:$$

$$1.35. C_1(32; 0), C_2(-8; 0):$$

$$1.36. S = 29 \text{ քառ. միավոր:}$$

$$1.38. \omega) S = \frac{15\sqrt{2}}{4}; \rho) S = \frac{3}{2}; \text{q)} S = 1; \eta) S = 10:$$

$$1.39. S = 2(13 + 6\sqrt{2}):$$

$$1.40. \left(1; \frac{4}{3}\right):$$

$$1.41. \left(3; \frac{1}{2}\right):$$

$$1.43. (8,2; 6,2):$$

$$1.44. \left(\frac{19}{21}a; \frac{19}{21}a\right):$$

$$1.45. C(1; -1): \text{Ցուցում. } A(m_1), B(m_2) \text{ նյութական կետերի համակարգի ծանրության } C \text{ կենտրոնը } AB \text{ հատվածը բաժանում է } \lambda = \frac{m_2}{m_1} \text{ հարաբերությամբ:}$$

$$1.46. P(3,4); P\left(\frac{8}{3}; \frac{14}{3}\right):$$

ՎԵԿՏՈՐԱԿԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՏԱՐՐԵՐ

- Ցանկացած $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ վեկտորի երկարությունն է՝

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
- Եթե տրված են $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ վեկտորները, ապա նրանց գումարն է՝

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$
- λ թվի և $\vec{a}$ վեկտորի արտադրյալ է կոչվում

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x)\vec{i} + (\lambda y)\vec{j} + (\lambda z)\vec{k}$$
 վեկտորը:
 (–1) $\vec{a}$ վեկտորը սովորաբար նշանակում են $-\vec{a}$ -ով:
- Երկու ոչ զրոյական վեկտորների սկալյար արտադրյալ է կոչվում այն թիվը, որը հավասար է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին՝

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$
 (եթե $\vec{a} = 0$, վերցնում ենք $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$):
 Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով.
 ա) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ այն և միայն դեպքում, երբ $\vec{a} = 0$, կամ $\vec{b} = 0$, կամ էլ $\vec{a} \perp \vec{b}$,
 բ) տեղափոխական հատկություն՝

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
- բաշխական հատկություն՝

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$
- թվային բազմապատկիչի նկատմամբ զուգորդական հատկություն՝

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}$$
- Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տրված են պրոյեկցիաներով՝ $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, ապա $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$:
- Եթե $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն ոչ զրոյական վեկտորներ են, ապա՝

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$
- Եթե α, β, γ -ն $\vec{a}$ վեկտորի կազմած անկյուններն են կոորդինատական առանցքների հետ, ապա՝

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \cos \beta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \cos \gamma = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ թվերը կոչվում են $\vec{a}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսներ:

8. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորների վեկտորական արտադրյալ է կոչվում $\vec{c}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին: Այն ուղղահայաց է այդ վեկտորներով որոշվող հարթությանը և ուղղված է այնպես, որ $\vec{c}$ -ի վերջնակետից նայելիս $\vec{a}$ -ից $\vec{b}$ կարճագույն պտույտը տեղի ունենա ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությամբ: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակում են $\vec{a} \times \vec{b}$ կամ $[a, b]$:

Վեկտորական արտադրյալը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

ա) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$,

բ) թվային արտադրյալի նկատմամբ զուգորդական հատկություն՝

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}),$$

գ) բաշխական հատկություն՝

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}:$$

Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, ապա՝

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}:$$

Վեկտորական արտադրյալը գրում են նաև սիմվոլիկ որոշիչի տեսքով՝

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}:$$

9. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ երեք ոչ համահարթ վեկտորների խառն արտադրյալ կամ վեկտորա-սկալյար արտադրյալ է կոչվում այն թիվը, որը հավասար է $\vec{a} \times \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալին: Խառն արտադրյալը նշանակում են $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$:

Նրա բացարձակ արժեքը հավասար է այդ երեք վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալին:

Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, ապա՝

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 -$$

$$-x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2:$$

10. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ է կոչվում $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ վեկտորը: Ընդ որում, տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\text{ա) } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}),$$

$$\text{բ) } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}):$$

Եթե $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, ապա՝

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 z_2 & z_2 x_2 & x_2 y_2 \\ y_3 z_3 & z_3 x_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix}:$$

Դիտողություն. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ վեկտորը նշանակում են նաև $\vec{a} = \{x; y; z\}$ կամ $\vec{a}\{x; y; z\}$:

Օրինակ 6. $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները բավարարում են $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = 0$ պայմանին: Հաշվել $\mu = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$ մեծությունը, եթե $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$:

Լուծում. Զանի որ $-\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, ապա՝ $\vec{c}^2 = (-\vec{c}, -\vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + 2(\vec{b}, \vec{c}) + 2(\vec{c}, \vec{a}) = 1 + 1 + 4 + 2\mu$, այսպիսով $4 = 6 + 2\mu$, որտեղից $\mu = -1$: Պատ.՝ $\mu = -1$:

Օրինակ 7. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: 1) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}]$ և 2) $[\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}]$ վեկտորները արտահայտել $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ վեկտորի միջոցով:

Լուծում. Վեկտորական արտադրյալի հատկություններից հետևում է, որ.

$$1) [\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a} - \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a} - \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{a}] - [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] - [\vec{b}, \vec{b}] = 0 - [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] - 0 = -2\vec{c};$$

2) համանմանորեն՝

$$\begin{aligned} [\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}] &= \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}] + \frac{1}{2}[\vec{b}, \vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}] = \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{a}, \vec{a}] + \\ &\frac{1}{2}[\vec{b}, \vec{b}] - \frac{1}{4}[\vec{b}, \vec{a}] = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}(-\vec{c}) = \frac{3}{4}\vec{c}: \end{aligned}$$

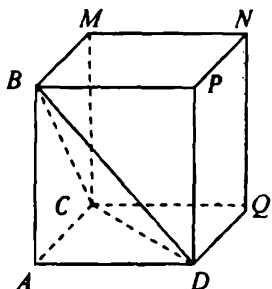
Օրինակ 8. Չտնել $[\vec{a}, \vec{b}]$ -ն, եթե $\vec{a} = \{-1, 0, 1\}$ և $\vec{b} = \{2, 1, 3\}$:

$$\text{Լուծում. } [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} -$$

$$5\vec{j} - \vec{k} = \{-1; -5; -1\};$$

$$\text{Պատ.՝ } \{-1; -5; -1\};$$

Օրինակ 9. Ապացուցել, որ քառանիստի ծավալը հավասար է այն երեք ոչ համահարթ վեկտորների խառն արտադրյալի $\frac{1}{6}$ -ին, որոնք քառանիստի կողմնային կողերն են:



Լուծում. Լրացնենք $ABCD$ քառանիստը մինչև $ACQDBMNP$ զուգահեռանիստը:

Կստանանք $V_{ABCD} = \frac{1}{3}hS_{ACD}$, որտեղ h –ը B գագաթից տարված բարձրության երկարությունն է, $S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ACDQ}$:

$$\begin{aligned} \text{Այսպիսով } V &= \frac{1}{6}hS_{ACQD} = \\ &= \frac{1}{6}V_{ACQDBMNP} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|: \end{aligned}$$

Խնդիրներ

2.1. Տրված են զուգահեռագծի երեք գագաթների շառավիղ-վեկտորները՝ $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$:

Գտնել չորրորդ գագաթի շառավիղ-վեկտորը:

2.2. Ցույց տալ, որ ուռուցիկ քառանկյան կողմերի միջնակետերի միացմամբ ստացվում է զուգահեռագիծ:

2.3. Ապացուցել, որ եռանկյան միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքին և հավասար է հիմքի կեսին:

2.4. Ապացուցել, որ սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է նրանց կիսագումարին:

2.5. Ապացուցել եթե քառանկյան անկյունագծերը հատման կետում կիսվում են, ապա այն զուգահեռագիծ է:

2.6. Տրված են $\vec{a}\{2, 3, -1\}$, $\vec{b}\{0, 1, 4\}$, $\vec{c}\{1, 0, -1\}$ վեկտորները: Որոշել հետևյալ վեկտորների կոորդինատները.

ա) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$,

բ) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$,

գ) $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$,

դ) $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$,

ե) $\vec{p} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$:

2.7. Գտնել $\vec{a}\{2, -3, -4\}$ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:

2.8. Գտնել $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ վեկտորին համուղղված միավոր վեկտորը:

2.9. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը հետևյալ հավասարումից.

ա) $3\{-2, 3, 1\} - 2\vec{x} = \{4, -5, -3\}$

$$p) \vec{a} + 3\vec{b} + \vec{x} = 2(\vec{x} - \vec{a}) + 3\vec{a} + \lambda\vec{x}$$

- 2.10. Տրված են $\vec{a}\{-1, 5\}$, $\vec{b}\{3, 5\}$, $\vec{c}\{-2, 8\}$, $\vec{d}\{3, 1\}$ վեկտորները: Հաշվել.
 ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}\vec{c}$, գ) $\sqrt{\vec{a}^2}$, դ) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\vec{d}$, ե) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{d})$:
- 2.11. Գտնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներով կազմված անկյունը, եթե հայտնի է, որ $\vec{a} + 3\vec{b}$ -ն ուղղահայաց է $7\vec{a} - 5\vec{b}$ -ին, իսկ $\vec{a} - 4\vec{b}$ -ն ուղղահայաց է $7\vec{a} - 2\vec{b}$ -ին:
- 2.12. Տրված են $\vec{a}\{4, -2, -4\}$, $\vec{b}\{2, 4, 3\}$, $\vec{c}\{0, 1, -1\}$ վեկտորները: Հաշվել.
 ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}\vec{c}$, գ) $\sqrt{\vec{a}^2}$, դ) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{c})$, ե) $(\vec{a} - \vec{b})^2$:
- 2.13. Տրված է ABCD քառանկյունը, ընդ որում՝ $\overrightarrow{AB}\{1, 6, -2\}$, $\overrightarrow{BC}\{5, 3, -1\}$, $\overrightarrow{CD}\{1, -7, 1\}$: Ապացուցել, որ նրա անկյունագծերը փոխուղղահայաց են:
- 2.14. Գտնել հետևյալ վեկտորներով կազմված անկյան կոսինուսը.
 ա) $\vec{a}\{2, -1, 3\}$ և $\vec{b}\{1, -4, 3\}$
 բ) $\vec{a}\{2, -2, 1\}$ և $\vec{b}\{3, 0, -4\}$
 գ) $\vec{a}\{0, -1, 5\}$ և $\vec{b}\{7, 5, 1\}$
- 2.15. Տրված է՝ $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ և $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$: Գտնել $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ն:
- 2.16. Տրված է՝ $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$: Գտնել $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ն:
- 2.17. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ն:
- 2.18. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են 60° անկյուն, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ն:
- 2.19. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են 120° անկյուն, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$: Որոշել $|\vec{a} + \vec{b}|$ -ն և $|\vec{a} - \vec{b}|$ -ն:
- 2.20. Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կազմում են $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ անկյուն, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$: Հաշվել.
 ա) $\vec{a}\vec{b}$, բ) $\vec{a}^2$, գ) $\vec{b}^2$, դ) $(\vec{a} + \vec{b})^2$, ե) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, գ) $(\vec{a} - \vec{b})^2$,
 է) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$:
- 2.21. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե $|\vec{x}| = 50$, $\vec{x}$ -ը OZ առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն և համագիծ է $\vec{a}\{6; -8; -7,5\}$ վեկտորին:
- 2.22. Տրված է $\vec{a}\{2; 1; -1\}$ վեկտորը: Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը, որը համագիծ է $\vec{a}$ -ին և $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$:

- 2.23. $\vec{x}$ վեկտորը ուղղահայաց է $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ և $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ վեկտորներին, Օյ առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն: Գիտենալով, որ $|\vec{x}| = 50$, գտնել նրա կոորդինատները:
- 2.24. Գտնել $\vec{x}$ վեկտորը, եթե այն ուղղահայաց է $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$ և $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ վեկտորներին և բավարարում է $\vec{x}(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$ պայմանին:
- 2.25. Գտնել $\vec{s} = \{4; -3; 2\}$ վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա, որը կոորդինատական առանցքների հետ կազմում է հավասար անկյուններ:
- 2.26. Գտնել $\vec{s} = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$ վեկտորի պրոյեկցիան l ուղղության վրա, որը Ox -ի հետ կազմում է 45° անկյուն, Oz -ի հետ 60° անկյուն և Oy -ի հետ սուր անկյուն:
- 2.27. Տրված են $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$ և $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան $\vec{b}$ վեկտորի ուղղության վրա:
- 2.28. Տրված են $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ և $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$ վեկտորները: Գտնել $\text{պր}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$ -ն:
- 2.29. Տրված են 3 վեկտորներ՝ $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$, $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$, $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$: Գտնել $\text{պր}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$ -ն:
- 2.30. Տրված են 3 վեկտորներ՝ $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j}$, $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$: Գտնել $\text{պր}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$ -ն:
- 2.31. Տրված են $A(-2; 3; -4)$, $B(3; 2; 5)$, $C(1; -1; 2)$ կետերը: Գտնել $\text{պր}_{\vec{CB}}\vec{AB}$ -ն:
- 2.32. Հաշվել զուգահեռագծի մակերեսը, որի կողմերն են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$:
- 2.33. Զուգահեռագծի կողմերն են $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ և $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$ վեկտորները, որտեղ $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$: Գտնել զուգահեռագծի $\vec{b}$ կողմին տարված բարձրությունը:
- 2.34. Հաշվել եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը $\vec{a} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = 7\vec{m} + 2\vec{n}$ վեկտորներն են, ընդ որում՝ $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$:
- 2.35. Գտնել ABC եռանկյան AD բարձրությունը, որի կողմերը $\vec{AB} = \vec{a}$ և $\vec{AC} = \vec{b}$ վեկտորներն են, ընդ որում՝ $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$:
- 2.36. Տրված են $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 15$, $\vec{a}\vec{b} = 96$: Գտնել $|\vec{a} \times \vec{b}|$ -ն:

- 2.37. Ի՞նչ պայմանի պետք է բավարարեն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները, որպեսզի $3\vec{a} + \vec{b}$ և $\vec{a} - 3\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ:
- 2.38. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները բավարարում են հետևյալ պայմանին. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$: Ապացուցել, որ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$:
- 2.39. Հաշվել հետևյալ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռագծի մակերեսը. $6\vec{a} - 3\vec{b}$ և $3\vec{a} + 2\vec{b}$, եթե $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$:
- 2.40. Գտնել այն զուգահեռագծի անկյունագծերի երկարությունները և մակերեսը, որի կողմերն են $\vec{a} = \{6; 0; 2\}$ և $\vec{b} = \{1; 5; 2; 1\}$ վեկտորները:
- 2.41. Գիտենալով, որ $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ և $\vec{b} = \vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$ վեկտորները համագիծ են, որոշել α և β գործակիցները:
- 2.42. Տրված են $\vec{a}\{3; 4; -1\}$, $\vec{b}\{2; 3; 5\}$ և $\vec{c}\{1; 0; 1\}$ վեկտորները: Հաշվել. ա) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, բ) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{b}\vec{c}$, գ) $(2\vec{a} - 3\vec{b})\vec{a}\vec{c}$:
- 2.43. Համահա՞րթ են արդյոք հետևյալ վեկտորները.
ա) $\vec{a}\{1; 3; -5\}$, $\vec{b}\{3; -1; 2\}$ և $\vec{c}\{2; 1; 1\}$;
բ) $\vec{a}\{3; -1; 4\}$, $\vec{b}\{2; 1; -1\}$ և $\vec{c}\{1; -2; 5\}$:
- 2.44. α -ն ընտրել այնպես, որ $\vec{a}\{3; 2; -1\}$, $\vec{b}\{4; 5; 1\}$ և $\vec{c}\{\alpha; 0; 1\}$ վեկտորները լինեն համահարթ:
- 2.45. Գտնել $\vec{a}\{3; 4; -2\}$, $\vec{b}\{7; -1; 3\}$ և $\vec{c}\{2; -1; 1\}$ վեկտորների վրա կառուցված զուգահեռանիստի ծավալը:
- 2.46. Հաշվել եռանկյուն բուրգի ծավալը, որի գագաթներն են. $A(2; 1; -1)$, $B(3; -2; -7)$, $C(5; 1; -1)$, $D(1; 4; -3)$ կետերը:
- 2.47. Գտնել $ABCA'B'C'D'$ զուգահեռանիստի A' գագաթից իջեցրած բարձրության երկարությունը, եթե՝ $\vec{AB} = \vec{a}\{-1; 2; 5\}$, $\vec{AD} = \vec{b}\{4; -3; 2\}$, $\vec{AA'} = \vec{c}\{2; 1; -1\}$:
- 2.48. Հաշվել եռանկյուն բուրգի D գագաթից տարված բարձրության երկարությունը, եթե նրա գագաթներն են $A(3; 2; 1)$, $B(4; 0; -1)$, $C(2; -1;)$, $D(4; 2; 5)$ կետերը:
- 2.49. Եռանկյուն բուրգի ծավալը 9 խորանարդ միավոր է: Նրա երեք գագաթներն են. $A(4; -1; 2)$, $B(5; 1; 4)$, $C(3; 2; -1)$ կետերը: Գտնել չորրորդ գագաթի կոորդինատները, եթե այն գտնվում է Oz առանցքի վրա:
- 2.50. Ցույց տալ, որ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$, եթե $\vec{a} \perp \vec{b}$ և $\vec{a} \perp \vec{c}$:
- 2.51. Ապացուցել, որ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$:
- 2.52. Ապացուցել, որ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$:

2.53. Հաշվել $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ -ն, եթե.

ա) $\vec{a}\{3; -1; 2\}$, $\vec{b}\{1; 1; -1\}$, $\vec{c}\{2; 0; 1\}$,

բ) $\vec{a}\{1; 0; 2\}$, $\vec{b}\{2; 3; -1\}$, $\vec{c}\{1; -1; 0\}$,

գ) $\vec{a}\{5; 4; 1\}$, $\vec{b}\{3; 4; 0\}$, $\vec{c}\{-1; 3; 1\}$:

2.54. Տրված են $\vec{a}\{3; 0; -1\}$, $\vec{b}\{2; 4; 3\}$, $\vec{c}\{-1; 3; 2\}$, և $\vec{d}\{2; 0; 1\}$
վեկտորները: Հաշվել $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ -ն և $(\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d})$ -ն:

Պատասխաններ

2.1. $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2$:

2.6. ա) $\vec{p}\{2; 5; -4\}$, բ) $\vec{p}\{-1; 2; -2\}$, գ) $\vec{p}\{5; 5; 4\}$, դ) $\vec{p}\{1; 2; -4\}$, ե) $\vec{p}\{1; \frac{1}{3}; -\frac{10}{3}\}$:

2.7. $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{29}}$, $\cos \gamma = \frac{-4}{\sqrt{29}}$:

2.8. $\vec{a}_0 = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$:

2.9. ա) $\vec{x}\{-5; 7; 3\}$, բ) $\vec{x} = \frac{3}{1+\lambda}\vec{b}$, երբ $\lambda \neq -1$; $\vec{x}$ -ը ցանկացած վեկտոր է, երբ $\vec{b} \neq 0$ և $\lambda = -1$:

2.10. ա) 22; բ) 42; գ) $\sqrt{10}$; դ) 18; ե) 20:

2.11. $\varphi = 60^\circ$:

2.12. ա) -2; բ) 2; գ) 6; դ) 49; ե) 89:

2.14. ա) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; բ) $\frac{2}{15}$; գ) 0:

2.15. 22: Ցուցում. օգտագործել զուգահեռագծի կողմերի և անկյունագծերի երկարությունների միջև եղած կապը:

2.16. 20: Ցուցում. տե՛ս նախորդ խնդրի ցուցումը:

2.17. 13; 13: Ցուցում. $|\vec{a} + \vec{b}| = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$:

2.18. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$:

2.19. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$:

2.20. ա) -6; բ) 9; գ) 16; դ) 13; ե) -61; գ) 37; է) 73:

2.21. $\vec{x}\{-24; 32; 30\}$:

2.22. $\vec{x}\{1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$:

2.23. $\vec{x} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}$:

2.24. $\vec{x}\{-3; 3; 3\}$:

2.25. $\sqrt{3}$:

2.26. -3: Ցուցում. նախ գտնել l ուղղության $\vec{l}^0 = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, m, \frac{1}{2}\}$ միավոր վեկտորը:

2.27. 6:

2.28. -4:

- 2.29. 5:
- 2.30. -11:
- 2.31. $-6\frac{5}{7}$:
- 2.32. $S = 14$ քառ. միավոր:
- 2.33. $\frac{51\sqrt{65}}{65}$: Ցուցում. նախ գտնել զուգահեռագծի մակերեսը:
- 2.34. $S = 93$ քառ. միավոր:
- 2.35. 0,5:
- 2.36. $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$: Ցուցում. նախ գտնել $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ -ն:
- 2.37. $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն պետք է լինեն համագիծ:
- 2.39. $S = 157,5$ քառ. միավոր:
- 2.40. $\frac{1}{2}\sqrt{277}$; $\frac{1}{2}\sqrt{101}$; $S = 13$ քառ. միավոր: Ցուցում. սկզբում գտնել $\vec{a} \times \vec{b}$ -ն:
- 2.41. $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta = \frac{14}{3}$:
- 2.42. ա) 24, բ) 24, գ) 72:
- 2.43. ա) ոչ, բ) այո:
- 2.44. $\alpha = -1$:
- 2.45. $V = 12$ խոր. միավոր:
- 2.46. $V = 12$ խոր. միավոր:
- 2.47. $h = \frac{65}{\sqrt{870}}$:
- 2.48. $\frac{12\sqrt{2}}{5}$:
- 2.49. $D(0; 0; 3)$:
- 2.53. ա) $\{8; 8; -8\}$, բ) $\{2; 3; -1\}$, գ) $\{55; -61; -31\}$:
- 2.54. ա) $-58\vec{i} - 20\vec{j} + \vec{k}$, բ) -80:

ՈՒՂԻՂԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

1. Ուղիղի ընդհանուր հավասարումն է՝

$$Ax + By + C = 0,$$

որտեղ A -ն, B -ն, C -ն հաստատուններ են, իսկ A և B թվերից առնվազն մեկը զրո չէ:

2. Ուղիղի անկյունային գործակցով հավասարումն է՝

$$y = kx + b,$$

որտեղ k -ն անկյունային գործակիցն է, b -ն՝ օրդինատների առանցքից կտրած ուղղորդված հատվածի մեծությունն է:

3. Ուղիղի հավասարումը հատվածներով՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

որտեղ a -ն և b -ն կտրողինատային առանցքներից կտրած ուղղորդված հատվածների մեծություններն են:

4. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակցով ուղիղի հավասարումն է՝

$$y - y_0 = k(x - x_0):$$

5. Տրված $M_1(x_1, y_1)$ և $M_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումն է՝

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

6. $y = k_1x + b_1$ և $y = k_2x + b_2$ ուղիղների կազմած անկյան տանգենսը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

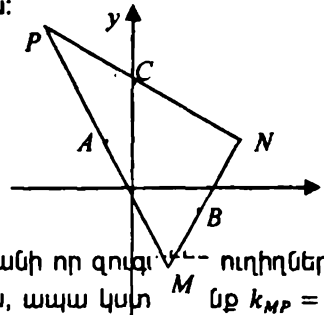
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \left(\varphi \neq \frac{\pi}{2} \right):$$

Երկու ուղիղների գուգահեռության պայմանը՝ $k_1 = k_2$,
ուղղահայացության պայմանը՝ $k_1 k_2 = -1$:

7. Ուղիղի նորմավորված հավասարումն է՝

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

որտեղ α -ն կտրողինատների սկզբնակետից ուղիղին իջեցրած ուղղահայացի կազմած անկյունն է OX առանցքի դրական ուղղության հետ, իսկ p -ն՝ սկզբնակետի հեռավորությունն է ուղիղից:

8. Ուղիղի $Ax + By + C = 0$ ընդհանուր հավասարումը բերում են նորմալ տեսքի, բազմապատկելով այն $\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ նորմավորող բազմապատկիչով ($\mu \cdot C < 0$):
9. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետի շեղումը $Ax + By + C = 0$ ուղիղից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝
- $$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}};$$
10. Տրված $M_0(x_0, y_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + C = 0$ ուղիղից որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝
- $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}};$$
11. $Ax_1 + By_1 + C = 0$ և $Ax_2 + By_2 + C = 0$ ուղիղների հատման կետով անցնող ուղիղների փնջի հավասարումն է՝
 $\alpha(Ax_1 + By_1 + C) + \beta(Ax_2 + By_2 + C) = 0$:
 որտեղ α -ն և β -ն ցանկացած իրական թվեր են, ընդ որում $\alpha^2 + \beta^2 > 0$:
12. Եթե l ուղիղն անցնում է $M_0(x_0, y_0)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{m; n\}$ ոչ գրոյական վեկտորին ($\vec{s}$ -ը կոչվում է l ուղիղի ուղղորդ վեկտոր), ապա նրա կանոնական հավասարումն է՝
- $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n},$$
- որտեղից ստացվում են l ուղիղի պարամետրական հավասարումները՝
- $$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty:$$
- Օրինակ 10. Կազմել եռանկյան կողմերի հավասարումները, եթե $A(-1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 4)$ կետերը եռանկյան կողմերի միջնակետերն են:
- 
- Լուծում: Պետք է գտնել MNP եռանկյան կողմերի հավասարումները: $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$, $MP \parallel BC$: Գտնենք ABC եռանկյան կողմերի անկյունային գործակիցները: $k_{AB} = \frac{-1-2}{3+1} = -\frac{3}{4}$,
 $k_{AC} = \frac{4-2}{0+1} = 2$, $k_{BC} = \frac{4+1}{0-3} = -\frac{5}{3}$.
- Քանի որ գտնվում են ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են, ապա կստանանք $k_{MP} = k_{BC} = -\frac{5}{3}$, $k_{MN} = k_{AC} = 2$, $k_{NP} = k_{BA} = -\frac{3}{4}$:
 MN ուղիղը անցնում է $B(3; -1)$ կետով և

$K_{MN} = 2$, ուստի կստանանք $y + 1 = 2(x - 3)$, $2x - y - 7 = 0$: PM և PN կողմերի հավասարումները կգտնենք նման ձևով:

NP ուղիղն անցնում է $C(0; 4)$ կետով և $k_{NP} = k_{AB} = -\frac{3}{4}$, հետևաբար NP -ի հավասարումը կլինի $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 0)$, $3x + 4y - 16 = 0$: MP ուղիղն անցնում է $B(3; -1)$ և $k_{MP} = -\frac{5}{3}$, հետևաբար MP -ի հավասարումը կլինի $y + 1 = -\frac{5}{3}(x - 3)$, $5x + 3y - 12 = 0$:

Պատ.՝ $2x - y - 7 = 0$, $5x + 3y - 12 = 0$, $3x + 4y - 16 = 0$:

Օրինակ 11. Գտնել ուղիղի հավասարումը, որը OY առանցքից անջատում է 2 երկարության հատված և $x - 2y + 3 = 0$ ուղիղի հետ կազմում է 45° -ի անկյուն:

Լուծում. Ուղիղի հավասարումը փնտրենք $y = kx + 2$ տեսքով: Տրված ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է $\frac{1}{2}$ -ի: Օգտվելով $tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$ բանաձևից, որտեղ $tg\theta = tg45^\circ = 1$: Եթե $k_1 = \frac{1}{2}$ և $k_2 = k$,

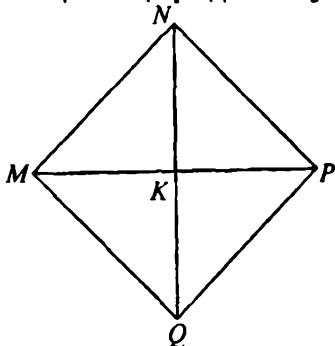
ապա կստանանք $1 = \frac{k - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}k}$, որտեղից $k = 3$, հետևաբար $y = 3x + 2$:

Իսկ եթե $k_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = k$, ապա $1 = \frac{\frac{1}{2} - k}{1 + \frac{1}{2}k}$, $k = -\frac{1}{3}$, հետևաբար $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

2:

Պատ.՝ $y = 3x + 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$:

Օրինակ 12. $M(-1; 5)$ կետը հանդիսանում է քառակուսու գագաթ, որի անկյունագիծը գտնվում է $7x - y + 8 = 0$ ուղիղի վրա: Կազմել քառակուսու կողմերի և անկյունագծի հավասարումները:



ուղիղների հավասարումները

Լուծում. Քանի որ քառակուսու անկյունագծերը փոխուղղահայաց են, հետևաբար $k_{NQ} k_{MP} = -1$, $k_{MP} = -\frac{1}{7}$: MP ուղիղն անցնում է M կետով և նրա անկյունային գործակիցը հավասար է $-\frac{1}{7}$ -ի:

$y - 5 = -\frac{1}{7}(x + 1)$, $x + 7y - 31 = 0$:

Գտնենք K կետի կոորդինատները համատեղ լուծելով MP և NQ

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 31 = 0 \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{9}{2};$$

$K(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2})$: Գտնենք P կետի կոորդինատները.

$$x_k = \frac{x_M + x_P}{2}, x_P = 2x_K - x_M, x_P = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 3,$$

$$y_k = \frac{y_M + y_P}{2}, y_P = 2y_K - y_M, y_P = 2 \cdot \frac{5}{2} - 5 = 4: P(3; 4):$$

Քառակուսու կողմերը անկյունագծերի հետ կազմում են 45° -ի անկյուն, հետևաբար

$$tg\theta = 1: tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, k_1 = k_{MP} = -\frac{1}{7}, 1 = \frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}}, k_2 = \frac{3}{4}: MN \text{ և } PQ$$

ուղիղների անկյունային գործակիցները հավասար են $\frac{3}{4}$ -ի, հետևաբար NP և QM ուղիղներինը կլինի $-\frac{4}{3}$, որտեղից կստանանք, որ

$$MN - \text{ի հավասարումը } 3x - 4y + 32 = 0,$$

$$PQ - \text{ինը } 3x - 4y + 7 = 0,$$

$$NP - \text{ինը } 4x + 3y - 24 = 0,$$

$$MQ - \text{ինը } 4x + 3y + 1 = 0:$$

$$\text{Պատ. } 3x - 4y + 32 = 0, 3x - 4y + 7 = 0, 4x + 3y - 24 = 0,$$

$$4x + 3y + 1 = 0, x + 7y - 31 = 0:$$

Օրինակ 13. Կազմել ուղիղի հավասարումը, որն ուղղահայաց է $2x + 6y - 3 = 0$ ուղիղին և $(5; 4)$ կետից գտնվում է $\sqrt{10}$ հեռավորության վրա:

Լուծում. Տրված ուղիղի անկյունային գործակիցը հավասար է $k_1 = -\frac{1}{3}$: Քանի որ ուղիղները փոխուղղահայաց են, ապա $k_2 = 3$: Փնտրվող ուղիղների հավասարումները կլինեն $y - y_1 = 3(x - x_1)$ կամ $3x - y + (y_1 - 3x_1) = 0$, որտեղ $(y_1 - 3x_1)$ ազատ անդամը անհայտ է: Որոշենք $(5; 4)$ կետի հեռավորությունը որոնելի ուղիղներից:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{|3 \cdot 5 - 1 \cdot 4 + (y_1 - 3x_1)|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$|11 + (y_1 - 3x_1)| = 10, \begin{cases} 11 + (y_1 - 3x_1) = 10, \\ 11 + (y_1 - 3x_1) = -10, \end{cases} \begin{cases} y_1 - 3x_1 = -1, \\ y_1 - 3x_1 = -21: \end{cases}$$

Այսպիսով, ուղիղների հավասարումները կլինեն.

$$3x - y - 1 = 0 \text{ և } 3x - y - 21 = 0:$$

$$\text{Պատ. } 3x - y - 1 = 0, 3x - y - 21 = 0:$$

Խնդիրներ

- 3.1. Որոշել, թե ո՞ր կետերն են պատկանում $2x - 3y - 3 = 0$ ուղիղին և որոնք չեն պատկանում՝ $M_1(3; 1)$, $M_2(2; 3)$, $M_3(6; 3)$, $M_4(-3; -3)$, $M_5(3; -1)$, $M_6(-2; 1)$:
- 3.2. Որոշել, թե ո՞ր կետերն են պատկանում և որոնք չեն պատկանում $2x - y + 5 = 0$ ուղիղին՝ $N_1(5; 15)$, $N_2(1; 1)$, $N_3(-2; 1)$, $N_4(3; 0)$, $N_5(7; -5)$, $N_6(1; 7)$, $N_7(\frac{1}{2}; 6)$, $N_8(0; 3)$:
- 3.3. P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , և P_5 կետերը գտնվում են $3x - 2y - 6 = 0$ ուղիղի վրա, նրանց աբսցիսներն են համապատասխանաբար՝ 4; 0; 2; -2; -6: Որոշել այդ կետերի օրդինատները:
- 3.4. Որոշել այն կետերի աբսցիսները, որոնք պատկանում են $7x + 2y - 8 = 0$ ուղիղին, եթե նրանց օրդինատներն են՝ 2; -4; 3; -1; 1; 0; 5:
- 3.5. Գտնել $3x + 2y + 2 = 0$ և $2x - 3y - 16 = 0$ ուղիղների հատման կետը:
- 3.6. ABC եռանկյան AB , BC և AC կողմերը գտնվում են համապատասխանաբար $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$ և $x - 2 = 0$ ուղիղների վրա: Որոշել եռանկյան գագաթների կոորդինատները:
- 3.7. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$ և $7x + y + 19 = 0$ ուղիղների վրա: Հաշվել եռանկյան մակերեսը:
- 3.8. Եռանկյան մակերեսը 1,5 քառ. միավոր է, երկու գագաթներն են՝ $A(2; -3)$ և $B(3; -2)$, իսկ նրա ծանրության կենտրոնը գտնվում է $3x - y - 8 = 0$ ուղիղի վրա: Գտնել երրորդ գագաթի կոորդինատները:
- 3.9. Գրել հետևյալ ուղիղների հավասարումները կտրած հատվածներով.
 ա) $2x + 3y - 6 = 0$; բ) $4x - 3y - 24 = 0$; գ) $2x + 3y - 9 = 0$;
 դ) $3x - 5y - 2 = 0$; ե) $5x + 2y - 1 = 0$; զ) $3x - 2y + 6 = 0$;
 է) $x + y + 6 = 0$:
- 3.10. Գտնել այն եռանկյան մակերեսը, որի կողմերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների և $6x + 7y - 42 = 0$ ուղիղի վրա:
- 3.11. Ուղիղը կոորդինատային առանցքներից կտրում է հավասար և դրական մեծություններով հատվածներ: Գտնել ուղիղի հավասարումը, եթե այդ ուղիղով և կոորդինատային առանցքներով կազմված եռանկյան մակերեսը 32 քառ. միավոր է:
- 3.12. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(3; -7)$ կետով, իսկ կոորդինատային առանցքներից կտրում է տարբեր նշանի մեծություններով և հավասար երկարություններով հատվածներ:

- 3.13. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $P(2; 3)$ կետով և կոորդինատային առանցքներից կտրում է հավասար երկարությամբ հատվածներ:
- 3.14. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $P(8; 6)$ կետով և կոորդինատային քառորդից կտրում է 12 քառ. միավոր մակերեսով եռանկյուն:
- 3.15. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն.
 ա) անցնում է $M(2; 5)$ կետով և անկյունային գործակիցը՝ $k = 3$;
 բ) անցնում է կոորդինատների սկզբակետով և անկյունային գործակիցը՝ $k = -2$;
 գ) համընկնում է առաջին կոորդինատային անկյան կիսորդի հետ;
 դ) անցնում է $(-2; 1)$ կետով և OX առանցքի հետ կազմում է 30° անկյուն;
 ե) անցնում է $(2; -1)$ կետով և OX առանցքի հետ կազմում է 120° անկյուն;
 զ) OY առանցքից կտրում է $b = 2$ մեծությամբ հատված և անկյունային գործակիցը՝ $k = -3$;
 է) OY առանցքից կտրում է $b = -3$ մեծությամբ հատված և անկյունային գործակիցը՝ $k = 1$:
- 3.16. Գտնել հետևյալ ուղիղների անկյունային գործակիցները և OY -ից կտրած հատվածների մեծությունները.
 ա) $2x + y + 5 = 0$; բ) $x - 3y + 6 = 0$; գ) $x + y = 0$; դ) $2y + 5 = 0$;
 ե) $3x + 1 = 0$:
- 3.17. Գտնել հետևյալ ուղիղների թեքման անկյունը OX առանցքի նկատմամբ.
 ա) $x + y + 7 = 0$; բ) $x - y + 3 = 0$; գ) $x + \sqrt{3}y - 4 = 0$; դ) $x - \sqrt{3}y + 7 = 0$; ե) $\sqrt{3}x + y - 5 = 0$; զ) $3y - 7 = 0$; է) $3x - 2y + 5 = 0$:
- 3.18. Գտնել $M(5; -7)$ կետով անցնող և կոորդինատային առանցքներին զուգահեռ երկու ուղիղների հավասարումները:
- 3.19. Հետևյալ ուղիղների հավասարումները գրել անկյունային գործակցով և կտրած հատվածներով.
 ա) $3x - 2y + 6 = 0$; բ) $x + y + 6 = 0$; գ) $2x - y + 3 = 0$;
 դ) $2y + x - 5 = 0$; ե) $y + 3x - 4 = 0$; զ) $x - 7y + 11 = 0$;
 է) $x + 3y - 24 = 0$:
- 3.20. Տրված է $3x - 4y + 5 = 0$ ուղիղը: Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(-1; 2)$ կետով և.
 ա) զուգահեռ է տրված ուղիղին,
 բ) ուղղահայաց է տրված ուղիղին:

- ա) անցնում է $M_0(-2; 3)$ կետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{5; -1\}$ վեկտորին;
 բ) անցնում է $M_0(0; -2)$ և $M_1(3; -4)$ կետերով;
 գ) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և զուգահեռ է $\vec{s}\{1; 1\}$ վեկտորին;
 դ) անցնում է $M_0(1; -3)$ կետով և զուգահեռ է OX առանցքին:

3.33. Ուղիղի պարամետրական հավասարումներն են՝ $\begin{cases} x = -1 + 4t, \\ y = 2 - t: \end{cases}$

- ա) Գտնել նրա որևէ ուղղորդ վեկտորը;
 բ) որոշել $t_1 = 3$, $t_2 = 0$, $t_3 = -2$, $t_4 = -1$ պարամետրերին համապատասխանող կետերի կոորդինատները;
 գ) որոշել տրված ուղիղի և կոորդինատային առանցքների հետ հատման կետերին համապատասխանող պարամետրերի արժեքները;
 դ) որոշել, թե հետևյալ կետերից որոնք են պատկանում տրված ուղիղին՝ $M_1(-3; 1)$, $M_2(3; 1)$, $M_3(15; -2)$, $M_4(0; \frac{7}{4})$, $M_5(2; 2)$:

3.34. Գտնել հետևյալ ուղիղի որևէ ուղղորդ վեկտոր.

- ա) $3x + 7y + 8 = 0$; բ) $x + 5 = 0$; գ) $2x - 3y - 1 = 0$;
 դ) $-x + 2y - 8 = 0$; ե) $2y + 5 = 0$:

3.35. Գտնել հետևյալ ուղիղների պարամետրական հավասարումները՝

- ա) $3x - y + 5 = 0$, բ) $x + y - 3 = 0$, գ) $2x + 5 = 0$,
 դ) $4x + 5y + 6 = 0$, ե) $x + 3y = 0$:

3.36. Գտնել հետևյալ ուղիղների ընդհանուր հավասարումները.

- ա) $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$; բ) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 \end{cases}$; գ) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3t \end{cases}$:

3.37. Որոշել հետևյալ հավասարումներից որո՞նք են ուղիղի նորմավորված հավասարումներ.

- ա) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; բ) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; գ) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$;
 դ) $\frac{-5}{13}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0$; ե) $-x + 2 = 0$; է) $y + 2 = 0$; ը) $-y - 2 = 0$:

3.38. Գտնել ուղիղի հավասարումը, եթե հայտնի է, որ կոորդինատների սկզբնակետից այդ ուղիղի վրա իջեցրած ուղղահայացի հիմքը $P(2; 3)$ կետն է:

3.39. Գտնել տրված կետի շեղումն ու հեռավորությունը տրված ուղիղից.

- ա) $A(2; -1)$; $4x + 3y + 10 = 0$; բ) $B(0; -3)$; $5x - 12y - 23 = 0$;
 գ) $C(-2; 3)$; $3x - 4y - 2 = 0$; դ) $D(1; -2)$; $x - 2y - 5 = 0$;

3.40. Պարզել $M(1; -3)$ կետը և կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում են հետևյալ ուղիղի նույն, թե՞ տարբեր կողմերում.

- ա) $2x - y + 5 = 0$; բ) $x - 3y - 5 = 0$; գ) $3x + 2y - 1 = 0$;

դ) $x - 3y + 2 = 0$; ե) $10x + 24y + 15 = 0$:

3.41. Զառակուսու գագաթներից մեկը $M(2; -5)$ կետն է, իսկ կողմերից մեկը գտնվում է $x - 2y - 7 = 0$ ուղիղի վրա: Գտնել ջառակուսու մակերեսը:

3.42. Ուղղանկյան երկու կողմերը գտնվում են $3x - 2y - 5 = 0$ և $2x + 3y + 7 = 0$ ուղիղների վրա, իսկ գագաթներից մեկը $A(-2; 1)$ կետն է: Գտնել ուղղանկյան մակերեսը:

3.43. Գտնել հետևյալ զուգահեռ ուղիղների հեռավորությունը.

ա) $3x + 4y - 18 = 0$ և $3x + 4y - 43 = 0$;

բ) $x + y - 6 = 0$ և $2x + 2y - 3 = 0$;

գ) $2x - y + 7 = 0$ և $4x - 2y - 2 = 0$:

3.44. Տրված են երեք զուգահեռ ուղիղներ՝

$10x + 15y - 3 = 0$, $2x + 3y + 5 = 0$, $2x + 3y - 9 = 0$:

Ապացուցել, որ առաջին ուղիղը գտնվում է մյուս երկուսի միջև և գտնել, թե ի՞նչ հարաբերությամբ է նա բաժանում նրանց միջև եղած հեռավորությունը:

3.45. Զառակուսու երկու կողմերը գտնվում են $5x - 12y - 65 = 0$ և $5x - 12y + 26 = 0$ ուղիղների վրա: Գտնել ջառակուսու մակերեսը:

3.46. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները.

ա) $x - 3y + 2 = 0$ և $3x + y - 1 = 0$;

բ) $x + 2y + 5 = 0$ և $3x + 4y - 15 = 0$;

գ) $\sqrt{3}y - x = 12$ և $3x + 4y - 15 = 0$;

դ) $x - 3y + 5 = 0$ և $3x - y - 2 = 0$;

ե) $x - 2y - 3 = 0$ և $2x + 4y + 7 = 0$;

զ) $3x + 4y - 1 = 0$ և $55x + 12y - 2 = 0$:

3.47. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $7x - 5y - 11 = 0$, $8x + 3y + 31 = 0$ և $x + 8y - 19 = 0$ ուղիղների վրա: Պարզել՝ կոորդինատների սկզբնակետը գտնվում է եռանկյան ներսում, թե՞ նրանից դուրս:

3.48. Եռանկյան կողմերը գտնվում են $x + y - 4 = 0$, $3x - 7y + 8 = 0$ և $4x - y - 31 = 0$ ուղիղների վրա: Պարզել՝ $M(-3; 2)$ կետը գտնվում է եռանկյան ներսում, թե՞ նրանից դուրս:

3.49. Գտնել $x + 2y - 11 = 0$ և $3x - 6y - 5 = 0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որում գտնվում է $M(1; -3)$ կետը:

3.50. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որի կենտրոնը $C(6; -3)$ կետն է և որը շոշափում է $3x - 4y - 15 = 0$ ուղիղին:

- 3.51. Գտնել այն շրջանագծի հավասարումը, որը համակենտրոն է $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ շրջանագծին և շոշափում է $3x - 4y + 7 = 0$ ուղիղին:
- 3.52. Գտնել $A(2; 3)$, $B(3; 6)$ կետերով անցնող և $2x + y - 2 = 0$ ուղիղին շոշափող շրջանագծի հավասարումը:
- 3.53. Տրված է $C(1; -3)$ կենտրոնով և $R = 2\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագիծը: Գտնել $P(1; 1)$ կետից այդ շրջանագծին տարված շոշափողների հավասարումները:
- 3.54. Սեղանի հիմքերը գտնվում են $2x + 3y - 1 = 0$ և $4x + 6y + 15 = 0$ ուղիղների վրա: Գտնել սեղանի մակերեսը, եթե սեղանի միջին գծի երկարությունը 12 միավոր է:
- 3.55. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $5x + 3y - 9 = 0$ և $x + 2y - 1 = 0$ ուղիղների հատման կետով և.
 ա) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով;
 բ) զուգահեռ է OX առանցքին;
 գ) զուգահեռ է OY առանցքին;
 դ) անցնում է $M(7; -1)$ կետով:
- 3.56. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $x - 3y + 5 = 0$ և $2x + 5y - 1 = 0$ ուղիղների հատման կետով և ուղղահայաց է $9x - 3y + 7 = 0$ ուղիղին:
- 3.57. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $5x - 2y + 11 = 0$ և $2x - 3y + 13 = 0$ ուղիղների հատման կետով և $x + y - 4 = 0$ ուղիղի վրա գտնվող այն կետով, որի արագիսը հավասար է 3-ի:
- 3.58. Փունջը որոշվում է $2x - y + 4 = 0$ և $x + 5y - 1 = 0$ ուղիղներով: Գտնել փնջին պատկանող այն ուղիղների հավասարումները, որոնք ուղղահայաց են փունջը որոշող ուղիղներին:
- 3.59. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $2x + 7y - 8 = 0$ և $3x + 2y + 5 = 0$ ուղիղների հատման կետով և $2x + 3y - 7 = 0$ ուղիղի հետ կազմում է 45° անկյուն (խնդիրը լուծել առանց ուղիղների հատման կետի կոորդինատները որոշելու):
- 3.60. ABC եռանկյան AM և BN բարձրությունները գտնվում են համապատասխանաբար $x + 5y - 3 = 0$ և $x + y - 1 = 0$ ուղիղների վրա, AB կողմը՝ $x + 3y - 1 = 0$ ուղիղի վրա: Գտնել CP բարձրության և մյուս կողմերի հավասարումները:
- 3.61. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0:$$
 Ապացուցել, որ $7x + 2y - 15 = 0$ ուղիղը չի պատկանում այդ փնջին:

3.62. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(3x + y - 1) + \beta(2x - y - 9) = 0:$$

Ապացուցել, որ $x + 3y + 13 = 0$ ուղիղը պատկանում է այդ փնջին:

3.63. Տրված է փնջի հավասարումը՝

$$\alpha(5x + 3y + 6) + \beta(3x - 4y - 37) = 0:$$

C-ի ո՞ր արժեքի դեպքում է $4x - 3y + C = 0$ ուղիղը պատկանում այդ փնջին:

Պատասխաններ

3.1. M_1, M_3, M_4 կետերը պատկանում են, իսկ M_2, M_5, M_6 կետերը՝ ոչ:

3.2. N_1, N_3, N_6, N_7 կետերը պատկանում են, իսկ N_2, N_4, N_5 կետերը՝ ոչ:

3.3. 3; -3; 0; -6; -12:

3.4. $\frac{4}{7}; 2\frac{2}{7}; \frac{2}{7}; 1\frac{3}{7}; \frac{6}{7}; 1\frac{1}{7}; -\frac{2}{7}$:

3.5. (2; -4):

3.6. $A(2; -1), B(-1; 3), C(2; 4)$:

3.7. $S = 17$ քառ. միավոր:

3.8. $C_1(1; -1)$ կամ $C_2(-2; -10)$:

3.9. ա) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, բ) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1$, գ) $\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{5}} = 1$,

ե) $\frac{x}{\frac{1}{5}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$, զ) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$, է) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$:

3.10. $S = 21$ քառ. միավոր:

3.11. $x + y = 8$:

3.12. $x - y - 10 = 0$ կամ $x - y + 10 = 0$:

3.13. $x + y - 5 = 0, x - y + 1 = 0$:

3.14. $3x - 2y - 12 = 0$ կամ $3x - 8y + 24 = 0$:

3.15. ա) $y = 3x - 1$, բ) $y = -2x$, գ) $y = x$, դ) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}}$, ե) $y = -\sqrt{3}x - 1 + 2\sqrt{3}$,

զ) $y = 3x + 2$, է) $y = x - 3$:

3.16. ա) $k = -2, b = -5$; բ) $k = \frac{1}{3}, b = 2$; գ) $k = -1, b = 0$; դ) $k = 0, b = -\frac{5}{2}$; ե) k և b գոյություն չունեն:

3.17. ա) $\varphi = 135^\circ$, բ) $\varphi = 45^\circ$, գ) $\varphi = 150^\circ$, դ) $\varphi = 30^\circ$, ե) $\varphi = 120^\circ$, զ) $\varphi = 0$, է) $\varphi = \left(\arctg \frac{3}{2}\right)^\circ$ ∴

3.18. $x = 5, y = -7$:

3.19. ա) $y = \frac{3}{2}x + 3, \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1$; բ) $y = -x - 6, \frac{x}{-6} + \frac{y}{-6} = 1$; գ) $y = 2x + 3, \frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$; դ) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, \frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1$; ե) $y = -3x + 4, \frac{x}{\frac{3}{5}} + \frac{y}{4} = 1$;

$$\text{q)} y = \frac{1}{7}x + \frac{11}{7}, \frac{x}{-11} + \frac{y}{\frac{1}{7}} = 1; \text{t)} y = -\frac{1}{3}x + 8, \frac{x}{\frac{24}{8}} + \frac{y}{8} = 1:$$

$$3.20. \text{ա)} 3x - 4y + 11 = 0, \text{բ)} 4x + 3y - 2 = 0:$$

$$3.21. \text{ա)} k = 7; \text{բ)} k = \frac{7}{10}; \text{գ)} k = -\frac{3}{2}:$$

$$3.22. 5x - 2y - 33 = 0, x + 4y - 11 = 0, 7x + 6y + 33 = 0:$$

$$3.23. x + y + 1 = 0:$$

$$3.24. 4x + 3y - 11 = 0, x + y + 2 = 0, 3x + 2y - 13 = 0:$$

$$3.25. \text{ա)} \varphi = \frac{\pi}{4}; \text{բ)} \varphi = \frac{\pi}{2}; \text{գ)} \varphi = 0; \text{դ)} \varphi = \arctg \frac{16}{11}:$$

$$3.26. x - 5y + 3 = 0 \text{ և } 5x + y - 11 = 0:$$

$$3.27. (-2; 1):$$

$$3.28. C(6; -6):$$

$$3.29. 4x - 3y + 10 = 0, 7x + y - 20 = 0, 3x + 4y - 5 = 0: \text{Ցուցում. եթե } A \text{ գագաթը տրված ուղիղների հատման կետն է, ապա կհսորդի նկատմամբ } B \text{ -ին համաչափ } B_1 \text{ կետը կգտնվի } AC \text{ -ի վրա:}$$

$$3.30. 4x + 7y - 1 = 0, y - 3 = 0, 4x + 3y - 5 = 0:$$

$$3.31. \text{ա)} \vec{s}\{4; 2\}; \text{բ)} \vec{s}\{4; -5\}; \text{գ)} \vec{s}\{1; 7\}; \text{դ)} \vec{s}\{-1; 4\}; \text{ե)} \vec{s}\{2; 1\};$$

$$\text{զ)} \vec{s}\{2; 1\}:$$

$$3.32. \text{ա)} \begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 3 - t; \end{cases} \text{բ)} \begin{cases} x = 3t, \\ y = -2 - 2t; \end{cases} \text{գ)} \begin{cases} x = t, \\ y = t; \end{cases} \text{դ)} \begin{cases} x = t, \\ y = -3; \end{cases} \text{ե)} \begin{cases} x = 1, \\ y = t; \end{cases}$$

$$3.33. \text{ա)} \vec{s}\{4; -1\}; \text{բ)} M_1(11; -1), M_2(-1; 2), M_3(-9; 4), M_4(-5; 3);$$

$$\text{գ)} t_1 = \frac{1}{4}, t = 2; \text{դ)} } M_2 - \text{ը, } M_3 - \text{ը և } M_4 - \text{ը:}$$

$$3.34. \text{ա)} \vec{s}\{-7; 3\}; \text{բ)} \vec{s}\{0; 1\}; \text{գ)} \vec{s}\{3; 2\}; \text{դ)} \vec{s}\{2; 1\}; \text{ե)} \vec{s}\{1; 0\};$$

$$3.35. \text{ա)} \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = -1 + 3t; \end{cases} \text{բ)} \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 + t; \end{cases} \text{գ)} \begin{cases} x = -\frac{5}{2}, \\ y = t; \end{cases} \text{դ)} \begin{cases} x = 1 - 5t, \\ y = -2 + 4t; \end{cases}$$

$$\text{ե)} \begin{cases} x = -3t, \\ y = t; \end{cases}$$

$$3.36. \text{ա)} x + 3y - 10 = 0, y - 2 = 0, 3x - y - 15 = 0:$$

$$3.37. \text{ա)}, \text{դ)}, \text{գ)} \text{ և } \text{ը)} \text{ ուղիղի նորմավորված հավասարումներ են, իսկ } \text{բ)}\text{-ն, } \text{գ)}\text{-ն, } \text{ե)}\text{-ն և } \text{զ)}\text{-ն ոչ:}$$

$$3.38. 2x + 3y - 13 = 0:$$

$$3.39. \text{ա)} \delta = -3, d = 3, \text{ բ)} \delta = 1, d = 1, \text{ գ)} \delta = -4, d = 4, \text{ դ)} \delta = 0, d = 0:$$

$$3.40. \text{ա)} \text{ նույն, բ)} \text{ տարբեր, գ)} \text{ նույն, դ)} \text{ նույն, ե)} \text{ տարբեր: Ցուցում. օգտվել շեղման սահմանումից:}$$

$$3.41. S = 5 \text{ բառ. միավոր:}$$

$$3.42. S = 6 \text{ բառ. միավոր:}$$

$$3.43. \text{ա)} d = 5, \text{ բ)} d = \frac{9\sqrt{2}}{4}, \text{ գ)} d = \frac{8\sqrt{5}}{5}:$$

3.44. 2:3 (հաշված II ուղղից):

3.45. 49 քառ. միավոր:

3.46. ա) $2x + 4y - 3 = 0$, $4x - 2y + 1 = 0$, բ) $2x - 6y - 13 = 0$,
 $6x + 2y + 7 = 0$, գ) $11x + (8 - 5\sqrt{3})y + 30 = 0$, $x + (8 + 5\sqrt{3})y - 90 = 0$,
դ) $4x - 4y + 3 = 0$, $2x - 2y - 7 = 0$, ե) $4x + 1 = 0$, $8y + 13 = 0$,
զ) $14x - 8y - 3 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$:

3.47. Ներսում:

3.48. Ղրսում:

3.49. $3x - 19 = 0$:

3.50. $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 9$:

3.51. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$:

3.52. $x^2 + y^2 - 26x - 2y + 45 = 0$ և $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 21 = 0$:

3.53. $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$:

3.54. $S = \frac{102}{\sqrt{13}}$ քառ. միավոր:

3.55. ա) $4x + 15y = 0$, բ) $7x + 4 = 0$, գ) $7x - 15 = 0$,

դ) $3x + 34y + 13 = 0$:

3.56. $x + 3y - 1 = 0$:

3.57. $4x + 5y - 17 = 0$:

3.58. $11x + 22y + 7 = 0$, $55x - 11y + 101 = 0$:

3.59. $x - 5y + 13 = 0$, $5x + y + 13 = 0$:

3.60. (BC) $5x - y - 5 = 0$, (AC) $x - y + 3 = 0$, (CP) $3x - y - 1 = 0$:

3.61. $c = -29$:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԿՈՐԵՐ

1. $C(a, b)$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումն է՝ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:
2. Էլիպս է կոչվում հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց՝ տրված երկու F_1 և F_2 կետերից ունեցած հեռավորությունների գումարը հաստատուն է:

Այդ կետերը կոչվում են էլիպսի կիզակետեր կամ ֆոկուսներ: Եթե հաստատունը նշանակենք $2a$ -ով, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ $2c$ -ով և ենթադրենք, որ ֆոկուսները գտնվում են աքսիսների առանցքի վրա և համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ՝ $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, ապա էլիպսի կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

որտեղ $b^2 = a^2 - c^2$:

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) էլիպսի էքսցենտրիսիտետն է,

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները էլիպսի դիրեկտրիսներն են,

$2a$ -ն մեծ առանցքն է, $2b$ -ն՝ փոքր առանցքը:

3. Հիպերբոլ է կոչվում հարթության այն կետերի բազմությունը, որոնց՝ տրված երկու F_1 և F_2 կետերից ունեցած հեռավորությունների տարբերության մոդուլը հաստատուն է:

Այդ կետերը կոչվում են հիպերբոլի կիզակետեր կամ ֆոկուսներ: Եթե այդ հաստատունը նշանակենք $2a$ -ով, միջֆոկուսային հեռավորությունը $2c$ -ով, կոորդինատային համակարգն ընտրենք այնպես, որ ֆոկուսները լինեն՝ $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ կետերը, ապա հիպերբոլի կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

որտեղ $b^2 = c^2 - a^2$:

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$) հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետն է,

$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ուղիղները հիպերբոլի դիրեկտորիսներն են,

$y = \pm \frac{b}{a}x$ ուղիղները հիպերբոլի ասիմպտոտներն են,

$2a$ -ն իրական առանցքն է, $2b$ -ն՝ կեղծ առանցքը:

4. Պարաբոլ է կոչվում հաբթության այն կետերի բազմությունը որոնք հավասարապես են հեռացված տրված կետից և տրվա ուղիղից:

Այդ կետը կոչվում է պարաբոլի կիզակետ կամ ֆոկուս, իս ուղիղը՝ դիրեկտորիս:

Կոորդինատային առանցքներն ընտրում են այնպես, որ OX -լինի ուղղահայաց դիրեկտորիսին, անցնի կիզակետով և նրա դրական ուղղությունը համընկնի դիրեկտորիսից դեպ կիզակետ ուղղության հետ, իսկ OY -ը ուղղահայաց լինի OX -ի անցնի OX առանցքի և դիրեկտորիսի հատման կետ կիզակետին միացնող հատվածի միջնակետով:

Պարաբոլի կանոնական հավասարումն է՝

$$y^2 = 2px:$$

Այդ պարաբոլի ֆոկուսն է $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ կետը, դիրեկտորիսը՝ $x = -$ ուղիղը, p թիվը՝ պարաբոլի պարամետրը:

Օրինակ 14. Կազմել շրջանագծի հավասարումը, որին շոշափու են $2x + y - 5 = 0$ և $2x + y + 15 = 0$ գուգահեռ ուղիղները, ընդ որու նրանցից մեկը շրջանագիծը շոշափում է $A(2; 1)$ կետում:

Լուծում. $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$: $A(2; 1)$ կետը գտնվում է $2x + y - 5 =$

ուղիղի վրա, հետևաբար

$$\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}, \text{ որտեղից } R = 2\sqrt{5}:$$

Քանի որ $O_1(a, b)$ -ն շրջանագծի կենտրոնն է, ապա

$$(2 - a)^2 + (1 - b)^2 = 20$$

և

$$\frac{|2a + b - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{|2a + b + 15|}{\sqrt{5}},$$

որը համարժեք է համարժեքին.

$$\begin{cases} 2a + b - 5 = 2a + b + 15 & \emptyset \\ 2a + b - 5 = -2a - b - 15 \end{cases} \Rightarrow b = -2a - 5:$$

a -ն և b -ն կգտնենք հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} (2 - a)^2 + (1 - b)^2 = 20, \\ b = -2a - 5, \end{cases}$$

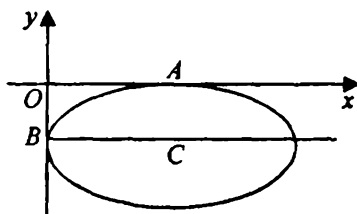
որտեղից կստանանք $a = -2, b = -1: (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20:$

Պատ.՝ $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20:$

Օրինակ 15. Էլիպսը շոշափում է x -երի առանցքը $A(4; 0)$ և y -ների առանցքը $B(0; -3)$ կետերում: Կազմել էլիպսի հավասարումը, եթե համաչափության առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

Լուծում. Այդ էլիպսի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1:$$



Քանի որ A -ն և B -ն շոշափման կետեր են, ապա $a = 4$, $b = 3$, իսկ էլիպսի կենտրոնը գտնվում է $C(4; -3)$ կետում:

$$\text{Հետևաբար՝ } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1:$$

$$\text{Պատ.՝ } \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1:$$

Օրինակ 16. Էլիպսը շոշափում է OY առանցքը $A(0; 5)$ կետում և հատում է OX առանցքը $B(5; 0)$ և $C(11; 0)$ կետերում: Գտնել էլիպսի հավասարումը, որի առանցքները զուգահեռ են կոորդինատային առանցքներին:

Լուծում: Էլիպսի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

$x_0 = a$, քանի որ էլիպսը շոշափում է OY առանցքը: $y_0 = 5$, քանի որ էլիպսի առանցքը զուգահեռ է OX առանցքին: Էլիպսի հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1:$$

Կիսառանցքը՝ $a = OM = \frac{5+11}{2} = 8$, հետևաբար կստանանք.

$$\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1:$$

B կետը պատկանում է էլիպսին, հետևաբար $\frac{(5-8)^2}{64} + \frac{25}{b^2} = 1$, որտեղից $b^2 = \frac{320}{11}$:

Հետևաբար էլիպսի հավասարումը կլինի

$$\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{11(y-5)^2}{320} = 1:$$

Օրինակ 17. $x = \pm 4$ ուղիղները հիպերբոլի դիրեկտորիսներն են, էքսցենտրիսիտետը հավասար է 1,5: Գտնել այն կետերի կոորդինատները, որոնց ֆոկալ շառավիղները աջ ֆոկուսից հավասար են 9-ի:

Լուծում: Հիպերբոլի հավասարումը փնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1:$$

Դիրեկտրիսի հավասարումները կլինեն $x = \pm \frac{a}{\epsilon}$, այսինքն $\frac{a}{\epsilon} = 4$, $a = 4\epsilon$,
 $a = 4 \cdot 1,5 = 6$:

Էքսցենտրիսիտետը՝ $\epsilon = \frac{c}{a}$, որտեղից $\frac{c}{6} = 1,5$, $c = 6 \cdot 1,5 = 9$:

b կիսառանցքը որոշվում է $b^2 = c^2 - a^2$ բանաձևով: $b^2 = 81 - 36 = 45$:
 Այսպիսով կստանանք՝

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1:$$

Ենթադրենք փնտրվող կետերը գտնվում են հիպերբոլի աջ ճյուղի վրա,
 այդ ժամանակ ֆոկալ շառավիղը որոշվում է $r = ex - a$ բանաձևով:

Ունենք՝ $9 = 1,5x - 6$, $x = 10$:

Կետի օրդինատը որոշենք հիպերբոլի հավասարումից՝

$$\frac{10^2}{36} - \frac{y^2}{45} = 1,$$

որտեղից կստանանք $y = \pm 4\sqrt{5}$: Պատ.՝ $(10; 4\sqrt{5})$; $(10; -4\sqrt{5})$:

Օրինակ 18. Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե գագաթների միջև հեռավորությունը հավասար է 8-ի և ֆոկուսները գտնվում են $(-3; 3)$ և $(7; 3)$ կետերում:

Լուծում. Հիպերբոլի ֆոկուսները գտնվում են $y = 3$ ուղիղի վրա:
 Հետևաբար հիպերբոլի կենտրոնը գտնվում է նույն ուղիղի վրա: Այդ դեպքում հիպերբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

որտեղ $(x_0; y_0)$ –ն հիպերբոլի կենտրոնն է: Հիպերբոլի կենտրոնը կիսում է գագաթների միջև հեռավորությունը՝

$$x_0 = \frac{-3 + 7}{2} = 2, \quad y_0 = 3,$$

մյուս կողմից՝ $2a = 8$, $a = 4$ և ֆոկուսների միջև հեռավորությունը՝

$$2c = \sqrt{(7 + 3)^2 + (3 - 3)^2} = 10, \quad c = 5, \quad b = 3:$$

Հիպերբոլի հավասարումը կլինի.

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1:$$

Պատ.՝ $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1:$

Օրինակ 19. Գտնել պարաբոլի հավասարումն ու նրա դիրեկտրիսը, եթե պարաբոլն անցնում է $x + y = 0$ ուղիղի և $x^2 + y^2 =$

$4x = 0$ շրջանագծի հատման կետով և համաչափ է OY առանցքի նկատմամբ:

Լուծում: Փոխենք տրված գծերի հատման կետերը, լուծելով համակարգը՝

$$\begin{cases} x = -y \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Քանի որ պարաբոլն անցնում է $(0; 0)$ կետով և համաչափ է OX առանցքի նկատմամբ, ապա այդ կետը կլինի պարաբոլի գագաթը: Հետևաբար պարաբոլի հավասարումը կլինի՝

$$x^2 = 2py:$$

Քանի որ պարաբոլը անցնում է $(2; -2)$ կետով, ապա՝ $2^2 = 2p(-2)$, $p = -1$, որտեղից կստանանք պարաբոլի հավասարումը՝ $x^2 = -2y$:

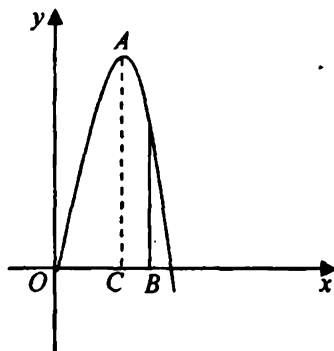
Դիրեկտորիսի հավասարումը՝ $y = -\frac{p}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $2y - 1 = 0$:

Պատ.՝ $x^2 = -2y$, $2y - 1 = 0$:

Օրինակ 20. Շատրվանի ջրի շիթը A կետում հասնում է ամենամեծ բարձրությանը՝ 4մ: A կետը O կետով անցնող ուղղաձիգից ունի 0,5մ հեռավորություն: Փոխել ջրի շիթի բարձրությունը OX առանցքի այն կետում, որի հեռավորությունը O կետից հավասար է 0,75մ:

Լուծում. Շատրվանի ջրի շիթը ունի պարաբոլի տեսք, որի գագաթը գտնվում է $A(0,5; 4)$ կետում: Պարաբոլի համաչափության առանցքը զուգահեռ է OY առանցքին, հետևաբար պարաբոլի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը.

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0):$$



Տեղադրելով x_0 -ի և y_0 -ի արժեքները, կստանանք՝ $(x - 0,5)^2 = 2p(y - 4)$: P -ն որոշելու համար վերջին հավասարման մեջ տեղադրենք $O(0; 0)$ կետի կոորդինատները $(-0,5)^2 = 2p(y - 4)$, $p = -\frac{1}{32}$:

Այսպիսով պարաբոլի հավասարումը կլինի՝ $(x - 0,5)^2 = -\frac{1}{16}(y - 4)$ կամ $y = 16(x - x^2)$: C կետի արագիտը տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք՝ $y = 16(0,75 - 0,75^2) = 3$:

Պատ.՝ 3:

Խնդիրներ

4.1. Փոխել շրջանագծի հավասարումն, եթե.

ա) կենտրոնը $C(3; 4)$ կետն է, շառավիղը հավասար է 7-ի;

բ) $R = 17$, իսկ կենտրոնը $M(11; 2)$ –ից $N(-4; 3)$ ուղղված հատվածը բաժանում է $3:2$ հարաբերությամբ;

գ) այն անցնում է $A(-5; 3)$ և $B(2; 6)$ կետերով, իսկ կենտրոնը գտնվում է Oy առանցքի վրա;

դ) այն անցնում է $A(1; 5)$ կետով և նրա կենտրոնն է $C(-2; -4)$ կետը;

ե) կենտրոնը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ $3x - 4y + 20 = 0$ ուղիղը շոշափում է շրջանագծին:

4.2. Գտնել շրջանագծի կենտրոնն ու շառավիղը, եթե նրա հավասարումն է.

ա) $x^2 + 4x + y^2 - 5 = 0$;

բ) $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$;

գ) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

դ) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$;

ե) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y = 0$;

զ) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 2 = 0$:

4.3. Գտնել էլիպսի հավասարումը, որի ֆոկուսները գտնվում են աբսցիսների առանցքի վրա, համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ և.

ա) նրա կիսաառանցքներն են 4 և 3-ը;

բ) մեծ առանցքը հավասար է 10-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 8-ի;

գ) փոքր առանցքը հավասար է 24-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10-ի;

դ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

ե) մեծ առանցքը հավասար է 20-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

զ) փոքր առանցքը հավասար է 10-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

է) միջփոխկտրիսային հեռավորությունը հավասար է 5-ի, միջֆոկուսայինը՝ 4-ի:

4.4. Գտնել էլիպսի հավասարումն, եթե նրա ֆոկուսները գտնվում են օրդինատների առանցքի վրա, համաչափ են կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ և.

ա) նրա կիսաառանցքները հավասար են համապատասխանաբար 7-ի և 2-ի;

բ) մեծ առանցքը հավասար է 10-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 8-ի;

գ) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 24-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

դ) փոքր առանցքը հավասար է 16-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{3}{5}$;

ե) միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի, միջդիրեկտորիսային հեռավորությունը՝ $16\frac{2}{3}$ -ի:

4.5. Հաստատուն երկարություն ունեցող հատվածն իր երկու ծայրերով սահում է ուղիղ անկյան կողմերի վրայով: Որոշել այն կորի հավասարումն, որը գծում է այդ հատվածի վրա գտնվող M կետը:

4.6. Կառուցել հետևյալ հավասարումներով որոշվող գծերը.

ա) $3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$;

բ) $2x^2 + 5y^2 - 20y + 5 = 0$;

գ) $x^2 + 4x + 3y^2 - 9y + 2 = 0$;

դ) $5x^2 - 10x + 6y^2 - 12y - 4 = 0$;

ե) $3x^2 + 12x + 8y^2 - 16y - 4 = 0$:

4.7. Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, որի կենտրոնը համընկնում է կորդինատների սկզբնակետի հետ, իրական առանցքն՝ աբսցիսների առանցքի հետ, եթե.

ա) իրական առանցքը հավասար է 10-ի, կեղծ առանցքը՝ 8-ի;

բ) իրական կիսաառանցքը հավասար է 3-ի, միջֆոկուսային հեռավորությունը՝ 10-ի;

գ) իրական առանցքը հավասար է 8-ի և հիպերբոլն անցնում է $M(8; 2\sqrt{3})$ կետով;

դ) կեղծ կիսաառանցքը հավասար է 5-ի և էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{7}{3}$ -ի:

4.8. Գտնել հիպերբոլի հավասարումը, որի կենտրոնը համընկնում է կորդինատների սկզբնակետի հետ, իրական առանցքը՝ օրդինատների առանցքի հետ, եթե.

ա) կեղծ առանցքը հավասար է 6-ի, էքսցենտրիսիտետը՝ $\varepsilon = \frac{5}{4}$ -ի;

բ) միջդիրեկտորիսային հեռավորությունը հավասար է 6-ի և գագաթների միջև եղած հեռավորությունը հավասար է 12-ի;

գ) ասիմպտոտների հավասարումներն են՝ $y = \pm 2x$, միջֆոկուսային հեռավորությունը հավասար է 10-ի;

դ) էքսցենտրիսիտետը հավասար է 2-ի և միջդիրեկտորիսային հեռավորությունը՝ 8-ի:

4.9. Հիպերբոլի ասիմպտոտներն են. $y = \pm \frac{3}{4}x$ ուղիղները: Կազմել հիպերբոլի հավասարումը, եթե այն անցնում է (4; 0) կետով:

- 4.10. Գտնել $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ հիպերբոլի ասիմպտոտներով կազմված անկյան և էքսցենտրիսիտետի միջև եղած կապը:
- 4.11. Գտնել $25x^2 - 16y^2 = 400$ հիպերբոլի ֆոկուսի շեղումը համապատասխան ասիմպտոտից:
- 4.12. Գտնել հետևյալ հիպերբոլների կենտրոնի կոորդինատները, ասիմպտոտների և դիրեկտրիսների հավասարումները.
 ա) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
 բ) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
 գ) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$:
- 4.13. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության հետ, եթե.
 ա) գագաթի հեռավորությունը ֆոկուսից հավասար է 3-ի;
 բ) ֆոկուսի հեռավորությունը դիրեկտրիսից հավասար է 8-ի;
 գ) պարաբոլը անցնում է $M(2; 6)$ կետով:
- 4.14. Գտնել պարաբոլի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է օրդինատների առանցքի ուղղության հետ, եթե.
 ա) պարաբոլի ֆոկուսը $F(0; -2)$ կետն է;
 բ) պարաբոլն անցնում է $M(3; -1)$ կետով;
 գ) պարաբոլն անցնում է $N(-2; 5)$ կետով:
- 4.15. Որոշել պարաբոլի գագաթի կոորդինատները, պարամետրը և համաչափության առանցքի ուղղությունը.
 ա) $y^2 + 5x - 6y + 4 = 0$; բ) $3x^2 - 4y + 5 = 0$;
 գ) $2x^2 + 4x + 3y - 8 = 0$; դ) $4x + 3y^2 - 6y - 9 = 0$;
 ե) $9x^2 - 18x + 3y + 11 = 0$:
- 4.16. Գտնել $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է $A(-5; 7)$ կետով:
- 4.17. $M_1(x_1; y_1)$ կետը պատկանում է $x^2 + y^2 = R^2$ շրջանագծին: Գտնել շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով:
- 4.18. $M_1(x_1; y_1)$ կետը պատկանում է $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ շրջանագծին: Գտնել շրջանագծի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է M_1 կետով:
- 4.19. $A\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ կետից $x^2 + y^2 = 5$ շրջանագծին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:

- 4.20. $A(1; 6)$ կետից $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$ շրջանագծին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:
- 4.21. Գտնել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1; y_1)$ կետով:
- 4.22. Գտնել $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $3x + 2y + 7 = 0$ ուղիղին:
- 4.23. Գտնել $x^2 + 4y^2 = 20$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղահայաց են $2x - 2y - 13 = 0$ ուղիղին:
- 4.24. Գտնել $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ էլիպսի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ $4x - 2y + 23 = 0$ ուղիղին և հաշվել նրանց միջև եղած հեռավորությունը:
- 4.25. $A\left(\frac{10}{3}; \frac{5}{3}\right)$ կետից $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ էլիպսին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:
- 4.26. Գտնել $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ հիպերբոլի շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1; y_1)$ կետով:
- 4.27. Գտնել $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք ուղահայաց են $4x + 3y - 7 = 0$ ուղիղին:
- 4.28. Գտնել $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $10x - 3y + 9 = 0$ ուղիղին:
- 4.29. Գտնել $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = -1$ հիպերբոլի այն շոշափողների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $2x + 4y - 5 = 0$ ուղիղին և հաշվել նրանց միջև եղած հեռավորությունը:
- 4.30. $A(-1; -7)$ կետից $x^2 - y^2 = 16$ հիպերբոլին տարված են շոշափողներ: Գտնել նրանց հավասարումները:
- 4.31. Գտնել $y^2 = 2px$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որն անցնում է նրա $M_1(x_1; y_1)$ կետով:
- 4.32. Գտնել $y^2 = 8x$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որը զուգահեռ է $2x - 2y - 3 = 0$ ուղիղին:
- 4.33. Գտնել $x^2 = 16y$ պարաբոլի այն շոշափողի հավասարումը, որն ուղահայաց է $2x + 4y + 7 = 0$ ուղիղին:
- 4.34. Գտնել $A(2; 9)$ կետից $y^2 = 36x$ պարաբոլին տարված շոշափողների հավասարումները:
- 4.35. $A(5; 9)$ կետից $y^2 = 5x$ տարված են շոշափողներ: Գտնել շոշափման կետերը միացնող լարի հավասարումը:

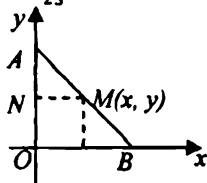
Պատասխաններ

4.1. ա) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 49$; բ) $(x-2)^2 + (y-\frac{13}{5})^2 = 289$;
 գ) $x^2 + (y-1)^2 = 29$; դ) $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 90$; ե) $x^2 + y^2 = 16$;

4.2. ա) $C(-2; 0)$, $R = 3$; բ) $C(0; 3)$, $R = 5$; գ) $C(3; -2)$, $R = \sqrt{14}$;
 դ) $C(1; -3)$, $R = 0$; ե) $C(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4})$, $R = \frac{\sqrt{34}}{4}$; զ) $C(1; -\frac{3}{2})$, $R = \frac{\sqrt{365}}{10}$;

4.3. ա) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; բ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; գ) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; դ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;
 ե) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; զ) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; թ) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$;

4.4. ա) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$; բ) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$; գ) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$; դ) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$;
 ե) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$;

4.5.  $AM = a$, $BM = b$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: Յուշում.
 օգտվել OAB և NAM եռանկյունների
 նմանությունից:

4.6. ա) $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; բ) $\frac{x^2}{15/2} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$; գ) $\frac{(x+2)^2}{35/4} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{35/12} = 1$;
 դ) $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-1)^2}{5/2} = 1$; ե) $\frac{(x+2)^2}{8} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$;

4.7. ա) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; բ) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; գ) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$; դ) $\frac{x^2}{45/8} - \frac{y^2}{25} = 1$;

4.8. ա) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$; բ) $\frac{x^2}{108} - \frac{y^2}{36} = -1$; գ) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = -1$;
 դ) $\frac{x^2}{192} - \frac{y^2}{64} = -1$;

4.9. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

4.10. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}{2-\varepsilon^2}$;

4.11. 5:

4.12. ա) $C(2; -3)$, $a = 3$, $b = -4$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, դիրեկտորիսներն են՝

$5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, ասիմպտոտներն են՝ $4x - 3y - 17 = 0$,
 $4x + 3y + 1 = 0$;

բ) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $\varepsilon = 1,25$, դիրեկտորիսներն են՝ $x = -11,4$;
 $x = 1,4$, ասիմպտոտներն են՝ $3x + 4y + 11 = 0$, $3x - 4y + 19 = 0$;

դ) $C(2; -1)$, $a = 3$, $b = -4$, $\varepsilon = 1,25$, դիրեկտորիսներն են՝
 $y = -4,2$; $y = 2,2$, ասիմպտոտներն են՝ $4x + 3y - 5 = 0$,
 $4x - 3y - 11 = 0$;

- 4.13. ա) $y^2 = 12x$; բ) $y^2 = 16x$; ա) $y^2 = 18x$;
- 4.14. ա) $x^2 = -8y$; բ) $x^2 = -9y$; դ) $x^2 = 0,8y$;
- 4.15. ա) $C(1; 3)$, $p = \frac{5}{2}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OX առանցքի բացասական ուղղության հետ;
- բ) $C(0; \frac{5}{4})$, $p = \frac{2}{3}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի դրական ուղղության հետ;
- գ) $C(-1; \frac{10}{3})$, $p = \frac{3}{4}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի բացասական ուղղության հետ;
- դ) $C(3; 1)$, $p = \frac{2}{3}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OX առանցքի բացասական ուղղության հետ;
- ե) $C(1; -\frac{2}{3})$, $p = \frac{1}{6}$, համաչափության առանցքի ուղղությունը համընկնում է OY առանցքի բացասական ուղղության հետ;
- 4.16. $3x - 4y + 43 = 0$;
- 4.17. $x_1x + y_1y = R^2$: Ցուցում. օգտվել շոշափողի սահմանումից՝ որպես հատողի սահմանային դիրք:
- 4.18. $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2$;
- 4.19. $x - 2y - 5 = 0$, $2x - y - 5 = 0$;
- 4.20. $2x + y - 8 = 0$, $x - 2y + 11 = 0$;
- 4.21. $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$;
- 4.22. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$;
- 4.23. $x + y - 5 = 0$, $x + y + 5 = 0$;
- 4.24. $2x - y - 12 = 0$, $2x - y + 12 = 0$; $d = \frac{24\sqrt{5}}{5}$;
- 4.25. $x + y - 5 = 0$, $x + 4y - 10 = 0$;
- 4.26. $\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$;
- 4.27. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$;
- 4.28. $10x - 3y - 32 = 0$, $10x - 3y + 32 = 0$;
- 4.29. $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$; $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$;
- 4.30. $5x - 3y - 16 = 0$, $13x + 5y + 48 = 0$;
- 4.31. $y_1y = p(x + x_1)$;
- 4.32. $x + y + 2 = 0$;
- 4.33. $2x - y - 16 = 0$;
- 4.34. $3x - y + 3 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$;
- 4.35. $5x - 18y + 25 = 0$;

ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՈՒՂԻՂԸ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Հարթությունը տարածության մեջ

1. Հարթության ընդհանուր հավասարումն է՝

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

որտեղ A, B, C, D -ն հաստատուններ են, ընդ որում A, B, C գործակիցներից առնվազն մեկը զրո չէ:

2. Հարթության վեկտորական հավասարումն է՝

$$\vec{n}\vec{r} + D = 0,$$

որտեղ $\vec{n}\{A, B, C\}$ -ն հարթության նորմալ վեկտորն է, $\vec{r}$ -ը հարթության ընթացիկ կետի շառավիղ-վեկտորն է:

3. Հարթության նորմավորված հավասարումն է.

ա) դեկարտյան կոորդինատներով՝

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

բ) վեկտորական տեսքով՝

$$\vec{r}\vec{n}^0 - p = 0,$$

որտեղ $\vec{r}\{x, y, z\}$, $\vec{n}^0\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$:

4. Հարթության հավասարումը հատվածներով՝

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

որտեղ a -ն, b -ն, c -ն կոորդինատային առանցքներից կտրած ուղղված հատվածների մեծություններն են՝ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$:

5. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետով անցնող և $\vec{n}\{A, B, C\}$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումն է՝

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

վեկտորական տեսքով՝

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0:$$

6. Տրված երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումն է՝

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0:$$

7. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթություններով կազմված φ անկյունը որոշվում է

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

բանաձևով: Հարթությունների զուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

ուղղահայացության պայմանը՝

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0:$$

8. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությունից՝

$$d = |x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p|$$

կամ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

9. $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

հարթությունների հատման ուղիղով որոշվող հարթությունների փնջի հավասարումն է՝

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0:$$

Օրինակ 21: Գտնել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $(2; -1; 1)$ կետով և ուղղահայաց է $3x - y - z + 1 = 0$ և $x - y + 2z + 1 = 0$ հարթությունների հատման գծին:

Լուծում: Հարթության հավասարումը, որն անցնում է տրված կետով կլինի

$$A(x - 2) + B(y + 1) + C(z - 1) = 0:$$

Քանի որ հարթությունն ուղղահայաց է տրված հարթությունների հատման գծին, ապա նա ուղղահայաց է այդ հարթություններից յուրաքանչյուրին, որտեղից կստանանք՝

$$3A - B - C = 0 \text{ և } A - B + 2C = 0:$$

Դիտարկելով C -ն որպես պարամետր, A -ն և B -ն արտահայտենք C -ով, կստանանք՝ $A = \frac{3}{2}C$, $B = \frac{7}{2}C$: Տեղադրելով փնտրվող հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝

$$3(x - 2) + 7(y + 1) + 2(z - 1) = 0, 3x + 7y + 2z - 1 = 0:$$

Պատ.՝ $3x + 7y + 2z - 1 = 0$:

Օրինակ 22. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(3; 0; 4)$, $M_2(5; 2; 6)$ կետերով և ուղղահայաց է $2x + 4y + 6z - 7 = 0$ հարթությանը:

Լուծում. Եթե $M(x; y; z)$ -ը հարթության կամայական կետ է, ապա $\overline{M_1M}\{x - 3; y - 0; z - 4\}$, $\overline{M_1M_2}\{2; 2; 2\}$ և $\vec{n}\{2; 4; 6\}$ վեկտորները պատկանում են միևնույն հարթությանը: Հետևաբար $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \vec{n} = 0$ կամ

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

որտեղից կստանանք՝ $x - 2y - z - 7 = 0$:

Պատ.՝ $x - 2y - z - 7 = 0$:

Օրինակ 23. Տրված են $2x - 3y + z - 3 = 0$, $x - y - 2z + 4 = 0$ հարթությունները: Պարզել $M(1; 2; -1)$ և $N(-3; 1; 2)$ կետերը գտնվում են այդ հարթություններով կազմված միևնույն, կից, թե՞ հակադիր երկնիստ անկյուններում:

Լուծում. Որոշենք M կետի շեղումը հարթություններից

$$\delta_1 = \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 1 - 3}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = -\frac{8}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta_2 = \frac{1 - 2 + 2 + 4}{-\sqrt{1 + 1 + 4}} = -\frac{5}{\sqrt{6}} < 0,$$

իսկ N կետինը կլինի՝

$$\delta'_1 = \frac{2(-3) - 3 \cdot 1 + 2 - 3}{\sqrt{14}} = -\frac{10}{\sqrt{14}} < 0,$$

$$\delta'_2 = \frac{-3 - 1 - 4 + 4}{-\sqrt{6}} = \frac{-4}{-\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} > 0:$$

Քանի որ δ_1 և δ'_1 միևնույն նշանի են, ապա M և N կետերը գտնվում են առաջին հարթության միևնույն կողմում: δ_2 և δ'_2 տարբեր նշանի են, ուստի կետերը գտնվում են երկրորդ հարթության տարբեր կողմերում: Հետևաբար M -ը և N -ը գտնվում են կից երկնիստ անկյուններում:

Ուղիղը տարածության մեջ

1. Ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումներն են՝

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \end{cases}$$

2. Ուղիղ գծի կանոնական հավասարումներն են՝

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p},$$

որտեղ m, n, p -ն ուղիղի ուղղորդ վեկտորի պրոյեկցիաներն են:

3. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ և $M_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումներն են՝

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}:$$

4. $\{m_1, n_1, p_1\}$ և $\{m_2, n_2, p_2\}$ ուղղորդ վեկտորներ ունեցող ուղիղներով կազմված φ անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

5. Երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանը՝

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$$

գուգահեռության պայմանը՝

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Ուղիղի և հարթության փոխադարձ դասավորությունը

1. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ ուղիղի և $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթության

կազմված անկյունը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}};$$

2. Ուղիղի և հարթության գուգահեռության պայմանը՝

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

ուղղահայացության պայմանը՝

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

3. Երկու ուղիղների՝ $\frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1}$ և $\frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}$ մեկ

հարթության մեջ գտնվելու պայմանը՝

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

4. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ ուղիղը գտնվում է $Ax + By + Cz + D = 0$

հարթության մեջ, եթե

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Aa + Bb + Cc + D = 0: \end{cases}$$

Օրինակ 24: Գտնել

$$\frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-7}$$

ուղիղի պրոյեկցիան $2x - y - 3z + 6 = 0$ հարթության վրա:

Լուծում: Պրոյեկտող հարթությունը անցնում է տրված ուղիղով և ուղղահայաց է տրված հարթությանը: Ուղիղի հավասարումից հետևում

է, որ փնտրվող հարթությունը պետք է անցնի $(1; -1; 0)$ կետով:
Հետևաբար հարթության հավասարումը կլինի՝

$$A(x-1) + B(y+1) + C(z-0) = 0:$$

Որոնելի ուղիղի $\vec{q}$ ուղղորդ վեկտորը կլինի ուղղահայաց տրված հարթության $\vec{n}\{A, B, C\}$ նորմալ վեկտորին, որտեղից ստանում ենք՝
 $\vec{n} \cdot \vec{q} = 0$, և.

$$9A - 4B - 7C = 0:$$

Քանի որ պրոյեկտող հարթությունն ուղղահայաց է տրված հարթությանը, ապա՝

$$2A - B - 3C = 0:$$

Լուծելով այս երկու հավասարումների համակարգը, կստանանք՝

$$\frac{A}{C} = -5 \text{ և } \frac{B}{C} = -13:$$

Պրոյեկտող հարթության հավասարման երկու մասերը բաժանելով C -ի վրա կստանանք՝

$$\frac{A}{C}(x-1) + \frac{B}{C}(y+1) + z = 0:$$

Տեղադրելով $\frac{A}{C}$ և $\frac{B}{C}$ արժեքները կստանանք՝

$$5x + 13y - z + 8 = 0:$$

Ուստի ուղիղի պրոյեկցիայի հավասարումը կլինի՝

$$\begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0, \\ 5x + 13y - z + 8 = 0: \end{cases}$$

Օրինակ 25. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $A(3; -4; 6)$ կետով և զուգահեռ է YOZ կոորդինատային անկյան կիսորդին:

Լուծում: Գտնենք YOZ անկյան կիսորդի հավասարումը: YOZ կոորդինատային հարթությանը պատկանող ուղիղը OX առանցքի հետ կազմում է 90° անկյուն, հետևաբար $\cos \alpha = \cos 90^\circ = 0$, իսկ OY -ի և OZ -ի հետ՝ 45° անկյուն, որտեղից ստանում ենք՝ $\cos \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
 $\cos \gamma = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$\vec{q} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ -ն կլինի YOZ անկյան կիսորդի ուղղորդ վեկտորը, հետևաբար այդ ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$\frac{x}{0} = \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ կամ $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$: $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$ -ն կլինի նաև փնտրվող ուղիղի

համար ուղղորդ վեկտոր, հետևաբար որոնելի ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-6}{1}:$$

$$\text{Պատ. } \frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-6}{1}.$$

$$\text{Օրինակ 26. } \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-2} \quad (1) \text{ և } \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (2)$$

ուղիղների միջև եղած հեռավորությունը:

Լուծում. Ստուգենք, որ այս ուղիղները պատկանում են տարբեր հարթությունների: $M_1(2; -2; -1)$ կետը պատկանում է (1), իսկ $M_2(0; 0; 1)$ -ը՝ (2) ուղիղներին: $\vec{\pi}_1\{2; 2; -2\}$, $\vec{\pi}_2\{1; -3; -2\}$, $\vec{\pi}_3\{1; 1; 1\}$ վեկտորների կոորդինատներից կազմենք որոշիչ՝

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

որտեղից հետևում է, որ այդ ուղիղները չեն պատկանում միևնույն հարթությանը, այսինքն խաչվող են: Հետևաբար այդ ուղիղների հեռավորությունը կլինի այն զուգահեռ P_1 և P_2 հարթությունների հեռավորությունը, որոնք համապատասխանաբար պարունակում են

$$\text{այդ ուղիղները: } \vec{\pi} = -[\vec{\pi}_3; \vec{\pi}_2] = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} \text{ վեկտորը}$$

հանդիսանում է այդ հարթությունների ընդհանուր նորմալը: Փնտրվող h հեռավորությունը կլինի $\overrightarrow{M_2M_1}\{2; -2; -2\}$ վեկտորի պրոյեկցիայի բացարձակ արժեքը $\vec{\pi}$ վեկտորի ուղղության վրա.

$$\text{պր}_{\vec{\pi}} \overrightarrow{M_2M_1} = \frac{(\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{\pi})}{|\vec{\pi}|} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

$$\text{Պատ. } \frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

Օրինակ 27. Կազմել հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 6y + 1 = 0, \end{cases}$ ուղիղով և $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ ուղիղը հատում է 45° անկյան տակ:

Լուծում. Գրենք հարթությունների փնջի հավասարումը, որն անցնում է տրված ուղիղով.

$$x - y + 3 + \lambda(6y + 1) = 0 \text{ կամ } x + (6\lambda - 1)y + 3 + \lambda = 0:$$

Օգտվենք հարթության և ուղիղի կազմած անկյան բանաձևից՝

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

որտեղ $\varphi = 45^\circ$, $A = 1$, $B = 6\lambda - 1$, $C = 0$, $m = 1$, $n = 1$, $p = 4$:

Տեղադրելով բանաձևի մեջ կստանանք՝ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+6\lambda-1}{\sqrt{1+4\lambda^2-4\lambda+1}\sqrt{1+1+16}}$,

որտեղից՝ $\lambda = \frac{1}{2}$:

Տեղադրելով $\lambda = \frac{1}{2}$ արժեքը հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝ $2x + 4y + 7 = 0$:

Պատ.՝ $2x + 4y + 7 = 0$:

Օրինակ 28. Գտնել $A(1; -3; 2)$ կետի պրոյեկցիան $6x + 3y - z - 41 = 0$ հարթության վրա:

Լուծում. Կետի պրոյեկցիան հարթության վրա կլինի այդ կետով անցնող և տրված հարթությանն ուղղահայաց ուղիղի և այդ հարթության հատման կետը: Այդ ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-2}{p},$$

որտեղ ուղղորդ վեկտորի կոորդինատները որոշվում են հետևյալ առնչություններից.

$$\frac{m}{6} = \frac{n}{3} = \frac{p}{-1},$$

այսինքն՝ $m:n:p = 6:3:(-1)$: Ուղիղի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{-1}:$$

$\frac{x-1}{6} = t$, $\frac{y+3}{3} = t$, $\frac{z-2}{-1} = t$ առնչություններից x -ը, y -ը և z -ն արտահայտելով t -ով և տեղադրելով հարթության հավասարման մեջ կստանանք՝ $t = 1$, որտեղից հետևում է՝ $x = 7$, $y = 0$, $z = 1$:

Պատ.՝ $(7; 0; 1)$:

Խնդիրներ

- 5.1. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $A(2; -1; 3)$ կետով և զուգահեռ է.
ա) OXY հարթությանը, բ) OYZ հարթությանը, գ) OXZ հարթությանը:
- 5.2. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(-1; 6; 3)$ կետով և.
ա) OX առանցքով, բ) OY առանցքով, գ) OZ առանցքով:
- 5.3. Գտնել $A(3; -2; 1)$ և $B(2; 1; 4)$ կետերով անցնող և.
ա) OX -ին զուգահեռ, բ) OY -ին զուգահեռ, գ) OZ -ին զուգահեռ, հարթության հավասարումը:
- 5.4. Գտնել հարթության նորմալ վեկտորը.
ա) $2x + 3y - 9z + 4 = 0$, բ) $x + 2y - 7 = 0$, գ) $4x + 5 = 0$:
- 5.5. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(7; 9; 11)$ կետով և ուղղահայաց է $\vec{n}\{-5; 4; 3\}$ վեկտորին:

- 5.6. Գտնել այն հատվածների մեծությունները, որոնք $3x - 5y + 6z - 24 = 0$ հարթությունը կտրում է կոորդինատային առանցքներից:
- 5.7. Տրված են $M(7; 5; 1)$ և $N(3; 2; 4)$ կետերը: MN հատվածի միջնակետով տանել հարթություն, որը OX -ից կտրում է $a = 5$ և OY -ից $b = 2$ մեծությամբ հատվածներ:
- 5.8. Տրված են $M(3; 1; -4)$ և $N(-1; 2; 5)$ կետերը: Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M կետով և ուղղահայաց է MN հատվածին:
- 5.9. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է M_0 կետով և զուգահեռ է $3x - 5y + z - 17 = 0$ հարթությանը.
ա) $M_0(0; 5; 0)$; բ) $M_0(2; -7; 0)$; գ) $M_0(1; 0; 8)$; դ) $M_0(0; 6; -3)$:
- 5.10. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(1; -1; 3)$ կետերով և ուղղահայաց է $3x + 2y - z + 5 = 0$ հարթությանը:
- 5.11. Գտնել հետևյալ հարթություններով կազմված անկյունը.
ա) $2x + y - z - 1 = 0$ և $x + 2y + z + 5 = 0$;
բ) $x - 3y + 2z + 7 = 0$ և $3x + y - 2z + 4 = 0$;
գ) $5x + z - 8 = 0$ և $2x + 3z + 1 = 0$:
- 5.12. Գտնել հետևյալ երեք կետերով անցնող հարթության հավասարումը.
ա) $(1; 0; 0)$; $(3; -1; 2)$; $(-1; 7; 0)$;
բ) $(3; 0; 1)$; $(2; 2; 1)$; $(0; 0; 5)$;
գ) $(-1; -3; 0)$; $(7; -1; 0)$; $(0; 3; 0)$:
- 5.13. Ինչպիսի* արժեքներ պետք է ընդունեն A և C գործակիցները, որպեսզի $Ax - 2y + 3z + 1 = 0$ և $4x + y + Cz + 8 = 0$ հարթությունները լինեն զուգահեռ:
- 5.14. $M_0(7; -3; 9)$ կետով տանել հարթություն, որն ուղղահայաց է $3x - 5y + z - 4 = 0$ և $x - y + 3z + 11 = 0$ հարթություններին:
- 5.15. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(1; 3; -4)$ կետերով և $2x + y - z + 7 = 0$ հարթության հետ կազմում է $\frac{\pi}{3}$ անկյուն:
- 5.16. $2x - 7y + z - 3 = 0$ և $x + 4y - 3z + 1 = 0$ հարթություններով որոշվող փնջում, գտնել այն հարթությունը, որը.
ա) անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով;
բ) զուգահեռ է OX առանցքին;
գ) զուգահեռ է OY առանցքին;
դ) զուգահեռ է OZ առանցքին;
ե) անցնում է $M_0(1; -1; 2)$ կետով:

- 5.17. $x + 5y - z - 1 = 0$ և $2x + y - 6z + 3 = 0$ հարթությունների հատման գծով տանել հարթություն, որն անցնում է MN հատվածի միջնակետով, որտեղ՝ $M(1; 4; 0)$, $N(5; 2; -4)$:
- 5.18. $3x + y - z - 1 = 0$ և $x - 4y + 2z - 3 = 0$ հարթություններով որոշվող փնջում գտնել նրանցից յուրաքանչյուրին ուղղահայաց հարթությունները:
- 5.19. Ապացուցել, որ հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_0(x_0; y_0; z_0)$ կետով և ուղղահայաց է $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ հարթություններին, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝
- $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0:$$
- 5.20. Ապացուցել, որ հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(x_1; y_1; z_1)$ և $M_2(x_2; y_2; z_2)$ կետերով, ուղղահայաց է $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությանը, կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝
- $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0:$$
- 5.21. Ապացուցել, որ հետևյալ երեք հարթություններն անցնում են մեկ ուղիղով՝
 ա) $7x + 4y + 7z + 1 = 0$; բ) $2x - y - z + 2 = 0$;
 գ) $x + 2y + 3z - 1 = 0$:
- 5.22. Հետևյալ հարթությունների հավասարումները բերել նորմալ տեսքի.
 ա) $x - 2y + 2z - 12 = 0$; բ) $2x - 3y + 5z - 5 = 0$;
 գ) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z + 3 = 0$; դ) $12y - 5z + 39 = 0$; ե) $y + 2 = 0$;
 զ) $2z - 5 = 0$:
- 5.23. Գտնել հարթության հավասարումը, եթե սկզբնակետի հեռավորությունն այդ հարթությունից 10 է, իսկ $\vec{n}\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right\}$ -ը հարթության նորմալ վեկտորն է:
- 5.24. Գտնել $x - 2y + 2z - 9 = 0$ հարթության նորմալ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:
- 5.25. Հարթությունը OX ; OY ; OZ առանցքներից կտրում է համապատասխանաբար $a = -18$; $b = -9$; $c = 9$ մեծությամբ հատվածներ: Գտնել նրա նորմալ վեկտորի ուղղորդ կոսինուսները:
- 5.26. Գտնել կետի շեղումն ու հեռավորությունը հարթությունից.

- ա) $M_0(-2; -4; 3)$, $2x - y + 2z + 3 = 0$;
 բ) $M_0(2; -1; -1)$, $16x - 12y + 15z - 4 = 0$;
 գ) $M_0(1; 2; -3)$, $5x - 3y + z + 4 = 0$;
 դ) $M_0(3; -6; 7)$, $4x - 3z - 1 = 0$;
 ե) $M_0(9; 2; -2)$, $12y - 5z + 5 = 0$;

5.27. Գտնել հետևյալ զուգահեռ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը.

- ա) $x - 2y - 2z - 12 = 0$, բ) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$,
 $x - 2y - 2z - 6 = 0$; $4x - 6y + 12z + 21 = 0$;
 գ) $2x - y + 2z + 9 = 0$, դ) $16x + 12y - 15z + 50 = 0$,
 $4x - 2y + 4z - 21 = 0$; $16x + 12y - 15z + 25 = 0$;

5.28. Տրված են զուգահեռ հարթություններ.

$$3x + 4y - 2z - 1 = 0,$$

$$6x + 8y - 4z - 3 = 0:$$

Գտնել նրանց զուգահեռ և նրանցից հավասարահեռ հարթության հավասարումը:

5.29. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց շեղումները $12x - 15y + 16z - 10 = 0$ հարթությունից հավասար են ± 5 -ի:

5.30. Կազմել այն կետերի երկրաչափական տեղի հավասարումը, որոնք հավասարահեռ են հետևյալ հարթություններից.

$$x - 5y + 3z + 5 = 0 \text{ և } 2x - 10y + 6z + 9 = 0:$$

5.31. Գտնել այն հարթությունների հավասարումները, որոնք կիսում են հետևյալ $5x - 2y + 5z - 3 = 0$, $2x + y - 7z + 2 = 0$ հարթություններով կազմված երկնիստ անկյունները:

5.32. Տրված են $M_1(1; 2; -1)$ և $M_2(-3; 1; 2)$ կետերը: Պարզել նրանք գտնվում են հետևյալ հարթություններով կազմված նույն, կից թե՞ հակադիր երկնիստ անկյուններում.

- ա) $2x - 3y + z - 3 = 0$, բ) $5x - 2y + z - 1 = 0$,
 $x - y - 2z + 4 = 0$; $6x - 3y + 2z - 1 = 0$;
 գ) $3x + y + 11z - 3 = 0$,
 $4x + 2y - 5z + 1 = 0$:

5.33. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որը կոորդինատական առանցքներից կտրում է $2; 8; 1$ թվերին համեմատական հատվածներ, եթե $M_0(1; -6; 0)$ կետի հեռավորությունը այդ հարթությունից 2 միավոր է:

5.34. Ապացուցել, որ $2x - 3y + 6z - 11 = 0$ հարթությունը հատում է $M_1(-1; 1; -2)$, $M_2(1; 0; 5)$ ծայրակետերով հատվածը:

5.35. Պարզել, $M(3; 2; -1)$ կետը գտնվում է $5x - y + z + 3 = 0$,

$4x - 3y + 2z + 5 = 0$ հարթություններով կազմված սուր թե՛ բութ անկյան ներսում:

5.36. Նշել հետևյալ ուղիղների դասավորվածության առանձնահատկությունները.

ա) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 3x - 1 = 0; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ y + 5 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} 3x + 5y - 6 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ 3y - z = 0; \end{cases}$

զ) $\begin{cases} 2y + z = 0, \\ 3x - 1 = 0; \end{cases}$

5.37. Չտնել ուղիղի կանոնական և պարամետրական հավասարումները, եթե այն անցնում է $M_0(1; 2; 3)$ կետով և նրա ուղղորդ վեկտորի կազմած անկյունները կոորդինատային առանցքների հետ համապատասխանաբար հավասար են՝ $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$:

5.38. Ուղիղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0: \end{cases}$$

5.39. Ուղիղի հավասարումները բերել կանոնական տեսքի.

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0: \end{cases}$$

5.40. Պարզել $M(5; -2; -3)$ և $N(8; 3; 1)$ կետերը պատկանում են հետևյալ ուղիղին, թե՛ ոչ.

$$\begin{cases} 5x - 3y - 31 = 0, \\ 3x + 4y + 7z + 14 = 0: \end{cases}$$

5.41. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 12 = 0, \\ x + 4y - 2z - 10 = 0, \end{cases}$ ուղիղը պրոյեկտված է կոորդինատային հարթությունների վրա: Չտնել պրոյեկտող հարթությունների հավասարումները:

5.42. Չտնել հետևյալ ուղիղի պրոյեկցիաները կոորդինատային հարթությունների վրա.

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0, \\ 6x - y - 2z + 4 = 0: \end{cases}$$

5.43. Չտնել

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ուղիղի պրոյեկցիան $2x + 2y + z - 15 = 0$ հարթության վրա:

5.44. Չտնել

$$\begin{cases} 3x - 5y + z - 8 = 0, \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

ուղիղի ուղղորդ կոսինուսները:

5.45. Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0: \end{cases}$$

5.46. Գտնել $M_1(2; -3; \frac{1}{2})$ և $M_2(3; 5; \frac{3}{2})$ կետերով անցնող ուղիղի հավասարումը:

5.47. $M_0(1; -3; 4)$ կետով տանել ուղիղ՝ զուգահեռ

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0, \end{cases}$$

ուղիղին:

5.48. Պարզել, հետևյալ ուղիղները գտնվում են միևնույն հարթության մեջ, թե ո՞չ՝

ա) $\begin{cases} x = 7z - 17, \\ y = 3z - 1 \end{cases}$ և $\begin{cases} x = 4z - 11, \\ y = -10z + 25; \end{cases}$

բ) $\begin{cases} 4x + y + 3z = 0, \\ 2x + 3y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 3x - 2y + z + 5 = 0, \\ x - 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$ և $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + y - z - 3 = 0: \end{cases}$

5.49. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $(-3; 5; -9)$ կետով և հատում է հետևյալ ուղիղները.

$$\begin{cases} y = 3x + 5, \\ z = 2x - 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 4x - 7, \\ z = 5x + 10: \end{cases}$$

5.50. Գտնել հետևյալ ուղիղների հատման կետի կոորդինատները.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+4}{2}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-1}{3};$$

5.51. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2; -3; 4)$ կետով և ուղղահայաց է հետևյալ ուղիղներին.

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}, \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-4}{3};$$

5.52. Գտնել հետևյալ ուղիղների ընդհանուր ուղղահայացի հավասարումները.

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}, \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{3};$$

5.53. Կազմել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(2; -2; 0)$ կետով, OY առանցքի հետ կազմում է 60° անկյուն և հատում է

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-2} \text{ ուղիղը:}$$

5.54. Գտնել $M_0(5; -1; -3)$ կետով անցնող և $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$

ուղիղին զուգահեռ ուղիղի հավասարումները:

- 5.55. Տրված են մասնիկի շարժման հետագծի հավասարումները՝
 $x = 3 - 4t$, $y = -3 + 2t$, $z = 3 - t$: Որոշել 7 վայրկյանում նրա անցած հեռավորությունը:
- 5.56. A մասնիկը, շարժվելով ուղղագիծ և հավասարաչափ $\vec{V}(3; -2; 1)$ արագությամբ, $t = 0$ պահին գտնվում է $M_0(2; 1; 4)$ կետում: Ո՞ր կետում կգտնվի մասնիկը $t = 5$ վայրկյանին: Կազմել նրա շարժման հետագծի հավասարումը:
- 5.57. Կազմել մասնիկի շարժման հետագծի հավասարումները, որը շարժվելով ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_1(-7; 12; 5)$ կետից $M_2(9; -4; -3)$ -ը անցել է 4 վայրկյանում: Գտնել մասնիկի արագության վեկտորը:
- 5.58. $F = 42$ Նյուտոն ուժը ուղղված է $\begin{cases} 5x + 3y - 7z + 4 = 0, \\ x + y - 5z + 2 = 0 \end{cases}$ ուղիղով:
 Որոշել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ այդ ուժի մոմենտի մոդուլը:
- 5.59. Գտնել ճառագայթի հավասարումը, որի սկզբնակետը $A(0; 1; -3)$ կետն է, եթե այն ուղղահայաց է $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{2}$ ուղիղին և հատում է այդ ուղիղը:
- 5.60. Գտնել հետևյալ ուղիղների հեռավորությունը.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-5}{4} \text{ և } \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{4}:$$
- 5.61. Գտնել հետևյալ խաչվող ուղիղների հեռավորությունը՝

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{1}, \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}:$$
- 5.62. Գտնել հետևյալ ուղիղների հեռավորությունը՝

$$\begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = t + 1, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z - 5 = 0: \end{cases}$$
- 5.63. Գտնել $M_0(4; -3; 1)$ կետով անցնող և $\frac{x-0}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{-3}$, $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ ուղիղներին զուգահեռ հարթության հավասարումը:
- 5.64. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 6y + 1 = 0 \end{cases}$ ուղիղով, հատում է $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ ուղիղը և նրա հետ կազմում է 45° անկյուն:
- 5.65. Գտնել $M(1; -3; 2)$ կետի պրոյեկցիան $6x + 3y - z - 41 = 0$ հարթության վրա:

- 5.66. Գտնել $M(1; -3; 2)$ կետի հեռավորությունը $\frac{x-30}{6} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+5}{-1}$ ուղիղից:
- 5.67. Գտնել $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ ուղիղի և $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ հարթության կազմած անկյունը:
- 5.68. Գտնել $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ ուղիղի և $2x - y + z + 4 = 0$ հարթության հատման կետը:
- 5.69. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $x - 2y + 4z + 12 = 0$ հարթության և $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{4}$, $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$ ուղիղների հատման կետերով:
- 5.70. Գտնել այն ուղիղի հավասարումը, որն անցնում է $M_0(-2, 3, 4)$ կետով և ուղղահայաց է $7x - 3y + 9z - 13 = 0$ հարթությանը:
- 5.71. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $N(-3, 2, 1)$ կետով և ուղղահայաց է $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-2}$ ուղիղին:
- 5.72. Գտնել B կետը, որը համաչափ է $A(3, -2, 1)$ կետին $2x - y + 3z + 17 = 0$ հարթության նկատմամբ:
- 5.73. Գտնել N կետը, որը համաչափ է $M(1, -2, 4)$ կետին $\frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ ուղիղի նկատմամբ:
- 5.74. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x+5}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-7}{-2}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+3}{-2}$ զուգահեռ ուղիղներով:
- 5.75. Գտնել $M_0(2, -3, 1)$ կետով անցնող այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է $\vec{a}\{1, -1, 4\}$ և $\vec{b}\{-5, 1, 3\}$ վեկտորներին:
- 5.76. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M(1, 1, 4)$ կետով և $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{11} = \frac{z}{3}$ ուղիղով:
- 5.77. Գտնել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x-2}{11} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-4}{7}$ ուղիղով և զուգահեռ է $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-1}$ ուղիղին:
- 5.78. Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-7}{1} = \frac{z+2}{-1}$ ուղիղով և ուղղահայաց է $x - 5y + 2z - 7 = 0$ հարթությանը:
- 5.79. Գտնել $x = t - 1$, $y = t$, $z = 2t + 3$ ուղիղը $9x - 7y + z - 13 = 0$ հարթության վրա պրոյեկտող հարթության հավասարումը:
- 5.80. $M(x, y, z)$ կետը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_0(15, -24, -16)$ կետից $v = 12$ մ/րկ արագությամբ $\vec{s}\{-2, 2, 1\}$

վեկտորի ուղղությամբ: Համոզվելով, որ կետի հետագիծը հատում է $3x + 4y + 7z - 17 = 0$ հարթությունը, գտնել.

1) նրանց հատման P կետը,

2) M_0 կետից P կետը հասնելու ժամանակահատվածը,

3) M_0P հատվածի երկարությունը:

5.81. $M(x, y, z)$ կետը շարժվում է հավասարաչափ և ուղղագիծ $M_0(28, -30, -27)$ կետից $v = 12,5$ մ/վրկ արագությամբ՝ ուղղահայաց $15x - 16y - 12z + 26 = 0$ հարթությանը: Գտնել M կետի շարժման հավասարումը և որոշել.

1) M կետի շարժման հետագծի և հարթության հատման P կետը;

2) M_0 կետից P կետ հասնելու ժամանակահատվածը;

3) M_0P հատվածի երկարությունը:

5.82. $M(x, y, z)$ կետը շարժվում է ուղղագիծ և հավասարաչափ $M_0(11, -21, 20)$ կետից $\vec{s}\{-1, 2, -2\}$ ուղղությամբ ու $v = 12$ մ/վրկ արագությամբ: Որոշել, որքա՞ն ժամանակում նա կանցնի ճանապարհի այն հատվածը, որը գտնվում է $2x + 3y + 5z - 41 = 0$, $2x + 3y + 5z + 31 = 0$ զուգահեռ հարթությունների միջև:

Պատասխաններ

5.1. ա) $z - 3 = 0$; բ) $x - 2 = 0$; գ) $y + 1 = 0$:

5.2. ա) $2z - y = 0$, բ) $Oy \ z - 3x = 0$, գ) $Oz \ y - 6x = 0$:

5.3. ա) $y - z + 3 = 0$, բ) $3x + z - 1 = 0$, գ) $3x + y - 7 = 0$:

5.4. ա) $\vec{n}\{2; 3; -9\}$, բ) $\vec{n}\{1; 2; 0\}$, գ) $\vec{n}\{4; 0; 0\}$:

5.5. $5x - 4y - 3z + 34 = 0$:

5.6. $a = 8$, $b = -\frac{24}{5}$, $c = 4$:

5.7. $2x + 5y - 7z - 10 = 0$:

5.8. $4x - y - 9z - 47 = 0$:

5.9. ա) $3x - 5y + z - 25 = 0$, բ) $3x - 5y + z - 41 = 0$,

գ) $3x - 5y + z - 11 = 0$, դ) $3x - 5y + z + 33 = 0$:

5.10. $7x - 11y - z - 15 = 0$:

5.11. ա) 60° , բ) $\arccos\left(-\frac{2}{7}\right)$, գ) 45° :

5.12. $14x + 4y - 12z - 14 = 0$:

5.13. $A = -8$, $C = -\frac{3}{2}$:

5.14. $7x + 4y + z - 46 = 0$:

5.15. $\pm x\sqrt{30} + 5y + 5z + 5 \pm \sqrt{30} = 0$:

5.16. ա) $5x + 5y - 8z = 0$; բ) $15y - 7z + 5 = 0$; գ) $15x - 17z - 5 = 0$;

դ) $7x - 17y - 8 = 0$; ե) $3x - 3y - 2z - 2 = 0$:

- 5.17. $14x - 101y - 90z + 81 = 0$;
- 5.18. $20x - 41y + 19z - 36 = 0$; $22x + 3y - 5z - 10 = 0$;
- 5.22. ա) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 4 = 0$; բ) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{6}z - \frac{5}{6} = 0$; գ) $-\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z = 0$; դ) $-\frac{12}{13}y + \frac{5}{13}z - 3 = 0$; ե) $-y - 2 = 0$; զ) $z - \frac{5}{2} = 0$;
- 5.23. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 10 = 0$;
- 5.24. $(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$;
- 5.25. $-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$;
- 5.26. ա) $\delta = -3, d = 3$; բ) $\delta = 1, d = 1$; գ) $\delta = 0, d = 0$;
դ) $\delta = -2, d = 2$; ե) $\delta = -3, d = 3$;
- 5.27. ա) $d = 2$; բ) $d = 3,5$; գ) $d = 6,5$; դ) $d = 1$: Յուշում. հարթություններից մեկի վրա գտնվել որևէ կետ և գտնել նրա հեռավորությունը մյուս հարթությունից:
- 5.28. $12x + 16y - 8z - 5 = 0$;
- 5.29. $12x - 15y + 16z - 135 = 0$; $12x - 15y + 16z + 115 = 0$;
- 5.30. $4x - 20y + 12z + 19 = 0$;
- 5.31. $7x - y - 2z - 1 = 0$; $3x - 3y + 12z - 5 = 0$;
- 5.32. ա) կից անկյունում; բ) նույն անկյան մեջ; գ) հակադիր անկյուններում:
- 5.33. $4x + y + 8z + 20 = 0, 4x + y + 8z - 16 = 0$;
- 5.35. Բութ անկյան ներսում:
- 5.36. ա) $\parallel YOZ$; բ) $\perp XOY$ կամ $\parallel OZ$; գ) անցնում է $O(0; 0; 0)$ կետով;
դ) $\parallel OZ$; ե) անցնում է OX -ով; գ) $\parallel YOZ$; զ) անցնում է OX -ով;
ը) $\parallel YOZ$, հատում է OX -ը:
- 5.37. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$;
- 5.38. $\frac{x-0}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}$;
- 5.39. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-7}{13}$;
- 5.40. M կետը պատկանում է ուղիղին, N -ը չի պատկանում ուղիղին:
- 5.41. $4x + 5y - 32 = 0, 11x + 10y - 78 = 0, 11y - 8z - 8 = 0$: Յուշում. տրված ուղիղով անցնող հարթությունների փնջից ընտրել այն հարթությունը, որն ուղղահայաց է համապատասխան կոորդինատային հարթությանը:
- 5.42. $\begin{cases} 9x - 4y + 13 = 0, \\ z = 0; \end{cases} \begin{cases} 15x - 8z + 3 = 0, \\ y = 0; \end{cases} \begin{cases} 5y - 6z - 14 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$
- 5.43. $\begin{cases} 2x + 2y + z - 15 = 0, \\ 4x - 9y + 10z - 9 = 0; \end{cases}$
- 5.44. $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{301}}, \cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{30}}, \cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{30}}$;

$$5.45. \cos \varphi = \frac{4}{21};$$

$$5.46. \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{8} = \frac{z-1}{2};$$

$$5.47. \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-4}{7};$$

5.48. ա) գտնվում են, բ) գտնվում են, գ) չեն գտնվում:

5.49. $y = 22x + 71$, $z = 2x - 3$: Ցուցում. տրված հավասարումները գրել կանոնական տեսքով և օգտվել երկու ուղիղների հատման պայմանից:

$$5.50. (0; 7; -2):$$

$$5.51. \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-3};$$

$$5.52. \frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3};$$

$$5.53. \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{\sqrt{15}} = \frac{z-0}{-6} \text{ և } \frac{x-2}{-3} = \frac{y+2}{\sqrt{15}} = \frac{z-0}{6};$$

$$5.54. \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{-22};$$

$$5.55. 7\sqrt{21};$$

$$5.56. M(17; -9; 9); x = 2 + 3t; y = 1 - 2t; z = 4 + t;$$

$$5.57. x = -7 + 4t, y = 12 - 4t, z = 5 - 2t; \vec{V}(4; -4; -2):$$

$$5.58. 3\sqrt{38} \text{ մ:}$$

$$5.59. \frac{x}{65} = \frac{y-1}{127} = \frac{z+3}{-226};$$

$$5.60. \frac{15\sqrt{26}}{26};$$

$$5.61. \frac{11\sqrt{6}}{5};$$

$$5.62. \frac{76\sqrt{29}}{87};$$

$$5.63. 16x - 27y + 14z - 159 = 0:$$

$$5.64. 2x + 4y + 7 = 0:$$

$$5.65. M_1(7, 0, 1):$$

$$5.66. d = 14:$$

$$5.67. \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{9};$$

$$5.68. A(-7; -7; 3):$$

$$5.69. \frac{x+4}{2} = \frac{y+10}{5} = \frac{z+7}{2};$$

$$5.70. \frac{x+2}{7} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{9};$$

$$5.71. 3x + 4y - 2z + 3 = 0:$$

$$5.72. (-5; 2; -11):$$

$$5.73. N(3; -4; 2):$$

$$5.74. x - y + z - 3 = 0:$$

$$5.75. 7x + 23y + 4z + 51 = 0:$$

5.76. $13x - 7y + 17z - 74 = 0$:

5.77. $16x - 25y + 7z - 135 = 0$:

5.78. $3x - 7y - 19z + 2 = 0$:

5.79. $15x + 17y - 16z + 63 = 0$:

5.80. 1) $P(-25; 16; 4)$; 2) $t = 5$; 3) $M_0P = 60$:

5.81. $x = 28 - 7,5t$, $y = -30 + 8t$, $z = -27 + 6t$;

1) $P(-2, 2, -3)$; 2) $t_1 = 0$, $t_2 = 4$; 3) $M_0P = 50$:

5.82. $t = 3$: Ցուցում. նախ գտնել հետագծի հավասարումները և հատման կետերը զուգահեռ հարթությունների հետ:

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՄԱԿԵՐԵԿՈՒՅԹՆԵՐ

Գլանային և կոնական մակերևույթներ

R շառավղով և $C(a; b; c)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն է՝

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2:$$

Եթե գլանային մակերևույթի ուղղորդ գծի հավասարումներն են

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a} = \{m; n; p\}$ ոչ զրոյական վեկտորին, ապա ծնիչների հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-x}{m} = \frac{y-y}{n} = \frac{z-z}{p}, \quad (2)$$

որտեղ $(X; Y; Z)$ -ը ծնիչի ընթացիկ կետն է, իսկ $(x; y; z)$ -ը պատկանում է ուղղորդ գծին:

Գլանային մակերևույթի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1) և (2) չորս հավասարումներից արտաքսել x, y, z պարամետրերը:

Եթե կոնի ուղղորդ գծի հավասարումներն են՝

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0, \\ F_2(x; y; z) = 0, \end{cases} \quad (1')$$

իսկ գագաթը գտնվում է $(x_0; y_0; z_0)$ կետում, ապա ծնիչների հավասարումները կլինեն՝

$$\frac{x-x_0}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{y-y_0} = \frac{z-z_0}{z-z_0}, \quad (2')$$

որտեղ $(X; Y; Z)$ -ը ծնիչի ընթացիկ կետն է, իսկ $(x; y; z)$ -ն ուղղորդ գծին պատկանող կետ է:

Կոնական մակերևույթի հավասարումը ստանալու համար պետք է (1') և (2') հավասարումներից արտաքսել $x; y; z$ պարամետրերը:

Եթե YOZ հարթության մեջ գտնվող $F(y, z) = 0$ հավասարումով որոշվող գիծը պատենք OY առանցքի շուրջը, ապա ստացված մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$F(y; \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0,$$

իսկ նույն գիծը OZ առանցքի շուրջը պտտելուց ստացված մակերևույթի հավասարումը կլինի՝

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0:$$

Համանման եղանակով ստացվում են նաև կոորդինատային մյուս հարթություններում գտնվող գծերը համապատասխան առանցքների շուրջը պտտելուց առաջացած մակերևույթների հավասարումները:

Երկրորդ կարգի մակերևույթների կանոնական հավասարումները
I. Գլանային մակերևույթներ. որոնց ծնիչները զուգահեռ են OZ առանցքին՝

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ — շրջանային գլան,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — էլիպտական գլան,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — հիպերբոլական գլան,}$$

$$y^2 = 2px \text{ — պարաբոլական գլան;}$$

նման ձևով՝ ox -ին և oy -ին զուգահեռ ծնիչների դեպքում:

II. Կոնական մակերևույթներ. որոնց գագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ առանցքը՝ կոորդինատային առանցքներից մեկն է:

Էլիպսոիդներ, հիպերբոլոիդներ և պարաբոլոիդներ

Էլիպտական կոներ՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, (a = b \text{ դեպքում՝ շրջանային}),$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, (a = c \text{ դեպքում՝ շրջանային}),$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0, (b = c \text{ դեպքում՝ շրջանային}):$$

III Էլիպսոիդներ՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — պտտման էլիպսոիդ,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — եռառանցք էլիպսոիդ:}$$

IV Հիպերբոլոիդներ՝

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — պտտման (շրջանային) միախոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — էլիպտական միախոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — պտտման (շրջանային) երկխոռոչ հիպերբոլոիդ,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — էլիպտական երկխոռոչ հիպերբոլոիդ:}$$

V Պարաբոլոիդներ՝

$$x^2 + y^2 = 2pz - \text{պտտման պարաբոլիդ,}$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z - \text{էլիպտական պարաբոլիդ, } p > 0, q > 0,$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z - \text{հիպերբոլական պարաբոլիդ:}$$

Օրինակ 29. Կազմել գլանի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-0}{3}$ ուղիղին, իսկ ուղղորդագիծը $y^2 = 4x$, $z = 0$ պարաբոլն է:

Լուծում: Ծնիչները տրվում են

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{2} = \frac{Z-z}{3}$$

հավասարումներով, որտեղ (X, Y, Z) -ը գլանի ընթացիկ կետ է, իսկ (x, y, z) -ն ուղղորդագծի կետ է: Կստանանք՝

$$x = X - t, \quad y = Y - 2t, \quad z = Z - 3t:$$

Տեղադրելով այս արժեքները ուղղորդագծերի հավասարումների մեջ, կստանանք՝

$$\begin{cases} (Y - 2t)^2 = 4(X - t), \\ Z - 3t = 0, \end{cases}$$

որտեղից կգտնենք $t = \frac{Z}{3}$, և այն տեղադրելով առաջին հավասարման մեջ կստանանք՝

$$\left(Y - \frac{2}{3}Z\right)^2 = 4\left(X - \frac{1}{3}Z\right)$$

կամ

$$9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X + 12Z = 0:$$

$$\text{Պատ.՝ } 9Y^2 - 12YZ + 4Z^2 - 36X + 12Z = 0:$$

Օրինակ 30. Գտնել կոնի հավասարումը, որի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ուղղորդագիծը՝

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = c: \end{cases}$$

Լուծում: Կոնի այն ծնիչների կանոնական հավասարումները, որոնք անցնում են $O(0; 0; 0)$ գագաթով և ուղղորդագծի $(x; y; z)$ կետով կլինի՝

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}:$$

Հաշվի առնելով, որ $z = c$, վերջին հավասարություններից կունենանք՝

$$x = c \frac{X}{Z}, \quad y = c \frac{Y}{Z}:$$

Տեղադրելով x և y արժեքները ուղղորդագծի առաջին հավասարման մեջ կստանանք՝

$$c^2 \frac{X^2}{Z^2} + c^2 \frac{Y^2}{Z^2} = a^2$$

կամ

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0:$$

Պատ.՝ $\frac{X^2 + Y^2}{a^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0:$

Օրինակ 31. Կազմել մակերևույթի հավասարումը, որը ստացվում է կեղծ առանցքի շուրջ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$ հիպերբոլի պտտումից, եթե այն անցնում է $(2, 3, 5)$ կետով:

Լուծում. Պտտումից առաջանում է միախոռոչ հիպերբոլիդ, որի հավասարումը կլինի՝

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{c^2} = 1:$$

$(2, 3, 5)$ կետը պատկանում է մակերևույթին, հետևաբար

$$\frac{4}{4} - \frac{9}{9} + \frac{25}{c^2} = 1,$$

որտեղից՝ $c = 5$:

Պատ.՝ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1:$

Օրինակ 32. Ապացուցել, որ $z = x^2 - 4y^2$ հիպերբոլական պարաբոլիդի և $x + 2y = 3$ հարթության հատումը ուղիղ գիծ է:

Լուծում. Գրենք հիպերբոլական պարաբոլիդի հավասարումը $z = (x + 2y)(x - 2y)$: Ունենք՝

$$\begin{cases} z = (x + 2y)(x - 2y), \\ x + 2y = 3: \end{cases}$$

Համակարգը համարժեք է

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3(x - 2y) = z \end{cases}$$

համակարգին, որն ուղիղի հավասարում է տարածության մեջ:

Օրինակ 33. Կազմել կոնի հավասարումը, որի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է, առանցքը համընկնում է OX -ի հետ, իսկ ծնորդի և առանցքի կազմած անկյունը $\alpha = \frac{\pi}{3}$ է:

Լուծում. Կոնի հավասարումը, որի առանցքը համընկնում է OX -ի հետ, ունի հետևյալ տեսքը.

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0:$$

Դիցուք $M(x, y, z)$ -ը մակերևույթի կետ է: Ունենք $\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x} = \sqrt{3}$: Երբ $z = y$, ապա $x = \sqrt{\frac{2}{3}}y$: Հետևաբար $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y; y; y\right)$ կետի կոորդինատները տեղադրելով մակերևույթի հավասարման մեջ և կրճատելով y^2 -ով, կստանանք՝ $-\frac{2}{3a^2} + \frac{2}{b^2} = 0$, $b^2 = 3a^2$: Այսպիսով, ստանում ենք $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3a^2} + \frac{z^2}{3a^2} = 0$ կամ $3x^2 = y^2 + z^2$: Պատ.՝ $3x^2 = y^2 + z^2$:

Խնդիրներ

- 6.1. Քտնել այն $M(x; y; z)$ կետերի երկրաչափական տեղը, որոնք գտնվում են M_0 կետից d միավոր հեռավորության վրա.
- $M_0(-1; 2; 3)$,
 - $M_0(2; -3; -5)$,
 - $M_0(3; -4; -5)$,
 - $M_0(-1; -2; 7)$:
- 6.2. Քտնել գնդային մակերևույթի կենտրոնն ու շառավիղը.
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 10z + 22 = 0$,
 - $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8x + 16y - 10z + \frac{1}{2} = 0$,
 - $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y + 37 = 0$,
 - $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 15x + 12y - 21z + 3 = 0$:
- 6.3. Քտնել գնդային մակերևույթի հավասարումն, եթե A և B կետերը նրա տրամագծերից մեկի ծայրակետերն են.
- $A(-1; 3; 0)$, $B(-3; -1; 4)$,
 - $A(3; 4; 7)$, $B(5; 2; -3)$,
 - $A(2; -3; 5)$, $B(4; 1; -3)$,
 - $A(1; -4; 2)$, $B(5; -1; 8)$,
 - $A(-5; 2; -3)$, $B(-1; 0; 4)$:
- 6.4. Քտնել C կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումն, եթե այն շոշափում է հետևյալ հարթությանը.
- $C(4; 1; -5)$, $2x + 3y + 6z - 37 = 0$,
 - $C(3; 6; -4)$, $2x - 2y - z - 10 = 0$,
 - $C(-2; 2; 5)$, $2x + y - 3z - 12 = 0$,
 - $C(1; -4; -7)$, $3x + y + 2z + 9 = 0$:
- 6.5. Քտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} y^2 + z^2 = 9, \\ x = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Oy առանցքի շուրջը:
- 6.6. Քտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ x = 0 \end{cases} \text{ շրջանագծի պտտումից } Oz \text{ առանցքի շուրջը:}$$

6.7. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Ox առանցքի շուրջը:

6.8. Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է $\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ շրջանագծի պտտումից Oy առանցքի շուրջը:

6.9. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a} = \{1; -1; 2\}$ վեկտորին, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 7z^2 + 28 = 0, \\ z + 4 = 0: \end{cases}$

6.10. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $x = y = z$ ուղիղին:

6.11. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + 5y - z + 1 = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\vec{a} = \{3; 1; -2\}$ վեկտորին:

6.12. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 7x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 0, \\ x + 2y = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{5}$ ուղիղին:

6.13. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են OZ առանցքին:

6.14. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են $x = y = z$ ուղիղին:

6.15. Գտնել այն գլանային մակերևույթի հավասարումը, որի ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ իսկ ծնիչները զուգահեռ են OY առանցքին:

6.16. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի զագաթը գտնվում է կոորդինատների սկզբնակետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 1, \\ z = 2: \end{cases}$

- 6.17. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(1; 0; -2)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 4x^2 + 5y^2 = 2z, \\ z = 1: \end{cases}$
- 6.18. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4; 0; 5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, \\ z = 4: \end{cases}$
- 6.19. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4; 0; 5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 + 8z = 0, \\ x + 2z = 0: \end{cases}$
- 6.20. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4; 0; 5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} 2x^2 + 4y + 5z^2 = 0, \\ x - 2y - 1 = 0: \end{cases}$
- 6.21. Գտնել այն կոնական մակերևույթի հավասարումը, որի գագաթը գտնվում է $C(4; 0; 5)$ կետում, իսկ ուղղորդագիծն է՝ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + z^2 - x + 8y - 6z - 3 = 0, \\ z = 5: \end{cases}$
- 6.22. Դիցուք էլիպսը գտնվում է XOY հարթությունում, անցնում է $A(3; 2; 0)$ կետով, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ և մեծ առանցքը հավասար է 10 միավորի: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OX առանցքի շուրջը:
- 6.23. Դիցուք էլիպսը գտնվում է XOZ հարթությունում, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, էքսցենտրիսիտետը՝ $e = \frac{3}{5}$ և փոքր առանցքը հավասար է 8 միավորի: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OZ առանցքի շուրջը:
- 6.24. Դիցուք էլիպսը գտնվում է YOZ հարթությունում, անցնում է $(0; 4; \frac{12}{5})$ կետով, մեծ առանցքը գտնվում է OY առանցքի վրա, կենտրոնը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ, իսկ ֆոկուսներից մեկի հեռավորությունները մեծ առանցքի ծայրակետերից 3 և 7 է: Գտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է այդ էլիպսի պտտումից OY առանցքի շուրջը:
- 6.25. Գտնել էլիպսիդի կենտրոնն ու կիսաառանցքները.
ա) $4x^2 + 16x + 2y^2 + 2y + 5z^2 - 20z - 6 = 0,$

$$p) 5x^2 + y^2 + 9z^2 - 45 = 0,$$

$$q) 2x^2 + 7y^2 + 4z^2 - 28 = 0,$$

$$r) 7x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 42 = 0:$$

6.26. Ի՞նչ մակերևույթ է որոշում հետևյալ հավասարումը.

$$a) 4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0,$$

$$p) 12x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 24 = 0,$$

$$q) 5x^2 - 5y^2 + 9z^2 - 30 = 0:$$

6.27. Չտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$$\begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ հիպերբոլի պտտումից } OY \text{ առանցքի շուրջը:}$$

6.28. Չտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ հիպերբոլի պտտումից } OY \text{ առանցքի շուրջը:}$$

6.29. Չտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$$\begin{cases} \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{12} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ հիպերբոլի պտտումից } OZ \text{ առանցքի շուրջը:}$$

6.30. Չտնել այն մակերևույթի հավասարումը, որն առաջանում է

$$\begin{cases} \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{2} = 1, \\ x = 0 \end{cases} \text{ հիպերբոլի պտտումից } OY \text{ առանցքի շուրջը:}$$

6.31. Ցույց տալ, որ հետևյալ հավասարումով որոշվող մակերևույթը էլիպտական պարաբոլոիդ է.

$$a) 4x^2 + 3y^2 - 24z = 0, \quad p) x^2 + 4z^2 - 8y = 0,$$

$$q) 3z^2 + 5y^2 - 10x = 0, \quad r) x^2 + 3y^2 - 6y - z - 1 = 0,$$

$$b) x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0:$$

6.32. Ապացուցել, որ $z - 3 = 0$ հարթությունը $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$ էլիպտական պարաբոլոիդը հատում է էլիպտով: Չտնել նրա կիսաառանցքները և կենտրոնի կոորդինատները:

6.33. Ի՞նչ մակերևույթ է որոշում հավասարումը՝

$$a) 3x^2 - 4y^2 - 8z = 0,$$

$$p) 12x^2 - 2y - 5y^2 = 0,$$

$$q) 5y^2 - 10x - 4z^2 = 0:$$

6.34. Ապացուցել, որ $z = x^2 - 4y^2$ հիպերբոլական պարաբոլոիդի հատումը $x + 2y = 3$ հարթության հետ ուղիղ գիծ է:

6.35. Ապացուցել, որ $z - 4 = 0$ հարթությունը $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 2z$ հիպերբոլական պարաբոլոիդը հատում է հիպերբոլով: Չտնել նրա կենտրոնի կոորդինատները և կիսաառանցքները:

6.36. Պտտել $9x^2 - 4y^2 = 2z$ հիպերբոլական պարաբոլոիդի և OXY հարթության հատման գծի հավասարումները:

6.37. Պտտել մակերևույթի և ուղիղի հատման կետերը. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$,
 $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$:

Պատասխաններ

6.1. ա) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$,
 բ) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 4$,
 գ) $(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25$,
 դ) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-7)^2 = 16$:

6.2. ա) $(x+1)^2 + y^2 + (z-5)^2 = 4$,
 բ) $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-\frac{5}{2})^2 = 26$,
 գ) $(x+6)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 8$,
 դ) $(x-\frac{5}{2})^2 + (y+2)^2 + (z-\frac{7}{2})^2 = \frac{86}{4}$:

6.3. ա) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$,
 բ) $(x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 27$,
 գ) $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$,
 դ) $(x-3)^2 + (y+\frac{5}{2})^2 + (z-6)^2 = \frac{61}{4}$,
 ե) $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-\frac{1}{2})^2 = \frac{69}{4}$:

6.4. ա) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = (\frac{56}{7})^2$,
 բ) $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$,
 գ) $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = \frac{29^2}{14}$,
 դ) $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+7)^2 = \frac{18}{7}$:

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$:

6.6. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$:

6.7. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$:

6.8. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1$:

6.9. $(2x-z+4)^2 + (2y+z-4)^2 - 28 = 0$:

6.10. $(x-z)^2 + (y-z)^2 + a^2 = 0$:

6.11. $19x - 35y + 11z - 1 = 0$:

6.12. $7(x-2z)^2 + (18z-5x-20y)^2 + 64x - 128z = 0$:

6.13. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$:

6.14. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - 13 = 0$:

$$6.15. \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1:$$

$$6.16. 4x^2 + 4y^2 - 16yz + 19z^2 = 0:$$

$$6.17. 4(3x + z - 1)^2 + 45y^2 = 2(z + 2)^2:$$

$$6.18. (-x + 4z - 1)^2 - 4y^2 = 0:$$

$$6.19. 10x^2 + 9y^2 - 12xz + 12z = 0:$$

$$6.20. 2x^2 + 4xy + 8y^2 + 5z = 0:$$

$$6.21. (x - 2)^2 + 4(y + 1)^2 - 4(z - 3)^2 = 0:$$

$$6.22. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} + \frac{z^2}{\frac{25}{4}} = 1:$$

$$6.23. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1:$$

$$6.24. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1:$$

$$6.25. \text{ա) } C(-2; 3; 2), a = \sqrt{15}, b = \sqrt{30}, c = 2\sqrt{3},$$

$$\text{բ) } C(0; 0; 0), a = 3, b = \sqrt{45}, c = \sqrt{5},$$

$$\text{գ) } C(0; 0; 0), a = \sqrt{14}, b = 2, c = \sqrt{7},$$

$$\text{դ) } C(0; 0; 0), a = \sqrt{6}, b = \sqrt{\frac{21}{2}}, c = \sqrt{14}:$$

$$6.26. \text{ա) } \frac{x^2}{18/4} - \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{3} = 1, \text{ միախտռոջ հիպերբոլոիդ};$$

$$\text{բ) } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{6} = 1, \text{ երկխտռոջ հիպերբոլոիդ};$$

$$\text{գ) } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{10/3} = 1, \text{ միախտռոջ հիպերբոլոիդ};$$

$$6.27. \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} - \frac{x^2}{3} = 1:$$

$$6.28. \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1:$$

$$6.29. \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{12} = 1:$$

$$6.30. \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1:$$

$$6.31. \text{ա) } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 2z, \text{ բ) } \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 2y, \text{ գ) } \frac{z^2}{5/3} + \frac{y^2}{1} = 2x,$$

$$\text{դ) } \frac{x^2}{1/3} + \frac{(y-1)^2}{1/6} = 2(z+4), \text{ ե) } \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{2} = 2z:$$

$$6.32. a = 3\sqrt{6}, b = 2\sqrt{6}, O(0; 0; 3):$$

$$6.33. \text{ա) } \frac{x^2}{4/9} - \frac{y^2}{1} = 2z, \text{ բ) } \frac{x^2}{1/12} - \frac{z^2}{1/5} = 2z, \text{ գ) } \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{5/4} = 2x:$$

$$6.34. \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3(x - 2y) = z: \end{cases}$$

$$6.35. (0; 0; 4), a = 4\sqrt{6}, b = 4\sqrt{2}:$$

6.36. Երկու հատվող ուղիղներ՝ $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 0, \\ z = 0: \end{cases}$

6.37. Ուղիղի բոլոր կետերը պատկանում են մակերևույթին: