ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ԵՐԵՎԱՆԻ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՇԻՆԱՐԱՐՈՒԹՅԱՆ
ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ռ. Ա. Բաղդասարյան

ԲԱՐՁՐԱԳՈՒՅՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

II մաս

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ
ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2008

ՀՏԴ 51(07) Տպագրվել է Երևանի ճարտարապետության և շինարարության
ԳՄԴ 22.11y⁷ պետական համալսարանի գիտական խորհրդի որոշմամբ:
Բ 242

Բ 242 Բարձրագույն մաթեմատիկա: Ուսումնական ձեռնարկ.-Մաս 2.-Եր.: Երևանի ճարտարապետության և շինարարության պետական համալսարան, 2008թ. 324էջ:

Գրախոսներ՝ ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս Վ. Ս. Զաքարյան
ֆ.-մ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ա. Խ. Խաչատրյան

Տեխնիկական բուհերի ուսանողների համար նախատեսված ուսումնական ձեռնարկը ներառում է մաթեմատիկայի այն բաժինների համառոտ շարադրանքը, որոնք վերջին տարիներին ընդգրկվել են ուսումնական ծրագրերում:

Ձեռնարկը հագեցված է մատուցվող տեսական նյութը լուսաբանող լուծված խնդիրներով:

Ձեռնարկը կարող է օգտակար լինել նաև ինժեներներին, ասպիրանտներին ու դասախոսներին:

ԳՄԴ 22.11y⁷

ISBN 978-99941-77-74-5

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԼՈՒԽ III

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

ԳԼՈՒԽ VIII

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

ԳԼՈՒԽ IX

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ X

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԳԼՈՒԽ III

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐՐԵՐԸ

§18. Տարրական տեղեկություններ բազմությունների տեսությունից: Սահմանափակ և ոչ սահմանափակ թվային բազմություններ: Թվային բազմությունների եզրերը: Թեորեմ թվային բազմության ճշգրիտ վերին (ստորին) եզրի գոյության մասին:

Մաթեմատիկայում հաճախ գործ ենք ունենում զանազան տարրերից կազմված բազմությունների հետ: Բազմության գաղափարը մաթեմատիկայի հիմնական հասկացություններից մեկն է: Բազմությունները հիմնականում կնշանակենք լատիներեն մեծատառերով, իսկ նրանց տարրերը՝ լատիներեն փոքրատառերով:

Այն փաստը, որ x -ը A բազմության տարր է, կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$x \in A,$$

իսկ որ y-ը այդ բազմության տարր չէ՝ հետևյալ կերպ՝

$$y \notin A:$$

Սահմանում 1: *A -ն կոչվում է վերջավոր բազմություն, եթե այն բաղկացած է վերջավոր թվով տարրերից: Հակառակ դեպքում A -ն կոչվում է անվերջ բազմություն:*

A վերջավոր բազմության տարրերի քանակը կնշանակենք $n(A)$-ով:

Սահմանում 2: *Ոչ մի տարր չունեցող բազմությանը կանվանենք դատարկ բազմություն և այն կնշանակենք ϕ պայմանանշանով:*

Սահմանում 3: *Կասենք, որ A բազմությունը B բազմության ենթաբազմություն է (կամ A -ն ընկած է B -ի մեջ), եթե A բազմության յուրաքանչյուր տարր պատկանում է նաև B բազմությանը:*

Այն փաստը, որ A -ն B -ի ենթաբազմություն է՝ կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$A \subseteq B:$$

Սահմանում 4: *Կասենք, որ A -ն $(A \neq \phi)$ B -ի իսկական ենթաբազմություն է, եթե այն B -ի ենթաբազմություն է և չի համընկնում նրա հետ:*

Այն փաստը, որ A-ն B-ի իսկական ենթաբազմություն է՝ կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$A \subset B:$$

Հասկանալի է, որ յուրաքանչյուր բազմություն պարունակում է իրեն, ինչպես նաև՝ դատարկ բազմությանը:

Սահմանում 5: *A և B բազմությունները կոչվում են հավասար, եթե այդ բազմությունները բաղկացած են միևնույն տարրերից:*

Այն փաստը, որ A և B բազմությունները հավասար են, կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$A = B:$$

Սահմանում 6: *A և B բազմությունների միավորումը մի բազմություն է, որը կազմված է այն և միայն այն տարրերից, որոնք պատկանում են A և B բազմություններից գոնե մեկին (Նկ.1):*

A և B բազմությունների միավորումը կնշանակենք $A \cup B$ պայմանանշանով:

Նկ.1

Սահմանում 7: *A և B բազմությունների հատումը մի բազմություն է, որը կազմված է այն և միայն այն տարրերից, որոնք պատկանում են և՛ A-ին, և՛ B-ին (Նկ.2ա):*

A և B բազմությունների հատումը կնշանակենք $A \cap B$ պայմանանշանով:

ա) բ)

Նկ.2

Սահմանում 8: *Կասենք, որ A և B բազմությունները չեն հատվում կամ՝ այդ բազմությունների հատումը դատարկ բազմություն է (Նկ.2բ), եթե նրանք չունեն ընդհանուր տարր:*

Սահմանում 9: *A և B բազմությունների տարբերությունը մի բազմություն է, որը կազմված է A-ի այն տարրերից (Նկ.3), որոնք չեն պատկանում B-ին:*

A և B բազմությունների տարբերությունը կնշանակենք $A \setminus B$ պայմանանշանով:

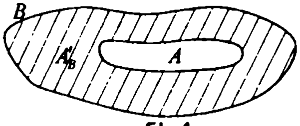
ա) բ)

Նկ.3

Նշենք, որ կամայական A բազմության համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$A \cup \phi = A,\ A \setminus \phi = A,\ A \cap \phi = \phi,\ \phi \setminus A = \phi: \qquad (1)$$

Սահմանում 10: *Եթե A բազմությունը B բազմության իսկական ենթաբազմություն է $(A \subset B, A \neq \phi)$, ապա $B \setminus A$ բազմությունը կոչվում է A բազմութ-*



Նկ.4

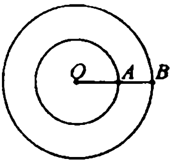
յան լրացում մինչև B բազմություն (Նկ.4):

A բազմության լրացումը մինչև B բազմություն կնշանակենք A'_B պայմանանշանով:

Սահմանում 11: *Երկու բազմություններ կոչվում են համարժեք, եթե նրանց տարրերի միջև հնարավոր է ստեղծել փոխմիարժեք համապատասխանություն. այսինքն, եթե հնարավոր է առաջին բազմության յուրաքանչյուր տարրի համապատասխանեցնել երկրորդի մեկ և միայն մեկ տարր, և երկրորդ բազմության յուրաքանչյուր տարրի համապատասխանեցնել առաջինի մեկ և միայն մեկ տարր:*

Այն փաստը, որ A և B բազմությունները համարժեք են, կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$A \sim B:$$



Նկ.5

Օրինակ 1: Եթե 5-րդ նկարում ցույց տրված ձևով համապատասխանություն ստեղծենք երկու համակենտրոն շրջանագծերի կետերի միջև, ապա ակնհայտորեն կունենանք այդ շրջանագծերի կետերի փոխմիարժեք համապատասխանություն:

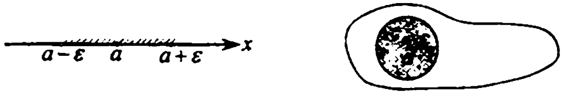
Հետևաբար, երկու համակենտրոն շրջանագծեր, իբրև կետային անվերջ բազմություններ, համարժեք են:

Սահմանում 12: *Կասենք, որ A և B բազմություններն ունեն նույն հզորությունը, եթե նրանք համարժեք են:*

Պարզ է, որ երկու վերջավոր բազմություններ համարժեք են այն և միայն այն ժամանակ, երբ ունեն նույնքան տարր:

Սահմանում 13: *Բնական թվերի[*] բազմությանը համարժեք բազմությունները կոչվում են հաշվելի բազմություններ:*

Սահմանում 14: *Ուղղի կամ հարթության վրա[**] a կետի ε $(\varepsilon > 0)$ շրջակայք ասելով կհասկանանք այն բոլոր կետերի բազմությունը (Նկ.6), որոնց հեռավորությունը a կետից փոքր է ε-ից:*



ա) բ)

Նկ. 6

a կետի ε շրջակայքը կնշանակենք $U(a,\varepsilon)$ պայմանանշանով, իսկ ε-ին կանվանենք $U(a,\varepsilon)$ շրջակայքի շառավիղ:

Սահմանում 15: *a կետը կոչվում է A բազմության հպման կետ, եթե այդ կետի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է A բազմության գոնե մեկ կետ:*

---

*) Տե՛ս 22-րդ սահմանումը:

**) Ինչպես նաև տարածության մեջ:

Սահմանում 16: *A բազմության բոլոր հպման կետերի բազմությունը կոչվում է այդ բազմության փակում:*

A բազմության փակումը կնշանակենք $[A]$ պայմանանշանով:

Սահմանում 17: *A-ն կոչվում է փակ բազմություն, եթե տեղի ունի*

$$A=[A]$$

հավասարությունը:

Սահմանում 18: *a կետը կոչվում է A բազմության սահմանային կամ խտացման կետ, եթե այդ կետի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է A բազմության, a-ից տարբեր գոնե մեկ կետ:*

Հասկանալի է, որ բազմության սահմանային կետը կարող է պատկանել, կարող է նաև չպատկանել այդ բազմությանը:

Սահմանում 19: *A բազմության a կետը կոչվում է այդ բազմության մեկուսացված կետ, եթե այն A բազմության սահմանային կետ չէ:*

Հեշտությամբ կարող ենք համոզվել, որ որպեսզի a-ն լինի A բազմության մեկուսացված կետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ունենա այնպիսի շրջակայք, որտեղ a-ից բացի A բազմության այլ կետ չլինի:

Սահմանում 20: *a-ն կոչվում է A բազմության ներքին կետ, եթե գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի ε շրջակայք, որն ամբողջությամբ ընկած է A բազմության մեջ:*

Սահմանում 21: *A-ն կոչվում է բաց բազմություն, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են:*

Այժմ ծանոթանանք թվային բազմությունների հետ:

Սահմանում 22: $1;2;3;\ldots$ *թվերի բազմությունը կոչվում է բնական թվերի բազմություն:*

Բնական թվերի բազմությունը նշանակելով N-ով՝ համաձայն սահմանման կունենանք

$$N=\{1;2;3;\ldots\}:$$

Սահմանում 23: *Բնական թվերի և նրանց հակադիր թվերի բազմությունը, զրոյի հետ մեկտեղ, կազմում են ամբողջ թվերի բազմությունը:*

Ամբողջ թվերի բազմությունը նշանակելով Z-ով՝ համաձայն սահմանման կունենանք

$$Z=\{0;\pm 1;\pm 2;\ldots\}:$$

Սահմանում 24: *p/q հարաբերության տեսքով ներկայացվող թվերը, որտեղ p-ն և q-ն ամբողջ թվեր են, ընդ որում q-ն հավասար չէ զրոյի, կոչվում են ռացիոնալ թվեր:*

Ռացիոնալ թվերի բազմությունը կնշանակենք Q-ով:

Սահմանում 25: *Այն թվերը, որոնք հնարավոր չէ ներկայացնել p/q հա-*

ռաքերության տեսքով, որտեղ p -ն և q -ն ամբողջ թվեր են $(q \neq 0)$, կոչվում են ոչ ռացիոնալ կամ իռացիոնալ թվեր:

Իռացիոնալ թվերի բազմությունը կնշանակենք I -ով:

Օրինակ 2: Կարելի է հեշտությամբ համոզվել, որ $\sqrt{2}$ -ը իռացիոնալ թիվ է:

Սահմանում 26: *Ռացիոնալ և իռացիոնալ թվերի բազմությունների միավորումը կոչվում է իրական թվերի բազմություն:*

Իրական թվերի բազմությունը նշանակելով R -ով՝ համաձայն սահմանման կունենանք

$$R = Q \cup I:$$

Սահմանում 27: *a թվի բացարձակ արժեքը մի ոչ բացասական թիվ է, որը նշանակվում է $|a|$ -ով և սահմանվում է հետևյալ կերպ՝*

$$|a| = \begin{cases} -a, \text{ եթե } a < 0, \\ a, \text{ եթե } a \geq 0: \end{cases} \quad (2)$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել հետևյալ պնդումների ճշմարտացիության մեջ՝

1°. *Վերջավոր թվով իրական թվերի գումարի բացարձակ արժեքը չի գերազանցում այդ թվերի բացարձակ արժեքների գումարը.*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|: \quad (3)$$

Մասնավոր դեպքում, ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (3')$$

անհավասարությունը:

2°. *a և b իրական թվերի տարբերության բացարձակ արժեքը փոքր չէ այդ թվերի (նշված հերթականությամբ) բացարձակ արժեքների տարբերությունից.*

$$|a - b| \geq |a| - |b|: \quad (4)$$

3°. *Մի քանի թվերի արտադրյալի բացարձակ արժեքը հավասար է այդ թվերի բացարձակ արժեքների արտադրյալին.*

$$|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1||a_2| \cdots |a_n|: \quad (5)$$

Մասնավոր դեպքում, ցանկացած a և b իրական թվերի համար տեղի ունի

$$|ab| = |a||b| \quad (|-a| = |a|) \quad (5')$$

հավասարությունը:

4°. *Քանորդի բացարձակ արժեքը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի բացարձակ արժեքների հարաբերությանը.*

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0): \quad (6)$$

Սահմանում 28: *Այն մեծությունը, որն ընդունում է իրարից տարբեր թվային արժեքներ, կոչվում է փոփոխական մեծություն կամ պարզապես՝ փոփոխական:*

Սահմանում 29: *Փոփոխական մեծության բոլոր արժեքների համախումբը կոչվում է այդ մեծության փոփոխման տիրույթ:*

Այժմ դիտարկենք կամայական անվերջ թվային բազմություն:

Սահմանում 30: *Կասենք, որ X թվային բազմությունը սահմանափակ է վերևից (ներքևից), եթե գոյություն ունի այնպիսի M (m) հաստատուն, որ X բազմության ցանկացած x-ի համար տեղի ունի $x \le M$ $(x \ge m)$ անհավասարությունը:*

Բերված սահմանմանը բավարարող M (m) թիվը կոչվում է X բազմության վերին (ստորին) եզր:

Սահմանում 31: Թվային բազմությունը կոչվում է սահմանափակ բազմություն, եթե այն սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից:

Ակնհայտ է, որ X բազմությունը կլինի սահմանափակ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունենա այնպիսի M դրական թիվ, որ X բազմության բոլոր x-երի համար տեղի ունենա

$$|x| \le M \tag{7}$$

անհավասարությունը:

Հասկանալի է, որ եթե M-ը X բազմության վերին եզր է, ապա M-ից մեծ ցանկացած թիվ նույնպես այդ բազմության վերին եզր է: Այսինքն, եթե թվային բազմությունն ունի վերջավոր վերին եզր, ապա այն ունի անթիվ բազմությամբ վերին եզրեր:

Նույն ձևով, եթե m-ը X բազմության ստորին եզր է, ապա m-ից փոքր ցանկացած թիվ նույնպես այդ բազմության ստորին եզր է: Այսինքն, եթե թվային բազմությունն ունի վերջավոր ստորին եզր, ապա այն ունի անթիվ բազմությամբ ստորին եզրեր:

Սահմանում 32: *X բազմության վերին եզրերից ամենափոքրը կոչվում է այդ բազմության ճշգրիտ վերին եզր և նշանակվում է M^*-ով կամ $\sup X$-ով (սուպրեմում), իսկ ստորին եզրերից ամենամեծը՝ ճշգրիտ ստորին եզր և նշանակվում է m^*-ով կամ $\inf X$-ով (ինֆիմում):*

Նշենք, որ X բազմության ճշգրիտ վերին եզրը լիովին բնութագրվում է հետևյալ երկու անհավասարություններով.*)

ա) $\forall x \in X$, $x \le M^*$ (քանի որ M^*-ը X բազմության վերին եզր է),

բ) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in X$, որ $x_1 > M^* - \varepsilon$ (քանի որ M^*-ը X բազմության ճշգրիտ վերին եզրն է):

---

*) $\forall x$ և $\exists m$ պայմանանշանները համապատասխանաբար կարդացվում են «ցանկացած x-ի համար» և «գոյություն ունի m»:

Նույն ձևով, X բազմության ճշգրիտ ստորին եզրը լիովին բնութագրվում է հետևյալ երկու անհավասարություններով՝

ա) $\forall x \in X$, $x \geq m^*$ (քանի որ m^*-ը X բազմության ստորին եզր է),

բ) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in X$, որ $x_\varepsilon < m^* + \varepsilon$ (քանի որ m^*-ը X բազմության ճշգրիտ ստորին եզրն է):

Պայմանավորվենք նաև, որ եթե X բազմությունը վերևից սահմանափակ չէ, ապա այդ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը պլյուս անսահմանությունն է:

Նույն ձևով, եթե X բազմությունը ներքևից սահմանափակ չէ, ապա այդ բազմության ճշգրիտ ստորին եզրը մինուս անսահմանությունն է:

Քանի որ սահմանափակ բազմությունն ակնհայտորեն ունի անթիվ բազմությամբ վերին եզրեր և անթիվ բազմությամբ ստորին եզրեր, ապա հարց է ծագում. արդյո՞ք վերևից (ներքևից) սահմանափակ բամությունն ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր:

Հարցն իմաստ ունի, քանի որ միշտ չէ, որ անվերջ թվային բազմությունն իր կազմում ունի մեծագույն կամ փոքրագույն թիվ:

Օրինակ 3: (0;1) թվային բազմությունն իր կազմում չունի ոչ ամենափոքր թիվ և ոչ էլ ամենամեծ թիվ: Մինչդեռ [0;1] բազմությունն ունի և՛ մեկը, և՛ մյուսը:

Պարզվում է, որ այնուամենայնիվ տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի՝

Թեորեմ 1: *Վերևից (ներքևից) սահմանափակ յուրաքանչյուր բազմություն ունի ճշգրիտ վերին (ստորին) եզր:*

Վերջում ծանոթանանք նաև հետևյալ սահմանումների հետ՝

Սահմանում 33: $a < x < b$ *անհավասարություններին բավարարող բոլոր x-երի բազմությունը կանվանենք a և b ծայրակետերով միջակայք և կնշանակենք (a,b) պայմանանշանով:*

Սահմանում 34: $a \leq x \leq b$ *անհավասարություններին բավարարող բոլոր x-երի բազմությունը կանվանենք a և b ծայրակետերով (փակ) միջակայք կամ հատված և կնշանակենք $[a,b]$ պայմանանշանով:*

Սահմանում 35: $a \leq x < b$ $(a < x \leq b)$ *անհավասարություններին բավարարող բոլոր x-երի բազմությունը կանվանենք a և b ծայրակետերով կիսաբաց (կամ կիսափակ) միջակայք և կնշանակենք $[a,b)$ $((a,b])$ պայմանանշանով:*

Հաճախ գործ կունենանք նաև $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$ կիսաանվերջ կամ անվերջ միջակայքերի հետ:

§19. Գաղափար թվային հաջորդականության մասին: Թվային հաջորդականության սահմանը: Սահմանափակ և ոչ սահմանափակ հաջորդականություններ: Սահման ունեցող հաջորդականության սահմանի միակությունը: Սահման ունեցող հաջորդականության սահմանափակությունը: Մասնակի հաջորդականություններ:

Մաթեմատիկայի հիմնական հասկացություններից մեկի՝ հաջորդականության հասկացության հետ ծանոթանալու համար, դիտարկենք աճման կարգով դասավորված բնական թվերի հետևյալ շարքը՝

$$1,2,\ldots,n,n+1,\ldots: \tag{1}$$

Եթե որևէ օրենքով (1) շարքի անդամները փոխարինենք իրական թվերով, ապա կստանանք մի նոր թվային շարք.

$$x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots, \tag{2}$$

որի անդամները դասավորված են այդ անդամների համարների աճման կարգով՝ ընդ որում համարակալմանը մասնակցում են բոլոր բնական թվերը:

Նկարագրված ձևով ստացված թվային շարքը կանվանենք թվային հաջորդականություն, իսկ x_n $(n=1,2,\ldots)$ թվերը՝ այդ հաջորդականության անդամներ:

x_n $(n=1,2,\ldots)$ թվերից կազմված հաջորդականությունը երբեմն կնշանակենք $\{x_n\}$ պայմանանշանով:

Օրինակ 1: Յանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի են հետևյալ հաջորդականությունները՝

ա) $a,\ a+d,\ a+2d,\ldots,a+(n-1)d,\ldots\quad (d-const)$,

բ) $b,\ bq,bq^2,\ldots,bq^{n-1},\ldots\quad (q=const)$,

որոնցից առաջինը, ինչպես գիտենք, կոչվում է թվաբանական պրոգրեսիա, իսկ երկրորդը՝ երկրաչափական պրոգրեսիա:

Այժմ ծանոթանանք (2) թվային հաջորդականության սահմանի հասկացության հետ:

Սահմանում 1: *a թիվը կոչվում է (2) հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ հենց $n\geq n_0$, տեղի ունի*

$$|x_n-a|<\varepsilon \tag{3}$$

անհավասարությունը:

Այն փաստը, որ a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է, կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \tag{4}$$

և կասենք, որ n-ը անվերջի ձգտելիս, $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է a-ի:

Նկատենք, որ թվային հաջորդականության սահմանի սահմանումը կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Սահմանում 2: *a թիվը կոչվում է (2) հաջորդականության սահման, եթե այդ հաջորդականության անդամները ցանկացած չափով մոտենում են a-ին (սկսած ինչ որ n_0 համարից):*

Նշենք, որ n_0 համարը, որպես կանոն, կախված է ε-ից և ε-ը փոքրացնելուն զուգընթաց այն ընդհանրապես ասած մեծանում է:

Չպետք է կարծել, որ բոլոր հաջորդականություններն ունեն սահման: Այդ կապակցությամբ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 3: *Սահման ունեցող հաջորդականությունը կոչվում է զուգամետ հաջորդականություն, իսկ սահման չունեցող հաջորդականությունը՝ տարամետ հաջորդականություն:*

Յասկանալի է, որ ընդհանուր դեպքում, հաջորդականության անդամները կարող են և համընկնել:

Օրինակ 2: Պարզել հետևյալ հաջորդականությունների զուգամիտության հարցը՝

ա) $\{x_n\}=1$, բ) $\{x_n\}=(-1)^n$, գ) $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$, դ) $\{x_n\}=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$:

Լուծում: ա) Քանի որ $a=1$ դեպքում ցանկացած n-ի և ցանկացած ε դրական թվի համար դիտարկվող հաջորդականության անդամները բավարարում են (3) անհավասարությանը, հետևաբար $\{x_n\}=1$ հաջորդականության սահմանը 1-ն է:

բ) Տրված հաջորդականությունը բաղկացած է միայն -1 և 1 արժեքներից և ակնհայտորեն տարամետ է:

Իրոք, եթե ենթադրենք, որ a-ն $\{x_n\}=(-1)^n$ հաջորդականության սահմանն է, ապա կգանք հակասության, քանի որ, օրինակ $\varepsilon=0{,}1$ արժեքի համար գոյություն չունի այնպիսի համար, որից սկսած այդ հաջորդականության բոլոր անդամները բավարարեն (3) անհավասարությանը:

գ) $\{x_n\}=\dfrac{1}{n}$ հաջորդականության սահմանը զրոն է, որովհետև ցանկացած ε դրական թվի և $1/\varepsilon$-ից մեծ բոլոր n-երի համար այդ հաջորդականության անդամները բավարարում են

$$|x_n-0|=|x_n|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

անհավասարությանը:

դ) Ինչպես և նախորդ հաջորդականության դեպքում, կարող ենք համոզվել, որ

$$\{x_n\}=\frac{1+(-1)^n}{n}$$

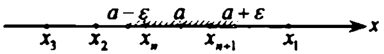
հաջորդականության սահմանը զրոն է:

Յաջորդականության սահմանը երկրաչափորեն մեկնաբանելու համար

(3) անհավասարությունը ներկայացնենք

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \qquad (3')$$

տեսքով և (2) հաջորդականության անդամներն ու a, $a\pm\varepsilon$ թվերը պատկերենք թվային առանցքի համապատասխան կետերով: Այդ դեպքում, եթե ենթադրենք, որ a-ն (2) հաջորդականության սահմանն է, ապա կստանանք, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի (3) անհավասարությունը: Ասվածը նշանակում է, որ եթե a-ն (2) հաջորդականության սահմանն է, ապա այդ կետի ինչպիսի շրջակայք էլ վերցնենք (Նկ.7), գոյություն կունենա այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տրված հաջորդականության բոլոր անդամները կընկնեն a կետի ε շրջակայքի մեջ:



Նկ. 7

Այժմ ծանոթանանք սահմանափակ և ոչ սահմանափակ հաջորդականությունների հետ:

Քանի որ (2) հաջորդականությունը թվային բազմություն է, հետևաբար նախորդ պարագրաֆի 30-րդ և 31-րդ սահմանումները տարածվում են նրա վրա:

Հետևաբար, $\{x_n\}$ հաջորդականությունը կլինի սահմանափակ այն և միայն այն ժամանակ, երբ գոյություն ունենա այնպիսի M դրական թիվ, որ այդ հաջորդականության բոլոր անդամների համար տեղի ունենա

$$|x_n|\le M \qquad (5)$$

անհավասարությունը:

Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե $\{x_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն չէ, ապա ինչպիսի M դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա այնպիսի n_0 համար, որ x_{n_0} անդամի համար տեղի կունենա

$$|x_{n_0}|>M \qquad (6)$$

անհավասարությունը:

Այնուհետև ապացուցենք հաջորդականություններին վերաբերող մի քանի կարևոր թեորեմներ:

Թեորեմ 1: *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը a-ն է և $a>b$, ապա գոյություն ունի համար, որից սկսած տրված հաջորդականության բոլոր անդամները մեծ են b-ից:*

Ապացույց: Դիցուք a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է և a-ն մեծ է b-ից:

Այդ դեպքում հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի (3) անհավասարությունը: Վերցնելով ε-ը փոքր $a-b$ տարբերությունից՝ կունենանք

$$b<a-\varepsilon: \qquad (7)$$

Վերջին անհավասարության հաշվառումով, նույն n-երի համար (3′) անհավասարություններից կստանանք

$$b<x_n:$$

Իսկ

Բնականաբար, ճիշտ նույն ձևով ապացուցվում է նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1′: *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը a թիվն է և $a<c$, ապա գոյություն ունի համար, որից սկսած հաջորդականության բոլոր անդամները փոքր են c-ից:*

Հետևանք 1: *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը դրական (բացասական) թիվ է, ապա գոյություն ունի համար, որից սկսած հաջորդականության բոլոր անդամները նույնպես դրական (բացասական) են:*

Ձևակերպած հետևանքն ապացուցելու համար բավական է թեորեմ 1-ում (թեորեմ 1′-ում) ընդունել $b=0$ $(c=0)$:

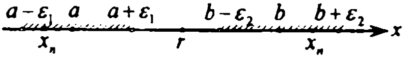
Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե հաջորդականությունն ունի սահման, ապա այդ սահմանը միակն է:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով:

Դիցուք $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի իրարից տարբեր a և b սահմաններ: Որոշակիության համար ենթադրենք $a<b$ և վերցնենք $a<r<b$ պայմանը բավարարող որևէ r թիվ: r թվի նման ընտրությունը հնարավոր է, որովհետև ցանկացած երկու իրական թվերի միջև գոյություն ունի երրորդ իրական թիվը*): Քանի որ a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է և $a<r$, ուստի, համաձայն թեորեմ 1-ի, գոյություն ունի այնպիսի n_1 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի $x_n<r$ անհավասարությունը (նկ.8):

Մյուս կողմից, քանի որ b-ն նույնպես դիտարկվող հաջորդականության սահմանն է, հետևաբար գոյություն ունի այնպիսի n_2 համար, որ այդ համարից էլ սկսած տեղի ունի $x_n>r$ անհավասարությունը:



Նկ. 8

Այժմ, եթե դիտարկենք $\{x_n\}$ հաջորդականության այն անդամները, որոնց համարները մեծ են $\max(n_1,n_2)$-ից, ապա կստանանք, որ այդ անդամները միաժամանակ և՛ մեծ են, և՛ փոքր r-ից, ինչն ակնհայտորեն հնարավոր չէ:

Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ կատարված ենթադրությունն

---

*) Կատարված պնդումից, որը կոչվում է իրական թվերի խտության հատկություն, ակնհայտորեն հետևում է, որ ցանկացած երկու իրական թվերի միջև գոյություն ունեն անթիվ բազմությամբ իրական թվեր:

այն մասին, որ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի իրարից տարբեր երկու սահման, սխալ է:

Այսպիսով, եթե հաջորդականությունն ունի սահման, ապա այն միակն է:

Իպա

Սահմանների տեսության մեջ կարևոր տեղ է զբաղեցնում նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Սահման ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունենն (3) անհավասարությունները: Ասվածից հետևում է, որ նշված անհավասարություններին կարող են չբավարարել դիտարկվող հաջորդականության միայն $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}$ անդամները: Հետևաբար, եթե

$$|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |a-\varepsilon|, |a+\varepsilon|$$

թվերից ամենամեծը նշանակենք M-ով, ապա արդեն ցանկացած n-ի համար կունենանք

$$|x_n| \le M,$$

ինչը նշանակում է, որ $\{x_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է:

Իպա

Հարց է ծագում. արդյո՞ք թեորեմ 3-ը կարելի է շրջել, այսինքն՝ հաջորդականության սահմանափակ լինելն արդյո՞ք բավարար է, որպեսզի այն ունենա սահման:

Պարզվում է՝ հարցի պատասխանը բացասական է, այսինքն՝ ոչ բոլոր սահմանափակ հաջորդականություններն ունեն սահման:

Օրինակ 3: $\{x_n\} = (-1)^n$ սահմանափակ հաջորդականությունը չունի սահման (տե՛ս օրինակ 2-ը):

Այժմ մեկ այլ հարց է ծագում. ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի (2) հաջորդականությունը, որպեսզի այն ունենա վերջավոր սահման:

Հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի՝

Թեորեմ 4: *(Բոլցանո-Կոշի) Որպեսզի $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի n_0 համար, որ հենց $n \ge n_0$ և $m \ge m_0$, տեղի ունենա*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

անհավասարությունը:

Բոլցանո-Կոշիի թեորեմը, որը կոչվում է զուգամիտության սկզբունք, կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Որպեսզի $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ n համարի աճմանը զուգընթաց այդ հաջորդականության անդամներն անսահմանափակորեն մոտենան միմյանց:

Անցնելով մասնակի հաջորդականությունների հետ ծանոթանալուն՝ $\{x_n\}$ հաջորդականության հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև այդ հաջորդականությունից որևէ օրենքով ընտրված

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \tag{9}$$

հաջորդականությունը:

Սահմանում 4: *$\{x_n\}$ հաջորդականության անդամներից կազմված (9) հաջորդականությունը, որտեղ $\{n_k\}$-ն աճող բնական թվերից կազմված հաջորդականություն է.*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

կոչվում է $\{x_n\}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն կամ՝ մասնակի հաջորդականություն:

Նկատենք, որ (9) հաջորդականության պարագայում, բոլոր բնական արժեքներն ընդունող համարի դերը կատարում է ոչ թե n-ը, այլ՝ k-ն:

Տարբեր եղանակներով ընտրելով $\{n_k\}$ ենթահաջորդականությունները՝ ընդհանուր դեպքում կստանանք (2) հաջորդականության զանազան մասնակի հաջորդականություններ:

Սահմանում 5: *$\{x_n\}$ հաջորդականության մասնակի հաջորդականության սահմանը կոչվում է այդ հաջորդականության մասնակի սահման:*

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել հետևյալ թեորեմի ճշմարտացիության մեջ՝

Թեորեմ 5: *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի սահման, ապա նրա բոլոր մասնակի հաջորդականություններն ունեն նույն սահմանը:*

Ըստ էության, թեորեմ 5-ը նշանակում է, որ զուգամետ հաջորդականության բոլոր մասնակի հաջորդականությունները նույնպես զուգամետ են:

Յասկանալի է, որ նույնը չի կարելի պնդել տարամետ հաջորդականությունների դեպքում:

Սակայն, պարզվում է, որ տարամետ հաջորդականությունը կարող է ունենալ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Օրինակ 4: Ինչպես գիտենք, $\{x_n\} = (-1)^n$ հաջորդականությունը տարամետ է: Սակայն, եթե n-ին ստիպենք ընդունել միայն զույգ արժեքներ, ապա դիտարկվող հաջորդականությունից կանջատենք $1; 1; 1; \ldots$ զուգամետ ենթահաջորդականությունը:

Վերջում ձևակերպենք նաև հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 6: *(Բոլցանո-Վեյերշտրաս) Յանկացած սահմանափակ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

§20. Սահմանային անցում անհավասարություններում: Անվերջ փոքր հաջորդականություններ և նրանց հիմնական հատկությունները: Անվերջ մեծ հաջորդականություններ, նրանց կապը անվերջ փոքր հաջորդականությունների հետ:

Ապացուցենք մի քանի թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս անհավասարությունների մեջ կատարել սահմանային անցում:

Թեորեմ 1: *Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության անդամները փոքր չեն $\{y_n\}$ հաջորդականության համապատասխան անդամներից.*

$$x_n \ge y_n \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{1}$$

և այդ հաջորդականություններից յուրաքանչյուրն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{2}$$

ապա (1) անհավասարություններում կարելի է կատարել սահմանային անցում.

$$\lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3}$$

կամ

$$a \ge b: \tag{3'}$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով:

Դիցուք համապատասխանաբար a և b վերջավոր սահմաններ ունեցող $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունների համապատասխան անդամները բավարարում են (1) անհավասարություններին և $a < b$:

Եթե a և b թվերի միջև վերցնենք որևէ r թիվ.*)

$$a < r < b,$$

ապա մի կողմից գոյություն կունենա այնպիսի n_1 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի կունենա $x_n < r$ անհավասարությունը [19,թ1], մյուս կողմից գոյություն կունենա այնպիսի n_2 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի կունենա $y_n > r$ անհավասարությունը [19,թ1]: Հասկանալի է, որ եթե վերցնենք n_1-ից և n_2-ից մեծ որևէ n_0 համար, ապա այդ համարից սկսած միաժամանակ տեղի կունենան

$$x_n < r \text{ և } y_n > r$$

անհավասարությունները, որտեղից էլ հետևում է, որ նշված համարից սկսած տեղի կունենան

$$x_n < y_n$$

---

*) Տես 17-րդ էջի տողատակի պնդումը:

անհավասարությունները՝ ինչը հակասում է թեորեմի (1) պայմանին: Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ $a<b$ ենթադրությունը սխալ է:

Այսպիսով, եթե վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունների համապատասխան անդամները ցանկացած n -ի համար բավարարում են (1) անհավասարություններին, ապա այդ անհավասարություններում կարելի է սահմանային անցում կատարել:

Իսպա

Դիտողություն 1: Պարզ է, որ եթե (1) անհավասարություններում $\geq$ նշանը փոխարինենք $\leq$ նշանով, ապա (3) անհավասարության մեջ էլ այդ նշանը կփոխարինվի $\leq$ նշանով: Իսկ եթե (1) անհավասարություններում $\geq$ նշանը փոխարինենք $>$ նշանով, ապա ընդհանրապես ասած, այդտեղից չի հետևի, որ (3) անհավասարության մեջ էլ $\geq$ նշանը կփոխարինվի $>$ նշանով: Պարզվում է, որ այդ դեպքում (3) անհավասարության նշանը կմնա նույնը:

Օրինակ 1: Դիտարկենք հետևյալ հաջորդականությունները՝

$$\{x_n\}=\frac{1}{n}, \qquad \{y_n\}=-\frac{1}{n}:$$

Չնայած ցանկացած n -ի համար դիտարկվող հաջորդականությունների համապատասխան անդամները բավարարում են

$$x_n=\frac{1}{n}>-\frac{1}{n}=y_n$$

անհավասարություններին, այդուհանդերձ տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$

հավասարությունը:

Կան հաջորդականություններ, որոնց սահմանը հաշվելիս հետևյալ թեորեմը կարող է օգտակար լինել՝

Թեորեմ 2: *(Միջանկյալ հաջորդականության սահմանի մասին):*

Եթե ցանկացած n -ի համար $\{x_n\},\{y_n\}$ և $\{z_n\}$ հաջորդականությունների համապատասխան անդամների համար տեղի ունեն

$$x_n\leq y_n\leq z_n \tag{4}$$

անհավասարությունները և $\{x_n\}$ ու $\{z_n\}$ հաջորդականությունները ունեն միևնույն a վերջավոր սահմանը.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}z_n=a, \tag{5}$$

ապա $\{y_n\}$ հաջորդակության սահմանն էլ a -ն է.

$$\lim_{n\to\infty}y_n=a:$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական ε

դրական թիվ:

Հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն [19,u1] (5) հավասարություններից հետևում է, որ վերցրած ε-ի համար գոյություն ունեն այնպիսի n_1 և n_2 համարներ, որ n_1-ից սկսած տեղի ունեն

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon \tag{6}$$

անհավասարությունները, իսկ n_2-ից սկսած՝

$$a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon \tag{7}$$

անհավասարությունները:

Այժմ, եթե վերցնենք n_1-ից և n_2-ից մեծ որևէ n_0 համար, ապա այդ համարից սկսած միաժամանակ տեղի կունենան (6) և (7) անհավասարությունները: Հետևաբար, (4) անհավասարությունների հաշվառումով այդ նույն n-երի համար կունենանք

$$a-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<a+\varepsilon:$$

Այսպիսով, կամայական ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունեն

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$|y_n-a|<\varepsilon$$

անհավասարությունները, ինչը նշանակում է, որ n-ը անսահմանության ձգտելիս a-ն $\{y_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Իպա

Թեորեմ 2-ից մասնավոր դեպքում կստանանք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2′: Եթե ցանկացած n-ի համար $\{y_n\}$ և $\{z_n\}$ հաջորդականությունների համապատասխան անդամների համար տեղի ունեն

$$a\le y_n\le z_n \quad (a=const) \tag{4′}$$

անհավասարությունները և $\{z_n\}$ հաջորդականության սահմանն a-ն է, ապա $\{y_n\}$ հաջորդականության սահմանը նույնպես a-ն է:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը պլյուս անսահմանությունն է (մինուս անսահմանությունն է), եթե ցանկացած E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ հենց $n\ge n_0$, տեղի ունի $x_n>E$ $(x_n<-E)$ անհավասարությունը:*

Սահմանների տեսության մեջ իրենց առանձնահատկություններով աչքի են ընկնում զրոյի ձգտող հաջորդականությունները:

Սահմանում 2: *Այն հաջորդականությունը, որի սահմանը զրոն է, կոչվում է անվերջ փոքր մեծություն (հաջորդականություն) կամ պարզապես՝ անվերջ* *փոքր:*

Հաջորդականության սահմանի սահմանման մեջ ընդունելով $a=0$, կստանանք

$$|x_n|<\varepsilon \quad (n\geq n_0): \tag{8}$$

Օգտվելով (8) անհավասարություններից՝ կարող ենք անվերջ փոքր մեծության սահմանումը վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Սահմանում 3: $\{x_n\}$ *հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փոքր մեծություն (հաջորդականություն) կամ պարզապես՝ անվերջ փոքր, եթե կամայական* ε *դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի* n_0 *համար, որ այդ համարից սկսած տրված հաջորդականության անդամները բացարձակ արժեքով դառնում և մնում են ավելի փոքր, քան* ε *-ը:*

Օրինակ 2: $\{x_n\}=\frac{1}{n}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է [19,o2], որովհետև ինչպիսի դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$|x_n|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

Իրոք, ակնհայտ է, որ ընտրված ε-ի դեպքում, որպես n_0 համար կարող ենք վերցնել $n>\frac{1}{\varepsilon}$ անհավասարությանը բավարարող ցանկացած ամբողջ թիվ:

Սահմանում 4: *Վերջավոր թվով հաջորդականությունների գումար (արտադրյալ) ասելով կհասկանանք այն հաջորդականությունը, որի անդամները հավասար են տրված հաջորդականությունների համապատասխան անդամների գումարին (արտադրյալին):*

Անվերջ փոքր մեծություններն օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

Թեորեմ 3: *Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի գումարը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Գրության պարզության համար սահմանափակվենք երկու անվերջ փոքրերի դեպքով:

Դիցուք $\{\alpha_n\}$-ը և $\{\beta_n\}$-ը անվերջ փոքրեր են, իսկ ε-ը՝ կամայական դրական թիվ:

Անվերջ փոքրի սահմանման համաձայն տրված ε-ի համար գոյություն ունեն այնպիսի n_1 և n_2 համարներ, որ այդ համարներից սկսած համապատասխանաբար տեղի ունեն

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ և } |\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

անհավասարությունները:

Այժմ, եթե n_1 և n_2 համարներից մեծը նշանակենք n_0-ով, ապա n_0 համարից սկսած կունենանք [18,(3')]

$$|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon:$$

Այսպիսով, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ $\{\alpha_n+\beta_n\}$ հաջորդակությունն անվերջ փոքր է:

Իսկա

Թեորեմ 4: *Եթե $\{x_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է, իսկ $\{\alpha_n\}$-ը՝ անվերջ փոքր, ապա $\{\alpha_n x_n\}$-ը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Ենթադրենք $\{x_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է: Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունը նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի M դրական թիվ, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$|x_n|\le M \tag{9}$$

անհավասարությունը [19,(5)]:

Ենթադրենք նաև $\{\alpha_n\}$-ը անվերջ փոքր հաջորդականություն է: Այդ դեպքում ինչպիսի ε դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի կունենա

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M} \tag{10}$$

անհավասարությունը:

Օգտվելով (9) և (10) անհավասարություններից՝ այդ նույն համարից սկսած կստանանք [18,(5')]

$$|\alpha_n x_n|=|\alpha_n||x_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon:$$

Այսպիսով, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$|\alpha_n x_n|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանանակում է, որ $\{\alpha_n x_n\}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Իսկա

Հետևանք 1: *Վերջավոր թվով անվերջ փոքրերի արտադրյալը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Գրության պարզության համար նորից դիտարկենք երկու անվերջ փոքրերի դեպքը:

Դիցուք $\{\alpha_n\}$-ը և $\{\beta_n\}$-ը անվերջ փոքրեր են.

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0:$$

Քանի որ սահման ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է [19,թ3], հետևաբար $\{\alpha_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է:

Այսպիսով $\{\alpha_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է, իսկ $\{\beta_n\}$-ը՝ անվերջ փոքր:

Համաձայն նախորդ թեորեմի, կատարված եզրակացությունից հետևում է, որ $\{\alpha_n\beta_n\}$-ը անվերջ փոքր է:

Իպա

Հետևանք 2: *Անվերջ փոքրի և հաստատունի արտադրյալը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Քանի որ $c=0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է, ուստի ենթադրենք c-ն զրոյից տարբեր որևէ հաստատուն է, իսկ $\{\alpha_n\}$-ը՝ անվերջ փոքր:

Այդ դեպքում, անվերջ փոքրի սահմանման համաձայն ինչպիսի ε դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա այնպիսի n_ε համար, որ այդ համարից սկսած տեղի կունենա

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

անհավասարությունը: Պարզ է, որ այդ նույն n-երի համար տեղի կունենա նաև

$$|c\alpha_n| = |c||\alpha_n| < |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ $\{c\alpha_n\}$ $(c = const)$ հաջորդակությունն անվերջ փոքր է:

Իպա

Նույն դատողություններով կարելի է համոզվել նաև հետևյալ պնդման ճշմարտացիության մեջ՝

Հետևանք 3: *Եթե $\{\alpha_n\}$-ը անվերջ փոքր է, իսկ $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի զրոյից տարբեր վերջավոր սահման, ապա $\{\alpha_n/x_n\}$-ը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ծանոթանալով անվերջ փոքր հաջորդականությունների հատկություններին՝ այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Որպեսզի a հաստատունը լինի $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\alpha_n = x_n - a \quad (n=1,2,\ldots) \tag{11}$$

հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր:

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a:$$

Այդ դեպքում, հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ $\{\alpha_n\}$-ը անվերջ փոքր է:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք (11)-ը անվերջ փոքր մեծություն է:

Անվերջ փոքր մեծության սահմանման համաձայն, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ a-ն $\{\alpha_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Ինչ

Այսպիսով, եթե a հաստատունը $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է, ապա այդ հաջորդականությունը կարելի է ներկայացնել նշված հաստատունի և անվերջ փոքր մեծության գումարի տեսքով.

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n=1,2,\ldots) \tag{11'}$$

և հակառակը՝ եթե տեղի ունի $\{x_n\}$ հաջորդականության (11) ներկայացումը, որտեղ $\{\alpha_n\}$-ը անվերջ փոքր մեծություն է, ապա a-ն տրված հաջորդականության սահմանն է:

Ստացված եզրակացությունը կարելի է ձևակերպել հետևյալ թեորեմի տեսքով՝

Թեորեմ 5′: *Որպեսզի a հաստատունը լինի $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա տրված հաջորդականության (11) ներկայացումը, որտեղ $\{\alpha_n\}$-ը անվերջ փոքր մեծություն է:*

Անվերջ փոքր մեծությանն ինչ որ իմաստով հակադրվում է անվերջ մեծ մեծությունը:

Սահմանում 5: $\{x_n\}$ *հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ մեծություն (հաջորդականություն) կամ պարզապես՝ անվերջ մեծ, եթե կամայական M դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տրված հաջորդականության անդամները բացարձակ արժեքով դառնում և մնում են ավելի մեծ, քան M -ը:*

Օրինակ 3: $\{x_n\} = -n$ հաջորդականությունն անվերջ մեծ է, որովհետև ինչպիսի M դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի [18,(5′)].

$$|x_n| = |-n| = n > M$$

անհավասարությունը:

Իրոք, ակնհայտ է, որ ընտրված M -ի դեպքում, որպես n_0 համար կարող ենք վերցնել $n > M$ անհավասարությանը բավարարող ցանկացած ամբողջ թիվ:

Հետևյալ թեորեմը ցույց է տալիս, որ անվերջ փոքր և անվերջ մեծ հաջորդականությունների միջև գոյություն ունի սերտ կապ՝

Թեորեմ 6: *Եթե $\{x_n\}$ -ը անվերջ մեծ հաջորդականություն է, ապա $\{\alpha_n\} = \{1/x_n\}$ -ը անվերջ փոքր հաջորդականություն է:*

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$-ը անվերջ մեծ հաջորդականություն է, իսկ ε -ը՝ կամայական դրական թիվ:

Այդ դեպքում, անվերջ մեծ հաջորդականության սահմանման համաձայն $M = 1/\varepsilon$ դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ այդ համարից սկսած տեղի ունի $|x_n| > 1/\varepsilon$ անհավասարությունը:

Ակնհայտ է, որ այդ նույն n -երի համար տեղի ունեն նաև

$$|\alpha_n| = \left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

անհավասարությունները, ինչը նշանակում է, որ $\{\alpha_n\} = \{1/x_n\}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է:

Իպա

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարող ենք ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 6՛: *Եթե $\{x_n\}$-ը զրո արժեքը չընդունող անվերջ փոքր հաջորդականություն է, ապա $\{\alpha_n\}=\{1/x_n\}$-ը անվերջ մեծ հաջորդականություն է:*

§21. Վերջավոր թվով հաջորդականությունների գումարի (տարբերության) և արտադրյալի սահմանները: Երկու զուգամետ հաջորդականությունների քանորդի սահմանը: Մոնոտոն հաջորդականություններ: e թիվը: Բնական լոգարիթմներ:

Այժմ ապացուցենք մի քանի թեորեմներ, որոնք էապես հեշտացնում են զանազան հաջորդականությունների սահմանների հաշվումը:

Թեորեմ 1: *Եթե $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b վերջավոր սահմաններ.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b, \tag{1}$$

ապա նրանց գումարը (տարբերությունը) նույնպես ունի վերջավոր սահման, ընդ որում տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b, \quad [\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b] \tag{2}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b վերջավոր սահմաններ:

Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, դիտարկվող հաջորդականությունները կարող ենք ներկայացնել

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3}$$

տեսքով [20,թ5], որտեղ $\{\alpha_n\}$-ը և $\{\beta_n\}$-ը անվերջ փոքր մեծություններ են:

Անդամ առ անդամ գումարելով (3) հավասարությունները՝ կստանանք [20,u4]

$$x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n \quad (n = 1,2,\ldots): \tag{4}$$

Քանի որ $\{\alpha_n + \beta_n\}$ հաջորդականությունն անվերջ փոքր է [20,թ3], հետևաբար $(a+b)$-ն $\{x_n + y_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Յասկանալի է, որ նույն ձևով ապացուցվում է նաև (2) հավասարություններից երկրորդը:

Իպա

Նկատենք, որ (1) հավասարությունների շնորհիվ կարող ենք (2) հավասարությունները ներկայացնել

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n \tag{2'}$$

տեսքով:

Այսպիսով, թեորեմ 1-ը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 1՛: *Երկու զուգամետ հաջորդականությունների գումարի (տարբերության) սահմանը հավասար է այդ հաջորդականությունների սահմանների գումարին (տարբերությանը):*

Նշենք, որ թեորեմ 1-ը (հետևաբար նաև թեորեմ 1′-ը) ճիշտ է նաև ցանկացած վերջավոր թվով հաջորդականությունների համար:

Թեորեմ 2: *Եթե $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b վերջավոր սահմաններ, ապա նրանց արտադրյալը նույնպես ունի վերջավոր սահման, ընդ որում տեղի ունի*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab: \tag{5}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Ենթադրելով, որ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b վերջավոր սահմաններ և օգտվելով (3) հավասարություններից՝ կստանանք

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n) \quad (n = 1,2,\ldots): \tag{6}$$

Քանի որ (6) հավասարության փակագծերի ներսի գումարը անվերջ փոքր է [20,թ3,Դ1,Դ2], հետևաբար ab-ն $\{x_n y_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Իպա

Նկատենք, որ (1) հավասարությունների շնորհիվ կարող ենք (5) հավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \tag{5′}$$

տեսքով:

Այսպիսով թեորեմ 2-ը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 2′: *Երկու զուգամետ հաջորդականությունների արտադրյալի սահմանը հավասար է այդ հաջորդականությունների սահմանների արտադրյալին:*

Նկատի ունենալով, որ հաստատունի սահմանը հավասար է իրեն, թեորեմ 2′-ից կստանանք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2″: *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել սահմանի նշանի տակից.*

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n \quad (c = const): \tag{5″}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ թեորեմ 2-ը (հետևաբար նաև թեորեմ 2′-ը) ճիշտ է նաև ցանկացած վերջավոր թվով հաջորդականությունների համար:

Սահմանում 1: $\{x_n\}$ *և* $\{y_n\}$ $(y_n \neq 0, n = 1,2,\ldots)$ *հաջորդականությունների քանորդ ասելով կհասկանանք այն հաջորդականությունը, որի անդամները հավասար են տրված հաջորդականությունների համապատասխան անդամների քանորդին:*

Թեորեմ 3: *Եթե $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b $(b \neq 0)$ վերջավոր սահմաններ, ապա նրանց քանորդը նույնպես ունի վերջավոր սահման, ընդ որում տեղի ունի*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} \tag{7}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները համապատասխանաբար ունեն a և b $(b>0)$ վերջավոր սահմաններ:*)

Քանի որ $\{y_n\}$ հաջորդականության սահմանը դրական է, հետևաբար գոյություն ունի համար, որից սկսած դրական են նաև այդ հաջորդականության անդամները [19,Դ1], որտեղից էլ հետևում է, որ նշված համարից սկսած x_n/y_n կոտորակներն իմաստ ունեն:

Այնուհետև օգտվելով (3) հավասարություններից և սահմանափակվելով n-ի նշված համարներով՝ կունենանք

$$\frac{x_n}{y_n}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}=\frac{a}{b}+\left[\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}\right]=\frac{a}{b}+\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, ներկայացված կոտորակներից վերջինի համարիչը անվերջ փոքր է, իսկ հայտարարն ունի զրոյից տարբեր վերջավոր սահման:

Հետևաբար, այդ կոտորակն անվերջ փոքր մեծություն է [20,Դ3], որտեղից էլ հետևում է [20,թ5], որ a/b կոտորակը $\{x_n/y_n\}$ հաջորդականության սահմանն է:

Իպա

Նկատենք, որ (1) հավասարությունների շնորհիվ կարող ենք (7) հավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\qquad\left(\lim_{n\to\infty}y_n\neq 0\right)\tag{7'}$$

տեսքով:

Այսպիսով, թեորեմ 3-ը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 3': *$\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ զուգամետ հաջորդականությունների* $(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0)$ *քանորդի սահմանը հավասար է այդ հաջորդականությունների սահմանների քանորդին:*

Ամփոփելով այս պարագրաֆում բերված արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ կարող ենք հեշտությամբ հաշվել

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n),\quad \lim_{n\to\infty}(x_n y_n),\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)\tag{8}$$

սահմանները, եթե $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականություններն ունեն վերջավոր սահմաններ և (8) սահմաններից վերջինի դեպքում $\{y_n\}$ հաջորդականության սահմանը տարբեր է զրոյից.

Սակայն ավելի հաճախ անհրաժեշտ է լինում հաշվել (8) տեսքի այնպիսի սահմաններ, երբ նշված հաջորդականություններից մեկի կամ երկուսի սահ-

---

*) Ենթադրելով, որ b-ն դրական թիվ է, մենք ապացույցի ընդհանրությունը չենք խախտում:

մանները հավասար են պլյուս կամ մինուս անսահմանության, իսկ եթե խոսքը գնում է (8) սահմաններից երրորդի մասին, ապա $\{y_n\}$ հաջորդականության սահմանը հավասար է զրոյի:

Առանձին-առանձին քննարկենք առավել կարևոր հետևյալ դեպքերը՝

I. *Ենթադրենք $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0 \tag{9}$$

և դիտարկենք $\{x_n/y_n\}$ հաջորդականությունը:

Յասկանալի է, որ միայն (9) հավասարություններն ունենալը բավարար չէ մեզ հետաքրքրող քանորդի սահմանի մասին որոշակի եզրակացություն անելու համար, քանի որ այդ սահմանը ակնհայտորեն կախված է $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունների զրոյի ձգտելու արագությունից:

Յամառոտ շարադրանքով ներկայացված հետևյալ օրինակը լուսաբանում է ասվածը՝

Օրինակ 1:

ա) $\{x_n\} = \dfrac{1}{n^2}$, $\{y_n\} = \dfrac{1}{n}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{1}{n}$, $\left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\} = n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty:$$

բ) $\{x_n\} = \dfrac{a}{n}$ $(a = const)$, $\{y_n\} = \dfrac{1}{n}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = a$:

գ) $\{x_n\} = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $\{y_n\} = \dfrac{1}{n}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\} = (-1)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n :$$

Ինչպես գիտենք, վերջին սահմանը գոյություն չունի [19.o2]:

Դիտարկված օրինակից երևում է, որ $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ դեպքում $\{x_n/y_n\}$ քանորդն իրենից ներկայացնում է, այսպես կոչված, 0/0 տեսքի անորոշություն:

II. *Ենթադրենք $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ հաջորդականությունները միաժամանակ ձգտում են պլյուս կամ մինուս անսահմանության.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty,\quad \lim_{n\to\infty} y_n = \pm\infty \tag{10}$$

և նորից դիտարկենք $\{x_n/y_n\}$ հաջորդականությունը:

Յամոզվելու համար, որ դիտարկվող դեպքում էլ գործ ունենք անորոշության հետ՝ դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

Օրինակ 2:

ա) $\{x_n\}=n,\quad \{y_n\}=n^2,\quad \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=\dfrac{1}{n},\quad \left\{\dfrac{y_n}{x_n}\right\}=n,$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}n=+\infty:$$

բ) $\{x_n\}=an\quad (a>0),\quad \{y_n\}=n,\quad \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=a,$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}(an)=a\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}a=a:$$

գ) $\{x_n\}=n[3+(-1)^n],\quad \{y_n\}=n,\quad \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}=3+(-1)^n,$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\{n[3+(-1)^n]\}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}[3+(-1)^n]:$$

Ինչպես գիտենք, վերջին սահմանը գոյություն չունի:

Դիտարկված օրինակից երևում է, որ $x_n\to\pm\infty$, $y_n\to\pm\infty$ դեպքերում $\{x_n/y_n\}$ քանորդն իրենից ներկայացնում է, այսպես կոչված, ∞/∞ տեսքի անորոշություն:

III. *Ենթադրենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է զրոյի, իսկ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը՝ պլյուս կամ մինուս անսահմանության.*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0,\qquad \lim_{n\to\infty}y_n=\pm\infty \tag{11}$$

և դիտարկենք $\{x_ny_n\}$ հաջորդականությունը:

Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ քննարկվող դեպքում գործ ունենք նոր տեսակի անորոշության հետ՝

Օրինակ 3:

ա) $\{x_n\}=\dfrac{1}{n^2},\quad \{y_n\}=n,\quad \{x_ny_n\}=\dfrac{1}{n},$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0:$$

բ) $\{x_n\}=\dfrac{1}{n},\quad \{y_n\}=n^2,\quad \{x_ny_n\}=n,$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}n=+\infty:$$

գ) $\{x_n\}=\dfrac{(-1)^n}{n},\quad \{y_n\}=n,\quad \{x_ny_n\}=(-1)^n,$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n,$$

դ) $\{x_n\} = \frac{a}{n}$ $(a \neq 0)$, $\{y_n\} = n$, $\{x_n y_n\} = a$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} a = a:$$

Դիտարկված օրինակից երևում է, որ $x_n \to 0$, $y_n \to \pm\infty$ դեպքերում $\{x_n y_n\}$ արտադրյալն իրենից ներկայացնում է, այսպես կոչված, $0 \cdot \infty$ տեսքի անորոշություն:

IV. *Ենթադրենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը ձգտում է պլյուս անսահմանության, իսկ $\{y_n\}$ հաջորդականությունը՝ մինուս անսահմանության.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty \tag{12}$$

և դիտարկենք $\{x_n + y_n\}$ հաջորդականությունը:

Քննարկվող դեպքում ստացվող անորոշության տեսակի հետ ծանոթանալու համար դիտարկենք հետևյալ օրինակը՝

Օրինակ 4:

ա) $\{x_n\} = 2n$, $\{y_n\} = -n$, $\{x_n + y_n\} = n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2\lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\lim_{n\to\infty} n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty:$$

բ) $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = -2n$, $\{x_n + y_n\} = -n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -2\lim_{n\to\infty} n = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -\lim_{n\to\infty} n = -\infty:$$

գ) $\{x_n\} = n + a$, $\{y_n\} = -n$, $\{x_n + y_n\} = a$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (n + a) = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\lim_{n\to\infty} n = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} a = a:$$

դ) $\{x_n\} = n + (-1)^n$, $\{y_n\} = -n$, $\{x_n + y_n\} = (-1)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} [n + (-1)^n] = +\infty, \lim_{n\to\infty} y_n = -\lim_{n\to\infty} n = -\infty, \lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n:$$

Դիտարկված օրինակից երևում է, որ $x_n \to 0$, $y_n \to \pm\infty$ դեպքում $\{x_n y_n\}$ գումարն իրենից ներկայացնում է, այսպես կոչված, $\infty - \infty$ տեսքի անորոշություն:

Պարզունակ օրինակների վրա ծանոթանալով

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty \tag{13}$$

տեսքի անորոշությունների հետ՝ այժմ ծանոթանանք նշված տեսքի «անորոշությունների բացման» ավելի հետաքրքիր խնդիրների հետ:

Օրինակ 5: Հաշվել

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k \quad (k \in N) \tag{ա}$$

բազմանդամի սահմանը, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության:

Լուծում: Պարզ է, որ եթե դիտարկվող բազմանդամի բոլոր գործակիցները դրական են (բացասական են), ապա այդ բազմանդամի սահմանը հավասար է պլյուս (մինուս) անսահմանության: Իսկ եթե $p(n)$ բազմանդամի գործակիցների մի մասը (խոսքը a_k-ի մասին չէ) դրական է, իսկ մյուս մասը՝ բացասական, ապա n-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս դրական գործակիցներով գումարելիները ձգտում են պլյուս անսահմանության, իսկ բացասական գործակիցներով գումարելիները՝ մինուս անսահմանության, ինչը նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում գործ ունենք $\infty-\infty$ տեսքի անորոշության հետ: Նշված անորոշությունը պարզելու համար (ա) բազմանդամը ներկայացնենք

$$p(n)=n^k\left(a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{a_k}{n^k}\right):$$

տեսքով:

Քանի որ փակագծերի մեջ գրված գումարը, n-ը անսահմանության ձգտելիս, ակնհայտորեն ձգտում է a_0-ի, իսկ n^k-ը՝ պլյուս անսահմանության, հետևաբար տրված բազմանդամը ձգտում է պլյուս կամ մինուս անսահմանության, կախված նրանից դրակա՞ն է $p(n)$ բազմանդամի ավագ անդամի գործակիցը, թե՝ բացասական:

Այսպիսով, (ա) բազմանդամի սահմանի համար վերջնականապես ստանում ենք

$$\lim_{n\to\infty}p(n)=\lim_{n\to\infty}\left(a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k\right)=\begin{cases}+\infty, \text{ եթե } a_0>0,\\ -\infty, \text{ եթե } a_0<0:\end{cases} \tag{բ}$$

Օրինակ 6: Հաշվել

$$\frac{p(n)}{q(n)}=\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}\quad (k,l\in N) \tag{գ}$$

քանորդի սահմանը, երբ n-ը ձգտում է անսահմանության:

Լուծում: Տրված քանորդը ներկայացնելով

$$\frac{p(n)}{q(n)}=\frac{n^k}{n^l}\cdot\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_k}{n^k}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_l}{n^l}}, \tag{դ}$$

տեսքով և նկատելով, որ n-ը անսահմանության ձգտելիս, (դ) արտահայտության երկրորդ արտադրիչը ձգտում է a_0/b_0-ի՝ դիտարկվող քանորդի սահմանի համար կունենանք

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}0, & \text{եթե } k<l,\\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{եթե } k=l,\\ +\infty, & \text{եթե } k>l \text{ և } \frac{a_0}{b_0}>0,\\ -\infty, & \text{եթե } k>l \text{ և } \frac{a_0}{b_0}<0:\end{cases} \tag{ե}$$

Դիտարկենք նաև իռացիոնալ արտահայտություններ պարունակող հաջորդականություն:

Օրինակ 7: Յաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right):$$

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}:$$

Այժմ անցնենք մոնոտոն հաջորդականությունների ուսումնասիրությանը:

Սահմանում 2: $\{x_n\}$ *-ը կոչվում է մոնոտոն աճող հաջորդականություն, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ (սկսած երկրորդից) մեծ է իր նախորդ անդամից.*

$$x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots: \tag{14}$$

Այլ խոսքով՝ $\{x_n\}$ -ը կոչվում է մոնոտոն աճող հաջորդականություն, եթե $n>k$ անհավասարությունից հետևում է $x_n>x_k$ անհավասարությունը:

Սահմանում 3: $\{x_n\}$ *-ը կոչվում է չնվազող հաջորդականություն, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ (սկսած երկրորդից) փոքր չէ իր նախորդ անդամից.*

$$x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le\cdots \tag{14'}$$

Այլ խոսքով՝ $\{x_n\}$ -ը կոչվում է չնվազող հաջորդականություն, եթե $n>k$ անհավասարությունից հետևում է $x_n\ge x_k$ անհավասարությունը:

Սահմանում 4: $\{x_n\}$ *-ը կոչվում է մոնոտոն նվազող հաջորդականություն, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ (սկսած երկրորդից) փոքր է իր նախորդ անդամից.*

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots: \tag{15}$$

Այլ խոսքով՝ $\{x_n\}$ -ը կոչվում է մոնոտոն նվազող հաջորդականություն, եթե $n>k$ անհավասարությունից հետևում է $x_n<x_k$ անհավասարությունը:

Սահմանում 5: $\{x_n\}$ *-ը կոչվում է չաճող հաջորդականություն, եթե նրա յուրաքանչյուր անդամ (սկսած երկրորդից) մեծ չէ իր նախորդ անդամից.*

$$x_1\ge x_2\ge\cdots\ge x_n\ge\cdots: \tag{15'}$$

Այլ խոսքով՝ $\{x_n\}$ -ը կոչվում է չաճող հաջորդականություն, եթե $n>k$ անհավասարությունից հետևում է $x_n\le x_k$ անհավասարությունը:

Մոնոտոն հաջորդականությունների վերաբերյալ տեղի ունի հետևյալ հիմնական թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *Եթե մոնոտոն աճող (չնվազող) հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, ապա այն անհրաժեշտաբար ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այդ հաջորդականության սահմանը պլյուս անսահմանությունն է:*

Ապացույց: Դիցուք $\{x_n\}$ մոնոտոն աճող հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է: Ինչպես գիտենք, վերևից սահմանափակ բազմությունն ունի ճշգրիտ վերին եզր **[18,թ1]**: $\{x_n\}$ թվային բազմության ճշգրիտ վերին եզրը նշանակենք a-ով և ցույց տանք, որ a-ն դիտարկվող հաջորդականության սահմանն է:

Համաձայն թվային բազմության ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման **[18,ս32]**՝ նախ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի

$$x_n \le a \tag{16}$$

անհավասարությունը, այնուհետև ինչպիսի ε դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունի այնպիսի n_0 համար, որ տեղի ունի նաև

$$a-\varepsilon < x_{n_0}$$

անհավասարությունը: Քանի որ $\{x_n\}$-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է, ուստի n_0-ից մեծ n-երի համար առավել ևս տեղի ունի

$$a-\varepsilon < x_n$$

կամ որ նույնն է՝

$$-\varepsilon < x_n - a \tag{17}$$

անհավասարությունը:

Մյուս կողմից (16) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$x_n - a \le 0 < \varepsilon: \tag{18}$$

Միավորելով (17) և (18) անհավասարությունները՝ կստանանք, որ n_0-ից մեծ n-երի համար տեղի ունի

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը նշանակում է, որ a-ն $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանն է **[19,ս1]**:

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցելու համար, ենթադրենք $\{x_n\}$ հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ: Այդ դեպքում ինչքան էլ մեծ M դրական թիվ վերցնենք, գոյություն ունի այնպիսի n_1 համար, որ $x_{n_1} > M$: Քանի որ $\{x_n\}$-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է, ուստի այդ n_1-ից մեծ n-երի համար առավել ևս տեղի ունի $x_n > M$ անհավասարությունը, ինչը նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում $\{x_n\}$ հաջորդականության սահմանը պլյուս անսահմանությունն է **[20,ս1]**.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty:$$

Իսկ

Յասկանալի է, որ կարող ենք նույն ձևով ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 4′: *Եթե մոնոտոն նվազող (չաճող) հաջորդականությունը ներքևից սահմանափակ է, ապա այն անհրաժեշտաբար ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այդ հաջորդականության սահմանը մինուս անսահմանությունն է:**)

Օրինակ 8: Ցույց տալ, որ

$$x_n = \frac{c^n}{n!} \qquad (c > 0;\ c = const;\ n = 1,2,\ldots) \tag{գ}$$

հաջորդականությունը զուգամետ է և հաշվել նրա սահմանը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ տրված հաջորդականության $(n+1)$-րդ անդամն արտահայտենք նրա n-րդ անդամի միջոցով.

$$x_{n+1} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{c^n}{n!}\cdot\frac{c}{n+1} = x_n\frac{c}{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots): \tag{է}$$

Այնուհետև նկատենք, որ հենց որ $(n+1)$-ը աճելով դառնա c-ից մեծ՝ դիտարկվող հաջորդականությունը կսկսի նվազել:

Մյուս կողմից, քանի որ (գ) հաջորդականության անդամները դրական են, ուստի այն ներքևից սահմանափակ է և համաձայն թեորեմ 4′-ի՝ ունի վերջավոր սահման: Նշանակելով այդ սահմանը a-ով և (է) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անվերջի, կունենանք

$$a = a \cdot 0,$$

որտեղից կստանանք $a = 0$:

Այսպիսով, վերջնականապես ստանում ենք, որ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c^n}{n!} = 0 \qquad (c > 0;\ c = const): \tag{ը}$$

Ապացուցենք նաև մոնոտոն հաջորդականություններին վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Դիցուք ցանկացած n-ի համար մոնոտոն աճող $\{x_n\}$ և մոնոտոն նվազող $\{y_n\}$ հաջորդականությունների համապատասխան անդամների համար տեղի ունի*

$$x_n < y_n \tag{19}$$

անհավասարությունը: Այդ դեպքում, եթե n-ը անվերջի ձգտելիս այդ անդամների տարբերությունը ձգտում է զրոյի.

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0, \tag{20}$$

ապա տրված հաջորդականություններն ունեն միևնույն վերջավոր սահմանը.

---

*) Քանի որ հաջորդականության առաջին մի քանի անդամների դեն նետումը ակնհայտորեն չի փոխում նրա սահմանը, հետևաբար թեորեմ 4-ը և թեորեմ 4′-ը ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ դիտարկվող հաջորդականությունը ոչ թե մոնոտոն է, այլ դառնում է այդպիսին, մեկից մեծ ինչ-որ համարից սկսած:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = c \quad (|c| < +\infty): \tag{21}$$

Ապացույց: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունեն

$$x_n < y_n \le y_1$$

անհավասարությունները:

Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 4-ի, լինելով վերևից սահմանափակ, մոնոտոն աճող $\{x_n\}$ հաջորդականությունն ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \quad (|c| < +\infty): \tag{22}$$

Նույն ձևով ցանկացած n-ի համար ունենք

$$y_n > x_n \ge x_1,$$

այսինքն՝ մոնոտոն նվազող $\{y_n\}$ հաջորդականությունն էլ ունի վերջավոր սահման.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = c' \quad (|c'| < +\infty): \tag{23}$$

Ինչպես գիտենք, վերջին երկու հավասարություններից կստանանք

$$\lim(x_n - y_n) = c - c': \tag{24}$$

Նկատի ունենալով (20) պայմանը՝ (24) հավասարությունից կունենանք

$$c = c':$$

Իպա

Ապացուցած թեորեմը հաճախ օգտագործվում է հետևյալ տեսքով՝

Թեորեմ 5′: *Եթե փակ միջակայքերի*

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \ldots,\ [a_n, b_n], \ldots \tag{25}$$

հաջորդականության յուրաքանչյուր միջակայք (սկսած երկրորդից) պարունակվում է նախորդի մեջ և n-ը անվերջի ձգտելիս նրանց երկարությունները ձգտում են զրոյի, ապա տրված միջակայքերի a_n և b_n ծայրակետերը ձգտում են ընդհանուր սահմանի.*)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c:$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է նկատել, որ (25) միջակայքերի ձախ ծայրակետերի բազմությունը խաղում է նախորդ թեորեմի $\{x_n\}$ հաջորդականության դերը, իսկ աջ ծայրակետերի բազմությունը՝ $\{y_n\}$ հաջորդականության դերը:

Իպա

Անցնելով e թվին՝ դիտարկենք

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

---

*) Նկատի ունենալով, որ (25) միջակայքերից յուրաքանչյուրը պարունակվում է կամ ներդրված է նախորդ միջակայքի մեջ՝ թեորեմ 5′-ին անվանում են ներդրված միջակայքերի թեորեմ:

հաջորդականությունը և ապացուցենք, որ այն զուգամետ է:

Նախ ցույց տանք, որ (26)-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է:

Օգտվելով հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի՝ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n,$$

(26) հաջորդականության n-րդ $(n=1,2,\ldots)$ անդամի համար կստանանք

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right): \quad (27)$$

Վերջին գումարի տեսքից երևում է, որ եթե x_n անդամից անցնենք x_{n+1} անդամի, ապա նախ կավելանա ևս մեկ, $(n+2)$-րդ դրական գումարելի, այնուհետև ներկայացված $n+1$ գումարելիներից յուրաքանչյուրը (սկսած երկրորդից) կմեծանա, քանի որ վերջին հավասարության աջ կողմի փակագծերում գրված $1-s/n$ $(s=1,2,\ldots,n-1)$ տեսքի յուրաքանչյուր արտադրիչ կփոխարինվի ավելի մեծ՝ $1-s/(n+1)$ արտադրիչով:

Ըստ էության, վերոգրյալը նշանակում է, որ (26)-ը մոնոտոն աճող հաջորդականություն է:

Այժմ ցույց տանք, որ դիտարկվող հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է:

(27) հավասարություններից վերջինի աջ մասի փակագծերում գրված արտադրիչները փոխարինելով մեկով (այսինքն այդ արտադրիչները մեծացնելով), կստանանք

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n=1,2,\ldots) \quad (28)$$

Այնուհետև կատարելով

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (29)$$

նշանակումը և (29) արտահայտության բոլոր կոտորակների հայտարարների երկուսից մեծ արտադրիչները փոխարինելով երկուսով՝ կունենանք

$$y_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}: \quad (30)$$

Ինչպես տեսնում ենք, ստացված անհավասարության աջ մասի վերջին n գումարելիները կազմում են $1/2$ հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա: Հետևաբար, օգտվելով երկրաչափական պրոգրեսիա կազմող թվերի գումարի բանաձևից՝ ցանկացած n-ի համար կստանանք

$$x_n \le y_n < 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

գնահատականը:

Մյուս կողմից, (27) հավասարություններից երևում է, որ ցանկացած n-ի համար տեղի ունի նաև $x_n \ge 2$ անհավասարությունը:

Այսպիսով, կամայական n-ի համար տեղի ունի

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3 \qquad (31)$$

գնահատականը, ինչը նշանակում է, որ $\{x_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է:

Ամփոփելով արդյունքները՝ ստանում ենք, որ $\{x_n\}$-ը աճող և սահմանափակ հաջորդականություն է: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 4-ի, այն ունի վերջավոր սահման: Նշանակելով այդ սահմանը e-ով և (31) կրկնակի անհավասարություններում անցնելով սահմանի, երբ n-ը ձգտում է անվերջի՝ կստանանք, որ e-ն պատկանում է [2;3] փակ միջակայքին [20,p1]:

Կարելի է համոզվել, որ e-ն իռացիոնալ թիվ է, որի մոտավոր արժեքը 2,71 է:

Այսպիսով, վերջնականապես ստանում ենք, որ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71: \qquad (32)$$

Նկատի ունենալով e թվի որոշ հատկություններ՝ այն կընտրենք որպես լոգարիթմի հիմք: x թվի լոգարիթմը e հիմքով կնշանակենք $\ln x$-ով և կանվանենք բնական հիմքով լոգարիթմ:

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

§22. Ֆունկցիա և նրա տրման եղանակները: Ֆունկցիայի սահմանի սահմանումները արգումենտի վերջավոր արժեքի դեպքում: Միակողմանի սահմաններ: Անվերջ սահմաններ: Ֆունկցիայի սահմանն արգումենտի անվերջ մեծ արժեքի դեպքում: Մի քանի թեորեմներ սահման ունեցող ֆունկցիաների վերաբերյալ:

Այժմ ծանոթանանք մաթեմատիկայի կենտրոնական հասկացություններից մեկի՝ ֆունկցիայի հասկացության հետ: Այդ նպատակի համար դիտարկենք համապատասխանաբար X և Y փոփոխման տիրույթներ ունեցող x և y փոփոխական մեծություններ*) [18,u28,29]:

Սահմանում 1: *y փոփոխականը կոչվում է x փոփոխականի ֆունկցիա որոշված X տիրույթում, եթե գոյություն ունի օրենք, որը X բազմության վրա փոփոխվող x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համապատասխանեցնում է y փոփոխականի որոշակի արժեք:*

Սահմանում 2: *x փոփոխականը կոչվում է անկախ փոփոխական կամ ֆունկցիայի արգումենտ, իսկ X բազմությունը՝ այդ ֆունկցիայի որոշման կամ գոյության տիրույթ:*

Եթե ֆունկցիայի սահմանման մեջ թույլ տանք, որ x անկախ փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համապատասխանեն y փոփոխականի մի քանի արժեքներ, ապա գործ կունենանք, այսպես կոչված, բազմարժեք ֆունկցիայի հետ:

Նշենք, որ մենք կդիտարկենք բացառապես միարժեք ֆունկցիաներ և այն փաստը, որ y-ը x-ը ֆունկցիա է՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$y = f(x):$$

Ֆունկցիան կարելի է տալ աղյուսակով, գրաֆիկորեն կամ բանաձևով (անալիտիկորեն):

Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակի դեպքում

Աղյուսակ 1

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

որոշակի կարգով տրվում են արգումենտի վերջավոր թվով արժեքներ և այդ արժեքներին համապատասխանող ֆունկցիայի արժեքներ:

---

*) Փոփոխականը համարվում է տրված, եթե նշված են այն արժեքները, որոնք կարող է ընդունել այդ փոփոխականը:

Ֆունկցիայի տրման աղյուսակային եղանակի դեպքում փաստորեն ունենք ֆունկցիայի վերջավոր թվով արժեքներ, իսկ նրա մնացած արժեքների մասին ճշգրիտ ոչինչ չգիտենք:

Ֆունկցիայի տրման գրաֆիկական եղանակի դեպքում, ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում, արգումենտի փոփոխման մի որևէ վերջավոր միջակայքում տրվում է ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Ֆունկցիան գրաֆիկորեն տալու դեպքում մենք ակնհայտորեն տեսնում ենք այդ ֆունկցիայի վարքը նրա որոշման տիրույթի միայն մի վերջավոր մասում՝ ընդ որում նույնիսկ այդ միջակայքի կետերում, որպես կանոն, չունենք դիտարկվող ֆունկցիայի ճշգրիտ արժեքները:

Եթե ֆունկցիան տրվում է բանաձևով, ապա այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ցանկացած տեղամասում կարող ենք կառուցել նրա գրաֆիկը, ինչպես նաև՝ կարող ենք կազմել դիտարկվող ֆունկցիայի մեզ հետաքրքրող արժեքների աղյուսակ:

Հետագայում, ուսումնասիրվող ֆունկցիաները կտանք միայն բանաձևով, իսկ անհրաժեշտության դեպքում, մեզ հետաքրքրող տեղամասերում կկառուցենք նաև այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Այժմ ենթադրենք X բազմության վրա, որի համար a-ն սահմանային կետ է [18,ս18], որոշված է $y=f(x)$ ֆունկցիան և ուսումնասիրենք այդ ֆունկցիայի վարքը, երբ x-ը անսահմանափակորեն մոտենում է a-ին:

Սահմանում 3: *Կասենք, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն A թիվն է, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $|x-a|<\delta$, տեղի ունի*

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon \qquad (x\in X, x\neq a) \tag{1}$$

անհավասարությունը:

Այն փաստը, որ x-ը a-ի ձգտելիս A-ն $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{x\to a} f(x)=A: \tag{2}$$

Ֆունկցիայի սահմանի հասկացության բերված սահմանումը անվանելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանում շարադրված, այսպես կոչված «ε,δ» լեզվով, ծանոթանանք նաև այդ հասկացության մի նոր սահմանման հետ, որը ձևակերպվում է «հաջորդականությունների լեզվով»:

Սահմանում 4: *Կասենք, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է, եթե X բազմությանը պատկանող արժեքների ինչպիսի $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ հաջորդականություն էլ վերցնենք, որը զուգամիտում է a-ի, $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմված*

$$f(x_1),\ f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

հաջորդականությունը զուգամիտում է A-ի:

Ֆունկցիայի միակողմանի սահմանների հետ ծանոթանալու համար ենթադրենք a-ն X բազմության այնպիսի սահմանային կետ է, որ նրա ցանկացած շրջակայքում [18,տ14], ինչպես a կետի ձախ կողմում, այնպես էլ նրա աջ կողմում, կա X բազմության a-ից տարբեր կետ:

Սահմանում 5: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է A-ի*), երբ x-ը a-ից փոքր մնալով է ձգտում a-ի, ապա A-ն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան սահման $x=a$ կետում:*

Նույն ձևով սահմանվում է նաև $f(x)$ ֆունկցիայի աջակողմյան սահմանը $x=a$ կետում:

Այն փաստը, որ A-ն $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան (աջակողմյան) սահմանն է $x=a$ կետում՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A \text{ կամ } f(a-0)=A\ ,\quad \left[\lim_{x\to a+0} f(x)=A \text{ կամ } f(a+0)=A\right]: \tag{3}$$

Միանգամայն հասկանալի է, որ որպեսզի $x=a$ կետում (2) սահմանը գոյություն ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում գոյություն ունենան $f(x)$ ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանները, ինչպես նաև տեղի ունենան հետևյալ հավասարությունները՝

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A: \tag{4}$$

Հնարավոր է, որ x-ը a վերջավոր սահմանի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ձգտի անվերջ մեծ սահմանի:

Սահմանում 6: *Կասենք, որ x-ը a վերջավոր սահմանի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը պլյուս անվերջն է (մինուս անվերջն է), եթե ցանկացած E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց*

$$|x-a|<\delta \qquad (x\in X,\ x\neq a),$$

տեղի ունի

$$f(x)>E \qquad [f(x)<-E] \tag{1}$$

անհավասարությունը:

Նշենք, որ ֆունկցիայի ձախակողմյան և աջակողմյան սահմանների մասին վերևում բերված դատողությունները մնում են ուժի մեջ նաև քննարկվող դեպքում:

Սահմանում 7: *Կասենք, որ պլյուս անվերջը $X=\{x\}$ բազմության սահմանային կետ է, եթե այդ բազմությունը պարունակում է ցանկացած չափով մեծ դրական թիվ:*

Սահմանում 8: *Կասենք, որ մինուս անվերջը $X=\{x\}$ բազմության սահմանային կետ է, եթե այդ բազմությունը պարունակում է բացարձակ արժեքով ցանկացած չափով մեծ բացասական թիվ:*

---

*) Այսինքն $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է:

Սահմանում 9: Կասենք, որ x-ը պլյուս անվերջի (մինուս անվերջի) ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ձգտում է A-ի և այդ փաստը կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \qquad [\lim_{x\to-\infty} f(x)=A], \tag{2}$$

եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի Δ դրական թիվ, որ հենց

$$x>\Delta \qquad (x<-\Delta),$$

տեղի ունի

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:*)

Օրինակ 1: Ապացուցել հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \qquad (a>1): \tag{ա}$$

Լուծում: Եթե ցանկացած E դրական թվի համար որպես Δ վերցնենք $\log_a E$-ն, ապա կստանանք, որ հենց $x>\Delta$, տեղի ունի

$$a^x>E$$

անհավասարությունը, ինչը և ապացուցում է (ա) հավասարությունը:

Նույն ձևով կարող ենք ապացուցել նաև հետևյալ հավասարությունները՝

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (a>1), \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=0 \quad (0<a<1), \quad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad (0<a<1): \tag{բ}$$

Օրինակ 2: Ընդհանրացնելով 21-րդ պարագրաֆի 5-րդ և 6-րդ օրինակները՝ հետազոտենք

$$P_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k \tag{գ}$$

ամբողջ բազմանդամի և

$$\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n} \tag{դ}$$

ռացիոնալ կոտորակի վարքը, երբ x-ը ձգտում է պլյուս կամ մինուս անսահմանության:

$P_k(x)$ բազմանդամը ներկայացնելով

$$P_k(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right)$$

տեսքով՝ եզրակացնում ենք, որ տեղի ունեն

$$\lim_{x\to\pm\infty} P_k(x)=\pm\infty \qquad (\infty-\infty) \tag{ե}$$

հավասարությունները, ընդ որում k-ի զույգ արժեքների դեպքում (ե) հավասարությունների աջ մասերում գրված անսահմանության նշանն ակնհայտորեն կախված է միայն դիտարկվող բազմանդամի ավագ անդամի գործակցի նշանից, իսկ կենտ արժեքների դեպքում՝ նաև այն անսահմանության նշանից, որին ձգտում է x-ը:

Նույն ձևով կստանանք

---

*) Դժվար չէ բերված սահմանումը վերաձևակերպել $A=\pm\infty$ դեպքերի համար:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}x^{k-n}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\dots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}}=\begin{cases}\pm\infty, \text{ եթե } k>n,\\ \frac{a_0}{b_0}, \text{ եթե } k=n,\\ 0, \text{ եթե } k<n\end{cases} \qquad (գ)$$

հավասարությունները, ընդ որում $k>n$ դեպքում, եթե $(k-n)$-ը զույգ թիվ է, ապա (գ) հավասարություններում մասնակցող անսահմանության նշանը կախված է միայն $P_k(x)$ և $Q_n(x)$ բազմանդամների ավագ անդամների գործակիցների նշաններից, իսկ եթե $(k-n)$-ը կենտ թիվ է, ապա՝ նաև այն անսահմանության նշանից, որին ձգտում է x-ը:

Նշենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանին վերաբերող բերված բոլոր սահմանումների էությունը հետևյալն է՝

$f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները ցանկացած չափով մոտենում են նրա A սահմանին, հենց որ անկախ փոփոխականի արժեքները «բավականաչափ» մոտենում են այդ փոփոխականի a սահմանին:

Սահմանում 10: *$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է վերևից (ներքևից) սահմանափակ X բազմության վրա, եթե գոյություն ունի այնպիսի M (m) հաստատուն, որ X բազմությանը պատկանող ցանկացած x-ի համար տեղի ունի*

$$f(x)\le M \qquad [f(x)\ge m] \qquad (5)$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 11: *$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է սահմանափակ X բազմության վրա, եթե այն և՛ վերևից, և՛ ներքևից սահմանափակ է այդ բազմության վրա:*

Ակնհայտ է, որ X բազմության վրա $f(x)$ ֆունկցիան կլինի սահմանափակ այն և միայն այն ժամանակ, երբ գոյություն ունենա այնպիսի M դրական թիվ, որ X բազմության բոլոր x-երի համար տեղի ունենա հետևյալ անհավասարությունը՝

$$|f(x)|\le M: \qquad (6)$$

Բերված սահմանումից հետևում է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ չէ X բազմության վրա, ապա ինչպիսի M դրական թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա X բազմությանը պատկանող այնպիսի x_0 արժեք, որ այդ արժեքի համար տեղի կունենա

$$|f(x_0)|>M$$

անհավասարությունը:

Այժմ բերենք մի քանի թեորեմներ, որոնք ինչպե՛ս ձևակերպումներով, այնպե՛ս էլ ապացույցներով նման են հաջորդականությունների համար բերված համապատասխան թեորեմներին [19,թ1,թ1՛,Դ1,թ3], [20,թ2]:

Թեորեմ 1: *Եթե x -ը a -ի ձգտելիս*[*] $f(x)$ *ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման և $A>B$, ապա a -ին բավականաչափ մոտ և a -ից տարբեր x -երի համար տեղի ունի*

$$f(x)>B \tag{7}$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Ենթադրենք թեորեմի պայմանները տեղի ունեն և ընտրենք

$$\varepsilon<A-B$$

կամ որ նույնն է՝

$$B<A-\varepsilon \tag{8}$$

պայմանին բավարարող որևէ ε դրական թիվ:

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն, ընտրված ε -ի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta \qquad (x\in X,\ x\neq a), \tag{9}$$

տեղի ունի

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \tag{10}$$

անհավասարությունները:

(8) և (10) անհավասարություններից հետևում է, որ (9) պայմանին բավարարող x -երի համար տեղի ունի նաև (7) անհավասարությունը:

Իսպ

Ճիշտ նույն ձևով կարող ենք ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1′: ***Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման և $A<C$, ապա a -ին բավականաչափ մոտ և a -ից տարբեր x -երի համար տեղի ունի***

$$f(x)<C \tag{11}$$

անհավասարությունը:

Հետևանք 1: *Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի դրական (բացասական) սահման, ապա a -ին բավականաչափ մոտ և a -ից տարբեր x -երի համար $f(x)$ ֆունցիան նույնպես ընդունում է դրական (բացասական) արժեքներ:*

Չևակերպած հետևանքն ապացուցելու համար բավական է թեորեմ 1-ում և թեորեմ 1′-ում համապատասխանաբար ընդունել $B=0$ և $C=0$:

Թեորեմ 2: *Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման, ապա a -ին բավականաչափ մոտ x -երի համար այն սահմանափակ է:*

---

[*] Հիշեցնենք, որ a -ն $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի սահմանային կետ է:

Ապացույց: Դիցուք x-ը $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի a սահմանային կետին ձգտելիս այդ ֆունկցիան ունի վերջավոր A սահման.

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \qquad (|A|<+\infty): \tag{12}$$

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն (12) հավասարությունը նշանակում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta \qquad (x\in X,\quad x\neq a),$$

տեղի ունի

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

անհավասարությունը:

Այնուհետև օգտվելով

$$|a|-|b|\leq|a-b|$$

անհավասարությունից [18.(4)]՝ x-ի նշված արժեքների համար կունենանք

$$|f(x)|-|A|<\varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$|f(x)|<|A|+\varepsilon$$

գնահատականը՝ ինչը, համաձայն (6) անհավասարության նշանակում է, որ a-ին բավականաչափ մոտ x-երի համար $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

Իսկա

Թեորեմ 2-ը համեմատելով հաջորդականությունների համար ապացուցած համապատասխան թեորեմի հետ՝ նկատում ենք, որ այդ թեորեմների բովանդակությունները տարբերվում են իրարից.

Վերջավոր սահման ունեցող հաջորդականությունը սահմանափակ է ընդհանրապես, մինչդեռ a կետում վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիան սահմանափակ է միայն a կետի որոշակի շրջակայքում[*]*:*

Թեորեմ 3: *(Միջանկյալ ֆունկցիայի սահմանի մասին):*

Դիցուք $f(x)$, $\varphi(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են միևնույն X բազմության վրա, որի համար a-ն սահմանային կետ է: Այդ դեպքում, եթե նշված բազմության յուրաքանչյուր կետում տեղի ունեն

$$f(x)\leq\varphi(x)\leq g(x) \tag{13}$$

անհավասարությունները և x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ձգտում են միևնույն B թվին, ապա $\varphi(x)$ ֆունկցիան նույնպես ձգտում է այդ թվին:

Ապացույց: Դիցուք x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ձգ-

*) Այսինքն մեկ այլ կետի շրջակայքում այն կարող է և սահմանափակ չլինել:

տում են միևնույն B թվին.

$$\lim_{x\to a} f(x)=B, \qquad \lim_{x\to a} g(x)=B: \tag{14}$$

(14) հավասարություններից առաջինը նշանակում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ_1 դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta_1,$$

տեղի ունի

$$|f(x)-B|<\varepsilon \qquad (x\in X, \quad x\neq a)$$

անհավասարությունը:

Նույն ձևով (14) հավասարություններից երկրորդը նշանակում է, որ վերցրած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ_2 դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta_2,$$

տեղի ունի

$$|g(x)-B|<\varepsilon \qquad (x\in X, \quad x\neq a)$$

անհավասարությունը:

Եթե δ_1 և δ_2 թվերից փոքրը նշանակենք δ-ով, ապա պարզ է, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

միաժամանակ տեղի կունենան

$$-\varepsilon<f(x)-B<\varepsilon, \quad -\varepsilon<g(x)-B<\varepsilon \qquad (x\in X, \quad x\neq a) \tag{15}$$

անհավասարությունները:

Այժմ, եթե (13) անհավասարությունները ներկայացնենք

$$f(x)-B\le\varphi(x)-B\le g(x)-B \tag{13'}$$

տեսքով, ապա (15) անհավասարությունների շնորհիվ (13′) անհավասարություններից կստանանք, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

տեղի կունենան

$$-\varepsilon<\varphi(x)-B<\varepsilon \qquad (x\in X, \; x\neq a)$$

անհավասարությունները, ինչը նշանակում է, որ x-ը a-ի ձգտելիս B-ն նաև $\varphi(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է:

Իւպա

Անցնենք մոնոտոն ֆունկցիաների հետ ծանոթանալուն:

Սահմանում 12: *$X=\{x\}$ բազմության վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն աճող (մոնոտոն նվազող) այդ բազմության վրա, եթե X բազմությանը պատկանող ցանկացած x_1 և x_2 արժեքների համար, $x_1<x_2$ անհավասարությունից հետևում է*

$$f(x_1)<f(x_2)\quad [f(x_1)>f(x_2)] \qquad (16)$$

անհավասարությունը:

Հասկանալի է, որ աբսցիսների առանցքով աջ շարժվելիս մոնոտոն աճող ֆունկցիայի գրաֆիկը շարունակ վեր է բարձրանում, իսկ մոնոտոն նվազող ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ներքև է իջնում:

Սահմանում 13: X *միջակայքը կոչվում է* $f(x)$ *ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայք, եթե այդ միջակայքի վրա այն մոնոտոն է, այսինքն կա՛մ աճող է, կա՛մ էլ՝ նվազող:*

Սահմանում 14: $X=\{x\}$ *բազմության վրա որոշված* $f(x)$ *ֆունկցիան կոչվում է չնվազող (չաճող) կամ լայն իմաստով մոնոտոն աճող (լայն իմաստով մոնոտոն նվազող) այդ բազմության վրա, եթե* X *բազմությանը պատկանող ցանկացած* x_1 *և* x_2 *արժեքների համար* $x_1<x_2$ *անհավասարությունից հետևում է*

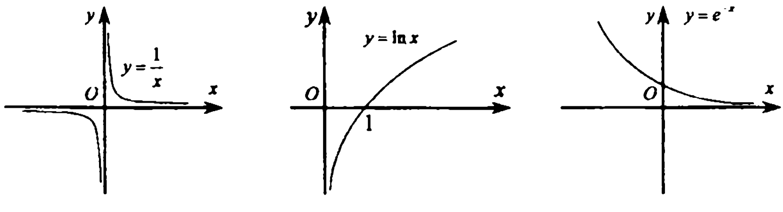
$$f(x_1)\le f(x_2)\quad [f(x_1)\ge f(x_2)] \qquad (16')$$

անհավասարությունը:

Բերված սահմանումներով նկարագրվող ֆունկցիաները կանվանենք մոնոտոն ֆունկցիաներ:

Օրինակ 3:

ա) $f(x)=\frac{1}{x}$ ֆունկցիան $(-\infty,0)$ և $(0,+\infty)$ միջակայքերում մոնոտոն նվազում է (նկ.9ա):



ա) բ) գ)

Նկ. 9

բ) $f(x)=\ln x$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է իր որոշման տիրույթում (նկ.9բ):

գ) $f(x)=e^{-x}$ ֆունկցիան մոնոտոն նվազում է իր որոշման տիրույթում (նկ.9գ):

Այժմ բերենք մոնոտոն ֆունկցիաներին վերաբերվող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *Դիցուք մոնոտոն աճող (կամ գոնե չնվազող)* $f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է* a *սահմանային կետ ունեցող* X *բազմության վրա, ընդ որում* a*-ն մեծ է այդ բազմությանը պատկանող բոլոր արժեքներից (*a*-ն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ): Այդ դեպքում, եթե* $f(x)$ *ֆունկցիան վերևից սահմանափակ է, ապա* x*-ը* a*-ի ձգտելիս այն ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում՝ այդ ֆունկցիայի սահմանը պլյուս անսահմանությունն է:*

Բնականաբար, գոյություն ունեն բերված թեորեմին նման թեորեմներ, որոնցից մեկում a-ն փոքր է X բազմությանը պատկանող բոլոր արժեքներից, իսկ մյուսը վերաբերվում է մոնոտոն նվազող ֆունկցիաներին:

Ինչպես և հաջորդականությունների դեպքում ծագում է հետևյալ հարցը՝ ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի $f(x)$ ֆունկցիան, որպեսզի x-ը այս կամ այն սահմանին ձգտելիս այդ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման:

Չևակերպած հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի՝

Թեորեմ 5: *(Բոլցանո-Կոշի) Որպեսզի a սահմանային կետ ունեցող X բազմության վրա որոշված $f(x)$ ֆունկցիան x-ը a-ի ձգտելիս ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունենա այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց*

$$|x'-a|<\delta, \quad |x''-a|<\delta,$$

տեղի ունենա

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad (x'\in X, x'\neq a, x''\in X, x''\neq a) \qquad (17)$$

անհավասարությունը:

Վերջում բերենք բազմաթիվ կիրառություններ ունեցող հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 6: *Եթե a սահմանային կետ ունեցող X բազմության վրա որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները x-ը a-ի ձգտելիս համապատասխանաբար ունեն A և B վերջավոր սահմաններ.*

$$\lim_{x\to a} f(x)=A, \quad \lim_{x\to a} g(x)=B\,, \qquad (18)$$

ապա վերջավոր սահմաններ ունեն նաև.

ա) *$f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների գումարը և տարբերությունը, ընդ որում տեղի ունեն*

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B \qquad (19)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x) \qquad (19')$$

հավասարությունները,

բ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների արտադրյալը, ընդ որում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=A\cdot B \qquad (20)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x) \qquad (20')$$

հավասարությունը,

գ) $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների քանորդը, եթե $B\neq 0$, ընդ որում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \qquad (21)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \qquad (21')$$

հավասարությունը:

Նշենք, որ ձևակերպած թեորեմն ապացուցելու անհրաժեշտությունը չկա, որովհետև ֆունկցիայի սահմանի, «հաջորդականությունների լեզվով» բերված սահմանման շնորհիվ հաջորդականությունների համար ապացուցած համապատասխան թեորեմների [21,թ1,թ2,թ3] ճշմարտացիությունից հետևում է թեորեմ 6-ի ճշմարտացիությունը:

Նկատի ունենալով, որ հաստատունի սահմանը հավասար է իրեն, (20′) հավասարությունից կստանանք

$$\lim_{x\to a}[c\,f(x)]=c\lim_{x\to a}f(x) \quad (c=const), \qquad (20'')$$

ինչը նշանակում է, որ հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել սահմանի նշանի տակից:

§23. Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ ֆունկցիաներ: Անվերջ փոքրերի և անվերջ մեծերի համեմատումը: Ֆունկցիայի ներկայացնելը իր սահմանի և անվերջ փոքր ֆունկցիայի գումարի տեսքով:

Ծանոթանալով ֆունկցիայի սահմանի հասկացության հետ՝ այս պարագրաֆում կդիտարկենք ֆունկցիաներ, որոնք ձգտում են զրոյի կամ անսահմանության, երբ նրանց արգումենտը ձգտում է այս կամ այն սահմանային արժեքին:

Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է a սահմանային կետ ունեցող X բազմության վրա (a-ն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ):

Սահմանում 1: *Կասենք, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$-ը անվերջ փոքր ֆունկցիա է կամ պարզապես անվերջ փոքր է, եթե տեղի ունի*

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \qquad (1)$$

հավասարությունը:

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն [22,ս3], եթե x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, ուրեմն ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

տեղի ունի

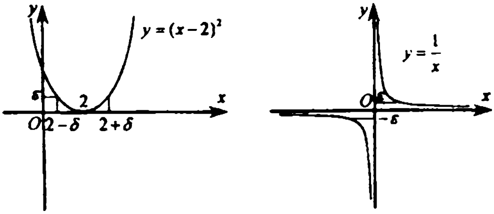
$$|f(x)|<\varepsilon \qquad (x\in X,\ x\neq a) \qquad (2)$$

անհավասարությունը:

Օրինակ 1: ա) x-ը 2-ի ձգտելիս $y=(x-2)^2$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, քանի որ տեղի ունի

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^2=0$$

հավասարությունը (Նկ.10ա):



ա) բ)

Նկ. 10

բ) x-ը պլյուս կամ մինուս ան-սահմանության ձգտելիս $y=1/x$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է, քանի որ տեղի ունի

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

հավասարությունը (Նկ.10բ):

Սահմանում 2: *Կասենք, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$-ը անվերջ մեծ ֆունկ-ցիա է կամ պարզապես անվերջ մեծ է, եթե տեղի ունի*

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=+\infty \tag{3}$$

հավասարությունը:

Ֆունկցիայի սահմանի [22,սճ] սահմանման համաձայն, եթե x-ը a-ի ձգ-տելիս $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է, ուրեմն ցանկացած E դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

տեղի ունի

$$|f(x)|>E \qquad (x\in X,\ x\neq a) \tag{4}$$

անհավասարությունը:

Օրինակ 2: Նախորդ օրինակում դիտարկված ֆունկցիաներից առաջինը անվերջ մեծ է x-ը պլյուս կամ մինուս անսահմանության ձգտելիս, իսկ երկրորդը՝ x-ը զրոյի ձգտելիս:

Անվերջ փոքր և անվերջ մեծ ֆունկցիաները միմյանց հետ կապված են հետևյալ թեորեմով (համեմատի՛ր [20,բ6]-ի հետ).

Թեորեմ 1: *Եթե x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է, ապա այդ նույն x-երի համար $1/f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական ε դրական թիվ: Քանի որ, ըստ պայմանի x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է, հետևաբար $E=1/\varepsilon$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

տեղի ունի

$$|f(x)|>\frac{1}{\varepsilon} \qquad (x\in X,\ x\neq a)$$

անհավասարությունը:

Ակնհայտ է, որ այդ նույն x-երի համար տեղի ունի նաև

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ x-ը a-ի ձգտելիս $1/f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է:

Իպա

Նույն ձևով կարող ենք ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1′: *Եթե x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է և չի ընդունում զրո արժեք, ապա այդ նույն x-երի համար $1/f(x)$ ֆունկցիան անվերջ մեծ է:*

Այժմ անցնենք անվերջ փոքր ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը:

Նկատի ունենալով ֆունկցիայի սահմանի «հաջորդականությունների լեզվով» բերված սահմանումը և համեմատելով անվերջ փոքր ֆունկցիայի և անվերջ փոքր հաջորդականության [20,ս2] սահմանումները՝ եզրակացնում ենք, որ անվերջ փոքր ֆունկցիան պետք է ունենա անվերջ փոքր հաջորդականության հատկություններին նման հատկություններ [20,**թ3,թ4,հ1,հ2,հ3**]:

Յաշվի առնելով վերոգրյալը՝ կարող ենք սահմանափակվել անվերջ փոքր ֆունկցիաների հատկությունների սոսկ թվարկումով, սակայն ավելորդ չենք համարում այստեղ բերել նաև այդ հատկությունների ապացույցները, թեև այդ ապացույցներում ընդգրկված հասկացությունները նույնպես օգտագործվել են անվերջ փոքր հաջորդականությունների համապատասխան հատկությունները ապացուցելիս:

Թեորեմ 2: *Վերջավոր թվով անվերջ փոքր ֆունկցիաների գումարը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Գրության պարզության համար թեորեմն ապացուցենք երկու անվերջ փոքրերի համար:

Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են a սահմանային կետ ունեցող X բազմության վրա և x-ը a-ի ձգտելիս, ձգտում են զրոյի.

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0: \tag{5}$$

Ապացուցենք, որ x-ը a-ի ձգտելիս

$$\varphi(x) = f(x) + g(x)$$

ֆունկցիան էլ է ձգտում զրոյի:

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն, (5) հավասարությունները նշանակում են, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունեն այնպիսի δ_1 և δ_2 դրական թվեր, որ հենց

$$|x-a| < \delta_1,$$

տեղի ունի

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in X,\ x \neq a) \tag{6}$$

անհավասարությունը և հենց

$$|x-a| < \delta_2,$$

տեղի ունի

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x \in X,\ x \neq a) \tag{7}$$

անհավասարությունը:

Պարզ է, որ հենց

$$|x-a| < \delta \qquad (x \in X,\ x \neq a),$$

որտեղ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, միաժամանակ տեղի կունենան (6) և (7) անհավասարությունները: Հետևաբար, այդ նույն x-երի համար կունենանք [18,(3')]

$$|\varphi(x)| = |f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ինչը և ապացուցում է թեորեմը:

Իպա

Թեորեմ 3: *Անվերջ փոքր ֆունկցիայի և սահմանափակ մեծության արտադրյալը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Դիցուք x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$-ը անվերջ փոքր է, իսկ $g(x)$-ը՝ սահմանափակ ֆունկցիա:

Քանի որ x-ը a-ի ձգտելիս $g(x)$-ը սահմանափակ ֆունկցիա է, հետևաբար [22,(6)] գոյություն ունի a կետի այնպիսի շրջակայք և այնպիսի M դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a| < \delta_1,$$

տեղի ունի

$$|g(x)| \le M \tag{8}$$

անհավասարությունը:

Մյուս կողմից, քանի որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$-ը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, հետևաբար գոյություն ունի a կետի այնպիսի շրջակայք, որ հենց

$$|x-a| < \delta_2,$$

տեղի ունի

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad (x \in X,\ x \neq a) \tag{9}$$

անհավասարությունը:

Այսպիսով, հենց որ x-ը պատկանի a կետի $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ շրջակայքին $(x \in X,\ x \neq a)$, միաժամանակ տեղի կունենան (8) և (9) անհավասարությունները: Հետևաբար այդ նույն x-երի համար տեղի կունենա նաև [18,(5′)]

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)g(x)$ արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Իսպա

Հետևանք 1: *Վերջավոր թվով անվերջ փոքր ֆունկցիաների արտադրյալը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Գրության պարզության համար նորից դիտարկենք երկու անվերջ փոքրերի դեպքը:

Դիցուք x-ը a սահմանային կետին ձգտելիս տեղի ունեն (5) հավասարությունները:

Քանի որ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիան սահմանային կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում սահմանափակ է [22,թ2], հետևաբար դիտարկվող ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը, օրինակ $g(x)$-ը, a կետի նշված շրջակայքում սահմանափակ է:

Պնդման ապացույցն ավարտելու համար մնում է օգտվել թեորեմ 3-ից և համոզվել, որ x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)g(x)$ արտադրյալն անվերջ փոքր է:

Իսպա

Հետևանք 2: *Անվերջ փոքր ֆունկցիայի և հաստատունի արտադրյալը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Ապացույց: Նկատելով, որ $c=0$ դեպքում պնդումն ակնհայտ է՝ ենթադրենք x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$-ը անվերջ փոքր է, իսկ c-ն՝ զրոյից տարբեր որևէ հաստատուն: Այդ դեպքում, համաձայն անվերջ փոքր ֆունկցիայի սահմանման, ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x-a|<\delta,$$

տեղի ունի

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{|c|}\qquad (x\in X,\quad x\neq a)$$

անհավասարությունը:

Պարզ է, որ այդ նույն x-երի համար տեղի ունի նաև

$$|c||f(x)|<|c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|}$$

կամ որ նույնն է՝

$$|cf(x)|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչն էլ ապացուցում է, որ x-ը a-ի ձգտելիս $cf(x)$ ֆունկցիան անվերջ փոքր է:

Իսպա

Վերևում բերված դատողությունների օգնությամբ կարող ենք համոզվել նաև հետևյալ թեորեմի ճշմարտացիության մեջ՝

Թեորեմ 4: *Եթե x -ն a -ի ձգտելիս $f(x)$ -ն անվերջ փոքր է, իսկ $g(x)$ -ն ունի զրոյից տարբեր վերջավոր սահման, ապա $f(x)/g(x)$ քանորդը նույնպես անվերջ փոքր է:*

Այժմ դիտարկենք միևնույն x փոփոխականից կախված մի քանի ֆունկցիաներ, որոնք ձգտում են զրոյի, երբ x -ը ձգտում է այդ ֆունկցիաների որոշման տիրույթների a սահմանային կետին.

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\beta(x)=0,\quad \lim_{x\to a}\gamma(x)=0,\ldots: \tag{10}$$

Շատ դեպքերում անհրաժեշտ է լինում զրոյին ձգտելու արագության տեսակետից այդ անվերջ փոքրերը համեմատել իրար հետ: Երկու անվերջ փոքրերի համեմատման հիմքում դրվում է այդ մեծությունների հարաբերության վարքի գնահատումը, երբ x -ը ձգտում է իր սահմանային արժեքին:*)

Սահմանում 3: Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $\beta(x)/\alpha(x)$ քանորդը (և նրա հետ մեկտեղ նաև $\alpha(x)/\beta(x)$ քանորդը) ունի զրոյից տարբեր վերջավոր սահման.

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=A\quad\left[\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{1}{A},\ A\neq 0,\ |A|<+\infty\right], \tag{11}$$

ապա $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ անվերջ փոքրերը կոչվում են միևնույն կարգի մեծություններ:

Օրինակ 3: Ներքևում մենք ցույց կտանք [25,(18)], որ մեկից տարբեր ցանկացած դրական a -ի համար տեղի ունի հետևյալ, այսպես կոչված, «նշանավոր» սահմանը՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a: \quad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{ա}$$

Սահմանում 3-ից և (ա) հավասարությունից հետևում է, որ x -ը զրոյի ձգտելիս

$$\alpha(x)=a^x-1\quad (a>0,a\neq 1)\ \text{և}\ \beta(x)=x$$

անվերջ փոքր մեծությունները ունեն միևնույն կարգը:

Սահմանում 4: *Եթե x -ը a -ի ձգտելի, $\beta(x)$ և $\alpha(x)$ անվերջ փոքրերի քանորդը նույնպես անվերջ փոքր է ($\alpha(x)/\beta(x)$ քանորդն էլ՝ անվերջ մեծ), ապա $\beta(x)$ -ը կոչվում է $\alpha(x)$ -ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, իսկ $\alpha(x)$ -ը $\beta(x)$ -ի նկատմամբ՝ ավելի ցածր կարգի անվերջ փոքր մեծություն:*

Այն փաստը, որ $\beta(x)$ անվերջ փոքրը $\alpha(x)$ անվերջ փոքրի նկատմամբ ունի ավելի բարձր կարգ՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\beta(x)=o[\alpha(x)]: \tag{12}$$

---

*) Ենթադրում ենք, որ x -ը իր սահմանային արժեքին ձգտելիս դիտարկվող քանորդների հայտարարները զրո չեն դառնում:

Սահմանում 5: *x-ը a-ի ձգտելիս $\beta(x)$-ը կոչվում է $\alpha(x)$-ի նկատմամբ k-րդ $(k>0)$ կարգի անվերջ փոքր մեծություն, եթե $\beta(x)$-ը և $\alpha^k(x)$-ը միևնույն կարգի անվերջ փոքրեր են.*

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=A \quad \left(A\neq 0,|A|<+\infty\right) \tag{13}$$

Օրինակ 4: Ներքևում մենք ցույց կտանք [25,(2)], որ x-ը զրոյի ձգտելիս տեղի ունի հետևյալ «նշանավոր» սահմանը՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1: \quad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{բ}$$

Կատարելով

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

տարրական ձևափոխությունները և հաշվի առնելով, որ x-ը զրոյի ձգտելիս $t=\frac{x}{2}$-ն էլ է ձգտում զրոյի՝ (բ) հավասարության հաշվառումով կստանանք [22,(20'')]

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\ ,$$

ինչը, համաձայն սահմանման նշանակում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս $\beta(x)=1-\cos x$ անվերջ փոքրը, $\alpha(x)=x$ անվերջ փոքրի նկատմամբ երկրորդ կարգի մեծություն է:

Օգտվելով (12) նշանակումից՝ կարող ենք գրել

$$1-\cos x=o(x): \tag{գ}$$

Սահմանում 6: *Եթե x-ը a սահմանային արժեքին ձգտելիս $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ անվերջ փոքրերի հարաբերությունը որոշակի սահմանի չի ձգտում, ապա այդ մեծությունները կոչվում են անհամեմատելի մեծություններ:*

Օրինակ 5: Քանի որ

$$\beta(x)=x\sin\frac{1}{x} \text{ և } \alpha(x)=x \tag{դ}$$

ֆունկցիաների $\beta(x)/\alpha(x)$ քանորդը հավասար է $\sin\frac{1}{x}$-ի, որը x-ը զրոյի ձգտելիս [24,o4] որոշակի սահմանի չի ձգտում, հետևաբար x-ը զրոյի ձգտելիս դիտարկվող անվերջ փոքրերն անհամեմատելի մեծություններ են:

Սահմանում 7: *Եթե x-ը a-ի ձգտելիս $\beta(x)/\alpha(x)$ քանորդը (և նրա հետ մեկտեղ նաև $\alpha(x)/\beta(x)$ քանորդը) ձգտում է մեկի.*

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1 \qquad \left[\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\right], \tag{14}$$

ապա $\alpha(x)$ *և* $\beta(x)$ *անվերջ փոքրերը կոչվում են համարժեք մեծություններ:*

Այն փաստը, որ $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ անվերջ փոքրերը համարժեք մեծություններ են՝ կնշենք հետևյալ կերպ՝

$$\alpha(x)\sim\beta(x): \tag{15}$$

Օրինակ 6: ա) Սահմանում 7-ից և (բ) հավասարությունից հետևում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս

$$\beta(x)=\sin x \text{ և } \alpha(x)=x$$

անվերջ փոքրերը համարժեք մեծություններ են.

$$\sin x\sim x: \tag{ե}$$

բ) Ներքևում մենք ցույց կտանք [25,(17')], որ x-ը զրոյի ձգտելիս տեղի ունի

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \tag{զ}$$

«նշանավոր» սահմանը:

Սահմանում 7-ից և (զ) հավասարությունից հետևում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս

$$\beta(x)=\ln(1+x) \text{ և } \alpha(x)=x$$

անվերջ փոքրերը նույնպես համարժեք մեծություններ են.

$$\ln(1+x)\sim x: \tag{է}$$

Այժմ ապացուցենք համարժեք անվերջ փոքրերին վերաբերվող հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Որպեսզի* $\alpha(x)$ *և* $\beta(x)$ *անվերջ փոքրերը լինեն համարժեք մեծություններ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրանց տարբերությունը լինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, քան ինչպե՛ս* $\alpha(x)$*-ը, այնպե՛ս էլ* $\beta(x)$*-ը.*

$$\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)=o[\alpha(x)], \qquad \gamma(x)=o[\beta(x)]: \tag{16}$$

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $\alpha(x)$-ը և $\beta(x)$-ը համարժեք անվերջ փոքր մեծություններ են: Օգտվելով համարժեք անվերջ փոքրերի սահմանումից՝ կունենանք [22,(19')]

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\left[1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=1-\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1-1=0,$$

որտեղից ստանում ենք (16) հավասարություններից առաջինը:

Բնականաբար, նույն ձևով կարող ենք ստանալ նաև (16) հավասարություններից երկրորդը:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք տեղի ունեն (16) առնչությունները, այսինքն՝ ենթադրենք տեղի ունեն

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0,\quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0 \tag{17}$$

հավասարությունները:

(17) հավասարություններից առաջինից կստանանք

$$\lim_{x\to a}\left[1-\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right]=0,$$

որտեղից կունենանք

$$\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1: \tag{18}$$

Նույն ձևով, (17) հավասարություններից երկրորդից կստանանք

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1: \tag{19}$$

Համաձայն սահմանման, (18) և (19) հավասարությունները նշանակում են, որ $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ անվերջ փոքրերը համարժեք մեծություններ են:

Իպա

Նկատենք, որ թեորեմ 5-ը չի կորցնի իր ուժը, եթե պահանջենք միայն, որ $\gamma(x)$-ը լինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն, քան $\alpha(x)$ և $\beta(x)$ համարժեք անվերջ փոքրերից որևէ մեկը (քանի որ այդ դեպքում նշված մեծությունն ակնհայտորեն կլինի այդպիսին նաև մյուս անվերջ փոքրի նկատմամբ):

Անցնելով անվերջ մեծ ֆունկցիաների համեմատմանը՝ դիտարկենք միևնույն փոփոխականից կախված $y(x)$ և $z(x)$ ֆունկցիաները, որոնք x-ը a սահմանային արժեքին ձգտելիս, ձգտում են պլյուս անսահմանության:

Սահմանում 8: *Եթե x-ը a-ի ձգտելիս $z(x)/y(x)$ քանորդը (և նրա հետ մեկտեղ նաև $y(x)/z(x)$ քանորդը) ունի զրոյից տարբեր վերջավոր սահման, ապա $z(x)$ և $y(x)$ անվերջ մեծերը կոչվում են միևնույն կարգի մեծություններ:*

Սահմանում 9: *Եթե x-ը a-ի ձգտելիս $y(x)$ և $z(x)$ անվերջ մեծերի $z(x)/y(x)$ քանորդը նույնպես անվերջ մեծ է ($y(x)/z(x)$ քանորդն էլ՝ անվերջ փոքր), ապա $z(x)$-ը կոչվում է $y(x)$-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ մեծ մեծություն, իսկ $y(x)$-ը $z(x)$-ի նկատմամբ՝ ավելի ցածր կարգի անվերջ մեծ մեծություն:*

Սահմանում 10: *x-ը a-ի ձգտելիս $z(x)$ անվերջ մեծը կոչվում է $y(x)$ անվերջ մեծի նկատմամբ k-րդ $(k>0)$ կարգի անվերջ մեծ մեծություն, եթե $z(x)$-ը և $y^k(x)$-ը միևնույն կարգի մեծություններ են.*

$$\lim_{x \to a} \frac{z(x)}{y'(x)} = A \quad (A \neq 0, \quad |A| < +\infty): \tag{20}$$

Սահմանում 11: *Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $z(x)/y(x)$ քանորդը որոշակի սահմանի չի ձգտում, ապա $z(x)$ և $y(x)$ անվերջ մեծերը կոչվում են անհամեմատելի մեծություններ:*

Սահմանում 12: *Եթե x -ը a -ի ձգտելիս $z(x)/y(x)$ քանորդը (և նրա հետ մեկտեղ նաև $y(x)/z(x)$ քանորդը) ձգտում է մեկի, ապա $z(x)$ և $y(x)$ անվերջ մեծերը կոչվում են համարժեք մեծություններ:*

Ինչպես տեսնում ենք, երկու անվերջ մեծերի համեմատման հիմքում նույնպես դրվում է համեմատվող մեծությունների հարաբերության վարքի գնահատումը, երբ x -ը ձգտում է իր սահմանային արժեքին:

Նկատենք, որ վերևում բերված օրինակներում դիտարկված անվերջ փոքրերը փոխարինելով իրենց հակադարձ մեծություններով՝ կստանանք երկու անվերջ մեծերի համեմատումը լուսաբանող օրինակներ:

Վերջում, ենթադրելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է a սահմանային կետ ունեցող X բազմության վրա՝ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 6: *Որպեսզի x -ը a -ի ձգտելիս b հաստատունը լինի $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանը.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \tag{21}$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ նույն x -երի համար տեղի ունենա $f(x)$ ֆունկցիայի

$$f(x) = b + \alpha(x) \tag{22}$$

ներկայացումը, որտեղ $\alpha(x)$ -ը անվերջ փոքր ֆունկցիա է, երբ x -ը ձգտում է a -ի:

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք x -ը a -ի ձգտելիս տեղի ունի (21) հավասարությունը:

Ֆունկցիայի սահմանի սահմանման համաձայն, կատարված ենթադրությունը նշանակում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x - a| < \delta,$$

տեղի ունի

$$|f(x) - b| < \varepsilon \qquad (x \in X, \ x \neq a)$$

անհավասարությունը: Վերոգրյալն էլ իր հերթին նշանակում է, որ x -ը a -ի ձգտելիս $f(x) - b$ տարբերությունը անվերջ փոքր մեծություն է: Նշանակելով այդ տարբերությունը $\alpha(x)$ -ով՝

$$f(x) - b = \alpha(x),$$

կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի (22) ներկայացումը:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք x-ը a-ի ձգտելիս տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի (22) ներկայացումը, որտեղ $\alpha(x)$-ը այդ նույն x-երի համար անվերջ փոքր ֆունկցիա է: Կատարելով սահմանային անցում՝ (22) հավասարությունից կստանանք

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}[b + \alpha(x)] = b + \lim_{x\to a}\alpha(x) = b,$$

ինչը նշանակում է, որ x-ը a-ի ձգտելիս b-ն $f(x)$ ֆունկցիայի սահմանն է:

Իպս

§24. Ֆունկցիայի անընդհատությունը: Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ: Ֆունկցիայի խզման կետերը և նրանց դասակարգումը: Մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատությունը: Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը: Հակադարձ ֆունկցիա, նրա անընդհատությունը:

Ֆունկցիայի սահմանի հասկացության հետ [22] սերտորեն կապված է մաթեմատիկայի մեկ այլ կարևոր հասկացություն՝ ֆունկցիայի անընդհատության հասկացությունը:

Նշված հասկացության հետ ծանոթանալու համար ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $X = \{x\}$ բազմության վրա, որի համար x_0-ն սահմանային կետ է [18,ս18]: Ենթադրենք նաև, որ x_0-ն պատկանում է X բազմությանը, այնպես որ այդ կետում տրված ֆունկցիան ունի որոշակի վերջավոր արժեք:

Սահմանում 1: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի արգումենտը x_0-ի ձգտելիս գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \tag{1}$$

սահմանը և այն հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքին նշված կետում.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{2}$$

ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ x_0 կետում:

Հասկանալի է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է x_0 կետում և այդ կետի մի որևէ շրջակայքում, ապա նրա անընդհատությունը x_0 կետում նշանակում է, որ այդ կետում գոյություն ունեն $f(x)$ ֆունկցիայի և՛ ձախակողմյան, և՛ աջակողմյան սահմանները [22,ս5], ինչպես նաև տեղի ունեն

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \tag{3}$$

հավասարությունները:

Այժմ, եթե x_0 արժեքին տանք այնպիսի Δx (կարդացվում է դելտա x) աճ, որ $x = x_0 + \Delta x$ արժեքը դուրս չգա X բազմության սահմաններից և Δy_0-ով նշանակենք տրված ֆունկցիայի ստացած աճը (այսինքն՝ $f(x)$ ֆունկցիայի «նոր» և «հին» արժեքների տարբերությունը)՝ կունենանք

$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0): \tag{4}$$

Կարող ենք հեշտությամբ ապացուցել, որ որպեսզի $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y_0 = 0: \tag{5}$$

Բերված հավասարությունը նշանակում է, որ անընդհատ ֆունկցիան բնութագրվում է նրանով, որ այդ ֆունկցիայի արգումենտի անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է տրված ֆունկցիայի նույնպես անվերջ փոքր աճ:

Այժմ օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի սահմանումից՝ ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում ձևակերպենք «ε,δ լեզվով»:

Սահմանում 2: *$f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ x_0 կետում, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց*

$$|x - x_0| < \delta,$$

տեղի ունի

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{6}$$

անհավասարությունը:

Ֆունկցիայի անընդհատությունը տրված կետում ձևակերպենք նաև «հաջորդականությունների լեզվով»:

Սահմանում 3: *Կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում, եթե X բազմությանը պատկանող ինչպիսի հաջորդականություն էլ ընտրենք, որը զուգամիտում է x_0-ին.*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0,$$

տրված ֆունկցիայի համապատասխան արժեքներից կազմված հաջորդականությունը ձգտում է $f(x_0)$-ին.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0): \tag{7}$$

Նկատենք, որ եթե x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին չի պատկանում, բայց գոյություն ունի

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad (|A| < +\infty)$$

վերջավոր սահմանը, ապա ընդունելով $f(x_0) = A$, տրված ֆունկցիան կդառձնենք անընդհատ նաև x_0 կետում:

Նկարագրված հատկությունն ունեցող կետերին կանվանենք վերացնելի խզման կետեր:

Այժմ օգտվելով երկու ֆունկցիաների գումարի, տարբերության, արտադրյալի և քանորդի սահմանների վերաբերող թեորեմից [22,թ6]՝ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե միևնույն X բազմության վրա որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են այդ բազմությանը պատկանող x_0 կետում, ապա նշված կետում անընդհատ են նաև*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{8}$$

ֆունկցիաները, ընդ որում տրված ֆունկցիաների քանորդը անընդհատ է x_0 կետում, եթե $g(x_0) \neq 0$:

Ապացույց: Դիցուք միևնույն X բազմության վրա որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները անընդհատ են այդ բազմությանը պատկանող x_0 կետում.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0):$$

Օգտվելով վերևում հիշատակված թեորեմից և ենթադրելով, որ $g(x_0) \neq 0$, կունենանք

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \varphi(x_0),$$

ինչը նշանակում է, որ

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Կատարված ենթադրության դեպքում, կարող ենք նույն ձևով ապացուցել նաև $f(x) \pm g(x)$ և $f(x)g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը x_0 կետում:

Իսպա

Սահմանում 4: *$y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ X բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է այդ բազմության յուրաքանչյուր կետում:*

Օրինակ 1: Թվային առանցքի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ ֆունկցիայի պարզ օրինակ է $f(x) = x$ ֆունկցիան:

Իրոք, ունենք

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0) \qquad (x_0 \in R),$$

որտեղից եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Քանի որ x_0-ն թվային առանցքի կամայական կետ է, հետևաբար $f(x) = x$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Նախորդ թեորեմի շնորհիվ ամբողջ թվային առանցքի վրա անընդհատ է նաև $g(x)=ax^n$ ֆունկցիան, որտեղ a-ն կամայական հաստատուն է, իսկ n-ը՝ որևէ բնական թիվ:

Նույն թեորեմից հետևում է, որ թվային առանցքի յուրաքանչյուր կետում անընդհատ են նաև

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{ա}$$

ամբողջ բազմանդամը և

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m} \tag{բ}$$

ռացիոնալ ֆունկցիան, եթե իհարկե $Q_m(x)\neq 0$:

Ծանոթանանք նաև ֆունկցիայի միակողմանի անընդհատության հետ:

Սահմանում 5: *Կասենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 կետում անընդհատ է աջից, եթե տեղի ունի*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0) \tag{9}$$

հավասարությունը:

Սահմանում 6: *Կասենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 կետում անընդհատ է ձախից, եթե տեղի ունի*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0) \tag{10}$$

հավասարությունը:

Սահմանում 7: *Եթե (9) և (10) հավասարություններից որևէ մեկը տեղի չունի, ապա կասենք, որ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի խզում՝ աջից կամ ձախից, կախված նրանից, թե նշված առնչություններից համապատասխանաբար որը տեղի չունի:*

Յասկանալի է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a,b]$ հատվածի վրա, ապա այդ հատվածի ձախ (աջ) ծայրակետում կարելի է խոսել միայն տրված ֆունկցիայի աջակողմյան (ձախակողմյան) անընդհատության մասին: Մինչդեռ $[a,b]$ հատվածի ներքին x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունն ակնհայտորեն համարժեք է տրված ֆունկցիայի միաժամանակ աջակողմյան և ձախակողմյան անընդհատությանը՝ այդ կետում:

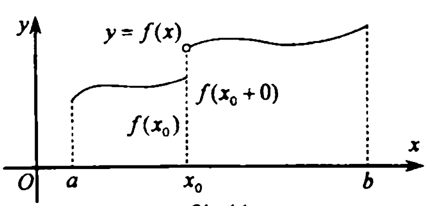
Այժմ ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ միջակայքի ներքին x_0 կետում աջից ունի խզում և դիտարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

ա) *գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$$

վերջավոր սահմանը, բայց այն հավասար չէ $f(x_0)$-ին (նկ. 11):

Ֆունկցիայի դիտարկվող խզումը կոչվում է սովորական կամ առաջին սե-



Նկ.11

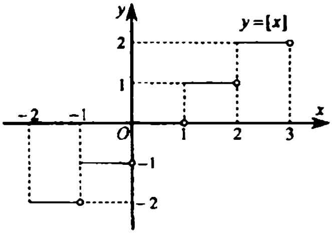
ռի խզում: Քննարկվող դեպքում կասենք նաև, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից ունի թռիչք, որը հավասար է

$$f(x_0+0)-f(x_0)$$

տարբերությանը:

բ) *Հնարավոր է նաև, որ $f(x_0+0)$ սահմանը հավասար է անսահմանության կամ առհասարակ գոյություն չունի:*

Քննարկվող դեպքում կասենք, որ $f(x)$ ֆունկցիան x_0 կետում աջից ունի երկրորդ սեռի խզում:



Նկ.12

Հասկանալի է, որ նույն ձևով կարող ենք քննարկել նաև այն դեպքերը, երբ x_0 ներքին կետում տրված ֆունկցիան ձախից ունի խզում:

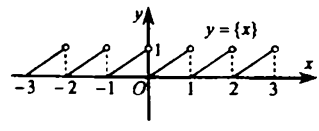
Օրինակ 2: Դիտարկենք

$$y=[x] \qquad (գ)$$

ֆունկցիան (կարդացվում է ամբողջ մաս x)*:

Քանի որ ցանկացած ամբողջարժեք n-ի համար $[n,n+1)$ կիսաբաց միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիայի արժեքները հավասար են n-ի, հետևաբար նրա գրաֆիկն ունի 12-րդ նկարում բերված, աջ ծայրակետեր չունեցող, մեկ երկարությամբ հորիզոնական հատվածներից կազմված աստիճանաձև տեսքը:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած կոտորակային x-ի համար $[x]$-ը անընդհատ ֆունկցիա է: Պարզ է նաև, որ բոլոր ամբողջարժեք x-երի համար տրված ֆունկցիան աջից անընդհատ է, իսկ ձախից՝ խզվող: Ընդ որում բոլոր խզման կետերում դիտարկվող ֆունկցիան ձախից ունի մեկի հավասար թռիչք:



Նկ.13

Օրինակ 3: Դիտարկենք

$$y=\{x\}=x-[x] \qquad (դ)$$

ֆունկցիան (կարդացվում է կոտորակային մաս x):

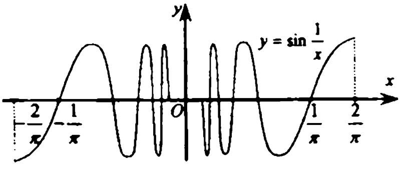
Քանի որ $[0;1)$ կիսաբաց միջակայքում $[x]=0$ (տե՛ս նախորդ օրինակը), հետևաբար այդ միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիան համընկնում է $y=x$ անընդհատ (տե՛ս օրինակ 1-ը) ֆունկցիայի հետ (Նկ.13): Հաշվի առնելով նաև, որ $\{x\}$-ը ակնհայտորեն 1-պարբերական ֆունկցիա է՝ կստանանք, որ ցանկացած կոտորակային x-ի համար այն անընդհատ է: Ինչ վերաբերվում է ամբողջարժեք x-երին, ապա ինչպես և նախորդ օրինակում այդպիսի x-երի համար տրված ֆունկցիան աջից անընդհատ է, ձախից՝ խզվող: Ընդ որում բոլոր խզման կետերում $\{x\}$ ֆունկցիան ձախից ունի մեկի հավասար թռիչք:

---

*) $[x]$-ով կնշանակենք x-ը չգերազանցող ամենամեծ ամբողջ թիվը: Օրինակ.
$[5]=5$, $[7{,}5]=7$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-3]=-3$, $[-2{,}5]=-3$:

Օրինակ 4: Դիտարկենք

$$y=\sin\frac{1}{x}\quad \left(x\neq 0,\ |x|\le \frac{2}{\pi}\right),\qquad (ե)$$



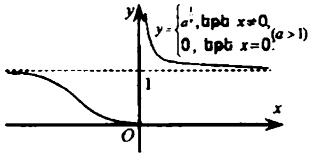
Նկ.14

ֆունկցիան:

Պարզ է, որ եթե x-ը դրական պահելով ձգտեցնենք զրոյի, ապա $1/x$-ը անսահմանափակորեն կմեծանա և դիտարկվող ֆունկցիան տատանվելով -1 և 1 թվերի միջև՝ որոշակի սահմանի չի ձգտի (նկ.14):

Հաշվի առնելով, որ (ե)-ն կենտ ֆունկցիա է (հետևաբար նրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ), եզրակացնում ենք, որ $x=0$ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ինչպե՛ս աջից, այնպե՛ս էլ ձախից ունի երկրորդ սեռի խզում: Ակնհայտ է, որ մնացած բոլոր կետերում (ե)-ն անընդհատ ֆունկցիա է :

Օրինակ 5: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝



Նկ.15

$$f(x)=\begin{cases} a^{\frac{1}{x}}, & \text{եթե } x\neq 0,\\ 0, & \text{եթե } x=0:\end{cases}\qquad (a>1)\qquad (զ)$$

Ունենք

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}a^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad f(-0)=\lim_{x\to-0}a^{\frac{1}{x}}=0:$$

Այսպիսով, $x=0$ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ձախից անընդհատ է (նկ.15), իսկ աջից ունի երկրորդ սեռի խզում:

Օրինակ 6: Դիտարկենք նաև Դիրիխլեի ֆունկցիան, որը տրվում է

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{եթե } x\text{-ը ռացիոնալ թիվ է},\\ 0, & \text{եթե } x\text{-ը իռացիոնալ թիվ է}\end{cases}\qquad (է)$$

բանաձևով:

Ակնհայտ է, որ դիտարկվող ֆունկցիան խզվում է թվային առանցքի յուրաքանչյուր կետում, ինչը նշանակում է, որ այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերել հնարավոր չէ:

Անցնելով մոնոտոն ֆունկցիաների անընդհատության հարցի ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք X միջակայքում[*] որոշված $f(x)$ մոնոտոն ֆունկցիան:

Թեորեմ 2: *X միջակայքում մոնոտոն ֆունկցիան այդ միջակայքում կարող է ունենալ միայն առաջին սեռի խզման կետեր:*

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է X միջակայքում [22,ս12]:

Դիտարկվող միջակայքում վերցնենք որևէ x_0 կետ, որը չի համընկնում այդ միջակայքի ձախ ծայրակետի հետ:

*) X միջակայքը կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ, ինչպես նաև՝ փակ, բաց կամ կիսաբաց:

Նկատի ունենալով, որ տրված միջակայքի յուրաքանչյուր կետում, որը գտնվում է x_0 կետի ձախ կողմում, տեղի ունի $f(x)\le f(x_0)$ անհավասարությունը և օգտվելով մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանին վերաբերող թեորեմից [22,թ4], կստանանք, որ ձախից x-ը x_0-ի ձգտելիս գոյություն ունի

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\le f(x_0) \qquad (11)$$

վերջավոր սահմանը:

Համաձայն սահմանման, եթե (11) առնչության մեջ տեղի ունի հավասարություն, ապա դիտարկվող ֆունկցիան x_0 կետում ձախից անընդհատ է, հակառակ դեպքում՝ առկա է առաջին սեռի խզում:

Կարող ենք նույն ձևով համոզվել, որ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում, որը չի համընկնում նրա աջ ծայրակետի հետ, $f(x)$ ֆունկցիան կա՛մ անընդհատ է աջից, կա՛մ էլ առկա է առաջին սեռի խզում:

Իսկա

Ապացուցած թեորեմի շնորհիվ ստանում ենք մոնոտոն ֆունկցիայի անընդհատությունը հաստատող հետևյալ հարմար հայտանիշը՝

Թեորեմ 3: *Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ մոնոտոն ֆունկցիայի արժեքները հոծ լցնում են Y միջակայքը (այսինքն Y միջակայքի յուրաքանչյուր արժեք դիտարկվող ֆունկցիան գոնե մեկ անգամ ընդունում է), ապա $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է տրված միջակայքում:*

Ապացույց: Դիցուք, որոշակիության համար $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է X միջակայքում և նրա արժեքները հոծ լցնում են Y միջակայքը:

Ենթադրենք X միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում $f(x)$ ֆունկցիան, օրինակ ձախից, ունի խզում: Ինչպես գիտենք, այդ դեպքում թեև գոյություն ունի $f(x_0-0)$ վերջավոր սահմանը, բայց այն փոքր է $f(x_0)$-ից: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճում է X միջակայքում, հետևաբար x_0-ից փոքր x-երի համար տեղի ունի

$$f(x)\le f(x_0-0)$$

անհավասարությունը, իսկ x_0-ից մեծ x-երի համար՝

$$f(x)\ge f(x_0)$$

անհավասարությունը:

Այսպիսով, համաձայն վերոգրյալի, $f(x)$ ֆունկցիան Y միջակայքին պատկանող $f(x_0-0)$ և $f(x_0)$ թվերի միջև ընկած արժեքներն ընդունելու հնարավորություն չունի:

Ստացված հակասությունը ցույց է տալիս, որ կատարված ենթադրությունն այն մասին, որ դիտարկվող միջակայքում տրված ֆունկցիան կարող է ունենալ խզման կետ՝ սխալ է:

Հետևաբար, թեորեմի պայմանների տեղի ունենալու դեպքում $f(x)$ ֆունկ-ցիան անընդհատ է X միջակայքում:

Իպա

Օգտվելով թեորեմ 3-ից՝ կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ հիմնա-կան տարրական ֆունկցիաներն անընդհատ են իրենց որոշման տիրույթնե-րում:

Օրինակ 7: Դիտարկենք

$$y = a^x \quad (a > 1) \qquad (ը)$$

ցուցչային ֆունկցիան:

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան մոնոտոն աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա և նրա արժեքները հոծ լցնում են $(0,+\infty)$ միջակայքը, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 3-ի, այն անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Օրինակ 8: Օգտվելով թեորեմ 3-ից և նկատի ունենալով, որ $y = \sin x$-ը և $y = \cos x$-ը պարբերական ֆունկցիաներ են, կարող ենք համոզվել, որ այդ ֆունկցիաներն անընդ-հատ են ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Օրինակ 9: Դիտարկենք

$$y = \log_a x \quad (a > 1) \qquad (թ)$$

լոգարիթմական ֆունկցիան:

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան մոնոտոն աճում է $(0,+\infty)$ միջակայքում և ընդու-նում է բոլոր իրական արժեքները, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 3-ի այն անընդհատ է իր որոշման տիրույթում:

Այժմ ծանոթանանք ֆունկցիաների համադրույթի կամ բարդ ֆունկցիայի հասկացության հետ:

Եթե $z = z(y)$ ֆունկցիան որոշված է $Y = \{y\}$ բազմության վրա, իսկ $y = y(x)$ ֆունկցիան՝ $X = \{x\}$ բազմության վրա, ընդ որում $y(x)$ ֆունկցիայի արժեք-ները ընկած են Y բազմության մեջ, ապա կասենք, որ z-ը y-ի միջոցով x-ի բարդ ֆունկցիա է կամ պարզապես z-ը x-ի բարդ ֆունկցիա է և այդ փաստը կնշենք հետևյալ կերպ.*)

$$z(x) = z[y(x)]: \qquad (12)$$

Վերոգրյալից հետևում է, որ $z(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը կազմ-ված է $y(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող այն արժեքներից, որոնց համապատասխան $y(x)$ արժեքները պատկանում են $z(y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին:

Նշենք, որ $y(x)$ ֆունկցիայի արժեքները $z(y)$ ֆունկցիայի որոշման տի-րույթին պատկանելու պահանջն էական է և այն բաց թողնելու դեպքում կա-րող ենք հանգել անհեթեթության:

Օրինակ 10: $y(x) = \cos x$ և $z(y) = \ln y$ ֆունկցիաներից կազմված

---

*) (12) բանաձևով տրվող ֆունկցիային կանվանենք նաև $y(x)$ և $z(y)$ ֆունկցիաների համադրույթ:

$$z(x) = \ln\cos x$$

բարդ ֆունկցիան իր իմաստը կորցնում է $\cos x \le 0$ անհավասարությանը բավարարող x-երի համար: Հետևաբար, բերված օրինակում մենք պետք է դիտարկենք x-ի այնպիսի արժեքներ, որոնց համար $\cos x > 0$:

Հասկանալի է, որ (12) բանաձևով տրված $z(x)$ բարդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող որևէ x կետում այդ ֆունկցիայի արժեքը ստանալու համար նախ պետք է վերցրած կետում գտնել $y(x)$ ֆունկցիայի արժեքը, այնուհետև y-ի ստացած արժեքով գտնել $z(y)$ ֆունկցիայի համապատասխան արժեքը:

Այժմ ապացուցենք բարդ ֆունկցիայի անընդհատությանը վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *Եթե X բազմության վրա որոշված $y(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ բազմության x_0 կետում, իսկ $z(y)$ ֆունկցիան՝ x_0 արժեքին համապատասխանող $y_0 = y(x_0)$ կետում, ապա $z[y(x)]$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:*

Ապացույց: Դիցուք X բազմության վրա որոշված $y(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ բազմության x_0 կետում, իսկ $z(y)$ ֆունկցիան՝ $y_0 = y(x_0)$ կետում:

Ինչպես գիտենք y_0 կետում $z(y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը նշանակում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի σ դրական թիվ, որ հենց

$$|y - y_0| < \sigma,$$

տեղի ունի

$$|z(y) - z(y_0)| < \varepsilon \qquad (13)$$

անհավասարությունը:

Մյուս կողմից, քանի որ $y(x)$ ֆունկցիան էլ անընդհատ է x_0 կետում, հետևաբար այդ σ-ի համար կգտնվի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x - x_0| < \delta,$$

տեղի կունենա

$$|y(x) - y(x_0)| = |y - y_0| < \sigma, \qquad (14)$$

անհավասարությունը:

Վերոգրյալից հետևում է, որ ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց

$$|x - x_0| < \delta\,,$$

տեղի ունի

$$\left|z[y(x)]-z[y(x_0)]\right|<\varepsilon$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left|z(x)-z(x_0)\right|<\varepsilon$$

անհավասարությունը, ինչն էլ համաձայն սահմանման նշանակում է, որ (12) ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում:

Իսպ

Օրինակ 11:

$$y=x^a \quad (x>0) \qquad (\text{ժ})$$

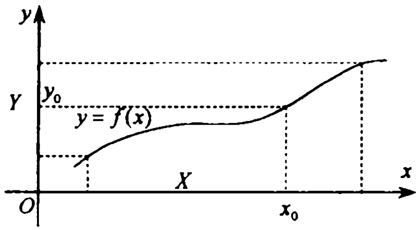
աստիճանային ֆունկցիան ներկայացնելով լոգարիթմական ու ցուցչային ֆունկցիաների համադրույթով ստացվող

$$y=e^{a\ln x}$$

տեսքով և օգտվելով լոգարիթմական ու ցուցչային ֆունկցիաների անընդհատությունից՝ թեորեմ 4-ի շնորհիվ կստանանք, որ դիտարկվող աստիճանային ֆունկցիան անընդհատ է իր որոշման տիրույթում:

Անցնելով հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատությանը վերաբերող թեորեմի ձևակերպմանը՝ նախ կատարենք մի քանի պարզաբանումներ:

Ենթադրենք X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը Y միջակայքն է (նկ.16): Եթե Y միջակայքում ընտրենք որևէ y_0 արժեք, ապա անհրաժեշտաբար X միջակայքում կգտնվի այնպիսի x_0 արժեք, որի դեպքում դիտարկվող ֆունկցիան կստանա հատկապես y_0 արժեքը.



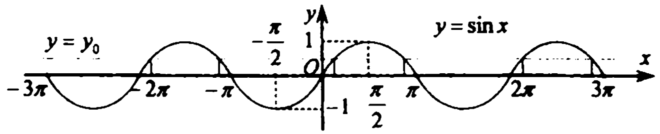
Նկ.16

$$f(x_0)=y_0: \qquad (15)$$

Հնարավոր է, որ x-ի այդպիսի արժեքները լինեն մի քանիսը՝ նույնիսկ անվերջ քանակությամբ:

Օրինակ 12: $y=\sin x$ ֆունկցիայի պարագայում $[-1;1]$ միջակայքում y-ի ինչպիսի y_0 արժեք էլ վերցնենք, գոյություն կունենան x-ի անվերջ քանակությամբ արժեքներ (նկ.17).

$$x=(-1)^n \arcsin y_0+\pi n,\ n\in Z,$$



Նկ.17

որոնց համար $\sin x=y_0$:

Վերևում նկարագրված ձևով Y միջակայքից վերցրած y-ի յուրաքանչյուր արժեքի համապատասխանեցնելով x-ի մեկ կամ մի քանի արժեքներ՝ կստանանք Y բազմության վրա որոշված միարժեք կամ բազմարժեք $x=\varphi(y)$ ֆունկցիա, որն էլ կոչվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա:

Նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքը որոշում է $\varphi(y)$ ֆունկցիայի միարժեք կամ բազմարժեք լինելը.

Եթե ox առանցքին զուգահեռ յուրաքանչյուր ուղիղ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ հատվում է ամենաշատը մեկ կետում, ապա $x=\varphi(y)$-ը միարժեք ֆունկցիա է: Իսկ եթե նշված ուղիղներից գոնե մեկը $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ հատվում է մի քանի կետում, ապա $\varphi(y)$-ը բազմարժեք ֆունկցիա է:

Վերոգրյալից հետևում է, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան X միջակայքի տարբեր կետերում ընդունում է իրարից տարբեր արժեքներ (ինչպես, օրինակ 16-րդ նկարում պատկերված դեպքում), ապա (15) հավասարության մեջ մասնակցող x_0-ն կլինի y-ի վերցրած արժեքին համապատասխանող միակ արժեքը:

Նման դեպքերում կասենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է X միջակայքում:

Յասկանալի է, որ աբսցիսների առանցքին զուգահեռ ցանկացած ուղղի հետ փոխմիարժեք ֆունկցիայի գրաֆիկը կա՛մ չի հատվում, կա՛մ էլ հատվում է մեկ կետում:

Նշենք, որ ոչ բոլոր ֆունկցիաներն ունեն միարժեք հակադարձ ֆունկցիա:

Օրինակ 13: Դիտարկենք $X=(-\infty,+\infty)$ միջակայքում որոշված

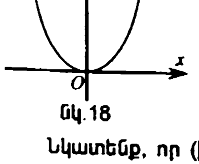
$$y=x^2 \tag{ի}$$

ֆունկցիան (նկ.18):

Քանի որ $[0,+\infty)$ միջակայքից վերցրած y-ի յուրաքանչյուր արժեքի X միջակայքում համապատասխանում է երկու արժեք.

$$x=\pm\sqrt{y}, \tag{լ}$$

հետևաբար դիտարկվող ֆունկցիայի հակադարձը երկարժեք ֆունկցիա է:



Նկ.18

Սովորաբար երկարժեք (լ) ֆունկցիայի փոխարեն անջատ-անջատ դիտարկում են

$$x=-\sqrt{y} \text{ և } x=\sqrt{y} \tag{խ}$$

միարժեք ֆունկցիաները, որոնց անվանում են (լ) ֆունկցիայի միարժեք «ճյուղեր»:

Նկատենք, որ (խ) ֆունկցիաները կարող ենք համարել նաև համապատասխանաբար $(-\infty,0]$ և $[0,+\infty)$ միջակայքերում որոշված (ի) ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիաներ:

Այժմ առանց ապացույցի ձևակերպենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Որևէ միջակայքում որոշված անընդհատ և մոնոտոն աճող (նվազող) ֆունկցիայի համար գոյություն ունի այդ ֆունկցիայի արժեքների բազմության վրա որոշված միարժեք հակադարձ ֆունկցիա, որը նույնպես անընդհատ է և մոնոտոն աճող (նվազող):*

Նկատենք, որ տրված ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի $x=\varphi(y)$ բանաձևում անկախ փոփոխականը y-ն է, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ x-ը: Հաշվի առնելով, որ սովորաբար ֆունկցիայի անկախ փոփոխականը նշանակում են x տառով, իսկ կախյալ փոփոխականը՝ y տառով, $x=\varphi(y)$ ֆունկցիայի գրառման մեջ փոխենք x և y տառերի տեղերը.

$$y=\varphi(x):$$

Ամփոփելով վերը շարադրվածը՝ ստանում ենք փոխմիարժեք ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան գտնելու հետևյալ կանոնը՝

$y=f(x)$ *փոխմիարժեք ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիայի տեսքը ստանալու համար անհրաժեշտ է* $y=f(x)$ *հավասարությունից* x *-ը արտահայտել* y *-ի միջոցով և ստացված բանաձևում փոխել* x *և* y *տառերի տեղերը:*

Նշենք, որ գոյություն ունեն ֆունկցիաներ, որոնք համընկնում են իրենց հակադարձ ֆունկցիայի հետ:

Օրինակ 14: Գտնել

$$y=\frac{1}{x} \tag{ծ}$$

ֆունկցիայի հակադարձ ֆոնկցիան և համոզվել, որ այն համընկնում է դիտարկվող ֆունկցիայի հետ:

Լուծում: Տրված ֆունկցիայի և՛ որոշման տիրույթը, և՛ արժեքների տիրույթը $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ բազմությունն է:

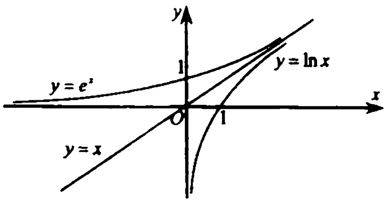
(ծ) հավասարումից x-ը արտահայտելով y-ով՝ կունենանք

$$x=\frac{1}{y}:$$

Ստացված հավասարման մեջ փոխելով x-ի և y-ի տեղերը՝ կհամոզվենք, որ դիտարկվող ֆունկցիայի հակադարձը նույնպես (ծ) ֆունկցիան է:

Վերջում բերենք հետևյալ ակնհայտ և միևնույն ժամանակ կարևոր պնդումը՝

Փոխմիարժեք ֆունկցիայի և նրա հակադարձ ֆունկցիայի գրաֆիկները համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ:



Նկ.19

Օրինակ 15: $y=e^x$ և $y=\ln x$, այսպես կոչված, փոխհակադարձ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ.19) ակնհայտորեն համաչափ են $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

§25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$ նշանավոր սահմանները: Փակ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները:

Թվային հաջորդականությունների հատկություններն ուսումնասիրելիս մենք ծանոթացել ենք

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty \tag{1}$$

տեսքի անորոշությունների հետ, ինչպես նաև դիտարկել ենք այդպիսի անորոշությունների «բացման» վերաբերող մի քանի օրինակներ [21]:

Քանի որ ֆունկցիաների սահմաններ հաշվելիս էլ մենք հաճախ գործ կունենանք նշված տեսքի անորոշությունների հետ, հետևաբար խիստ կարևորվում են այն բոլոր միջոցները, որոնց օգնությամբ հնարավոր է դառնում ֆունկցիաներից կազմված (1) տեսքի անորոշությունների բացումը:

Այս պարագրաֆում մենք կծանոթանանք մի շարք այնպիսի նշանավոր սահմանների հետ, որոնց դերը անգնահատելի է $0/0$ և 1^∞ տեսքի բազմաթիվ անորոշությունների բացման գործում:

I. *Ցույց տանք, որ x-ը զրոյի ձգտելիս տեղի ունի*

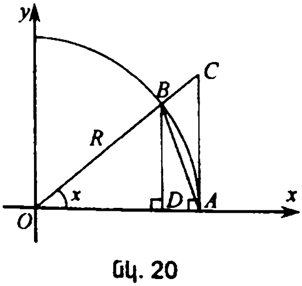
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{2}$$

հավասարությունը:

Նշված հավասարությունն ապացուցելու համար նախ նկատենք, որ $\sin x/x$ ֆունկցիան $x=0$ կետում որոշված չէ: Մյուս կողմից $y=\sin x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից [24,o8] հետևում է, որ

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,$$

ինչը նշանակում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս (2) հավասարության ձախ կողմում գործ ունենք $0/0$ տեսքի անորոշության հետ: Դիտարկվող անորոշությունը պարզելու համար R շառավղով քառորդ շրջանի մեջ (Նկ.20) դիտարկենք $\angle AOB=x$ սուր անկյունը:



Նկ. 20

Քանի որ AOB եռանկյան մակերեսը փոքր է AOB սեկտորի մակերեսից, իսկ այդ սեկտորի մակերեսն էլ փոքր է AOC եռանկյան մակերեսից, ուստի

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2 tgx:^{*)} \qquad (3)$$

Ստացված կրկնակի անհավասարությունների բոլոր անդամները բաժանելով $R^2/2$-ի վրա՝ կունենանք

$$\sin x<x<tgx: \qquad (4)$$

Նկատի ունենալով, որ սուր անկյան սինուսը դրական է, (4) անհավասարություններից կստանանք

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}: \qquad (5)$$

Քանի որ քննարկվող դեպքում $\cos x$-ն էլ է ընդունում միայն դրական արժեքներ, հետևաբար (5) անհավասարություններում շրջելով կոտորակները՝ կունենանք

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1: \qquad (6)$$

Օգտվելով

$$\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}\quad(\alpha\neq 0),\qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

նույնություններից՝ կարող ենք պնդել, որ (6) գնահատականը ճիշտ է նաև x-ի բացասական արժեքների համար:

Ինչպես երևում է (6) անհավասարություններից, $\sin x/x$ ֆունկցիան գտնվում է երկու մեծությունների միջև, որոնք x-ը զրոյի ձգտելիս, ձգտում են մեկի [24,օ8].

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\quad \lim_{x\to 0}1=1:$$

Հետևաբար, միջանկյալ ֆունկցիայի սահմանին վերաբերող թեորեմի շնորհիվ [22,թ3] x-ը զրոյի ձգտելիս $\sin x/x$ ֆունկցիան նույնպես ձգտում է մեկի:

Ինչ

Օրինակ 1: Հաշվել

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right) \qquad (ա)$$

սահմանը:

Լուծում: Օգտվելով (2) նշանավոր սահմանից և $y=\cos x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից՝ կստանանք [22,(20'),(21')]

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1:$$

---

*) Քանի որ մեկ ռադիան և R շառավիղ ունեցող սեկտորի մակերեսը հավասար է $\pi R^2/2\pi$-ի, հետևաբար x ռադիան ունեցող R շառավղով սեկտորի մակերեսն արտահայտվում է $S_x=\frac{1}{2}R^2x$ բանաձևով:

Օրինակ 2: Հաշվել

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)\tag{բ}$$

սահմանը:

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{4}:$$

Օրինակ 3: Հաշվել

$$\lim_{x\to \pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{2(1+\cos x)}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

սահմանը:

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի $x-\pi=t$ փոխարինում և օգտվելով (2) նշանավոր սահմանից ու եռանկյունաչափությունից հայտնի բերման բանաձևերից՝ կունենանք

$$\lim_{x\to \pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{2(1+\cos x)}=\lim_{t\to 0}\frac{t\sin t}{2(1-\cos t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2=1:$$

II. *Այժմ ցույց տանք, որ x -ը զրոյի ձգտելիս տեղի ունի*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\qquad(1^\infty)\tag{7}$$

հավասարությունը:

Բերված հավասարությունն ապացուցելու համար, նախ ցույց տանք, որ տեղի ունի

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\qquad(1^\infty)\tag{8}$$

հավասարությունը:

Քանի որ (8) հավասարության մեջ x -ը ձգտում է պլյուս անսահմանության, հետևաբար x -ի մեծ հետաքրքրող յուրաքանչյուր արժեք գտնվում է իրար հաջորդող երկու բնական թվերի միջև.

$$n\le x<n+1\qquad(x>0):\tag{9}$$

Անուհետև դժվար չէ համոզվել, որ (9) անհավասարությունների շնորհիվ տեղի ունեն նաև

$$\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1},\quad 1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1},\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\tag{10}$$

անհավասարությունները:

Նկատի ունենալով, որ x -ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս n -ը նույնպես ձգտում է այդ սահմանին և օգտվելով

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

հավասարությունից [21,(32)], կստանանք [21,(5′),(7′)]

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e:$$

Պահանջվող հավասարությունն ապացուցելու համար մնում է (10) կրկնակի անհավասարություններից վերջինի վրա կիրառել միջանկյալ ֆունկցիայի սահմանին վերաբերող թեորեմը:

(8) հավասարության մեջ կատարելով փոփոխականի $x=1/t$ փոխարինում և հաշվի առնելով, որ x-ը անվերջի ձգտելիս t-ն ձգտում է զրոյի՝ կունենանք

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$$

կամ

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e:$$

Իպս

Այժմ, եթե կատարենք փոփոխականի $x=-(t+1)$ փոխարինում և նկատի ունենանք, որ x-ը մինուս անվերջի ձգտելիս t-ն կձգտի պլյուս անվերջի՝ (8) հավասարության հաշվառումով կստանանք

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1$$

կամ

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e: \qquad (1^{\infty}) \qquad (11)$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ հավասարությունները՝

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e:$$

Նշենք, որ e թվի բոլոր կիրառությունների հիմքում դրվում է (7) հավասարությունը:

Օրինակ 4: Հաշվել

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \qquad (a=const, a\neq 0) \qquad\qquad (գ)$$

սահմանը:

Լուծում: Հաշվի առնելով, որ n-ը անվերջի ձգտելիս a/n քանորդը ձգտում է զրոյի և օգտվելով e թվի (7) ներկայացումից ու աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատությունից [24,օ11], կստանանք

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^a=e^a:$$

Օրինակ 5: Հաշվել

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \qquad\qquad (1^\infty)$$

սահմանը:

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}:$$

e թվի ավելի լայն կիրառություններ ստանալու և ընդհանրապես

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} \qquad\qquad (12)$$

տեսքի ավելի բարդ սահմաններ դիտարկելու նպատակով նախ բերենք հետևյալ սահմանումը՝

Սահմանում 1:

$$y=[u(x)]^{v(x)} \qquad\qquad (13)$$

տեսքի ֆունկցիան կոչվում է աստիճանացուցչային ֆունկցիա:

Դիցուք x_0-ն (13) ֆունկցիայի որոշման տիրույթի սահմանային կետ է [18,ս18]: Ենթադրելով, որ x-ը x_0-ի ձգտելիս գոյություն ունեն

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=a \quad (a>0), \quad \lim_{x\to x_0}v(x)=b \qquad\qquad (14)$$

վերջավոր սահմանները՝ դնենք (12) սահմանը հաշվելու խնդիրը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար դիտարկվող աստիճանացուցչային ֆունկցիան ներկայացնենք

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)} \qquad\qquad (15)$$

տեսքով և օգտվելով ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաների անընդհատությունից [24,օ7,օ9]՝ հաշվենք (12) սահմանը.

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)\ln u(x)]}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\ln u(x)}=e^{b\ln a}=a^b:$$

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե x_0-ն (13) աստիճանացուցչային ֆունկցիայի որոշման տիրույթի սահմանային կետ է և x-ը x_0-ի ձգտելիս գոյություն ունեն (14) վերջավոր սահմանները, ապա տեղի ունի*

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} = \left[\lim_{x\to x_0} u(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = a^b \qquad (16)$$

հավասարությունը:

Օրինակ 6: Հաշվել

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^x$$

սահմանը:

Լուծում: Դիտարկվող օրինակում ունենք [22,o2]

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{3x-1} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to+\infty} v(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty:$$

Ստացված հավասարությունների հաշվառումով դիտարկվող սահմանի համար կունենանք

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^x = 0:$$

Օրինակ 7: Հաշվել

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \qquad (1^\infty)$$

սահմանը:

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}} = \left[\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}:$$

Քառակուսի փակագծերում գրված սահմանը հաշվելու համար կատարենք փոփոխականի $\sin x = t$ փոխարինում և հաշվի առնենք, որ x-ը զրոյի ձգտելիս t-ն նույնպես ձգտում է զրոյի: (7) հավասարության հաշվառումով արդյունքում կունենանք

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e:$$

Օգտվելով նաև (2) նշանավոր սահմանից և (16) հավասարությունից՝ վերջնականապես կստանանք

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e:$$

Օրինակ 8: Հաշվել

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} \qquad (1^\infty)$$

սահմանը:

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}:$$

III. *Այժմ ապացուցենք*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0, a\neq 1) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{17}$$

հավասարությունը:

Օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունից և (7) նշանավոր սահմանից՝ կունենանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e:$$

Իսկ

(17) հավասարության մեջ ընդունելով $a=e$, կստանանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1: \quad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{17'}$$

Օրինակ 9: Հաշվել

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

սահմանը:

Լուծում: Օգտվելով (2) և (17′) նշանավոր սահմաններից՝ կունենանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1:$$

IV. *Անցնենք*

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \tag{18}$$

հավասարության ապացույցին:

Կատարելով փոփոխականի

$$a^x-1=y \tag{19}$$

փոխարինում և օգտվելով ցուցչային ֆունկցիայի անընդհատությունից, կստանանք, որ x-ը զրոյի ձգտելիս y-ը նույնպես ձգտում է զրոյի: Մյուս կողմից, (19) հավասարությունից x-ը արտահայտելով y-ով.

$$x=\log_a(1+y)$$

և օգտվելով (17) նշանավոր սահմանից, կունենանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a:$$

Իսկ

(18) հավասարության մեջ ընդունելով $a=e$, կստանանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1: \tag{18'}$$

(18′) հավասարությունից երևում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս $y=x$ և $y=e^x-1$ ֆունկցիաները համարժեք անվերջ փոքր մեծություններ են [23,ս7]:

Օրինակ 10: Հաշվել

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}\quad\cos x}{x^2}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

սահմանը:

Լուծում: Օգտվելով (18′) նշանավոր սահմանից՝ կունենանք [23,օ4]

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}:$$

V. *Վերջում ստանանք նաև*

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\qquad(\alpha=const)\qquad\left(\frac{0}{0}\right)\tag{20}$$

Նշանավոր սահմանը:

Կատարելով փոփոխականի

$$(1+x)^\alpha-1=y\tag{21}$$

փոխարինում և օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի անընդհատությունից, կստանանք, որ x-ը զրոյի ձգտելիս y-ը ևս ձգտում է զրոյի: Մյուս կողմից (21) հավասարությունից կունենանք

$$\alpha\ln(1+x)=\ln(1+y):\tag{21′}$$

Օգտվելով նաև (17′) նշանավոր սահմանից՝ (21′) հավասարության հաշվառումով կստանանք

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y\ln(1+y)}{x\ln(1+y)}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha y\ln(1+x)}{x\ln(1+y)}=\alpha\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\alpha:$$

Իպա

Մասնավոր դեպքում, (20) հավասարության մեջ ընդունելով $\alpha=1/n$ $(n\in N)$, կունենանք

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{n}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)\tag{20′}$$

(20′) Նշանավոր սահմանից երևում է, որ x-ը զրոյի ձգտելիս $y=x$ և $y=(1+x)^\alpha-1$ ֆունկցիաները նույն կարգի անվերջ փոքր մեծություններ են [23,ս3]:

Օրինակ 11. Հաշվել

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\qquad\left(\frac{0}{0}\right)$$

սահմանը:

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+x^2}\cdot\frac{x+x^2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+x^2}\cdot\lim_{x\to 0}(x+1):$$

Ստացված սահմաններից առաջինը հաշվելու համար կատարենք փոփոխականի $x+x^2=y$ փոխարինում և նկատենք, որ x-ը զրոյի ձգտելիս, y-ը ևս ձգտում է զրոյի [24.01]:

Օգտվելով նաև (20′) հավասարությունից՝ կունենանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x+x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{y}=\frac{1}{2}:$$

Նկատի ունենալով, որ

$$\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

վերջնականապես կստանանք

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{1}{2}:$$

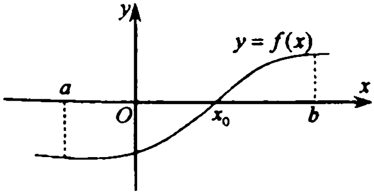
Այժմ ծանոթանանք փակ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաների կարևորագույն հատկությունների հետ՝ ձևակերպելով վերջիններս թեորեմների տեսքով:

Թեորեմ 2: *(Բոլցանո-Կոշի) Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[a,b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ, ապա a և b կետերի միջև գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում տրված ֆունկցիայի արժեքը հավասար է զրոյի.*

$$f(x_0)=0\qquad (a<x_0<b):$$

Նշենք, որ $[a,b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիային վերաբերող ձևակերպած հատկությունն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն.

Եթե անընդհատ կորն ox առանցքի մի կողմից անցնում է նրա մյուս կողմը (նկ.21), ապա այն անհրաժեշտաբար հատում է նշված առանցքը:



նկ.21

Նկատենք, որ $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը $[a,b]$ հատվածում էական է և այն հանելու դեպքում թեորեմը կորցնում է իր ուժը:

Օրինակ 12: $f(x)=[x]-1/2$ ֆունկցիան [24.o2] $[0;1]$ հատվածի ոչ մի կետում զրո չի դառնում (նկ.22), չնայած այդ հատվածի ծայրակետերում այն ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ:

Օրինակ 13: Ապացուցել, որ $2^x=4x$ հավասարումը $[0;0{,}5]$ միջակայքում ունի արմատ:

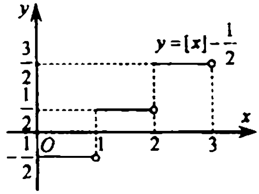
Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար դիտարկենք

$$f(x)=2^x-4x$$

անընդհատ ֆունկցիան [24,p1,o7]:

Քանի որ տրված հատվածի ծայրակետերում դիտարկվող ֆունկցիան ընդունում է տարբեր նշանների արժեքներ.

$$f(0)=1>0,\quad f(0,5)=\sqrt{2}-2<0,$$



Նկ.22

հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, նշված հատվածի ներսում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ $f(x_0)=0$ կամ որ նույնն է՝ տեղի ունի

$$2^{x_0}=4x_0 \qquad (0<x_0<0,5)$$

հավասարությունը, ինչն էլ նշանակում է, որ դիտարկվող հավասարումը $[0;0,5]$ հատվածի ներսում ունի արմատ:

Թեորեմ 2-ը կարելի է ընդհանրացնել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 3: *(Բոլցանո-Կոշի) Եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[a,b]$ հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է իրարից տարբեր արժեքներ.*

$$f(a)=A,\quad f(b)=B,\quad (A\neq B),$$

ապա ինչպիսի C թիվ էլ վերցնենք, որն ընկած է A և B թվերի միջև, (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ

$$f(x_0)=C:$$

Նկատենք, որ եթե A-ն ու B-ն ունեն տարբեր նշաններ, ապա որպես C կարող ենք վերցնել, օրինակ զրոն՝ ինչը նշանակում է, որ թեորեմ 2-ը իսկապես հանդիսանում է թեորեմ 3-ի մասնավոր դեպքը:

Ըստ էության թեորեմ 3-ը նշանակում է, որ եթե որևէ X միջակայքում (փակ կամ բաց, վերջավոր կամ անվերջ) որոշված անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է իրարից տարբեր երկու արժեքներ, ապա այն գոնե մեկ անգամ ընդունում է այդ արժեքների մեջ ընկած յուրաքանչյուր միջանկյալ արժեք:

Այլ խոսքով, որևէ միջակայքում որոշված և նույնաբար հաստատուն ֆունկցիայից տարբեր անընդհատ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմությունը նույնպես հոծ միջակայք է:

Այժմ ենթադրենք մի որևէ X միջակայքում որոշված է $y=f(x)$ ֆունկցիան, այսինքն ենթադրենք, որ X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է վերջավոր արժեք:

Հարց է ծագում. արդյո՞ք $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է X միջակայքում:

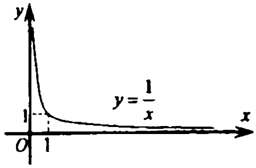
Պարզվում է, որ ընդհանրապես ասած, մի որևէ միջակայքում որոշված լինելը բավարար չէ, որպեսզի տրված միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիան լինի սահմանափակ:

Օրինակ 14: $[0;1]$ հատվածում դիտարկենք

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ երբ } x\in(0;1], \\ 0, \text{ երբ } x=0\end{cases} \qquad (դ)$$

ֆունկցիան:

Թեև $[0;1]$ հատվածի յուրաքանչյուր կետում (դ) ֆունկցիան ընդունում է վերջավոր



Նկ.23

արժեք (նկ.23), բայց այնուամենայնիվ այն սահմանափակ չէ նշված միջակայքում, որովհետև x-ը զրոյի ձգտելիս, տեղի ունի

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty$$

հավասարությունը [22,(3)]:

Նշենք, որ $x=0$ կետում դիտարկվող ֆունկցիան աջից ունի երկրորդ սեռի խզում [24,ս7,բ)]:

Հետևյալ թեորեմը ցույց է տալիս, որ փակ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիայի պարագայում պատկերը փոխվում է էապես:

Թեորեմ 4: *(Վեյերշտրաս) $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է այդ հատվածի վրա, այսինքն գոյություն ունեն այնպիսի m և M հաստատուններ, որ տրված հատվածի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունեն*

$$m\le f(x)\le M$$

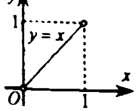
անհավասարությունները:

Ինչպես գիտենք [18,օ3], անվերջ թվային բազմությունը, եթե նույնիսկ այն սահմանափակ է, իր կազմում կարող է և չունենալ ամենամեծ կամ ամենափոքր տարր:

Օրինակ 15: $x_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$ թվային բազմությունն իր կազմում չունի ամենափոքր տարր:

Նույն ձևով, մի որևէ X բազմության վրա որոշված, նույնիսկ սահմանափակ $f(x)$ ֆունկցիան իր արժեքների բազմության մեջ կարող է չունենալ ամենամեծ կամ ամենափոքր արժեք: Վերոգրյալը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքների բազմության ճշգրիտ վերին և ճշգրիտ ստորին եզրերը կարող են և հասանելի չլինել այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթում [18,ս32]:

Օրինակ 16: $y=\{x\}$ ֆունկցիայի [24,օ3] արժեքների բազմության ճշգրիտ վերին եզրը ցանկացած $[0;b]$ $(b\ge1)$ հատվածում հավասար է մեկի (նկ.13), սակայն այդ արժեքը դիտարկվող ֆունկցիայի համար ոչ մի կետում հասանելի չէ:



Նկ.24

Օրինակ 17: $y=x$ ֆունկցիայի արժեքների բազմության ճշգրիտ ստորին եզրը $(0;1)$ միջակայքում զրոն է (նկ.24), սակայն այդ միջակայքի ոչ մի կետում տրված ֆունկցիան նշված արժեքը չի ընդունում:

Հետևյալ թեորեմը պարզաբանում է դիտարկված օրինակները՝

Թեորեմ 5: *(Վեյերշտրաս) $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ հատվածի վրա հասնում է իր արժեքների բազմության ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերին:*

Այլ խոսքով, եթե $f(x)$-ը $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիա է, ապա այդ հատվածի վրա գոյություն ունեն այնպիսի x_0 և x_1 կետեր, որ $f(x_0)$-ն և $f(x_1)$-ը դիտարկվող ֆունկցիայի բոլոր արժեքներից համապատասխանաբար փոքրագույնն ու մեծագույնն են:

Թեորեմ 3-ից բխող եզրակացությունը միավորելով թեորեմ 5-ի հետ՝ ստանում ենք հետևյալ պնդումը՝

$[a,b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը $[m,M]$ հատվածն է, որտեղ m-ը և M-ը տրված ֆունցիայի ընդունած արժեքների բազմության համապատասխանաբար ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերն են:

Վերջում ծանոթանանք հետևյալ հասկացության հետ՝

Սահմանում 2: *Եթե $f(x)$-ը X միջակայքում որոշված սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա*

$$\omega = M - m\,, \quad M = \sup_{x\in X}\{f(x)\}, \quad m = \inf_{x\in X}\{f(x)\}$$

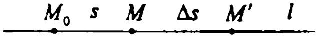
տարբերությունը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի տատանում X միջակայքի վրա:

ԳԼՈՒԽ V

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

§26. Ածանցյալի հասկացությանը բերող խնդիր: Ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանումը և նրա երկրաչափական իմաստը: Կորի տրված կետում այդ կորին տարած շոշափողի և նորմալի հավասարումները: Գաղափար ֆունկցիայի միակողմանի և անվերջ ածանցյալների մասին:

Դիֆերենցիալ հաշվի կենտրոնական հասկացության՝ ֆունկցիայի ածանցյալի հետ ծանոթանալու համար նախ դիտարկենք այդ հասկացությանը բերող հետևյալ խնդիրը՝



Նկ.25

Դիցուք l ուղղի վրայով անհավասարաչափ շարժվող մարմինը ժամանակի t_0 պահին գտնվում է այդ ուղղի M_0 կետում, իսկ t պահին՝ M կետում (Նկ.25): Պարզ է, որ մարմնի անցած $s=M_0M$ ճանապարհը կախված է t-ից, այսինքն s-ը ֆունկցիա է t-ից.

$$s=s(t):$$

Շարժվող մարմնի արագությունը ժամանակի t պահին որոշելու համար t փոփոխականին տանք Δt աճ և ենթադրենք, որ ժամանակի $t+\Delta t$ պահին մարմինը գտնվում է M_0 կետից $s+\Delta s$ հեռավորության վրա գտնվող M' կետում: Այսինքն ենթադրենք, որ Δt ժամանակամիջոցում M_0 և M կետերի միջև եղած s հեռավորությունը մեծանում է Δs-ով, կամ ստանում է Δs աճ: Այնուհետև դիտարկենք

$$v_{մ}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

քանորդը, որն իրենից ներկայացնում է մարմնի շարժման միջին արագությունը Δt ժամանակամիջոցի ընթացքում:

Հասկանալի է, որ մարմնի արագությունը M կետում մոտավորապես հավասար է $v_{մ}$-ին և Δt-ի փոքրացմանը զուգընթաց այդ մոտավորության ճշտությունը մեծանում է:

Սահմանում 1: *Ժամանակի t պահին մարմնի շարժման արագությունը այն սահմանն է, որին ձգտում է նրա միջին արագությունը, երբ Δt-ն ձգտում է զրոյի.*

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, անհավասարաչափ շարժման ժամանակ մարմնի արագության հասկացությունը կապված է ֆունկցիայի սահմանի հասկացության հետ [22,ս3]:

Այժմ ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքում*)։ Նշված միջակայքում վերցնենք x-ի որևէ արժեք (նկ.27) և այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ $(\Delta x \neq 0)$, որ ստացված $x + \Delta x$ նոր արժեքը դուրս չգա X միջակայքի սահմաններից: Այդ դեպքում դիտարկվող ֆունկցիայի «հին» $f(x)$ արժեքը կփոխարինվի «նոր» $f(x + \Delta x)$ արժեքով, ինչը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան կստանա աճ: Ֆունկցիայի ստացած աճը նշանակենք Δy -ով.

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y,$$

կազմենք $\Delta y / \Delta x$ քանորդը և հաշվենք այդ քանորդի սահմանը, երբ արգումենտի աճը ձգտում է զրոյի:

Սահմանում 2: *Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի Δy աճի և այդ աճն առաջացնող անկախ փոփոխականի Δx աճի հարաբերությունը, Δx -ը զրոյի ձգտելիս ունի սահման, ապա այդ սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալ ըստ x անկախ փոփոխականի և նշանակվում է*

$$y'(x),\ f'(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման, $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը x_0 կետում (եթե այն գոյություն ունի) արտահայտվում է հետևյալ հավասարության միջոցով՝

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}: \tag{2}$$

Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից, կստանանք, որ վերևում դիտարկված անհավասարաչափ շարժում կատարող մարմնի արագությունը ժամանակի t պահին հավասար է այդ մարմնի անցած ճանապարհի ածանցյալին ըստ ժամանակի.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t):$$

Նկատենք, որ անկախ փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համար $f'(x)$ ածանցյալը ստանում է որոշակի արժեք (եթե այն ընդհանրապես գոյություն ունի), ինչը նշանակում է, որ ընդհանուր դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը նույնպես ֆունկցիա է x -ից:

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ ֆունկցիաների ածանցյալները՝

---

*) Տե՛ս 66 -րդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

ա) $f(x)=\sqrt{x}$, բ) $f(x)=e^{2x}$:

Լուծում: Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից՝ կունենանք [22,(20′),(21′)], [25,(18′)]

ա) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

հետևաբար

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}:$$

բ) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{2(x+\Delta x)}-e^{2x}}{\Delta x}=e^{2x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{2\Delta x}-1}{\Delta x}=2e^{2x}\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}=2e^{2x}$ $(t=2\Delta x)$,

հետևաբար

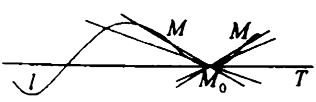
$$\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}:$$

Անցնելով ֆունկցիայի ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությանը՝ նախ ծանոթանանք կորի որևէ կետում այդ կորին տարած շոշափողի սահմանմանը:

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ շրջանագծի շոշափողն այն ուղիղն է, որն այդ շրջանագծի հետ ունի միայն մեկ ընդհանուր կետ:

Պարզվում է, որ շրջանագծի շոշափողի սահմանումն ունի մասնավոր բնույթ, ինչը նշանակում է, որ այն չի կարող տարածվել բոլոր կորերի վրա:

Կամայական կորի որևէ կետում այդ կորին տարած շոշափողի ընդհանուր սահմանումը ձևակերպելու համար դիտարկենք որևէ l կոր և այդ կորի վրա ընտրենք կամայական M_0 կետ (Նկ.26): Այնուհետև դիտարկվող կորի վրա



Նկ.26

վերցնենք M_0-ից տարբեր ցանկացած M կետ և տանենք, այսպես կոչված, l կորի M_0M հատողը:

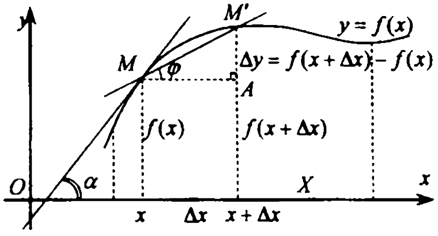
Յասկանալի է, որ եթե M կետը շարժվի l կորի վրայով, ապա M_0M հատողը կպտտվի M_0 կետի շուրջը:

Այժմ M կետը կորի վրա պահելով ձգտեցնենք M_0 կետին և հետևենք M_0M հատողի պտույտին M_0-ի շուրջը:

Սահմանում 3: *M_0T ուղիղը կոչվում է l կորի շոշափող M_0 կետում, եթե M կետը կորի վրա մնալով ցանկացած կողմից M_0 կետին ձգտելիս M_0M հատողի սահմանային դիրքը համընկնում է M_0T ուղղի հետ:*

Նշենք, որ l կորի որևէ կետում այդ կորին տարած շոշափողը կարող է այլ կետերում հատվել նրա հետ (նկ.26):

Վերադառնալով X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությանը՝ այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթում վերցրած (նկ.27) x և $x+\Delta x$ արժեքներին $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա համապատասխանող կետերը նշանակենք M-ով և M'-ով: Այնուհետև տանենք $f(x)$ կորի MM' հատողը և այդ հատողի ու ox առանցքի կազմած անկյունը [6,ս2] նշանակենք φ-ով: A-ով նշանակելով M' և M կետերից համապատասխանաբար ox և oy առանցքներին տարած ուղղահայացների հատման կետը՝ $AM'M$ եռանկյունից կունենանք



Նկ.27

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\varphi : \qquad (3)$$

Եթե Δx աճը ձգտեցնենք զրոյի, ապա M' կետը $f(x)$ կորի վրա մնալով կձգտի M կետին: Հասկանալի է, որ այդ ժամանակ, ընդհանրապես ասած կփոփոխվի նաև φ անկյունը: Պարզ է, որ եթե Δx-ը զրոյի ձգտելիս φ անկյունը ձգտի որոշակի α սահմանի, ապա M կետով անցնող այն ուղիղը, որը ox առանցքի հետ կազմում է α անկյուն, կլինի $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողը M կետում:

Վերջին հավասարության մեջ անցնելով սահմանի (ենթադրելով, որ համապատասխան սահմանները գոյություն ունեն), երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի, կստանանք [24]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = tg\alpha :$$

Ամփոփելով վերոգրյալը և օգտվելով ուղղի անկյունային գործակցի հասկացությունից [6,ս3]՝ ստանում ենք ֆունկցիայի ածանցյալի երկրաչափական մեկնաբանությունը.

Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի որևէ կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալի արժեքը հավասար է տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի համապատասխան $M(x,y)$ կետում այդ գրաֆիկին տարած շոշափողի անկյունային գործակցին.

$$f'(x) = tg\alpha : \qquad (4)$$

Օրինակ 2: Գտնել $y=\sqrt{x}$ կորի $M_0(1;1)$ կետում այդ կորին տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը:

Լուծում: Օգտվելով (4) բանաձևից՝ որոնելի անկյունային գործակցի համար կունենանք

$$tg\alpha = \left(\sqrt{x}\right)'_{|x=1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}:$$

Կորի որևէ կետում այդ կորին տարած շոշափողի հետ մեկտեղ հաճախ անհրաժեշտ է լինում նաև դիտարկել տրված կորի նորմալը:

Սահմանում 4: *Կորի տրված կետով անցնող այն ուղիղը, որն ուղղահայաց է այդ կետով անցնող շոշափողին, կոչվում է կորի նորմալ տրված կետում:*

Այժմ ենթադրելով, որ X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի x_0 ներքին կետում [18,ս20] ունի զրոյից տարբեր վերջավոր ածանցյալ, ստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի $M_0(x_0,y_0)$ կետում այդ գրաֆիկին տարած շոշափողի և նորմալի հավասարումները:

Նկատենք, որ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի մասին՝ վերևում արված ենթադրությունից և (4) հավասարությունից հետևում է, որ $f(x)$ կորի $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող ո՛չ շոշափողը, և ո՛չ էլ նորմալը զուգահեռ չեն օրդինատների առանցքին:

Վերլուծական երկրաչափությունից հայտնի է, որ $M_0(x_0,y_0)$ կետով անցնող և $k=f'(x_0)$ անկյունային գործակից ունեցող ուղղի հավասարումն (այսինքն M_0 կետում $f(x)$ կորին տարած շոշափողի հավասարումն) ունի հետևյալ տեսքը [6,(7)].

$$y-y_0=(x-x_0)f'(x_0): \tag{5}$$

Օգտվելով նաև երկու ուղիղների ուղղահայացության պայմանից [6,p3], նույն կետում $f(x)$ կորին տարած նորմալի անկյունային գործակցի համար կստանանք

$$k_1=-\frac{1}{f'(x_0)}: \tag{6}$$

Հետևաբար $M_0(x_0,y_0)$ կետում $f(x)$ կորի նորմալի հավասարումն ունի

$$x-x_0+(y-y_0)f'(x_0)=0 \tag{7}$$

տեսքը:

Այսպիսով, եթե X միջակայքում որոշված $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի x_0 ներքին կետում ունի զրոյից տարբեր վերջավոր ածանցյալ, ապա $f(x)$ կորի $M_0(x_0,y_0)$ կետում այդ կորին տարած շոշափողի և նորմալի հավասարումները համապատասխանաբար ունեն (5) և (7) տեսքը:

Օրինակ 3: Կազմել $x_0=2$ աբսցիս ունեցող կետում $y=x^3$ կորին տարած շոշափողի և նորմալի հավասարումները:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ գտնենք տրված կորի $x_0=2$ աբսցիսն ունեցող կետի օրդինատը.

$$y_0 = x_0^3 = 8:$$

Այնուհետև հաշվենք դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալի արժեքը նշված կետում.

$$y'(x_0) = 12:$$

x_0-ի, y_0-ի և $y'(x_0)$-ի արժեքները տեղադրելով (5) և (7) հավասարումների մեջ՝ համապատասխանաբար կստանանք $x_0 = 2$ աբսցիս ունեցող կետում $y = x^3$ կորին տարած շոշափողի և նորմալի հավասարումները.

$$y = 12x - 16, \quad x + 12y - 98 = 0:$$

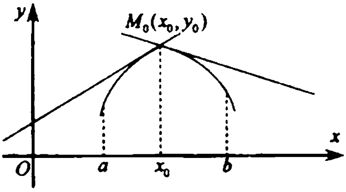
Վերջում ծանոթանանք նաև $[a,b]$ հատվածում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի հետ կապված մի քանի հատուկ դեպքերի հետ:

1) $[a,b]$ հատվածի ծայրակետերում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի մասին պատկերացում կազմելու համար հաշվենք հետևյալ սահմանները՝

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x > 0), \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x < 0): \tag{8}$$

Բերված սահմաններից առաջինի (երկրորդի) գոյության դեպքում կասենք, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան $x = a$ $(x = b)$ կետում աջից (ձախից) ունի միակողմանի ածանցյալ, ինչը երկրաչափորեն նշանակում է, որ $[a,b]$ հատվածի ձախ (աջ) ծայրակետում $f(x)$ կորն ունի միակողմանի շոշափող:

2) Հնարավոր է, որ $[a,b]$ հատվածի ներքին որևէ x_0 կետում $\Delta y/\Delta x$ քանորդն ունենա իրարից տարբեր՝ աջակողմյան և ձախակողմյան սահմաններ:



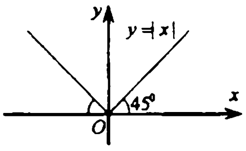
Նկ. 28

Նման դեպքերում կասենք, որ դիտարկվող ֆունկցիան x_0 կետում ունի միակողմանի ածանցյալներ: Հասկանալի է, որ քննարկվող դեպքում $f(x)$ կորը $M_0(x_0, y_0)$ կետում (Նկ.28) ունի մեկ ուղղի վրա չգտնվող միակողմանի շոշափողներ:

Օրինակ 4: Դիտարկենք

$$y = f(x) = |x| \tag{ա}$$

ֆունկցիան:



Նկ.29

Տրված ֆունկցիայի պարագայում, $x = 0$ կետում ունենք

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, \text{երբ } \Delta x < 0, \\ \Delta x, \text{երբ } \Delta x \geq 0: \end{cases}$$

Հետևաբար, քննարկվող դեպքում (8) սահմաններից առաջինը հավասար է 1-ի, իսկ երկրորդը՝ -1-ի:

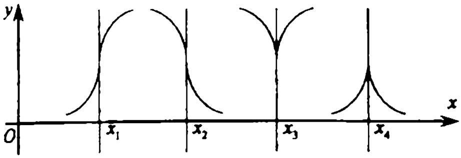
Համաձայն վերոգրյալի, ասվածը նշանակում է, որ (ա) ֆունկցիան $x = 0$ կետում ունի միայն միակողմանի ածանցյալներ, իսկ նրա գրաֆիկը՝ միակողմանի շոշափողներ (Նկ.29), (որոնք համընկնում են առաջին և երկրորդ կոորդինատական անկյունների կիսորդների հետ):

3) Հնարավոր է նաև, որ որևէ կետում

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

սահմանը հավասար լինի պլյուս կամ մինուս անսահմանության: Նման դեպքերում կասենք, որ նշված կետում դիտարկվող ֆունկցիան ունի անվերջ ածանցյալ:

Նշենք, որ նույն ձևով ներմուծվում է նաև միակողմանի անվերջ ածանցյալի հասկացությունը:



ա) բ) գ) դ)

Նկ.30

Ակնհայտ է, որ որևէ կետում անվերջ ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի գրաֆիկը այդ կետում ունի կոորդինատական oy առանցքին զուգահեռ շոշափող (Նկ.30,ա,բ,գ,դ):

§27. Ֆունկցիայի ածանցելիությունը: Ածանցելի ֆունկցիայի անընդհատությունը: Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը: Հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:

Սահմանում 1: *X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ածանցելի այդ միջակայքի x_0 կետում, եթե այդ կետում այն ունի ածանցյալ:*

Սահմանում 2: *X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ածանցելի այդ միջակայքում, եթե X միջակայքի յուրաքանչյուր կետում այն ունի ածանցյալ:*

Ապացուցենք հետագայի համար խիստ կարևոր, հետևյալ պարզունակ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այն անհրաժեշտաբար անընդհատ է այդ կետում:*

Ապացույց: Դիցուք X միջակայքի x_0 կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}: \qquad (1)$$

Ինչպես գիտենք **[23,թ6]**, (1) հավասարությունից հետևում է, որ x_0 կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում տեղի ունի $\Delta y/\Delta x$ քանորդի

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha \qquad (2)$$

ներկայացումը, որտեղ α -ն կախված է Δx -ից և նրա հետ մեկտեղ ձգտում զրոյի:

Վերջին հավասարության մեջ ազատվելով կոտորակներից և ստացված հավասարության երկու կողմերում անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում զրոյի՝ կունենանք [23,հ1,հ2]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \qquad (3$$

ինչը նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է x_0 կետում [24,(5)]:

Իսկ

Հետևանք 1: *Եթե x_0 -ն $f(x)$ ֆունկցիայի խզման կետ է, ապա այդ կետում տրված ֆունկցիան ածանցյալ չունի:*

Իրոք, եթե ենթադրենք, որ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա համաձայն ապացուցած թեորեմի կստանանք, որ այն անընդհատ է այդ կետում, այսինքն կհանգենք հակասության, որտեղից հետևում է, որ խզման կետերում ֆունկցիան չի կարող ածանցյալ ունենալ:

Իսպա

Պարզվում է, որ անընդհատության առանձին կետերում էլ ֆունկցիան կարող է ածանցյալ չունենալ, այսինքն որևէ կետում ֆունկցիայի անընդհատ լինելը բավարար չէ, որպեսզի այդ կետում այն ունենա ածանցյալ:

Օրինակ 1: $y=|x|$ ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա և մասնավորապես կոորդինատների սկզբնակետում: Սակայն դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը շոշափող չունի $x=0$ կետում (նկ.29), որտեղից հետևում է [26,(4)], որ $x=0$ կետում տրված ֆունկցիան ածանցյալ չունի*):

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք հետևյալ պնդումը՝

Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի որևէ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այն անհրաժեշտաբար անընդհատ է այդ կետում: Հակառակն ընդհանրապես ասած ճիշտ չէ՝ այսինքն որևէ կետում ֆունկցիայի անընդհատ լինելը բավարար չէ, որպեսզի այդ կետում այն ունենա վերջավոր ածանցյալ:

Անցնելով հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի հետ ծանոթանալուն՝ ենթադրենք $y=y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է հակադարձ ֆունկցիայի գոյության պայմաններին [24,թ5] և ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *(Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի մասին): Եթե X միջակայքում որոշված $y(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի x_0 կետում ունի զրոյից տարբեր վերջավոր ածանցյալ, ապա x_0 -ի համապատասխան $y_0=y(x_0)$ կետում $y(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան նույնպես ունի ածանցյալ, ընդ որում տեղի ունի*

---

*) Ակնհայտ է, որ բացասական x -երի համար դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է -1-ի, իսկ դրական x -երի համար՝ 1-ի (տե՛ս նախորդ օրինակը):

$$x'(y_0)=\frac{1}{y'(x_0)} \qquad (4)$$

հավասարությունը, որտեղ $x(y)$-ը $y(x)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է:

Ապացույց: Դիցուք $y=y(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 կետում ունի զրոյից տարբեր վերջավոր ածանցյալ: Եթե x_0-ի համապատասխան y_0 արժեքին տանք կամայական Δy աճ, ապա պարզ է, որ $x=x(y)$ հակադարձ ֆունկցիան նույնպես կստանա աճ, ընդ որում, եթե Δy-ը տարբեր է զրոյից, ապա $x(y)$ ֆունկցիայի միարժեքությունից հետևում է, որ այդ ֆունկցիայի ստացած աճը նույնպես տարբեր է զրոյից: Այնուհետև, եթե որևէ օրենքով Δy աճը ձգտեցնենք զրոյի, ապա $x(y)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ Δx աճը ևս կձգտի զրոյի:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է

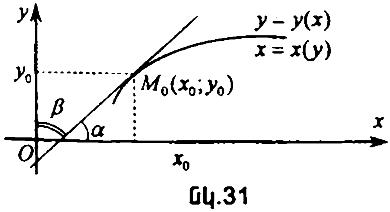
$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

հավասարության մեջ անցնել սահմանի, երբ Δy-ը ձգտում է զրոյի.

$$x'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{y'(x_0)}:$$

Իպա

Նշենք, որ (4) բանաձևն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն. ինչպես գիտենք $y'(x_0)$ ածանցյալն $y=y(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $M_0(x_0,y_0)$ կետում այդ գրաֆիկին տարած շոշափողի և ox առանցքի կազմած α անկյան տանգենսն է: Բայց $x=x(y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է $y=y(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ՝ այն տարբերությամբ (նկ.31), որ $y(x)$ ֆունկցիայի արգումենտն իր արժեքները ստանում է ox առանցքի վրա, իսկ $x(y)$ ֆունկցիայի արգումենտը՝ oy առանցքի վրա: Հետևաբար $x'(y_0)$ ածանցյալն այդ նույն շոշափողի և oy առանցքի կազմած $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ անկյան տանգենսն է:



Նկ.31

Վերոգրյալից հետևում է, որ (4) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

$$tg\beta=\frac{1}{tg\alpha}\qquad\left(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\right),$$

որը հայտնի է եռանկյունաչափությունից:

Այժմ անցնենք հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերի արտածմանը:

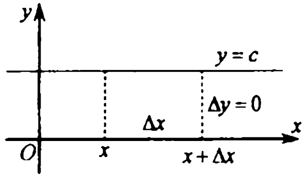
1°. *Հաստատունի ածանցյալը:*

Թեորեմ 3: *Հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի, այսինքն տեղի ունի*

$$c' = 0 \qquad (c = const) \tag{5}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիցուք $f(x) = c = const$: Եթե դիտարկվող ֆունկցիայի որոշման տիրույթում վերցնենք x-ի որևէ արժեք և այդ արժեքին տանք զրոյից տարբեր ցանկացած Δx աճ (Նկ.32), կստանանք



Նկ.32

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0,$$

որտեղից, ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանման համաձայն, կունենանք [26,ս2]

$$c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0:$$

Իսկ

2°. *Աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը:*

Սահմանում 3: $y = x^{\alpha}$ *տեսքի ֆունկցիան, որտեղ α-ն կամայական հաստատուն է, կոչվում է աստիճանային ֆունկցիա:*

Նշենք, որ α-ի բնական արժեքների դեպքում աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը ամբողջ թվային առանցքն է: Իսկ եթե α-ն բացասական ամբողջ թիվ է, ապա $y = x^{\alpha}$ ֆունկցիան, ակնհայտորեն բացի $x = 0$ կետից, ամենուրեք որոշված է: Այնուհետև α-ի կոտորակային արժեքների դեպքում գործ ունենք արմատի հետ:

Օրինակ, եթե $\alpha = 1/n$, որտեղ n-ը բնական թիվ է՝ կունենանք

$$y = x^{\frac{1}{n}}: \tag{6}$$

Նկատենք, որ (6) ֆունկցիայի որոշման տիրույթը x-ի ոչ բացասական արժեքների բազմությունն է:

Եթե α-ն իռացիոնալ թիվ է, ապա կընդունենք, որ աստիճանային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը $(0, +\infty)$ միջակայքն է:

Թեորեմ 4: $y = x^{\alpha}$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $\alpha x^{\alpha-1}$*-ի, այսինքն տեղի ունի*

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \tag{7}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար դիտարկվող ֆունկցիայի արգումենտին տանք կամայական Δx աճ և կազմենք $\Delta y/\Delta x$ քանորդը.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}:$$

Ստացված հավասարությունների մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է զրոյի՝ կունենանք [22,(20´´)]

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\frac{\Delta x}{x}}:$$

Այնուհետև կատարելով փոփոխականի $t=\Delta x/x$ փոխարինում և հաշվի առնելով, որ Δx -ը զրոյի ձգտելիս t -ն նույնպես ձգտում է զրոյի՝ կստանանք [25,(20)]

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

ինչը նշանակում է,որ աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (7) բանաձևը:

Իսպ

Օրինակ 2: Մասնավորապես (7) բանաձևում ընդունելով $\alpha=1$, $\alpha=-1$ և $\alpha=1/2$, համապատասխանաբար կունենանք [26,o1].

$$(x)'=1,\quad\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},\quad(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}: \tag{ա}$$

3°. *Ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը:*

Թեորեմ 5: $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $a^x\ln a$ *-ի, այսինքն տեղի ունի*

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a\quad(a>0, a\neq 1) \tag{8}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Վերցնենք դիտարկվող ֆունկցիայի անկախ փոփոխականի որևէ արժեք, այդ արժեքին տանք կամայական Δx աճ և կազմենք $\Delta y/\Delta x$ բանորդը.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}:$$

Ստացված հավասարությունների մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է զրոյի՝ կունենանք [25,(18)].

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a,$$

ինչը նշանակում է, որ ցուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (8) բանաձևը:

Իպա

Մասնավորապես, (8) բանաձևում ընդունելով $a=e$, կստանանք

$$\left(e^x\right)' = e^x : \tag{8'}$$

4°. *Լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալը:*

Թեորեմ 6: $y=\log_a x$ $\left(a>0,\ a\neq 1\right)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $\dfrac{1}{x\ln a}$ *-ի, այսինքն տեղի ունի*

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad \left(a>0, a\neq 1\right) \tag{9}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար լոգարիթմական ֆունկցիայի որոշման տիրույթում վերցնենք x-ի որևէ արժեք, այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $(x+\Delta x)$-ը նույնպես պատկանի դիտարկվող ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, հաշվենք տրված ֆունկցիայի համապատասխան աճը և կազմենք $\Delta y/\Delta x$ քանորդը.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} :$$

Ստացած հավասարությունների մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի՝ կունենանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} :$$

Այնուհետև կատարելով փոփոխականի $t=\Delta x/x$ փոխարինում և հաշվի առնելով, որ Δx-ը զրոյի ձգտելիս t-ն էլ է ձգտում զրոյի՝ կստանանք [25,(17)]

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x\ln a},$$

ինչը նշանակում է, որ լոգարիթմական ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (9) բանաձևը:

Իպա

Մասնավորապես, (9) բանաձևում ընդունելով $a=e$, կունենանք

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} : \tag{9'}$$

5°. *Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները:*

Թեորեմ 7: *$y=\sin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $\cos x$ -ի, այսինքն տեղի ունի*

$$(\sin x)'=\cos x \tag{10}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Օգտվելով $y=\cos x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից [24,օ8] և

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{11}$$

նշանավոր սահմանից [25,(2)], կստանանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x,$$

ինչը նշանակում է, որ $y=\sin x$ ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (10) բանաձևը:

Իպա

Թեորեմ 8: *$y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $-\sin x$ -ի, այսինքն տեղի ունի*

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{12}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Օգտվելով $y=\sin x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից և (11) նշանավոր սահմանից, կստանանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x,$$

ինչը նշանակում է, որ $y=\cos x$ ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (12) բանաձևը:

Իպա

Թեորեմ 9: *$y=tgx$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $1/\cos^2 x$ -ի, այսինքն տեղի ունի*

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x} \tag{13}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար $y=tgx$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթում վերցնենք x-ի որևէ արժեք և այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $(x+\Delta x)$-ը նույնպես պատկանի դիտարկվող ֆունկցիայի որոշման տիրույթին: Այնուհետև օգտվելով $y=\cos x$ ֆունկցիայի անընդհատությունից և (11) նշանավոր սահմանից, կստանանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{tg(x+\Delta x)-tgx}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\Delta x)}\right]=\frac{1}{\cos^2 x},$$

ինչը նշանակում է, որ $y=tgx$ ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (13) բանաձևը:

Իպա

Թեորեմ 10: $y=ctgx$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $-1/\sin^2 x$ *-ի, այսինքն տեղի ունի*

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (14)$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիտարկվող ֆունկցիայի պարագայում ունենք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{ctg(x+\Delta x)-ctgx}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\sin(x+\Delta x)}\right]=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

ինչը նշանակում է, որ $y=ctgx$ ֆունկցիայի ածանցյալը գոյություն ունի և տեղի ունի (14) բանաձևը:

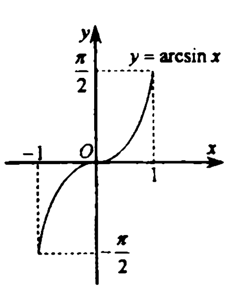
Իպա

6°. *Հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալները:*

Ի լրումն դիտարկված տարրական ֆունկցիաների, ստանանք նաև հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ածանցյալների բանաձևերը:

ա) Քանի որ $y=\sin x$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն աճող $[-\pi/2,\pi/2]$ միջակայքում, հետևաբար այն ունի հակադարձ ֆունկցիա, որոշված $[-1;1]$ միջակայքում, որը կնշանակենք հետևյալ կերպ **[24,p5]**.

$$y=\arcsin x \qquad (-1\le x\le 1): \qquad (15)$$



Նկ.33

(15) ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար (Նկ.33) անհրաժեշտ է $[-\pi/2,\pi/2]$ միջակայքում կառուցել $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այն համաչափ արտապատկերել $y=x$ ուղղի նկատմամբ **[24]**:

Թեորեմ 11: $y=\arcsin x \quad (-1<x<1)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է*

$1/\sqrt{1-x^2}$ *-ու, այսինքն տեղի ունի*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1) \tag{16}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե (15) ֆունկցիայի արգումենտը փոփոխվում է -1-ից մինչև 1 սահմաններում, ապա այն ընդունում է $-\pi/2$-ից մինչև $\pi/2$ ընկած բոլոր արժեքները: Այնուհետև, քանի որ $(\sin y)' = \cos y$ և $(-\pi/2, \pi/2)$ բաց միջակայքում $\cos y$-ը ընդունում է միայն դրական արժեքներ (հետևաբար նշված միջակայքում այն զրո չի դառնում), ուստի նկատի ունենալով նաև, որ $x=\sin y$-ը (15) ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է՝ (4) բանաձևի օգնությամբ դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալի համար կունենանք

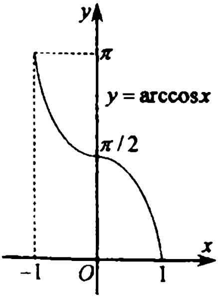
$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

կամ

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1):^{*)}$$

Իսկ

բ) Քանի որ $y=\cos x$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն նվազող $[0,\pi]$ միջակայքում, հետևաբար այն ունի հակադարձ ֆունկցիա որոշված $[-1;1]$ միջակայքում, որը կնշանակենք հետևյալ կերպ՝



Նկ.34

$$y = \arccos x \qquad (-1 \le x \le 1): \tag{17}$$

(17) ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար (նկ.34) անհրաժեշտ է $[0,\pi]$ միջակայքում կառուցել $y=\cos x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այն համաչափ արտապատկերել $y=x$ ուղղի նկատմամբ:

Թեորեմ 12: $y=\arccos x$ $(-1<x<1)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $-1/\sqrt{1-x^2}$ *-ու, այսինքն տեղի ունի*

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1) \tag{18}$$

բանաձևը:

---

*) $x=\pm 1$ արժեքները բացառեցինք, որովհետև x-ի այդ արժեքների դեպքում $1/\sqrt{1-x^2}$ քանորդն իմաստազրկվում է:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե (17) ֆունկցիայի արգումենտը փոփոխվում է -1-ից մինչև 1 սահմաններում, ապա այն ընդունում է 0-ից մինչև π ընկած բոլոր արժեքները: Այնուհետև, քանի որ $(\cos y)' = -\sin y$ և $(0,\pi)$ բաց միջակայքում $\sin y$-ը ընդունում է միայն դրական արժեքներ (հետևաբար նշված միջակայքում այն զրո չի դառնում), ուստի, նկատի ունենալով նաև, որ $x = \cos y$-ը (17) ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է՝ կունենանք

$$y_x' = (\arccos x)' = \frac{1}{x_y'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

կամ

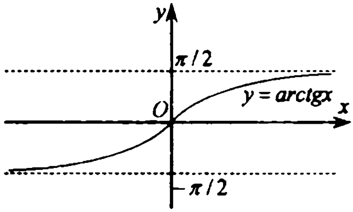
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1):$$

հպա

գ) Քանի որ $y = tgx$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն աճող $(-\pi/2, \pi/2)$ միջակայքում, հետևաբար այն ունի հակադարձ ֆունկցիա որոշված $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, որը կնշանակենք հետևյալ կերպ՝

$$y = arctgx \qquad (-\infty < x < +\infty): \qquad (19)$$

(19) ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար (նկ.35) անհրաժեշտ է $(-\pi/2, \pi/2)$ միջակայքում կառուցել $y = tgx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այն համաչափ արտապատկերել $y = x$ ուղղի նկատմամբ:



Նկ.35

Թեորեմ 13: $y = arctgx$ $(-\infty < x < +\infty)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $1/(1+x^2)$ *-ու, այսինքն տեղի ունի*

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < +\infty) \qquad (20)$$

բանաձևը:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե (19) ֆունկցիայի արգումենտը փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ սահմաններում, ապա այն ընդունում է $(-\pi/2, \pi/2)$ միջակայքի մեջ ընկած բոլոր արժեքները: Այնուհետև, քանի որ $(tg\, y)' = 1/\cos^2 y$ և $(-\pi/2, \pi/2)$ բաց միջակայքում $\cos y$-ը զրո չի դառնում, ուստի, նկատի ունենալով նաև, որ $x = tg\, y$-ը (19) ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է՝ դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալի համար կունենանք

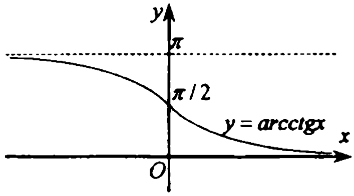
$$y_x' = (arctgx)' = \frac{1}{x_y'} = 1 : \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

կամ

$$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \left(-\infty < x+ < \infty\right):$$

Իպա

դ) Քանի որ $y = ctgx$ ֆունկցիան անընդհատ է և մոնոտոն նվազող $(0,\pi)$ միջակայքում, հետևաբար այն ունի հակադարձ ֆունկցիա որոշված $(-\infty,+\infty)$ միջակայքում, որը կնշանակենք հետևյալ կերպ՝



Նկ.36

$$y = arcctgx \qquad \left(-\infty < x < +\infty\right): \qquad (21)$$

(21) ֆունկցիայի գրաֆիկը ստանալու համար (նկ.36) անհրաժեշտ է $(0,\pi)$ միջակայքում կառուցել $y = ctgx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը և այն համաչափ արտապատկերել ուղղի նկատմամբ: $y=x$

Թեորեմ 14: $y = arcctgx$ $\left(-\infty < x < +\infty\right)$ *ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է* $-1/(1+x^2)$ *-ու, այսինքն տեղի ունի*

$$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(-\infty < x < +\infty\right) \qquad (22)$$

բանաձևը:

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ եթե (21) ֆունկցիայի արգումենտը փոփոխվում է $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ սահմաններում, ապա այն ընդունում է $(0,\pi)$ միջակայքի մեջ ընկած բոլոր արժեքները: Այնուհետև, քանի որ $(ctg\,y)' = -1/\sin^2 y$ և $(0,\pi)$ բաց միջակայքում $\sin y$-ը զրո չի դառնում, ուստի, նկատի ունենալով նաև, որ $x = ctg\,y$-ը (21) ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան է՝ կունենանք

$$y'_x = \left(arcctg\,x\right)' = \frac{1}{x'_y} = 1:\left(-\frac{1}{\sin^2 y}\right) = -\frac{1}{1+ctg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

կամ

$$\left(arcctg\,x\right)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(-\infty < x < +\infty\right):$$

Իպա

§28. Ֆունկցիաների գումարի (տարբերության), արտադրյալի և քանորդի ածանցյալները: Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը: Աստիճանացուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը: Պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիաներ և կորեր: Պարամետրական տեսքով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը: Ածանցյալների բանաձևերի ցուցակը:

Նախորդ պարագրաֆում մենք ստացանք բանաձևեր, որոնց միջոցով կարելի է հաշվել հիմնական տարրական ֆունկցիաների ածանցյալները:

ԳԼՈՒԽ V

Այժմ ծանոթանանք մի քանի պարզ կանոնների հետ, որոնց օգնությամբ հնարավոր է դառնում հաշվել այն ֆունկցիաների ածանցյալները, որոնք ստացվում են տարրական ֆունկցիաներից՝ վերջավոր թվով թվաբանական գործողությունների և համադրությունների միջոցով[*]։

Թեորեմ 1։ *$u(x)$ և $v(x)$ ածանցելի ֆունկցիաների[**] գումարը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի*

$$[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x) \tag{1}$$

բանաձևը։

Ապացույց։ Դիտարկվող ֆունկցիաների գումարը նշանակելով $y(x)$-ով և օգտվելով թեորեմի պայմաններից ու ածանցյալի սահմանումից [26,u2], կստանանք [23,(10')]

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x),$$

ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող ֆունկցիաների գումարն ածանցելի է և տեղի ունի (1) բանաձևը։

Իսկ

Հասկանալի է, որ կարող ենք նույն ձևով ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1'. *$u(x)$ և $v(x)$ ածանցելի ֆունկցիաների տարբերությունը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի*

$$[u(x)-v(x)]' = u'(x)-v'(x) \tag{1'}$$

բանաձևը։

Կիրառելով թեորեմ 1-ի ապացույցում բերված դատողությունները՝ կարող ենք այն ընդհանրացնել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 1''։ *Վերջավոր թվով ածանցելի ֆունկցիաների $u_1(x)+u_2(x)+ \cdots +u_n(x)$ գումարը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի*

$$[u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)]' = u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x) \tag{1''}$$

բանաձևը։

Թեորեմ 2։ *$u(x)$ և $v(x)$ ածանցելի ֆունկցիաների արտադրյալը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի*

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \tag{2}$$

բանաձևը։

---

[*] [illegible]

[**] [illegible]

Ապացույց: Դիցուք $u(x)$-ը և $v(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիաներ են և

$$y = u(x)\,v(x): \tag{3}$$

Կատարելով

$$\Delta u(x) = u(x+\Delta x) - u(x), \quad \Delta v(x) = v(x+\Delta x) - v(x)$$

նշանակումները՝ կստանանք

$$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u(x), \quad v(x+\Delta v) = v(x) + \Delta v(x): \tag{4}$$

Հետևաբար (3) ֆունկցիայի աճի համար կունենանք[*]

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - u\,v$$

կամ

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v: \tag{5}$$

(5) հավասարության երկու կողմերը բաժանելով Δx -ի վրա, կստանանք

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}: \tag{5'}$$

Այնուհետև (5′) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է զրոյի և հաշվի առնելով, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները կախված չեն Δx -ից՝ կունենանք [22,(19′),(20′),(20″)]

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}: \tag{6}$$

Քանի որ համաձայն ենթադրության $u(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիա է, հետևաբար այն նաև անընդհատ է [27,թ1], ինչը նշանակում է, որ տեղի ունի

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0 \tag{7}$$

հավասարությունը [24,(5)]:

Օգտվելով (7) հավասարությունից և թեորեմի պայմանից՝ կարող ենք (6) հավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \tag{8}$$

տեսքով:

Համաձայն ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանման, ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ $u(x)$ և $v(x)$ ածանցելի ֆունկցիաների արտադրյալը ածանցելի է և տեղի ունի (2) բանաձևը:

Իսկա

Հետևանք 1: *Եթե $u(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիա է, իսկ c -ն՝ որևէ հաստատուն, ապա $c\,u(x)$-ը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի*

---

[*] Գրության պարզության համար երբեմն $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաների կախվածությունը x -ից բաց կթողնենք:

$$[cu(x)]' = cu'(x) \tag{9}$$

բանաձևը:

Այլ խոսքով, հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել ածանցյալի նշանի տակից:

Ապացույց: (9) բանաձևի ճշմարտացիության մեջ համոզվելու համար բավական է (2) բանաձևում ընդունել $v(x)=c$ $(c=const)$ և օգտվել հաստատունի ածանցյալի բանաձևից [27,(5)].

$$[cu(x)]' = 0\cdot u(x) + cu'(x) = cu'(x):$$

Իսպ

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ցույց տալ, որ եթե $u_1(x)$-ը, $u_2(x)$-ը,..., $u_n(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիաներ են, ապա նրանց արտադրյալը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի

$$(u_1u_2\ldots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + u_1u_2\cdots u_n' \tag{10}$$

բանաձևը:

Մասնավորապես $u(x)$, $v(x)$ և $w(x)$ ածանցելի ֆունկցիաների արտադրյալը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw' \tag{10'}$$

բանաձևը:

Թեորեմ 3: *Եթե $u(x)$-ը և $v(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիաներ են, ընդ որում $v(x)$-ը հավասար չէ զրոյի, ապա*

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \tag{11}$$

քանորդը նույնպես ածանցելի է և տեղի ունի

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} \tag{12}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիցուք $u(x)$-ը և $v(x)$-ը ածանցելի ֆունկցիաներ են և $v(x)$-ը տարբեր է զրոյից: Օգտվելով (4) նշանակումներից՝ (11) ֆունկցիայի աճի համար կունենանք

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}$$

կամ

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}: \tag{13}$$

Վերջին հավասարության երկու կողմերը բաժանելով Δx -ի վրա և անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է զրոյի՝ կստանանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}:$$

Համաձայն ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանման՝ ստացված արդյունքը նշանակում է, որ թեորեմի պայմանների տեղի ունենալու դեպքում (11) քանորդն ածանցելի է և տեղի ունի (12) բանաձևը:

Իսպ

Այժմ ստանանք գործնականում մեծ նշանակություն ունեցող բարդ ֆունկցիայի [24,(12)] ածանցյալի հաշվման բանաձևը:

Թեորեմ 4: *Եթե z -ը y -ի միջոցով x -ի բարդ ֆունկցիա է և $y=y(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 կետում ունի ածանցյալ, իսկ $z=z(y)$ ֆունկցիան էլ այդ x_0 -ի համապատասխան y_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա*

$$z=z[y(x)] \tag{14}$$

բարդ ֆունկցիան նշված x_0 կետում նույնպես ունի ածանցյալ և տեղի ունի

$$z'_x[y(x_0)]=z'_y[y(x_0)]\cdot y'_x(x_0) \tag{15}$$

կամ որ նույնն է՝

$$z'_x(x_0)=z'_y(y_0)y'_x(x_0) \tag{15'}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար x_0 կետում ածանցելի $y(x)$ ֆունկցիայի արգումենտի արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $(x_0+\Delta x)$-ը դուրս չգա $y(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթից: Նշված աճին կհամապատասխանի $y(x)$ ֆունկցիայի Δy աճ*), իսկ վերջինին էլ՝ $z(y)$ ֆունկցայի Δz աճ: Քանի որ x_0-ին համապատասխանող y_0 կետում $z(y)$-ը ածանցելի է, հետևաբար այդ ֆունկցիայի Δz աճը կարող ենք ներկայացնել

$$\Delta z=z'_y(y_0)\Delta y+\alpha\,\Delta y \tag{16}$$

տեսքով [27,(2)], որտեղ α -ն կախված է Δy -ից և նրա հետ մեկտեղ ձգտում է զրոյի:

Այժմ (16) հավասարության երկու կողմերը բաժանենք Δx -ի վրա

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=z'_y(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

և ստացված հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է

*) Ենթադրենք $(y+\Delta y)$-ը պատկանում է $z(y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին:

զրոյի: Նկատի ունենալով, որ այդ դեպքում զրոյի են ձգտում նաև Δy -ը և հետևաբար նաև α -ն՝ արդյունքում կունենանք

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=z'_y(y_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=z'_y(y_0)y'_x(x_0):$$

Համաձայն ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանման, ստացված արդյունքը նշանակում է, որ գոյություն ունի $z'_x(x_0)$ ածանցյալը և տեղի ունի (15′) բանաձևը:

Իպս

Օրինակ 1: Հաշվել

$$y=\sin^2 x \text{ և } y=\cos^2 x \tag{ա}$$

ֆունկցիաների ածանցյալները:

Լուծում: Օգտվելով (15′) բանաձևից՝ կստանանք [27,(10),(12)]

$$(\sin^2 x)'=\left[(\sin x)^2\right]'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x,$$

$$(\cos^2 x)'=\left[(\cos x)^2\right]'=2\cos x(\cos x)'=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x:$$

Այսպիսով, տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝

$$(\sin^2 x)'=\sin 2x,\quad (\cos^2 x)'=-\sin 2x: \tag{բ}$$

Օրինակ 2: Հաշվել

$$y=\sqrt{e^{x^3}} \quad \text{և} \quad y=\ln\sqrt{x}$$

ֆունկցիաների ածանցյալները:

Լուծում: Օգտվելով (15′) բանաձևից՝ կունենանք [27,(8′),(9′)]

$$\left(\sqrt{e^{x^3}}\right)'=\frac{\left(e^{x^3}\right)'}{2\sqrt{e^{x^3}}}=\frac{e^{x^3}\left(x^3\right)'}{2\sqrt{e^{x^3}}}=\frac{3}{2}x^2\sqrt{e^{x^3}},$$

$$\left(\ln\sqrt{x}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}:\sqrt{x}=\frac{1}{2x}:$$

Օրինակ 3: Հաշվել

$$y=7tgx^3-ctg\sqrt{x}$$

ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լուծում: Օգտվելով (1),(9) և (15′) բանաձևերից՝ կստանանք [27,(7),(13),(14)]

$$y'=\left(7tgx^3\right)'-\left(ctg\sqrt{x}\right)'=7\left(tgx^3\right)'+\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sin^2\sqrt{x}}=\frac{7\left(x^3\right)'}{\cos^2 x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}=\frac{21x^2}{\cos^2 x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}:$$

Օրինակ 4: Հաշվել

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \tag{գ}$$

ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լուծում: Օգտվելով (15′) բանաձևից՝ կունենանք

$$y'=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}:$$

Այսպիսով, տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}: \tag{դ}$$

Օրինակ 5: Հաշվել

$$y=\frac{arc\sin x}{arc\cos x}$$

ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լուծում: Օգտվելով (12) բանաձևից՝ կստանանք [27,(16),(18)]

$$y'=\frac{(arc\sin x)'\,arc\cos x-(arc\cos x)'\,arc\sin x}{(arc\cos x)^2}=\frac{1}{(arc\cos x)^2}\left(\frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=$$

$$=\frac{arc\sin x+arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}\,(arc\cos x)^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\,(arc\cos x)^2}:^{*)}$$

Օրինակ 6: Հաշվել

$$y=arc\,tgx\cdot arc\,ctgx$$

ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լուծում: Օգտվելով (2) բանաձևից՝ կունենանք [27,(20),(22)].

$$y'=(arc\,tgx)'\,arc\,ctgx+(arc\,ctgx)'\,arc\,tgx=\frac{arc\,ctgx-arc\,tgx}{1+x^2}:$$

Անցնելով աստիճանացուցչային ֆունկցիայի [25,ս1] ածանցյալի բանաձևի արտածմանը՝ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 5: *Եթե $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաներն ածանցելի են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր x կետում, ապա այդ ֆունկցիաներից կազմված*

$$y=[u(x)]^{v(x)}\quad [u(x)>0] \tag{17}$$

աստիճանացուցչային ֆունկցիան նույնպես ածանցելի է նշված կետում և տեղի ունի

$$\left\{[u(x)]^{v(x)}\right\}'=[u(x)]^{v(x)}v'(x)\ln u(x)+v(x)[u(x)]^{v(x)-1}u'(x) \tag{18}$$

բանաձևը:

Այլ խոսքով, աստիճանացուցչային ֆունկցիայի ածանցյալը մի գումար է, որի գումարելիներից մեկը այդ ֆունկցիայի ածանցյալն է, եթե այն համարենք ցուցչային ֆունկցիա, իսկ մյուսը՝ նրա ածանցյալը՝ եթե այն համարենք աստիճանային ֆունկցիա:

Ապացույց: Դիցուք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաներն ածանցելի են իրենց որոշման տիրույթների ընդհանուր x կետում:

e հիմքով [21,(32)] լոգարիթմելով (17) հավասարության երկու կողմերը՝

---

*) Օգտվեցինք եռանկյունաչափությունից հայտնի

$$arc\sin x+arc\cos x=\frac{\pi}{2}\quad x\in[-1;1] \tag{ե}$$

բանաձևից:

կստանանք

$$\ln y = v(x)\ln u(x): \tag{19}$$

Այնուհետև (17) ֆունկցիան ներկայացնելով

$$y = e^{v(x)\ln u(x)}$$

տեսքով և օգտվելով թեորեմ 2-ից՝ եզրակացնում ենք, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաների հետ մեկտեղ, այն նույնպես ածանցելի է նշված կետում*):

Օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևից և ըստ x-ի ածանցելով (19) հավասարության երկու կողմերը՝ կունենանք

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

որտեղից y' ածանցյալի համար կստանանք

$$y' = y\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right] = [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right] =$$
$$= [u(x)]^{v(x)} v'(x)\ln u(x) + v(x)[u(x)]^{v(x)-1} u'(x):$$

իսկա

Օրինակ 7: Հաշվել

$$y = x^x \tag{գ}$$

ֆունկցիայի ածանցյալը:

Լուծում: Օգտվելով (18) բանաձևից՝ տրված ֆունկցիայի ածանցյալի համար կունենանք

$$y = (x^x)' = x^x \ln x + x \cdot x^{x-1} = x^x(1+\ln x):$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ բանաձևը՝

$$(x^x)' = x^x(1+\ln x): \tag{է}$$

Այժմ անցնելով, այսպես կոչված, պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիաների և կորերի դիտարկմանը՝ նշենք, որ շատ դեպքերում հարմար է լինում y փոփոխականի կախվածությունը x փոփոխականից արտահայտել ոչ թե անմիջականորեն, այլ մի երրորդ փոփոխականի միջոցով:

Ասվածը պարզաբանելու նպատակով, ենթադրենք $[\alpha,\beta]$ միջակայքում որոշված են անընդհատ և միարժեք

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{20}$$

ֆունկցիաները:

Ֆունկցիայի սահմանման [22,ս1] համաձայն՝ $[\alpha,\beta]$ միջակայքին պատկանող t-ի յուրաքանչյուր արժեքի համապատասխանում է x-ի և y-ի որոշակի արժեք: Եթե x-ի և y-ի նշված արժեքները համարենք oxy հարթության կետի կոորդինատներ, ապա (20) ֆունկցիաները t-ի յուրաքանչյուր արժեքի

---

*) Հաշվի առանք նաև, որ ցուցչային և լոգարիթմական ֆունկցիաները ածանցելի են իրենց որոշման տիրույթներում [27,թ5,թ6]:

oxy հարթության մեջ համապատասխանեցնում են որոշակի կետ: Հետևաբար, եթե t-ն փոփոխվի նշված միջակայքում՝ (20) ֆունկցիաները oxy հարթության վրա կորոշեն որոշակի $y = y(x)$ կոր:

Սահմանում 1: *(20) հավասարումները կոչվում են $y = y(x)$ ֆունկցիայի (կորի) պարամետրական հավասարումներ, t-ն կոչվում է պարամետր, իսկ ֆունկցիայի (կորի) տալը նշված հավասարումներով՝ կոչվում է պարամետրական:*

x-ից y-ի կախվածության օրենքը գտնելու համար ենթադրենք

$$x = \varphi(t) \tag{21}$$

ֆունկցիան ունի հակադարձ ֆունկցիա [24].

$$t = t(x): \tag{22}$$

Ինչպես գիտենք, $t(x)$ հակադարձ ֆունկցիայի տեսքը ստանալու համար անհրաժեշտ է (21) հավասարությունը դիտել իբրև հավասարում և այն լուծել t-ի նկատմամբ: t-ի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով $\psi(t)$ ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք x-ից y-ի կախվածության որոնելի օրենքը.

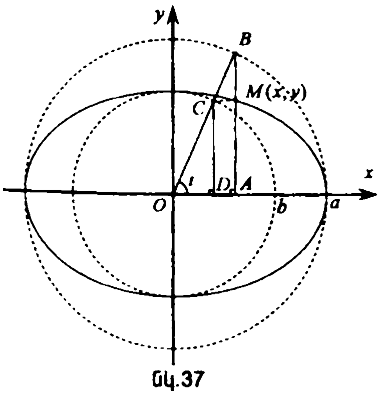
$$y = \psi[t(x)]: \tag{23}$$

Այսպիսով, եթե $\varphi(t)$-ն ունի հակադարձ ֆունկցիա, ապա (20) հավասարումները որոշում են y-ը որպես x-ի ֆունկցիա, որի տեսքը ստանալու համար անհրաժեշտ է այդ հավասարումներից t-ն արտաքսել:

Օրինակ 8: *(էլիպս, շրջանագիծ):*

Ստանանք a և b $(a > b)$ կիսաառանցքներով այն էլիպսի [7,2°] պարամետրական հավասարումները, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է (նկ.37):

Դրված խնդիրը լուծելու համար այդ կորի հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև նույն կենտրոնով երկու շրջանագծեր, որոնց շառավիղները հավասար են a-ի և b-ի: էլիպսի վրա վերցնենք կամայական $M(x, y)$ կետ և այդ կետով տանենք ox առանցքին ուղղահայաց ուղիղ: Տարած ուղղահայացի հատման կետերը ox առանցքի և a շառավղով շրջանագծի հետ համապատասխանաբար նշանակենք A-ով և B-ով: Այնուհետև M կետով տանենք ox առանցքին զուգահեռ ուղիղ և այդ ուղղի ու b շառավղով շրջանագծի հատման կետը նշանակենք C-ով (դժվար չէ համոզվել, որ C-ն գտնվում է a շառավղով շրջանագծի OB շառավղի վրա):



Նկ.37

Հաշվի առնելով, որ B և M կետերն ունեն միևնույն աբսցիսները, իսկ C և M կետերը՝ միևնույն օրդինատները, AOB և COD եռանկյուններից, դիտարկվող էլիպսի $M(x, y)$ կետի կոորդինատների համար կստանանք

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t, \qquad (ը)$$

որտեղ t-ն OB շառավղի և ox առանցքի կազմած անկյունն է [6,ս2], իսկ D-ն՝ C կետից ox առանցքին տարած ուղղահայացի հիմքը:

Նկատի ունենալով, որ t-ն զրոյից մինչև 2π սահմաններում փոփոխելիս կարող ենք (ը) բանաձևերի միջոցով հաշվել տրված էլիպսի բոլոր կետերի կոորդինատները՝ եզրակացնում ենք, որ այդ էլիպսի պարամետրական հավասարումներն ունեն

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (թ)$$

տեսքը:

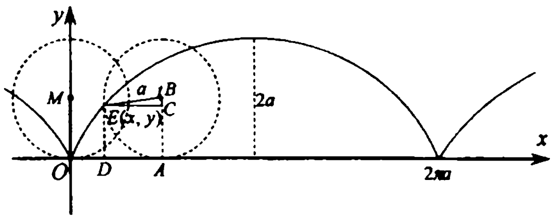
Պարզ է, որ եթե (թ) հավասարումներում ընդունենք $a = b$, ապա կստանանք a շառավղով և $O(0;0)$ կենտրոնով շրջանագծի պարամետրական հավասարումները.

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi): \qquad (ժ)$$

Նկատենք նաև, որ (ժ) հավասարումներից արտաքսելով t-ն՝ կստանանք a շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետը կենտրոն ունեցող շրջանագծի հավասարումն ուղղանկյուն կոորդինատներով [7,(5′)].

$$x^2 + y^2 = a^2:$$

Օրինակ 9: *(Ցիկլոիդ):* Ենթադրելով, որ $M(0,a)$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագիծը առանց սահելու գլորվում է ox առանցքի դրական ուղղությամբ՝ հետևենք նրան պատկանող որևէ կետի (օրինակ O-ի) հետագծին:



Նկ.38

Դիտարկենք գլորվող շրջանագծի մի նոր դիրք (Նկ. 38) և այդ դիրքը տեղափոխված շրջանագծի կենտրոնը նշանակենք B-ով, իսկ նրա և ox առանցքի շոշափման կետը՝ A-ով:

Յասկանալի է, որ նախկին դիրքից նոր դիրքին անցնելու ընթացքում սկզբնական շոշափման կետը տեղափոխվել է OA հատվածի չափով և միաժամանակ տեղափոխվել է «նոր» շրջանագծի E կետը՝ շրջանագծի վրայով անցնելով AE աղեղը: Քանի որ նշված ճանապարհներն իրար հավասար են, հետևաբար՝ $OA = A\breve{E}$:

Տրված շրջանագծի սկզբնական OM շառավղի և նոր դիրքի BE շառավղի կազմած անկյունը նշանակելով t-ով, իսկ E կետից AB շառավղին և ox առանցքին տարած ուղղահայացների հիմքերը՝ համապատասխանաբար C-ով և D-ով՝ E կետի կոորդինատների համար կունենանք

$$x = OD = OA - DA = A\breve{E} - EC = at - a\sin t,$$

$$y = DE = AC = AB - CB = a - a\cos t^{*)}.$$

Այսպիսով, եթե դիտարկվող շրջանագիծը կատարի մեկ լրիվ պտույտ, ապա նրա O

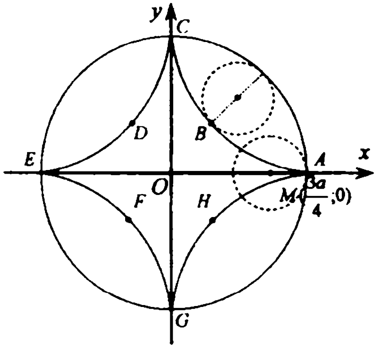
---

*) Մեկ ռադիան և a շառավիղ ունեցող աղեղի երկարությունը հավասար է $2\pi a/(2\pi) = a$-ի: Յետևաբար, t ռադիան և a շառավիղ ունեցող աղեղի երկարությունը հավասար է at-ի:

կետը կգծի 38-րդ նկարում պատկերված կամարաձև կորը, որի պարամետրական (ըստ էության t-ն E կետի դիրքը որոշող պարամետր է) հավասարումներն են.

$$x = a(t-\sin t) \quad y = a(1-\cos t) \quad (0\le t\le 2\pi): \qquad (ի)$$

Պարզ է, որ եթե t-ն փոփոխվի $-\infty$-ից մինչև $+\infty$ սահմաններում, ապա արդյունքում կստանանք 2π պարբերական կոր, որը կոչվում է ցիկլոիդ և որը կազմված է անթիվ բազմությամբ իրար «հավասար» կամարներից:



Նկ.39

Օրինակ 10: *(Աստրոիդ):* Ենթադրելով, որ $M(3a/4;0)$ կենտրոնով և $a/4$ շառավղով շրջանագիծն առանց սահելու գլորվում է $O(0;0)$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագծի վրայով՝ հետևենք նրան պատկանող որևէ կետի (օրինակ A-ի) հետագծին:

Եթե $a/4$ շառավղով շրջանագիծը կատարի մեկ լրիվ պտույտ, ապա նրա A կետը կգծի 39-րդ նկարում պատկերված ABC կորը: Եվս երեք պտույտ կատարելու արդյունքում փոքր շառավղով շրջանագծի A կետը կգծի $ABCDEFGHA$ կորը, որը կոչվում է աստրոիդ:

Կարելի է համոզվել, որ 39-րդ նկարում պատկերված աստրոիդի պարամետրական հավասարումներն ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad (0\le t\le 2\pi): \qquad (լ)$$

Նկատենք, որ (լ) հավասարումների երկու կողմերը բարձրացնելով $2/3$ աստիճան և ստացված հավասարումներն անդամ առ անդամ գումարելով (այսինքն նշված հավասարումներից t-ն արտաքսելով) կստանանք տրված աստրոիդի հավասարումը՝ գրված ուղղանկյուն կոորդինատներով.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}: \qquad (խ)$$

Պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի ածանցյալի համար բանաձև ստանալու համար ենթադրենք y-ը որպես x-ի ֆունկցիա տրված է (20) պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն որևէ T միջակայքում*) որոշված ածանցելի ֆունկցիաներ են, ընդ որում $\varphi'(t)$-ն նշված միջակայքում զրո չի դառնում: Ենթադրենք նաև, որ տրված միջակայքում $\varphi(t)$-ն ունի ածանցելի $t(x)$ հակադարձ ֆունկցիա:

Օգտվելով կատարված ենթադրություններից և նկատի ունենալով, որ այդ դեպքում y-ը t-ի միջոցով x-ի բարդ ֆունկցիա է՝ բարդ ֆունկցիայի և հակադարձ ֆունկցիայի ածանցման կանոնների շնորհիվ կստանանք [27,բ2]

$$y'_x = y'_t\cdot t'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}:$$

Այսպիսով, վերևում թվարկած պայմանների բավարարման դեպքում (20) պարամետրական հավասարումներով տրված ֆունկցիայի ածանցյալն արտահայտվում է հետևյալ բանաձևով՝

*) T-ն կարող է լինել բաց, փակ, կիսաբաց, վերջավոր կամ անվերջ միջակայք:

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}: \tag{24}$$

Օրինակ 11: y-ը որպես x-ի ֆունկցիա տրված է (ժ) պարամետրական հավասարումներով: Հաշվել y'_x ածանցյալի արժեքը $t=\pi/4$ կետում:

Լուծում: Օգտվելով (24) բանաձևից՝ կունենանք

$$y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = -ctg\,t,$$

հետևաբար y'_x ածանցյալի մեզ հետաքրքրող արժեքի համար կստանանք

$$y'_x\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1:$$

Վերջում, մինչ այժմ դիտարկած ֆունկցիաների և նրանցից կազմած գումարի, արտադրյալի, քանորդի և համադրույթների ածանցյալների համար ստացած բանաձևերն ամփոփենք հետևյալ ցուցակում՝

1. $c' = 0 \quad (c = const)$,

2. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$, 2′. $[u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)]' = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x)$,

3. $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, 3′. $[cu(x)]' = cu'(x) \quad (c = const)$,

4. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$,

5. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 5′. $\{[f(x)]^\alpha\}' = \alpha[f(x)]^{\alpha-1} f'(x) \quad (\alpha = const)$,

5″. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, 5‴. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, 5^{IV}. $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$,

6. $(a^x)' = a^x \ln a$, 6′. $\left[a^{f(x)}\right]' = f'(x)a^{f(x)} \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$,

6″. $(e^x)' = e^x$, 6‴. $\left[e^{f(x)}\right]' = f'(x)e^{f(x)}$,

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, 7′. $[\log_a f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$,

7″. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, 7‴. $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

8. $(\sin x)' = \cos x$, 8′. $[\sin f(x)]' = +f'(x)\cos f(x)$,

9. $(\cos x)' = -\sin x$, 9′. $[\cos f(x)]' = -f'(x)\sin f(x)$,

10. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, 10′. $[tg\,f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$,

11. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, 11′. $[ctg\,f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$,

12. $(\sin^2 x)' = \sin 2x,$ 12'. $[\sin^2 f(x)]' = f'(x)\sin 2f(x),$

13. $(\cos^2 x)' = -\sin 2x,$ 13'. $[\cos^2 f(x)]' = -f'(x)\sin 2f(x),$

14. $\{z[y(x)]\}_x' = z_y' \cdot y_x',$

15. $\{[u(x)]^{v(x)}\}' = [u(x)]^{v(x)} \cdot v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot [u(x)]^{v(x)-1} \cdot u'(x),$

16. $y_x' = \dfrac{1}{x_y'}$ $(x_y' \neq 0),$

որտեղ $x(y)$-ը $y(x)$-ի հակադարձ ֆունկցիան է,

17. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ 17'. $[\arcsin f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}},$

18. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ 18'. $[\arccos f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}},$

19. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2},$ 19'. $[\operatorname{arctg} f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)},$

20. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},$ 20'. $[\operatorname{arcctg} f(x)]' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)},$ 21. $y_x' = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$

որտեղ y-ը որպես x-ի ֆունկցիա տրված է $x = \varphi(t)$ և $y = \psi(t)$ պարամետրական հավասարումներով:

§29. Բարձր կարգի ածանցյալներ: Ֆունկցիայի դիֆերենցիալը և նրա երկրաչափական իմաստը: Դիֆերենցիալի կապը ածանցյալի հետ: Գումարի (տարբերության) արտադրյալի և քանորդի դիֆերենցիալները: Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ: Դիֆերենցիալի տեսքի անփոփոխելիությունը:

Ենթադրենք X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքում ունի վերջավոր $f'(x)$ ածանցյալ: Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, ընդհանրապես ասած, $f'(x)$-ը նույնպես ֆունկցիա է x-ից:

Սահմանում 1: *Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի $f'(x)$ ածանցյալը նշված միջակայքի x_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակվում է*

$$f''(x_0),\quad f^{(2)}(x_0),\quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2},\quad \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Նույն ձևով, եթե $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը x_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալ նշված կետում:

Ընդհանուր դեպքում, եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի $n-1$ -րդ կարգի ածանցյալը $(n=2,3,...)$ նշված միջակայքի x_0 կետում ունի ածանցյալ, ապա այդ ածանցյալը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալ x_0 կետում և նշանակվում է

$$f^{(n)}(x_0),\quad \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\quad \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Յասկանալի է, որ ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալը հաշվելու համար, ընդհանրապես ասած, անհրաժեշտ է հաշվել այդ ֆունկցիայի նախորդ բոլոր ածանցյալները:

Նշենք, որ մի շարք դեպքերում հաջողվում է ֆունկցիայի n -րդ կարգի ածանցյալի համար ստանալ ընդհանուր բանաձև: Ծանոթանանք այդպիսի մի քանի բանաձևերի հետ:

I. *Նախ նկատենք, որ եթե $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներն ունեն n -րդ կարգի ածանցյալներ, ապա տեղի ունեն*

$$[cf(x)]^{(n)} = cf^{(n)}(x)\ (c=const),\quad [f(x)\pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)\quad (n=1,2,\ldots) \qquad (1)$$

ակնհայտ բանաձևերը **[28,(1),(9)]**:

II. *Դիտարկենք $y=x^\alpha$ աստիճանային ֆունկցիան, որտեղ α -ն կամայական հաստատուն է:*

Օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևից՝ հաջորդաբար կստանանք **[27,(7)]**

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\quad (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\quad (x^\alpha)''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ldots\ldots:$$

Յեշտ է տեսնել, որ դիտարկվող ֆունկցիայի համար ընդհանուր դեպքում կունենանք

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\quad (n=1,2,\ldots): \qquad (2)$$

Վերջին բանաձևում ընդունելով $\alpha=-1$, կստանանք

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-n-1}$$

կամ

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\quad (n=1,2,\ldots):$$

Իսկ եթե (2) բանաձևում ընդունենք $\alpha=n$ $(n\in N)$, ապա x^n ֆունկցիայի n-րդ կարգի ածանցյալի համար կունենանք

$$\left(x^n\right)^{(n)}=n!\qquad (n=1,2,\ldots),$$

որտեղից հետևում է, որ դիտարկվող աստիճանային ֆունկցիայի ավելի բարձր կարգի ածանցյալները հավասար են զրոյի [27,(5)]:

Այսպիսով, ստանում ենք նաև

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\quad \left(x^n\right)^{(n)}=n!\quad (n=1,2,\ldots) \tag{3}$$

կարևոր բանաձևերը:

III. *Այնուհետև դիտարկենք* $y=\ln x$ *ֆունկցիան:*

Ունենք [27,(9′)]

$$(\ln x)^{(n)}=\left[(\ln x)'\right]^{(n-1)}=\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}:$$

Հետևաբար օգտվելով նաև (3) բանաձևից՝ ստանում ենք

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{4}$$

ընդհանուր բանաձևը:

IV. *Այժմ դիտարկենք* $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ *ֆունկցիան:*

Ունենք [27,(8′)]

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\quad \left(a^x\right)''=a^x\ln^2 a,\quad \left(a^x\right)'''=a^x\ln^3 a,\ldots:$$

Ընդհանրացնելով կստանանք

$$\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a\qquad (n=1,2,\ldots) \tag{5}$$

բանաձևը:

Մասնավոր դեպքում, (5) բանաձևում ընդունելով $a=e$, *կունենանք* [27,(8′)]

$$\left(e^x\right)^{(n)}=e^x\qquad (n=1,2,\ldots): \tag{5′}$$

V. *Հաշվենք* $y=\sin x$ *ֆունկցիայի* n *-րդ* $(n=1,2,\ldots)$ *կարգի ածանցյալը:*

Ունենք [27,(10),(12)]

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad (\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'''=(-\sin x)'=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots:$$

Հետևաբար, ընդհանրացնելով՝ կստանանք

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{6}$$

բանաձևը:

VI. *Նույն ձևով կստանանք նաև* $y = \cos x$ *ֆունկցիայի* n *-րդ կարգի ածանցյալի բանաձևը*[*].

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad (n = 1,2,\ldots): \tag{7}$$

Վերևում դիտարկված ֆունկցիաների n *-րդ կարգի* $(n = 1,2,\ldots)$ *ածանցյալների համար ստացած բանաձևերն ամփոփենք հետևյալ ցուցակում՝*

1. $[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$,
2. $[c\,u(x)]^{(n)} = c\,u^{(n)}(x) \quad (c = const)$,
3. $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} \quad (\alpha = const)$, 3′. $(x^{n})^{(n)} = n!$, 3″. $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$,
4. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$,
5. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, 5′. $(e^x)^{(n)} = e^x$,
6. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$,
7. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$:

Անցնելով ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հասկացության հետ ծանոթանալուն՝ ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է մի որևէ X միջակայքում և անընդհատ է այդ միջակայքի x_0 կետում:

Ինչպես գիտենք, այդ դեպքում x_0 կետում արգումենտի ստացած անվերջ փոքր աճին համապատասխանում է ֆունկցիայի նույնպես անվերջ փոքր աճ [24,(5)]:

Հարց է ծագում. $y = f(x)$ *ֆունկցիայի աճի համար արդյո՞ք գոյություն ունի այդ աճն առաջացնող, արգումենտի աճի նկատմամբ գծային* $A\cdot\Delta x$ *անվերջ փոքր մեծություն* [23,ս1], *որ* $\Delta y - A\cdot\Delta x$ *տարբերությունը լինի ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր* [23,ս4], *քան* Δx *-ը* [23,(12)].

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x) \quad (A = const): \tag{8}$$

Նկատենք, որ $A \neq 0$ դեպքում (8) հավասարությունը նշանակում է, որ Δy -ը և $A\cdot\Delta x$ -ը համարժեք անվերջ փոքր մեծություններ են [23,ս7,բ5]:

---

[*]) Բերված բանաձևերի խիստ ապացույցները կարելի է կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Սահմանում 2: *Եթե X միջակայքում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիայի համար այդ միջակայքի x_0 կետում տեղի ունի (8) հավասարությունը, ապա $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի նշված կետում, իսկ $A\cdot\Delta x$ արտահայտությունը՝ տրված ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է $dy|_{x=x_0}$ -ով, կամ $d\,f(x_0)$ -ով:*

Թեորեմ 1: *Որպեսզի $y=f(x)$ ֆունկցիան իր որոշման տիրույթի x_0 կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում այն ունենա վերջավոր ածանցյալ: Ընդ որում, նշված պայմանի բավարարման դեպքում (8) հավասարությունն ընդունում է*

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x) \tag{8'}$$

տեսքը:

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* ենթադրենք $y=f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է իր որոշման տիրույթի x_0 կետում, այսինքն ենթադրենք նշված կետում տեղի ունի (8) հավասարությունը և ապացուցենք, որ այդ կետում այն ունի վերջավոր ածանցյալ:

Նշված հավասարության երկու կողմերը բաժանելով Δx -ի վրա.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

և ստացված հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx -ը ձգտում է զրոյի՝ կունենանք

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),$$

ինչը նշանակում է, որ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ և (8) հավասարությունն ընդունում է (8′) տեսքը:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ:

Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք [27,(2)], տեղի ունի տրված ֆունկցիայի աճի (8′) ներկայացումը, ինչն էլ համաձայն սահմանման նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում:

Իսպա

Այսպիսով, եթե իր որոշման տիրույթի որևէ կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա ինչպես երևում է այդ ֆունկցիայի աճի (8′) ներկայացումից, նշված կետում տրված ֆունկցիայի աճը կազմվում է երկու գումարելիներից, որոնցից առաջինը գծային է արգումենտի աճի նկատմամբ և հանդիսանում է դիտարկվող ֆունկցիայի դիֆերենցիալը.

$$d\,y=f'(x)\Delta x, \tag{9}$$

իսկ երկրորդը՝ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քան Δx -ը:

Եվս մեկ անգամ նշենք, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալն այդ ֆունկցիայի աճի, այսպես կոչված գլխավոր մասն է և նրանից տարբերվում է մի մեծությամբ, որն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր է, քան տրված ֆունկցիայի արգումենտի աճը:

Մասնավորապես, $y=x$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի համար կստանանք

$$dy=dx=x'\Delta x=\Delta x$$

կամ

$$\Delta x=dx: \tag{10}$$

Ինչպես տեսնում ենք, անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը համընկնում է այդ փոփոխականի կամայական Δx աճի հետ:

Վերջին հավասարության հաշվառումով (9) բանաձևը կընդունի

$$dy=f'(x)dx \tag{11}$$

տեսքը, որտեղից կստանանք

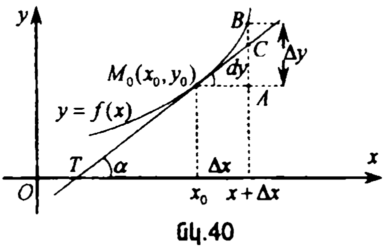
$$f'(x)=\frac{dy}{dx}, \tag{12}$$

այնպես որ dy/dx արտահայտությունը, որը դիտել ենք որպես մեկ միասնական պայմանանշան և որը նշանակում է y-ի ածանցյալ ըստ x-ի՝ այժմ կարող ենք դիտել որպես կոտորակ:

Այսպիսով, (12) հավասարությունը կարող ենք մեկնաբանել հետևյալ կերպ՝

Ֆունկցիայի ածանցյալն այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի և նրա անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալի հարաբերությունն է:

$y=f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի երկրաչափական մեկնաբանությունը տալու համար դիտարկենք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը և ենթադրենք, որ իր որոշման տիրույթի որևէ x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, նշված աբսցիսն ունեցող կետում տրված ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի շոշափող, որի անկյունային գործակիցը, այսինքն՝ այդ շոշափողի և ox առանցքի կազմած անկյան տանգենսը (Նկ.40), հավասար է $f'(x_0)$-ի **[26,(4)]**.



Նկ.40

$$tg\alpha=f'(x_0): \tag{13}$$

Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $M(x_0,y_0)$ կետի աբսցիսին տանք Δx աճ, ապա այդ կետի օրդինատը կստանա $\Delta y=AB$ աճ, իսկ M_0 կետում դիտարկվող կորին տարած շոշափողի օրդինատը՝ AC աճ: Հետևաբար՝ (9) և (13) բանաձևերի հաշվառումով AM_0C եռանկյունից այդ եռանկյան AC էջի համար կստանանք

$$AC = AM_0 \, tg\alpha = \Delta x \, tg\alpha = f'(x_0)\Delta x = dy:$$

Այսպիսով, ստանում ենք x_0 կետում վերջավոր ածանցյալ ունեցող $f(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի երկրաչափական մեկնաբանությունը.

Այն դեպքում, երբ Δy -ը $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի x_0 աբսցիսն ունեցող կետի օրդինատի աճն է, dy -ը՝ այդ նույն կետում $f(x)$ կորին տարած շոշափողի օրդինատի աճն է:

Այժմ, օգտվելով երկու ֆունկցիաների գումարի (տարբերության), արտադրյալի և քանորդի ածանցյալների բանաձևերից [28,(1),(1′),(2),(9),(12)], ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Եթե x_0 կետի մի որևէ շրջակայքում որոշված $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաներն այդ կետում ունեն վերջավոր ածանցյալ, ապա նրանց գումարը (տարբերությունը), արտադրյալը և քանորդը դիֆերենցելի են x_0 կետում, ընդ որում տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը՝*

$$d[u(x) \pm v(x)] = d\,u(x) \pm d\,v(x), \tag{14}$$

$$d[u(x)v(x)] = v(x)d\,u(x) + u(x)d\,v(x), \tag{15}$$

$$d[cu(x)] = c\,du(x), \; d[cv(x)] = c\,dv(x) \quad (c = const), \tag{16}$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{v(x)d\,u(x) - u(x)d\,v(x)}{v^2(x)} \quad [v(x) \neq 0]: \tag{17}$$

Ապացույց: Բերված բանաձևերի աջ մասերում մասնակցող դիֆերենցիալների գոյությունը բխում է թեորեմ 1-ից:

Ինչ վերաբերում է այդ բանաձևերի արտածմանը, ապա օգտվելով (11) բանաձևից՝ կունենանք

$$d[u(x) \pm v(x)] = [u(x) \pm v(x)]' dx = [u'(x) \pm v'(x)]dx = u'(x)dx \pm v'(x)dx = d\,u(x) \pm d\,v(x),$$

$$d[u(x)v(x)] = [u(x)v(x)]' dx = [u'(x)v(x) + v'(x)u(x)]dx = u'(x)v(x)dx + v'(x)u(x)dx =$$

$$= v(x)d\,u(x) + u(x)d\,v(x), \qquad d = [cu(x)] = [cu(x)]' dx = cu'(x)dx = c\,d\,u(x),$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' dx = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)} dx = \frac{v(x)d\,u(x) - u(x)d\,v(x)}{v^2(x)} \qquad [v(x) \neq 0]:$$

Իպա

Նկատի ունենալով, որ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը միայն dx արտադրիչի առկայությամբ է տարբերվում նրա ածանցյալից և օգտվելով նախորդ պարագրաֆի վերջում բերված տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների ցուցակից՝ կստանանք նաև այդ ֆունկցիաների դիֆերենցիալների ցուցակը:

Ներկայացնենք այդ ցուցակի մի մասը.

1. $dc = 0 \quad (c = const)$,

2. $d(x^\alpha) = \alpha \, x^{\alpha-1}dx \quad (\alpha = const)$,

3. $d(a^x) = a^x(\ln a)dx \quad (a > 0, a \neq 1)$,

4. $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$,

5. $d(\cos x)=-\sin x\,dx$,

6. $d(arctgx)=\dfrac{dx}{1+x^2}$:

Անցնելով ֆունկցիայի բարձր կարգի դիֆերենցիալների հետ ծանոթանալուն՝ ենթադրենք դիտարկվող ֆունկցիան ունի համապատասխան կարգի ածանցյալներ:

Սահմանում 3: *$y=f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ կամ պարզապես երկրորդ դիֆերենցիալ կոչվում է այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը.*

$$d^2y=d(dy):$$

Ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը կոչվում է տրված ֆունկցիայի երրորդ կարգի դիֆերենցիալ:

Ընդհանուր դեպքում, ֆունկցիայի $(n-1)$-րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալը կոչվում է այդ ֆունկցիայի n-րդ կարգի դիֆերենցիալ.

$$d^ny=d\left(d^{n-1}y\right)\quad (n=2,3,\ldots):$$

Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հաշվելիս կարևոր է հիշել, որ անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը x-ից անկախ կամայական թիվ է և հետևաբար՝ ըստ x-ի ածանցում կատարելիս այդ դիֆերենցիալի հետ պետք է վարվել այնպես, ինչպես հաստատունի հետ: Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ կունենանք

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=dy'dx=(y''dx)dx=y''(dx)^2=y''dx^2$$

կամ

$$d^2y=y''dx^2\ ^{*)}: \tag{18}$$

Նույն ձևով կստանանք

$$d^3y=d\left(d^2y\right)=d\left(y''dx^2\right)=dy''dx^2=\left(y'''dx\right)dx^2=y'''dx^3$$

կամ

$$d^3y=y'''dx^3: \tag{19}$$

Վերջին երկու բանաձևերի տեսքից կարելի է կռահել, որ ընդհանուր դեպքում տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$d^ny=y^{(n)}dx^n\ .^{**)} \tag{20}$$

որտեղից կստանանք

$$y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}\quad (n=1,2,\ldots): \tag{21}$$

Վերջում ծանոթանանք նաև բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ **[24,(12)]**:

---

*) Անկախ փոփոխականի n-րդ $(n=2,3,\ldots)$ դիֆերենցիալը կնշանակենք dx^n պայմանանշանով, իսկ x^n ֆունկցիայի դիֆերենցիալը՝ $d(x^n)$ պայմանանշանով:

**) Բերված բանաձևի խիստ ապացույցը կարելի է կատարել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Դիցուք $y = y(x)$ և $x = x(t)$ ածանցելի ֆունկցիաներն այնպիսին են, որ նրանցից կարելի է կազմել

$$y = y[x(t)] \tag{22}$$

բարդ ֆունկցիան:

Ինչպես գիտենք, (22) ֆունկցիայի ածանցյալն ըստ t-ի կարող ենք հաշվել

$$\frac{dy}{dt} = y'_x \cdot x'_t \tag{23}$$

բանաձևով [28,(15՛)]:

Վերջին բանաձևում ազատվելով կոտորակից՝ կունենանք

$$dy = y'_x \cdot x'_t\, dt$$

կամ

$$dy = y'(x)dx: \tag{24}$$

Ինչպես տեսնում ենք, (24) բանաձևը չի արտացոլում այն փաստը, որ x-ը ֆունկցիա է t-ից:

Այլ խոսքով, ֆունկցիայի արգումենտը անկախ փոփոխական է, թե կախված է մեկ այլ փոփոխականից, չի ազդում այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի տեսքի վրա:

***Ֆունկցիայի առաջին դիֆերենցիալի** վերոգրյալ հատկությունը կոչվում է ֆունկցիայի առաջին կարգի դիֆերենցիալի տեսքի անփոփոխելիության հատկություն:*

Նշենք, որ ֆունկցիայի բարձր կարգի դիֆերենցիալներն օժտված չեն այդ դիֆերենցիալների տեսքի անփոփոխելիության հատկությամբ:

§30. Ֆերմայի, Ռոլլի, Լագրանժի թեորեմները և նրանց երկրաչափական մեկնաբանությունները: Կոշիի թեորեմը:

Դիֆերենցիալ հաշվի մի քանի կարևոր արդյունքների հետ ծանոթանալու համար նախ ապացուցենք հետևյալ պարզունակ լեմը՝

Լեմ 1: *Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներքին x_0 կետում ունի վերջավոր ածանցյալ և $f'(x_0) > 0$ $[f'(x_0) < 0]$, ապա x_0-ին ձախից բավականաչափ մոտ x-երի համար տեղի ունի*

$$f(x) < f(x_0) \qquad [f(x) > f(x_0)] \tag{1}$$

անհավասարությունը, իսկ աջից բավականաչափ մոտ x-երի համար՝

$$f(x) > f(x_0) \qquad [f(x) < f(x_0)] \tag{2}$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներքին x_0 կետում ունի դրական (բացասական) ածանցյալ, ապա նշված կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում այն աճում է (նվազում է) [22,u12]:

Ապացույց: Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի x_0 ներքին կետում դրական է.

$$f'(x_0)>0: \tag{3}$$

Օգտվելով ֆունկցիայի ածանցյալի սահմանումից [26,ս2], կարող ենք (3) անհավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \tag{4}$$

տեսքով:

Ինչպես գիտենք, (4) անհավասարությունից հետևում է [22,հ1], որ գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ շրջակայք, որ այդ շրջակայքի յուրաքանչյուր կետում (բացի x_0-ից) տեղի ունի

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0 \tag{4'}$$

անհավասարությունը:

Վերջին անհավասարությունից երևում է, որ եթե x-ը պատկանում է x_0 կետի նշված շրջակայքին և $x<x_0$, ապա $f(x)<f(x_0)$, իսկ եթե $x>x_0$, ապա $f(x)>f(x_0)$: Վերոգրյալը նշանակում է, որ x_0 կետի $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան աճում է:

Հասկանալի է, որ նույն ձևով ապացուցվում է նաև թեորեմի երկրորդ մասը:

Ինչ

Թեորեմ 1: ***(Ֆերմա)** Եթե X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներքին x_0 կետում ընդունում է մեծագույն՝(փոքրագույն) արժեք և նշված կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար այդ ածանցյալը հավասար է զրոյի.*

$$f'(x_0)=0: \tag{5}$$

Ապացույց: Որոշակիության համար ենթադրենք, որ իր որոշման տիրույթի ներքին x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ստանում է մեծագույն արժեք: Ենթադրելով նաև, որ նշված կետում դիտարկվող ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ՝ ցույց տանք, որ տեղի ունի (5) հավասարությունը:

Համոզվելու համար ենթադրենք հակառակը.

$$f'(x_0)\neq 0, \tag{6}$$

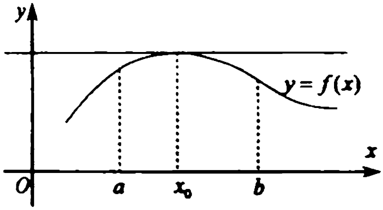
և քննարկենք $f'(x_0)>0$, $f'(x_0)<0$ դեպքերը:

Համաձայն լեմ 1-ի՝ առաջին դեպքում կստանանք, որ x_0 կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում տրված ֆունկցիան աճում է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ նվազում է: Վերոգրյալը նշանակում է, որ երկու դեպքերում էլ $f(x_0)$-ն չի կարող դիտարկվող ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը լինել:

Ստացված հակասությունից հետևում է, որ (6) ենթադրությունը սխալ է, այսինքն x_0 կետում տեղի ունի (5) հավասարությունը:

Իսկ

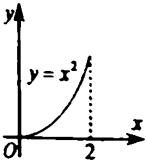
Ֆերմայի թեորեմն ունի երկրաչափական պարզ մեկնաբանություն.



Նկ.41

Եթե իր որոշման տիրույթի ներքին x_0 կետում $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք (նկ.41) և այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի շոշափող, որը զուգահեռ չէ oy առանցքին, ապա այն անհրաժեշտաբար զուգահեռ է ox առանցքին:

Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ X միջակայքում x_0-ի ներքին կետ լինելն էական է՝



Նկ.42

Օրինակ 1: $[0;2]$ հատվածում որոշված $y = x^2$ ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքը ստանում է $x_0 = 2$ կետում (նկ.42), սակայն նշված կետում դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալն ակնհայտորեն հավասար չէ զրոյի (քանի որ $x_0 = 2$-ը $[0;2]$ հատվածի ներքին կետ չէ):

Թեորեմ 2: *(Ռոլլ) Դիցուք.*

1) $y = f(x)$ *ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[a,b]$ հատվածի վրա,*

2) *Գոնե (a,b) բաց միջակայքում գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ,*

3) $[a,b]$ *հատվածի ծայրակետերում տրված ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ.*

$$f(a) = f(b): \tag{7}$$

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում տեղի ունի

$$f'(x_0) = 0$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Քանի որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածի վրա, ուստի համաձայն Վեյերշտրասի թեորեմի [25,թ5], այն նշված հատվածի վրա ընդունում է իր և՛ մեծագույն, և՛ փոքրագույն արժեքները: Նշանակելով այդ արժեքները համապատասխանաբար M-ով և m-ով՝ դիտարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

ա) $M = m$:

Քանի որ M-ը և m-ը տրված ֆունկցիայի համապատասխանաբար մեծագույն և փոքրագույն արժեքներն են $[a,b]$ հատվածի վրա, հետևաբար այդ հատվածի ցանկացած կետում տեղի ունի $m \le f(x) \le M$ գնահատականը: Նկատի ունենալով, որ քննարկվող դեպքում $M = m$, կստանանք

$$m \le f(x) \le m, \quad x \in [a,b],$$

ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող հատվածի վրա $f(x)$-ը նույնաբար հավասար է m-ի.

$$f(x) \equiv m: \qquad (8)$$

Քանի որ հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի [27,(5)], հետևաբար (8) առնչությունից հետևում է, որ (a,b) միջակայքի բոլոր կետերում $f'(x)$ ածանցյալը հավասար է զրոյի՝ այնպես որ, որպես x_0 կետ կարող ենք վերցնել նշված միջակայքի ցանկացած կետ:

բ) $m < M$:

(7) հավասարությունից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում m և M արժեքներից գոնե մեկը $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է $[a,b]$ հատվածի ներքին x_0 կետում:

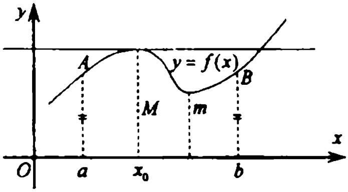
Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է օգտվել Ֆերմայի թեորեմից և համոզվել, որ

$$f'(x_0) = 0:$$

Իպա

Երկրաչափության լեզվով Ռոլլի թեորեմը հնչում է հետևյալ կերպ՝

Եթե $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված և անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է միևնույն արժեքները և այդ ֆունկցիայի գրաֆիկն (a,b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի շոշափող (որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին), ապա նշված միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում $y = f(x)$ կորին տարած շոշափողը զուգահեռ է ox առանցքին (Նկ.43):



Նկ.43

Օրինակների վրա ցույց տանք, որ Ռոլլի թեորեմում բերված բոլոր պայմաններն էական են:

Օրինակ 2: $[0;1]$ հատվածի վրա դիտարկենք

$$f(x) = x - [x]$$

ֆունկցիան [24,օ3]:

Ինչպես տեսնում ենք (Նկ.44), տրված հատվածի ծայրակետերում դիտարկվող ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքները.

$$f(0) = f(1) = 0,$$

$(0;1)$ միջակայքի բոլոր կետերում ունի վերջավոր ածանցյալ.

$$f'(x)=1,$$

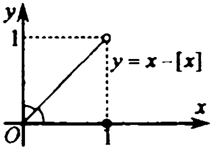
սակայն, քանի որ $x=1$ կետում այն անընդհատ չէ, այդ պատճառով նշված միջակայքի և ոչ մի կետում տրված ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար չէ զրոյի:

Օրինակ 3: $[-1;1]$ հատվածի վրա դիտարկենք $y=|x|$ անընդհատ ֆունկցիան (Նկ.45):

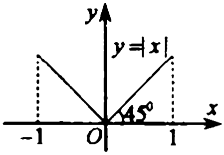
Ինչպես տեսնում ենք, տրված հատվածի ծայրակետերում դիտարկվող ֆունկցիան ընդունում է միևնույն արժեքները.

$$y=(-1)=y(1)=1:$$

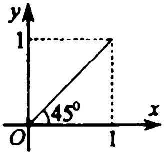
Սակայն, քանի որ $x=0$ կետում $y=|x|$ ֆունկցիան ածանցյալ չունի [27.o1], այդ պատճառով $(-1;1)$ միջակայքում գոյություն չունի կետ, որտեղ տրված ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար լինի զրոյի:



Նկ.44



Նկ.45



Նկ.46

Օրինակ 4: $[0;1]$ հատվածի վրա դիտարկենք $y=x$ անընդհատ ֆունկցիան (Նկ.46):

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալը $(0;1)$ միջակայքում հավասար է մեկի, ուստի այդ միջակայքում գոյություն չունի կետ, որ տրված ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար լինի զրոյի: Այս դեպքում Ռոլլի թեորեմի չգործելու պատճառը $[0;1]$ հատվածի ծայրակետերում $y=x$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների անհավասար լինելն է:

Թեորեմ 3: *(Լագրանժ) Դիցուք.*

1) *$y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ $[a,b]$ հատվածի վրա,*

2) *գոնե (a,b) բաց միջակայքում գոյություն ունի $f'(x)$ վերջավոր ածանցյալ:*

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում տեղի ունի

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0) \tag{9}$$

*հավասարությունը:**)

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{10}$$

*) Բերված հավասարությունը, որը հաճախ ներկայացվում է

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0) \qquad (a<x_0<b) \tag{9'}$$

տեսքով, կոչվում է Լագրանժի կամ վերջավոր աճերի բանաձև:

օժանդակ ֆունկցիան:

Անմիջական տեղադրման միջոցով կարող ենք համոզվել, որ

$$g(a) = g(b) = 0 :$$

Մյուս կողմից, $g(x)$ ֆունկցիան ակնհայտորեն անընդհատ է $[a,b]$ հատվածի վրա [24, թ1] և միջակայքում ունի վերջավոր ածանցյալ [28, (1), (9)].
(a, b)

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} :$$

Ինչպես տեսնում ենք, $g(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմի բոլոր պայմաններին: Հետևաբար, համաձայն նշված թեորեմի՝ (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում դիտարկվող օժանդակ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի.

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 ,$$

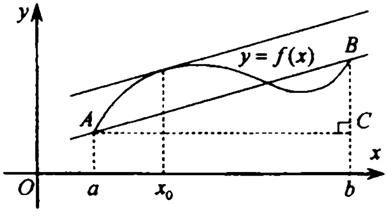
որտեղից և ստացվում է (9) հավասարությունը:

Իպա

Նկատելով, որ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC}$$

հարաբերությունը (C-ն $f(x)$ կորի A և B ծայրակետերով համապատասխանաբար oy և ox կոորդինատական առանցքներին տարած ուղղահայացների հատման կետն է) $f(x)$ կորի AB հատողի անկյունային գործակիցն է (Նկ.47), իսկ $f'(x_0)$-ն՝ x_0 աբսցիսն ունեցող կետում $f(x)$ կորին տարած շոշափողի անկյունային գործակիցը, ստանում ենք Լագրանժի թեորեմի երկրաչափական մեկնաբանությունը.



Նկ.47

Եթե $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկն (a,b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի շոշափող (որը զուգահեռ չէ օրդինատների առանցքին), ապա նշված միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում $y = f(x)$ կորին տարած շոշափողը զուգահեռ է դիտարկվող կորի ծայրակետերով անցնող ուղղին:

Նկատենք, որ Լագրանժի թեորեմում ընդունելով $f(b) = f(a)$, կստանանք Ռոլլի թեորեմը, որտեղից հետևում է, որ Լագրանժի թեորեմը հանդիսանում է Ռոլլի թեորեմի ընդհանրացումը:

Իր հերթին Լագրանժի թեորեմը կարելի է ընդհանրացնել հետևյալ կերպ՝

Թեորեմ 4: *(Կոշի) Դիցուք.*

1) $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ* $[a,b]$ *հատվածի վրա,*

2) *գոնե (a,b) բաց միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ,*

3) *$g(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:*

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում տեղի ունի

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \tag{11}$$

հավասարությունը:[*]

Ապացույց: Նախ նկատենք, որ (11) բանաձևի ձախ մասի հայտարարը չի կարող հավասարվել զրոյի, որովհետև հակառակ դեպքում $g(x)$ ֆունկցիան կբավարարի Ռոլլի թեորեմի պայմաններին և հետևաբար (a,b) բաց միջակայքում գոյություն կունենա այնպիսի x_0 կետ, որ $g'(x_0)$-ն հավասար կլինի զրոյի՝ ինչը կհակասի Կոշիի թեորեմի վերջին պայմանին:

Անցնելով նշված բանաձևի ապացուցմանը՝ դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի վրա որոշված

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)] \tag{12}$$

օժանդակ ֆունկցիան և ցույց տանք, որ այն բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին:

Իրոք, թեորեմի առաջին պայմանից հետևում է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ հատվածի վրա: Մյուս կողմից, (a,b) միջակայքում (12) օժանդակ ֆունկցիան ակնհայտորեն ունի վերջավոր ածանցյալ: Ի վերջո կարող ենք անմիջական տեղադրման միջոցով համոզվել, որ դիտարկվող հատվածի ծայրակետերում $\varphi(x)$ ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ.

$$\varphi(a)=\varphi(b):$$

Այսպիսով, քանի որ $[a,b]$ հատվածի ծայրակետերում $\varphi(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Ռոլլի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում տեղի ունի

$$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x_0)=0 \tag{13}$$

կամ որ նույնն է՝ (11) հավասարությունը:[**]

Իպա

Նկատելով, որ Կոշիի թեորեմում ընդունելով $g(x)=x$, կստանանք Լագրանժի թեորեմը՝ եզրակացնում ենք, որ իսկապես Լագրանժի թեորեմը հանդիսանում է Կոշիի թեորեմի մասնավոր դեպքը:

[*] Բերված հավասարությունը կոչվում է Կոշիի բանաձև:

[**] Նշենք, որ անցումը (13) հավասարությունից (11) հավասարություն օրինական է, քանի որ, համաձայն թեորեմի երրորդ պայմանի, $g(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

ԳԼՈՒԽ VI

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՕԳՆՈՒԹՅԱՄԲ

§31. Անորոշությունների բացումը Լոպիտալի կանոնով:

Կրկին անդրադառնալով անորոշություններին [21], [25] և նրանց «բացման» մեթոդներին՝ ենթադրենք X միջակայքում, որի համար a-ն սահմանային կետ է [18,ս18], որոշված են $f(x)$ ու $g(x)$ ֆունկցիաները և դիտարկենք

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\quad \lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} \qquad (1)$$

սահմանները:

Ինչպես գիտենք [22,թ6], [25,թ1], եթե x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաներն ունեն զրոյից տարբեր վերջավոր սահման, ապա (1) սահմանները նույնպես վերջավոր են: Պարզ է նաև, որ ընդհանուր դեպքում, x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ և $g(x)$ սահմանների իմանալը բավարար չէ (1) սահմանների մասին որևէ ընդհանուր պնդում կատարելու համար: Կախված դիտարկվող ֆունկցիաների սահմանային արժեքներից և այդ արժեքներին ձգտելու նրանց վարքից՝ նշված սահմանները կարող են ընդունել ամենատարբեր արժեքներ, կարող են և ընդհանրապես գոյություն չունենալ: Ասվածը նշանակում է, որ (1) տեսքի սահմաններ հաշվելիս մենք հաճախ ստիպված կլինենք գործ ունենալ

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{0},\quad \infty^{0} \qquad (2)$$

պայմանանշաններով արտահայտվող անորոշությունների հետ:

Այս պարագրաֆում կծանոթանանք (2) տեսքի անորոշությունների բացման այնպիսի եղանակների հետ, որոնցում դիտարկվող ֆունկցիաների ածանցյալներն էական դեր են կատարում:

I. *Մեր ուսումնասիրությունները սկսենք* $0/0$ *պայմանանշանով արտահայտվող անորոշություններից:*

Թեորեմ 1: *(Լոպիտալ) Դիցուք.*

1) *$f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a,b]$ միջակայքում,*

2) *x-ը a-ի ձգտելիս՝ ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0,\qquad \lim_{x\to a+0} g(x)=0, \qquad (3)$$

3) *գոյություն ունեն $f'(a)$ և $g'(a)$ վերջավոր միակողմանի ածանցյալներ, ընդ որում $g'(a)$-ն տարբեր է զրոյից:*

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad (4)$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Նախ համոզվենք, որ $[a,b]$ միջակայքում գոյություն ունի a կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքում որոշված է նաև $f(x)/g(x)$ քանորդը:

Իրոք, ինչպես գիտենք, $f'(a)$ և $g'(a)$ վերջավոր ածանցյալների գոյությունը ապահովում է $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը a կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում [27,թ1]: Մյուս կողմից, քանի որ $g'(a)\neq 0$, ուստի աջից գոյություն ունի a կետի այնպիսի շրջակայք, որտեղ $g(x)$ ֆունկցիան կա՛մ աճում է, կա՛մ նվազում [30,լ1]: Քանի որ նաև $g(a)=0$, ուստի նշված շրջակայքում $g(x)$ ֆունկցիան զրո չի դառնում, որտեղից էլ հետևում է, որ $f(x)/g(x)$ քանորդը որոշված է այդ շրջակայքում:

Անցնելով (4) բանաձևի արտածմանը՝ նկատենք, որ թեորեմում նշված պայմանների շնորհիվ կստանանք [22,(3),(21')], [26,ս2]

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a+0}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}:$$

Իսպա

Օրինակ 1: Օգտվելով (4) բանաձևից, հաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x-1+\ln(e-x)}:$$

Լուծում: Ունենք [27,(5), (8'), (9')], [28,(1),(1')]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x-1+\ln(e-x)}=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'\Big|_{x=0}}{[x-1+\ln(e-x)]'\Big|_{x=0}}=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_{x=0}}{\left(1-\dfrac{1}{e-x}\right)\Big|_{x=0}}=\frac{2e}{e-1}:$$

Պարզ է, որ $f'(a)=g'(a)=0$ դեպքում անմիջականորեն Լոպիտալի թեորեմից օգտվելը դառնում է անհնար: Եթե նշված դեպքում $f'(x)$ և $g'(x)$ ֆունկցիաները բավարարում են թեորեմ 1-ում $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների վրա դրված պայմաններին, ապա $f'(x)/g'(x)$ հարաբերության վրա կիրառելով Լոպիտալի թեորեմը՝ կստանանք

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f''(a)}{g''(a)}: \tag{4'}$$

Անհրաժեշտության դեպքում կրկնելով բերված դատողությունները՝ կհանգենք հետևյալ թեորեմին՝

Թեորեմ 2: *Դիցուք.*

1) $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները որոշված են* $[a,b]$ *միջակայքում,*

2) x *-ը* a *-ի ձգտելիս՝ ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a+0} g(x)=0,$$

3) *Նշված միջակայքում գոյություն ունեն*

$$f'(x), f''(x),\dots, f^{(n-1)}(x);\quad g'(x), g''(x),\dots, g^{(n-1)}(x) \tag{5}$$

վերջավոր ածանցյալներ $(n\ge 2)$,

4) $x=a$ *կետում (5) ածանցյալները հավասար են զրոյի,*

5) *գոյություն ունեն նաև* $f^{(n)}(a)$ $g^{(n)}(a)$ *և վերջավոր ածանցյալները, ընդ որում* $g^{(n)}(a)$ *ածանցյալը տարբեր է զրոյից:*

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)} \tag{6}$$

հավասարությունը:

Օրինակ 2: Օգտվելով (6) բանաձևից՝ հաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}: \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Լուծում: Ունենք [28,(15′)], [27,(7),(10),(13)]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\frac{(\ln\cos x)''\big|_{x=0}}{(x^2)''\big|_{x=0}}=\frac{-\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\Big|_{x=0}}{2}=-\frac{1}{2}:$$

Բնական հարց է ծագում. ինչպե՞ս վարվել այն դեպքերում, երբ $[a,b]$ *հատվածի* a *ծայրակետում* $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները որոշված չեն, հետևաբար* $f'(a)$ *և* $g'(a)$ *ածանցյալները գոյություն չունեն:*

Ձևակերպված հարցի պատասխանը տալիս է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Դիցուք.*

1) $f(x)$ *և* $g(x)$ *ֆունկցիաները որոշված են* $(a,b]$ *կիսաբաց միջակայքում,*

2) x *-ը* a *-ի ձգտելիս՝ ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a+0} g(x)=0,$$

3) $(a,b]$ *միջակայքում գոյություն ունեն* $f'(x)$ *և* $g'(x)$ *վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում* $g'(x)$ *ածանցյալը նշված միջակայքում զրո չի դառնում,*

4) *գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(վերջավոր կամ անվերջ) սահմանը:

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{7}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Ինչպես գիտենք, թեորեմի երրորդ պայմանը ապահովում է $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների անընդհատությունը տրված միջակայքում: Ընդունելով $f(a)=g(a)=0$, ակնհայտորեն դիտարկվող ֆունկցիաները կդարձնենք անընդհատ նաև $x=a$ կետում: Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատի ունենալ, որ $f(a)=g(a)=0$, $[a,x]$ միջակայքում $(a<x\le b)$ տրված ֆունկցիաների համար գրել Կոշիի բանաձևը [30,(11)].

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (a<x_0<x)$$

և այդ բանաձևի աջ ու ձախ մասերում անցնել սահմանի, երբ x-ը ձգտում է a-ի (հետևաբար x_0-ն էլ է ձգտում a-ի):

Իսկա

Քանի որ թեորեմ 3-ը երկու ֆունկցիաների քանորդի սահմանի հաշվումը հանգեցնում է այդ ֆունկցիաների ածանցյալների քանորդի սահմանը հաշվելուն՝ հետևաբար նշված թեորեմից կօգտվենք այն դեպքերում, երբ երկու ֆունկցիաների ածանցյալների քանորդի սահմանի հաշվումը ավելի հեշտ է, քան այդ ֆունկցիաների քանորդի սահմանի հաշվումը:

Կատարելով փոփոխականի $x=1/t$ փոխարինում՝ կարող ենք համոզվել, որ թեորեմ 3-ը տարածվում է նաև այն դեպքերում, երբ x-ը ձգտում է անվերջ մեծ սահմանի:

Թեորեմ 4: *Դիցուք.*

1) *$f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $[a,+\infty)$ $(a>0)$ միջակայքում,*

2) *x-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս՝ ձգտում են զրոյի.*

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

3) *$[a,+\infty)$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x)$ ածանցյալն ընդունում է միայն զրոյից տարբեր արժեքներ,*

4) *գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(վերջավոր կամ անվերջ) սահմանը:

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}: \tag{8}$$

հավասարությունը:

II. *Այժմ անցնենք ∞/∞ տեսքի անորոշ արտահայտությունների դիտարկմանը, այսինքն ուսումնասիրենք $f(x)/g(x)$ քանորդի սահմանը, երբ x-ը a սահմանային արժեքին ձգտելիս այդ ֆունկցիաները ձգտում են պլյուս անսահմանության:*

Պարզվում է տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը ձևակերպման իմաստով գրեթե չի տարբերվում թեորեմ 3-ից՝

Թեորեմ 5: *Դիցուք.*

1) *$f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a,b]$ կիսաբաց միջակայքում,*

2) *x-ը a-ի ձգտելիս՝ ձգտում են պլյուս անսահմանության.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} g(x)=+\infty,$$

3) *$(a,b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x)$ ածանցյալը նշված միջակայքում զրո չի դառնում,*

4) *գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(վերջավոր կամ անվերջ) սահմանը:

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9}$$

հավասարությունը:

Նշենք, որ ձևակերպած թեորեմը մնում է ուժի մեջ նաև $a=-\infty$ դեպքում և ավելացնենք, որ նման թեորեմ տեղի ունի նաև $[b,a)$ $(b<a)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար, ընդ որում այդ դեպքում էլ a-ն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ: Վերոգրյալից հետևում է, որ թեորեմ 5-ը պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքերում, երբ x-ը ձգտում է պլյուս կամ մինուս անսահմանության:

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} \qquad (\alpha>0) \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right):$$

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0:$$

Հատուկ նշենք, որ (7)-(9) բանաձևերը, որոնք ճիշտ են միայն այդ բանաձևերի աջ կողմում գրված սահմանները գոյության դեպքում՝ շրջել չի կարելի. հնարավոր են դեպքեր, երբ այդ հավասարությունների ձախ կողմում գրված սահմանները գոյություն ունեն, իսկ աջ կողմում գրվածները՝ ոչ:

II. *Այժմ անցնենք ∞/∞ տեսքի անորոշ.արտահայտությունների դիտարկմանը, այսինքն ուսումնասիրենք $f(x)/g(x)$ քանորդի սահմանը, երբ x -ը a սահմանային արժեքին ձգտելիս այդ ֆունկցիաները ձգտում են պլյուս անսահմանության:*

Պարզվում է տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը ձևակերպման իմաստով գրեթե չի տարբերվում թեորեմ 3-ից՝

Թեորեմ 5: *Դիցուք.*

1) *$f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են $(a,b]$ կիսաբաց միջակայքում,*

2) *x -ը a -ի ձգտելիս՝ ձգտում են պլյուս անսահմանության.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a+0} g(x) = +\infty,$$

3) *$(a,b]$ միջակայքում գոյություն ունեն $f'(x)$ և $g'(x)$ վերջավոր ածանցյալներ, ընդ որում $g'(x)$ ածանցյալը նշված միջակայքում զրո չի դառնում,*

4) *գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(վերջավոր կամ անվերջ) սահմանը:

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում տեղի ունի

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{9}$$

հավասարությունը:

Նշենք, որ ձևակերպած թեորեմը մնում է ուժի մեջ նաև $a=-\infty$ դեպքում և ավելացնենք, որ նման թեորեմ տեղի ունի նաև $[b,a)$ $(b<a)$ միջակայքում որոշված $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների համար, ընդ որում այդ դեպքում էլ a -ն կարող է լինել վերջավոր կամ անվերջ: Վերոգրյալից հետևում է, որ թեորեմ 5-ը պահպանում է իր ուժը նաև այն դեպքերում, երբ x -ը ձգտում է պլյուս կամ մինուս անսահմանության:

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \qquad (\alpha>0) \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right):$$

Լուծում: Ունենք

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0 :$$

Հատուկ նշենք, որ (7)-(9) բանաձևերը, որոնք ճիշտ են միայն այդ բանաձևերի աջ կողմում գրված սահմանները գոյության դեպքում՝ շրջել չի կարելի. հնարավոր են դեպքեր, երբ այդ հավասարությունների ձախ կողմում գրված սահմանները գոյություն ունեն, իսկ աջ կողմում գրվածները՝ ոչ:

Օրինակ 4: x-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս

$$f(x)=x+\cos x \quad \text{և} \quad g(x)=x$$

ֆունկցիաների քանորդն ունի սահման [22,(19'),(21')].

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=1+0=1,$$

մինչդեռ դիտարկվող ֆունկցիաների ածանցյալների քանորդը.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\frac{1-\sin x}{1}=1-\sin x,$$

ակնհայտորեն սահման չունի [27,(7),(12)]:

III. *Անցնելով* $0\cdot\infty$ *տեսքի անորոշությունների դիտարկմանը՝ ուսումնասիրենք* $f(x)g(x)$ *արտադրյալի սահմանը, երբ* x*-ը* a*-ի ձգտելիս* $f(x)$ *ֆունկցիան ձգտում է զրոյի, իսկ* $g(x)$ *ֆունկցիան՝ պլյուս անսահմանության.*

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty:$$

Ֆունկցիաների $f(x)g(x)$ արտադրյալը ներկայացնելով

$$f(x)g(x)=\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \tag{10}$$

տեսքերից որևէ մեկով, $0\cdot\infty$ տեսքի

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$$

անորոշությունը կփոխարինենք $0/0$ կամ ∞/∞ տեսքի անորոշությունով.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}: \tag{11}$$

Այսպիսով, $0\cdot\infty$ *տեսքի անորոշությունը պարզելու համար անհրաժեշտ է այն փոխարինել* $0/0$ *կամ* ∞/∞ *տեսքի անորոշություններից որևէ մեկով և օգտվել Լոպիտալի կանոնից:*

Օրինակ 5: Հաշվել հետևյալ սահմանը՝

$$\lim_{x\to+0}(x^{\alpha}\ln x)\qquad(\alpha>0):$$

Լուծում: Օգտվելով (7) բանաձևից՝ կստանանք [24,o11]

$$\lim_{x\to+0}(x^{\alpha}\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha}=0:$$

IV. $0/0$ *կամ* ∞/∞ *տեսքի անորոշություններից որևէ մեկին կարելի է բերել նաև* $\infty-\infty$ *տեսքի անորոշությունը:*

Դիցուք x-ը a-ի ձգտելիս $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները ձգտում են պլյուս անսահմանության.

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a} g(x)=+\infty:$$

Կատարելով, օրինակ

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}},\tag{12}$$

ձևափոխությունները, $\infty-\infty$ տեսքի

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$$

անորոշությունը կփոխարինենք $0/0$ տեսքի

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}$$

անորոշությունով:

Այսպիսով, $\infty-\infty$ տեսքի անորոշությունը պարզելու համար անհրաժեշտ է այն փոխարինել $0/0$ կամ ∞/∞ տեսքի անորոշություններից որևէ մեկով և օգտվել Լոպիտալի կանոնից:

Օրինակ 6: Հաշվել հետևյալ սահմանը`

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)\qquad(\infty-\infty):$$

Լուծում: Օգտվելով (7) բանաձևից և երկու ֆունկցիաների տարբերության (12) ներկայացումից` կունենանք

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{[x(e^x-1)]'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(e^x-1+xe^x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}:$$

V. *Վերջում ծանոթանանք $1^\infty, 0^0, \infty^0$ տեսքի անորոշությունների հետ:*

Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}\tag{13}$$

սահմանը, երբ x-ը a-ի ձգտելիս $g(x)$ ֆունկցիան ձգտում է զրոյի, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան` պլյուս անսահմանության.

$$\lim_{x\to a} g(x)=0,\qquad \lim_{x\to a} f(x)=+\infty:\tag{14}$$

Բնական հիմքով [21,(32)] լոգարիթմելով

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

ֆունկցիան և անցնելով սահմանի, երբ x-ը ձգտում է a-ի՝ կունենանք

$$\lim_{x\to a} \ln y = \lim_{x\to a} [g(x) \ln f(x)]: \quad (15)$$

Ինչպես տեսնում ենք, (15) սահմանը հաշվելու համար մենք անխուսափելիորեն պետք է գործ ունենանք $0\cdot\infty$ տեսքի անորոշության հետ:

Ենթադրելով, որ գոյություն ունի վերջավոր կամ անվերջ

$$\lim_{x\to a} \ln y = b$$

սահմանը և օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունից [24,օ9], կունենանք

$$\lim_{x\to a} \ln y = \ln \lim_{x\to a} y = b,$$

որտեղից (13) սահմանի համար կստանանք

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a} y = e^b :$$

Եթե մասնավոր դեպքում $b = +\infty$ կամ $b = -\infty$, ապա համապատասխանաբար կունենանք [24,օ7]

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = +\infty, \quad \lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = 0 :$$

Այսպիսով, ∞^0 տեսքի անորոշությունը պարզելու համար անհրաժեշտ է.

ա) տրված արտահայտությունը լոգարիթմել,

բ) հաշվել ստացված արտահայտության սահմանը,

գ) հաշվել տրված արտահայտության սահմանը՝ օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի անընդհատությունից.[*]

Օրինակ 7: Հաշվել հետևյալ սահմանը.[**]

$$\lim_{x\to +0} x^x \quad (x>0):$$

Լուծում: x^x աստիճանացուցչային ֆունկցիան [25,ս1] նշանակելով y-ով և օգտվելով (7) բանաձևից՝ կստանանք

$$\ln y = x \ln x, \quad \lim_{x\to +0} \ln y = \lim_{x\to +0} (x \ln x) = \lim_{x\to +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to +0} x = 0,$$

որտեղից, հետևելով տեսությանը՝ կունենանք

$$\ln \lim_{x\to +0} y = 0, \quad \lim_{x\to +0} y = e^0, \quad \lim_{x\to +0} x^x = 1 :$$

---

*) Նույն կերպ կվարվենք նաև 1^∞ և 0^0 տեսքի անորոշությունների դեպքում:

**) $x \to +0$ $(x \to -0)$ գրառումը նշանակում է x-ը դրական (բացասական) մնալով ձգտում է զրոյի

§32. Թեյլորի բանաձևը: Մի քանի տարրական ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերը:

Դիցուք տրված է n-րդ կարգի

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n \quad (a_i=const;\, i=0,1,\ldots,n) \tag{1}$$

ամբողջ բազմանդամը:

$p(x)$ բազմանդամը հաջորդաբար n անգամ ածանցելով՝ կստանանք [27,(7)], [28,(1′′),(9)]

$$\begin{aligned} p'(x)&=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1},\\ p''(x)&=1\cdot2\cdot a_2+2\cdot3a_3x+\cdots+(n-1)\cdot n\cdot a_nx^{n-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ p^{(n)}(x)&=1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot a_n: \end{aligned} \tag{2}$$

(1) և (2) հավասարություններում ընդունելով $x=0$, դիտարկվող բազմանդամի գործակիցների համար կունենանք

$$a_0=p(0),\quad a_1=\frac{p'(0)}{1!},\quad a_2=\frac{p''(0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{p^{(n)}(0)}{n!}: \tag{3}$$

a_k $(k=0,1,\ldots,n)$ գործակիցների համար ստացած արժեքները տեղադրելով տրված բազմանդամի արտահայտության մեջ՝ կունենանք

$$p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\frac{p''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n: \tag{4}$$

Նույն ձևով, ավելի ընդհանուր տեսքի

$$p(x)=b_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\ldots+b_n(x-x_0)^n \quad (x_0\neq0) \tag{5}$$

բազմանդամը կարող ենք ներկայացնել

$$p(x)=p(x_0)+\frac{p'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{p''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6}$$

տեսքով:

Նկատենք, որ (6) բանաձևում ընդունելով $x_0=0$, կստանանք (4) բանաձևը:

Սահմանում 1: *(1) և (5) բազմանդամների համար ստացած (4) և (6) բանաձևերը կոչվում են այդ բազմանդամների Թեյլորի բանաձևեր.*[*]

Այսպիսով, բազմանդամի գործակիցները կարելի է արտահայտել որևէ x_0 կետում այդ բազմանդամի և նրա ածանցյալների արժեքների միջոցով:

Այժմ դիտարկենք կամայական $f(x)$ ֆունկցիա և ենթադրենք, որ այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մի որևէ x_0 կետում գոյություն ունեն տրված ֆունկցիայի մինչև n-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալները: Այդ դեպքում, երբ (6) բանաձևի նմանությամբ կառուցենք

---

[*] Հաճախ (4) բանաձևը կոչվում է (1) բազմանդամի Մակլորենի բանաձև:

$$p_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (7)$$

բազմանդամը, ապա կնկատենք, որ կառուցած բազմանդամի և նրա մինչև n-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալների արժեքները x_0 կետում համընկնում են $f(x)$ ֆունկցիայի և նրա համապատասխան ածանցյալների արժեքների հետ: Սակայն, քանի որ դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիան ընդհանուր դեպքում n-րդ աստիճանի ամբողջ բազմանդամ չէ, ուստի հնարավոր չէ պնդել, որ այն նույնաբար համընկնում է $p_n(x)$ բազմանդամի հետ: Քննարկվող դեպքում ընդամենը կարելի է սպասել, որ (7) բազմանդամն ինչ-որ իմաստով «մոտ» է դիտարկվող $f(x)$ ֆունկցիային: Այդ պատճառով հատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x) \quad (8)$$

տարբերության ուսումնասիրությունը:

Վերոգրյալից հետևում է, որ $r_n(x)$ ֆունկցիայի և նրա մինչև n-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալների արժեքները x_0 կետում հավասար են զրոյի.

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=\cdots=r_n^{(n)}(x_0)=0: \quad (9)$$

Կարելի է համոզվել, որ x-ը x_0-ի ձգտելիս $r_n(x)$ տարբերությունը ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քան $(x-x_0)^n$-ը [23,ս4,(12)].

$$r_n(x)=o[(x-x_0)^n]: \quad (10)$$

Միավորելով (7),(8) և (10) բանաձևերը՝ կստանանք $f(x)$ ֆունկցիայի

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n] \quad (11)$$

ներկայացումը:

Ինչպես տեսնում ենք, (11) բանաձևը $p_n(x)$ բազմանդամի համար բերված (7) բանաձևից տարբերվում է լրացուցիչ (10) անդամի առկայությամբ:

Նշված տեսքով լրացուցիչ անդամը ստացել է Պեանոն, այդ պատճառով (11) բանաձևը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի՝ Պեանոյի տեսքով բերված լրացուցիչ անդամով Թեյլորի բանաձև:

Լրացուցիչ անդամի համար գոյություն ունեն նաև այլ տեսքեր: Բերենք, օրինակ, այդ անդամի Լագրանժի տեսքը.

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0;c;x), \quad (12)$$

որը հիշեցնում է $f(x)$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի հաջորդ անդամը՝ այն տարբերությամբ, որ $f(x)$ ֆունկցիայի $(n+1)$-րդ ածանցյալի արժեքը հաշվվում է ոչ թե x_0 կետում, այլ x_0-ի և x-ի միջև ընկած միջանկյալ մի որևէ c կետում:

$f(x)$ ֆունկցիայի՝ Լագրանժի տեսքով բերված մնացորդային անդամի բանաձևի մեջ ընդունելով $x_0=0$, կստանանք

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0\le\Theta\le 1): \tag{12'}$$

Անցնելով (12) բանաձևի արտածմանը, կատարենք

$$\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1} \tag{13}$$

նշանակումը և նկատենք, որ

$$\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\varphi''(x_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(x_0)=0: \tag{14}$$

Այնուհետև հաշվի առնելով, որ x_0 կետի շրջակայքում $(x\neq x_0)$ ինչպե՛ս (8) և (13) ֆունկցիաները, այնպե՛ս էլ նրանց մինչև n-րդ կարգը ներառյալ համապատասխան ածանցյալները բավարարում են Կոշիի թեորեմի պայմաններին [30,թ4], (9) և (14) հավասարությունների շնորհիվ կունենանք

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)}=\frac{r_n'(x_1)-r_n'(x_0)}{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_0)}=\frac{r_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)}=\cdots=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)}=$$
$$=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})} \qquad \left(x_0 \lessgtr x_1 \lessgtr x, \quad x_0 \lessgtr x_{k+1} \lessgtr x_k, \quad k=1,2,\ldots,n\right):$$

Այսպիսով, $f(x)$ ֆունկցիայի $r_n(x)$ մնացորդային անդամի համար ստանում ենք

$$r_n(x)=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}\varphi(x)$$

ներկայացումը, որտեղ $\varphi(x)$-ը որոշվում է (13) բանաձևով:

Նկատի ունենալով, որ

$$\varphi^{(n+1)}(x)=(n+1)!, \quad r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-p_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x),$$

վերջնականապես կունենանք

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \left(x_0 \lessgtr c=x_{n+1} \lessgtr x\right):$$

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք հետևյալ կարևոր թեորեմը.

Թեորեմ 1: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի x_0 կետում և նրա որևէ շրջակայքում գոյություն ունեն այդ ֆունկցիայի մինչև $(n+1)$-րդ կարգը ներառյալ բոլոր (անընդհատ) ածանցյալները, ապա այդ շրջակայքի ցանկացած x կետի համար գոյություն ունի այնպիսի c կետ $(x_0 \lessgtr c \lessgtr x)$, որ տեղի ունի $f(x)$ ֆունկցիայի*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (x_0 \lessgtr c \lessgtr x) \tag{15}$$

վերլուծությունը:

Սահմանում 2: *$f(x)$ ֆունկցիայի (15) վերլուծությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի՝ Լագրանժի տեսքով բերված լրացուցիչ անդամով Թեյլորի բանաձև:*

$f(x)$ ֆունկցիայի (11) և (15) վերլուծությունների մեջ ընդունելով $x_0=0$, համապատասխանաբար կստանանք

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)\,, \tag{11'}$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0\le\Theta\le1): \tag{15'}$$

Սահմանում 3: *$f(x)$ ֆունկցիայի (11′) [(15′)] վերլուծությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի՝ Պեանոյի (Լագրանժի) տեսքով բերված լրացուցիչ անդամով Մակլորենի բանաձև:*

Այժմ անցնենք մի քանի տարրական ֆունկցիաների Մակլորենի բանաձևերի արտածմանը:

1°. *Դիտարկենք*

$$f(x)=e^x \tag{16}$$

ցուցչային ֆունկցիան:

Օգտվելով (16) ֆունկցիայի n-րդ $(n=1,2,\cdots)$ կարգի ածանցյալի բանաձևից **[29,(5′)]**.

$$(e^x)^{(n)}=e^x,$$

կունենանք

$$(e^x)^{(n)}\Big|_{x=0}=1 \quad (n=1,2,\cdots): \tag{16'}$$

Դիտարկվող ֆունկցիայի՝ Լագրանժի տեսքով բերված լրացուցիչ անդամով Մակլորենի բանաձևը ստանալու համար մնում է (15′) բանաձևում ընդունել $f(x)=e^x$ և օգտվել (16′) հավասարություններից.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x} \quad (0\le\Theta\le1): \tag{17}$$

Վերջին բանաձևում ընդունելով $x=1$, կունենանք

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\Theta}}{(n+1)!} \qquad (0\le\Theta\le1): \tag{17'}$$

Այնուհետև առհամարելով ստացված հավասարության աջ մասում գրված վերջին գումարելին, կստանանք

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \tag{18}$$

որտեղից, ընդունելով $n = 8$, կունենանք [21,(32)]

$$e \approx 2{,}71828:$$

2°. *Այժմ դիտարկենք*

$$f(x) = \sin x \quad և \quad g(x) = \cos x \tag{19}$$

եռանկյունաչափական ֆունկցիաները:

Օգտվելով (19) ֆունկցիաների n-րդ $(n = 1,2,\ldots)$ կարգի ածանցյալների բանաձևերից [29,(6),(7)].

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

կունենանք

$$f(0) = f^{(2m)}(0) = \sin \pi m = 0,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin(2m-1)\frac{\pi}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi m\right) = -\cos \pi m = (-1)^{m+1} = (-1)^{m-1}, \tag{19'}$$

$$g(0) = 1, \quad g^{(2m)}(0) = \cos \pi m = (-1)^m,$$

$$g^{(2m-1)}(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi m\right) = \sin \pi m = 0 \qquad (m = 1,2,\ldots):$$

Հետևաբար, (11′) բանաձևում հաջորդաբար ընդունելով $f(x) = \sin x$ և $f(x) = \cos x$, կստանանք (19) ֆունկցիաների՝ Պեանոյի տեսքով բերված լրացուցիչ անդամով Մակլորենի բանաձևերը.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}), \tag{20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}): \tag{21}$$

3°. *Այնուհետև դիտարկենք*

$$f(x) = (1+x)^\alpha \tag{22}$$

ֆունկցիան, որտեղ α-ն կամայական հաստատուն է:

Օգտվելով աստիճանային ֆունկցիայի n-րդ $(n = 1,2,\ldots)$ կարգի ածանցյալի բանաձևից [29,(2)].

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$

կունենանք

$$f^{(n)}(x) = \left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \qquad (n = 1,2,\ldots):$$

Հետևաբար, (11′) բանաձևում ընդունելով $f(x) = (1+x)^\alpha$, կստանանք (22) ֆունկցիայի Մակլորենի բանաձևը.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n): \qquad (23)$$

Մասնավոր դեպքում, (23) բանաձևում հաջորդաբար ընդունելով $n=3$, $\alpha=-1$, $n=3$, $\alpha=1/2$ և $n=3$, $\alpha=-1/2$, համապատասխանաբար կունենանք

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3), \qquad (23')$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3+o(x^3), \qquad (23'')$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+o(x^3): \qquad (23''')$$

4°. *Դիտարկենք նաև*

$$f(x)=\ln(1+x) \qquad (24)$$

լոգարիթմական ֆունկցիան:

Օգտվելով լոգարիթմական ֆունկցիայի n-րդ $(n=1,2,\ldots)$ կարգի ածանցյալի բանաձևից [29,(4)].

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n},$$

կունենանք

$$f(0)=0, \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)! \qquad (n=1,2,\ldots):$$

Հետևաբար, (11′) բանաձևում ընդունելով $f(x)=\ln(1+x)$, կստանանք (24) ֆունկցիայի Մակլորենի բանաձևը.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n) \qquad (x>-1): \qquad (25)$$

Վերջին բանաձևում x-ը փոխարինելով $-x$-ով՝ կստանանք

$$f(x)=\ln(1-x)$$

ֆունկցիայի Մակլորենի բանաձևը.

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o(x^n) \qquad (x<1): \qquad (25')$$

(25) նույնությունից անդամ առ անդամ հանելով (25′) նույնությունը, կստանանք նաև

$$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

ֆունկցիայի Մակլորենի բանաձևը.

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right)+o(x^{2m+1}) \qquad (-1<x<1): \qquad (25'')$$

§33. Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը: Ֆունկցիայի աճման և նվազման պայմանները: Ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը և էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը: Ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը: Ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը երկրորդ կարգի ածանցյալի միջոցով:

Ֆունկցիայի վարքն ուսումնասիրելիս կարևոր նշանակություն ունի նրա հաստատուն մնալու և մոնոտոնության միջակայքերի [22,ս13] գտնելը:

Այս պարագրաֆում նշված միջակայքերը գտնելու խնդիրը կլուծենք՝ օգտվելով ուսումնասիրվող ֆունկցիայի ածանցյալի վարքից:

Թեորեմ 1: *Դիցուք X միջակայքում[*] որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, որպեսզի նշված միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան լինի հաստատուն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ միջակայքի ներսում տեղի ունենա*

$$f'(x)=0 \tag{1}$$

պայմանը:

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Քանի որ հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի [27,(5)], հետևաբար թեորեմի անհրաժեշտությունն ակնհայտ է:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներսում տեղի ունի (1) պայմանը:

X միջակայքում վերցնենք որևէ x_0 կետ և ցանկացած հատված, որի մի ծայրակետը x_0-ն է.

$$[x,x_0],\quad [x_0,x],\quad x\in X:$$

Քանի որ $[x,x_0]$, (կամ $[x_0,x]$) հատվածում $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին [30,թ3], հետևաբար ըստ այդ թեորեմի, տեղի ունի

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(c) \tag{2}$$

հավասարությունը, որտեղ c-ն ընկած է x և x_0 կետերի միջև: Մյուս կողմից, քանի որ ակնհայտորեն c-ն X միջակայքի ներքին կետ է՝ ուրեմն, ըստ (1) պայմանի, տեղի ունի

$$f'(c)=0 \tag{3}$$

հավասարությունը: Վերջին երկու հավասարություններից հետևում է, որ X միջակայքի ցանկացած կետում տեղի ունի

$$f(x)-f(x_0)=0$$

կամ որ նույնն է՝

---

*) Տե՛ս 66-րդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

$$f(x)=f(x_0)$$

հավասարությունը, ինչն էլ իր հերթին նշանակում է, որ $f(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է այդ միջակայքում:

Իպա

Հետևանք 1: *Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են ու անընդհատ X միջակայքում և այդ միջակայքի ներսում ունեն վերջավոր ածանցյալներ: Այդ դեպքում, եթե X միջակայքի բոլոր ներքին կետերում տեղի ունի*

$$f'(x)=g'(x) \tag{4}$$

հավասարությունը, ապա այդ ամբողջ միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիաները իրարից տարբերվում են հաստատունով

$$f(x)-g(x)=c \qquad (c=const, x\in X): \tag{5}$$

Ապացույց: Դիցուք X միջակայքի բոլոր ներքին կետերում տեղի ունի (4) կամ որ նույնն է՝

$$f'(x)-g'(x)=0$$

հավասարությունը: Այդ դեպքում կատարելով

$$\varphi(x)=f(x)-g(x) \tag{6}$$

նշանակումը՝ կստանանք, որ X միջակայքի բոլոր ներքին կետերում տեղի ունի

$$\varphi'(x)=0$$

հավասարությունը [28,թ1], որտեղից էլ, համաձայն թեորեմ 1-ի, հետևում է, որ $\varphi(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է դիտարկվող միջակայքում.

$$\varphi(x)=c, \quad x\in X: \tag{7}$$

Պնդման ապացույցն ավարտելու համար մնում է (6) նշանակման շնորհիվ (7) հավասարությունը ներկայացնել (5) տեսքով:

Իպա

Նշենք, որ ապացուցած հետևանքը կարևոր կիրառություն ունի ինտեգրալ հաշվում [35,թ1]:

Խնդիր 1: Ապացուցել հետևյալ նույնությունը՝

$$arctgx=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (-\infty<x<+\infty): \tag{ա}$$

Լուծում: Համոզվելով, որ (ա) հավասարության աջ և ձախ կողմերում գրված ֆունկցիաների ածանցյալները նույնաբար համընկնում են [27,(16),(20)],[28,(12)], հետևանք 1-ի շնորհիվ կստանանք, որ ամբողջ թվային առանցքի վրա այդ ֆունկցիաներն իրարից տարբերվում են հաստատունով.

$$arctgx=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+c \qquad (-\infty<x<+\infty; c=const): \tag{բ}$$

Վերջին հավասարության մեջ ընդունելով, օրինակ, $x=0$ և նկատի ունենալով, որ

$$arctg0=\arcsin 0=0,$$

կստանանք $c=0$:

(ա) նույնության ճշմարտացիության մեջ համոզվելու համար մնում է c-ի համար ստացած արժեքը տեղադրել (բ) հավասարության մեջ:

Այժմ դնենք ֆունկցիայի ածանցյալի օգնությամբ նրա մոնոտոնության միջակայքերը գտնելու խնդիրը:

Նախ դիտարկենք լայն իմաստով մոնոտոն աճող (այսինքն չնվազող) ֆունկցիայի դեպքը [22,ս14]:

Թեորեմ 2: *Դիցուք X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում որպեսզի նշված միջակայքում տրված ֆունկցիան լայն իմաստով մոնոտոն աճի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ միջակայքի ներսում $f'(x)$ ածանցյալն ընդունի ոչ բացասական արժեքներ.*

$$f'(x) \geq 0: \tag{8}$$

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան լայն իմաստով մոնոտոն աճում է: Այդ դեպքում, եթե տրված միջակայքում վերցնենք x-ի որևէ արժեք և այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $(x+\Delta x)$-ը դուրս չգա X միջակայքի սահմաններից՝ կունենանք

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0:$$

Վերջին անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի՝ կստանանք (8) անհավասարությունը [26,(2)]:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրելով, որ X միջակայքի ներսում տեղի ունի (8) անհավասարությունը՝ այդ միջակայքում վերցնենք կամայական x_1 և x_2 $(x_1 < x_2)$ արժեքներ:

Քանի որ $[x_1, x_2]$ հատվածում տրված ֆունկցիան բավարարում է Լագրանժի թեորեմի պայմաններին, ուստի այդ հատվածի ներսում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ տեղի ունի

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(x_0) \quad (x_1 < x_0 < x_2) \tag{9}$$

հավասարությունը:

$f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալի մասին արված ենթադրությունից և x_1, x_2 կետերի ընտրությունից հետևում է, որ (9) հավասարության աջ մասը բացասական չէ: Հետևաբար, բացասական չէ նաև այդ հավասարության ձախ մասը, ինչը նշանակում է, որ X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան առնվազն լայն իմաստով մոնոտոն աճում է:

Իպա

Կարող ենք նույն ձևով ապացուցել նաև հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2′: *Դիցուք X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում որպեսզի նշված միջակայքում տրված ֆունկցիան լայն իմաստով մոնոտոն նվա-*

զի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ միջակայքի ներսում $f'(x)$ ածանցյալն ընդունի ոչ դրական արժեքներ

$$f'(x)\le 0: \qquad (8')$$

Հասկանալի է, որ եթե թեորեմ 2-ում և թեորեմ 2′-ում բացառենք X միջակայքի մեջ ընկած որևէ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի հաստատուն լինելու հնարավորությունը (այսինքն՝ դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալի նույնաբար զրո լինելու հնարավորությունը), ապա կգանք խիստ իմաստով մոնոտոն ֆունկցիայի դեպքին [22,ս12]:

Թեորեմ 3: *Դիցուք X միջակայքում որոշված և անընդհատ $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում որպեսզի նշված միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան խիստ իմաստով մոնոտոն աճի (նվազի), անհրաժեշտ է և բավարար, որ.*

I. *այդ միջակայքի ներսում $f'(x)$ ածանցյալն ընդունի ոչ բացասական (ոչ դրական) արժեքներ.*

$$f'(x)\ge 0 \qquad [f'(x)\le 0],$$

II. X *միջակայքի մեջ ընկած ոչ մի միջակայքում $f'(x)$ ածանցյալը նույնաբար հավասար չլինի զրոյի:*

Ապացույց:*) *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան խիստ իմաստով մոնոտոն աճում է X միջակայքում:

Կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ տրված ֆունկցիան դիտարկվող միջակայքում չի նվազում: Այդ դեպքում թեորեմ 2-ի շնորհիվ տեղի ունի I պայմանը:

Պարզ է, որ տեղի ունի նաև II պայմանը, որովհետև հակառակ դեպքում, համաձայն թեորեմ 1-ի, X միջակայքում գոյություն կունենա միջակայք, որի վրա $f(x)$ ֆունկցիան կլինի հաստատուն՝ ինչը հակասում է X միջակայքում այդ ֆունկցիայի խիստ իմաստով մոնոտոն աճող լինելուն:

Բավարարություն: Ենթադրենք թեորեմում նշված պայմանները տեղի ունեն: Այդ դեպքում, համաձայն թեորեմ 2-ի, դիտարկվող միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան առնվազն լայն իմաստով մոնոտոն աճում է, ինչը նշանակում է, որ այդ միջակայքի ցանկացած x_1 և x_2 $(x_1<x_2)$ արժեքների համար տեղի ունի ոչ միայն հետևյալ անհավասարությունը՝

$$f(x_1)\le f(x_2),$$

այլ նաև

$$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2) \qquad (x_1\le x\le x_2) \qquad (10)$$

անհավասարությունները: Բայց, եթե x_1 և x_2 կետերում $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքները հավասարվեն իրար, ապա (10) անհավասարություններից կստա-

---

*) Նկատի ունենալով, որ նվազող ֆունկցիայի դեպքում թեորեմն ապացուցվում է նույն ձևով՝ կսահմանափակվենք միայն աճող ֆունկցիայի դեպքով:

նանք, որ $[x_1, x_2]$ հատվածի վրա $f(x)$ ֆունկցիան հաստատուն է.

$$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = const, \quad x \in [x_1, x_2], \tag{11}$$

որտեղից, թեորեմ 1-ի շնորհիվ, կհետևի, որ $[x_1, x_2]$ հատվածի ներսում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը նույնաբար հավասար է զրոյի:

Քանի որ ստացված եզրակացությունը հակասում է թեորեմի II պայմանին՝ հետևաբար $f(x_1) = f(x_2)$ հավասարությունն անհնար է:

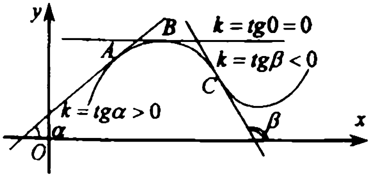
Այսպիսով ստանում ենք, որ թեորեմում նշված պայմանների բավարարման դեպքում X միջակայքին պատկանող ցանկացած x_1 և x_2 $(x_1 < x_2)$ արժեքների համար տեղի ունի

$$f(x_1) < f(x_2)$$

անհավասարությունը, ինչը նշանակում է, որ այդ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան խիստ իմաստով մոնոտոն աճում է:

Իսպ

Ֆունկցիայի մոնոտոնության բնույթի և այդ ֆունկցիայի ածանցյալի նշանի միջև թեորեմ 3-ում հաստատված կապը կդառնա երկրաչափորեն ակնհայտ, եթե հիշենք, որ ֆունկցիայի ածանցյալը որևէ կետում հավասար է այդ աբսցիսն ունեցող կետում դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկին տարած շոշափողի անկյունային գործակցին [26,(4)]: Եթե այդ գործակիցը դրական է, ուրեմն դիտարկվող կորին տարած շոշափողը (Նկ.48) և հետևաբար նաև այդ կորը թեքված են դեպի վեր*) (այսինքն, որքան ox առանցքով շարժվենք դեպի աջ, այնքան տրված կորով վեր կբարձրանանք), իսկ եթե այն բացասական է, ապա նշված շոշափողն ու կորը թեքված են դեպի ներքև (այսինքն որքան ox առանցքով շարժվենք դեպի աջ, այնքան տրված կորով ներքև կիջնենք):



Նկ.48

Օրինակ 1: Գտնել $y = x^3$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը:

Լուծում: Քանի որ $y = x^3$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ ամբողջ թվային առանցքի վրա [24,o1], իսկ նրա ածանցյալը $(y' = 3x^2)$ բավարարում է թեորեմ 3-ում նշված պայմաններին, հետևաբար այն խիստ իմաստով մոնոտոն աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա (Նկ.49):

Օրինակ 2: Գտնել $y = x^4$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը:

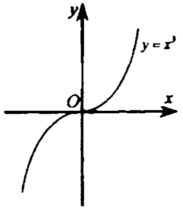
Լուծում: Հաշվելով տրված ֆունկցիայի ածանցյալը [27,(7)].

$$y' = 4x^3$$

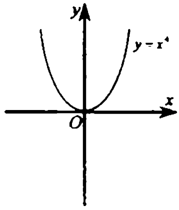
և նկատելով, որ այն x-ի բացասական արժեքների համար ընդունում է բացասական

---

*) Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթի առանձին կետերում նրա ածանցյալը հավասար է զրոյի, ուրեմն այդ կետերում դիտարկվող կորի շոշափողը զուգահեռ է ox առանցքին, ինչը, հասկանալի է, չի խանգարում տրված ֆունկցիայի խիստ իմաստով մոնոտոն աճելուն:



Նկ. 49



Նկ. 50

արժեքներ, $x=0$ կետում դառնում է զրո և x-ի դրական արժեքների համար ընդունում է դրական արժեքներ (նկ.49), թեորեմ 3-ի շնորհիվ եզրակացնում ենք, որ $y=x^4$ ֆունկցիան $(-\infty;0]$ միջակայքում մոնոտոն նվազում է, իսկ $[0;+\infty)$ միջակայքում՝ մոնոտոն աճում (նկ. 50):

Օրինակ 3: Գտնել $y=x+\cos x$ ֆունկցիայի աճման և նվազման միջակայքերը:

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ ամբողջ թվային առանցքի վրա [24,թ1,օ1,օ8], իսկ նրա ածանցյալը $(y'=1-\sin x)$ [27,(12)] բավարարում է թեորեմ 3-ի պայմաններին, հետևաբար այն մոնոտոն աճում է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

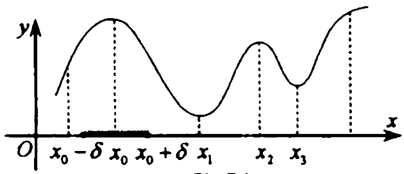
Ֆունկցիայի վարքը նկարագրող կարևոր բնութագրիչներից են նաև նրա էքստրեմումները:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի x^* կետում ունի մաքսիմում (մինիմում), եթե նշված միջակայքում գոյություն ունի x^* կետի այնպիսի $(x^*-\delta, x^*+\delta)$ $(\delta>0)$ շրջակայք, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերում (բացի x^*-ից) տեղի ունի*

$$f(x)<f(x^*) \qquad [f(x)>f(x^*)]$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով, x^*-ը $f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե այդ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում $f(\overset{*}{x})$-ը տրված ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից ամենամեծն (ամենափոքրն) է:



Նկ.51

Համաձայն բերված սահմանման՝ x_0-ն և x_2-ը 51-րդ նկարում պատկերված ֆունկցիայի մաքսիմումի կետերն են, իսկ x_1-ը և x_3-ը՝ մինիմումի կետերը:

Սահմանում 2: *Ֆունկցիայի մաքսիմումները և մինիմումները կոչվում են այդ ֆունկցիայի էքստրեմումներ:*

Այժմ դնենք ֆունկցիայի ածանցյալի օգնությամբ նրա էքստրեմումները գտնելու խնդիրը:

Թեորեմ 4: *(Ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը):*

Դիցուք X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում եթե նշված միջակայքի ներքին x_0 կետը տրված ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է), ապա այդ*

*) Այսինքն, եթե x_0 կետում $y=f(x)$ ֆունկցիան ունի էքստրեմում:

կետում $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը անհրաժեշտաբար հավասար է զրոյի.

$$f'(x_0)=0: \qquad (12)$$

Ապացույց: Եթե X միջակայքի x_0 կետը $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, ուրեմն նշված միջակայքում գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքում $f(x_0)$-ն տրված ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից ամենամեծն է կամ` ամենափոքրը: Նկատի ունենալով, որ $X$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ` Ֆերմայի թեորեմի շնորհիվ [30,թ1] ստանում ենք, որ այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Ի պա

Ապացուցած թեորեմից եզրակացնում ենք, որ եթե վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի ածանցյալը որևէ կետում տարբեր է զրոյից, ապա այդ կետը չի կարող տրված ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ լինել:

Ստացված պնդումից հետևում է, որ իր որոշման տիրույթի ներքին կետերում վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել այն կետերում, որտեղ տրված ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Սահմանում 3: ***Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն ներքին կետը, որտեղ այդ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի, կոչվում է տրված ֆունկցիայի ստացիոնար կետ:***

Օգտվելով սահմանում 3-ից` վերջին եզրակացությունը կարող ենք վերաձևակերպել հետևյալ կերպ`

Իր որոշման տիրույթի ներքին կետերում վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել այդ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերում:

Սակայն չպետք է կարծել, որ ֆունկցիայի ստացիոնար կետ լինելը բավարար է այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ լինելու համար: Այսինքն, եթե որևէ կետում ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի, այդտեղից դեռևս չի հետևում, որ այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ունի էքստրեմում: Այլ խոսքով, (12) պայմանի տեղի ունենալը բավարար չէ, որպեսզի x_0-ն լինի $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ:

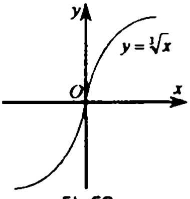
Օրինակ 4: $x=0$ կետում $y=x^3$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է զրոյի: Սակայն, քանի որ դիտարկվող ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա մոնոտոն աճում է (տե՛ս օրինակ 1-ը), հետևաբար այն էքստրեմումի կետ չունի, այսինքն $x=0$-ն դիտարկվող ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Այժմ, եթե լայնացնենք ուսումնասիրվող ֆունկցիաների դասը` թույլ տալով, որ իր որոշման տիրույթի առանձին ներքին կետերում ֆունկցիան չունենա վերջավոր ածանցյալ, ապա հնարավոր է, որ այդ կետերում էլ այն ունենա էքստրեմում:

Օրինակ 5: ա) $y=|x|$ ֆունկցիան $x=0$ կետում չունի ածանցյալ [27,օ1] և $x=0$-ն դիտարկվող ֆունկցիայի մինիմումի կետ է (նկ.29):

բ) Նկ. 30-ում բերված գ) (դ)) ֆունկցիան $x=x_1$ ($x=x_4$) կետում ունի անվերջ ածանցյալ և $x=x_3$-ը ($x=x_4$-ը) դիտարկվող ֆունկցիայի մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է:

Մյուս կողմից որևէ կետում վերջավոր ածանցյալ չունենալը չի նշանակում, որ այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ստանում է էքստրեմում:



Նկ.52

Օրինակ 6: Օգտվելով ածանցյալի սահմանումից [26,ս2] և հաշվելով $y=\sqrt[3]{x}$ ֆունկցիայի ածանցյալը՝ համոզվում ենք, որ $x=0$ կետում այն վերջավոր ածանցյալ չունի: Սակայն նշված կետում տրված ֆունկցիան էքստրեմում չունի (նկ.52), քանի որ այդ կետի ցանկացած շրջակայքում այն ընդունում է ինչպե՛ս դրական, այնպե՛ս էլ բացասական արժեքներ:

Այսպիսով, ֆունկցիան կարող է ստանալ էքստրեմում կա՛մ ստացիոնար կետերում կա՛մ էլ իր որոշման տիրույթի այն ներքին կետերում, որտեղ չունի վերջավոր ածանցյալ:

Սահմանում 4: *Ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն ներքին կետը, որտեղ այն չունի վերջավոր ածանցյալ կամ էլ նրա ածանցյալը հավասար է զրոյի, կոչվում է այդ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ:*

Ամփոփելով վերոգրյալը ստանում ենք, որ ֆունկցիան կարող է ստանալ էքստրեմում միայն իր կրիտիկական կետերում:

Այսպիսով, ֆունկցիայի կրիտիկական կետը էքստրեմումի տեսակետից, այսպես կոչված, «կասկածելի» կետ է և հետևաբար, ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելու համար անհրաժեշտ է այդ կետերում կատարել լրացուցիչ հետազոտություն:

Դիցուք x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի կրիտիկական կետ է, ընդ որում գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ շրջակայք, որտեղ (բացի, գուցե x_0 կետից) տրված ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ: Ենթադրելով նաև, որ ինչպե՛ս այդ շրջակայքի ձախ կեսում, այնպե՛ս էլ նրա աջ կեսում (առանձին, առանձին) $f'(x)$ ածանցյալը պահպանում է իր նշանը՝ քննարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը.

1°. $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *շրջակայքի ձախ կեսում* $f'(x)$ *ածանցյալն ընդունում է դրական արժեքներ, իսկ աջ կեսում՝ բացասական արժեքներ, այսինքն* x_0 *կետի վրայով անցնելիս* $f(x)$ *ֆունկցիայի ածանցյալն իր նշանը պլյուսից փոխում է մինուսի:*

Ինչպես գիտենք, քննարկվող դեպքում $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ նվազում: Ասվածից հետևում է, որ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիայի ամենամեծ արժեքը $f(x_0)$-ն է, ինչն էլ, համաձայն սահմանման նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

2°. $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *շրջակայքի ձախ կեսում* $f'(x)$ *ածանցյալն ընդունում է* *բացասական արժեքներ, իսկ աջ կեսում՝ դրական արժեքներ, այսինքն x_0 կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն իր նշանը մինուսից փոխում է պլյուսի:*

Համաձայն թեորեմ 3-ի, քննարկվող դեպքում $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում տրված ֆունկցիան նվազում է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ աճում: Ասվածից հետևում է, որ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի ամենափոքր արժեքը $f(x_0)$-ն է, ինչն էլ նշանակում է, որ քննարկվող դեպքում x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

3°. *Կա՛մ $(x_0-\delta, x_0), (x_0, x_0+\delta)$ միջակայքերում $f'(x)$ ածանցյալն ընդունում է միայն դրական արժեքներ, կա՛մ էլ այդ միջակայքերում այն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ, այսինքն x_0 կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը:*

Ինչպես գիտենք, առաջին դեպքում x_0 կետի նշված շրջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան աճում է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ նվազում է, ինչը նշանակում է, որ երկու դեպքերում էլ x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Ամփոփելով վերևում շարադրված արդյունքները՝ ստանում ենք ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը.

Թեորեմ 5: *Եթե x_0 կրիտիկական կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն իր նշանը պլյուսից փոխում է մինուսի, ապա x_0-ն տրված ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:*

Եթե x_0 կրիտիկական կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալն իր նշանը մինուսից փոխում է պլյուսի, ապա x_0-ն տրված ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Եթե x_0 կրիտիկական կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը, ապա x_0-ն տրված ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Այսպիսով, ֆունկցիայի ածանցյալի օգնությամբ նրա էքստրեմումի կետերը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) գտնել տրված ֆունկցիայի կրիտիկական կետերը,

բ) այդ կետերով դիտարկվող ֆունկցիայի որոշման տիրույթը տրոհել առանձին միջակայքերի,

գ) ստացված միջակայքերից յուրաքանչյուրում պարզել տրված ֆունկցիայի ածանցյալի նշանը,

դ) թեորեմ 5-ի օգնությամբ պարզել ուսումնասիրվող ֆունկցիայի կրիտիկական կետերի բնույթը:

Օրինակ 7: Գտնել ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված

$$f(x)=(x+2)^3(x-1)^3 \tag{գ}$$

ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը, կրիտիկական կետերը և էքստրեմումի կետերը:

Լուծում: Նախ հաշվենք տրված ֆունկցիայի ածանցյալը **[28,(2),(15′)]**.

$$f'(x)=(x+2)(5x+4)(x-1)^2:$$

Այնուհետև լուծելով

$$(x+2)(5x+4)(x-1)^2=0$$

հավասարումը՝ գտնենք (գ) ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը.

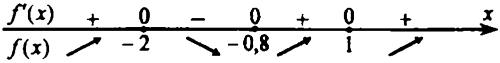
$$x_1=-2;\quad x_2=-0,8;\quad x_3=1: \qquad (դ)$$

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի ածանցյալն ամբողջ բազմանդամ է, հետևաբար այն որոշված է (և անընդհատ) ամբողջ թվային առանցքի վրա, հետևաբար (գ) ֆունկցիան այլ կրիտիկական կետեր չունի:

Այժմ x_1,x_2,x_3 կետերով թվային առանցքը (տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը) տրոհենք առանձին միջակայքերի.

$$(-\infty;-2),\quad (-2;-0,8),\quad (-0,8;1),\quad (1;+\infty):$$

Ստացված միջակայքերից յուրաքանչյուրում պարզելով (գ) ֆունկցիայի ածանցյալի նշանը (նկ.53) կստանանք, որ $(-\infty;-2]$ և $[-0,8;+\infty)$ միջակայքերում դիտարկվող ֆունկցիան մոնոտոն աճում է, իսկ $[-2;-0,8]$ միջակայքում՝ մոնոտոն նվազում:



Նկ.53

Քանի որ $x=-2$ կետի վրայով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալն իր նշանը պլյուսից փոխում է մինուսի, հետևաբար $x=-2$-ը դիտարկվող ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է: $x=-0,8$-ը տրված ֆունկցիայի մինիմումի կետ է, որովհետև այդ կետի վրայով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալն իր նշանը մինուսից փոխում է պլյուսի: Ինչ վերաբերվում է $x=1$ կետին, ապա այն $f(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ, քանի որ այդ կետի վրայով անցնելիս $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը չի փոխում իր նշանը:

Այժմ ցույց տանք, որ ֆունկցիայի էքստրեմումների որոնման ժամանակ, կրիտիկական կետի շրջակայքում հետազոտվող ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի նշանի ուսումնասիրությունը կարելի է փոխարինել հենց կրիտիկական կետում այդ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի նշանի ուսումնասիրությամբ:

Թեորեմ 6: *(Ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը երկրորդ կարգի ածանցյալի միջոցով):*

Դիցուք x_0 ստացիոնար կետի շրջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ շրջակայքում ունի առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ, իսկ x_0 կետում՝ նաև երկրորդ կարգի ածանցյալ: Այդ դեպքում, եթե $f''(x_0)$-ն բացասական է, ապա x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ եթե $f''(x_0)$-ն դրական է, ապա այն $f(x)$ ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Ապացույց: Դիցուք x_0 ստացիոնար կետի շրջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ շրջակայքում ունի առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ, իսկ x_0 կետում՝ նաև երկրորդ կարգի ածանցյալ, ընդ որում

$$f''(x_0)<0:$$

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքում $f'(x)$ ֆունկցիան նվազում է [30,լ1]:

Մյուս կողմից, քանի որ $f'(x_0)=0$, ուստի x_0 կետի վրայով անցնելիս $f'(x)$ ածանցյալն իր նշանը պլյուսից փոխում է մինուսի: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 5-ի, x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է:

Հասկանալի է, որ նույն ձևով ապացուցվում է նաև թեորեմի երկրորդ մասը:

Իսպ

Օրինակ 8: Օգտվելով թեորեմ 6-ից, գտնել ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1 \qquad (ե)$$

ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերը:

Լուծում: Նախ հաշվենք տրված ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$y'=x^2-4x+3$$

և լուծելով $y'=0$ հավասարումը՝ գտնենք նրա ստացիոնար կետերը.*)

$$x_1=1, \quad x_2=3:$$

Այնուհետև հաշվենք դիտարկվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը.

$$y''=2(x-2)$$

և այդ ածանցյալի արժեքները (ե) ֆունկցիայի ստացիոնար կետերում.

$$y''(1)=-2, \quad y''(3)=2:$$

Քանի որ $y''(1)<0$ և $y''(3)>0$, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 6-ի, $x=1$-ը տրված ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է, իսկ $x=3$-ը՝ մինիմումի կետ:

Նշենք, որ թեորեմ 6-ն ունի կիրառության նեղ ոլորտ: Օրինակ, ակնհայտորեն այն հնարավոր չէ կիրառել այն կրիտիկական կետերի համար, որտեղ հետազոտվող ֆունկցիան չունի առաջին կարգի ածանցյալ (որովհետև այդ կետերում դիտարկվող ֆունկցիան, բնականաբար, չունի նաև երկրորդ կարգի ածանցյալ):

Հասկանալի է նաև, որ այն ստացիոնար կետերում, որտեղ ուսումնասիրվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն էլ է հավասար զրոյի, թեորեմ 6-ը դարձյալ ոչինչ չի տալիս: Նման դեպքերում ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելու խնդրի լուծումը կախված է այդ ֆունկցիայի ավելի բարձր կարգի ածանցյալների վարքից: Այդ կապակցությամբ առանց ապացույցի բերենք հետևյալ թեորեմը՝

---

*) Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող ֆունկցիան այլ կրիտիկական կետեր չունի:

Թեորեմ 7: *Եթե ածանցյալներից առաջինը, որը $f(x)$ ֆունկցիայի x_0 ստացիոնար կետում հավասար չէ զրոյի, կենտ կարգի է, ապա այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան էքստրեմում չունի: Իսկ եթե այդ ածանցյալը զույգ կարգի է, ապա x_0 կետում առկա է էքստրեմում. ընդ որում x_0-ն մաքսիմումի կետ է, եթե ֆունկցիայի նշված ածանցյալը բացասական է և մինիմումի կետ է, եթե այն դրական է:*

Օրինակ 9: Ապացուցել, որ $x=0$-ն ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված

$$y=e^x+e^{-x}+2\cos x$$

ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Լուծում: Նախ համոզվենք, որ $x=0$-ն դիտարկվող ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է: Իրոք ունենք **[27,(8′),(10)], [28,(1′′),(9)]**

$$y'=e^x-e^{-x}-2\sin x,\qquad y'(0)=0:$$

Այնուհետև կստանանք

$$\begin{aligned} y''&=e^x+e^{-x}-2\cos x, & y''(0)&=0,\\ y'''&=e^x-e^{-x}+2\sin x, & y'''(0)&=0,\\ y^{IV}&=e^x+e^{-x}+2\cos x, & y^{IV}(0)&=4>0, \end{aligned}$$

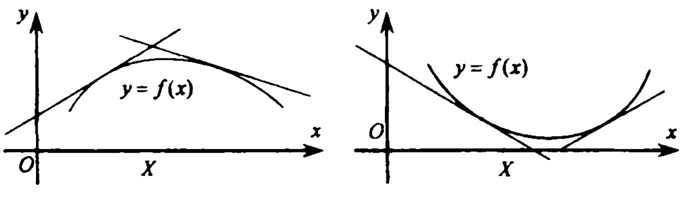
հետևաբար, համաձայն թեորեմ 7-ի, $x=0$-ն դիտարկվող ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

§34. Ֆունկցիայի գրաֆիկի գոգավորությունը, ուռուցիկությունը, շրջման կետերը և ասիմպտոտները: Ֆունկցիայի հետազոտման և նրա գրաֆիկի կառուցման ընդհանուր ուրվագիծը:

Մոնոտոն ֆունկցիաների դասից հետո առանձնանում է ուռուցիկ կամ գոգավոր ֆունկցիաների դասը:

Ենթադրելով, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և անընդհատ X միջակայքում՝ բերենք հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 1: *Կասենք, որ X միջակայքում տրված $f(x)$ անընդհատ կորը ուռուցիկ է կամ ուռուցիկությամբ դեպի վեր է ուղղված այդ միջակայքում (նկ.53ա), եթե այն իր ցանկացած շոշափողից ներքև է գտնվում (բացի շոշափման կետից):*



ա) բ)

Նկ.53

Սահմանում 2: *Կասենք, որ X միջակայքում տրված $f(x)$ անընդհատ կորը գոգավոր է կամ ուռուցիկությամբ դեպի ներքև է ուղղված այդ միջակայքում (նկ.53բ), եթե այն իր ցանկացած շոշափողից վերև է գտնվում (բացի շոշափման կետից):*

Սահմանում 3: *Կասենք, որ X միջակայքում տրված $f(x)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է (գոգավոր է) այդ միջակայքում, եթե նշված միջակայքում ուռուցիկ է (գոգավոր է) $f(x)$ կորը:*

Ֆունկցիայի գրաֆիկի ուռուցիկության բնույթն այդ գրաֆիկի կարևոր բնութագրիչներից է: Այդ պատճառով, ֆունկցիայի վարքի ուսումնասիրության խնդրում ներքոհիշյալ թեորեմն ունի առանձնահատուկ նշանակություն:

Թեորեմ 1: *Դիցուք $y=f(x)$ ֆունկցիան իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ մեկտեղ որոշված է ու անընդհատ X միջակայքում և այդ միջակայքի ներսում ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, եթե $f''(x)$ ածանցյալն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ, ապա X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ուռուցիկ է, իսկ եթե $f''(x)$ ածանցյալն ընդունում է միայն դրական արժեքներ, ապա տրված միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը գոգավոր է:*

Ապացույց: Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ներսում նրա երկրորդ կարգի ածանցյալն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ.

$$f''(x)<0: \tag{1}$$

Թեորեմն ապացուցելու համար X միջակայքի ներսում վերցնենք կամայական x_0 կետ, $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի $M_0(x_0,y_0)$ կետով տանենք այդ գրաֆիկին շոշափող (ինչը, ըստ պայմանի հնարավոր է) և ցույց տանք, որ $f(x)$ կորը գտնվում է տարած շոշափողից ներքև (բացի M_0 կետից):

Ինչպես գիտենք, $M_0(x_0,y_0)$ կետում $f(x)$ կորին տարած շոշափողի հավասարումն ունի

$$\bar{y}=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0) \tag{2}$$

տեսքը [26,(5)], որտեղ $\bar{y}$-ը այդ շոշափողի ընթացիկ կետի օրդինատն է:

$y=f(x)$ կորի հավասարումից անդամ առ անդամ հանելով (2) հավասարումը՝ կստանանք

$$y-\bar{y}=f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0): \tag{3}$$

Քանի որ $(y-\bar{y})$-ը դիտարկվող կորի կամայական կետի օրդինատի և M_0 կետում այդ կորին տարած շոշափողի, նույն աբսցիսն ունեցող կետի օրդինատի տարբերությունն է, ուստի թեորեմի առաջին մասն ապացուցելու համար անհրաժեշտ է ցույց տալ, որ X միջակայքի ցանկացած կետում տեղի ունի

$$y<\bar{y} \tag{4}$$

անհավասարությունը:

Օգտվելով թեորեմի պայմաններից և $f(x)-f(x_0)$ տարբերության համար գրելով Լագրանժի բանաձևը [30,(9)], (3) հավասարությունը կներկայացնենք

$$y-\bar{y}=(x-x_0)f'(c)-(x-x_0)f'(x_0)$$

կամ որ նույնն է՝

$$y-\bar{y}=(x-x_0)[f'(c)-f'(x_0)] \tag{5}$$

տեսքով, որտեղ c կետն ընկած է x և x_0 կետերի միջև:

Նկատելով, որ $f'(x)$ ֆունկցիան նույնպես տրված միջակայքում բավարարում Լագրանժի թեորեմի պայմաններին՝ $f'(c)-f'(x_0)$ տարբերության վրա էլ կիրառենք վերոհիշյալ թեորեմը: Արդյունքում (5) հավասարությունը կներկայացնենք

$$y-\bar{y}=(x-x_0)(c-x_0)f''(c_1) \tag{6}$$

տեսքով, որտեղ c_1 կետն ընկած է x_0 և c կետերի միջև:

Ենթադրելով, որ $x>x_0$ և հաշվի առնելով, որ c-ն ընկած է x_0 և x կետերի միջև՝ կստանանք $c-x_0>0$:

Մյուս կողմից, համաձայն (1) պայմանի տեղի ունի

$$f''(c_1)<0$$

անհավասարությունը:

Այսպիսով, (6) հավասարության աջ մասի վերջին արտադրիչը բացասական է, իսկ առաջին երկու արտադրիչներն x_0-ից մեծ x-երի համար ընդունում են դրական արժեքներ: Ասվածը նշանակում է, որ x_0-ից մեծ x-երի համար (6) հավասարության աջ մասը, հետևաբար նաև այդ հավասարության ձախ մասը, ընդունում է բացասական արժեքներ, ինչն էլ նշանակում է, որ նշված x-երի համար տեղի ունի (4) անհավասարությունը:

Այժմ ենթադրենք $x<x_0$:

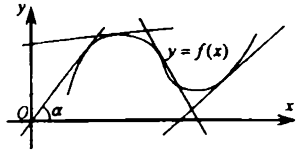
Կրկնելով վերոգրյալ դատողությունները՝ հեշտությամբ կհամոզվենք, որ (4) անհավասարությունը տեղի ունի նաև x_0-ից փոքր x-երի համար:

Ամփոփելով արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ $y=f(x)$ կորի ցանկացած կետ գտնվում է այդ կորի M_0 կետում տարած շոշափողից ներքև: Քանի որ M_0-ն դիտարկվող կորի կամայական կետ է, ուստի թեորեմի առաջին մասն ապացուցված է:

Թեորեմի երկրորդ մասն ապացուցվում է նույն ձևով:

Իսկա

Եթե $f(x)$ կորի վրա մնալով շարժվենք x-ի աճման ուղղությամբ և հետևենք այդ կորի շոշափողի ու ox առանցքի կազմած α անկյան [6,ս2] փոփոխությանը՝ կհամոզվենք, որ (նկ.54) դիտարկվող կորի ուռուցիկության տեղամաս-



Նկ.54

րում այդ անկյունը նվազում է, իսկ գոգավորության տեղամասերում՝ աճում է: Հետևաբար, համապատասխան տեղամասերում նույնպիսի փոփոխություն է կրում նաև $tg\alpha$ -ն, այսինքն $f'(x)$ ածանցյալը [26,(4)]:

Մյուս կողմից, որևէ տեղամասում $f'(x)$ ֆունկցիայի նվազելը նշանակում է, որ նրա ածանցյալը, այսինքն՝ $f''(x)$-ը այդ տեղամասում ընդունում է միայն ոչ դրական արժեքներ և նշված տեղամասի մեջ ընկած ոչ մի միջակայքում չի հավասարվում նույնաբար զրոյի [33,թ3]:

Նույն ձևով, որևէ տեղամասում $f'(x)$ ֆունկցիայի աճելը նշանակում է, որ այդ տեղամասում $f''(x)$ ածանցյալն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ և նշված տեղամասի մեջ ընկած ոչ մի միջակայքում չի հավասարվում նույնաբար զրոյի:

Այսպիսով, ֆունկցիայի գրաֆիկի ուռուցիկության տեղամասերում այդ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն ընդունում է միայն ոչ դրական արժեքներ, իսկ գոգավորության տեղամասերում՝ միայն ոչ բացասական արժեքներ, ընդ որում երկու դեպքերում էլ, որևէ միջակայքում, որն ընկած է նշված տեղամասերի մեջ, այդ ածանցյալը չի հավասարվում նույնաբար զրոյի:

Նկատելով, որ թեորեմ 1-ը չի կորցնի իր ուժը, եթե X միջակայքի առանձին ներքին կետերում $f''(x)$ ածանցյալին թույլատրենք հավասարվել զրոյի և միավորելով այդ թեորեմն ու վերևում շարադրված եզրակացությունը՝ կհանգենք հետևյալ պնդմանը.

Թեորեմ 2: *Դիցուք $y = f(x)$ ֆունկցիան իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ մեկտեղ որոշված է ու անընդհատ X միջակայքում և այդ միջակայքի ներսում ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, որպեսզի X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը լինի ուռուցիկ (գոգավոր), անհրաժեշտ է և բավարար, որ.*

1) *նշված միջակայքի ներսում $f''(x)$ ածանցյալն ընդունի ոչ դրական (ոչ բացասական) արժեքներ.*

$$f''(x) \le 0 \quad [f''(x) \ge 0],$$

2) *X միջակայքի մեջ ընկած ոչ մի միջակայքում $f''(x)$ ածանցյալը նույնաբար հավասար չլինի զրոյի:*

Օրինակ 1: Գտնել $y = x^4$ ֆունկցիայի գրաֆիկի (Նկ.55) ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար հաշվենք տրված ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները [27,(7)], [28,(9)], [29,ս1].

$$y = 4x^3, \qquad y'' = 12x^2 :$$

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալն ամբողջ թվային առանցքի վրա ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ և հավասարվում է զրոյի միայն մեկ կետում $(x=0)$, հետևաբար համաձայն թեորեմ 2-ի, տրված ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջ թվային առանցքի վրա գոգավոր է:

Օրինակ 2: Գտնել $y=1-x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի (նկ.56) ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը:

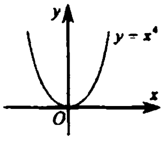
Լուծում: Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է -2-ի, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, տրված ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջ թվային առանցքի վրա ուռուցիկ է:

Օրինակ 3: Գտնել $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի (նկ.57) ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը:

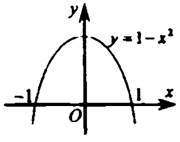
Լուծում: Հաշվենք տրված ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները [27,(8)].

$$y'=a^x\ln a,\quad y''=a^x\ln^2 a:$$

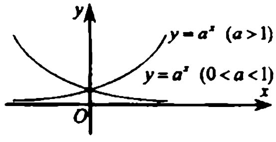
Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը x-ի ցանկացած արժեքի համար ընդունում է դրական արժեքներ, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, տրված ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջ թվային առանցքի վրա գոգավոր է:



Նկ.55



Նկ.56



Նկ.57

Օրինակ 4: Գտնել $y=x^3$ ֆունկցիայի [33,օ1] գրաֆիկի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը (նկ.49):

Լուծում: Ունենք

$$y'=3x^2,\qquad y''=6x:$$

Քանի որ դիտարկվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը x-ի բացասական արժեքների դեպքում ընդունում է բացասական արժեքներ, իսկ դրական արժեքների դեպքում՝ դրական արժեքներ, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 2-ի, $(-\infty;0]$ միջակայքում տրված ֆունկցիայի գրաֆիկն ուռուցիկ է, իսկ $[0;+\infty)$ միջակայքում՝ գոգավոր:

Այժմ բերենք հետևյալ կարևոր սահմանումը՝

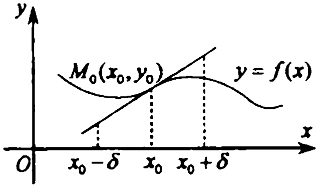
Սահմանում 4: $y=f(x)$ *անընդհատ կորի* $M_0(x_0,y_0)$ *կետը կոչվում է այդ կորի շրջման կետ, եթե այն տրված կորի ուռուցիկության տեղամասն անջատում է նրա գոգավորության տեղամասից:*

Օրինակ 5: Քանի որ $M(0;0)$ կետն անջատում է $y=x^3$ կորի ուռուցիկության տեղամասը նրա գոգավորության տեղամասից (տե՛ս նախորդ օրինակը), հետևաբար, համաձայն բերված սահմանման, այն $y=x^3$ կորի շրջման կետ է:

Ակնհայտ է, որ եթե շրջման կետում կորն ունի շոշափող (նկ.58), ապա այն այդ շոշափողի մի կողմից անցնում է նրա մյուս կողմը՝ շրջման կետում հատվելով այդ շոշափողի հետ:

Ենթադրենք X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ և $M_0(x_0,y_0)$-ն այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ է (նկ.58):

Այդ դեպքում, համաձայն շրջման կետի սահմանման, գոյություն ունի x_0 կետի այնպիսի $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ շրջակայք, որ կա՛մ $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում $f(x)$ կորն ուռուցիկ է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ գոգավոր, կա՛մ էլ հակառակը՝ $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում գոգավոր է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ ուռուցիկ:



Նկ.58

Ինչպես համոզվեցինք վերևում, առաջին դեպքում $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում $f'(x)$ ֆունկցիան նվազում է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ աճում, երկրորդ դեպքում $(x_0-\delta, x_0]$ միջակայքում այն աճում է, իսկ $[x_0, x_0+\delta)$ միջակայքում՝ նվազում: Պարզ է, որ երկու դեպքերում էլ կարող ենք պնդել, որ x_0-ն $f'(x)$ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է (առաջին դեպքում այն մինիմումի կետ է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ մաքսիմումի կետ): Հետևաբար, համաձայն Ֆերմայի թեորեմի [30,թ1], եթե x_0 կետում $f'(x)$ ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար այն հավասար է զրոյի:

Ամփոփելով բերված դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Դիցուք X միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներսում ունի առաջին կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, եթե $M_0(x_0,y_0)$-ն այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ է և x_0 կետում գոյություն ունի $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա անհրաժեշտաբար այդ ածանցյալը հավասար է զրոյի.*

$$f''(x_0)=0: \qquad (7)$$

Թեորեմ 3-ից եզրակացնում ենք, որ եթե երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը որևէ կետում տարբեր է զրոյից, ապա այդ կետը չի կարող տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետի աբսցիս լինել:

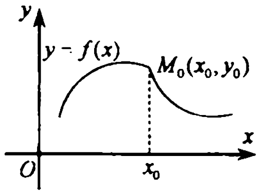
Ստացված պնդումից հետևում է, որ իր որոշման տիրույթի ներքին կետերում երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերի աբսցիսները պետք է փնտրել այն կետերում, որտեղ տրված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է զրոյի:

Հետևյալ օրինակի վրա ցույց տանք, որ (7) պայմանի տեղի ունենալը անհրաժեշտ է, բայց ոչ բավարար, որ x_0-ն $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ լինի՝

Օրինակ 6: Չնայած $x=0$ կետում $y=x^4$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը հավասար է զրոյի, այնուամենայնիվ $M(0;0)$-ն դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետ չէ (Նկ.55), որովհետև, ինչպես տեսանք օրինակ 1-ում, դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը ամբողջ թվային առանցքի վրա գոգավոր է:

Այսպիսով, $f''(x)=0$ պայմանը $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերի աբսցիսների համար ունի այն նշանակությունը, ինչ $f'(x)=0$ պայմանը՝ այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետերի համար:

Եթե լայնացնենք ուսումնասիրվող ֆունկցիաների դասը՝ թույլ տալով, որ իր որոշման տիրույթի առանձին ներքին կետերում ֆունկցիան չունենա երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա հնարավոր է, որ այդ կետերն էլ լինեն դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերի աբսցիսներ:



Նկ.59

59-րդ նկարում պատկերված կորը պարզաբանում է ասվածը:

Ամփոփելով ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերին վերաբերող վերևում ստացած արդյունքները՝ կարող ենք ձևակերպել հետևյալ բավարար պայմանը.

Թեորեմ 4: *Դիցուք X միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքի ներքին x_0 կետում կա՛մ չունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, կա՛մ էլ այդ ածանցյալը հավասար է զրոյի: Այդ դեպքում, եթե x_0 կետի վրայով անցնելիս $f''(x)$ ածանցյալը փոխում է իր նշանը, ապա $M_0(x_0,f(x_0))$-ն $f(x)$ կորի շրջման կետ է, հակառակ դեպքում՝ այն $f(x)$ կորի շրջման կետ չէ:*

Օրինակ 7: Գտնել $y=\sin x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերը:

Լուծում: Ունենք [27,(10),(12)]

$$y'=\cos x,\quad y''=-\sin x:$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Հետևաբար, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերի աբսցիսները պետք է փնտրել միայն $\sin x=0$ հավասարման արմատների, այսինքն $x=\pi k$ $(k\in Z)$ բազմության մեջ: Քանի որ նշված բազմության կետերի վրայով անցնելիս $y=\sin x$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը փոխում է իր նշանը, ուստի, համաձայն թեորեմ 4-ի, այդ ֆունկցիայի գրաֆիկի և ox առանցքի հատման կետերը դիտարկվող ֆունկցիայի շրջման կետերն են:

Օրինակ 8: Դժվար չէ համոզվել, որ $M(0;0)$-ն շրջման կետ է ինչպե՛ս $y=x^3$ ֆունկցիայի (տե՛ս օրինակ 4-ը), այնպե՛ս էլ $y=\sqrt[3]{x}$ [33,օ6] ֆունկցիայի գրաֆիկի համար:

Ֆունկցիաների գրաֆիկները կառուցելու համար մեզ մնում է ծանոթանալ այդ գրաֆիկների ասիմպտոտներին, ինչպես նաև նրանց գտնելու եղանակներին:

Սահմանում 5: *Կասենք, որ l կորի M կետը տրված կորի վրա մնալով ձգտում է անսահմանության, եթե այդ կետի հեռավորությունը կոորդինատների սկզբնակետից անսահմանափակորեն մեծանում է, այսինքն, եթե M կետի կոորդինատներից գոնե մեկը ձգտում է պլյուս կամ մինուս անսահմանության:*

Սահմանում 6: *a ուղիղը կոչվում է l կորի ասիմպտոտ, եթե l կորի ընթացիկ կետի և a ուղղի հեռավորությունը ձգտում է զրոյի, երբ տրված կորի վրա մնալով նշված կետը ձգտում է անսահմանության:*

Սահմանում 7: *Եթե կորի ասիմպտոտը զուգահեռ է oy կամ ox կոորդինատական առանցքին, ապա այն համապատասխանաբար կոչվում է այդ կորի ուղղաձիգ կամ հորիզոնական ասիմպտոտ: Իսկ եթե կորի ասիմպտոտը զուգահեռ չէ կոորդինատական առանցքներից որևէ մեկին, ապա այն կոչվում է տրված կորի թեք ասիմպտոտ:*

Նախ ծանոթանանք կորի ուղղաձիգ ասիմպտոտների հետ:

Ենթադրենք մի որևէ x_0 կետում $y = f(x)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ սեռի (անվերջ մեծ) խզում [24,ս7,բ)], այսինքն ենթադրենք $f(x)$ ֆունկցիայի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարություններից գոնե մեկը՝

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty \,; \tag{8}$$

Համաձայն կորի ասիմպտոտի սահմանման, (8) սահմաններից գոնե մեկի առկայությունը նշանակում է, որ $x = x_0$ ուղիղը $y = f(x)$ կորի ուղղաձիգ ասիմպտոտ է: Հասկանալի է, որ ճիշտ է նաև հակառակ պնդումը՝ այսինքն, եթե $x = x_0$ ուղիղը $f(x)$ կորի ուղղաձիգ ասիմպտոտ է, ապա անհրաժեշտաբար (8) հավասարություններից գոնե մեկը տեղի ունի:

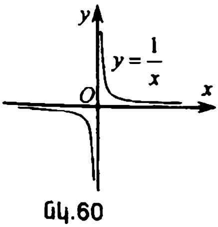
Վերոգրյալից եզրակացնում ենք, որ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղաձիգ ասիմպտոտները գտնելու համար (եթե այդպիսիք կան) անհրաժեշտ է գտնել x-ի այնպիսի արժեքներ, որոնց անսահմանափակորեն մոտենալիս տրված ֆունկցիայի արժեքները բացարձակ արժեքով անսահմանափակորեն մեծանան:

Օրինակ 9: Գտնել $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղաձիգ ասիմպտոտները:

Լուծում: Քանի որ տեղի ունեն

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{1}{x} = \pm\infty$$

հավասարությունները, հետևաբար oy առանցքը ($x = 0$ ուղիղը) դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղաձիգ ասիմպտոտ է (նկ.60): Մյուս կողմից, քանի որ $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ բազմության պատկանող յուրաքանչյուր կետում տրված ֆունկցիան ընդունում է վերջավոր արժեք [25,օ14], հետևաբար $x = 0$ ուղիղը $y = \frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միակ ուղղաձիգ ասիմպտոտն է:*)



Նկ.60

Անցնենք կորի հորիզոնական ասիմպտոտների հետ ծանոթանալուն:

*) Նշենք, որ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարող է ունենալ անթիվ բազմությամբ ուղղաձիգ ասիմպտոտներ (օրինակ՝ $y = tgx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը):

Ակնհայտ է, որ որպեսզի x-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս $y=b$ ուղիղը լինի $y=f(x)$ կորի հորիզոնական ասիմպտոտ (Նկ.61), անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

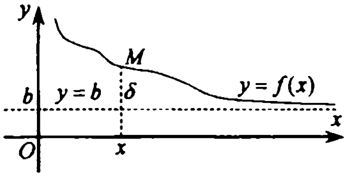
$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-b|=0 \tag{9}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \tag{9'}$$

հավասարությունը:

Նույն ձևով, որպեսզի x-ը մինուս անսահմանության ձգտելիս $y=c$ ուղիղը լինի $y=f(x)$ կորի հորիզոնական ասիմպտոտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա



Նկ.61

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=c \tag{9''}$$

հավասարությունը:

Վերոգրյալից եզրակացնում ենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտները գտնելու համար (եթե այդպիսիք կան) անհրաժեշտ է դիտարկել

$$\lim_{x\to-\infty}f(x),\quad \lim_{x\to+\infty}f(x) \tag{10}$$

սահմանները. եթե (10) սահմանները վերջավոր չեն կամ գոյություն չունեն, ապա $f(x)$ կորը հորիզոնական ասիմպտոտ չունի: Եթե (10) սահմաններից միայն մեկն է վերջավոր, ապա տրված կորն ունի միայն մեկ հորիզոնական ասիմպտոտ: Իսկ եթե նշված երկու սահմաններն էլ վերջավոր են և իրարից տարբեր, ապա $f(x)$ կորն ունի իրարից տարբեր երկու հորիզոնական ասիմպտոտ:

Օրինակ10: Գտնել $y=\frac{1}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտները:

Լուծում: Քանի որ x-ը պլյուս կամ մինուս անսահմանության ձգտելիս տեղի ունեն

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

հավասարությունները, հետևաբար ox առանցքը ($y=0$ ուղիղը) դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի միակ հորիզոնական ասիմպտոտն է (Նկ.60):

Օրինակ11: Գտնել $y=arctgx$ $(-\infty<x<+\infty)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտները [27,(19)]:

Լուծում: Քանի որ տեղի ունեն

$$\lim_{x\to-\infty}arctgx=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to+\infty}arctgx=\frac{\pi}{2}$$

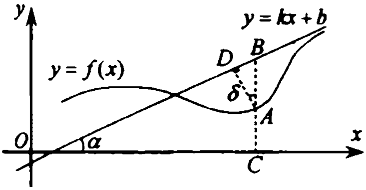
հավասարությունները, հետևաբար $y=-\pi/2$ և $y=\pi/2$ ուղիղները դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտներ են (Նկ.35):

Այժմ, ենթադրելով, որ x -ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս $y=f(x)$ կորն ունի թեք ասիմպտոտ **[6,ս4].**

$$y=kx+b, \tag{11}$$

դնենք այդ ասիմպտոտը գտնելու (այսինքն k և b հաստատունները գտնելու) խնդիրը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի որևէ կետով տանենք oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ (նկ.62): Այդ ուղղի հատման կետերն ox առանցքի, $f(x)$ կորի և նրա ասիմպտոտի հետ համապատասխանաբար նշանակենք C-ով, A-ով և B-ով, իսկ A կետից դիտարկվող ասիմպտոտին տարած ուղղահայացի հիմքը՝ D-ով:



Նկ.62

Քանի որ, համաձայն ենթադրության, x-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս, (11) ուղիղը $f(x)$ կորի ասիմպտոտ է, ուստի տեղի ունի

$$\lim_{x\to\infty}\delta=0 \tag{12}$$

հավասարությունը, որտեղ δ-ն տրված կորի ընթացիկ կետի հեռավորությունն է (11) ասիմպտոտից $(\delta=AD)$:

ABD եռանկյունից կստանանք, որ

$$AB=\frac{\delta}{\cos\alpha}, \tag{13}$$

որտեղ α-ն դիտարկվող ասիմպտոտի և ox առանցքի կազմած անկյունն է [6,ս2]:

Քանի որ α-ն հաստատուն անկյուն է (այսինքն այն կախված չէ $f(x)$ կորի վրա A կետի դիրքից), ուստի (12) և (13) հավասարություններից կունենանք

$$\lim_{x\to\infty}AB=0: \tag{14}$$

Այնուհետև նկատի ունենալով, որ

$$AB=|BC-AC|=|AC-BC|=|f(x)-(kx+b)|=|f(x)-kx-b|,$$

(14) հավասարությունից կստանանք

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0 \tag{15}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]\right\}=0 \tag{15'}$$

հավասարությունը: Հաշվի առնելով, որ x-ը ձգտում է պլյուս անսահմանության, (15′) հավասարությունից կունենանք

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0:$$

Վերջին հավասարությունը ներկայացնելով

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}-k-\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0 \tag{16}$$

տեսքով և օգտվելով

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b}{x}=\frac{b}{\lim\limits_{x\to\infty}x}=0$$

սահմանից [22,թ6], (11) ասիմպտոտի անկյունային գործակցի համար ի վերջո կստանանք

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{17}$$

բանաձևը:

k հաստատունի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (15) հավասարության մեջ՝ կգտնենք նաև (11) հավասարման մեջ մտնող մյուս հաստատունը.

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]: \tag{18}$$

Այսպիսով, եթե x -ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս $f(x)$ կորն ունի թեք ասիմպտոտ, ապա այդ ասիմպտոտի (11) հավասարման մեջ մտնող k և b հաստատունները որոշվում են համապատասխանաբար (17) և (18) բանաձևերով:

$y=f(x)$ կորի մյուս թեք ասիմպտոտը գտնելու համար (եթե այն գոյություն ունի), անհրաժեշտ է (17) և (18) բանաձևերը համապատասխանաբար փոխարինել

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx] \tag{19}$$

բանաձևերով:

Օրինակ 12: Գտնել

$$y=2+x-\frac{1}{x} \tag{ա}$$

ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտները:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ բացի $x=0$ կետից, դիտարկվող ֆունկցիան ամենուրեք որոշված է: Մյուս կողմից ունենք

$$\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\left(2+x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to-0}2+\lim_{x\to-0}x-\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\left(2+x-\frac{1}{x}\right)=-\infty\ ,$$

հետևաբար oy առանցքը (ա) հավասարումն ունեցող կորի միակ ուղղաձիգ ասիմպտոտն է:

Հետևյալ հավասարությունները ցույց են տալիս, որ տրված կորը հորիզոնական ասիմպտոտ չունի՝

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2+x-\frac{1}{x}\right) = \pm\infty :$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով, որ

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right) = 2,$$

եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող կորը x-ը պլյուս կամ մինուս անվերջի ձգտելիս ունի նաև թեք ասիմպտոտ, որի հավասարումն է

$$y = x+2:$$

Այժմ, ենթադրելով, որ X միջակայքում որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան այդ միջակայքի բոլոր կետերում (բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից) ունի մինչև երկրորդ կարգը ներառյալ վերջավոր ածանցյալ՝ ներկայացնենք այդ ֆունկցիայի հետազոտման և նրա գրաֆիկի կառուցման հետևյալ ընդհանուր ուրվագիծը.

$y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է.

1. *Գտնել $f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը,*

2. *Եթե հնարավոր է գտնել նաև այդ ֆունկցիայի մեծագույն ու փոքրագույն արժեքները (այսինքն X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքներից ամենամեծն ու ամենափոքրը) և արժեքների տիրույթը,*

3. *Գտնել դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի և կոորդինատական առանցքների հատման կետերը,*

4. *Պարզել տրված ֆունկցիայի զույգությունը, կենտությունը և այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելիս նկատի ունենալ, որ զույգ ֆունկցիայի գրաֆիկը համաչափ է օրդինատների առանցքի, իսկ կենտ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ,*

5. *Պարզել ուսումնասիրվող ֆունկցիայի պարբերականությունը և նրա գրաֆիկը կառուցելիս հաշվի առնել, որ T պարբերական ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար բավական է այն կառուցել T երկարությամբ որևէ հատվածի վրա և ստացած պատկերն աբսցիսների առանցքի ուղղությամբ տեղաշարժել Tk-ով $(k\in Z)$,*

6. *Գտնել հետազոտվող ֆունկցիայի խզման կետերը և այդ կետերում հաշվել նրա աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները* [24,ս5,ս6],

7. *Հաշվել $f(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը,*

8. *Գտնել դիտարկվող ֆունկցիայի մոնոտոնության միջակայքերը* [22,ս13], [33,բ2,բ3],

9. *Գտնել տրված ֆունկցիայի էքստրեմումները* [33,ս1,ս2,բ5],

10. *Հաշվել ուսումնասիրվող ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը* [29,ս1],

11. *Գտնել հետազոտվող ֆունկցիայի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը,*

12. *Գտնել* $f(x)$ *ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերը,*

13. *Գտնել այն կետերը, որտեղ դիտարկվող ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները գոյություն չունեն և այդ կետերում հաշվել նրա արժեքները,*

14. *Գտնել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի ուղղաձիգ, հորիզոնական և թեք ասիմպտոտները,*

15. *Օգտվելով ուսումնասիրվող ֆունկցիայի հետազոտման արդյունքներից, կոորդինատական հարթության վրա նշել ստացած բոլոր կետերն ու ասիմպտոտները և կառուցել նրա գրաֆիկը:*

Օրինակ 13: Հետազոտել

$$y = \frac{x}{x^2+1} \qquad (բ)$$

ֆունկցիան և կառուցել նրա գրաֆիկը:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ (բ) ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և կոորդինատական առանցքների հետ հատվում է միայն կոորդինատների սկզբնակետում:

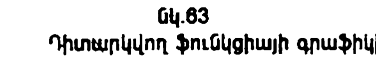
Այնուհետև համոզվելով, որ (բ)-ն կենտ ֆունկցիա է՝ եզրակացնում ենք, որ նրա գրաֆիկը համաչափ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

Ակնհայտ է նաև, որ դիտարկվող ֆունկցիան պարբերական չէ:

Այժմ հաշվենք տրված ֆունկցիայի ածանցյալը [27,(7)], [28,(12)].

$$y' = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2} : \qquad (գ)$$

Գտնելով (գ) ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը (Նկ.63), եզրակացնում ենք, որ $(-\infty;-1]$ և $[1;+\infty)$ միջակայքերում հետազոտվող ֆունկցիան նվազում է, իսկ $[-1;1]$ միջակայքում՝ աճում: $x_1=-1$ կրիտիկական կետի վրայով անցնելիս y' ածանցյալն իր նշանը մինուսից փոխում է պլյուսի, իսկ $x_2=1$ կրիտիկական կետի վրայով անցնելիս՝ պլյուսից մինուսի: Հետևաբար, $x_1=-1$-ը տրված ֆունկցիայի մինիմումի կետ է և այդ կետում (բ) ֆունկցիայի արժեքը հավասար է $-0,5$-ի, իսկ $x_2=1$-ը՝ մաքսիմումի կետ է և այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիայի արժեքը հավասար է $0,5$-ի:



Նկ.63

Դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկի ուռուցիկության և գոգավորության միջակայքերը, ինչպես նաև շրջման կետերը գտնելու համար հաշվենք այդ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալը.

$$y'' = \frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3} : \qquad (դ)$$

Գտնելով (դ) ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը (Նկ.64), եզրակացնում ենք, որ $(-\infty;-\sqrt{3}]$ և $[0;\sqrt{3}]$ միջակայքերում հետազոտվող ֆունկցիայի գրաֆիկը ուռուցիկ է, իսկ $[-\sqrt{3};0]$ և $[\sqrt{3};+\infty)$ միջակայքերում՝ գոգավոր: Այնուհետև, քանի որ $y''=0$ հավասարման արմատների վրայով անցնելիս (դ) ֆունկցիան փոխում է իր նշանը, ուստի

y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	x
y	$\cap$	$-\sqrt{3}$	$\cup$	0	$\cap$	$\sqrt{3}$	$\cup$	

Նկ.64

$$A\left(-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad B(0;0) \text{ և } C\left(\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

կետերը տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի շրջման կետերն են:

Անցնելով (բ) ֆունկցիայի գրաֆիկի ասիմպտոտներին՝ նախ նկատենք, որ այն ուղղաձիգ ասիմպտոտ չունի (ո՛րովհետև տրված ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա): Մյուս կողմից, քանի որ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0,$$

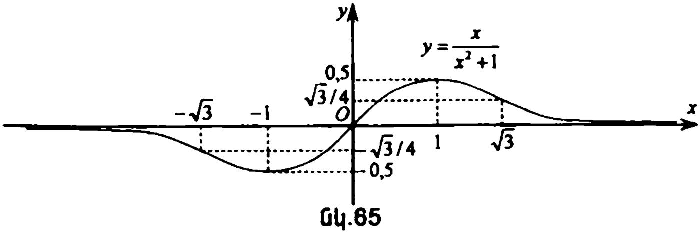
հետևաբար աբսցիսների առանցքը հանդիսանում է (բ) ֆունկցիայի գրաֆիկի հորիզոնական ասիմպտոտը՝ ինչպե՛ս x-ը մինուս անվերջի ձգտելիս, այնպե՛ս էլ՝ պլյուս անվերջի ձգտելիս:

Հաշվելով

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

սահմանները, համոզվում ենք, որ դիտարկվող ֆունկցիայի գրաֆիկը թեք ասիմպտոտ չունի:

Կոորդինատական հարթության վրա նշելով տրված ֆունկցիայի էքստրեմումները, նրա գրաֆիկի շրջման կետերն ու ասիմպտոտները և օգտվելով հետազոտվող ֆունկցիայի վարքը պարզաբանող 63-րդ և 64-րդ նկարներից՝ եզրակացնում ենք, որ (բ) հավասարումն ունեցող ֆունկցիայի գրաֆիկն ունի 65 -րդ նկարում պատկերված տեսքը:



Նկ.65

ԳԼՈՒԽ VII

ԱՆՈՐՈՇ ԵՎ ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§35. Գաղափար նախնական ֆունկցիայի և անորոշ ինտեգրալի մասին: Անորոշ ինտեգրալի հիմնական հատկությունները: Հիմնական ինտեգրալների ցուցակը: Փոփոխականի փոխարինում անորոշ ինտեգրալում: Մասերով ինտեգրման մեթոդը:

Մաթեմատիկական անալիզի շատ խնդիրներում անհրաժեշտ է լինում գտնել ոչ թե տրված ֆունկցիայի ածանցյալը, այլ ընդհակառակը՝ վերականգնել ֆունկցիան, եթե հայտնի է նրա ածանցյալը:

Սահմանում 1: *Տրված X միջակայքում (վերջավոր կամ անվերջ, փակ, բաց կամ կիսաբաց) $F(x)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական, եթե այդ միջակայքում $f(x)$-ը հանդիսանում է $F(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալը կամ որ նույնն է՝ $f(x)dx$ դիֆերենցիալ արտահայտությունը հանդիսանում է $F(x)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը.*

$$F'(x)=f(x) \quad [f(x)dx=dF(x)]: \tag{1}$$

Օրինակ 1: Գտնել $y=\cos x$ ֆունկցիայի նախնականը:

Լուծում: Քանի որ $(\sin x)'=\cos x$, հետևաբար $y=\sin x$ ֆունկցիան տրված ֆունկցիայի նախնականն է [27, (10)]:

Տրված ֆունկցիայի բոլոր նախնականների գտնելը կոչվում է այդ ֆունկցիայի ինտեգրում և հանդիսանում է ինտեգրալ հաշվի հիմնական խնդիրներից մեկը:

Թեորեմ 1: *Եթե X միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է, ապա $F(x)+c$-ն, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է, նույնպես $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է: Մյուս կողմից, $f(x)$ ֆունկցիայի յուրաքանչյուր նախնական X միջակայքում ունի $F(x)+c$ տեսքը:*

Ապացույց: Դիցուք X միջակայքում $F(x)$-ը $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է: Այդ դեպքում օգտվելով մի քանի ֆունկցիաների գումարի ածանցյալի բանաձևից [28,(1′′)], ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ հաստատունի ածանցյալը հավասար է զրոյի [27,(5)], կստանանք

$$[F(x)+c]'=[F(x)]'+c'=F'(x)=f(x),$$

ինչը, համաձայն սահմանման, նշանակում է, որ $F(x)+c$ ֆունկցիան նույնպես $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է:

Այժմ ենթադրենք, որ $\Phi(x)$ ֆունկցիան X միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական է, այսինքն՝ ենթադրենք X միջակայքում տեղի ունի

$$\Phi'(x)=f(x)$$

հավասարությունը և ցույց տանք, որ այն ունի $F(x)+c$ տեսքը:

Իրոք, քանի որ համաձայն ենթադրության $F(x)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները X միջակայքում ունեն միևնույն ածանցյալը, հետևաբար այդ միջակայքում նշված ֆունկցիաները միմյանցից տարբերվում են հաստատունով [33,h1].

$$\Phi(x)=F(x)+c \qquad (c=const):$$

Իսկ

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր նախնականները գտնելու համար բավական է գտնել նրա նախնականներից որևէ մեկը և նրան գումարել կամայական հաստատուն: Ասվածը նշանակում է, որ $F(x)+c$ ֆունկցիան, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է, իրենից ներկայացնում է այն ֆունկցիաների ընդհանուր տեսքը, որոնց ածանցյալը հավասար է $f(x)$-ի կամ որոնց դիֆերենցիալը հավասար է $f(x)dx$-ի: Վերոգրյալից մասնավորապես հետևում է, որ օրինակ 1-ում դիտարկված ֆունկցիայի բոլոր նախնականներն ունեն $\sin x+c$ տեսքը, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է:

Սահմանում 2: ***Եթե*** $F(x)$ ***ֆունկցիան*** $f(x)$ ***ֆունկցիայի նախնական է, ապա*** $F(x)+c$ ***ֆունկցիաների ընտանիքը, որտեղ*** c ***-ն կամայական հաստատուն է, կոչվում է*** $f(x)$ ***ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է***

$$\int f(x)dx \tag{2}$$

*պայմանանշանով:**)

(2) արտահայտության մեջ $f(x)dx$ *արտադրյալը կոչվում է ենթինտեգրալ արտահայտություն, իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան՝ ենթինտեգրալ ֆունկցիա:*

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից բխում է նրա հետևյալ հատկությունները՝

I. ***Դիֆերենցման և ինտեգրման նշանները փոխադարձաբար ոչնչանում են, եթե այդ նշաններից առաջինը դրվում է երկրորդից առաջ.***

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx \tag{3}$$

II. ***Դիֆերենցման և ինտեգրման նշանները փոխադարձաբար ոչնչանում են նաև այն դեպքում, երբ այդ նշաններից առաջինը դրվում է երկրորդից հետո (սակայն այս դեպքում հավասարության աջ կողմում*** $f(x)$ ***ֆունկցիային պետք է ավելացնել կամայական հաստատուն).***

$$\int d f(x)=f(x)+c \qquad (c=const): \tag{4}$$

Իրոք, քանի որ $f(x)$-ը $f'(x)$ ֆունկցիայի նախնական է, հետևաբար տեղի ունի

---

*) (2) անորոշ ինտեգրալի մեջ հաստատունը մասնակցում է անբացահայտ ձևով:

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \tag{4'}$$

կամ որ նույնն է՝ (4) հավասարությունը:

Ինչ

III. *Անորոշ ինտեգրալի ածանցյալը հավասար է ենթինտեգրալ ֆունկցիային.*

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x): \tag{5}$$

Իրոք, ունենք

$$\left[\int f(x)dx\right]' = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x),$$

որտեղ $F(x)$-ը $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական է:

Ինչ

IV. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս հանել անորոշ ինտեգրալի նշանի տակից.*

$$\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx \qquad (c = const): \tag{6}$$

Իրոք, օգտվելով անորոշ ինտեգրալի առաջին հատկությունից՝ կունենանք [29, (16)]

$$d[c\int f(x)dx] = c\cdot d[\int f(x)dx] = c\, f(x)dx,$$

այսինքն $c\int f(x)dx$ ֆունկցիան $c f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է, հետևաբար

այն ունի $c\int f(x)dx$ տեսքը, ինչը նշանակում է, որ տեղի ունի (6) հավասարությունը

Ինչ

V. *Վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարի անորոշ ինտեգրալը հավասար է այդ ֆունկցիաների անորոշ ինտեգրալների գումարին.*

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx: \tag{7}$$

Իրոք, օգտվելով անորոշ ինտեգրալի առաջին հատկությունից՝ կունենանք [29,(14)].

$$d\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)dx\right] =$$
$$= d\left[\int f_1(x)dx\right] + d\left[\int f_2(x)dx\right] + \cdots + d\left[\int f_n(x)dx\right] = [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx,$$

այսինքն, (7) հավասարության աջ մասը

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

ֆունկցիայի նախնական է, ինչը նշանակում է, որ այն հավասար է (7) հավասարության ձախ մասին:

Ինչ

VI. *Եթե $F(x)$-ը $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական է, ապա տեղի ունի*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c \qquad (c = const) \tag{8}$$

հավասարությունը:

Իրոք, քանի որ ըստ պայմանի $F'(x)=f(x)$, ուստի օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևից [28, (15′)], կունենանք [28,(1),(9)]

$$\frac{d}{dx}[F(ax+b)] = a\cdot F'(ax+b) = a\cdot f(ax+b),$$

որտեղից կստանանք

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

հավասարությունը, ինչը համաձայն սահմանման նշանակում է, որ (8) հավասարության աջ կողմում գրված ֆունկցիան $f(ax+b)$ ֆունկցիայի նախնական է:

Իսկա

Այժմ, օգտվելով տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների ցուցակից [28], ներկայացնենք անորոշ ինտեգրալների հիմնական ցուցակը.

1°. $\int o\cdot dx = c,$

2°. $\int 1\cdot dx = x + c,$

3°. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1),$

4°. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0),$

5°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c,$

5°ա. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$

6°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c,$

6°ա. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c,$

7°. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$

7°ա. $\int e^x dx = e^x + c,$

8°. $\int \sin x dx = -\cos x + c,$

9°. $\int \cos x dx = \sin x + c,$

10°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c,$

11°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c,$

12°. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + c,$

13°. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + c,$

14°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,$

15°. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + c,$

15°ա. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$

16°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c,$

17°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c \qquad (c=const)$ *):

Անցնենք բերված ցուցակի 4°, 5°ա, 12°, 14°, 15°, 16° և 17° բանաձևերի պարզաբանմանը:

4°. Ունենք (տե՛ս 92-րդ էջի տողատակի պարզաբանումը)

$$\left(\ln|x|+c\right)'=\left(\ln|x|\right)'=\frac{\left(|x|\right)'}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{-1}{-x}, & \text{եթե } x<0\\ \dfrac{1}{x}, & \text{եթե } x>0\end{cases}=\frac{1}{x}, \text{ եթե } x\neq 0:$$

5°ա. Օգտվելով տարրական ֆունկցիաների ածանցյալների համապատասխան բանաձևերից՝ կստանանք

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{\frac{dx}{a^2}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c:$$

12°. $\displaystyle\int tgx\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+c:$

14°. $\displaystyle\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c\right]=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)+c'=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}:$

15°. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\int\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)}dx=\frac{1}{a-b}\int\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right)dx=$

$$=\frac{1}{a-b}\left(\int\frac{dx}{x+b}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+c:$$

16°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{tg(x/2)}=\int\frac{d\,tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c:$

17°. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c:$

Այժմ ծանոթանանք անորոշ ինտեգրալների հաշվման փոփոխականի փոխարինման մեթոդի հետ:

---

*) Այսուհետև անորոշ ինտեգրալ հաշվելիս, որպես կանոն, c -ի հաստատուն լինելը չենք նշի:

Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int f(x)dx \qquad (9)$$

ինտեգրալը, ընդ որում անմիջականորեն $f(x)$ ֆունկցիայի նախնական գտնելը կապված է որոշակի դժվարությունների հետ:

Փոփոխականի

$$x=\varphi(t) \qquad (10)$$

փոխարինման շնորհիվ հաճախ (9) ինտեգրալի հաշվումն էապես հեշտանում է:

Ենթադրելով, որ իր որոշման տիրույթի ներսում $\varphi(t)$ ֆունկցիան ունի անընդհատ ածանցյալ, այդ ֆունկցիայի արժեքները պատկանում են $f(x)$-ի որոշման տիրույթին, ինչպես նաև գոյություն ունի նրա հակադարձ ֆունկցիան [24], *ապացուցենք*

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (11)$$

բանաձևը:

Ձևակերպած պնդումն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ (11) հավասարության աջ և ձախ կողմերում գրված ֆունկցիաների ածանցյալները (ըստ x-ի) իրար հավասար են:

Համաձայն (5) բանաձևի, նշված հավասարության ձախ կողմում գրված ֆունկցիայի ածանցյալը հավասար է $f(x)$-ի:

Մյուս կողմից, օգտվելով հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևից, կստանանք [27,(4)]

$$\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right\}'_x=\left\{\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right\}'_t\frac{dt}{dx}=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x):$$

Իսկ

Հասկանալի է, որ (11) հավասարության աջ կողմում գրված ինտեգրալը հաշվելուց հետո անհրաժեշտ է (10) հավասարությունից t-ն արտահայտել x-ով.

$$t=\psi(x) \qquad (12)$$

և (12) հավասարության օգնությամբ վերադառնալ x փոփոխականին:

Օրինակ 2: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}:$$

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի $x=t^6$ փոխարինում և օգտվելով անորոշ ինտեգրալի IV և V հատկություններից՝ կունենանք [27,(7)]

$$\sqrt{x}=t^3,\quad \sqrt[3]{x}=t^2,\quad dx=6t^5dt.$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt=6\left(\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right)=6(t-arctgt)+c:$$

$t=\sqrt[6]{x}$ բանաձևով վերադառնալով x փոփոխականին՝ վերջնականապես կստանանք

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}=6\left(\sqrt[6]{x}-arctg\sqrt[6]{x}\right)+c:$$

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (a>0): \tag{ա}$$

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի $x=a\sin t$ փոխարինում և նորից օգտվելով անորոշ ինտեգրալի IV և V հատկություններից՝ կունենանք

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\,d(a\sin t)=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c:$$

$t=\arcsin\dfrac{x}{a}$ բանաձևով վերադառնալով x փոփոխականին և նկատի ունենալով, որ

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}a\sin t\cdot a\cos t=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2},$$

կստանանք

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c: \tag{բ}$$

Դիտողություն 1: *Անորոշ ինտեգրալներ հաշվելիս շատ դեպքերում նպատակահարմար է լինում կատարել ոչ թե փոփոխականի $x=\varphi(t)$ փոխարինում, այլ՝ $t=\psi(x)$ փոխարինում:*

Նշենք, որ կատարելով անորոշ ինտեգրալների հիմնական ցուցակի 5°ա, 12°, 15°, 16° և 17° բանաձևերի պարզաբանումները՝ մենք, ըստ էության օգտվել ենք վերոգրյալ դիտողությունից:

Վերջում ծանոթանանք ինտեգրալ հաշվի ամենակարևոր բանաձևերից մեկի՝ մասերով ինտեգրման բանաձևի հետ:

Դիցուք $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաներն իրենց որոշման տիրույթների ներսում ունեն անընդհատ ածանցյալներ: Այդ դեպքում դիֆերենցելով $u(x)v(x)$ արտադրյալը՝ կստանանք [29, (15)]

$$d[u(x)v(x)]=u(x)dv(x)+v(x)du(x)$$

կամ

$$u(x)dv(x)=d[u(x)v(x)]-v(x)du(x):$$

Ինտեգրելով ստացված հավասարության երկու կողմերը՝ կունենանք

$$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x): \tag{13}$$

Վերջին հավասարությունն արտահայտում է մասերով ինտեգրման կանոնը և ունի հսկայական կիրառական նշանակություն:

Ինչպես տեսնում ենք, (13) բանաձևը

$$\int u(x)dv(x)$$

ինտեգրալի հաշվումը փոխարինում է

$$\int v(x)du(x)$$

ինտեգրալի հաշվումով: Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ նշված բանաձևից կօգտվենք այն դեպքերում, երբ այդ բանաձևի աջ կողմում գրված ինտեգրալն ավելի հեշտ է հաշվվում, քան՝ նրա ձախ կողմում գրվածը:

Դժվար չէ համոզվել, որ

$$\int x^n \ln^m x dx, \int x^n \sin axdx, \int x^n \cos axdx, \int x^n e^{ax} dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx, \int e^{ax} \cos bxdx \qquad (n, m \in N; a, b \in R)$$

ինտեգրալները, ինչպես նաև որոշ ինտեգրալներ, որոնք պարունակում են հակադարձ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ՝ հեշտությամբ հաշվվում են մասերով ինտեգրման բանաձևով:

Օրինակ 4: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int x \ln x dx:$$

Լուծում: Օգտվելով (13) բանաձևից՝ կստանանք [27, (9′)]

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int x^2 d \ln x \right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \int xdx \right) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c:$$

Օրինակ 5: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int e^x \sin x dx: \qquad (q)$$

Լուծում: Օգտվելով մասերով ինտեգրման կանոնից՝ կունենանք [27, (8′), (12)]

$$\int e^x \sin x dx = \int \sin x de^x = e^x \sin x - \int e^x d \sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d \cos x = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx:$$

Այսպիսով, տրված ինտեգրալը հաշվելու համար ստանում ենք

$$\int e^x \sin x dx = e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x dx \qquad (դ)$$

հավասարությունը:

Լուծելով (դ) հավասարումը (գ) ինտեգրալի նկատմամբ՝ կունենանք

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c:$$

Հասկանալի է, որ մասերով ինտեգրման բանաձևից օգտվելու համար խիստ կարևոր է հաշվման ենթակա ինտեգրալի ենթինտեգրալ արտահայտությունը հարմար ձևով $u(x)dv(x)$ տեսքով ներկայացնելը:

ԳԼՈՒԽ VII

§36. Կոմպլեքս թվեր, նրանց երկրաչափական պատկերումը: Թվաբանական գործողություններ կոմպլեքս թվերի հետ: Կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական տեսքը: Կոմպլեքս թիվն աստիճան բարձրացնելը և կոմպլեքս թվից արմատ հանելը:

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացում հարկադրված լինելով մի քանի անգամ հարստացնել թվերի պաշարը՝ ի վերջո ստանում ենք բոլոր իրական թվերի բազմությունը: Սակայն պարզվում է, որ այդ բազմությունն էլ չի բավականացնում առանձին (նույնիսկ տարրական) խնդիրների լուծումները կառուցելու համար: Օրինակ, ինչպես գիտենք, դիտարկելով բացասական տարբերիչով և իրական գործակիցներով քառակուսի եռանդամներ՝ համոզվում ենք, որ այդ եռանդամներն իրական թվերի բազմության մեջ արմատներ չունեն: Վերոգրյալը կրկին ստիպում է ընդլայնել թվերի բազմությունը և ներմուծել այնպիսի թվեր, որոնք մասնավոր դեպքում համընկնում են իրական թվերի հետ:

Հասկանալի է, որ նոր տեսակի թվերը և նրանց հետ կատարվող գործողությունները պետք է սահմանել այնպես, որ իրական թվերի հետ կատարվող գործողությունները մնան ուժի մեջ նաև այդ թվերի համար:

Սահմանում 1: *Հետևյալ արտահայտությունը՝*

$$z = x + iy, \tag{1}$$

որտեղ x-ը և y-ը կամայական իրական թվեր են, իսկ $i = \sqrt{-1}$ $\left(i^2 = -1\right)$, կոչվում է կոմպլեքս թիվ:

Սահմանում 2: *x-ը կոչվում է z կոմպլեքս թվի իրական մաս, iy-ը՝ կեղծ մաս, y-ը՝ կեղծ մասի գործակից, i-ն՝ կեղծ միավոր:*

z կոմպլեքս թվի իրական մասը և կեղծ մասի գործակիցը համապատասխանաբար կնշանակենք $\mathrm{Re}\, z$-ով և $\mathrm{Im}\, z$-ով.

$$x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z:$$

Եթե մասնավոր դեպքում (1) արտահայտության մեջ ընդունենք $y = 0$, իսկ x-ին տանք բոլոր իրական արժեքները, ապա կստանանք բոլոր իրական թվերի բազմությունը, ինչը նշանակում է, որ իրական թվերի բազմությունը կոմպլեքս թվերի բազմության ենթաբազմություն է:

Իսկ եթե (1) արտահայտության մեջ ընդունենք $x = 0$, իսկ y-ին տանք բոլոր իրական արժեքները ապա կստանանք, այսպես կոչված, բոլոր զուտ կեղծ թվերի բազմությունը:

Հասկանալի է, որ (1) կոմպլեքս թվին համապատասխանեցնելով կոորդինատական oxy հարթության $M(x,y)$ կետը՝ կոմպլեքս թվերի բազմության և կոորդինատական oxy հարթության կետերի միջև կստեղծենք փոխմիարժեք համապատասխանություն, ընդ որում իրական թվերին $(y = 0)$ այդ հարթության մեջ կհամապատասխանի ox առանցքը (որին կանվանենք իրական առանցք), իսկ զուտ կեղծ թվերին $(x = 0)$, oy առանցքը (որին կանվանենք կեղծ առանցք):

Սահմանում 3: *Կոմպլեքս թիվը կհամարենք հավասար զրոյի, երբ նրա ինչպե՛ս իրական մասը, այնպե՛ս էլ կեղծ մասի գործակիցը հավասար են զրոյի.*

$$x = y = 0 :$$

Այժմ դիտարկենք

$$z_1 = x_1 + iy_1 ,\ z_2 = x_2 + iy_2 \qquad (2)$$

կոմպլեքս թվերը:

Սահմանում 4: *z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերը կոչվում են հավասար, եթե $x_1 = x_2$ և $y_1 = y_2$: Այսինքն՝ երկու կոմպլեքս թվեր կոչվում են հավասար, եթե նրանց իրական մասերն իրար են հավասար, իսկ կեղծ մասերն էլ՝ իրար:*

Սահմանում 5: *z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի գումար (տարբերություն) ասելով կհասկանանք այն կոմպլեքս թիվը, որի իրական մասը հավասար է տրված կոմպլեքս թվերի իրական մասերի գումարին (տարբերությանը), իսկ կեղծ մասը՝ նրանց կեղծ մասերի գումարին (տարբերությանը):*

Այսպիսով, համաձայն բերված սահմանման, z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի գումարը և տարբերությունը համապատասխանաբար որոշվում են

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) ,\quad z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2) \qquad (3)$$

հավասարություններով:

Սահմանում 6: *z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի արտադրյալը կսահմանենք երկու բազմանդամների բազմապատկման կանոնի նմանությամբ.*

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) : \qquad (4)$$

Կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ կոմպլեքս թվերի գումարման և բազմապատկման ժամանակ գործում են հանրահաշվական սովորական օրենքներ:

Սահմանում 7: *$x + iy$ և $x - iy$ կոմպլեքս թվերը կոչվում են համալուծ կոմպլեքս թվեր:**)

z կոմպլեքս թվի համալուծ կոմպլեքս թիվը նշանակելով $\bar{z}$-ով՝ կստանանք

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 : \qquad (5)$$

Ինչպես տեսնում ենք, համալուծ կոմպլեքս թվերի արտադրյալը դրական թիվ է:

Սահմանում 8: *z_1 և z_2 $(z_2 \neq 0)$ կոմպլեքս թվերի քանորդն այն z_3 կոմպլեքս թիվն է, որի համար տեղի ունի*

$$z_3 \cdot z_2 = z_1$$

հավասարությունը:

z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի z_1/z_2 քանորդի համարիչն ու հայտարարը բազ-

---

*) Նկատենք, որ համալուծ կոմպլեքս թվերին համապատասխանող կետերը համաչափ են իրական առանցքի նկատմամբ:

մապատկելով z_2 կոմպլեքս թվի համալուծով կստանանք z_3 կոմպլեքս թվի տեսքը.

$$z_3=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-y_2x_1}{x_2^2+y_2^2}: \qquad (6)$$

Բերենք նաև

$$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \qquad (5')$$

բանաձևերը, որոնց ճշմարտացիության մեջ համոզվելը դժվար չէ:

Օրինակ 1: Հաշվել $z_1=3+2i$ և $z_2=2-3i$ կոմպլեքս թվերի գումարը, տարբերությունը, արտադրյալը և քանորդը:

Լուծում: Ունենք

$$z_1+z_2=3+2+(2-3)i=5-i,\quad z_1-z_2=3-2+(2+3)i=1+5i,$$

$$z_1\cdot z_2=(3+2i)(2-3i)=6+6+(4-9)i=12-5i,$$

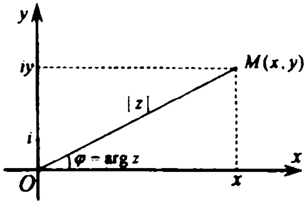
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+2i}{2-3i}=\frac{(3+2i)(2+3i)}{4+9}=\frac{6-6+(9+4)i}{13}=i:$$

Սահմանում 9: *Կոորդինատական oxy հարթության $M(x,y)$ կետը կոորդինատների սկզբնակետին միացնող OM հատվածի երկարությունը կոչվում է այդ կետի համապատասխան կոմպլեքս թվի մոդուլ և նշանակվում է $|z|$ պայմանանշանով, իսկ նշված հատվածի և իրական առանցքի կազմած անկյունը՝ նույն կոմպլեքս թվի արգումենտ և նշանակվում է $\varphi=\arg z$ պայմանանշանով:*

66-րդ նկարից երևում է, որ $M(x,y)$ կետի համապատասխան z կոմպլեքս թվի մոդուլն ու արգումենտն արտահայտվում են

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \arg z=arc\,tg\frac{y}{x} \qquad (7)$$

բանաձևերով:



Նկ.66

Ինչպես տեսնում ենք, կոմպլեքս թվի մոդուլը ոչ բացասական թիվ է և հավասար է զրոյի այն և միայն այն ժամանակ, երբ տրված կոմպլեքս թիվն է հավասար զրոյի: Ինչ վերաբերվում է z կոմպլեքս թվի արգումենտին, ապա այն կարող է ընդունել ցանկացած իրական արժեքներ՝ ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական [6,u2]:

Նշենք նաև, որ տրված կոմպլեքս թվի արգումենտն ակնհայտորեն ունի անթիվ բազմությամբ արժեքներ, որոնք իրարից տարբերվում են 2π-ի բազմապատիկներով:

Այսպիսով, կոմպլեքս թվի մոդուլը որոշվում է միարժեքորեն, իսկ արգու-

մենտը՝ 2π -ին բազմապատիկ գումարելու ճշտությամբ:[*]

z կոմպլեքս թվի իրական մասն ու կեղծ մասի գործակիցն արտահայտելով այդ թվի մոդուլով և արգումենտով (նկ.66)

$$x = |z|\cos\varphi, \quad y = |z|\sin\varphi, \tag{8}$$

կարող ենք այն ներկայացնել

$$z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{9}$$

տեսքով:

Սահմանում 10: *z կոմպլեքս թվի (9) տեսքը կոչվում է այդ թվի եռանկյունաչափական տեսք:*

z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերը ներկայացնելով եռանկյունաչափական տեսքով.

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2), \tag{2'}$$

որտեղ φ_1-ը z_1-ի արգումենտն է, իսկ φ_2-ը՝ z_2-ի, այդ թվերի արտադրյալի համար կունենանք

$$z_1\cdot z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|\,[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)],$$

որտեղից, օգտվելով եռանկյունաչափությունից հայտնի

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \qquad \sin(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2$$

բանաձևերից՝ կստանանք

$$z_1\cdot z_2 = |z_1||z_2|\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]: \tag{10}$$

Ինչպես տեսնում ենք, երկու կոմպլեքս թվերի արտադրյալը մի կոմպլեքս թիվ է, որի մոդուլը հավասար է այդ թվերի մոդուլների արտադրյալին, իսկ արգումենտը՝ նրանց արգումենտների գումարին.

$$|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 : \tag{11}$$

Նկատենք, որ երկու կոմպլեքս թվերի արտադրյալի համար ստացած (10) բանաձևից երևում է, որ այդ թվերի արտադրյալը հավասար է զրոյի այն և միայն այն ժամանակ, երբ նրանցից գոնե մեկը հավասար է զրոյի:

Այնուհետև z_1 և z_2 կոմպլեքս թվերի քանորդի համար կունենանք $(z_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

կամ

---

*) 0 -ն միակ կոմպլեքս թիվն է, որի արգումենտը անորոշ է, սակայն այդ թիվը միարժեքորեն որոշվում է $|0| = 0$ հավասարությամբ:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]: \tag{12}$$

Այսպիսով, երկու կոմպլեքս թվերի քանորդը մի կոմպլեքս թիվ է, որի մոդուլը հավասար է բաժանելիի և բաժանարարի մոդուլների քանորդին, իսկ արգումենտը՝ բաժանելիի և բաժանարարի արգումենտների տարբերությանը.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2\quad (z_2\neq 0): \tag{13}$$

Օրինակ 2: $z_1=1+i\sqrt{3}$ և $z_2=\sqrt{3}+i$ կոմպլեքս թվերը ներկայացնելով եռանկյունաչափական տեսքով, հաշվել նրանց արտադրյալը և քանորդը:

Լուծում: Օգտվելով (7) բանաձևերից՝ տրված կոմպլեքս թվերի մոդուլների և արգումենտների համար կունենանք

$$|z_1|=|z_2|=\sqrt{1+3}=2,\quad \arg z_1=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},\quad \arg z_2=\frac{\pi}{6}:$$

Հետևաբար, համաձայն (9) բանաձևի, դիտարկվող կոմպլեքս թվերը կարող ենք ներկայացնել

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\quad z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

տեսքով:

Այնուհետև օգտվելով (10) և (12) բանաձևերից՝ z_1 և z_2 թվերի արտադրյալի և քանորդի համար կստանանք

$$z_1\cdot z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=4i,\quad \frac{z_1}{z_2}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}:$$

Անցնելով կոմպլեքս թվերն աստիճան բարձրացնելու խնդրին՝ z կոմպլեքս թիվը ներկայացնենք եռանկյունաչափական տեսքով և օգտվելով երկու կոմպլեքս թվերի արտադրյալի (10) բանաձևից՝ այն n անգամ (n-ը կամայական բնական թիվ է) բազմապատկենք ինքն իրենով: Արդյունքում կստանանք կոմպլեքս թիվը բնական աստիճան բարձրացնելու Մուավրի բանաձևը.

$$[|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\quad (n\in N): \tag{14}$$

Այսպիսով, կոմպլեքս թիվը որևէ բնական աստիճան բարձրացնելու համար անհրաժեշտ է նրա մոդուլը բարձրացնել այդ նույն աստիճանը, իսկ արգումենտը բազմապատկել նշված աստիճանացույցով:

Օրինակ 3: Հաշվել

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

կոմպլեքս թվի խորանարդը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար նախ տրված թիվը ներկայացնենք եռանկյունաչափական տեսքով (տե՛ս նախորդ խնդրի լուծումը).

$$z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},$$

որից հետո օգտվելով Մուավրի բանաձևից՝ հաշվենք այդ թվի խորանարդը.

$$z^3=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i:$$

Վերջում դիտարկենք կոմպլեքս թվից բնական աստիճանի արմատ հանելու խնդիրը:

Սահմանում 11: z *կոմպլեքս թվի* n $(n\in N)$ *աստիճանի արմատը այն կոմպլեքս թիվն է, որի* n *աստիճանը հավասար է տրված թվին:*

Նշանակելով (9) եռանկյունաչափական տեսքն ունեցող z կոմպլեքս թվի n աստիճանի արմատը $w=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$-ով՝ համաձայն բերված սահմանման կունենանք

$$[\rho(\cos\psi+i\sin\psi)]^n=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi): \qquad (15)$$

Օգտվելով Մուավրի բանաձևից՝ կարող ենք (15) հավասարությունը ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=|z|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi): \qquad (15')$$

Նկատի ունենալով, որ հավասար կոմպլեքս թվերի մոդուլները հավասար են, իսկ արգումենտները կարող են իրարից տարբերվել 2π-ին բազմապատիկ գումարելիով՝ (15′) հավասարությունից կստանանք

$$\rho^n=|z|,\quad n\psi=\varphi+2\pi k,\quad k\in Z, \qquad (16)$$

որտեղ Z-ը ամբողջ թվերի բազմությունն է:

Վերջին հավասարություններից գտնելով որոնելի կոմպլեքս թվի մոդուլն ու արգումենտը՝ կունենանք

$$\sqrt[n]{|z|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\quad (n\in N,k\in Z): \qquad (17)$$

Կարելի է ցույց տալ, որ (17) բանաձևը տալիս է իրարից տարբեր n *կոմպլեքս թիվ, որոնք ստացվում են, օրինակ,* k *-ի* $0,1,2,\ldots,n-1$ *արժեքների դեպքում:*

Ամփոփելով կոմպլեքս թվից n աստիճանի արմատ հանելուն վերաբերվող դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ եզրակացությունը.

z *կոմպլեքս թվից* $n\,(n\in N;\,n\geq 2)$ *աստիճանի արմատ հանելը միշտ հնարավոր է և այն տալիս է իրարից տարբեր* n *արժեք: Այդ արժեքներին համապատասխանող կետերը համընկնում են* $\sqrt[n]{|z|}$ *շառավղով և կոորդինատների սկզբնակետը կենտրոն ունեցող շրջանագծին ներգծած կանոնավոր* n *-անկյան գագաթների հետ, այսինքն՝ գտնվում են նշված շրջանագծի վրա և այն բաժանում են* n *հավասար մասերի:*

Օրինակ 4: Գտնել $\sqrt[3]{i}$ արտահայտության բոլոր արժեքները:

Լուծում: Քանի որ $z=i$ կոմպլեքս թվի մոդուլն ու արգումենտը համապատասխանաբար հավասար են 1-ի և $\pi/2$-ի, հետևաբար օգտվելով (16) բանաձևից՝ կունենանք

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\quad (k=0,1,2)\,: \qquad (\text{ա})$$

Ստացված հավասարության մեջ հաջորդաբար տեղադրելով $k=0$, $k=1$ և $k=2$, կստանանք $\sqrt[3]{i}$ կոմպլեքս թվի երեք արժեքները.

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\quad \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},\quad \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i\,:$$

Սահմանում 12: *Կասենք, որ կոմպլեքս թվերից կազմված E բազմության վրա որոշված է կոմպլեքս փոփոխականի $f(z)$ ֆունկցիա, եթե նշված է օրենք, որը E բազմության յուրաքանչյուր թվի համապատասխանեցնում է մեկ կամ մի քանի կոմպլեքս թիվ:*

Սահմանում 13: *Յանկացած $x+iy$ կոմպլեքս փոփոխականի համար e^{x+iy} ցուցչային ֆունկցիան կսահմանենք հետևյալ կերպ՝*

$$e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)\,: \qquad (18)$$

(18) բանաձևում ընդունելով $x=0, y=\varphi$, կստանանք

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (19)$$

կարևոր նույնությունը, որը կոչվում է էյլերի բանաձև:

Ստացված բանաձևում ընդունելով $\varphi=-\varphi$, կունենանք

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi\,: \qquad (19')$$

Վերջին երկու բանաձևերից կարող ենք հեշտությամբ ստանալ նաև էյլերի

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (19'')$$

բանաձևերը:

(19) բանաձևի շնորհիվ կարող ենք (9) կոմպլեքս թիվը ներկայացնել

$$z=|z|\,e^{i\varphi} \qquad (20)$$

տեսքով, որտեղ φ-ն այդ թվի արգումենտն է:

Սահմանում 14: *z կոմպլեքս թվի (20) տեսքը կոչվում է այդ թվի ցուցչային տեսք:*

§37. Բազմանդամի արմատները: Բեզուի թեորեմը: Յանրահաշվի հիմնական թեորեմը: Բազմանդամի վերլուծումը գծային արտադրիչների: Իրական գործակիցներով բազմանդամի վերլուծումը գծային և քառակուսային արտադրիչների:

Ինչպես գիտենք, կամայական տարրական ֆունկցիայի ածանցյալը նույնպես տարրական ֆունկցիա է: Սակայն պարզվում է, որ ոչ բոլոր տարրական ֆունկցիաների ինտեգրալներն են ներկայացվում վերջավոր թվով տարրական ֆունկցիաների գումարի տեսքով: Որպես օրինակ բերենք

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x}$$

ինտեգրալները:

Բնականաբար կարևոր է առանձնացնել ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնց ինտեգրալներն արտահայտվում են տարրական ֆունկցիաների միջոցով: Այդպիսի դասերից պարզագույնը ռացիոնալ ֆունկցիաների դասն է:

Սահմանում 1:

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

*ֆունկցիան, որտեղ n -ը բնական թիվ է, իսկ a_i -երը $(i = 0,1,\ldots,n)$ իրական կամ կոմպլեքս թվեր՝ կոչվում է (n -րդ կարգի) ամբողջ ռացիոնալ ֆունկցիա կամ բազմանդամ:**)

Սահմանում 2: *Երկու բազմանդամների հարաբերությունը.*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad (2)$$

կոչվում է կոտորակային ռացիոնալ ֆունկցիա կամ ռացիոնալ կոտորակ:

Սահմանում 3: $P_n(x)/Q_m(x)$ *ռացիոնալ կոտորակը կոչվում է կանոնավոր կոտորակ, եթե նրա համարիչի կարգը փոքր է հայտարարի կարգից $(n < m)$ և՝ անկանոն կոտորակ՝ հակառակ դեպքում $(n \geq m)$:*

Օրինակ 1: Համածայն բերված սահմանման, հետևյալ կոտորակներից առաջինը կանոնավոր կոտորակ է, իսկ վերջին երկուսը՝ ոչ.

$$\frac{x^2+1}{x^3-1},\quad \frac{x^3-1}{x^2+x-1},\quad \frac{x^4+2x-1}{x^3-5x+2}:$$

Սահմանում 4: x *փոփոխականի այն արժեքը, որի դեպքում տրված բազմանդամը հավասարվում է զրոյի, կոչվում է այդ բազմանդամի արմատ:*

Այժմ, ենթադրելով, որ $P_n(x)$ և $Q_m(x)$ բազմանդամներն ընդհանուր արմատ չունեն՝ դնենք (2) ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալը հաշվելու խնդիրը:

Պարզ է, որ եթե (2)-ը անկանոն կոտորակ է, ապա բազմանդամների բաժանման կանոնով (բաժանելին հավասար է բաժանարարը բազմապատկած քանորդով, գումարած մնացորդը) բաժանելով այդ կոտորակի համարիչը նրա հայտարարի վրա՝ այն կներկայացնենք բազմանդամի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով.

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_l(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} \quad (n,m,l,k \in N;\ n \geq m;\ k < m) \qquad (3)$$

Քանի որ $M_l(x)$ բազմանդամի**) ինտեգրումը կապված չէ դժվարությունների հետ, հետևաբար (2) անկանոն կոտորակի ինտեգրման հիմնական դժ-

*) Նշենք, որ x փոփոխականը նույնպես կարող է ընդունել ինչպե՛ս իրական, այնպե՛ս էլ կոմպլեքս արժեքներ:

**) $M_l(x)$ բազմանդամը կոչվում է $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ռացիոնալ կոտորակի ամբողջ մաս $(n \geq m)$:

վարությունը (3) հավասարության շնորհիվ փոխանցվում է $P_k(x)/Q_m(x)$ կանոնավոր կոտորակի ինտեգրման խնդրին:

Նկատի ունենալով, որ կանոնավոր կոտորակի ինտեգրման խնդիրն էլ կապված է նրա հայտարարը պարզ (գծային կամ քառակուսային) արտադրիչների վերլուծելու հետ [38,բ1], նախ զբաղվենք բազմանդամը պարզ արտադրիչների վերլուծելու խնդրով:

Մեր ուսումնասիրությունները սկսենք հետևյալ կարևոր թեորեմով՝

Թեորեմ 1: *(Բեզու) $P_n(x)$ բազմանդամը $x-x_0$ երկանդամի վրա բաժանելուց առաջացած մնացորդը հավասար է այդ բազմանդամի արժեքին x_0 կետում, այսինքն հավասար է $P_n(x_0)$-ի:*

Ապացույց: Ակնհայտ է, որ $P_n(x)$ բազմանդամը $x-x_0$ երկանդամի վրա բաժանելիս քանորդում կստանանք $(n-1)$-րդ կարգի բազմանդամ, իսկ մնացորդում՝ հաստատուն: Նշանակելով այդ հաստատունը R-ով, իսկ $(n-1)$-րդ կարգի բազմանդամը՝ $P_{n-1}(x)$-ով և օգտվելով բազմանդամների բաժանման կանոնից՝ կունենանք

$$P_n(x)=(x-x_0)\,P_{n-1}(x)+R: \tag{4}$$

Նկատելով, որ (4) հավասարությունը ճիշտ է x-ի բոլոր արժեքների համար՝ բացի x_0-ից ($x=x_0$ արժեքի դեպքում կստանանք զրոյի վրա բաժանում) և նրա երկու կողմերում անցնելով սահմանի, երբ x-ը ձգտում է x_0-ի [22,բ6], [24,ο1], դիտարկվող բազմանդամը $x-x_0$ երկանդամի վրա բաժանելուց առաջացած մնացորդի համար կստանանք

$$R=P_n(x_0): \tag{5}$$

Իսկ

Հետևանք 1: *Որպեսզի $P_n(x)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվի $x-x_0$ երկանդամի վրա, այսինքն, որպեսզի $P_n(x)$ բազմանդամը ներկայացվի*

$$P_n(x)=(x-x_0)P_{n-1}(x) \tag{4'}$$

տեսքով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ x_0-ն այդ բազմանդամի արմատ լինի:

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք $P_n(x)$ բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվում է $x-x_0$ երկանդամի վրա:

Այդ դեպքում, նկատի ունենալով (4) և (5) հավասարությունները՝ կունենանք

$$P_n(x_0)=0, \tag{6}$$

ինչն էլ, համաձայն սահմանման նշանակում է, որ x_0-ն $P_n(x)$ բազմանդամի արմատ է:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք x_0-ն $P_n(x)$ բազմանդամի արմատ է, այսինքն ենթադրենք տեղի ունի (6) հավասարությունը:

Կրկին օգտվելով (4) և (5) հավասարություններից՝ կստանանք $R=0$, ինչը նշանակում է, որ $P_n(x)$ բազմանդամը $x-x_0$ երկանդամի վրա բաժանվում է առանց մնացորդի:

Ինչ

Օրինակ 2: k-ի ո՞ր արժեքների դեպքում

$$P_4(x)=x^4-kx^3+9x^2+13x-10 \qquad (ա)$$

բազմանդամն առանց մնացորդի կբաժանվի $x+2$ երկանդամի վրա:

Լուծում: Համաձայն հետևանք 1-ի, որպեսզի տրված բազմանդամն առանց մնացորդի բաժանվի $x+2$ երկանդամի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

$$P(-2)=0$$

կամ որ նույնն է՝

$$(-2)^4-k(-2)^3+9(-2)^2+13(-2)-10=0 \qquad (բ)$$

հավասարությունը:

Լուծելով (բ) հավասարումը՝ կստանանք, որ $k=-2$ դեպքում (ա) բազմանդամն $x+2$ երկանդամի վրա բաժանվում է առանց մնացորդի:

Սահմանում 6: *Հետևյալ տեսքն ունեցող հավասարումը՝*

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0, \qquad (7)$$

որտեղ n-ը կամայական բնական թիվ է, իսկ a_i-երը $(i=0,1,\ldots,n)$ իրական կամ կոմպլեքս հաստատուններ՝ կոչվում է n-րդ աստիճանի հանրահաշվական հավասարում:

Հասկանալի է, որ (1) բազմանդամն ու (7) հավասարումն ունեն միևնույն արմատները:

Բնականաբար հարց է ծագում. արդյո՞ք ցանկացած n-ի համար (7) հավասարումն ունի արմատ:

Պարզվում է՝ ձևակերպված հարցն ունի դրական պատասխան և այն տրվում է հետևյալ թեորեմով (որը բերում ենք առանց ապացույցի):

Թեորեմ 2: *(Հանրահաշվի հիմնական թեորեմը): n-րդ աստիճանի յուրաքանչյուր հանրահաշվական հավասարում ունի առնվազն մեկ արմատ՝ իրական կամ կոմպլեքս:*

Այժմ ապացուցենք հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է վերլուծել գծային արտադրիչների:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար դիտարկենք n-րդ աստիճանի (1) բազմանդամը:

Համաձայն թեորեմ 2-ի, (1) բազմանդամն ունի գոնե մեկ (իրական կամ կոմպլեքս) արմատ: Նշանակելով այդ արմատը x_1-ով և օգտվելով հետևանք 1-ից՝ կստանանք

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x):$$

$P_n(x)$ բազմանդամին վերաբերվող վերոգրյալ դատողությունները կրկնելով $(n-1)$-րդ կարգի $P_{n-1}(x)$ բազմանդամի համար՝ կարող ենք այն ներկայացնել

$$P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x)$$

տեսքով՝ որտեղ x_2-ը այդ բազմանդամի արմատն է:

Շարունակելով հաջորդաբար ստացվող, ավելի ու ավելի ցածր կարգի բազմանդամները ներկայացնել (4′) տեսքով՝ ի վերջո կունենանք

$$P_1(x)=(x-x_n)P_0,$$

որտեղ x_n-ը $P_1(x)$ բազմանդամի արմատն է, իսկ P_0-ն զրո աստիճանի բազմանդամ է (այսինքն հաստատուն է):

Միավորելով ստացած բոլոր հավասարությունները և նկատելով, որ $P_0=a_n$, կստանանք $P_n(x)$ բազմանդամի

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \tag{8}$$

վերլուծությունը՝ ինչը նշանակում է, որ դիտարկվող բազմանդամը վերլուծվել է գծային արտադրիչների:

Իպա

Հասկանալի է, որ (1) բազմանդամի (8) վերլուծության մեջ կարող են որոշ արտադրիչներ համընկնել: Նման դեպքերում, միավորելով այդ արտադրիչները՝ $P_n(x)$ բազմանդամը կներկայացնենք

$$P_n(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m} \qquad (k_1+k_2+\cdots+k_m=n) \tag{8′}$$

տեսքով և կասենք, որ $x=x_i$-ն $(i=1,2,\ldots,m)$ տրված բազմանդամի k_i-ապատիկ արմատ է:

Օրինակ 3: Համաձայն վերոգրյալի $x=2$-ը $P_5(x)=(x-2)^3(x-7)^2$ բազմանդամի եռապատիկ արմատ է, իսկ $x=7$-ը՝ կրկնապատիկ:

Օգտվելով $P_n(x)$ բազմանդամի (8) կամ (8′) վերլուծությունից և նկատի ունենալով, որ k-ապատիկ արմատ ունենալն այդ բազմանդամի համար նշանակում է ունենալ k հատ միանման արմատ, ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 4: *n-րդ աստիճանի յուրաքանչյուր բազմանդամ**) *ունի ճիշտ n արմատ՝ իրական կամ կոմպլեքս:*

Անցնելով իրական գործակիցներով բազմանդամն արտադրիչների վերլուծելու խնդրին՝ այժմ ենթադրենք (1)-ը իրական գործակիցներով բազմանդամ է և ապացուցենք հետևյալ թեորեմը.

---

*) Հետևաբար նաև n-րդ աստիճանի յուրաքանչյուր հանրահաշվական հավասարում:

Թեորեմ 5: *Եթե որևէ կոմպլեքս թիվ իրական գործակիցներով (1) բազմանդամի արմատ է, ապա այդ թվի համալուծ կոմպլեքս թիվը նույնպես տրված բազմանդամի արմատ է:*

Ապացույց: Դիցուք $z_0 = x_0 + iy_0$ կոմպլեքս թիվը [36,ս1] իրական գործակիցներով (1) բազմանդամի արմատ է, այսինքն տեղի ունի

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (x_0 + iy_0)^k = 0 \tag{9}$$

կամ որ նույնն է՝

$$A + iB = 0 \tag{9′}$$

հավասարությունը, որտեղ A-ն (9) հավասարության ձախ կողմի իրական մասն է, իսկ B-ն՝ նրա կեղծ մասի գործակիցը [36,ս2]:

Ինչպես գիտենք [36,ս3], (9′) հավասարությունից հետևում է, որ

$$A = B = 0: \tag{10}$$

Այժմ, եթե $P_n(x)$ բազմանդամի մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք $\overline{z_0} = x_0 - iy_0$ [36,ս7] կոմպլեքս թիվը և օգտվենք [36,(5′)]-ի առաջին երկու բանաձևերից՝ (10) Сі ні лі сбхГЪбхЭЭ»сЗ Сі Яні йбхЩбн Пгп і Эі Эц*)

$$P_n(\overline{z_0}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k (x_0 + iy_0)^k} = \overline{A + iB} = A - iB = 0,$$

ինչը նշանակում է, որ $\overline{z_0}$ կոմպլեքս թիվը $P_n(x)$ բազմանդամի արմատ է:

Իպս

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ իրական գործակիցներով $P_n(x)$ բազմանդամի (8) վերլուծության մեջ կոմպլեքս արմատները մասնակցում են զույգ առ զույգ համալուծ ձևով:

$P_n(x)$ բազմանդամի նշված վերլուծության մեջ դիտարկելով կոմպլեքս համալուծ արմատներ պարունակող արտադրիչների որևէ զույգ.

$$x - (x_k + iy_k), \quad x - (x_k - iy_k),$$

կունենանք

$$\begin{aligned}
&[x - (x_k + iy_k)][x - (x_k - iy_k)] = [(x - x_k) - iy_k][(x - x_k) + iy_k] = \\
&= (x - x_k)^2 + y_k^2 = x^2 - 2x_k x + x_k^2 + y_k^2 = x^2 + p_k x + q_k,
\end{aligned}$$

որտեղ x_k-ն, y_k-ն, p_k-ն և q_k-ն իրական թվեր են, ընդ որում

$$p_k = -2x_k, \quad q_k = x_k^2 + y_k^2, \quad p_k^2 - 4q_k^2 = -4y_k^2 < 0:$$

Այսպիսով, իրական գործակիցներով $P_n(x)$ բազմանդամի (8) վերլուծության մեջ կոմպլեքս համալուծ արմատների համապատասխանող արտադրիչ-

*) Իրական a-երի դեպքում $\overline{a} = a$ հավասարությունն ակնհայտ է:

ների յուրաքանչյուր արտադրյալ կարող ենք ներկայացնել իրական գործակիցներով և բացասական տարբերիչով քառակուսի եռանդամի տեսքով:

Հասկանալի է, որ, եթե $z_k = x_k + iy_k$ կոմպլեքս թիվը $P_n(x)$ բազմանդամի k-ապատիկ արմատ է, ապա նրա համալուծ կոմպլեքս թիվը նույնպես այդ բազմանդամի k-ապատիկ արմատ է:

Ամփոփելով վերևում բերված դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 6: *Իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր բազմանդամ կարելի է (համապատասխան պատիկություններով) վերլուծել իրական գործակիցներով գծային և (գծային արտադրիչների չվերլուծվող) քառակուսային արտադրիչների:*

Նշենք, որ մասնավոր դեպքում իրական գործակիցներով բազմանդամը կարող է վերլուծվել միայն գծային կամ միայն՝ գծային արտադրիչների չվերլուծվող քառակուսային արտադրիչների:

Թեորեմ 6-ը նշանակում է, որ իրական գործակիցներով $P_n(x)$ բազմանդամի համար տեղի ունի հետևյալ վերլուծությունը՝

$$\begin{gathered}P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdots \\ \cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}, \qquad (k_1+k_2+\cdots+k_r+2l_1+2l_2+\cdots+2l_s=n),\end{gathered} \tag{11}$$

որտեղ մասնակցող բոլոր գործակիցները իրական թվեր են, իսկ քառակուսի եռանդամների տարբերիչները՝ բացասական:

§38. Պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներ և նրանց ինտեգրումը: Ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը:

Վերադառնալով ռացիոնալ կոտորակների [37,ս2] ինտեգրման խնդրին՝ նախ ծանոթանանք պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրմանը:

Սահմանում 1: *Հետևյալ կոտորակները՝*

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \quad (n=2,3,\ldots), \tag{1}$$

որտեղ A-ն, B-ն, a-ն, p-ն և q-ն կամայական իրական հաստատուններ են, ընդ որում x^2+px+q եռանդամը իրական արմատներ չունի, կոչվում են պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներ:

Դիտարկվող կոտորակներից առաջին երկուսը ինտեգրվում են հեշտությամբ:

Իրոք, կատարելով փոփոխականի $x-a=t$ փոխարինում՝ կունենանք*) [29,(14)], [35,IV,4°,3°,(11)]

$$\int\frac{Adx}{x-a} = A\int\frac{d(x-a)}{x-a} = A\int\frac{dt}{t} = A\ln|t| + c = A\ln|x-a| + c,$$

---

*) Հիշենք 172-րդ էջի տողատակում բերված պայմանավորվածության մասին:

$$\int\frac{Adx}{(x-a)^n}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^n}=A\int\frac{dt}{t^n}=-A\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}+c=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+c:$$

Անցնելով (1) կոտորակներից երրորդի ինտեգրմանը, նախ այդ կոտորակի հայտարարից անջատենք նրա լրիվ քառակուսին.

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}:$$

Այնուհետև կատարելով

$$x+\frac{p}{2}=t,\ \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a\quad(a>0)\tag{2}$$

նշանակումները՝ կունենանք [35,4°,5°ա][*]

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{\left(At+B-\frac{Ap}{2}\right)}{t^2+a^2}dt=\frac{A}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+a^2}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+$$

$$+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ap}{2}\right)arctg\frac{t}{a}+c=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c:$$

Ինչ վերաբերվում է պարզագույն ռացիոնալ կոտորակներից վերջինի ինտեգրմանը, ապա (2) նշանակումների շնորհիվ նախ այդ կոտորակի ինտեգրալը ներկայացնենք երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով.

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n}+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}:\tag{3}$$

Այնուհետև կատարելով փոփոխականի $t^2+a^2=u$ փոխարինում՝ հաշվենք (3) հավասարության նախավերջին ինտեգրալը.

$$\int\frac{2tdt}{(t^2+a^2)^n}=\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=\int\frac{du}{u^n}=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c=-\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+c\ (n=2,3,\ldots):\tag{4}$$

Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը [35, (13)] և (3) հավասարության մեջ մասնակցող վերջին ինտեգրալը նշանակելով J_n-ով, այդ ինտեգրալի համար կունենանք

$$J_n=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}-\int t\cdot d\frac{1}{(t^2+a^2)^n}=$$

$$=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}dt$$

կամ

---

[*] Համաձայն ենթադրության՝ դիտարկվող եռանդամի տարբերիչը բացասական է.

$$\frac{p^2}{4}-q<0:$$

$$J_n = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n} + 2nJ_n - 2a^2 n\, J_{n+1},$$

որտեղից J_{n+1} ինտեգրալի համար կստանանք հետևյալ անդրադարձ (ռեկուրենտ) բանաձևը՝

$$J_{n+1} = \frac{1}{2a^2 n}\cdot\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2a^2 n} J_n \qquad (n=1,2,\ldots): \tag{5}$$

Նկատի ունենալով, որ

$$J_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{t}{a} + c \tag{6}$$

և (5) բանաձևում ընդունելով $n=1$, կունենանք

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} arctg\frac{t}{a} + c: \tag{7}$$

Յասկանալի է, որ (5) բանաձևում հաջորդաբար ընդունելով $n=2,3,\ldots,$ կստանանք $J_3, J_4,\ldots$ ինտեգրալների արտահայտությունները:

Չորրորդ պարզագույն ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալի վերջնական տեսքն ստանալու համար մնում է (2) նշանակումների օգնությամբ համապատասխան արտահայտություններում վերադառնալ x-ի, p-ի և q-ի:

Ավարտելով պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրումը՝ այժմ առանց ապացույցի բերենք ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրման տեսության մեջ առանցքային նշանակություն ունեցող հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Իրական գործակիցներով յուրաքանչյուր կանոնավոր ռացիոնալ կոտորակ կարելի է ներկայացնել վերջավոր թվով պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով.*

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{P_n(x)}{\left(x-x_1\right)^{k_1}\cdots\left(x-x_r\right)^{k_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}} = \\
&= \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}} + \cdots + \frac{A_1^{(r)}}{x-x_r} + \cdots + \frac{A_{k_r}^{(r)}}{\left(x-x_r\right)^{k_r}} + \\
&+ \frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{l_1}^{(1)}x+C_{l_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}} + \cdots + \frac{B_1^{(s)}x+C_1^{(s)}}{x^2+p_sx+q_s} + \cdots + \frac{B_{l_s}^{(s)}x+C_{l_s}^{(s)}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s}}
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\left(n<m=k_1+k_2+\cdots+k_r+2l_1+2l_2+\cdots+2l_s\right),$$

որտեղ մասնակցող բոլոր գործակիցները իրական թվեր են, իսկ քառակուսի եռանդամների տարբերիչները՝ բացասական:

Ներկայացված բանաձևի աջ մասի կոտորակների համարիչները գտնելու համար այդ մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի և ստացված համարիչի ու $P_n(x)$ բազմանդամի համապատասխան անդամների գործակիցները հավասարեցնենք իրար: Արդյունքում՝ նշված հաստատունները գտնելու համար կստանանք անհրաժեշտ քանակությամբ գծային հավասարումներից կազմված որոշյալ համակարգ [12,ս18]:

(8) նույնության մեջ մասնակցող անհայտ գործակիցները գտնելու նկարագրված մեթոդը կոչվում է անորոշ գործակիցների մեթոդ:

Ամփոփելով վերջին երկու պարագրաֆներում բերված արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ ռացիոնալ կոտորակի ինտեգրալը հաշվելու համար անհրաժեշտ է.

ա) *տրված կոտորակը (եթե այն անկանոն կոտորակ է) ներկայացնել բազմանդամի և կանոնավոր կոտորակի գումարի տեսքով,*

բ) *ստացված կանոնավոր կոտորակի հայտարարը վերլուծել պարզ (գծային կամ գծային արտադրիչների չվերլուծվող քառակուսային) արտադրիչների և այն ներկայացնել ամենապարզ ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով,*

գ) *հաշվել ստացված բազմանդամի և պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրալները և արդյունքները գումարել իրար:*

Օրինակ 1. Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}\,dx: \qquad (ա)$$

Լուծում: Նկատելով, որ $x=2$-ը դիտարկվող ինտեգրալի ենթաինտեգրալ կոտորակի հայտարարում գրված բազմանդամի արմատ է և այդ բազմանդամը բաժանելով $(x-2)$-ի վրա՝ քանորդում կստանանք

$$x^4+2x^2+1:$$

Այսպիսով, տրված ինտեգրալն ընդունում է

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx \qquad (բ)$$

տեսքը:

Այժմ օգտվելով (8) բանաձևից՝ տրված կոտորակը ներկայացնենք պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների գումարի տեսքով.

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+F}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \qquad (գ)$$

(գ) հավասարության աջ մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի և համարիչում ստացված բազմանդամի գործակիցները հավասարեցնենք այդ հավասարության ձախ կողմի կոտորակի համարիչում գրված բազմանդամի համապատասխան գործակիցներին: Արդյունքում կստանանք գծային հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases}A+B=0,\\-2B+F=0,\\2A+B-2F+D=2,\\-2B+F-2D+E=2,\\A-2F-2E=13:\end{cases} \qquad (դ)$$

Լուծելով հավասարումների (դ) համակարգը՝ կունենանք

$$A=1,\quad B=-1,\quad F=-2,\quad D=-3,\quad E=-4:$$

A, B, F, D, E հաստատունների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (գ) նույնության մեջ և (ա) ինտեգրալը ներկայացնելով պարզագույն ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրալների գումարի տեսքով՝ կստանանք

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2}dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{(x+2)dx}{x^2+1} - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\,arctg\,x + c :$$

§39. Իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրումը: Եռանկյունաչափական ֆունկցիաների ինտեգրումը:

Ծանոթանալով բազմանդամների և ռացիոնալ կոտորակների ինտեգրմանը՝ այժմ դիտարկենք այնպիսի իռացիոնալ ֆունկցիաներ, որոնք $t = \varphi(x)$ նշանակումից հետո բերվում են ռացիոնալ տեսքի և հետևաբար, որպես t-ի ֆունկցիա, ինտեգրվում են:

Իռացիոնալ ենթինտեգրալ ֆունկցիաներով ինտեգրալների հաշվման նկարագրված մեթոդը կոչվում է իռացիոնալ ենթինտեգրալ արտահայտության ռացիոնալացման մեթոդ:*)

1°. *Դիտարկենք*

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx \tag{1}$$

*ինտեգրալը, որտեղ R-ը իր արգումենտների նկատմամբ ռացիոնալ ֆունկցիա է (այսինքն այդ ֆունկցիայի արգումենտների հետ կատարվում են միայն «ռացիոնալ» գործողություններ), իսկ m_i-երը և n_i-երը $(i = 1, 2, \ldots, k)$ բնական թվեր են:***)

Դիտարկվող ինտեգրալը հաշվելու համար m_i/n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ կոտորակների ընդհանուր հայտարարը նշանակենք s-ով:

Կատարելով փոփոխականի

$$t = \sqrt[s]{x} \tag{2}$$

փոխարինում՝ կստանանք [35,(12)]

$$x = t^s, \quad dx = s\,t^{s-1}dt : \tag{3}$$

x-ի և dx-ի համար ստացած արտահայտությունները տեղադրելով (1) ինտեգրալի մեջ, կունենանք ռացիոնալ ենթինտեգրալ արտահայտություն ունեցող ինտեգրալ: Հաշվելով ստացված ինտեգրալը [38] և (2) նշանակումով վերադառնալով x փոփոխականին՝ կստանանք (1) ինտեգրալի արտահայտությունը:

---

*) Նշենք, որ ոչ բոլոր իռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրալներն են արտահայտվում տարրական ֆունկցիաների միջոցով:

**) Իր արգումենտների նկատմամբ ռացիոնալ ֆունկցիան կնշանակենք R-ով:

Օրինակ 1: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,.$$

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի $t=\sqrt[4]{x}$ փոխարինում՝ կունենանք [35.3°,4°]

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt[4]{x^3}} = 4\int \frac{t^5dt}{t^3+1} = 4\int\left(t^2-\frac{t^2}{t^3+1}\right)dt = \frac{4t^3}{3}-\frac{4}{3}\ln\left(t^3+1\right)+c = \frac{4}{3}\left[\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right]+c\,:$$

2°. *Այնուհետև դիտարկենք*

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \tag{4}$$

ինտեգրալը, որտեղ n -ը բնական թիվ է, իսկ a -ն, b -ն, c -ն և d -ն հաստատուններ:

Կատարելով փոփոխականի

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \tag{5}$$

փոխարինում՝ կստանանք

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},\quad x=\Psi(t)=\frac{dt^n-b}{a-ct^n},\quad dx=\Psi'(t)dt\,: \tag{6}$$

(5) և (6) առնչությունների հաշվառումով (4) ինտեգրալը կընդունի

$$\int R[\Psi(t),t]\Psi'(t)dt \tag{7}$$

տեսքը:

Քանի որ R-ը, $\Psi(t)$-ն և $\Psi'(t)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիաներ են, ուստի (7) ինտեգրալն ունի ռացիոնալ ենթաինտեգրալ արտահայտություն:

Տրված ինտեգրալը հաշվելու համար մնում է հաշվել (7) ինտեգրալը և օգտվելով (5) նշանակումից՝ վերադառնալ x փոփոխականին:

Օրինակ 2: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int \frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx\,: \tag{ա}$$

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \tag{բ}$$

փոխարինում՝ կունենանք

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=-\frac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}\,: \tag{գ}$$

(բ) և (գ) առնչությունների հաշվառումով (ա) ինտեգրալի համար կստանանք [35.5°ա].

$$\int\frac{1}{x+1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\,arctg\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+c,$$

որտեղ t-ն տրվում է (բ) բանաձևով:

3°. *Դիտարկենք նաև ավելի ընդհանուր տեսքի*

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_k}\right]dx \tag{8}$$

ինտեգրալը, որտեղ r_i-երը $(i=1,2,\ldots,k)$ ռացիոնալ թվեր են, իսկ a-ն, b-ն, c-ն և d-ն՝ հաստատուններ:

Դիտարկվող ինտեգրալը հաշվելու համար կատարենք փոփոխականի

$$t=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} \tag{9}$$

փոխարինում, որտեղ s-ը $r_i(i=1,2,\ldots,k)$ աստիճանացույցերի ընդհանուր հայտարարն է:

Այնուհետև հաշվելով (8) ինտեգրալից ստացված, ռացիոնալ ենթինտեգրալ արտահայտություն ունեցող ինտեգրալը և (9) նշանակումով վերադառնալով x փոփոխականին՝ կգտնենք (8) ինտեգրալի արտահայտությունը:

4°. *Այժմ դիտարկենք*

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \tag{10}$$

կարևոր ինտեգրալը, որտեղ a-ն, b-ն և c-ն հաստատուններ են, ընդ որում $a\neq 0$:

Տրված ենթինտեգրալ ֆունկցիան ռացիոնալացնելու համար առանձին-առանձին քննարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

ա) ax^2+bx+c (11)

քառակուսի եռանդամի տարբերիչը հավասար է զրոյի.

$$D=b^2-4ac=0:$$

Հանրահաշվի դպրոցական դասընթացից հայտնի է, որ $D=0$ դեպքում (11) եռանդամը դառնում է լրիվ քառակուսի, որտեղից հետևում է, որ քննարկվող դեպքում ենթինտեգրալ ֆունկցիայի ռացիոնալացման խնդիր չունենք:

բ) *(11) եռանդամի ավագ անդամի գործակիցն ու տարբերիչը բացասական են.*

$$a<0,\ D<0:$$

Քննարկվող դեպքում (11) եռանդամն ընդունում է միայն բացասական արժեքներ, որտեղից հետևում է, որ (10) ինտեգրալի հաշվման խնդիրը վերանում է:

գ) (11) եռանդամի տարբերիչը դրական է.

$$D>0:$$

Ինչպես հայտնի է, դիտարկվող դեպքում տրված եռանդամը կարելի է վերլուծել գծային արտադրիչների

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2), \qquad (12)$$

որտեղ x_1-ը և x_2-ը նշված եռանդամի արմատներն են:

Կատարելով

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1) \qquad (13)$$

նշանակումը[*] և (13) հավասարության երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք

$$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2$$

կամ

$$a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$$

հավասարությունը, որտեղից կունենանք

$$x=\frac{t^2x_1-ax_2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a},\ dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt: \qquad (14)$$

Դիտարկվող ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիան ռացիոնալացնելու համար մնում է (14) արտահայտությունները տեղադրել այդ ինտեգրալի մեջ:

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}: \qquad (դ)$$

Լուծում: Դիտարկվող ենթինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ մասնակցող քառակուսի եռանդամը վերլուծելով գծային արտադրիչների.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

և կատարելով

$$\sqrt{x^2-5x+6}=t(x-2) \qquad (ե)$$

նշանակումը՝ կստանանք

$$x=\frac{2t^2-3}{t^2-1},\quad dx=\frac{2tdt}{(t^2-1)^2},\quad \sqrt{x^2-5x+6}=-\frac{t}{t^2-1}: \qquad (զ)$$

Տեղադրելով (զ) արտահայտություններից վերջին երկուսը (դ) ինտեգրալի մեջ՝ կունենանք [35.15°ա]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}=-2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+c:$$

Օգտվելով (ե) նշանակումից ստացվող

$$t=\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$$

առնչությունից՝ տրված ինտեգրալի համար վերջնականապես կունենանք

---

[*]) Քննարկվող դեպքում կարող ենք կատարել նաև հետևյալ նշանակումը՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2): \qquad (13')$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \ln \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}} + c :$$

դ) *(11) եռանդամի ավագ անդամի գործակիցը դրական է.*

$$a>0:$$

Կատարելով

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}\,x \tag{15}$$

նշանակումը*) և (15) հավասարության երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք

$$ax^2+bx+c = \left(t-\sqrt{a}\,x\right)^2$$

կամ

$$\left(b+2\sqrt{a}\,t\right)x = t^2-c$$

հավասարությունը, որտեղից կունենանք

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}\,t+b\right)^2}dt : \tag{16}$$

Դիտարկվող ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիան ռացիոնացնելու համար անհրաժեշտ է (16) արտահայտությունները տեղադրել այդ ինտեգրալի մեջ:

Օրինակ 4: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը**)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} : \tag{է}$$

Լուծում: Քանի որ x^2+a քառակուսի եռանդամի ավագ անդամի գործակիցը դրական է, հետևաբար կատարելով

$$\sqrt{x^2+a} = t-x \tag{ը}$$

նշանակումը՝ կստանանք

$$t = x+\sqrt{x^2+a}, \quad x = \frac{t^2-a}{2t}, \; dx = \frac{t^2+a}{2t^2}dt, \; \sqrt{x^2+a} = \frac{t^2+a}{2t} : \tag{թ}$$

Տեղադրելով (թ) արտահայտություններից վերջին երկուսը տրված ինտեգրալի մեջ՝ կունենանք

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{\frac{t^2+a}{2t^2}}{\frac{t^2+a}{2t}}dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c :$$

Կատարելով փոփոխականի

---

*) Քննարկվող դեպքում կարող ենք կատարել նաև հետևյալ նշանակումը՝

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t+\sqrt{a}\,x : \tag{15'}$$

**) Համեմատի՛ր անորոշ ինտեգրալների հիմնական ցուցակի 14° բանաձևի հետ [35.14°]:

$$x = \frac{1}{t} \qquad (\text{ժ})$$

փոխարինումը [35,(11)] և օգտվելով (է) ինտեգրալի համար ստացած արտահայտությունից՝ կարող ենք հեշտությամբ հաշվել նաև հետևյալ ինտեգրալը.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+b}}:$$

ե) *(11) եռանդամի ազատ անդամն ու տարբերիչը դրական են.*

$$c>0\,,\ D>0:$$

Կատարելով

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c} \qquad (17)$$

նշանակումը*) և (17) հավասարության երկու կողմերը բարձրացնելով քառակուսի՝ կստանանք

$$ax^2+bx+c = \left(xt+\sqrt{c}\right)^2$$

կամ

$$ax^2+bx = x^2t^2+2\sqrt{c}tx$$

հավասարությունը, որտեղից կունենանք

$$x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},\quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{\left(a-t^2\right)^2}dt: \qquad (18)$$

Տեղադրելով (18) արտահայտությունները (10) ինտեգրալի մեջ՝ քննարկվող դեպքում էլ խնդիրը կբերենք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման:

Նշենք, որ (13), (15) և (17) նշանակումները կոչվում են էյլերի նշանակումներ:

Ամփոփելով գրոյից տարբեր տարբերիչ ունեցող քառակուսի եռանդամ պարունակող (10) ինտեգրալի հետ կապված քննարկումը՝ եզրակացնում ենք, որ նրա ենթինտեգրալ ֆունկցիան ռացիոնալացնելու համար $D>0$ *դեպքում անհրաժեշտ է օգտվել էյլերի (13) կամ (13′) նշանակումից,* $c>0$, $D>0$ *դեպքում՝ (13) կամ (17) ((13′) կամ (17′)) նշանակումներից, իսկ* $a>0$ *դեպքում՝ (15) կամ (15′) նշանակումից:*

Այժմ դիտարկենք եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող որոշակի արտահայտությունների ինտեգրալներ և ցույց տանք, որ այդ ինտեգրալների հաշվումը նույնպես կարելի է հանգեցնել ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման:

I. *Դիտարկենք*

$$\int R(\sin x,\cos x)dx \qquad (19)$$

---

*) Քննարկվող դեպքում կարող ենք կատարել նաև

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c} \qquad (17')$$

նշանակումը:

ինտեգրալը, որտեղ R-ը, ինչպես գիտենք, իր արգումենտների նկատմամբ ռացիոնալ ֆունկցիա է:

Օգտվելով եռանկյունաչափությունից հայտնի

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

բանաձևերից և կատարելով

$$t=tg\frac{x}{2} \tag{20}$$

նշանակումը՝ կունենանք

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}: \tag{21}$$

(21) արտահայտությունները տեղադրելով (19) ինտեգրալի մեջ՝ կստանանք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրալ.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}: \tag{22}$$

Օրինակ 5: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx: \tag{ի}$$

Լուծում: Կատարելով (20) նշանակումը և (21) արտահայտությունները տեղադրելով (ի) ինտեգրալի մեջ՝ կունենանք [38,p1]

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\int\frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=4\int\frac{t^2-t+1}{(t^2+3)(t^2+1)}dt=4\left(\int\frac{at+b}{t^2+3}dt+\int\frac{et+d}{t^2+1}dt\right),$$

որտեղ a-ն, b-ն, e-ն և d-ն որոշման ենթակա հաստատուններ են:

Անորոշ գործակիցների մեթոդով [38] գտնելով նշված հաստատունները.

$$a=\frac{1}{2},\ b=1,\ e=-\frac{1}{2},\ d=0,$$

դիտարկվող ինտեգրալի համար վերջնականապես կստանանք

$$\int\frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx=\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right)+c:$$

II. Հաշվի առնելով, որ $t=tgx/2$ նշանակումը հնարավորություն է տալիս ինտեգրելու $R(\sin x,\cos x)$ տեսքի ցանկացած ֆունկցիա՝ այդ նշանակումը անվանում են եռանկյունաչափական համապիտանի (ունիվերսալ) նշանակում: Սակայն, նկատի ունենալով, որ (20) նշանակումը երբեմն բերում է բավականաչափ բարդ ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրման՝ կօգտագործենք նաև այլ նշանակումներ, որոնք ոչ քիչ դեպքերում ավելի արագ են հասցնում արդյունքի:

Ծանոթանանք այդպիսի մի քանի նշանակումների հետ:

ա) *Հաշվել*

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx \tag{23}$$

ինտեգրալը:

Օգտվելով

$$\cos x\,dx = d\sin x$$

հավասարությունից և կատարելով

$$\sin x = t \tag{24}$$

նշանակումը՝ (23) ինտեգրալի հաշվումը կհանգեցնենք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման.

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx = \int R(\sin x)\,d\sin x = \int R(t)\,dt:$$

Հասկանալի է, որ նույն եղանակով կարող ենք հաշվել նաև

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx \tag{25}$$

ինտեգրալը:

Օրինակ 6: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx:$$

Լուծում: Կատարելով $\cos x = t$ նշանակումը $(-1\le t\le 1)$, կունենանք

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{2+\cos x}dx = \int\frac{\cos^2 x-1}{2+\cos x}d\cos x = \int\frac{t^2-1}{t+2}dt =$$
$$\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt = \frac{t^2}{2}-2t+3\ln(t+2)+c = \frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(2+\cos x)+c:$$

բ) *Դիցուք ենթինտեգրալ ֆունկցիան կախված է միայն tgx -ից.*

$$\int R(tgx)dx: \tag{26}$$

Կատարելով

$$tgx = t \tag{27}$$

նշանակումը՝ կստանանք

$$x = arctg\,t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}, \tag{28}$$

այսինքն (26) ինտեգրալի հաշվման խնդիրը նույնպես բերվում է ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման:

Օրինակ 7: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{dx}{1+tgx}:$$

Լուծում: Կատարելով (27) նշանակումը և նկատի ունենալով (28) առնչությունները, կունենանք [38,(8)]

$$\int\frac{dx}{1+tgx}=\int\frac{1}{1+t}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{a}{1+t}dt+\int\frac{bt+e}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{dt}{1+t}-\int\frac{t-1}{1+t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t|-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+arctg\,t\right]+c=\frac{1}{2}\left[x+\ln|\sin x+\cos x|\right]+c\,:$$

գ) *Այժմ ենթադրենք (19) ինտեգրալի ենթաինտեգրալ ֆունկցիայի մեջ ինչպես $\sin x$-ը, այնպես էլ $\cos x$-ը մասնակցում են զույգ աստիճաններով:*

Կատարելով (27) նշանակումը և նկատի ունենալով

$$\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \tag{29}$$

առնչությունները՝ դիտարկվող ինտեգրալի հաշվումն էլ կհանգեցնենք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման:

Օրինակ 8: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}\,:$$

Լուծում: Կատարելով (27) նշանակումը և օգտվելով (29) հավասարություններից առաջինից և երրորդից՝ կունենանք

$$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=\int\frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)}=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+c=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right)+c\,:$$

դ) *Դիտարկենք նաև*

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx \tag{30}$$

ինտեգրալը, որտեղ m-ը և n-ը կամայական բնական թվեր են և քննարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1) *m և n թվերից գոնե մեկը կենտ է:*

Դիցուք $n=2k+1$, որտեղ k-ն բնական թիվ է:

Կատարելով

$$\int\sin^m x\cos^{2k+1}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{2k}x\cos x\,dx=\int\sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x$$

ձևափոխությունները և օգտվելով (24) նշանակումից՝ քննարկվող դեպքում (30) ինտեգրալի հաշվումը կբերենք ռացիոնալ ֆունկցիայի ինտեգրման.

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^m x\cos^{2k+1}x\,dx=\int t^m\left(1-t^2\right)^k dt\,:$$

Օրինակ 9: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx\,:$$

Լուծում: Կատարելով (24) նշանակումը՝ կունենանք

$$\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx=\int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x=\int\left(t^2-t^4\right)dt=\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+c\,:$$

2) *m -ը և n -ը զույգ թվեր են:*

Դիցուք $m=2p$, $n=2k$, որտեղ p-ն և k-ն բնական թվեր են:

Օգտվելով եռանկյունաչափական ֆունկցիաների կարգն իջեցնող

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x) \tag{31}$$

բանաձևերից՝ կստանանք

$$\int\sin^{2p}x\cos^{2k}x\,dx=\frac{1}{2^{p+k}}\int(1-\cos 2x)^p(1+\cos 2x)^k\,dx: \tag{32}$$

Բացելով ստացված ենթինտեգրալ արտահայտության փակագծերը և միացնելով նման անդամները՝ կստանանք մի գումար, որի մեջ $\cos 2x$-ը մասնակցում է զույգ կամ կենտ աստիճաններով: $\cos 2x$-ի կենտ աստիճաններ պարունակող անդամները կինտեգրենք այնպես, ինչպես նկարագրվեց 1) դեպքում, իսկ զույգ աստիճաններ պարունակող անդամները ինտեգրելու համար նորից կօգտվենք $\cos^2 x$-ի կարգն իջեցնող բանաձևից: Այդպես շարունակելով՝ ի վերջո կհասնենք

$$\int\cos lx\,dx$$

տեսքի պարզագույն ինտեգրալների հաշվմանը [35,9°], որտեղ l-ը բնական թիվ է:

Ինչպես տեսնում ենք, եթե (30) ինտեգրալում m-ը և n-ը զույգ թվեր են, ապա այդ ինտեգրալը կարելի է հաշվել ինչպե՛ս (27) նշանակման օգնությամբ, այնպե՛ս էլ վերևում նկարագրված եղանակով:

Օրինակ 10: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int\sin^2 x\,dx:$$

Լուծում: Օգտվելով (31) բանաձևերից առաջինից՝ կստանանք

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+c:$$

ե) *Վերջում դիտարկենք նաև*

$$\int\cos mx\cos nx\,dx,\quad \int\sin mx\cos nx\,dx,\quad \int\sin mx\sin nx\,dx\quad (|m|\neq|n|) \tag{33}$$

ինտեգրալները:

Բերված ինտեգրալները հաշվելու համար կօգտվենք

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x],$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x], \tag{34}$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x]$$

բանաձևերից:

Օրինակ 11: Հաշվել (33) ինտեգրալներից երկրորդը:

Լուծում: Ունենք [35,8°]

$$\int \sin mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(m-n)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(m+n)x\,dx = c - \frac{\cos(m-n)}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}:$$

§40. Խնդիր, որը հանգեցնում է որոշյալ ինտեգրալի հասկացությանը: Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը, գոյության թեորեմը և հիմնական հատկությունները:

Մաթեմատիկական անալիզի հիմնական հասկացություններից մեկն էլ որոշյալ ինտեգրալի հասկացությունն է:

Մաթեմատիկայում, ֆիզիկայում, մեխանիկայում և մի շարք այլ բնագավառներում գոյություն ունեն բազմաթիվ խնդիրներ, որոնց լուծումը կապված է որոշյալ ինտեգրալի հետ:

Ծանոթանանք այդպիսի խնդիրներից մեկի հետ.

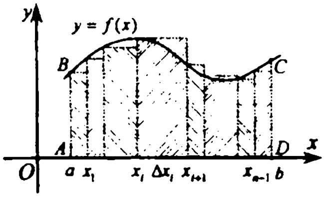
Ենթադրելով, որ $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ՝ դնենք $x=a$, $x=b$ ուղիղներով, ox առանցքով և տրված ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսը գտնելու խնդիրը:

Չևակերպած խնդիրը լուծելու համար $[a,b]$ միջակայքը (Նկ.67) կամայական ձևով.

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b \qquad (1)$$

տրոհենք տարրական միջակայքերի, i-րդ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ տարրական միջակայքի երկարությունը նշանակենք Δx_i-ով.

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$



Նկ.67

և $x=x_i$ ուղիղներով $ABCD$ կորագիծ սեղանը տրոհենք n տարրական կորագիծ սեղանների: Այնուհետև i-րդ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ տարրական սեղանը փոխարինենք այն ուղղանկյունով, որի հիմքը հավասար է Δx_i-ի, իսկ բարձրությունը՝ $f(x_i)$-ի:

Հասկանալի է, որ գումարելով ստացված բոլոր տարրական ուղղանկյունների մակերեսները՝ մոտավորապես կստանանք $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսը.

$$S_{ABCD} \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i: \qquad (2)$$

Պարզ է նաև, որ $[a.b]$ միջակայքը որքան մեծ թվով մասերի բաժանենք, այնքան (2) մոտավորության մեջ թույլ տրված սխալը կփոքրանա:

Այսպիսով, դիտարկվող կորագիծ սեղանի մակերեսի ճշգրիտ արժեքի համար կունենանք

$$S_{aBCD} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i , \qquad (2')$$

որտեղ

$$\lambda = \max_{0\le i\le n-1}\Delta x_i :$$

Անցնելով ընդհանուր դեպքի քննարկմանը՝ ենթադրենք $[a,b]$ փակ միջակայքում որոշված է $y=f(x)$ ֆունկցիան:

Նորից բաժանման կետերով դիտարկվող միջակայքը կամայական ձևով տրոհենք վերջավոր թվով $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ տարրական միջակայքերի և այդ միջակայքերի երկարությունները համապատասխանաբար նշանակենք Δx_0-ով, Δx_1-ով,..., Δx_{n-1}-ով: Այնուհետև i-րդ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ միջակայքի սահմաններում վերցնենք կամայական ξ_i կետ, $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքը վերցրած կետում բազմապատկենք այդ միջակայքի երկարությամբ և կազմենք

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

գումարը:

Սահմանում 1: *(3) գումարը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումար $[a,b]$ միջակայքում:*

Սահմանում 2: *Կասենք, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս (3) գումարն ունի (վերջավոր) I սահման, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց $\lambda<\delta$, այսինքն հենց $[a,b]$ միջակայքը կամայական ձևով տրոհենք δ-ից փոքր երկարություն ունեցող տարրական միջակայքերի, ապա անկախ Δx_i միջակայքերում ξ_i կետերի ընտրությունից, տեղի կունենա*

$$|\sigma_n - I| < \varepsilon \qquad (4)$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 3: *λ-ն զրոյի ձգտելիս σ_n գումարի վերջավոր I սահմանը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալ a-ից մինչև b սահմաններում*) և նշանակվում է*

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (5)$$

պայմանանշանով:

---

*) Այսուհետև խոսելով a-ից մինչև b սահմաններում տարածված որոշյալ ինտեգրալի մասին՝ մենք կհամարենք, որ $a<b$:

Օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից և (2′) հավասարությունից՝ վերևում դիտարկված կորագիծ սեղանի մակերեսը կարտահայտենք

$$S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx \qquad (2'')$$

ինտեգրալի միջոցով:

Սահմանում 4: *(5) ինտեգրալի գոյության դեպքում $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի $[a,b]$ միջակայքում, $[a,b]$ միջակայքը կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի ինտեգրման տիրույթ, a -ն՝ (5) ինտեգրալի ստորին սահման, b -ն՝ վերին սահման:*

Նկատենք, որ ինտեգրելի ֆունկցիան անհրաժեշտաբար պետք է լինի սահմանափակ ինտեգրման միջակայքում:

Իրոք, եթե $f(x)$ ինտեգրելի ֆունկցիան $[a,b]$ միջակայքում, օրինակ, վերևից սահմանափակ չէ, ապա ինչպես էլ այդ միջակայքը տրոհենք տարրական միջակայքերի, ստացված միջակայքերից առնվազն մեկում $f(x)$ ֆունկցիան կլինի վերևից անսահմանափակ: Այդ դեպքում համապատասխան միջակայքում ξ_i կետի ընտրության հաշվին $f(\xi_i)$-ն և հետևաբար նաև σ_n գումարը կարելի է դարձնել ցանկացած դրական թվից մեծ, որտեղից հետևում է, որ կատարված ենթադրության դեպքում σ_n գումարը վերջավոր սահման ունենալ չի կարող, այսինքն $f(x)$ ֆունկցիան $[a,b]$ միջակայքում ինտեգրելի չէ:

Ստացված հակասությունն ապացուցում է ձևակերպված պնդումը:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը՝ այս պարագրաֆում կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաներ:

Այժմ $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը [19,Ս32] համապատասխանաբար նշանակենք m_i -ով ու M_i -ով և կազմենք

$$\underline{s}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i,\quad \overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i \qquad (6)$$

գումարները:

Սահմանում 5: $\underline{s}$ *և* $\overline{S}$ *գումարները կոչվում են $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներ:*

Պարզ է, որ եթե $f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է $[a,b]$ միջակայքում, ապա տրված տրոհման դեպքում (6) գումարներն իրենցից կներկայացնեն այդ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն ինտեգրալ գումարները:

Անցնելով ընդհանուր դեպքին, թվային բազմության ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերի սահմանման համաձայն կունենանք

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i \qquad (i=0,1,\dots,n-1): \qquad (7)$$

(7) կրկնակի անհավասարությունների անդամները բազմապատկելով Δx_i-ով և ստացված անհավասարություններն անդամ առ անդամ գումարելով իրար՝ կստանանք

$$\underline{s} \le \sigma_n \le \overline{S}: \qquad (8)$$

Ինչպես տեսնում ենք, տրված տրոհման դեպքում $\underline{s}$-ը և $\overline{S}$-ը հաստատուններ են, իսկ σ_n-ը՝ փոփոխական (քանի որ այն կախված է ξ_i կետերի ընտրությունից):

Հարց է ծագում. որո՞նք են որոշյալ ինտեգրալի գոյության պայմանները, այսինքն ինչպիսի՞ պայմանների պետք է բավարարի $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան, որպեսզի այն լինի ինտեգրելի այդ միջակայքում:

Հետևյալ թեորեմը, որը բերում ենք առանց ապացույցի, տալիս է ձևակերպված հարցի պատասխանը՝

Թեորեմ 1: *$[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S}-\underline{s}\right)=0, \qquad (9)$$

որտեղ $\underline{s}$-ը և $\overline{S}$-ը այդ ֆունկցիայի Դարբուի համապատասխանաբար ստորին և վերին ինտեգրալ գումարներն են տրված միջակայքում:

*$M_i - m_i$ տարբերությունը նշանակելով ω_i-ով**)

$$M_i - m_i = \omega_i \qquad (i=0,1,\dots,n-1)$$

և օգտվելով (6) նշանակումներից՝ կարող ենք $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը ներկայացնել

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0 \qquad (9')$$

տեսքով:

Առանց ապացույցի բերենք նաև հետևյալ կարևոր թեորեմները՝

Թեորեմ 2: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է այդ միջակայքում:*

Թեորեմ 3: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $[a,b]$ միջակայքում և ունի վերջավոր թվով խզման կետեր, ապա այն ինտեգրելի է նշված միջակայքում:*

---

*) ω_i-ն կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի տատանում i-րդ միջակայքում:

Թեորեմ 4: *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան մոնոտոն է և սահմանափակ $[a,b]$ միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է այդ միջակայքում:*

Այժմ, ենթադրելով, որ դիտարկվող ֆունկցիաները ինտեգրելի են տրված միջակայքերում, անցնենք այդ ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալների հատկությունների հետ ծանոթանալուն:

1°. *Հաստատուն արտադրիչը կարելի է դուրս բերել որոշյալ ինտեգրալի նշանի տակից.*

$$\int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad (c = const): \tag{10}$$

Ապացույց: Օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից՝ կստանանք [21,(5′′)]

$$\int_a^b c\,f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} c\,f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b c\,f(x)dx:$$

Իպա

2°. *Վերջավոր թվով ֆունկցիաների գումարի որոշյալ ինտեգրալը $[a,b]$ միջակայքում հավասար է տրված ֆունկցիաների որոշյալ ինտեգրալների գումարին՝ նշված միջակայքում.*

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_k(x)dx: \tag{11}$$

Ապացույց: Ունենք [21,բ1]

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f_1(\xi_i)+f_2(\xi_i)+\cdots+f_k(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\Delta x_i + \cdots + \sum_{i=0}^{n-1} f_k(\xi_i)\Delta x_i\right] = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i)\Delta x_i + \cdots + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f_k(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_k(x)dx:$$

Իպա

3°. *Եթե ինտեգրման $[a,b]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի*

$$f(x) \le g(x)$$

անհավասարությունը, ապա տեղի ունի նաև

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx \tag{12}$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Օգտվելով (11) բանաձևից և որոշյալ ինտեգրալի սահմանումից՝ կստանանք

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)-g(\xi_i)]\Delta x_i: \tag{13}$$

Քանի որ i-ի ցանկացած արժեքի համար $\Delta x_i > 0$ և ըստ պայմանի տեղի ունի

$$f(\xi_i) - g(\xi_i) \leq 0$$

անհավասարությունը, ուստի (13) հավասարությունների աջ մասում մասնակցող գումարի գումարելիները դրական չեն: Հետևաբար, դրական չէ նաև այդ գումարը, որտեղից հետևում է, որ λ-ն զրոյի ձգտելիս նշված գումարի սահմանն էլ դրական չէ [20,թ1]:

Վերոգրյալից և (13) հավասարություններից կունենանք

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0,$$

որտեղից կստանանք (12) անհավասարությունը:

Իսկ

Հետևանք 1: $[a,b]$ *միջակայքում ոչ բացասական արժեքներ ընդունող ֆունկցիայի որոշյալ ինտեգրալն a-ից մինչև b սահմաններում ոչ բացասական մեծություն է.*

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0, \text{ եթե } g(x) \geq 0 \text{ երբ } x \in [a,b]: \tag{14}$$

Ապացույց: Չևակերպած պնդումն ապացուցելու համար բավական է որոշյալ ինտեգրալի նախորդ հատկության մեջ ընդունել, որ $[a,b]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի:

Իսկ

4°. *Հաստատունի ինտեգրալն a-ից մինչև b սահմաններում հավասար է այդ հաստատունի և ինտեգրման միջակայքի երկարության արտադրյալին.*

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \qquad (c = const): \tag{15}$$

Ապացույց: Ունենք

$$\int_a^b c\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} c\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0} c\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = c\lim_{\lambda\to 0}(b-a) = c(b-a):$$

Իսկ

5°. *Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն $[a,b]$ միջակայքում համապատասխանաբար հավասար են m-ի և M-ի, ապա տեղի ունի*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \tag{16}$$

գնահատականը:

Ապացույց: Օգտվելով

$$m \le f(x) \le M$$

անհավասարություններից և որոշյալ ինտեգրալի երրորդ հատկությունից՝ կստանանք

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx:$$

Որոշյալ ինտեգրալի չորրորդ հատկության շնորհիվ ստացված անհավասարությունները կընդունեն (16) տեսքը:

Իսպ

6°. ***Եթե*** $y=f(x)$ ***ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն*** $[a,b]$ ***միջակայքում համապատասխանաբար հավասար են*** m ***-ի և*** M ***-ի, ապա տեղի ունի***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a) \tag{17}$$

հավասարությունը, որտեղ $m \le \mu \le M$:*)

Ապացույց: Դիցուք m-ն ու M-ը $f(x)$ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են $[a,b]$ միջակայքում: Այդ դեպքում (16) անհավասարություններից կստանանք

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

կամ

$$m \le \mu \le M$$

անհավասարությունները, որտեղ

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx: \tag{18}$$

Պնդման ապացույցն ավարտելու համար մնում է (18) նշանակման մեջ ազատվել կոտորակից:

Իսպ

Նկատի ունենալով, որ փակ միջակայքում անընդհատ ֆունկցիան ստանում է ինչպե՛ս իր փոքրագույն և մեծագույն արժեքները, այնպե՛ս էլ այդ արժեքների միջև ընկած մնացած բոլոր արժեքները **[25,թ3,թ5]**, եզրակացնում ենք, որ $[a,b]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիայի պարագայում դիտարկվող միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 արժեք, որ (18) նշանակումը և հետևաբար (17) հավասարությունը համապատասխանաբար ընդունում են

---

*) Որոշյալ ինտեգրալի բերված հատկությունը կոչվում է այդ ինտեգրալի միջին արժեքի հատկություն:

$$f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{18'}$$

և

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(x_0) \tag{17'}$$

տեսքը:

Այսպիսով, եթե $y=f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում, ապա այդ միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 արժեք, որ տեղի ունի (17') հավասարությունը:

7°. $[a,b]$ միջակայքում ինտեգրելի $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է նաև $[b,a]$ միջակայքում, ընդ որում տեղի ունի

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \tag{19}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Պնդումն ապացուցելու համար $[a,b]$ և $[b,a]$ միջակայքերը միևնույն կետերով տրոհենք տարրական միջակայքերի և այդ տարրական միջակայքերում վերցնենք միևնույն ξ_i կետերը: Քանի որ ստացված ինտեգրալ գումարները միմյանցից միայն նշանով են տարբերվում, ուստի այդ գումարներում անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի՝ կստանանք (19) բանաձևը:

Իսպա

8°. Եթե c-ն ընկած է a և b թվերի միջև և գոյություն ունի

$$\int_a^b f(x)dx$$

ինտեգրալը, ապա գոյություն ունեն նաև

$$\int_a^c f(x)dx,\quad \int_c^b f(x)dx$$

ինտեգրալները և տեղի ունի

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \tag{20}$$

հավասարությունը:

Ապացույց: Չևակերպած հատկությունն ապացուցելու համար $[a,b]$ միջակայքն այնպես տրոհենք տարրական միջակայքերի, որ c-ն լինի տրոհման կետերից մեկը: Ակնհայտ է, որ այդ դեպքում կունենանք

$$\sum_a^b \omega_i\Delta x_i=\sum_a^c \omega_i\Delta x_i+\sum_c^b \omega_i\Delta x_i\,, \tag{21}$$

$$\sum_{a}^{b} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{a}^{c} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{c}^{b} f(\xi_i)\Delta x_i\,, \tag{22}$$

որտեղ $\sum\limits_{c}^{b}, \sum\limits_{a}^{c}$ և $\sum\limits_{c}^{b}$ պայմանանշանները համապատասխանաբար նշանակում են գումարում ըստ $[a,b]$, $[a,c]$ և $[c,b]$ միջակայքերի, իսկ ω_i-ն $f(x)$ ֆունկցիայի տատանումն է i-րդ միջակայքում $(i=0,1,\ldots,n-1)$:

Օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի գոյության (9′) պայմանից և (21) հավասարությունից՝ հեշտությամբ կհամոզվենք ձևակերպած պնդման առաջին մասի ճշմարտացիության մեջ:

Պնդման երկրորդ մասն ապացուցելու համար, այսինքն (20) բանաձևը ստանալու համար մնում է (22) հավասարության մեջ անցնել սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի:

Իպա

9°. *Եթե $f(x)$ և $|f(x)|$ ֆունկցիաներն ինտեգրելի են $[a,b]$ միջակայքում, ապա տեղի ունի*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \tag{23}$$

անհավասարությունը:

Ապացույց: Հետևյալ

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

ակնհայտ անհավասարությունների վրա կիրառելով որոշյալ ինտեգրալի երրորդ հատկությունը՝ կստանանք

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

կամ որ նույնն է՝ (23) անհավասարությունը:

Իպա

§41. Որոշյալ ինտեգրալը որպես վերին փոփոխական սահմանի ֆունկցիա: Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձևը: Փոփոխականի փոխարինում որոշյալ ինտեգրալում: Մասերով ինտեգրում:

Ենթադրենք $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է այդ միջակայքում [40,ս4] և դիտարկենք

$$\int_a^x f(t)dt \quad (a \le x \le b) \tag{1}$$

ինտեգրալը,*) որի ստորին սահմանը հաստատուն է, իսկ վերին սահմանը՝ փոփոխական:

---

*) Նկատի ունենալով, որ որոշյալ ինտեգրալի մեծությունը կախված չէ ինտեգրման փոփոխականի ընտրությունից՝ հնարավոր շփոթմունքից խուսափելու նպատակով, (1) ինտեգրալում այն նշանակեցինք t-ով:

Յասկանալի է, որ (1) ինտեգրալի արժեքը կախված է x-ից, ինչը նշանակում է, որ այն ֆունկցիա է x-ից: Նշանակելով այդ ֆունկցիան $\Phi(x)$-ով՝ կունենանք

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt: \tag{1'}$$

Պարզվում է՝ $\Phi(x)$ ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1°. *Եթե $f(x)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է $[a,b]$ միջակայքում, ապա $\Phi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է նույն միջակայքում:*

Ապացույց: Չևակերպած հատկությունն ապացուցելու համար $[a,b]$ միջակայքում վերցնենք x-ի որևէ x_0 արժեք և այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $x_0+\Delta x$-ը դուրս չգա դիտարկվող միջակայքի սահմաններից: Օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի 8-րդ հատկությունից [40,8°], կստանանք

$$\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt: \tag{2}$$

Օգտվելով (1′) նշանակումից՝ կարող ենք (2) հավասարությունը ներկայացնել

$$\Phi(x_0+\Delta x)=\Phi(x_0)+\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

կամ

$$\Delta\Phi(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

տեսքով, որտեղ

$$\Delta\Phi(x_0)=\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0):$$

Յաշվի առնելով, որ ինտեգրելի ֆունկցիան պետք է լինի սահմանափակ ինտեգրման միջակայքում [40].

$$m\le f(x)\le M \quad (m,M=const)$$

և վերջին ինտեգրալի վրա կիրառելով որոշյալ ինտեգրալի միջին արժեքի հատկությունը [40,6°], կունենանք

$$\Delta\Phi(x_0)=\mu\Delta x, \tag{3}$$

որտեղ $m\le m^*\le\mu\le M^*\le M$, իսկ m^*-ը և M^*-ը դիտարկվող ֆունկցիայի համապատասխանաբար ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերն են $[x_0,x_0+\Delta x]$ միջակայքում [18,ս32]:

Ստացված հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի՝ կստանանք [23,բ3]

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\Phi(x_0)=0: \tag{4}$$

Ինչպես գիտենք, (4) հավասարությունը նշանակում է, որ $\Phi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքի x_0 կետում [24,(5)]: Քանի որ x_0-ն $[a,b]$ միջակայքի կամայական կետ է, հետևաբար $\Phi(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում:

Իպա

2°. *Եթե $[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ միջակայքում, ապա տրված ֆունկցիայի (1) ինտեգրալի ածանցյալն ըստ վերին փոփոխական սահմանի հավասար է ենթինտեգրալ ֆունկցիայի արժեքին նշված սահմանում.*

$$\Phi'(x)=f(x): \tag{5}$$

Ապացույց: Պնդումն ապացուցելու համար նորից $[a,b]$ միջակայքում վերցնենք x_0-ի որևէ արժեք և այդ արժեքին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $x_0+\Delta x$-ը դուրս չգա դիտարկվող միջակայքի սահմաններից: Կրկնելով $\Phi(x)$ ֆունկցիայի առաջին հատկության ապացույցի մեջ բերված դատողությունները և հաշվի առնելով, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում՝ (3)-ի ч бЛ і с»Э Плп і Эі Эщ **[40,(17′)]**

$$\Delta\Phi(x_0)=\Delta x\, f(x_1) \tag{3'}$$

հավասարությունը, որտեղ x_1-ը պատկանում է $[x_0, x_0+\Delta x]$ միջակայքին: Այնուհետև (3′) հավասարության երկու կողմերը բաժանենք Δx-ի վրա և նկատի ունենալով, որ $f(x)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b]$ միջակայքում՝ ստացված հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ Δx-ը ձգտում է զրոյի: Արդյունքում, հաշվի առնելով, որ $x_0 \le x_1 \le x_0+\Delta x$, կունենանք **[22,p3]**

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(x_1)=\lim_{x_1\to x_0} f(x_1)=f(x_0)$$

կամ

$$\Phi'(x_0)=f(x_0):$$

Քանի որ x_0-ն $[a,b]$ միջակայքի կամայական կետ է, հետևաբար ստացված հավասարությունը տեղի ունի այդ միջակայքի բոլոր կետերում:

Իպա

Այսպիսով, հանգում ենք հետևյալ կարևոր եզրակացությանը՝ եթե $f(x)$-ն $[a,b]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է, ապա (1) ինտեգրալը այդ ֆունկցիայի նախնական է:

Այժմ անցնենք ինտեգրալ հաշվի հիմնական արդյունքներից մեկի՝ Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձևի արտածմանը:

Թեորեմ 1: *Եթե $[a,b]$ միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի որևէ նախնական է, ապա տեղի ունի*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{6}$$

բանաձևը:

Ապացույց: Դիցուք $[a,b]$ միջակայքում $F(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի որևէ նախնական է:

Քանի որ (1′) բանաձևով տրվող $\Phi(x)$ ֆունկցիան նույնպես $f(x)$-ի նախնական է նշված միջակայքում, ուստի $F(x)$ և $\Phi(x)$ ֆունկցիաները միմյանցից տարբերվում են հաստատունով [35,թ1].

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + c \quad (c = const): \tag{7}$$

Վերջին հավասարության մեջ ընդունելով $x = a$, կստանանք

$$c = -F(a):$$

c հաստատունի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (7) հավասարության մեջ՝ կունենանք

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a): \tag{8}$$

Պահանջվող բանաձևը ստանալու համար մնում է (8) հավասարության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրել b և ինտեգրման փոփոխականը փոխարինել x-ով:

Իսպա

Նշենք, որ (6) բանաձևը կոչվում է ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձև կամ Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձև:

Ապացուցենք, որ $F(b) - F(a)$ տարբերությունը կախված չէ $[a,b]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիայի նախնականի ընտրությունից:

Իրոք, դիցուք $F_1(x)$ ֆունկցիան $f(x)$ ֆունկցիայի $F(x)$ նախնականից տարբեր մեկ այլ նախնական է:

Այդ դեպքում, ինչպես գիտենք, նշված ֆունկցիաները միմյանցից տարբերվում են հաստատունով.

$$F_1(x) = F(x) + c \qquad (c = const),$$

որտեղից հետևում է, որ

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + c - [F(a) + c] = F(b) - F(a):$$

Իսպա

$F(b) - F(a)$ տարբերությունը նշանակելով $F(x)\Big|_a^b$ -ով՝ (6) բանաձևին կտանք հետևյալ տեսքը՝

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b : \qquad (6')$$

Ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևն ունի գործնական մեծ նշանակություն. այդ բանաձևի օգնությամբ կարելի է հաշվել այն որոշյալ ինտեգրալները, որոնց ենթինտեգրալ ֆունկցիաների նախնականներն արտահայտվում են վերջավոր թվով տարրական ֆունկցիաների գումարով:

Նյուտոն-Լեյբնիցի բանաձևը հնարավորություն է տալիս որոշյալ ինտեգրալի նշանի տակ կատարել փոփոխականի փոխարինում:

Դիցուք պահանջվում է հաշվել

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (9)$$

ինտեգրալը, որտեղ $f(x)$-ը $[a,b]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Թեորեմ 2: *Եթե* $x = x(t)$ *ֆունկցիան.*

ա) *որոշված է և անընդհատ մի որևէ* $[\alpha,\beta]$ *միջակայքում,*

բ) t *-ն* α *-ից մինչև* β *սահմաններում փոփոխվելիս այդ ֆունկցիայի արժեքները դուրս չեն գալիս* $[a,b]$ *միջակայքի սահմաններից,*

գ) $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b,$ (10)

դ) $[\alpha,\beta]$ *միջակայքում գոյություն ունի* $x'(t)$ *անընդհատ ածանցյալ, ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]\,x'(t)\,dt : \qquad (11)$$

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք $F(x)$-ը $f(x)$ ֆունկցիայի որևէ նախնական է և ցույց տանք, որ $F[x(t)]$-ն էլ $f[x(t)]x'(t)$ ֆունկցիայի նախնական է:

Իրոք, օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևից **[28,(15')]**, կստանանք

$$\frac{d}{dt}F[x(t)] = F'_x[x(t)]x'(t) = f[x(t)]x'(t) :$$

Այնուհետև նկատի ունենալով վերոգրյալը և օգտվելով (10) պայմանից՝ կունենանք

$$\int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)dt = F[x(t)]\Big|_\alpha^\beta$$

կամ

$$\int_a^b f[x(t)]x'(t)dt = F(b) - F(a): \qquad (12)$$

Պահանջվող հավասարությունն ապացուցելու համար մնում է օգտվել (6) բանաձևից:

Իսպ

Ինչպես գիտենք, անորոշ ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի փոխարինում և հաշվելով փոխարինումից հետո ստացված ինտեգրալը՝ վերջում վերադառնում ենք սկզբնական փոփոխականին [35]: Որոշյալ ինտեգրալի պարագայում սկզբնական փոփոխականին վերադառնալու անհրաժեշտությունը չկա, քանի որ հաշվելով (11) հավասարության աջ մասի ինտեգրալը, դրանով իսկ հաշվում ենք այդ հավասարության ձախ մասի ինտեգրալը:

Վերջում ծանոթանանք մասերով ինտեգրման բանաձևի հետ:

Դիցուք $u(x)$-ն ու $v(x)$-ը $[a,b]$ միջակայքում որոշված ածանցելի ֆունկցիաներ են [27,ս2]:

Ինչպես գիտենք, տրված ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալն արտահայտվում է

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \qquad (13)$$

բանաձևով [28,(2)]:

(13) նույնության երկու կողմերն ինտեգրելով a-ից մինչև b սահմաններում, կստանանք

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b v'(x)u(x)dx: \qquad (14)$$

Հաշվի առնելով, որ

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b, \quad u'(x)dx = d\,u(x), \quad v'(x)dx = d\,v(x),$$

(14) հավասարությունը կներկայացնենք

$$[u(x)v(x)]\Big|_a^b = \int_a^b v(x)d\,u(x) + \int_a^b u(x)d\,v(x)$$

կամ որ նույնն է՝

$$\int_a^b u(x)d\,v(x) = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)d\,u(x) \qquad (15)$$

տեսքով:

Ստացված բանաձևը կոչվում է մասերով ինտեգրման բանաձև որոշյալ ինտեգրալում:

Հասկանալի է, որ (15) բանաձևից կօգտվենք այն դեպքերում, երբ այդ բանաձևի աջ կողմում գրված ինտեգրալն ավելի հեշտ է հաշվվում, քան՝ նրա ձախ կողմում գրվածը:

Օրինակ 1: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալները՝

ա) $\int_a^b \frac{dx}{x} \quad (a>0)$, բ) $\int_a^b \cos x\,dx$:

Լուծում: Ունենք [35,4°,9°]

ա) $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}$: բ) $\int_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$:

Օրինակ 2: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0):$$

Լուծում: Կատարելով փոփոխականի $x = a\sin t$ փոխարինում՝ կստանանք [35,օ3]

$$dx = a\cos t\,dt,\ \text{երբ}\ x=-a,\ t=-\frac{\pi}{2},\ \text{երբ}\ x=a,\ t=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}:$$

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx:$$

Լուծում: Օգտվելով մասերով ինտեգրման բանաձևից, կունենանք [35]

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1}x\,d\ln(x+1) = e-1-\int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx = e-1-x\Big|_0^{e-1}+\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}=1:$$

§42. Առաջին և երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալներ և նրանց զուգամիտության հայտանիշները:

Մինչև հիմա մեր կողմից դիտարկված որոշյալ ինտեգրալների ենթինտեգրալ ֆունկցիաները եղել են սահմանափակ [22,ս11], իսկ ինտեգրման միջակայքերը՝ վերջավոր: Այս պարագրաֆում որոշյալ ինտեգրալի հասկացությունը երկու ուղղությամբ կընդհանրացնենք. նախ կդիտարկենք ինտեգրալներ, որոնց ինտեգրման միջակայքերն են անվերջ, այնուհետև՝ ինտեգրալներ, որոնց ենթինտեգրալ ֆունկցիաներն են անսահմանափակ:

Ենթադրենք $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է $[a,+\infty)$ միջակայքում և ինտեգրելի է այդ միջակայքի ցանկացած $[a,b]$ վերջավոր մասում: Այսինքն ենթադրենք ցանկացած b-ի համար, որը մեծ է a-ից, գոյություն ունի

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

ինտեգրալը:

Սահմանում 1: *(1) ինտեգրալի վերջավոր կամ անվերջ սահմանը, երբ b -ն ձգտում է պլյուս անսահմանության*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{2}$$

կոչվում է $f(x)$ ֆունկցիայի առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալ a -ից մինչև պլյուս անվերջ սահմաններում և նշանակվում է

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{2'}$$

պայմանանշանով:

Սահմանում 2: *Եթե (2) սահմանը վերջավոր է, ապա (2') անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ ինտեգրելի $[a,+\infty)$ միջակայքում: Իսկ եթե այդ սահմանը անվերջ մեծ է կամ ընդհանրապես գոյություն չունի, ապա (2) ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:*

Հասկանալի է, որ նույն ձևով սահմանվում են նաև

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{և} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \tag{3}$$

անիսկական ինտեգրալները.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx: \tag{4}$$

Ընտրելով կամայական (a,b) միջակայք, այդ միջակայքում վերցնելով ցանկացած c թիվ և օգտվելով որոշյալ ինտեգրալի 8-րդ հատկությունից [40,8°], (3) ինտեգրալներից երկրորդը կարող ենք սահմանել նաև

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

կամ որ նույնն է՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{5}$$

հավասարության միջոցով:

Այսպիսով, (3) ինտեգրալներից երկրորդը կարելի է սահմանել նաև (5) հավասարության միջոցով՝ ենթադրելով, որ այդ հավասարության աջ մասի ինտեգրալները գոյություն ունեն:

Օրինակ 1: Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}: \tag{ա}$$

Լուծում: Քանի որ

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

ֆունկցիան ինտեգրելի է ցանկացած $[0,b]$ $(b>0)$ վերջավոր միջակայքում [35,5°].

$$\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x\Big|_0^b = arctg\, b - arctg 0 = arctg\, b\ ,$$

հետևաբար, համաձայն առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալի սահմանման՝ (ա) ինտեգրալի համար կունենանք [27,6°գ)]

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} arctg\, b = \frac{\pi}{2}:$$

Ինչպես տեսնում ենք, (ա)-ն զուգամետ ինտեգրալ է:

Օրինակ 2՝ Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}: \tag{բ}$$

Լուծում: Դիտարկվող ինտեգրալը հաշվելու համար նախ, օգտվելով (5) բանաձևից, այն ներկայացնենք

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \tag{գ}$$

գումարի տեսքով:

(ա) ինտեգրալի նմանությամբ հաշվելով (գ) հավասարության աջ մասի առաջին ինտեգրալը՝ կստանանք

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}: \tag{դ}$$

(ա) և (դ) ինտեգրալների արժեքները տեղադրելով (գ) հավասարության մեջ՝ (բ) ինտեգրալի համար կունենանք

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi: \tag{ե}$$

Նկատենք, որ տրված ինտեգրալը կարելի է հաշվել նաև (4) հավասարություններից երկրորդի օգնությամբ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} arctg\, x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} arctg\, b - \lim_{a\to-\infty} arctg\, a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi:$$

Այժմ, առանց ապացույցի բերենք (2′) անիսկական ինտեգրալին վերաբերող մի քանի թեորեմներ:

Թեորեմ 1: ***Ցանկացած a և b $(b>a)$ թվերի համար (2′) ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է***

$$\int_b^{+\infty} f(x)dx$$

ինտեգրալի զուգամիտությունը և հակառակը՝ այդ ինտեգրալներից երկրորդի զուգամիտությունից հետևում է առաջինի զուգամիտությունը: Ընդ որում, տեղի ունի

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx \tag{5}$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 2: *(2′) ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է*

$$\lim_{b\to+\infty}\int_b^{+\infty} f(x)dx = 0 \tag{7}$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 3: *(2′) ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է*

$$\int_a^{+\infty} c\,f(x)dx \qquad (c = const)$$

ինտեգրալի զուգամիտությունը և

$$\int_a^{+\infty} c\,f(x)dx = c\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{8}$$

հավասարությունը:

Թեորեմ 4:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{և} \quad \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

ինտեգրալների զուգամիտությունից հետևում է

$$\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]\,dx$$

ինտեգրալների զուգամիտությունը և

$$\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{9}$$

հավասարությունը:

Նկատենք, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական (ոչ բացասական) արժեքներ, ապա (1) ինտեգրալն իրենից ներկայացնում է b փոփոխականի մոնոտոն աճող ֆունկցիա: Հետևաբար, օգտվելով մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի գոյությանը վերաբերող թեորեմից [22,p4], կարող ենք հեշտությամբ պարզել (1) ինտեգրալի զուգամիտության հարցը:

Թեորեմ 5: *Դիցուք $f(x)$-ը $[a,+\infty)$ միջակայքում որոշված դրական ֆունկցիա է:*) Այդ դեպքում որպեսզի (2′) անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (1) ինտեգրալը՝ որպես b փոփոխականի ֆունկցիա, լինի վերևից սահմանափակ, այսինքն գոյություն ունենա այնպիսի M հաստատուն, որ b-ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունենա*

$$\int_a^b f(x)dx \le M \tag{10}$$

անհավասարությունը:

---

*) *Կասենք, որ $f(x)$-ը X միջակայքում որոշված դրական ֆունկցիա է, եթե այն նշված միջակայքում ընդունում է միայն դրական արժեքներ:*

Թեորեմ 6: *Դիցուք $f(x)$-ը և $g(x)$-ը $[a,+\infty)$ միջակայքում որոշված և այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $f(x)\le g(x)$ պայմանին բավարարող դրական ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում*

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx \tag{11}$$

ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է (2′) ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ (2′) ինտեգրալի տարամիտությունից՝ (11) ինտեգրալի տարամիտությունը:

Օրինակ 3: Հետազոտել հետևյալ ինտեգրալի զուգամիտության հարցը՝

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}:$$

Լուծում: Ունենք [35,3°]

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{x}\bigg|_1^b = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right) = 1:$$

Մյուս կողմից, քանի որ մեկից ոչ փոքր x-երի համար ակնհայտորեն տեղի ունի

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

անհավասարությունը, հետևաբար, համաձայն թեորեմ 6-ի, դիտարկվող ինտեգրալը նույնպես զուգամետ է: Ընդ որում, պարզ է, որ այդ ինտեգրալի արժեքը փոքր է մեկից:

Հետևանք 1: *Դիցուք $f(x)$-ը և $g(x)$-ը $[a,+\infty)$ միջակայքում որոշված դրական ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում, եթե x-ը պլյուս անսահմանության ձգտելիս գոյություն ունի*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0\le k\le+\infty)$$

սահմանը, ապա $k<+\infty$ դեպքում (11) ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է (2′) ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ $k>0$ դեպքում, (2′) ինտեգրալի տարամիտությունից հետևում է (11) ինտեգրալի տարամիտությունը:

Այսպիսով, $0<k<+\infty$ դեպքում (2′) և (11) ինտեգրալները միաժամանակ զուգամիտում են կամ միաժամանակ տարամիտում:

Այնուհետև դիտարկենք նաև

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx \tag{12}$$

ինտեգրալը:

Սահմանում 3: *Եթե (2′) ինտեգրալի հետ մեկտեղ զուգամիտում է նաև (12) ինտեգրալը, ապա (2′) ինտեգրալը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, իսկ $f(x)$ ֆունկցիան՝ բացարձակ ինտեգրելի $[a,+\infty)$ միջակայքում: Եթե (2′) ինտեգրալը զուգամիտում է, իսկ (12) ինտեգրալը՝ տարամիտում, ապա (2′) ինտեգրալը կոչվում է պայմանական զուգամետ:*

Թեորեմ 7: *(12) ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է (2') ինտեգրալի զուգամիտությունը:*

Այժմ ենթադրենք $[a,b]$ վերջավոր միջակայքում որոշված $f(x)$ *ֆունկցիան ցանկացած* ε *-ի համար* $(0<\varepsilon<b-a)$ *սահմանափակ է ու ինտեգրելի* $[a,b-\varepsilon]$ միջակայքում և անսահմանափակ է $[b-\varepsilon,b]$ միջակայքում: Ասվածը մասնավորապես նշանակում է, որ նշված պայմանին բավարարող ցանկացած ε -ի համար գոյություն ունի հետևյալ ինտեգրալը՝

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx : \qquad (13)$$

Նման դեպքերում կասենք, որ b -ն եզակի կետ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

Սահմանում 4: ε *-ը զրոյի ձգտելիս (13) ինտեգրալի վերջավոր կամ անվերջ սահմանը կոչվում է* $f(x)$ *ֆունկցիայի երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալ* a *-ից մինչև* b *սահմաններում և նշանակվում է սովորական ձևով.*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx : \qquad (14)$$

Սահմանում 5: *Եթե (14) հավասարության աջ կողմում գրված սահմանը վերջավոր է, ապա այդ հավասարության ձախ կողմում գրված անիսկական ինտեգրալը կոչվում է զուգամետ, իսկ* $f(x)$ *ֆունկցիան՝ ինտեգրելի* $[a,b]$ *միջակայքում: Իսկ եթե այդ սահմանը անվերջ մեծ է կամ ընդհանրապես գոյություն չունի, ապա նշված անիսկական ինտեգրալը կոչվում է տարամետ:*

Օրինակ 4: Հաշվել հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} :$$

Լուծում: Նկատի ունենալով

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

հավասարությունը՝ եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող ինտեգրալի ենթինտեգրալ ֆունկցիայի համար $x=1$ կետը եզակի կետ է: Համաձայն սահմանման՝ ստացված եզրակացությունից հետևում է, որ տրված խնդրում մենք գործ ունենք երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալի հետ: Այնուհետև, օգտվելով (14) հավասարությունից, կստանանք [35,6°]

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} :$$

Այժմ ենթադրենք $[a,b]$ միջակայքում տրված $f(x)$ ֆունկցիան ցանկացած ε -ի համար $(0<\varepsilon<b-a)$ սահմանափակ է ու ինտեգրելի $[a+\varepsilon,b]$ միջակայքում և անսահմանափակ է $[a,a+\varepsilon]$ միջակայքում (a -ն եզակի կետ է $f(x)$ ֆունկցիայի համար):

Քննարկվող դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալը a-ից մինչև b սահմաններում սահմանվում է (14) հավասարության նմանությամբ.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx : \qquad (15)$$

Ընդհանուր դեպքում, $[a,b]$ միջակայքում $f(x)$ ֆունկցիան կարող է ունենալ մի քանի եզակի կետ:

Գրության պարզության համար ենթադրենք այդ կետերը երեքն են՝ a-ն, c-ն և b-ն $(a<c<b)$: Այդ դեպքում $f(x)$ ֆունկցիայի երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալը՝ a-ից մինչև b սահմաններում կսահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\int_{a+\varepsilon_1}^{c-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^{b-\varepsilon_1} f(x)dx \right], \qquad (16)$$

ընդ որում կենթադրենք, որ (16) հավասարության աջ կողմում գրված ինտեգրալները գոյություն ունեն:

Օրինակ 5: Հաշվել երկրորդ սեռի հետևյալ անիսկական ինտեգրալը՝

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} :$$

Լուծում: Ունենք

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \int_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \arcsin x \Big|_{-1+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\arcsin(1-\varepsilon_2) - \arcsin(-1+\varepsilon_1) \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \arcsin(1-\varepsilon_2) - \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \arcsin(-1+\varepsilon_1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi :$$

Վերջում նշենք, որ երկրորդ սեռի անիսկական ինտեգրալների համար գոյություն ունեն թեորեմներ, որոնց ձևակերպումները և ապացույցները գրեթե չեն տարբերվում առաջին սեռի անիսկական ինտեգրալների համար բերված համապատասխան թեորեմների ձևակերպումներից և ապացույցներից:

Որպես օրինակ բերենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 8: *Դիցուք $f(x)$-ը $[a,b]$ միջակայքում որոշված դրական ֆունկցիա է և b-ն այդ ֆունկցիայի միակ եզակի կետն է: Այդ դեպքում, որպեսզի*

$$\int_a^b f(x)dx$$

անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ (13) ինտեգրալը որպես ε փոփոխականի ֆունկցիա, լինի վերևից սահմանափակ, այսինքն գոյություն ունենա այնպիսի M հաստատուն, որ ε-ի ցանկացած արժեքի համար տեղի ունենա

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \le M \qquad (17)$$

անհավասարությունը:

ԳԼՈՒԽ VIII

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

§43. Հարթ պատկերի մակերեսի հաշվումը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով: Պարամետրական հավասարումներով տրված կորով (կորերով) սահմանափակված պատկերի մակերեսի հաշվումը:

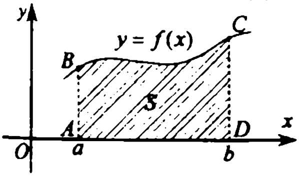
Այս գլխում կներկայացնենք ինտեգրալ հաշվի որոշակի կիրառություններ: Մեր ուսումնասիրությունները սկսենք որոշյալ ինտեգրալի միջոցով հարթ պատկերների մակերեսներ հաշվելու խնդիրներով և դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1°. *$y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան որոշված է $[a,b]$ միջակայքում և ընդունում է միայն դրական (ոչ բացասական) արժեքներ:*

Ինչպես գիտենք, $f(x)$ կորով, ox առանցքով (նկ.68) և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսն արտահայտվում է

$$S_{ABCD}=\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

բանաձևով [40,(2′′)]:



Նկ.68

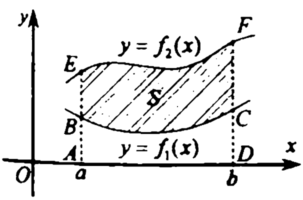
2°. *$y=f_1(x)$ և $y=f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաները որոշված են $[a,b]$ միջակայքում և այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում բավարարում են*

$$0\le f_1(x)\le f_2(x) \qquad (2)$$

պայմանին:

Նկատի ունենալով, որ $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ կորերով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի (նկ.69) մակերեսը հավասար է $AEFD$ և $ABCD$ կորագիծ սեղանների մակերեսների տարբերությանը և օգտվելով (1) բանաձևից, $BEFC$ կորագիծ սեղանի մակերեսի համար կունենանք [40,2°]

$$S_{BEFC}=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]dx: \qquad (3)$$



Նկ.69

Օրինակ 1: Հաշվել

$$y=x^2,\ x=y^2 \qquad (ա)$$

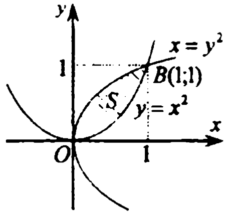
կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (նկ.70):

Լուծում: Նախ, համատեղ լուծելով տրված կորերի հավասարումները.

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$$

գտնենք այդ կորերի հատման կետերը.

$$O(0;0),\ B(1;1):$$



Նկ.70

Այնուհետև, քանի որ $[0;1]$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի $\sqrt{x} \geq x^2$ անհավասարությունը՝ ուստի, օգտվելով (3) բանաձևից, մեզ հետաքրքրող պատկերի մակերեսի համար կստանանք

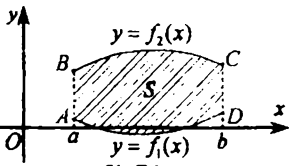
$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}:$$

3°. *$y = f_1(x)$ և $y = f_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաները որոշված են $[a,b]$ միջակայքում և այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում բավարարում են*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \tag{4}$$

պայմանին:

Նշված ֆունկցիաների գրաֆիկներով (Նկ.71) և $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը հաշվելու համար կոորդինատական ox առանցքն իրեն զուգահեռ պահելով այնքան տեղաշարժենք ներքև, մինչև տրված կորերը գտնվեն տեղաշարժված առանցքի վերևում: Ասվածն ակնհայտորեն համարժեք է $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաներին այնպիսի c հաստատուն ավելացնելուն, որ ստացված ֆունկցիաների արժեքները լինեն ոչ բացասական:



Նկ.71

Քանի որ $f_1(x)$, $f_2(x)$ կորերով և $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսը կախված չէ կատարված տեղաշարժից, հետևաբար (3) բանաձևը մնում է ուժի մեջ նաև քննարկվող դեպքում:

Օրինակ 2: Հաշվել

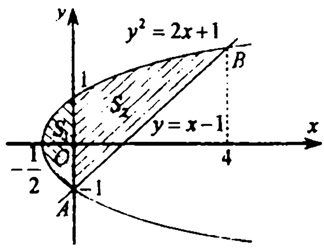
$$y^2 = 2x + 1 \quad \text{և} \quad y = x - 1$$

կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

Լուծում: Գտնելով տրված կորերի հատման կետերը.

$$A(0;-1),\quad B(4;3)$$

և կառուցելով նրանց գրաֆիկները **[6,1°]**, **[7,4°]**, տեսնում ենք (Նկ.72), որ մեզ հետաքրքրող պատկերն oy առանցքով տրոհվում է երկու պատկերների: Այդ պատկերների մակերեսները (ձախից՝ աջ) նշանակելով S_1-ով և S_2-ով՝ (3) բանաձևի օգնությամբ կունենանք **[35,(10),3°]**



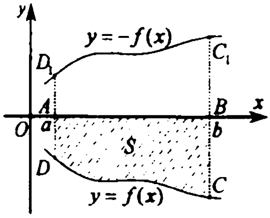
Նկ.72

$$S_1 = 2\int_{-0,5}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2}{3}, \quad S_2 = \int_{0}^{4}\left(\sqrt{2x+1} - x + 1\right)dx = \frac{14}{3},$$

որտեղից կստանանք, որ դիտարկվող կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը հավասար է 16/3-ի:

4°. *$y = f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան որոշված է $[a,b]$ միջակայքում և ընդունում է միայն բացասական (ոչ դրական) արժեքներ:*

Նկատի ունենալով, որ $y = f(x)$ և $y = -f(x)$ ֆունկցիաների գրաֆիկները համաչափ են ox առանցքի նկատմամբ՝ եզրակացնում ենք, որ $y = f(x)$ կորով, ox առանցքով (նկ.73) և $x = a, x = b$ ուղիղներով սահմանափակված $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսը հավասար է $y = -f(x)$ կորով $[-f(x) \ge 0]$, ox առանցքով և $x = a, x = b$ ուղիղներով սահմանափակված AD_1C_1B կորագիծ սեղանի մակերեսին:



Նկ.73

Հետևաբար, օգտվելով (1) բանաձևից, $ABCD$ կորագիծ սեղանի մակերեսի համար կստանանք [40,1°]

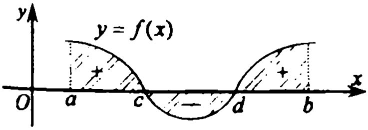
$$S_{ABCD} = S_{AD_1C_1B} = -\int_a^b f(x)dx: \tag{5}$$

5°. *$[a,b]$ միջակայքում որոշված $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ միջակայքում վերջավոր թվով անգամ փոխում է իր նշանը:*

Օգտվելով (1) և (5) բանաձևերից՝ եզրակացնում ենք, որ քննարկվող դեպքում $f(x)$ կորով, ox առանցքով և $x = a, x = b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը կարող ենք հաշվել

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx: \tag{6}$$

բանաձևով:



Նկ.74

Մասնավոր դեպքում, 74-րդ նկարում բերված ստվերագծված պատկերի մակերեսի համար կունենանք

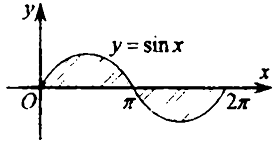
$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx:$$

Օրինակ 3: $[0,2\pi]$ միջակայքում հաշվել $y = \sin x$ կորով և ox առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (նկ.75):

Լուծում: Օգտվելով (6) բանաձևից՝ տրված պատկերի մակերեսի համար կստանանք [35,8°]

$$S = \int_0^{\pi}\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4:$$

Նկատենք, որ 1° - 5° կետերում և բերված օրինակներում մենք հաշվեցինք



Նկ.75

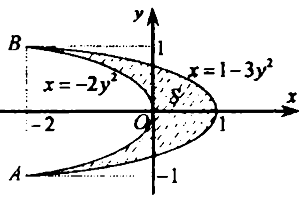
այնպիսի պատկերների մակերեսներ, որոնք սահմանափակված են $y=f(x)$ կորով ($y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ կորերով), ox առանցքով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով կամ պարզապես՝ $y=f_1(x)$ և $y=f_2(x)$ կորերով:

Յասկանալի է, որ շարադրված եղանակներով կարող ենք հաշվել նաև այն պատկերների մակերեսները, որոնք սահմանափակված են $x=g(y)$ կորով ($x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$ կորերով), oy առանցքով և $y=c$, $y=d$ ուղիղներով կամ պարզապես՝ $x=g_1(y)$ և $x=g_2(y)$ կորերով:

Օրինակ 4: Յաշվել

$$x=-2y^2 \text{ և } x=1-3y^2$$

կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (Նկ.76):



Նկ.76

Լուծում: Նախ համատեղ լուծելով տրված կորերի հավասարումները.

$$\begin{cases} x=-2y^2, \\ x=1-3y^2, \end{cases}$$

գտնենք այդ կորերի հատման կետերը.

$$A(-2;-1),\ B(-2;1):$$

Այնուհետև, քանի որ $-1\le y\le 1$ միջակայքում տեղի ունի $1-3y^2\ge -2y^2$ անհավասարությունը, ուստի տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսի համար կունենանք

$$S=\int_{-1}^{1}(1-3y^2+2y^2)dy=\int_{-1}^{1}(1-y^2)dy=\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4}{3}:$$

6°. ***Այժմ ենթադրենք*** $ABCD$ ***կորագիծ սեղանը (Նկ.68) սահմանափակող*** BC ***կորը տրված է***

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)\qquad (\alpha\le t\le\beta) \tag{7}$$

պարամետրական հավասարումներով **[28,ս1]**, ***ընդ որում***

$$a=\varphi(\alpha),\quad b=\varphi(\beta):$$

Դիտարկվող կորագիծ սեղանի մակերեսը հաշվելու համար ենթադրենք (7) հավասարումները $[a,b]$ միջակայքում որոշում են $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիա: (1) որոշյալ ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի $x=\varphi(t)$ փոխարինում [41,(11)], (7) հավասարումների հաշվառումով նշված կորագիծ սեղանի մակերեսի համար կստանանք

$$S_{ABCD}=\int_a^b ydx=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

կամ

$$S_{ABCD} = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \qquad (8)$$

բանաձևը:

Օրինակ 5: Հաշվել a և b կիսաառանցքներ ունեցող այն էլիպսով [7,2°] սահմանափակված պատկերի մակերեսը, որի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, դիտարկվող էլիպսի պարամետրական հավասարումներն ունեն

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \qquad (\text{բ})$$

տեսքը [28,օ8]:

Պարզ է, որ y-ը 0-ից մինչև b, իսկ x-ը $-a$-ից մինչև a սահմաններում փոփոխելիս, t-ն կփոփոխվի π-ից մինչև զրո սահմաններում: Հետևաբար, օգտվելով (8) բանաձևից՝ (բ) պարամետրական հավասարումներն ունեցող էլիպսի վերին կեսով և ox առանցքով սահմանափակված պատկերի մակերեսի համար կունենանք [39,օ10], [40,(18)]

$$\frac{S}{2} = \int_{\pi}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}ab,$$

որտեղից՝ տրված էլիպսով սահմանափակված պատկերի մակերեսի համար վերջնականապես կստանանք

$$S = \pi ab: \qquad (\text{գ})$$

Մասնավոր դեպքում, (գ) բանաձևում ընդունելով $a = b = R$, կստանանք R շառավղով շրջանի մակերեսի բանաձևը.

$$S = \pi R^2: \qquad (\text{դ})$$

7°. $BEFC$ կորագիծ սեղանը (Նկ.69) ձախից և աջից սահմանափակված է համապատասխանաբար $x = a$ և $x = b$ ուղիղներով, իսկ ներքևից և վերևից՝ համապատասխանաբար

$$x = \varphi_1(t),\ y = \psi_1(t), \qquad (9)$$

$$x = \varphi_2(t),\ y = \psi_2(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (10)$$

պարամետրական հավասարումներն ունեցող անընդհատ կորերով:

Օգտվելով (8) բանաձևից՝ տրված կորերով և $x = a$, $x = b$ ուղիղներով սահմանափակված պատկերի մակերեսի համար կունենանք

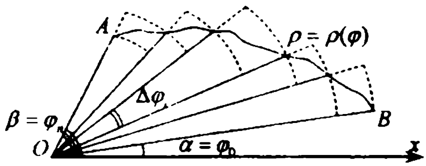
$$S_{BEFC} = S_{AEFD} - S_{ABCD} = \int_{\alpha}^{\beta}\psi_2(t)\varphi_2'(t)dt - \int_{\alpha}^{\beta}\psi_1(t)\varphi_1'(t)dt$$

կամ

$$S_{BEFC} = \int_{\alpha}^{\beta}[\psi_2(t)\varphi_2'(t) - \psi_1(t)\varphi_1'(t)]dt: \qquad (11)$$

§44. Բևեռային կոորդինատներ: Կորի հավասարումը և պատկերի մակերեսի հաշվումը բևեռային կոորդինատներով:

Կան պատկերներ, որոնց մակերեսների հաշվումը ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներով կապվում է որոշակի դժվարությունների հետ: Այդպիսի պատկերներից է, օրինակ, 77-րդ նկարում բերված AB կորով և OA, OB հատվածներով (որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է վերածվել կետի) սահմանափակված AOB սեկտորը:

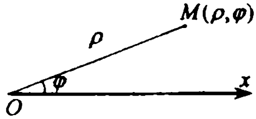


Նկ.77

Դիտարկվող սեկտորի մակերեսի հաշվման պարզունակ բանաձև ստանալու համար ծանոթանանք բևեռային կոորդինատների հետ՝ կոորդինատների, որոնց միջոցով ևս կարելի է կետի դիրքը հարթության վրա որոշել միարժեքորեն:

Հարթության վրա վերցնենք որևէ կետ, որին անվանենք բևեռ (Նկ.78), և այդ կետից դուրս եկող որևէ ճառագայթ, որին անվանենք բևեռային առանցք:

Ակնհայտ է, որ կամայական M կետի դիրքը հարթության վրա միարժեքորեն կորոշվի, եթե տրվեն այդ կետի և O բևեռի ρ հեռավորությունը, ինչպես նաև OM հատվածի ու բևեռային առանցքի կազմած φ անկյունը:



Նկ.78

Համաձայն նախկին պայմանավորվածության՝ ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությունը կհամարենք φ անկյան հաշվարկի դրական ուղղություն [6,ս12]:

Սահմանում 1: ρ *և* φ *թվերը կոչվում են* M *կետի բևեռային կոորդինատներ.* ρ *-ն կոչվում է* M *կետի շառավիղ-վեկտոր, իսկ* φ *-ն՝ այդ կետի բևեռային անկյուն:*

Հասկանալի է, որ ρ -ն ու φ -ն փոփոխելով համապատասխանաբար $[0,+\infty)$ և $[0,2\pi)$ սահմաններում՝ կստանանք հարթության բոլոր կետերը:

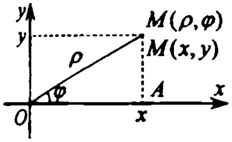
Մասնավոր դեպքում, եթե ընդունենք $\rho=\rho_0$ -ի ($\rho_0=const$), իսկ φ -ն փոփոխենք $[0,2\pi)$ միջակայքում, ապա կստանանք ρ_0 շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը բևեռն է:

Նույս կողմից, եթե ընդունենք $\varphi=\varphi_0$ -ի, իսկ ρ -ն փոփոխենք $[0,+\infty)$ միջակայքում՝ կստանանք բևեռից դուրս եկող ճառագայթ, որի կազմած անկյունը բևեռային առանցքի հետ հավասար է φ_0 -ի:

Պարզ է, որ ընդհանուր դեպքում ρ և φ փոփոխականները միմյանց կապող յուրաքանչյուր $\rho=\rho(\varphi)$ հավասարում բևեռային կոորդինատական համակարգում որոշում է որոշակի կոր:

Հարթության յուրաքանչյուր M կետի բևեռային և ուղղանկյուն կոորդինատների միջև գոյություն ունի կապ: Այդ կապը ստանալու համար բևեռը տեղադրենք ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի սկզբնակետում (նկ.79), իսկ բևեռային առանցքն ուղղենք ox առանցքի դրական ուղղությամբ:

Այդ դեպքում A-ով նշանակելով M կետի պրոյեկցիան ox առանցքի վրա՝ AOM եռանկյունից կստանանք



Նկ.79

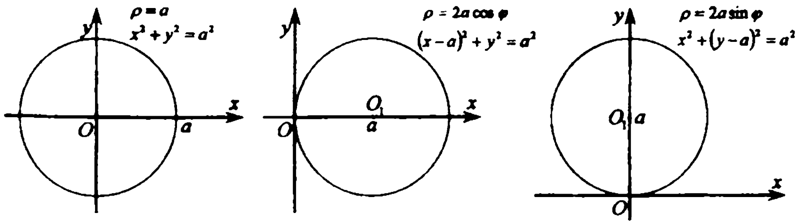
$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \qquad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = arctg\frac{y}{x} \quad \left(tg\varphi = \frac{y}{x}\right): \qquad (2)$$

Ինչպես տեսնում ենք, (1) բանաձևերը M կետի ուղղանկյուն դեկարտյան կոորդինատներն արտահայտում են նրա բևեռային կոորդինատներով, իսկ (2) բանաձևերը հակառակը՝ M կետի բևեռային կոորդինատներն արտահայտում են նրա ուղղանկյուն կոորդինատներով:

Նշենք, որ բևեռի ուղղանկյուն կոորդինատները և շառավիղ վեկտորը հավասար են զրոյի, իսկ բևեռային անկյունը կամայական է:

Օրինակ 1: ա) Ինչպես տեսանք, $\rho = a\ (a > 0)$ հավասարումը բևեռային կոորդինատական համակարգում որոշում է a շառավղով շրջանագիծ, որի կենտրոնը բևեռն է (նկ.80ա):



ա) բ) գ)

Նկ.80

Օգտվելով (2) առնչություններից առաջինից՝ կստանանք $\rho = a$ բևեռային հավասարումն ունեցող շրջանագծի հավասարումն ուղղանկյուն կոորդինատներով [7,1°].

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \text{ կամ } x^2 + y^2 = a^2:$$

բ) Բևեռային կոորդինատական համակարգում $\rho = 2a\cos\varphi\ (a > 0,\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$ հավասարումն ակնհայտորեն որոշում է $\rho_0 = a$, $\varphi_0 = 0$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագիծ (նկ.80բ):

Օգտվելով կետի բևեռային կոորդինատներն այդ կետի ուղղանկյուն կոորդինատների հետ կապող (2) առնչություններից, ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

կստանանք դիտարկվող շրջանագծի հավասարումն ուղղանկյուն կոորդինատներով.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

կամ

$$(x-a)^2+y^2=a^2:$$

գ) Յասկանալի է, որ $\rho=2a\sin\varphi$ $(a>0,\ 0\le\varphi\le\pi)$ հավասարումն էլ որոշում է $\rho_0=a$, $\varphi_0=\pi/2$ կենտրոնով և a շառավղով շրջանագիծ (նկ.80գ):

Նորից օգտվելով (2) առնչություններից, ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

կստանանք դիտարկվող շրջանագծի հավասարումն ուղղանկյուն կոորդինատներով.

$$x^2+(y-a)^2=a^2:$$

Վերադառնալով 77-րդ նկարում պատկերված AOB սեկտորի մակերեսը հաշվելուն՝ ենթադրենք այդ սեկտորի AB կորի բևեռային հավասարումն ունի

$$\rho=\rho(\varphi)\qquad(\alpha\le\varphi\le\beta)\tag{3}$$

տեսքը, որտեղ $\rho(\varphi)$-ն $[\alpha,\beta]$ միջակայքում որոշված անընդհատ և դրական (ոչ բացասական) ֆունկցիա է:

Դրված խնդիրը լուծելու համար դիտարկվող միջակայքը կամայական ձևով տրոհենք վերջավոր թվով

$$[\varphi_0,\varphi_1],\ [\varphi_1,\varphi_2],\ \dots,\ [\varphi_{n-1},\varphi_n]\qquad(\varphi_0=\alpha,\ \varphi_n=\beta)$$

տարրական միջակայքերի, այսինքն տրված սեկտորը տրոհենք վերջավոր թվով տարրական սեկտորների, ստացված սեկտորների անկյունները համապատասխանաբար նշանակենք $\Delta\varphi_0$-ով, $\Delta\varphi_1$-ով,..., $\Delta\varphi_{n-1}$-ով, իսկ այդ անկյուններից ամենամեծը՝ λ-ով.

$$\lambda=\max_{0\le i\le n-1}\Delta\varphi_i:$$

Այնուհետև m_i-ով և M_i-ով նշանակենք (3) ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[\varphi_i,\varphi_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ միջակայքում և կազմենք

$$\underline{s}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}m_i^2\Delta\varphi_i,\quad \overline{S}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}M_i^2\Delta\varphi_i\tag{4}$$

գումարները:

Քանի որ R շառավիղ և α ռադիանի հավասար կենտրոնական անկյուն ունեցող շրջանային սեկտորի մակերեսն արտահայտվում է[*]

$$S_\alpha=\frac{1}{2}R^2\alpha$$

---

*) Տե՛ս 74-րդ էջի տողատակի պարզաբանումը:

բանաձևով, հետևաբար $\underline{s}$-ը այն տարրական շրջանային սեկտորների մակերեսների գումարն է, որոնց միավորումից առաջացած աստիճանաձև պատկերը պարունակվում է AOB սեկտորի մեջ, իսկ $\overline{S}$-ը՝ այն սեկտորների մակերեսների գումարը, որոնց միավորումից առաջացած պատկերն իր մեջ պարունակում է AOB սեկտորը:

Վերոգրյալից եզրակացնում ենք, որ տեղի ունեն

$$\underline{s} \le S \le \overline{S} \tag{5}$$

անհավասարությունները, որտեղ S-ը AOB սեկտորի մակերեսն է:

Նկատելով, որ (4) արտահայտությունները հետևյալ ինտեգրալի

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi \tag{6}$$

ինտեգրալ գումարներն են [40,ս1] և այդ գումարներում անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի, կստանանք, որ նշված գումարները, հետևաբար նաև նրանց միջև ընկած S մակերեսը [20,բ2], ձգտում են (6) ինտեգրալին:

Այսպիսով, (3) բևեռային հավասարումով տրված AB անընդհատ կորով ու բևեռային առանցքի հետ համապատասխանաբար α և β անկյուններ կազմող OA և OB շառավիղներով սահմանափակված AOB սեկտորի մակերեսի համար վերջնականապես ստանում ենք

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi \tag{6'}$$

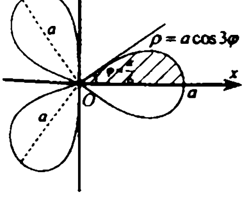
բանաձևը:

Օրինակ 2: Հաշվել հետևյալ կորով սահմանափակված պատկերի մակերեսը՝

$$\rho = a\cos 3\varphi \quad (a>0): \tag{ա}$$

Լուծում: Փոփոխելով φ-ն

$$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right],\ \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right],\ \left[\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$$



Նկ.81

միջակայքերում և հաշվելով ρ-ի համապատասխան արժեքները, նախ կառուցենք (ա) կորի գրաֆիկը (նկ.81), որը կոչվում է եռատերև:

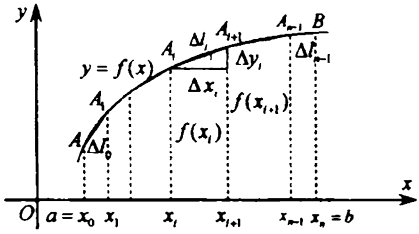
Այնուհետև օգտվելով (6′) բանաձևից և հաշվի առնելով, որ դիտարկվող եռատերևի մակերեսը հավասար է նկարում ցուցադրված ստվերագծված տիրույթի մակերեսի վեցապատիկին՝ մեզ հետաքրքրող պատկերի մակերեսի համար կստանանք [39,օ10]:

$$S = \frac{\pi}{4}a^2;$$

§45. Կորի աղեղի երկարության հաշվումը, երբ նրա հավասարումը տրված է ուղղանկյուն կոորդինատներով: Պարամետրական հավասարումներով և բևեռային կոորդինատներով տրված կորի երկարության հաշվումը: Մարմնի ծավալի հաշվումը զուգահեռ հատույթների մակերեսների միջոցով: Պտտման մարմնի ծավալի հաշվումը:

Անցնելով հարթ կորի աղեղի երկարությունը հաշվելուն՝ քննարկենք հետևյալ դեպքերը.

1°. *Դիցուք AB կորը ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում տրված է $y=f(x)$ հավասարումով, որտեղ $f(x)$ ֆունկցիան իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ մեկտեղ որոշված է և անընդհատ $[a,b]$ միջակայքում:*



Նկ.82

Տրված ֆունկցիայի գրաֆիկի և $x=a$, $x=b$ ուղիղների հատման կետերը համապատասխանաբար նշանակենք A-ով ու B-ով և հաշվենք $f(x)$ կորի AB աղեղի երկարությունը (նկ.82):

Դրված խնդիրը լուծելու համար AB կորի վրա A-ից B ուղղությամբ կամայական ձևով վերցնենք $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ կետեր, այդ կետերի աբսցիսները համապատասխանաբար նշանակենք x_1-ով, x_2-ով, ..., x_{n-1}-ով, իսկ AA_1, $A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ հատվածների երկարությունները՝ համապատասխանաբար Δl_0-ով, Δl_1-ով,..., Δl_{n-1}-ով:

Սահմանում 1: *$AA_1\cdots A_{n-1}B$ բեկյալը կոչվում է AB կորի ներգծյալ բեկյալ:*

Սահմանում 2: *Կորի երկարություն ասելով կհասկանանք այն սահմանը, որին ձգտում է այդ կորին ներգծած բեկյալի երկարությունը, երբ բեկյալի հատվածներից մեծագույնի երկարությունը ձգտում է զրոյի:*

Հաշվի առնելով, որ $AA_1\cdots A_{n-1}B$ բեկյալի երկարությունը հավասար է

$$l_n=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta l_i$$

գումարին և կատարելով

$$\lambda=\max_{0\le i\le n-1}\Delta l_i \qquad (1)$$

նշանակումը, համաձայն սահմանման, AB կորի երկարության համար կստանանք

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta l_i: \qquad (2)$$

Այնուհետև կատարելով $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ և $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(a = x_0, b = x_n)$ նշանակումները՝ կունենանք

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{3}$$

$\Delta y_i / \Delta x_i$ քանորդների վրա կիրառելով Լագրանժի թեորեմը՝ կստանանք [30,թ3]

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_i) \qquad (x_i < c_i < x_{i+1};\ i = 0, 1, \ldots, n-1): \tag{4}$$

(3) և (4) հավասարությունների հաշվառումով դիտարկվող բեկյալի երկարության համար կունենանք

$$l_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\,\Delta x_i : \tag{5}$$

Ստացված ինտեգրալ գումարում անցնելով սահմանի, երբ λ-ն ձգտում է զրոյի և հաշվի առնելով, որ $f'(x)$ ֆունկցիայի հետ մեկտեղ $[a,b]$ միջակայքում անընդհատ է նաև

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

ֆունկցիան՝ կստանանք [40,ս3]

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx : \tag{6}$$

Այսպիսով, $[a,b]$ միջակայքում $y = f(x)$ հավասարումն ունեցող AB անընդհատ կորի երկարությունն արտահայտվում է (6) ինտեգրալի միջոցով:

Օրինակ 1: Հաշվել

$$x^2 + y^2 = a^2$$

հավասարումն ունեցող շրջանագծի երկարությունը [7,(2''')]:

Լուծում: Տրված շրջանագծի (նկ.80ա) կոորդինատական առաջին քառորդում ընկած մասի երկարությունը նշանակելով $l/4$-ով և նկատի ունենալով, որ վերին կիսահարթության մեջ $(x \ge 0)$ այդ շրջանագծի հավասարումն ունի

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

տեսքը՝ (6) բանաձևի օգնությամբ դիտարկվող կորի երկարության համար կունենանք [28,(15')], [27,(5),(7)], [35,6°ա]

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = 4a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4a \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 2\pi a:$$

2°. *Այժմ ենթադրենք AB կորը տրված է*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \tag{7}$$

պարամետրական հավասարումներով [28,ս1], *որտեղ $\varphi(t)$-ն և $\psi(t)$-ն իրենց* *առաջին կարգի ածանցյալների հետ մեկտեղ* $[\alpha,\beta]$ *միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, ընդ որում* $\varphi'(t)$ *-ն տրված միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում.*

$$\varphi'(t)\neq 0 \qquad (\alpha\le t\le\beta): \tag{8}$$

Ինչպես գիտենք, AB կորի (7) պարամետրական հավասարումները որոշում են $y=f(x)$ անընդհատ ֆունկցիա, որը կատարված ենթադրությունների շնորհիվ ունի

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

անընդհատ ածանցյալ [28,(24)]:

Ենթադրելով, որ $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ և (6) ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի $x=\varphi(t)$ փոխարինում [41,թ2], կստանանք

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\ \varphi'(t)dt,$$

որտեղից՝ դիտարկվող AB կորի երկարության համար վերջնականապես կունենանք

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt: \tag{9}$$

Այսպիսով, $[\alpha,\beta]$ *միջակայքում (7) պարամետրական հավասարումներն ունեցող* AB *անընդհատ կորի երկարությունն արտահայտվում է (9) ինտեգրալի միջոցով:*

Նշենք, որ (9) բանաձևից կարող ենք օգտվել նաև փակ կորի երկարությունը հաշվելիս:

Նմանատիպ դատողություններով կարելի է համոզվել, որ եթե տարածական AB *կորը տրված է*

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)\qquad(\alpha\le t\le\beta) \tag{10}$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ $\varphi(t)$ *-ն,* $\psi(t)$ *-ն և* $\chi(t)$ *-ն իրենց առաջին կարգի ածանցյալների հետ մեկտեղ* $[\alpha,\beta]$ *միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, ապա այդ կորի երկարությունը կարելի է հաշվել*

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt \tag{11}$$

բանաձևով:

Օրինակ 2: Հաշվել

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad(0\le t\le 2\pi)$$

պարամետրական հավասարումներով տրված աստրոիդի երկարությունը [28,օ10]:

Լուծում: Տրված կորի (Նկ.39) կոորդինատական առաջին քառորդում ընկած մասի երկարությունը նշանակելով $l/4$-ով՝ (9) բանաձևի օգնությամբ նրա երկարության համար կստանանք [28,(9)], [27,(10),(12)], [35,3°]

$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t dt=12a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a:$$

3°. *Դիցուք AB կորը տրված է*

$$\rho=\rho(\varphi)\quad (\alpha\le\varphi\le\beta) \tag{12}$$

բևեռային հավասարումով, որտեղ $\rho(\varphi)$-ն իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ մեկտեղ $[\alpha,\beta]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Բևեռային կոորդինատներից անցնելով [44,(1)] ուղղանկյուն կոորդինատների՝ կարող ենք (12) հավասարումով տրված AB կորը ներկայացնել

$$x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi,\quad y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi\quad (\alpha\le\varphi\le\beta) \tag{13}$$

հավասարումներով:

Այնուհետև (13) հավասարումները համարելով տրված կորի պարամետրական հավասարումներ և օգտվելով (9) բանաձևից, այդ կորի երկարության համար կստանանք [28,(2)]

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(\varphi)]^2+[y'(\varphi)]^2}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi]^2+[\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi]^2}\,d\varphi$$

կամ

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\varphi)]^2+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi \tag{14}$$

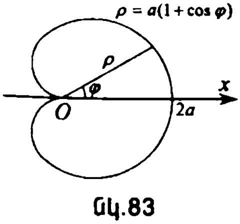
բանաձևը:

Այսպիսով, $[\alpha,\beta]$ միջակայքում (12) բևեռային հավասարումն ունեցող AB անընդհատ կորի երկարությունն արտահայտվում է (14) ինտեգրալի միջոցով:

Օրինակ 3: Հաշվել

$$\rho=a(1+\cos\varphi)\quad (a>0,\ 0\le\varphi\le2\pi) \tag{ա}$$

բևեռային հավասարումն ունեցող կորի երկարությունը:



Նկ.83

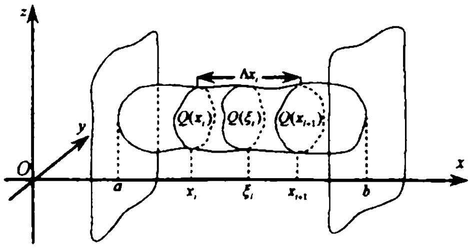
Լուծում: Նախ փոփոխելով φ-ն 0-ից մինչև 2π սահմաններում և հաշվելով ρ շառավիղ-վեկտորի համապատասխան արժեքները՝ կառուցենք (ա) հավասարումն ունեցող կորի գրաֆիկը (Նկ.83), որը կոչվում է կարդիոդ:

Այնուհետև օգտվելով (14) բանաձևից և հաշվի առնելով, որ կարդիոդը համաչափ է բևեռային առանցքի նկատմամբ՝ այդ կորի երկարության համար կստանանք [35,9°]

$$l=2\int_0^\pi\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^\pi\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=4a\int_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi=8a:$$

Անցնելով մարմինների ծավալներ հաշվելու խնդիրներին՝ դիտարկենք մարմին (Նկ.84), որն ընկած է $x=a$, $x=b$ հարթությունների միջև և այն կամայական ծևով $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_{n-1}$ հարթություններով $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$ տրոհենք շերտերի:

Տրված մարմնի x աբսցիսն ունեցող կետով անցնող և ox առանցքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսը նշանակենք $Q(x)$-ով և ենթադրենք, որ այն $[a,b]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է: Այնուհետև $Q(x)$ ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքները $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0,1,\ldots\ldots,n-1)$ հատվածներում համապատասխանաբար նշանակենք m_i-երով ու M_i-երով և կազմենք



Նկ.84

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_i \le \xi_i \le x_{i+1};\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \tag{15}$$

գումարները:

Բերված գումարներից առաջինը տրված մարմնի մեջ պարունակվող այն տարրական շրջանային գլանների ծավալների գումարն է, որոնց հիմքերի մակերեսներն ու ծնորդները (որոնք զուգահեռ են կոորդինատական ox առանցքին) համապատասխանաբար հավասար են m_i-երի և Δx_i-երի, իսկ երկրորդը՝ նույն տեսքն ունեցող այն գլանների ծավալների գումարը, որոնց հիմքերի մակերեսներն ու ծնորդները համապատասխանաբար հավասար են M_i-երի ու Δx_i-երի և որոնց միավորումից առաջացած մարմինն իր մեջ պարունակում է տրված մարմինը:

Ելնելով երկրաչափական նկատառումներից՝ կարող ենք պնդել, որ տեղի ունի

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \tag{16}$$

գնահատականը:

Քանի որ $\lambda = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$-ն զրոյի ձգտելիս (15) գումարներից առաջին երկուսն ակնհայտորեն ձգտում են դիտարկվող մարմնի ծավալին, ուստի (16) գնահատականի շնորհիվ (15) գումարներից վերջինը ևս ձգտում է նույն սահմանին **[20,բ2]**:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը և հաշվի առնելով, որ (15) գումարներից վերջինը $Q(x)$ անընդհատ ֆունկցիայի ինտեգրալ գումարն է $[a,b]$ միջակայքում **[40,ս1]**, տրված մարմնի ծավալի համար վերջնականապես կստանանք

$$V = \int_a^b Q(x)dx: \tag{17}$$

Այսպիսով, $x=a$ և $x=b$ հարթություններով սահմանափակված մարմնի ծավալն արտահայտվում է (17) բանաձևով, որտեղ $Q(x)$-ը այդ մարմնի x աբսցիսն ունեցող կետով անցնող և կոորդինատական ox առանցքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսն է:

Օրինակ 4: Գտնել

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, \quad b>0, \quad c>0) \tag{բ}$$

կանոնական հավասարումն ունեցող եռառանցք էլիպսոիդի ծավալը [10,3°]:

Լուծում: ox առանցքի $M(x)$ կետով $(-a\le x\le a)$ անցնող և այդ առանցքին ուղղահայաց հարթության ու տրված էլիպսոիդի հատումից առաջանում է էլիպս, որի պրոյեկցիան oyz հարթության վրա ունի

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

կամ որ նույնն է՝

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-x^2)}=1 \qquad (x=const) \tag{գ}$$

հավասարումը:

Օգտվելով էլիպսի մակերեսի բանաձևից [43,օ5] և նկատի ունենալով, որ (գ) հավասարումն ունեցող էլիպսի կիսաառանցքները [7,ս7] որոշվում են

$$b_1=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad c_1=\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

բանաձևերով՝ այդ էլիպսի մակերեսի համար կունենանք

$$Q(x)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2):$$

Այնուհետև, օգտվելով (17) բանաձևից, տրված էլիպսոիդի ծավալը կարտահայտենք

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)dx$$

ինտեգրալով:

Հաշվելով ստացված ինտեգրալը՝ (բ) կանոնական հավասարումն ունեցող եռառանցք էլիպսոիդի ծավալի համար վերջնականապես կստանանք

$$V=\frac{4}{3}\pi abc: \tag{դ}$$

Եթե, մասնավոր դեպքում ընդունենք $a=b=c=R$, ապա դիտարկվող էլիպսոիդը կվերածվի R շառավղով գնդի, որի ծավալը կարտահայտվի (դ) բանաձևից ստացվող

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{ե}$$

բանաձևով:

Պարզ է, որ վերևում շարադրված եղանակով $y=c$ և $y=d$ հարթություններով սահմանափակված մարմնի ծավալի համար կստանանք

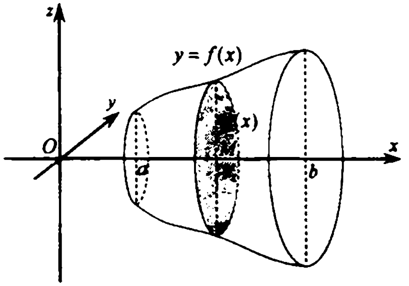
$$V=\int_{c}^{d}P(y)dy \tag{17'}$$

*բանաձևը, որտեղ $P(y)$-ը այդ մարմնի y օրդինատն ունեցող կետով անցնող և կոորդինատական oy առանցքին ուղղահայաց հատույթի մակերեսն է:**)

Անցնելով պտտման մարմինների ծավալներ հաշվելու բանաձևերի արտածմանը՝ դիտարկենք հետևյալ կարևոր դեպքերը.

ա) *Դիցուք մարմինն առաջանում է $[a,b]$ միջակայքում տրված $y=f(x)$ $[f(x)\geq 0]$ անընդհատ ֆունկցիայի գրաֆիկով, ox առանցքով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանն ox առանցքի շուրջը պտտելուց:*

Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող մարմնի և ox առանցքի $M(x)$ կետով



Նկ.85

$(a\leq x\leq b)$ անցնող ու այդ առանցքին ուղղահայաց հարթության հատումից առաջացած հատույթը շրջան է, որի կենտրոնը գտնվում է (նկ.85) ox առանցքի վրա, իսկ շառավիղը հավասար է $f(x)$ ֆունկցիայի արժեքին x կետում, այդ հատույթի մակերեսի համար կունենանք

$$Q(x)=\pi f^2(x) \qquad (a\leq x\leq b): \qquad (18)$$

$Q(x)$ ֆունկցիայի համար ստացած (18) արտահայտությունը տեղադրելով (17) բանաձևի մեջ՝ մեզ հետաքրքրող մարմնի ծավալի համար կստանանք

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx: \qquad (19)$$

Այսպիսով, եթե մարմինն առաջանում է $[a,b]$ միջակայքում տրված $y=f(x)$ անընդհատ կորով, ox առանցքով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված կորագիծ սեղանն ox առանցքի շուրջը պտտելուց, ապա այդ մարմնի ծավալն արտահայտվում է (19) ինտեգրալի միջոցով:

Օրինակ 5: Հաշվել

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad (գ)$$

կանոնական հավասարումն ունեցող էլիպսը [7,(5)] ox առանցքի շուրջը պտտելուց առաջացած պտտման էլիպսոիդի ծավալը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար (գ) հավասարումից գտնենք y^2-ն, այն տեղադրենք (19) բանաձևի մեջ և հաշվի առնենք, որ դիտարկվող մարմինը համաչափ է oz հարթության նկատմամբ:

Արդյունքում այդ մարմնի ծավալի համար կունենանք

$$V=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2 : \qquad (է)$$

---

*) $p(y)$-ը $[c,d]$ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Մասնավոր դեպքում ընդունելով $a=b=R$՝ կստանանք R շառավղով գնդի ծավալի բանաձևը.

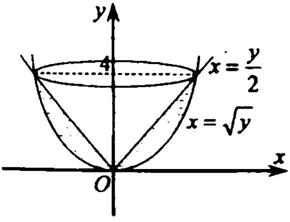
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3:$$

բ) *Այժմ ենթադրենք մարմինն առաջանում է oxy հարթության մեջ տրված $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ $[0\le f_1(x)\le f_2(x),\ a\le x\le b]$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներով և $x=a$, $x=b$ ուղիղներով սահմանափակված $BEFC$ կորագիծ սեղանը (նկ.69) ox առանցքի շուրջը պտտելուց:*

Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող մարմնի և ox առանցքի $M(x)$ կետով $(a\le x\le b)$ անցնող ու այդ առանցքին ուղղահայաց հարթության հատումից առաջացած հատույթը օղակ է, որի կենտրոնը գտնվում է ox առանցքի վրա, իսկ շառավիղները հավասար են $f_1(x)$ և $f_2(x)$ ֆունկցիաների արժեքներին նշված կետում՝ այդ հատույթի մակերեսի համար կունենանք

$$Q(x)=\pi\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]\qquad (a\le x\le b): \tag{20}$$

$Q(x)$ ֆունկցիայի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (17) բանաձևի մեջ՝ մեզ հետաքրքրող մարմնի ծավալի համար կստանանք



Նկ.86

$$V=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx: \tag{21}$$

Օրինակ 6: Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է $y=x^2$ և $2x-y=0$ կորերով սահմանափակված պատկերի պտտումից oy առանցքի շուրջը (նկ.86):

Լուծում: Նախ նկատենք, որ մեզ հետաքրքրող պատկերը սահմանափակված է

$$x=\sqrt{y},\quad x=\frac{y}{2}: \tag{ը}$$

կորերով:

Այնուհետև համատեղ լուծելով (ը) հավասարումները՝ գտնենք այդ հավասարումներն ունեցող կորերի հատման կետերի օրդինատները.

$$y_1=0,\ y_2=4:$$

Քանի որ $0\le y\le 4$ միջակայքում տեղի ունի $\sqrt{y}\ge y/2$ անհավասարությունը, ուստի նկատի ունենալով (17′) և (21) բանաձևերը՝ դիտարկվող մարմնի ծավալի համար կունենանք

$$V=\pi\int_0^4\left(y-\frac{y^2}{4}\right)dy=\pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^4=\frac{8\pi}{3}:$$

Օրինակ 7: Հաշվել այն մարմնի ծավալը, որն առաջանում է ox առանցքի շուրջը

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)$$

ցիկլոիդի [28,օ9] մեկ կամարի պտտումից:

Լուծում: Օգտվելով (19) բանաձևից՝ որոնելի ծավալի համար կստանանք [35], [39]

$$V=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi a^3\left(\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=5\pi^2a^3:$$

ԳԼՈՒԽ IX

ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

§46. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանումը: Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանը, անընդհատությունը և մասնակի ածանցյալները: Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ:

Մինչև հիմա մենք դիտարկում էինք երկու փոփոխականների համատեղ փոփոխություն[*], որոնցից մեկը կախված էր մյուսից, ընդ որում անկախ փոփոխականի [22,ս2] յուրաքանչյուր թույլատրելի արժեքի համապատասխանում էր կախյալ փոփոխականի որոշակի արժեք: Սակայն մաթեմատիկայում, ֆիզիկայում և այլ բնագավառներում հանդիպում են բազմաթիվ դեպքեր, երբ փոփոխականներից մեկը կախված է մի քանի անկախ փոփոխականներից:

Օրինակ 1: Ինչպես գիտենք, շրջանային գլանի ծավալն արտահայտվում է

$$V = \pi R^2 h \tag{ա}$$

բանաձևով, որտեղ R-ը գլանի հիմքի շառավիղն է, իսկ h-ը՝ նրա բարձրությունը:

Բերված բանաձևից երևում է, որ շրջանային գլանի ծավալի մեծությունը կախված է ինչպե՛ս նրա հիմքի շառավղից, այնպե՛ս էլ գլանի բարձրությունից, ինչը նշանակում է, որ h բարձրությամբ և հիմքի R շառավղով շրջանային գլանի ծավալը R և h փոփոխականների ֆունկցիա է:

Սահմանում 1: *x և y անկախ փոփոխականների փոփոխման տիրույթ ասելով կհասկանանք այդ փոփոխականների արժեքներից կազմված բոլոր (x,y) թվազույգերի բազմությունը:*

Սահմանում 2: *Եթե G փոփոխման տիրույթ ունեցող x և y անկախ փոփոխականների արժեքներից կազմված յուրաքանչյուր (x,y) թվազույգի ինչ-որ օրենքով համապատասխանում է z փոփոխականի որոշակի արժեք, ապա z-ը կոչվում է x և y փոփոխականների ֆունկցիա, որոշված G տիրույթում և այդ փաստը նշվում է հետևյալ կերպ՝*

$$z = z(x,y): \tag{1}$$

Սահմանում 3: *x և y անկախ փոփոխականների արժեքներից կազմված այն բոլոր թվազույգերի համախումբը, որոնց համար (1) ֆունկցիան ստանում է որոշակի թվային արժեք, կոչվում է այդ ֆունկցիայի որոշման կամ գոյության տիրույթ:*

Պարզ է, որ եթե (x,y) թվազույգին oxy հարթության մեջ համապատասխանեցնենք x և y կոորդինատներն ունեցող $M(x,y)$ կետը, ապա (1) ֆունկցիայի որոշման տիրույթն իրենից կներկայացնի oxy հարթությանը պատկանող կետերի բազմություն:

---

[*]) Այսինքն դիտարկում էինք մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներ:

Սահմանում 4: *Կասենք, որ G -ն հարթ, սահմանափակ տիրույթ է, եթե գոյություն ունի R $(R<+\infty)$ շառավղով շրջան, որը պարունակում է G տիրույթը:*

Մենք հիմնականում կուսումնասիրենք երկու փոփոխականի այնպիսի ֆունկցիաներ, որոնց որոշման տիրույթները սահմանափակված են որոշակի կորերով:

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիան (մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի նմանությամբ) կարելի է տալ աղյուսակով, երկրաչափորեն և բանաձևով (անալիտիկորեն): Մասնավորապես, երկու փոփոխականի ֆունկցիան տալ երկրաչափորեն, նշանակում է այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տանել oxy հարթությանն ուղղահայաց ուղիղ և այդ ուղղի վրա վերցնել տրված ֆունկցիայի արժեքին համապատասխանող կետ: Ստացված կետերի երկրաչափական տեղը կոչվում է երկու փոփոխականի ֆունկցիայի գրաֆիկ:

Այսպիսով, երկու փոփոխականի ֆունկցիայի գրաֆիկը մի մակերևույթ է, որի պրոյեկցիան oxy հարթության վրա այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթն է:

Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանումը կարելի է ընդհանրացնել երեք և ավելի փոփոխականների համար.

Սահմանում 5: *Եթե G փոփոխման տիրույթ ունեցող $x_1, x_2, \ldots, x_n$ անկախ փոփոխականների արժեքներից կազմված յուրաքանչյուր $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ համախմբի համապատասխանում է y փոփոխականի որոշակի արժեք, ապա y -ը կոչվում է տրված փոփոխականների ֆունկցիա, որոշված G տիրույթում և այդ փաստը նշվում է հետևյալ կերպ՝*

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n): \tag{2}$$

Սահմանում 6: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *փոփոխականների արժեքներից կազմված այն բոլոր համախմբությունների բազմությունը, որոնց համար (2) ֆունկցիան ստանում է որոշակի թվային արժեք, կոչվում է այդ ֆունկցիայի որոշման կամ գոյության տիրույթ:*

Վերադառնալով երկու փոփոխականի ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք oxy կոորդինատական հարթության մեջ ընկած որևէ G տիրույթում որոշված $z = z(x,y)$ ֆունկցիան:

Եթե y փոփոխականը թողնենք անփոփոխ, իսկ x փոփոխականին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $A(x+\Delta x, y)$ կետը դուրս չգա G տիրույթի սահմաններից, ապա դիտարկվող ֆունկցիան նույնպես կստանա աճ: Նշված աճը կոչվում է այդ ֆունկցիայի մասնակի աճ ըստ x -ի և նշանակվում է $\Delta_x z$ -ով.

$$\Delta_x z = z(x+\Delta x, y) - z(x,y): \tag{3}$$

Նույն ձևով, եթե x փոփոխականը թողնենք անփոփոխ, իսկ y փոփոխականին տանք այնպիսի Δy աճ, որ $B(x, y+\Delta y)$ կետը դուրս չգա G տիրույթի սահմաններից, ապա $z(x,y)$ ֆունկցիան կստանա աճ, որը կոչվում է այդ ֆունկցիայի մասնակի աճ ըստ y -ի և նշանակվում է $\Delta_y z$ -ով.

$$\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x, y): \qquad (4)$$

Վերջապես, եթե x և y փոփոխականներին համապատասխանաբար տանք այնպիսի Δx և Δy աճեր, որ $C(x + \Delta x, y + \Delta y)$ կետը դուրս չգա G տիրույթի սահմաններից, ապա $z(x, y)$ ֆունկցիան կստանա աճ, որը կոչվում է այդ ֆունկցիայի լրիվ աճ և նշանակվում է Δz-ով.

$$\Delta z = z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y): \qquad (5)$$

Նշենք, որ ընդհանուր դեպքում (1) ֆունկցիայի լրիվ աճը հավասար չէ այդ ֆունկցիայի մասնակի աճերի գումարին:

Սահմանում 7: *M_0-ն կոչվում է երկչափ G տիրույթի սահմանային կետ, եթե այդ կետի ցանկացած շրջակայք պարունակում է G տիրույթի, M_0-ից տարբեր գոնե մեկ կետ:*

Այժմ ուսումնասիրենք G տիրույթում որոշված $z(x, y)$ ֆունկցիայի վարքը, երբ այդ տիրույթի $M(x, y)$ կետը անսահմանափակորեն մոտենում է $M_0(x_0, y_0)$ սահմանային կետին:

Սահմանում 8: *Կասենք, որ x-ը x_0-ի և y-ը y_0-ի ձգտելիս G տիրույթում որոշված (1) ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց*

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \qquad (6)$$

տեղի ունի

$$|z(x, y) - A| < \delta \qquad (7)$$

անհավասարությունը՝ ընդ որում ենթադրվում է, որ $M(x, y)$ կետը պատկանում է G տիրույթին և տարբեր է $M(x_0, y_0)$ կետից:

Երկրաչափության տերմիններով բերված սահմանումը հնչում է հետևյալ կերպ՝

Սահմանում 9: *Կասենք, որ $z(M)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի $M(x, y)$ կետը այդ տիրույթի $M_0(x_0, y_0)$ սահմանային կետին ձգտելիս $z(M)$ ֆունկցիայի սահմանը A թիվն է, եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի δ դրական թիվ, որ հենց M և M_0 կետերի հեռավորությունը փոքր լինի δ-ից.*

$$|MM_0| < \delta, \qquad (6')$$

տեղի կունենա

$$|z(M) - A| < \delta \quad (M\text{-ը տարբեր է } M_0\text{-ից}) \qquad (7')$$

անհավասարությունը:

Այն փաստը, որ $M(x,y)$ կետը $M_0(x_0,y_0)$ կետին ձգտելիս A թիվը $z(x,y)$ ֆունկցիայի սահմանն է՝ կնշենք

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} z(x,y)=A, \quad \lim_{M\to M_0} z(M)=A \tag{8}$$

հավասարություններից որևէ մեկով:

Սահմանում 10: *Կասենք, որ $z(M)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի $M(x,y)$ կետը այդ տիրույթի $M_0(x_0,y_0)$ սահմանային կետին ձգտելիս $z(M)$ ֆունկցիայի սահմանը պլյուս անվերջն է (մինուս անվերջն է), եթե ցանկացած ε դրական թվի համար գոյություն ունի այնպիսի E դրական թիվ, որ հենց տեղի ունենա (6′) անհավասարությունը, ապա տեղի կունենա նաև*

$$z(M)>E \qquad [z(M)<-E\,,\ M\text{-ը տարբեր է } M_0\text{-ից}] \tag{7′′}$$

անհավասարությունը:

Սահմանում 11: *Կասենք, որ $M_0(x_0,y_0)$-ն անիսկական կետ է, եթե այդ կետի կոորդինատներից գոնե մեկը հավասար է անվերջի:*

Կարող ենք մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համապատասխան սահմանման նմանությամբ սահմանել $z(M)$ ֆունկցիայի սահմանը նաև այն դեպքում, երբ $M(x,y)$ կետը ձգտում է $M_0(x_0,y_0)$ անիսկական կետի:

Նշենք, որ $z(x,y)$ ֆունկցիայի սահմանին վերաբերող բերված բոլոր սահմանումների էությունը հետևյալն է՝

$z(x,y)$ ֆունկցիայի արժեքները ցանկացած չափով մոտենում են այդ ֆունկցիայի սահմանին, հենց որ անկախ փոփոխականների արժեքները «բավականաչափ» մոտենում են իրենց համապատասխան սահմաններին:

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի հասկացության հետ սերտորեն կապված է այդ ֆունկցիայի անընդհատության հասկացությունը:

Երկու փոփոխականի $z(x,y)$ ֆունկցիայի անընդհատության հասկացության հետ ծանոթանալու համար ենթադրենք M_0-ն տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթի սահմանային կետ է և պատկանում է այդ տիրույթին, այնպես որ M_0 կետում $z(x,y)$ ֆունկցիան ունի որոշակի վերջավոր արժեք:

Սահմանում 12: *G տիրույթում որոշված $z=z(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ այդ տիրույթի $M_0(x_0,y_0)$ կետում, եթե G տիրույթի $M(x,y)$ կետը կամայական ձևով $M_0(x_0,y_0)$ կետին ձգտելիս, տեղի ունի*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} z(x,y)=z(x_0,y_0) \tag{9}$$

հավասարությունը:

Կատարելով $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ նշանակումները (Δx և Δy աճերն ընտրենք այնպես, որ $C(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ կետը դուրս չգա G տիրույթի սահմաններից), կարող ենք (9) հավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)=z(x_0,y_0) \qquad (9')$$

կամ որ նույնն է՝

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[z(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)-z(x_0,y_0)\right]=0 \qquad (9'')$$

տեսքով:

Կատարենք և մեկ նշանակում.

$$\Delta\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\ : \qquad (10)$$

Ակնհայտ է, որ $\Delta\rho$ -ն այն և միայն այն դեպքում կձգտի զրոյի, երբ Δx և Δy աճերը միաժամանակ ձգտեն զրոյի:

Նկատի ունենալով վերոգրյալը և օգտվելով (5) նշանակումից՝ կարող ենք (9'') հավասարությունը ներկայացնել

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta z(x_0,y_0)=0 \qquad (9''')$$

տեսքով:

Ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ երկու փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիան (ինչպես և մեկ փոփոխականի անընդհատ ֆունկցիան [24,(5)]) բնութագրվում է նրանով, որ այդ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականների անվերջ փոքր աճերին համապատասխանում է տրված ֆունկցիայի նույնպես անվերջ փոքր լրիվ աճ:

Սահմանում 13: *Կասենք, որ $z=z(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է G տիրույթում, եթե այն անընդհատ է այդ տիրույթի բոլոր կետերում:*

Սահմանում 14: *$z=z(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է խզվող M_0 կետում, եթե այն անընդհատ չէ այդ կետում:*

Այժմ առանց ապացույցների ձևակերպենք մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունները՝

1°. *Փակ և սահմանափակ տիրույթում որոշված $y(x_1,x_2,\dots,x_n)$ անընդհատ ֆունկցիան այդ տիրույթում ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:*

2°. *Եթե m -ը և M -ը փակ և սահմանափակ G տիրույթում որոշված $y=y(x_1,x_2,\dots,x_n)$ անընդհատ ֆունկցիայի համապատասխանաբար փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են և m_0 -ն այդ արժեքների մեջ ընկած կամայական թիվ է, ապա նշված տիրույթում գոյություն ունի այնպիսի $P_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ կետ, որ տեղի ունի*

$$P_0(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)=m_0$$

հավասարությունը:[*]

Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի ուսումնասիրությունը շարունակելու համար ծանոթանանք նաև այդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալի հասկա-

---

*) Համեմատի՛ր մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի համապատասխան հատկությունների հետ [25,թ3,թ4]:

ցության հետ: Նշենք, որ գրության պարզության համար նորից կսահմանափակվենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքով:

Դիցուք $M_0(x_0,y_0)$-ն G տիրույթում որոշված $z=z(x,y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի որևէ կետ է: M_0-ի աբսցիսին տանք այնպիսի Δx աճ, որ $A(x_0+\Delta x,y_0)$ կետը դուրս չգա G տիրույթի սահմաններից, հաշվենք դիտարկվող ֆունկցիայի ստացած մասնակի աճը, կազմենք $\Delta_x z/\Delta x$ քանորդը և հաշվենք այդ քանորդի սահմանը, երբ Δx աճը ձգտում է զրոյի.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}:$$

Սահմանում 15: *Եթե $z(x,y)$ ֆունկցիայի $\Delta_x z$ մասնակի աճի և այդ աճն առաջացնող x անկախ փոփոխականի Δx աճի հարաբերությունը Δx-ը զրոյի ձգտելիս ունի սահման, ապա այդ սահմանը կոչվում է $z(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ x անկախ փոփոխականի և նշանակվում է*

$$z'_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

պայմանանշաններից որևէ մեկով:

Այսպիսով, եթե $M_0(x_0,y_0)$ կետում $z(x,y)$ ֆունկցիան ունի մասնակի ածանցյալ ըստ x-ի, ապա այդ ածանցյալն արտահայտվում է

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x_0+\Delta x,y_0)-z(x_0,y_0)}{\Delta x} \qquad (11)$$

հավասարությամբ:

Նկատենք, որ եթե երկու փոփոխականի $z(x,y)$ ֆունկցիան ունի z'_x մասնակի ածանցյալ, ապա ընդհանուր դեպքում այդ ածանցյալը նույնպես ֆունկցիա է x-ից և y-ից:

Յասկանալի է, որ նույն ձևով սահմանվում է նաև $z(x,y)$ ֆունկցիայի z'_y մասնակի ածանցյալը.

$$\frac{\partial z}{\partial z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x,y+\Delta y)-z(x,y)}{\Delta y}: \qquad (12)$$

Բնականաբար նույն ձևով սահմանվում են նաև երկուսից ավել փոփոխականներ ունեցող ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները:

Այսպիսով, մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ որևէ փոփոխականի հաշվելու համար, անհրաժեշտ է մնացած փոփոխականները դիտել իբրև հաստատուններ և մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ածանցման կանոններով հաշվել պահանջվող ածանցյալը:

Օրինակ 2: Յաշվել հետևյալ ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալները՝

ա) $z=\sqrt{x}\cos y$, բ) $z=e^{x^2y}$:

Լուծում: Ունենք [27,(7),(8′),(12)],[28,(9)] ա) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\cos y}{2\sqrt{x}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sqrt{x}\sin y$,

բ) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy\cdot e^{x^2y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot e^{x^2y}$:

Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալների հետ ծանոթանալու համար ենթադրենք G տիրույթում որոշված $z(x,y)$ ֆունկցիան այդ տիրույթում ունի առաջին կարգի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ: Ընդհանուր դեպքում լինելով x և y փոփոխականների ֆունկցիաներ, z'_x և z'_y ածանցյալներն էլ իրենց հերթին կարող են ունենալ առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներ:

Սահմանում 16: *Եթե G տիրույթում որոշված $z(x,y)$ ֆունկցիայի z'_x, z'_y մասնակի ածանցյալները նշված տիրույթում ունեն առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներ, ապա այդ ածանցյալները կոչվում են տրված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ և նշանակվում են*

$$z''_{xx},\ z''_{yy},\ z''_{xy},\ z''_{yx}$$

կամ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \tag{13}$$

պայմանանշաններով:

Նույն ձևով սահմանվում են նաև երկու փոփոխականի ֆունկցիայի երրորդ, չորրորդ և ավելի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները:

Սահմանում 17: *Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի, ըստ տարբեր փոփոխականների մասնակի ածանցյալները կոչվում են այդ ֆունկցիայի խառը մասնակի ածանցյալներ:*

Համաձայն բերված սահմանման, $z(x,y)$ ֆունկցիայի (13) մասնակի ածանցյալներից վերջին երկուսը այդ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալներ են:

Օրինակ 3: Հաշվել հետևյալ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը մասնակի ածանցյալները՝

$$z(x,y,t)=x^4y^3t:$$

Լուծում: Ունենք

$$z'_x=4x^3y^3t,\quad z'_y=3x^4y^2t,$$

հետևաբար

$$z''_{xy}=12x^3y^2t,\quad z''_{yx}=12x^3y^2t:$$

Ինչպես տեսնում ենք, բերված օրինակում դիտարկված ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառը ածանցյալները համընկնում են, երբ ածանցումը կատարվում է ըստ միևնույն փոփոխականների, բայց տարբեր հաջորդականությամբ:

Պարզվում է՝ մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների խառը ածանցյալներին վերաբերող նկատված հավասարությունը պատահական չէ և այն տեղի ունի, եթե բավարարվում են որոշակի պայմաններ: Այդ կապակցությամբ ձևակերպենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե $z = z(x,y)$ ֆունկցիան և նրա $z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx}$ մասնակի ածանցյալները որոշված են և անընդհատ $M(x,y)$ կետում ու այդ կետի մի որևէ շրջակայքում, ապա նշված կետում տեղի ունի*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad \left(z''_{xy} = z''_{yx}\right) \tag{14}$$

հավասարությունը:

Ձևակերպած թեորեմից հետևում է, որ $M(x,y)$ կետում և այդ կետի որևէ շրջակայքում (1) ֆունկցիայի

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^k \partial y^{n-k}}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-k} \partial x^k}$$

մասնակի ածանցյալների անընդհատությունից բխում է այդ ածանցյալների հավասարությունը:

Պարզվում է՝ տեղի ունի նաև հետևյալ ընդհանուր պնդումը.

Թեորեմ 2: *Եթե $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան և նրա մինչև k-րդ կարգի $(2 \le k \le n)$ խառն ածանցյալներն անընդհատ են $M(x,y)$ կետում և այդ կետի որևէ շրջակայքում, ապա k-րդ կարգի ցանկացած խառն ածանցյալի արժեքը նշված կետում կախված չէ այն հերթականությունից, որով կատարվում են հաջորդական ածանցումները:*

Օրինակ 4: Ապացուցել հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x},$$

որտեղ

$$u = e^{xy} \sin z:$$

Լուծում: Ունենք [27,(10)]

$$u'_x = y e^{xy} \sin z, \; u''_{xy} = (1+xy) e^{xy} \sin z, \; u'''_{xyz} = (1+xy) e^{xy} \cos z,$$

$$u'_y = x e^{xy} \sin z, \; u''_{yz} = x e^{xy} \cos z, \; u'''_{yzx} = (1+xy) e^{xy} \cos z:$$

§47. Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը, լրիվ դիֆերենցիալը և նրա կապը մասնակի ածանցյալների հետ: Դիֆերենցելիության բավարար պայմանը:

Մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ուսումնասիրության ժամանակ մենք դիտարկել ենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի աճը x_0 կետում.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \qquad (A = const) \tag{1}$$

տեսքով ներկայացնելու հարցը [29,(8)] և ցույց ենք տվել, որ նշված ներկայացումը հնարավոր է այն և միայն այն ժամանակ, երբ գոյություն ունի $f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում (1) հավասարությունը իրականանում է, երբ $A = f'(x_0)$-ի: Հիշեցնենք նաև, որ $f(x)$ ֆունկցիայի աճի գծային մասը՝

$$A\cdot\Delta x = f'(x_0)\Delta x,$$

անվանել ենք այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ:

Անցնելով երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալի հետ ծանոթանալուն՝ դիտարկենք oxy հարթության G տիրույթում որոշված

$$z = z(x,y) \tag{2}$$

ֆունկցիան և ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Եթե G տիրույթի $M_0(x_0,y_0)$ կետում և այդ կետի ինչ-որ շրջակայքում գոյություն ունեն $z(x,y)$ ֆունկցիայի $z'_x(x,y)$ և $z'_y(x,y)$ վերջավոր մասնակի ածանցյալներ, որոնք որպես x-ի և y-ի ֆունկցիաներ անընդհատ են նշված կետում, ապա (1) ֆունկցիայի լրիվ աճը M_0 կետում կարելի է ներկայացնել*

$$\Delta z(x_0,y_0) = z'_x(x_0,y_0)\Delta x + z'_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y \tag{3}$$

տեսքով, որտեղ α-ն ու β-ն կախված են Δx-ից, Δy-ից և նրանց հետ մեկտեղ ձգտում են զրոյի:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար դիտարկվող ֆունկցիայի լրիվ աճը $M_0(x_0,y_0)$ կետում [46,(5)] ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta z(x_0,y_0) = z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0) =$$
$$= [z(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - z(x_0, y_0+\Delta y)] + [z(x_0, y_0+\Delta y) - z(x_0,y_0)]: \tag{4}$$

Քառակուսի փակագծերի ներսում գրված տարբերություններից յուրաքանչյուրն իրենից ներկայացնում է (2) ֆունկցիայի մասնակի աճ: Այդ տարբերությունների համար (որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի աճի) գրելով վերջավոր աճերի Լագրանժի բանաձևը [30,(9)], (2) ֆունկցիայի լրիվ աճը M_0 կետում կներկայացնենք

$$\Delta z(x_0,y_0) = z'_x(\bar{x}, y_0+\Delta y)\Delta x + z'_y(x_0,\bar{y})\Delta y \tag{5}$$

տեսքով, որտեղ

$$x_0 < \bar{x} < x_0+\Delta x, \quad y_0 < \bar{y} < y_0+\Delta y:$$

Քանի որ ըստ պայմանի դիտարկվող ֆունկցիայի $z'_x(x,y)$ և $z'_y(x,y)$ մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են $M_0(x_0,y_0)$ կետում, հետևաբար տեղի ունեն

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_x(\bar{x}, y_0+\Delta y) = z'_x(x_0,y_0), \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z'_y(x_0,\bar{y}) = z'_y(x_0,y_0) \tag{6}$$

հավասարությունները [22,թ3], [46,ս1]:

Ինչպես գիտենք, (6) հավասարություններից բխում են

$$z'_x(\bar{x}, y_0+\Delta y) = z'_x(x_0,y_0)+\alpha, \quad z'_y(x_0,\bar{y}) = z'_y(x_0,y_0)+\beta \tag{7}$$

ներկայացումները [23,թ6], որտեղ α-ն ու β-ն անվերջ փոքր մեծություններ են [23,ս1], երբ (2) ֆունկցիայի արգումենտների Δx և Δy աճերը ձգտում են զրոյի:

Դժվար չէ նկատել, որ (7) հավասարությունների հաշվառումով, (5) հավասարությունից կստանանք դիտարկվող ֆունկցիայի լրիվ աճի պահանջվող ներկայացումը:

Իպա

Հետևանք 1: *Եթե G տիրույթում որոշված (2) ֆունկցիայի $z'_x(x,y)$ ու $z'_y(x,y)$ մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն և անընդհատ են այդ տիրույթի $M_0(x_0,y_0)$ կետում, ապա տրված ֆունկցիան ևս անընդհատ է այդ կետում:*

Ապացույց: Դիցուք G տիրույթում որոշված $z(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն և անընդհատ են այդ տիրույթի M_0 կետում: Այդ դեպքում, համաձայն թեորեմ 1-ի, (2) ֆունկցիայի լրիվ աճը կարող ենք ներկայացնել (3) տեսքով, որտեղ α-ն ու β-ն կախված են Δx-ից, Δy-ից և նրանց հետ մեկտեղ ձգտում են զրոյի: (3) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ Δx և Δy աճերը ձգտում են զրոյի, կստանանք

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z(x_0,y_0)=0:$$

Ինչպես գիտենք [46,(9'')], ստացված հավասարությունը նշանակում է, որ (2) ֆունկցիան անընդհատ է $M_0(x_0,y_0)$ կետում:

Իպա

Այժմ ցույց տանք, որ $\Delta\rho$-ն [46,(10)] զրոյի ձգտելիս (2) ֆունկցիայի լրիվ աճի (3) ներկայացման աջ կողմի վերջին երկու գումարելիների գումարն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քան $\Delta\rho$-ն:

Իրոք, օգտվելով հետևյալ ակնհայտ գնահատականներից՝

$$\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right|=\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le 1,\qquad \left|\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right|=\left|\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le 1$$

և հաշվի առնելով, որ $\Delta\rho$-ն զրոյի ձգտելիս զրոյի են ձգտում Δx և Δy աճերը և հետևաբար նաև α-ն ու β-ն, կստանանք [22,թ6], [23,թ3]

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y}{\Delta\rho}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\left(\alpha\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right)+\lim_{\Delta\rho\to 0}\left(\beta\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)=0,$$

ինչը նշանակում է [23,u4], որ $\Delta\rho$-ն զրոյի ձգտելիս $(\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y)$-ն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քան $\Delta\rho$-ն.

$$\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y=o(\Delta\rho): \qquad (8)$$

Իպա

Ստացված հավասարության հաշվառումով (2) ֆունկցիայի լրիվ աճի (3) ներկայացումը կընդունի

$$\Delta z(x_0,y_0)=z'_x(x_0,y_0)\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta\rho) \qquad (3')$$

տեսքը:

Ինչպես տեսնում ենք, թեորեմ 1-ի պայմաններին բավարարող $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ աճի (3′) ներկայացման առաջին երկու գումարելիների գումարը գծային է այդ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականների աճերի նկատմամբ, և եթե $z'_x(x_0,y_0)$ և $z'_y(x_0,y_0)$ մասնակի ածանցյալներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից, այն իրենից ներկայացնում է (2) ֆունկցիայի լրիվ աճի գլխավոր մասը [29], որովհետև այդ աճից տարբերվում է Δx և Δy աճերի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծությամբ:

Սահմանում 1: $z=z(x,y)$ *ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի* $M_0(x_0,y_0)$ *կետում, եթե տրված ֆունկցիայի լրիվ աճն այդ կետում հնարավոր է ներկայացնել երկու գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից մեկը գծային է* Δx *և* Δy *աճերի նկատմամբ, իսկ մյուսն ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծություն է, քան* Δx *-ը և* Δy *-ը:*

Սահմանում 2: *Դիֆերենցելի ֆունկցիայի լրիվ աճի գծային մասը կոչվում է այդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ և նշանակվում է* dz *պայմանանշանով.*

$$dz=z'_x\Delta x+z'_y\Delta y: \tag{9}$$

Օգտվելով կատարված նշանակումից՝ կարող ենք (2) ֆունկցիայի լրիվ աճը ներկայացնել

$$\Delta z=dz+o(\Delta\rho) \tag{3″}$$

տեսքով, որտեղից երևում է, որ $\Delta\rho$-ի նկատմամբ ավելի բարձր կարգի անվերջ փոքր մեծության ճշտությամբ տեղի ունի $\Delta z\approx dz$ մոտավոր հավասարությունը:

Հաշվի առնելով, որ անկախ փոփոխականի դիֆերենցիալը հավասար է այդ փոփոխականի կամայական աճին.

$$dx=x'_x\Delta x+x'_y\Delta y=1\cdot\Delta x+0\cdot dy=\Delta x,$$
$$dy=y'_x\Delta x+y'_y\Delta y=0\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y=\Delta y,$$

(9) հավասարությունից կստանանք

$$dz=z'_xdx+z'_ydy: \tag{10}$$

Սահմանում 3: $z(x,y)$ *ֆունկցիայի* z'_x *մասնակի ածանցյալի և* x *անկախ փոփոխականի* dx *դիֆերենցիալի արտադրյալը կոչվում է այդ ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալ ըստ* x *-ի և նշանակվում է* d_xz *պայմանանշանով.*

$$d_xz=z'_xdx: \tag{11}$$

Նույն ձևով սահմանվում է նաև $z(x,y)$ ֆունկցիայի d_yz մասնակի դիֆերենցիալը.

$$d_yz=z'_ydy: \tag{11′}$$

Վերջին երկու բանաձևերից հետևում է, որ (2) ֆունկցիայի z'_x և z'_y մասնակի ածանցյալները կարող ենք համապատասխանաբար ներկայացնել

$$\frac{d_x z}{dx} \text{ և } \frac{d_y z}{dy}$$

կոտորակների տեսքով:

Նկատենք նաև, որ (10), (11) և(11′) բանաձևերի շնորհիվ $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը կարող ենք ներկայացնել

$$dz = d_x z + d_y z \tag{10′}$$

տեսքով:

Այսպիսով, երկու փոփոխականի ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը հավասար է այդ ֆունկցիայի մասնակի դիֆերենցիալների գումարին:

Ամփոփելով վերոգրյալ դատողությունները՝ ստանում ենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *(Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանը):*

Եթե G տիրույթի $M_0(x_0,y_0)$ կետում և այդ կետի ինչ-որ շրջակայքում գոյություն ունեն այդ տիրույթում որոշված $z(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ, որոնք որպես x և y փոփոխականների ֆունկցիաներ անընդհատ են M_0 կետում, ապա $z(x,y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է M_0 կետում, և նրա դիֆերենցիալը հավասար է իր մասնակի դիֆերենցիալների գումարին:

Համեմատելով երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանը մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանի հետ [29,p1], *նկատում ենք, որ այդ պայմաններն իրարից տարբերվում են էապես. մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում $f'(x_0)$ վերջավոր ածանցյալի գոյությունը բավարար է, որ $f(x)$ ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի x_0 կետում, մինչդեռ $z'_x(x_0,y_0)$, $z'_y(x_0,y_0)$ վերջավոր մասնակի ածանցյալների գոյությունը դեռևս բավարար չէ, որպեսզի $z(x,y)$ ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի $M_0(x_0,y_0)$ կետում (հարկավոր է նաև, որ այդ մասնակի ածանցյալները լինեն անընդհատ M_0 կետում):*

§48. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալները: Առաջին կարգի լրիվ դիֆերենցիալի տեսքի անփոփոխելիությունը: Անբացահայտ ֆունկցիաներ: Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմը և ածանցյալը:

Նորից դիտարկենք կոորդինատական oxy հարթության G տիրույթում որոշված

$$z = z(x,y) \tag{1}$$

ֆունկցիան և ենթադրենք, որ այդ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականներն էլ t փոփոխականի ֆունկցիաներ են.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{2}$$

որոշված մի որևէ $[\alpha,\beta]$ միջակայքում:

Ենթադրենք նաև, որ t-ն α-ից մինչև β սահմաններում փոփոխվելիս (2) հավասարություններով տրվող $M(x,y)$ կետը դուրս չի գալիս G տիրույթի սահմաններից:

x և y փոփոխականների (2) արժեքները տեղադրելով (1) ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$z = z[x(t), y(t)], \tag{1'}$$

ինչը նշանակում է, որ z-ը x-ի և y-ի միջոցով t փոփոխականի բարդ ֆունկցիա է:

Ենթադրենք $[\alpha,\beta]$ միջակայքում գոյություն ունեն $x'(t)$ և $y'(t)$ վերջավոր ածանցյալներ, իսկ G տիրույթում՝ z'_x և z'_y անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, և t փոփոխականին տանք այնպիսի Δt աճ, որ $t+\Delta t$ արժեքը նույնպես պատկանի $[\alpha,\beta]$ միջակայքին: Այդ դեպքում x-ը, y-ը և հետևաբար նաև z-ը համապատասխանաբար կստանան Δx, Δy և Δz աճ: Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունների դեպքում կարող ենք (1) ֆունկցիայի լրիվ աճը ներկայացնել

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y \tag{3}$$

տեսքով [47,p1], որտեղ α-ն ու β-ն կախված են Δx-ից, Δy-ից և նրանց հետ մեկտեղ ձգտում են զրոյի:

(3) հավասարության երկու կողմերը բաժանելով Δt-ի վրա՝ կստանանք

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}: \tag{4}$$

$[\alpha,\beta]$ միջակայքում $x'(t)$ և $y'(t)$ վերջավոր ածանցյալների գոյությունից հետևում է, որ $x(t)$ և $y(t)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են այդ միջակայքում [27,p1]: Հետևաբար, եթե Δt աճը ձգտեցնենք զրոյի, ապա Δx և Δy աճերը նույնպես կձգտեն զրոյի [24,(5)]: Այդ դեպքում զրոյի կձգտեն նաև α և β մեծությունները:

Այսպիսով, եթե (4) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ Δt-ն ձգտում է զրոյի և հաշվի առնենք, որ (2) ֆունկցիաների ածանցյալները վերջավոր են $[\alpha,\beta]$ միջակայքում՝ կունենանք

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}: \tag{5}$$

Ամփոփելով արդյունքները՝ կարող ենք պնդել, որ $x'(t)$, $y'(t)$ ածանցյալների և z'_x, z'_y մասնակի ածանցյալների վերաբերյալ կատարված ենթադրու-

յուններրի դեպքում գոյություն ունի (1′) բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը և տեղի ունի (5) բանաձևը:

Օրինակ 1: Հաշվել $\dfrac{dz}{dt}$ ածանցյալը, եթե

$$z = e^{x-2y}, \quad x = \sin t, \quad y = t^3 \qquad (-\infty < t < \infty):$$

Լուծում: Ունենք [27,(7),(8′)(10)], [28,(9),(15′)]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2e^{x-2y}, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 :$$

Հետևաբար, օգտվելով (5) բանաձևից, $\dfrac{dz}{dt}$ ածանցյալի համար կստանանք

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-2y}\cos t - 2e^{x-2y}\cdot 3t^2 = \left(\cos t - 6t^2\right)e^{\sin t - 2t^3} :$$

Այժմ ենթադրենք $z(x,y)$ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականներն u և v փոփոխականների ֆունկցիաներ են.

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \tag{6}$$

որոշված oxy հարթության մի որևէ P տիրույթում:

x և y փոփոխականների (6) արտահայտությունները տեղադրելով (1) ֆունկցիայի մեջ՝ կունենանք

$$z = z[x(u,v),\ y(u,v)], \tag{1″}$$

ինչը նշանակում է, որ z-ը x-ի և y-ի միջոցով u և v փոփոխականների բարդ ֆունկցիա է:

G տիրույթում $z(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալների գոյությունից և անընդհատությունից բացի, ենթադրենք նաև, որ P տիրույթում գոյություն ունեն

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v}$$

վերջավոր մասնակի ածանցյալները և դնենք $\partial z/\partial u, \partial z/\partial v$ մասնակի ածանցյալները գտնելու խնդիրը:

Դրված խնդիրը լուծելու համար v անկախ փոփոխականը թողնենք անփոփոխ, իսկ u անկախ փոփոխականին տանք այնպիսի Δu աճ, որ $A(u+\Delta u, v)$ կետը դուրս չգա P տիրույթի սահմաններից: Այդ դեպքում x-ը, y-ը և հետևաբար նաև z-ը համապատասխանաբար կստանան $\Delta_u x, \Delta_u y$ և Δz աճ:

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունների դեպքում կարող ենք (1) ֆունկցիայի լրիվ աճը ներկայացնել

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta_u y + \alpha\Delta_u x + \beta\Delta_u y \tag{7}$$

տեսքով, որտեղ α-ն ու β-ն կախված են $\Delta_u x$ և $\Delta_u y$ աճերից և նրանց հետ միասին ձգտում են զրոյի:

Վերջին հավասարության երկու կողմերը բաժանելով Δu-ի վրա՝ կստանանք

$$\frac{\Delta z}{\Delta u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta_u x}{\Delta u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta_u y}{\Delta u}+\alpha\frac{\Delta_u x}{\Delta u}+\beta\frac{\Delta_u y}{\Delta u}: \tag{8}$$

Կատարված ենթադրություններից հետևում է, որ եթե Δu աճը ձգտեցնենք զրոյի, ապա $\Delta_u x$-ը, $\Delta_u y$-ը, α-ն և β-ն նույնպես կձգտեն զրոյի:

Այսպիսով, եթե (8) հավասարության մեջ անցնենք սահմանի, երբ Δu-ն ձգտում է զրոյի և հաշվի առնենք, որ $\frac{\partial x}{\partial u}$ և $\frac{\partial y}{\partial u}$ մասնակի ածանցյալները վերջավոր են P տիրույթում՝ կունենանք

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}: \tag{9}$$

Նույն ձևով կստանանք նաև

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \tag{10}$$

բանաձևը:

Ամփոփելով արդյունքները, կարող ենք պնդել, որ (1) և (6) ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալների վերաբերյալ կատարված ենթադրությունների դեպքում գոյություն ունեն (1´´) բարդ ֆունկցիայի $\partial z/\partial u$ և $\partial z/\partial v$ մասնակի ածանցյալները և տեղի ունեն (9) և (10) բանաձևերը:

Օրինակ 2: Հաշվել $\frac{\partial z}{\partial u}$ և $\frac{\partial z}{\partial v}$ մասնակի ածանցյալները, եթե

$$z=x^2y-y^2x,\quad x=u\cos v,\quad y=u\sin v:$$

Լուծում: Ունենք

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-u\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=u\cos v:$$

Հետևաբար, օգտվելով (9) և (10) բանաձևերից, $\frac{\partial z}{\partial u}$ և $\frac{\partial z}{\partial v}$ ածանցյալների համար կստանանք

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\left(2xy-y^2\right)\cos v+\left(x^2-2xy\right)\sin v=3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\left(2xy-y^2\right)u\sin v+\left(x^2-2xy\right)u\cos v=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v):$$

Այժմ ենթադրելով, որ իրենց որոշման տիրույթներում (1) և (6) ֆունկցիաները ունեն առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ.

$$z'_x,\quad z'_y,\quad x'_u,\quad x'_v,\quad y'_u,\quad y'_v,$$

հաշվենք $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալը:

Ինչպես գիտենք, երկու փոփոխականի $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն արտահայտվում է

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{11}$$

բանաձևով [47,(10)]:

Քանի որ քննարկվող դեպքում (1)-ը x և y փոփոխականների միջոցով ֆունկցիա է u -ից և v -ից, ուստի u և v փոփոխականների նկատմամբ $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն ունի

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \tag{12}$$

տեսքը:

Օգտվելով (9) և (10) բանաձևերից՝ (1′′) ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի համար կունենանք

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right):$$

Նկատելով նաև, որ վերջին երկու փակագծերի ներսում գրված արտահայտությունները համապատասխանաբար $x(u,v)$ և $y(u,v)$ ֆունկցիաների լրիվ դիֆերենցիալներն են՝ կստանանք

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy: \tag{13}$$

Ինչպես տեսնում ենք, կրկին ստացանք $z(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալի (11) տեսքը՝ չնայած դիտարկվող դեպքում x -ը և y -ը (1) ֆունկցիայի համար անկախ փոփոխականներ չեն:

Այսպիսով, երկու փոփոխականի ֆունկցիայի առաջին կարգի լրիվ դիֆերենցիալի տեսքը մնում է նույնը նաև այն դեպքում, երբ այդ ֆունկցիայի անկախ փոփոխականներն իրենց հերթին ֆունկցիաներ են այլ փոփոխականներից:)*

Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի առաջին կարգի լրիվ դիֆերենցիալի նշված հատկությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի առաջին կարգի լրիվ դիֆերենցիալի տեսքի անփոփոխելիության հատկություն:

Անցնելով անբացահայտ ֆունկցիաների ուսումնասիրությանը՝ ենթադրենք x և y փոփոխականները միմյանց հետ կապված են y -ի նկատմամբ չլուծված

$$F(x,y) = 0 \tag{14}$$

հավասարումով, որտեղ $F(x,y)$ -ը oxy հարթության մի որևէ G տիրույթում որոշված երկու փոփոխականի ֆունկցիա է:

*) Նկատենք, որ երկու փոփոխականի բարդ ֆունկցիայի դեպքում dx և dy դիֆերենցիալները ոչ թե համապատասխան անկախ փոփոխականների կամայական աճեր են, այլ՝ $x(u,v)$ և $y(u,v)$ ֆունկցիաների լրիվ դիֆերենցիալներ:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան տրված է (14) անբացահայտ տեսքով, եթե x փոփոխականի յուրաքանչյուր արժեքի համար, որը փոփոխվում է մի որևէ միջակայքում, գոյություն ունի y փոփոխականի մեկ որոշակի արժեք, որը x-ի համապատասխան արժեքի հետ համատեղ բավարարում է y-ի նկատմամբ չլուծված (14) հավասարմանը:*

Օրինակ 3:

$$y-x-\sin y=0$$

հավասարումը որոշում է y-ը որպես x-ի անբացահայտ ֆունկցիա:

Սահմանում 2: *Կասենք, որ $(a,b;c,d)$ ուղղանկյան մեջ $(a<x<b;\ c<y<d)$ (14) հավասարումը որոշում է y-ը որպես x-ի ֆունկցիա, եթե (a,b) միջակայքից վերցրած x-ի յուրաքանչյուր արժեքի համար այդ հավասարումը (c,d) միջակայքում ունի մեկ և միայն մեկ լուծում:*

Սահմանում 3: *Եթե (14)-ը հանրահաշվական հավասարում է, այսինքն, եթե $F(x,y)$-ը x-ի և y-ի նկատմամբ ամբողջ բազմանդամ է, ապա այդ ֆունկցիայով որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան նույնպես կոչվում է հանրահաշվական:*

Այժմ ձևակերպենք անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմը.

Թեորեմ 1: *Դիցուք երկու փոփոխականի $F(x,y)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.*

1) *որոշված է և անընդհատ $M_0(x_0,y_0)$ «կենտրոնով» $[x_0-a, x_0+a; y_0-b, y_0+b]$ ուղղանկյան մեջ,*

2) *M_0 կետում հավասարվում է զրոյի.*

$$F(x_0,y_0)=0,$$

3) *անփոփոխ x-ի դեպքում y-ի աճման հետ կա՛մ մոնոտոն աճում է, կա՛մ էլ՝ մոնոտոն նվազում:*

Նշված պայմանների բավարարման դեպքում գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որի ներսում (14) հավասարումը որոշում է y-ը որպես x-ի անընդհատ ֆունկցիա՝ $y=f(x)$, ընդ որում x_0 կետում այդ ֆունկցիայի արժեքը հավասար է y_0-ի.

$$f(x_0)=y_0:$$

Վերջում ապացուցենք անբացահայտ ֆունկցիայի ածանցյալին վերաբերող հետևյալ կարևոր թեորեմը՝

Թեորեմ 2: *Դիցուք (14) հավասարումը որոշում է y-ը որպես x-ի անընդհատ ֆունկցիա, ընդ որում $F(x,y)$-ը $F'_x(x,y)$-ը և $F'_y(x,y)$-ը $M(x,y)$ կետը պարունակող ինչ-որ մի G տիրույթում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են: Այդ դեպքում, եթե M կետի կոորդինատները բավարարում են (14) հավա-*

սարմանը և $F'_y(x,y)$ ածանցյալի արժեքը նշված կետում տարբեր է զրոյից.

$$F'_y(x,y)\big|_M \neq 0, \tag{15}$$

ապա այդ կետում գոյություն ունի y'_x անընդհատ ածանցյալ, որն արտահայտվում է

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \tag{16}$$

բանաձևով:

Ապացույց: Դիցուք $M(x,y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են (14) հավասարմանը, ինչը նշանակում է, որ տեղի ունի

$$F(x,y)\big|_M = 0 \tag{14'}$$

հավասարությունը:

Եթե x անկախ փոփոխականին տանք Δx աճ, ապա $y = y(x)$ ֆունկցիան կստանա Δy աճ: Արդյունքում $x+\Delta x$ արժեքին կհամապատասխանի $y+\Delta y$ արժեքը*), որը $(x+\Delta x)$-ի հետ համատեղ կբավարարի (14) հավասարմանը.

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = 0:$$

Վերջին երկու հավասարություններից կստանանք

$$\Delta F(x,y) = F(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - F(x,y) = 0\,, \tag{17}$$

որտեղ x-ը և y-ը M կետի կոորդինատներն են:

Հաշվի առնելով, որ $F(x,y)$ ֆունկցիան բավարարում է [47,թ1]-ում $z(x,y)$ ֆունկցիայի վրա դրված պայմաններին՝ այդ ֆունկցիայի լրիվ աճը ներկայացնենք

$$\Delta F(x,y) = F'_x(x,y)\Delta x + F'_y(x,y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y \tag{18}$$

տեսքով, որտեղ α-ն ու β-ն կախված են Δx-ից, Δy-ից և նրանց հետ միևնույն ձգտում են զրոյի:

(17) հավասարության հաշվառումով՝ (18) հավասարությունից կստանանք

$$\Delta y[F'_y(x,y)+\beta] = -\Delta x[F'_x(x,y)+\alpha]\,, \tag{19}$$

որտեղից $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ քանորդի համար կունենանք

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}: \tag{20}$$

Այժմ, եթե Δx աճը ձգտեցնենք զրոյի, ապա Δy աճն էլ կձգտի զրոյի՝ քանի որ, ըստ պայմանի, y-ը x-ի անընդհատ ֆունկցիա է: Հետևաբար, զրոյի կձգտեն նաև α և β մեծությունները **[47,(3)]**: Արդյունքում, նկատի ունենալով (15) պայմանը՝ (20) հավասարությունից կստանանք **[22,թ8]**, **[26,ս2]**

---

*) Ենթադրում ենք, որ $A(x+\Delta x, y+\Delta y)$ կետը պատկանում է դիտարկվող տիրույթին:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} : \qquad (21)$$

Քանի որ վերջին կոտորակի համարիչն ու հայտարարն անընդհատ են M կետում և հայտարարը տարբեր է զրոյից, հետևաբար y'_x ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է M կետում [24,թ1]:

Իպա

Օրինակ 4: Հաշվել y'_x ածանցյալը, եթե y-ը որպես x-ի ֆունկցիա տրվում է

$$e^y - e^x + xy = 0$$

անբացահայտ հավասարումով:

Լուծում: Դիտարկվող օրինակում ունենք

$$F(x,y) = e^y - e^x + xy\,, \quad F'_x = -e^x + y\,, \quad F'_y = e^y + x :$$

Հետևաբար, օգտվելով (21) բանաձևից y'_x ածանցյալի համար կունենանք

$$y'_x = \frac{e^x - y}{e^y + x} :$$

§49. Մակերևույթին տարած շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները: Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումները: Էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը: Էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը:

Դիցուք S մակերևույթը տրված է

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

հավասարումով, ինչը նշանակում է, որ (1) հավասարմանը բավարարում են այն և միայն այն կետերի կոորդինատները, որոնք պատկանում են S մակերևույթին:

Սահմանում 1: *Կասենք, որ a ուղիղը S մակերևույթի $M(x,y,z)$ կետում շոշափում է այդ մակերևույթը, եթե այն շոշափում է S մակերևույթին պատկանող և M կետով անցնող որևէ կոր:*

Քանի որ M կետով անցնում են S մակերևույթին պատկանող անթիվ բազմությամբ կորեր, հետևաբար, ընդհանրապես ասած այդ կետում S մակերևույթին կարելի է տանել անթիվ բազմությամբ շոշափող ուղիղներ:

Սահմանում 2: *$M(x,y,z)$-ը կոչվում է (1) անբացահայտ հավասարումով տրված S մակերևույթի սովորական կետ, եթե այդ կետում գոյություն ունեն $F(x,y,z)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի անընդհատ մասնակի ածանցյալներ, ընդ որում այդ ածանցյալներից գոնե մեկը տարբեր է զրոյից:*

Սահմանում 3: $M(x,y,z)$-ը կոչվում է S մակերևույթի եզակի կետ, եթե այդ կետում կա՛մ $F(x,y,z)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ա-

ածանցյալները հավասար են զրոյի.

$$F'_x|_M = F'_y|_M = F'_z|_M = 0\ ,$$

կա՛մ էլ նրանցից գոնե մեկը գոյություն չունի:

Թեորեմ 1: *S մակերևույթի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ սովորական կետով անցնող բոլոր շոշափող ուղիղները գտնվում են մեկ հարթության մեջ:*

Ապացույց: Դիցուք

$$x = x(t)\ ,\quad y = y(t)\ ,\quad z = z(t) \qquad (\alpha \le t \le \beta) \tag{2}$$

պարամետրական հավասարումներն ունեցող l կորը [28,u1] պատկանում է (1) հավասարումն ունեցող S մակերևույթին և անցնում է նրա սովորական $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետով, այնպես, որ գոյություն ունի այնպիսի t_0 արժեք, որ

$$x_0 = x(t_0)\ ,\quad y_0 = y(t_0)\ ,\quad z_0 = z(t_0):$$

Հայտնի է, որ կորի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետով այդ կորին տարած շոշափողի կանոնական հավասարումներն ունեն

$$\frac{x-x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y-y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z-z_0}{\frac{dz}{dt}} \tag{3}$$

տեսքը:

Քանի որ, համաձայն ենթադրության, l կորը պատկանում է S մակերևույթին, հետևաբար, եթե (2) արտահայտությունները տեղադրենք (1) հավասարման մեջ՝ այդ հավասարումը կվերածվի նույնության t-ի նկատմամբ.

$$F[x(t),y(t),z(t)] = 0 \qquad (\alpha \le t \le \beta): \tag{1'}$$

Ենթադրելով, որ t_0 կետում (2) հավասարումներն ունեցող ֆունկցիաները ունեն անընդհատ ածանցյալ, որոնցից գոնե մեկը հավասար չէ զրոյի և բարդ ֆունկցիայի ածանցման կանոնով [48,(5)] ածանցելով ստացված նույնության երկու կողմերը (համաձայն պայմանի, գոյություն ունի M_0 կետի շրջակայք, որտեղ այդ իրավունքն ունենք)՝ կստանանք

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0\ , \tag{4}$$

որտեղից M_0 կետում կունենանք

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0} = 0: \tag{4'}$$

Այնուհետև դիտարկենք M_0 կետով անցնող

$$\vec{N}_0 = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}\vec{i} + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}\vec{j} + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}\vec{k}\ ,\quad \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t_0} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_0}\vec{i} + \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t_0}\vec{j} + \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t_0}\vec{k}\ , \tag{5}$$

ոչ զրոյական վեկտորները*), որտեղ $d\vec{r} = \{dx,dy,dz\}$:

*) Հիշենք, որ M_0-ն (1) մակերևույթի սովորական կետ է:

Օգտվելով կոորդինատներով տրված երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալի բանաձևից [4,(7)]՝ կարող ենք (4′) հավասարությունը ներկայացնել

$$\vec{N}_0 \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\bigg|_0 = 0 \qquad (4'')$$

տեսքով:

Ինչպես գիտենք, (4′′) հավասարությունը նշանակում է, որ M_0 կետով անցնող $\vec{N}_0$ վեկտորը և l կորի շոշափող $\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_0$ վեկտորը փոխուղղահայաց են [4,4°]:

Քանի որ բերված դատողությունները ճիշտ են (1) մակերևույթի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ սովորական կետով անցնող ցանկացած կորի համար, ուստի M_0 կետում դիտարկվող մակերևույթին տարած բոլոր շոշափողներն ուղղահայաց են միևնույն $\vec{N}_0$ վեկտորին, ինչը նշանակում է, որ այդ բոլոր վեկտորներն ընկած են $\vec{N}_0$ վեկտորին ուղղահայաց հարթության մեջ:

Իպա

Սահմանում 4: *Այն հարթությունը, որի մեջ ընկած են մակերևույթի տրված կետով անցնող բոլոր կորերի շոշափողները, կոչվում է մակերևույթի շոշափող հարթություն:*

Սահմանում 5: *S մակերևույթի շոշափող հարթությանն ուղղահայաց և շոշափման կետով անցնող ուղիղը կոչվում է այդ մակերևույթի նորմալ:*

Հաշվի առնելով, որ մակերևույթի սովորական կետով անցնող շոշափող հարթությունն ուղղահայաց է նշված կետով անցնող նորմալին և օգտվելով տրված կետով անցնող և տրված նորմալն ունեցող հարթության հավասարման բանաձևից [8,ս3], կստանանք (1) հավասարումն ունեցող մակերևույթի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ սովորական կետով այդ մակերևույթին տարած շոշափող հարթության հավասարումը.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{M_0}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{M_0}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0}(z-z_0)=0: \qquad (6)$$

$\vec{N}|_{M_0}$ վեկտորը համարելով (1) մակերևույթի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետով անցնող նորմալի ուղղորդ վեկտոր [6,ս9], կստանանք նաև այդ նորմալի կանոնական հավասարումները [9,ս2].

$$\frac{x-x_0}{F'_x|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{F'_y|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{F'_z|_{M_0}}: \qquad (7)$$

Օրինակ 1: Կազմել $x^2+y^2+z^2=14$ հավասարումն ունեցող գնդային մակերևույթի $M_0(1;2;3)$ կետում այդ մակերևույթին տարած շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները:

Լուծում: Դիտարկվող խնդրում ունենք [46], [27,(7)]

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14=0,$$
$$F'_x=2x,\quad F'_y=2y,\quad F'_z=2z,$$
$$F'_x\big|_{M_0}=2,\quad F'_y\big|_{M_0}=4,\quad F'_z\big|_{M_0}=6:$$

Հետևաբար, համաձայն (6) և (7) բանաձևերի, տրված մակերևույթի $M_0(1,2,3)$ կետով անցնող շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները համապատասխանաբար ունեն

$$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$$

կամ որ նույնն է՝

$$x+2y+3z-14=0,\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

տեսքը:

Այժմ ենթադրենք S մակերևույթը տրված է

$$z=f(x,y) \tag{8}$$

բացահայտ հավասարումով:

Նշված հավասարումը ներկայացնելով

$$F(x,y,z)=z-f(x,y)=0 \tag{8′}$$

տեսքով, կունենանք [46]

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}=-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0},\quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}=1: \tag{9′}$$

$F(x,y,z)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների համար ստացած (9′) արտահայտությունները տեղադրելով (6) և (7) հավասարումների մեջ՝ համապատասխանաբար կստանանք (8) հավասարումն ունեցող մակերևույթի $M_0(x_0,y_0,z_0)$ կետում այդ մակերևույթին տարած շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները.

$$-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}(x-x_0)-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}(y-y_0)+z-z_0=0,\quad \frac{x-x_0}{-f'_x\big|_{M_0}}=\frac{y-y_0}{-f'_y\big|_{M_0}}=\frac{z-z_0}{1}: \tag{10}$$

Օրինակ 2: Կազմել $z=2x^2+4y^2$ հավասարումն ունեցող մակերևույթի $M_0(2;1;12)$ կետում այդ մակերևույթին տարած շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները:

Լուծում: Դիտարկվող խնդրում ունենք

$$f(x,y)=2x^2+2y^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=4x,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=8y,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}=8,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}=8:$$

Հետևաբար, համաձայն (10) բանաձևերի, տրված մակերևույթի $M_0(2;1;12)$ կետով այդ մակերևույթին տարած շոշափող հարթության և նորմալի հավասարումները համապատասխանաբար ունեն

$$8x+8y-z-12=0\,,\quad \frac{x-2}{-8}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z-12}{1}$$

տեսքը:

Անցնելով երկու փոփոխականի ֆունկցիայի վարքը նկարագրող կարևոր բնութագրիչներից մեկի՝ ֆունկցիայի էքստրեմումի հետ ծանոթանալուն՝ են- թադրենք

$$z=z(x,y) \tag{11}$$

ֆունկցիան որոշված է oxy հարթության G տիրույթում և $M_0(x_0,y_0,z_0)$-ն այդ տիրույթի ներքին կետ է [18,ս20]:

Սահմանում 6: *Կասենք, որ M_0 կետում (11) ֆունկցիան ունի մաքսիմում (մինիմում), եթե G տիրույթում գոյություն ունի M_0 կետի այնպիսի շրջակայք, որ այդ շրջակայքի բոլոր կետերում (բացի M_0 -ից) տեղի ունի*

$$z(x_0,y_0)>z(x,y)\quad [z(x_0,y_0)<z(x,y)] \tag{12}$$

անհավասարությունը:

Այլ խոսքով՝ $M_0(x_0,y_0)$ -ն $z=z(x,y)$ ֆունկցիայի մաքսիմումի (մինիմումի) կետ է, եթե այդ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում $z(x_0,y_0)$ -ն (11) ֆունկ- ցիայի ընդունած արժեքներից ամենամեծն (ամենափոքրն) է:

Սահմանում 7: *Եթե որևէ կետում (11) ֆունկցիան ունի մաքսիմում կամ մինիմում, ապա կասենք, որ այդ կետում այն ունի էքստրեմում:*

Այժմ դնենք երկու փոփոխականի ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների միջոցով այդ ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելու խնդիրը:

Թեորեմ 2: *(Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության անհրաժեշտ պայմանը):*

Եթե $M_0(x_0,y_0)$ -ն (11) ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է[*] և այդ կետում գո- յություն ունեն դիտարկվող ֆունկցիայի առաջին կարգի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ, ապա անհրաժեշտաբար այդ ածանցյալները հավասար են զրոյի:

Ապացույց: Դիցուք $M_0(x_0,y_0)$-ն (11) ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում գոյություն ունեն դիտարկվող ֆունկցիայի առաջին կարգի վեր- ջավոր մասնակի ածանցյալներ:

$z(x,y)$ ֆունկցիայի արտահայտության մեջ ընդունելով $y=y_0$, կստանանք մեկ փոփոխականի ֆունկցիա.

$$z(x)=z(x,y_0),$$

որն ակնհայտորեն x_0 կետում ունի էքստրեմում: Հետևաբար, համաձայն Ֆեր- մայի թեորեմի [30,թ1], այդ կետում $z(x,y_0)$ ֆունկցիայի ածանցյալը հավա- սար է զրոյի.

*) Այսինքն, եթե $M_0(x_0,y_0)$ կետում $z=z(x,y)$ ֆունկցիան ունի էքստրեմում:

$$\left.\frac{dz(x,y_0)}{dx}\right|_{x_0}=0:$$

Մյուս կողմից ունենք

$$\left.\frac{dz(x,y_0)}{dx}\right|_{x_0}=\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{M_0},$$

որտեղից կստանանք

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right|_{M_0}=0: \tag{13}$$

Նույն ձևով կհամոզվենք, որ M_0 կետում զրոյի է հավասար նաև (11) ֆունկցիայի մյուս մասնակի ածանցյալը.

$$\left.\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right|_{M_0}=0: \tag{14}$$

Իպս

Ապացուցած թեորեմից հետևում է, որ եթե վերջավոր մասնակի ածանցյալներ ունեցող $z(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից գոնե մեկը որևէ կետում տարբեր է զրոյից, ապա այդ կետը չի կարող տրված ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ լինել:

Կատարված եզրակացությունը նշանակում է, որ իր որոշման տիրույթի ներքին կետերում առաջին կարգի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ ունեցող (11) ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել այն կետերում, որտեղ տրված ֆունկցիայի նշված ածանցյալները միաժամանակ հավասար են զրոյի:

Սահմանում 8: *Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն ներքին կետը, որտեղ այդ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները միաժամանակ հավասար են զրոյի, կոչվում է տրված ֆունկցիայի ստացիոնար կետ:*

Օգտվելով բերված սահմանումից՝ կարող ենք վերջին եզրակացությունը ձևակերպել հետևյալ կերպ.

Իր որոշման տիրույթի ներքին կետերում առաջին կարգի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ ունեցող $z(x,y)$ ֆունկցիայի էքստրեմումները պետք է փնտրել այդ ֆունկցիայի ստացիոնար կետերում:

Սակայն չպետք է կարծել, որ (11) ֆունկցիայի ստացիոնար կետ լինելը բավարար է այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ լինելու համար: Այսինքն, եթե որևէ կետում $z(x,y)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի, այդտեղից դեռևս չի հետևում, որ այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ունի էքստրեմում: Այլ խոսքով, (13) և (14) պայմանների տեղի ունենալը բավարար չէ, որպեսզի $M_0(x_0,y_0)$-ն լինի (11) ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ:

Օրինակ 3: Դիտարկելով

$$z=x^2-y^2 \tag{ա}$$

ֆունկցիան, կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ թեև այն ունի ստացիոնար կետ, բայց այդ կետը տրված ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Իրոք, լուծելով հավասարումների

$$\begin{cases} z'_x = 2x = 0, \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases}$$

համակարգը՝ ստանում ենք, որ կոորդինատների սկզբնակետը դիտարկվող ֆունկցիայի միակ ստացիոնար կետն է: Մյուս կողմից, հեշտ է նկատել, որ $O(0,0)$ կետում տրված ֆունկցիան հավասարվում է զրոյի, իսկ այդ կետի ցանկացած շրջակայքում ընդունում է ինչպե՛ս դրական, այնպե՛ս էլ բացասական արժեքներ, ինչը նշանակում է, որ կոորդինատների սկզբնակետը (ա) ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

Եթե լայնացնենք ուսումնասիրվող ֆունկցիաների դասը՝ թույլ տալով, որ իր որոշման տիրույթի առանձին ներքին կետերում (11) ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից գոնե մեկը գոյություն չունենա կամ վերջավոր չլինի, ապա հնարավոր է, որ այդ կետերում էլ այն ունենա էքստրեմում:

Միաժամանակ նշենք, որ $z(x,y)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի որևէ ներքին կետում այդ ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներից գոնե մեկի գոյություն չունենալը կամ էլ վերջավոր չլինելը դեռևս չի նշանակում, որ այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան ստանում է էքստրեմում:

Սահմանում 9: *Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի որոշման տիրույթի այն ներքին կետը, որտեղ տրված ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները հավասար են զրոյի կամ էլ նրանցից գոնե մեկը գոյություն չունի (կամ վերջավոր չէ), կոչվում է տրված ֆունկցիայի կրիտիկական կետ:*

Ամփոփելով վերոգրյալը՝ ստանում ենք, որ երկու փոփոխականի ֆունկցիան կարող է ստանալ էքստրեմում միայն իր կրիտիկական կետերում:

Այսպիսով, երկու փոփոխականի ֆունկցիայի կրիտիկական կետը էքստրեմումի տեսակետից, այսպես կոչված, «կասկածելի» կետ է և հետևաբար տրված ֆունկցիայի էքստրեմումները գտնելու համար անհրաժեշտ է այդ կետերում կատարել լրացուցիչ հետազոտություն:

Վերջում կատարելով

$$a_{11} = z''_{xx}(x_0,y_0), \quad a_{12} = z''_{xy}(x_0,y_0), \quad a_{22} = z''_{yy}(x_0,y_0) \tag{15}$$

նշանակումները՝ $z(x,y)$ ֆունկցիայի ստացիոնար կետի համար ձևակերպենք այդ ֆունկցիայի էքստրեմումի գոյության բավարար պայմանը.

Թեորեմ 3: *Դիցուք $M_0(x_0,y_0)$-ն oxy հարթության G տիրույթում որոշված (11) ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է: Այդ դեպքում, եթե $z(x,y)$ ֆունկցիան իր առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ անընդհատ է տրված կետում և նրա մի որևէ շրջակայքում, ապա.*

ա) M_0 կետում (11) ֆունկցիան էքստրեմում չունի, եթե

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0, \tag{16}$$

բ) *կարող է էքստրեմում ունենալ, կարող է և չունենալ (անհրաժեշտ է կատարել լրացուցիչ հետազոտություն), եթե*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \tag{17}$$

գ) *ունի մաքսիմում, եթե*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11} < 0, \tag{18}$$

դ) *ունի մինիմում, եթե*

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0\,, \quad a_{11} > 0: \tag{19}$$

Օրինակ 4: Գտնել հետևյալ ֆունկցիայի էքստրեմումները՝

$$z(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy: \tag{բ}$$

Լուծում: Ունենք

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x:$$

Լուծելով հավասարումների

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

համակարգը՝ գտնենք դիտարկվող ֆունկցիայի ստացիոնար կետերը.

$$A(0;0) \text{ և } B(1;1):$$

Քանի որ տրված ֆունկցիայի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալներն ամբողջ հարթության վրա որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են [46,ս11], հետևաբար այդ ֆունկցիան այլ կրիտիկական կետեր չունի:

Այնուհետև հաշվենք (բ) ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները.

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = -3, \quad z''_{yy} = 6y$$

և այդ ածանցյալների արժեքները՝ A և B կետերում.

$$a_{11} = z''_{xx}(0;0) = 0, \quad a_{12} = z''_{xy}(0;0) = -3, \quad a_{22} = z''_{yy}(0;0) = 0,$$

$$a_{11} = z''_{xx}(1;1) = 6, \quad a_{12} = z''_{xy}(1;1) = -3, \quad a_{22} = z''_{yy}(1;1) = 6:$$

Քանի որ $A(0;0)$ կետում $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0$, հետևաբար, համաձայն (18) բանաձևի, այդ կետում դիտարկվող ֆունկցիան էքստրեմում չունի:

$B(1;1)$ կետում ունենք

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 27 > 0, \quad a_{11} = 6 > 0,$$

հետևաբար, համաձայն (17) բանաձևի, $B(1;1)$ կետում (բ) ֆունկցիան ունի մինիմում, ընդ որում

$$z_{\min} = z(1;1) = -1:$$

ԳԼՈՒԽ X

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

§50. Խնդիր, որը հանգեցնում է դիֆերենցիալ հավասարման հասկացությանը: Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ: Կոշիի խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմը: Ընդհանուր և մասնակի լուծումներ: Անջատվող փոփոխական-ներով դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Ֆիզիկական երևույթներ ուսումնասիրելիս հաճախ անհնար է լինում գտնել օրենքներ, որոնք կապ հաստատեն միայն անկախ փոփոխականի և որոնելի ֆունկցիայի միջև: Որպես կանոն, այդպիսի խնդիրներում ստացվում են առնչություններ, որոնք կապ են հաստատում անկախ փոփոխականի, որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների միջև: Բերենք մեկ օրինակ.

Խնդիր 1: Գտնել որոշ բարձրությունից ուղղաձիգ դեպի ներքև նետած մարմնի շարժման արագության փոփոխման օրենքը, եթե բացի ծանրության ուժից, դիտարկվող մարմնի վրա ազդում է նաև շարժման արագությանը համեմատական, օդի դիմադրության արգելակող ուժը:

Լուծում: Չևակերպած խնդիրը լուծելու համար դիտարկվող մարմնի զանգվածը, շարժման արագությունը և նրա վրա ազդող ուժը համապատասխանաբար նշանակենք m -ով, v -ով և F -ով և օգտվենք Նյուտոնի երկրորդ օրենքից.

$$m\frac{dv}{dt}=F: \qquad (ա)$$

Համաձայն խնդրի դրվածքի, F -ը մարմնի ծանրության mg և նրա շարժման արագությանը համեմատական, օդի դիմադրության $-kv$ $(k>0)$ ուժերի (k -ն համեմատականության գործակից է) գումարն է*).

$$F=mg-kv: \qquad (բ)$$

Տեղադրելով F ուժի արտահայտությունը մարմնի շարժման (ա) օրենքի մեջ՝ կստանանք մի հավասարում, որը անհայտ $v(t)$ ֆունկցիայի հետ մեկտեղ պարունակում է նաև նրա ածանցյալը.

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv: \qquad (գ)$$

Լուծել անհայտ ֆունկցիա և այդ ֆունկցիայի ածանցյալ պարունակող (գ) հավասարումը, նշանակում է գտնել այնպիսի $v(t)$ ֆունկցիա, որը նույնաբար բավարարի այդ հավասարմանը:

Հաջորդ պարագրաֆում ծանոթանալով (գ) տեսքի հավասարումների լուծման տեսության հետ՝ մենք կգտնենք այդ հավասարման, հետևաբար՝ դիտարկվող խնդրի լուծումը:

Սահմանում 1: *Այն հավասարումը, որը պարունակում է անկախ փոփոխական, այդ փոփոխականի անհայտ ֆունկցիա և նրա ածանցյալներ, կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարում:*

---

*) Օդի դիմադրության ուժը վերցվում է մինուս նշանով, քանի որ այն ուղղված է մարմնի շարժմանը հակառակ:

Համաձայն բերված սահմանման՝ (գ)-ն դիֆերենցիալ հավասարում է, որտեղ անկախ փոփոխականը t-ն է, իսկ անհայտ ֆունկցիան՝ $v(t)$-ն:

Նշենք, որ մասնավոր դեպքում դիֆերենցիալ հավասարումը կարող է և չպարունակել անկախ փոփոխական կամ այդ փոփոխականի անհայտ ֆունկցիա:

Եթե դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող անկախ փոփոխականը նշանակենք x-ով, իսկ այդ փոփոխականի անհայտ ֆունկցիան $y(x)$-ով, ապա ընդհանուր դեպքում, դիֆերենցիալ հավասարումը կարող ենք ներկայացնել

$$F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)=0 \qquad \left[F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0\right] \qquad (n\in N) \tag{1}$$

տեսքով:

Սահմանում 2: *Եթե դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող անհայտ ֆունկցիան կախված է մեկ փոփոխականից, ապա այդ հավասարումը կոչվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում:*

Ի տարբերություն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների, ուսումնասիրվում են նաև այնպիսի հավասարումներ, որոնք պարունակում են մի քանի փոփոխականի անհայտ ֆունկցիա և այդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներ: Այդպիսի հավասարումները կոչվում են մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Մենք կդիտարկենք միայն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Սահմանում 3: *Դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող անհայտ ֆունկցիայի ածանցյալներից ամենաբարձրի կարգը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարման կարգ:*

Համաձայն բերված սահմանման՝ (1)-ը n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում է:

Սահմանում 4: (a,b) *միջակայքում մինչև n-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալներն ունեցող $\varphi(x)$ ֆունկցիան կոչվում է n-րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում, եթե այն անհայտ ֆունկցիայի փոխարեն նշված հավասարման մեջ տեղադրելը՝ վերջինիս տրված միջակայքում վերածում է նույնության.*

$$F\left[x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)\right]\equiv 0\,, \quad x\in(a,b)\,: \tag{1'}$$

Մասնավոր դեպքում, (1) հավասարման մեջ ընդունելով $n=1$, կստանանք առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը.

$$F(x,y,y')=0 \qquad \left[F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)=0\right]: \tag{1''}$$

Կասենք, որ (1′′) դիֆերենցիալ հավասարումը լուծված է ածանցյալի նկատմամբ, եթե այն ներկայացված է

$$y'=f(x,y) \qquad \left[\frac{dy}{dx}=f(x,y)\right] \tag{2}$$

տեսքով:

Պարզագույն դեպքում, եթե (2) հավասարման աջ մասն անհայտ ֆունկցիա չի պարունակում, ապա այդ հավասարումը կարող ենք ներկայացնել

$$dy = f(x)dx \tag{2'}$$

տեսքով,որտեղ $f(x)$ -ը տրված ֆունկցիա է:

Ինտեգրելով (2′) հավասարման երկու կողմերը՝ կստանանք [35,ս2,(4)]

$$y = \int f(x)dx + c, \tag{3}$$

որտեղ c -ն կամայական հաստատուն է:

Ինչպես տեսնում ենք, առաջին կարգի (2′) դիֆերենցիալ հավասարումն ունի, այսպես կոչված, լուծումների ընտանիք, որը պարունակում է կամայական c հաստատուն: Հետագայում կհամոզվենք, որ ընդհանուր դեպքում առաջին կարգի (1′′) հավասարման լուծումը նույնպես կամայական c հաստատուն պարունակող լուծումների ընտանիք է.

$$y = \varphi(x,c) \qquad (c = const): \tag{4}$$

Սահմանում 5: *Առաջին կարգի (1′′) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների (4) ընտանիքը կոչվում է այդ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալ կամ ընդհանուր լուծում:*

Նշենք, որ (1′′) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարող է արտահայտվել ինչպես անբացահայտ տեսքով.

$$\psi(x,y,c) = 0, \tag{4'}$$

այնպես էլ՝ լուծված c հաստատունի նկատմամբ.

$$\omega(x,y) = c: \tag{4''}$$

Հասկանալի է, որ c հաստատունին տալով անթիվ բազմությամբ (իրարից տարբեր) արժեքներ, կստանանք (1′′) հավասարման անթիվ բազմությամբ (իրարից տարբեր) լուծումներ: Բայց դնելով, այսպես կոչված, սկզբնական պայման, այսինքն պահանջելով, որ տրված x_0 կետում որոնելի $y(x)$ ֆունկցիան ընդունի տրված y_0 արժեքը՝ կստանանք (1′′) հավասարման լիովին որոշակի լուծում (եթե այն ընդհանրապես գոյություն ունի):

Սահմանում 6: *Առաջին կարգի (1′′) դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը տրված x_0 կետում ստանում է տրված y_0 արժեքը (այսինքն (1′′) հավասարման այն լուծումը, որի գրաֆիկն անցնում է $A(x_0,y_0)$ կետով), կոչվում է այդ հավասարման*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad [y(x_0) = y_0] \tag{5}$$

սկզբնական պայմանին բավարարող մասնակի լուծում:

Առաջին կարգի (1′′) դիֆերենցիալ հավասարման համար լուծել Կոշիի խնդիր, նշանակում է գտնել այդ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմանին:

Այժմ, առանց ապացույցի, բերենք (2) դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերող Կոշիի թեորեմը:

Թեորեմ 1: *(Կոշի) Եթե առաջին կարգի (2) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող $f(x,y)$ ֆունկցիան իր $\partial f/\partial y$ մասնակի ածանցյալի հետ մեկտեղ անընդհատ է oxy հարթության որևէ G բաց տիրույթում, ապա կամայական $M_0(x_0,y_0)$ կետի համար, որը պատկանում է նշված տիրույթին, տրված հավասարումն ունի (5) սկզբնական պայմանին բավարարող մեկ և միայն մեկ լուծում:*

Անցնելով անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ նախ դիտարկենք

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{6}$$

հավասարումը, որտեղ $f(x)$-ը և $g(y)$-ը համապատասխանաբար (a,b) և (c,d) միջակայքերում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են:

Ենթադրելով, որ իր որոշման տիրույթի ոչ մի կետում $g(y)$-ը զրո չի դառնում, կարող ենք (6) հավասարումը ներկայացնել

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx \tag{6'}$$

տեսքով:

Ըստ էության (6′)-ը երկու դիֆերենցիալ արտահայտությունների հավասարություն է: Հետևաբար, այդ արտահայտությունների անորոշ ինտեգրալները իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով [35]: Նկատի ունենալով վերոգրյալը և ինտեգրելով (6′) հավասարման ձախ կողմը ըստ y-ի, իսկ աջ կողմը՝ ըստ x-ի՝ կունենանք

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)\,dx+c \qquad (c=const): \tag{7}$$

Ստացված հավասարությունը՝ x անկախ փոփոխականը, y անհայտ ֆունկցիան և կամայական c հաստատունը միմյանց կապող առնչություն է, ինչը նշանակում է, որ այն (6) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{dx}=xy: \tag{դ}$$

Լուծում: Նախ նկատենք, որ $y_0=0$ ֆունկցիան բավարարում է տրված հավասարմանը: Այնուհետև ենթադրելով, որ $y(x)$ ֆունցիան զրո արժեք չի ստանում, (դ) հավասարումը ներկայացնենք

$$\frac{dy}{y}=x\,dx \tag{ե}$$

տեսքով:

Ինտեգրելով վերջին հավասարման երկու կողմերը՝ կստանանք դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումը [35,3°,4°].

$$y=c\,e^{\frac{x^2}{2}} \quad (c=const):$$

Այժմ ծանոթանանք անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների հետ:

Սահմանում 7: *Հետևյալ հավասարումը՝*

$$f(x)dx + g(y)dy = 0\ , \tag{8}$$

որտեղ $f(x)$-ը և $g(y)$-ը համապատասխանաբար (a,b) և (c,d) միջակայքերում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, կոչվում է անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Հասկանալի է, որ (8) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c \qquad (c = const) \tag{9}$$

տեսքը:

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$x dx + y dy = 0\ : \tag{գ}$$

Լուծում: Ինտեգրելով տրված հավասարման երկու կողմերը՝ կունենանք

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_0 \qquad (c_0 = const)\ :$$

Քանի որ ստացված հավասարման ձախ մասն ընդունում է միայն ոչ բացասական արժեքներ, հետևաբար c_0-ն չի կարող բացասական լինել: $2c_0$-ն նշանակելով c^2-ով՝ կարող ենք դիտարկվող հավասարման լուծումը ներկայացնել

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad (c \geq 0)$$

տեսքով:

Ինչպես տեսնում ենք, (գ) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը $0(0;0)$ կենտրոնով և c $(c \geq 0)$ շառավիղներով համակենտրոն շրջանագծերի ընտանիքն է [7,1°]:

Սահմանում 8: *Հետևյալ հավասարումը՝*

$$f_1(x)\, g_1(y)dx + f_2(x)\, g_2(y)dy = 0, \tag{10}$$

որտեղ $p_1(x,y) = f_1(x)\, g_1(y)$ և $p_2(x,y) = f_2(x)\, g_2(y)$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ oxy հարթության որևէ G տիրույթում, կոչվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Ենթադրելով, որ դիտարկվող տիրույթում $f_2(x)g_1(y)$ արտադրյալը զրո արժեք չի ընդունում, և (10) հավասարման երկու կողմերը բաժանելով այդ արտադրյալի վրա՝ կստանանք անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0\ : \tag{10'}$$

Ինչպես գիտենք, (10′) հավասարումը լուծելու համար անհրաժեշտ է այդ հավասարման երկու կողմերն ինտեգրել.

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c \qquad (c = const)\ : \tag{11}$$

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$(1+x)\,y\,dx+(1+y)\,x\,dy=0\ :$$

Լուծում: Ենթադրելով, որ xy արտադրյալը զրո չի դառնում և անջատելով տրված հավասարման փոփոխականները՝ կարող ենք այն ներկայացնել

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=0 \qquad (\text{է})$$

տեսքով:

Ինտեգրելով (է) հավասարման երկու կողմերը՝ կստանանք դիտարկվող հավասարման լուծումը.

$$x+y+\ln|xy|=c \qquad (c=const)\ :$$

§51. Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ: Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներ: Բեռնուլլիի հավասարումը: Լրիվ դիֆերենցիալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Անցնելով առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ նախ ծանոթանանք իր փոփոխականների նկատմամբ համասեռ ֆունկցիայի հասկացության հետ:

Սահմանում 1: *Երկու փոփոխականի $f(x,y)$ ֆունկցիան կոչվում է իր փոփոխականների նկատմամբ n-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա, եթե ցանկացած α դրական թվի համար տեղի ունի*

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^n f(x,y) \qquad (n=0,1,2,\dots) \qquad (1)$$

նույնությունը:

Օրինակ 1:

$$f(x,y)=y^2+xy$$

ֆունկցիան իր փոփոխականների նկատմամբ երկրորդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ ցանկացած α դրական թվի համար տեղի ունի

$$(\alpha y)^2+(\alpha x)(\alpha y)=\alpha^2(y^2+xy)$$

կամ որ նույնն է՝

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^2 f(x,y)$$

նույնությունը:

Օրինակ 2:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$$

ֆունկցիան իր փոփոխականների նկատմամբ առաջին աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ ցանկացած α դրական թվի համար տեղի ունի

$$\sqrt{(\alpha x)^2-(\alpha y)^2}=\alpha\sqrt{x^2-y^2}$$

կամ որ նույնն է՝

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha f(x,y)$$

նույնությունը:

Օրինակ 3։

$$f(x,y)=\frac{x+y}{y}$$

ֆունկցիան իր փոփոխականների նկատմամբ զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, քանի որ ցանկացած α դրական թվի համար տեղի ունի

$$\frac{\alpha x+\alpha y}{\alpha x}=\frac{x+y}{x}$$

կամ որ նույնն է՝

$$f(\alpha x,\alpha y)=f(x,y)$$

նույնությունը։

Սահմանում 2։ *Հետևյալ հավասարումը՝*

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{2}$$

որտեղ $f(x,y)$-ը իր փոփոխականների նկատմամբ զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, կոչվում է x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում։

Առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար հաշվի առնենք, որ այդ հավասարման աջ մասում գրված ֆունկցիան իր փոփոխականների նկատմամբ զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է և

$$f(x,y)=f(\alpha x,\alpha y)$$

նույնության մեջ ընդունենք $\alpha=1/x$։ Արդյունքում կպարզենք, որ իր փոփոխականների նկատմամբ զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիան կախված է միայն իր արգումենտների հարաբերությունից.

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)։ \tag{3}$$

Այնուհետև կատարելով

$$\frac{y}{x}=u(x) \tag{4}$$

կամ որ նույնն է՝

$$y=x\,u(x) \tag{4'}$$

նշանակումը և օգտվելով երկու ֆունկցիաների արտադրյալի ածանցյալի բանաձևից՝ կստանանք [28,(2)]

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}։ \tag{5}$$

dy/dx ածանցյալի համար ստացած (5) արտահայտությունը տեղադրելով (2) հավասարման մեջ՝ (3) և (4) հավասարությունների հաշվառումով այն կներկայացնենք

$$u+x\frac{du}{dx}=f(1,u) \tag{6}$$

տեսքով։

Անջատելով (6) հավասարման փոփոխականները՝

$$\frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x} \qquad (6')$$

և ինտեգրելով (6′) հավասարման երկու կողմերը՝ կգտնենք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Դիտարկվող համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը ստանալու համար մնում է (4) նշանակման շնորհիվ (6′) հավասարման ընդհանուր լուծումից $u(x)$ ֆունկցիան արտաքսել:

Օրինակ 4: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{-\frac{y}{x}}:$$

Լուծում: Հետևելով տեսությանը և կատարելով (4) նշանակումը՝ տրված առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը կներկայացնենք

$$u+x\frac{du}{dx}=u+e^{-u}$$

կամ

$$e^{u}du=\frac{dx}{x}$$

տեսքով:

Ինտեգրելով վերջին հավասարման երկու կողմերը [35,4°,7°ա] և ստացված հավասարությունից արտաքսելով $u(x)$ ֆունկցիան՝ կստանանք դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$\ln|cx|=e^{\frac{y}{x}} \quad (c=const, c\neq 0):$$

Դիտարկենք նաև

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (7)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $P(x,y)$-ն ու $Q(x,y)$-ն իրենց փոփոխականների նկատմամբ միևնույն աստիճանի համասեռ ֆունկցիաներ են:

Նկատելով, որ x և y փոփոխականների նկատմամբ միևնույն աստիճանի համասեռ $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաների քանորդն ակնհայտորեն զրո աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է, եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող դեպքում (7)-ը x և y փոփոխականների նկատմամբ առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է:

Օրինակ 5: Համաձայն վերոգրյալ պնդման՝

$$3xy\,dx+(x^2-y^2)dy=0$$

հավասարումն առաջին կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է:

Այժմ անցնենք առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը:

Սահմանում 3: *Հետևյալ հավասարումը՝*

$$\frac{dy}{dx}+y\,f(x)=g(x), \qquad (8)$$

որտեղ $f(x)$ -ն ու $g(x)$ -ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, կոչվում է առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում:

Ինչպես տեսնում ենք, անհայտ ֆունկցիան և նրա ածանցյալը (8) հավասարման մեջ մասնակցում են առաջին աստիճանով, որով էլ բացատրվում է այդ հավասարման անվանումը:

Հետևելով Բեռնուլլիին՝ (8) հավասարման լուծումը փնտրենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով.

$$y(x)=u(x)\,v(x): \tag{9}$$

Ածանցելով (9) հավասարության երկու կողմերը*).

$$\frac{dy}{dx}=v\,\frac{du}{dx}+u\,\frac{dv}{dx} \tag{10}$$

և անհայտ ֆունկցիայի ու նրա ածանցյալի (9) և (10) արտահայտությունները տեղադրելով (8) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$u\left[\frac{dv}{dx}+v\,f(x)\right]+v\,\frac{du}{dx}=g(x): \tag{11}$$

$v(x)$ անհայտ ֆունկցիան ընտրելով այնպես, որ այն բավարարի անջատվող փոփոխականներով

$$\frac{dv}{dx}+v\,f(x)=0 \tag{12}$$

դիֆերենցիալ հավասարմանը՝ կստանանք

$$\ln|v|=-\int f(x)dx+c_0 \qquad (c_0=const): \tag{13}$$

Նկատի ունենալով, որ մեզ անհրաժեշտ է գտնել (12) հավասարման, նույնաբար զրոյից տարբեր որևէ լուծում և ընդունելով $c_0=0$, (13) հավասարությունից կունենանք

$$v(x)=e^{-\int f(x)dx}: \tag{14}$$

$v(x)$ ֆունկցիայի համար ստացված արտահայտությունը տեղադրելով (11) հավասարման մեջ՝ (12) հավասարության հաշվառումով կստանանք

$$du=g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\,dx: \tag{15}$$

Առաջին կարգի (8) գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծման վերջնական տեսքը ստանալու համար մնում է (15) հավասարման երկու կողմերն ինտեգրելով գտնել $u(x)$ ֆունկցիան.

$$u(x)=\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}\,dx+c \tag{16}$$

---

*) Գրության պարզության համար $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաների կախվածությունը x փոփոխականից բաց ենք թողնում:

և $v(x)$, $u(x)$ ֆունկցիաների համար ստացած (14) և (16) արտահայտությունները տեղադրել $y(x)$ ֆունկցիայի (9) ներկայացման մեջ.

$$y(x)=e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)\cdot e^{\int f(x)dx}dx+c\right] \qquad (c=const): \tag{17}$$

Օրինակ 5: Որպես օրինակ. լուծենք առաջին կարգի [50,(գ)] գծային դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Նշված հավասարման լուծումը փնտրելով

$$v(t)=r(t)\,s(t)$$

տեսքով՝ այդ հավասարումից կստանանք

$$r\left(\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s\right)+s\frac{dr}{dt}=g: \tag{ա}$$

Լուծելով անջատվող փոփոխականներով

$$\frac{ds}{dt}+\frac{k}{m}s=0 \tag{բ}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը (ընդունելով ինտեգրման հաստատունը հավասար զրոյի).

$$s(t)=e^{-\frac{k}{m}t}$$

և $s(t)$ ֆունկցիայի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (ա) հավասարության մեջ՝ (բ) հավասարման հաշվառումով $r(t)$ ֆունկցիայի համար կունենանք

$$r(t)=\frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}+c:$$

Այսպիսով, նախորդ պարագրաֆում բերված խնդրի լուծման համար վերջնականապես կստանանք

$$v(t)=\frac{mg}{k}+ce^{-\frac{k}{m}t} \qquad (c=const): \tag{գ}$$

Ինչպես գիտենք, [50,սճ] դիտարկվող խնդրի որոշակի լուծում ստանալու համար անհրաժեշտ է տալ սկզբնական պայման:

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությունն ավարտենք (8) հավասարումից ստացվող

ա) $$\frac{dy}{dx}+yf(x)=0 \qquad [g(x)\equiv 0], \tag{8'}$$

բ) $$\frac{dy}{dx}+ay=b \qquad [f(x)\equiv a,\ g(x)\equiv b,\ a=const,\ b=const] \tag{8''}$$

մասնավոր դեպքերի դիտարկումով:

Սահմանում 4: *(8′) հավասարումը կոչվում է առաջին կարգի համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում:*

Ակնհայտ ունենալով բերված սահմանումը՝ (8) հավասարումն անվանենք առաջին կարգի անհամասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարում:

Քանի որ (8′)-ը գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, ուստի կարող ենք այն լուծել (վերևում շարադրված) Բեռնուլլիի եղանակով: Սակայն, նկատելով, որ (8′)-ը անջատվող փոփոխականներով հավասարում է.

$$\frac{dy}{y} = -f(x)dx \,, \tag{8′′′}$$

կարող ենք այն լուծել նաև անմիջական ինտեգրման միջոցով*).

$$y = c \cdot e^{\int f(x)dx} \quad (c = const)\ ^{**)}: \tag{17′}$$

Ինչ վերաբերվում է (8′′) հավասարմանը, ապա, բնականաբար, այդ հավասարումն էլ կարող ենք լուծել Բեռնուլլիի եղանակով: Սակայն, ինչպես և (8′) հավասարումը, ավելի հեշտ է այն լուծել իբրև անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Այժմ ծանոթանանք Բեռնուլլիի հավասարման հետ:

Սահմանում 5: *Հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝*

$$\frac{dy}{dx} + y f(x) = y^{\alpha} g(x), \tag{18}$$

որտեղ α -ն կամայական իրական թիվ է, իսկ $f(x)$ -ն ու $g(x)$ -ը՝ որևէ միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ (կամ հաստատուններ), կոչվում է Բեռնուլլիի հավասարում:

Նկատենք, որ $\alpha = 0$ և $\alpha = 1$ դեպքերում (18) հավասարումը վերածվում է գծային դիֆերենցիալ հավասարման:

Նկատենք նաև, որ α -ի դրական արժեքների դեպքում $y \equiv 0$ ֆունկցիան հանդիսանում է Բեռնուլլիի հավասարման լուծում:

Դիտարկվող հավասարումը լուծելու համար նախ այդ հավասարման բոլոր անդամները բաժանենք y^{α} -ի վրա.

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + y^{-\alpha+1} f(x) = g(x): \tag{18′}$$

Այնուհետև կատարելով փոփոխականի

$$z = y^{-\alpha+1} \tag{19}$$

փոխարինում՝ կստանանք

$$\frac{dz}{dx} = (1-\alpha) y^{-\alpha} \frac{dy}{dx}: \tag{20}$$

Վերջին երկու հավասարությունների շնորհիվ (18′) հավասարումը կընդունի

$$\frac{dz}{dx} + (1-\alpha)\, z\, f(x) = (1-\alpha)\, g(x) \tag{21}$$

տեսքը:

Ինչպես տեսնում ենք, (21)-ը առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է $z(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ:

---

*) Նկատենք, որ առաջին կարգի (8) գծային դիֆերենցիալ հավասարման լուծման մեջ ընդունելով $g(x) \equiv 0$, կստանանք (8′) հավասարման լուծումը:

**) Նկատենք նաև, որ $y \equiv 0$ ֆունկցիան բավարարում է (8′) հավասարմանը, ինչն ակնհայտորեն երևում է ինչպե՛ս (8′) հավասարման, այնպե՛ս էլ նրա լուծման տեսքից:

Լուծելով (21) հավասարումը և (19) նշանակման օգնությամբ վերադառնալով $y(x)$ անհայտ ֆունկցիային՝ կգտնենք դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Օրինակ 6: Լուծել Բեռնուլլիի

$$\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$$

հավասարումը:

Լուծում: Դիտարկվող հավասարման բոլոր անդամները բաժանելով y^3-ի վրա և կատարելով փոփոխականի

$$z=y^{-2} \tag{դ}$$

փոխարինում՝ կստանանք z-ի նկատմամբ գծային

$$\frac{dz}{dx}-2xz=-2x^3 \tag{ե}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծելով (ե) հավասարումը՝

$$z=1+x^2+ce^{x^2}$$

և (դ) նշանակման օգնությամբ վերադառնալով $y(x)$ անհայտ ֆունկցիային՝ կունենանք

$$y^2=\frac{1}{1+x^2+ce^{x^2}} \qquad (c=const):$$

Վերջում դիտարկենք նաև լրիվ դիֆերենցիալներով դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Սահմանում 6: *Հետևյալ հավասարումը՝*

$$f(x,y)dx+g(x,y)dy=0, \tag{22}$$

որտեղ $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\partial f/\partial y$ և $\partial g/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ oxy հարթության որևէ G տիրույթում, ընդ որում այդ տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \tag{23}$$

առնչությունը, կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Լրիվ դիֆերենցիալներով (22) հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *Դիցուք $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաներն իրենց $\partial f/\partial y$ և $\partial g/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ oxy հարթության G տիրույթում: Այդ դեպքում, որպեսզի նշված տիրույթում (22) հավասարման ձախ մասը լինի մի որևէ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ G տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունենա (23) առնչությունը:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Ենթադրենք $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաները իրենց $\partial f/\partial y$ և $\partial g/\partial x$ մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ որոշված են և անընդհատ oxy հարթության G տիրույթում: Ենթադրենք նաև գոյություն ունի այնպիսի $u(x,y)$ ֆունկցիա, որ (22) հավասարման ձախ մասը այդ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն է.

$$du = f(x,y)dx + g(x,y)dy: \tag{24}$$

Նկատի ունենալով, որ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալն արտահայտվում է

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{25}$$

բանաձևով [47,(10)] և համեմատելով նշված դիֆերենցիալի (24) և (25) ներկայացումները՝ կստանանք

$$f(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad g(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}: \tag{26}$$

Ստացված հավասարություններից առաջինը ածանցելով ըստ y-ի, իսկ երկրորդը՝ ըստ x-ի, կունենանք*)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}: \tag{27}$$

$\partial f/\partial y$ և $\partial g/\partial x$ մասնակի ածանցյալների վերաբերյալ կատարած ենթադրությունից և (27) հավասարություններից հետևում է, որ դիտարկվող տիրույթում $u(x,y)$ ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի անընդհատ խառն ածանցյալներ, որտեղից էլ, ինչպես գիտենք, հետևում է այդ ածանցյալների հավասարությունը նշված տիրույթում [46,p1].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}: \tag{28}$$

Թեորեմի առաջին մասի ապացույցն ավարտելու համար մնում է նկատել, որ (27) և (28) հավասարություններից հետևում է (23) առնչությունը:

Բավարարություն: Այժմ ցույց տանք, որ G տիրույթում (23) առնչության տեղի ունենալը բավարար է, որպեսզի նշված տիրույթում (22) հավասարման ձախ մասը լինի մի որևէ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ և գտնենք այդ ֆունկցիայի տեսքը:

Այլ խոսքով, ցույց տանք, որ լրիվ դիֆերենցիալներով (22) հավասարումն ունի

$$du(x,y) = 0 \tag{22'}$$

տեսքը, որտեղից էլ ինտեգրելով կստանանք դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումը.

*) Ըստ պայմանի, նշված ածանցումները օրինական են:

$$u(x,y)=c \qquad (c=const):\tag{29}$$

$u(x,y)$ ֆունկցիայի տեսքը ստանալու համար նախ պահանջենք, որ տեղի ունենա

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y)\tag{30}$$

հավասարությունը: Այնուհետև G տիրույթում վերցնենք որևէ $M_0(x_0,y_0)$ կետ և (30) հավասարության երկու կողմերն ըստ x-ի ինտեգրենք x_0-ից մինչև x սահմաններում: Արդյունքում կունենանք

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}f(x,y)dx+\varphi(y),\tag{31}$$

որտեղ $\varphi(y)$-ը y-ից կախված անհայտ ֆունկցիա է*):

Հաշվի առնելով, որ $u(x,y)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի նաև

$$\frac{\partial u}{\partial y}=g(x,y)$$

պայմանին, (31) հավասարության աջ մասն ածանցենք ըստ y-ի**) և արդյունքը հավասարեցնենք $g(x,y)$-ի [28,p1].

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{d\varphi}{dy}=g(x,y):$$

Օգտվելով (23) առնչությունից և վերջին հավասարությունը ներկայացնելով

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{d\varphi}{dy}=g(x,y)\tag{32}$$

կամ որ նույնն է՝

$$g(x,y)-g(x_0,y)+\frac{d\varphi}{dy}=g(x,y)$$

տեսքով՝ կունենանք

$$\frac{d\varphi}{dy}=g(x_0,y):$$

Վերջին հավասարության երկու կողմերն ըստ y-ի ինտեգրելով y_0-ից մինչև y սահմաններում՝ կստանանք

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}g(x_0,y)\,dy+c_1 \qquad (c_1=const):\tag{33}$$

---

*) Քանի որ երկու փոփոխականի ֆունկցիայի ինտեգրումը կատարեցինք ըստ x-ի (y-ը համարելով հաստատուն), հետևաբար ինտեգրման հաստատունը կարող է կախված լինել y-ից:

**) Ընդունվող դեպքում ածանցման գործողությունն ինտեգրալի նշանի տակ տեղափոխելու իրավունքն ունենք:

$\varphi(y)$ ֆունկցիայի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (31) հավասարության մեջ՝ $u(x,y)$ ֆունկցիայի համար վերջնականապես կունենանք

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} g(x_0,y)\,dy+c_1 \qquad (c_1=const): \tag{34}$$

Այսպիսով, ենթադրելով, որ G տիրույթի յուրաքանչյուր կետում տեղի ունի (23) առնչությունը և պահանջելով, որ նշված տիրույթում (22) հավասարման ձախ մասը լինի մի որևէ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ՝ ստացանք այդ ֆունկցիայի տեսքը:

Իպա

Վերջին բանաձևով տրվող $u(x,y)$ ֆունկցիան հավասարեցնելով կամայական c^* հաստատունի և c^*-c_1 տարբերությունը նշանակելով c-ով, կստանանք լրիվ դիֆերենցիալներով (22) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման տեսքը.

$$\int_{x_0}^{x} f(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} g(x_0,y)\,dy=c \qquad (c=const): \tag{35}$$

Օրինակ 7: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0\,: \tag{գ}$$

Լուծում: Դիտարկվող հավասարումը լուծելու համար կատարենք

$$f(x,y)=\frac{2x}{y^3}\,,\quad g(x,y)=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

նշանակումները և հաշվենք $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ և $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ մասնակի ածանցյալները **[46,ս14]**, **[27,(7)]**, **[28,(9)]**.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{6x}{y^4},\ \frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{6x}{y^4}: \tag{է}$$

Ինչպես տեսնում ենք, ցանկացած տիրույթում, որտեղ y-ը հավասար չէ զրոյի, (է) մասնակի ածանցյալների համար տեղի ունի (23) առնչությունը: Հետևաբար, ցանկացած տիրույթում, որտեղ y-ը հավասար չէ զրոյի, (գ) հավասարման ձախ մասը մի որևէ $u(x,y)$ ֆունկցիայի լրիվ դիֆերենցիալ է:

$u(x,y)$ ֆունկցիայի տեսքը ստանալու համար նախ պահանջենք, որ տեղի ունենա

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{y^3}$$

հավասարությունը, որից հետո այդ հավասարության երկու կողմերն ինտեգրենք ըստ x-ի **[35,3°,VI]**

$$u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y)\,:^{*)}\qquad (ը)$$

Հաշվի առնելով, որ $u(x,y)$ ֆունկցիան պետք է բավարարի նաև

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y^2-3x^2}{y^4}$$

պայմանին, այդ ֆունկցիայի (ը) ներկայացման հաշվառումով կունենանք

$$-\frac{3x^2}{y^4}+\frac{d\varphi}{dy}=\frac{y^2-3x^2}{y^4}\,:$$

Վերջին հավասարությունից գտնելով $\varphi(y)$ ֆունկցիան.

$$\varphi(y)=-\frac{1}{y}+c_1$$

և այն տեղադրելով (ը) հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$u(x,y)=\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}+c_1\qquad (c_1=const):$$

Այսպիսով, լրիվ դիֆերենցիալներով (զ) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=c\qquad (c=const)$$

տեսքը:

§52. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ: Ընդհանուր և մասնակի լուծումներ: Կոշիի խնդրի լուծման գոյության և միակության թեորեմը: Բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք թույլ են տալիս կարգի իջեցում:

Անցնելով բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք n-րդ ($n\geq 2$) կարգի [50,ս3] այնպիսի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք լուծված են «ավագ ածանցյալի» նկատմամբ.

$$y^{(n)}=F[x,y,y',\dots,y^{(n-1)}]:\qquad (1)$$

Սահմանում 1: *Կասենք, որ n-րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման համար տրված են սկզբնական պայմաններ, եթե $y(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի մի որևէ x_0 կետում տրված են այդ ֆունկցիայի և նրա մինչև $(n-1)$-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալների արժեքները.*

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \ y''\big|_{x=x_0}=y_0'',\ \dots,\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0}=y_0^{(n-1)}:\qquad (2)$$

Սահմանում 2: *Կամայական $c_1,c_2,\dots,c_n$ հաստատուններից կախված ֆունկցիաների*

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n)\qquad (3)$$

ընտանիքը կոչվում է n-րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհա-

*) $\varphi(y)$-ը անհայտ ֆունկցիա է:

նուր լուծում, եթե այն նշված հաստատունների կամայական արժեքների դեպքում բավարարում է այդ հավասարմանը, ընդ որում $c_1, c_2, ..., c_n$ հաստատունները կարելի է այնպես ընտրել, որ (3) ֆունկցիան բավարարի (1) հավասարման համար տրված (2) սկզբնական պայմաններին:

Սահմանում 3: *n -րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման յուրաքանչյուր լուծում, որը ստացվում է (3) ֆունկցիայից $c_1, c_2, ..., c_n$ հաստատունների որոշակի արժեքների դեպքում, կոչվում է այդ հավասարման մասնակի լուծում:*

Նշենք, որ հաճախ (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը հնարավոր չի լինում գրել $y(x)$ ֆունկցիայի նկատմամբ լուծված տեսքով, ինչը նշանակում է, որ նման դեպքերում դիտարկվող հավասարման լուծումը ներկայացվում է անբացահայտ տեսքով.

$$\psi(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0 : \quad (4)$$

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների նմանությամբ, n -րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման համար ևս տեղի ունի նրա լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերող թեորեմ, որը նույնպես բերում ենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 1: *(Կոշի) Եթե n -րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող $F[x, y, y', ..., y^{(n-1)}]$ ֆունկցիան և նրա մասնակի ածանցյալներն ըստ $y, y', ..., y^{n-1}$ արգումենտների անընդհատ են $n+1$ չափանի տարածության մի որևէ G բաց տիրույթում, ապա կամայական $M_0(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ կետի համար, որը պատկանում է նշված տիրույթին, տրված հավասարումն ունի (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող մեկ և միայն մեկ լուծում:*

Նշենք նաև, որ լուծել n -րդ կարգի (1) դիֆերենցիալ հավասարումը, նշանակում է կա՛մ գտնել նրա ընդհանուր լուծումը, կա՛մ էլ (եթե դիտարկվող հավասարման համար տրված են սկզբնական պայմաններ) գտնել այդ հավասարման տրված սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը:

Շատ դեպքերում նոր անհայտ ֆունկցիա ներմուծելու շնորհիվ հնարավոր է լինում n -րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումը բերել ավելի ցածր կարգի դիֆերենցիալ հավասարման:

Դիտարկենք մի քանի դիֆերենցիալ հավասարումներ, որոնք թույլ են տալիս հավասարման կարգի նման իջեցում:

1°. *Դիցուք n -րդ կարգի $(n \geq 2)$ դիֆերենցիալ հավասարումն ունի*

$$y^{n} = f(x) \quad (5)$$

տեսքը, որտեղ $f(x)$ -ը որևէ (a, b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիա է:

Օգտվելով

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

բանաձևից **[29,ս1]** և դիտարկվող հավասարման երկու կողմերն ինտեգրելով x_0-ից մինչև x սահմաններում՝ $(a < x_0 < x < b)$ նրա կարգը մեկով կիջեցնենք **[35,(4)]**.

$$y^{(n-1)}=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+c_1 : \qquad (6)$$

Վարվելով նույն կերպ՝ (6) հավասարությունից կստանանք

$$y^{(n-2)}=\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{u} f(t)dt\right]du+c_1(x-x_0)+c_2 \qquad (c_2=const):$$

Շարունակելով հաջորդաբար ինտեգրել ստացվող հավասարություննե-րի երկու կողմերը՝ ի վերջո կգտնենք (5) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y=\int_{x_0}^{x}\cdots\left[\int_{x_0}^{u} f(t)dt\right]\cdots dz+c_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+$$

$$+c_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)+c_n \qquad (c_i=const, \quad i=1,2,\ldots,n): \qquad (7)$$

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y''=\cos x:$$

Լուծում: Երկու հաջորդական ինտեգրումների արդյունքում կունենանք [35,8°,9°]

$$y'=\int_0^x \cos t dt=\sin x+c_1 \qquad (c_1=const),$$

$$y=\int_0^x \sin t dt+c_1x+c_2=-\cos x+c_1x+c_2 \qquad (c_2=const):$$

Այսպիսով, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y=-\cos x+c_1x+c_2 \qquad (c_1,c_2=const)$$

տեսքը:

2°. *Ենթադրենք n-րդ $(n\geq 2)$ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի*

$$F[x,y',y'',\ldots,y^{(n)}]=0 \qquad (8)$$

տեսքը, այսինքն՝ ենթադրենք այն բացահայտ ձևով չի պարունակում որոնելի $y(x)$ ֆունկցիա:

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման կարգն իջեցնելու նպատակով կատարենք

$$y'(x)=z(x) \qquad (9)$$

նշանակումը:

$n-1$ անգամ հաջորդաբար ածանցելով՝ (9) հավասարությունից կստա-նանք

$$y''(x)=z'(x), \; y'''(x)=z''(x), \; \ldots, \; y^{(n)}(x)=z^{(n-1)}(x): \qquad (9')$$

(9) և (9′) հավասարությունների հաշվառումով n-րդ կարգի (8) դիֆերեն-ցիալ հավասարումը կբերենք նոր անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ ($n-1$)-րդ

կարգի դիֆերենցիալ հավասարման.

$$F[x,z,z',...,z^{(n-1)}]=0: \qquad (8')$$

Լուծելով (8′) հավասարումը՝ կստանանք z-ի (այսինքն $y'(x)$-ի) կախումը x-ից և $n-1$ կամայական հաստատուններից.

$$z(x)=y'(x)=\varphi(x,c_1,c_2,...,c_{n-1}): \qquad (9)$$

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար մնում է լուծել առաջին կարգի (9) դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$y=\int\varphi(x,c_1,c_2,...,c_{n-1})dx+c_n \qquad (c_n=const): \qquad (10)$$

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}:$$

Լուծում: Կատարելով (9) նշանակումը՝ տրված հավասարումից կստանանք նոր անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին կարգի

$$x\frac{dz}{dx}=z$$

կամ որ նույնն է՝

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծելով ստացված անջատված փոփոխականներով հավասարումը՝ կունենանք **[50,ս7]**, **[35,4°]**

$$z=c_0x \qquad (c_0=const):$$

Տրված դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար մնում է (9) նշանակման օգնությամբ վերադառնալ $y(x)$ անհայտ ֆունկցիային և լուծել առաջին կարգի

$$\frac{dy}{dx}=c_0x$$

դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$y=c_1x^2+c_2 \qquad \left(c_1=\frac{c_0}{2},c_2=const\right):$$

3°. ***Այժմ ենթադրենք n-րդ $(n\geq 2)$ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումն ունի***

$$F[y,y',y'',...,y^{(n)}]=0 \qquad (11)$$

տեսքը, այսինքն՝ ենթադրենք այն բացահայտ ձևով չի պարունակում x անկախ փոփոխականը:

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման կարգն իջեցնելու նպատակով y-ը համարենք անկախ փոփոխական, $y'(x)$-ը՝ որոնելի ֆունկցիա և նորից այն նշանակենք z-ով, սակայն քննարկվող դեպքում z-ը համարենք ֆունկցիա ոչ թե x-ից, այլ՝ y-ից.

$$y'(x) = z(y): \qquad (12)$$

Հաջորդաբար ածանցելով՝ (12) հավասարությունից կստանանք [28,(15)]

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z\cdot z'_y\right) = \frac{d(z\cdot z'_y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = z\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}\right], \qquad (12')$$

....

$$y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dy^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right):$$

(12) և (12′) հավասարությունների հաշվառումով n-րդ կարգի (11) դիֆերենցիալ հավասարումը կբերենք նոր անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ ($n-1$)-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարման.

$$F[y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}] = 0: \qquad (11')$$

Լուծելով (11′) հավասարումը՝ կստանանք z-ի (այսինքն $y'(x)$-ի) կախումը y-ից և $n-1$ կամայական հաստատուններից.

$$z(y) = \frac{dy}{dx} = \psi(y, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}): \qquad (13)$$

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար մնում է լուծել առաջին կարգի (անջատվող փոփոխականներով) (13) դիֆերենցիալ հավասարումը:

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$(y')^2 - 2yy'' = 0:$$

Լուծում: Քանի որ դիտարկվող հավասարումը բացահայտ ձևով անկախ փոփոխական չի պարունակում, ուստի այդ հավասարման կարգն իջեցնելու համար կարող ենք օգտվել (12) նշանակումից: Արդյունքում՝ անհայտ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի համար կունենանք.

$$y'' = z\frac{dz}{dy}: \qquad (\text{ա})$$

y' և y'' ածանցյալների (12) և (ա) արտահայտությունները տեղադրելով տրված հավասարման մեջ՝ կստանանք նոր անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ առաջին կարգի

$$z(z - 2y\frac{dz}{dy}) = 0 \qquad (\text{բ})$$

հավասարումը:

Լուծելով (բ) հավասարումը՝ կունենանք

$$z = c_1\sqrt{y},$$

որտեղից՝ հեշտությամբ կստանանք դիտարկվող հավասարման լուծումը

$$y = (c_1x + c_2)^{\frac{2}{3}} \qquad (c_1, c_2 = const):$$

4°. *Վերջում դիտարկենք նաև*

$$y^{(n+1)} = f[x, y^{(n)}] \qquad (n \geq 1) \tag{14}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Դիտարկվող հավասարումը լուծելու համար կատարենք

$$y^{(n)} = z(x) \tag{15}$$

նշանակումը, լուծենք տրված հավասարումից ստացված

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z) \tag{16}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, (16) հավասարման լուծումը տեղադրենք (15) հավասարության մեջ և 1° կետում շարադրված եղանակով լուծենք n -րդ կարգի (15) դիֆերենցիալ հավասարումը:

Օրինակ 4: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y''' - \frac{y''}{x} = x: \tag{գ}$$

Լուծում: Կատարելով

$$y'' = z(x) \tag{դ}$$

նշանակումը և լուծելով ստացված

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = x \tag{ե}$$

գծային դիֆերենցիալ հավասարումը [51,ս3]՝ կունենանք

$$z(x) = x^2 + c_0 x \qquad (c_0 = const):$$

Այնուհետև Z ֆունկցիայի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով (դ) հավասարության մեջ.

$$y'' = x^2 + c_0 x\,, \tag{զ}$$

և լուծելով (զ) դիֆերենցիալ հավասարումը՝ կգտնենք տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y = \frac{x^4}{12} + c_1 x^3 + c_2 x + c_3 \qquad \left(c_1 = \frac{c_0}{6}, c_2, c_3 = const\right):$$

§53. Երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հատկությունները: Ֆունկցիաների գծային կախվածությունը և անկախությունը: Վրոնսկու որոշիչը: Ֆունկցիաների գծային կախվածության անհրաժեշտ պայմանը:

Անցնելով երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ հիշեցնենք, որ ընդհանուր դեպքում այդ հավասարումներն ունեն

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

տեսքը:

Սահմանում 1: (a,b) *միջակայքում մինչև երկրորդ կարգը ներառյալ անընդհատ ածանցյալներ ունեցող* $\varphi(x)$ *ֆունկցիան կոչվում է երկրորդ կարգի*

(1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում, եթե այն անհայտ ֆունկցիայի փոխարեն (1) հավասարման մեջ տեղադրելը՝ վերջինին, տրված միջակայքում վերածում է նույնության.

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x)]=0, \qquad x\in(a,b): \qquad (1')$$

Յատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում այն պայմանները, որոնք (1) դիֆերենցիալ հավասարման համար ապահովում են միակ լուծում: Սովորաբար այդ պայմանները բերվում են

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0 \qquad (a<x_0<b) \qquad (2)$$

տեսքով և կոչվում են սկզբնական պայմաններ:

Գտնել (1) դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է (2) սկզբնական պայմաններին, նշանակում է այդ հավասարման համար լուծել Կոշիի խնդիր:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությունը սկսենք երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների դիտարկումով:

Սահմանում 2: *(1) հավասարումը կոչվում է երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում, եթե այն գծային է անհայտ ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների նկատմամբ:*

Յամաձայն բերված սահմանման՝ ընդհանուր դեպքում երկրորդ կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարումն ունի

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (3)$$

տեսքը, որտեղ $p(x)$-ը, $q(x)$-ը և $f(x)$-ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են (կամ էլ՝ հաստատուններ):

Սահմանում 3: *Երկրորդ կարգի (3) դիֆերենցիալ հավասարման մեջ մասնակցող $f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ հավասարման աջ մաս:*

Եթե $f(x)$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար չէ զրոյի, ապա (3) հավասարումը կոչվում է երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում, իսկ եթե $f(x)\equiv 0$, ապա նշված հավասարումն ընդունում է

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (4)$$

տեսքը և կոչվում է երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում:

Այժմ ծանոթանանք երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հատկություններին:

Թեորեմ 1: *Եթե $y_1(x)$-ը և $y_2(x)$-ը երկրորդ կարգի գծային համասեռ (4) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներ են, ապա նրանց գումարը նույնպես նշված հավասարման լուծում է:*

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք (a,b) միջակայքում որոշված $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները (4) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներ են, այսինքն ենթադրենք նշված միջակայքում տեղի ունեն

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0, \qquad (5)$$

$$y_2'' + P(x)y_2' + q(x)y_2 \equiv 0 : \qquad (6)$$

նույնությունները:

Դիտարկվող հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով $y_1 + y_2$ և նկատի ունենալով (5) և (6) նույնությունները՝ կստանանք [28,(1)]

$$(y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= \left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + \left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] = 0 \qquad x \in (a,b), \qquad (7)$$

ինչը նշանակում է, որ (4) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումների գումարը նույնպես այդ հավասարման լուծում է:

Իսկա

Թեորեմ 2: *Եթե $y_1(x)$-ը երկրորդ կարգի գծային համասեռ (4) դիֆերենցիալ հավասարման որևէ մասնակի լուծում է, ապա $cy_1(x)$-ը, որտեղ c-ն կամայական հաստատուն է, նույնպես այդ հավասարման լուծում է:*

Ապացույց: Դիցուք (a,b) միջակայքում որոշված $y_1(x)$ ֆունկցիան (4) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծում է, այսինքն (a,b) միջակայքում տեղի ունի (5) նույնությունը:

Դիտարկվող հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով cy_1 և նկատի ունենալով (5) նույնությունը՝ կունենանք [28,(9)]

$$(cy_1)'' + p(x)(cy_1)' + q(x)(cy_1) = c[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] = 0\,, \qquad x \in (a,b), \qquad (8)$$

ինչը նշանակում է, որ (4) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ մասնակի լուծման և կամայական c հաստատունի արտադրյալը նույնպես այդ հավասարման լուծում է:

Իսկա

Անցնելով գծորեն կախյալ և գծորեն անկախ ֆունկցիաների հետ ծանոթանալուն՝ բերենք հետևյալ սահմանումները.

Սահմանում 4: *$y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն կախյալ $[a,b]$ միջակայքում, եթե գոյություն ունի այնպիսի c հաստատուն, որ տրված ֆունկցիաների քանորդը նշված միջակայքում հավասար է այդ հաստատունին.*

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = c \qquad [y_1(x) = cy_2(x)] \qquad x \in [a,b] : \qquad (9)$$

Սահմանում 5: *$y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն անկախ $[a,b]$ միջակայքում, եթե գոյություն չունի հաստատուն, որ տրված ֆունկցիաների քանորդը նշված միջակայքում հավասար լինի այդ հաստատունին:*

Այլ խոսքով, $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն անկախ $[a,b]$ միջակայքում, եթե տրված ֆունկցիաների քանորդը նշված միջակայքում հավասար չէ հաստատունի

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq c, \qquad (c = const) \qquad x \in [a,b]: \tag{10}$$

Օրինակ 1: Դիտարկենք երկրորդ կարգի գծային համասեռ

$$y'' - 4y = 0$$

հավասարումը:

Կարող ենք անմիջական տեղադրումով համոզվել, որ

$$y_1(x) = 5e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{2x}, \quad y_3(x) = e^{-2x}$$

ֆունկցիաները տրված հավասարման մասնակի լուծումներ են:

Քանի որ ցանկացած միջակայքում տեղի ունեն

$$\frac{5e^{2x}}{e^{2x}} = 5 = const, \qquad \frac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{4x} \neq const$$

առնչությունները՝ հետևաբար, համաձայն բերված սահմանումների, ցանկացած միջակայքում դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ լուծումները գծորեն կախյալ են, իսկ $y_2(x)$ և $y_3(x)$ լուծումները՝ գծորեն անկախ:

Նկատենք, որ ընդհանուր դեպքում երկու ֆունկցիաներ որևէ միջակայքում կարող են լինել գծորեն կախյալ, իսկ մեկ այլ միջակայքում՝ գծորեն անկախ:

Օրինակ 2: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիաները՝

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, \text{ երբ } x \in (-\infty, 0), \\ x^2, \text{ երբ } x \in [0; +\infty): \end{cases}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (0;1) միջակայքում դիտարկվող ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են, իսկ (-1;1) միջակայքում՝ գծորեն անկախ:

Սահմանում 6: Երկրորդ կարգի

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

ֆունկցիոնալ որոշիչը, որտեղ $y_1(x)$-ը և $y_2(x)$-ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված ածանցելի ֆունկցիաներ են, կոչվում է այդ ֆունկցիաների Վրոնսկու որոշիչ կամ վրոնսկիան և նշանակվում է $W(x)$-ով կամ $W(y_1, y_2)$-ով.

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}: \tag{11}$$

Օրինակ 3: Հաշվել ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված $y_1 = x$ և $y_2 = x^2$ ֆունկցիաների վրոնսկիանը:

Լուծում: Համաձայն վրոնսկիանի սահմանման՝ ունենք [27,(7)], [2,ս13]

$$W(x, x^2) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2:$$

Պարզվում է՝ տեղի ունի հետևյալ կարևոր թեորեմը.

Թեորեմ 3: *(Երկու ֆունկցիաների գծային կախվածության անհրաժեշտ պայմանը)*:

Եթե $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ածանցելի ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են (a,b) միջակայքում, ապա այդ ֆունկցիաների վրոնսկիանը նշված միջակայքում նույնաբար հավասար է զրոյի:

Ապացույց: Դիցուք $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են $[a,b]$ միջակայքում:

Համաձայն սահմանման, կատարված ենթադրությունը նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի c հաստատուն, որ տրված միջակայքում տեղի ունի

$$y_2(x) \equiv c y_1(x) \tag{12}$$

նույնությունը:

Ածանցելով (12) նույնության երկու կողմերը՝ կստանանք, որ նշված միջակայքում տեղի ունի նաև

$$y_2'(x) \equiv c y_1'(x) \tag{12'}$$

նույնությունը:

Վերջին երկու նույնությունների շնորհիվ (a,b) միջակայքի յուրաքանչյուր կետում $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների վրոնսկիանի համար կունենանք [2,7°]

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & c y_1(x) \\ y_1'(x) & c y_1'(x) \end{vmatrix} = 0:$$

Ինչ

Հետևանք 1: *Եթե $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի որևէ կետում տարբեր է զրոյից, ապա այդ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են նշված միջակայքում:*

Ապացույց: Հետևանքը ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով:

Դիցուք $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի որևէ կետում տարբեր է զրոյից և այդ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են նշված միջակայքում:

Համաձայն նախորդ թեորեմի, կատարված ենթադրության երկրորդ մասից հետևում է, որ դիտարկվող ֆունկցիաների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքում նույնաբար հավասար է զրոյի:

Ստացված հակասությունից հետևում է, որ ենթադրությունն այն մասին, որ տրված ֆունկցիաներն (a,b) միջակայքում գծորեն կախյալ են, սխալ է:

Այսպիսով, պնդման պայմանի տեղի ունենալու դեպքում, $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են (a,b) միջակայքում:

Ինչ

§54. Երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների գծորեն անկախ լինելու պայմանը: Երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքը:

Կրկին դիտարկենք երկրորդ կարգի գծային համասեռ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $p(x)$-ը և $q(x)$-ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են (կամ՝ հաստատուններ):

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների հատկությունների ուսումնասիրությունը շարունակելու համար նախ համոզվենք հետևյալ երկու պնդումների ճշմարտացիության մեջ՝

Թեորեմ 1: $y_0(x) \equiv 0$ *ֆունկցիան երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման*

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0 \qquad (a < x_0 < b) \tag{2}$$

սկզբնական պայմաններին բավարարող միակ լուծումն է:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք x_0-ն (a,b) միջակայքի որևէ կետ է, իսկ $y_1(x)$-ը՝ (1) հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող որևէ մասնակի լուծում:

Քանի որ $y_0(x) \equiv 0$ ֆունկցիան ակնհայտորեն նույնպես (1) հավասարման նշված սկզբնական պայմաններին բավարարող լուծում է, հետևաբար, համաձայն n-րդ կարգի ($n \geq 2$) դիֆերենցիալ հավասարման լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերող թեորեմի [52,թ1], $y_0(x)$ և $y_1(x)$ լուծումները համընկնում են (a,b) միջակայքում, ինչը նշանակում է, որ $y_0(x) \equiv 0$ ֆունկցիան (1) դիֆերենցիալ հավասարման (2) սկզբնական պայմաններին բավարարող միակ լուծումն է:

Իպա

Թեորեմ 2: *Եթե երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ լուծումը (a,b) միջակայքին պատկանող որևէ $[\alpha,\beta]$ հատվածում նույնաբար հավասար է զրոյի, ապա այն նույնաբար հավասար է զրոյի նաև (a,b) միջակայքում:*

Ապացույց: Դիցուք (1) հավասարման $y_1(x)$ լուծումը (a,b) միջակայքին պատկանող որևէ $[\alpha,\beta]$ հատվածում նույնաբար հավասար է զրոյի:

Ապացուցելու համար, որ այն նույնաբար հավասար է զրոյի նաև (a,b) միջակայքում, (α,β) միջակայքում ընտրենք որևէ x_0 արժեք:

Քանի որ ըստ պայմանի $y_1(x)$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի $[\alpha,\beta]$ հատվածում, հետևաբար տեղի ունեն

$$y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$$

հավասարությունները՝ [27,թ3]:

Մյուս կողմից, քանի որ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ լուծումը (a,b) միջակայքի որևէ կետում բավարարում է (2) սկզբնական պայմաններին, հետևաբար, համաձայն նախորդ թեորեմի, այն նշված միջակայքում համընկնում է այդ հավասարման նույնաբար զրոյի հավասար լուծման հետ.

$$y_1(x) = 0\ , \quad x \in (a,b):$$

Իպա

Այժմ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Եթե երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի մի որևէ x_0 կետում տարբեր է զրոյից, ապա այն ամբողջ (a,b) միջակայքում տարբեր է զրոյից:*

Ապացույց: Դիցուք (a,b) միջակայքում որոշված $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները (1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներ են, ինչը նշանակում է, որ նշված միջակայքում տեղի ունեն

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0\ , \tag{3}$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \tag{4}$$

հավասարությունները [53,ս1]:

Ստացված հավասարություններից առաջինի բոլոր անդամները բազմապատկելով $y_2(x)$-ով, իսկ երկրորդի անդամները՝ $y_1(x)$-ով, կստանանք

$$y_1''y_2 + p(x)y_1'y_2 + q(x)y_1y_2 = 0, \tag{3'}$$

$$y_2''y_1 + p(x)y_2'y_1 + q(x)y_2y_1 = 0: \tag{4'}$$

Վերջին հավասարությունից անդամ առ անդամ հանելով նախորդը՝ կունենանք

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + p(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0: \tag{5}$$

Նկատելով, որ (5) հավասարության երկրորդ փակագծերի ներսում գրված է $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների վրոնսկիանը [53,ս6], իսկ առաջին փակագծերի ներսում՝ նրա ածանցյալը, կարող ենք այդ հավասարությունը ներկայացնել

$$W'(x) + p(x)W(x) = 0 \tag{6}$$

տեսքով*):

Լուծելով անջատվող փոփոխականներով (6) դիֆերենցիալ հավասարումը՝ կստանանք [50,ս8], [35,4°]

---

*) Ունենք [28,(1),(2)]

$$W'(x) = (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_2'y_1' - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'':$$

$$W(x)=c\cdot e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx},\quad x_0\in(a,b),\ x\in(a,b)\quad(c=const): \tag{7}$$

Նշենք, որ երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումների վրոնսկիանի համար ստացած (7) բանաձևը կոչվում է Լիուվիլի բանաձև:

Լիուվիլի բանաձևում ընդունելով $x=x_0$, կունենանք

$$c=W(x_0):$$

c հաստատունի արժեքը տեղադրելով (7) բանաձևի մեջ՝ կստանանք (6) հավասարման այն մասնակի լուծումը, որը բավարարում է

$$W(x)\big|_{x=x_0}=W(x_0)$$

սկզբնական պայմանին.

$$W(x)=W(x_0)\cdot e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}: \tag{7'}$$

Նկատի ունենալով թեորեմի պայմանը $[W(x_0)\neq 0]$ և հաշվի առնելով, որ ցուցչային ֆունկցիան ընդունում է միայն դրական արժեքներ, (7′) բանաձևից կստանանք, որ ամբողջ (a,b) միջակայքում (1) հավասարման y_1 և y_2 մասնակի լուծումների վրոնսկիանը տարբեր է զրոյից:

Իսպ

Հետևանք 1: *Եթե երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի որևէ x_0 կետում հավասար է զրոյի, ապա այն նույնաբար հավասար է զրոյի այդ միջակայքում:*

Ապացույց: Ենթադրելով, որ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի մի որևէ x_0 կետում հավասար է զրոյի.

$$W(y_1,y_2)\big|_{x=x_0}=W(x_0)=0$$

և Լիուվիլի բանաձևում ընդունելով $x=x_0$, կունենանք

$$c=W(x_0)=0:$$

c հաստատունի համար ստացած արժեքը տեղադրելով (7) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$W(x)=0,\qquad x\in(a,b):$$

Իսպ

Այժմ տեսնենք, թե ինչպիսի պայմանների իրականացման դեպքում (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումները կլինեն գծորեն անկախ (a,b) միջակայքում:

Թեորեմ 4: *Որպեսզի երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումները լինեն գծորեն անկախ (a,b) միջակայքում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ լուծումների վրոնսկիանը տրված միջակայքում տարբեր լինի զրոյից:*

Ապացույց: *Անհրաժեշտություն:* Ձևակերպած պայմանի անհրաժեշտությունն ապացուցենք հակասող ընդունելության եղանակով:

Դիցուք (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ մասնակի լուծումները գծորեն անկախ են (a,b) միջակայքում:

Համոզվելու համար, որ նշված լուծումների վրոնսկիանը տրված միջակայքում տարբեր է զրոյից, ենթադրենք հակառակը, այսինքն ենթադրենք (a,b) միջակայքում գոյություն ունի այնպիսի x_0 կետ, որ այդ կետում վերոհիշյալ վրոնսկիանը հավասար է զրոյի: Այդ դեպքում, համաձայն հետևանք 1-ի, կստանանք, որ այն նույնաբար հավասար է զրոյի դիտարկվող միջակայքում.

$$y_1y_2' - y_2y_1' = 0, \qquad x \in (a,b): \tag{8}$$

Այժմ քննարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

1) $y_1(x)$ **ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի** (a,b) **միջակայքում:**

Քանի որ, համաձայն ենթադրության, դիտարկվող հավասարման $y_1(x)$ **և** $y_2(x)$ լուծումները գծորեն անկախ են տրված միջակայքում, հետևաբար քննարկվող դեպքը չի կարող իրականանալ **[53,ս5]**:

2) $y_1(x)$ **ֆունկցիան նույնաբար հավասար է զրոյի մի որևէ միջակայքում,** որն ընկած է (a,b) միջակայքի մեջ:

Համաձայն թեորեմ 2-ի, քննարկվող դեպքը նույնպես բացառվում է:

3) $y_1(x)$ **ֆունկցիան** (a,b) **միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:**

Դիտարկվող դեպքում (8) նույնությունից կստանանք **[28,(12)]**

$$\frac{y_1y_2' - y_2y_1'}{y_1^2} \equiv 0$$

կամ որ նույնն է՝

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \equiv 0$$

նույնությունը, որտեղից հետևում է **[33,բ1]**, որ նշված միջակայքում $y_1(x)$ և $y_2(x)$ **ֆունկցիաները** կապված են

$$\frac{y_2}{y_1} = c \qquad (c = const) \tag{9}$$

առնչությամբ, ինչը հակասում է այդ ֆունկցիաների գծային անկախության մասին արված ենթադրությանը:

Այսպիսով, քննարկվող դեպքն էլ չի կարող իրականանալ:

4) (a,b) միջակայքում գոյություն ունեն մեկուսացված կետեր **[18,ս19]**, որտեղ (1) հավասարման $y_1(x)$ լուծումը հավասար է զրոյի:

Պարզության համար ենթադրենք, որ (a,b) միջակայքի միայն x_1 կետում է $y_1(x)$ ֆունկցիան ընդունում զրո արժեքը:

Օգտվելով 3) դեպքում բերված դատողություններից՝ կստանանք, որ (a,x_1) և (x_1,b) միջակայքերից յուրաքանչյուրում (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ լուծումները միմյանց հետ կապված են

$$y_2 = c y_1 \qquad (c = const) \tag{9'}$$

առնչությամբ:

Այնուհետև ներմուծելով

$$y = y_2 - c y_1 \tag{10}$$

ֆունկցիան և հաշվի առնելով, որ $y_1(x)$-ը և $y_2(x)$-ը (1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներ են, եզրակացնում ենք, որ $y(x)$-ը նույնպես այդ հավասարման լուծում է **[53,բ1,բ2]**:

Մյուս կողմից՝ (9′) առնչությունից հետևում է, որ (1) դիֆերենցիալ հավասարման (10) լուծումը (a,x_1), (x_1,b) միջակայքերից յուրաքանչյուրում նույնաբար հավասար է զրոյի, որտեղից էլ, համաձայն թեորեմ 2-ի, հետևում է, որ այն նույնաբար հավասար է զրոյի նաև (a,b) միջակայքում:

Այսպիսով, (a,b) միջակայքի բոլոր կետերում տեղի ունի (9′) հավասարությունը, ինչը հակասում է այդ միջակայքում $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների գծային անկախությանը վերաբերող ենթադրությանը:

Ամփոփելով բերված քննարկումների արդյունքները՝ եզրակացնում ենք, որ

$$W(x_0) = 0, \qquad x_0 \in (a,b)$$

ենթադրությունը բոլոր հնարավոր դեպքերում հանգեցնում է հակասության:

Հետևաբար, եթե (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ լուծումները գծորեն անկախ են (a,b) միջակայքում, ապա այդ ֆունկցիաների վրոնսկիանը նշված միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

Բավարարություն: Այժմ ենթադրենք (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ լուծումների վրոնսկիանը (a,b) միջակայքի ոչ մի կետում զրո չի դառնում:

Ինչպես գիտենք, կատարված ենթադրությունից հետևում է, որ $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են նշված միջակայքում **[53,հ1]** (ընդ որում, անկախ նրանից, որ այդ ֆունկցիաները (1) հավասարման լուծումներ են):

Իսկ

Նկատենք, որ եթե $y_1(x)$ -ը և $y_2(x)$ -ը երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ չեն, ապա այն փաստից, որ որևէ միջակայքում այդ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, չի հետևում, որ նույն միջակայքում նրանց վրոնսկիանը տարբեր է զրոյից:

Վերջում ծանոթանանք (1) հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքի հետ:

Սահմանում 1: *Երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման գծորեն անկախ լուծումների ցանկացած $y_1(x)$, $y_2(x)$ համախումբ կոչվում է այդ հավասարման լուծումների հիմնական համակարգ և նշանակվում է $\{y_1, y_2\}$ պայմանանշանով:*

Թեորեմ 5: *(Երկրորդ կարգի գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքի մասին):*

Եթե $y_1(x)$ և $y_2(x)$ ֆունկցիաների $\{y_1, y_2\}$ համախումբը երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների հիմնական համակարգ է, ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{11}$$

տեսքը, որտեղ c_1 -ը և c_2 -ը կամայական հաստատուններ են:

Ապացույց: Դիցուք, $\{y_1, y_2\}$ -ը (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների հիմնական համակարգ է:

Քանի որ ըստ պայմանի $y_1(x)$-ը և $y_2(x)$ -ը (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ են, հետևաբար, ինչպես գիտենք, ցանկացած c_1 և c_2 հաստատունների համար այդ հավասարման լուծումներ են նաև $c_1 y_1(x)$ -ը, $c_2 y_2(x)$ -ը և $(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x))$-ը:

Համաձայն n -րդ կարգի ($n \geq 2$) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման սահմանման, [52,u2] թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ, որ (1) հավասարման ինչպիսի սկզբնական պայմաններ էլ վերցնենք.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \qquad x_0 \in (a,b), \tag{12}$$

կարելի է c_1 և c_2 հաստատուններն այնպես ընտրել, որ (11) ֆունկցիան բավարարի այդ սկզբնական պայմաններին:

Պահանջելով, որ (1) հավասարման (11) լուծումը բավարարի (12) սկզբնական պայմաններին՝ կստանանք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ c_1, c_2 հաստատունների նկատմամբ [12].

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} = y_0, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} = y'_0, \end{cases} \tag{13}$$

որտեղ

$$y_{10} = y_1(x_0), \quad y_{20} = y_2(x_0), \quad y'_{10} = y'_1(x_0), \quad y'_{20} = y'_2(x_0):$$

Նկատելով, որ հավասարումների ստացված համակարգի գլխավոր որոշիչը [13,ս1] (1) դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ գծորեն անկախ լուծումների վրոնսկիանի արժեքն է x_0 կետում.

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)\big|_{x=x_0}, \qquad (14)$$

թեորեմ 4-ի շնորհիվ կստանանք, որ այն տարբեր է զրոյից:

Ինչպես գիտենք, վերոգրյալից հետևում է, որ հավասարումների (13) համակարգն ունի միակ լուծում, որը կարելի է գտնել, օրինակ, Կրամերի կանոնով [13,2°]:

Լուծելով հավասարումների (13) համակարգը և c_1, c_2 հաստատունների արժեքները տեղադրելով (11) ֆունկցիայի արտահայտության մեջ՝ դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման ընտանիքից կառանձնացնենք այդ հավասարման այն մասնակի լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին:

Իպա

Այսպիսով, երկրորդ կարգի գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել տրված հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումների որևէ զույգ և գտած մասնակի լուծումներից կազմել (11) ֆունկցիան, որտեղ c_1-ը և c_2-ը կամայական հաստատուններ են:

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0: \qquad (ա)$$

Լուծում: Կարող ենք անմիջական տեղադրումով համոզվել, որ $x=0$ կետը չպարունակող ցանկացած միջակայքում ֆունկցիաների $\{x, 1/x\}$ համախումբը դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների հիմնական համակարգ է: Հետևաբար, համաձայն թեորեմ 5-ի, (ա) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը:

Նշենք, որ ընդհանուր դեպքում երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով գծային համասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը վերջավոր տեսքով գտնելն անհնար է:

§55. Երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքը: Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Անցնելով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ դիտարկենք

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $p(x)$-ը, $q(x)$-ը և $f(x)$-ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են (կամ՝ հաստատուններ), ընդ որում, նշված միջակայքում $f(x)$-ը նույնաբար հավասար չէ զրոյի:

(1) հավասարման հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև այդ հավասարման, այսպես կոչված, համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

և ապացուցենք հետևյալ հիմնական թեորեմը՝

Թեորեմ 1: *(Երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման կառուցվածքի մասին):*

Երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

տեսքը, որտեղ $\bar{y}$-ը (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ y^*-ը՝ տրված անհամասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծում:

Ապացույց: Համոզվելու համար, որ (3) ֆունկցիան հանդիսանում է (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝ նախ ցույց տանք, որ այն բավարարում է այդ հավասարմանը **[52,ս2]**:

Իրոք, (3) ֆունկցիան տեղադրելով (1) հավասարման մեջ, կստանանք

$$(\bar{y} + y^*)'' + p(x)(\bar{y} + y^*)' + q(x)(\bar{y} + y^*) = f(x)$$

կամ որ նույնն է **[28,(1)]**՝

$$[\bar{y}'' + p(x)\bar{y}' + q(x)\bar{y}] + [(y^*)'' + p(x)(y^*)' + q(x)y^*] = f(x) \tag{4}$$

հավասարությունը:

Քանի որ, համաձայն ենթադրության, $\bar{y}$-ը (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է, իսկ y^*-ը՝ (1) անհամասեռ հավասարման լուծում, ուստի (4) հավասարության առաջին քառակուսի փակագծերի ներսի արտահայտությունը նույնաբար հավասար է զրոյի (a,b) միջակայքում, իսկ երկրորդ փակագծերի ներսի արտահայտությունը՝ $f(x)$-ի:

Վերոգրյալը նշանակում է, որ (4) հավասարությունը նույնություն է (a,b) միջակայքում, որտեղից էլ հետևում է, որ (3) ֆունկցիան (1) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է **[53,ս1]**:

Այժմ, նկատի ունենալով, որ (2) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը տրվում է

$$\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad (c_1, c_2 = const) \tag{5}$$

բանաձևով **[54,բ5]**, որտեղ $y_1(x)$-ը և $y_2(x)$-ը այդ հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են՝ (3) ֆունկցիան ներկայացնենք

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y^* \qquad (c_1, c_2 = const) \tag{6}$$

տեսքով:

Համաձայն n-րդ կարգի $(n \ge 2)$ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման սահմանման, թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մնում է ցույց տալ, որ (1) հավասարման ինչպիսի սկզբնական պայմաններ էլ վերցնենք [53,(2)].

$$y(x_0)=y_0, \qquad y'(x_0)=y'_0 \qquad (a<x_0<b), \tag{7}$$

կարելի է c_1 և c_2 հաստատուններն այնպես ընտրել, որ (6) ֆունկցիան բավարարի այդ սկզբնական պայմաններին:

Պահանջելով, որ (6) ֆունկցիան բավարարի (7) սկզբնական պայմաններին, կստանանք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ c_1 և c_2 հաստատունների նկատմամբ [12].

$$\begin{cases} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} = y_0 - y_0^*, \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} = y'_0 - (y_0^*)', \end{cases} \tag{8}$$

որտեղ

$$y_{10}=y_1(x_0), \quad y_{20}=y_2(x_0), \quad y'_{10}=y'_1(x_0),$$

$$y'_{20}=y'_2(x_0), \quad y_0^*=y^*(x_0), \quad (y_0^*)'=[y^*(x_0)]':$$

Քանի որ հավասարումների ստացված համակարգի գլխավոր որոշիչը [13,ս1] (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման $y_1(x)$ և $y_2(x)$ գծորեն անկախ լուծումների [53,ս5] վրոնսկիանի արժեքն է x_0 կետում [53,ս6].

$$\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix} = W(y_1,y_2)\big|_{x=x_0}, \tag{9}$$

հետևաբար այն տարբեր է զրոյից [54,թ4]:

Ինչպես գիտենք, վերոգրյալից հետևում է, որ հավասարումների (8) համակարգն ունի միակ լուծում, որը կարելի է գտնել, օրինակ, Կրամերի կանոնով [13,2°]:

Լուծելով հավասարումների (8) համակարգը և c_1, c_2 հաստատունների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (6) ֆունկցիայի արտահայտության մեջ՝ (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծման ընտանիքից կառանձնացնենք այդ հավասարման այն մասնակի լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին:

Իսկա

Այսպիսով, երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է.

ա) *գտնել այդ հավասարման համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը,*

բ) *գտնել տրված անհամասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծում,*

գ) *ստացված լուծումները գումարել իրար:*

Օրինակ 1: Գտնել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$y'' - \frac{y'}{x} = x: \tag{ա}$$

Լուծում: Համաձայն թեորեմ 1-ի, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y=\bar{y}+y^* \qquad (բ)$$

տեսքը, որտեղ $\bar{y}$-ը

$$y''-\frac{y'}{x}=0 \qquad (գ)$$

համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ y^*-ը՝ (ա) հավասարման որևէ մասնակի լուծում:

Իջեցնելով (գ) հավասարման կարգը և լուծելով այն՝ կունենանք [52,o2]

$$\bar{y}=c_1x^2+c_2 \qquad (c_1,c_2=const):$$

Այնուհետև անմիջական տեղադրման միջոցով համոզվելով, որ

$$y^*=\frac{x^3}{3}$$

ֆունկցիան բավարարում է տրված հավասարմանը և $\bar{y}$ և y^* ֆունկցիաների համար ստացված արտահայտությունները տեղադրելով (բ) բանաձևի մեջ՝ կստանանք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը.

$$y=\frac{x^3}{3}+c_1x^2+c_2 \qquad (c_1,c_2=const):$$

Երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների մասնակի լուծումներ փնտրելիս անհրաժեշտության դեպքում կօգտվենք հետևյալ թեորեմից՝

Թեորեմ 2: *Եթե y_k^* $(k=1,2,...,n)$ ֆունկցիաները երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ*

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_k(x) \qquad (k=1,2,...,n) \tag{10}$$

դիֆերենցիալ հավասարումների համապատասխան մասնակի լուծումներ են,[*] *ապա*

$$y=y_1^*+y_2^*+...+y_n^* \tag{11}$$

ֆունկցիան էլ

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x) \tag{12}$$

հավասարման մասնակի լուծում է:

Այլ խոսքով, երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (10) դիֆերենցիալ հավասարումների մասնակի լուծումների գումարը երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (12) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծում է:

Ապացույց: Համոզվելու համար, որ (11) ֆունկցիան բավարարում է (12) հավասարմանը՝ այն տեղադրենք նշված հավասարման մեջ.

$$(y_1^*+y_2^*+...+y_n^*)''+p(x)(y_1^*+y_2^*+...+y_n^*)'+q(x)(y_1^*+y_2^*+...+y_n^*)=$$
$$=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x) \tag{13}$$

Այնուհետև (13) հավասարությունը ներկայացնենք

*) $p(x)$, $q(x)$, $f_k(x)$ $(k=1,2,...,n)$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ որևէ (a,b) միջակայքում:

$$[(y_1^*)'' + p(x)(y_1^*)' + q(x)y_1^*] + [(y_2^*)'' + p(x)(y_2^*)' + q(x)y_2^*] + \cdots$$

$$\cdots + [(y_n^*)'' + p(x)(y_n^*)' + q(x)y_n^*] = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \qquad (13')$$

տեսքով և օգտվելով թեորեմի պայմանից՝ (13′) հավասարության մեջ մասնակցող քառակուսի փակագծերի ներսում գրված արտահայտությունները (ձախից աջ) համապատասխանաբար փոխարինենք $f_1(x)$ -ով, $f_2(x)$ -ով,…, $f_n(x)$ -ով: Արդյունքում (13′) հավասարությունը (a,b) միջակայքում կվերածվի նույնության, ինչը նշանակում է, որ (11) ֆունկցիան (12) հավասարման լուծում է:

Իսկ

Այսպիսով, երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (12) դիֆերենցիալ հավասարման որևէ մասնակի լուծում գտնելու համար անհրաժեշտ է գտնել (10) դիֆերենցիալ հավասարումների մեկական մասնակի լուծում և այդ բոլոր լուծումները գումարել իրար:

Նախորդ պարագրաֆում մենք նշեցինք, որ ընդհանուր դեպքում երկրորդ կարգի փոփոխական գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը վերջավոր տեսքով գտնելն անհնար է:

Պարզվում է, որ այդ իմաստով, հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարման պարագայում պատկերը փոխվում է էապես: Ավելին, պարզվում է՝ գոյություն ունի մեթոդ, որը հնարավորություն է տալիս վերջավոր տեսքով գտնել երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը: Այդ մեթոդի հետ ծանոթանալու համար դիտարկենք

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (14)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ p -ն և q -ն կամայական իրական հաստատուններ են:

Ինչպես գիտենք, (14) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (c_1, c_2 = const) \qquad (15)$$

տեսքը, որտեղ $y_1(x)$ -ը և $y_2(x)$ -ը այդ հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են:

Դիտարկվող հավասարման մասնակի լուծումը փնտրելով

$$y = e^{kx} \qquad (k = const) \qquad (16)$$

տեսքով և (16) ֆունկցիան տեղադրելով (14) հավասարման մեջ՝ կստանանք [27,(8′)], [28,(9),(15′)]

$$(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0:$$

Նկատի ունենալով, որ ցուցչային ֆունկցիան զրո արժեք չի ընդունում, վերջին հավասարությունից կունենանք

$$k^2 + pk + q = 0: \qquad (17)$$

Այսպիսով, որպեսզի (16) տեսքն ունեցող ֆունկցիան լինի երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով (14) գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծում, անհրաժեշտ է, որ k -ն բավարարի (17) հավասարմանը:

Դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման համար ունենալով այդքան

կարևոր նշանակություն՝ (17) հավասարումը կոչվում է այդ հավասարման բնութագրիչ հավասարում:

Լուծելով (17) հավասարումը՝ կստանանք

$$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}:$$

Առանձին-առանձին քննարկենք հետևյալ հնարավոր դեպքերը՝

1°. *Բնութագրիչ հավասարման տարբերիչը դրական է:*

Քանի որ քննարկվող դեպքում (17) հավասարման արմատներն իրական են և իրարից տարբեր ($k_1 \neq k_2$), հետևաբար (14) դիֆերենցիալ հավասարման

$$y_1 = e^{k_1 x}, \qquad y_2 = e^{k_2 x} \tag{18}$$

մասնակի լուծումների քանորդը հավասար չէ հաստատունի.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq c \qquad (c = const),$$

ինչն էլ նշանակում է, որ (18) ֆունկցիաները (14) հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են:

Նշված մասնակի լուծումները տեղադրելով (15) բանաձևի մեջ՝ կունենանք

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \qquad (c_1, c_2 = const): \tag{19}$$

Այսպիսով, եթե երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ (14) դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումն ունի իրական և իրարից տարբեր k_1, k_2 արմատներ, ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի (19) տեսքը:

Օրինակ 2: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y'' - 5y' + 4y = 0:$$

Լուծում: Քանի որ տրված դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման ($k^2 - 5k + 4 = 0$) արմատները հավասար են 1-ի և 4-ի, հետևաբար, համաձայն (19) բանաձևի, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը:

2°. *Բնութագրիչ հավասարման տարբերիչը հավասար է զրոյի:*

Քանի որ քննարկվող դեպքում (17) հավասարման արմատներն իրական են և իրար հավասար ($k_1 = k_2$), հետևաբար (14) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումներից մեկն ունի

$$y_1 = e^{k_1 x} \tag{20}$$

տեսքը*):

Մեզ հետաքրքրող հավասարման մյուս մասնակի լուծումը փնտրելով

$$y_2 = f(x) e^{k_1 x} \tag{21}$$

տեսքով, որտեղ $f(x)$-ը որոնելի ֆունկցիա է, կստանանք [28,(2)]

---

*) $k_1 = k_2$ դեպքում $e^{k_1 x}$ և $e^{k_2 x}$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ չեն, հետևաբար, քննարկվող դեպքում (14) հավասարման ընդհանուր լուծումը չենք կարող ներկայացնել (19) տեսքով:

$$y_2' = [f'(x) + k_1 f(x)]e^{k_1 x}, \qquad y_2'' = [f''(x) + 2k_1 f'(x) + k_1^2 f(x)]e^{k_1 x}:$$

$y_2(x)$ ֆունկցիայի ածանցյալների համար ստացած արտահայտությունները այդ ֆունկցիայի հետ մեկտեղ տեղադրելով (14) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$[f''(x) + (2k_1 + p)f'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)f(x)]e^{k_1 x} = 0:$$

Նկատի ունենալով, որ k_1-ը (17) բնութագրիչ հավասարման արմատ է և $k_1 = k_2 = -p/2$, ինչպես նաև հաշվի առնելով, որ ցուցչային ֆունկցիան զրո արժեք չի ընդունում, վերջին հավասարությունից կստանանք

$$f''(x) = 0: \tag{22}$$

Երկու անգամ հաջորդաբար ինտեգրելով՝ (22) հավասարությունից կունենանք [52,1°]

$$f'(x) = A, \qquad f(x) = Ax + B, \tag{23}$$

որտեղ A-ն և B-ն ինտեգրման հաստատուններ են:

Վերջին հավասարության մեջ ընդունելով $A = 1$ և $B = 0$, կստանանք

$$f(x) = x:$$

$f(x)$ ֆունկցիայի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով y_2 ֆունկցիայի (21) ներկայացման մեջ՝ (14) դիֆերենցիալ հավասարման երկրորդ մասնակի լուծման համար կունենանք

$$y_2 = xe^{k_1 x}: \tag{24}$$

Համոզվելով, որ (20) և (24) ֆունկցիաները գծորեն անկախ են.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = x \neq c \qquad (c = const)$$

և այդ ֆունկցիաները տեղադրելով (15) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{k_1 x} \qquad (c_1, c_2 = const): \tag{25}$$

Այսպիսով, եթե երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ (14) դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումն ունի իրական և իրար հավասար արմատներ ($k_1 = k_2$), ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի (25) տեսքը:

Օրինակ 3: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y'' - 6y' + 9y = 0:$$

Լուծում: Քանի որ տրված դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման ($k^2 - 6k + 9 = 0$) արմատները համընկնում են և հավասար են 3-ի, հետևաբար, համաձայն (25) բանաձևի, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{3x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը:

3°. *Բնութագրիչ հավասարման տարբերիչը բացասական է:*

Քանի որ քննարկվող դեպքում (17) հավասարման արմատներն իրարից տարբեր կոմպլեքս (համալուծ) թվեր են [36,ս1,ս7].

$$k_1 = \alpha - i\beta, \qquad k_2 = a + i\beta,$$

որտեղ

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

հետևաբար (14) դիֆերենցիալ հավասարման [36,ս12,ս13]

$$y_1 = e^{(\alpha - i\beta)x}, \qquad y_2 = e^{(\alpha + i\beta)x} \tag{26}$$

մասնակի լուծումների քանորդը տարբեր է հաստատունից.

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{e^{(\alpha-i\beta)x}} = e^{2i\beta x} \neq c \qquad (c = const),$$

ինչն էլ նշանակում է, որ (26) ֆունկցիաները (14) հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են:

Նշված մասնակի լուծումները տեղադրելով (15) բանաձևի մեջ՝ կունենանք

$$y = c_1 e^{(\alpha-i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha+i\beta)x} \qquad (c_1, c_2 = const): \tag{27}$$

Պարզվում է, որ քննարկվող դեպքում (14) հավասարման լուծումն ունի ավելի պարզ տեսք, որն ստանալու համար նախ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 3: *Եթե իրական փոփոխականի*

$$y = u(x) + iv(x) \tag{28}$$

կոմպլեքսարժեք ֆունկցիան բավարարում է (14) դիֆերենցիալ հավասարմանը, ապա $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները նույնպես բավարարում են նրան:

Ապացույց: Ենթադրենք (28) ֆունկցիան բավարարում է (14) հավասարմանը, այսինքն ենթադրենք տեղի ունի

$$[u(x) + iv(x)]'' + p[u(x) + iv(x)]' + q[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

կամ որ նույնն է՝

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) + i[v''(x) + pv'(x) + qv(x)] \equiv 0 \tag{29}$$

նույնությունը:

Ինչպես գիտենք, (29) նույնությունից հետևում են

$$u''(x) + pu'(x) + qu(x) \equiv 0, \qquad v''(x) + pv'(x) + qv(x) \equiv 0$$

նույնությունները [36,ս3], ինչն էլ նշանակում է, որ $u(x)$ և $v(x)$ ֆունկցիաները բավարարում են (14) դիֆերենցիալ հավասարմանը:

Իսպա

Վերադառնալով (14) հավասարման (26) մասնակի լուծումներին՝ նախ էյլերի բանաձևի օգնությամբ [36,18] այդ լուծումները ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x^{*)}: \tag{30}$$

Այնուհետև օգտվելով նախորդ թեորեմից և նկատի ունենալով, որ (30) ֆունկցիաների հետ մեկտեղ

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{31}$$

---

*) $e^{(\alpha\pm i\beta)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta x} = e^{\alpha x}[\cos(\pm\beta x) + i\sin(\pm\beta x)] = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \pm ie^{\alpha x}\sin\beta x$:

ֆունկցիաներն էլ են բավարարում դիտարկվող հավասարմանը՝ կազմենք այդ ֆունկցիաների քանորդը.

$$\frac{\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2}=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x}=tg\beta x\neq c \qquad (c=const):$$

Հաշվի առնելով, որ $\tilde{y}_1/\tilde{y}_2$ քանորդը տարբեր է հաստատունից, եզրակացնում ենք, որ (31) ֆունկցիաները (14) հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են:

Նշված մասնակի լուծումները տեղադրելով (15) բանաձևի մեջ՝ (14) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը կարտահայտենք հետևյալ պարզունակ և կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիա չպարունակող բանաձևով՝

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x) \qquad (c_1,c_2=const): \tag{32}$$

Այսպիսով, եթե երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ (14) դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումն ունի իրարից տարբեր կոմպլեքս արմատներ.

$$k_1=\alpha-i\beta, \qquad k_2=\alpha+i\beta,$$

ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի (32) տեսքը:

Օրինակ 4: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y''+2y'+10y=0:$$

Լուծում: Քանի որ տրված դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման ($k^2+2k+10=0$) արմատները $k_1=-1-3i$ և $k_2=-1+3i$ կոմպլեքս թվերն են, հետևաբար, համաձայն (32) բանաձևի, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y=e^{-x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x) \qquad (c_1,c_2=const)$$

տեսքը:

4°. ***Վերջում դիտարկենք նաև (14) հավասարումից ստացվող հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝***

$$y''+qy=0 \qquad (q>0): \tag{14'}$$

Քանի որ դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման ($k^2+q=0$) արմատները զույգ կեղծ թվեր են [36].

$$k_{1,2}=\pm i\sqrt{q} \qquad (\alpha=0,\beta=\sqrt{q}),$$

հետևաբար, համաձայն (32) բանաձևի, (14′) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y=c_1\cos\sqrt{q}x+c_2\sin\sqrt{q}x \qquad (c_1,c_2=const) \tag{33}$$

տեսքը:

Այսպիսով, եթե երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ (14) դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարումն ունի զույգ կեղծ արմատներ.

$$k_1=-i\beta, \qquad k_2=i\beta,$$

ապա այդ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի (33) տեսքը:

Օրինակ 5: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y'' + 4y = 0:$$

Լուծում: Քանի որ տրված դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման ($k^2 + 4 = 0$) արմատները զույգ կեղծ $k_1 = -2i$, $k_2 = 2i$ թվեր են, հետևաբար, համաձայն (33) բանաձևի, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը:

§56. Կամայական հաստատունների փոփոխման Լագրանժի մեթոդը: Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Այժմ ծանոթանանք երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մի հզոր մեթոդի հետ, որը կոչվում է կամայական հաստատունների փոփոխման (վարիացիայի) Լագրանժի մեթոդ:

Նշված մեթոդի էությունը կայանում է նրանում, որ ունենալով երկրորդ կարգի համասեռ գծային դիֆերենցիալ հավասարման գծորեն անկախ երկու լուծում, կարող ենք գտնել նաև այդ հավասարման համապատասխան անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման որևէ մասնակի լուծում, ինչը նշանակում է, որ, ունենալով երկրորդ կարգի համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը, կարող ենք գտնել նաև այդ հավասարման համապատասխան անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

Կամայական հաստատունների փոփոխման Լագրանժի մեթոդով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու նպատակով (1) հավասարման հետ մեկտեղ դիտարկենք նաև այդ հավասարման համապատասխան

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը, որտեղ $p(x)$-ը, $q(x)$-ը և $f(x)$-ը որևէ (a,b) միջակայքում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ են, ընդ որում $f(x)$-ը նույնաբար հավասար չէ զրոյի:

Ինչպես գիտենք, (1) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = \bar{y} + y^* \tag{3}$$

կառուցվածքը [55,թ1], որտեղ $\bar{y}$-ը (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, իսկ y^*-ը՝ (1) անհամասեռ հավասարման որևէ մասնակի լուծում:

Ենթադրենք y_1-ը և y_2-ը (2) հավասարման գծորեն անկախ մասնակի լուծումներ են, այսինքն ենթադրենք

$$\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2 \qquad (c_1, c_2 = const) \tag{4}$$

ֆունկցիան (2) համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է [54,թ5]:

Համաձայն (3) բանաձևի, (1) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը գտնելու համար մնում է գտնել այդ հավասարման որևէ մասնակի լուծում:

Կամայական հաստատունների փոփոխման Լագրանժի մեթոդում առաջարկվում է այդ մասնակի լուծումը փնտրել

$$y^{*} = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{5}$$

տեսքով, որտեղ $c_1(x)$ և $c_2(x)$ ֆունկցիաները ենթակա են որոշման:

Հաշվելով y^{*} ֆունկցիայի ածանցյալը [28,(1),(2)],

$$(y^{*})' = c_1y_1' + c_2y_2' + c_1'y_1 + c_2'y_2, \tag{6}$$

և պահանջելով, որ $c_1(x)$ և $c_2(x)$ որոնելի ֆունկցիաները բավարարեն

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

լրացուցիչ պայմանին՝ այդ ածանցյալի համար կունենանք

$$(y^{*})' = c_1y_1' + c_2y_2': \tag{7}$$

Վերջին հավասարությունից y^{*} ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալի համար կստանանք [29,ս1]

$$(y^{*})'' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1'y_1' + c_2'y_2': \tag{8}$$

y^{*} ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների (7), (8) արտահայտությունները տեղադրելով դիտարկվող անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$c_1\left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + c_2\left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x): \tag{9}$$

Նկատի ունենալով, որ y_1 և y_2 ֆունկցիաները (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ են, (9) հավասարությունից կստանանք

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x): \tag{10}$$

Այսպիսով, որպեսզի (5) տեսքն ունեցող y^{*} ֆունկցիան բավարարի (1) դիֆերենցիալ հավասարմանը, անհրաժեշտ է, որ $c_1(x)$ և $c_2(x)$ անհայտ ֆունկցիաների ածանցյալները լինեն գծային հանրահաշվական հավասարումների

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases} \tag{11}$$

համակարգի լուծում [12]:

Քանի որ հավասարումների ստացված համակարգի գլխավոր որոշիչը [13,ս1] (2) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման y_1 և y_2 գծորեն անկախ լուծումների [53,ս5] վրոնսկիանն է [53,ս6],

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2), \tag{12}$$

հետևաբար այն տարբեր է զրոյից [54,p 4]:

Ինչպես գիտենք, վերոգրյալից հետևում է, որ հավասարումների (11) համակարգն ունի միակ լուծում [13,2°].

$$c_1'(x)=\varphi_1(x), \qquad c_2'(x)=\varphi_2(x): \tag{13}$$

Երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ (1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը գտնելու համար մնում է (13) հավասարություններն ինտեգրել.

$$c_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+\bar{c}_1, \quad c_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+\bar{c}_2 \quad (\bar{c}_1,\bar{c}_2=const), \tag{14}$$

ինտեգրման $\bar{c}_1,\bar{c}_2$ հաստատուններն ընդունել հավասար զրոյի*) և $c_1(x),c_2(x)$ ֆունկցիաների համար ստացած արտահայտությունները տեղադրել y^* ֆունկցիայի (5) ներկայացման մեջ:

Օրինակ 1: Լուծել երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y''-3y'+2y=e^{2x}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Նկատի ունենալով, որ դիտարկվող հավասարման համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ակնհայտորեն արտահայտվում է

$$\bar{y}=c_1e^x+c_2e^{2x} \qquad (c_1,c_2=const)$$

բանաձևով, համաձայն կամայական հաստատունների փոփոխման Լագրանժի մեթոդի, տրված հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք

$$y^*=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{2x}$$

տեսքով, որտեղ $c_1(x)$-ը և $c_2(x)$-ը անհայտ ֆունկցիաներ են:

Յետևելով տեսությանը և լուծելով գծային հանրահաշվական հավասարումների [27,(8´)], [28,(9),(15´)]

$$\begin{cases} c_1'e^x+c_2'e^{2x}=0, \\ c_1'e^x+2c_2'e^{2x}=e^{2x} \end{cases} \qquad [W(x)=e^{3x}\neq 0]$$

համակարգը՝ կստանանք

$$c_1'(x)=-e^x, \quad c_2'(x)=1: \tag{ա}$$

Ինտեգրելով (ա) հավասարությունները [35,2°,7°ա],

$$c_1(x)=-e^x+\bar{c}_1, \qquad c_2(x)=x+\bar{c}_2, \qquad (\bar{c}_1=\bar{c}_2=const)$$

և $c_1(x),c_2(x)$ ֆունկցիաների համար ստացած արտահայտություններում ընդունելով $\bar{c}_1=\bar{c}_2=0$, կունենանք

$$c_1(x)=-e^x, \qquad c_2(x)=x:$$

Այսպիսով, դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն ունի

$$y^*=(x-1)e^{2x}$$

տեսքը, իսկ նրա ընդհանուր լուծումը՝

---

*) Քանի որ մենք փնտրում ենք (1) հավասարման մասնակի լուծում, ուստի ինտեգրման $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ հաստատուններին պետք է տալ որոշակի արժեքներ: Բնականաբար $\bar{c}_1=\bar{c}_2=0$ ընդունելությունն ամենահարմարն է:

$$y = c_1e^x + (x + c_2 - 1)e^{2x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը [55,բ1]:

Անցնելով երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությանը՝ հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարման հետ մեկտեղ՝

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (15)$$

որտեղ p-ն և q-ն իրական հաստատուններ են, իսկ $f(x)$-ը՝ որևէ (a,b) միջակայքում որոշված, նույնաքար զրոյից տարբեր անընդհատ ֆունկցիա, դիտարկենք նաև նրա համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը.

$$y'' + py' + qy = 0: \qquad (16)$$

Յասկանալի է, որ իբրև երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում, հաստատուն գործակիցներով (15) հավասարումը կարող ենք լուծել կամայական հաստատունների փոփոխման Լագրանժի մեթոդով: Սակայն, քանի որ այն հանդիսանում է փոփոխական գործակիցներով (1) դիֆերենցիալ հավասարման մասնավոր դեպքը, հետևաբար հարց է ծագում. *գոյություն ունի՞ արդյոք այդ հավասարման լուծման ավելի պարզ եղանակ:*

Քանի որ (15) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y^* \qquad (c_1, c_2 = const) \qquad \mathbf{(17)}$$

տեսքը, որտեղ $(c_1y_1 + c_2y_2)$-ը **(16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր** լուծումն է, իսկ y^*-ը՝ **(15) անհամասեռ հավասարման որևէ մասնակի** լուծում և քանի որ, ինչպես տեսանք **[55,1°-4°], (16) դիֆերենցիալ հավասար**ման ընդհանուր լուծումը գտնելը կապված չէ որևէ դժվարության հետ, ուստի վերևում ձևակերպած հարցը կարող ենք հնչեցնել հետևյալ կերպ՝ *գոյություն ունի՞ արդյոք (15) դիֆերենցիալ հավասարման որևէ մասնակի լուծում գտնելու ավելի պարզ եղանակ:*

Պարզվում է, որ առանձին դեպքերում այդ հարցն ունի դրական պատասխան:

Դիտարկենք այդպիսի մի քանի դեպքեր:

1°. *Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ (15) դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասը որևէ բազմանդամի և ցուցչային ֆունկցիայի արտադրյալ է, այսինքն ունի*

$$f(x) = p_n(x)e^{\alpha x} \qquad (n \in N, \alpha \in R) \qquad (18)$$

տեսքը, որտեղ $p_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի բազմանդամ է:

Առանձին-առանձին քննարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքերը՝

ա) *α-ն (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ:*

Քննարկվող դեպքում (15) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x} \qquad (19)$$

տեսքով, որտեղ $Q_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի, անհայտ գործակիցներով, ընդհանուր տեսքի բազմանդամ է.

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n: \qquad (20)$$

y^* ֆունկցիան և նրա ածանցյալները դիտարկվող հավասարման մեջ տեղադրելու համար նախ հաշվենք այդ ածանցյալները.

$$(y^*)' = \left[Q_n'(x) + \alpha Q_n(x)\right]e^{\alpha x}, \qquad (y^*)'' = \left[Q_n''(x) + 2\alpha Q_n'(x) + \alpha^2 Q_n(x)\right]e^{\alpha x}: \qquad (21)$$

(18), (19) և (21) ֆունկցիաները տեղադրելով (15) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$[Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x)]e^{\alpha x} = p_n(x)e^{\alpha x}: \qquad (22)$$

Քանի որ ստացված հավասարության աջ և ձախ մասերում (որպես $e^{\alpha x}$ ֆունկցիայի արտադրիչներ) գրված են n-րդ աստիճանի բազմանդամներ, հետևաբար, որպեսզի (19) ֆունկցիան լինի (15) դիֆերենցիալ հավասարման լուծում, այսինքն՝ որպեսզի (22) հավասարությունը դառնա նույնություն, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ բազմանդամների համպատասխան անդամների գործակիցները լինեն իրար հավասար: Հավասարեցնելով նշված գործակիցները՝ կստանանք $n+1$ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ անհայտների նկատմամբ [12]: Լուծելով այդ համակարգը՝ կգտնենք $Q_n(x)$ բազմանդամի որոնելի գործակիցները:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել (19) տեսքով, որտեղ $Q_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի, անհայտ գործակիցներով, ընդհանուր տեսքի բազմանդամ է:

Օրինակ 2: Լուծել երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y'' - 5y' + 6y = x \qquad (բ)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Ինչպես գիտենք [55,1°], դիտարկվող հավասարման համապատասխան

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (գ)$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y} = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը:

Քանի որ տրված հավասարման աջ մասն ունի $xe^{0 \cdot x}$ տեսքը, և զրոն (գ) հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, հետևաբար, համաձայն (19) բանաձևի, դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն ունի

$$y^* = a_0x + a_1$$

տեսքը, որտեղ a_0 և a_1 հաստատունները ենթակա են որոշման:

y^* ֆունկցիան և նրա ածանցյալները [27,(5),(7)].

$$(y^*)' = a_0, \qquad (y^*)'' = 0$$

տեղադրելով (բ) հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$6a_0x + 6a_1 - 5a_0 \equiv x,$$

որտեղից, հավասարեցնելով x-ի համապատասխան աստիճանների գործակիցները և լուծելով հավասարումների ստացված համակարգը, կունենանք

$$a_0=\frac{1}{6},\quad a_1=\frac{5}{36}:$$

a_0-ի և a_1-ի արժեքները տեղադրելով y^* ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$y^*=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}:$$

Այսպիսով, դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{6}x+\frac{5}{36}\qquad(c_1,c_2=const)$$

տեսքը:

բ) *α-ն (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման միապատիկ արմատ է.*

$$\alpha^2+p\alpha+q=0: \tag{23}$$

Եթե քննարկվող դեպքում ևս (15) հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք (19) տեսքով, ապա (23) հավասարության հաշվառումով, (22) հավասարության փոխարեն կստանանք

$$\left[Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)\right]e^{\alpha x}=P_n(x)e^{\alpha x}: \tag{22'}$$

Ինչպես տեսնում ենք, (22′) հավասարության ձախ կողմում, որպես $e^{\alpha x}$ ֆունկցիայի արտադրիչ, ունենք ($n-1$)-րդ աստիճանի բազմանդամ [27,(7)], իսկ աջ կողմում՝ n-րդ աստիճանի բազմանդամ: Հետևաբար, գոյություն չունեն $a_0,a_1,...,a_n$ գործակիցների արժեքներ, որոնք այդ հավասարությանը կվերածեն նույնության:

Վերոգրյալից հետևում է, որ դիտարկվող դեպքում (15) հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել $(n+1)$-րդ աստիճանի բազմանդամի և $e^{\alpha x}$ ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով:

Մյուս կողմից, (22′) հավասարությունից երևում է, որ որոնելի բազմանդամն ազատ անդամ չպետք է ունենա, որովհետև հակառակ դեպքում $Q_{n+1}'(x)$ և $Q_{n+1}''(x)$ ածանցյալները հաշվելիս այն կանհայտանա, ինչը նշանակում է, որ այդ անդամի (հետևաբար նաև $Q_{n+1}(x)$ բազմանդամի) գտնելը կդառնա անհնար:

Ամփոփելով բերված դատողությունները՝ եզրակացնում ենք, որ քննարկվող դեպքում (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x} \tag{24}$$

տեսքով, որտեղ $Q_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի, անհայտ գործակիցներով, ընդհանուր տեսքի բազմանդամ է:

Օրինակ 3: Գտնել երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y''-3y'+2y=e^{2x} \tag{դ}$$

դիֆերենցիալ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է

$$y(0)=0,\qquad y'(0)=2 \tag{ե}$$

սկզբնական պայմաններին*):

Լուծում: Քանի որ (դ) հավասարման համապատասխան

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (զ)$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y} = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

տեսքը, հետևաբար դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն էլ ունի

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + y^* \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը, որտեղ y^* -ը տրված հավասարման որևէ մասնակի լուծում է:

Մյուս կողմից, քանի որ տրված հավասարման աջ մասն ունի $1 \cdot e^{2x}$ տեսքը, և 2-ը (զ) հավասարման բնութագրիչ հավասարման միապատիկ արմատ է, ուստի (դ) հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^* = a x e^{2x} \qquad (է)$$

տեսքով:

y^* ֆունկցիան և նրա ածանցյալները դիտարկվող հավասարման մեջ տեղադրելու համար նախ հաշվենք այդ ածանցյալները.

$$(y^*)' = a(2x+1)e^{2x}, \qquad (y^*)'' = 4a(x+1)e^{2x}: \qquad (ը)$$

(է) և (ը) ֆունկցիաները տեղադրելով (դ) հավասարման մեջ և ստացված հավասարության երկու կողմերը բաժանելով e^{2x} ֆունկցիայի վրա՝ կստանանք

$$4a(x+1) - 3a(2x+1) + 2ax = 1,$$

որտեղից էլ կգտնենք a հաստատունի արժեքը.

$$a = 1:$$

Այսպիսով, դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն ունի

$$y^* = xe^{2x}$$

տեսքը, իսկ նրա ընդհանուր լուծումը՝

$$y = c_1e^x + (x + c_2)e^{2x} \qquad (c_1, c_2 = const) \qquad (թ)$$

տեսքը:

Հաշվելով (թ) ֆունկցիայի ածանցյալը.

$$y' = c_1e^x + (2x + 2c_2 + 1)e^{2x}$$

և օգտվելով (ե) սկզբնական պայմաններից՝ կունենանք

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 1: \end{cases}$$

Լուծելով հավասարումների ստացված համակարգը.

$$c_1 = -1, \qquad c_2 = 1$$

և c_1, c_2 հաստատունների համար ստացած արժեքները տեղադրելով (թ) ֆունկցիայի մեջ՝ կգտնենք տրված դիֆերենցիալ հավասարման մեզ հետաքրքրող մասնավոր լուծումը.

$$y = (x+1)e^{2x} - e^x:$$

գ) α ***-ն (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման կրկնապատիկ արմատ է.***

---

*) Համեմատի՛ր օրինակ 1-ի հետ:

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 2\alpha + p = 0:{}^{*)} \tag{25}$$

Եթե քննարկվող դեպքում (15) հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք (19) տեսքով, ապա (25) հավասարությունների հաշվառումով (22) հավասարության փոխարեն կստանանք

$$Q_n''(x)e^{\alpha x} = P_n(x)e^{\alpha x}: \tag{22''}$$

Քանի որ (22′′) հավասարության աջ և ձախ կողմերում ակնհայտորեն գրված են տարբեր կարգի բազմանդամներ, հետևաբար $Q_n(x)$ բազմանդամի գործակիցների ոչ մի արժեքների դեպքում այդ հավասարությունը չի կարող վերածվել նույնության:

Վերոգրյալից հետևում է, որ դիտարկվող դեպքում (15) հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել $(n+2)$-րդ աստիճանի բազմանդամի և $e^{\alpha x}$ ֆունկցիայի արտադրյալի տեսքով: Մյուս կողմից՝ բ) դեպքի քննարկման ժամանակ բերված համապատասխան դատողությունների շնորհիվ ստանում ենք, որ $(n+2)$-րդ աստիճանի որոնելի բազմանդամն ազատ անդամ չպետք է ունենա:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^* = x^2 Q_n(x)e^{\alpha x} \tag{26}$$

տեսքով, որտեղ $Q_n(x)$-ը n-րդ աստիճանի, անհայտ գործակիցներով, ընդհանուր տեսքի բազմանդամ է:

Օրինակ 4: Լուծել երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} \tag{ժ}$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Քանի որ (ժ) հավասարման համապատասխան

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{ի}$$

համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

տեսքը [55.2°], հետևաբար դիտարկվող հավասարման ընդհանուր լուծումն էլ ունի

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + y^* \qquad (c_1, c_2 = const)$$

տեսքը, որտեղ y^*-ը տրված հավասարման որևէ մասնակի լուծում է:

Մյուս կողմից, քանի որ (ժ) հավասարման աջ մասն ունի $3e^{2x}$ տեսքը և 2-ը (ի) հավասարման բնութագրիչ հավասարման կրկնապատիկ արմատ է, ուստի (ժ) հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^* = ax^2e^{2x}$$

տեսքով:

Հաշվելով y^* ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները.

$$(y^*)' = 2a(x^2 + x)e^{2x}, \qquad (y^*)'' = 2a(2x^2 + 4x + 1)e^{2x}$$

և այդ ածանցյալների համար ստացված արտահայտությունները y^* ֆունկցիայի հետ մեկտեղ տեղադրելով տրված հավասարման մեջ՝ կստանանք

*) Համաձայն Վիետի թեորեմի, (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատների գումարը հավասար է այդ հավասարման միջին անդամի գործակցին՝ վերցրած հակառակ նշանով:

$$2a(2x^2+4x+1)e^{2x}-8a(x^2+x)e^{2x}+4ax^2e^{2x}=3e^{2x},$$

որտեղից էլ կգտնենք a հաստատունի արժեքը.

$$a=\frac{3}{2}:$$

Այսպիսով, դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն ունի

$$y^*=\frac{3}{2}x^2e^{2x}$$

տեսքը, իսկ նրա ընդհանուր լուծումը՝

$$y=(\frac{3}{2}x^2+c_2x+c_1)e^{2x}\qquad (c_1,c_2=const)$$

տեսքը:

2°. ***Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ (15) դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասն ունի***

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{27}$$

տեսքը, որտեղ $P_n(x)$-ը և $Q_m(x)$-ը համապատասխանաբար n-րդ և m-րդ աստիճանի բազմանդամներ են $(n,m\in N;\ \alpha,\beta\in R)$:

Օգտվելով

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\qquad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},^{*)} \tag{28}$$

նույնություններից [37,(18)], որոնք կոչվում են Էյլերի բանաձևեր, և $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ ֆունկցիաները փոխարինելով ցուցչային ֆունկցիաներով, $f(x)$ ֆունկցիան կներկայացնենք

$$f(x)=\left[\frac{1}{2}P_n(x)+\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha+i\beta)x}+\left[\frac{1}{2}P_n(x)-\frac{1}{2i}Q_m(x)\right]e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{27'}$$

տեսքով, որտեղ քառակուսի փակագծերի ներսում գրված բազմանդամների աստիճանը հավասար է $P_n(x)$ և $Q_m(x)$ բազմանդամների աստիճաններից մեծագույնին:

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում (15) դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասը բերեցինք այնպիսի տեսքի, որի հետ ծանոթացել ենք 1° դեպքում [55,բ2]:

Պարզվում է, որ եթե $(\alpha+i\beta)$-ն [կամ $(\alpha-i\beta)$-ն] (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, ապա (27) տեսքն ունեցող աջ մասով (15) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^*=U_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{29}$$

տեսքով, որտեղ $U_k(x)$-ը և $V_k(x)$-ը k-րդ աստիճանի $[k=\max(m,n)]$ բազմանդամներ են, իսկ եթե $(\alpha+i\beta)$-ն [կամ $(\alpha-i\beta)$-ն] նշված բնութագրիչ հավասարման արմատ է՝

---

*) Էյլերի բանաձևերի շնորհիվ կստանանք [36,(18)]

$e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos\varphi-i\sin\varphi=2\cos\varphi$, $\quad e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi-\cos\varphi+i\sin\varphi=2i\sin\varphi$:

$$y^* = x\left[U_k(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V_k(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right] \qquad (30)$$

տեսքով:

Նշենք, որ եթե $f(x)$ ֆունկցիայի (27) արտահայտության մեջ $P_n(x)$ կամ $Q_m(x)$ բազմանդամներից որևէ մեկը նույնաբար հավասար լինի զրոյի, այսինքն եթե (27) ֆունկցիան ունենա

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad f(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (27'')$$

տեսքերից որևէ մեկը, ապա այդ դեպքում էլ (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել (29) կամ (30) տեսքով:

Վերջում դիտարկենք հետևյալ մասնավոր դեպքը՝

2°ա. *Երկրորդ կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային անհամասեռ (15) դիֆերենցիալ հավասարման աջ մասն ունի*

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x \qquad (27''')$$

տեսքը, որտեղ a-ն, b-ն և β-ն հաստատուններ են:

Քանի որ (27‴) ֆունկցիան ստացվում է (27) ֆունկցիայից վերջինի մեջ ընդունելով $\alpha = n = m = 0$, հետևաբար, համաձայն վերևում բերված դատողությունների, եթե βi-ն (կամ $-\beta i$-ն) (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, ապա (27‴) տեսքն ունեցող աջ մասով (15) անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել (29) տեսքով՝ վերջինի մեջ ընդունելով $\alpha = k = 0$:

Այսպիսով, եթե βi-ն (կամ $-\beta i$-ն) նշված բնութագրիչ հավասարման արմատ չէ, ապա (29) տեսքն ունեցող աջ մասով (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^* = c\cos\beta x + d\sin\beta x \qquad (c, d = const) \qquad (29')$$

տեսքով:

Նույն դատողություններով կստանանք, որ եթե βi-ն (կամ $-\beta i$-ն) (16) համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման բնութագրիչ հավասարման արմատ է, ապա (27‴) տեսքն ունեցող աջ մասով (15) հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել (30) տեսքով՝ վերջինի մեջ ընդունելով $\alpha = k = 0$:

Այսպիսով, եթե βi-ն (կամ $-\beta i$-ն) նշված բնութագրիչ հավասարման արմատ է, ապա (27‴) տեսքն ունեցող աջ մասով (15) դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումը պետք է փնտրել

$$y^* = x(c\cos\beta x + d\sin\beta x) \qquad (c, d = const) \qquad (30')$$

տեսքով:

Օրինակ 5: Լուծել երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ

$$y'' + 4y' + 20y = 2\cos x \qquad (Ա)$$

դիֆերենցիալ հավասարումը:

Լուծում: Նախ կարող ենք հեշտությամբ համոզվել, որ դիտարկվող հավասարման համապատասխան համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$\bar{y}=e^{-2x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x) \qquad (c_1,c_2=const)$$

տեսքը [55,3°]:

Այնուհետև, հետևելով տեսությանը՝ տրված հավասարման մասնակի լուծումը փնտրենք

$$y^*=a\cos x+b\sin x \qquad (a,b=const) \qquad (խ)$$

տեսքով:

y^* ֆունկցիան և նրա ածանցյալները [27,(10),(12)].

$$(y^*)'=-a\sin x+b\cos x, \qquad (y^*)''=-a\cos x-b\sin x$$

տեղադրելով (լ) հավասարման մեջ՝ կունենանք

$$(4b+19a)\cos x+(19b-4a)\sin x=2\cos x:$$

Որպեսզի ստացված հավասարությունը դառնա նույնություն, այսինքն, որպեսզի (խ) ֆունկցիան լինի տրված հավասարման մասնակի լուծում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենան

$$\begin{cases}4b+19a=2,\\ 19b-4a=0\end{cases} \qquad (ծ)$$

հավասարությունները:

Լուծելով գծային հանրահաշվական հավասարումների (ծ) համակարգը՝ կստանանք

$$a=\frac{38}{377}, \qquad b=\frac{8}{377}:$$

Այսպիսով, դիտարկվող դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի լուծումն ունի

$$y^*=\frac{38}{377}\cos x+\frac{8}{377}\sin x$$

տեսքը, իսկ նրա ընդհանուր լուծումը՝

$$y=e^{-2x}(c_1\cos 4x+c_2\sin 4x)+\frac{38}{377}\cos x+\frac{8}{377}\sin x \qquad (c_1,c_2=const)$$

տեսքը:

§57. Հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգեր:

Ավարտելով առանձին դիֆերենցիալ հավասարումների ուսումնասիրությունը՝ անցնենք դիֆերենցիալ հավասարումների որոշակի համակարգերի ուսումնասիրությանը:

Սահմանում 1: *Դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված այն համակարգը, որի յուրաքանչյուր հավասարում առնչություն է անկախ փոփոխականի, այդ փոփոխականի որոնելի ֆունկցիաների և նրանց առաջին կարգի ածանցյալների միջև, կոչվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:*

Սովորաբար դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը կազմվում է այնքան հավասարումներից, որքան անհայտ ֆունկցիաներ ունի:

Սահմանում 2: *Դիֆերենցիալ հավասարումների*

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{1}$$

համակարգը, որտեղ x -ը անկախ փոփոխական է, $y_1(x)$ -ը, $y_2(x)$ -ը,..., $y_n(x)$ -ը՝ որոնելի ֆունկցիաներ, իսկ f_1 -ը, f_2 -ը,..., f_n -ը՝ $(n+1)$ չափանի տարածության $M(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ կետերի G բաց բազմության վրա որոշված հայտնի ֆունկցիաներ, կոչվում է առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգ:

Գոյություն ունեն դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի շատ տեսակներ, սակայն մենք կդիտարկենք միայն դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգեր:

Սահմանում 3: *Միևնույն (a,b) միջակայքում որոշված ածանցելի ֆունկցիաների*

$$y_1, y_2, ..., y_n \tag{2}$$

համախումբը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի լուծում, եթե այն բավարարում է այդ համակարգի բոլոր հավասարումներին, այսինքն, եթե (2) ֆունկցիաների տեղադրելը (1) համակարգի մեջ, այդ համակարգի բոլոր հավասարումները՝ նշված միջակայքում վերածում է նույնությունների:

Սահմանում 4: *Կասենք, որ դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի համար տրված են սկզբնական պայմաններ, եթե անկախ փոփոխականի մի որևէ x_0 արժեքի համար, որը պատկանում է (2) ֆունկցիաների որոշման տիրույթին, տրված են այդ ֆունկցիաների արժեքները.*

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} : \tag{3}$$

Սահմանում 5: *Կամայական $c_1, c_2, ..., c_n$ հաստատուններից կախված ածանցելի ֆունկցիաների*

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, c_2, ..., c_n) \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4}$$

համախումբը կոչվում է դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի ընդհանուր լուծում, եթե այն նշված հաստատունների կամայական արժեքների դեպքում բավարարում է (1) համակարգի հավասարումներին, ընդ որում այդ հաստատունները կարելի է այնպես ընտրել, որ (4) ֆունկցիաները բավարարեն հավասարումների դիտարկվող համակարգի համար տրված (3) սկզբնական պայմաններին:

Սահմանում 6: *Դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի յուրաքանչյուր լուծում, որը ստացվում է (4) ֆունկցիաներից $c_1, c_2, ..., c_n$ հաստատունների որոշակի արժեքների դեպքում, կոչվում է հավասարումների այդ համա-*

կարգի մասնակի լուծում:

Դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի համար լուծել Կոշիի խնդիր, նշանակում է գտնել այդ համակարգի այն լուծումը, որը բավարարում է տրված սկզբնական պայմաններին:

Այժմ առանց ապացույցի բերենք դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի լուծման գոյությանը և միակությանը վերաբերող Կոշիի թեորեմը:

Թեորեմ 1: *Եթե դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի մեջ մասնակցող* $f_i(x,y_1,y_2,...,y_n)$ $(i=1,2,...,n)$ *ֆունկցիաներն իրենց* $\partial f_i/\partial y_j$ $(i,j=1,2,...,n)$ *մասնակի ածանցյալների հետ մեկտեղ անընդհատ են* $n+1$ *չափանի* G *բաց տիրույթում, ապա այդ տիրույթի ցանկացած* $(x_0,y_{10},y_{20},...,y_{n0})$ *կետում տրված համակարգն ունի (3) սկզբնական պայմաններին բավարարող մեկ և միայն մեկ լուծում:*

Անցնելով դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի (3) սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը գտնելու խնդրին՝ ենթադրենք G տիրույթում f_i $(i=1,2,...,n)$ ֆունկցիաները, ըստ բոլոր փոփոխականների, ունեն մինչև ($n-1$)-րդ կարգը ներառյալ անընդհատ մասնակի ածանցյալներ:

Նշված խնդիրը լուծելու համար նախ ցույց տանք, որ, այսպես կոչված, անհայտ ֆունկցիաների արտաքսման եղանակով դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգից որոնելի ֆունկցիաներից որևէ մեկի նկատմամբ կարելի է ստանալ բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարում:

Իրոք, ընտրելով (1) համակարգի հավասարումներից որևէ մեկը, օրինակ՝ առաջինը, և նրա երկու կողմերն ածանցելով ըստ x-ի, կունենանք [48,(5)]

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\frac{dy_n}{dx}: \tag{5}$$

Օգտվելով տրված համակարգի հավասարումներից և dy_i/dx $(i=1,2,...,n)$ ածանցյալները համապատասխանաբար փոխարինելով f_i ֆունկցիաներով՝ (5) հավասարումը կներկայացնենք

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,...,y_n) \tag{6}$$

տեսքով, որտեղ

$$F_2(x,y_1,y_2,...,y_n)=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+...+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n:$$

Վարվելով նույն կերպ՝ (6) հավասարումից կստանանք

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,...,y_n), \tag{7}$$

որտեղ

$$F_3(x,y_1,y_2,...,y_n)=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1+...+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n:$$

Շարունակելով հաջորդաբար ածանցել ստացվող հավասարումների երկու կողմերը՝ ի վերջո կունենանք

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{8}$$

որտեղ

$$F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} f_n :$$

Այժմ կազմենք դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{9}$$

համակարգը և այդ համակարգի առաջին $n-1$ հավասարումներից $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ֆունկցիաներն արտահայտենք x-ով, y_1-ով և

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$$

ածանցյալներով

$$\begin{aligned} y_2 &= \psi_2[x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}], \\ y_3 &= \psi_3[x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \psi_n[x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}]: \end{aligned} \tag{10}$$

$y_2, y_3, \ldots, y_n$ ֆունկցիաների համար ստացած արտահայտությունները տեղադրելով հավասարումների (9) համակարգի վերջին հավասարման մեջ՝ y_1 անհայտ ֆունկցիայի նկատմամբ կստանանք n-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում*):

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi[x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}]: \tag{11}$$

Դիֆերենցիալ հավասարումների տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը ստանալու համար անհրաժեշտ է գտնել n-րդ կարգի (11) դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր լուծումը [52,ս2].

$$y_1 = \varphi_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{12}$$

հաշվել (12) ֆունկցիայի մինչև ($n-1$)-րդ կարգը ներառյալ բոլոր ածանցյալները և ստացված ածանցյալները y_1 ֆունկցիայի հետ տեղադրել (10) հավասարությունների մեջ.

*) Նշենք, որ առանձին խնդիրներում (11) հավասարման փոխարեն կարող է ստացվել ավելի ցածր կարգի դիֆերենցիալ հավասարում:

$$y_2 = \varphi_2(x, c_1, c_2, ..., c_n),$$
$$y_3 = \varphi_3(x, c_1, c_2, ..., c_n), \qquad (13)$$
$$.........................$$
$$y_n = \varphi_n(x, c_1, c_2, ..., c_n):$$

Դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգի (3) սկզբնական պայմաններին բավարարող մասնակի լուծումը գտնելու համար անհրաժեշտ է (12) և (13) հավասարությունների մեջ ընդունել

$$x = x_0, \ y_1 = y_{10}, \ y_2 = y_{20}, \ ..., \ y_n = y_{n0},$$

լուծել $c_1, c_2, ..., c_n$ հաստատունների նկատմամբ ստացված հանրահաշվական հավասարումների համակարգը և այդ հաստատունների համար ստացած արժեքները տեղադրել (12), (13) ֆունկցիաների մեջ:

Օրինակ 1: Լուծել դիֆերենցիալ հավասարումների հետևյալ նորմալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 2y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2 : \end{cases} \qquad (ա)$$

Լուծում: Տրված համակարգը լուծելու համար, նախ անհայտ ֆունկցիաների վերը նկարագրված արտաքսման եղանակով, այդ համակարգից կստանանք երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, օրինակ, որոնելի y_1 ֆունկցիայի նկատմամբ **[28,(1),(9)]**.

$$y_1'' = 2y_1' + 2y_2' = 2(2y_1 + 2y_2) + 2(y_1 + 3y_2) = 6y_1 + 10y_2 = 6y_1 + 5(y_1' - 2y_1) = 5y_1' - 4y_1$$

կամ

$$y_1'' - 5y_1' + 4y_1 = 0: \qquad (բ)$$

Լուծելով (բ) հավասարումը **[55,օ2]**

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{4x} \qquad (c_1, c_2 = const)$$

և y_1 ֆունկցիաի համար ստացած արտահայտությունը տեղադրելով տրված համակարգի առաջին հավասարման մեջ՝ հեշտությամբ կգտնենք նաև մյուս որոնելի ֆունկցիայի տեսքը.

$$y_2 = -\frac{c_1}{2}e^x + c_2e^{4x}:$$

Այսպիսով, դիֆերենցիալ հավասարումների (ա) համակարգի ընդհանուր լուծումն ունի

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{4x}, \qquad y_2 = -\frac{c_1}{2}e^x + c_2e^{4x} \qquad (c_1, c_2 = const) \qquad (գ)$$

տեսքը:

Այժմ ենթադրենք դիֆերենցիալ հավասարումների (1) համակարգն ունի

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n, \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{cases} \qquad (1')$$

տեսքը, որտեղ a_{ij} $(i,j=1,2,...,n)$ գործակիցները իրական հաստատուններ են:

Սահմանում 7: *Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) համակարգը կոչվում է հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համակարգ:*

Ինչպես տեսանք վերևում, դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) համակարգը կարելի է լուծել անհայտ ֆունկցիաների արտաքսման եղանակով՝ այն բերելով m-րդ կարգի $(m \le n)$ մեկ դիֆերենցիալ հավասարման: Սակայն պարզվում է, որ հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) համակարգը կարելի է լուծել նաև այլ եղանակով: Մասնակիորեն ծանոթանանք այդ եղանակի հետ:

Դիտարկվող համակարգի մասնակի լուծումը փնտրելով

$$y_1=\alpha_1 e^{kx},\quad y_2=\alpha_2 e^{kx},\quad ...,\quad y_n=\alpha_n e^{kx} \tag{14}$$

տեսքով, որտեղ $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, k հաստատունները ենթակա են որոշման, և (14) ֆունկցիաները տեղադրելով այդ համակարգի հավասարումների մեջ, կունենանք [27,(8′)], [28,(9),(15′)]

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kx}=(a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n)e^{kx}, \\ k\alpha_2 e^{kx}=(a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n)e^{kx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k\alpha_n e^{kx}=(a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+a_{nn}\alpha_n)e^{kx}: \end{cases} \tag{15}$$

Նկատի ունենալով, որ ցուցչային ֆունկցիան զրո արժեք չի ստանում՝ (15) համակարգից $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ հաստատունների նկատմամբ կստանանք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգ [12].

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=0, \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+(a_{nn}-k)\alpha_n=0: \end{cases} \tag{15′}$$

Որոնելի ֆունկցիաների տեսքից երևում է, որ հավասարումների (15′) համակարգի զրոյական լուծումից.

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$$

ստացվում են $y_1(x)=y_2(x)=y_n(x)\equiv 0$ ֆունկցիաները, որոնք ակնհայտորեն բավարարում են դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) համակարգին: Քանի որ մեզ (1′) համակարգի ոչ զրոյական լուծումներն էլ են հետաքրքրում, ուստի անհրաժեշտ է գտնել նաև (15) համակարգի ոչ զրոյական լուծումները:

Ինչպես գիտենք, գծային համասեռ (հանրահաշվական) հավասարումների համակարգն այն և միայն այն ժամանակ ունի ոչ զրոյական լուծում, երբ այդ համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար է զրոյի [13,u1], [14,p4]: Հետևաբար, (15′) համակարգն այն և միայն այն k-երի դեպքում ունի ոչ զրոյական լուծում, որոնց համար տեղի ունի

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

հավասարությունը:

Սահմանում 8: *k հաստատունի նկատմամբ ստացված n -րդ կարգի (16) հանրահաշվական հավասարումը կոչվում է առաջին կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) նորմալ համակարգի բնութագրիչ հավասարում:*

Այսպիսով, գծային հանրահաշվական հավասարումների (15′) համակարգի ոչ զրոյական լուծումները գտնելու համար նախ պետք է լուծել (16) հավասարումը:

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը՝

ա) *բնութագրիչ հավասարման արմատներն իրական են և իրարից տարբեր,*

բ) *բնութագրիչ հավասարումն ունի պատիկ արմատներ,*

գ) *բնութագրիչ հավասարումն ունի կոմպլեքս արմատներ:*

Դիտարկենք միայն (16) հավասարման իրական և իրարից տարբեր արմատներ ունենալու դեպքը:

Դիցուք k_1-ը, k_2-ը,..., k_n-ը (16) հավասարման իրական և իրարից տարբեր արմատներն են:

k_i $(i=1,2,...,n)$ արմատը տեղադրենք հավասարումների (15′) համակարգի մեջ և ստացված համակարգի (որի որոշիչը հավասար է զրոյի) ոչ զրոյական լուծումներից որևէ մեկը նշանակենք $\{\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},...,\alpha_n^{(i)}\}$-ով:*)

Այդ դեպքում, համաձայն (14) բանաձևերի, կստանանք դիֆերենցիալ հավասարումների (1′) համակարգի հետևյալ մասնակի լուծումները՝

$$\begin{gathered} \{\alpha_1^{(1)}e^{k_1x},\alpha_2^{(1)}e^{k_1x},...,\alpha_n^{(1)}e^{k_1x}\}, \\ \{\alpha_1^{(2)}e^{k_2x},\alpha_2^{(2)}e^{k_2x},...,\alpha_n^{(2)}e^{k_2x}\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \{\alpha_1^{(n)}e^{k_nx},\alpha_2^{(n)}e^{k_nx},...,\alpha_n^{(n)}e^{k_nx}\}: \end{gathered} \qquad (17)$$

Կարող ենք անմիջական տեղադրման միջոցով համոզվել, որ ֆունկցիաների

$$\begin{gathered} y_1 = c_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1x} + c_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2x} + ... + c_n\alpha_1^{(n)}e^{k_nx}, \\ y_2 = c_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1x} + c_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2x} + ... + c_n\alpha_2^{(n)}e^{k_nx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = c_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1x} + c_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2x} + ... + c_n\alpha_n^{(n)}e^{k_nx} \end{gathered} \qquad (17')$$

---

*) Քանի որ $k=k_i$ $(i=1,2,...,n)$ արժեքների դեպքում (15′) համակարգի գլխավոր որոշիչը հավասար է զրոյի, հետևաբար այն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ:

համախումբը, որտեղ c_1-ը, c_2-ը, ..., c_n-ը կամայական հաստատուններ են, նույնպես (1') համակարգի լուծում է: Ավելին, կարելի է ցույց տալ, որ ֆունկցիաների (17') համախումբը դիֆերենցիալ հավասարումների (1') համակարգի ընդհանուր լուծումն է:

Օրինակ 2: Չդիմելով անհայտ ֆունկցիաների արտաքսման մեթոդին՝ լուծել առաջին կարգի հաստատուն գործակիցներով գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումների (ա) համակարգը:

Լուծում: Լուծելով (ա) համակարգի բնութագրիչ հավասարումը.

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \qquad (\text{դ})$$

կունենանք [2,(10)]

$$k_1 = 1\,, \qquad k_2 = 4\,:$$

Օգտվելով (17) բանաձևերից՝ կստանանք դիֆերենցիալ հավասարումների (ա) համակարգի

$$\left\{\alpha_1^{(1)}e^x, \alpha_2^{(1)}e^x\right\}, \qquad \left\{\alpha_1^{(2)}e^{4x}, \alpha_2^{(2)}e^{4x}\right\} \qquad (\text{ե})$$

մասնակի լուծումները:

Այնուհետև կազմելով դիտարկվող համակարգի բնութագրիչ հավասարման $k_1 = 1$ արմատի համապատասխան (15') համակարգը.

$$\begin{cases} \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0, \\ \alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases} \qquad (\text{զ})$$

և ընտրելով (զ) համակարգի $\alpha_1^{(1)} = 1\,, \alpha_2^{(1)} = -1/2$ լուծումը՝ կգտնենք (ա) համակարգի $\left\{e^x, -e^x/2\right\}$ մասնակի լուծումը:

Նույն ձևով, (դ) հավասարման $k_2 = 4$ արմատի համար կգտնենք դիտարկվող համակարգի $\left\{e^{4x}, e^{4x}\right\}$ մասնակի լուծումը:

Դիֆերենցիալ հավասարումների (ա) համակարգի ընդհանուր լուծումը ստանալու համար մնում է օգտվել (17') բանաձևերից.

$$y_1 = c_1e^x + c_2e^{4x}, \qquad y_2 = -\frac{1}{2}c_1e^x + c_2e^{4x} \qquad (c_1, c_2 = const)\,: \qquad (\text{ը})$$

Ինչպես տեսնում ենք, դիտարկվող համակարգի (գ) և (ը) ընդհանուր լուծումները նույնաբար համընկնում են (ինչպես և պետք էր սպասել):