ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ
ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ. Ա. Բաղդասարյան

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

I մաս

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ
ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

ԵՐԵՎԱՆ 2007

ՀՏԴ 51 Տպագրվել է Երևանի ճարտարապետության և շինարարության
ԳՄԴ 22.11 պետական համալսարանի գիտական խորհրդի որոշմամբ:
Բ 242

Բ 242 Բաղդասարյան Ռ.Ա. Բարձրագույն մաթեմատիկա, մաս I .Եր.: Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան, 2007թ.-176 էջ:

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան
Ֆ-մ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Խ. Խաչատրյան

Ուսումնական ձեռնարկը ներառում է մաթեմատիկայի այն բաժինների համառոտ շարադրանքը, որոնք վերջին տարիներին ընդգրկվել են տեխնիկական բուհերի ուսումնական ծրագրերում: Այն հագեցված է մատուցվող տեսական նյութը լուսաբանող լուծված խնդիրներով:

Ձեռնարկը օգտակար կարող է լինել նաև ինժեներներին,ասպիրանտներին ու դասախոսներին:

ԳՄԴ 22.11

ԵՊՀ Գրադարան
SU0122059

ISBN 978-99941-77-35-6

© Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան

Առաջաբան

Տեխնիկական բուհերում բարձրագույն մաթեմատիկան բաղկացած է մի շարք մաթեմատիկական առարկաներից՝ վերլուծական երկրաչափություն, գծային հանրահաշիվ, մաթեմատիկական անալիզ, դիֆերենցիալ հավասարումներ, հավանականությունների տեսություն և այլն:

Ներկայումս նշված առարկաներից յուրաքանչյուրի վերաբերյալ գոյություն ունեն հանրահայտ հեղինակների կողմից գրված (հիմնականում ռուսերենով շարադրված) բազմաթիվ հրաշալի դասագրքեր, որոնք միմյանցից տարբերվում են բովանդակությամբ, ծավալով, ներկայացվող նյութի մատուցման բարդության աստիճանով, շարադրման ոճով և մի շարք այլ հատկանիշներով:

Սույն ձեռնարկը հավակնություն չունի փոխարինելու գոյություն ունեցող դասագրքերից որևէ մեկին: Ավելին՝ մաթեմատիկայի մատուցման իմաստով այն նոր խոսք ասելու միտում էլ չունի:

Այդուհանդերձ, անվիճելի է և այն, որ տեխնիկական բուհի ուսանողին հարմար է և օգտակար մաթեմատիկայի՝ ուսումնական ծրագրով նախատեսված ողջ պարտադիր դասընթացն ունենալ մայրենի լեզվով և միասնական ոճով շարադրված մեկ դասագրքում:

Համոզվածությունը, որ նման դասագիրք ունենալը բխում է տեխնիկական բուհի կրթության զարգացման շահերից, հանգեցրեց սույն ձեռնարկի ստեղծմանը:

Ուսումնական ձեռնարկը, որն ընդգրկում է Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարանում և Հայաստանի պետական ճարտարագիտական համալսարանում մաթեմատիկայից կարդացվող դասախոսությունների ավելի ընդարձակ, լրացված և լուծված խնդիրներով հագեցված մանրամասն շարադրանքը բաղկացած է ութսունհինգ պարագրաֆներից, որոնք ներառված են տասնվեց գլուխներում:

Առաջին գլուխը նվիրված է վեկտորական հանրահաշվին և վերլուծական երկրաչափությանը, երկրորդը՝ գծային հանրահաշվին, երրորդից մինչև իններորդ և տասնմեկերորդից մինչև տասնչորսերորդ գլուխները վերաբերում են մաթեմատիկական անալիզին, տասներորդը նվիրված է դիֆերենցիալ հավասարումներին, տասնհինգերորդը՝ հավանականությունների տեսությանը, իսկ տասնվեցերորդը՝ օպերացիոն հաշվին:

Նկատի ունենալով, որ խելացի չէր լինի ձեռնարկում սահմանափակվել միայն այն նյութի համառոտ շարադրանքով, ինչը նախատեսվում է ներառել Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարանի բակալավրիատի մաթեմատիկայի ծրագրում (այդ դեպքում ներկայացվող աշխատանքը պարզապես կվերածվեր դասախոսությունների հասարակ ժողովածույի), նրա որոշ գլուխներում ընդգրկվել է բակալավրիատի մաթեմատիկայի ծրագրի իմաստով ոչ պարտադիր նյութ, որը, չի բացառվում, որ առաջիկայում կնդգրկվի բուհի մագիստրատուրայի մաթեմատիկայի ծրագրում:

Մատուցվող տեսական նյութի մատչելիությունն ապահովելու և այն լուսաբանելու նպատակով աշխատանքը պարունակում է մեծ թվով (մոտ չորս հարյուր) լուծված խնդիրներ, որոնք առանձին դեպքերում լրացնում են տեսական նյութը: Բազմաթիվ լուծված խնդիրների առկայությունը հնարավորություն կտա

ուսանողներին (առանձնապես հեռակա բաժնի սովորողներին) ինքնուրույն ուսումնասիրելու ներկայացվող դասընթացը:

Տեսական այս կամ այն նյութի, ինչպես նաև լուծված որևէ խնդրի վրա կատարվող հղումները որոշակիացնելու նպատակով դասագրքում բերված բոլոր սահմանումները, թեորեմներն ու լուծված խնդիրները համարակալված են:

Հղումները նշված են քառակուսի փակագծերում, ընդ որում նախ նշված է համապատասխան պարագրաֆի համարը, այնուհետև՝ հիշատակվող նյութի անվանման (սահմանում, թեորեմ, հետևանք, լեմ, օրինակ, խնդիր, դիտողություն) առաջին տառն (ս, թ, հ, լ, օ, խ, դ) ու համարը:

Օրինակ՝ [5,հ2], [7,խ3] հղումները համապատասխանաբար նշանակում են՝ կատարված է հղում 5-րդ պարագրաֆի երկրորդ հետևանքի կամ 7-րդ պարագրաֆի երրորդ խնդրի վրա: Կան նաև [27,(4)], [33,2°], [81,III] կառուցվածքն ունեցող հղումներ, որոնք համապատասխանաբար նշանակում են, որ կատարված է հղում 27-րդ պարագրաֆի չորրորդ բանաձևի, 33-րդ պարագրաֆի 2 կետի, 81-րդ պարագրաֆի երրորդ մասի վրա:

Հրատարակվելուց առաջ Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարանի բարձրագույն մաթեմատիկայի, նյութերի դիմադրության և հիդրավլիկայի ամբիոններում գիրքն անցել է լուրջ քննություն, ինչը միանշանակորեն բարձրացրել է աշխատանքի որակը: Այդ կապակցությամբ իմ երախտագիտությունն եմ հայտնում նշված ամբիոնների վարիչներին և պրոֆեսորադասախոսական կազմին:

Ռ. Բաղդասարյան

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ I

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

§1. Վեկտորի գաղափարը: Գծային գործողություններ վեկտորների հետ: Երկու վեկտորների կազմած անկյունը: Վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա:.....7

§2. Գծային տարածության գաղափարը: Վեկտորների գծային կախվածությունը և անկախությունը: Բազիս գծային տարածության մեջ: Գծային տարածության չափը: Որոշիչ և նրա հատկությունները:.....15

§3. Վեկտորների գծային կախվածության և անկախության հարցերը հարթության վրա և տարածության մեջ: Բազիս հարթության վրա և տարածության մեջ: Ուղղանկյան դեկարտյան բազիս, վեկտորի կոորդինատները ուղղանկյուն դեկարտյան բազիսում: Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:.....26

§4. Սկալյար արտադրյալ և նրա հատկությունները: Սկալյար արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով: Վեկտորական արտադրյալ և նրա հատկությունները: Վեկտորական արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով:.....36

§5. Երեք վեկտորների խառն արտադրյալը և նրա երկրաչափական իմաստը: Երեք վեկտորների համահարթության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը խառն արտադրյալի միջոցով: Խառն արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով:.....47

§6. Հարթության վրա ուղիղ գծի հավասարման տարբեր տեսքերը: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը: Երկու ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Կետի հեռավորությունն ուղղից:.....52

§7. Շրջանագծի հավասարումը: Էլիպսի և հիպերբոլի կանոնական հավասարումները: Հիպերբոլի ասիմպտոտները: Պարաբոլի կանոնական հավասարումը:.....66

§8. Տրված կետով անցնող և տրված վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Հարթության ընդհանուր հավասարումը: Երկու հարթություններով կազմված անկյունը: Հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Կետի հեռավորությունը հարթությունից:.....78

§9. Տարածության մեջ տրված ուղիղ գծի պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը: Տարածության մեջ տրված ուղիղների ուղղահայացության և զուգահեռության պայմանները: Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը: Ուղղի և հարթության զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները:.....87

§10. Գնդային մակերևույթի հավասարումը: Գլանային մակերևույթ: Էլիպսոիդ, միախոռոչ և երկխոռոչ հիպերբոլոիդներ, էլիպսական և հիպերբոլական պարաբոլոիդներ, կոնական մակերևույթ և նրանց տեսքերի հետազոտումը զուգահեռ հատույթների միջոցով:.....99

ԳԼՈՒԽ II

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

§11. Մատրիցի գաղափարը: Գործողություններ մատրիցների հետ: Հակադարձ մատրից: Թեորեմ հակադարձ մատրիցի գոյության մասին:.....115

§12. Մատրիցի ռանգը: Թեորեմ մատրիցի ռանգի մասին: Գծային հավասարումների համակարգեր: Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմը:.....123

§13. Գծային հավասարումների համակարգերի լուծումը մատրիցային եղանակով, Կրամերի կանոնով և Գաուսի մեթոդով:.....133

§14. Գծային անհամասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծման կառուցվածքը: Գծային համասեռ հավասարումների համակարգի ոչ զրոյական լուծում ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Գծային համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների հիմնական համակարգ: Գծային համասեռ և անհամասեռ հավասարումների համակարգերի ընդհանուր լուծումների կառուցվածքը գծային համասեռ հավասարումների լուծումների հիմնական համակարգի միջոցով:.....142

§15. Էվկլիդյան տարածության գաղափարը: Կոշի, Բունյակովսկու անհավասարությունը: Օրթոնորմալ բազիս: Թեորեմ էվկլիդյան տարածության մեջ օրթոնորմալ բազիսի գոյության մասին:.....154

§16. Գծային օպերատոր և նրա հիմնական հատկությունները: Գծային օպերատորների և քառակուսի մատրիցների միջև եղած կապը: Գործողություններ գծային օպերատորների հետ:.....160

§17. Տարբեր բազիսներում գծային օպերատորի մատրիցների միջև եղած կապը: Գծային օպերատորների սեփական վեկտորները և սեփական արժեքները:.....169

ԳԼՈՒԽ I

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

§ 1. Վեկտորի գաղափարը: Գծային գործողություններ վեկտորների հետ: Երկու վեկտորների կազմած անկյունը: Վեկտորի պրոյեկցիան առանցքի վրա:

Ֆիզիկայում, մեխանիկայում և կիրառական շատ գիտություններում հանդիպող մեծությունները լինում են երկու տեսակի՝ սկալյար կամ վեկտորական:

Սահմանում 1: *Այն մեծությունը, որը լիովին բնութագրվում է իր թվային արժեքով, կոչվում է սկալյար մեծություն:*

Սկալյար մեծությունների օրինակներ են՝ մարմնի ջերմաստիճանը, նյութի խտությունը, ժամանակը և այլն:

Սահմանում 2: *Այն մեծությունը, որը լիովին բնութագրվում է իր թվային արժեքով և տարածության մեջ ունեցած իր ուղղությամբ, կոչվում է վեկտորական մեծություն:*

Վեկտորական մեծությունների օրինակներ են՝ մարմնի վրա ազդող ուժը, մարմնի արագությունը, նրա արագացումը և այլն:

Սահմանում 3: *Որոշակի երկարություն և որոշակի ուղղություն ունեցող հատվածը կոչվում է վեկտոր:*

Յուրաքանչյուր վեկտորական մեծություն երկրաչափորեն կպատկերենք այն վեկտորի միջոցով, որի երկարությունը հավասար է տրված վեկտորական մեծության արժեքին, իսկ ուղղությունը համընկնում է այդ մեծության ուղղությանը:

A սկիզբ և B վերջ ունեցող վեկտորը կնշանակենք $\overrightarrow{AB}$-ով: Վեկտորը կնշանակենք նաև մեկ փոքրատառով՝ օրինակ $\vec{a}$–ով:

Սահմանում 4: *Կասենք, որ $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված (կիրառված) է A կետում, եթե նրա սկիզբը A կետն է:*

Սահմանում 5: *Եթե վեկտորի սկիզբն ու վերջը համընկնում են, ապա այն կոչվում է զրոյական վեկտոր և նշանակվում է $\vec{0}$ պայմանանշանով:*

Սահմանում 6: *Ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարություն ասելով կհասկանանք AB հատվածի երկարությունը և այն կնշանակենք $|\overrightarrow{AB}|$ պայմանանշանով:*

Նույն ձևով կնշանակենք նաև մեկ փոքրատառի միջոցով տրվող վեկտորի երկարությունը: Օրինակ՝ $|\vec{a}|$ գրառումը նշանակում է $\vec{a}$ վեկտորի երկարություն:

Հասկանալի է, որ զրոյական վեկտորի երկարությունը հավասար է զրոյի և այն չունի որոշակի ուղղություն: *)

Սահմանում 7: *Մեկ երկարություն ունեցող վեկտորը կոչվում է միավոր վեկտոր:*

---

*) Այսուհետ, եթե հատուկ չնշենք հակառակը, ապա վեկտոր ասելով կհասկանանք ոչ զրոյական վեկտոր:

ԳԼՈՒԽ I

Պայմանավորվենք $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունն ունեցող միավոր վեկտորը նշանակել $\vec{a}^{\circ}$-ով:

Սահմանում 8: *Մի քանի վեկտորներ կոչվում են համագիծ, եթե նրանք գտնվում են կա՛մ նույն ուղղի, կա՛մ էլ՝ զուգահեռ ուղիղների վրա*

Այլ խոսքով՝ մի քանի վեկտորներ կոչվում են համագիծ, եթե միևնույն կետում կիրառելիս պատկանում են նույն ուղղին:

Այն փաստը, որ $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն համագիծ վեկտորներ են՝ կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$\vec{a} // \vec{b}$$

Քանի որ զրոյական վեկտորը չունի որոշակի ուղղություն , այդ պատճառով կհամարենք, որ այն համագիծ է ցանկացած վեկտորի:

Սահմանում 9: *Երկու վեկտորներ կոչվում են համուղղված, եթե նրանք ունեն նույն ուղղությունը, և հակուղղված՝ եթե ունեն հակառակ ուղղություններ:*

Այն փաստը, որ $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն համուղղված վեկտորներ են կնշանակենք

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$$

պայմանանշանով, իսկ այն փաստը, որ նրանք հակուղղված վեկտորներ են՝

$$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$$

պայմանանշանով:

Սահմանում 10: *Երկու վեկտորներ կոչվում են տարագիծ, եթե նրանք համագիծ չեն:*

Սահմանում 11: *Միևնույն երկարությունն ունեցող հակուղղված վեկտորները կոչվում են հակադիր վեկտորներ:*

Սահմանում 12: *Մի քանի վեկտորներ կոչվում են համահարթ, եթե նրանք գտնվում են կա՛մ նույն հարթության, կա՛մ էլ՝ զուգահեռ հարթությունների վրա:*

Այլ խոսքով՝ մի քանի վեկտորներ կոչվում են համահարթ, եթե միևնույն կետում կիրառելիս պատկանում են նույն հարթությանը:

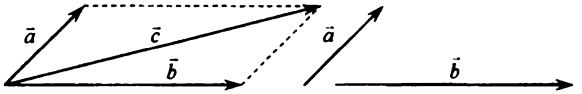
Սահմանում 13: *Երեք վեկտորներ կոչվում են տարահարթ, եթե նրանք համահարթ չեն:*

Սահմանում 14: *Երկու վեկտորներ կոչվում են հավասար, եթե նրանք համուղղված են և ունեն նույն երկարությունը:*

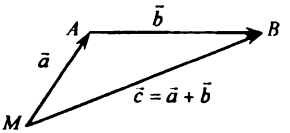
Վեկտորների հավասարության սահմանումից հետևում է, որ տարածության ցանկացած կետում, միակ ձևով կարելի է տեղադրել տրված վեկտորին հավասար վեկտոր:

Այժմ անցնենք վեկտորների հետ կատարվող գծային գործողությունների հետ ծանոթանալուն՝ այդպես անվանելով վեկտորների գումարման, հանման և վեկտորը թվով բազմապատկելու գործողությունները:

Սահմանում 15: *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար կոչվում է այն $\vec{c}$ վեկտորը, որը դուրս է գալիս այդ վեկտորների ընդհանուր սկզբից և համընկնում է նրանց վրա կառուցած զուգահեռագծի անկյունագծին (նկ.1):*



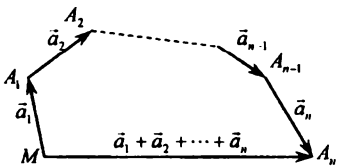
Նկ.1



Նկ.2

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ՝ տարածության մեջ վերցնենք կամայական M կետ և կառուցենք $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$ վեկտորը (նկ.2): Այնուհետև A կետում կառուցենք $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ վեկտորը: $\overrightarrow{MB}$ վեկտորը, որը $\vec{a}$ վեկտորի սկիզբը միացնում է $\vec{b}$ վեկտորի վերջին, կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումար:

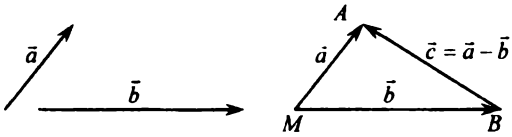
Նույն ձևով սահմանվում է նաև երկուսից ավել թվով վեկտորների գումարը: Այսինքն՝ $\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n}$ ($n>2$) վեկտորների գումարը կառուցելու համար տարածության մեջ վերցնում են կամայական M կետ և այդ կետում կառուցում են $\overrightarrow{MA_1}=\vec{a_1}$ վեկտորը (նկ. 3): Այնուհետև A_1 կետում կառուցում են $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a_2}$ վեկտորը, A_2 կետում՝ $\overrightarrow{A_2A_3}=\vec{a_3}$ վեկտորը և այդպես շարունակ: Ստացված բեկյալի սկիզբն այդ բեկյալի վերջին միացնող վեկտորը կոչվում է $\vec{a_1},\vec{a_2},\ldots,\vec{a_n}$ վեկտորների գումար:



Նկ. 3

Սահմանում 16: *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը մի այնպիսի $\vec{c}$ վեկտոր է, որի և $\vec{b}$ վեկտորի գումարը հավասար է $\vec{a}$ վեկտորին (նկ. 4):*

Երկու վեկտորների գումարի սահմանումից հետևում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը գտնելու համար անհրաժեշտ է տարածության որևէ M կետում կառուցել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին հավասար $\overrightarrow{MA}$ ու $\overrightarrow{MB}$ վեկտորները և այդ վեկտորների A ու B ծայրակետերը միացնել իրար (նկ.4):



Նկ. 4

Քանի որ տեղի ունի

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA},$$

կամ որ նույնն է՝

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$$

վեկտորական հավասարությունը, հետևաբար $\overrightarrow{BA}$-ն կլինի որոնելի $\vec{c}$ վեկտորը:

Այսպիսով՝ մի վեկտորից մյուսը հանելու համար, պետք է այդ վեկտորները կիրառել միևնույն կետում և կառուցել այն վեկտորը, որի սկիզբը հանելի վեկտորի վերջն է, իսկ վերջը՝ նվազելի վեկտորի վերջը:

Սահմանում 17: *$\vec{a}$ վեկտորի և λ թվի արտադրյալը մի վեկտոր է, որի երկարությունը հավասար է $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ արտադրյալին և λ-ի դրական արժեքի դեպքում համուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին, իսկ բացասական արժեքի դեպքում՝ հակուղղված է նրան:*

$\vec{a}$ վեկտորի և λ թվի արտադրյալը կնշանակենք $\lambda\vec{a}$-ով:

Հասկանալի է, որ զրոյի և կամայական վեկտորի արտադրյալը հավասար է զրոյական վեկտորի.

$$0\cdot\vec{a}=\vec{0}:$$

Պարզաբանենք վեկտորը թվով բազմապատկման գործողության երկրաչափական իմաստը.

$\vec{a}$ վեկտորը λ թվով բազմապատկելիս, $\lambda>1$ դեպքում այն λ անգամ երկարում է, իսկ $0<\lambda<1$ դեպքում՝ $1/\lambda$ անգամ կարճանում: Բացասական թվով բազմապատկելիս՝ բացի երկարելուց ($\lambda<-1$ դեպքում) կամ կարճանալուց ($-1<\lambda<0$ դեպքում), դիտարկվող վեկտորը նաև իր ուղղությունը փոխում է հակադիր ուղղության: 1-ով բազմապատկելիս վեկտորը մնում է անփոփոխ, իսկ -1-ով բազմապատկելիս՝ այն համընկնում է իր հակադիր վեկտորի հետ:

Օգտվելով վեկտորը թվով բազմապատկելու սահմանումից՝ $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունն ունեցող միավոր վեկտորի համար կստանանք հետևյալ կարևոր ներկայացումը՝

$$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}: \qquad (1)$$

Դժվար չէ համոզվել, որ վեկտորների համար սահմանված գծային գործողություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,

3°. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

4°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,

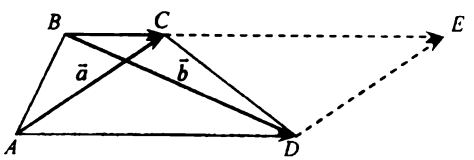
5° $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,

6°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$,

7° $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$,

8°. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$:

Օրինակ 1: $ABCD$ սեղանի AD և BC հիմքերի երկարությունները հարաբերում են ինչպես 3:2:



նկ.5

Գտնել BC վեկտորը, եթե $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $BD=\vec{b}$ (նկ.5):

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար կառուցենք $ADEC$ զուգահեռագիծը: Նկատելով, որ սեղանի BC հիմքի երկարությունը հավասար է նրա հիմքերի երկարությունների գումարի $\frac{2}{5}$ մասին՝ BC

վեկտորի համար կունենանք

$$\overrightarrow{BC}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{BE}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right)=\frac{2}{5}\left(\vec{b}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2}{5}\left(\vec{b}+\vec{a}\right)=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}:$$

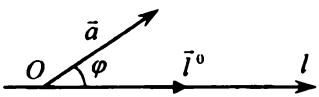
Այժմ ենթադրենք $\vec{a}$ -ն ու $\vec{b}$ -ն տարածության միևնույն կետում կիրառված կամայական վեկտորներ են:

Սահմանում 18: *Միևնույն կետում կիրառված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք այն ամենափոքր անկյունը $(0\le\varphi\le\pi)$, որով անհրաժեշտ է պտտել դիտարկվող վեկտորներից որևէ մեկը, մինչև այդ վեկտորի ուղղությունը համընկնի մյուսի ուղղության հետ*

Սահմանում 19: *Տարբեր կետերում կիրառված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք որևէ կետում կիրառված և այդ վեկտորներին հավասար վեկտորների կազմած անկյունը:*

Սահմանում 20: *Ուղիղը կոչվում է առանցք, եթե նրա վրա երկու հնարավոր ծևերից որևէ մեկով ընտրված է դրական ուղղություն:*

Սահմանում 21: *$\vec{a}$ վեկտորի և l առանցքի կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք $\vec{a}$ և $\vec{l}^0$ վեկտորների կազմած անկյունը (նկ. 6), որտեղ $\vec{l}^0$ -ն l առանցքի դրական ուղղությունն ունեցող միավոր վեկտորն է:*



նկ.6

Սահմանում 22: *Կասենք , որ l առանցքը կոորդինատական առանցք է, եթե նրա վրա նշված է որևէ O կետ , որը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ, ինչպես նաև ընտրված է չափման միավոր:*

Կոորդինատների սկզբնակետը կոորդինատական առանցքը*) բաժանում է երկու մասի՝ դրական կիսաառանցքի և բացասական կիսաառանցքի:

Սահմանում 23: *l առանցքի վրա գտնվող A կետի կոորդինատ ասելով կհասկանանք OA հատվածի երկարությունը , եթե այդ կետը գտնվում է դրական կիսաառանցքի վրա, և OA հատվածի երկարությունը՝ մինուս նշանով, եթե այն գտնվում է բացասական կիսաառանցքի վրա*

Այսպիսով, դրական կիսաառանցքի վրա գտնվող կետերի կոորդինատները դրական են, իսկ բացասական կիսաառանցքի վրա գտնվող կետերի կոորդինատները՝ բացասական:

Նշենք, որ կոորդինատների սկզբնակետի կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Այժմ ենթադրենք $\vec{l}$ -ը կոորդինատական առանցք է, իսկ $\overrightarrow{A_1A_2}$ -ը՝ որևէ վեկտոր: $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա սահմանելու համար A_1, A_2 կետերով տանենք դիտարկվող առանցքին ուղղահայաց հարթություններ

*) Այսուհետև առանցք ասելով կհասկանանք կոորդինատական առանցք:

(նկ. 7), այդ հարթությունների և l առանցքի հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք B_1-ով և B_2-ով, իսկ B_1 և B_2 կետերի կոորդինատները տրված առանցքի վրա՝ համապատասխանաբար x_1-ով և x_2-ով:

Սահմանում 24: *A կետից l առանցքին տարած ուղղահայացի հիմքը կոչվում է այդ կետի պրոյեկցիա l առանցքի վրա:*

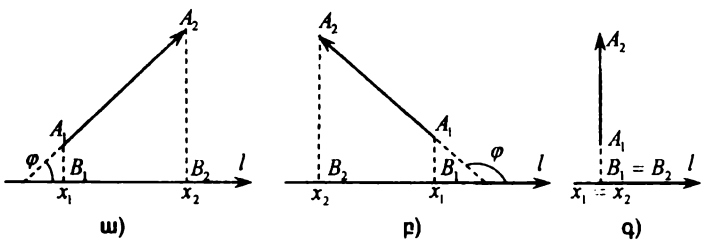
Սահմանում 25: *l առանցքի վրա A_2 և A_1 կետերի պրոյեկցիաների տարբերությունը կոչվում է $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորի պրոյեկցիա l առանցքի վրա և նշանակվում է $ՊՐ_l\overrightarrow{A_1A_2}$ պայմանանշանով:*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման՝ $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա արտահայտվում է հետևյալ հավասարությամբ՝

$$ՊՐ_l\overrightarrow{A_1A_2} = x_2 - x_1, \qquad (2)$$

որտեղ x_2 – ը և x_1 – ը համապատասխանաբար A_2 և A_1 կետերի պրոյեկցիաների կոորդինատներն են l առանցքի վրա:

Պարզ է, որ եթե $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորը l առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն (նկ. 7ա), ապա $x_2 > x_1$, հետևաբար դիտարկվող վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա դրական է: Իսկ եթե $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորը l առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն (նկ. 7բ), ապա $x_2 < x_1$, հետևաբար տրված վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա բացասական է: Վերջապես, եթե $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորն ուղղահայաց է l առանցքին, ապա $x_2 = x_1$, հետևաբար դիտարկվող վեկտորի պրոյեկցիան նշված առանցքի վրա հավասար է զրոյի (նկ. 7գ):



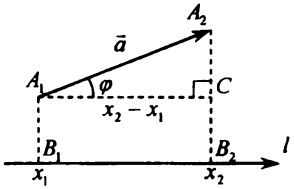
նկ.7

Ապացուցենք հետևյալ պարզունակ թեորեմները՝

Թեորեմ 1: *$\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիան l առանցքի վրա հավասար է տրված վեկտորի երկարության և այդ վեկտորի ու l առանցքի կազմած անկյան կոսինուսի արտադրյալին.*

$$ՊՐ_l\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cos\varphi, \qquad (3)$$

որտեղ φ – ն $\vec{a}$ վեկտորի ու l առանցքի կազմած անկյունն է:



Նկ.8

Ապացույց: Դիցուք $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորը l առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն (նկ.8): A_1 և A_2 կետերի պրոյեկցիաները l առանցքի վրա համապատասխանաբար նշանակենք B_1 -ով և B_2 -ով, իսկ B_1 և B_2 կետերի կոորդինատները՝ համապատասխանաբար x_1 -ով և x_2 -ով:

Այնուհետև A_1 կետով տանենք l առանցքին զուգահեռ A_1C ուղիղը, որտեղ C -ն այդ ուղղի և A_2B_2 ուղղի հատման կետն է: A_1A_2C ուղղանկյուն եռանկյունից կստանանք

$$A_1C = \left|\vec{a}\right| \cos\varphi : \tag{4}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $A_1CB_2B_1$ քառանկյունը ուղղանկյուն է, ուստի

$$A_1C = x_2 - x_1 : \tag{5}$$

(2) հավասարության հաշվառումով (4) և (5) հավասարություններից կստանանք պահանջվող բանաձևը:

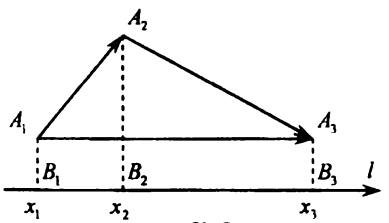
Նշենք, որ նույն ձևով կարելի է թեորեմն ապացուցել նաև այն դեպքում, երբ $\vec{a}$ վեկտորը l առանցքի հետ կազմում է բութ անկյուն:

Իպա)*

Հետևանք 1: *Հավասար վեկտորները միևնույն առանցքի վրա ունեն հավասար պրոյեկցիաներ:*

Թեորեմ 2: *Վերջավոր թվով վեկտորների գումարի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է տրված վեկտորների պրոյեկցիաների գումարին:*

Ապացույց: Պարզության համար թեորեմն ապացուցենք երկու վեկտորների դեպքում (նկ.9):



Նկ.9

Դիցուք

$$\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} \tag{6}$$

A_1, A_2 և A_3 կետերի պրոյեկցիաների կոորդինատները l առանցքի վրա նշանակելով համապասխանաբար x_1 -ով, x_2 -ով և x_3 -ով՝ կունենանք

$$\text{ՊՐ}_l \overrightarrow{A_1A_2} = x_2 - x_1, \quad \text{ՊՐ}_l \overrightarrow{A_2A_3} = x_3 - x_2,$$

$$\text{ՊՐ}_l \overrightarrow{A_1A_3} = x_3 - x_1$$

Մյուս կողմից, $x_3 - x_1$ տարբերությունը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$x_3 - x_1 = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1),$$

---

*) Թեորեմների ապացույցները կավարտենք իպա հապավումով, որը նշանակում է. ինչ պահանջվում էր ապացուցել:

կստանանք

$$\text{ՊՐ}_{e}\overrightarrow{A_1A_1} = \text{ՊՐ}_{e}\overrightarrow{A_2A_3} + \text{ՊՐ}_{e}\overrightarrow{A_1A_2} \qquad (7)$$

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է (6) առնչության հաշվառումով (7) հավասարությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\text{ՊՐ}_{e}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3}\right) = \text{ՊՐ}_{e}\overrightarrow{A_1A_2} + \text{ՊՐ}_{e}\overrightarrow{A_2A_3} \qquad (7')$$

Իսպա

Թեորեմ 3: *$\vec{a}$ վեկտորի և λ իրական թվի արտադրյալի պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է այդ առանցքի վրա $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիայի և λ թվի արտադրյալին.*

$$\text{ՊՐ}_{e}\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda\,\text{ՊՐ}_{e}\vec{a} \qquad (8)$$

Ապացույց: Դիցուք $\vec{a}$ վեկտորը l առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն և λ-ն որևէ դրական թիվ է:

Համաձայն վեկտորի և թվի արտադրյալի սահմանման՝ $\lambda\vec{a}$ վեկտորն ունի $\vec{a}$ վեկտորի ուղղությունը և հետևաբար այն նույնպես l առանցքի հետ կազմում է φ անկյուն: Այնուհետև օգտվելով (3) բանաձևից՝ կունենանք

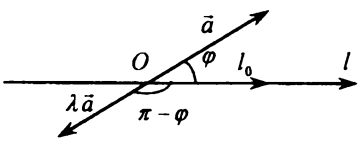
$$\text{ՊՐ}_{e}\left(\lambda\vec{a}\right) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos\varphi = |\lambda|\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\,\text{ՊՐ}_{e}\vec{a}:$$

Այժմ ենթադրենք λ-ն բացասական թիվ է:

Ինչպես գիտենք, քննարկվող դեպքում $\lambda\vec{a}$ վեկտորը հակուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին և հետևաբար այն l առանցքի հետ կազմում է $\pi-\varphi$ անկյուն (նկ.10): Նորից օգտվելով (3) բանաձևից՝ կստանանք

$$\text{ՊՐ}e\left(\lambda\vec{a}\right) = \left|\lambda\vec{a}\right|\cos(\pi-\varphi) = |\lambda|\left|\vec{a}\right|(-\cos\varphi) =$$

$$= \lambda\left|\vec{a}\right|\cos\varphi = \lambda\text{ՊՐ}_{e}\vec{a}:$$



նկ.10

Իսպա

Հետևանք 2: *Երկու վեկտորների տարբերության պրոյեկցիան որևէ առանցքի վրա հավասար է նույն առանցքի վրա այդ վեկտորների պրոյեկցիաների տարբերությանը.*

$$\text{ՊՐ}_{e}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \text{ՊՐ}_{e}\vec{a} - \text{ՊՐ}_{e}\vec{b} \qquad (9)$$

Ապացույց: Իրոք օգտվելով (7') և (8) բանաձևերից՝ կստանանք

$$\text{ՊՐ}_{e}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \text{ՊՐ}_{e}\left[\vec{a}+(-\vec{b})\right] = \text{ՊՐ}_{e}\vec{a} + \text{ՊՐ}_{e}\left(-\vec{b}\right) = \text{ՊՐ}_{e}\vec{a} - \text{ՊՐ}_{e}\vec{b}:$$

Իսպա

§2. Գծային տարածության գաղափարը: Վեկտորների գծային կախվածությունը և անկախությունը: Բազիս գծային տարածության մեջ: Գծային տարածության չափը: Որոշիչ և նրա հատկությունները:

Ինչպես գիտենք, երկրաչափական վեկտորների հետ կատարվող գծային գործողություններն օժտված են տեղափոխելիության, զուգորդելիության և բաշխական հատկություններով [1,1°-8°]: Գոյություն ունեն բազմությունների այլ օրինակներ, որոնց տարրերի հետ կատարվող գծային գործողությունները նույնպես օժտված են վերը թվարկած հատկություններով: Այդ բազմությունների ընդհանուր հանրահաշվական հատկություններն ուսումնասիրելու նպատակով ներմուծենք գծային տարածության գաղափարը:

Սահմանում 1: $x, y, z, \ldots$ *տարրերի L բազմությունը կոչվում է գծային տարածություն, եթե*

ա) այդ բազմության ցանկացած x և y տարրերին միակ ձևով համապատասխանում է մի երրորդ տարր, որը կոչվում է այդ տարրերի գումար (և նշանակվում է $x+y$ պայմանանշանով),

բ) L բազմության ցանկացած x տարրին և ցանկացած λ իրական թվին միակ ձևով համապատասխանում է λx տարր, որը կոչվում է այդ x տարրի և λ թվի արտադրյալ,

գ) նշված գծային գործողությունները բավարարում են հետևյալ ութ պայմաններին՝

1) L բազմության ցանկացած երկու տարրերի գումարը տեղափոխելի է.

$$x+y=y+x,$$

2) L բազմության ցանկացած x, y և z տարրերի գումարը զուգորդելի է.

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$

*3) L բազմության մեջ գոյություն ունի զրոյական տարր, այսինքն այնպիսի տարր, որի և L բազմության ցանկացած x տարրի գումարը հավասար է այդ տարրին. *)*

$$x+\Theta=x,$$

4) L բազմության ցանկացած x տարրի համար գոյություն ունի այնպիսի $-x$ տարր, որ տեղի ունի

$$x+(-x)=\Theta$$

հավասարությունը,

L բազմության ցանկացած x, y տարրերի և ցանկացած α, β իրական թվերի համար տեղի ունեն

$$5)\ 1\cdot x=x,\quad 6)\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\quad 7)\ \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\quad 8)\ \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$

հավասարությունները:

Նշենք, որ տարբեր գծային տարածություններում, գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները կարող են տարբեր կերպ սահմանվել: Կարևորն այն է, որ այդ գործողությունները բավարարեն նշված ութ պայմաններին:

---

*) Գծային տարածության զրոյական տարրը կնշանակենք Θ պայմանանշանով:

ԳԼՈՒԽ I

Օրինակ 1: Քանի որ երկրաչափական վեկտորների հետ կատարվող գծային գործողությունները բավարարում են վերևում թվարկած ութ պայմաններին, հետևաբար բոլոր երկրաչափական վեկտորների բազմությունը գծային տարածություն է:

Օրինակ 2: Դիտարկենք իրական թվերից կազմված բոլոր հնարավոր n – յակների բազմությունը:

Դիցուք x ը և y – ը այդ բազմության կամայական երկու n – յակներ են.

$$x=(x_1,x_2,...,x_n);\ y=(y_1,y_2,...y_n):$$

x և y n – յակների գումարը և իրական թվի ու x n – յակի արտադրյալը համապատասխանաբար սահմանելով հետևյալ կերպ՝

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n);\ \lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n), \qquad (ա)$$

կհամոզվենք, որ դիտարկվող բազմությունը գծային տարածություն է:

Բոլոր հնարավոր n – յակների տարածությունը կնշանակենք L_n – ով:

Նշենք, որ L գծային տարածության տարրերին կանվանենք նաև վեկտորներ, իսկ այդ տարածությանը՝ վեկտորական գծային տարածություն:

Սահմանում 2: *Կասենք, որ L գծային տարածության x_n վեկտորը ներկայացվում է այդ տարածության $x_1,x_2,...,x_{n-1}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ (կոմբինացիայով), եթե գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{n-1}$ իրական թվեր, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$x_n=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_{n-1}x_{n-1}: \qquad (1)$$

Սահմանում 3: *L գծային տարածության $x_1,x_2,...,x_n$ վեկտորները կոչվում են գծորեն կախյալ, եթե գոյություն ունեն $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n=\Theta: \qquad (2)$$

Սահմանում 4: *Եթե (2) հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$, ապա $x_1,x_2,...,x_n$ վեկտորները կոչվում են գծորեն անկախ:*

Օրինակ 3: L տարածության $x,-x,x_3,...x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, որովհետև տեղի ունի

$$x-x+0\cdot x_3+...+0\cdot x_n=\Theta$$

հավասարությունը:

Օրինակ 4: L տարածության $\Theta,x_2,x_3,...,x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, որովհետև տեղի ունի

$$1\cdot\Theta+0\cdot x_2+...+0\cdot x_n=\Theta$$

հավասարությունը:

Օրինակ 5: Եթե L գծային տարածության x_1,x_2 վեկտորների մի մասը գծո-

րեն կախյալ են, ապա այդ վեկտորները ևս գծորեն կախյալ են:

Լուծում: Ապացույցի ընդհանրությունը չենք խախտի, եթե ենթադրենք, որ գծորեն կախյալ են տրված վեկտորների առաջին $k(k<n)$ վեկտորները: Այդ դեպքում, համաձայն սահմանման՝ գոյություն ունեն այնպիսի $c_1,c_2,\dots,c_k$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից և տեղի ունի

$$c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k=\Theta \qquad (բ)$$

հավասարությունը:

Ստացված հավասարությունից հետևում է, որ տեղի ունի նաև

$$c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_1x_k+0\cdot x_{k+1}+\dots+0x_n=\Theta \qquad (գ)$$

հավասարությունը:

Կրկին օգտվելով սահմանում 3-ից՝ կստանանք, որ դիտարկվող վեկտորները գծորեն կախյալ են:

Օգտվելով հակասող ընդունելության մեթոդից՝ հեշտությամբ կհամոզվենք, որ եթե L գծային տարածության $x_1,x_2,\dots,x_n$ վեկտորների խումբը գծորեն անկախ է, ապա այդ վեկտորների յուրաքանչյուր ենթախումբ նույնպես գծորեն անկախ է:

Օրինակ 6: Օրինակ 2-ում դիտարկված n – յակների գծային տարածության հետևյալ վեկտորները՝

$$e_1=(1,0,\dots,0),\quad e_2=(0,1,\dots,0),\quad e_n=(0,0,\dots 1) \qquad (դ)$$

գծորեն անկախ են, որովհետև

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n=\Theta \qquad (ե)$$

հավասարությունից հետևում է, որ $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$:

Իրոք, օգտվելով (ա) հավասարություններից՝ կստանանք

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n=(\alpha_1,0,\dots 0)+(0,\alpha_2,\dots;0)+(0,0,\dots\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n):$$

Հետևաբար (ե) հավասարությունն ընդունում է

$$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\Theta$$

տեսքը, որտեղից էլ ստանում ենք, որ $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Որպեսզի L գծային տարածության $x_1,x_2,\dots,x_n$ վեկտորները լինեն գծորեն կախյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվի մնացած վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք L գծային տարածության $x_1,x_2,\dots,x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, ինչը նշանակում է, որ այդ վեկտորները կապված են (2) առնչությամբ, որտեղ, օրինակ՝ $\alpha_n\neq 0$:

Նշված առնչության երկու կողմերը բաժանելով α_n – ի վրա և կատարելով հետևյալ նշանակումները՝

$$\lambda_i=-\frac{\alpha_i}{\alpha_n}(i=1,2\dots,n-1),$$

$$x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1},$$

այսինքն կստանանք, որ x_n վեկտորը ներկայացվում է $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք՝ L գծային տարածության x_n վեկտորը ներկայացված է այդ տարածության $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով, այսինքն՝ ենթադրենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ թվեր, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Տեղափոխելով x_n վեկտորը (1) հավասարության աջ մաս՝ կունենանք

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - 1 \cdot x_n = \Theta : \qquad (1')$$

Քանի որ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}, -1$ թվերի մեջ կա զրոյից տարբեր թիվ, հետևաբար ստացված առնչությունը նշանակում է, որ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են:

Իպա

Սահմանում 5: *L գծային տարածության գծորեն անկախ վեկտորների*

$$e_1, e_2, \ldots e_n \qquad (3)$$

համակարգը կոչվում է այդ տարածության առավելագույն գծորեն անկախ համակարգ, եթե նշված համակարգին դիտարկվող տարածության ցանկացած x վեկտոր ավելացնելիս ստացվում է վեկտորների գծորեն կախյալ համակարգ.

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, x : \qquad (4)$$

Քանի որ (4) համակարգը վեկտորների գծորեն կախյալ համակարգ է, հետևաբար գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha x = \Theta : \qquad (5)$$

Ստացված հավասարության մեջ α -ն չի կարող զրո լինել, որովհետև այդ դեպքում (5) հավասարությունից կստանանք, որ վեկտորների (3) համակարգը գծորեն կախյալ համակարգ է՝ ինչը հակասում է ենթադրությանը:

Հետևաբար (5) հավասարությունից կարելի է x-ը արտահայտել (3) համակարգի վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:

Վերոգրյալ դատողությունները հանգեցնում են հետևյալ պնդմանը՝

Թեորեմ 2: *L գծային տարածության գծորեն անկախ վեկտորների (3) համակարգն այն և միայն այն ժամանակ կլինի վեկտորների առավելագույն գծորեն անկախ համակարգ, երբ դիտարկվող տարածության յուրաքանչյուր վեկտոր ներկայացվի այդ համակարգի վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:*

Սահմանում 6: *Գծային տարածությունը կոչվում է վերջավորչափանի տարածություն, եթե այն պարունակում է վերջավոր թվով վեկտորներից*

կազմված առավելագույն գծորեն անկախ համակարգ:

Սահմանում 7: *Գծային տարածության առավելագույն գծորեն անկախ համակարգը կոչվում է այդ տարածության բազիս:*

Հասկանալի է, որ վերջավորչափանի գծային տարածությունը կարող է ունենալ իրարից տարբեր բազմաթիվ բազիսներ:

Բնականաբար հարց է ծագում. *գծային տարածությունը կարո՞ղ է արդյոք ունենալ տարբեր քանակությամբ վեկտորներից կազմված բազիսներ:*

Պարզվում է, որ վերջավորչափանի գծային տարածության բոլոր բազիսները կազմված են միևնույն թվով վեկտորներից:

Սահմանում 8: *Գծային տարածության որևէ բազիսի վեկտորների քանակը կոչվում է այդ տարածության չափ:*

Օրինակ 7: Գտնել օրինակ 2-ում դիտարկված L_n տարածության չափը:

Լուծում: Օրինակ 6-ում համոզվեցինք, որ (դ) համակարգը վեկտորների գծորեն անկախ համակարգ է: Մյուս կողմից, L_n տարածության ցանկացած $x=(x_1,x_2,...x_n)$ վեկտոր հանդիսանում է (դ) համակարգի վեկտորների գծային զուգակցությունը.

$$(x_1,x_2,...,x_n)=x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n:$$

Հինգերորդ և չորերորդ սահմանումների համաձայն՝ վերոգրյալը նշանակում է, որ (դ) համակարգը L_n տարածության բազիս է, որտեղից էլ հետևում է, որ այդ տարածության չափը հավասար է n – ի:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Վերջավորչափանի գծային տարածության յուրաքանչյուր վեկտոր կարելի է միակ ձևով ներկայացնել այդ տարածության բազիսային վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:*

Ապացույց: Դիցուք վեկտորների (3) համակարգը n – չափանի գծային տարածության որևէ բազիս է, իսկ x – ը՝ դիտարկվող տարածության որևէ վեկտոր:

Ինչպես տեսանք, (3) համակարգի առավելագույն գծորեն անկախ լինելուց հետևում է, որ x վեկտորը գծորեն է արտահայտվում այդ համակարգի վեկտորների միջոցով.

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+...+\lambda_ne_n: \qquad (6)$$

Ցույց տալու համար, որ x վեկտորի (6) ներկայացումը միակն է, ենթադրենք գոյություն ունի նրա մեկ այլ ներկայացում.

$$x=\beta_1e_1+\beta_2e_2+...+\beta_ne_n: \qquad (6')$$

(6) հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով (6) հավասարությունը՝ կստանանք

$$(\beta_1-\lambda_1)e_1+(\beta_2-\lambda_2)e_2+...+(\beta_n-\lambda_n)e_n=\Theta: \qquad (7)$$

Քանի որ (3) համակարգը գծորեն անկախ վեկտորների համակարգ է, հետևաբար (7) հավասարությունից կունենանք

$$\beta_1-\lambda_1=\beta_2-\lambda_2=...=\beta_n-\lambda_n=0,$$

որտեղից էլ կստանանք, որ

$$\beta_1 = \lambda_1, \beta_2 = \lambda_2, \ldots, \beta_n = \lambda_n :$$

Իպա

Սահմանում 9: *n – չափանի գծային տարածության x վեկտորի (6) վերլուծության մեջ մասնակցող $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ թվերը կոչվում են այդ վեկտորի կոորդինատներ դիտարկվող տարածության (3) բազիսում:*

Այժմ ծանոթանանք մաթեմատիկայի կարևորագույն հասկացություններից մեկի՝ որոշիչի (դետերմինանտ) և նրա հատկությունների հետ:

Սահմանում 10: *Իրական թվերից կազմված հետևյալ աղյուսակը՝*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

կոչվում է (n տողերով և n սյուներով) n – րդ կարգի քառակուսի մատրից և սովորաբար նշանակվում է մեկ տառով՝ A – ով, B – ով և այլն:

Ինչպես տեսնում ենք A մատրիցի, այսպես կոչված, տարրերն ունեն երկու ինդեքս: Այդ ինդեքսները ցույց են տալիս տրված մատրիցի այն տողի և այն սյան համարները (առաջինը ցույց է տալիս տողի համարը, իսկ երկրորդը՝ սյան), որոնց հատման տեղում գտնվում է նշված տարրը:

Սահմանում 11: *Քառակուսի մատրիցի վերին ձախ անկյունից դեպի նրա ստորին աջ անկյունը գնացող անկյունագիծը կոչվում է այդ մատրիցի գլխավոր անկյունագիծ:*

Այլ խոսքով՝ քառակուսի մատրիցի $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ տարրերը (նշված հերթականությամբ) կազմում են այդ մատրիցի գլխավոր անկյունագիծը:

Սահմանում 12: *Քառակուսի մատրիցի վերին աջ անկյունից դեպի նրա ստորին ձախ անկյունը գնացող անկյունագիծը կոչվում է այդ մատրիցի երկրորդ անկյունագիծ:*

Սահմանում 13: *$n = 2$ դեպքում (8) մատրիցից ստացվող երկրորդ կարգի քառակուսի մատրիցի որոշիչ կոչվում է հետևյալ թիվը՝*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} :$$

Սահմանում 14: *Երկրորդ (n – րդ, $n > 2$, տե՛ս սահմանում 18) կարգի մատրիցի որոշիչին կանվանենք երկրորդ (n – րդ) կարգի որոշիչ և կնշանակենք հետևյալ պայմանանշաններից որևէ մեկով՝*

$$\det A, \quad |A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \right) : \tag{9}$$

Այսպիսով, համաձայն 13-րդ սահմանման՝ ունենք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{10}$$

Ինչպես տեսնում ենք, երկրորդ կարգի որոշիչը հավասար է իր գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալի և երկրորդ անկյունագծի տարրերի արտադրյալի տարբերությանը:

Օրինակ 8: Հաշվել հետևյալ որոշիչը՝

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Լուծում: Օգտվելով (10) բանաձևից՝ կստանանք

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 7 = 8:$$

Սահմանում 15: *Երրորդ կարգի քառակուսի մատրիցի* $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ *տարրի մինոր կոչվում է այդ տարրը պարունակող տողի և սյան ջնջումից հետո մնացած տարրերից կազմված երկրորդ կարգի որոշիչը:*

Սահմանում 16: *Երրորդ կարգի քառակուսի մատրիցի* $a_{ij}(i, j = 1,2,3)$ *տարրի հանրահաշվական լրացում կոչվում է այդ տարրի մինորը՝ վերցրած* -1^{i+j} *նշանով:*

a_{ij} տարրի մինորը և հանրահաշվական լրացումը՝ համապատասխանաբար նշանակելով M_{ij} -ով և A_{ij} -ով, համաձայն 15-րդ և 16-րդ սահմանումների՝ կունենանք

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (i, j = 1,2,3): \tag{11}$$

Մատրիցի տողերին և սյուներին կանվանենք մատրիցի շարքեր:

Սահմանում 17: *Երրորդ կարգի քառակուսի մատրիցի որոշիչ կամ պարզապես երրորդ կարգի որոշիչ կոչվում է այդ մատրիցի որևէ շարքի տարրերի և այդ տարրերի համապատասխան հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը:*

Օգտվելով բերված սահմանումից՝ կստանանք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}: \tag{12}$$

(10) բանաձևի օգնությամբ հաշվելով ստացված երկրորդ կարգի որոշիչները՝ կունենանք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \tag{13}$$

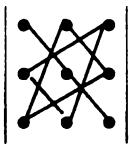
Ստացված բանաձևը կոչվում է երրորդ կարգի որոշիչի հաշվման եռանկյան կանոն:

Այսպիսով, երրորդ կարգի որոշիչը բաղկացած է վեց գումարելիներից, որոնցից երեքը այդ գումարի մեջ մասնակցում են պլյուս նշանով, իսկ մյուս երեքը մինուս նշանով: Պլյուս նշանով մասնակցող գումարելիներից մեկը այդ

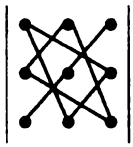
որոշիչի գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալն է, իսկ մյուս երկու գումարելիներից յուրաքանչյուրը՝ այդ անկյունագծին զուգահեռ ուղղի վրա գտնվող տարրերի և որոշիչի հակադիր անկյունում գտնվող տարրի արտադրյալը:

Որոշիչի արտահայտության մեջ մինուս նշանով մասնակցող գումարելիները կազմվում են նույն եղանակով, սակայն գլխավոր անկյունագծի փոխարեն վերցվում է երկրորդ անկյունագիծը:

Երրորդ կարգի որոշիչի հաշվումը (13) բանաձևի օգնությամբ պատկերվում է հետևյալ կերպ՝



ա)



բ)

Նկ.11

11ա) նկարում ցույց է տրված դիտարկվող որոշիչի պլյուս նշանով անդամները կազմելու և հաշվելու սխեման, իսկ 11բ) նկարում՝ նույն որոշիչի մինուս նշանով անդամները կազմելու և հաշվելու սխեման:

Օրինակ 9: Հաշվել հետևյալ որոշիչը՝

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Լուծում: Օգտվելով երրորդ կարգի որոշիչի հաշվման եռանկյան կանոնից՝ կստանանք

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1)+3\cdot 2\cdot 1+0\cdot 0\cdot 0-3\cdot 1\cdot 0-0\cdot 2\cdot(-1)-0\cdot 1\cdot 1=5:$$

Երրորդ կարգի մատրիցի տարրերի մինորների հանրահաշվական լրացումների և այդ մատրիցի որոշիչի սահմանումները տարածելով n-րդ ($n \geq 4$) կարգի մատրիցների վրա՝ կստանանք n-րդ կարգի որոշիչի հետևյալ ընդհանուր սահմանումը՝

Սահմանում 18: *n-րդ կարգի մատրիցի որոշիչ կամ պարզապես n-րդ կարգի որոշիչ կոչվում է այդ մատրիցի որևէ շարքի տարրերի և այդ տարրերի համապատասխան հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը:*

Օգտվելով բերված սահմանումից՝ կունենանք

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\dots,n): \tag{14}$$

(14) բանաձևի միջոցով n – րդ կարգի որոշիչ հաշվելիս կասենք, որ այն վերածվում է ըստ իր i – րդ տողի տարրերի:

Հասկանալի է, որ n – րդ կարգի որոշիչը կարելի է հաշվել նաև վերածելով այն ըստ իր j – րդ $(j = 1,2,...,n)$ սյան տարրերի:

Ինչպես տեսնում ենք, n – րդ $(n \geq 3)$ կարգի որոշիչի հաշվումը, ընդհանուր դեպքում, բերվում է n հատ $(n-1)$ – րդ կարգի որոշիչների հաշվմանը:

Պարզ է, որ եթե որոշիչը վերածվում է ըստ այնպիսի շարքի տարրերի, որի որոշ տարրեր հավասար են զրոյի, ապա այդ տարրերի համապատասխան հանրահաշվական լրացումները հաշվելու անհրաժեշտությունը չկա: Նկատի ունենալով վերը ասվածը, նպատակահարմար է որոշիչը վերածել ըստ այն շարքի տարրերի, որը հնարավորինս շատ զրոներ է պարունակում: Առաջ անցնելով նշենք, որ որոշիչի 9-րդ հատկությունը հնարավորություն է տալիս որոշիչի ցանկացած շարքի բոլոր տարրերը, բացի մեկից, դարձնել զրոներ: Հետևաբար, n – րդ կարգի որոշիչի հաշվումը կարելի է հանգեցնել $(n-1)$ – րդ կարգի միայն մեկ որոշիչի հաշվման:

Որոշիչի հատկությունների հետ ծանոթանալուց առաջ, բերենք նաև հետևյալ երկու սահմանումները՝

***Սահմանում 19**: Մատրիցի (Որոշիչի) երկու տողեր (սյուներ) կոչվում են համեմատական, եթե այդ տողերի (սյուների) համապատասխան տարրերի հարաբերությունը հավասար է միևնույն թվին:*

***Սահմանում 20**: Շևափոխությունը, որի արդյունքում մատրիցի (որոշիչի) տողերը դառնում են նույն համարներով սյուներ, կոչվում է մատրիցի (որոշիչի) շրջում (տրանսպոնացում):*

(8) տեսքն ունեցող մատրիցի շրջումից ստացված մատրիցը նշանակելով A^* – ով, համաձայն բերված սահմանման՝ կունենանք

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}: \qquad (8^*)$$

Այժմ թվարկենք որոշիչի հատկությունները:

1.º Շրջումից որոշիչը չի փոխում իր արժեքը, այսինքն

$$|A| = |A^*|, \qquad (15)$$

որտեղ A և A^* մատրիցները համապատասխանաբար ունեն (8) և (8) տեսքերը:*

2.º Կամայական երկու տողերի տեղերը փոխելիս որոշիչը փոխում է իր նշանը.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j): \tag{16}$$

3.º Երկու միատեսակ տողեր ունեցող որոշիչը հավասար է զրոյի.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0: \tag{17}$$

4.º Որոշիչի որևէ տողի տարրերի և մեկ այլ տողի համապատասխան տարրերի հանրահաշվական լրացումների արտադրյալների գումարը հավասար է զրոյի.

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i, j = 1,2,\ldots,n;\ i \neq j): \tag{18}$$

5.º Միայն զրոներից կազմված տող պարունակող որոշիչը հավասար է զրոյի.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = 0: \tag{19}$$

6.º Եթե որոշիչի որևէ տողի բոլոր տարրերը բազմապատկվում են որևէ իրական թվով, ապա տրված որոշիչը նույնպես բազմապատկվում է այդ թվով:

Այլ խոսքով՝ որոշիչի որևէ տողի բոլոր տարրերի ընդհանուր արտադրիչը կարելի է դուրս հանել որոշիչի նշանի տակից.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = 1,2,\ldots,n): \tag{20}$$

7.º Երկու համեմատական տողեր ունեցող որոշիչը հավասար է զրոյի.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1,2,\dots,n;\ c = const): \tag{21}$$

8.º Եթե որոշիչի i – րդ տողի $(i = 1,2,\dots,n)$ բոլոր տարրերը կազմված են երկու գումարելիներից.

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \qquad (j = 1,2,\dots,n),$$

ապա այդ որոշիչը հավասար է երկու այնպիսի որոշիչների գումարի, որոնց բոլոր տողերը, բացի i – րդ տողից, համընկնում են տրված որոշիչի համապատասխան տողերի հետ, իսկ i – րդ տողը մի որոշիչում կազմված է b_{ij} տարրերից, իսկ մյուսում՝ c_{ij} տարրերից.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (i = 1,2,\dots,n): \tag{22}$$

9.º Որոշիչի արժեքը չի փոխվում, եթե նրա որևէ տողի տարրերին գումարվում է մեկ այլ տողի համապատասխան տարրերը՝ նախապես այդ տարրերը միևնույն թվով բազմապատկելով.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} + ca_{j1} & a_{i2} + ca_{j2} & \dots & a_{in} + ca_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} (i \neq j;\ c = const): \tag{23}$$

10.º Եթե n – րդ կարգի որոշիչի տողերից որևէ մեկը (իբրև n – չափանի գծային տարածության վեկտոր) հանդիսանում է մնացած տողերի (կամ նրանց մի մասի) գծային զուգակցությունը, ապա այդ որոշիչը հավասար է զրոյի:

Նշենք, որ որոշիչի թվարկած հատկությունները ճիշտ են նաև նրա սյուների համար՝ ինչը նշանակում է, որ որոշիչի տողերն ու սյուները իրավահավասար են:

Օրինակ 10: Հաշվել հետևյալ որոշիչը՝

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & -18 & 26 & 14 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Լուծում: Տրված որոշիչի հետ կատարելով հետևյալ ձևափոխությունները՝

ա) երկրորդ տողից 2 արտադրիչը դուրս հանենք,

բ) ստացված որոշիչի առաջին տողին գումարենք նրա երկրորդ տողի կրկնապատիկը (այսինքն՝ առաջին տողի տարրերին գումարենք երկրորդ տողի համապատասխան տարրերի կրկնապատիկները),

գ) երրորդ տողից հանենք ստացված որոշիչի երկրորդ տողի եռապատիկը,

դ) չորրորդ տողից հանենք ստացված որոշիչի երկրորդ տողի կրկնապատիկը,

այդ որոշիչի հաշվումը կհանգեցնենք

$$d = 2\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} \qquad (զ)$$

որոշիչի հաշվմանը: Վերածելով (զ) որոշիչն ըստ իր առաջին սյան տարրերի և հաշվելով ստացված երրորդ կարգի որոշիչը՝ վերջնականապես կստանանք

$$d = 2064:$$

§3. Վեկտորների գծային կախվածության և անկախության հարցերը հարթության վրա և տարածության մեջ*): Բազիս հարթության վրա և տարածության մեջ: Ուղղանկյուն դեկարտյան բազիս, վեկտորի կոորդինատներն ուղղանկյան դեկարտյան բազիսում: Հատվածի բաժանումը տրված հարաբերությամբ:

Հարթության վրա և տարածության մեջ վեկտորների գծային կախվածության և անկախության հարցերն ուսումնասիրելու համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա այնպիսի λ թիվ, որ տեղի ունենա հետևյալ վեկտորական հավասարությունը՝*

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}: \qquad (1)$$

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն համագիծ վեկտորներ են **[1,ա8]**: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ այդ վեկտորները համուղղված են, այսինքն ենթադրենք, որ տեղի ունի հետևյալ վեկտորական հավասարությունը **[1,ա9]**.

---

*) Այսուհետև, եթե հատուկ չնշենք տարածության չափը, ապա տարածություն ասելով կհասկանանք եռաչափ տարածություն:

$$\vec{b} = |\vec{b}|\vec{a^{\circ}},$$

որտեղ $\vec{a^{\circ}}$ – ն, ինչպես գիտենք, $\vec{a}$ վեկտորի միավոր վեկտորն է [1,u7]:

Օգտվելով [1,(1)] բանաձևից և $|\vec{b}|/|\vec{a}|$ քանորդը նշանակելով λ-ով՝ կստանանք

$$\vec{b} = |\vec{b}|\vec{a^{\circ}} = |\vec{b}|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \lambda\vec{a}:$$

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարելի է հանգել (1) հավասարությանը նաև հակուղղված վեկտորների դեպքում [1,u9]:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք գոյություն ունի այնպիսի λ թիվ, որ տեղի ունի (1) հավասարությունը:

Վեկտորի և իրական թվի արտադրյալի սահմանման համաձայն [1,u17], (1) հավասարությունից կստանանք, որ λ-ի դրական արժեքների դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, իսկ բացասական արժեքների դեպքում՝ հակուղղված, այսինքն՝ λ-ի բոլոր արժեքների դեպքում դիտարկվող վեկտորները համագիծ են:

Իպա

Նկատելով, որ (1) հավասարությունը տեղի ունի այն և միայն այն ժամանակ, երբ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են [2,u 3;p1], թեորեմ 1-ը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք լինեն գծորեն կախյալ:*

Թեորեմ 2-ից ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն տարագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք լինեն գծորեն անկախ:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Ենթադրենք՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են և ապացուցենք, որ նրանք գծորեն անկախ են [1,u10], [2,u4]:

Ապացուցելու համար ենթադրենք հակառակը. այսինքն՝ ենթադրենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են: Այդ դեպքում թեորեմ 2-ից կհետևի, որ այդ վեկտորները համագիծ են՝ ինչը կհակասի կատարված ենթադրությանը: Հետևաբար, եթե դիտարկվող վեկտորները տարագիծ են, ապա նրանք գծորեն անկախ են:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գծորեն անկախ են և ցույց տանք, որ նրանք տարագիծ են:

Ապացուցելու համար նորից ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ ենթադրենք,

որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Այդ դեպքում թեորեմ 2-ից կհետևի, որ այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են՝ ինչը կհակասի կատարված ենթադրությանը: Հետևաբար, եթե դիտարկվող վեկտորները գծորեն անկախ են, ապա նրանք տարագիծ են:

Իպա

Միավորելով վերջին երկու թեորեմները՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը՝

Երկու վեկտորներ համագիծ են կամ տարագիծ, կախված նրանից՝ այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են, թե՝ անկախ:

Թեորեմ 2-ը ընդհանրացնենք հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 4: *Որպեսզի $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները լինեն համահարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք լինեն գծորեն կախյալ:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Ինչպես գիտենք, անհրաժեշտությունն ապացուցելու համար բավական է համոզվել, որ արված ենթադրության դեպքում դիտարկվող վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվում է մյուս երկու վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով [2,թ1]:

Դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր դեպքերը՝

ա) Տրված վեկտորներից որևէ երկուսը (օրինակ $\vec{a}$ -ն ու $\vec{b}$ -ն) համագիծ են:

Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ քննարկվող դեպքում գոյություն ունի այնպիսի λ թիվ, որ տեղի ունի

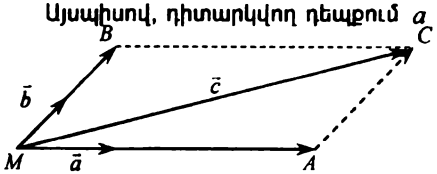
$$\vec{a} = \lambda \vec{b},$$

կամ որ նույնն է՝

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} \qquad (2)$$

վեկտորական հավասարությունը:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում $\vec{a}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով, ինչը նշանակում է, որ այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են:



Նկ.12

բ) Տրված վեկտորների մեջ չկան համագիծ վեկտորներ:

Քանի որ դիտարկվող վեկտորները համահարթ են, ուստի միևնույն M կետում կիրառելիս այդ վեկտորները կպատկանեն նույն հարթությանը (նկ.12): $\vec{c}$ վեկտորի ծայրակետով տանելով $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին զուգահեռ ուղիղներ և կառուցելով $MACB$ զուգահեռագիծը՝ կստանանք [1,u15]

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC},$$

կամ [1,u14]

$$\vec{c} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}: \qquad (3)$$

$\overrightarrow{MA}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ վեկտորին, իսկ $\overrightarrow{MB}$ վեկտորը՝ $\vec{b}$ վեկտորին: Հետևաբար, թեորեմ 1-ի շնորհիվ գոյություն ունեն այնպիսի α և β թվեր, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\overrightarrow{MA} = \alpha\vec{a}, \qquad \overrightarrow{MB} = \beta\vec{b}: \qquad (4)$$

Վերջին երկու հավասարությունների հաշվառումով (3) վեկտորական հավասարությունը կընդունի

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \qquad (3')$$

տեսքը:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով, ինչը նշանակում է, որ այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են և ցույց տանք, որ նրանք համահարթ են [1,u12]:

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ դիտարկվող վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվում է մյուս երկու վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:

Դիցուք տեղի ունի $\vec{c}$ վեկտորի (3') ներկայացումը: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, ապա $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները ակնհայտորեն կլինեն համահարթ և հետևաբար դիտարկվող դեպքում բավարարությունն ապացուցված է: Իսկ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են, ապա միևնույն M կետում կիրառելիս այդ վեկտորները կպատկանեն MAB եռանկյան հարթությանը (նկ.12): Հասկանալի է, որ նույն հարթությանը կպատկանեն նաև $\alpha\vec{a}$ և $\beta\vec{b}$ վեկտորները, ինչպես նաև այդ վեկտորների (3') գումարը:

Այսպիսով, $\vec{a}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները պատկանում են միևնույն հարթությանը և հետևաբար համահարթ են:

Իպա

Հետևանք 1: *Կամայական երեք վեկտորներ հարթության վրա գծորեն կախյալ են:*

Ձևակերպած հետևանքից և նախորդ պարագրաֆի 5-րդ օրինակում բերված պնդումից ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Հարթության վրա երեքից ավելի ցանկացած թվով վեկտորներ գծորեն կախյալ են:*

Միավորելով հետևանք 1-ը և թեորեմ 5-ը՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը՝

Հարթության վրա գծորեն անկախ վեկտորների թիվը չի կարող գերազան-

ցել երկուսը:

Մյուս կողմից, քանի որ հարթությունը պարունակում է երկու տարագիծ վեկտորներ, ուստի թեորեմ 3-ը նշանակում է, որ հարթության վրա գոյություն ունեն գծորեն անկախ երկու վեկտորներ (ավելին՝ հարթությունը պարունակում է անթիվ բազմությամբ գծորեն անկախ վեկտորների զույգեր):

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 6: *Հարթության վրա գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թիվը հավասար է երկուսի:*

Այսպիսով, հարթության կամայական երկու տարագիծ վեկտորներ այդ հարթության մեջ ընկած երկրաչափական վեկտորների տարածության մեջ կազմում են բազիս՝ ինչը նշանակում է, որ հարթությունը, նրա մեջ ընտրված բազիսի առկայությամբ, երկչափ տարածություն է:

Անցնելով տարածության մեջ վեկտորների գծային կախվածության և անկախության հարցերի ուսումնասիրությանը՝ նախ ներկայացնենք թեորեմ 4-ից բխող հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 7: *Որպեսզի $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները լինեն տարահարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանք լինեն, գծորեն անկախ:*

Հակադարձ թեորեմի ապացույցը սկզբունքորեն չի տարբերվում թեորեմ 3-ի ապացույցից, ուստի, չկրկնվելու համար, այն բաց ենք թողնում:

Իսկ այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 8: Կամայական չորս վեկտորներ տարածության մեջ գծորեն կախյալ են:

Ապացույց: Դիցուք $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն, $\vec{c}$-ն և $\vec{d}$-ն տարածության կամայական վեկտորներ են: Ինչպես գիտենք, թեորեմն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ տրված վեկտորներից գոնե մեկը ներկայացվում է մյուսների գծային զուգակցության միջոցով:

Դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր դեպքերը՝

ա) *Տրված վեկտորներից որևէ երեքը (օրինակ $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն, ու $\vec{d}$-ն) համահարթ են:*

Համաձայն թեորեմ 4-ի՝ նշված վեկտորները գծորեն կախյալ են: Հետևաբար, այդ վեկտորներից գոնե մեկը, օրինակ $\vec{d}$-ն, ներկայացվում է մյուսների գծային զուգակցության միջոցով: Ինչպես գիտենք, ասվածը նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի α և β թվեր, որ տեղի ունի

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

կամ որ նույնն է՝

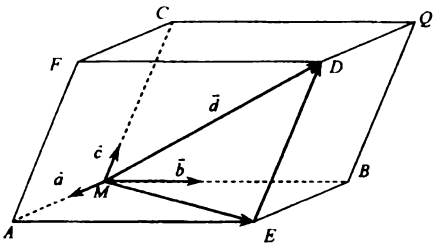
$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + 0\cdot\vec{c} \qquad (5)$$

վեկտորական հավասարությունը:

Այսպիսով, քննարկվող դեպքում $\vec{d}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով, ինչը նշանակում է, որ այդ վեկ-

տորները գծորեն կախյալ են:

բ) *Դիտարկվող վեկտորների մեջ չկա համահարթ վեկտորների եռյակ:*



նկ.13

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ և $\vec{d}$ վեկտորները կիրառենք տարածության որևէ M կետում (նկ.13) և $\vec{d}$ վեկտորի ծայրակետով տանենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$, $\vec{b}$ և $\vec{c}$, $\vec{a}$ և $\vec{c}$ վեկտորներով կազմված հարթություններին զուգահեռ հարթություններ: Այնուհետև կառուցելով $MAEBCFDQ$ զուգահեռանիստը՝ կստանանք [1,u15]

$$\vec{d} = \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}: \qquad (6)$$

Քանի որ $\overrightarrow{MA}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ վեկտորին, $\overrightarrow{MB}$-ն՝ $\vec{b}$ վեկտորին, իսկ $\overrightarrow{MC}$-ն՝ $\vec{c}$ վեկտորին, ուստի թեորեմ 1-ի շնորհիվ գոյություն ունեն այնպիսի α, β և γ թվեր, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\overrightarrow{MA} = \alpha\vec{a}, \qquad \overrightarrow{MB} = \beta\vec{b}, \qquad \overrightarrow{MC} = \gamma\vec{c}: \qquad (7)$$

Վերջին երեք հավասարությունների հաշվառումով (6) վեկտորական հավասարությունը կընդունի

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \qquad (8)$$

տեսքը:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում էլ $\vec{d}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով, այսինքն քննարկվող դեպքում էլ են տրված վեկտորները գծորեն կախյալ:

Իպա

Ապացուցած թեորեմից և նախորդ պարագրաֆի 5-րդ օրինակում բերված պնդումից ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 9: *Տարածության մեջ չորսից ավել ցանկացած թվով վեկտորներ գծորեն կախյալ են:*

Միավորելով վերջին երկու թեորեմները՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը՝

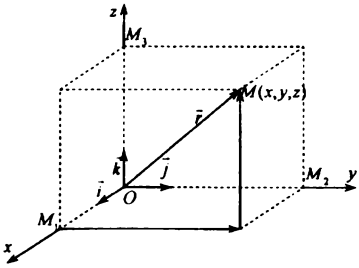
Տարածության մեջ գծորեն անկախ վեկտորների թիվը չի կարող գերազանցել երեքը:

Մյուս կողմից, քանի որ տարածությունը պարունակում է երեք տարահարթ վեկտորներ, ուստի թեորեմ 7-ը նշանակում է, որ տարածության մեջ գոյություն ունեն գծորեն անկախ երեք վեկտորներ (ավելին՝ տարածությունը պարունակում անթիվ բազմությամբ գծորեն անկախ վեկտորների եռյակներ):

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 10: *Տարածության մեջ գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն թիվը հավասար է երեքի:*

Այսպիսով, տարածության կամայական երեք տարահարթ վեկտորներ այդ տարածության մեջ ընկած երկրաչափական վեկտորների տարածության մեջ կազմում են բազիս՝ ինչը նշանակում է, որ տարածության չափը հավասար է երեքի:



Նկ.14

Այժմ եռաչափ տարածության մեջ դիտարկենք չափման ընդհանուր միավոր ունեցող, զույգ առ զույգ փոխուղղահայաց ox, oy և oz կոորդինատական առանցքների համակարգը [1,u2,22] և այդ համակարգին անվանենք ուղղանկյուն դեկարտյան (եռաչափ) կոորդինատական համակարգ:*)

Այնուհետև տարածության մեջ վերցնենք որևէ M կետ (նկ.14), M կետով տանենք կոորդինատական առանցքներին ուղղահայաց հարթություններ և այդ հարթությունների ու ox, oy և oz առանցքների հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք M_1-ով, M_2-ով և M_3-ով:

M_1 կետի կոորդինատը ox առանցքի վրա նշանակենք x-ով, M_2-ինը՝ oy առանցքի վրա y-ով և M_3-ինը՝ oz առանցքի վրա z-ով [1,u23]:

Սահմանում 1: *x,y,z թվերը կոչվում են M կետի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներ՝ ընդ որում x-ը կոչվում է այդ կետի աբսցիս, y-ը՝ օրդինատ, իսկ z-ը՝ ապլիկատ:*

Այն փաստը, որ x,y և z թվերը M կետի կոորդինատներն են, կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$M(x,y,z):$$

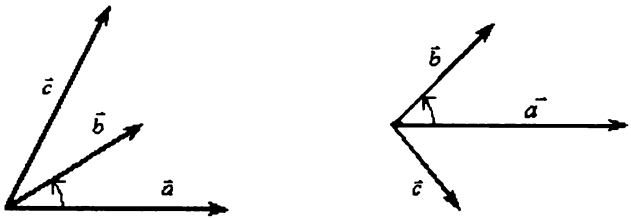
Այժմ ենթադրենք $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն տարածության միևնույն կետում կիրառված տարահարթ վեկտորներ են:

Սահմանում 2: *Եթե $\vec{c}$ վեկտորի ծայրից նայելիս $\vec{a}$ վեկտորի կարճագույն պտույտը դեպի $\vec{b}$ վեկտոր կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ (նկ.15ա), ապա կասենք, որ $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները նշված հերթականությամբ կազմում են աջ եռյակ: Իսկ եթե այդ պտույտը կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությամբ (նկ.15բ), ապա կասենք, որ $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները նշված հերթականությամբ կազմում են ձախ եռյակ:*

Վերադառնալով $oxyz$ կոորդինատական համակարգին՝ O կետից (նկ.14),

---

*) Նույն ձևով հարթության մեջ ներմուծվում է ուղղանկյուն դեկարտյան (երկչափ) կոորդինատական համակարգը:



ա) Նկ.15 բ)

որը կոչվում է կոորդինատների սկզբնակետ, ox, oy և oz առանցքների դրական ուղղությամբ համապատասխանաբար տեղադրենք i, j և $\vec{k}$ միավոր վեկտորները և այդ վեկտորներն անվանենք կոորդինատային վեկտորներ: Կոորդինատական առանցքների դրական ուղղություններն ընտրենք այնպես, որ $\vec{i}, \vec{j}$ և $\vec{k}$ կոորդինատային վեկտորները կազմեն աջ եռյակ: Այդ դեպքում $oxyz$ կոորդինատական համակարգը ևս կոչվում է աջ համակարգ:

Քանի որ $\vec{i}, \vec{j}$ և $\vec{k}$ վեկտորները տարահարթ են, հետևաբար նրանք կազմում են բազիս տարածության մեջ:

Սահմանում 3: *Կոորդինատային $\vec{i}, \vec{j}$ և $\vec{k}$ վեկտորներով կազմված բազիսը կոչվում է ուղղանկյուն դեկարտյան բազիս:*

Ներմուծենք նաև հետևյալ հասկացությունը՝

Սահմանում 4: *Կոորդինատների սկզբնակետը տարածության $M(x,y,z)$ կետին միացնող վեկտորը կոչվում է այդ կետի շառավիղ վեկտոր:*

M կետի շառավիղ վեկտորը վերածելով (նկ.14) ըստ կոորդինատային վեկտորների՝ կունենանք [1,u15]

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}: \qquad (9)$$

Այսպիսով, եռաչափ տարածության կամայական կետի կոորդինատները հավասար են այդ կետի շառավիղ վեկտորի համապատասխան կոորդինատներին [2,u9]:

Այժմ ենթադրենք եռաչափ տարածության մեջ տրված են $A_1(x_1, y_1, z_1)$ և $A_2(x_2, y_2, z_2)$ կետերը (նկ.16) և գտնենք $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորի կոորդինատները:

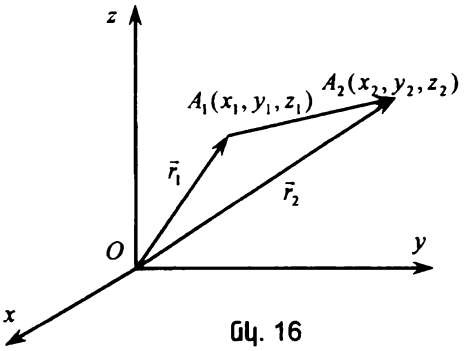
Դրված խնդիրը լուծելու համար օգտվենք

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (10)$$

վեկտորական հավասարությունից, որտեղ $\vec{r}_1$-ը և $\vec{r}_2$-ը համապատասխանաբար A_1 և A_2 կետերի շառավիղ վեկտորներն են: Այնուհետև, նկատի ունենալով (9) բանաձևը՝ (10) հավասարությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով [1,6°].

$$\overrightarrow{A_1A_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} - \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}:$$

a_x, a_y, a_z կոորդինատներով վեկտորը նշանակելով հետևյալ կերպ՝ $\{a_x, a_y, a_z\}$, կստանանք



Նկ. 16

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}: \quad (11)$$

Այսպիսով, վեկտորի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորի ծայրակետի և սկզբնակետի համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:

Նկատի ունենալով [1,(2)] բանաձևը՝ (11) հավասարությունը կարող ենք ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{\text{ՊՐ}_{ox}\overrightarrow{A_1A_2}, \text{ՊՐ}_{oy}\overrightarrow{A_1A_2}, \text{ՊՐ}_{oz}\overrightarrow{A_1A_2}\}: \quad (11')$$

Այսպիսով, վեկտորի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորի պրոյեկցիային՝ կոորդինատական համապատասխան առանցքի վրա:

Օգտվելով վեկտորների հետ կատարվող գծային գործողությունների 6° և 8° հատկություններից [1], կամայական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների ու ցանկացած λ թվի համար կստանանք

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}, \lambda\vec{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}: \quad (12)$$

Այսպիսով, երկու վեկտորների գումարի (տարբերության) յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին (տարբերությանը), իսկ վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատ՝ այդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և տրված թվի արտադրյալին:

Ըստ էության, (12) հավասարությունները նշանակում են, որ վեկտորների հետ կատարվող գծային գործողությունները [1,u15-17] կարելի է փոխարինել այդ վեկտորների կոորդինատների հետ կատարվող թվաբանական գործողություններով:

Նշենք նաև, որ զրոյական վեկտորի բոլոր կոորդինատները ակնհայտորեն հավասար են զրոյի, իսկ երկու հավասար վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են իրար [1,u14]:

Օրինակ 1: Ունենալով $ABCD$ քառանկյան գագաթների կոորդինատները՝ $A(3;5;4)$, $B(4;6;5)$, $C(6;-2;1)$ և $D(5;-3;0)$, պարզել այդ քառանկյան տեսքը:

Լուծում: Նախ, օգտվելով (11) բանաձևից՝ գտնենք $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները.

$$\overrightarrow{AD} = \{2;-8;-4\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{2;-8;-4\}.$$

Քանի որ ստացված վեկտորների համապատասխան կոորդինատները համընկնում են, հետևաբար այդ վեկտորները հավասար են, ինչը նշանակում է, որ տրված քառանկյան

AD և BC կողմերը և՛ հավասար են և զուգահեռ:

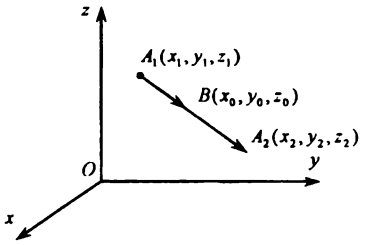
Ինչպես գիտենք, ստացված եզրակացությունից բխում է, որ $ABCD$-ն զուգահեռագիծ է:

Օրինակ 2: Գտնել $3\vec{a}+2\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, որտեղ

$$\vec{a}=\{2;-1;3\},\ \vec{b}=\{0;2;1\}:$$

Լուծում Օգտվելով (12) բանաձևից՝ կունենանք

$$3\vec{a}=\{6;-3;9\},\ 2\vec{b}=\{0;4;2\},\ 3\vec{a}+2\vec{b}=\{6;1;11\}:$$



Նկ.17

Վերջում դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

Տարածության մեջ տրված $A_1(x_1,y_1,z_1)$ և $A_2(x_2,y_2,z_2)$ ծայրակետերով A_1A_2 հատվածի վրա գտնել այնպիսի $B(x_0,y_0,z_0)$ կետ (նկ.17), որն այդ հատվածը բաժանի տրված $\lambda(\lambda>0)$ հարաբերությամբ մասերի.

$$A_1B=\lambda\cdot BA_2: \qquad (13)$$

B կետի որոնելի կոորդինատները կարելի է գտնել՝ օգտվելով հետևյալ վեկտորական հավասարությունից՝

$$\overrightarrow{A_1B}=\lambda\cdot\overrightarrow{BA_2}: \qquad (13')$$

Իրոք, օգտվելով (11) բանաձևից, նախ (13՝) վեկտորական հավասարությունը ներկայացնենք

$$(x_0-x_1)\vec{i}+(y_0-y_1)\vec{j}+(z_0-z_1)\vec{k}=\lambda\left[(x_2-x_0)\vec{i}+(y_2-y_0)\vec{j}+(z_2-z_0)\vec{k}\right] \qquad (13'')$$

տեսքով: Այնուհետև նկատի ունենալով, որ հավասար վեկտորների համապատասխան կոորդինատները համընկնում են, վեկտորների գծային գործողությունների 7° և 8° հատկությունների հաշվառումով կունենանք [1]

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0),\ y_0-y_1=\lambda(y_2-y_0),\ z_0-z_1=\lambda(z_2-z_0):$$

Վերջին երեք հավասարություններից, B կետի կոորդինատների համար կստանանք

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z_0=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}: \qquad (14)$$

Մասնավոր դեպքում (14) բանաձևերում ընդունելով $\lambda=1$, A_1A_2 հատվածի միջնակետի կոորդինատների համար կունենանք

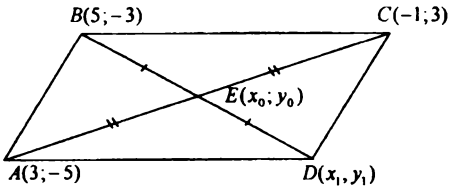
$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2},\ z_0=\frac{z_1+z_2}{2}: \qquad (14')$$

Այսպիսով, հատվածի միջնակետի կոորդինատները հավասար են այդ հատվածի ծայրակետերի համապատասխան կոորդինատների կիսագումարին:

Օրինակ 3: Տրված են $ABCD$ զուգահեռագծի $A(3;-5)$, $B(5;-3)$ և $C(-1;3)$ գագաթ-

ները: Գտնել այդ զուգահեռագծի D գագաթի կոորդինատները (նկ.18):

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար, նախ օգտվելով (14՝)-ի առաջին երկու բանաձևերից, գտնենք AC անկյունագծի $E(x_0, y_0)$ միջնակետի կոորդինատները.



նկ.18

$$x_0 = \frac{3-1}{2} = 1,\ y_0 = \frac{-5+3}{2} = -1:$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ E կետը նաև BD անկյունագծի միջնակետն է և կրկին օգտվելով նշված բանաձևերից, D կետի կոորդինատների համար կստանանք

$$_1 = -3, y_1 = 1$$

Այսպիսով $D(-3;1)$ կետը տրված զուգահեռագծի չորրորդ գագաթն է:

§4. Սկալյար արտադրյալ և նրա հատկությունները: Սկալյար արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով: Վեկտորական արտադրյալ և նրա հատկությունները: Վեկտորական արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով:

Ունենալով երկու վեկտորների գումարի, տարբերության և վեկտորի ու իրական թվի արտադրյալի սահմանումները [1,u15-17], այժմ ներմուծենք երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի և վեկտորական արտադրյալի հասկացությունները:

Նախ ծանոթանանք երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանմանը:

Սահմանում 1: *Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը մի թիվ է, որը հավասար է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալին: *)*

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը նշանակելով $\vec{a}\cdot\vec{b}$ պայմանանշանով, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ով, համաձայն բերված սահմանման, կունենանք

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha : \qquad (1)$$

Նկատելով, որ $|\vec{b}|\cos\alpha$ արտադրյալը հավասար է $\vec{b}$ վեկտորի պրոյեկցիային՝ $\vec{a}$ վեկտորի ուղղության վրա [1,p1], իսկ $|\vec{a}|\cos\alpha$ արտադրյալը՝ $\vec{a}$ վեկտորի պրոյեկցիային՝ $\vec{b}$ վեկտորի ուղղության վրա, (1) բանաձևից կստանանք

*) Հասկանալի է, որ եթե երկու վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական վեկտոր է, ապա այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\text{ПР}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\text{ПР}_{\vec{b}}\vec{a}: \qquad (2)$$

Այսպիսով, երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է տրված վեկտորներից որևէ մեկի երկարության և այդ վեկտորի ուղղության վրա մյուս վեկտորի պրոյեկցիայի արտադրյալին:

Մասնավոր դեպքում $\vec{a}$ վեկտորի և $\vec{b}^0$ միավոր վեկտորի սկալյար արտադրյալի համար (2) բանաձևից կունենանք

$$\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\left|\vec{b}^0\right|\text{ПР}_{\vec{b}^0}\vec{a}=\text{ПР}_{\vec{b}^0}\vec{a}: \qquad (2')$$

Այսպիսով, որևէ վեկտորի և միավոր վեկտորի սկալյար արտադրյալը հավասար է տրված վեկտորի պրոյեկցիային՝ միավոր վեկտորի ուղղության վրա:

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1⁰. $$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad (3)$$

այսինքն՝ սկալյար արտադրյալը տեղափոխելի է:

Իրոք, ունենք

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=\vec{b}\cdot\vec{a},$$

որտեղ α-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

Իպա

2⁰. $$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \qquad (4)$$

այսինքն գումարման նկատմամբ սկալյար արտադրյալն ունի բաշխական հատկություն:

Իրոք, օգտվելով (2) և (3) բանաձևերից, կստանանք [1,(7)]

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\text{ПР}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\left(\text{ПР}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{ПР}_{\vec{c}}\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\text{ПР}_{\vec{c}}\vec{a}+\left|\vec{c}\right|\text{ПР}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}:$$

Իպա

Այսպիսով, երկու վեկտորների գումարը մի երրորդ վեկտորով սկալյարորեն բազմապատկելու համար անհրաժեշտ է գումարելի վեկտորները սկալյարորեն բազմապատկել այդ վեկտորով և ստացված արտադրյալները գումարել:

3⁰ $$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}, \qquad (5)$$

այսինքն՝ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը թվով բազմապատկելու համար, բավական է տրված վեկտորներից որևէ մեկը բազմապատկել այդ թվով:

Իրոք, օգտվելով (2) բանաձևից, կունենանք [1,(8)]

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\left|\vec{a}\right|\text{ПР}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\lambda\,\text{ПР}_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\text{ПР}_{\vec{a}}\left(\lambda\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right):$$

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ բանաձևը՝

$$\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}:$$

Իպա

4°. *Որպեսզի երկու վեկտորներ*) լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար լինի զրոյի:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանման մեջ ընդունելով $\alpha = 90^\circ$, կունենանք

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ = |a||b|\cdot 0 = 0:$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ ենթադրենք տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 0,$$

որտեղ α-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

Քանի որ $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն ոչ զրոյական վեկտորներ են, ուստի վերջին հավասարությունից հետևում է, որ

$$\cos\alpha = 0:$$

Ստացված հավասարությունից էլ հետևում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են:

Իպա

Այժմ ենթադրենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տրված են իրենց կոորդինատներով.

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \qquad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}: \tag{6}$$

Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններից և հետևյալ ակնհայտ առնչություններից՝

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0,$$

կստանանք

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z: \tag{7}$$

Այսպիսով, կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարին:

(1) և (7) բանաձևերում ընդունելով $\vec{b} = \vec{a}$, համապատասխանաբար կունենանք

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{8}$$

Այսպիսով, վեկտորի սկալյար քառակուսին (այսինքն՝ վեկտորի սկալյար արտադրյալն իր հետ) հավասար է այդ վեկտորի երկարության քառակուսուն, իսկ վեկտորի երկարության քառակուսին՝ նրա կոորդինատների քառակուսիների գումարին:

---

*) Տե ս 7-րդ էջի տողատակի դիտողությունը:

(8) բանաձևերից երկրորդից վեկտորի երկարության համար կստանանք

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (8')$$

Այսպիսով վեկտորի երկարությունը հավասար է այդ վեկտորի կոորդինատների քառակուսիների գումարի քառակուսի արմատին:

Օգտվելով վեկտորի երկարության համար ստացած (8') բանաձևից և տարածության $A_1(x_1;y_1;z_1), A_2(x_2;y_2;z_2)$ կետերը միացնելով $\overrightarrow{A_1A_2}$ վեկտորով՝ այդ կետերի հեռավորության համար կունենանք [3,(11)]

$$d = \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (9)$$

Այսպիսով, երկու կետերի հեռավորությունը հավասար է այդ կետերի համապատասխան կոորդինատների տարբերությունների քառակուսիների գումարի քառակուսի արմատին:

Նկատի ունենալով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումը, ինչպես նաև (7) և (8') բանաձևերը, կստանանք

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}, \qquad (10)$$

որտեղից $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյան համար կունենանք

$$\alpha = \arccos\frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}: \qquad (10')$$

Այսպիսով, երկու վեկտորների կազմած անկյան կոսինուսը հավասար է նրանց սկալյար արտադրյալի և երկարությունների արտադրյալի քանորդին:

Նշենք նաև, որ, օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից, կարող ենք այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալի չորրորդ հատկությունը ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 1: *Որպեսզի $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների արտադրյալների գումարը հավասար լինի զրոյի.*

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0: \qquad (11)$$

Օրինակ 1: Հաշվել $2\vec{a} - \vec{b}$ և $\vec{a} + 2\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $\left|\vec{a}\right| = 3, \left|\vec{b}\right| = 2$, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը հավասար է 120^0-ի:

Լուծում: Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից և հատկություններից, կստանանք

$$\left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right) = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\left|\vec{b}\right|^2 = 18 + 3\cdot 3\ 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 8 = 1$$

Օրինակ 2: $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացնել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով [2,u2], եթե

$$\vec{a} = \{2;-3\},\ \vec{b} = \{1;2\},\ \vec{c} = \{9;4\}:$$

Լուծում: Քանի որ ակնհայտորեն տրված վեկտորները համահարթ են [1,u12], ուստի այդ վեկտորների միջև գոյություն ունի գծային կախվածություն [3,p 4]: Ենթադրենք $\vec{c}$ վեկտորը ներկայացվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}: \qquad (ա)$$

Վեկտորական (ա) հավասարությունից անցնելով կոորդինատներով գրված հավասարությունների, կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը [3,(12)].

$$\begin{cases} 2x + y = 9, \\ -3x + 2y = 4 \end{cases} \qquad (բ)$$

Լուծելով (բ) համակարգը, կունենանք

$$x = 2, y = 5:$$

$x-$ի և $y-$ի համար ստացած արժեքները տեղադրելով (ա) հավասարության մեջ, կստանանք $\vec{c}$ վեկտորի մեզ հետաքրքրող վերլուծությունը.

$$= 2\vec{a} + 5\vec{b}$$

Օրինակ 3: Միևնույն երկարության $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են: Գտնել այդ վեկտորները, եթե

$$\vec{a} = \{3;x;-1\},\quad \vec{b} = \{2;1;y\}:$$

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ տրված վեկտորները փոխուղղահայաց են և ունեն նույն երկարությունը՝ (8) և (11) բանաձևերի օգնությամբ կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y - x = 6, \\ y^2 - x^2 = 5 \end{cases}: \qquad (գ)$$

Լուծելով (դ) համակարգը, կունենանք

$$x = -31/12,\quad y = 41/12:$$

Ունենալով $x-$ի և $y-$ի արժեքները՝ կգտնենք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները.

$$\vec{} = \{3;-31/12;-1\};\quad \vec{b} = \{2;1;41/12\}:$$

Օրինակ 4: Տրված են $A(-5;1)$, $B(-1;4)$, $C(1;-4)$ և $D(2;3)$ կետերը: Գտնել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորներով կազմված անկյունը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ գտնենք $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները.

$$\overrightarrow{AB} = \{4;3\},\quad \overrightarrow{CD} = \{1;7\}.$$

Այնուհետև (8՝) բանաձևի միջոցով հաշվենք ստացված վեկտորների երկարությունները, իսկ (7) բանաձևի միջոցով՝ այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5, \quad \left|\overrightarrow{CD}\right| = 5\sqrt{2}, \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 25$$

Վերջապես, օգտվելով (10՝) բանաձևից, գտնենք $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորներով կազմված անկյունը.

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}:$$

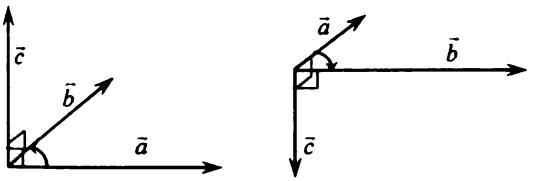
Այժմ ծանոթանանք երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանմանը:

Սահմանում 2: *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը մի այնպիսի $\vec{c}$ վեկտոր է, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին (նկ.19).*

1) այդ վեկտորի երկարությունը հավասար է տրված վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին,

*2) այն ուղղահայաց է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին, *)*

3) $\vec{c}$ վեկտորի ծայրից նայելիս $\vec{a}$ վեկտորի կարճագույն պտույտը դեպի $\vec{b}$ վեկտոր երևում է ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ (այսինքն՝ $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները նշված հերթականությամբ կազմում են աջ եռյակ):



ա) նկ.19 բ)

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակելով $\vec{a}\times\vec{b}$ պայմանանշանով, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ α-ով, համաձայն բերված սահմանման, կունենանք

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha: \tag{12}$$

Վեկտորների վեկտորական արտադրյալն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

I. $$\vec{a}\times\vec{b} = -\left(\vec{b}\times\vec{a}\right), \tag{13}$$

այսինքն՝ արտադրիչների տեղերը փոխելիս վեկտորական արտադրյալը փոխում է իր նշանը:

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր դեպքերը՝

ա) $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են [1,u8]:

---

*) Հետևաբար՝ $\vec{c}$ վեկտորն ուղղահայաց է տրված վեկտորներով անցնող հարթությանը:

Քանի որ քննարկվող դեպքում ակնհայտորեն տեղի ունի $\sin\alpha = 0$ հավասարությունը (α-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է), հետևաբար (13) հավասարության մեջ մասնակցող վեկտորական արտադրյալները հավասար են իրար (որպես զրոյական վեկտորներ):

բ) $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները տարագիծ են [1,u10]:

Համաձայն երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանման՝ քննարկվող դեպքում (13) հավասարության մեջ մասնակցող վեկտորական արտադրյալներն ունեն նույն մեծությունը (որը հավասար է այդ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին) և հակառակ ուղղություններ:

Այսպիսով, տարագիծ վեկտորների դեպքում էլ տեղի ունի (13) հավասարությունը:

Իպա

II. $$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}, \qquad (14)$$

այսինքն՝ գումարման նկատմամբ վեկտորական արտադրյալն ունի բաշխական հատկություն:

Այսպիսով, երկու վեկտորների գումարը մի երրորդ վեկտորով վեկտորապես բազմապատկելու համար անհրաժեշտ է գումարելի վեկտորները վեկտորապես բազմապատկել այդ վեկտորով և ստացված արտադրյալները գումարել:

Վեկտորական արտադրյալի երկրորդ հատկության ապացույցը չենք ներկայացնում:

III. $$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}, \qquad (15)$$

այսինքն՝ երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալը թվով բազմապատկելու համար բավական է արտադրիչ վեկտորներից որևէ մեկը բազմապատկել այդ թվով:

Ապացույց: Սահմանափակվենք (15) բանաձևի առաջին մասի ապացույցով, ընդ որում համարենք λ-ն դրական: Այդ բանաձևի երկրորդ մասը, ինչպես նաև բացասական λ-ի դեպքը, ապացուցվում են նույն ձևով:

Քանի որ դրական թվով բազմապատկելիս վեկտորի ուղղությունը չի փոխվում, ուստի $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ և $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$ վեկտորները համուղղված են:

Մյուս կողմից, համաձայն (12) բանաձևի՝ ունենք

$$\left|\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right| = \lambda\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha,$$

$$\left|\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\lambda\vec{b}\right|\sin\alpha = \lambda\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha,$$

որտեղ α-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

Ինչպես տեսնում ենք՝ $\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ և $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right)$ վեկտորները համուղղված են և ունեն նույն երկարությունը. այսինքն՝ այդ վեկտորները հավասար են:

Իպա

IV. *Որպեսզի երկու վեկտորներ լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը հավասար լինի զրոյական վեկտորի:*)*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, այսինքն՝ այդ վեկտորների կազմած անկյան սինուսը հավասար է զրոյի.

$$\sin\alpha = 0: \tag{16}$$

Այդ դեպքում (12) բանաձևի շնորհիվ կստանանք, որ տրված վեկտորների վեկտորական արտադրյալի մեծությունը նույնպես հավասար է զրոյի՝ ինչն էլ նշանակում է, որ $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$-ն զրոյական վեկտոր է:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյական վեկտորի:

Համաձայն երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանման՝ կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha = 0: \tag{17}$$

Նկատի ունենալով, որ $\vec{a}$-ն ու $\vec{b}$-ն ոչ զրոյական վեկտորներ են, (17) հավասարությունից կստանանք (16) հավասարությունը, որտեղից էլ հետևում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

Իպա

Վեկտորական արտադրյալի չորրորդ հատկությունից մասնավորապես հետևում է, որ ցանկացած $\vec{a}$ վեկտորի վեկտորական արտադրյալն իր հետ հավասար է զրոյական վեկտորի.

$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}: \tag{18}$$

Այժմ անցնենք կոորդինատներով տրված վեկտորների վեկտորական արտադրյալի բանաձևի արտածմանը:

Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներն ունեն (6) տեսքը: Այդ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի բանաձևը ստանալու համար նախ հաշվենք կոորդինատային վեկտորների վեկտորական արտադրյալները:

Քանի որ համագիծ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյական վեկտորի, ուստի տեղի ունեն հետևյալ վեկտորական հավասարությունները՝

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}: \tag{19}$$

---

*) Նշենք, որ վեկտորական արտադրյալի ձևակերպած հատկությունն ակնհայտ է, եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից գոնե մեկը զրոյական վեկտոր է:

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ $\vec{i}$ և j կոորդինատային վեկտորներն ունեն համապատասխանաբար ox և oy կոորդինատական առանցքների դրական ուղղությունները, երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանման երրորդ կետի համաձայն կստանանք, որ $\vec{i}\times\vec{j}$ վեկտորն ունի oz կոորդինատական առանցքի դրական ուղղությունը:

Մյուս կողմից, քանի որ այդ վեկտորի երկարությունը հավասար է i և j վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին (տվյալ դեպքում՝ մեկի, քանի որ $\vec{i}$ և j կոորդինատային վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագիծը քառակուսի է, որի կողմը հավասար է մեկի), հետևաբար $\vec{i}\times\vec{j}$ վեկտորն համընկնում է կոորդինատային $\vec{k}$ վեկտորի հետ.

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}: \tag{20}$$

Կարող ենք նույն ձևով համոզվել, որ տեղի ունեն նաև

$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \tag{21}$$

վեկտորական հավասարությունները:

Վեկտորական արտադրյալի առաջին հատկության օգնությամբ (20) և (21) հավասարություններից կստանանք նաև հետևյալ վեկտորական հավասարությունները՝

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-i, \qquad \vec{i}\times\vec{k}=-j: \tag{22}$$

Այժմ օգտվելով (19)-(22) վեկտորական հավասարություններից և գումարման նկատմամբ վեկտորական արտադրյալի բաշխական հատկությունից՝ (6) տեսքն ունեցող $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի համար կստանանք

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=\left(a_yb_z-b_ya_z\right)\vec{i}-\left(a_xb_z-b_xa_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-b_xa_y\right)\vec{k}, \tag{23}$$

որտեղից, երկրորդ և երրորդ կարգի որոշիչների հաշվման [2,(10),(12)] բանաձևերի միջոցով կունենանք

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & j & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}: \tag{24}$$

Այսպիսով, կոորդինատներով տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը կարելի է պայմանականորեն արտահայտել երրորդ կարգի մի որոշիչի միջոցով, որի առաջին տողը կազմված է $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ կոորդինատային վեկտորներից (նշված հերթականությամբ), իսկ երկրորդ և երրորդ տողերը՝ համապատասխանաբար $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կոորդինատներից:

Օգտվելով երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի չորրորդ հատկությունից և $\vec{a}\times\vec{b}$ արտադրյալի (23) ներկայացումից՝ կստանանք, որ

$$a_y b_z - b_y a_z = 0, \qquad a_x b_z - b_x a_z = 0, \qquad a_x b_y - b_x a_y = 0 \tag{25}$$

պայմաններն անհրաժեշտ են ու բավարար, որ կոորդինատներով տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ:

Ենթադրելով, որ $b_x \neq 0,\ b_y \neq 0,\ b_z \neq 0,$ (25) հավասարություններից կստանանք

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}: \tag{26}$$

Այսպիսով, որպեսզի կոորդինատներով տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները լինեն համագիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորների կոորդինատները բավարարեն (26) հավասարություններին (այսինքն լինեն համեմատական):

Նշենք, որ կոորդինատներով տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համագիծության (26) պայմաններից կօգտվենք նաև այն դեպքերում, երբ b_x, b_y և b_z թվերից մեկը կամ երկուսը հավասար են զրոյի: Նման դեպքերում կհասկանանք ոչ թե զրոյի վրա բաժանում, այլ այն, որ $\vec{b}$ վեկտորի համապատասխան կոորդինատը (կոորդինատները) հավասար է (հավասար են) զրոյի:

Վերջում նկատենք, որ երկու վեկտորների համագիծության (26) պայմանները կարելի է հեշտությամբ ստանալ նաև **[3,թ1]**-ից:

Օրինակ 5: Հաշվել $6\vec{a}-\vec{b}$ և $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \alpha=45^\circ$, որտեղ α-ն $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունն է:

Լուծում: Օգտվելով երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանումից և նրա հատկություններից՝ նշված վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսի համար կունենանք

$$S = \left|\left(6\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right| = \left|6\left(\vec{a}\times\vec{a}\right)+6\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)-\left(\vec{b}\times\vec{b}\right)\right| = 7\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 7\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2}$$

Օրինակ 6: Տրված են $\vec{a}=\{1;1;2\}$ և $\vec{b}=\{2;1;1\}$ վեկտորները: Գտնել $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորի ուղղությունն ունեցող միավոր վեկտորը:

Լուծում: Որոնելի միավոր վեկտորը նշանակելով $\vec{c}^{\,0}$-ով՝ կստանանք **[1,(1)]**

$$\vec{c}^{\,0} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|} \tag{դ}$$

Այնուհետև (24) բանաձևի միջոցով գտնենք $\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորը.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k} \qquad (ե)$$

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար (8՝) բանաձևի օգնությամբ հաշվենք (ե) վեկտորի երկարությունը.

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{1+9+1}=\sqrt{11}$$

և այդ վեկտորի կոորդինատները բաժանենք $\sqrt{11}$ -ի.

$$\vec{c}^{\,0}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{11}};\frac{3}{\sqrt{11}};-\frac{1}{\sqrt{11}}\right\}.$$

Օրինակ 7: Գտնել $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ վեկտորին համագիծ այնպիսի $\vec{b}$ վեկտոր, որը բավարարի հետևյալ պայմանին՝

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=12$$

Լուծում: Քանի որ $\vec{b}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ վեկտորին, ուստի, համաձայն (26) բանաձևի, $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները համեմատական են $\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներին, այսինքն տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\frac{b_x}{-1}=\frac{b_y}{1}=\frac{b_z}{-2}=\lambda, \qquad (զ)$$

որտեղ b_x -ը, b_y -ը և b_z -ը $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են, իսկ λ -ն՝ համեմատականության գործակիցը: (զ) հավասարություններից հետևում է, որ $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն արտահայտվում են համեմատականության λ գործակցի միջոցով.

$$\vec{b}=\{\ \lambda;\lambda;-2\lambda\}: \qquad (է)$$

Այնուհետև օգտվելով (7) բանաձևից՝ λ -ի համար կստանանք

$$\lambda+\lambda+4\lambda=12 \text{ կամ } \lambda=2:$$

$\vec{b}$ վեկտորը գտնելու համար մնում է λ -ի համար ստացած արժեքը տեղադրել (է) հավասարության մեջ.

$$\vec{b}=\{-2;2,-4\}:$$

§5. Երեք վեկտորների խառն արտադրյալը և նրա երկրաչափական իմաստը: Երեք վեկտորների համահարթության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը խառն արտադրյալի միջոցով: Խառն արտադրյալի արտահայտումը վեկտորների կոորդինատների միջոցով:

Նախորդ պարագրաֆում մենք ծանոթացանք երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի և վեկտորական արտադրյալի սահմանումներին և, ինչպես տեսանք, այդ արտադրյալներից առաջինը սկալյար մեծություն է, իսկ երկրորդը՝ վեկտորական:

Բնականաբար հարց է ծագում. իսկ երեք վեկտորներն ինչպիսի՞ հարաբերության մեջ կարող են լինել արտադրյալի իմաստով:

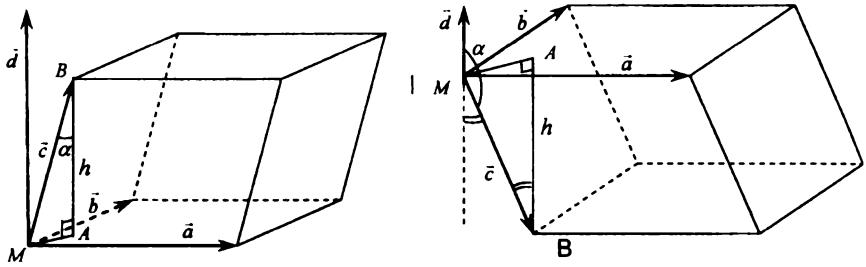
Չնակերպած հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ վեկտորը սկալյարորեն բազմապատկենք $\vec{b}$ վեկտորով՝ կստանանք թիվ: $\vec{c}$ վեկտորն էլ բազմապատկելով այդ թվով՝ արդյունքում կստանանք $\vec{c}$ վեկտորին համագիծ վեկտոր:

Հասկանալի է, որ պատկերն էապես կփոխվի, եթե $\vec{a}$ վեկտորը վեկտորապես բազմապատկենք $\vec{b}$ վեկտորով: Այս դեպքում արդյունքում կստանանք վեկտոր և այդ վեկտորը կարող ենք ինչպես՝ սկալյարորեն, այնպես էլ վեկտորապես բազմապատկել $\vec{c}$ վեկտորով: Առաջին դեպքում արդյունքում կստանանք թիվ, իսկ երկրորդ դեպքում՝ վեկտոր: Առաջին արտադրյալին կանվանենք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների վեկտորասկալյար կամ խառն արտադրյալ և այն կնշանակենք $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ կամ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ պայմանանշաններից որևէ մեկով, իսկ երկրորդ արտադրյալին՝ կրկնակի վեկտորական արտադրյալ և կնշանակենք $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ պայմանանշանով:

Վերոգրյալ դատողությունները հանգեցնում են հետևյալ սահմանմանը՝

Սահմանում 1: *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի և $\vec{c}$ վեկտորի սկալյար արտադրյալը կոչվում է այդ վեկտորների վեկտորասկալյար կամ խառն արտադրյալ և նշանակվում է $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ կամ $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ պայմանանշաններից որևէ մեկով, իսկ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալի և $\vec{c}$ վեկտորի վեկտորական արտադրյալը՝ այդ վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ և նշանակվում է $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ պայմանանշանով:*

Երեք վեկտորների խառն արտադրյալի երկրաչափական իմաստը պարզաբանելու համար դիտարկենք $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ տարահարթ վեկտորները [1,u13]: Նշված վեկտորները կիրառենք տարածության միևնույն M կետում և այդ վեկտորնե-



ա) Նկ.20 բ)

րի վրա՝ որպես կողմերի, կառուցենք զուգահեռանիստ (նկ.20): Ստացված զուգահեռանիստի հիմքի մակերեսը, BA բարձրությունը և ծավալը համապատասխանաբար նշանակենք S-ով, h-ով և V-ով: M կետում կիրառենք նաև $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը, ինչպես գիտենք [4,u2], հավասար է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռագծի մակերեսին, այսինքն՝ դիտարկվող զուգահեռանիստի հիմքի մակերեսին

$$\left|\vec{d}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S:$$

$\vec{d}$ և $\vec{c}$ վեկտորների կազմած անկյունը նշանակելով α-ով և օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից՝ կստանանք [4,u1]

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{d}\cdot\vec{c}=\left|\vec{d}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\alpha=S\left|\vec{c}\right|\cos\alpha: \qquad (1)$$

Ենթադրելով, որ α-ն սուր անկյուն է (նկ.20ա), այսինքն ենթադրելով, որ $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները կազմում են աջ եռյակ [3,u2], AMB եռանկյունից կունենանք

$$h=\left|\vec{c}\right|\cos\alpha: \qquad (2)$$

Վերջին հավասարության հաշվառումով (1) հավասարությունից կստանանք

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=V: \qquad (3)$$

Այժմ ենթադրենք α-ն բութ անկյուն է, այսինքն՝ ենթադրենք $\vec{a},\vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները կազմում են ձախ եռյակ: Հաշվի առնելով, որ քննարկվող դեպքում տրված վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռանիստի բարձրությունը (նկ.20բ) արտահայտվում է

$$h=\left|\vec{c}\right|\cos\left(180^\circ-\alpha\right),$$

կամ որ նույնն է՝

$$h = -\left|\vec{c}\right| \cos\alpha \tag{4}$$

բանաձևով, (1) հավասարությունից կստանանք

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = -V: \tag{3'}$$

Միավորելով (3) և (3՝) բանաձևերը՝ վերջնականապես կունենանք

$$V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|: \tag{5}$$

Ամփոփելով վերևում շարադրվածը՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *$\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ տարահարթ վեկտորների խառն արտադրյալը մի թիվ է, որը բացարձակ արժեքով հավասար է այդ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռանիստի ծավալին: Ընդ որում՝ նշված արտադրյալը դրական է, եթե դիտարկվող վեկտորները կազմում են աջ եռյակ և բացասական է՝ հակառակ դեպքում:*

Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի երեք վեկտորներ լինեն համահարթ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ վեկտորների խառն արտադրյալը հավասար լինի զրոյի.*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0: \tag{6}$$

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $\vec{a}$-ն, $\vec{b}$-ն և $\vec{c}$-ն համահարթ վեկտորներ են, այսինքն՝ միևնույն կետում կիրառելիս պատկանում են նույն հարթությանը:

Կատարված ենթադրությունից և երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանումից **[4,u2]** հետևում է, որ $\vec{a} \times \vec{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է նշված հարթությանը, հետևաբար նաև՝ այդ հարթության մեջ ընկած $\vec{c}$ վեկտորին: Ուստի երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի չորրորդ հատկության շնորհիվ **[4,4°]** տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0: \tag{6'}$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալը հավասար է զրոյի և ցույց տանք, որ այդ վեկտորները համահարթ են:

Դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր դեպքերը՝

ա) *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը հավասար է զրոյական վեկտորի.*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}:$$

Վեկտորական արտադրյալի չորրորդ հատկության շնորհիվ **[4,IV]** քննարկ-

վող դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, որտեղից էլ հետևում է, որ $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

բ) *$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը հավասար չէ զրոյական վեկտորի.*

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}:$$

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի չորրորդ հատկությունից և (6′) հավասարությունից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում $\vec{a} \times \vec{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին: Երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի սահմանման համաձայն՝ $\vec{a} \times \vec{b}$ վեկտորն ուղղահայաց է նաև $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին: Այսպիսով, $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորներն ուղղահայաց են միևնույն $\vec{a} \times \vec{b}$ վեկտորին, որտեղից հետևում է, որ այդ վեկտորները զուգահեռ են նույն հարթությանը (կամ գտնվում են մեկ հարթության մեջ), այսինքն՝ համահարթ են:

Իպա

Վերջում անցնենք կոորդինատներով տրված

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\} \text{ և } \vec{c} = \{c_x, c_y, c_z\}$$

վեկտորների խառն արտադրյալի բանաձևի արտածմանը:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի **[4,(24)]** և սկալյար արտադրյալի բանաձևերից, ինչպես նաև որոշիչի սահմանումից **[2,u18]**, կստանանք

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot \left(c_x i + c_y \vec{j} + c_z \vec{k} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}: \qquad (7)$$

Այսպիսով, կոորդինատներով տրված $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալը հավասար է երրորդ կարգի այն որոշիչին, որի առաջին, երկրորդ և երրորդ տողերը համապատասխանաբար կազմված են $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների ox, oy և oz առանցքների վրա (ճշված հերթականությամբ) ունեցած կոորդինատներից.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}: \qquad (7')$$

Օգտվելով որոշիչի երկրորդ հատկությունից [2,2°], կստանանք հետևյալ հավասարությունները՝

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}: \qquad (8)$$

Ինչպես տեսնում ենք, երեք արտադրիչների շրջանաձև տեղափոխությունից խառն արտադրյալի մեծությունը չի փոխվում, իսկ երկու հարևան արտադրիչների տեղափոխությունից այն փոխում է իր նշանը:

(8) բանաձևերից մասնավորապես կստանանք, որ երեք վեկտորների խառն արտադրյալի նշանակման մեջ երկու վեկտորների վեկտորական արտադրյալի և սկալյար արտադրյալի նշանների տեղերը կարելի է փոխել.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right),$$

ինչն էլ հիմք հանդիսացավ $\vec{a}, \vec{b}$ և $\vec{c}$ վեկտորների խառն արտադրյալը նշանակել պարզապես $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ պայմանանշանով:

Նշենք, որ նկատի ունենալով (7) բանաձևը՝ կոորդինատներով տրված երեք վեկտորների համահարթության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

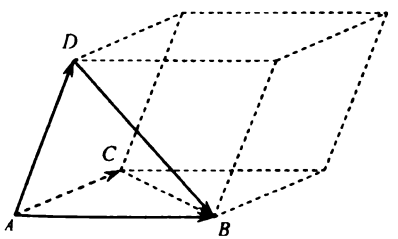
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0: \qquad (9)$$

Օրինակ 1: Հաշվել $A(1;1;1), B(4;4;4), C(3;5;5)$ և $D(2;4;7)$ գագաթներով բուրգի ծավալը:

Լուծում: Քանի որ $ABCD$ բուրգի ծավալը հավասար է $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորների վրա կառուցած զուգահեռանիստի ծավալի 1/6 մասին (նկ.21), և այդ զուգահեռանիստի ծավալն էլ հավասար է նշված վեկտորների խառն արտադրյալի բացարձակ արժեքին, ուստի դիտարկվող եռանկյուն բուրգի ծավալի համար կունենանք

$$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right| \qquad (ա)$$

Գտնելով $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորների կոորդինատները [3,(11)].



նկ.21

$$\overrightarrow{AB} = \{3;3;3\},\ \overrightarrow{AC} = \{2;4;4\},\ \overrightarrow{AD} = \{1;3;6\}$$

և (7) բանաձևով հաշվելով այդ վեկտորների խառն արտադրյալը՝ տրված բուրգի ծավալի համար կստանանք

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3:$$

Օրինակ 2: m – ի ո՞ր արժեքի դեպքում

$$\vec{a} = m\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},\ \vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}\ \ 2\vec{k} \text{ և } \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

վեկտորները կլինեն համահարթ:

Լուծում: Օգտվելով կոորդինատներով տրված երեք վեկտորների համահարթության անհրաժեշտ և բավարար պայմանից՝ m – ի որոնելի արժեքը գտնելու համար կստանանք հետևյալ հավասարումը՝

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0: \qquad (բ)$$

Լուծելով (բ) հավասարումը՝ կգտնենք m – ի մեզ հետաքրքրող արժեքը.

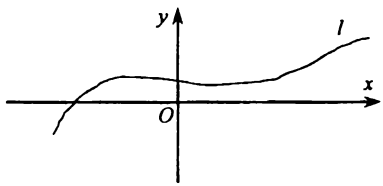
$$m = 1:$$

§6. Հարթության վրա ուղիղ գծի հավասարման տարբեր տեսքերը: Երկու ուղիների կազմած անկյունը: Երկու ուղիների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Կետի հեռավորությունն ուղղից:

Հարթության վրա տրված յուրաքանչյուր կորի և մասնավոր դեպքում՝ յուրաքանչյուր ուղղի համապատասխանում է երկու փոփոխականներով գրված որոշակի հավասարում: Նախ պարզենք, թե ի՞նչ պետք է հասկանալ հարթության վրա տրված կորի և մասնավոր դեպքում հարթության վրա տրված ուղղի հավասարում ասելով:

Դիցուք հարթության վրա տրված է ուղղանկյուն կոորդինատական oxy համակարգ և որևէ l կոր (նկ.22):

Սահմանում 1: *Այն հավասարումը, որին բավարարում են հարթության վրա տրված l կորի կոորդինատները և չեն բավարարում այդ կորին չպատկանող կետերի կոորդինատները, կոչվում է l կորի հավասարում, իսկ այդ հավասարման մեջ մտնող x և y փոփոխականները կոչվում են տրված կորի ընթացիկ կետի կոորդինատներ:*



նկ.22

1⁰. *Ուղիղ գծի հավասարումն անկյունային գործակցով:*

Նախ ներմուծենք ուղիղ գծի անկյունային գործակցի հասկացությունը, որը հանդիսանում է հարթության վրա ուղղի դիրքը բնութագրող կարևոր մեծություններից մեկը:

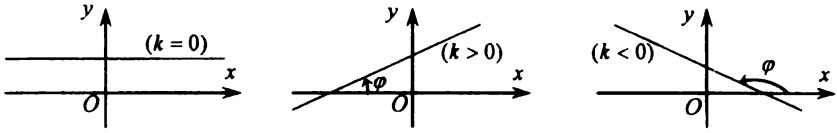
Սահմանում 2: *Ուղղի և ox առանցքի կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք այն ամենափոքր անկյունը, որով ժամսլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ (դրական ուղղությամբ) պետք է պտտել նշված առանցքը, մինչև այն համընկնի տրված ուղղի հետ (կամ դառնա նրան զուգահեռ):*

Սահմանում 3: Ուղղի և ox առանցքի կազմած անկյունը կոչվում է այդ ուղղի թեքման անկյուն ox առանցքի նկատմամբ, իսկ նշված անկյան տանգենսը՝ տրված ուղղի անկյունային գործակից:

Ուղղի անկյունային գործակիցը նշանակելով k – ով, իսկ նրա թեքման անկյունը ox առանցքի նկատմամբ՝ φ-ով, համաձայն բերված սահմանման կունենանք

$$k = tg\varphi : \qquad (1)$$

Պարզ է, որ եթե $k = 0$, ապա դիտարկվող ուղիղը զուգահեռ է ox առանցքին (նկ.23ա), եթե k – ն դրական է, ապա այն ox առանցքի հետ կազմում է φ սուր անկյուն (նկ.23բ), իսկ եթե բացասական է, ապա տրված ուղիղն ox առանցքի հետ կազմում է φ բութ անկյուն (նկ.23գ):

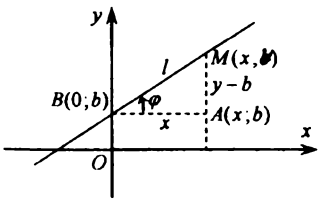


ա) բ) գ)

նկ.23

Այժմ ենթադրենք հարթության վրա տրված է ուղղանկյուն կոորդինատական oxy համակարգ և l ուղիղ, որը զուգահեռ չէ oy առանցքին: Պարզ է, որ այդ ուղղի դիրքը հարթության վրա կլինի որոշակի, եթե տրվեն ox առանցքի նկատմամբ նրա թեքման φ անկյունը և oy առանցքի հետ հատման կետի օրդինատը (նկ.24):

l ուղղի հավասարումը ստանալու համար այդ ուղղի վրա վերցնենք $B(0;b)$ կետից տարբեր կամայական $M(x;y)$ կետ, այդ կետով տանենք oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ և A – ով նշանակենք այդ ուղղի ու B կետով ox առանցքին զուգահեռ տարված ուղղի հատման կետը:



նկ. 24

AMB եռանկյունից կստանանք

$$k = tg\varphi = \frac{y-b}{x},$$

կամ

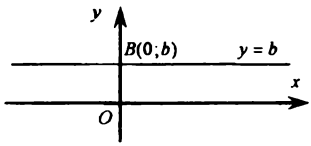
$$y = kx + b : \qquad (2)$$

Սահմանում 4: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (2) հավասարումը կոչվում է հարթության մեջ տրված ուղղի հավասարում՝ տրված անկյունային գործակցով:*

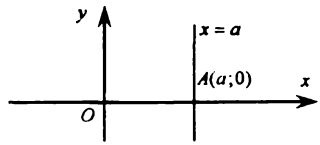
Եթե, մասնավոր դեպքում, ուղիղն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով, ապա $b = 0$ և (2) հավասարումն ընդունում է հետևյալ՝ ավելի պարզ տեսքը՝

$$y = kx , \qquad (2')$$

իսկ եթե (2) հավասարման մեջ ուղղի անկյունային գործակիցն է հավասար զրոյի, ապա այդ հավասարումն ընդունում է



Նկ.25



Նկ.26

$$y = b \qquad (2'')$$

տեսքը և նկարագրում է oy առանցքի $B(0;b)$ կետով անցնող և ox առանցքին զուգահեռ ուղիղ (նկ.25):

Նկատենք նաև, որ եթե դիտարկվող ուղիղը զուգահեռ է oy կոորդինատական առանցքին և ox առանցքի հետ հատվում է $x_0 = a$ կետում (նկ.26), ապա այդ ուղղի բոլոր կետերի աբցիսներն ակնհայտորեն հավասար են a-ի և հետևաբար այն նկարագրվում է

$$x = a \qquad (2''')$$

հավասարումով:

Օրինակ 1: Ստանալ $B(0;-3)$ կետով անցնող և ox առանցքի նկատմամբ 45^0 թեքման անկյուն ունեցող ուղղի հավասարումը:

Լուծում: Քանի որ բերված օրինակում $k = tg45^\circ = 1$ և $b = -3$, հետևաբար, համաձայն (2) բանաձևի տրված ուղղի որոնելի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y = x - 3:$$

2⁰. *Ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումը:*

Ուղիղ գծի (2)-(2‴) հավասարումներից երևում է, որ յուրաքանչյուր ուղիղ ներկայացվում է երկու փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի հավասարման միջոցով (մասնավոր դեպքերում այդ հավասարումը կարող է պարունակել միայն մեկ փոփոխական):

Բնականաբար հարց է ծագում՝ արդյո՞ք երկու փոփոխականների նկատմամբ գրված, առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում հարթության վրա ներկայացնում է ուղիղ գիծ:

Հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք առաջին աստիճանի հետևյալ ընդհանուր հավասարումը՝

$$Ax + By + C = 0, \qquad (3)$$

որտեղ A-ն, B-ն և C-ն կամայական հաստատուններ են, ընդ որում՝ A-ն ու B-ն միաժամանակ զրոյի հավասարվել չեն կարող *) և ցույց տանք, որ oxy հարթության այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, գտնվում են մեկ ուղղի վրա:

Դիտարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

I. $B \neq 0$:

---

*) Եթե A և B հաստատունները միաժամանակ հավասարվեն զրոյի, ապա չպարունակելով փոփոխականներ, (3) առնչությունը կդադարի հավասարում լինել:

Քննարկվող դեպքում (3) հավասարումից կստանանք

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}: \qquad (3')$$

Ինչպես տեսնում ենք (3') հավասարումն ունի (2) տեսքը: Հետևաբար, oxy կոորդինատական հարթության մեջ այն ներկայացնում է ուղիղ գիծ:

II. $A\neq 0, B=0$:

Դիտարկվող դեպքում (3) հավասարումը կընդունի

$$x=-\frac{C}{A} \qquad (3'')$$

տեսքը:

Քանի որ (3'') հավասարումն ունի (2'') տեսքը՝ հետևաբար oxy կոորդինատական հարթության մեջ այն ներկայացնում է oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ:

III. $C=0$:

Քննարկվող դեպքում (3) հավասարումն ընդունում է

$$Ax+By=0 \qquad (3''')$$

տեսքը, որը oxy կոորդինատական հարթության մեջ կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի հավասարում է:

Նույն ձևով քննարկելով մնացած դեպքերը՝ կարող ենք եզրակացնել, որ oxy կոորդինատական հարթության մեջ (3) հավասարումը ներկայացնում է ուղիղ գիծ:

Կատարված եզրակացությունը հիմք է տալիս բերելու հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 5: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (3) առնչությունը, որտեղ $A-$ն, $B-$ն և $C-$ն կամայական հաստատուններ են (ընդ որում՝ $A-$ն ու $B-$ն միաժամանակ զրո լինել չեն կարող), կոչվում է oxy կոորդինատական հարթության մեջ տրված ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարում:*

Ամփոփելով 1º և 2º կետերի արդյունքները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում oxy հարթության մեջ ներկայացնում է ուղիղ գիծ և հակառակը՝ oxy հարթության մեջ ընկած յուրաքանչյուր ուղիղ նկարագրվում է x և y ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի հավասարումով:*

Թեորեմ 1-ը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 1': *Որպեսզի $F(x,y)=0$ հավասարումն oxy հարթության մեջ ներկայացնի ուղիղ գիծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն x և y ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ ունենա առաջին աստիճան:*

Օրինակ 2: Գտնել հետևյալ հավասարումն ունեցող ուղղի անկյունային գործակիցը՝

$$2x-y+4=0:$$

Լուծում: Տրված հավասարումը լուծելով y-ի նկատմամբ՝ կունենանք

$$y = 2x + 4:$$

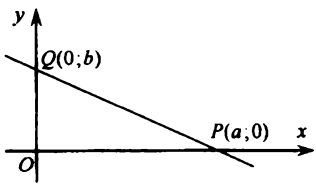
Ստացված հավասարումը համեմատելով (2) հավասարման հետ՝ եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է 2-ի:

3°. *Ուղիղ գծի հավասարումը հատվածներով:*

Այժմ ստանանք համապատասխանաբար ox և oy կոորդինատական առանցքների վրա տրված $P(a;0)$ և $Q(0;b)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը (նկ.27):

Տրված կետերով անցնող ուղղի հավասարումը փնտրենք (3) տեսքով:

A, B և C հաստատունների մեզ հետաքրքրող արժեքները գտնելու համար



նկ.27

P և Q կետերի կոորդինատները տեղադրենք (3) հավասարման մեջ: Արդյունքում կստանանք գծային համասեռ հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} Aa + C = 0, \\ Bb + C = 0: \end{cases}$$

Ստացված համակարգի հավասարումներից A և B հաստատուններն արտահայտելով C – ի միջոցով.

$$A = -\frac{C}{a}, \quad B = -\frac{C}{b} \tag{4}$$

և A-ի ու B-ի (4) արժեքները տեղադրելով (3) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$-\frac{C}{a}x - \frac{C}{b}y + C = 0: \tag{5}$$

Հաշվի առնելով, որ $C \neq 0$ (մեզ հետաքրքրող ուղիղը կոորդինատների սկզբնակետով չի անցնում), (5) հավասարումից կստանանք տրված P և Q կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1: \tag{6}$$

Սահմանում 6: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (6) առնչությունը կոչվում է oxy կոորդինատական հարթության մեջ տրված ուղղի հավասարում հատվածներով:*

Օրինակ 3: Տրված է ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումը.

$$3x - 2y - 6 = 0: \tag{ա}$$

Կազմել (ա) ուղղի հավասարումը հատվածներով:

Լուծում: Դիտարկվող հավասարման ազատ անդամը տանելով նրա աջ մաս և այդ հավասարման բոլոր անդամները բաժանելով 6-ի վրա՝ կստանանք որոնելի հավասարումը.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1$$

4°. *Տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղ-*

ղի հավասարումը:

Նկատի ունենալով, որ տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի դիրքը միակ ձևով է որոշվում կոորդինատական հարթության վրա՝ ստանանք $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարումը:

Ինչպես գիտենք, k անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումն ունի (2) տեսքը, որտեղ b – ն ենթակա է որոշման: Մյուս կողմից, քանի որ մեզ հետաքրքրող ուղիղը պետք է անցնի $M_0(x_0,y_0)$ կետով, ուստի այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարությունը՝

$$y_0 = kx_0 + b:$$

Վերջին հավասարությունից գտնելով b – ն և այն տեղադրելով (2) հավասարման մեջ՝ կստանանք $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և k անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարումը.

$$y - y_0 = k(x - x_0): \qquad (7)$$

Սահմանում 7: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (7) առնչությունը կոչվում է տրված կետով անցնող և տրված անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարում:*

Հասկանալի է, որ կոորդինատական oy առանցքին զուգահեռ ուղղի (և միայն այդ ուղղի) հավասարումը հնարավոր չէ ներկայացնել (7) տեսքով: Սակայն, ինչպես գիտենք, $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և oy առանցքին զուգահեռ ուղղի հավասարումն ունի $x = x_0$ տեսքը:

Օրինակ 4: Կազմել $A(2;3)$ կետով անցնող և $k = 5$ անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարումը:

Լուծում: Համաձայն (7) բանաձևի $A(2;3)$ կետով անցնող և $k = 5$ անկյունային գործակիցն ունեցող ուղղի հավասարումն ունի

$$y - 3 = 5(x - 2),$$

կամ որ նույնն է՝

$$y = 5x - 7$$

տեսքը:

5⁰. *Տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:*

Ստանանք oxy կոորդինատական հարթության $A_1(x_1,y_1)$ և $A_2(x_2,y_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը, ենթադրելով, որ այդ կետերն այնպես են դասավորված, որ նրանցով անցնող ուղիղը զուգահեռ չէ կոորդինատական առանցքներից որևէ մեկին $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$:

Քանի որ դիտարկվող ուղիղը պետք է անցնի A_1 կետով, ուստի, համաձայն (7) բանաձևի, այդ ուղղի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (7')$$

որտեղ k – ն ենթակա է որոշման:

Այուս կողմից, մեզ հետաքրքրող ուղիղը պետք է անցնի նաև A_2 կետով, ինչը նշանակում է, որ այդ կետի կոորդինատները պետք է բավարարեն (7') հավասարմանը.

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1):$$

Վերջին հավասարությունից գտնելով k – ի արժեքը.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (8)$$

(հիշենք, որ համաձայն ենթադրության՝ $x_1 \neq x_2$) և այն տեղադրելով (7') հավասարման մեջ՝ կստանանք oxy հարթության մեջ տրված $A_1(x_1, y_1)$ և $A_2(x_2, y_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}: \qquad (9)$$

Եթե, մասնավոր դեպքում, A_1 և A_2 կետերն ընկած են ox, կամ oy առանցքին զուգահեռ ուղղի վրա, ապա, ինչպես գիտենք, այդ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը համապատասխանաբար ունի

$$y = y_1 \quad \text{կամ} \quad x = x_1$$

տեսքը:

Սահմանում 8: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (9) առնչությունը կոչվում է տրված երկու կետերով անցնող ուղղի հավասարում:*

Օրինակ 5: Գտնել $M(2;1)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որն անցնում է

$$x + y - 1 = 0 \text{ և } x - y + 2 = 0$$

ուղիղների հատման կետով:

Լուծում: Նախ լուծենք հավասարումների

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

համակարգը և գտնենք տրված ուղիղների հատման կետը.

$$B\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right):$$

Այնուհետև, օգտվելով (9) հավասարումից՝ կազմենք M և B կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

$$\frac{x + 1/2}{5/2} = \frac{y - 3/2}{-1/2}: \qquad (բ)$$

Պարզեցնելով (բ) հավասարումը՝ վերջնականապես կունենանք

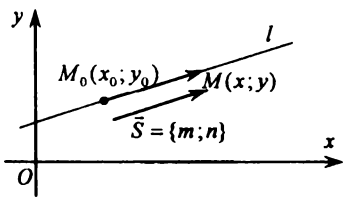
$$x+5y-7=0:$$

6°. *Ուղիղ գծի կանոնական հավասարումը:*

Սահմանում 9. *$\vec{s}$ վեկտորը կոչվում է l ուղղի ուղղորդ վեկտոր (կամ պարզապես՝ l ուղղի ուղղորդ), եթե այն զուգահեռ է այդ ուղղին (կամ գտնվում է նրա վրա):*

Նկատի ունենալով, որ տրված կետով անցնող և տրված ուղղորդն ունեցող ուղղի դիրքը միակ ձևով է որոշվում կոորդինատական հարթության վրա՝ ստանանք $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և $\vec{s}=\{m;n\}$ ուղղորդն ունեցող ուղղի հավասարումը (նկ.28):

Որոնելի հավասարումը ստանալու համար, դիտարկվող ուղղի վրա վերցնենք M_0 – ից տարբեր որևէ $M(x;y)$ կետ: Քանի որ $\overrightarrow{M_0M}$ և $\vec{s}$ վեկտորները համագիծ են [1,u8], հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի λ թիվ, որ տեղի ունի



նկ.28

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{s} \qquad (10)$$

վեկտորական հավասարությունը [3,բ1]:

$M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և $\vec{s}=\{m;n\}$ ուղղորդն ունեցող ուղղի հավասարումը ստանալու համար մնում է (10) վեկտորական հավասարությունը գրել պրոյեկցիաներով.

$$x-x_0=\lambda m,\ \ y-y_0=\lambda n \qquad (11)$$

և ստացված հավասարություններից արտաքսել λ-ն.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}: \qquad (12)$$

Սահմանում 10: *x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (12) առնչությունը կոչվում է տրված կետով անցնող և տրված ուղղորդն ունեցող ուղղի կանոնական հավասարում:*

Նշենք, որ (12) հավասարման մեջ m – ն ու n – ը միաժամանակ զրո լինել չեն կարող, քանի որ ուղղի ուղղորդ վեկտորը ոչ զրոյական վեկտոր է: Սակայն այդ թվերից միայն մեկը կարող է զրո լինել: Նման դեպքերում մենք կհասկանանք ոչ թե զրոյի վրա բաժանում, այլ պարզապես այն, որ $\vec{s}$ վեկտորի համապատասխան կոորդինատը հավասար է զրոյի:

Օրինակ 6: Կազմել $M_0(2;-3)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է $E(1;2)$ և $F(-1;5)$ կետերը միացնող ուղղին:

Լուծում: Մեզ հետաքրքրող ուղղի հավասարումը փնտրենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}, \qquad (գ)$$

որտեղ $\vec{s}=\{m;n\}$ վեկտորը այդ ուղղի ուղղորդն է:

Քանի որ (գ) հավասարումն ունեցող ուղիղը զուգահեռ է E և F կետերով անցնող ուղղին.

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{3},$$

հետևաբար $\vec{s}=\{-2;3\}$ վեկտորը նաև (գ) ուղղի ուղղորդն է, որտեղից հետևում է, որ որոնելի հավասարումն ունի

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{3},$$

կամ որ նույնն է՝

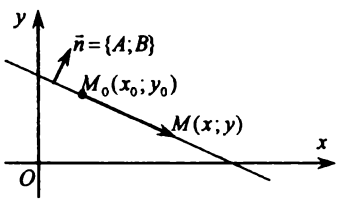
$$3x+2y=0$$

տեսքը:

7°. Տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող ուղղի հավասարումը:

Սահմանում 11: *Տրված ուղղին ուղղահայաց ցանկացած վեկտոր կոչվում է այդ ուղղի նորմալ վեկտոր (կամ պարզապես՝ այդ ուղղի նորմալ):*

Նկատի ունենալով, որ տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող ուղղի դիրքը միակ ձևով է որոշվում կոորդինատական հարթության վրա՝ ստանանք $M_0(x_0;y_0)$ կետով անցնող և $\vec{n}=\{A;B\}$ նորմալն ունեցող ուղղի հավասարումը (նկ.29):



նկ.29

Որոնելի հավասարումը ստանալու համար դիտարկվող ուղղի վրա վերցնենք M_0 – ից տարբեր որևէ $M(x,y)$ կետ: Քանի որ $\overrightarrow{M_0M}$ և $\vec{n}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են, հետևաբար այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի [4,4°].

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0,$$

կամ [3,(11)], [4,(7)]

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0: \qquad (13)$$

***Սահմանում 12**: x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված (13) առնչությունը կոչվում է տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող ուղղի հավասարում:*

Օրինակ 7: Կազմել $M(1,2)$ կետով անցնող այն ուղղի հավասարումը, որն ուղղահայաց է $E(4;3)$ և $F(-2;1)$ կետերը միացնող ուղղին:

Լուծում: Մեզ հետաքրքրող ուղղի հավասարումը փնտրենք

$$A(x-1)+B(y-2)=0 \qquad (դ)$$

տեսքով, որտեղ $\vec{n} = \{A; B\}$ վեկտորն այդ ուղղի նորմալն է:

Քանի որ (դ) հավասարումն ունեցող ուղիղն ուղղահայաց է E և F կետերով անցնող ուղղին.

$$\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2}, \qquad (ե)$$

հետևաբար, որպես (դ) ուղղի նորմալ, կարող ենք վերցնել (ե) ուղղի ուղղորդը, ինչը նշանակում է, որ որոնելի հավասարումն ունի

$$6(x-1) + 2(y-1) = 0,$$

կամ որ նույնն է՝

$$3x + y - 5 = 0$$

տեսքը:

Դիտողություն 1: *$(-Ax_0 - By_0)$– ն նշանակելով C– ով՝ (13) հավասարումից կստանանք $M_0(x_0; y_0)$ կետով անցնող և $\vec{n} = \{A; B\}$ նորմալն ունեցող ուղղի ընդհանուր հավասարումը.*

$$Ax + By + C = 0: \qquad (13')$$

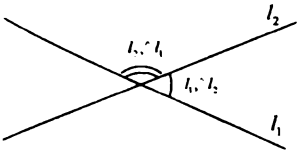
Համեմատելով (13) և (13) հավասարումները՝ եզրակացնում ենք, որ ուղղի ընդհանուր հավասարման փոփոխականների գործակիցները այդ ուղղի նորմալ վեկտորի կոորդինատներն են:

Այժմ անցնենք երկու ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու խնդրին:

Դիցուք oxy կոորդինատական հարթության մեջ տրված են l_1 և l_2 ուղիղները (նկ.30):

Սահմանում 13: *l_1 ուղղի կազմած անկյուն l_2 ուղղի հետ ասելով կհասկանանք այն ամենափոքր անկյունը, որով ժամացույցի սլաքի շարժման հակառակ ուղղությամբ պետք է պտտել l_1 ուղիղը, մինչև այն համընկնի l_2 ուղղի հետ (կամ դառնա նրան զուգահեռ):*

Նույն ձևով սահմանվում է նաև l_2 ուղղի կազմած անկյունը l_1 ուղղի հետ:



Նկ.30

Եթե l_1 ուղղի կազմած անկյունը l_2 ուղղի հետ նշանակենք $(l_1,\hat{}\, l_2)$– ով, իսկ l_2 ուղղի կազմած անկյունը l_1 ուղղի հետ՝ $(l_2,\hat{}\, l_1)$– ով, ակնհայտորեն կստանանք (նկ.30)

$$l_1,\hat{}\, l_2 + l_2,\hat{}\, l_1 = \pi \quad (0 \le l_1,\hat{}\, l_2 \le \pi;\ 0 \le l_2,\hat{}\, l_1 \le \pi): \qquad (14)$$

Սահմանում 14: *Հարթության մեջ տրված l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք $l_1,\hat{}\, l_2$ և $l_2,\hat{}\, l_1$ կից անկյուններից փոքրը:*)*

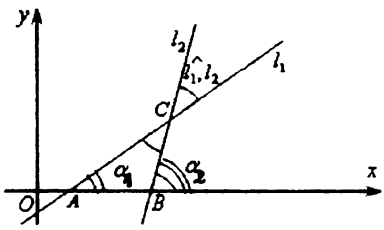
Քանի որ երկու ուղիղներով կազմված կից անկյուններից փոքրը չի կարող բութ անկյուն լինել, հետևաբար երկու ուղիղներով կազմված անկյունը նույն-

*) Ակնհայտ է, որ $l_1,\hat{}\, l_2 = l_2,\hat{}\, l_1$ հավասարության դեպքում l_1 և l_2 ուղիղները կլինեն փոխուղղահայաց:

պես չի կարող բութ անկյուն լինել:

Վերոգրյալ դատողություններից եզրակացնում ենք, որ հարթության մեջ տրված l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել $l_1,\hat{}\,l_2$ և $l_2,\hat{}\,l_1$ անկյուններից որևէ մեկը, օրինակ $l_1,\hat{}\,l_2$-ը: Եթե $(l_1,\hat{}\,l_2)$-ը բութ անկյուն չէ, ուրեմն այն որոնելի անկյունն է, իսկ եթե այն բութ անկյուն է, ուրեմն l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է $[\pi-(l_1,\hat{}\,l_2)]$-ի:

$l_1,\hat{}\,l_2$ անկյունը գտնելու համար ենթադրենք l_1 և l_2 ուղիղների անկյունային գործակիցները համապատասխանաբար հավասար են k_1-ի և k_2-ի: Այդ ուղիղների թեքման անկյուններն ox առանցքի նկատմամբ համապատասխանաբար նշանակելով α_1-ով և α_2-ով (նկ.31) և որոշակիության համար ենթադրելով, որ $\alpha_1<\alpha_2$, ABC եռանկյունից կստանանք



նկ.31

$$l_1,\hat{}\,l_2=\alpha_2-\alpha_1 \qquad (15)$$

Օգտվելով եռանկյունաչափությունից հայտնի հետևյալ բանաձևից՝

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta},$$

և ենթադրելով, որ դիտարկվող ուղիղները փոխուղղահայաց չեն (հակառակ դեպքում $l_1,\hat{}\,l_2$ անկյունը հավասար է $\pi/2$-ի) և նրանցից ոչ մեկը զուգահեռ չէ oy առանցքին, (15) հավասարության հաշվառումով կունենանք

$$tg(l_1,\hat{}\,l_2)=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1},$$

կամ

$$tg(l_1,\hat{}\,l_2)=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\left(\alpha_1,\alpha_2,l_1,\hat{}\,l_2\neq\frac{\pi}{2}\right): \qquad (16)$$

Այսպիսով, ունենալով l_1 և l_2 ուղիղների անկյունային գործակիցները՝ (16) բանաձևով կգտնենք $l_1,\hat{}\,l_2$ անկյան տանգենսը, ինչը նշանակում է, որ կգտնենք $l_1,\hat{}\,l_2$ անկյունը:

Հասկանալի է, որ 31-րդ նկարում փոխելով l_1 և l_2 ուղիղների տեղերը, այսինքն ընդունելով, որ $\alpha_2<\alpha_1$, նույն ձևով կստանանք

$$tg(l_2,\hat{}\,l_1)=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\left(\alpha_1,\alpha_2,l_2,\hat{}\,l_1\neq\frac{\pi}{2}\right): \qquad (16')$$

Օրինակ 8: Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$x+2y-4=0,\quad 3x+y-2=0:$$

Լուծում: Տրված ուղիղներից առաջինը նշանակելով l_1 -ով, իսկ երկրորդը՝ l_2 -ով, կունենանք

$$k_1=-1/2,\quad k_2=-3,$$

որտեղ k_1 – ը և k_2 – ը համապատասխանաբար l_1 և l_2 ուղիղների անկյունային գործակիցներն են: Այնուհետև օգտվելով (16) բանաձևից՝ կստանանք

$$tg\left(l_1,\hat{}\, l_2\right)=-1,$$

որտեղից $l_1,\hat{}\, l_2$ անկյան համար կունենանք

$$l_1,\hat{}\, l_2=\frac{3\pi}{4}:$$

Քանի որ $l_1,\hat{}\, l_2$ -ը բութ անկյուն է, ուստի դիտարկվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է $\left[\pi-\left(l_1,\hat{}\, l_2\right)\right]$– ի, այսինքն՝ $\pi/4$ – ի

Նկատի ունենալով, որ երկու ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է այդ ուղիղների նորմալներով կազմված անկյանը, դիտարկվող խնդիրը կարող ենք լուծել նաև՝ հանգեցնելով այն տրված ուղիղների $\vec{n}_1=\{1,2\}$ և $\vec{n}_2=\{3;1\}$ նորմալներով կազմված անկյունը գտնելուն [4,(10)]:

Դիտողություն 2: *Եթե l_1 և l_2 ուղիղներից որևէ մեկը, օրինակ l_2 -ը, զուգահեռ է oy առանցքին, ապա $l_1,\hat{}\, l_2$ անկյան համար կստանանք*

$$l_1,\hat{}\, l_2=\frac{\pi}{2}-\alpha_1,$$

որտեղից կունենանք

$$tg\left(l_1,\hat{}\, l_2\right)=\frac{1}{k_1}: \qquad (15')$$

Օրինակ 9: Գտնել հետևյալ ուղիղներով կազմված անկյունը՝

$$y=\sqrt{3}x+5,\quad x-3=0:$$

Լուծում: Տրված ուղիղներից առաջինը նշանակելով l_1 -ով, իսկ երկրորդը՝ l_2 -ով, կունենանք

$$\alpha_1=\pi/3,\qquad \alpha_2=\pi/2,$$

որտեղ α_1 -ը և α_2 -ը համապատասխանաբար l_1 և l_2 ուղիղների թեքման անկյուններն են ox առանցքի նկատմամբ:

Օգտվելով (15՝) բանաձևից՝ դիտարկվող ուղիղներով կազմված անկյան համար կստանանք

$$l_1,\hat{}\, l_2=\frac{\pi}{6}.$$

Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի պայմանների իրականացման դեպքում համապատասխանաբար k_1 և k_2 անկյունային գործակիցներ ունեցող l_1 և l_2 ուղիղ-

ները կլինեն զուգահեռ կամ կլինեն փոխուղղահայաց:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ երկու ուղիղներ կլինեն զուգահեռ այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ ուղիղների ու երրորդ ուղղի հատումից առաջացած համապատասխան անկյունները լինեն հավասար: Ասվածից հետևում է, որ l_1 և l_2 ուղիղները կլինեն զուգահեռ այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ ուղիղների թեքման անկյուններն ox առանցքի նկատմամբ, հետևաբար՝ նաև այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները, լինեն հավասար:

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի l_1 և l_2 ուղիղները լինեն զուգահեռ անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ ուղիղների անկյունային գործակիցները լինեն հավասար. *)*

$$k_1 = k_2: \tag{17}$$

Անցնելով երկու ուղիղների փոխուղղահայացության պայմանների արտածմանը՝ նկատենք, որ համաձայն (15) բանաձևի՝ l_1 և l_2 ուղիղները կլինեն փոխուղղահայաց այն և միայն այն ժամանակ, երբ տեղի ունենա

$$l_1,\hat{}\, l_2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2},$$

կամ որ նույնն է՝

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$$

հավասարությունը: Ստացված հավասարությունից հետևում է, որ

$$tg\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$$

կամ

$$tg\alpha_1 tg\alpha_2 = -1 \qquad \left(\alpha_1,\ \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}\right):$$

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Որպեսզի l_1 և l_2 ուղիղները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ ուղիղների անկյունային գործակիցների արտադրյալը հավասար լինի մինուս մեկի.*

$$k_1 k_2 = -1 \qquad \left(\alpha_1, \alpha_2 \neq \frac{\pi}{2}\right): \tag{18}$$

Օրինակ 10: Ստանալ $M(-2,-5)$ կետով անցնող և $3x + 4y + 5 = 0$ ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը:

Լուծում: Տրված ուղղի հավասարումը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4},$$

եզրակացնում ենք, որ այդ ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է $-3/4$ -ի:

---

*) Նշենք, որ երկու ուղիղների զուգահեռության պայմանը կարող ենք ստանալ նաև (16) բանաձևից:

Խնդրի լուծումն ավարտելու համար մնում է (7) և (17) բանաձևերի օգնությամբ կազմել որոնելի հավասարումը.

$$3x+4y+26=0:$$

Օրինակ 11: Ստանալ կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և $y=4x+5$ ուղղին ուղղահայաց ուղղի հավասարումը:

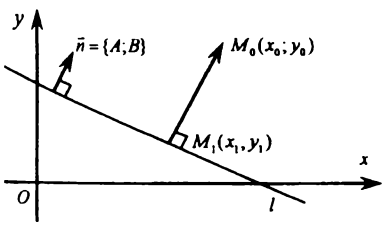
Լուծում: Քանի որ տրված ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է 4-ի, ուստի, համաձայն (18) բանաձևի, որոնելի ուղղի անկյունային գործակիցը հավասար է $-1/4$ -ի: Ունենալով մեզ հետաքրքրող ուղղի անկյունային գործակիցը՝ (7) բանաձևի միջոցով կստանանք նաև այդ ուղղի հավասարումը.

$$x+4y=0\cdot$$

Վերջում դնենք գործնականում կարևոր նշանակություն ունեցող հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել տրված $M_0(x_0;y_0)$ կետի հեռավորությունը (3) հավասարումն ունեցող l ուղղից:

Դրված խնդիրը լուծելու համար M_0 կետից l ուղղին տարված ուղղահայացի հիմքը նշանակենք $M_1(x_1;y_1)$-ով և նկատենք, որ M_0 կետի հեռավորությունը տրված ուղղից հավասար է $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորի երկարությանը.



Նկ.32

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|:$$

Հաշվի առնելով, որ $\vec{n}$ և $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորները համագիծ են (երկու վեկտորներն էլ ուղղահայաց են տրված ուղղին), կունենանք

$$\cos\left(\vec{n},\hat{}\,\overrightarrow{M_1M_0}\right)=\pm 1: \qquad (19)$$

Այնուհետև օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից [4,u1], (19) հավասարությունների հաշվառումով կստանանք

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\left|\cos\left(\vec{n},\hat{}\,\overrightarrow{M_1M_0}\right)\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$$

կամ

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\vec{n}\right|d,$$

որտեղից կունենանք

$$d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}: \qquad (20)$$

Հաշվի առնելով, որ M_1 կետը պատկանում է l ուղղին, և օգտվելով կոորդինատներով տրված վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից [4,(7)], կստանանք

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C:$$

$\vec{n}$ և $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (20) բանաձևի մեջ՝ l ուղղից M_0 կետի ունեցած հեռավորության համար վերջնականապես կունենանք

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}: \qquad (21)$$

Այսպիսով, տրված կետի հեռավորությունը տրված ուղղից գտնելու համար անհրաժեշտ է այդ կետի կոորդինատները տեղադրել տրված ուղղի ընդհանուր հավասարման ձախ մասի մեջ, վերցնել ստացված թվի բացարձակ արժեքը և այն բաժանել դիտարկվող ուղղի նորմալ վեկտորի երկարության վրա:

Օրինակ 12: Կազմել այն ուղիղների հավասարումները, որոնք զուգահեռ են $3x + 4y - 3 = 0$ հավասարումն ունեցող ուղղին և գտնվում են նրանից մեկ միավոր հեռավորության վրա:

Լուծում: Քանի որ մեզ հետաքրքրող ուղիղները զուգահեռ են տրված ուղղին, հետևաբար տրված ուղղի նորմալը հանդիսանում է նորմալ նաև այդ ուղիղների համար: Ասվածից բխում է, որ որոնելի հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$3x + 4y + c = 0, \qquad (q)$$

որտեղ c հաստատունը ենթակա է որոշման:

c -ի արժեքը գտնելու համար տրված ուղղի վրա վերցնենք որևէ կետ, օրինակ $M(1;0)$-ն, օգտվելով (21) բանաձևից, գտնենք այդ կետի հեռավորությունը (q) ուղղից և այդ հեռավորության համար ստացած արժեքը հավասարեցնենք մեկի.

$$\frac{|c + 3|}{5} = 1$$

Լուծելով ստացված հավասարումը՝ կունենանք

$$c = -8, \text{ կամ } c = 2:$$

c հաստատունի համար ստացած արժեքները տեղադրելով (q) հավասարման մեջ՝ կստանանք որոնելի հավասարումները.

$$3x + 4y - 8 \quad 0 \text{ կամ } 3x + 4y + 2 = 0:$$

§7. Շրջանագծի հավասարումը: Էլիպսի և հիպերբոլի կանոնական հավասարումները: Հիպերբոլի ասիմպտոտները: Պարաբոլի կանոնական հավասարումը:

Նախորդ պարագրաֆում մենք համոզվեցինք, որ կոորդինատական oxy հարթության վրա ուղիղ գիծը տրվում է x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի հավասարումով [6,2°]: Այս պարագրաֆում կդի-

տարկենք կորեր, որոնց հավասարումներն այդ փոփոխականների նկատմամբ ունեն երկրորդ աստիճան:

x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված երկրորդ աստիճանի ընդհանուր հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

որտեղ A-ն, B-ն, C-ն, D-ն, E-ն և F-ը կամայական հաստատուններ են, ընդ որում A, B և C թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից (հակառակ դեպքում (1) հավասարման կարգը երկուսից փոքր կլինի):

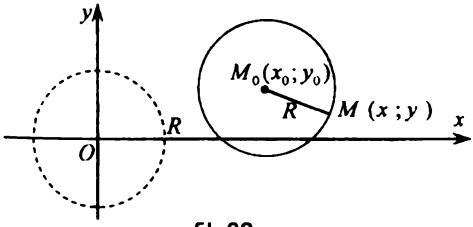
Սահմանում 1: *Կոորդինատական oxy հարթության մեջ տրված այն կորը, որը նկարագրվում է x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված երկրորդ աստիճանի հավասարումով, կոչվում է երկրորդ կարգի կոր:*

1° *Շրջանագիծ:*

Սահմանում 2: *Հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունը տրված կետից (որը կոչվում է կենտրոն) հաստատուն է, կոչվում է շրջանագիծ:*

Սահմանում 3: *Շրջանագծի որևէ կետը նրա կենտրոնին միացնող հատվածը կոչվում է այդ շրջանագծի շառավիղ:*

R շառավղով և $M_0(x_0;y_0)$ կենտրոնով շրջանագծի (նկ.33) հավասարումը ստանալու համար այդ շրջանագծի վրա վերցնենք կամայական $M(x;y)$ կետ: Համաձայն սահմանման՝ M և M_0 կետերի հեռավորությունը կախված չէ շրջանագծի վրա M կետի դիրքից և հավասար է R-ի: Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևից՝ կունենանք [4,(9)]



նկ.33

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R: \qquad (2)$$

Մեզ հետաքրքրող շրջանագծի հավասարումը ստանալու համար մնում է (2) հավասարության երկու կողմերը քառակուսի բարձրացնել.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \qquad (2')$$

Եթե, մասնավոր դեպքում, R շառավղով շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է $ox\,(y_0 = 0)$, կամ $oy\,(x_0 = 0)$ առանցքի վրա, ապա այդ կորի հավասարումը համապատասխանաբար ընդունում է

$$(x-x_0)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{կամ} \quad x^2 + (y-y_0)^2 = R^2 \qquad (2'')$$

տեսքը:

Իսկ եթե R շառավղով շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է $(x_0 = y_0 = 0)$, ապա այդ կորի հավասարումն ընդունում է հետևյալ պարզ

տեսքը՝

$$x^2 + y^2 = R^2: \qquad (2''')$$

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ հավասարումով տրված շրջանագծի շառավիղը և կենտրոնի կոորդինատները՝

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0. \qquad (ա)$$

Լուծում: Նախ համոզվենք, որ (ա) հավասարումը կոորդինատական oxy հարթության մեջ ներկայացնում է շրջանագիծ:

Համոզվելու համար տրված հավասարման երկու կողմերին ավելացնենք 5 և այն ներկայացնենք

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9,$$

կամ որ նույնն է՝

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2 \qquad (բ)$$

տեսքով:

Համեմատելով (բ) հավասարումը (2′) հավասարման հետ՝ եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող շրջանագծի շառավիղը հավասար է 3-ի, իսկ կենտրոնի կոորդինատները՝ 1-ի և -2-ի՝

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -2:$$

Նկատենք, որ բերված խնդրում շրջանագծի (ա) հավասարումն ունի (1) տեսքը, այսինքն այն x և y փոփոխականների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի հավասարում է:

Պարզվում է, որ ընդհանուր դեպքում էլ շրջանագծի հավասարումն ունի այդ տեսքը:

Իրոք, (2) հավասարման մեջ բացելով փակագծերը և միացնելով նման անդամները՝ այն կբերենք (1) տեսքի.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2^{IV})$$

որտեղ

$$D = -2x_0, \quad E = -2y_0, \quad F = x_0^2 + y_0^2 - R^2:$$

Ինչպես տեսնում ենք, շրջանագծի հավասարման մեջ x^2-ու և y^2-ու գործակիցները հավասար են իրար, իսկ այդ փոփոխականների արտադրյալը բացակայում է:

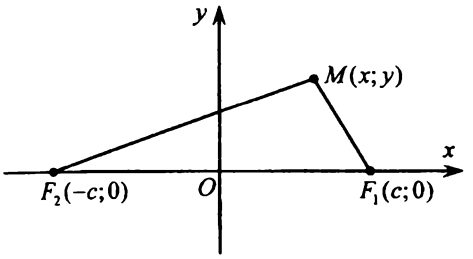
Վերոգրյալից հետևում է, որ երկրորդ աստիճանի ոչ բոլոր հավասարումներն են ներկայացնում շրջանագիծ:

2° *Էլիպս:*

Սահմանում 4: *Հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների գումարը տրված երկու կետերից (որոնք կոչվում են կիզակետեր և նշանակվում F_1-ով և F_2-ով) հաստատուն է, կոչվում է էլիպս:*

Նշենք, որ էլիպսի սահմանման մեջ մտնող հաստատունը մեծ է կիզակետերի միջև եղած հեռավորությունից:

Էլիպսի հավասարումը ստանալու համար կիզակետերը միացնող ուղիղը



Նկ.34

(F_2-ից դեպի F_1 ուղղությամբ) համարենք աբցիսների առանցք (նկ.34), իսկ F_2F_1 հատվածի միջնակետը՝ կոորդինատների սկզբնակետ: F_2F_1 հատվածի երկարությունը նշանակելով $2c$-ով, կստանանք կիզակետերի կոորդինատները՝

$$F_2(-c;0),\quad F_1(c;0):$$

Այնուհետև վերցնելով էլիպսի սահմանմանը բավարարող կամայական $M(x,y)$ կետ՝ կունենանք

$$F_2M + F_1M = 2a$$

կամ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad (3)$$

որտեղ $2a$-ն դիտարկվող կորի սահմանման մեջ մտնող հաստատունն է:

Ընտրված կոորդինատական համակարգում (3)-ը էլիպսի հավասարում է: Այն ավելի պարզ տեսքի բերելու համար առաջին արմատը տեղափոխենք հավասարման աջ մաս, ստացված հավասարման երկու կողմերը բարձրացնենք քառակուսի և միացնենք նման անդամները: Արդյունքում կստանանք

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (3')$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի և նորից միացնելով առաջացած նման անդամները՝ կունենանք

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2): \qquad (3'')$$

Հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի $a>c$ և կատարելով

$$b^2=a^2-c^2 \qquad (4)$$

նշանակում՝ (3″) հավասարումից կստանանք մեզ հետաքրքրող էլիպսի կանոնական հավասարումը.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1: \qquad (5)$$

Էլիպսի տեսքը պարզելու համար նկատենք, որ (5) հավասարումը պարունակում է ընթացիկ կոորդինատների միայն քառակուսիները: Հետևաբար, եթե $M(x,y)$ կետը պատկանում է այդ հավասարումով տրվող էլիպսին, ապա այդ կորին են պատկանում նաև $M(-x,y)$, $M(x,-y)$ և $M(-x,-y)$ կետերը: Ասվածը նշանակում է, որ ընտրված կոորդինատական համակարգում, (5) հավասարումն ունեցող էլիպսի համար կոորդինատական առանցքները հանդիսանում են համաչափության առանցքներ:

Սահմանում 5: *Էլիպսի համաչափության առանցքների հատման կետը կոչվում է էլիպսի համաչափության կենտրոն կամ պարզապես՝ էլիպսի կենտրոն, իսկ նրա կիզակետերը պարունակող առանցքը՝ կիզակետային առանցք:*

էլիպսի և նրա համաչափության առանցքների հատման կետերը կոչվում են էլիպսի գագաթներ:

էլիպսի կանոնական հավասարման մեջ հաջորդաբար ընդունելով $y=0$ և $x=0$, հեշտությամբ կհամոզվենք, որ

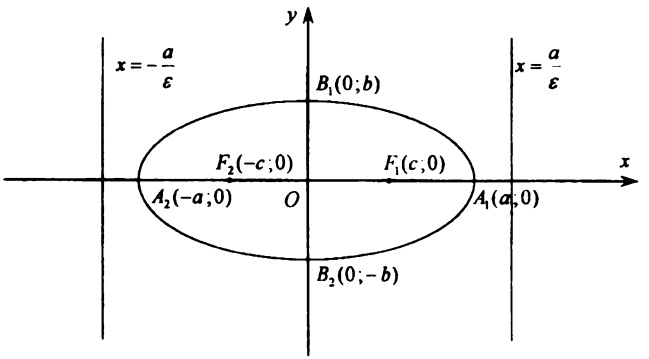
$$A_2(-a;0),\quad A_1(a;0),\quad B_2(0;-b) \text{ և } B_1(0;b)$$

կետերը (5) հավասարումով տրվող էլիպսի գագաթներն են (նկ.35):

Սահմանում 6: *էլիպսի հանդիպակաց գագաթները միացնող A_2A_1 և B_2B_1 հատվածները, ինչպես նաև այդ հատվածների $2a$ և $2b$ երկարությունները, կոչվում են (5) հավասարումն ունեցող էլիպսի համապատասխանաբար մեծ և փոքր առանցքներ, իսկ OA_1 և OB_1 հատվածները (որտեղ 0-ն էլիպսի կենտրոնն է), ինչպես նաև այդ հատվածների a և b երկարությունները՝ նույն էլիպսի համապատասխանաբար մեծ և փոքր կիսաառանցքներ:*

Քանի որ (5) հավասարումով տրվող էլիպսը համաչափ է կոորդինատական առանցքների նկատմամբ, ուստի այդ կորի գրաֆիկն ամբողջությամբ ստանալու համար բավական է կառուցել նրա գրաֆիկը կոորդինատական առաջին քառորդում $(x\ge 0, y\ge 0)$ և ստացված կորը համաչափ արտապատկերել կոորդինատական առանցքների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Ինչպես տեսանք $x=0$ արժեքին կոորդինատական առաջին քառորդում համապատասխանում է (5) էլիպսի B_1 գագաթը: Այնուհետև հեշտ է նկատել, որ x-ը զրոյից մինչև a փոփոխելիս (էլիպսի կանոնական հավասարումից երևում է, որ x-ը a-ից մեծ արժեք ընդունել չի կարող), y-ի համապատասխան արժեքները նվազելով՝ b-ից դառնում են զրո:



նկ.35

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ եզրակացնում ենք, որ (5) կանոնական հավասարումն ունեցող էլիպսն ունի 35-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Մասնավոր դեպքում, (5) հավասարման մեջ ընդունելով $b=a(c=0)$, կստանանք

$$x^2+y^2=a^2, \tag{5'}$$

ինչը նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում էլիպսը վերածվում է շրջանագծի:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ կարող ենք շրջանագիծը համարել հավասար կիսաառանցքներով էլիպս:

a,b,c հաստատուններից բացի (5) էլիպսի թվային բնութագրիչներից է նաև նրա էքսցենտրիսիտետը:

Սահմանում 7: *էլիպսի կիզակետերի միջև եղած հեռավորության և նրա մեծ առանցքի երկարության հարաբերությունը կոչվում է էլիպսի էքսցենտրիսիտետ:*

էլիպսի էքսցենտրիսիտետը նշանակելով ε -ով, համաձայն սահմանման՝ (5) հավասարումն ունեցող էլիպսի համար կստանանք

$$\varepsilon = \frac{c}{a}: \qquad (6)$$

Քանի որ c -ն a -ից փոքր, ոչ բացասական թիվ է (շրջանագծի դեպքում $c=0$), հետևաբար էլիպսի էքսցենտրիսիտետը մեկից փոքր ոչ բացասական թիվ է.

$$0 \le \varepsilon < 1:$$

Վերջում ծանոթանանք նաև էլիպսի դիրեկտրիսների հետ:

Սահմանում 8: *էլիպսի կիզակետային առանցքին ուղղահայաց և նրա կենտրոնից a/ε $(a/\varepsilon > a)$ չափով հեռացած ուղիղները կոչվում են (5) հավասարումով տրվող էլիպսի դիրեկտրիսներ:*

Օրինակ 2: Կազմել հետևյալ կանոնական հավասարումն ունեցող էլիպսի ձախ կիզակետով և ներքևի գագաթով անցնող ուղղի հավասարումը՝

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad (գ)$$

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ դիտարկվող էլիպսի a և b կիսաառանցքները համապատասխանաբար հավասար են 5-ի և 4-ի և օգտվելով (4) նշանակումից, կստանանք, որ տրված էլիպսի համար $c=3$:

Այսպիսով, պահանջվում է կազմել $F_2(-3;0)$ և $B_2(0;-4)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը: Նախորդ պարագրաֆի (9) բանաձևի օգնությամբ կազմելով այդ հավասարումը և պարզեցնելով այն՝ կստանանք դիտարկվող խնդրի լուծումը.

$$4x + 3y + 12 = 0:$$

3° *Հիպերբոլ:*

Սահմանում 9: *Հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունների տարբերությունը տրված երկու կետերից (որոնք կոչվում են կիզակետեր) հաստատուն է, կոչվում է հիպերբոլ:*

Նշենք, որ հիպերբոլի սահմանման մեջ մտնող հաստատունը դրական է և փոքր կիզակետերի միջև եղած հեռավորությունից:

Կոորդինատական առանցքներն ընտրելով այնպես, ինչպես էլիպսի դեպքում և կիզակետերի հեռավորությունը նշանակելով $2c$ -ով՝ կստանանք այդ կետերի կոորդինատները.

$$F_2(-c;0), \quad F_1(c;0):$$

Այնուհետև վերցնելով հիպերբոլի սահմանմանը բավարարող կամայական

$M(x,y)$ կետ՝ կունենանք

$$F_2M - F_1M = \pm 2a, \tag{7}$$

որտեղ $2a$-ն դիտարկվող կորի սահմանման մեջ մտնող հաստատունն է: Հասկանալի է, որ $F_2M > F_1M$ դեպքում (7) հավասարության աջ մասում պետք է ընտրել պլյուս նշանը, իսկ $F_2M < F_1M$ դեպքում՝ մինուս նշանը:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևից, կարող ենք (7) հավասարությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a: \tag{7'}$$

Ընտրված կոորդինատական համակարգում (7՝)-ը հիպերբոլի հավասարումն է: Այն ավելի պարզ տեսքի բերելու համար առաջին արմատը տեղափոխենք հավասարման աջ մաս, ստացված հավասարման երկու կողմերը բարձրացնենք քառակուսի և միացնենք առաջացած նման անդամները: Արդյունքում կստանանք

$$cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{7''}$$

Վերջին հավասարման երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի և նորից միացնելով առաջացած նման անդամները՝ կունենանք

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2): \tag{7'''}$$

Հաշվի առնելով, որ ըստ պայմանի $a < c$ և կատարելով հետևյալ նշանակումը՝

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{8}$$

(7՝՝) հավասարումից կստանանք մեզ հետաքրքրող հիպերբոլի կանոնական հավասարումը.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \tag{9}$$

Հիպերբոլի տեսքը պարզելու համար նկատենք, որ նրա կանոնական հավասարումն էլ է պարունակում ընթացիկ կոորդինատների միայն քառակուսիները, ինչը նշանակում է, որ կոորդինատական առանցքները հիպերբոլի համար էլ են համաչափության առանցքների դեր կատարում:

Սահմանում 10: *Հիպերբոլի համաչափության առանցքների հատման կետը կոչվում է հիպերբոլի համաչափության կենտրոն, կամ պարզապես՝ հիպերբոլի կենտրոն, իսկ նրա կիզակետերը պարունակող առանցքը՝ կիզակետային առանցք: Հիպերբոլի և նրա համաչափության առանցքների հատման կետերը կոչվում են հիպերբոլի գագաթներ:*

Նշենք, որ ինչպես և (5) հավասարումն ունեցող էլիպսի դեպքում, (9) հավասարումով տրվող հիպերբոլի կիզակետային առանցքը համընկնում է կոորդինատական ox առանցքի հետ, իսկ համաչափության կենտրոնը՝ կոորդինատների սկզբնակետի հետ:

Հիպերբոլի կանոնական հավասարման մեջ ընդունելով $y = 0$, կստանանք այդ հիպերբոլի և ox առանցքի հատման կետերի աբսցիսները.

$$x = \pm a:$$

Դիտարկվող հիպերբոլի և կոորդինատական oy առանցքի հատման կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է (9) հավասարման մեջ ընդունել $x = 0$: Այդ դեպքում կունենանք

$$y^2 = -b^2: \tag{10}$$

Քանի որ (10) հավասարումը իրական լուծում չունի, հետևաբար (9) հավասարումն ունեցող հիպերբոլի գրաֆիկը oy առանցքի հետ չի հատվում:

Այսպիսով, դիտարկվող հիպերբոլն ունի ընդամենը երկու գագաթ.

$$A_1(a;0), \quad A_2(-a;0),$$

ընդ որում այդ գագաթների հեռավորությունը հավասար է $2a$-ի:

Սահմանում 11: *(9) հավասարումն ունեցող հիպերբոլի համաչափության առանցքներից մեկը (կիզակետային առանցքը) կոչվում է այդ հիպերբոլի իրական առանցք, իսկ մյուսը՝ կեղծ առանցք: OA_1 և OB_1 հատվածները (նկ.36), ինչպես նաև այդ հատվածների a և b երկարությունները, համապատասխանաբար կոչվում են (9) հիպերբոլի իրական և կեղծ կիսաառանցքներ:*

Քանի որ (9) հավասարումով տրվող հիպերբոլն էլ է համաչափ կոորդինատական առանցքների նկատմամբ, ուստի, ինչպես և էլիպսի դեպքում, այդ կորի գրաֆիկն ամբողջությամբ ստանալու համար բավական է այն կառուցել կոորդինատական առաջին քառորդում և ստացված կորը համաչափ արտապատկերել կոորդինատական առանցքների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

(9) հավասարումը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right), \tag{9'}$$

տեսնում ենք, որ այդ հավասարումով տրվող հիպերբոլի գրաֆիկի կետերի աբսցիսները բավարարում են $x^2 \geq a^2$ անհավասարությանը, որտեղից հետևում է, որ կոորդինատական առաջին քառորդում նշված աբսցիսները պատկանում են $[a;+\infty)$ միջակայքին:

Պարզելու համար, թե թվային ինչպիսի բազմություն է առաջանում (9) հավասարումով տրվող հիպերբոլի գրաֆիկի կետերի օրդինատներից՝ այժմ այդ հավասարումը ներկայացնենք

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right) \tag{9''}$$

տեսքով:

Վերջին հավասարումից դիտարկվող հիպերբոլի, կոորդինատական առաջին քառորդին պատկանող կետերի օրդինատների համար կստանանք

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{9'''}$$

Ինչպես երևում է (9˝) հավասարումից, կոորդինատական նշված քառորդում $x = a$ արժեքին համապատասխանում է (9) հիպերբոլի A_1 գագաթը (նկ.36): Այնուհետև հեշտ է նկատել նաև, որ եթե x-ը աճելով փոփոխվում է $[a;+\infty)$ միջակայքում, ապա y-ը, նույնպես աճելով, փոփոխվում է $[0;+\infty)$ միջակայքում:

Այժմ (9˝) հավասարման հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև

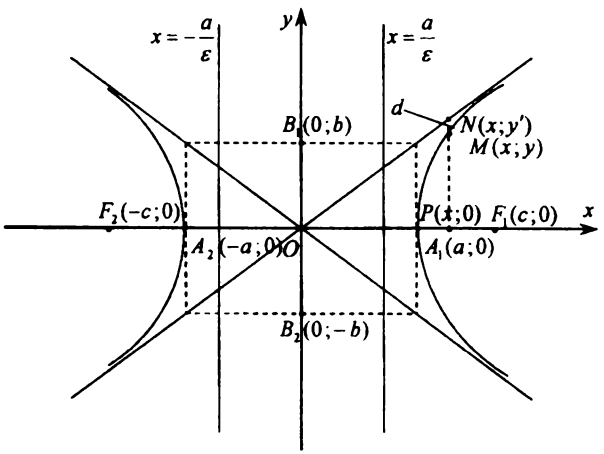
$$y = \frac{b}{a}x \qquad (10)$$

հավասարումը, որն, ինչպես գիտենք, ներկայացնում է կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղիղ գիծ [6,(2)]: Այնուհետև դիտարկվող հիպերբոլի վրա վերցնելով որևէ $M(x,y)$ կետ $(x \ge a,\ \ y \ge 0)$, իսկ (10) ուղղի վրա՝ նույն աբսցիսն ունեցող $N(x;y')$ կետը և հաշվի առնելով, որ ակհայտորեն $y' > y$, M և N կետերի հեռավորության համար կունենանք [4,(9)]

$$MN = \sqrt{(x-x)^2 + (y'-y)^2} = y' - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}:$$

M և N կետերի հեռավորության համար ստացած արտահայտության տեսքից երևում է, որ եթե x-ը, դրական պահելով անսահմանափակորեն մեծացնենք, ապա այդ հեռավորությունը նվազելով կձգտի զրոյի:

Սահմանում 12: *Ուղիղը կոչվում է l կորի ասիմպտոտ, եթե l կորի ընթացիկ M կետի և այդ ուղղի d հեռավորությունը ձգտում է զրոյի, երբ M կետը կորի վրա մնալով անսահման հեռանում է կոորդինատների սկզբնակետից:*



Նկ.36

Վերոգրյալից և բերված սահմանումից հետևում է, որ (10) հավասարումն ունեցող ուղիղը (9) հավասարումով տրվող հիպերբոլի ասիմպտոտն է:

Հասկանալի է, որ բերված դատողությունները կարելի է կրկնել երկրորդ և չորրորդ քառորդների համար, եթե (10) ուղղի փոխարեն դիտարկենք հետևյալ ուղիղը՝

$$y=-\frac{b}{a}x: \qquad (11)$$

Ասվածը նշանակում է, որ (11) ուղիղը ևս (9) հիպերբոլի ասիմպտոտ է (երկրորդ և չորրորդ քառորդներում):

Ամփոփելով վերոգրյալը, եզրակացնում ենք, որ (9) կանոնական հավասարումն ունեցող հիպերբոլն ունի 36-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Ինչպես տեսնում ենք (9), հիպերբոլի ասիմպտոտները դասավորված են այն ուղղանկյան անկյունագծերի վրա, որի անկյունագծերի հատման կետը կոորդինատների սկզբնակետն է, երկու կողմերը զուգահեռ են ox առանցքին և հավասար են $2a$-ի, իսկ մյուս երկու կողմերը զուգահեռ են oy առանցքին և հավասար են $2b$-ի:

Հիպերբոլը կոչվում է հավասարակողմ, եթե նրա իրական և կեղծ կիսաառանցքները հավասար են իրար:

(9), (10) և (11) հավասարումներում ընդունելով $b=a$, համապատասխանաբար կստանանք հավասարակողմ հիպերբոլի և նրա ասիմպտոտների հավասարումները.

$$x^2-y^2=a^2, \quad y=x, \quad y=-x: \qquad (12)$$

Ինչպես տեսնում ենք, հավասարակողմ հիպերբոլի ասիմպտոտները փոխուղղահայաց են և կիսում են այդ հիպերբոլի համաչափության առանցքներով կազմված անկյունները:

Ինչպես և էլիպսի դեպքում, a, b և c հաստատուններից բացի հիպերբոլի թվային բնութագրիչներից է նաև նրա էքսցենտրիսիտետը:

Սահմանում 13: *Հիպերբոլի կիզակետերի միջև եղած հեռավորության և նրա իրական առանցքի երկարության* $(2a)$ *հարաբերությունը կոչվում է այդ հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետ:*

Հիպերբոլի էքսցենտրիսիտետը նշանակելով ε-ով, համաձայն սահմանման, (9) հավասարումն ունեցող հիպերբոլի համար կստանանք

$$\varepsilon=\frac{c}{a}: \qquad (13)$$

Քանի որ, ըստ սահմանման, հիպերբոլի դեպքում $c>a$, հետևաբար հիպերբոլի էքստենտրիսիտետը մեծ է մեկից:

Օրինակ 3: Ստանալ $M\left(\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$ կետով անցնող այն հիպերբոլի հավասարումը, որի էքսցենտրիսիտետը հավասար է $\sqrt{2}$-ի:

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանների՝ ունենք

$$\frac{3}{a^2}-\frac{2}{b^2}=1 \quad \text{և} \quad \frac{c}{a}=\sqrt{2} \qquad (դ)$$

որտեղ a-ն ու b-ն որոնելի հիպերբոլի, համապատասխանաբար իրական և կեղծ կիսաառանցքներն են, իսկ c-ն որոշվում է (8) հավասարության միջոցով:

a-ի, b-ի և c-ի նկատմամբ ստացած հավասարումներին ավելացնելով նաև (8) հավասարությունը՝ այդ հաստատունները գտնելու համար կունենանք երեք հավասա-

րումներից կազմված համակարգ: Լուծելով նշված համակարգը՝ կստանանք

$$a^2 = b^2 = 1$$

Հետևաբար հիպերբոլի որոնելի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x^2 - y^2 = 1$$

Վերջում ծանոթանանք նաև հիպերբոլի դիրեկտրիսների հետ:

Սահմանում 14: *Հիպերբոլի կիզակետային առանցքին ուղղահայաց և նրա կենտրոնից a/ε $(a/\varepsilon < a)$ չափով հեռացած ուղիղները (նկ.36) կոչվում են (9) հավասարումով տրվող հիպերբոլի դիրեկտրիսներ:*

Էլիպսի և հիպերբոլի դիրեկտրիսների համար բերված սահմանումներից հետևում է, որ այդ կորերի դիրեկտրիսների հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը [6,(2″)].

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}: \tag{14}$$

Ինչպես էլիպսի, այնպես էլ հիպերբոլի դեպքում կասենք, որ (14) ուղիղներից առաջինը համապատասխանում է այդ կորի ձախ կիզակետին, իսկ երկրորդը՝ աջ կիզակետին:

Նշենք նաև, որ էլիպսի և հիպերբոլի դիրեկտրիսներն օժտված են հետևյալ կարևոր հատկությամբ՝

էլիպսի (հիպերբոլի) գրաֆիկի կամայական կետի հեռավորությունների հարաբերությունը՝ դիտարկվող կորի որևէ կիզակետից և համապատասխան դիրեկտրիսից, հաստատուն մեծություն է և հավասար է այդ կորի էքսցենտրիսիտետին:

4° *Պարաբոլ:*

Սահմանում 15: *Հարթության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնք տրված կետից և տրված ուղղից հավասար են հեռացած, կոչվում է պարաբոլ:*

Պարաբոլի սահմանման մեջ մտնող կետը և ուղիղը համապատասխանաբար կոչվում են պարաբոլի կիզակետ և դիրեկտրիս (ընդ որում ենթադրվում է, որ պարաբոլի կիզակետը չի պատկանում նրա դիրեկտրիսին):

Պարաբոլի հավասարումը ստանալու համար նրա կիզակետով անցնող և դիրեկտրիսին ուղղահայաց ուղիղը համարենք աբսցիսների առանցք, իսկ դիրեկտրիսից դեպի կիզակետ ուղղությունը՝ այդ առանցքի դրական ուղղություն: Այնուհետև պարաբոլի կիզակետը նշանակենք F-ով, իսկ աբսցիսների առանցքի և դիրեկտրիսի հատման կետը՝ A-ով: AF հատվածի միջնակետը նշանակենք 0-ով և այն համարենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետ:

AF հատվածի երկարությունը կոչվում է պարաբոլի պարամետր և նշանակվում է p-ով:

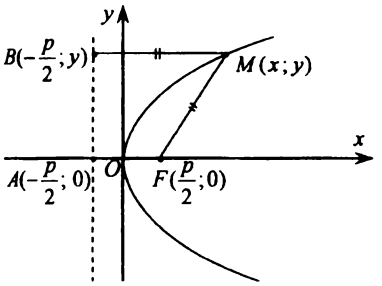
Վերոգրյալից հետևում է, որ պարաբոլի կիզակետի աբսցիսը հավասար է $p/2$-ի, իսկ օրդինատը՝ զրոյի:

Այժմ պարաբոլի վրա վերցնենք կամայական $M(x,y)$ կետ, այդ կետով տանենք նրա դիրեկտրիսին ուղղահայաց և տարված ուղղահայացի հիմքը նշանա-

կենք B-ով (նկ.37): Դժվար չէ նկատել, որ B կետի աբսցիսը հավասար է $-p/2$-ի, իսկ օրդինատը՝ y-ի: Այնուհետև հաշվի առնելով, որ M կետը բավարարում է պարաբոլի սահմանմանը՝ կունենանք

$$FM = BM:$$

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևից՝ կարող ենք ստացված հավասարությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝



նկ.37

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} \qquad (15)$$

Պարզեցնելով (15) հավասարումը՝ կստանանք p պարամետրով պարաբոլի կանոնական հավասարումը.

$$y^2 = 2px: \qquad (15')$$

Պարաբոլի հավասարումից երևում է, որ նրա գրաֆիկը գտնվում է աջ կիսահարթությունում և անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Մյուս կողմից x-ի յուրաքանչյուր դրական արժեքի համապատասխանում է y-ի, բացարձակ արժեքով միմյանց հավասար երկու արժեք, ինչը նշանակում է, որ պարաբոլի գրաֆիկը համաչափ է աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

(15′) կանոնական հավասարումն ունեցող պարաբոլի գրաֆիկը կառուցելու համար նկատենք նաև, որ x-ի աճման հետ մեկտեղ, անսահմանափակորեն աճում է նաև $|y|$-ը:

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք (15′) հավասարումն ունեցող պարաբոլի գրաֆիկը (նկ.37): Նկարից երևում է, որ ի տարբերություն շրջանագծի, էլիպսի և հիպերբոլի, պարաբոլն ունի համաչափության միայն մեկ առանցք, որին կանվանենք պարաբոլի առանցք:

Պարաբոլի և նրա առանցքի հատման կետը կոչվում է պարաբոլի գագաթ:

Ակնհայտ է, որ (15′) հավասարումն ունեցող պարաբոլի գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է:

Նկատենք, որ (15′) հավասարման մեջ փոխելով x և y փոփոխականների տեղերը՝ կստանանք կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և օրդինատների առանցքի նկատմամբ համաչափ պարաբոլի հավասարումը.

$$x^2 = 2py: \qquad (16)$$

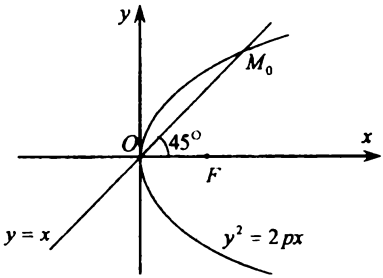
Վերջում կրկին նշենք, որ շրջանագիծը, էլիպսը, հիպերբոլը և պարաբոլը երկրորդ կարգի կորեր են: *)

Օրինակ 4: Կազմել այն պարաբոլի հավասարումը, որը համաչափ է ox առանցքի նկատմամբ, գագաթը կոորդինատների սկզբնակետն է և $y=x$ ուղղից կտրում է $4\sqrt{2}$

*) Քանի որ նշված կորերը նկարագրվում են երկրորդ աստիճանի հավասարումով:

երկարությամբ հատված:

Լուծում: Համաձայն վերոգրյալի՝ մեզ հետաքրքրող պարաբոլի կանոնական հավասարումն ունի (15′) տեսքը, որտեղ p-ն որոշման ենթակա դրական հաստատուն է:



նկ.38

Համատեղ լուծելով տրված ուղղի և պարաբոլի (15′) հավասարումները՝ կպարզենք, որ նրանք հատվում են $O(0;0)$ և $M_0(2p;2p)$ կետերում (նկ.38): Այնուհետև OM_0 հատվածի երկարությունը հավասարեցնելով $4\sqrt{2}$-ի՝ կունենանք

$$\sqrt{4p^2+4p^2}=4\sqrt{2}$$

Լուծելով ստացված հավասարումը և հաշվի առնելով, որ պարաբոլի պարամետրը պետք է դրական լինի՝ կստանանք

$$p=2:$$

Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող պարաբոլի կանոնական հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y^2=4x$$

§8. Տրված կետով անցնող և տրված վեկտորին ուղղահայաց հարթության հավասարումը: Հարթության ընդհանուր հավասարումը: Երկու հարթություններով կազմված անկյունը: Հարթությունների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Կետի հեռավորությունը հարթությունից:

Տարածության *) մեջ տրված յուրաքանչյուր մակերևույթի և մասնավոր դեպքում, յուրաքանչյուր հարթության համապատասխանում է երեք փոփոխականներով գրված որոշակի հավասարում:

Նախ պարզենք, թե ի՞նչ պետք է հասկանալ հարթության և ընդհանրապես մակերևույթի, ինչպես նաև տարածական կորի հավասարում ասելով:

Դիցուք տարածության մեջ տրված է ուղղանկյուն կոորդինատական $oxyz$ համակարգ և որևէ S մակերևույթ:

Սահմանում 1:

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1)$$

հավասարումը կոչվում է տարածության մեջ տրված S մակերևույթի հավասարում, եթե այդ հավասարմանը բավարարում են այն և միայն այն կետերի կոորդինատները, որոնք գտնվում են տրված մակերևույթի վրա:

Տարածության մեջ տրված կամայական կորի կարող ենք դիտել իբրև այնպիսի կետերի բազմություն, որոնք միաժամանակ պատկանում են երկու տարբեր մակերևույթների: Դա նշանակում է, որ տարածական կորը կարելի է տալ

*) Տես 26-րդ էջի տողատակի դիտողությունը:

հավասարումների հետևյալ համակարգի միջոցով՝

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad (2)$$

որտեղ (2) համակարգի մեջ մասնակցող հավասարումները այն մակերևույթների հավասարումներն են, որոնց հատման գիծը դիտարկվող կորն է:

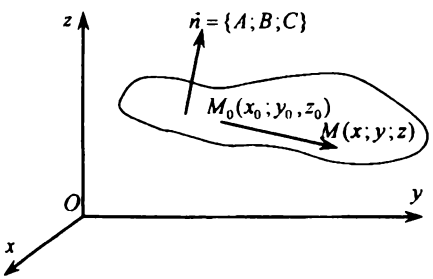
Այժմ տարածության մեջ դիտարկենք որևէ α հարթություն և ստանանք այդ հարթության հավասարումը այսինքն՝ ստանանք x, y և z փոփոխականներն իրար կապող այնպիսի առնչություն, որին բավարարեն դիտարկվող հարթության և միայն այդ հարթության կետերի կոորդինատները:

Դրված խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է նշել այնպիսի պայմաններ, որոնք տրված հարթության դիրքը տարածության մեջ դարձնեն որոշակի:

Սահմանում 2: *Տրված հարթությանն ուղղահայաց յուրաքանչյուր վեկտոր կոչվում է այդ հարթության նորմալ վեկտոր, կամ պարզապես այդ հարթության նորմալ:*

Նկատի ունենալով, որ տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության դիրքը միակ ձևով է որոշվում տարածության մեջ՝ ստանանք $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և $\vec{n}=\{A;B;C\}$ նորմալն ունեցող հարթության հավասարումը:

Որոնելի հավասարումը ստանալու համար դիտարկվող հարթության վրա վերցնենք M_0-ից տարբեր որևէ $M(x;y;z)$ կետ (նկ.39):



նկ.39

Քանի որ $\overrightarrow{M_0M}$ վեկտորն ընկած է α հարթության մեջ, իսկ $\vec{n}$ նորմալն ուղղահայաց է այդ հարթությանը, ուստի նշված վեկտորները փոխուղղահայաց են, որտեղից հետևում է, որ նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի [4,4°].

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0: \qquad (3)$$

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից [4,(7)], կարող ենք (3) հավասարությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

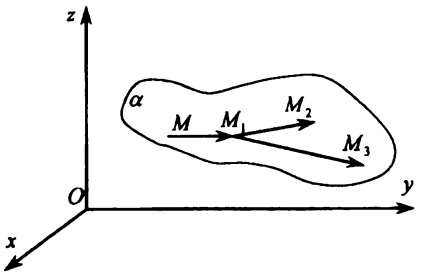
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0: \qquad (3')$$

Սահմանում 3: *(3′) հավասարումը կոչվում է տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության հավասարում:*

Հասկանալի է, որ (3′) հավասարման մեջ A, B և C հաստատուններին տալով զանազան արժեքներ՝ կստանանք $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող տարբեր հարթությունների հավասարումներ:

Օրինակ 1: Կազմել մեկ ուղղի վրա չդասավորված $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ և $M_3(x_3,y_3,z_3)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, մեկ ուղղի վրա չդասավորված երեք կետերով անցնում է հարթություն՝ այն էլ միայն մեկը: Տրված կետերով անցնող հարթության հավասարումը ստանալու համար այդ հարթության վրա վերցնենք որևէ $M(x,y,z)$ կետ և դիտարկենք $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ վեկտորները (նկ.40):



նկ.40

Հաշվի առնելով, որ նշված վեկտորները համահարթ են (երեք վեկտորներն էլ պատկանում են մեզ հետաքրքրող հարթությանը), և օգտվելով երեք վեկտորների համահարթության պայմանից [5,(9)], կստանանք $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ և $M_3(x_3,y_3,z_3)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3- & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (ա)$$

Օրինակ 2: Կազմել $M_1(1;2;3)$, $M_2(-1;0;0)$ և $M_3(3;0;1)$ կետերով անցնող հարթության հավասարումը:

Լուծում: Օգտվելով (ա) բանաձևից՝ կստանանք տրված կետերով անցնող հարթության հավասարումը.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=0,$$

որը պարզեցնելուց հետո կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x+5y-4z+1=0:$$

Օրինակ 3: Կազմել այն հարթության հավասարումը, որն անցնում է $M_1(1;2;-4)$, $M_2(3;-4;2)$ կետերը միացնող հատվածի միջնակետով և ուղղահայաց է այդ հատվածին:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ գտնենք $\overrightarrow{M_1M_2}$ վեկտորը (որը կարելի է դիտել իբրև մեզ հետաքրքրող հարթության նորմալ) և M_1M_2 հատվածի միջնակետի կոորդինատները:

Նշված հատվածի միջնակետը նշանակելով $M_0(x_0;y_0,z_0)$-ով՝ կունենանք **[3,(11),(14')]**.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-6;6\},\quad M_0(x_0,y_0,z_0)=M_0(2;-1;-1):$$

Օգտվելով **նաև (3') հավասարումից**՝ կստանանք որոնելի հավասարումը.

$$x-3y+3z-2=0:$$

Ինչպես երևում է (3՝) հավասարումից, տարածության կամայական հարթություն կարող է ներկայացվել այդ հարթության ընթացիկ կետի կոորդինատների նկատմամբ առաջին աստիճանի հավասարումով(մասնավոր դեպքում այդ հավասարումը կարող է պարունակել մեկ կամ երկու փոփոխական):

Բնականաբար հարց է ծագում՝ արդյո՞ք երեք փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում տարածության մեջ ներկայացնում է հարթություն:

Ձևակերպած հարցին պատասխանելու համար դիտարկենք x, y և z փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի հետևյալ հավասարումը՝

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4}$$

որտեղ A-ն, B-ն, C-ն և D-ն կամայական հաստատուններ են, ընդ որում A-ն, B-ն և C-ն միաժամանակ զրո լինել չեն կարող (հակառակ դեպքում, չպարունակելով փոփոխականներ, (4) առնչությունը կդադարի հավասարում լինելուց):

Ենթադրելով, որ $A \neq 0$, (4) հավասարումից կստանանք

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0: \tag{4՝}$$

Համեմատելով (3՝) և (4՝) հավասարումները՝ եզրակացնում ենք, որ (4՝)-ը այն հարթության հավասարումն է, որն անցնում է $M_0(-D/A;0;0)$ կետով և որի նորմալն է $\vec{n} = \{A;B;C\}$ վեկտորը:

Այսպիսով, x, y և z փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում տարածության մեջ ներկայացնում է հարթություն:

Կատարված եզրակացությունը հիմք է տալիս բերելու հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 4: *x, y և z փոփոխականների նկատմամբ գրված (4) առնչությունը, որտեղ A-ն, B-ն, C-ն և D-ն կամայական հաստատուններ են (ընդ որում A-ն, B-ն և C-ն միաժամանակ զրո լինել չեն կարող), կոչվում է հարթության ընդհանուր հավասարում:*

Ի մի բերելով վերևում ստացած արդյունքները՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Յուրաքանչյուր հարթություն տրվում է x, y և z ընթացիկ կոորդինատների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի հավասարումով և հակառակը՝ x, y և z փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում տարածության մեջ ներկայացնում է հարթություն:*

Այլ խոսքով՝ $F(x, y, z) = 0$ հավասարումն այն և միայն այն ժամանակ կներկայացնի հարթություն, երբ այն x, y և փոփոխականների նկատմամբ ունենա առաջին աստիճան:

Դիտողություն 1: $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ *արտահայտությունը նշանակելով* D *-ով՝*

(3) հավասարումից կստանանք $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *կետով անցնող և* $\vec{n}=\{A;B;C\}$ *նորմալն ունեցող հարթության ընդհանուր հավասարումը.*

$$Ax + By + Cz + D = 0:$$

Այսպիսով, ինչպես տեսնում ենք, հարթության ընդհանուր հավասարման ընթացիկ կոորդինատների գործակիցները այդ հարթության նորմալ վեկտորի կոորդինատներն են:

Այժմ տեսնենք, թե կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ ինչպիսի՞ դիրք կգրավի (4) հավասարումն ունեցող հարթությունը, երբ այդ հավասարման գործակիցներից մեկը կամ մի քանիսը հավասար լինեն զրոյի:

Նախ, ակնհայտ է, որ կոորդինատների սկզբնակետը կպատկանի (4) հավասարումն ունեցող հարթությանը այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ հավասարման ազատ անդամը հավասար լինի զրոյի:

Այսպիսով, հարթության ընդհանուր հավասարման ազատ անդամը ցույց է տալիս, հարթությունն անցնու՞մ է արդյոք կոորդինատների սկզբնակետով, թե ոչ:

Այնուհետև, (4) հավասարման մեջ ընդունելով $C = 0$, կստանանք

$$Ax + By + D = 0: \qquad (4'')$$

Ստացված հավասարումից երևում է, որ եթե oxy հարթությանը պատկանող $M_0(x_0;y_0)$ կետի կոորդինատները բավարարում են (4″) հավասարմանը, ապա այդ կետով անցնող և oz առանցքին զուգահեռ ուղղի բոլոր կետերի կոորդինատները նույնպես բավարարում են նշված հավասարմանը, որտեղից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում հարթությունը զուգահեռ է կոորդինատական oz առանցքին:

Նույն ձևով կհամոզվենք, որ $B = 0$ դեպքում (4) հավասարումից ստացվող հավասարումն ունեցող հարթությունը կլինի զուգահեռ կոորդինատական oy առանցքին:

Իսկ եթե հարթության ընդհանուր հավասարման մեջ ընդունենք $B = C = 0$, կստանանք

$$Ax + D = 0 \qquad (4''')$$

հավասարումը, որը (համաձայն վերոգրյալի) oy և oz առանցքներին զուգահեռ, այսինքն՝ կոորդինատական oyz հարթությանը զուգահեռ հարթության հավասարումն է:

Մնացած դեպքերը կարելի է քննարկել նման ձևով: Օրինակ, (4) հավասարման մեջ ընդունելով $A = D = 0$, կստանանք կոորդինատների սկզբնակետով անցնող և ox առանցքին զուգահեռ (այսինքն ox առանցքով անցնող) հարթության հավասարումը.

$$By + Cz = 0: \qquad (4^{IV})$$

Հարթության ընդհանուր հավասարման, վերևում բերված հետազոտութ-

յունը հանգեցնում է հետևյալ եզրակացությանը՝

Եթե հարթության ընդհանուր հավասարման մեջ

ա) բացակայում է ազատ անդամը, ապա այդ հավասարումով տրվող հարթությունն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով,

բ) բացակայում է որևէ փոփոխական, ապա այդ հավասարումով բնութագրվող հարթությունը զուգահեռ է բացակայող փոփոխականի անունը կրող կոորդինատական առանցքին,

գ) բացակայում են երկու փոփոխականներ, ապա այդ հավասարումով որոշվող հարթությունը զուգահեռ է բացակայող փոփոխականների անունները կրող կոորդինատական հարթությանը,

դ) բացակայում են ազատ անդամը և որևէ փոփոխական , ապա այդ հավասարումով նկարագրվող հարթությունն անցնում է բացակայող փոփոխականի անունը կրող կոորդինատական առանցքով,

ե) բացակայում են ազատ անդամը և երկու փոփոխականներ, ապա այդ հավասարումն ունեցող հարթությունը համընկնում է բացակայող փոփոխականների անունը կրող կոորդինատական հարթության հետ:

Այժմ անցնենք երկու հարթություններով կազմված անկյունը գտնելու խնդրին:

Դիցուք տարածության մեջ տրված α_1 և α_2 հատվող հարթությունների ընդհանուր հավասարումները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \qquad (5)$$

Սահմանում 5: *Երկու հարթություններով կազմված անկյուն ասելով կհասկանանք տրված հարթություններով կազմված կից երկնիստ անկյուններից փոքրը, եթե այդ անկյունները հավասար չեն իրար, և այդ անկյուններից որևէ մեկը, եթե նշված անկյունները հավասար են իրար:*

Բերված սահմանումից հետևում է, որ

ա) երկու հարթություններով կազմված անկյան գծային անկյունը չի կարող բութ անկյուն լինել,

բ) երկու հարթություններով կազմված անկյան գծային անկյունը հավասար է $\pi/2$ -ի այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ հարթություններով կազմված կից երկնիստ անկյունները հավասար են իրար:

Նկատելով, որ երկու հարթությունների նորմալներով կազմված անկյունը հավասար է այդ հարթություններով կազմված կից երկնիստ անկյուններից որևէ մեկի գծային անկյանը, եզրակացնում ենք, որ տրված հարթություններով կազմված անկյունը գտնելու համար նախ անհրաժեշտ է գտնել այդ հարթությունների նորմալներով կազմված φ անկյունը: Եթե φ-ն բութ անկյուն չէ, ուրեմն այն որոնելի անկյունն է, իսկ եթե φ-ն բութ անկյուն է, ուրեմն տրված հարթությունների կազմած անկյունը հավասար է $(\pi - \varphi)$-ի:

Այսպիսով, երկու հարթությունների կազմած անկյունը գտնելու խնդիրը բերվում է այդ հարթությունների նորմալների կազմած անկյունը գտնելու խնդրին:

Հաշվի առնելով, որ

$$\vec{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\}, \quad \vec{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\} \tag{6}$$

վեկտորները (5) հավասարումներն ունեցող հարթությունների նորմալներն են, և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների կազմած անկյան բանաձևից [4,(10)], (5) ընդհանուր հավասարումներն ունեցող α_1 և α_2 հարթությունների նորմալների կազմած անկյան համար կստանանք

$$\varphi = \arccos\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}: \tag{7}$$

Օրինակ 4: Գտնել հետևյալ ընդհանուր հավասարումներն ունեցող հարթությունների կազմած անկյունը՝

$$x + y - z + 5 = 0, \quad x + 4y - \ - 2 = 0 \cdot$$

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ $\vec{n_1} = \{1;1;-1\}$ և $\vec{n_2} = \{1;4;-1\}$ վեկտորները տրված հարթությունների նորմալներն են և օգտվելով (7) բանաձևից՝ որոնելի անկյան համար կունենանք

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի պայմանների իրականացման դեպքում համապատասխանաբար $\vec{n_1}$ և $\vec{n_2}$ նորմալներ ունեցող α_1 և α_2 հարթությունները կլինեն զուգահեռ կամ կլինեն փոխուղղահայաց:

Ակնհայտ է, որ երկու հարթություններ կլինեն զուգահեռ այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանց նորմալները լինեն համագիծ:

Պարզ է նաև, որ երկու հարթություններ կլինեն փոխուղղահայաց այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանց նորմալները լինեն փոխուղղահայաց:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների համագիծության և փոխուղղահայացության պայմաններից [4,(26),(11)], ստանում ենք հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի (5) հավասարումներն ունեցող α_1 և α_2 հարթությունները լինեն զուգահեռ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց նորմալները լինեն համագիծ.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}: \tag{8}$$

Թեորեմ 3: *Որպեսզի (5) հավասարումներն ունեցող α_1 և α_2 հարթությունները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց նորմալները լինեն փոխուղղահայաց.*)*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0: \tag{9}$$

Օրինակ 5: Կազմել $M(2;3;-1)$ կետով անցնող այն հարթության հավասարումը, որը զուգահեռ է հետևյալ հավասարումն ունեցող հարթությանը՝

---

*) Նշենք, որ երկու հարթությունների փոխուղղահայացության պայմանը կարող ենք ստանալ նաև (7) բանաձևից:

$$5x-3y+2z-10=0:$$

Լուծում: Քանի որ մեզ հետաքրքրող հարթությունը զուգահեռ է տրված հարթությանը, հետևաբար տրված հարթության նորմալը կարող ենք համարել նորմալ նաև որոնելի հարթության համար:

Մյուս կողմից, քանի որ որոնելի հարթությունը պետք է անցնի M կետով, հետևաբար, համաձայն (3՝) բանաձևի, այդ հարթության հավասարումն ունի

$$5(x-2)-3(y-3)+2(z+1)=0,$$

կամ որ նույնն է՝

$$5x-3y+2z+1=0$$

տեսքը:

Օրինակ 6: Կազմել կոորդինատական ox առանցքով անցնող այն հարթության հավասարումը, որն ուղղահայաց է

$$3x-4y+5z+1=0$$

հավասարումն ունեցող հարթությանը:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, կոորդինատական ox առանցքով անցնող հարթության հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$By+Cz=0: \qquad (բ)$$

Հաշվի առնելով, որ $\vec{n}=\{0;B;C\}$ վեկտորը (բ) հավասարումն ունեցող հարթության նորմալն է և օգտվելով երկու հարթությունների ուղղահայացության՝ վերևում բերված պայմանից՝ կստանանք

$$0\cdot 3-4B+5C=0,$$

որտեղից

$$B=\frac{5}{4}C: \qquad (գ)$$

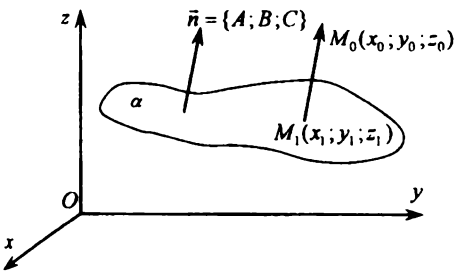
B հաստատունի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (բ) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$5Cy+4Cz=0: \qquad (դ)$$

Նկատելով, որ $C\neq 0$ (հակառակ դեպքում, ըստ (գ) հավասարության B-ն էլ հավասար կլինի զրոյի և հետևաբար (բ)-ն կդադարի հավասարում լինելուց), (դ) հավասարումը ներկայացնենք

$$5y+4z=0 \qquad (ե)$$

տեսքով:



Նկ.41

Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող հարթության հավասարումն ունի (ե) տեսքը:

Վերջում դնենք գործնականում կարևոր նշանակություն ունեցող հետևյալ խնդիրը՝

Գտնել տրված $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետի հեռավորությունը (4) հավասարումն ունեցող α հարթությունից:

Դրված խնդիրը լուծելու համար M_0 կետից α հարթությանը տարած ուղղահայացի հիմքը նշանակենք $M_1(x_1;y_1;z_1)$-ով և նկատենք, որ M_0 կետի հեռավորությունը տրված հարթությունից հավա-

սար է $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորի երկարությանը.

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|:$$

Հաշվի առնելով, որ $\vec{n}$ և $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորները համագիծ են (երկու վեկտորներն էլ ուղղահայաց են տրված հարթությանը), կունենանք

$$\cos\left(\vec{n},\widehat{\ }\overrightarrow{M_1M_0}\right)=\pm 1: \qquad (10)$$

Այնուհետև օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանումից [4,u1], (10) հավասարությունների հաշվառումով կստանանք

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\left|\cos\left(\vec{n},\widehat{\ }\overrightarrow{M_1M_0}\right)\right|=\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|$$

կամ

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\vec{n}\right|d,$$

որտեղից կունենանք

$$d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}\right|}{\left|\vec{n}\right|}: \qquad (11)$$

Նկատի ունենալով, որ M_1 կետը պատկանում է α հարթությանը, և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից, կստանանք [3,(11)]

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_1M_0}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)=Ax_0+By_0+Cz_0+D:$$

$\vec{n}$ և $\overrightarrow{M_1M_0}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (11) բանաձևի մեջ՝ α հարթությունից M_0 կետի ունեցած հեռավորության համար վերջնականապես կունենանք

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}: \qquad (12)$$

Այսպիսով, տրված կետի հեռավորությունը տրված հարթությունից գտնելու համար անհրաժեշտ է այդ կետի կոորդինատները տեղադրել հարթության ընդհանուր հավասարման ձախ մասի մեջ, վերցնել ստացված թվի բացարձակ արժեքը և այն բաժանել դիտարկվող հարթության նորմալ վեկտորի երկարության վրա:

Օրինակ 7: Կոորդինատական oy առանցքի վրա գտնել այնպիսի M_0 կետ, որի հեռավորությունը

$$x+2y-2z-2=0$$

հավասարումն ունեցող հարթությունից հավասար լինի 2-ի:

Լուծում: Քանի որ մեզ հետաքրքրող M_0 կետը գտնվում է oy առանցքի վրա,

հետևաբար այդ կետի աբսցիսն ու ապլիկատը հավասար են զրոյի: M_0 կետի օրդինատը նշանակելով y_0-ով, և նկատի ունենալով, որ $\vec{n}=\{1;2;-2\}$ վեկտորը տրված հարթության նորմալ է՝ (12) բանաձևի օգնությամբ կստանանք

$$\frac{|2y_0-2|}{3}=2:$$

Լուծելով y_0-ի նկատմամբ ստացված հավասարումը՝ կունենանք

$$y_0=-2 \quad \text{կամ} \quad y_0=4$$

Այսպիսով, դիտարկվող խնդիրն ունի երկու լուծում.

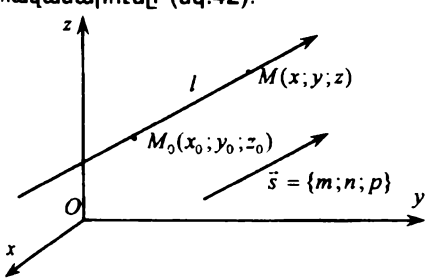
$$M_0(0;-2;0), \quad M_0(0;4;0):$$

§9. Տարածության մեջ տրված ուղիղ գծի պարամետրական, կանոնական և ընդհանուր հավասարումները: Երկու ուղիղների կազմած անկյունը: Տարածության մեջ տրված ուղիղների զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները: Ուղղի և հարթության կազմած անկյունը: Ուղղի և հարթության զուգահեռության և ուղղահայացության պայմանները:

Գոյություն ունեն տարածության մեջ տրված ուղիղ գծի հավասարման տարբեր տեսքեր, այսինքն՝ ուղիղ գծի տարբեր հավասարումներ: Այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրը ստանալու համար (ինչպես և հարթության մեջ տրված ուղղի դեպքում) անհրաժեշտ է նշել պայմաններ, որոնք դիտարկվող ուղղի դիրքը տարածության մեջ դարձնեն որոշակի:

1°. *Տարածության մեջ տրված ուղղի պարամետրական հավասարումները:*

Նկատի ունենալով, որ տրված կետով անցնող և տրված ուղղորդն ունեցող [6,u9] ուղղի դիրքը միակ ձևով է որոշվում տարածության մեջ՝ ստանանք $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և $\vec{s}=\{m;n;p\}$ ուղղորդն ունեցող l ուղղի հավասարումը (նկ.42):



նկ.42

Մեզ հետաքրքրքրող ուղղի հավասարումը ստանալու համար դիտարկվող ուղղի վրա վերցնենք M_0-ից տարբեր որևէ $M(x;y;z)$ կետ: Քանի որ $\overrightarrow{M_0M}$ և $\vec{s}$ վեկտորները համագիծ են, հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի λ թիվ, որ տեղի ունի

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda\vec{s} \qquad (1)$$

վեկտորական հավասարությունը [3,p1]:

Ստացված վեկտորական հավասարությունը գրելով պրոյեկցիաներով՝

կունենանք

$$x - x_0 = \lambda m, \quad y - y_0 = \lambda n, \quad z - z_0 = \lambda p$$

կամ

$$x = x_0 + \lambda m, \quad y = y_0 + \lambda n, \quad z = z_0 + \lambda p: \tag{2}$$

Սահմանում 1: *(2) հավասարումները կոչվում են տարածության $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետով անցնող և $\vec{s} = \{m;n;p\}$ ուղղորդն ունեցող ուղղի պարամետրական հավասարումներ, իսկ λ -ն կոչվում է պարամետր:*

2°. *Տարածության մեջ տրված ուղղի կանոնական հավասարումները:*

Տարածության մեջ տրված ուղղի պարամետրական հավասարումներից երևում է, որ պարամետրի փոփոխությունը բերում է x, y և թվերի փոփոխությանը, ինչը նշանակում է, որ պարամետրի փոփոխության հետևանքով $M(x;y;z)$ կետը շարժվում է տրված ուղղի երկայնքով: Ինչ վերաբերում է m, n և p թվերին, ապա քանի որ այդ թվերը l ուղղին զուգահեռ վեկտորի կոորդինատներն են, հետևաբար նրանք բնութագրում են տրված ուղղի ուղղությունը տարածության մեջ և այդ պատճառով կոչվում են դիտարկվող ուղղի ուղղորդ գործակիցներ:

Նկատենք, որ $\vec{s} = \vec{s^0}$ միավոր վեկտորի պարագայում m, n և p թվերը վերածվում են l ուղղի ուղղորդ կոսինուսների*) և (2) հավասարումներն ընդունում են հետևյալ տեսքը՝

$$x = x_0 + \lambda\cos\alpha, \quad y = y_0 + \lambda\cos\beta, \quad z = z_0 + \lambda\cos\gamma: \tag{2'}$$

Տարածության մեջ տրված ուղիղ գիծը (2) պարամետրական հավասարումներով տալու փոխարեն սովորաբար այն ներկայացնում են այդ գծի ընթացիկ կետի կոորդինատների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգի միջոցով: Այդ հավասարումները ստացվում են ուղղի (2) հավասարումներից՝ λ պարամետրի արտաքսման ճանապարհով:

Կատարելով վերոգրյալը՝ կստանանք

$$\frac{x - x_0}{m} = \lambda, \quad \frac{y - y_0}{n} = \lambda, \quad \frac{z - z_0}{p} = \lambda,$$

որտեղից կունենանք

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}: \tag{3}$$

Նույն ձևով ուղղի (2') պարամետրական հավասարումներից կստանանք

---

*)Ուղղի ուղղորդ կոսինուսներ ասելով հասկանում ենք $\cos\alpha, \cos\beta$ և $\cos\gamma$ թվերը, որտեղ α -ն, β -ն և γ -ն տրված ուղղի և համապատասխանաբար ox, oy, oz առանցքների հետ կազմած անկյուններն են:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma} \qquad (3')$$

Սահմանում 2: *(3) հավասարումները կոչվում են տարածության* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *կետով անցնող և* $\vec{s}=\{m;n;p\}$ *ուղղորդն ունեցող ուղղի կանոնական հավասարումներ:*

3° *Տարածության մեջ տրված ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումները:*

Նկատենք, որ տարածության մեջ տրված ուղղի կանոնական հավասարումներում բոլոր հայտարարները միաժամանակ զրոյի հավասարվել չեն կարող, որովհետև այդ ուղղի ուղղորդը ոչ զրոյական վեկտոր է: Սակայն նշված հայտարարներից մեկը կամ երկուսը կարող են հավասարվել զրոյի: Նման դեպքերում մենք կհասկանանք ոչ թե զրոյի վրա բաժանում, այլ պարզապես այն, որ տրված ուղղի ուղղորդ վեկտորի համապատասխան կոորդինատը (կոորդինատները) հավասար է (հավասար են) զրոյի:

Մասնավորապես, եթե $n=0$ և $p\neq 0$, ապա (3) հավասարումներից վերջինից կստանանք

$$0(z-z_0)=p(y-y_0)$$

կամ

$$y=y_0:$$

Ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ դիտարկվող դեպքում (3) կանոնական հավասարումներով տրվող ուղիղն ընկած է կոորդինատական oy առանցքին ուղղահայաց, կամ որ նույնն է՝ կոորդինատական oxz հարթությանը զուգահեռ հարթության մեջ [8]:

Այժմ, ենթադրելով, որ տարածության մեջ տրված ուղղի կանոնական հավասարումներում $p\neq 0$, այսինքն՝ ենթադրելով, որ (3) հավասարումներն ունեցող ուղիղը զուգահեռ չէ կոորդինատական oxy հարթությանը, այդ հավասարումները գրենք հետևյալ անջատ տեսքով՝

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{z-z_0}{p},\quad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}: \qquad (3'')$$

Ինչպես տեսնում ենք, (3՝՝) հավասարումներից առաջինում բացակայում է y փոփոխականը, իսկ երկրորդում՝ x փոփոխականը: Հետևաբար, այդ հավասարումներից առաջինը oy առանցքին զուգահեռ հարթության հավասարում է, իսկ երկրորդը՝ ox առանցքին զուգահեռ հարթության հավասարում [8]:

Ըստ էության, ուղիղ գիծը ներկայացնելով (3՝՝) հավասարումների միջոցով, մենք այդ ուղիղը դիտում ենք որպես երկու հարթությունների հատման գիծ, որոնցից առաջինը տրված ուղիղը պրոյեկտում է oxz հարթության վրա, իսկ երկրորդը՝ oyz հարթության վրա (նշված հավասարումները դիտարկվող ուղղի պրոյեկցիաների հավասարումներն են համապատասխանաբար oxz և oyz կոորդինատական հարթությունների վրա):

Այսպիսով, տարածության մեջ տրված ուղղի հավասարումները տալ (3՝) տեսքով, նշանակում է՝ տալ oxz և oyz կոորդինատական հարթությունների վրա այդ ուղղի ունեցած պրոյեկցիաների հավասարումները:

Ընդհանրացնելով վերոգրյալը՝ եզրակացնում ենք, որ տարածության մեջ տրված կամայական ուղիղ գիծ ներկայացվում է երկու հարթությունների հավասարումների միջոցով, որոնք անցնում են դիտարկվող ուղղով և այդ ուղիղը պրոյեկտում են համապատասխան կոորդինատական հարթությունների վրա:

Հասկանալի է, որ ամենևին էլ պարտադիր չէ տարածության մեջ տրված ուղիղը ներկայացնել հատկապես վերևում բերված եզրակացության մեջ նշված հարթությունների միջոցով: Յուրաքանչյուր ուղղով անցնում են անթիվ բազմությամբ հարթություններ: Այդ հարթություններից ցանկացած երկուսը, հատվելով որոշում են տրված ուղղի դիրքը տարածության մեջ: Հետևաբար, կամայական երկու, իրար ոչ զուգահեռ, հարթությունների հավասարումների համակարգ իրենից ներկայացնում է այդ հարթությունների հատման գծի հավասարումները.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0: \end{cases} \qquad (4)$$

Սահմանում 3: *x, y և փոփոխականների նկատմամբ գրված առաջին աստիճանի (4) հավասարումների համակարգը կոչվում է տարածության մեջ տրված ուղիղ գծի ընդհանուր հավասարումներ:*

Ինչպես տեսանք, տարածության մեջ տրված ուղղի կանոնական հավասարումներից հեշտությամբ կարելի է անցնել այդ ուղղի ընդհանուր հավասարումներին: Պարզվում է, որ ուղղի ընդհանուր հավասարումներից էլ կարելի է անցնել այդ ուղղի կանոնական հավասարումներին:

Դիցուք ուղիղ գիծը տրված է հավասարումների (4) համակարգի միջոցով: Համաձայն սահմանման՝ այդ ուղղի կանոնական հավասարումները ստանալու համար անհրաժեշտ է գտնել կետ, որով անցնում է տրված ուղիղը և՝ վեկտոր, որին զուգահեռ է այն: Որոնելի կետը գտնելու համար այդ կետի կոորդինատներից որևէ մեկը ընտրենք կամայական ձևով, ընտրված կոորդինատը տեղադրենք հավասարումների (4) համակարգի մեջ, և լուծելով ստացված համակարգը, գտնենք մեզ հետաքրքրող կետի մյուս կոորդինատները:

Ինչ վերաբերվում է (4) հավասարումներով տրված ուղղի ուղղորդը գտնելուն՝ նկատենք, որ այդ վեկտորը զուգահեռ լինելով տրված հարթությունների հատման գծին (այսինքն՝ զուգահեռ լինելով այդ հարթություններին պատկանող ուղղին) զուգահեռ է նաև նշված հարթություններին: Հետևաբար, որոնելի ուղղորդն ուղղահայաց է այդ հարթությունների նորմալներին.

$$\vec{n_1} = \{A_1; B_1; C_1\} \text{ և } \vec{n_2} = \{A_2; B_2; C_2\}:$$

Մյուս կողմից, ինչպես գիտենք, $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$ վեկտորական արտադրյալը նույնպես ուղղահայաց է $\vec{n_1}$ և $\vec{n_2}$ վեկտորներին [4,u2]: Ուստի, որպես դիտարկվող ուղղի

ուղղորդ, կարող ենք վերցնել (4) հավասարումներն ունեցող հարթությունների նորմալների վեկտորական արտադրյալը:

Օրինակ 1: Ուղղի հետևյալ կանոնական հավասարումներից՝

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1},$$

ստանալ այդ ուղղի ընդհանուր հավասարումները:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ դիտարկվող ուղղի կանոնական հավասարումները ներկայացնենք, օրինակ, հետևյալ անջատ տեսքով՝

$$\frac{x-1}{2}=\frac{z}{-1},\quad \frac{y}{3}=\frac{z}{-1}: \qquad (ա)$$

Այնուհետև պարզեցնելով (ա) հավասարումները՝ ստանանք տրված ուղղի ընդհանուր հավասարումները.

$$\begin{cases} x+2z-1=0, \\ y+3z=0: \end{cases}$$

Օրինակ 2: Տարածության մեջ տրված ուղղի ընդհանուր հավասարումներից,

$$\begin{cases} 2x-3y+z-5=0, \\ 3x+y-2z-4=0, \end{cases} \qquad (բ)$$

ստանալ այդ ուղղի կանոնական և պարամետրական հավասարումները:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, տրված ուղղի կանոնական հավասարումները ստանալու համար անհրաժեշտ է գտնել կետ, որով անցնում է դիտարկվող ուղիղը և՝ վեկտոր, որին զուգահեռ է այն: Որոնելի $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կետը գտնելու համար այդ կետի կոորդինատներից մեկը ընտրենք կամայական ձևով, օրինակ, վերցնենք $z_0=1$: Տրված ուղղի ընդհանուր հավասարումների մեջ ընդունելով $z=1$, կունենանք

$$\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 3x+y=6: \end{cases}$$

Լուծելով հավասարումների ստացված համակարգը՝ կգտնենք նաև M_0 կետի մյուս կոորդինատները.

$$x_0=2,\quad y_0=0:$$

Այսպիսով, մեզ հետաքրքրող ուղղի կետերից մեկի կոորդինատներն են

$$x_0=2,\quad y_0=0,\quad z_0=1:$$

Այնուհետև, որպես տրված ուղղի ուղղորդ վերցնելով (բ) հավասարումներն ունեցող հարթությունների նորմալների վեկտորական արտադրյալը [4,(24)].

$$\vec{S}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\{5;7;11\},$$

համաձայն (3) բանաձևի՝ կստանանք (բ) ընդհանուր հավասարումներով տրված ուղղի կանոնական հավասարումները.

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y}{7}=\frac{z-1}{11}: \qquad (գ)$$

Տրված ուղղի կանոնական հավասարումների մեջ մասնակցող կոտորակները նշանակելով λ-ով, կգտնենք նաև այդ ուղղի պարամետրական հավասարումները.

$$x = 2 + 5\lambda, \quad y = 7\lambda, \quad = 1 + 11\lambda$$

Օրինակ 3: Ստանալ $M_1(0;1;2)$ և $M_2(1;3;5)$ կետերով անցնող ուղղի կանոնական հավասարումները:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, խնդիրը լուծելու համար բավական է գտնել որոնելի ուղղի որևէ ուղղորդ և նշել կետ, որով անցնի այդ ուղիղը:

Որպես M_1 և M_2 կետերով անցնող ուղղի ուղղորդ՝ վերցնելով

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{1;2;3\}$$

վեկտորը [3,(11)], իսկ որպես կետ, որով անցնում է դիտարկվող ուղիղը, օրինակ՝ M_1-ը, կստանանք մեզ հետաքրքրող ուղղի կանոնական հավասարումները.

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}:$$

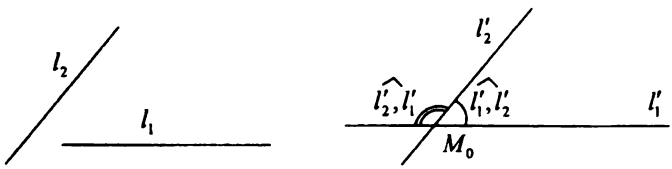
Այժմ, ենթադրելով, որ տարածության մեջ տրված l_1 և l_2 ուղիղների կանոնական հավասարումները համապատասխանաբար ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \tag{5}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \tag{6}$$

անցնենք այդ ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու խնդրին:

Սահմանում 4: *Տարածության մեջ տրված l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք տարածության որևէ M_0 կետով անցնող այն l_1' և l_2' ուղիղների կազմած անկյունը (նկ.43), որոնք համապատասխանաբար զուգահեռ են l_1 և l_2 ուղիղներին:*



նկ.43

Բերված սահմանումից և հարթության մեջ տրված երկու ուղիղների կազմած անկյան սահմանումից [6,u14] *հետևում է, որ.*

ա) տարածության մեջ տրված l_1 և l_2 ուղիղներով կազմված անկյունը չի կարող բութ անկյուն լինել,

բ) l_1 և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է $\pi/2$-ի այն և միայն այն ժամանակ, երբ l_1' և l_2' ուղիղներով կազմված կից անկյունները հավասար են իրար:

Նկատելով, որ l_1 և l_2 ուղիղների ուղղորդներով կազմված անկյունը

հավասար է l_1' և l_2' ուղիղներով կազմված կից անկյուններից որևէ մեկին (նկ.43), եզրակացնում ենք, որ տրված ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու համար նախ անհրաժեշտ է գտնել այդ ուղիղների ուղղորդների կազմած φ անկյունը: Եթե φ-ն բութ անկյուն չէ, ուրեմն այն որոնելի անկյունն է, իսկ եթե φ-ն բութ անկյուն է, ուրեմն տրված ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է $(\pi-\varphi)$-ի:

Այսպիսով, տարածության մեջ տրված երկու ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու խնդիրը բերվում է այդ ուղիղների ուղղորդներով կազմված անկյունը գտնելու խնդրին:

Հաշվի առնելով, որ

$$\vec{s_1}=\{m_1;n_1;p_1\},\quad \vec{s_2}=\{m_2;n_2;p_2\} \tag{7}$$

վեկտորները համապատասխանաբար (5) և (6) կանոնական հավասարումներն ունեցող ուղիղների ուղղորդներն են և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների կազմած անկյան բանաձևից [4,(10)], համապատասխանաբար (5) և (6) կանոնական հավասարումներն ունեցող l_1 և l_2 ուղիղների ուղղորդների կազմած անկյան համար կստանանք

$$\varphi=\arccos\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}: \tag{8}$$

Օրինակ 4: Գտնել հետևյալ կանոնական հավասարումներով տրված ուղիղների կազմած անկյունը՝

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1},\quad \frac{x}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}:$$

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ

$$s_1=\{1;-4;1\},\ s_2=\{-2;2;1\}$$

վեկտորները տրված ուղիղների ուղղորդներն են, և օգտվելով (8) բանաձևից, կստանանք

$$\varphi=\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$$

Հետևաբար, դիտարկվող ուղիղների կազմած անկյունը հավասար է $\pi/4$-ի:

Այժմ ծանոթանանք այն պայմաններին, որոնց իրականացման դեպքում համապատասխանաբար $\vec{s_1}$ և $\vec{s_2}$ ուղղորդներ ունեցող l_1 և l_2 ուղիղները կլինեն զուգահեռ կամ կլինեն փոխուղղահայաց:

Ակնհայտ է, որ երկու ուղիղների զուգահեռության և փոխուղղահայացության պայմանները համարժեք են այդ ուղիղների ուղղորդների համագիծության և փոխուղղահայացության պայմաններին: Նկատի ունենալով վերոգրյալը և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների համագիծության և փոխուղղահայացության պայմաններից [4,(26),(11)], կստանանք հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 1: *Որպեսզի (5) և (6) կանոնական հավասարումներն ունեցող l_1*

և l_2 ուղիղները լինեն զուգահեռ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց ուղղորդները լինեն համագիծ.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}: \qquad (9)$$

Թեորեմ 2: *Որպեսզի (5) և (6) կանոնական հավասարումներն ունեցող l_1 և l_2 ուղիղները լինեն փոխուղղահայաց, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց ուղղորդները լինեն փոխուղղահայաց *)*

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0: \qquad (10)$$

Օրինակ 5: Ապացուցել, որ ընդհանուր և կանոնական հավասարումներով տրված

$$\begin{cases} x-y-5z+1=0, \\ x+y-z-1=0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{1}$$

ուղիղները զուգահեռ են:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, տրված ուղիղներից առաջինի ուղղորդը [4,(24)]

$$\vec{s_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\{6;-4;2\}$$

վեկտորն է, իսկ երկրորդի ուղղորդը՝ $\vec{s_2}=\{3;-2;\ 1\}$ վեկտորը: Քանի որ $\vec{s_1}$ և $\vec{s_2}$ վեկտորները համագիծ են.

$$\frac{6}{3}=\frac{-4}{-2}=\frac{2}{1},$$

հետևաբար, համաձայն թեորեմ 1-ի՝ տրված ուղիղները զուգահեռ են:

Օրինակ 6: Ապացուցել, որ ընդհանուր և կանոնական հավասարումներով տրված

$$\begin{cases} 2x+3y-8z-1=0, \\ 3x+y-5z-2=0 \end{cases} \quad \text{և} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$$

ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Լուծում: Ապացուցելու համար, որ տրված ուղիղները փոխուղղահայաց են, նախ գտնենք այդ ուղիղների ուղղորդները: Համոզվելով, որ դիտարկվող ուղիղների ուղղորդները համապատասխանաբար

$$\vec{s_1}=\{-7;-14;-7\} \quad \text{և} \quad \vec{s_2}=\{1;-2;3\}$$

վեկտորներն են՝ հաշվենք այդ վեկտորների սկալյար արտադրյալը [4,u1,(7)].

$$\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=1\cdot(-7)+(-2)(-14)+3(-7)=0:$$

Քանի որ տրված ուղիղների ուղղորդների սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, այդ ուղիղները փոխուղղահայաց են:

Ունենալով տարածության մեջ տրված երկու ուղիղների կազմած անկյան և

---

*) Նշենք, որ տարածության մեջ տրված երկու ուղիղների փոխուղղահայացության պայմանը կարող ենք ստանալ նաև (8) բանաձևից:

երկու հարթությունների կազմած անկյան բանաձևերը, այժմ անցնենք տարածության մեջ տրված l ուղղի և α հարթության կազմած անկյան բանաձևի արտածմանը, ենթադրելով, որ l ուղիղը տրված է

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{11}$$

կանոնական հավասարումներով, իսկ α հարթությունը՝

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{12}$$

ընդհանուր հավասարումով:

Քննարկենք տրված ուղղի և հարթության փոխադարձ դասավորության հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

I. *l ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը կամ պատկանում է նրան:*

Ակնհայտ է, որ քննարկվող դեպքում l ուղղի ուղղորդն ուղղահայաց է α հարթության նորմալին: Մյուս կողմից պարզ է, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը. եթե l ուղղի ուղղորդն ուղղահայաց է α հարթության նորմալին, ապա այդ ուղիղը զուգահեռ է α հարթությանը կամ պատկանում է նրան:

Այսպիսով, տարածության մեջ տրված ուղղի և հարթության զուգահեռության, կամ ուղիղը հարթությանը պատկանելու պայմանները համարժեք են այդ ուղղի ուղղորդի և հարթության նորմալի փոխուղղահայացության պայմաններին:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը, հաշվի առնելով, որ

$$\vec{s}=\{m;n;p\},\quad \vec{n}=\{A;B;C\} \tag{13}$$

վեկտորներից առաջինը l ուղղի ուղղորդն է, իսկ երկրորդը՝ α հարթության նորմալը և օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների փոխուղղահայացության պայմաններից, կստանանք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Որպեսզի (11) կանոնական հավասարումներն ունեցող l ուղիղը լինի զուգահեռ (12) հավասարումն ունեցող α հարթությանը կամ պատկանի նրան, անհրաժեշտ է և բավարար, որ l ուղղի ուղղորդն ու α հարթության նորմալը լինեն փոխուղղահայաց.*

$$Am+Bn+Cp=0: \tag{14}$$

Դիտողություն 1: *Ինչպես տեսանք, (14) պայմանի տեղի ունենալուց հետևում է, որ l ուղիղը կամ զուգահեռ է α հարթությանը կամ էլ պատկանում է նրան: Ճշտելու համար, թե նշված դեպքերից որը տեղի ունի, բավական է l ուղղի վրա վերցնել որևէ M_0 կետ և պարզել՝ պատկանու՞մ է այն α հարթությանը, թե՞ ոչ: Այսինքն՝ անհրաժեշտ է ստուգել, M_0 կետի կոորդինատները բավարարու՞մ են արդյոք (12) հավասարմանը, թե՞ ոչ: Պարզ է, որ առաջին դեպքում l ուղիղը պատկանում է α հարթությանը, իսկ երկրորդ դեպքում զուգահեռ է նրան:*

Օրինակ 7: C հաստատունի ո՞ր արժեքի դեպքում հետևյալ ընդհանուր հավասարումներն ունեցող ուղիղը՝

$$\begin{cases}4x-3y+4z+1=0,\\ 3x-2y+z+3=0\end{cases} \tag{դ}$$

կլինի զուգահեռ

$$2x - y + cz + 2 = 0 \qquad (ե)$$

հավասարումն ունեցող հարթությանը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ՝ տրված ուղղի ընդհանուր հավասարումներից ստանանք այդ ուղղի կանոնական հավասարումները (տես օրինակ 2-ի լուծումը).

$$\frac{x+7}{5} = \frac{y+9}{8} = \frac{z}{1}. \qquad (դ)$$

Այնուհետև օգտվելով (14) բանաձևից՝ կունենանք

$$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 8 + c \cdot 1 = 0,$$

որտեղից կգտնենք c-ի այն արժեքը, որի դեպքում (դ) կանոնական հավասարումներն ունեցող ուղիղը զուգահեռ է (ե) հավասարումն ունեցող հարթությանը կամ գտնվում է նրա վրա.

$$c = -2.$$

Համոզվելով, որ տրված ուղղին պատկանող $M(-7;-9;0)$ կետի կոորդինատները չեն բավարարում

$$2x - y - 2z - 2 = 0$$

հավասարմանը՝ եզրակացնում ենք, որ (դ) հավասարումներն ունեցող ուղիղը ոչ թե պատկանում է (ե) հավասարումն ունեցող հարթությանը, այլ զուգահեռ է նրան:

Այսպիսով, c հաստատունի որոնելի արժեքը -2-ն է:

II. *l ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:*

Ակնհայտ է, որ քննարկվող դեպքում l ուղղի ուղղորդը համագիծ է α հարթության նորմալին: Պարզ է, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը. եթե l ուղղի ուղղորդը համագիծ է α հարթության նորմալին, ապա այդ ուղիղն ուղղահայաց է α հարթությանը:

Այսպիսով, տարածության մեջ տրված ուղղի և հարթության փոխուղղահայացության պայմանները համարժեք են այդ ուղղի ուղղորդի և հարթության նորմալի համագիծության պայմաններին:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը և օգտվելով կոորդինատներով տրված (13) վեկտորների համագիծության պայմաններից՝ կստանանք հետևյալ թեորեմը **[4,(26)]**.

Թեորեմ 4: *Որպեսզի (11) կանոնական հավասարումներն ունեցող l ուղիղը լինի ուղղահայաց (12) հավասարումն ունեցող α հարթությանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ l ուղղի ուղղորդն ու α հարթության նորմալը լինեն համագիծ.*

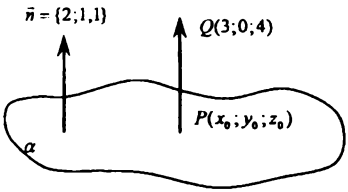
$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}; \qquad (15)$$

Օրինակ 8: Գտնել $Q(3;0;4)$ կետի պրոյեկցիան հետևյալ հավասարումն ունեցող հարթության վրա՝

$$2x + y + z - 4 = 0$$

Լուծում: Q կետի պրոյեկցիան α հարթության վրա նշանակենք $P(x_0;y_0;z_0)$-ով:

Ինչպես գիտենք P, կետը Q կետից α հարթությանը տարած ուղղահայացի հիմքն է (նկ.44): $\overrightarrow{PQ}$ վեկտորը համարելով P և Q կետերով անցնող ու α հարթությանն ուղղահայաց ուղղի ուղղորդ, հաշվի առնելով, որ P կետը պատկանում է α հարթությանը, և օգտվելով տարածության մեջ տրված ուղղի և հարթության ուղղահայացության պայմաններից, կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգը՝



նկ.44

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-3}{2} = \dfrac{y_0}{1} = \dfrac{z_0-4}{1}, \\ 2x_0 + y_0 + z_0 - 4 = 0: \end{cases} \qquad (q)$$

Լուծելով հավասարումների (q) համակարգը՝ կգտնենք P կետի որոնելի կոորդինատները.

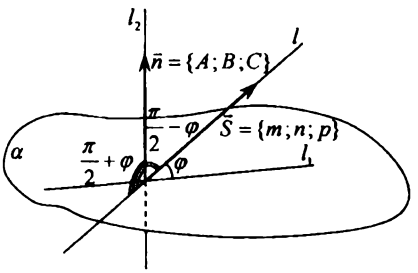
$$P(1;-1;3):$$

III. *l ուղիղը հատվում է α հարթության հետ և ուղղահայաց չէ նրան:*

Քննարկվող դեպքում տրված ուղղի հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև l_1 և l_2 ուղիղները (նկ.45), որտեղ l_1-ը l ուղղի պրոյեկցիան է α հարթության վրա, իսկ l_2-ը՝ l ուղղի և α հարթության հատման կետում այդ հարթությանը տարած ուղղահայացը:

Սահմանում 5: *Տարածության մեջ տրված l ուղղի և α հարթության կազմած անկյուն ասելով կհասկանանք տրված ուղղով և α հարթության վրա l ուղղի պրոյեկցիայով կազմված անկյունը:*

Բերված սահմանումից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում ուղղի և հարթության կազմած անկյունը սուր անկյուն է **[6,u14]**:



նկ.45

45-րդ նկարից երևում է, որ եթե l և l_1 ուղիղների կազմած անկյունը նշանակենք φ-ով, ապա l և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը կլինի $\pi/2-\varphi$: Հետևաբար, ունենալով l և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը, կարող ենք գտնել l և l_1 ուղիղների կազմած անկյունը:

Մյուս կողմից, ինչպես տեսանք վերևում, տարածության մեջ տրված երկու ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել այդ ուղիղների ուղղորդների կազմած անկյունը: Հետևաբար, l և l_2 ուղիղների կազմած անկյունը գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել $\vec{s}$ և $\vec{n}$ վեկտորների կազմած անկյունը:

ԳԼՈՒԽ I

Այսպիսով, տարածության մեջ տրված ուղղի և հարթության կազմած անկյունը գտնելու խնդիրը բերվում է այդ ուղղի ուղղորդի և հարթության նորմալի կազմած անկյունը գտնելու խնդրին:

Ակնհայտ է, որ եթե $\left(\vec{s},\hat{}\,\vec{n}\right)$-ը սուր անկյուն է, ուրեմն $\varphi=\pi/2-\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)$, իսկ եթե $\left(\vec{s},\hat{}\,\vec{n}\right)$-ը բութ անկյուն է, ուրեմն $\varphi=\left(\widehat{\vec{s},\vec{n}}\right)-\pi/2$:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների կազմած անկյան բանաձևից [4,(10')], դիտարկվող l ուղղի ուղղորդի և α հարթության նորմալի կազմած անկյան համար կստանանք

$$\left(\vec{s},\hat{}\,\vec{n}\right)=\arccos\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}: \qquad (16)$$

Օրինակ 9: Գտնել

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{4}=\frac{z+3}{-1}$$

կանոնական հավասարումներն ունեցող l ուղղի և

$$2x-2y-z+3=0$$

ընդհանուր հավասարումն ունեցող α հարթության կազմած անկյունը:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ

$$=\{-1;4;-1\},\quad \vec{n}=\{2;-2;-1\}$$

վեկտորներից առաջինը l ուղղի ուղղորդն է, իսկ երկրորդը՝ α հարթության նորմալը, (16) բանաձևի օգնությամբ այդ վեկտորների կազմած անկյան համար կունենանք

$$\beta=\arccos\frac{-2-8+1}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}}=\frac{3\pi}{4}:$$

Քանի որ β-ն բութ անկյուն է, հետևաբար, տրված ուղղի և հարթության կազմած անկյան համար կստանանք

$$\varphi=\beta-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

Նկատենք, որ տարածության մեջ տրված ուղղի և հարթության ուղղահայացության, ինչպես նաև ուղղի և հարթության զուգահեռության (կամ ուղիղը հարթությանը պատկանելու) պայմանները կարող ենք հեշտությամբ ստանալ նաև (16) բանաձևից:

§10. Գնդային մակերևույթի հավասարումը: Գլանային մակերևույթ: էլիպսոիդ, միախոռոչ և երկխոռոչ հիպերբոլոիդներ, էլիպսական և հիպերբոլական պարաբոլոիդներ, կոնական մակերևույթ և նրանց տեսքերի հետազոտումը զուգահեռ հատույթների միջոցով:

Յոթերորդ պարագրաֆում մենք դիտարկել ենք կորեր (շրջանագիծ, էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ), որոնք ուղղանկյուն կոորդինատական oxy համակարգում որոշվում են x և y փոփոխականների նկատմամբ գրված երկրորդ աստիճանի հավասարումով և այդ պատճառով կոչվում են երկրորդ կարգի կորեր [7,u1]:

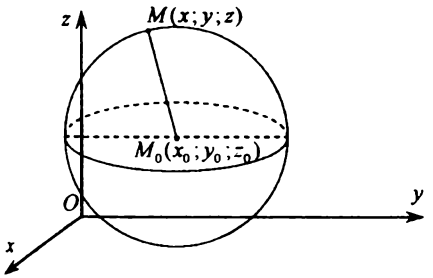
Այժմ դիտարկենք տարածության մեջ տրված այնպիսի մակերևույթներ, որոնց հավասարումները եռաչափ ուղղանկյուն կոորդինատական $oxyz$ համակարգում x, y և z փոփոխականների նկատմամբ ունեն երկրորդ աստիճան:

Սահմանում 1: *Եռաչափ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում x, y և z փոփոխականների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի հավասարումով որոշվող մակերևույթը կոչվում է երկրորդ կարգի մակերևույթ:*

1° *Գնդային մակերևույթ:*

Սահմանում 2: *Տարածության այն բոլոր կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունը տրված կետից (որը կոչվում է կենտրոն) հաստատուն է, կոչվում է գնդային մակերևույթ:*

Սահմանում 3: *Գնդային մակերևույթի որևէ կետը նրա կենտրոնին միացնող հատվածը կոչվում է այդ գնդային մակերևույթի շառավիղ և սովորաբար նշանակվում է R-ով:*



նկ.46

R շառավղով և $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի (նկ.46) հավասարումը ստանալու համար այդ մակերևույթի վրա վերցնենք կամայական $M(x;y;z)$ կետ: Համաձայն գնդային մակերևույթի սահմանման՝ M_0 և M կետերի հեռավորությունը կախված չէ այդ մակերևույթի վրա M կետի դիրքից և հավասար է R-ի:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևից՝ կունենանք [4,(9)]

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R: \qquad (1)$$

Վերջին հավասարության երկու կողմերը քառակուսի բարձրացնելով՝

կստանանք R շառավղով և $M_0(x_0;y_0;z_0)$ կենտրոնով գնդային մակերևույթի հավասարումը.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2: \qquad (1')$$

Եթե, մասնավոր դեպքում, R շառավղով գնդային մակերևույթի կենտրոնը գտնվում է oxy $(z_0=0)$, oxz $(y_0=0)$ կամ oyz $(x_0=0)$ կոորդինատական հարթության վրա, ապա այդ մակերևույթի հավասարումը համապատասխանաբար ընդունում է

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2=R^2,\ (x-x_0)^2+y^2+(z-z_0)^2=R^2,$$
$$x^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (1'')$$

տեսքը:

Իսկ եթե R շառավղով գնդային մակերևույթի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է $(x_0=y_0=z_0=0)$, ապա այդ մակերևույթի հավասարումն ընդունում է հետևյալ պարզ տեսքը՝

$$x^2+y^2+z^2=R^2: \qquad (1''')$$

Օրինակ 1: Կազմել այն գնդային մակերևույթի հավասարումը, որի տրամագծերից մեկի ծայրակետերը $A(4;-1;-3)$ և $B(0;3;-1)$ կետերն են:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ մեզ հետաքրքրող գնդային մակերևույթի կենտրոնը համընկնում է AB հատվածի միջնակետի հետ, և օգտվելով հատվածի միջնակետի կոորդինատների հաշվման բանաձևերից [3,(14')], դիտարկվող մակերևույթի կենտրոնի կոորդինատների համար կստանանք

$$x_0=\frac{4+0}{2}=2,\quad y_0=\frac{-1+3}{2}=1,\quad z_0=\frac{-3-1}{2}=-2:$$

Մյուս կողմից, քանի որ AB հատվածը տրված գնդային մակերևույթի տրամագիծն է, հետևաբար, այդ հատվածի երկարությունը, այսինքն՝ A և B կետերի հեռավորությունը հավասար է $2R$-ի, որտեղ R-ը այդ մակերևույթի շառավիղն է:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու կետերի հեռավորության բանաձևից, կունենանք

$$2R=\sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2+(-3+1)^2}=6,\quad R=3:$$

Այսպիսով, համաձայն (1') բանաձևի՝ մեզ հետաքրքրող գնդային մակերևույթի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9:$$

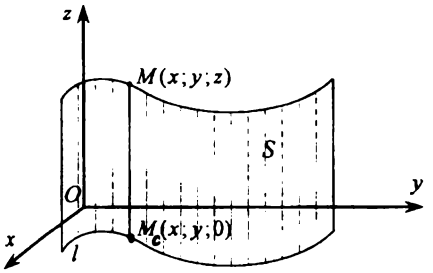
2° *Գլանային մակերևույթ:*

Սահմանում 4: *Տրված l կորով անցնող և տրված a ուղղին զուգահեռ բոլոր ուղիղներով կազմված մակերևույթը կոչվում է գլանային մակերևույթ: l կորը կոչվում է գլանային մակերևույթի ուղղորդ, իսկ ուղիղները, որոնցից առաջանում է գլանային մակերևույթը, կոչվում են գլանային մակերևույթի ծնորդներ:*

Դիցուք S գլանային մակերևույթի ծնորդները զուգահեռ են կոորդինատական oz առանցքին, իսկ այդ մակերևույթի ուղղորդը (որը նշանա-

կենք l-ով) պատկանում է oxy հարթությանը (նկ.47) և որոշվում է հետևյալ հավասարումով՝

$$f(x,y)=0: \qquad (2)$$



նկ.47

Ապացուցենք, որ եռաչափ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում դիտարկվող մակերևույթը նույնպես որոշվում է (2) հավասարումով:

Ձևակերպած պնդումն ապացուցելու համար նախ ցույց տանք, որ S մակերևույթի բոլոր կետերի կոորդինատները բավարարում են (2) հավասարմանը:

Դիտարկվող մակերևույթի վրա վերցնենք կամայական $M(x,y,z)$ կետ և այդ կետի պրոյեկցիան oxy հարթության վրա նշանակենք M_0-ով: Ակնհայտորեն M_0-ն պատկանում է l կորին, ինչը նշանակում է, որ այդ կետի կոորդինատները բավարարում են l կորի հավասարմանը: Քանի որ (2) հավասարումը z փոփոխական չի պարունակում, ուստի M կետի կոորդինատները նույնպես բավարարում են այդ հավասարմանը:

Մյուս կողմից, եթե $M(x,y,z)$ կետը չի գտնվում S մակերևույթի վրա, ուրեմն այդ կետի $M_0(x;y;0)$ պրոյեկցիան oxy հարթության վրա չի պատկանում l կորին, այսինքն՝ x և y փոփոխականները չեն բավարարում (2) հավասարմանը: Կրկին օգտվելով այն փաստից, որ (2) հավասարումը z փոփոխական չի պարունակում, կստանանք, որ M կետի կոորդինատները նույնպես չեն բավարարում (2) հավասարմանը:

Այսպիսով, քանի որ S մակերևույթի բոլոր կետերի կոորդինատները բավարարում են (2) հավասարմանը, իսկ այդ մակերևույթին չպատկանող կետերի կոորդինատները չեն բավարարում այդ հավասարմանը, հետևաբար (2) առնչությունը S մակերևույթի հավասարումն է:

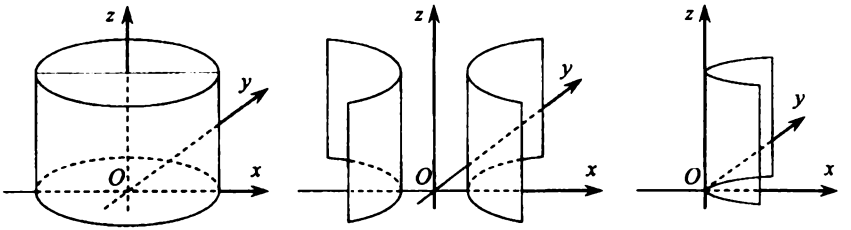
Փաստորեն (2) առնչությունը l կորի հավասարումն է, եթե այն դիտարկում ենք կոորդինատական oxy համակարգում, և l ուղղորդն ունեցող ու oz առանցքին զուգահեռ ծնորդներ ունեցող գլանային մակերևույթի հավասարումն է, եթե այն դիտարկում ենք կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում:

Հասկանալի է, որ տարածական $oxyz$ համակարգում l կորը տալու համար անհրաժեշտ է օգտվել երկու հավասարումներից.

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0: \end{cases} \qquad (3)$$

Օրինակ 2: Ինչպես գիտենք, հետևյալ հավասարումները՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2px \qquad (ա)$$



ա) Նկ.48 բ) գ)

կոորդինատական oxy համակարգում համապատասխանաբար որոշում են էլիպս, հիպերբոլ և պարաբոլ: Այդ նույն հավասարումները կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում համապատասխանաբար որոշում են էլիպսական, հիպերբոլական և պարաբոլական գլաններ (նկ.48), որոնց ծնորդները զուգահեռ են կոորդինատական oz առանցքին:

Նշենք նաև, որ (ա) հավասարումներն ունեցող մակերևույթների ուղղորդները համապատասխանաբար տրվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0,\end{cases}\quad \begin{cases}y^2=2px,\\ z=0:\end{cases} \qquad (բ)$$

3՝ *էլիպսոիդ:*

Սահմանում 5: *Կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (4)$$

որտեղ a -ն, b -ն և c -ն իրարից տարբեր դրական հաստատուններ են, կոչվում է եռառանցք էլիպսոիդ:

էլիպսոիդի հավասարումից երևում է, որ եթե $M(x;y;z)$ կետը պատկանում է այդ մակերևույթին, ապա նույն մակերևույթին են պատկանում նաև $M(\pm x;\pm y;\pm z)$ կետերը: Հետևաբար, (1) հավասարումն ունեցող էլիպսոիդը համաչափ է ինչպես կոորդինատական հարթությունների, այնպես էլ՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Դիտարկվող մակերևույթի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և oxy հարթությանը զուգահեռ հարթություններով:

(4) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0$, $y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0: \end{cases} \tag{4'}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված մակերևույթը հատելով որևէ կոորդինատական հարթությամբ՝ հատույթում ստանում ենք էլիպս:

Այժմ տրված մակերևույթի հետ մեկտեղ, որի հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \tag{4''}$$

դիտարկենք նաև կոորդինատական oxy հարթությանը զուգահեռ

$$z=h \quad (-\infty<h<+\infty) \tag{5}$$

հավասարումն ունեցող հարթությունները: (4'') հավասարման տեսքից երևում է, որ այդ հավասարումն ունեցող մակերևույթը կհատվի (5) հավասարումն ունեցող հարթության հետ այն և միայն այն ժամանակ, երբ $|h|\le c$: Ասվածից հետևում է, որ դիտարկվող մակերևույթը գտնվում է $-c\le z\le c$ տարածական շերտի մեջ: Ընդ որում՝ հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h \quad (-c\le h\le c): \end{cases} \tag{6}$$

Հավասարումների (6) համակարգում ընդունելով $h=\pm c$, կստանանք

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0, \\ z=\pm c: \end{cases} \tag{6'}$$

Քանի որ հավասարումների (6') համակարգին բավարարում են միայն $c_1(0;0;-c)$ և $c_2(0;0;c)$ կետերի կոորդինատները, հետևաբար $z=\pm c$ հավասարումներն ունեցող հարթություններից յուրաքանչյուրի հետ դիտարկվող մակերևույթն ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ:

$|h|<c$ դեպքում հավասարումների (6) համակարգով ներկայացվող կորերի տեսքը պարզելու համար այդ համակարգը ներկայացնենք

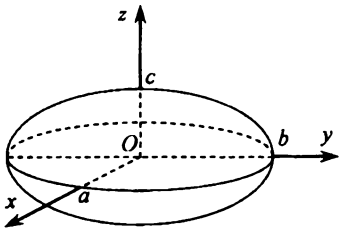
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2}+\dfrac{y^2}{b_*^2}=1, \\ z=h \quad (-c<h<c) \end{cases} \tag{6''}$$

տեսքով, որտեղ

$$a_*=a\sqrt{1-h^2/c^2}, \quad b_*=b\sqrt{1-h^2/c^2} \tag{7}$$

Ինչպես տեսնում ենք, քննարկվող դեպքում, դիտարկվող մակերևույթի և $z=h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից առաջանում է a_* և b_* կիսաառանցքներով էլիպս:

(7) հավասարություններից երևում է, որ $|h|$-ը փոքրացնելիս a-ը և b-ը մեծանում են և սահմանային դեպքում, այսինքն՝ $h=0$ դեպքում, համապատասխանաբար հավասարվում են a-ի և b-ի:



Նկ.49

Հասկանալի է, որ բերված դատողությունները և կատարված եզրակացությունները կմնան անփոփոխ նաև այն դեպքում, երբ դիտարկվող մակերևույթը հատենք oxz կամ oyz կոորդինատական հարթություններին զուգահեռ հարթություններով:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ (4) հավասարումն ունեցող էլիպսոիդն ունի 49-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Սահմանում 6: *(4) հավասարման մեջ մտնող a, b և c թվերը կոչվում են այդ հավասարումով տրվող էլիպսոիդի կիսաառանցքներ:*

Մասնավոր դեպքում (4) հավասարման մեջ ընդունելով $a=b=c=R$, կստանանք

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \qquad (4''')$$

այսինքն՝ դիտարկվող մասնավոր դեպքում (4) հավասարումն ունեցող էլիպսոիդը վերածվում է գնդային մակերևույթի, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ շառավիղը հավասար է էլիպսոիդի կիսաառանցքներին:

Նշենք նաև, որ $a=b\neq c$, $b=c\neq a$ և $a=c\neq b$ մասնավոր դեպքերից յուրաքանչյուրում դիտարկվող մակերևույթը վերածվում է, այսպես կոչված, պտտման էլիպսոիդի:

Օրինակ 3: Համոզվել, որ

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

հավասարումն ունեցող էլիպսոիդի և $x=2$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից առաջանում է էլիպս և գտնել այդ էլիպսի կիսաառանցքներն ու գագաթները:

Լուծում: Ակնհայտ է, որ տրված էլիպսոիդի և հարթության հատումից հատույթում կառաջանա կոր, որի բոլոր կետերի աբսցիսները հավասար են երկուսի: Հետևաբար, դիտարկվող մակերևույթի հավասարման մեջ ընդունելով $x=2$, կստանանք մեզ հետաքրքրող կորի հավասարումը [7,2°].

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{3}=1:$$

Ստացված հավասարումից երևում է, որ տրված էլիպսոիդի և հարթության հատումից հատույթում առաջանում է $a=3$ և $b=\sqrt{3}$ կիսաառանցքներով էլիպս, որի գագաթները հետևյալ կետերն են՝

$$A_1(2;-3;0),\quad A_2(2;3;0),\quad B_1(2;0;-\sqrt{3}),\quad B_2(2;0;\sqrt{3}):$$

4° *Միախոռոչ հիպերբոլոիդ:*

Սահմանում 7: *Կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{8}$$

որտեղ a -ն, b -ն և c -ն իրարից տարբեր դրական հաստատուններ են, կոչվում է եռառանցք միախոռոչ հիպերբոլոիդ:

Քանի որ (8) հավասարումն էլ է պարունակում x, y և z փոփոխականների միայն քառակուսիները, հետևաբար, դիտարկվող մակերևույթն էլ է համաչափ կոորդինատական հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Միախոռոչ հիպերբոլոիդի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և oxy հարթությանը զուգահեռ հարթություններով:

(8) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0, y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0:\end{cases} \tag{9}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված մակերևույթի և oyz, oxz կոորդինատական հարթությունների հատումից, հատույթներում առաջանում են հիպերբոլներ, իսկ oxy հարթության հատումից՝ էլիպս:

Այժմ, տրված մակերևույթի հետ մեկտեղ, որի հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}, \tag{8'}$$

դիտարկենք նաև կոորդինատական oxy հարթությանը զուգահեռ և (5) հավասարումն ունեցող հարթությունները: (8') հավասարման տեսքից երևում է, որ այդ հավասարումն ունեցող մակերևույթը h -ի ցանկացած արժեքի դեպքում հատվում է (5) հավասարումով տրված հարթության հետ: Ընդ որում՝ հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\quad (-\infty<h<+\infty):\end{cases} \tag{10}$$

Հավասարումների (10) համակարգով ներկայացվող կորերի տեսքը պարզելու համար այդ համակարգը ներկայացնենք

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2}+\dfrac{y^2}{b_*^2}=1, \\ z=h \quad (-\infty<h<+\infty) \end{cases} \tag{10'}$$

տեսքով, որտեղ

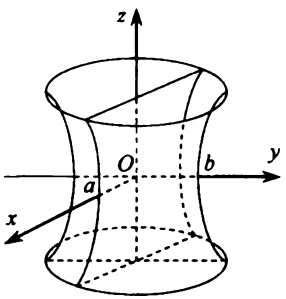
$$a_*=a\sqrt{1+h^2/c^2}, \quad b_*=b\sqrt{1+h^2/c^2} \tag{11}$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող միախոռոչ հիպերբոլոիդի և $z=h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից հատույթում առաջանում է էլիպս, որի կիսաառանցքներն ակնհայտորեն անսահմանափակորեն մեծանում են, երբ անսահմանափակորեն մեծանում է $|h|$-ը:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ (8) հավասարումն ունեցող միախոռոչ հիպերբոլոիդն ունի 50-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Սահմանում 8: *(8) հավասարման մեջ մտնող a,b և c թվերը կոչվում են այդ հավասարումով տրվող միախոռոչ հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ:*

Նշենք, որ $a=b$ մասնավոր դեպքում, (8) հավասարումն ունեցող մակերևույթը վերածվում է պտտման հիպերբոլոիդի (oz առանցքի շուրջը):



Նկ.50

Դժվար չէ նկատել, որ դիտարկվող միախոռոչ հիպերբոլոիդը կարող ենք համարել մակերևույթ, որը ստացվում է (10') հավասարումն ունեցող էլիպսների ընտանիքից, երբ h-ը փոփոխվում է մինուս անսահմանությունից մինչև պլյուս անսահմանություն անվերջ միջակայքում:

Վերջում նշենք նաև, որ միախոռոչ հիպերբոլոիդը կազմված է ուղիղ գծերից:

Օրինակ 4: Համոզվել, որ

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$$

հավասարումն ունեցող միախոռոչ հիպերբոլոիդի և $z=-1$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից առաջանում է հիպերբոլ և գտնել այդ հիպերբոլի կիսաառանցքներն ու գագաթները:

Լուծում: Պարզ է, որ տրված հիպերբոլոիդի և հարթության հատումից հատույթում կառաջանա կոր, որի բոլոր կետերի ապլիկատները հավասար են -1-ի: Հետևաբար, դիտարկվող հիպերբոլոիդի հավասարման մեջ ընդունելով $z=-1$, կստանանք մեզ հետաքրքրող կորի հավասարումը [7,3*].

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1:$$

Ստացված հավասարումից երևում է, որ տրված հիպերբոլոիդի և հարթության հատումից հատույթում առաջանում է $a=4$ և $b=3$ կիսաառանցքներով հիպերբոլ, որի գագաթները հետևյալ կետերն են՝

$$A_1(-4;0;-1), \quad A_2(4;0;-1):$$

5° *Երկխոռոչ հիպերբոլոիդ:*

Սահմանում 9: *Կոորդինատական oxyz տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{12}$$

որտեղ a -ն, b -ն և c -ն իրարից տարբեր դրական հաստատուններ են, կոչվում է եռառանցք երկխոռոչ հիպերբոլոիդ:

Պարզ է, որ (12) հավասարումն ունեցող մակերևույթը նույնպես համաչափ է կոորդինատական հարթությունների և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Դիտարկվող երկխոռոչ հիպերբոլոիդի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և oxy հարթությանը զուգահեռ հարթություններով:

(12) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0$, $y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1,\\ y=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\\ z=0:\end{cases} \tag{12'}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված մակերևույթի և oyz, oxz կոորդինատական հարթությունների հատումից հատույթներում առաջանում են հիպերբոլներ, իսկ oxy կոորդինատական հարթության հետ այն չի հատվում:

Այժմ տրված մակերևույթի հետ մեկտեղ, որի հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1, \tag{12''}$$

դիտարկենք նաև oxy հարթությանը զուգահեռ և (5) հավասարումն ունեցող հարթությունները: (12'') հավասարման տեսքից երևում է, որ այդ հավասարումն ունեցող մակերևույթը հատվում է (5) հավասարումով տրված հարթության հետ այն և միայն այն ժամանակ, երբ $|h|\geq c$: Ընդ որում՝ հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h\quad (h\leq -c, \text{կամ}\quad h\geq c)\end{cases} \tag{13}$$

համակարգով:

Նկատենք, որ դիտարկվող մակերևույթը գտնվում է $-c<z<c$ տարածական շերտից դուրս:

Հավասարումների (13) համակարգում ընդունելով $h=\pm c$, կստանանք

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0, \\ z=\pm c: \end{cases}$$

Քանի որ հավասարումների (13՝) համակարգին բավարարում են միայն $c_1(0;0;-c)$ և $c_2(0;0;c)$ կետերի կոորդինատները, հետևաբար $z=\pm c$ հավասարումներն ունեցող հարթություններից յուրաքանչյուրի հետ դիտարկվող հիպերբոլոիդն ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ:

$|h|>c$ դեպքում հավասարումների (13) համակարգով ներկայացվող կորի տեսքը պարզելու համար այդ համակարգը ներկայացնենք

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2}+\dfrac{y^2}{b_*^2}=1, \\ z=h \quad (h<-c, \text{կամ} \quad h>c) \end{cases} \tag{13՝՝}$$

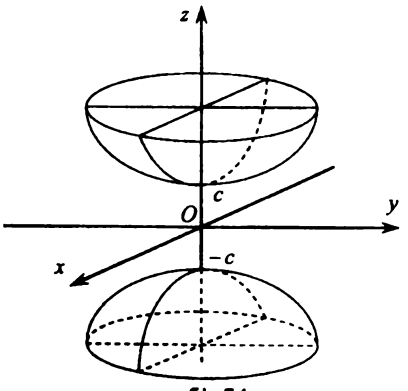
տեսքով, որտեղ

$$a_*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}, \quad b_*=b\sqrt{\frac{h^2}{c_2}-1}: \tag{14}$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող երկխոռոչ հիպերբոլոիդի և $z=h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից, $|h|>c$ դեպքում, հատույթում առաջանում է էլիպս, որի կիսաառանցքներն ակնհայտորեն $|h|$-ի հետ մեկտեղ անսահմանափակորեն մեծանում են:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ (12) հավասարումն ունեցող երկխոռոչ հիպերբոլոիդն ունի 51-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Նշենք, որ $a=b$ մասնավոր դեպքում դիտարկվող մակերևույթը վերածվում է պտտման հիպերբոլոիդի (oz առանցքի շուրջը):



Նկ.51

Սահմանում 10: *(12) հավասարման մեջ մտնող a, b և c թվերը կոչվում են այդ հավասարումով տրվող երկխոռոչ հիպերբոլոիդի կիսաառանցքներ:*

Նկատենք նաև, որ h-ը մինուս անսահմանափակությունից մինչև $-c$ սահմաններում փոփոխելիս (13՝՝) հավասարումն ունեցող էլիպսների ընտանիքը ձևավորում է տրված հիպերբոլոիդի ներքևի խոռոչը, իսկ c-ից մինչև պլյուս անսահմանափակություն սահմաններում փոփոխվելիս՝ վերևի խոռոչը:

6՝ *Էլիպսական պարաբոլոիդ:*

Սահմանում 11: *Կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{15}$$

որտեղ p-ն և q-ն դրական հաստատուններ են, կոչվում է էլիպսական պարաբոլոիդ, իսկ p և q հաստատունները կոչվում են այդ պարաբոլոիդի պարամետրեր:

Քանի որ (15) հավասարումը պարունակում է x և y փոփոխականների միայն քառակուսիները, ուստի տրված մակերևույթը համաչափ է oyz և oxz կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ: Մյուս կողմից, քանի որ նշված հավասարման մեջ z փոփոխականը բացասական արժեքներ չի ընդունում, հետևաբար այդ հավասարումով տրվող մակերևույթը գտնվում է վերին կիսատարածության մեջ:

Դիտարկվող պարաբոլոիդի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և oxy հարթությանը զուգահեռ հարթություններով:

(15) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0, y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases} y^2=2qz, \\ x=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=0, \\ z=0: \end{cases} \tag{16}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված մակերևույթի և oyz, oxz կոորդինատական հարթությունների հատումից հատույթներում առաջանում են պարաբոլներ, իսկ oxy կոորդինատական հարթության հետ դիտարկվող մակերևույթն ունի ընդամենը մեկ ընդհանուր կետ՝ կոորդինատների սկզբնակետը:

Այժմ (15) հավասարումն ունեցող մակերևույթի հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև oxy հարթությանը զուգահեռ (5) հավասարումն ունեցող հարթությունները: Ինչպես նշեցինք վերևում, (15) հավասարման տեսքից երևում է, որ այդ հավասարումն ունեցող մակերևույթը կհատվի (5) հավասարումով տրված հարթության հետ այն և միայն այն ժամանակ, երբ $h\geq 0$: Ընդ որում՝ հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2h, \\ z=h \quad (h\geq 0): \end{cases} \tag{17}$$

h-ի դրական արժեքների դեպքում հավասարումների (17) համակարգով ներկայացվող կորի տեսքը պարզելու համար (վերևում տեսանք, որ $h=0$ դեպքում հավասարումների այդ համակարգով ներկայացվող կորը վերածվում է կոորդինատների սկզբնակետի), այդ համակարգը ներկայացնենք

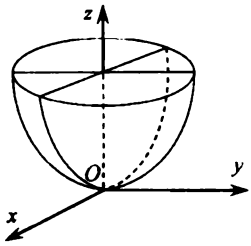
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2}+\dfrac{y^2}{b_*^2}=1, \\ z=h \quad (h>0) \end{cases} \tag{17'}$$

տեսքով, որտեղ

$$a_*=\sqrt{2ph}, \quad b_*=\sqrt{2qh}: \tag{18}$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող էլիպսական պարաբոլոիդի և $z=h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից h-ի դրական արժեքների դեպքում հատույթում առաջանում է էլիպս, որի կիսաառանցքները, h-ի հետ մեկտեղ, ակնհայտորեն անսահմանափակորեն մեծանում են:

Ամփոփելով արդյունքները, եզրակացնում ենք, որ (15) հավասարումն ունեցող էլիպսական պարաբոլոիդն ունի 52-րդ նկարում պատկերված տեսքը:



նկ.52

Նշենք, որ $p=q$ մասնավոր դեպքում դիտարկվող մակերևույթը վերածվում է պտտման էլիպսական պարաբոլոիդի (oz առանցքի շուրջը):

Նկատենք նաև, որ տրված էլիպսական պարաբոլոիդը կարող ենք համարել մակերևույթ, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով և որը ստացվում է (17′) էլիպսների ընտանիքից, երբ h-ը փոփոխվում է զրոյից մինչև պլյուս անսահմանություն միջակայքում:

7° *Հիպերբոլական պարաբոլոիդ:*

Սահմանում 12: *Կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \tag{19}$$

որտեղ p-ն և q-ն դրական հաստատուններ են, կոչվում է հիպերբոլական պարաբոլոիդ, իսկ p և q հաստատունները կոչվում են այդ պարաբոլոիդի պարամետրեր:

Պարզ է, որ (19) հավասարումն ունեցող մակերևույթը նույնպես համաչափ է oyz և oxz կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ:

Տրված մակերևույթի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և այդ հարթություններին զուգահեռ հարթություններով:

(19) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0$, $y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \\ z = 0: \end{cases} \tag{20}$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված մակերևույթի և oyz, oxz կոորդինատական հարթությունների հատումից հատույթներում առաջանում են պարաբոլներ, ընդ որում՝ այդ պարաբոլներից առաջինի ճյուղերն ուղղված են կոորդինատական oz առանցքի բացասական ուղղությամբ, իսկ երկրորդի ճյուղերը՝ նույն առանցքի դրական ուղղությամբ: (20) համակարգերից վերջինից երևում է, որ դիտարկվող մակերևույթի և oxy կոորդինատական հարթության հատումից հատույթում առաջանում է երկու ուղիղ գիծ:

Այժմ դիտարկվող մակերևույթը հատենք կոորդինատական oxy հարթությանը զուգահեռ, (5) հավասարումն ունեցող հարթություններով: Հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h \quad (h \neq 0): \end{cases} \tag{21}$$

Հավասարումների (15) համակարգով ներկայացվող կորի տեսքը պարզելու համար այդ համակարգը ներկայացնենք

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2} - \dfrac{y^2}{b_*^2} = 1, \\ z = h, \end{cases} \tag{21'}$$

տեսքով, երբ $h > 0$ և

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b_*^2} - \dfrac{x^2}{a_*^2} = 1, \\ z = h \end{cases} \tag{21''}$$

տեսքով, երբ $h < 0$, որտեղ

$$a_* = \sqrt{2p|h|}, \qquad b_* = \sqrt{2q|h|}: \tag{22}$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող հիպերբոլական պարաբոլոիդի և $z = h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից h-ի դրական արժեքների դեպքում հատույթում առաջանում է oxz հարթության հետ հատվող հիպերբոլ, իսկ բացասական արժեքների դեպքում՝ oyz հարթության հետ հատվող հիպերբոլ: Ընդ որում՝ այդ հիպերբոլների կիսաառանցքները ակնհայտորեն $|h|$-ի հետ մեկտեղ անսահմանափակորեն մեծանում են:

Այնուհետև տրված հիպերբոլոիդը, հատելով կոորդինատական oxz հարթությանը զուգահեռ և $y = h$ $(h \neq 0)$ հավասարումն ունեցող հարթություն-

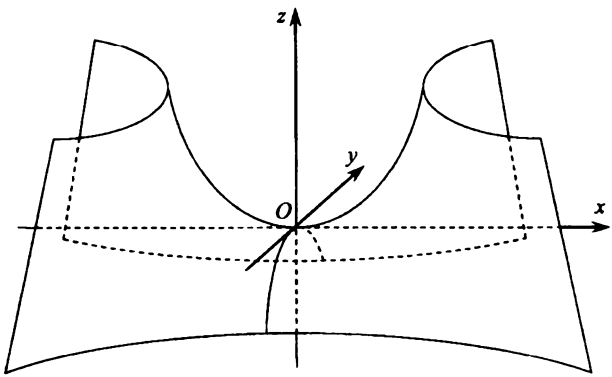
ների հետ, հատույթներում կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգով ներկայացվող պարաբոլները՝

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z + \dfrac{h^2}{2q}\right), \\ y = h \quad (h \neq 0), \end{cases} \tag{23}$$

որոնց ծյուղերն ուղղված են oz առանցքի դրական ուղղությամբ:

Վերջապես, (19) հավասարումն ունեցող մակերևույթը հատելով կոորդինատական oyz հարթությանը զուգահեռ $x = h$ $(h \neq 0)$ հավասարումն ունեցող հարթությունների հետ, հատույթներում կստանանք հավասարումների հետևյալ համակարգով ներկայացվող պարաբոլները՝

$$\begin{cases} y^2 = -2q\left(z - \dfrac{h^2}{2p}\right), \\ x = h \quad (h \neq 0), \end{cases} \tag{24}$$



Նկ.53

որոնց ծյուղերն ուղղված են oz առանցքի բացասական ուղղությամբ:

Ամփոփելով արդյունքները, եզրակացնում ենք, որ (19) հավասարումն ունեցող հիպերբոլական պարաբոլոիդն ունի 53-րդ նկարում պատկերված տեսքը:

Կարելի է համոզվել, որ հիպերբոլոիդը կազմված է ուղիղ գծերից:

8° *Երկրորդ կարգի կոն:*

Սահմանում 13: *Տրված l կորը հատող և տրված A կետով անցնող ուղիղներով կազմված մակերևույթը կոչվում է կոնական մակերևույթ: l կորը կոչվում է կոնական մակերևույթի ուղղորդ, ուղիղները, որոնցից առաջանում է կոնական մակերևույթը՝ այդ մակերևույթի ծնորդներ, իսկ A կետը՝ կոնական մակերևույթի գագաթ:*

Սահմանում 14: *Կոորդինատական $oxyz$ տարածական համակարգում հետևյալ հավասարումով տրվող մակերևույթը՝*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{25}$$

որտեղ a -ն, b -ն և c -ն դրական հաստատուններ են, կոչվում է երկրորդ կարգի կոն:

Ինչպես երևում է (25) հավասարումից, դիտարկվող մակերևույթը համաչափ է և՛ կոորդինատական հարթությունների, և կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Տրված մակերևույթի տեսքը պարզելու համար այն հատենք կոորդինատական հարթություններով և oxy հարթությանը զուգահեռ հարթություններով:

(25) հավասարման մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $x=0,\ y=0$ և $z=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,\\ z=0:\end{cases}\tag{26}$$

Հավասարումների (26) համակարգերից վերջինից երևում է, որ oxy կոորդինատական հարթության հետ դիտարկվող մակերևույթն ունի ընդամենը մեկ ընդհանուր կետ՝ կոորդինատների սկզբնակետը:

Հավասարումների բերված համակարգերից առաջին երկուսը համապատասխանաբար ներկայացնելով

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\ x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\ x=0\end{cases}\tag{26'}$$

և

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ y=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ y=0\end{cases}\tag{26''}$$

տեսքով, եզրակացնում ենք, որ (25) հավասարումն ունեցող մակերևույթի և oyz, oxz կոորդինատական հարթությունների հատումից համապատասխանաբար առաջանում են հավասարումների (26՝) և (26՝՝) համակարգերով որոշվող ուղիղ գծեր:

Այժմ տրված մակերևույթի հետ մեկտեղ, որի հավասարումը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\tag{25'}$$

դիտարկենք նաև oxy հարթությանը զուգահեռ (5) հավասարումն ունեցող հարթությունները: (25՝) հավասարման տեսքից երևում է, որ այդ հավասարումն ունեցող մակերևույթը h -ի ցանկացած արժեքի դեպքում հատվում է (5) հավասարումն ունեցող հարթության հետ: Ընդ որում՝ հատույթներում ստացված կորերը որոշվում են հավասարումների հետևյալ համակարգով՝

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\quad (h\neq 0):\end{cases}\tag{27}$$

Հավասարումների (27) համակարգով տրվող կորի տեսքը պարզելու համար այդ համակարգը ներկայացնենք

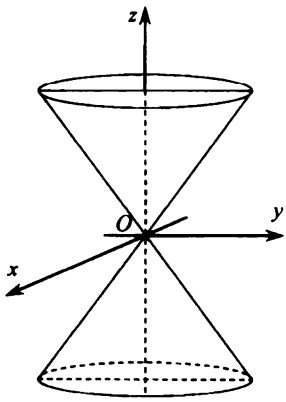
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_*^2}+\dfrac{y^2}{b_*^2}=1, \\ z=h \quad (h\neq 0) \end{cases} \tag{27'}$$

տեսքով, որտեղ

$$a_*=\frac{a|h|}{c}, \quad b_*=\frac{b|h|}{c}: \tag{28}$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող երկրորդ կարգի կոնի և $z=h$ հավասարումն ունեցող հարթության հատումից, $h\neq 0$ դեպքում հատույթում առաջանում է էլիպս, որի կիսաառանցքները $|h|$-ի հետ մեկտեղ անսահմանափակորեն մեծանում են:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ (25) հավասարումն ունեցող երկրորդ կարգի կոնն ունի 54-րդ նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ.54

Նշենք, որ $a=b$ մասնավոր դեպքում դիտարկվող մակերևույթը վերածվում է պտտման (շրջանային) կոնի (oz առանցքի շուրջը):

Հասկանալի է, որ երկրորդ կարգի կոնը կազմված է ուղիղ գծերից, որոնք կոչվում են այդ կոնի ծնորդներ:

Վերջում նշենք, որ քանի որ գլանային մակերևույթը, միախոռոչ հիպերբոլոիդը, հիպերբոլական պարաբոլոիդը և երկրորդ կարգի կոնը կազմված են ուղիղ գծերից, այդ պատճառով նշված մակերևույթները կոչվում են գծավոր:

ԳԼՈՒԽ II

ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

§11. Մատրիցի գաղափարը: Գործողություններ մատրիցների հետ: Հակադարձ մատրից: Թեորեմ հակադարձ մատրիցի գոյության մասին:

Որոշիչի հասկացության հետ ծանոթանալիս [2,u14] դիտարկել ենք իրական թվերից կազմված աղյուսակներ [2,(8)], որոնք ունեն

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (n \in N) \tag{1}$$

տեսքը և այդ աղյուսակներն անվանել ենք n -րդ կարգի քառակուսի մատրիցներ, իսկ $a_{ij}\,(i;j=1,2,\dots,n)$ թվերը՝ այդ մատրիցի տարրեր:

Թույլատրելով, որ ընդհանուր դեպքում մատրիցի տողերի և սյուների քանակները իրարից տարբեր լինեն, կհանգենք հետևյալ սահմանմանը՝

Սահմանում 1: *Իրական թվերից կազմված*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ուղղանկյունաձև աղյուսակը, որտեղ m -ը և n -ը կամայական բնական թվեր են, կոչվում է m,n չափերի ուղղանկյուն մատրից, իսկ a_{ij} $(i=1,2,\dots,m;$ $j=1,2,\dots,n)$ թվերը՝ այդ մատրիցի տարրեր:

Ինչպես տեսնում ենք m -ը (2) մատրիցի տողերի քանակն է, իսկ n -ը՝ սյուների: Հասկանալի է, որ $m=n$ մասնավոր դեպքում, (2) մատրիցը կվերածվի քառակուսի մատրիցի (կհամընկնի (1) մատրիցի հետ):Մատրիցները կնշանակենք մեկ տառով՝ սովորաբար լատիներեն որևէ մեծատառով:

Սահմանում 2: *Մեկ տողից կազմված մատրիցը կոչվում է տող մատրից, իսկ մեկ սյունից կազմված մատրիցը՝ սյուն մատրից:*

Համաձայն բերված սահմանման՝ տող մատրիցը և սյուն մատրիցը համապատասխանաբար ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$(a_1, a_2, \dots, a_n), \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_n \end{pmatrix}: \tag{3}$$

Սահմանում 3: *Եթե մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, այն կոչվում է զրոյական մատրից և նշանակվում է* 0 *-ով.*

$$0=\begin{pmatrix}0\,0\cdots 0\\0\,0\cdots 0\\ \\0\,0\cdots 0\end{pmatrix}: \tag{4}$$

Սահմանում 4: *Քառակուսի մատրիցին կանվանենք անկյունագծային մատրից, եթե նրա գլխավոր անկյունագծի* [2,u11] *վրա գտնվող բոլոր տարրերը տարբեր են զրոյից, իսկ մնացած տարրերը հավասար են զրոյի:*

Համաձայն սահմանման՝ անկյունագծային մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{pmatrix}a_{11}\,0\cdots 0\\0\,a_{22}\cdots 0\\ \cdots\cdots\cdots\\0\,0\cdots a_{nn}\end{pmatrix},\quad (a_{ii}\neq 0;\ i=1,2,\ldots,n): \tag{5}$$

Սահմանում 5: *Եթե անկյունագծային մատրիցի անկյունագծի վրա գտնվող տարրերը հավասար են մեկի, ապա այն կոչվում է միավոր մատրից:*

Միավոր մատրիցը նշանակելով E-ով, համաձայն սահմանման, կունենանք

$$E=\begin{pmatrix}1\,0\cdots 0\\0\,1\cdots 0\\ \cdots\cdots\\0\,0\cdots 1\end{pmatrix}: \tag{6}$$

Սահմանում 6: *Միևնույն չափերի* A *և* B *մատրիցները կոչվում են հավասար, եթե հավասար են այդ մատրիցների համապատասխան տարրերը:*

A և B մատրիցների հավասարությունը կնշանակենք սովորական ձևով.

$$A=B:$$

Սահմանում 7: *Կասենք, որ* m,n *չափերի ուղղանկյունաձև մատրիցն ունի անկյունագծային տեսք, եթե նրա* $a_{11},a_{22},\ldots,a_{rr}[0\le r\le\min(m,n)]$ *տարրերը տարբեր են զրոյից, իսկ մնացած տարրերը հավասար են զրոյի:*

Սահմանում 8: *Հետևյալ ձևափոխությունները կոչվում են մատրիցի տարրական ձևափոխություններ՝*

ա) երկու տողերի կամ երկու սյուների դիրքափոխությունը (տեղերի փոխելը),

բ) շարքի տարրերի բազմապատկումը զրոյից տարբեր որևէ թվով [2],

գ) որևէ տողի (սյան) տարրերին մեկ այլ տողի (սյան) համապատասխան տարրերի գումարումը, նախապես այդ տողի (սյան) տարրերը բազմապատկած միևնույն թվով,

դ) միայն զրոներից կազմված շարքի դեն նետումը:

Կարելի է հեշտությամբ համոզվել, որ յուրաքանչյուր քառակուսի մատրից տարրական ձևափոխությունների միջոցով կարելի է բերել անկյունագծային տեսքի:

Սահմանում 9: *Միևնույն չափերի A և B մատրիցների գումար ասելով կհասկանանք այն C մատրիցը, որի տարրերը հավասար են A և B մատրիցների համապատասխան տարրերի գումարին:*

Այսպիսով, համաձայն սահմանման, եթե

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11}\,b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}\,b_{22}\cdots b_{2n} \\ \\ b_{m1}\,b_{m2}\cdots b_{mn} \end{pmatrix},$$

ապա *)

$$C=A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\cdots a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}: \tag{7}$$

Մատրիցների գումարը գտնելու գործողությունը կոչվում է մատրիցների գումարում:

Օրինակ 1: Գտնել A և B մատրիցների գումարը, եթե

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Լուծում: Օգտվելով սահմանում 9-ից, տրված մատրիցների գումարի համար կունենանք

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Հատուկ նշենք, որ, համաձայն սահմանման, գումարել կարելի է միայն միևնույն չափերի մատրիցները՝ ընդ որում այդ գործողությունն օժտված է տեղափոխելիության և զուգորդելիության հատկություններով: Ասվածը նշանակում է, որ տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$\text{ա)}\ A+B=B+A, \qquad \text{բ)}\ (A+B)+C=A+(B+C), \tag{8}$$

որտեղ A-ն B-ն և C-ն միևնույն չափերի կամայական մատրիցներ են:

Նկատենք, որ մատրիցների գումարման գործողությունը բնական ձևով տարածվում է նաև ցանկացած թվով գումարելիների դեպքում:

Սահմանում 10: *α իրական թվի և A մատրիցի արտադրյալ ասելով կհասկանանք նույն չափերի այն մատրիցը, որի տարրերը հավասար են A մատրիցի համապատասխան տարրերի և α թվի արտադրյալին:*

---

*) $A+B$ գրառումը նշանակում է A և B մատրիցների գումար:

α իրական թվի և A մատրիցի արտադրյալը կնշանակենք սովորական ձևով.

$$\alpha A:$$

Այսպիսով, համաձայն սահմանման, տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\,a_{11}\,\alpha\,a_{12}\cdots\alpha\,a_{1n} \\ \alpha\,a_{21}\,\alpha\,a_{22}\cdots\alpha\,a_{2n} \\ \\ \alpha\,a_{m1}\,\alpha\,a_{m2}\cdots\alpha\,a_{mn} \end{pmatrix}: \qquad (9)$$

Օրինակ 2: Գտնել 7-ի և A մատրիցի արտադրյալը, եթե

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Օգտվելով (9) բանաձևից՝ կստանանք

$$7\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -14 \\ 0 & 14 & 7 \end{pmatrix}:$$

Օգտվելով իրական թվի և որոշիչի արտադրյալի սահմանումից [2,6°], կհամոզվենք, որ եթե A-ն n-րդ կարգի քառակուսի մատրից է, իսկ α-ն՝ որևէ իրական թիվ, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|, \qquad (10)$$

որտեղ $|A|$-ն և $|\alpha A|$-ն համապատասխանաբար A և αA մատրիցների որոշիչներն են:

Հեշտությամբ կարելի է համոզվել, որ մատրիցը թվով բազմապատկման գործողությունն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$\text{ա)}\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\quad \text{բ)}\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\quad \text{գ)}\ (\alpha\beta)A=\alpha(\beta A), \qquad (11)$$

որտեղ A-ն ու B-ն միևնույն չափերի մատրիցներ են, իսկ α-ն ու β-ն՝ կամայական իրական թվեր:

Սահմանում 11: *Միևնույն չափերի A և B մատրիցների տարբերությունը նշանակվում է սովորական ձևով $(A-B)$ և սահմանվում է հետևյալ հավասարության միջոցով՝*

$$A-B=A+(-1)B: \qquad (12)$$

Օրինակ 3: Գտնել A և B մատրիցների տարբերությունը, եթե

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Օգտվելով (7), (9) և (12) բանաձևերից՝ կունենանք

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -4 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Սահմանում 12:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{և} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11}\,b_{12}\cdots b_{1k} \\ b_{21}\,b_{22}\cdots b_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\,b_{n2}\cdots b_{nk} \end{pmatrix}$$

մատրիցների արտադրյալ կոչվում է այն

$$C=\begin{pmatrix} c_{11}\,c_{12}\cdots c_{1k} \\ c_{21}\,c_{22}\cdots c_{2k} \\ \\ c_{m1}\,c_{m2}\cdots c_{mk} \end{pmatrix}$$

մատրիցը, որի i-րդ տողի $(i=1,2,\ldots,m)$ և j-րդ սյան $(j=1,2,\ldots,k)$ հատման տեղում գտնվող c_{ij} տարրը հավասար է A մատրիցի i-րդ տողի և B մատրիցի j-րդ սյան համապատասխան տարրերի արտադրյալների գումարին.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \qquad (i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,k): \tag{13}$$

Երկու մատրիցների արտադրյալը գտնելու գործողությունը կոչվում է մատրիցների բազմապատկում:

Ինչպես երևում է մատրիցների արտադրյալի բերված սահմանումից, երկու մատրիցների բազմապատկումը հնարավոր է այն և միայն այն ժամանակ, երբ առաջին մատրիցի սյուների քանակը հավասար է երկրորդ մատրիցի տողերի քանակին:

Նշենք նաև, որ երկու մատրիցների բազմապատկման արդյունքում ստացված արտադրյալ մատրիցն ունի այնքան տող, որքան առաջին մատրիցը և այնքան սյուն, որքան՝ երկրորդ մատրիցը:

Հասկանալի է, որ նույն կարգն ունեցող քառակուսի մատրիցների բազմապատկումը միշտ հնարավոր է:

Սակայն նկատենք, որ նույնիսկ նշված մասնավոր դեպքում, մատրիցների բազմապատկումն, ընդհանրապես ասված, օժտված չէ տեղափոխելիության հատկությամբ:

Օրինակ 4: Գտնել A և B մատրիցների արտադրյալը, եթե

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Օգտվելով (13) բանաձևից՝ տրված մատրիցների արտադրյալի համար կունենանք.*)

---

*) A և B մատրիցների արտադրյալը կնշանակենք $A\cdot B$-ով:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2+0 & 0+4+0\\ 1+0+9 & 0+0+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 10 & 3\end{pmatrix}:$$

Օրինակ 5: Գտնել A և B մատրիցների $A\cdot B$ և $B\cdot A$ արտադրյալները, եթե

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}:$$

Լուծում: Ունենք

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1 & 2+3\\ -2+1 & 4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -1 & 7\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4 & -1+2\\ 1+6 & 2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Ինչպես տեսնում ենք տրված մատրիցների արտադրյալը տեղափոխելի չէ:

Օրինակ 6: Գտնել A և B մատրիցների $A\ B$ և $B\cdot A$ արտադրյալները, եթե

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}:$$

Լուծում: Ունենք

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{pmatrix}:$$

Այսպիսով, դիտարկվող մատրիցների արտադրյալը տեղափոխելի է:

Դժվար չէ ստուգել, որ մատրիցների բազմապատկման գործողությունն օժտված է ինչպես զուգորդելիության.

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C),\tag{14}$$

այնպես էլ գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական հատկություններով.

$$\text{ա)}\ (A+B)C=AC+BC,\quad \text{բ)}\ A(B+C)=AB+AC:\tag{15}$$

Հասկանալի է, որ մատրիցների բազմապատկման գործողությունը բնական ձևով կարելի է տարածել նաև մի քանի արտադրիչների դեպքում:

Մատրիցների բազմապատկման ժամանակ միավորի դեր է կատարում (6) տեսքն ունեցող E մատրիցը, որով էլ բացատրվում է այդ մատրիցի անվանումը: Ավելին՝ կարող ենք անմիջական բազմապատկման միջոցով համոզվել, որ E միավոր մատրիցը տեղափոխելի է նույն կարգն ունեցող ցանկացած քառակուսի մատրիցի հետ.

$$A\cdot E=E\cdot A=A:\tag{16}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ E-ն (16) հավասարություններին բավարարող միակ մատրիցն է:

Մատրիցներին վերաբերող և մեզ հետաքրքրող մնացած հասկացություն-

ները կապված են որոշիչի հասկացության հետ:

Սահմանում 13: *Քառակուսի մատրիցը կոչվում է եզակի (վերասերված) մատրից, եթե նրա որոշիչը հավասար է զրոյի, և ոչ եզակի մատրից՝ հակառակ դեպքում:*

Այժմ, ձևակերպենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Միևնույն կարգի երկու քառակուսի մատրիցների արտադրյալի որոշիչը հավասար է այդ մատրիցների որոշիչների արտադրյալին:*

Հետևանք 1: *Որպեսզի միևնույն կարգի երկու քառակուսի մատրիցների արտադրյալը լինի ոչ եզակի մատրից, անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի արտադրիչ մատրիցները նույնպես լինեն ոչ եզակի մատրիցներ:*

Սահմանում 14: *B քառակուսի մատրիցը կոչվում է նույն կարգն ունեցող A քառակուսի մատրիցի հակադարձ մատրից, եթե տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝*

$$A \cdot B = B \cdot A = E: \tag{17}$$

A մատրիցի հակադարձ մատրիցը նշանակելով A^{-1} պայմանանշանով՝ համաձայն բերված սահմանման, կստանանք

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \quad A = E: \tag{17'}$$

Թեորեմ 2: *Որպեսզի (1) մատրիցի համար գոյություն ունենա հակադարձ մատրից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ոչ եզակի մատրից:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք (1) մատրիցն ունի հակադարձ մատրից: Այդ դեպքում, համաձայն հակադարձ մատրիցի սահմանման, մասնավորապես կունենանք

$$A \cdot A^{-1} = E: \tag{17''}$$

Մատրիցային (17″) հավասարության վրա կիրառելով թեորեմ 1-ը՝ կստանանք

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det E: \tag{18}$$

Օգտվելով որոշիչի հաշվման բանաձևից **[2,(14)]** և համոզվելով, որ

$$\det E = 1, \tag{19}$$

եզրակացնում ենք, որ

$$\det A \neq 0, \quad \det A^{-1} \neq 0, \tag{20}$$

որտեղից մասնավորապես կստանանք, որ A–ն ոչ եզակի մատրից է:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք (1)-ը ոչ եզակի մատրից է և դիտարկենք հետևյալ մատրիցը՝

$$B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

որտեղ Δ-ն (1) մատրիցի որոշիչն է.

$$\Delta = \det A,$$

իսկ A_{ij} թվերը $(i, j = 1,2,\ldots,n)$, այդ մատրիցի a_{ij} տարրերի հանրահաշվական

լրացումները և ցույց տանք, որ B-ն A մատրիցի հակադարձ մատրիցն է, այսինքն՝ ցույց տանք, որ այդ մատրիցների համար տեղի ունեն (17) հավասարությունները:

Իրոք, օգտվելով որոշիչի հաշվման բանաձևից, նրա չորրորդ հատկությունից [2,4°], ինչպես նաև երկու մատրիցների արտադրյալ մատրիցի տարրերը հաշվելու (13) բանաձևից, (1) և (21) մատրիցների արտադրյալի c_{ij} տարրերի համար կունենանք

$$c_{ij}=\frac{1}{\Delta}\left(a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}\right)=\begin{cases}1, \text{ եթե } i=j,\\ 0, \text{ եթե } i\neq j,\end{cases}\quad (i,j=1,2,\ldots,n): \tag{22}$$

Ստացված հավասարություններն ակնհայտորեն նշանակում են, որ դիտարկվող A և B մատրիցների համար տեղի ունի հետևյալ մատրիցային հավասարությունը՝

$$A\cdot B=E:$$

Նույն ձևով համոզվելով, որ տեղի ունի նաև $B\cdot A=E$ հավասարությունը, եզրակացնում ենք, որ (21) տեսքն ունեցող B մատրիցը (1) մատրիցի հակադարձ մատրիցն է.

$$B=A^{-1}$$

Իպա

Ապացուցած թեորեմը հնարավորություն է տալիս ձևակերպելու ոչ եզակի մատրիցի հակադարձ մատրիցը գտնելու հետևյալ կանոնը՝

Տրված ոչ եզակի մատրիցի հակադարձ մատրիցը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) դիտարկվող մատրիցը շրջել [2,u20],

բ) ստանալ շրջված մատրիցի տարրերի հանրահաշվական լրացումներից կազմված մատրիցը,

գ) ստացված մատրիցի բոլոր տարրերը բաժանել տրված մատրիցի որոշիչի վրա:

Օրինակ 7: Գտնել

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix} \tag{ա}$$

մատրիցի հակադարձ մատրիցը:

Լուծում: Համոզվելով, որ տրված մատրիցի որոշիչը տարբեր է զրոյից.

$$\det A=3\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=5,$$

թեորեմ 2-ի շնորհիվ եզրակացնում ենք, որ այն ունի հակադարձ մատրից: Այնուհետև հաշվենք (ա) մատրիցի տարրերի հանրահաշվական լրացումները [2(11)].

$$\begin{array}{lll} A_{11}=5, & A_{21}=4, & A_{31}=-1,\\ A_{12}=10, & A_{22}=12, & A_{32}=-3,\\ A_{13}=0, & A_{23}=1, & A_{33}=1, \end{array}$$

և օգտվելով (1) մատրիցի հակադարձ մատրիցի կառուցման (21) բանաձևից, ստանանք որոնելի մատրիցը.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}:$$

Վերջում ապացուցենք նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *A մատրիցի հակադարձ մատրիցը (եթե այն գոյություն ունի) որոշվում է միարժեքորեն:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով: Դիցուք A^{-1}-ը և B-ն A մատրիցի հակադարձ մատրիցներ են: Այդ դեպքում, համաձայն հակադարձ մատրիցի սահմանման, տեղի ունեն հետևյալ մատրիցային հավասարությունները՝

$$A\cdot B=B\cdot A=E,\quad A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E: \tag{23}$$

Այնուհետև, օգտվելով (16) և (23) հավասարություններից՝ կունենանք

$$(B\cdot A)\cdot A^{-1}=E\cdot A^{-1}=A^{-1}, \tag{24}$$

$$B\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)=B\cdot E=B: \tag{25}$$

Հաշվի առնելով նաև, որ մատրիցների բազմապատկման գործողությունն օժտված է զուգորդելիության հատկությամբ, այսինքն՝ հաշվի առնելով, որ տեղի ունի

$$(B\cdot A)\cdot A^{-1}=B\cdot\left(A\cdot A^{-1}\right)$$

հավասարությունը, (24) և (25) հավասարություններից վերջնականապես կստանանք

$$B=A^{-1}:$$

Իպա

§12. Մատրիցի ռանգը: Թեորեմ մատրիցի ռանգի մասին: Գծային հավասարումների համակարգեր: Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմը:

Մատրիցը բնութագրող կարևորագույն հասկացություններից մեկի՝ մատրիցի ռանգի հետ ծանոթանալու համար դիտարկենք m,n չափերի

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1r}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2r}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{r1}\ a_{r2}\cdots a_{rr}\cdots a_{rn} \\ \\ a_{m1}\ a_{m2}\cdots a_{mr}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

մատրիցը, որտեղ m-ը և n-ը կամայական բնական թվեր են, և ներմուծենք մատրիցի մինոր հասկացությունը: Դրա համար վերցնենք $1\le k\le \min(m,n)$ պայմանին բավարարող որևէ բնական թիվ և (1) մատրիցում կամայական ձևով ընտրենք k տող և k սյուն:

Սահմանում 1: *A մատրիցի՝ նկարագրված ձևով ընտրված տողերի և սյուների հատման տեղերում կանգնած տարրերից կազմված k-րդ կարգի մատրիցի որոշիչը կոչվում է A մատրիցի k-րդ կարգի մինոր:*

Սահմանում 2: *A մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը կոչվում է այդ մատրիցի ռանգ և նշանակվում է $rangA$ պայմանանշանով:*

Ըստ էության, եթե մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի, նշանակում է այդ մատրիցն ունի r-րդ կարգի զրոյից տարբեր մինոր, իսկ r-ից բարձր կարգի բոլոր մինորները հավասար են զրոյի:

Սահմանում 3: *Երկու մատրիցներ կոչվում են համարժեք, եթե ունեն միևնույն ռանգը:*

Այն փաստը, որ A և B մատրիցները համարժեք են, կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$A\sim B:$$

A մատրիցի սյուներն իբրև m-չափանի գծային տարածության [2,u1,8] վեկտորներ, կարող են լինել գծորեն կախյալ կամ՝ գծորեն անկախ [2,u3,4]: Բնականաբար, դիտարկվող մատրիցի տողերն էլ, իբրև n-չափանի գծային տարածության վեկտորներ, կարող են լինել գծորեն կախյալ, կամ՝ գծորեն անկախ:

Պարզվում է՝ տեղի ունի հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Յուրաքանչյուր մատրիցի ռանգ հավասար է այդ մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն թվին:*

Ապացույց: Դիցուք (1) մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի, այսինքն՝ այդ մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը հավասար է r-ի: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ r-րդ կարգի, զրոյից տարբեր D_r մինորը գտնվում է դիտարկվող մատրիցի վերին ձախ անկյունում: *)

Թեորեմն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ

1) A մատրիցն ունի գծորեն անկախ r սյուն,

2) մնացած սյուներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է այդ r սյուների գծային զուգակցությունը [2,u2]:

---

*) Հասկանալի է, որ կատարված ենթադրությունը չի հանգեցնի թեորեմի ապացույցի ընդհանրության խախտմանը:

Նախ ցույց տանք, որ A մատրիցի առաջին r սյուները՝ իբրև m-չափանի գծային տարածության վեկտորներ, գծորեն անկախ են:

Համոզվելու համար ենթադրենք հակառակը, այսինքն՝ ենթադրենք նշված սյուների մեջ գոյություն ունի գծային կախվածություն: Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ (1) մատրիցի առաջին r սյուներից գոնե մեկը, օրինակ r-րդը, հանդիսանում է մնացած $r-1$ սյուների գծային զուգակցությունը [2,թ1], ինչը նշանակում է, որ գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-1}$ թվեր, որ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$a_r = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1}, \tag{2}$$

որտեղ $a_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi}\}$ $(i = 1,2,\ldots,r)$ վեկտորը A մատրիցի i-րդ սյունն է:

Եթե դիտարկվող մատրիցի r-րդ սյան տարրերին գումարենք առաջին $r-1$ սյուների համապատասխան տարրերը, նախապես այդ սյուները համապատասխանաբար բազմապատկելով $-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{r-1}$ թվերով, արդյունքում կստանանք մատրից, որի r-րդ սյունը կազմված կլինի զրոներից: Մասնավորապես՝ զրոներից կազմված կլինի նաև D_r մինորի, տարրական ձևափոխությունների ենթարկված [11,u8] r-րդ սյունը, ինչը նշանակում է [2,5°], որ այդ մինորը հավասար է զրոյի:

Այսպիսով հանգեցինք հակասության, որովհետև, համաձայն ենթադրության, D_r մինորը հավասար չէ զրոյի:

Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ մեր ենթադրությունն այն մասին, որ A մատրիցի առաջին r սյուների մեջ գոյություն ունի գծային կախվածություն, սխալ է: Հետևաբար, (1) մատրիցի առաջին r սյուները՝ իբրև m-չափանի գծային տարածության վեկտորներ, գծորեն անկախ են:

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցելու համար, այսինքն՝ ցույց տալու համար, որ A մատրիցի կամայական l-րդ $(r < l \le n)$ սյուն ներկայացվում է այդ մատրիցի առաջին r սյուների գծային զուգակցությամբ, բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 4: *Կասենք, որ A մատրիցի $(r+1)$-րդ կարգի D_{r+1} մինորը երիզավորում է այդ մատրիցի r-րդ կարգի D_r մինորը, եթե այն իր որևէ անկյունում պարունակում է D_r մինորը:*

Այժմ վերցնենք կամայական i համար $(1 \le i \le m)$ և կառուցենք

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1r}\, a_{1l} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2r}\, a_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}\, a_{r2} \cdots a_{rr}\, a_{rl} \\ a_{i1}\, a_{i2} \cdots a_{ir}\, a_{il} \end{vmatrix} \quad (1 \le i \le m) \tag{3}$$

որոշիչը, որը ստացվում է երիզավորելով D_r մինորը A մատրիցի l-րդ սյան և i-րդ տողի համապատասխան տարրերով:

Նախ ցույց տանք, որ i-ի բոլոր արժեքների համար (3) որոշիչը հավասար է զրոյի:

Իրոք, եթե $i > r$, ապա համաձայն ենթադրության, որպես (1) մատրիցի $(r+1)$-րդ կարգի մինոր, այն հավասար է զրոյի: Իսկ եթե $i \le r$, ապա Δ_i որոշիչը կունենա երկու միատեսակ տողեր և այս դեպքում էլ այդ պատճառով հավասար կլինի զրոյի [2,3◦]:

Այսպիսով, i-ի բոլոր արժեքների համար (3) որոշիչը հավասար է զրոյի.

$$\Delta_i = 0 \qquad (1 \le i \le m): \tag{4}$$

Այնուհետև դիտարկենք Δ_i որոշիչի վերջին տողի տարրերի հանրահաշվական լրացումները: Պարզ է, որ a_{il} տարրի հանրահաշվական լրացումը D_r մինորն է: Նկատելով, որ $a_{ij}(1 \le j \le r)$ տարրի հանրահաշվական լրացումը (3) որոշիչում կախված չէ i համարից՝ այն նշանակենք A_j-ով.

$$A_j = (-1)^{r+1+j} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1}\, a_{1,j+1} \cdots a_{1r}\, a_{1l} \\ a_{21} \cdots a_{2,j-1}\, a_{2,j+1} \cdots a_{2r}\, a_{2l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1} \cdots a_{r,j-1}\, a_{r,j+1} \cdots a_{rr}\, a_{rl} \end{vmatrix} (i = 1,2,\ldots,r):$$

Վերածելով (3) որոշիչը ըստ իր վերջին տողի տարրերի [2,(14)], (4) հավասարության հաշվառումով կունենանք

$$a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{il}D_r = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,m): \tag{5}$$

Քանի որ $D_r \ne 0$, հետևաբար (5) հավասարությունից կստանանք

$$a_{il} = -\frac{A_1}{D_r}a_{i1} - \frac{A_2}{D_r}a_{i2} - \cdots - \frac{A_r}{D_r}a_{ir}$$

կամ

$$a_{il} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2} + \cdots + \lambda_r a_{ir} \qquad (i = 1,2,\ldots,m), \tag{6}$$

որտեղ

$$\lambda_k = -\frac{A_k}{D_r} \qquad (k = 1,2,\ldots,r):$$

Քանի որ (6) հավասարությունը տեղի ունի i -ի բոլոր արժեքների համար.

$$\begin{aligned} a_{1l} &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \cdots + \lambda_r a_{1r}, \\ a_{2l} &= \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_r a_{2r}, \\ &\\ a_{ml} &= \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + \cdots \lambda_r a_{mr}, \end{aligned} \tag{7}$$

և A_k թվերը (հետևաբար նաև (7) վերլուծությունների λ_k գործակիցները) կախված չեն i համարից, ուստի A մատրիցի l-րդ սյունը $(r < l \le n)$ ներկայացվում է այդ մատրիցի առաջին r սյուների գծային զուգակցությամբ, ինչը նշանակում է, որ ապացուցվեց նաև թեորեմի երկրորդ մասը:

Իպա

Թեորեմի 1-ի ապացույցը նույնաբար կրկնելով (1) մատրիցի տողերի համար, կստանանք, որ A մատրիցի ռանգը հավասար է այդ մատրիցի գծորեն անկախ տողերի առավելագույն թվին:

Այսպիսով, մի կողմից A մատրիցի ռանգը հավասար է այդ մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն թվին, իսկ մյուս կողմից այն հավասար է դիտարկվող մատրիցի գծորեն անկախ տողերի առավելագույն թվին:

Վերածնակերպելով կատարված եզրակացությունը՝ ստանում ենք մատրիցների տեսության կարևորագույն պնդումներից մեկը.

Թեորեմ 2: *(Մատրիցի ռանգի մասին) Յուրաքանչյուր մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն թիվը հավասար է այդ մատրիցի գծորեն անկախ տողերի առավելագույն թվին և հավասար է դիտարկվող մատրիցի ռանգին:*

Թեորեմ 2-ից ստանում ենք մատրիցների տեսության ևս մեկ կարևոր պնդում.

Թեորեմ 3: *Որպեսզի քառակուսի մատրիցի որոշիչը հավասար լինի զրոյի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ մատրիցի սյուների (տողերի) միջև գոյություն ունենա գծային կախվածություն:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիտարկենք n –րդ կարգի

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

մատրիցը և ենթադրենք, որ այդ մատրիցի որոշիչը հավասար է զրոյի, այսինքն՝ ենթադրենք, որ B մատրիցի n -րդ կարգի միակ մինորը հավասար է զրոյի:

Կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ դիտարկվող մատրիցի զրոյից տարբեր մինորների ամենաբարձր կարգը, այսինքն այդ մատրիցի ռանգը, փոքր է n -ից: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, դիտարկվող մատրիցի գծորեն անկախ սյուների (տողերի) առավելագույն թիվը նույնպես փոքր է n -ից, ինչը նշանակում է, որ այդ մատրիցի սյուների (տողերի) միջև գոյություն ունի գծային կախվածություն [2,u5]:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք B մատրիցի սյուների (տողերի) միջև գոյություն ունի գծային կախվածություն:

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունից բխում է, որ դիտարկվող մատրիցի սյուներից (տողերից) գոնե մեկը արտահայտվում է մնացած սյուների (տողերի) գծային զուգակցությամբ: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է օգտվել որոշիչի 10-րդ հատկությունից [2,10°] և համոզվել, որ B մատրիցի որոշիչը հավասար է զրոյի:

Իպա

Նկատենք, որ մատրիցի ռանգի բերված սահմանումը միաժամանակ հնարավորություն է տալիս հաշվելու ցանկացած մատրիցի ռանգ, որտեղից հետևում է, որ այն հնարավորություն է տալիս տրված վեկտորների համակարգից առանձնացնելու գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն համակարգ:

Իրոք, եթե տրված վեկտորները համարենք մատրիցի սյուներ և գտնենք

այդ մատրիցի ռանգը, ապա առանձնացնելով նրա գծորեն անկախ սյուների առավելագույն համակարգը, դրանով իսկ տրված վեկտորների համախմբից կառանձնացնենք գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն համակարգ:

Անցնելով (1) մատրիցի ռանգը գտնելուն՝ նախ ձևակերպենք հետևյալ ակնհայտ պնդումները՝

1° *Եթե (1) մատրիցի $(r-1)$-րդ կարգի D_{r-1} մինորը երիզավորող բոլոր r-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, ապա զրոյի են հավասար նաև այդ մատրիցի մնացած բոլոր r-րդ կարգի մինորները:*

2°. *Եթե (1) մատրիցի բոլոր r-րդ կարգի մինորները հավասար են զրոյի, ապա զրոյի են հավասար նաև ավելի բարձր կարգի բոլոր մինորները:*

Այժմ ներկայացնենք (1) մատրիցի ռանգը հաշվելու հետևյալ կանոնը՝

Եթե (1) մատրիցի բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, ապա այդ մատրիցի ռանգը հավասար է զրոյի: Իսկ եթե այն ունի գոնե մեկ զրոյից տարբեր տարր, օրինակ a_{11}-ը, ապա տրված մատրիցի ռանգը հավասար է ամենաքիչը մեկի:

Այնուհետև անհրաժեշտ է հաշվել a_{11} տարրը երիզավորող երկրորդ կարգի մինորները. եթե այդ բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ուրեմն դիտարկվող մատրիցի ռանգը հավասար է մեկի: Իսկ եթե այդ մինորներից գոնե մեկը, օրինակ՝ A մատրիցի վերին ձախ անկյունում գտնվողը, տարբեր է զրոյից, ուրեմն (1) մատրիցի ռանգը առնվազն երկուս է, և այդպես շարունակ:

Այսպիսով, մատրիցի ռանգը հաշվելու համար անհրաժեշտ է ցածր կարգի մինորներից անցնել բարձր կարգի մինորների: Եթե գտնված է k-րդ կարգի զրոյից տարբեր D_k մինորը, ապա պետք է հաշվել այդ մինորը երիզավորող $(k+1)$-րդ կարգի մինորները, եթե այդ բոլոր մինորները հավասար են զրոյի, ուրեմն մատրիցի ռանգը հավասար է k-ի:

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ մատրիցի ռանգը՝

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (ա)$$

Լուծում: Նախ, քանի որ դիտարկվող մատրիցն ունի ոչ զրոյական տարրեր, ուստի նրա ռանգը հավասար է ամենաքիչը մեկի:

Այնուհետև հաշվենք (ա) մատրիցի, օրինակ, վերին ձախ անկյունում ընկած երկրորդ կարգի մինորը.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20 \neq 0.$$

Քանի որ տրված մատրիցը պարունակում է երկրորդ կարգի, զրոյից տարբեր մինոր, ուստի նրա ռանգը առնվազն երկուս է:

Համոզվելով նաև, որ (ա) մատրիցի երկրորդ կարգի դիտարկված մինորը երիզավորող երկու մինորներն էլ հավասար են զրոյի.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 9 & 7 \\ -4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

եզրակացնում ենք, որ տրված մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի.

$$rangA = 2:$$

Նշենք, որ ընդհանուր դեպքում շարադրված եղանակով մատրիցի ռանգը գտնելը կարող է կապված լինել բազմաթիվ որոշիչների հաշվման հետ:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը, ծանոթանանք մատրիցի ռանգի հաշվման մեկ այլ եղանակի հետ, որը չի ենթադրում որոշիչների հաշվում: Այդ եղանակից կօգտվենք հատկապես այն դեպքերում, երբ չի պահանջվի գտնել տրված մատրիցի գծորեն անկախ սյուների (տողերի) առավելագույն համակարգ, այլ կպահանջվի գտնել միայն տրված մատրիցի ռանգը:

Մատրիցի ռանգի հաշվման ներկայացվող եղանակի էությունը կառուցված է հետևյալ ակնհայտ պնդումների վրա՝

I. *Մատրիցի տարրական ձևափոխությունները չեն փոխում այդ մատրիցի ռանգը,*

II. *Եթե որոշիչի գլխավոր անկյունագծի մի կողմում գտնվող բոլոր տարրերը հավասար են զրոյի, ապա այդ որոշիչը հավասար է գլխավոր անկյունագծի տարրերի արտադրյալին:*

Վերոգրյալ պնդումներից հետևում է, որ (1) մատրիցի ռանգը հաշվելու համար անհրաժեշտ է.

ա) եթե հնարավոր է մատրիցի տարրական ձևափոխությունների օգնությամբ տրված մատրիցի առանձին շարքերի բոլոր տարրերը դարձնել զրոներ և այդ շարքերը դեն նետել,

բ) (1) մատրիցը բերել այնպիսի տեսքի, որում նրա $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{rr}$ $(r = \min(m,n))$ *տարրերի մի կողմում գտնվող բոլոր տարրերը հավասար լինեն զրոյի,*

գ) հաշվել տրված մատրիցին համարժեք, ստացված մատրիցի ռանգը:

Օրինակ 2: Գտնել (ա) մատրիցի ռանգը:

Լուծում: Դիտարկվող մատրիցի հետ կատարելով ներքոհիշյալ տարրական ձևափոխությունները՝ կստանանք

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & -6 & 10 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Քանի որ B մատրիցի, օրինակ, ծախ անկյունում գտնվող երկրորդ կարգի մինորը հավասար չէ զրոյի, հետևաբար այդ մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի: A և B մատրիցների համարժեքությունից հետևում է, որ A մատրիցի ռանգը ևս հավասար է երկուսի:

Անցնելով գծային հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք n անհայտներով m գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{8}$$

որտեղ m -ը և n-ը կամայական բնական թվեր են:

Սահմանում 5: *Անհայտների արժեքների*

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n \tag{9}$$

համախումբը կոչվում է գծային հավասարումների (8) համակարգի լուծում, եթե անհայտների այդ արժեքների դեպքում դիտարկվող համակարգի յուրաքանչյուր հավասարում վերածվում է նույնության:

Սահմանում 6: *Գծային հավասարումների համակարգը կոչվում է համատեղելի համակարգ, եթե այն ունի որևէ լուծում, և անհամատեղելի համակարգ՝ հակառակ դեպքում:*

Սահմանում 7: *Գծային հավասարումների երկու համատեղելի համակարգեր կոչվում են իրար համարժեք, եթե այդ համակարգերից առաջինի յուրաքանչյուր լուծում, լուծում է նաև երկրորդի համար և երկրորդի յուրաքանչյուր լուծում, լուծում է նաև առաջինի համար:*

Սահմանում 8: *Գծային հավասարումների համատեղելի համակարգը կոչվում է որոշյալ համակարգ, եթե այն ունի միայն մեկ լուծում, և՝ անորոշ համակարգ, եթե այն ունի մեկից ավելի լուծումներ:*

Սահմանում 9: *Գծային հավասարումների համակարգի տարրական ձևափոխություններ կոչվում են նրա հետևյալ ձևափոխությունները՝*

ա) կամայական երկու հավասարումների տեղերը փոխելը,

բ) ցանկացած հավասարման երկու կողմերի բազմապատկումը զրոյից տարբեր միևնույն թվով,

գ) որևէ հավասարման երկու կողմերին դիտարկվող համակարգի մեկ այլ հավասարման համապատասխան կողմերի գումարումը, որոնք նախապես բազմապատկված են միևնույն թվով:

Կարելի է ապացուցել, որ գծային հավասարումների տրված համակարգը և այդ համակարգից տարրական ձևափոխությունների արդյունքում ստացված համակարգը իրար համարժեք են:

Հնարավոր է, որ տարրական ձևափոխությունների արդյունքում գծային հավասարումների համակարգի մեջ առաջանա այնպիսի հավասարում, որի բոլոր անհայտների գործակիցները լինեն զրո, իսկ ազատ անդամը՝ զրոյից տարբեր: Պարզ է, որ այդ հավասարմանը անհայտների ոչ մի արժեք չի բավարարի: Նշանակում է՝ այդ հավասարումը պարունակող համակարգը, և հետևաբար, նաև տրված համակարգը կլինեն անհամատեղելի:

Հնարավոր է նաև, որ տրված համակարգի տարրական ձևափոխությունների արդյունքում ստացվի այնպիսի համակարգ, որի հավասարումներից որևէ մեկի և անհայտների գործակիցները և ազատ անդամը հավասար լինեն զրոյի: Պարզ է, որ ստացված համակարգից այդ հավասարումը կարելի է դեն նետել (ըստ էության այն չկա էլ), քանի որ վերջինին անհայտների ցանկացած ար-

ժեքներ կբավարարեն:

Մեր առջև դնելով գծային հավասարումների (8) համակարգը լուծելու խնդիրը՝ նախ պարզենք դիտարկվող համակարգի համատեղելիության հարցը:

Այդ նպատակի համար կազմենք նշված համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված A մատրիցը և, այսպես կոչված, $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցը, որը ստացվում է A մատրիցից՝ վերջինին ավելացնելով տրված համակարգի ազատ անդամների սյունը՝ ուղղաձիգ գծիկով առանձնացնելով այն մնացած սյուներից.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix},\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right):$$

Թեորեմ 4: *Գծային հավասարումների (8) համակարգի ընդլայնված մատրիցի ռանգը կա՛մ հավասար է այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգին, կա՛մ էլ մեկով մեծ է նրանից:*

Ապացույց: Դիցուք A մատրիցի ռանգը հավասար է r-ի: Համաձայն թեորեմ 1-ի այդ մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն թիվը նույնպես հավասար է r-ի: Հասկանալի է, որ եթե A մատրիցում ընտրենք գծորեն անկախ սյուների որևէ առավելագույն համակարգ [2,u5], ապա ընտրված համակարգը կլինի գծորեն անկախ սյուների համակարգ նաև $\overline{A}$ մատրիցում: Եթե A մատրիցի սյուների նշված համակարգը $\overline{A}$ մատրիցում էլ է պահպանում գծորեն անկախ սյուների առավելագույն համակարգ լինելու հատկությունը, այսինքն՝ եթե հավասարումների (8) համակարգի ազատ անդամների սյունը գծորեն է արտահայտվում A մատրիցի սյուների ընտրված համակարգով, ապա $\overline{A}$ և A մատրիցների ռանգերը հավասար են.

$$rang\,\overline{A}=rang A=r:$$

Հակառակ դեպքում, A մատրիցի սյուներից առանձնացված համակարգին ավելացնելով հավասարումների դիտարկվող համակարգի ազատ անդամների սյունը, կստանանք $\overline{A}$ մատրիցի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն համակարգ, ինչը նշանակում է, որ այս դեպքում $\overline{A}$ մատրիցի ռանգը մեկով մեծ է A մատրիցի ռանգից.

$$rang\,\overline{A}=1+rang A=1+r:$$

Իսպա

Թեորեմ 5: *(Կրոնեկեր-Կապելլի) Գծային հավասարումների (8) համակարգը համատեղելի է այն և միայն այն ժամանակ, երբ այդ համակարգի ընդլայնված մատրիցի ռանգը հավասար է նրա անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգին:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք գծային հավասարումների (8)

համակարգը համատեղելի է, և անհայտների արժեքների (9) համախումբը այդ համակարգի լուծումն է:

Սահմանում 5-ի համաձայն՝ ասվածը նշանակում է, որ տեղի ունեն հետևյալ նույնությունները՝

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m: \end{cases} \tag{10}$$

(10) նույնություններից հետևում է, որ եթե $\overline{A}$ մատրիցի վերջին սյան տարրերին գումարենք նրա առաջին n սյուների համապատասխան տարրերը՝ նախապես այդ սյուները համապատասխանաբար բազմապատկելով $-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n$ թվերով՝ արդյունքում կստանանք մատրից, որի վերջին սյունը կազմված է զրոներից.

$$B = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} & 0 \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}\,a_{m2}\cdots a_{mn} & 0 \end{array}\right):$$

Քանի որ մատրիցի տարրական ձևափոխությունները [11,u8] չեն փոխում նրա ռանգը, հետևաբար

$$rangB = rang\,\overline{A}: \tag{11}$$

Մյուս կողմից, քանի որ B մատրիցի վերջին սյունը կազմված է զրոներից, իսկ մնացած սյուները նույնաբար համընկնում են A մատրիցի համապատասխան սյուների հետ՝ ուրեմն տեղի ունի նաև հետևյալ հավասարությունը՝

$$rangB = rangA: \tag{12}$$

Վերջին երկու հավասարություններից հետևում է, որ

$$rang\,\overline{A} = rangA: \tag{13}$$

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք գծային հավասարումների (8) համակարգի ընդլայնված մատրիցի ռանգը հավասար է նրա անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգին:

Կատարված ենթադրությունից և թեորեմ 2-ից հետևում է, որ եթե A մատրիցում ընտրենք գծորեն անկախ սյուների որևէ առավելագույն համակարգ, ապա այդ համակարգը կլինի գծորեն անկախ սյուների առավելագույն համակարգ նաև A մատրիցում: Հետևաբար, A մատրիցի մնացած սյուները, և մասնավորապես վերջին սյունը, կհանդիսանան նրա նշված սյուների և հետևաբար՝ նաև այդ մատրիցի առաջին n սյուների գծային զուգակցությունը:

Վերոգրյալը նշանակում է, որ կատարված ենթադրության դեպքում գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ թվեր, որ տեղի ունեն (10) հավասարությունները, ինչն էլ նշանակում է, որ (13) հավասարության տեղի ունենալու դեպքում գծային հավասարումների (8) համակարգը համատեղելի համակարգ

է:

Իպա

Այսպիսով, գծային հավասարումների համակարգի համատեղելի լինելու հարցը լիովին լուծվում է Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմով:

Օրինակ 3: Պարզել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգի համատեղելիության հարցը՝

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0: \end{cases} \qquad (բ)$$

Լուծում:

Հաշվելով

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35$$

որոշիչները, եզրակացնում ենք, որ գծային հավասարումների (բ) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է 2-ի, իսկ այդ համակարգի ընդլայնված մատրիցի ռանգը՝ 3-ի:

Համաձայն Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմի՝ դիտարկվող համակարգը անհամատեղելի համակարգ է:

§13. Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը մատրիցային եղանակով, Կրամերի կանոնով և Գաուսի մեթոդով:

Գծային հավասարումների համակարգերի տեսության գլխավոր խնդիրները երկուսն են.

ա) պարզել հավասարումների տվյալ համակարգի համատեղելիության հարցը,

բ) եթե այն համատեղելի համակարգ է՝ մշակել նրա բոլոր լուծումները գտնելու մեթոդներ:

Նախորդ պարագրաֆում մենք ներկայացրել ենք ձևակերպած խնդիրներից առաջինի լուծումը [12,p5]: Անցնելով երկրորդ խնդրին՝ ծանոթանանք նշված համակարգերի լուծման մի քանի մեթոդների հետ:

1° *Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը մատրիցային եղանակով:*

Դիտարկենք n անհայտներով, n գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Հավասարումների (1) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը նշանակենք A-ով, իսկ անհայտներից և ազատ անդամնե-

ից կազմված սյուն մատրիցները՝ համապատասխանաբար X-ով և B-ով.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \\ a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{pmatrix}: \tag{2}$$

Սահմանում 1: *Հավասարումների (1) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված որոշիչը կոչվում է այդ համակարգի գլխավոր որոշիչ և սովորաբար նշանակվում է* Δ *-ով.*

$$\Delta=\det A:$$

Այս պարագրաֆում կենթադրենք, որ A-ն ոչ եզակի մատրից է, այսինքն՝ կենթադրենք, որ հավասարումների (1) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի:

Մատրիցի ռանգի սահմանումից [12,u2] և այն փաստից, որ n հավասարումներից կազմված գծային հավասարումների համակարգի ընդլայնված մատրիցի ռանգը չի կարող գերազանցել n-ը, հետևում է, որ (1) համակարգի պարագայում տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$rang A = rang\,\overline{A} = n,$$

որտեղից էլ, համաձայն Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմի, ստանում ենք, որ հավասարումների դիտարկվող համակարգը համատեղելի համակարգ է:

Այժմ օգտվելով երկու մատրիցների բազմապատկման բանաձևից [11,u12], մատրիցների հավասարության սահմանումից [11,u6] և (2) նշանակումներից, հավասարումների (1) համակարգը ներկայացնենք հետևյալ մատրիցային հավասարման տեսքով՝ *)

$$A\cdot X=B: \tag{1'}$$

Այսպիսով, լուծել գծային հավասարումների (1) համակարգը՝ նշանակում է լուծել մատրիցային (1') հավասարումը:

Նշված մատրիցային հավասարումը լուծելու համար այդ հավասարման երկու կողմերն էլ ձախից բազմապատկենք A մատրիցի հակադարձ մատրիցով, որի գոյությունը բխում է A մատրիցի ոչ եզակի մատրից լինելուց [11,թ2]:

Կատարելով նշված գործողությունը, արդյունքում կստանանք հետևյալ սյուն մատրիցը [11,(14),(17'),(16)].

$$X=A^{-1}\cdot B: \tag{2'}$$

Ստացված սյուն մատրիցը տեղադրելով (1') հավասարման մեջ.

$$B=A\cdot X=A\cdot\left(A^{-1}\ B\right)=\left(A\cdot A^{-1}\right)\cdot B=E\cdot B=B,$$

հանգում ենք $B=B$ մատրիցային նույնությանը, ինչը նշանակում է, որ X մատրիցի համար ստացած (2) «արժեքը» մատրիցային (1') հավասարման լուծումն է:

---

*) Մատրիցային $A\cdot X$ արտադրյալն իմաստ ունի, քանի որ A մատրիցի սյուների թիվը հավասար է X մատրիցի տողերի թվին [11]:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ $A^{-1}B$ սյուն մատրիցը գծային հավասարումների (1) համակարգի լուծումն է:

Այսպիսով, գծային հավասարումների (1) համակարգը մատրիցային եղանակով լուծելու համար անհրաժեշտ է.

ա) համոզվել, որ դիտարկվող համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի,

բ) ստանալ տրված համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի հակադարձ մատրիցը և այն ձախից բազմապատկել (1) համակարգի ազատ անդամների սյուն մատրիցով:

Օրինակ 1: Մատրիցային եղանակով լուծել հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases} \qquad (\text{ա})$$

Լուծում: Հավասարումների տրված համակարգը լուծելու համար նախ այն ներկայացնենք (1) մատրիցային հավասարման տեսքով.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}:$$

Նկատի ունենալով, որ մատրիցային (1′) հավասարման լուծումը տրվում է (2) բանաձևով՝ դիտարկվող խնդրում կունենանք **[11,o7]**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Այսպիսով, գծային հավասարումների (ա) համակարգի լուծումն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$x_1 = x_3 = 5, \quad x_2 = 15$$

2° *Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը Կրամերի կանոնով:*

Նորից ենթադրենք, որ հավասարումների (1) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի (այսինքն, նորից ենթադրենք, որ այդ համակարգը համատեղելի համակարգ է) և այն լուծենք Կրամերի կանոնով:

Նախ ներմուծենք հետևյալ հասկացությունը՝

Սահմանում 2: *Գծային հավասարումների (1) համակարգի գլխավոր որոշիչի j -րդ սյունը $(j = 1,2,\ldots,n)$ այդ համակարգի ազատ անդամների սյունով փոխարինելուց ստացված որոշիչը կոչվում է հավասարումների դիտարկվող համակարգի օժանդակ որոշիչ և նշանակվում է Δ_j -ով:*

Բերված սահմանումից հետևում է, որ հավասարումների (1) համակարգն ունի n օժանդակ որոշիչ:

Օգտվելով որոշիչի սահմանումից և վերածելով Δj որոշիչն ըստ իր j -րդ

սյան տարրերի՝ կստանանք

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1,j-1}\; b_1 \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2,j-1}\; b_2 \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{n,j-1}\; b_n \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \quad (j = 1,2,\ldots,n): \tag{3}$$

Այժմ վերադառնանք մատրիցային (2) հավասարությանը և հաշվենք $A^{-1}B$ սյուն մատրիցի տարրերը: Ինչպես գիտենք այդ մատրիցի j -րդ տարրը $(j = 1,2,\ldots,n)$ հավասար է A^{-1} մատրիցի j -րդ տողի և B մատրիցի համապատասխան տարրերի արտադրյալների գումարին [11,(13)].

$$\frac{A_{1j}}{\Delta} b_1 + \frac{A_{2j}}{\Delta} b_2 + \cdots + \frac{A_{nj}}{\Delta} b_n = \frac{1}{\Delta}\left(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}\right) = \frac{\Delta j}{\Delta} \quad (j = 1,2,\ldots,n):$$

Այնուհետև, օգտվելով մատրիցների հավասարության սահմանումից և հավասարեցնելով մատրիցային (2) հավասարության համապատասխան տարրերը, կունենանք

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = 1,2,\ldots,n): \tag{4}$$

Այսպիսով, եթե գծային հավասարումների (1) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի, ապա այդ համակարգի լուծումը միակ ձևով որոշվում է (4) բանաձևերով, որոնք կոչվում են կրամերի բանաձևեր:

Ի մի բերելով վերևում շարադրվածը՝ ստանում ենք ոչ զրոյական գլխավոր որոշիչ ունեցող (1) համակարգի անհայտները գտնելու հետևյալ կանոնը՝

Գծային հավասարումների (1) համակարգի x_j անհայտը $(j = 1,2,\ldots,n)$ գտնելու համար անհրաժեշտ է հաշվել այդ համակարգի j -րդ օժանդակ որոշիչը և այն բաժանել տրված համակարգի գլխավոր որոշիչի վրա:

Օրինակ 2: Գծային հավասարումների (ա) համակարգը լուծել Կրամերի կանոնով:

Լուծում: Հաշվելով հավասարումների տրված համակարգի գլխավոր և օժանդակ որոշիչները.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 25, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 1 \\ 2 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 75, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 15 \end{vmatrix} = 25$$

և օգտվելով Կրամերի (4) բանաձևերից, կունենանք

$$_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad _2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 15, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5 \cdot$$

3°. *Գծային հավասարումների համակարգի լուծումը անհայտների արտաքսման Գաուսի մեթոդով:*

Անցնելով գծային հավասարումների համակարգի լուծման Գաուսի մեթոդի շարադրմանը՝ դիտարկենք n անհայտներով m հավասարումների հետևյալ

համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

որտեղ m -ը և n -ը կամայական բնական թվեր են:

Որոշակիության համար ենթադրենք $a_{11} \neq 0$ (եթե $a_{11} = 0$, ապա (5) համակարգի անհայտներն այնպես կվերահամարակալենք, որ առաջին հավասարման մեջ նրանցից առաջինի գործակիցը տարբեր լինի զրոյից) և առաջին հավասարման բոլոր անդամները բաժանենք a_{11} -ի վրա: Արդյունքում կստանանք տրված համակարգին համարժեք հետևյալ համակարգը [12,u7].

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5'}$$

Այժմ ստացված համակարգի երկրորդ հավասարումից անդամ առ անդամ հանենք նրա առաջին հավասարումը՝ նախապես առաջին հավասարման երկու կողմերը բազմապատկելով a_{21} -ով, երրորդ հավասարումից անդամ առ անդամ հանենք առաջին հավասարումը՝ նախապես առաջին հավասարման երկու կողմերը բազմապատկելով a_{31} -ով, և այդպես շարունակ: Արդյունքում կստանանք տրված համակարգին համարժեք մի համակարգ, որի երկրորդից սկսած մինչև m -րդ հավասարումները x_1 անհայտ չեն պարունակում.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \\ \quad a'_{p2}x_2 + \cdots + a'_{pn}x_n = b'_p, \end{cases} \tag{5''}$$

որտեղ

$$a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}}a_{i1}, \quad b'_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}}a_{i1}, \tag{6}$$

$$(i = 2,3,\ldots,p; \quad k = 2,3,\ldots,n; \quad p \leq m):$$

Նշենք, որ (5՝) համակարգի հավասարումների թիվը նշանակել ենք p -ով, որտեղ $p \leq m$, որովհետև ինչպես գիտենք [12], տարրական ձևափոխությունների արդյունքում [12,u9] ստացված գծային հավասարումների համակարգը կարող է ավելի քիչ թվով հավասարումներ պարունակել, քան ձևափոխությունների ենթարկված համակարգը:

Հասկանալի է, որ եթե (5՝) համակարգը պարունակի այնպիսի հավասարում, որի և անհայտների գործակիցները, և ազատ անդամը հավասար լինեն զրոյի, ապա այդպիսի «հավասարումը» դեն կնետենք: Իսկ եթե կատարված տարրական ձևափոխությունների արդյունքում ստացված համակարգը պարունակի հավասարում, որի բոլոր անհայտների գործակիցները լինեն զրո, իսկ ազատ անդամը՝ զրոյից տարբեր, ապա ինչպես գիտենք, հավասարումների այդպիսի համակարգը կլինի անհամատեղելի [12,ս6]: Քանի որ (5) և (5՝) համակարգերը համարժեք են, հետևաբար, հավասարումների սկզբնական համակարգը նույնպես կլինի անհամատեղելի:

Համարելով, որ (5՝) համակարգը նկարագրված տեսքի հավասարումներ չի պարունակում, այսինքն՝ համարելով, որ $a'_{ik}\,(i=1,2,\ldots,p;\ k=2,3,\ldots,n)$ գործակիցների մեջ կան զրոյից տարբեր գործակիցներ ենթադրենք՝ $a'_{22}\neq 0$ (եթե $a'_{22}=0$, ապա դիտարկվող համակարգի x_1-ից բացի մնացած անհայտներն այնպես կվերահամարակալենք, որ նրանցից առաջինի գործակիցը երկրորդ հավասարման մեջ տարբեր լինի զրոյից): Այնուհետև հավասարումների (5) համակարգից (5՝) համակարգին անցնելու նմանությամբ (5՝) համակարգի երրորդ հավասարումից սկսած x_2 անհայտը արտաքսենք: Արդյունքում կստանանք հավասարումների (5՝՝) համակարգին համարժեք մի համակարգ, որի հավասարումները, սկսած երրորդից, x_2 անհայտ չեն պարունակում.

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad \\ \qquad\qquad a''_{j3}x_3 + \cdots + a''_{jn}x_n = b''_j, \end{cases} \tag{5՝՝}$$

որտեղ

$$a''_{2k} = \frac{a'_{2k}}{a'_{22}},\quad b''_2 = \frac{b'_2}{a'_{22}},\quad a''_{ik} = a'_{ik} - \frac{a'_{2k}}{a'_{22}}a'_{i1},$$

$$b''_i = b'_i - \frac{b'_2}{a'_{22}}a'_{i1}\quad (i=3,4,\ldots,j;\quad k=3,4,\ldots,n,\quad j\le p): \tag{7}$$

Նկարագրված եղանակով ավարտին հասցնելով հավասարումների դիտարկվող համակարգից անհայտների հաջորդական արտաքսման գործընթացը՝ մենք, ի վերջո, կա՛մ կստանանք հավասարումների տրված համակարգին համարժեք համակարգ, որի հավասարումներից մեկի բոլոր անհայտների գործակիցները զրո են, իսկ ազատ անդամը տարբեր է զրոյից, կա՛մ էլ այդպիսի հավասարում չենք ստանա:

Ինչպես գիտենք, առաջին դեպքում կարող ենք եզրակացնել, որ հավասարումների դիտարկվող համակարգը անհամատեղելի համակարգ է, ինչն էլ նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում հավասարումների (5) համակարգը լուծելու խնդիրն ավարտված է:

Երկրորդ դեպքում, այսինքն՝ եթե հավասարումների տրված համակարգը համատեղելի համակարգ է, կհանգենք հավասարումների սկզբնական

համակարգին համարժեք հետևյալ՝ սեղանածև կամ եռանկյունածև տեսք ունեցող համակարգերից որևէ մեկին՝

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1l}x_l + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2l}x_l + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad x_l + \ldots + a_{ln}^{(l-1)}x_n = b_l^{(l-1)}, \quad (l < n), \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ \qquad x_2 + a''_{23}x_3 + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2, \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n-1)}: \end{cases} \tag{9}$$

Հասկանալի է, որ հավասարումների սկզբնական համակարգի անհայտների գործակիցների և ազատ անդամների միջոցով հավասարումների (8) և (9) համակարգերի մնացած գործակիցների և ազատ անդամների արտահայտությունները գրելու անհրաժեշտությունը չկա:

Քանի որ հավասարումների (9) համակարգի գլխավոր որոշիչը տարբեր է զրոյից [12,II], հետևաբար այն որոշյալ համակարգ է [12,u8], որի լուծումը կարելի է գտնել, օրինակ, Կրամերի բանաձևերով:

Նկատենք, սակայն, որ հավասարումների (9) համակարգը կարելի է լուծել ավելի պարզ եղանակով. վերջին հավասարումից x_n անհայտի արժեքը տեղադրելով նախավերջին հավասարման մեջ՝ կգտնենք x_{n-1} անհայտը և այդպես (9) համակարգի հավասարումներով շարժվելով ներքևից դեպի վեր՝ կգտնենք մնացած բոլոր անհայտները:

Ինչ վերաբերում է հավասարումների (8) համակարգի լուծմանը, ապա նախ այն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1l}x_l = b'_1 - a'_{1,l+1}x_{l+1} - \cdots - a'_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \cdots + a''_{2l}x_l = b''_2 - a''_{2,l+1}x_{l+1} - \cdots - a''_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad x_l = b_l^{(l-1)} - a_{l,l+1}^{(l-1)}x_{l+1} - \cdots - a_{ln}^{(l-1)}x_n: \end{cases} \tag{8'}$$

Այնուհետև $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$, այսպես կոչված, ազատ անհայտներին համապատասխանաբար տալով կամայական $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \ldots, \alpha_n$ արժեքներ և (9) համակարգի լուծման եղանակով լուծելով (8՝) համակարգը՝ կգտնենք այդ համակարգի մնացած $x_1, x_2, \ldots, x_l$ անհայտները:

Քանի որ ազատ անհայտների արժեքները կարելի է ընտրել իրարից տարբեր անթիվ բազմությամբ եղանակներով, ուստի (8՝) համակարգը (հետևաբար նաև (5) համակարգը) $l < n$ դեպքում ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Ամփոփելով արդյունքները՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը՝

Անհայտների հաջորդական արտաքսման Գաուսի մեթոդով կարելի է լուծել գծային հավասարումների կամայական համակարգ: Լուծման ենթակա համակարգը անհամատեղելի համակարգ է, եթե նրա հետ կատարվող տարրական ձևափոխությունների արդյունքում ստանում ենք հավասարում, որի

բոլոր անհայտների գործակիցները հավասար են զրոյի, իսկ ազատ անդամը՝ տարբեր է զրոյից, և համատեղելի համակարգ է, եթե նշված ձևափոխություններ-ի արդյունքում, նկարագրված տեսքի հավասարում չենք ստանում:

Գծային հավասարումների համատեղելի համակարգը որոշյալ համակարգ է, եթե տարրական ձևափոխությունների միջոցով այն բերվում է եռանկյունաձև տեսքի և անորոշ համակարգ է, եթե հիշյալ ձևափոխությունների արդյունքում այն բերվում է սեղանաձև տեսքի:

Օրինակ 3: Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25: \end{cases} \qquad (բ)$$

Լուծում: Հավասարումների տրված համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումներից անդամ առ անդամ հանելով նրա առաջին հավասարումը, նախապես այդ հավասարման երկու կողմերը բազմապատկելով 3-ով՝ դիտարկվող համակարգը կներկայացնենք

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ -12x_2 - 16x_3 = 52 \end{cases} \qquad (գ)$$

տեսքով:

Այժմ, (գ) համակարգի երրորդ հավասարման բոլոր անդամները բաժանենք -4-ի վրա և ստացված հավասարմանը անդամ առ անդամ գումարենք այդ համակարգի երկրորդ հավասարումը: Արդյունքում կստանանք

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9, \\ -3x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad (դ)$$

համակարգը:

Լուծելով եռանկյունաձև (դ) համակարգը՝ կունենանք

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3, \qquad x_3 = -1:$$

Քանի որ հավասարումների (բ) և (դ) համակարգերն իրար համարժեք են, հետևաբար նրանք ունեն միևնույն լուծումները:

Վերջում ավելացնենք, որ Գաուսի մեթոդով գծային հավասարումների համակարգ լուծելիս հարմար է տրված համակարգի նկատմամբ կատարվող տարրական ձևափոխությունները փոխարինել այդ համակարգի ընդլայնված մատրիցի տողերի նկատմամբ կատարվող տարրական ձևափոխություններով:

Օրինակ 4: Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 8: \end{cases} \qquad (ե)$$

Լուծում: Հավասարումների տրված համակարգը լուծելու համար կազմենք նրա ընդլայնված մատրիցը և այդ մատրիցի տողերը ենթարկենք Գաուսի մեթոդում նկարագրված տարրական ձևափոխությունների.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 2/3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{13}{3} & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 12 \\ 0 & -5 & 13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{array}\right):$$

Վերջին մատրիցի չորրորդ տողից երևում է, որ հավասարումների (ե) համակարգը համարժեք է մի համակարգի, որի վերջին հավասարման բոլոր անհայտների գործակիցները զրո են, իսկ ազատ անդամը տարբեր է զրոյից:

Ինչպես գիտենք, ասվածից հետևում է, որ հավասարումների (ե) համակարգը անհամատեղելի համակարգ է և հետևաբար լուծում չունի:

Օրինակ 5: Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 6: \end{cases} \qquad (զ)$$

Լուծում: Ունենք

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right):$$

Հավասարումների (զ) համակարգի ընդլայնված մատրիցի ձևափոխությունից հետո ստացված մատրիցի տեսքից երևում է, որ տրված համակարգը համարժեք է հետևյալ սեղանաձև համակարգին՝

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ -5x_2 + 2x_3 = -4: \end{cases} \qquad (է)$$

x_3 անհայտը համարելով ազատ անհայտ և (է) համակարգի, այդ անհայտը պարունակող գումարելիները տեղափոխելով համապատասխան հավասարումների աջ մաս՝ կստանանք

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_3 + 5, \\ 5x_2 = 2x_3 + 4: \end{cases} \qquad (ը)$$

Ազատ անհայտին տալով կամայական α իրական արժեք և լուծելով հավասարումների ստացված եռանկյունաձև համակարգը՝ x_1 և x_2 անհայտների համար կունենանք

$$x_1 = \frac{\alpha}{5} + \frac{17}{5}, \quad x_2 = \frac{2\alpha}{5} + \frac{4}{5}:$$

Այսպիսով, գծային հավասարումների (զ) համակարգի լուծումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$x_1 = \frac{\alpha}{5} + \frac{17}{5}, \quad x_2 = \frac{2\alpha}{5} + \frac{4}{5}, \quad x_3 = \alpha, \quad \alpha \in R,$$

որտեղ R-ը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է:

ԳԼՈՒԽ II

§14. Գծային անհամասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծման կառուցվածքը: Գծային համասեռ հավասարումների համակարգի ոչ զրոյական լուծում ունենալու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Գծային համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների հիմնական համակարգ: Գծային համասեռ և անհամասեռ հավասարումների համակարգերի ընդհանուր լուծումների կառուցվածքը գծային համասեռ հավասարումների լուծումների հիմնական համակարգի միջոցով:

Նախորդ պարագրաֆում մենք ծանոթացանք գծային հավասարումների համակարգերի լուծման մատրիցային եղանակի, Կրամերի կանոնի և Գաուսի մեթոդի հետ: Շարունակելով այդպիսի հավասարումների կամայական համակարգերի ուսումնասիրությունը՝ կրկին դիտարկենք n անհայտներով, m հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

որտեղ m-ը և n-ը կամայական բնական թվեր են, և սովորականի նման A-ով ու $\overline{A}$-ով համապատասխանաբար նշանակենք այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը և նրա ընդլայնված մատրիցը.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1r}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2r}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}a_{r2}\cdots a_{rr}\cdots a_{rn} \\ \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mr}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}a_{12}\cdots a_{1r}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2r}\cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{r1}a_{r2}\cdots a_{rr}\cdots a_{rn} & b_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mr}\cdots a_{mn} & b_n \end{array}\right): \tag{2}$$

Հավասարումների դիտարկվող համակարգի բոլոր լուծումները գտնելու գործնական նոր եղանակ գտնելու նպատակով, ենթադրենք, որ այն համատեղելի համակարգ է և A ու $\overline{A}$ մատրիցների ռանգերը հավասար են r-ի **[12,թ5]**.

$$rangA = rang\,\overline{A} = r: \tag{3}$$

Ինչպես գիտենք, [12,թ2] մատրիցի ռանգը հավասար է այդ մատրիցի գծորեն անկախ **տողերի առավելագույն** թվին: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ A մատրիցի առաջին r տողերը գծորեն անկախ են, իսկ մնացած տողերից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է այդ տողերի գծային զուգակցությունը **[2,u2]**:

Կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ $\overline{A}$ ընդլայնված մատրիցի առաջին r տողերը նույնպես կլինեն գծորեն անկախ, որովհետև, եթե այդ տողերը լինեն գծորեն կախյալ, ապա, համաձայն կոորդինատներով տրված վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկման կանոնների [3,(12)], գծորեն կախյալ կլինեն նաև A մատրիցի առաջին r տողերը, ինչը կհակասի կատարված ենթադրությանը: Այնուհետև (3) հավասարումներից և մատրիցի ռանգի մասին թեորեմից հետևում է, որ $\overline{A}$ մատրիցի առաջին r տողերը այդ մատրիցում կազմում են գծորեն անկախ տողերի առավելագույն համակարգ, այսինքն՝ $\overline{A}$ մատրիցի յուրաքանչյուր այլ տող հանդիսանում է նրա առաջին r տողերի գծային զուգակցությունը:

A և $\overline{A}$ մատրիցներից անցնելով հավասարումների (1) համակարգին՝ վերոգրյալ դատողությունների շնորհիվ կստանանք, որ այդ համակարգի $(r+1)$-րդից մինչև m-րդ հավասարումները կարող են գծային հավասարումների համակարգի տարրական ձևափոխությունների միջոցով [12,u9] ստացվել նրա առաջին r հավասարումներից: Դա նշանակում է, որ հավասարումների դիտարկվող համակարգի վերջին $m-r$ հավասարումները այդ համակարգի առաջին r հավասարումների հետևանքներն են և, հետևաբար, հավասարումների տրված համակարգի միայն առաջին r հավասարումներից կազմված համակարգի յուրաքանչյուր լուծում բավարարում է նաև այդ համակարգի վերջին $m-r$ հավասարումներին:

Այսպիսով, դեն նետելով գծային հավասարումների (1) համակարգի վերջին $m-r$ հավասարումները և լուծելով այդ համակարգի միայն առաջին r հավասարումներից կազմված (և (1) համակարգին համարժեք)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \qquad (1')$$

համակարգը՝ կստանանք տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Հավասարումների (1′) համակարգը լուծելու համար նկատենք, որ այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է այդ մատրիցի տողերի, կամ, որ նույնն է՝ (1′) համակարգի հավասարումների թվին: Նկատի ունենալով նաև, որ մատրիցի ռանգը չի կարող գերազանցել այդ մատրիցի սյուների թիվը, եզրակացնում ենք, որ (1′) համակարգի հավասարումների թիվը մեծ չէ այդ համակարգի անհայտների թվից.

$$r \le n:$$

Դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր դեպքերը՝

1° $r = n$, *այսինքն՝ (1) համակարգի հավասարումների թիվը հավասար է նրա անհայտների թվին, ընդ որում՝ այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը տարբեր է զրոյից:*

Ինչպես գիտենք, [13,2°] (1′) համակարգը, հետևաբար նաև (1) համակարգը, քննարկվող դեպքում ունեն միակ լուծում, որը կարելի է գտնել, օրինակ, Կրամերի կանոնով:

2° $r<n$, *այսինքն՝ (1) համակարգի հավասարումների թիվը փոքր է նրա անհայտների թվից:*

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ (1′) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված r-րդ կարգի զրոյից տարբեր մինորը կազմված է այդ մատրիցի առաջին r սյուներից և դիտարկվող համակարգի բոլոր հավասարումներում $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$ անհայտները պարունակող անդամները տեղափոխենք համապատասխան հավասարումների աջ մաս: Այնուհետև $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$ անհայտներին համապատասխանաբար տանք կամայական $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_n$ արժեքներ և դիտարկենք (1′) համակարգի առաջին r անհայտների նկատմամբ ստացված հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1r}x_r &= b_1-a_{1,r+1}\alpha_{r+1}-a_{1,r+2}\alpha_{r+2}-\dots-a_{1n}\alpha_n,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2r}x_r &= b_2-a_{2,r+1}\alpha_{r+1}-a_{2,r+2}\alpha_{r+2}-\dots-a_{2n}\alpha_n,\\
a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\dots+a_{rr}x_r &= b_r-a_{r,r+1}\alpha_{r+1}-a_{r,r+2}\alpha_{r+2}-\dots-a_{rn}\alpha_n:
\end{aligned} \tag{1''}$$

Քանի որ հավասարումների (1″) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի, հետևաբար այդ համակարգն ունի միակ լուծում.

$$x_1=\alpha_1,\quad x_2=\alpha_2,\dots,x_r=\alpha_r: \tag{2}$$

Ակնհայտ է, որ միավորելով $x_1,x_2,\dots,x_r$ անհայտների համար ստացած (2) արժեքները $x_{r+1},x_{r+2},\dots,x_n$ անհայտների համար ընտրած $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\dots,\alpha_n$ արժեքների հետ, կստանանք հավասարումների (1′) համակարգի և հետևաբար նաև (1) համակարգի լուծումներից մեկը.

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\dots,\alpha_n: \tag{3}$$

Հասկանալի է, որ հավասարումների (1′) համակարգի ազատ անհայտներին տալով բոլոր հնարավոր թվային արժեքները և (1″) համակարգից գտնելով մնացած անհայտների արժեքները՝ կստանանք (1′) համակարգի, հետևաբար նաև (1) համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Ինչպես տեսնում ենք, $r<n$ դեպքում գծային հավասարումների (1) համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

Միավորելով քննարկված դեպքերի արդյունքները՝ ստանում ենք հետևյալ **թեորեմը՝**

Թեորեմ 1: *Որպեսզի գծային հավասարումների համատեղելի համակարգն ունենա միակ լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար լինի նրա անհայտների թվին:*

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները՝ եզրակացնում ենք, որ գծային հավասարումների համատեղելի համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) կազմել հավասարումների դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը և հաշվել նրա ռանգը,

*բ) նշված մատրիցում ընտրել նրա ռանգին հավասար թվով գծորեն անկախ տողեր և տրված համակարգում թողնել միայն այն հավասարումները, որոնցում մասնակցող գործակիցները մտնում են այդ մատրիցի ընտրված տողերի մեջ, *)*

գ) առանձնացված հավասարումների ձախ մասերում թողնել մատրիցի ռանգին հավասար թվով այնպիսի անհայտներ, որոնց գործակիցներից կազմված որոշիչը տարբեր է զրոյից, իսկ մնացած անհայտները, համարելով ազատ անհայտներ, տանել համապատասխան հավասարումների աջ մաս,

դ) ազատ անհայտներին տալ կամայական թվային արժեքներ և Կրամերի բանաձևերով գտնելով մնացած անհայտների արժեքները՝ ստանալ հավասարումների դիտարկվող համակարգի բոլոր լուծումները:

Օրինակ 1: Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11 \end{cases} \qquad (\text{ա})$$

Լուծում:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17, \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\text{բ})$$

հավասարություններից երևում է, որ հավասարումների դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է նրա ընդլայնված մատրիցի ռանգին և հավասար է այդ համակարգի անհայտների թվին: Հետևաբար (ա)-ն հավասարումների համատեղելի և որոշյալ համակարգ է **[12,u8;p5]**: Հաշվի առնելով նաև, որ տրված համակարգի երրորդ հավասարումը այդ համակարգի առաջին երկու հավասարումների հետևանքն է (ինչը նույնպես երևում է (բ) հավասարություններից), եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող համակարգը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել նրան համարժեք

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases} \qquad (\text{գ})$$

համակարգը:

Լուծելով (գ) համակարգը՝ կստանանք

$$x_1 = -\frac{5}{17}, \qquad x_2 = \frac{23}{17}:$$

Անմիջական տեղադրման միջոցով համոզվելով, որ հավասարումների (գ) համակարգի լուծումը բավարարում է նաև (ա) համակարգի երրորդ հավասարմանը՝ եզրակացնում ենք, որ այն տրված համակարգի լուծումն է:

---

*) Եթե հավասարումների դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է այդ համակարգի անհայտների թվին, ապա բ) քայլը կատարելուց հետո կստանանք հավասարումների որոշյալ համակարգ, որը կլուծենք նախորդ պարագրաֆում շարադրված երեք եղանակներից որևէ մեկով:

Օրինակ 2: Լուծել գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0: \end{cases} \qquad (դ)$$

Լուծում: Կարող ենք ստուգել, որ հավասարումների դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է նրա ընդլայնված մատրիցի ռանգին և հավասար է երկուսի: Ինչպես գիտենք, (դ)-ն հավասարումների համատեղելի և անորոշ համակարգ է:

Վերոգրյալից և

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 16 \qquad (ե)$$

հավասարություններից հետևում է, որ դիտարկվող համակարգի հավասարումներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է մյուս երկու հավասարումների հետևանքը: Դեն նետելով, օրինակ, տրված համակարգի երկրորդ հավասարումը՝ կստանանք նրան համարժեք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0: \end{cases} \qquad (զ)$$

Այնուհետև (ե) հավասարություններից երկրորդի հաշվառումով (զ) համակարգի x_3, x_4, x_5 անհայտները, համարելով ազատ անհայտներ, տեղափոխենք այդ համակարգի հավասարումների աջ մաս և նրանց համապատասխանաբար տանք կամայական $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ արժեքներ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5, \\ x_1 + 5x_2 = 9\alpha_3 + 8\alpha_4 - \alpha_5: \end{cases} \qquad (է)$$

Լուծելով հավասարումների (է) համակարգը՝ կստանանք դիտարկվող համակարգի ընդհանուր լուծումը.

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{3\alpha_4}{4} - \alpha_5, \quad x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7\alpha_3}{4} + \frac{7\alpha_4}{4}, \quad \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in R,$$

որտեղ R-ը իրական թվերի բազմությունն է:

Այժմ վերևում բերված արդյունքները կիրառենք գծային համասեռ հավասարումների համակարգի նկատմամբ:

Սահմանում 1: *Գծային հավասարումների համակարգը կոչվում է գծային համասեռ հավասարումների համակարգ, եթե այդ համակարգի բոլոր ազատ անդամները հավասար են զրոյի:*

Համաձայն բերված սահմանման՝ ընդհանուր դեպքում գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունի

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

տեսքը, որտեղ m-ը և n-ը կամայական բնական թվեր են:

Պատկերն ամբողջացնելու համար բերենք նաև հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 2: *Հավասարումների համակարգը կոչվում է գծային անհամասեռ հավասարումների համակարգ, եթե այդ համակարգի ազատ անդամներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից:*

Սահմանում 3: *Գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգը կոչվում է գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի համապատասխան համասեռ հավասարումների համակարգ:*

Կրոնեկեր-Կապելլիի թեորեմից բխում է, որ (4)-ը հավասարումների համատեղելի համակարգ է, քանի որ միայն զրոներից կազմված ազատ անդամների սյան ավելացումը չի կարող մեծացնել այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը:

Նկատենք, որ հավասարումների (4) համակարգի համատեղելի լինելը երևում է նաև անմիջապես. այն ակնհայտորեն ունի, օրինակ, զրոյական լուծում.

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0: \tag{5}$$

Տեսնենք, թե ինչպիսի պայմանների իրականացման դեպքում հավասարումների (4) համակարգը կունենա նաև ոչ զրոյական լուծում:

Քանի որ գծային համասեռ հավասարումների համակարգը միշտ ունի զրոյական լուծում, հետևաբար այդ համակարգի պարագայում թեորեմ 1-ը կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի զրոյական լուծումը լինի գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի միակ լուծումը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար լինի նրա անհայտների թվին:*

Թեորեմ 2-ից բխում է հետևյալ պնդումը՝

Հետևանք 1: *Որպեսզի գծային հավասարումների (4) համակարգն ունենա նաև ոչ զրոյական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը փոքր լինի նրա անհայտների թվից:*

Հասկանալի է, որ գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է կատարել գծային անհամասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար՝ վերևում թվարկած քայլերը:

Այժմ դիտարկենք $m = n$ մասնավոր դեպքում հավասարումների (4) համակարգից ստացվող

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

համակարգը:

Նախ նկատենք, որ (6) համակարգի բոլոր օժանդակ որոշիչները **[13,2°]** հավասար են զրոյի, քանի որ նրանք պարունակում են միայն **զրոներից** կազմված սյուն **[2,5°]**: Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ երկու հնարավոր

դեպքերը՝

I. *n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների (6) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար չէ զրոյի:*

Համաձայն Կրամերի կանոնի, քննարկվող դեպքում (6) համակարգի միակ լուծումը զրոյական լուծումն է:

Կատարված եզրակացությունից բխում է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Եթե n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, ապա այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը անհրաժեշտաբար հավասար է զրոյի:*

II. *Հավասարումների (6) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար է զրոյի:*

Մատրիցի ռանգի սահմանման համաձայն [12,u2], քննարկվող դեպքում կստանանք, որ (6) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը փոքր է նրա անհայտների թվից, ինչը նշանակում է, որ այդ մատրիցի սյուների մեջ գոյություն ունի գծային կախվածություն: Այսինքն՝ գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ թվեր, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի և տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{n1} \end{pmatrix}\alpha_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{n2} \end{pmatrix}\alpha_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{nn} \end{pmatrix}\alpha_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}: \tag{7}$$

Օգտվելով մատրիցը թվով բազմապատկման և մատրիցների գումարման գործողությունների սահմանումներից [11,u10,9], (7) հավասարություններից կստանանք

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n &= 0: \end{aligned} \tag{8}$$

Ստացված հավասարությունները ցույց են տալիս [12,u5], որ քննարկվող դեպքում (6) համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում:

Ամփոփելով բերված դատողությունները, ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *Որպեսզի n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունենա ոչ զրոյական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար լինի զրոյի:*

Գծային հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու ևս մեկ եղանակի հետ ծանոթանալու համար նախ նկատենք, որ ի տարբերություն գծային անհամասեռ հավասարումների համակարգի լուծումների, գծային համասեռ հավասարումների համակարգի լուծումներն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

I. ***Եթե $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ վեկտորը գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի որևէ լուծում է, ապա ցանկացած k թվի համար $k\alpha=(k\alpha_1,k\alpha_2,\ldots,k\alpha_n)$ վեկտորը նույնպես այդ համակարգի լուծում է:***

II. *Եթե $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ և $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ վեկտորները (4) համակարգի*

երկու կամայական լուծումներ են, ապա այդ լուծումների ցանկացած գծային զուգակցություն, այսինքն $k\alpha + p\beta$ վեկտորը, որտեղ k -ն և p -ն կամայական թվեր են, նույնպես այդ համակարգի լուծում է:

Անմիջական տեղադրման միջոցով կարող ենք համոզվել, որ հավասարումների (4) համակարգի լուծումների թվարկած հատկությունները ճշմարիտ են:

Ինչպես տեսնում ենք, եթե գծային համասեռ հավասարումների համակարգն ունի ոչ զրոյական լուծում, ապա այն ունի նաև անթիվ բազմությամբ լուծումներ, ընդ որում՝ (4) համակարգի պարագայում այդ լուծումները n -չափանի վեկտորներ են:

Քանի որ n -չափանի տարածության մեջ n -ից մեծ թվով վեկտորների յուրաքանչյուր համախումբ իրենից ներկայացնում է գծորեն կախյալ վեկտորների համակարգ **[2,u3]**, հետևաբար (4) համակարգի լուծումներից կարելի է ընտրել վերջավոր թվով գծորեն անկախ վեկտորների առավելագույն համակարգ: Առավելագույն այն իմաստով, որ դիտարկվող համակարգի ցանկացած այլ լուծում ներկայացվի ընտրված լուծումների գծային զուգակցության միջոցով:

Սահմանում 4: *Գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի գծորեն անկախ լուծումների*

$$e_1, e_2, \ldots, e_k \tag{9}$$

համախումբը կոչվում է այդ համակարգի լուծումների հիմնական համակարգ, եթե հավասարումների դիտարկվող համակարգի յուրաքանչյուր լուծում հանդիսանում է լուծումների (9) համախմբի գծային զուգակցությունը:

Նշենք, որ գծային համասեռ հավասարումների համակարգը կարող է ունենալ լուծումների բազմաթիվ հիմնական համակարգեր, սակայն այդ բոլոր համակարգերը բաղկացած են միևնույն թվով լուծումներից:

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Եթե n անհայտներով m գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը փոքր է այդ համակարգի անհայտների թվից, ապա դիտարկվող համակարգի լուծումների յուրաքանչյուր հիմնական համակարգ պարունակում է $n-r$ լուծում, որտեղ r -ը (4) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգն է:*

Ապացույց: Դիցուք հավասարումների (4) համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է r -ի և այն փոքր է այդ համակարգի անհայտների թվից:

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ դիտարկվող մատրիցի r -րդ կարգի զրոյից տարբեր մինորն ընկած է այդ մատրիցի վերին ձախ անկյունում:

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրություններից հետևում է, որ (4) համակարգի վերջին $m-r$ հավասարումները նրա առաջին r հավասարումների հետևանքներն են և այդ պատճառով կարող են դեն նետվել: Դիտարկվող համակարգի մնացած հավասարումներում $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ անհայտները պարունակող անդամները տեղափոխելով համապատասխան հավասարումների աջ մաս՝ կստանանք

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{rn}x_n : \end{cases} \tag{10}$$

Այժմ, եթե հավասարումների (10) համակարգի ազատ անհայտներին հաջորդաբար տանք հետևյալ արժեքները՝

$$x_{r+1} = 1, \quad x_{r+2} = 0, \cdots, x_n = 0,$$
$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 1, \cdots, x_n = 0,$$

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \cdots, x_n = 1$$

և այդ համակարգից ստացվող համակարգերի լուծումները համապատասխանաբար նշանակենք *)

$$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1r},$$
$$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2r},$$

$$\alpha_{n-r,1}\alpha_{n-r,2}, \alpha_{n-r,r}$$

r-յակներով, կգտնենք (4) համակարգի $n-r$ լուծումները (որոնք ներկայացնենք վեկտորների տեսքով).

$$e_1 = (\alpha_{11}; \alpha_{12}; \cdots; \alpha_{1r}, 1; 0; \cdots; 0),$$
$$e_2 = (\alpha_{21}; \alpha_{22}; \cdots; \alpha_{2r}; 0, 1; \cdots; 0), \tag{11}$$

$$e_{n-r} = (\alpha_{n-r,1}; \alpha_{n-r,2}; \cdots; \alpha_{n-r,r}; 0; 0 \cdots; 1):$$

Այնուհետև դիտարկելով (11) վեկտորների կոորդինատներից կազմված մատրիցը.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1r} & 1 & 0 \cdots 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2r} & 0 & 1 \cdots 0 \\ \alpha_{n-r,1} & \alpha_{n-r,2} \cdots \alpha_{n-r,r} & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

և հաշվի առնելով, որ այդ մատրիցի վերջին $n-r$ սյուներից կազմված մինորը [12,u1] հավասար չէ զրոյի [11,u5,(19)], եզրակացնում ենք, որ (11) վեկտորները կազմում են վեկտորների գծորեն անկախ համակարգ [12,p1]:

Այժմ ցույց տանք, որ հավասարումների (4) համակարգի յուրաքանչյուր լուծում ներկայացվում է (11) վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով:

Ձևակերպված պնդումն ապացուցելու համար ենթադրենք հետևյալ վեկտորը՝

$$e = (\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_r; \beta_{r+1}; \ldots; \beta_n) \tag{12}$$

(4) համակարգի կամայական լուծում է և դիտարկենք

$$e_0 = e - \beta_{r+1}e_1 - \beta_{r+2}e_2 - \cdots - \beta_n e_{n-r}$$

<u>վեկտորը:</u>

*) Հիշենք, որ համաձայն ենթադրության, հավասարումների (10) համակարգի գլխավոր որոշիչը [13,u1] հավասար չէ զրոյի:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման կանոններից [3,(12)], կարող ենք e_0 վեկտորը ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$e_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_r, 0, 0, \ldots, 0),$$

որտեղ

$$s_i = \beta_i - (\beta_{r+1}\alpha_{1i} + \beta_{r+2}\alpha_{2i} + \cdots + \beta_n\alpha_{n-r,i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r):$$

Գծային համասեռ հավասարումների լուծումների երկրորդ հատկությունից հետևում է, որ որպես (4) համակարգի $e, e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ լուծումների գծային զուգակցություն՝ e_0 վեկտորը նույնպես այդ համակարգի լուծում է: Մյուս կողմից, քանի որ (10) համակարգի ազատ անհայտների արժեքները e_0 վեկտորի մեջ հավասար են զրոյի և այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը տարբեր է զրոյից՝ հետևաբար, թեորեմ 2-ի շնորհիվ e_0 վեկտորի մեջ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ անհայտների $s_1, s_2, \ldots, s_r$ արժեքները նույնպես հավասար են զրոյի:

Այսպիսով e_0 վեկտորը նույնաբար հավասար է զրոյի, որտեղից հետևում է, որ (12) վեկտորը ներկայացվում (11) վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով.

$$e = \beta_{r+1}e_1 + \beta_{r+2}e_2 + \cdots + \beta_n e_{n-r}:$$

Ամփոփելով ստացված արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ (11) վեկտորները կազմում են գծային հավասարումների (4) համակարգի լուծումների հիմնական համակարգ:

Իպա

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ եթե վեկտորների (9) համախումբը հավասարումների (4) համակարգի լուծումների որևէ հիմնական համակարգ է, ապա դիտարկվող համակարգի ընդհանուր լուծումն ունի

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ke_k$$

տեսքը, որտեղ c_i-երը $(i = 1, 2, \ldots, k)$ կամայական հաստատուններ են:

Ի մի բերելով վերևում շարադրված դատողությունները՝ եզրակացնում ենք, որ ոչ զրոյական լուծում ունեցող գծային համասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) կազմել դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը և հաշվել այդ մատրիցի ռանգը,

բ) նշված մատրիցում ընտրել նրա ռանգին հավասար թվով գծորեն անկախ տողեր և տրված համակարգում թողնել միայն այն հավասարումները, որոնցում մասնակցող գործակիցները մտնում են այդ մատրիցի ընտրված տողերի մեջ,

գ) առանձնացված հավասարումների ձախ մասերում թողնել դիտարկվող մատրիցի ռանգին հավասար թվով այնպիսի անհայտներ, որոնց գործակիցներից կազմած որոշիչը տարբեր է զրոյից, իսկ մնացած անհայտները համարելով ազատ անհայտներ, տեղափոխել համապատասխան հավասարումների աջ մաս,

դ) $(n-r)$-չափանի, գծորեն անկախ [2,o6]

$$(1;0;\ldots;0), \quad (0;1;\ldots;0) \qquad (0;0;\ldots;1)$$

վեկտորների կոորդինատները հաջորդաբար համարելով $(n-r)$ ազատ անհայտների համապատասխան արժեքներ, որտեղ n -ը դիտարկվող համակարգի անհայտերի թիվն է, իսկ r -ը՝ նրա գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը և, օրինակ, Կրամերի բանաձևերով գտնելով մնացած անհայտների արժեքները՝ ստանալ հավասարումների տրված համակարգի լուծումների հիմնական համակարգերից մեկը.

$$e_1, e_2, \ldots, e_{n-r},$$

ե) կազմելով $c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_{n-r}e_{n-r}$ գծային զուգակցությունը, որտեղ c_i -երը $(i = 1,2,\ldots,n-r)$ կամայական հաստատուններ են, ստանալ հավասարումների դիտարկվող համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ 3: Գտնել գծային համասեռ հավասարումների հետևյալ համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad (ը)$$

Լուծում: Կազմելով հավասարումների դիտարկվող համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցը՝ հեշտությամբ կպարզենք, որ նրա ռանգը հավասար է երկուսի: Նկատի ունենալով նաև, որ, օրինակ

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

եզրակացնում ենք, որ հավասարումների (ը) համակարգը համարժեք է հետևյալ համակարգին [12,u7].

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = -3x_1 + 2x_2, \\ 4x_3 + 3x_4 = -6x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad (ը՚)$$

Հավասարումների (ը՚) համակարգի x_1 և x_2 ազատ անհայտներին տալով $x_1 = 1, x_2 = 0$ արժեքները և լուծելով այդ համակարգից ստացվող

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = -3, \\ 4x_3 + 3x_4 = -6 \end{cases}$$

համակարգը, կստանանք (ը) համակարգի լուծումներից մեկը.

$$e_1 = (1; 0; -15; 18):$$

Այնուհետև x_1 և x_2 անհայտներին տալով $x_1 = 0, x_2 = 1$ արժեքներները և լուծելով

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

համակարգը, կստանանք (ը) համակարգի ևս մեկ լուծում.

$$e_2 = (0; 1; 10; -12):$$

Հաշվի առնելով, որ հավասարումների տրված համակարգի լուծումների յուրաքանչյուր հիմնական համակարգ պետք է պարունակի $n - r = 4 - 2 = 2$ լուծում, եզրակացնում ենք, որ e_1, e_2 վեկտորները կազմում են այդ համակարգի լուծումների հիմնական համակարգ:

Այսպիսով, գծային հավասարումների (ը) համակարգի ընդհանուր լուծումն ունի

$$c_1e_1 + c_2e_2 = c_1(1; 0; -15; 18) + c_2(0; 1; 10; -12) \qquad (թ)$$

տեսքը, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են:

Պարզվում է, որ գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի և նրա համապատասխան համասեռ հավասարումների (4) համակարգի ընդհանուր լուծումների միջև գոյություն ունի սերտ կապ: Այդ կապի օգնությամբ (1) համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար նախ ձևակերպենք անմիջական տեղադրման միջոցով ապացուցվող հետևյալ երկու թեորեմները՝

Թեորեմ 6: *Գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի ցանկացած երկու լուծումների տարբերությունը հանդիսանում է լուծում գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի համար:*

Թեորեմ 7: *Գծային համասեռ հավասարումների (4) համակարգի ցանկացած լուծման և գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի ցանկացած լուծման գումարը անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի լուծում է:*

Միավորելով թեորեմ 6-ը և թեորեմ 7-ը՝ ստանում ենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 8: *Գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համակարգի ընդհանուր լուծումը հավասար է այդ համակարգի որևէ մասնավոր լուծման և նրա համապատասխան համասեռ հավասարումների (4) համակարգի ընդհանուր լուծման գումարին:*

Նշենք, որ, ըստ էության, թեորեմ 8-ը արտահայտում է գծային հավասարումների (1) և (4) համակարգերի ընդհանուր լուծումների միջև գոյություն ունեցող վերևում հիշատակված կապը:

Այսպիսով, գծային անհամասեռ հավասարումների (1) համատեղելի համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) գտնել հավասարումների տրված համակարգի համապատասխան համասեռ հավասարումների (4) համակարգի ընդհանուր լուծումը,

բ) գտնել հավասարումների դիտարկվող համակարգի որևէ մասնավոր լուծում,

գ) (4) համակարգի ընդհանուր լուծումը գումարելով (1) համակարգի մասնավոր լուծման հետ՝ ստանալ տրված անհամասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ 4: Համոզվել, որ գծային անհամասեռ հավասարումների

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases} \qquad (ժ)$$

համակարգը համատեղելի համակարգ է և գտնել նրա ընդհանուր լուծումը:

Լուծում: Ինչպես գիտենք (տե՛ս նախորդ օրինակի լուծումը), հավասարումների տրված համակարգի անհայտների գործակիցներից կազմված մատրիցի ռանգը հավասար է երկուսի: Համոզվելով, որ այդ մատրիցի ընդլայնված մատրիցի ռանգը նույնպես հավասար է երկուսի՝ եզրակացնում ենք, որ (ժ)-ն գծային հավասարումների համատեղելի համակարգ է [12,թ5]:

Քանի որ տրված համակարգի համապատասխան համասեռ հավասարումների համակարգի ընդհանուր լուծումն ունի (թ) տեսքը, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 8-ի, (ժ) համակարգի ընդհանուր լուծումը գտնելու համար մնում է գտնել այդ համակարգի **որևէ** մասնակի լուծում: Նշված մասնակի լուծումը գտնելու համար հավասարումների դիտարկվող համակարգը ներկայացնենք իրեն համարժեք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = 2 - 3x_1 + 2x_2, \\ 4x_3 + 3x_4 = 3 - 6x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad (\text{h})$$

Ընդունելով $x_1 = x_2 = 0$ և լուծելով հավասարումների (h) համակարգից ստացվող

$$\begin{cases} 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_3 + 3x_4 = 3, \end{cases}$$

համակարգը, կստանանք (ժ) համակարգի մասնակի լուծումներից մեկը.

$$e_* = (0; 0; 6; -7). \qquad (\text{լ})$$

Հավասարումների (ժ) համակարգի (լ) մասնավոր լուծումը գումարելով այդ համակարգի համապատասխան համասեռ հավասարումների (ը) համակարգի ընդհանուր լուծման հետ՝ կստանանք գծային անհամասեռ հավասարումների (ժ) համակարգի ընդհանուր լուծումը.

$$(0; 0; 6; -7) + c_1(1; 0; -15; 18) + c_2(0; 1; 10; -12),$$

որտեղ c_1 և c_2 կամայական հաստատուններ են:

§15. Էվկլիդյան տարածություն հասկացությունը: Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարությունը: Օրթոգոնալ բազիս: Թեորեմ էվկլիդյան տարածության մեջ օրթոնորմալ բազիսի գոյության մասին:

Վերադառնալով n-չափանի գծային տարածությունների [2] ուսումնասիրությանը՝ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի, նրանց կազմած անկյան [4,u1,(10)] և վեկտորի երկարության [4,(8)] հասկացությունները ներմուծենք նաև երեքից մեծ չափողականություն ունեցող [2,u8] տարածությունների համար:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ L գծային տարածության մեջ սահմանված է սկալյար արտադրյալ, եթե այդ տարածության x և y վեկտորների ցանկացած զույգի համապատասխանության մեջ է դրված մի թիվ, որը նշանակվում է (x,y) պայմանանշանով և կոչվում է x,y վեկտորների սկալյար արտադրյալ, ընդ որում այդ արտադրյալը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

I. $(x,y) = (y,x)$, *այսինքն՝ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալն ունի տեղափոխելիության հատկություն,*

II. $\lambda(x,y) = (\lambda x, y) = (x, \lambda y)$, *այսինքն՝ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը թվով բազմապատկելու համար բավական է տրված վեկտորներից որևէ մեկը բազմապատկել այդ թվով,*

III. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$, *այսինքն՝ երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալն օժտված է գումարման նկատմամբ բազմապատկման բաշխական հատկությամբ,*

IV. $(x,x) \geq 0$: $(x,x) = 0$ *այն և միայն այն ժամանակ, երբ* $x = 0$:

Նշենք, որ $\lambda = 0$ մասնավոր դեպքում, II պայմանից հետևում է

$$(\Theta, y) = 0 \quad ^{*)} \tag{1}$$

հավասարությունը:

Ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ գծային տարածության զրոյական վեկտորի սկալյար արտադրյալը այդ տարածության ցանկացած վեկտորի հետ հավասար է զրոյի: Մասնավորապես, զրոյի է հավասար զրոյական վեկտորի սկալյար քառակուսին (այսինքն՝ զրոյական վեկտորի սկալյար արտադրյալն իր հետ).

$$(\Theta, \Theta) = 0: \tag{1'}$$

Սահմանում 2: *Գծային տարածությունը կոչվում է էվկլիդյան տարածություն, եթե նրա մեջ սահմանված է սկալյար արտադրյալ:*

Օրինակ 1: Ապացուցել, որ իրական թվերից կազմված բոլոր հնարավոր n-յակների տարածությունը [2,o2] կարելի է դարձնել էվկլիդյան տարածություն:

Լուծում: L_n տարածության կամայական

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ և } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

վեկտորների սկալյար արտադրյալը սահմանելով հետևյալ բանաձևով՝

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \tag{ա}$$

հեշտությամբ կհամոզվենք, որ այն բավարարում է գծային տարածության երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի սահմանման բոլոր պայմաններին:

Հետևաբար, եթե L_n տարածության երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը սահմանենք (ա) բանաձևով, ապա դիտարկվող տարածությունը կդարձնենք էվկլիդյան տարածություն:

Սահմանում 3: *Էվկլիդյան տարածության x վեկտորի երկարություն ասելով կհասկանանք $\sqrt{(x,x)}$ թիվը:*

x վեկտորի երկարությունը նշանակելով $|x|$ պայմանանշանով, համաձայն բերված սահմանման, կստանանք

$$|x| = \sqrt{(x,x)}: \tag{2}$$

Պարզվում է՝ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Էվկլիդյան տարածության կամայական երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի քառակուսին չի գերազանցում այդ վեկտորների երկարությունների քառակուսիների արտադրյալին.*

$$(x, y)^2 \le (x, x) \cdot (y, y): \tag{3}$$

Ապացույց: Դիցուք x-ն ու y-ը էվկլիդյան տարածության կամայական երկու վեկտորներ են:

(3) անհավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական α իրական թիվ և դիտարկենք $x + \alpha y$ վեկտորը: Օգտվելով երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններից՝ կունենանք

$$0 \le (x + \alpha y, x + \alpha y) = \alpha^2 (y, y) + 2\alpha (x, y) + (x, x):$$

Քանի որ α-ի բոլոր արժեքների դեպքում

$$(y, y)\alpha^2 + 2(x, y)\alpha + (x, x)$$

---

*) Տե՛ս 15-րդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

քառակուսի եռանդամն ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ, հետևաբար այդ եռանդամի տարբերիչը դրական չէ.

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)\le 0,$$

որտեղից էլ հետևում է (3) անհավասարությունը:

Իպա

Նշենք, որ (3) անհավասարությունը կոչվում է Կոշի-Բունյակովսկու անհավասարություն:

Հետևանք 1: *Էվկլիդյան տարածության ցանկացած երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը բացարձակ արժեքով չի գերազանցում այդ վեկտորների երկարությունների արտադրյալին.*

$$|(x,y)|\le|x||y|: \qquad (3')$$

Ապացույց: (3′) անհավասարությունն ապացուցելու համար բավական է (2), նշանակման հաշվառումով (3) անհավասարության երկու կողմերից քառակուսի արմատ հանել:

Հետևանք 2: *Էվկլիդյան տարածության ցանկացած երկու վեկտորների գումարի երկարությունը չի գերազանցում այդ վեկտորների երկարությունների գումարը.* *)

$$|x+y|\le|x|+|y|: \qquad (4)$$

Ապացույց: Օգտվելով գծային տարածության վեկտորի երկարության (2) նշանակումից և (3′) անհավասարությունից՝ կունենանք

$$|x+y|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)\le|x|^2+2|x||y|+|y|^2$$

կամ

$$|x+y|^2\le(|x|+|y|)^2$$

անհավասարությունը, որտեղ x-ը և y-ը էվկլիդյան տարածության կամայական վեկտորներ են:

Վերջին անհավասարության երկու կողմերից քառակուսի արմատ հանելով՝ կստանանք (4) անհավասարությունը:

Իպա

Ենթադրելով, որ x-ը և y-ը էվկլիդյան տարածության ոչ զրոյական վեկտորներ են և (3′) անհավասարությունը ներկայացնելով

$$-|x||y|\le(x,y)\le|x||y|,$$

կամ որ նույնն է՝

$$-1\le\frac{(x,y)}{|x||y|}\le 1$$

տեսքով՝ եզրակացնում ենք, որ էվկլիդյան տարածության կամայական x և y ոչ զրոյական վեկտորների համար գոյություն ունի հետևյալ բանաձևով որոշվող միակ φ անկյուն՝ **)

---

*) (4) անհավասարությունը կոչվում է եռանկյան անհավասարություն:

**) (5) բանաձևը համեմատիր [4,(10)] բանաձևի հետ:

$$\varphi = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|} \qquad (0 \le \varphi \le \pi): \tag{5}$$

(5) բանաձևով որոշվող անկյունը կոչվում է էվկլիդյան տարածության x և y ոչ զրոյական վեկտորների կազմած անկյուն:

Սահմանում 4: *էվկլիդյան տարածության x և y ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են օրթոգոնալ վեկտորներ, եթե նրանց սկալյար արտադրյալը հավասար է զրոյի.*

$$(x,y) = 0; \tag{6}$$

Սահմանում 5: *n չափանի էվկլիդյան տարածության $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսը կոչվում է օրթոգոնալ բազիս, եթե նրա վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են.*

$$(e_i, e_j) = 0, \quad \text{եթե} \quad i \ne j: \tag{7}$$

Սահմանում 6: *n չափանի էվկլիդյան տարածության $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսը կոչվում է օրթոնորմալ բազիս, եթե այն կազմված է զույգ առ զույգ օրթոգոնալ միավոր վեկտորներից: *)*

Այլ խոսքով՝ n չափանի էվկլիդյան տարածության $e_1, e_2, \ldots, e_n$ բազիսը կոչվում է օրթոնորմալ բազիս, եթե այդ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, \text{ եթե } i \ne j, \\ 1, \text{ եթե } i = j: \end{cases} \tag{8}$$

Անցնելով կամայական էվկլիդյան տարածության մեջ օրթոնորմալ բազիսի գոյության ապացույցին, նախ համոզվենք հետևյալ թեորեմի ճշմարտացիության մեջ՝

Թեորեմ 2: *էվկլիդյան տարածության զրոյից տարբեր և զույգ առ զույգ օրթոգոնալ կամայական վեկտորներ գծորեն անկախ են:*

Ապացույց: Դիցուք էվկլիդյան տարածության զրոյից տարբեր $a_1, a_2, \ldots, a_n$ վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են.

$$(a_i, a_j) = 0, \text{ եթե } i \ne j \tag{9}$$

և տեղի ունի

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \Theta \tag{10}$$

հավասարությունը, որտեղ α_1-ը, α_2-ը, $\ldots, \alpha_n$-ը իրական թվեր են:

Օգտվելով գծային տարածության երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններից և (10) հավասարության երկու կողմերը սկալյարորեն բազմապատկելով $a_i (i = 1,2,\ldots,n)$ վեկտորով՝ կունենանք

$$\alpha_1(a_1, a_i) + \alpha_2(a_2, a_i) + \cdots + \alpha_n(a_n, a_i) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n): \tag{11}$$

---

*) էվկլիդյան տարածության մեկ երկարություն ունեցող վեկտորը կոչվում է այդ տարածության միավոր վեկտոր:

(9) հավասարությունների հաշվառումով (11) հավասարություններից կստանանք

$$\alpha_i(a_i,a_i)=0 \quad (i=1,2,\ldots,n): \tag{12}$$

Նկատի ունենալով նաև, որ դիտարկվող վեկտորները ոչ զրոյական վեկտորներ են, (12) հավասարություններից կունենանք

$$\alpha_i=0 \quad (i=1,2,\ldots,n): \tag{13}$$

Ինչպես գիտենք, (10) և (13) հավասարություններից հետևում է, որ էվկլիդյան տարածության $a_1,a_2,\ldots,a_n$ վեկտորները գծորեն անկախ են **[2,u4]**:

Իպա

Այժմ ապացուցենք կամայական էվկլիդյան տարածության մեջ օրթոնորմալ բազիսի գոյությանը վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *n-չափանի կամայական էվկլիդյան տարածության մեջ գոյություն ունի վեկտորների օրթոնորմալ բազիս:*

Ապացույց: Ենթադրելով, որ վեկտորների $g_1,g_2,\ldots,g_n$ համախումբը n-չափանի էվկլիդյան տարածության որևէ բազիս է՝ դիտարկենք այդ տարածության հետևյալ վեկտորները՝

$$f_1=g_1, \quad f_2=g_2+\alpha_1 f_1, \tag{14}$$

որտեղ α_1-ը ցանկացած իրական թիվ է:

Նախ, պարզ է, որ α_1-ի ոչ մի արժեքի դեպքում f_2-ը հավասար չէ զրոյական վեկտորի, որովհետև, հակառակ դեպքում, տեղի կունենա

$$g_2+\alpha_1 f_1=\Theta,$$

կամ որ նույնն է՝

$$g_2+\alpha_1 g_1=\Theta$$

հավասարությունը՝ ինչը կհակասի g_1 և g_2 վեկտորների գծորեն անկախ լինելու ենթադրությանը:

Այնուհետև α_1-ը ընտրենք այնպես, որ f_1-ը և f_2-ը լինեն օրթոգոնալ վեկտորներ.

$$(f_2,f_1)=(g_2+\alpha_1 f_1,f_1)=0:$$

Օգտվելով էվկլիդյան տարածության երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններից՝ կարող ենք վերջին հավասարությունը ներկայացնել

$$(g_2,f_1)+\alpha_1(f_1,f_1)=0$$

տեսքով, որտեղից, նկատի ունենալով, որ $f_1=g_1\neq\Theta$, α_1-ի որոնելի արժեքի համար կստանանք

$$\alpha_1=-\frac{(g_2,f_1)}{(f_1,f_1)}: \tag{15}$$

Այսպիսով, α_1-ի համար ստացած (15) արժեքի դեպքում, դիտարկվող

տարածության (14) ոչ զրոյական վեկտորները կլինեն օրթոգոնալ վեկտորներ:

Այժմ, ենթադրելով, որ տրված տարածության ոչ զրոյական և զույգ առ զույգ օրթոգոնալ $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ $(k-1<n)$ վեկտորներն արդեն կառուցված են՝ դիտարկենք հետևյալ վեկտորը՝

$$f_k = g_k + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_{k-1} f_{k-1}, \tag{16}$$

որտեղ α_i-երը $(i = 1,2,\ldots,k-1)$ ցանկացած իրական թվեր են:

Կրկնելով f_2-ի ոչ զրոյական վեկտոր լինելը հիմնավորող դատողությունը f_k վեկտորի համար՝ կհամոզվենք, որ գոյություն չունեն $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ թվեր, որոնց համար f_k-ն լինի զրոյական վեկտոր: Այնուհետև $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ թվերն ընտրենք այնպես, որ f_k վեկտորը լինի օրթոգոնալ $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ վեկտորներին.

$$(f_k, f_i) = (g_k + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_{k-1} f_{k-1}, f_i) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,k-1):$$

Օգտվելով գծային տարածության երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի հատկություններից, և հաշվի առնելով, որ համաձայն ենթադրության $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$ վեկտորները զույգ առ զույգ օրթոգոնալ են՝ կարող ենք վերջին հավասարությունը ներկայացնել

$$(g_k, f_i) + \alpha_i (f_i, f_i) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,k-1)$$

տեսքով, որտեղից, նկատի ունենալով նաև, որ f_i-երը ոչ զրոյական վեկտորներ են՝ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ թվերի որոնելի արժեքների համար կստանանք

$$\alpha_i = -\frac{(g_k, f_i)}{(f_i, f_i)} \quad (i = 1,2,\ldots,k-1): \tag{17}$$

Այսպիսով, α_i թվերի համար ստացած (17) արժեքների դեպքում դիտարկվող տարածության $f_i (i = 1,2,\ldots,k)$ ոչ զրոյական վեկտորները կլինեն զույգ առ զույգ օրթոգոնալ:

Նկարագրված ձևով շարունակելով f_i վեկտորների կառուցումը՝ ի վերջո կստանանք զրոյից տարբեր և զույգ առ զույգ օրթոգոնալ վեկտորների հետևյալ համակարգը՝

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \tag{18}$$

որը, համաձայն թեորեմ 2-ի, հանդիսանում է տրված տարածության գծորեն անկախ վեկտորների համակարգ: Նկատի ունենալով նաև, որ (18) համակարգի վեկտորների թիվը հավասար է դիտարկվող տարածության չափին, եզրակացնում ենք, որ վեկտորների նշված համակարգը այդ տարածության օրթոգոնալ բազիս է:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ վեկտորների

$$\frac{f_1}{|f_1|}, \frac{f_2}{|f_2|}, \ldots, \frac{f_n}{|f_n|} \tag{19}$$

համակարգը ակնհայտորեն հանդիսանում է դիտարկվող էվկլիդյան տարածության օրթոնորմալ բազիս:

Իպա

ԳԼՈՒԽ II

§16. Գծային օպերատորի սահմանումը և նրա հիմնական հատկությունները: Գծային օպերատորների և քառակուսի մատրիցների միջև եղած կապը: Գործողություններ գծային օպերատորների հետ:

Նորից դիտարկենք գծային տարածություն և ներմուծենք հետևյալ կարևոր հասկացությունը՝

Սահմանում 1: *Կասենք, որ L գծային տարածության մեջ տրված է A օպերատոր, եթե այդ տարածության յուրաքանչյուր x վեկտորի համապատասխանության մեջ է դրված նույն տարածության որոշակի x' վեկտոր:*

Սահմանում 2: *x' վեկտորին կանվանենք x վեկտորի պատկեր, իսկ x վեկտորին՝ x' վեկտորի նախապատկեր:*

Այն փաստը, որ L տարածության A օպերատորը այդ տարածության x վեկտորին համապատասխանեցնում է նույն տարածության x' վեկտորը, կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$Ax = x': \tag{1}$$

Սահմանում 3: *L տարածության A օպերատորը կոչվում է գծային օպերատոր, եթե այդ տարածության ցանկացած x և y վեկտորների և ցանկացած λ իրական թվի համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝*

$$A(x+y) = Ax + Ay, \tag{2}$$

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax): \tag{3}$$

Այլ խոսքով՝ L տարածության A օպերատորը կոչվում է գծային օպերատոր, եթե այդ օպերատորի կիրառման ժամանակ դիտարկվող տարածության կամայական երկու վեկտորների գումարի պատկերը հավասար է այդ վեկտորների պատկերների գումարին և L տարածության ցանկացած վեկտորի և ցանկացած իրական թվի արտադրյալի պատկերը հավասար է տրված վեկտորի պատկերի և տրված թվի արտադրյալին:

Գծային օպերատորներից առանձնացնենք նույնական օպերատորը (կնշանակենք $\mathcal{E}$-ով), որը գծային տարածության յուրաքանչյուր վեկտորի համա-պատասխանեցնում է այդ նույն վեկտորը.

$$\mathcal{E}x = x, \tag{4}$$

և՝ զրոյական օպերատորը (կնշանակենք O-ով), որը գծային տարածության յուրաքանչյուր վեկտորի համապատասխանեցնում է այդ տարածության զրոյական վեկտորը.

$$Ox = \Theta: \tag{5}$$

Գծային օպերատորի սահմանումից հետևում են նրա հետևյալ **հատկությունները՝**

1. *Գծային օպերատորը զրոյական վեկտորը թողնում է անշարժ.*

$$A\Theta = \Theta: \tag{6}$$

Ապացույց: Օգտվելով (3) հավասարությունից՝ կունենանք

$$A\Theta = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = \Theta:$$

Իպա

II. *Գծային օպերատորը հակադիր վեկտորներին համապատասխանեցնում է հակադիր վեկտորներ, այսինքն՝ գծային տարածության կամայական x վեկտորի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$A(-x) = -Ax: \tag{7}$$

Ապացույց: Օգտվելով (3) հավասարությունից՝ կստանանք

$$A(-x) = A[(-1)x] = -Ax:$$

Իպա

III. *Գծային օպերատորը պահպանում է վեկտորների գծային զուգակցությունը:*

Այլ խոսքով՝ գծային օպերատորի կիրառման ժամանակ գծային տարածության վեկտորների ցանկացած գծային զուգակցության պատկերը հավասար է այդ վեկտորների պատկերների նույն գործակիցներով գծային զուգակցությանը, այսինքն՝ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) + \cdots + \alpha_n(Ax_n), \tag{8}$$

որտեղ α_i -երը $(i = 1,2,\ldots,n)$ կամայական իրական թվեր են, իսկ x_i -երը՝ դիտարկվող գծային տարածության ցանկացած վեկտորներ:

Ապացույց: Գծային օպերատորի երրորդ հատկությունն ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի եղանակով:

Մեկ վեկտորի դեպքում, համաձայն (3) հավասարության, ունենք

$$A(\alpha_1 x_1) = \alpha_1(Ax_1),$$

ինչը նշանակում է, որ (8) հավասարությունը ճիշտ է $n = 1$ արժեքի համար:

Այժմ ենթադրենք, որ այդ հավասարությունը ճիշտ է որևէ $k-1$ բնական թվի համար: Այդ դեպքում, օգտվելով (2) և (3) հավասարություններից, կստանանք

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k) = A[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1}) + \alpha_k x_k] =$$
$$= A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{k-1} x_{k-1}) + A(\alpha_k x_k) = \alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) + \cdots + \alpha_k(Ax_k):$$

Այսպիսով, այն ենթադրությունից, որ (8) հավասարությունը ճիշտ է որևէ $k-1$ բնական թվի համար, բխում է, որ այն ճիշտ է նաև k-ի համար:

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները, համաձայն մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդի՝ եզրակացնում ենք, որ գծային օպերատորի երրորդ հատկությունը ճիշտ է n-ի ցանկացած արժեքի համար:

Իպա

IV. *Գծային օպերատորը պահպանում է վեկտորների գծային կախվածությունը, այսինքն՝ եթե գծային տարածության $x_1, x_2, \ldots, x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, ապա գծային օպերատորի կիրառման ժամանակ գծորեն կախյալ են նաև այդ վեկտորների պատկերները:*

Ապացույց: Դիցուք գծային տարածության $x_1, x_2, \ldots, x_n$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, ինչը նշանակում է, որ այդ վեկտորները կապված են հետևյալ

առնչությամբ [2,u3].

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \Theta,$$

որտեղ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից:

Այդ դեպքում, օգտվելով գծային օպերատորի առաջին հատկությունից, կստանանք

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = A\Theta = \Theta: \tag{9}$$

Մյուս կողմից՝ գծային օպերատորի երրորդ հատկության համաձայն՝ ունենք

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) + \cdots + \alpha_n(Ax_n): \tag{10}$$

Համեմատելով (9) և (10) հավասարությունները՝ կստանանք

$$\alpha_1(Ax_1) + \alpha_2(Ax_2) + \cdots + \alpha_n(Ax_n) = \Theta:$$

Քանի որ, համաձայն ենթադրության, $\alpha_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ թվերից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, հետևաբար ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ $x_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ վեկտորների պատկերները նույնպես գծորեն կախյալ են:

Իպա

Այժմ n չափանի L գծային տարածության մեջ վերցնենք A գծային օպերատոր և որևէ բազիս [2,u7].

$$e_1, e_2, \ldots, e_n: \tag{11}$$

Քանի որ գծային տարածության յուրաքանչյուր վեկտոր միակ ձևով ներկայացվում է այդ տարածության բազիսային վեկտորների միջոցով [2,թ3], հետևաբար գոյություն ունեն այնպիսի $\alpha_{ij}\,(i, j = 1,2,\ldots,n)$ իրական թվեր, որ բազիսային վեկտորների պատկերների համար տեղի ունեն հետևյալ վերլուծությունները՝

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ &\\ Ae_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n: \end{aligned} \tag{12}$$

Սահմանում 4: *L գծային տարածության (11) բազիսային վեկտորների պատկերների (12) վերլուծությունների գործակիցներից կազմված*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

մատրիցը կոչվում է A օպերատորի մատրից (11) բազիսում:

Այսպիսով, n -չափանի գծային տարածության ցանկացած գծային օպերա-

տորի, այդ տարածության յուրաքանչյուր բազիսում համապատասխանում է n-րդ կարգի որոշակի քառակուսի մատրից:

Պարզվում է ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

n-րդ կարգի յուրաքանչյուր քառակուսի մատրիցի n չափանի գծային տարածության մեջ համապատասխանում է որոշակի գծային օպերատոր և որոշակի բազիս՝ այնպես, որ այդ օպերատորի մատրիցը առանձնացված բազիսում համընկնում է տրված մատրիցի հետ:

Այսպիսով, n չափանի գծային տարածության մեջ բազիսի ընտրությունից հետո, այդ տարածության մեջ տրված գծային օպերատորների և n-րդ կարգի քառակուսի մատրիցների միջև ստեղծվում է փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Օրինակ 1: Ստանալ L գծային տարածության նույնական օպերատորի մատրիցը (11) բազիսում:

Լուծում: Ունենք

$$\mathcal{E}e_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \cdots + 0\cdot e_n,$$
$$\mathcal{E}e_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + \cdots + 0\cdot e_n$$

$$\mathcal{E}e_n = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \cdots + 1e_n$$

Հետևաբար, համածայն սահմանման, որոնելի մատրիցն ունի

$$\begin{pmatrix} 1\,0\cdots 0 \\ 0\,1\cdots 0 \\ \\ 0\,0\cdots 1 \end{pmatrix}$$

տեսքը:

Օրինակ 2: Դիցուք L-ը n-ից ցածր աստիճան ունեցող բոլոր հնարավոր ամբողջ բազմանդամների բազմությունն է (որն ակնհայտորեն գծային տարածություն է), իսկ A-ն՝ օպերատոր, որը դիտարկվող տարածության յուրաքանչյուր բազմանդամի համապատասխանեցնում է այդ բազմանդամի ածանցյալը **[26,u2]**.

$$A[p(x)] = p'(x):$$

Օգտվելով **ֆունկցիայի ածանցյալի հատկություններից [28,p1,h1]**, նախ համոզվենք, որ A-ն գծային օպերատոր է:

Իրոք, ունենք

$$A[p_1(x)+p_2(x)] = [p_1(x)+p_2(x)]' = p_1'(x)+p_2'(x) = A[p_1(x)]+A[p_2(x)],$$
$$A[\lambda\, p(x)] = [\lambda\, p(x)]' = \lambda\, p'(x) = \lambda\, A[p(x)],$$

որտեղ $p_1(x)$-ը, $p_2(x)$-ը և $p(x)$-ը դիտարկվող տարածության n-ից ցածր կարգ ունեցող կամայական բազմանդամներ են, իսկ λ-ն՝ ցանկացած իրական թիվ:

Այնուհետև, եթե L տարածության մեջ որպես բազիս վերցնենք, օրինակ (ակնհայտորեն գծորեն անկախ) վեկտորների հետևյալ համախումբը՝

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = \frac{x^2}{2!}, \ldots, e_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad (ա)$$

կստանանք

$$Ae_1 = 1' = 0 = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_n,$$
$$Ae_2 = x' = 1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 0 \cdot e_n,$$

$$Ae_n = \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = e_{n-1} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \cdots + 1 \cdot e_{n-1} + 0 \cdot e_n$$

Հետևաբար, համածայն սահմանման, A օպերատորի մատրիցն (ա) բազիսում ունի

$$\begin{pmatrix} 0\,1\,0 \cdots 0 \\ 0\,0\,1 \cdots 0 \\ \\ 0\,0\,0 \cdots 1 \\ 0\,0\,0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

տեսքը:

Այժմ ենթադրենք A-ն ու B-ն L գծային տարածության գծային օպերատորներ են:

Սահմանում 5: *Կասենք, որ L գծային տարածության C օպերատորը այդ տարածության A և B գծային օպերատորների գումարն է և այդ փաստը կնշենք հետևյալ կերպ՝*

$$C = A + B,$$

եթե L տարածության ցանկացած x վեկտորի համար տեղի ունի

$$Cx = (A + B)x = Ax + Bx \qquad (14)$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 1: *L գծային տարածության երկու գծային օպերատորների գումարը նույնպես այդ տարածության գծային օպերատոր է:*

Ապացույց: Դիցուք C-ն L գծային տարածության A և B գծային օպերատորների գումարն է, իսկ x-ը և y-ը՝ այդ տարածության կամայական վեկտորներ:

Այդ դեպքում, օգտվելով (2), (3), (14) հավասարություններից և գծային տարածության սահմանումից, ցանկացած λ իրական թվի համար կունենանք

$$C(x + y) = A(x + y) + B(x + y) = Ax + Bx + Ay + By = Cx + Cy,$$
$$C(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda(Ax) + \lambda(Bx) = \lambda(Ax + Bx) = \lambda(Cx):$$

Այսպիսով, կատարված ենթադրությունների դեպքում, L գծային տարածության կամայական x և y վեկտորների և ցանկացած λ իրական թվի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$C(x+y)=Cx+Cy, \quad C(\lambda x)=\lambda Cx:$$

Համաձայն գծային օպերատորի սահմանման, ստացված արդյունքը նշանակում է, որ $C=A+B$ օպերատորը L տարածության գծային օպերատոր է:

Իպա

Թեորեմ 2: *L գծային տարածության երկու գծային օպերատորների գումարի մատրիցն այդ տարածության որևէ բազիսում հավասար է նույն բազիսում տրված օպերատորների մատրիցների գումարին:*

Ապացույց: Դիցուք n չափանի L գծային տարածության A և B գծային օպերատորներն այդ տարածության (11) բազիսում համապատասխանաբար ունեն հետևյալ մատրիցները՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\,a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11}\,b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}\,b_{22}\cdots b_{2n} \\ \\ b_{n1}\,b_{n2}\cdots b_{nn} \end{pmatrix}: \tag{15}$$

Այդ դեպքում, օգտվելով (12) և (14) հավասարություններից, կստանանք

$$(A+B)e_i = Ae_i + Be_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n + b_{1i}e_1 + b_{2i}e_n + \cdots + b_{ni}e_i$$

կամ

$$(A+B)e_i = (a_{1i}+b_{1i})e_1 + (a_{2i}+b_{2i})e_2 + \cdots + (a_{ni}+b_{ni})e_n \qquad (i=1,2,\ldots,n): \tag{16}$$

Համաձայն սահմանման, (16) հավասարությունները նշանակում են, որ դիտարկվող տարածության (11) բազիսում $A+B$ օպերատորի մատրիցն ունի

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \cdots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \cdots a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} \cdots a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \tag{17}$$

տեսքը:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ (17) մատրիցը (15) մատրիցների գումարն է [11,u9]:

Իպա

Սահմանում 6: *L գծային տարածության A գծային օպերատորի և α իրական թվի արտադրյալ ասելով կհասկանանք այն օպերատորը, որը L տարածության ցանկացած x վեկտորի համապատասխանեցնում է այդ տարածության $\alpha(Ax)$ վեկտորը.*

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax): \qquad (18)$$

Թեորեմ 3: *Եթե A-ն L գծային տարածության գծային օպերատոր է, ապա αA-ն նույնպես այդ տարածության գծային օպերատոր է:*

Ապացույց: Դիցուք A-ն L գծային տարածության գծային օպերատոր է, իսկ x-ը և y-ը՝ այդ տարածության կամայական վեկտորներ:

Այդ դեպքում, օգտվելով (2), (3), (18) հավասարություններից և գծային տարածության սահմանումից, ցանկացած α և λ իրական թվերի համար կունենանք

$$(\alpha A)(x+y) = \alpha[A(x+y)] = \alpha(Ax+Ay) = \alpha(Ax) + \alpha(Ay) = (\alpha A)x + (\alpha A)y,$$
$$(\alpha A)(\lambda x) = \alpha[A(\lambda x)] = \alpha[\lambda A(x)] = \lambda[\alpha(Ax)] = \lambda[(\alpha A)x]:$$

Այսպիսով, կատարված ենթադրությունների դեպքում L գծային տարածության կամայական x և y վեկտորների և ցանկացած α, λ իրական թվերի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$(\alpha A)(x+y) = (\alpha A)x + (\alpha A)y, \qquad (\alpha A)(\lambda x) = \lambda[(\alpha A)x]:$$

Համաձայն գծային օպերատորի սահմանման, ստացված արդյունքը նշանակում է, որ αA օպերատորը L տարածության գծային օպերատոր է:

Թեորեմ 4: *L գծային տարածության գծային օպերատորի և որևէ իրական թվի արտադրյալի մատրիցն այդ տարածության որևէ բազիսում հավասար է տրված թվի և նույն բազիսում՝ տրված օպերատորի մատրիցի արտադրյալին:*

Ապացույց: Դիցուք n չափանի L գծային տարածության գծային օպերատորն այդ տարածության (11) բազիսում ունի (13) մատրիցը: Այդ դեպքում, օգտվելով (12) և (18) հավասարություններից, կստանանք

$$(\alpha A)e_i = \alpha(Ae_i) = \alpha(a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n)$$

կամ

$$(\alpha A)e_i = \alpha a_{1i}e_1 + \alpha a_{2i}e_2 + \cdots + \alpha a_{ni}e_n \qquad (i = 1,2,\ldots,n): \qquad (19)$$

Համաձայն սահմանման՝ (19) հավասարությունները նշանակում են, որ դիտարկվող տարածության (11) բազիսում αA օպերատորի մատրիցն ունի

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \cdots \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \cdots \alpha a_{2n} \\ & \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} \cdots \alpha a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

տեսքը:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ (20) մատրիցը α թվի և (13) մատրիցի արտադրյալն է [11,u10]:

Իպա

Սահմանում 7: *Կասենք, որ L գծային տարածության C օպերատորը այդ տարածության A և B գծային օպերատորների արտադրյալն է և այդ փաստը կնշենք հետևյալ կերպ՝*

$$C = AB,$$

եթե L տարածության ցանկացած x վեկտորի համար տեղի ունի

$$Cx = (AB)x = A(Bx) \tag{21}$$

հավասարությունը:

Նշենք, որ ընդհանրապես ասած, գծային տարածության գծային օպերատորների արտադրյալն օժտված չէ տեղափոխելիության հատկությամբ.

$$AB \neq BA: \tag{22}$$

Թեորեմ 5: *L գծային տարածության երկու գծային օպերատորների արտադրյալը նույնպես այդ տարածության գծային օպերատոր է:*

Ապացույց: Դիցուք C-ն L գծային տարածության A և B գծային օպերատորների արտադրյալն է, իսկ x-ը և y-ը՝ այդ տարածության կամայական վեկտորներ:

Այդ դեպքում, օգտվելով (2), (3) և (21) հավասարություններից, ցանկացած λ իրական թվի համար կունենանք

$$C(x+y) = A[B(x+y)] = A(Bx+By) = A(Bx) + A(By) = Cx + Cy,$$
$$C(\lambda x) = A[B(\lambda x)] = A[\lambda(Bx)] = \lambda[A(Bx)] = \lambda(Cx):$$

Այսպիսով, կատարված ենթադրությունների դեպքում L գծային տարածության կամայական x և y վեկտորների և ցանկացած λ իրական թվի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$C(x+y) = Cx + Cy, \quad C(\lambda x) = \lambda(Cx):$$

Համաձայն գծային օպերատորի սահմանման՝ ստացված արդյունքը նշանակում է, որ $C = A \cdot B$ օպերատորը L տարածության գծային օպերատոր է:

Իպա

Թեորեմ 6: *L գծային տարածության երկու գծային օպերատորների արտադրյալի մատրիցն այդ տարածության որևէ բազիսում հավասար է նույն բազիսում տրված օպերատորների մատրիցների արտադրյալին:*

Ապացույց: Դիցուք n չափանի L գծային տարածության A և B գծային օպերատորներն այդ տարածության (11) բազիսում համապատասխանաբար ունեն (15) հավասարություններով տրվող A և B մատրիցները:

Այդ դեպքում, օգտվելով (8), (12) և (21) հավասարություններից, կստանանք

$$Ce_i = (A \cdot B)e_i = A(Be_i) = A(b_{1i}e_1 + b_{2i}e_2 + \cdots + b_{ni}e_n) =$$
$$= b_{1i}(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n) + b_{2i}(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n) + \cdots$$
$$\cdots + b_{ni}(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + a_{nn}e_n) = (b_{1i}a_{11} + b_{2i}a_{12} + \cdots + b_{ni}a_{1n})e_1 +$$
$$+ (b_{1i}a_{21} + b_{2i}a_{22} + \cdots + b_{ni}a_{2n})e_2 + \cdots + (b_{1i}a_{n1} + b_{2i}a_{n2} + \cdots + b_{ni}a_{nn})e_n =$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{1k}\right)e_1+\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{2k}\right)e_2+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{nk}\right)e_n \quad (i=1,2,\ldots,n)^{*)}$$

կամ

$$Ce_i=\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{sk}\right)e_s \qquad (i=1,2,\ldots,n): \tag{23}$$

Մյուս կողմից ունենք

$$Ce_i=C_{1i}e_1+C_{2i}e_2+\cdots+C_{ni}e_n=\sum_{s=1}^{n}C_{si}e_s \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{24}$$

որտեղ C_{si} $(s,i=1,2,\ldots,n)$ թվերը C մատրիցի տարրերն են (11) բազիսում:

Համեմատելով (23) և (24) հավասարությունները՝ կստանանք

$$C_{si}=\sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{ki} \qquad (s,i=1,2,\ldots,n): \tag{25}$$

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ C մատրիցի տարրերի համար ստացած արտահայտությունների տեսքից երևում է, որ այդ մատրիցը հավասար է A և B օպերատորների՝ (11) բազիսում ունեցած մատրիցների արտադրյալին:

Իպա

Վերջում ապացուցենք նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 7: *L գծային տարածության նույնական օպերատորը տեղափոխելի է այդ տարածության ցանկացած գծային օպերատորի հետ.*

$$A\mathcal{E}=\mathcal{E}A=A: \tag{26}$$

Ապացույց: Վերցնելով դիտարկվող տարածության կամայական վեկտոր՝ նույնական օպերատորի և երկու օպերատորների արտադրյալի սահմանումների համաձայն, կունենանք

$$(A\mathcal{E})x=A(\mathcal{E}x)=Ax, \quad (\mathcal{E}A)x=\mathcal{E}(Ax)=Ax:$$

Հետևաբար, L գծային տարածության կամայական վեկտորի համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$(A\mathcal{E})x=(\mathcal{E}A)x=Ax,$$

ինչը ակնհայտորեն նշանակում է, որ այդ տարածության ցանկացած գծային օպերատորի համար տեղի ունեն (26) հավասարությունները:

Իպա

Այսպիսով, գծային տարածության գծային օպերատորների բազմապատկման ժամանակ, նույնական օպերատորը կատարում է միավորի դեր:

Նկատի ունենալով կատարված եզրակացությունը՝ գծային տարածության նույնական օպերատորին կանվանենք նաև այդ տարածության միավոր օպերատոր:

---

*) $\sum_{k=1}^{n} a_k$ պայմանանշանով կշանակենք $a_1+a_2+\cdots+a_n$ գումարը:

§17. Տարբեր բազիսներում գծային օպերատորի մատրիցների միջև եղած կապը: Գծային օպերատորի սեփական վեկտորները և սեփական արժեքները:

Ինչպես տեսանք, գծային տարածության յուրաքանչյուր բազիսում այդ տարածության ցանկացած գծային օպերատորի համապատասխանում է որոշակի քառակուսի մատրից: Պարզվում է, որ գծային տարածության տարբեր բազիսներում միևնույն գծային օպերատորին համապատասխանող մատրիցների միջև գոյություն ունի կապ: Նշված կապը ստանալու համար նախ ծանոթանանք հետևյալ սահմանման հետ.

Սահմանում 1: *L գծային տարածության B գծային օպերատորը կոչվում է նույն տարածության A գծային օպերատորի հակադարձ օպերատոր, եթե տեղի ունեն*

$$AB = BA = \mathcal{E} \qquad (1)$$

հավասարությունները, որտեղ $\mathcal{E}$-ը դիտարկվող տարածության նույնական օպերատորն է:

A գծային օպերատորի հակադարձ օպերատորը նշանակելով A^{-1}-ով, համաձայն սահմանման, կստանանք

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathcal{E}: \qquad (1')$$

Նշենք, որ ոչ բոլոր օպերատորներն ունեն հակադարձ օպերատոր:

Օրինակ 1: Ապացուցել, որ L գծային տարածության զրոյական օպերատորը չունի հակադարձ օպերատոր:

Լուծում: Ձևակերպած պնդման ճշմարտացիության մեջ համոզվելու համար ենթադրենք հակառակը՝ այսինքն՝ ենթադրենք, որ զրոյական օպերատորն [16,(5)] ունի հակադարձ օպերատոր և այն նշանակենք 0^{-1} պայմանանշանով: Այդ դեպքում, համաձայն սահմանման, տեղի կունենան հետևյալ հավասարությունները՝

$$0 \cdot 0^{-1} = 0^{-1} \cdot 0 = \mathcal{E} \qquad (\text{ա})$$

Այնուհետև օգտվելով (ա) հավասարություններից և գծային օպերատորի առաջին հատկությունից [16,I], դիտարկվող տարածության ցանկացած վեկտորի համար կունենանք

$$x = \left(0^{-1} \cdot 0\right)x = 0^{-1}\left(0x\right) = 0^{-1}\Theta = \Theta:$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ զրոյական օպերատորն ունի հակադարձ օպերատոր, հանգեցինք հակասության: Հետևաբար զրոյական օպերատորը հակադարձ օպերատոր չունի:

Իպա

Այժմ առանց ապացույցի բերենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Որպեսզի L գծային տարածության A գծային օպերատորն ունենա հակադարձ օպերատոր, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տրված տարածության մեջ գոյություն ունենա բազիս, որում այդ օպերատորի մատրիցը լինի ոչ եզակի մատրից:*

Անցնելով L գծային տարածության տարբեր բազիսներում միևնույն գծային օպերատորի մատրիցների միջև գոյություն ունեցող կապի արտածմանը՝

այդ գծային տարածության մեջ դիտարկենք մի որևէ A գծային օպերատոր և երկու տարբեր բազիսներ.

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \tag{2}$$

$$f_1, f_2, \ldots, f_n : \tag{3}$$

Քանի որ վեկտորների (2) համակարգը դիտարկվող տարածության բազիս է, ուստի այդ տարածության f_i վեկտորները միակ ձևով արտահայտվում են (2) բազիսի վեկտորների գծային զուգակցության միջոցով [2,թ3].

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k \qquad (i = 1,2,\ldots,n): \tag{4}$$

C-ով նշանակենք L տարածության այն գծային օպերատորը, որը (2) բազիսի վեկտորներին համապատասխանեցնում է (3) բազիսի վեկտորները.

$$Ce_i = f_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n): \tag{5}$$

Դիտարկվող տարածության (2) բազիսում C օպերատորի մատրիցը ստանալու համար, (4) առնչությունների հաշվառումով, (5) հավասարությունները ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$Ce_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k \qquad (i = 1,2,\ldots,n): \tag{6}$$

Ինչպես գիտենք, ստացված հավասարությունները նշանակում են, որ (2) բազիսում C օպերատորի մատրիցն ունի [16,(11)-(13)]

$$C = \begin{pmatrix} c_{11}\, c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\, c_{n2} \cdots c_{nn} \end{pmatrix}$$

տեսքը:

Պարզ է, որ C-ն ոչ եզակի մատրից է [11,u13], որովհետև, եթե այդ մատրիցի որոշիչը հավասար լինի զրոյի, ապա այդ մատրիցի տողերի միջև գոյություն կունենա գծային կախվածություն [12,թ3], որտեղից էլ ակնհայտորեն կբխի, որ կատարված ենթադրության դեպքում գոյություն կունենա գծային կախվածություն նաև f_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ վեկտորների միջև՝ ինչը հնարավոր չէ, քանի որ նշված վեկտորները L տարածության մեջ կազմում են բազիս [2,u7]:

Վերոգրյալից և թեորեմ 1-ից հետևում է, որ C օպերատորի համար գոյություն ունի հակադարձ օպերատոր:

Այժմ A օպերատորի մատրիցները (2) և (3) բազիսներում համապատասխանաբար նշանակենք A-ով և B-ով և ենթադրենք, որ այդ մատրիցներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11}\ b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}\ b_{22}\cdots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\ b_{n2}\cdots b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7'}$$

այսինքն՝ ենթադրենք տեղի ունեն [16,(12),(13)]

$$Ae_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, \tag{8}$$

$$Af_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}f_k \quad (i=1,2,\ldots,n), \tag{9}$$

հավասարությունները:

(5) հավասարությունների շնորհիվ (9) հավասարություններից կստանանք

$$A(Ce_i)=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}Ce_k \quad (i=1,2,\ldots,n): \tag{9'}$$

Ստացված հավասարությունների երկու կողմերի վրա կիրառելով C օպերատորի հակադարձ օպերատորը՝ կունենանք [16,(8)]

$$C^{-1}[A(Ce_i)]=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}C^{-1}(Ce_k)=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}(C^{-1}C)e_k=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}\mathcal{E}e_k,$$

կամ [16,(4)]

$$(C^{-1}AC)e_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ki}e_k \quad (i=1,2,\ldots,n): \tag{10}$$

Ստացված հավասարություններից հետևում է, որ $C^{-1}AC$ օպերատորի մատրիցը (2) բազիսում համընկնում է B մատրիցի հետ.

$$B=C^{-1}AC: \tag{11}$$

Այսպիսով, եթե L գծային տարածության A գծային օպերատորի մատրիցը այդ տարածության (2) բազիսում նշանակենք A-ով, իսկ (2) բազիսից L տարածության (3) բազիսի անցման մատրիցը՝ C-ով, ապա A օպերատորի մատրիցը (3) բազիսում գտնելու համար անհրաժեշտ է AC մատրիցը ձախից բազմապատ-

կել C^{-1} *հակադարձ մատրիցով:*

Օրինակ 2: Դիցուք L երկչափ տարածության A գծային օպերատորի մատրիցն այդ տարածության e_1, e_2 բազիսում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

իսկ այդ տարածության f_1 և f_2 վեկտորները e_1 և e_2 բազիսային վեկտորների միջոցով արտահայտվում են

$$f_1 = 2e_1 + 5e_2, \quad f_2 = e_1 + 3e_2$$

հավասարությունների միջոցով:

Համոզվել, որ f_1, f_2 վեկտորների համակարգը դիտարկվող տարածության բազիս է և գտնել A օպերատորի մատրիցն այդ բազիսում:

Լուծում: Հետևելով տեսությանը՝ նախ կառուցենք դիտարկվող տարածության e_1, e_2 բազիսից այդ տարածության վեկտորների f_1, f_2 համակարգի անցման մատրիցը.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}:$$

Քանի որ ստացված մատրիցի որոշիչը հավասար չէ զրոյի, հետևաբար վեկտորների f_1, f_2 համակարգը նույնպես L տարածության բազիս է:

Այնուհետև գտնենք C մատրիցի հակադարձ մատրիցը [11,u14,o7]

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

և (11) բանաձևի օգնությամբ ստանանք որոնելի B մատրիցը [11,u12].

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 15 \\ -43 & -25 \end{pmatrix}:$$

Այժմ ներմուծենք գծային օպերատորի սեփական վեկտոր և սեփական արժեք հասկացությունները:

Սահմանում 2: *Եթե L գծային տարածության A գծային օպերատորն այդ տարածության x ոչ զրոյական վեկտորն արտապատկերում է այդ վեկտորին համեմատական λx վեկտորի.*

$$Ax = \lambda x, \tag{12}$$

*որտեղ λ-ն իրական թիվ է, ապա x վեկտորը կոչվում է A օպերատորի **սեփական վեկտոր**, իսկ λ-ն՝ այդ օպերատորի սեփական արժեք (ըստ որում, կասենք, որ A **օպերատորի** x սեփական վեկտորը համապատասխանում է այդ օպերատորի λ **սեփական** արժեքին):*

Քանի որ բերված սահմանման մեջ x-ը ոչ զրոյական վեկտոր է, հետևաբար

(12) հավասարությանը բավարարող λ թիվը այդ վեկտորի համար որոշվում է միարժեքորեն:*)

Նշենք նաև, որ զրոյական վեկտորը չի համարվում A օպերատորի սեփական վեկտոր, չնայած գծային օպերատորի առաջին հատկության շնորհիվ [16,I] այն բավարարում է (12) հավասարությանը (այն էլ λ-ի ցանկացած արժեքի համար):

L գծային տարածության A գծային օպերատորի սեփական արժեքները և այդ արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գտնելու համար ենթադրենք տրված տարածության (2) բազիսում հետևյալ վերլուծությունն ունեցող

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \tag{13}$$

x ոչ զրոյական վեկտորն A օպերատորի սեփական վեկտոր է, իսկ λ-ն՝ այդ վեկտորի համապատասխան սեփական արժեքը.

$$A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = \lambda(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n): \tag{14}$$

Հաշվի առնելով, որ A օպերատորի մատրիցը դիտարկվող տարածության (2) բազիսում ունի (7) տեսքը, և օգտվելով գծային օպերատորի երրորդ հատկությունից [16,III], (14) հավասարության ձախ մասի համար կունենանք

$$\begin{aligned} &A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_nAe_n = \\ &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n) + x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n) + \cdots \\ &\cdots + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n) \end{aligned}$$

կամ

$$\begin{aligned} &A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)e_2 + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)e_n: \end{aligned} \tag{15}$$

(14) և (15) հավասարություններից կստանանք

$$\begin{aligned} &[(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n]e_1 + [a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n]e_2 + \cdots \\ &\cdots + [a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n]e_n = 0: \end{aligned} \tag{16}$$

Նկատի ունենալով, որ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ վեկտորները գծորեն անկախ են [2,u4], (16) հավասարությունից կունենանք

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0: \end{cases} \tag{17}$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ L գծային տարածության (13) ոչ զրոյական վեկտորը այդ տարածության (2) բազիսում (7) մատրիցն ունեցող A գծային

*) Հակադարձ պնդումը հեշտությամբ ապացուցվում է հակասող ընդունելության եղանակով:

օպերատորի սեփական վեկտոր է, իսկ λ-ն՝ այդ վեկտորին համապատասխանող սեփական արժեք, x վեկտորի կոորդինատները գտնելու համար ստացանք գծային համասեռ հավասարումների (17) համակարգը:

Ինչպես գիտենք, որպեսզի n անհայտներով n գծային համասեռ հավասարումների (17) համակարգն ունենա ոչ զրոյական լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար լինի զրոյի [14,թ4].

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0: \qquad (18)$$

Ստացված հավասարության ձախ կողմում գրված է λ-ի նկատմամբ n-րդ աստիճանի բազմանդամ:

Կարելի է ցույց տալ, որ այդ բազմանդամի տեսքը կախված չէ դիտարկվող տարածության մեջ բազիսի ընտրությունից: Այդ պատճառով նշված բազմանդամը կոչվում է A օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամ, իսկ (18) հավասարումը՝ A օպերատորի բնութագրիչ հավասարում:

Լուծելով (18) հավասարումը՝ կգտնենք A օպերատորի սեփական արժեքները: Այնուհետև գտած սեփական արժեքները հաջորդաբար տեղադրելով հավասարումների (17) համակարգի մեջ և լուծելով ստացված համակարգերը՝ կստանանք A օպերատորի սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները:

Այսպիսով, L գծային տարածության A գծային օպերատորի յուրաքանչյուր սեփական արժեք, այդ օպերատորի բնութագրիչ հավասարման արմատ է:

Դժվար չէ համոզվել նաև, որ L գծային տարածության A գծային օպերատորի բնութագրիչ հավասարման յուրաքանչյուր արմատ այդ օպերատորի սեփական արժեք է:

Միավորելով վերոգրյալ երկու պնդումները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Որպեսզի λ-ն լինի L գծային տարածության A գծային օպերատորի սեփական արժեք, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի տրված օպերատորի բնութագրիչ հավասարման արմատ:*

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները՝ եզրակացնում ենք, որ L գծային տարածության A գծային օպերատորի սեփական արժեքները և այդ արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) կազմել A օպերատորի բնութագրիչ հավասարումը և լուծելով այն՝ գտնել դիտարկվող օպերատորի սեփական արժեքները,

բ) A օպերատորի սեփական արժեքները հաջորդաբար տեղադրել տրված օպերատորի համար կառուցած գծային համասեռ հավասարումների (17)

համակարգի մեջ և լուծելով հավասարումների ստացված համակարգը՝ գտնել A օպերատորի սեփական արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները:

Օրինակ 3: Գտնել L երկչափ գծային տարածության A գծային օպերատորի սեփական արժեքները և այդ արժեքներին համապատասխանող սեփական վեկտորները, եթե դիտարկվող տարածության e_1, e_2 բազիսում տրված օպերատորի մատրիցն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}:$$

Լուծում: Նախ, լուծելով տրված օպերատորի բնութագրիչ հավասարումը.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

գտնենք նրա սեփական արժեքները.

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3:$$

Այնուհետև դիտարկվող օպերատորի $\lambda_1 = -1$ սեփական արժեքը տեղադրելով գծային հավասարումների հետևյալ համակարգի մեջ՝

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0, \end{cases}$$

կունենանք

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0: \end{cases} \qquad (բ)$$

Լուծելով գծային հավասարումների (բ) համակարգը՝ (որն ըստ էության երկու անհայտով մեկ հավասարում է) կստանանք [14]

$$x_1 = -\alpha, \quad x_2 = \alpha,$$

որտեղ α-ն կամայական իրական թիվ է:

Այսպիսով, դիտարկվող օպերատորի $\lambda_1 = -1$ սեփական արժեքին համապատասխանում է $x = (-\alpha; \alpha)$ վեկտորը, որտեղ α-ն կամայական իրական թիվ է:

Կարող ենք նույն ձևով գտնել նաև տրված օպերատորի $\lambda_2 = 3$ սեփական արժեքին համապատասխանող սեփական վեկտորը.

$$x = (\beta; \beta),$$

որտեղ β-ն նույնպես կամայական իրական թիվ է:

Տպագրության եղանակը՝ ռիզոգրաֆիա:
Թուղթը՝ օֆսեթ, 80 գր:
Ծավալը՝ 11 տպագրական մամուլ:
Ստորագրված է տպագրության 05.12.2007 թ.:
Պատվեր թիվ 28: Տպաքանակը՝ 200 օրինակ:
Տպագրված է Երևանի ճարտարապետության և
շինարարության պետական համալսարանի
տպագրության և լրատվության կենտրոնի տպարանում:
Հասցե՝ Երևան, Տերյան 105: