

В. Босс

ЛЕКЦИИ *по*
МАТЕМАТИКЕ

тум
11

Уравнения
математической физики

МОСКВА



Босс В.

Лекции по математике. Т. 11: Уравнения математической физики:
Учебное пособие. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 224 с.

Излагается обычная для уравнений математической физики тематика: распространение волн, теплопроводность, вопросы разрешимости, корректности. Акцент делается на линейных уравнениях с частными производными, но рассматриваются и нелинейные процессы. Определенное внимание уделяется нестандартным для рассматриваемой области направлениям. В первую очередь это теоретико-групповые методы изучения уравнений с частными производными, автомодельные решения и другие плоды исследования свойств симметрии. Несколько особняком стоит разъяснение теории дифференциальных форм, от которых не зависит остальное содержание. Но сама эта теория тесно примыкает к уравнениям математической физики и нуждается в простом и ясном описании.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «Книжный дом “ЛИБРОКОМ”».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 14. Зак. № 1752.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00020-8

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2008



Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»	6
Предисловие к одиннадцатому тóму	8
Глава 1. Предварительные сведения	9
1.1. ЧП как лекарство и как головная боль	9
1.2. Рост, циркуляция, расхождение	14
Глава 2. Уравнения математической физики	23
2.1. Преамбула	23
2.2. Диффузия частиц и тепла	24
2.3. Распространение волн	28
2.4. Стационарные режимы	31
2.5. О метаморфозах инвариантности	32
2.6. Динамика жидкости и газа	36
2.7. Электродинамика Максвелла	38
2.8. Уравнение Шрёдингера	39
Глава 3. Общие вопросы	43
3.1. Проблемы разрешимости	43
3.2. Теорема Коши—Ковалевской	46
3.3. Корректность постановки	49
3.4. Замена переменных и классификация	50
3.5. Характеристические поверхности	54
3.6. Краевые задачи	57
3.7. Принцип суперпозиции	59
3.8. Переход к интегральным уравнениям	60
3.9. Вид сверху	62
3.10. О нелокальной продолжимости	64

Глава 4. Уравнения первого порядка	67
4.1. Линейные уравнения и характеристики	67
4.2. Квазилинейные уравнения	71
4.3. Уравнения Пфаффа	73
4.4. Первые интегралы	76
4.5. Уравнение Гамильтона—Якоби	81
4.6. Шаг в сторону — и другая картина	83
Глава 5. Группы Ли и ЧП-симметрия	87
5.1. Методы подобия и размерности	87
5.2. Автомодельные решения	90
5.3. Непрерывные группы	92
5.4. Инвариантность и генераторы группы	93
5.5. Многопараметрическая симметрия	96
5.6. Инфинитезимальные продолжения	99
5.7. Допускаемые группы	101
5.8. Алгебры Ли	103
5.9. Прикладные аспекты	107
Глава 6. Обобщенные решения	111
6.1. Обобщенные функции	111
6.2. Многомерная ситуация	117
6.3. Преобразование Фурье	119
6.4. Обыкновенные дифуры	122
6.5. О слабых и обобщенных решениях	123
6.6. Фундаментальные решения	125
6.7. Задача Коши	129
Глава 7. Волновые процессы	131
7.1. Свободные колебания	131
7.2. Разделение переменных и метод Фурье	133
7.3. О роли спектрального разложения	136
7.4. Фронт и диффузия волн	137
7.5. Бегущая волна	139
7.6. Солитоны и КdФ-уравнение	140
7.7. Фазовая скорость и дисперсия	143

Глава 8. Диффузия	145
8.1. Парадокс бесконечной скорости	145
8.2. Нелинейная теплопроводность	147
8.3. Уравнения Хопфа и Бюргерса	148
Глава 9. Эллиптические задачи	152
9.1. Эллиптические операторы	152
9.2. Принцип максимума	153
9.3. Гармонические функции	156
9.4. Ньютоновы потенциалы	158
9.5. Функция Грина	161
9.6. Ненулевые граничные условия	165
9.7. Спектральные свойства	167
9.8. Комментарии	168
Глава 10. Дифференциальные формы	171
10.1. Внешние формы	171
10.2. Внешнее умножение	172
10.3. Дифференциальные формы	174
10.4. Внешние производные	176
10.5. Наглядная интерпретация	179
10.6. Техническое дополнение	181
10.7. Интегрирование и теорема Стокса	185
10.8. Топологические мотивы	186
Глава 11. Справочная информация	192
11.1. Криволинейные координаты	192
11.2. Аналитические функции	194
11.3. Спектральный анализ	197
11.4. Теория Фредгольма	199
11.5. Пространства Соболева	201
11.6. Список задач и решений	203
Сокращения и обозначения	211
Литература	213
Предметный указатель	215

Предисловие к «Лекциям»

*Сначала человек делает математику.
Потом математика — человека.*

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

- 1) живой учитель;
- 2) обыкновенный подробный учебник;
- 3) рядовой задачник;
- 4) учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем».

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого sorta книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение

математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к одиннадцатому тому

Инстинкт не дает ходу скороспелым умозаключениям. Иначе голова окажется полна обобщениями, которые цитрамоном не лечатся.

«Уравнения математической физики» постепенно выталкиваются из сферы общего образования, проникая частями в курсы анализа и обыкновенных дифуров. Процесс закономерный. Дисциплина распухла и стала похожа на собрание задач с решениями. Сначала распределение температур ищется на прямой, потом в круге, потом в квадрате и еще бог знает где. С ужасающими подробностями, — что имеет право на существование, но не в широкой аудитории. Тем не менее акценты и подробности сохраняются с восемнадцатого века. Объем дисциплины так вырос, что места более не остается, вплоть до альтернативы «или жениться, или Урматы¹⁾». Поэтому главная задача сейчас убрать «лишнее», оставив компактный минимум, который бы давал общее представление и удобную стартовую позицию для дальнейшего движения, куда бы оно потом ни было направлено.

¹⁾ Урматы — жаргонное название «Уравнений математической физики».

Глава 1

Предварительные сведения

Вся жизнь уходит на приготовления.

Речь об азах и об элементах векторного анализа, причем в \mathbb{R}^3 . Потому что начинать разумно с наглядного случая, к тому же n -мерный вариант для урматов не так интересен. Приводимые ниже факты не так чтобы очень нужны для последующих глав, но они важны как снаряжение¹⁾, помогающее ориентироваться в области, не обязательно в книге.

1.1. ЧП как лекарство и как головная боль

Напомним, *частная производная* — это *обыкновенная производная по выбранной переменной*, когда *другие переменные фиксированы*. Например, ЧП по x функции $u = f(x, y)$ в точке (x, y) есть предел

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}.$$

Вместо $\frac{\partial f}{\partial x}$ используются также эквивалентные обозначения²⁾

$$f_x, \quad \partial_x f.$$

Терапевтическая роль частных производных выявляется, когда речь заходит о *полном приращении*

$$\delta f = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y).$$

¹⁾ Идти на охоту без ружья глупо, хотя оно может и не понадобиться.

²⁾ Соответственно, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{xy} \equiv \partial^2_{xy} f$.

В общем случае функции $f(\mathbf{x})$, имеющей непрерывные частные производные³⁾ в окрестности точки $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$\delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}) \delta x_i + o(\|\delta \mathbf{x}\|), \quad (1.1)$$

что принято записывать в форме

$$\delta f = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x} + o(\|\delta \mathbf{x}\|) \quad (1.2)$$

с помощью *градиента* $\nabla f = \{f_{x_1}, \dots, f_{x_n}\}$.

Функцию $f(\mathbf{x})$, полное приращение которой представимо в виде (1.1), называют дифференцируемой в точке \mathbf{x} , а линейную часть приращения именуют *полным дифференциалом* и записывают как

$$df = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\mathbf{x}) dx_i = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Частные производные можно снова дифференцировать, получая частные производные все более высокого порядка. Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки \mathbf{x} непрерывные производные до m -го порядка включительно, то любая m -я смешанная производная

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}, \quad m = m_1 + \dots + m_n,$$

не зависит от порядка дифференцирования⁴⁾.

При рассмотрении функций n переменных $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ удобны различные стенографические трюки:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

³⁾ Для справедливости (1.1) требование непрерывности частных производных не обязательно, но просто наличия производных, как в одномерном случае, уже недостаточно.

⁴⁾ Что следует из *теорем о равенстве повторных пределов* [3, т. 1].

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad f^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right),$$

с помощью которых даже ряд Тэйлора для функции n переменных записывается в привычном на вещественной прямой виде,

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} f^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{z}^\alpha}{\alpha!}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Агрегат α называют *мультииндексом*.

На ∂_x естественно смотреть как на оператор, а на произведение $\partial_x \partial_y$ — как на композицию:

$$\partial_x \partial_y f = \partial_x (\partial_y f),$$

т.е. $\partial_x \partial_y = \partial_{xy}$, откуда ясна перестановочность: $\partial_x \partial_y = \partial_y \partial_x$.

На такой платформе удобно использовать всевозможные разложения. Например, *волновое уравнение* $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ можно записать как $(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx})u = 0$, а оператор $\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx}$ разложить в произведение

$$\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx} = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x),$$

после чего исходное уравнение сводится к двум уравнениям первого порядка $(\partial_t - c\partial_x)u_1 = 0$ и $(\partial_t + c\partial_x)u_2 = 0$, решая которые, получаем⁵⁾ $u = u_1 + u_2$. Уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в записи $(\partial_{xx} + \partial_{yy})u = 0$ — поддается той же технологии, но уже с привлечением мнимой единицы:

$$\partial_{xx} + \partial_{yy} = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y).$$

Удобства, само собой, компенсируются аномалиями. Функции нескольких переменных нередко страдают патологическими отклонениями. Вот стандартный пример. Рядовая функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{если } x, y \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

⁵⁾ Ибо $(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx})(u_1 + u_2) = (\partial_t + c\partial_x)[(\partial_t - c\partial_x)u_1] + (\partial_t - c\partial_x)[(\partial_t + c\partial_x)u_2]$.

имеет разрыв в нуле, причем довольно замысловатый:

- Предела $u f(\cdot)$ при $(x, y) \rightarrow 0$ нет, но при стремлении (x, y) к нулю вдоль любой прямой $x = ky$ значение $f(\cdot)$ имеет предел $k/(1 + k^2)$. Поэтому разрывная функция $f(\cdot)$ всюду непрерывна по каждой переменной в отдельности.
- Несмотря на разрыв, функция $f(x, y)$ при любом фиксированном y — непрерывна как функция x . Кроме того, $f(\cdot)$ имеет частные производные всюду, в том числе в нуле, т. е. в точке разрыва.

Модификация (1.3)

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{если } x, y \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

являет собой пример функции опять-таки разрывной в нуле, и потому недифференцируемой, но имеющей всюду частные производные. В дополнение к ситуации (1.3) функция (1.4) при стремлении x к нулю вдоль любой прямой $x = ky$ имеет один и тот же нулевой предел.

В сердцевине неприятностей, присущих функциям нескольких переменных, лежит обычно бремя несовпадающих повторных пределов, типа

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ax + cy}{bx + dy} = \frac{a}{b}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + cy}{bx + dy} = \frac{c}{d}.$$

У функции $f(x, y) = x \sin(1/y)$ при $(x, y) \rightarrow 0$ существует двойной предел, но только один из повторных. А у функции (1.3) в нуле существуют и равны оба повторных предела, но двойного — вообще нет.

Несмотря на возможные отклонения от нормы, бдительность расходовать можно экономно. Характерный признак выхода повторных пределов из-под контроля — наличие у функции тех или иных особенностей. В ситуациях «общего положения» предосторожности чаще всего излишни. Ключом к положительному решению вопроса о совпадении повторных пределов является, как правило, та или иная разновидность *равномерной сходимости*.

1.1.1. Пусть $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \varphi(x)$ при любом достаточно малом по модулю x , и при каждом y из некоторой окрестности нуля существует предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \psi(y)$. Если при этом $f(x, y)$ стремится к $\varphi(x)$ равномерно по x , то оба повторных предела существуют и равны друг другу.

Для успешного манипулирования частными производными достаточно помнить об условиях справедливости тех положений, которые по забывчивости начинают восприниматься как безусловные истины. Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy, & \text{если } x, y \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в нуле частные производные $f_{xy}(0, 0) = 1$, $f_{yx}(0, 0) = -1$, что противоречит расхожему представлению о равенстве смешанных производных независимо от порядка дифференцирования. Но в данном случае «не хватает» непрерывности f_{xy} и f_{yx} в окрестности нуля.

Существенный интерес представляют условия, обеспечивающие смену порядка манипуляций с участием интегрирования. Так как интегрирование обладает *улучшающими свойствами*⁶⁾, многие действия с $g(y)$,

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

можно переносить на подынтегральную функцию при довольно свободных предположениях относительно $f(x, y)$.

1.1.2. Если

$$f(x, y) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{при } y \rightarrow 0$$

равномерно по x , то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) dx.$$

1.1.3. Пусть функция $f(x, y)$ и частная производная $\partial f(x, y)/\partial y$ непрерывны в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

при любом $y \in [c, d]$.

⁶⁾ Из интегрируемой функции делает непрерывную, из непрерывной — дифференцируемую.

1.1.4. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Таким образом, интегрирование для стандартных операций анализа не воздвигает больших преград. Предельные переходы могут свободно проникать сквозь интеграл снаружи внутрь, и наоборот, но это не должно убаюкивать.

1.2. Рост, циркуляция, расходжение

Спектр дифференциальных явлений в \mathbb{R}^n гораздо шире, чем на прямой. В \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 — это *градиент*, *дивергенция*, *ротор*⁷⁾. И если, скажем, равенство $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$ изучать в форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

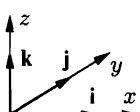
либо $\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0$ — в облике

$$v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

— многое теряется. Укрупненные закономерности смазываются, как будто вместо фотографии целиком мелькают отдельные пиксели. И наоборот, если ЧП-уравнение имеет толкование в категориях векторного анализа, переход от детального описания на более высокий уровень абстракции обнажает скрытые пружины и помогает ориентироваться. Помимо оптимального уровня обзора важны также привычные условия. По этой причине далее отдается предпочтение рассмотрению уравнений в \mathbb{R}^2 или \mathbb{R}^3 , где геометрическая наглядность служит дополнительной опорой. Векторы $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ представляются в виде линейных комбинаций

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

⁷⁾ В пространствах большей размерности ассортимент дифференциальных форм богаче.



где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты осей координат⁸⁾ x, y, z . Наряду с $\mathbf{r} = \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3$ в \mathbb{R}^n используется более привычное

$$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Градиент. Производная функции $u = f(x, y)$ вдоль направления единичного вектора $\mathbf{s} = \{s_x, s_y\}$ равна

$$u_s = \frac{d}{d\eta} f(x + \eta s_x, y + \eta s_y) = \frac{\partial f}{\partial x} s_x + \frac{\partial f}{\partial y} s_y. \quad (1.5)$$

Вектор

$$\operatorname{grad} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \equiv \{f'_x, f'_y\}$$

называют *градиентом* функции f , и для его обозначения используют также ∇f . Из (1.5) следует, что производную по направлению \mathbf{s} можно записать как скалярное произведение

$$u_s = \mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} f = \langle \mathbf{s}, \operatorname{grad} f \rangle. \quad (1.6)$$

Максимум (1.6) в силу

$$\mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} f = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos \alpha$$

достигается при $\alpha = 0$, и равен $\|\nabla f\|$. Поэтому градиент ∇f — это вектор скорости максимального роста функции f . Следовательно, в каждой точке поверхности постоянного уровня⁹⁾ $f(x, y)$ градиент ∇f направлен по нормали и касательная плоскость¹⁰⁾ к линии постоянного уровня функции $u = f(x, y)$ в точке $\{x_0, y_0\}$ — описывается уравнением

$$f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0) = 0.$$

Если интерес представляет касательная плоскость к поверхности графика функции $u = f(x, y)$, то это сводится к предыдущему

⁸⁾ Система координат $Oxyz$ считается *правой*, если для наблюдателя, расположенного в нуле, обход концов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в указанном порядке происходит по часовой стрелке. В противном случае тройка $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — *левая*.

⁹⁾ В \mathbb{R}^2 — линии постоянного уровня.

¹⁰⁾ На рис. 1.1 это пунктирная прямая.

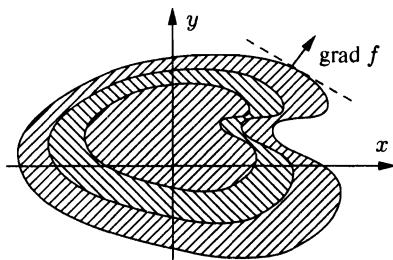


Рис. 1.1

случаю рассмотрением функции $v = u - f(x, y)$ трех переменных. Ее градиент

$$\{1, -f_x, -f_y\}.$$

Поэтому *касательная плоскость* к поверхности $u = f(x, y)$ в точке $\{u_0, x_0, y_0\}$ определяется уравнением

$$u - u_0 = f_x \cdot (x - x_0) + f_y \cdot (y - y_0).$$

Отталкиваясь от двумерного случая, легко записать касательные плоскости в общем случае $u = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Уравнение касательной плоскости в \mathbb{R}^n к поверхности постоянного уровня в точке \mathbf{x}_0 :

$$\boxed{\nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0,}$$

а касательную плоскость в \mathbb{R}^{n+1} к поверхности графика $u = f(\mathbf{x})$ в точке $\{u_0 = f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0\}$ дает уравнение:

$$\boxed{u - u_0 = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).}$$

Дивергенция, или *расхождение векторного поля*¹¹⁾

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \{a_x(\mathbf{r}), a_y(\mathbf{r}), a_z(\mathbf{r})\} \quad (1.7)$$

¹¹⁾ В (1.7) a_x — это иксовая координата вектора \mathbf{a} .

в точке \mathbf{r} определяется как предел¹²⁾

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.8)$$

потока вектора \mathbf{a} через замкнутую поверхность S , которая ограничивает бесконечно малый объем V , окружающий точку \mathbf{r} .

При интерпретации (1.7) как поля скоростей потока несжимаемой жидкости о дивергенции естественно говорить как о плотности источников/стоков. В этом случае в пределах объема V , ограниченного поверхностью S , возникает или поглощается жидкость в количестве $\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV$. При этом, очевидно, сколько возникло/исчезло в V , столько должно вытечь/втечь через S ,

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV, \quad (1.9)$$

что называют *теоремой Гаусса—Остроградского*.

Обратим внимание, определение (1.8) бескоординатно. В декартовой системе переход к пределу в (1.8) дает [3, т. 1]:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Векторное поле с нулевой дивергенцией, $\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv 0$, называют *соленоидальным*, или *трубчатым*.

Векторными линиями поля (1.7) являются интегральные кривые системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = a_x, \quad \dot{y} = a_y, \quad \dot{z} = a_z,$$

¹²⁾ Здесь $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$ — скалярное произведение вектора \mathbf{a} на вектор-дифференциал площадки $d\mathbf{S}$, обычно записываемое как

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy,$$

но точнее

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = a_x dy \wedge dz + a_y dz \wedge dx + a_z dx \wedge dy,$$

см. главу 10.

часто записываемой в виде

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Оператором Гамильтона называется дифференциальный оператор «набла» $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

При записи дифференциальных операций с ним можно манипулировать, как с вектором. Градиент φ получается «умножением» вектора ∇ на скаляр φ ,

$$\nabla\varphi = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

а дивергенция оказывается равной «скалярному произведению»

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

что обычно записывают без точки, $\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a}$.

Удобства на этом не заканчиваются. С помощью ∇ компактно записываются и другие дифференциальные операции — например, $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a}$.

- Скалярное произведение $\nabla \cdot \nabla$ называют *оператором Лапласа*,

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

который представляет собой последовательное взятие от скалярной функции φ градиента, а потом — дивергенции:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Переписав (1.8) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{a}_n dS, \quad (1.10)$$

где \mathbf{n} — текущая нормаль, и подставляя в (1.10) $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$, т. е. $a_{\mathbf{n}} = \partial \varphi / \partial \mathbf{n}$, получаем

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (1.11)$$

откуда легко следует нечто «типа Гаусса—Остроградского»

$$\int_V \Delta \varphi dV = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (1.12)$$

В этой нише находится широко применяемая формула Грина (*вторая*)

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS, \quad (1.13)$$

легко получаемая из *первой формулы Грина*

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (1.14)$$

◀ Подставляя

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{div}(\varphi \nabla \psi) = \nabla(\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi$$

в (1.9), имеем

$$\int_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS,$$

т. е. (1.14), поскольку $dS = \mathbf{n} dS$, $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$.

Меняя теперь в (1.14) φ и ψ местами и вычитая симметричные равенства одно из другого, получаем (1.13). ►

- Обычно оператор ∇ воспринимается и работает как удобный мнемонический прием символического характера, но можно добиться большего [9], определяя $L(\nabla)$ для линейного относительно

\mathbf{a} выражения¹³⁾ $L(\mathbf{a})$ как

$$L(\nabla) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S L(\mathbf{n}) dS, \quad (1.15)$$

где \mathbf{n} — текущая нормаль поверхности S , ограничивающей объем V . Из (1.15) возникает *обобщенная формула Гаусса—Остроградского*:

$$\int_V L(\nabla) dV = \oint_S L(\mathbf{n}) dS,$$

откуда, в частности¹⁴⁾,

$$\oint_S \varphi \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \varphi dV, \quad (1.16)$$

что не так популярно как (1.9), но существенно для понимания ряда гидродинамических закономерностей. Например, если φ — постоянное давление газа в объеме V , т. е. градиент $\nabla \varphi \equiv 0$, то

из (1.16) следует $\oint_S \mathbf{n} dS = 0$, что означает равенство нулю результирующей силы давления на оболочку (рис. 1.2), иначе можно было бы сделать вечный двигатель.

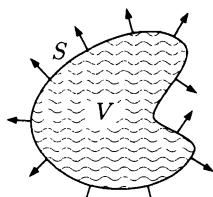


Рис. 1.2

Если же нормали $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ сделать по длине равными потенциалу $\varphi(\mathbf{r})$, то из (1.16) следует независимость интеграла $\int_V \nabla \varphi dV$ от способа продолжения φ с S на V .

Ротор, или циркуляция векторного поля (1.7) в точке \mathbf{r} , определяется как вектор $\text{rot } \mathbf{a}$, имеющий проекцию на любое направление \mathbf{h} ,

¹³⁾ $L(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \lambda L(\mathbf{a}) + \mu L(\mathbf{b})$.

¹⁴⁾ Не надо путать с $\int_V \Delta \varphi dV = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS$.

определяемую по формуле

$$\text{rot}_h \mathbf{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.17)$$

где контур C , ограничивающий площадь S , стягивается в точку, при этом вектор площади S стремится по величине к нулю¹⁵⁾, а по направлению к \mathbf{h} .

Несложное вычисление ротора поля скоростей вращающегося тела,

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

приводит к показательному результату $\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, свидетельствующему о связи ротора с вращением.

В рамках определения (1.17) более-менее очевидна *теорема Стокса*:

$$\oint_C \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.18)$$

С помощью «наблы» ротор записывается как векторное произведение

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a},$$

откуда сразу получается

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В плоском случае, когда $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ не зависит от z , например,

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \{P(r), Q(r), 0\},$$

¹⁵⁾ Уточнения насчет предельного перехода см. в [9].

формула Стокса (1.18) переходит в формулу Грина

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy = \int_S \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} \, dx \, dy. \quad (1.19)$$

- Всякое векторное поле \mathbf{a} может быть представлено с помощью трех скалярных функций φ, ψ, ω — в виде

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi + \omega \operatorname{grad} \psi. \quad (?)$$

- В случае скалярного поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$ имеем, по правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \dot{z}, \quad (1.20)$$

что можно записать как

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \operatorname{grad} \varphi. \quad (1.21)$$

И хотя (1.21) к пониманию (1.20) мало что добавляет, именно (1.21) позволяет оставаться в колее более общих манипуляций векторного анализа.

- Аналогичный трюк используется в случае векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \dot{z},$$

что записывают как

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{a}. \quad (1.22)$$

Формулы (1.21), (1.22) часто используются в задачах, связанных с описанием движения сплошной среды. Величину $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}$ называют *градиентом вектора \mathbf{a} по \mathbf{v}* . В случае поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — (1.22) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (1.23)$$

Глава 2

Уравнения математической физики

*Линейные задачи важны потому,
что хорошо решаются.*

2.1. Преамбула

Урматы — это, главным образом, линейные уравнения с частными производными¹⁾, типа $u_t = u_{xx}$, описывающие, как принято думать, физические явления. Нелинейные уравнения служат той же цели, и постепенно пробивают себе дорогу, но с трудом. Аппарат в целом естественный — поскольку голова мыслит локально, производными, а глобальному большей частью удивляется. Поэтому дифуры исследовательская мысль добывает непосредственно, остальное выводит косвенно. Правда, абстрактных математиков оное различие не волнует — они шаг за шагом удаляются от первозданного, не всегда понимая в результате, откуда в зеркале — изображения. В таких ситуациях знакомство с физическими моделями иногда производит целебный эффект.

Чтобы дисциплина не вела к сумятице воображения, имеет смысл дать ориентиры, хотя бы тезисно и умеренно правдиво, — дабы настроиться в резонанс.

1. Уравнения с частными производными не так часто решаются, как обыкновенные дифуры, и урматы — это, по существу, фарватер.

¹⁾ Для краткости, ЧП-уравнения.

2. Речь, так или иначе, идет об уравнениях, описывающих динамику «сплошной среды». Поэтому есть временные и пространственные переменные, и несколько типов процессов:
- *Диффузия*, или *теплопроводность*, — когда «одно проникает в другое». Образец для подражания — *уравнение диффузии*²⁾ $u_t = \lambda u_{xx}$. Задачи — *гиперболические*. Скорость распространения — бесконечная. (!)
 - «*Колебания*», — когда распространяются импульсы, возмущения — с конечной скоростью. Представитель класса — *волновое уравнение* $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $u(x, t)$ — отклонение. Задачи — *параболические*.
 - Стационарные процессы, когда динамика предыдущих пунктов приходит в равновесие. Уравнения *Лапласа*, *Пуассона*. Задачи — *эллиптические*.
 - Движение среды, гидродинамика. Уравнения *Навье—Стокса*.

3. Традиционно изучаются уравнения *второго порядка*, но это погоды не делает. Общность в смысле n -мерности также малосущественна. Водораздел, скажем, между *гиперболическими* и *параболическими* уравнениями в достаточной мере характеризуют различия *одномерных* задач $u_t = u_{xx}$ и $u_{tt} = u_{xx}$, где пространственная переменная x всего одна.

Разумеется, любое изложение урматов состоит из того, что никогда не понадобится. Напрямую. Но это не значит, что учить нет смысла. Аналогичная песня с историей, географией, поэзией. Анатомические познания даже терапевту не всякому нужны, но без них как-будто чего-то не хватает. Так что фундамент, категории мышления, «привязка к местности», чувство уверенности, ахиллесовы зоны неполноценности, — все это оказывается так далеко от источников, что учиться целесообразно впрок и широким фронтом. Акценты правильно расставить заранее — тоже трудно, однако понимание, все же, на первое место необходимо ставить, поскольку из каши в голове ничего путного не вырастает. А всякие аппаратные штучки, чем урматы несколько злоупотребляют, хороши для просвещения враждебных сил.

2.2. Диффузия частиц и тепла

Уравнение диффузии подразумевает описание диффузионных потоков, пропорциональных градиенту концентрации частиц. Распро-

²⁾ Где u — концентрация диффундирующих частиц или температура

странение тепла подчиняется тем же законам. Физика процессов заслуживает внимания, потому что для математики важнее всего то, что к математике не относится. Диалектическая польза бесполезного, так сказать.

Пусть $u(\mathbf{r}, t)$ — температура тела в точке \mathbf{r} в момент t , c — теплоемкость, ρ — плотность. Для нагревания элемента объема dV массой ρdV за время dt на $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ градусов необходимо количество тепла

$$dQ = c\rho dV \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

интегрирование которого по объему V дает количество тепла

$$Q = \int_V c\rho dV \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

идущее на нагревание/охлаждение этого объема в целом.

То же самое Q можно подсчитать другим способом:

$$Q = - \oint_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} dt = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV dt,$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ — удельный поток тепла.

В результате, по законам двойной бухгалтерии,

$$\int_V \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} \right) dV = 0,$$

что, в силу произвольности V , приводит к

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0,$$

и при естественном предположении $\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} u$ получается стандартное уравнение теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0,$$

принимающее форму $u_t = a^2 \Delta u$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}. \quad (2.1)$$

В случае распространения тепла либо диффундирующего вещества на прямой или на плоскости — (2.1) переходит в

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{или} \quad u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (2.2)$$

Если процесс сопровождается действием тепловых источников, распределенных с плотностью $f(\mathbf{r}, t)$, то к правой части (2.1) надо добавить $f(\mathbf{r}, t)$, поскольку в объеме V возникает дополнительное количество тепла

$$\int_V f(\mathbf{r}, t) dV dt.$$

В задачах диффузии иногда из правой части (2.1) вычитают λu , имея в виду поглощение частиц средой пропорционально их концентрации $u(\mathbf{r}, t)$.

Классическая математика предпочитает не тратить силы в территориальных водах физики, и берется за уравнение

$$u_t = a^2 \Delta u - \lambda u + f(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

выписанное на чистом холсте. Поэтому интуитивных представлений о возможном решении — никаких. И хотя искусственные трудности имеют спортивную цену, тут физическая модель приходится весьма кстати. Понятно, например, какого сорта влияние могут оказывать поглощение λu и нагревание $f(\mathbf{r}, t)$, не говоря вообще о качественном поведении $u(\mathbf{r}, t)$ в зависимости от начальных и граничных условий.

Роль последних опять-таки достаточно очевидна в контексте физического толкования. Начальное распределение температур, ясное дело, необходимо — иначе откуда стартовать, — но этого не хватает для выделения конкретного решения (2.3). Нужны еще *краевые условия*, регламентирующие процессы на границе.

Если тело занимает область Ω с границей Γ , естественными *краевыми условиями* могут быть:

- поддержание на Γ заданного распределения температур $u_0(\mathbf{r})$,

$$u|_{\Gamma} = u_0; \quad (2.4)$$

- поддержание на Γ заданного потока тепла³⁾

$$-k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = \mathbf{v}_0, \quad (2.5)$$

³⁾ Точнее говоря, плотности потока тепла. Обратим также внимание, что производная u по направлению \mathbf{n} , разумеется, вектор, но поскольку \mathbf{n} все же нормаль к Γ — информация избыточна. Поэтому вектор-функцию \mathbf{v}_0 часто считают и обозначают как скалярную v_0 .

где $\partial u / \partial \mathbf{n}$ обозначает производную по нормали \mathbf{n} к поверхности Γ ;

- теплообмен на Γ , пропорциональный разности температур,

$$k \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + l(u - u_0) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.6)$$

где u_0 — температура окружающей среды.

Теперь о пользе физических представлений легко судить, рассматривая три краевых задачи: уравнение (2.3) в совокупности с фиксацией начального распределения температур и одним из граничных условий (2.4)–(2.6). Допустим, нас интересует существование стационарного распределения температур $u_{\infty}(\mathbf{r})$, т. е. существование предела $u(\mathbf{r}, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Стерильный разбор полетов не так прост. А в рамках физической модели ситуация довольно прозрачна. В случае (2.4), когда стационарные температуры на границе обеспечиваются за счет достаточно быстрого охлаждения или нагревания, существование $u_{\infty}(\mathbf{r})$ во всей области Ω более-менее ясно. В случае (2.5), когда на границе поддерживается определенный поток энергии, вопрос упирается в соотношение притока и оттока тепла — и для существования $u_{\infty}(\mathbf{r})$ необходим баланс, малейшее нарушение которого ведет к неограниченному нарастанию

$$|u(\mathbf{r}, t) - u_{\infty}(\mathbf{r})|$$

с течением времени⁴⁾, что указывает на возможные проблемы с устойчивостью.

Наконец, в третьей краевой задаче с теплообменом (2.6) нулевому коэффициенту l отвечает энергетически непроницаемая оболочка. Это влечет за собой рост или убывание средней темпера-

Замечание особенно существенно, когда $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ интегрируется по поверхности Γ , — и вместо скалярного произведения $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot d\sigma$ под интегралом не вполне корректно (но pragmatically) пишут $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma$, игнорируя векторную природу сомножителей.

⁴⁾ Потому что энергия в Ω постоянно либо растет, либо убывает.

туры в зависимости от знака интеграла

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{r}, t) dV,$$

характеризующего общее поступление энергии. По мере увеличения l возможности саморегулирования возрастают. При нарастании температуры увеличивается отток тепла, пропорционально

$$l(u - u_0),$$

при убывании — приток, что при определенных значениях l дает надежду на асимптотически устойчивое решение $u_{\infty}(\mathbf{r})$.

Еще одна важная постановка задачи — распространение тепла, созданного единичным импульсом, сосредоточенным в нуле ($x = 0$, $t = 0$). Температура, как потом выяснится, оказывается строго положительной при любом x и любом $t > 0$, что свидетельствует о бесконечной скорости распространения тепла. Разумеется, не физического тепла, а «математического». Но это вынуждает задуматься о корректности «описания и решения». Точность аппроксимации реальных процессов получается высокой, но идеологический протокол настраивает на философский лад.

2.3. Распространение волн

Однаковость механизмов распространения тепла и вещества — подталкивает к более широким выводам. Не так ли распространяется и возбуждение в сплошной среде? Не так.

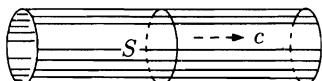


Рис. 2.1

На фоне «молниеносной» диффузии, правда, первым делом возникает вопрос о скорости волнового процесса. Вот стандартное рассуждение на-

счет скорости c распространения импульса сжатия вдоль стержня с сечением S (рис. 2.1). Пусть в импульсе давление увеличено на δP , а плотность — на $\delta \rho$. За время δt через S пройдет масса вещества $\delta m = \delta \rho \cdot S c \cdot \delta t$.

Сила, действующая на площадку S , очевидно, $F = \delta P \cdot S$. Изменение количества движения равно импульсу силы, т. е.

$$\delta m \cdot c = F \cdot \delta t,$$

откуда

$$\delta \rho \cdot Sc^2 \cdot \delta t = \delta P \cdot S \cdot \delta t,$$

что после сокращения на $S\delta t$ и перехода к пределу ($\delta P, \delta \rho \rightarrow 0$) дает

$$c = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}. \quad (2.7)$$

Для твердого стержня (2.7) приводит к $c = \sqrt{E/\rho}$, где E — модуль Юнга. В случае газа вопрос упирается в уравнение состояния. Если отталкиваться от привычного

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad \text{т. е.} \quad P = \rho \frac{RT}{\mu}, \quad (2.8)$$

то $\frac{dP}{d\rho} = \frac{RT}{\mu} = \frac{P}{\rho}$, что приводит к заниженному результату

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}.$$

Но при звуковых колебаниях температура не успевает выравниваться, поэтому вместо (2.8) надо рассматривать адиабатический процесс

$$P/\rho^\gamma = \text{const},$$

откуда $c = \sqrt{\gamma P / \rho}$, что уже правильно определяет скорость звука.

Если к рассмотренной модели присмотреться внимательнее, то это выносит в другие воды. Пусть стержень расположен вдоль оси x , и $u(x, t)$ обозначает степень сжатия в сечении стержня на уровне x в момент t . Рассмотрим два сечения на уровне x и $x + \delta x$ (рис. 2.2), а также заключенный между ними объем

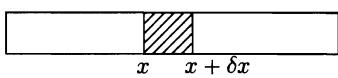


Рис. 2.2

$\delta V = S \delta x$. Сила, действующая на сечение x , равна $kS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x$, где k определяется физикой задачи (газ, твердый стержень). Результирующей силой, действующей на объем δV , будет

$$F = kS \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) = kS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x, \quad (2.9)$$

и тогда закон Ньютона дает *волновое уравнение*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (2.10)$$

где $c = \sqrt{k/\rho}$ — скорость волны, $\partial^2 u / \partial t^2$ — ускорение.

При распространении сжатия в пространстве (2.10) переходит в

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}, \quad (2.11)$$

что с помощью *оператора Д'Аламбера*

$$\square_c = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

записывают в виде $\boxed{\square_c u = 0}$.

Между прочим, если в предыдущем рассуждении закон Ньютона «ускорение пропорционально силе» заменить другой нормой «скорость пропорциональна силе»⁵⁾, — волновое уравнение (2.11) трансформируется в уравнение диффузии (2.1). Импульсы станут распространяться как диффундирующие частицы.

⁵⁾ При которой движение по инерции становится невозможным. Тело движется — пока на него действует сила.

Рассмотрим в качестве еще одного примера — колебание струны, не сопротивляющейся изгибу. Пусть $u(x, t)$ — смещение струны в точке x в момент времени t (рис. 2.3). Натяжение струны $T(x, t)$

постоянно по величине и направлено по касательной к графику $u(x, t)$. Сила, действующая на участок струны от x до $x + dx$, равна

$$T(x + dx, t) - T(x, t)$$

и, как легко убедиться, пропорциональна u_{xx} . Ускорение того же участка $\sim u_{tt}$. Поэтому второй закон Ньютона снова дает (2.10).

Что касается сопутствующих обстоятельств, то конкретизация задачи связана с заданием начальных и граничных условий. Если конец $x = 0$ струны закреплен, соответствующее краевое условие имеет вид $u|_{x=0} = 0$, если — свободен, то $u_x|_{x=0} = 0$. Начальные условия, в отличие от задачи теплопроводности, помимо $u(x, 0) = u_0(x)$ требуют задания также производной $u_t(x, 0) = u_1(x)$, ибо здесь «дифир по времени» второго порядка.

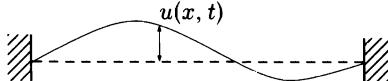


Рис. 2.3

Уравнение (2.11) имеет в некотором роде универсальный характер, описывая распространение колебаний различной природы: волны Рэлея⁶⁾, крутильные колебания, распространение звука, электромагнитные волны. Однако этот универсализм носит ограниченный характер. Например, при описании колебаний упругой струны в уравнение вклиниваются частные производные четвертого порядка [12]. Кроме того, многие волновые процессы не поддаются описанию без учета нелинейных эффектов. Во-первых, редко обходится без дисперсии. Во-вторых, по мере увеличения амплитуды практически всегда колебания начинают зависеть от амплитуды⁷⁾, и волна становится нелинейной со всеми вытекающими последствиями.

2.4. Стационарные режимы

Несмотря на сходство записи уравнений (2.1) и (2.11), поведение их решений существенно различается. В то же время стационарные решения (в которых производные по времени обнуляются) в том

⁶⁾ Поверхностные волны, не проникающие вглубь вещества (экспоненциально затухающие по мере углубления).

⁷⁾ За исключением электромагнитных колебаний в вакууме.

и другом случае описываются одним и тем же *уравнением Лапласа*⁸⁾

$$\boxed{\Delta u = 0.} \quad (2.12)$$

При стационарном внешнем воздействии $f(\mathbf{r})$ стационарные решения описываются *уравнением Пуассона*

$$\boxed{\Delta u = f(\mathbf{r}).} \quad (2.13)$$

«Выключение времени» происходит и в других ситуациях. Если, например, в задаче распространения волн

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad (2.14)$$

внешнее воздействие f периодично по времени,

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r})e^{i\omega t},$$

то поиск решения той же частоты после подстановки

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}$$

в (2.14) и сокращения на $e^{i\omega t}$ приводит к *уравнению Гельмгольца* для амплитуды $u_0(\mathbf{r})$,

$$\Delta u_0 + \frac{\omega^2}{c^2} u_0 = -\frac{f_0(\mathbf{r})}{c^2}. \quad (2.15)$$

2.5. О метаморфозах инвариантности

Физические модели нельзя, и невозможно, доводить до совершенства. Состоять из ляпсусов, выводить истины из тьмы неточностей — такова великая роль физики. Ибо кому еще по силам обращение правды в ложь — при согласовании малого с большим, быстрого с медленным, дискретного с непрерывным. Но в плену отпущения грехов иногда ускользает фундаментальное. При выводе волнового уравнения, например, внимание лениво скользит по мелким ограждам, не замечая катастрофы. В результате чисто

⁸⁾ Напомним, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ называют *оператором Лапласа*.

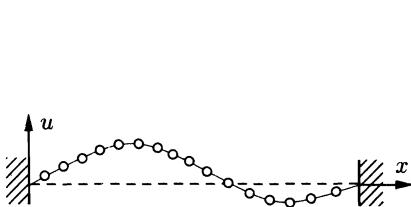


Рис. 2.4

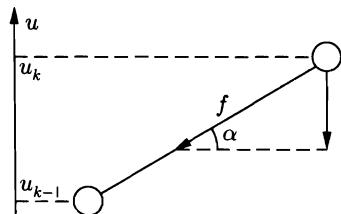


Рис. 2.5

механического перехода к (2.10) получаются уравнения, которые не инвариантны к преобразованиям Галилея.

Прежде чем обсуждать этот вопрос, остановимся на возникновении волнового уравнения в рамках другой модели струны, состоящей из множества шариков (рис. 2.4), соединенных невесомыми пружинками. Масса каждого шарика — m , длина пружинки — a , натяжение — f . Гравитации нет. Соседние шарики под увеличительным стеклом выглядят как на рис. 2.5, откуда ясно, что вертикальная составляющая силы, действующей на k -й шарик со стороны $(k-1)$ -го, равна

$$-f \sin \alpha = -f \frac{(u_k - u_{k-1})}{a} + o(\alpha).$$

Поэтому при малых отклонениях второй закон Ньютона для k -го шарика⁹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{dt^2} &= \frac{f}{m} \left(\frac{u_{k+1} - u_k}{a} - \frac{u_k - u_{k-1}}{a} \right) = \\ &= \frac{fa}{m} \left(\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{a^2} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Если теперь ввести функцию $u(x, t)$, определенную в точках $x = ka$,

$$u(ka, t) = u_k(t),$$

и организовать предельный переход, увеличивая до бесконечности число шариков и обеспечивая предельную плотность $m/a \rightarrow \rho$, система (2.16) перейдет в *волновое уравнение*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c^2 = \frac{f}{\rho}. \quad (2.17)$$

Так уравнение (2.17) выводил Д'Аламбер (1780). Рассуждение «еще более» механическое, но итог — с той же самой червоточинкой. Нарушается *принцип относительности Галилея*. Причина, безусловно, кроется в предельном переходе. Сам по себе переход

⁹⁾ Либерально не замечая крайних из-за малости вклада в общую копилку.

«хорош», ибо дает адекватное описание процесса, но в то же время — приводит к странной «бифуркации». Обычные механические качества улетучиваются, однако появляются новые удивительные свойства.

Суть дела в следующем. Если система координат K' движется, не вращаясь, относительно системы K с постоянной скоростью \mathbf{V} , то¹⁰⁾

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{V}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}'.$$

Поэтому при переходе к равномерно движущейся системе — уравнения движения « $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ » сохраняют форму: « $\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}$ », — ибо силы зависят от разностей координат и разностей скоростей, и потому не меняются¹¹⁾. Это, собственно, и есть *принцип относительности Галилея*¹²⁾.

Аналогичная попытка подвергнуть преобразованиям Галилея уравнение (2.17) терпит крах. Форма уравнения разрушается при замене $x = x' + Vt$. Но *оператор Д'Аламбера*

$$\square_c = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

помимо инвариантности к сдвигам координат, времени, и трехмерным вращениям, обнаруживает инвариантность по отношению к группе *псевдоортогональных преобразований*

$$\begin{cases} x = x' \operatorname{ch} \psi + ct' \operatorname{sh} \psi, \\ ct = x' \operatorname{sh} \psi + ct' \operatorname{ch} \psi, \end{cases} \quad (2.18)$$

аналогично по (y, ct) , (z, ct) .

Гиперболический поворот (2.18), сохраняющий «расстояние»¹³⁾

$$c^2 t^2 - x^2,$$

¹⁰⁾ Здесь штрихи не означают дифференцирования.

¹¹⁾ Чистый математик в этом месте иногда испытывает затруднения, производя замену в $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, вместо, скажем, $\mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0)$.

¹²⁾ Не говоря о возможности смены точек отсчета.

¹³⁾ Так называемый *интервал* в теории относительности.

отличается от обычного заменой синуса и косинуса их гиперболическими антиподами. Полагая в (2.18) $x' = 0$, имеем

$$x = ct' \operatorname{sh} \psi, \quad ct = ct' \operatorname{ch} \psi,$$

откуда $\operatorname{th} \psi = x/ct$. Но x/t есть скорость V движения начала ($x' = 0$) системы координат K' относительно K (ось x' движется вдоль x). Следовательно,

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c},$$

что позволяет записать (2.18) в виде

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.19)$$

известном как *преобразования Лоренца*.

Все как в *теории относительности*, кстати. Разве что c — не обязательно скорость света. Это может быть скорость звука, например. И если в движущейся системе координат ($V \leq c$) переходить к новому измерению длин и времени по формулам (2.19), то скорость звука во всех инерциальных системах отсчета будет одинакова. Остается сверхзвуковое движение объявить ересью и разрешить часы только на звукоулавливающей основе.

Естественно, внедрять *преобразования Лоренца* в акустику никому в голову не приходит, потому что здесь за новыми принципами измерения длины и времени нет логики¹⁴⁾. Конечно, манипуляция (2.19) сохраняет форму волны¹⁵⁾ и может быть полезной, но она выглядит подтасовкой и не дотягивает до уровня Космического закона. До «кругов на воде» — может быть. С чем-то глубинным перекликается, но — ускользает.

Самое интересное во всей этой истории — не инвариантность а-ля теория относительности, а сам факт метаморфозы. *Прин-*

¹⁴⁾ Впрочем, ее нет и вне акустики. Но необходимость рассечь гордиев узел — вынуждает.

¹⁵⁾ В инерциально движущейся системе координат.

цип относительности Галилея как ветром сдуло — стоило перейти от «материально-точечной механики» к сплошной среде. Можно сослаться на предельный переход как на виновника бифуркации, но интересен сам механизм перерождения. Более-менее понятно в чем дело, когда рассуждение изначально строится на непрерывной модели¹⁶⁾. Там есть два типа производных $\partial u / \partial t$ и du / dt . Причем, если пользоваться механикой Ньютона, то следить надо не за местом (сечением), а за частицей, и тогда скорость — это du / dt . Но рассуждение принудительно фиксируется на сечениях, и осуществляется подмена

$$\frac{du}{dt} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t},$$

каковая аналитически законна, ибо в $du / dt = \partial u / \partial t + \dot{r} \cdot \nabla u$ — см. (1.21) — добавка $\dot{r} \cdot \nabla u$ имеет второй порядок малости в случае малых колебаний. Поэтому с точки зрения матанализа — все в порядке, но *принцип относительности Галилея* из-за пренебрежения безделицей $\dot{r} \cdot \nabla u$ — все-таки гибнет.

В другом ракурсе обращает на себя внимание игнорирование процессов внутри объема δV между сечениями на уровне x и $x + \delta x$. И в каждую черную дыру x «схлопнувшихся» сечений устремляется бесконечное число дискретных степеней свободы, поведение которых дает специфический агрегированный эффект. При этом, несмотря на плавность численного перехода к пределу, противоречивость дискретного и непрерывного — рождает качественный скачок, который аукается в другом месте.

2.6. Динамика жидкости и газа

Течение в сплошной среде принято характеризовать *полем скоростей* $v(r, t)$, плотностью $\rho(r)$ и давлением $p(r)$. Второй закон Ньютона, отнесенный к единице объема вещества, принимает в данном случае облик *уравнения Эйлера*

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p. \quad (2.20)$$

¹⁶⁾ Типа распространения продольных колебаний в стержне, п. 2.3.

Более солидное рассуждение отталкивается от движения массы жидкости m , заключенной в объеме V (рис. 2.6), и тогда, поскольку

$$m = \int_V \rho dV \quad \text{и} \quad m dv/dt = \mathbf{F},$$

причем

$$\mathbf{F} = \oint_S p n dS = - \int_V \nabla p dV$$

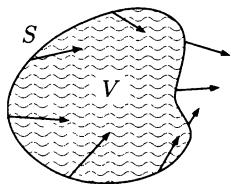


Рис. 2.6

в силу (1.16), то

$$\int_V \left(\rho \frac{dv}{dt} + \nabla p \right) dV = 0,$$

что приводит к (2.20) из-за произвольности объема V .

Опора на (1.23), т. е. $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, позволяет (2.20) записать в виде

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0,} \quad (2.21)$$

но этого, конечно, не хватает для полноты описания. К (2.21) обычно добавляют *уравнение неразрывности*¹⁷⁾

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0} \quad (2.22)$$

¹⁷⁾ Уравнение (2.22) легко выводится из закона сохранения массы. Масса в любом выделенном объеме меняется со скоростью

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

совпадающей со скоростью вытекания через границу V :

$$-\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla(\rho \mathbf{v}) dV.$$

Остается приравнять интегралы и сослаться на произвольность объема.

и *уравнение состояния*, связывающее давление и плотность¹⁸⁾. При наличии внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, отнесенных к единице объема, нуль в (2.21) меняется на \mathbf{F} , а в присутствии *источников* нуль в (2.22) заменяется их (источников) интенсивностью $f(\mathbf{r}, t)$.

- В силу (1.21) *уравнение неразрывности* (2.22) можно записать в другой форме

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.} \quad (2.23)$$

- В случае несжимаемой жидкости, $d\rho/dt = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. А если при этом существует еще и *потенциал скорости* φ ,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то $\boxed{\Delta\varphi = 0}$, в силу $\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Речь пока идет об *идеальной жидкости*, в которой, по определению, отсутствуют силы *вязкого трения*. Иными словами — о жидкости или газе, которые не сопротивляются изменению своей формы. При выделении любого объема V в такой жидкости — силы, действующие со стороны окружения V , направлены по нормали к границе выделенного объема.

2.7. Электродинамика Максвелла

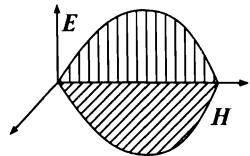
Электродинамика *Максвелла* в вакууме при отсутствии *токов смещения* опирается на систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{array} \right. \quad (2.24)$$

¹⁸⁾ Например, $p/\rho^\gamma = \text{const}$ в случае адиабатического течения газа. Либо $\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости.

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного поля. При наличии электрических зарядов¹⁹⁾, распределенных с плотностью ρ , уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ заменяется на $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Здесь не место обсуждать физическую сторону проблематики. Однако хотелось бы обратить внимание на аксиоматическую природу уравнений. Рассуждения в пользу (2.24), часто позиционируемые как *вывод*, таковыми на самом деле не являются. Поэтому на *уравнения Максвелла* целесообразно смотреть как на постулат, достаточно хорошо работающий, хотя и не безупречно.



Из первых двух уравнений (2.24) легко выводится

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Так что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют *волновому уравнению*. Интересно, что наводящие соображения в пользу (2.24) отталкиваются от классических представлений о пространстве и времени, но итоговые уравнения, как и в п. 2.5, оказываются инвариантны к преобразованиям Лоренца.

2.8. Уравнение Шрёдингера

Д'Аламбер, как принято думать, нашел *волновое уравнение*, а потом его решил. Скорей всего, было наоборот, потому что — так проще. Легче придумать уравнение под заготовленное решение.

В данном случае на роль «колебания» годится синусоида

$$u(x, t) = \sin(x - ct), \quad (2.25)$$

подобрать дифур для которой довольно просто:

$$u_{xx} = \sin(x - ct), \quad u_{tt} = c^2 \sin(x - ct),$$

откуда сразу получается (2.10). После этого можно подыскивать другие объяснения.

¹⁹⁾ Асимметрия электродинамики заключается, в том числе, в отсутствии магнитных зарядов. *Монополи Дирака* так и не найдены.

В пределах такого сценария возникает характерное явление. Исследование начинается с частного решения (2.25), под которое придумывается уравнение (2.10), после чего выясняется, что (2.10) имеет массу других решений. Затем в анализ вовлекаются краевые условия, и вообще — другие ручейки и реки, о существовании которых можно было только догадываться.

В подобном русле родилась и квантовая механика²⁰⁾. Луи де Броиль, предположивший (1923) волновую природу электрона, инспирировал в научных кругах весьма радикальный образ мыслей. Колебание насчет волн материи происходило вокруг естественных ассоциаций с известными колебательными процессами. Шредингер первым подобрал (1924) уравнение колебаний.

Ситуация не так далека от интерпретации, данной в [2]. «Что колеблется, было неясно, поэтому сие действие никто, включая самого Шредингера, всерьез не воспринимал. Потом попробовали и втянулись. Что колеблется, до сих пор неясно, но фокус работает. Вопрос о природе колебаний закрыт „волнами вероятности“. Кстати, авторитет теории уже так велик, что эти „волны вероятности“ можно вполне заменить эквивалентной формулировкой „колеблется непонятно что“. Короче говоря, процесс завершился по Планку, который говорил, что научная истина торжествует по мере того, как вымирают ее противники».

Естественный путь вывода *уравнения Шредингера* выглядит так. Напряженность электрического поля вдали от гармонического излучателя меняется по закону

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.26)$$

где ω — круговая частота ($\omega = 2\pi\nu$), \mathbf{k} — так называемый *волновой вектор*, \mathbf{r} — *радиус-вектор*.

Поскольку де Броиль приписал частицам длины волн по аналогии с фотонами, то в качестве волновой функции было естественно взять нечто вроде (2.26) с заменой параметров на более подходящие. Так возникла волновая функция

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i/\hbar(\epsilon t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.27)$$

с общеизвестными параметрами: $\epsilon = \hbar\omega$ — энергия частицы, \hbar — постоянная Планка, деленная на 2π , $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ — импульс, или количество движения.

²⁰⁾ Но если кто предпочитает другую мифологизацию, — как говорится, вольному воля.

Дифференцирование (2.27) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \epsilon \psi,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{\hbar^2} \psi.$$

С учетом $\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \epsilon$ получается

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \psi}, \quad (2.28)$$

что и представляет собой один из возможных вариантов записи *уравнения Шрёдингера*.

В пространственно-одномерном случае (2.28) имеет вид

$$\psi_t = \frac{i\hbar}{2m} \psi_{xx}. \quad (2.29)$$

Решений оказывается, конечно, больше, чем задумывалось. Например, (2.29) удовлетворяют функции с переменной амплитудой

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\epsilon t/\hbar}. \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в (2.29) и сокращая на $e^{-i\epsilon t/\hbar}$, получаем уравнение для амплитуды $\psi(x)$

$$\psi_{xx} + \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \psi(x) = 0. \quad (2.31)$$

Дискретные спектры возникают, как при игре на гитаре. Решение (2.31):

$$\psi = a \sin(kx + b), \quad k = \frac{\sqrt{2m\epsilon}}{\hbar}.$$

Если частица зажата на отрезке²¹⁾ $[0, l]$ краевыми условиями $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то этим условиям можно удовлетворить, требуя

$$kl = n\pi; \quad n = 1, 2, \dots,$$

что дает дискретный набор возможных энергий

$$\epsilon_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2},$$

а значит, и частот в силу $\epsilon = \hbar\omega$.

²¹⁾ В этом случае говорят, что частица находится в потенциальной яме.

Поскольку с интерпретацией ψ -функции с самого начала не все ладилось, вывод подходящего уравнения был оставлен на полдороге, в положении (2.28), где мнимая единица удачно ретуширует смысл. Физическая интерпретация колебаний отсутствует, и чтобы не было лишних вопросов, волновая функция изначально определяется как комплексная. Если бы речь шла только о поиске дискретных спектров, то все можно было бы оставить в таком положении, считая ψ -функцию удобной фикцией для промежуточных действий. Но в квантовой механике есть масса задач, где «функцию» приходится извлекать и приспособливать, например, для изучения интерференции электронов. Вопрос об интерпретации ψ -функции становится острее. Поиски логики останавливаются на волнах вероятности, что, надо признать, является оптимальным выходом из положения. Колеблется по-прежнему «непонятно что», но внешняя сторона дела именно вероятностна — и язык расплывчато-адекватен. В целом квантовая механика — совершенно уникальная научная дисциплина, научившаяся справляться с обширным кругом явлений в отсутствие их понимания. Физики насчет понимания могут спорить, но это вопрос терминологии.

Перезапись (2.29) в форме²²⁾

$$(i\partial_t + \partial_{xx})\psi(x, t) = 0 \quad (2.32)$$

и сопоставление с *уравнением теплопроводности*

$$(\partial_t - \partial_{xx})u = 0 \quad (2.33)$$

указывает на замаскированную связь этих уравнений. По крайней мере, (2.33) из (2.32) можно получить заменой t на $-it$, что свидетельствует об определенном сходстве свойств симметрии этих уравнений.

²²⁾ Коэффициенты можно поменять изменением масштабов.

Глава 3

Общие вопросы

*Знание общих принципов возмещает
незнание отдельных фактов.*

К. Гельвеций

При изучении ЧП-уравнений важно отдавать себе отчет, что ситуация в корне отличается от обыкновенных дифуров. Если последние практически всегда описывают семейства траекторий, то взятое наугад уравнение с частными производными — ничего не описывает. Не решается, попросту говоря. Исключений, разумеется, хватает, одно из них — урматы.

3.1. Проблемы разрешимости

Так же как обыкновенный дифур $y^{(n)} = \psi(y^{(n-1)}, \dots, y', y, t)$ заменой $x_1 = y, x_2 = y', \dots, x_n = y^{(n-1)}$ переводится в систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_n = \psi(x_n, \dots, x_2, x_1, t),$$

любая система уравнений с частными производными за счет объявления производных новыми неизвестными функциями — сводится к системе уравнений первого порядка по образцу:

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = v, \\ u_x = w, \\ v_t = w_x. \end{cases}$$

И наоборот, такого рода системы иногда консолидируются естественным образом в одно уравнение более высокого порядка, что происходит в урматах время от времени.

Элементарным примером *неразрешимого* ЧП-уравнения может служить $\nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, т. е.

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

при условии что поле $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ не потенциально, $\partial a_i / \partial x_j \neq \partial a_j / \partial x_i$. Другой образчик¹⁾ $\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

в случае когда поле $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ не соленоидально, $\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \neq 0$. И таким примерам нет числа. Причем неприятности могут быть вплетены в задачу самым невинным образом.

Ситуация (3.1)²⁾ вполне прозрачна. Поскольку направление градиента задает ортогональную плоскость, — уравнение $\nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ определяет поле касательных плоскостей — в отличие от обычновенного дифура, определяющего поле касательных направлений. Вписать траектории в непрерывное поле направлений всегда можно, а вот подобрать поверхности под заданное поле касательных плоскостей — задача, как правило, нерешаемая, что ясно даже интуитивно.

Если в (3.1) добавить интегрирующий множитель, как вторую компоненту искомой функции, — задача в чистом виде будет воспроизводить поиск решения уравнения Пфаффа (п. 4.3).

Что касается одного линейного уравнения

$$\sum_i a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

то оно допускает любые градиенты

$$\nabla u(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

ортогональные $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, оставляя свободу выбора касательных плоскостей, которой почти всегда хватает для существования решения. Такого sorta исключения удобно выставлять напоказ, ретушируя лишь некоторые шероховатости.

¹⁾ Здесь уже искомая функция \mathbf{u} векторная.

²⁾ Случай (3.2) менее нагляден, и требует больше слов. Но тут интересны не отдельные ситуации, а сам факт изобилия в векторном анализе дифференциальных свойств, каковые накладывают многочисленные условия, необходимые для разрешимости ЧП-уравнений.

Таким образом, интуитивная потребность во всеохватывающих теоремах в рассматриваемой области неправомерна, ибо за редкими исключениями ЧП-уравнения не решаются, и большая их часть остается за бортом теории. Однако то, что остается, вполне податливо и постижимо. Во-первых, многое решается фактически, в результате чего разрешимость выясняется сама собой. Во-вторых, масса задач переводится в интегральные уравнения, и тут спасают методы функционального анализа³⁾.

Принципиальный момент также — что считать решением. Для уравнений второго порядка, например, инерция мышления подталкивает к дважды непрерывно дифференцируемым функциям. Хуже, как говорится, не придумаешь. Прокрустово ложе C^2 слишком узко. Но брать производные обычным образом вовсе не обязательно. ЧП-уравнения в матфизике — всего лишь один из вариантов реализации миропонимания. Выдуманная модель. Бог интегрирует эмпирически, как говорил Эйнштейн, а мы описываем как умеем. На дифуры можно смотреть как на эскиз, намек, — не зацикливаясь на форме. Один из вариантов выхода из-под юрисдикции классического анализа — *обобщенные решения* (глава 6), где проблема дифференцируемости исчезает и беспокойство о разрешимости частично нейтрализуется.

В предположении непрерывной дифференцируемости плотности распределения зарядов $\rho(\mathbf{r})$ — решением *уравнения Пуассона* $\Delta u = \rho(\mathbf{r})$ служит

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\xi)}{\|\mathbf{r} - \xi\|} dV. \quad (3.3)$$

Но (3.3) вполне приличная формула и *без* предположения непрерывной дифференцируемости $\rho(\mathbf{r})$. Почему бы ее не считать решением исходной задачи, скажем, в случае непрерывного распределения $\rho(\mathbf{r})$? Для этого надо осознать, насколько $\Delta u = \rho(\mathbf{r})$ соответствует тому, чего мы хотим. Может быть, дело только в локальном

³⁾ Такие как принцип сжимающих отображений и топологические теоремы о неподвижных точках [3, т. 5].

мышлении⁴⁾, а глобальная зависимость (3.3) даже предпочтительнее локального описания. Тогда, если от ЧП-языка отказываться неудобно, надо навести определенный порядок⁵⁾, не пуская толкование на самотек. Потому что в рассуждениях, где нечто понимается то так то эдак, можно доказать что угодно.

Другая сторона медали — опора на физику явления. Если решается всего-то дюжина задач — волны, теплопроводность, гидродинамика и еще какая-то «мелочевка» — то существование решений вытекает вроде бы из презумпции разрешимости. Уравнение обязано решаться, если описывает реальный процесс. Но уравнение — это модель, в той или иной степени неточная. «Приблизительность» можно игнорировать в случае устойчивости, и то с оговорками, но если округления и допущения попадают в область бифуркаций, то физика уже не помогает⁶⁾. А уж когда тепло распространяется с бесконечной скоростью (п. 2.2), то уж какая тут презумпция.

3.2. Теорема Коши—Ковалевской

Попытка строить ЧП-теорию по образу и подобию обыкновенных диф-уравнений изначально сталкивается с принципиальными затруднениями. Не говоря об опасениях насчет разрешимости задач целиком, очевидны препятствия и для существования локальных решений, каковые присутствуют в том же уравнении (3.1) в случае непотенциального поля $\mathbf{a}(\mathbf{x})$. Поэтому абстрактная ЧП-теория выращивает картошку на минном поле, что требует определенной деликатности.

На первый план традиционно выдвигается аналог «утверждения Пеано—Пикара» для системы уравнений

$$\partial_t^n u_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.4)$$

⁴⁾ Определяющим выбор дифференциального языка.

⁵⁾ Как это делается, например, при переходе к обобщенным решениям.

⁶⁾ Хороший пример — *уравнения Навье—Стокса*, за решение которых, не вполне адекватно выражаясь, институт Клея (Кембридж, Массачусетс, США) назначил премию в миллион долларов.

где многоточие под знаком f_i подразумевает частные производные u_i по t , x_1, \dots, x_n , — но не более высокого порядка чем n_i , и не содержит $\partial_t^{n_i} u_i$, т. е. каждое уравнение разрешимо относительно старшей производной, и «старшая» — всегда по одной и той же переменной, здесь по t . Для (3.4) рассматривается задача Коши, т. е. решение, принимающее при $t = 0$ начальные значения

$$\partial_t^k u_i(\mathbf{x}, 0) = v_{ik}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n_i. \quad (3.5)$$

3.2.1. Теорема Ковалевской⁷⁾. Задача Коши (3.4), (3.5) в оговоренных предположениях и при дополнительном требовании аналитичности всех функций f_i, v_{ik} — имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $\{\mathbf{x}_0, 0\}$.

Вопрос о локальной разрешимости ЧП-уравнений — закономерен, и неизбежно возникает в самом начале развития теории. Другое дело, что даже положительный ответ на него не приносит полного облегчения, и «лекарство» приходится искать в другом месте, смиряясь с неоперабельными ситуациями. Кроме того, возможная неприятность могла бы лежать непосредственно в локальной неразрешимости. Да она, собственно, и лежит, потому что благополучный вывод 3.2.1 не так силен как у Пеано. К тому же, дело не в выводах, а в истоках. Для существования локальных решений действительно нужны особые условия.

Контрпример Ковалевской. Предположение об аналитичности в 3.2.1 нельзя сказать что необходимо, но оно дает выход из положения. Требование теоремы 3.2.1 о разрешимости относительно старшей производной также нeliшне. ◀ Если речь идет об аналитических решениях уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$, то $u(x, t)$ обязано представляться рядом

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} u_{ij} \frac{x^i}{i!} \frac{t^j}{j!},$$

подстановка которого в $u_t = u_{xx}$ дает соотношения между коэффициентами u_{ij} , а фиксация начального условия уже точно определяет u_{ij} . В случае начального условия

$$u|_{t=0} = \frac{1}{1-x}$$

⁷⁾ Результат называют также теоремой Коши—Ковалевской, ибо Коши получил несколько менее общий результат раньше.

соответствующие манипуляции приводят к гипотетическому решению

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}, \quad (3.6)$$

но ряд (3.6) расходится в любой окрестности нуля при $t \neq 0$. Так что исходная задача Коши аналитического решения не имеет. ►

Разумеется, $u_t = u_{xx}$ можно считать разрешенным относительно старшей производной u_{xx} — дело ведь не в букве, — но тогда надо задавать $u|_{x=0}$ и $\partial_x u|_{x=0}$, а это совсем другая задача.

Если требование аналитичности снять, то ситуация с $u_t = u_{xx}$ нормализуется. *Теорема Хёрмандера* (п. 6.6) фактически гарантирует существование *обобщенного решения* у любого ЧП-уравнения

$$L(D)u = f(\mathbf{x})$$

при условии что оператор $L(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$ имеет постоянные коэффициенты, α — *мультииндекс*, $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$. Если говорить точнее, *теорема Хёрмандера* фактически гарантирует существование *фундаментального решения*, остальное «вытекает» — подробности в разделе 6.6. Дополнительно ситуацию с $u_t = u_{xx}$ нормализуют теоремы единственности для параболических уравнений (см. п. 9.2).

Интересно заметить, что ЧП-уравнения можно мыслить как обыкновенные дифуры в подходящих функциональных пространствах. Дело в том, что системы уравнений с частными производными за счет объявления производных новыми неизвестными функциями обычно могут быть представлены в виде

$$\partial_t v_j = f_j(t, \mathbf{x}, v_1, \dots, v_N), \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.7)$$

где f_j — дифференциальные операторы⁸⁾.

Систему (3.7) в подходящем функциональном пространстве можно рассматривать как

$$\dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}, t). \quad (3.8)$$

⁸⁾ «Функции», включающие дифференцирование своих аргументов.

Но задача Коши для (3.8) не попадает в сферу влияния теоремы Пеано. В бесконечномерных пространствах, оказывается, локальная разрешимость задач вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad (3.9)$$

с непрерывной правой частью $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ — не гарантирована⁹⁾.

3.3. Корректность постановки

Линейное уравнение в \mathbb{R}^n

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \quad (3.10)$$

разрешимо при любом \boldsymbol{y} в томм случае, когда однородное уравнение $A\boldsymbol{x} = 0$ имеет только тривиальное решение $\boldsymbol{x} = 0$. Более общий результат: совокупность \boldsymbol{y} , при которых (3.10) разрешимо, образует линейное подпространство \mathbb{R}^n , являющееся ортогональным дополнением к подпространству решений однородного транспонированного уравнения $A^T\boldsymbol{w} = 0$. В случае $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n \neq m$, картина несколько усложняется, но остается в наглядных геометрических рамках.

Если же A действует из одного бесконечномерного банахова пространства в другое, — вокруг уравнения (3.10) возникают принципиально новые явления. Пусть \mathbf{D}_A обозначает область определения оператора A , \mathbf{R}_A — область значений A , наконец, \mathbf{N}_A — ядро, нуль-пространство, т. е. множество решений $A\boldsymbol{x} = 0$.

Если $\mathbf{N}_A = 0$, т. е. $A\boldsymbol{x} = 0$ имеет лишь нулевое решение, уравнение (3.10) однозначно разрешимо на \mathbf{R}_A , что означает существование обратного оператора

$$A^{-1} : \mathbf{R}_A \rightarrow \mathbf{D}_A.$$

Но в отличие от конечномерного случая оператор A^{-1} может быть неограничен по норме. Это и есть возможная, хотя и не обязательная

⁹⁾ Тему в целях экономии времени лучше не воротить. Но важно заметить, что бесконечномерном пространстве точка — это функция, заданная на неограниченной в \mathbb{R}^n кривой. Поэтому локальная разрешимость (3.9) локальна по t , но глобальная по остальным переменным.

«бесконечномерная неприятность». В случае ограниченного по норме оператора A^{-1} говорят, что задача (3.10) *корректно разрешима*, при неограниченном A^{-1} задачу (3.10) называют *некорректной*.

На более привычном языке некорректность заключается в отсутствии непрерывной зависимости решения $x(\varepsilon)$,

$$Ax(\varepsilon) = y + \varepsilon,$$

от параметра ε . Проще говоря, малые возмущения условий могут скачкообразно менять решение.

Первый пример некорректной задачи на поле урматов указан Адамаром:

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (3.11)$$

Нулевое решение (3.11) единственно, но последовательность решений

$$u_k(x, t) = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2k^2} \sin kx$$

краевой параметрической задачи

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{k} \sin kx,$$

несмотря на $(1/k) \sin kx \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, к нулю не сходится ни в каком разумном смысле. Таким образом, малейшее возмущение начального условия $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ ощутимо выбивает решение (3.11) из нуля.

3.4. Замена переменных и классификация

Рассмотрим линейное ЧП-уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \dots = 0, \quad (3.12)$$

где многоточие подразумевает члены, содержащие саму функцию u и ее производные первого порядка.

Невырожденная замена переменных $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ позволяет перевести матрицу коэффициентов a_{ij} в диагональную форму, на основе которой далее строится классификация.

Сначала о самом механизме замены. В силу $\det[\partial y_p / \partial x_q] \neq 0$ отображение $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ обратимо в окрестности рассматриваемой точки, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$. Считая

$$u(\mathbf{x}(\mathbf{y})) = v(\mathbf{y}), \quad v(\mathbf{y}(\mathbf{x})) = u(\mathbf{x}),$$

имеем

$$u_{x_i} = \sum_s \frac{\partial v}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_i}, \quad (3.13)$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{p,q} v_{y_p y_q} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} + \sum_s \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \partial x_j} v_{y_s}. \quad (3.14)$$

Подстановка (3.13), (3.14) в (3.12) приводит к новому ЧП-уравнению, у которого при $v_{y_p y_q}$ стоят коэффициенты

$$\tilde{a}_{pq}(\mathbf{y}) = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j}, \quad (3.15)$$

что соответствует преобразованию квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \zeta_i \eta_j \quad (3.16)$$

с помощью *матрицы Якоби* $\mathbf{y}'(\mathbf{x})$. При этом известно [3, т. 3], что квадратичная форма (3.16) всегда может быть приведена невырожденным преобразованием к «сумме» квадратов

$$\sum_{i=1}^m (\pm \xi^2),$$

где $m \leq n$, а число положительных и отрицательных членов определяется исходной квадратичной формой, а не преобразованием — пресловутый *закон инерции*.

Соответственно, уравнение (3.12) может быть приведено к виду (без смешанных производных)

$$\sum_{i=1}^m \left(\pm \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} \right) + \dots = 0, \quad (3.17)$$

где многоточие обозначает слагаемые, не содержащие производных выше первого порядка. Если $m = n$ и все коэффициенты при вторых производных в (3.17) одного знака, то исходное уравнение (3.12) — считается уравнением *эллиптического типа*; при разных знаках¹⁰⁾ — *гиперболического*. *Параболические уравнения* характеризуются неравенством $m < n$.

При большей разрешающей способности определений понятия расщепляются: параболические в широком смысле, в узком смысле и т. п. Детали на поприще общего образования малоинтересны. Достаточно ассоциировать систематизацию с типологией поверхностей второго порядка, где за терминами стоят наглядные образы: эллипсоид, гиперболоид, параболоид.

К эллиптическому типу относятся уравнения *Лапласа*, *Пуасона*, *Гельмгольца*. Волновое уравнение — гиперболического типа, уравнение теплопроводности — параболического.

- Сказанного достаточно для устремлений шаблонного толка. Но для «понимания места» необходимо иметь представление об окружении. Например, о том факте¹¹⁾, что *эллиптичность*, *гипер-* и *параболичность* не обязательно связаны с операторами (уравнениями) *второго порядка*. Скажем, оператор

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha, \quad D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (3.18)$$

α — *мультииндекс*, считается *эллиптическим*, если форма

$$Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\mathbf{x}) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

¹⁰⁾ Как правило, все знаки одинаковы, кроме одного.

¹¹⁾ Причем именно о факте, а не о подробностях.

положительно (либо отрицательно) определена, т. е. не обращается в нуль при $\xi \neq 0$. В случае $k = 2$ поверхности уровня положительно/отрицательно определенной квадратичной формы $Q(\mathbf{x}, \xi)$ — эллипсоиды, что и объясняет происхождение термина. Но дело, конечно, не в самих эллипсоидах. Определенность формы $Q(\mathbf{x}, \xi)$ приводит к отсутствию *характеристических поверхностей* у эллиптических уравнений, что служит главным источником сходства и делает осмыслившими практически любые *краевые задачи* эллиптического типа (см. следующий раздел). В результате свойства определяют не детали, а сам факт эллиптичности.

3.4.1. *Если коэффициенты эллиптического оператора L и функция f — аналитичны, то и все решения уравнения $Lu = f$ аналитичны¹²⁾.*

Отсюда кстати следует, что всякое решение однородного уравнения $Lu = 0$, в предположениях п. 3.4.1, равное нулю на открытом множестве, *тождественно равно нулю всюду*. Это влечет за собой с необходимостью единственность решения $Lu = f$.

3.4.2. *Если коэффициенты эллиптического оператора L аналитичны и f суммируема с квадратом, то любое обобщенное решение уравнения $Lu = f$ является обычной функцией из L_2 , т. е. слабым решением.*

- Гиперболическими в общем случае называют уравнения, для которых корректна задача Коши. Менее размыто определение *гиперболичности оператора* (3.18) в направлении оси времени $x_1 = t$, требующее вещественной разрешимости характеристического уравнения

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\mathbf{x}) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} = 0 \quad (3.19)$$

относительно ξ_1 при условии $\{\xi_2, \dots, \xi_n\} \neq 0$.

- Исчерпывающую характеристику *параболическим* уравнениям дать сложнее. Таковыми иногда называют уравнения, для которых существует корректно поставленная смешанная задача (с начальными и краевыми условиями), а возмущения распространяются

¹²⁾ А уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее только аналитические решения, непременно является эллиптическим.

с бесконечной скоростью. Операторы вида (3.18) называют *параболическими*, если уравнение, похожее на (3.19), имеет решения с отрицательной действительной частью — подробности в [15]. Все это, конечно, малопривлекательно для прагматического образа мыслей, но нет-нет да и срабатывает. Вот пример параболического уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u = 0, \quad (3.20)$$

описывающего поперечные колебания тонкой пластины. Глядя на (3.20), так сразу не скажешь, что здесь кроется что-то родственное уравнению теплопроводности. Колебания колебаниями, а природа диффузионная.

Таким образом, естественная классификация задач на основе физической природы в данном случае отступает на второй план. Параболический характер задачи проистекает здесь из абстрактных свойств формализованной постановки.

Из перечисленного видно, что классификация уравнений привязана к точке. Поэтому уравнение, рассматриваемое в той или иной области, может менять свое лицо. Стандартный пример — *уравнение Трикоми*

$$y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

имеющее при $y > 0$ *эллиптический тип*, при $y < 0$ — *гиперболический*, а при $y = 0$ — *параболический*.

3.5. Характеристические поверхности

Задавшись целью упростить уравнение (3.12), обнулив один из коэффициентов \tilde{a}_{pp} , определяемый формулой (3.15), замену переменных $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ необходимо подобрать так, чтобы

$$\tilde{a}_{pp}(\mathbf{y}) = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_p}{\partial x_j} = 0. \quad (3.21)$$

Другими словами, компонента $y_p(x_1, \dots, x_n)$ должна удовлетворять ЧП-уравнению (3.21). Поверхности постоянного уровня функции

$y_p(x_1, \dots, x_n)$, в дополнительном предположении $\operatorname{grad} y_p(\mathbf{x}) \neq 0$, называются *характеристическими поверхностями (характеристиками)* уравнения (3.12).

Понятно, о замене переменных говорить необязательно, тем более что от выбора p «ничего» не зависит. Уравнение (3.21) переписывают в форме

$$\sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0, \quad (3.22)$$

и считают $\omega(\mathbf{x}) = 0$ (равносильно $\omega(\mathbf{x}) = C$) характеристической поверхностью уравнения (3.12). Последняя, как видно, не зависит от содержания многоточия в (3.12), и полностью определяется коэффициентами a_{ij} при старших производных, причем, как легко убедиться, инвариантна к невырожденным заменам координат¹³⁾. О геометрической интерпретации будет сказано чуть позже. Пока остановимся на примерах.

- Уравнение теплопроводности $u_t - a^2 \Delta u = 0$ имеет характеристические поверхности $t = C$, описываемые уравнением

$$0 \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - a^2 \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

- Для волнового уравнения $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ — (3.22) приобретает вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - c^2 \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (3.23)$$

Решением (3.23) служат *характеристические поверхности*¹⁴⁾

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0,$$

¹³⁾ То есть невырожденные замены переменных переводят характеристические поверхности в характеристические.

¹⁴⁾ Характеристическими в данном случае являются также гиперплоскости $ct + \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = C$, $\|\mathbf{a}\| = 1$.

с вершинами в точках (\mathbf{x}_0, t_0) , выделяющие в теории относительности конус «абсолютно будущих», по отношению к (\mathbf{x}_0, t_0) , событий

$$K_+(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : c(t - t_0) > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\}$$

и конус «абсолютно прошедших» событий¹⁵⁾

$$K_-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : c(t_0 - t) > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\}.$$

- Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ характеристик не имеет, поскольку

$$\sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

при условии $\operatorname{grad} \omega(\mathbf{x}) \neq 0$ — не решается.

Характеристические уравнения служат в основном не для того, чтобы их решать. Это, скорее, категория мышления, позволяющая кое-что видеть в ЧП-проблематике. Например, задача Коши для (3.12) в совокупности с условиями

$$u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = u_1(\mathbf{x}), \quad (3.24)$$

требует осторожности, фактически не допуская, чтобы поверхность Γ была характеристической. Точнее говоря, на характеристической поверхности Γ данные (3.24) нельзя задавать произвольно, ибо в этом случае (3.12) оказывается соотношением между данными (3.24).

◀ Действительно, условия (3.24) определяют на Γ саму функцию $u(\mathbf{x})$ и все ее первые производные¹⁶⁾. Если Γ — характеристическая поверхность $y_p(\mathbf{x}) = 0$, пусть будет $p = 1$, то в переменных $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ вторые производные $\partial^2 u / (\partial y_i \partial y_j)$ на Γ , за исключением $\partial^2 u / \partial y_i^2$, вычисляются дифференцированием первых производных по касательным к Γ направлениям, т. е. по y_2, \dots, y_n . А коэффициент при

¹⁵⁾ В том смысле, что в любой системе отсчета события из K_+ происходят после, а из K_- — до события (\mathbf{x}_0, t_0) .

¹⁶⁾ Задание $u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x})$ определяет все производные по касательным направлениям к Γ , а $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = u_1(\mathbf{x})$ дает градиент u на Γ , чего в совокупности достаточно для фиксации всех первых производных. Сказанное заодно поясняет, почему в (3.24) вместо нормали можно брать любое трансверсальное к Γ направление.

$\partial^2 u / \partial y_1^2$ равен нулю в силу характеристичности Γ . Поэтому (3.12) оказывается соотношением между данными (3.24). ►

Например, для задачи Коши¹⁷⁾

$$u_t - a^2 \Delta u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x),$$

обязано выполняться соотношение $\partial u_1 / \partial t = \Delta u_0$ при $t = 0$.

Наиболее выразительно подобный эффект проявляется в линейных уравнениях первого порядка, где на характеристических поверхностях функция $u(\mathbf{x})$ постоянна, и для задания граничных условий совсем нет свободы маневра — см. п. 4.1.

Инструмент типа (3.22) работает и в более общих ситуациях, скажем¹⁸⁾,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha u = 0. \quad (3.25)$$

Те же манипуляции с невырожденной заменой переменных $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ приводят в конечном итоге к характеристическим поверхностям $\omega(\mathbf{x}) = C$, где $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\mathbf{x}) (\partial_{x_1} \omega)^{\alpha_1} \dots (\partial_{x_n} \omega)^{\alpha_n} = 0.$$

3.6. Краевые задачи

На ЧП-проблематику полезно взглянуть с другого конца. Не от уравнения к решению, а наоборот. Дифференцируя, например,

$$u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2), \quad (3.26)$$

имеем

$$u_x = 2x\varphi'(x^2 + y^2), \quad u_y = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

откуда

$$x \cdot u_y - y \cdot u_x = 0. \quad (3.27)$$

¹⁷⁾ Здесь $t = 0$ — характеристическая поверхность.

¹⁸⁾ По поводу обозначений см. п. 1.1.

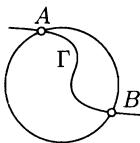


Рис. 3.1

Таким образом, (3.26) при более-менее любой функции φ является решением сконструированного уравнения (3.27). Как из семейства (3.26) выделить конкретное решение? Понятно, надо задать φ . Но φ в постановку задачи не входит, если смотреть со старовой площадки (3.27). Поэтому танцевать надо от «решения» u , задав значения $u(x, y)$ на какой-нибудь кривой Γ , которая должна быть *трансверсальна* (не касательна)¹⁹⁾ окружностям

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Годится, в частности, ось $x = 0$ в качестве Γ . Кривая Γ не должна также пересекать каждую окружность $x^2 + y^2 = r^2$ более одного раза. Например, в ситуации, изображенной на рис. 3.1, функцию $u|_{\Gamma}$ нельзя задать так, чтобы она в точках A и B принимала разные значения, ибо $u(x, y)$ постоянна на окружностях.

Решением задачи Коши

$$x \cdot u_y - y \cdot u_x = 0, \quad u|_{x=0} = \sin y^2,$$

очевидно, является $u(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Такое же решение получается в случае краевого условия $u|_{y=x^2} = \sin(x^2 + x^4)$.

На формальном уровне краевые задачи распадаются на несколько естественных категорий.

- Краевые задачи для уравнений эллиптического типа, *Лапласа* $\Delta u = 0$, *Пуассона* $\Delta u = f$, — решаемых с одним из следующих граничных условий:

$$u|_{\Gamma} = u_0 \quad \text{— условие I рода, задача Дирихле,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = u_1 \quad \text{— условие II рода, задача Неймана,}$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \sigma u \right) \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{— третья краевая задача.}$$

¹⁹⁾ Собственно, касание само по себе не страшно, если точка касания изолированна. Важно, чтобы Γ не сливалась с какой-либо окружностью на континуальном участке.

• Задача Коши для гиперболического и параболического уравнений. Решения рассматриваются на всем пространстве. В случае волнового уравнения начальные условия задаются в форме

$$u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = u_1(\mathbf{x}).$$

Для уравнения теплопроводности начальное условие ограничивается требованием $u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x})$.

• В смешанной задаче для гиперболического и параболического уравнений задаются как начальные, так и граничные условия. Речь идет о решениях $u(\mathbf{x}, t)$ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3.7. Принцип суперпозиции

Говорить о важности *принципа суперпозиции* сложно, потому что это очень простая вещь. Если L — линейный оператор, то

$$Lu_1 = f_1, Lu_2 = f_2 \Rightarrow L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f_1 + \beta f_2. \quad (3.28)$$

Это и есть *принцип суперпозиции*²⁰⁾. Заострить внимание, казалось бы, не на чем. Да и трудностей в понимании не видно. Трудности случаются в использовании — широта возможностей не всегда заметна, не говоря о бесконечномерности функциональных пространств и привходящих обстоятельствах типа краевых условий.

Из принципа суперпозиции следуют, в том числе, банальные истины. Если $Lx = 0$, $Ly = 0$, то и $L(\alpha x + \beta y) = 0$. Иными словами, сумма решений уравнения $Lz = 0$ — тоже решение. В случае линейного неоднородного уравнения

$$Lu = f, \quad (3.29)$$

в силу (3.28) возможно решать уравнения $Lu = f(t)$ на основе разложения правой части, например, в ряд Фурье: если $u_k(t)$ —

²⁰⁾ На словесном уровне это звучит более интригующе: система удовлетворяет *принципу суперпозиции*, если результатирующий эффект от независимых воздействий представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности.

решение $Lu = \sin kt$ и

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kt,$$

то $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(t)$ — решение $Lu = f(t)$. Аналогичный прием работает и в «предельном исполнении»²¹⁾, когда $f(t)$ представляется, скажем, интегралом Фурье либо интегральной суммой единичных импульсов:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(t-s) dS. \quad (3.30)$$

В случае (3.30) принцип суперпозиции ведет к решению

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s) f(s) dS, \quad (3.31)$$

где ядро $G(t, s)$, называемое функцией Грина, — обозначает решение уравнения $Lu = \delta(t-s)$, но это требует некоторых уточнений, см. главы 6 и 9.

3.8. Переход к интегральным уравнениям

Взгляд на дифференциальные выражения

$$\sum_k a_k(x) \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad k = k_1 + \dots + k_n,$$

как на линейные операторы L , действующие в том или ином функциональном пространстве, является выдающимся трюком, который подключает к ЧП-уравнениям всю мощь функционального анализа. На первый взгляд, конечно, маневр выглядит бесполезной затеей, сулящей разве что головную боль. Насчет последней опасения оправданы, но выгоды превосходят издержки. Помимо

²¹⁾ Но при этом необходима расстановка точек над i , поскольку линейный оператор в функциональном пространстве не всегда непрерывен [3, т. 5].

аппаратного выигрыша преимущества заключены в геометрическом взгляде на проблематику, стимулирующем образную ориентацию. Интерпретация функций как векторов хотя и бесконечномерного пространства — включает ассоциации с линейной алгеброй, подсказывая выводы и указывая причины.

Напомним конечномерный срез, служащий образцом для подражания в бесконечномерном случае. При переходе к новой системе координат с помощью *невырожденной* матрицы T — соотношение $u = Av$ после подстановки $u = Tu$, $v = Tv$ превращается в $Tu = ATv$, что в результате умножения слева на T^{-1} переходит в $u = T^{-1}ATv$, на основании чего можно утверждать, что в новой системе координат линейному оператору A соответствует матрица $A' = T^{-1}AT$.

В достаточно свободных предположениях T можно выбрать так, что преобразованная матрица $T^{-1}AT$ будет диагональной. Для реализации замысла решается уравнение $Ax = \lambda x$. Собственные значения λ_j попадают на диагональ, а собственные векторы будут вектор-столбцами матрицы T . После этого любую задачу, где фигурирует матрица A , целесообразно записывать в системе координат, ортами которой служат собственные векторы. Действие оператора A на векторы x будет сводиться тогда к умножению координат x на собственные значения λ_j .

Вот как это работает, например. Замена переменных $x = Ty$ приводит задачу Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

к виду

$$\dot{y} = T^{-1}ATy, \quad y(0) = T^{-1}x_0.$$

Если $T^{-1}AT = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то это развязывает исходную задачу. В новых координатах система $\dot{y} = T^{-1}ATy$ распадается на независимые друг от друга скалярные уравнения $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$, интегрирование которых по отдельности дает

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} y_k(0).$$

Подстановка $y = T^{-1}x$ приводит к решению в исходных переменных:

$$x(t) = T \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} T^{-1}x(0).$$

Нельзя сказать, что схема без изменений переносится в функциональные пространства. «Бесконечномерные неудобства» кратко напоминаются в разделе 11.3. Есть также и ЧП-специфика. Чисто дифференциальные операторы L всегда вырождены²²⁾. Поэтому

²²⁾ Ибо $u - v = \text{const} \Rightarrow (u - v)' \equiv 0$.

приходится выделять подходящие подпространства, на которых можно говорить об обратном операторе L^{-1} . Фактически обычно рассматривают операторы L на подмножествах функций, выделяемых теми или иными краевыми условиями²³⁾.

Иногда есть резон в обращении лишь части дифференциального оператора, — чаще всего в варианте²⁴⁾ $Lu = u$. И тогда вместо (3.31) получается интегральное уравнение

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)u(s) dS, \quad (3.32)$$

что переводит исходную задачу в другую плоскость. Встречаются также нелинейные задачи $Lu = f$, в которых f зависит от u . В этом случае вместо (3.31) получается интегральное *уравнение Гаммерштейна*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(u, s) dS. \quad (3.33)$$

3.9. Вид сверху

«За деревьями леса не видно» — это как раз про урматы. Чем пристальнее всматриваешься в конкретику, тем менее заметно единство решаемых задач. Разнообразие ошеломляет и не дает видеть за мозаикой постановок общий стержень.

Если же смотреть с высоты *функционального анализа*, то все линейные задачи с частными производными имеют вид

$$Lu = f, \quad (3.34)$$

где все, вообще говоря, векторное,

$$L = \{L_1, \dots, L_m\}, \quad u = \{u_1, \dots, u_k\},$$

²³⁾ Для выделения из семейства линейного оператора допустимы только «линейные краевые условия».

²⁴⁾ Получаем из $\tilde{L}u = 0$ прибавлением u к левой и правой части.

причем L_j — линейные операторы, хотя $L_j u = f_j$ — не обязательно ЧП-уравнения. Это могут быть *начальные* или *граничные* условия, типа $u|_{\Gamma} = f_i(\mathbf{x})$.

Среди уравнений $L_j u = f_j$ могут попадаться однородные $L_j u = 0$, которые выгодны принципом суперпозиции в форме²⁵⁾

$$Lu_1 = 0, \quad Lu_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L(u_1 + u_2) = 0, \quad (3.35)$$

тогда как в неоднородных уравнениях принцип суперпозиции действует в другом облике:

$$Lu_1 = f_1, \quad Lu_2 = f_2 \quad \Rightarrow \quad L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2. \quad (3.36)$$

Разумеется, (3.35) — частный случай (3.36).

Таким образом, вопрос о разрешимости (3.34) с высоты птичьего полета совсем прост. Если L определен на функциональном пространстве E , и \mathbf{R}_L — его *область значений*, то исходная задача имеет решение в томм случае, когда $f \in \mathbf{R}_L$.

Соответственно, проблема сводится к удобному описанию \mathbf{R}_L , с учетом пожеланий насчет *корректности*, т. е. насчет непрерывности обратного оператора $L^{-1} : \mathbf{R}_L \rightarrow E$. Но это в принципе. Так сказать, в условиях философской безответственности. Конкретно решить проблему бывает очень трудно.

Во-первых, надо выбрать пространство E , что с точки зрения ЧП-операторов L_j — не самое трудное, хотя L_j имеют люфт определения в отношении допустимых коэффициентов. Во-вторых, необходимо договориться, какие поверхности Γ допустимы²⁶⁾, и это уже сложнее, так как потребовав, чтобы сужение $u(\mathbf{x})$ на «слишком угловатую» поверхность Γ давало гладкую функцию, можно остаться у разбитого корыта. В третьих, и это самое сложное, следует учесть взаимодействие операторов L_j , когда их много.

²⁵⁾ Функции, удовлетворяющие однородному граничному условию, образуют линейное пространство, потому что если две функции удовлетворяют однородному условию, то их линейная комбинация удовлетворяет тому же условию.

²⁶⁾ Если в задаче присутствуют граничные условия. Обычно Γ считаются *поверхностями Ляпунова*, определение которых (см. любой учебник) весьма громоздко, что свидетельствует как раз об изъянах в природе задачи.

Чтобы взглянуть неприятностям в лицо, достаточно взять конкретный пример. Пусть (3.34) означает (3.1), т.е.

$$\operatorname{grad} u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}).$$

Здесь $L_j = \partial/\partial x_j$, и компоненты (3.34) суть $L_j u = a_j(\mathbf{x})$. Допустим, все L_j действуют из E в E , где E — пространство непрерывно дифференцируемых (желательно дважды) функций²⁷⁾. Как выяснится через несколько строчек, в записи $L_j : E \rightarrow E$ второе E надо считать j -м экземпляром E , писать

$$L_j : E \rightarrow E_j,$$

и оператор $L = \{L_1, \dots, L_m\}$ полагать действующим из E в

$$\tilde{E} = \{E_1 \times \dots \times E_m\}.$$

Областью значений \mathbf{R}_L в данном случае, как известно, являются вектор-функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}. \quad (3.37)$$

Легко видеть, что \mathbf{R}_L есть линейное подпространство \tilde{E} , но нельзя сказать, какая часть E_j вырезается, \mathbf{R}_L «вырезает» каждое E_j целиком (рис. 3.2).

Условие (3.37), выделяющее $\mathbf{R}_L \subset \tilde{E}$, выясняется достаточно просто. Исходное уравнение $\nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ непосредственно решается:

$$u(\mathbf{x}) = \int_0^x \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x},$$

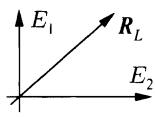


Рис. 3.2

но криволинейный интеграл не должен зависеть от пути интегрирования, что и ведет к необходимости (3.37). Для более сложных задач проблема описания \mathbf{R}_L может быть муторной и даже безнадежной. Поэтому идеологическая прозрачность уравнений вида (3.34) — еще не гарантия возможности выразить условия на «рабоче-крестьянском» языке.

3.10. О нелокальной продолжимости

Идея о том, что касательные плоскости, определяемые ЧП-уравнениями, не укладываются на общие поверхности, — часто мыслится как нестыкуемость локальных решений. В принципе, дело обстоит именно так, хотя дисгармония иногда проявляется уже в локальном

²⁷⁾ Мы избегаем специфически функциональных дебрей, полагая «из E в E » и $E = C^2$ для простоты.

масштабе²⁸⁾. Но если в каждой точке локально все хорошо, то в целом необязательно все нормально, — в отличие от одномерного случая, о котором стоит упомянуть в качестве отправной точки.

В обыкновенных дифурах тема *продолжимости решений* $\mathbf{x}(t)$, упирающаяся в оценки роста правой части $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на бесконечности, — не особенно популярна.

3.10.1. Теорема [3, т. 2]. Пусть при любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$ выполняется неравенство $\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rangle < L(\mathbf{x}^2)$, причем

$$\int_0^\infty L^{-1}(\zeta) d\zeta = \infty.$$

Тогда решение $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши (3.9) с непрерывной функцией $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ при любом $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ определено при всех $t \geq 0$.

Формулировки такого типа маскируют феномен *продолжимости траекторий* независимо ни от каких условий. Для продолжимости решения $\mathbf{x}(t)$ нужны предположения, для продолжимости траектории, как следа движения изображающей точки, — предположения не требуются²⁹⁾. Пока траектория (изображающая точка) находится в допустимой области³⁰⁾, решение $\mathbf{x}(t)$ может быть продолжено. Единственное препятствие для продолжения — *ход $\mathbf{x}(t)$ за конечное время в бесконечность либо выход на границу допустимой области*.

Стандартный пример: решения $x(t) = \operatorname{tg}(t + c)$ уравнения $\dot{x} = 1 + x^2$. С этой аномалией (хотя как смотреть) перекликается «двумерная ситуация»

$$\begin{cases} \dot{r} = 1 + r^2, \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases}$$

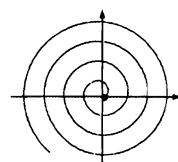


Рис. 3.3

²⁸⁾ Уравнение (3.1) в случае $\partial a_i / \partial x_j \neq \partial a_j / \partial x_i$, не решается в том числе локально.

²⁹⁾ Не считая автоматически подразумеваемого: правая часть дифура непрерывна, через каждую точку проходит единственная траектория.

³⁰⁾ Где в каждой точке обеспечены условия существования локальных решений. В \mathbb{R}^n по теореме Пеано достаточно непрерывности $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$.

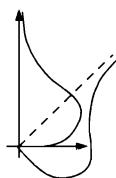


Рис. 3.4

в которой из-за быстрого ухода траектории в бесконечность угол φ успевает повернуться лишь в пределах промежутка длиной π , и вместо спирали (рис. 3.3), соответствующей движению вида

$$\begin{cases} \dot{r} = 1, \\ \dot{\varphi} = 1, \end{cases}$$

получаются траектории типа изображенных на рис. 3.4.

В случае $\dot{x} = x^2$ общее решение $x(t) = (c - t)^{-1}$ уходит в бесконечность за конечное время, если в начальном положении $x(t_0) > 0$, и бесконечно долго стремится к нулю при условии $x(t_0) < 0$, но оказывается непродолжимым влево при движении по t к минус бесконечности. А все решения $\dot{x} = -x^3$ продолжимы вправо, но не влево. Но все это касается решений, а не траекторий.

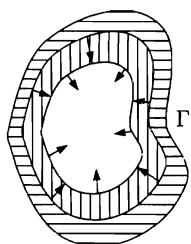


Рис. 3.5

Как только размерность увеличивается, возникают другие препятствия для продолжения решений. Представим, что решение $u(\mathbf{x})$ некой краевой задачи определено в ε -окрестности Γ_ε границы Γ . Далее граничные точки области Γ_ε окружаются ε_1 -окрестностями, и решение $u(\mathbf{x})$ снова локально продолжается внутрь Ω (рис. 3.5). На пути такого процесса препятствием может оказаться переход к пределу. Когда «внутренний берег» стягивается

в точку, функция $u(\mathbf{x})$ и ее производные «на берегу» должны стремиться к константам, чтобы «сшивание» произошло гладко. Кстати, именно это во многих практически интересных задачах является камнем преткновения. И тогда в Ω выкальывают какой-нибудь «нуль» $\in \Omega$, и неразрешимая в Ω задача становится разрешимой в $\Omega \setminus 0$.

Продолжать функции (решения) можно не только с помощью процедуры ε -раздутия, но и вдоль путей — рецепт популярен в ТФКП. Методика подсказывает другую возможную неприятность.



Если путь возвращается в исходную точку, значение продолжения может не совпадать с первоначальным. Тогда действуют либо хирургически, посредством *разрезов*, либо действуют *римановы поверхности* — см. [3, т. 9].

Глава 4

Уравнения первого порядка

*Роль высокой науки несомненна,
но путь к решению обнаруживается
«на пальцах».*

Уравнение $u_t = u_{xx}$ с помощью $v = u_x$ приводится к системе

$$\begin{cases} u_t = v, \\ v_x = u_t. \end{cases}$$

Аналогичным образом любое ЧП-уравнение сводится к системе первого порядка. Как говорится, *все во всем*. Поэтому при желании максимально сузить поле зрения целесообразно для начала браться за *одно* уравнение.

4.1. Линейные уравнения и характеристики

*Однородное уравнение*¹⁾

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

обычно рассматривают в паре с *уравнением характеристик*²⁾

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}),$

(4.2)

¹⁾ (4.1) можно записать в виде $X(u) = 0$ с помощью инфинитезимального оператора $X = \sum_i a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$ — см. главу 5.

²⁾ Траектории (4.2) называют *характеристиками* уравнения (4.1).

которое часто записывают в форме

$$\frac{dx_1}{a_1(\mathbf{x})} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(\mathbf{x})}, \quad (4.3)$$

имея в виду перезапись всех $dx_i/d\tau = a_i$ в виде $dx_i/a_i = d\tau$.

Важно обратить внимание, что (4.1) есть $\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}) \rangle = 0$, а поскольку векторное поле и градиент — явления бескоординатные, то (4.1) при замене переменных сохраняет форму.

Производная по времени функции $u(\mathbf{x})$ вдоль траекторий (4.2), т. е. вдоль *характеристик*, равна³⁾

$$\dot{u} = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i(\mathbf{x}) = \langle \nabla u, \mathbf{a}(\mathbf{x}) \rangle = L_{\mathbf{a}} u,$$

откуда ясно $\dot{u}(\mathbf{x}) = 0$, если $u(\mathbf{x})$ — решение (4.1). Таким образом, *характеристики* целиком располагаются на поверхностях постоянного уровня $u(\mathbf{x}) = C$. В этом случае говорят, что $u(\mathbf{x})$ является *первым интегралом*⁴⁾ системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$. Можно сказать и по-другому. Любое *нетривиальное решение* $u(\mathbf{x}) \not\equiv \text{const}$ линейного уравнения с частными производными (4.1) является первым интегралом системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$.

Феномен очень простой, но его необходимо, особенно в начале пути, хорошо уложить в подсознании⁵⁾. Функцию $u(\mathbf{x})$ многих переменных можно определить двумя способами. Задав градиент

$$\nabla u = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (4.4)$$

т. е. все частные производные, — и тогда (4.4) легко интегрируется. Другой способ, до некоторой степени садистский, — это как раз

³⁾ Величину $L_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} u$ называют еще *производной Ли*, а также *производной* $u(\mathbf{x})$ по направлению *векторного поля* $\mathbf{a}(\mathbf{x})$.

⁴⁾ О соотношениях $u(\mathbf{x}) = C$ тоже говорят как о *первых интегралах*.

⁵⁾ Тогда как принято концентрироваться на вторичных фактах, каковые все равно не запомнишь, да и не нужно. Ибо каркас любой теории состоит из элементарных кирпичиков. Но они «почему-то» ускользают.

уравнение (4.1). Предъявляется не сам градиент, а условие, которому он удовлетворяет. Иносказательно выражаясь, квадрат требуется построить не по вершинам, а по четырем точкам на сторонах. Функцию $u(\mathbf{x})$ требуется найти, имея не ∇u , а всего лишь гиперплоскости, в которых лежит градиент.

Каждый первый интеграл позволяет понизить порядок уравнения характеристик на единицу. Скажем, если $u(\mathbf{x})$ — первый интеграл системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, то, выражая x_n из уравнения $u(\mathbf{x}) = C$, получим $x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, C)$. Далее остается решить систему

$$\dot{x}_i = a_i(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, C)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

что отражает суть идеи.



- Стандартная иллюстрация — уравнение движения точки массы m в потенциальном поле $U(\mathbf{x})$,

$$m\ddot{x} = -U'(x),$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ m\dot{y} = -U'(x), \end{cases} \quad (4.5)$$

служащей уравнением характеристик для

$$y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{U'(x)}{m} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Система (4.5) равносильна

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

что после интегрирования дает первый интеграл (энергии)

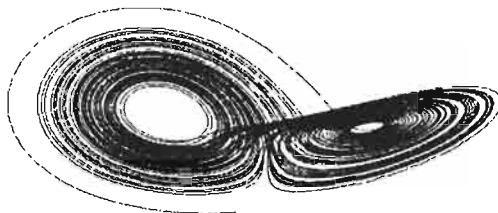
$$\frac{m\dot{y}^2}{2} + U(x) = E,$$

и далее

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))},$$

а это уже понижает порядок системы указанным выше образом.

- Для $u_t + cu_x = 0$ уравнение характеристик: $dt/1 = dx/c$. Первый интеграл: $x - ct = C$. Решение: $u = f(x - ct)$.



- Уравнением характеристик для

$$(10y - 10x)u_x + (28x - y - xz)u_y + \left(xy - \frac{8}{3}z\right)u_z = 0$$

служит система

$$\begin{cases} \dot{x} = 10y - 10x, \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z, \end{cases}$$

описывающая *странный аттрактор Лоренца* [3, т. 2].

- Для

$$(z - x)u_x + (z - y)u_y - 2zu_z = 0$$

интегрирование системы уравнений характеристик (4.3) дает два первых интеграла:

$$\frac{(x+z)^2}{z} = C_1 \text{ и } \frac{(y+z)^2}{z} = C_2. \text{ Общее решение имеет вид:}$$

$$u = \varphi \left[\frac{(x+z)^2}{z}, \frac{(y+z)^2}{z} \right],$$

в рамках которого задаче Коши с условием « $u = \left(\frac{x+1}{y+1}\right)^2$ при $z = 1$ » отвечала бы функция $u = \left(\frac{x+z}{y+z}\right)^2$. Прямую $y + z = 0$ пришлось бы вырезать.

Последний пример иллюстрирует общее правило. Если

$$\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x})$$

суть первые интегралы (4.1), или вообще какого-либо линейного ЧП-уравнения $Lu = 0$, то и

$$u = \Phi(\varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_m(\mathbf{x}))$$

является первым интегралом (4.1) для более-менее произвольной⁶⁾ функции Φ , ибо

$$L_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} u = \sum_{j=1}^m \Phi_{\varphi_j} \cdot L_{\mathbf{a}(\mathbf{x})} \varphi_j \equiv 0.$$

Решения уравнений вида (4.1) существуют в достаточно свободных предположениях, а в \mathbb{R}^n с вырезанными аномальными участками — всегда (п. 4.4). Формулируют обычно локальный вариант разрешимости.

4.1.1. В достаточно малой окрестности нехарактеристической точки $x \in \Gamma$ задача Коши — (4.1) плюс краевое условие $u|_{\Gamma} = u_0$ — имеет единственное решение⁷⁾.

4.2. Квазилинейные уравнения

Решение квазилинейного уравнения

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x}, u) \quad (4.6)$$

сводится к поиску первых интегралов системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\mathbf{x}, u), \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_n(\mathbf{x}, u), \\ \dot{u} = b(\mathbf{x}, u), \end{cases} \quad (4.7)$$

называемой, как и в случае (4.3), — *характеристической*.

◀ В случае неявного задания $\varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = 0$ решения (4.6), имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

⁶⁾ Требования к гладкости Φ зависят от того, что подразумевается под решением.

⁷⁾ Точка на Γ называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через эту точку, трансверсальна к Γ . В принципе, касание Γ и характеристики не критично, если не происходит слияния.

что преобразует (4.6) в однородное уравнение относительно φ ,

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b(\mathbf{x}, u) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0, \quad (4.8)$$

характеристическим для которого служит как раз (4.7). ►

Так что линейные однородные уравнения (п. 4.1) покрывают даже нелинейные уравнения вида (4.6) — линейные только по частным производным⁸⁾. Что касается характеристической системы (4.7), то ее по аналогии с (4.3) нередко записывают в форме

$$\boxed{\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}}, \quad (4.9)$$

допуская $\frac{du}{0}$, если $b = 0$, что надо понимать как $\dot{u} = 0$.

- Для уравнения Хопфа $u_t + u \cdot \mathbf{u}_x = 0$ характеристическая система

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

дает два первых интеграла $u = C_1$ и $x - ut = C_2$, определяющих неявно решение:

$$\varphi(u, x - ut) = 0 \quad (4.10)$$

с более-менее произвольной функцией φ . Если устраивает φ , разрешимая относительно u , уравнение (4.10) упрощается: $u = \psi(x - ut)$. «Устраивает» — значит, задача Коши решается в классе функций $u = \psi(x - ut)$.

- У неоднородного ЧП-уравнения

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y = xy$$

характеристическая система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{xy}$$

имеет два первых интеграла $x/y = C_1$ и $u - 1/2xy = C_2$. В результате общее решение можно записать в неявном виде: $\varphi(x/y, u - 1/2xy) = 0$. Или в упрощенном варианте:

$$u = \frac{1}{2}xy + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

⁸⁾ И уж тем более линейные неоднородные уравнения $\sum_i a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\mathbf{x})$.

И если в задаче Коши требуется $u = \frac{1}{2}x + \ln|x|$ при $y = 1$, то решением будет $u = \frac{1}{2}xy + \ln \frac{x}{y}$ — пусть для простоты $x, y > 0$.

4.3. Уравнения Пфаффа

Уравнениями Пфаффа называют соотношения вида

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (4.11)$$

с чем без уточнения неясно, что делать. Записать (4.11) в форме⁹⁾

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

и проинтегрировать можно почти всегда. Поэтому на (4.11) позволительно смотреть как на эквивалент обыкновенного дифура $dy/dx = f(x)$, ибо (4.11) в самом деле задает отношение dx к dy , выделяя тем самым допустимые кривые (траектории). Но подразумевается все же другое. Существует ли такая функция $u(x, y)$, что траектории (4.11) служат ее линиями постоянного уровня, $u(x, y) = C$. Иначе говоря, при условии $u(x, y) \equiv C$

$$du = u_x dx + u_y dy = 0,$$

и это с точностью до умножения на ненулевой множитель $\mu(x, y)$ должно совпадать с (4.11), т. е.

$$\nabla u = \{u_x, u_y\} = \mu(x, y)\{P(x, y), Q(x, y)\}.$$

Таким образом, задача состоит в поиске функции $u(x, y)$, градиент которой совпадает по направлению с векторным полем

$$F(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}, \quad (4.12)$$

а значит, линии постоянного уровня, $u(x, y) = C$, ортогональны полю (4.12), что, кстати, равносильно решению ЧП-уравнения¹⁰⁾

$$Q(x, y)u_x - P(x, y)u_y = 0. \quad (4.13)$$

⁹⁾ (!) Но это не уравнение характеристик.

¹⁰⁾ Ибо поля $\{P, Q\}$ и $\{Q, -P\}$ ортогональны друг другу.

Если поле (4.12) само градиентное, т. е. $du = P dx + Q dy$,

$$u_x = P(x, y), \quad u_y = Q(x, y), \quad (4.14)$$

то это сразу определяет функцию $u(x, y) = \int P dx + Q dy$.

В силу равенства перекрестных производных, $u_{xy} = u_{yx}$, из (4.14) следует:

$$P_y = Q_x, \quad (4.15)$$

что является достаточным условием существования потенциала $u(x, y)$.

Поскольку умножение (4.11) на ненулевой множитель $\mu(x, y)$ не меняет уравнения по сути, — потенциал u существует и в том случае, когда условию типа (4.15) удовлетворяет уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y) dx + \mu(x, y)Q(x, y) dy = 0.$$

Тогда $\mu(x, y)$ называют *интегрирующим множителем*, и u определяют, интегрируя $du = \mu P dx + \mu Q dy$, а μ предварительно находят, решая уравнение с частными производными¹¹⁾

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x,$$

что в общем случае не менее сложно, чем решение исходного уравнения, — но при удаче проливает дополнительный свет на ситуацию.

Проблема интегрирующего множителя обычно возникает в связи с изучением приращения некоторой величины (функции) q ,

$$\delta q = P dx + Q dy.$$

Если условие (4.15) не выполняется, то δq не дифференциал, и q не определяется значениями x и y . Если же существует интегрирующий множитель μ , то $d\mu q = \mu P dx + \mu Q dy$ становится полным дифференциалом, и ситуация меняется. Параметры $\{x, y, \mu q\}$ теперь однозначно определяют состояние системы. Классический пример — дифференциал энтропии $dS = \delta q/T$. Интегрирующий множитель $1/T$ (T — абсолютная температура) обращает приращение тепла δq в полный дифференциал функции S .

¹¹⁾ Аналог (4.15).

Рассмотренная задача с двумя переменными в некотором роде вырождена. Уравнение

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0 \quad (4.16)$$

дает пример идеологически более общей задачи, благодаря тому что перестает мешаться естественное интегрирование исходного уравнения, как в случае (4.11). Но практически без изменений остается интерпретация в связи с поиском функции $u(x, y, z)$, градиент которой совпадает по направлению с векторным полем

$$F = \{P, Q, R\}, \quad (4.17)$$

а поверхности постоянного уровня, $u(x, y, z) = C$, соответственно, ортогональны полю (4.17).

Таким образом, разница (4.16) с уравнением

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + R \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4.18)$$

заключается в том, что в случае (4.16) ищется функция $u(x, y, z)$, градиент которой совпадает по направлению с векторным полем (4.17), а в случае (4.18) — функция $u(x, y, z)$, градиент которой ортогонален полю (4.17).

4.3.1. Теорема Фробениуса. Условием существования у (4.16) интегрирующего множителя $\mu(x, y, z)$, такого что

$$\mu \{P, Q, R\}$$

есть градиент некоторой функции $u(x, y, z)$, — является равенство $\langle F, \text{rot } F \rangle \equiv 0$, где $F = \{P, Q, R\}$.

В случае $\langle F, \text{rot } F \rangle \equiv 0$ говорят об интегрируемости уравнения Пфаффа (4.16) одним соотношением¹²⁾. Например, интегрирование

$$yz \, dx + 2xz \, dy + 3xy \, dz = 0 \quad (4.19)$$

¹²⁾ Можно искать линии, ортогональные полю (4.17), и тогда говорят об интегрировании (4.16) двумя соотношениями.

после небольшой возни¹³⁾ приводит к $u(x, y, z) = xy^2z^3$. То есть на поверхностях $xy^2z^3 = \text{const}$ в касательных плоскостях дифференциалы dx, dy, dz связаны соотношением (4.19).

Двойственность. Факт соответствия уравнений (4.11) и (4.13) вызывает ожидание чего-то подобного и в пространствах более высокой размерности. И действительно, при $n > 2$ всякому *уравнению Пфаффа* равносильна некоторая система $n - 1$ однородных линейных уравнений. В \mathbb{R}^3 , например, функция $u(x, y, z)$, градиент которой совпадает по направлению с векторным полем $F = \{P, Q, R\}$, — т. е. u решает (4.16), — может быть найдена в результате решения системы уравнений

$$\langle G, \nabla u \rangle = 0, \quad \langle H, \nabla u \rangle = 0, \quad (4.20)$$

где поля G и H ортогональны полю F и линейно независимы¹⁴⁾. И наоборот, любая система $n - 1$ линейно независимых однородных линейных уравнений в \mathbb{R}^n , определяя в каждой точке *гиперплоскость*¹⁵⁾ и ортогональное к ней направление F , задают тем самым *уравнение Пфаффа* $\langle F(\mathbf{x}), d\mathbf{x} \rangle = 0$.

4.4. Первые интегралы

Первым интегралом уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$$

называют любую функцию $u(\mathbf{x})$, имеющую нулевую производную вдоль траекторий, т. е. $L_{\mathbf{a}(\mathbf{x})}u \equiv 0$. Вследствие этого поверхности $u(\mathbf{x}) = C$ постоянного уровня состоят из траекторий $\mathbf{x}(t)$.

¹³⁾ Если $\langle F, \text{rot } F \rangle \equiv 0$, но $\text{rot } F \neq 0$, как в данном случае, то интегрирующий множитель исщется из условия $\text{rot } \mu F = 0$, для чего приравниваются смешанные производные и решается получаемая система ЧП-уравнений относительно μ .

¹⁴⁾ Подбор G и H — епархия линейной алгебры [3, т. 2]. Сначала можно решить более простую задачу выбора произвольной линейно независимой тройки $\{L, M, F\}$, положив затем $G = L \times F$, $H = M \times F$.

¹⁵⁾ Гиперплоскостями в \mathbb{R}^n называют $(n - 1)$ -мерные плоскости. Но гиперплоскостями называют также плоскости, не проходящие через нуль. Гибкость терминологии, как говорится, не знает границ.

В условиях единственности решения задачи Коши¹⁶⁾, что далее подразумевается, различные поверхности $u(\mathbf{x}) = C$ не пересекаются и не соприкасаются, а любое индивидуальное решение $\mathbf{x}(t)$ либо не пересекается с $u(\mathbf{x}) = C$, либо целиком лежит «на».

Первыми интегралами $u(\mathbf{x}, t)$ неавтономных систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ называют функции $u(\mathbf{x}, t)$, являющиеся первыми интегралами расширенной автономной системы:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \\ t = 1. \end{cases}$$

Основанием утверждать в некоторых предположениях существование n функционально независимых первых интегралов

$$u_1(\mathbf{x}, t) = c_1, \dots, u_n(\mathbf{x}, t) = c_n$$

служит обычно следующее рассуждение. ◀ Если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ — решение системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, то разрешение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{c}, t)$ относительно вектора \mathbf{c} дает n первых интегралов $u_i(\mathbf{x}, t) = c_i$. ► Вопрос, таким образом, упирается в разрешимость $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{c}, t)$ относительно \mathbf{c} .

Что касается общей проблемы существования первых интегралов, т. е. нетривиальных решений ЧП-уравнения, то ответ зависит от контекста. Если от $u(\mathbf{x})$ требуется определенность при любом $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то это бывает не часто. Препятствия более-менее очевидны. Скажем, решением уравнения

$$\sum_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \tag{4.21}$$

является любая однородная функция $u(\mathbf{x})$ нулевой степени.

Справка: однородные функции характеризуются тождеством

$$u(\tau x_1, \dots, \tau x_n) = \tau^\lambda u(x_1, \dots, x_n), \quad \tau > 0, \tag{4.22}$$

λ — степень однородности. Производная (4.22) по τ в точке $\tau = 1$ дает формулу Эйлера

$$\sum_i \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = \lambda u(x_1, \dots, x_n), \tag{4.23}$$

переходящую в (4.21) при $\lambda = 0$.

¹⁶⁾ Например, в предположении липшицевости правой части дифура.

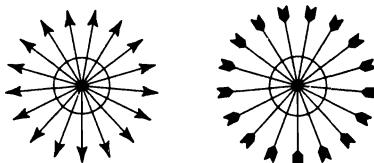


Рис. 4.1

Однородная функция $u(\mathbf{x})$ нулевой степени постоянна на лучах, каковые все сходятся в нуле, рис. 4.1, — и потому непрерывная в нуле функция $u(\mathbf{x})$ может быть только константой. Соответственно, (4.21) нетривиальных решений в \mathbb{R}^n не имеет¹⁷⁾, хотя решается в \mathbb{R}^n с выколотым началом координат. Лучи, как правило, объединяют в поверхности $x_i/x_j = C$, получая $n - 1$ независимых первых интегралов и общее решение вида

$$u = \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

которое можно доопределить на плоскости $x_n = 0$, переходя к сферическим координатам и произвольно (с учетом гладкости) определяя u на лучах независимо от $r > 0$. Неодолимым остается начало координат. Дело, конечно, не в «нуле», а в равновесии, создающем препятствия для разрешимости уравнения

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{x}), \nabla u \rangle = 0.$$

Причем фазовый портрет не обязан выглядеть как на рис. 4.1. Пилюля остается горькой и в других случаях (рис. 4.2, 4.3), когда

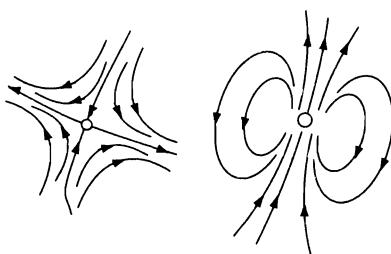


Рис. 4.2

¹⁷⁾ Строго говоря, надо было бы еще исключить возможность неоднородных решений, но отвлекаться обременительно — благо стиль лекций позволяет.

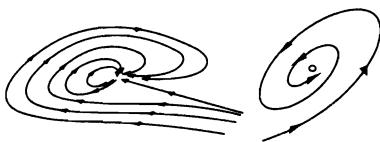


Рис. 4.3

к равновесию сходятся разные траектории (при любом направлении времени)¹⁸⁾. Проблема исчезает в вырожденной ситуации на плоскости, когда в некоторой окрестности равновесия траектории замкнуты (рис. 4.4).

В случае \mathbb{R}^2 , когда $u(\mathbf{x}) = C$ — это сами траектории уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, ситуация в целом достаточно наглядна¹⁹⁾. Если фазовый портрет может представлять собой совокупность линий уровня некоторой функции $u(\mathbf{x})$, то $u(\mathbf{x})$ и есть первый интеграл. Если не может, — то определенный *всюду* первый интеграл не существует, но это не исключает решений на подобластях.

Построение $u(\mathbf{x})$ удобно мыслить как задание значений u на траекториях. Для этого достаточно провести кривую Γ , трансверсально пересекающую все траектории в рассматриваемой области²⁰⁾; задать на Γ монотонную непрерывную функцию $\gamma(\tau)$, где τ параметризует Γ , и значение $C = u(\mathbf{x})$ полагать равным $\gamma(\tau)$ в точке пересечения траектории с Γ .

В ситуациях типа изображенной на рис. 4.4 метода работает без проблем. Но если траектории втекают или вытекают из точки \mathbf{x}^* , то первый интеграл в районе \mathbf{x}^* не существует по указанным выше причинам. По тем же причинам существованию мешают и периодические режимы (рис. 4.5) — неважно устойчивые или нет. Различные решения наматываются на предель-

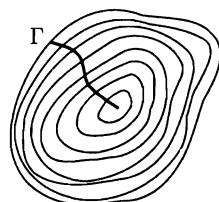


Рис. 4.4

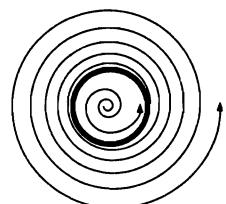


Рис. 4.5

¹⁸⁾ В этом случае непрерывная в равновесии функция $u(\mathbf{x})$ вынуждена быть константой, что уже отмечалось при обсуждении уравнения (4.21).

¹⁹⁾ В случае трех измерений поверхности $u(\mathbf{x}) = C$ разбивают \mathbb{R}^3 на слои.

²⁰⁾ Напоминаем, что пока имеется в виду \mathbb{R}^2 .

ное периодическое, и по соображениям непрерывности функция $u(\mathbf{x})$ обязана быть константой на всех этих траекториях, ибо она (функция) постоянна на самом цикле.

Вне равновесия первые интегралы *локально* существуют всегда, поскольку в малой окрестности любой точки \mathbf{x}_0 , в которой $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0) \neq 0$, траектории $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ почти параллельны, и их можно локальной заменой переменных — *диффеоморфизмом* — перевести в систему²¹⁾

$$\dot{y}_1 = 1, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dots, \quad \dot{y}_n = 0, \quad (4.24)$$

имеющую $n - 1$ интегралов движения: $y_2 = c_2, \dots, y_n = c_n$.

Расширять локальный фрагмент $u(\mathbf{x})$ на большую область определения можно до тех пор, пока в эту область не попадают предельные точки траекторий. Точки покоя, циклы, атTRACTоры — будут помехами. В отсутствие аномалий $u(\mathbf{x})$ можно распространить на все пространство. Более точно: *если выполнены локальные условия единственной разрешимости $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, а все траектории $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ продолжимы на всю ось t и концами уходят в бесконечность, то существуют определенные на всем \mathbb{R}^n первые интегралы $u(\mathbf{x})$, а значит, и решения (4.1).*

Интегрируемость в квадратурах. Вопросы существования первых интегралов можно обсуждать до умопомрачения²²⁾, ибо тематика идеологически прозрачна, но неудобна для формулировки общих выводов. Ситуацию усугубляет терминологическая путаница с другой проблематикой, возникшей в незапамятные времена из простодушных грез о решении дифуров в квадратурах от элементарных функций.

Алгебраические уравнения всегда решаются, но не всегда — в радикалах. Аналогично уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ обычно имеют первые интегралы $u(\mathbf{x})$, но те редко выражаются подходящим образом через исходные данные — например, интегралами от «опосредованных» правых частей.

²¹⁾ Возможность локального преобразования движения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ в параллельное (4.24) называют *теоремой о выпрямлении векторного поля* [18].

²²⁾ Чего лучше не делать, поскольку изнеможение достигается проще.

Безусловно, формульный вариант упрощает исследование. Скажем,

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ t = 1, \end{cases} \Rightarrow x = Ce^{-t} \Rightarrow u(x, t) = \frac{x}{e^{-t}}$$

или

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}, \\ t = 1, \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(Ct^2 - \frac{1}{C} \right) \Rightarrow u(x, t) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + t^2}}{2t^2},$$

и первые интегралы можно «потрогать». Однако $\dot{x} = x^2 - t$, — и кончен бал²³⁾. Вопрос о разрешимости дифуравнений в квадратурах довольно сложен [3, т. 8]. Квадратуры ищутся регулярными средствами, когда дифур инвариантен относительно той или иной группы преобразований. Но такая инвариантность не исчерпывает интегрируемость в квадратурах.

Близкий ракурс связан с возможностью выразить общее решение через конечное число частных — в этом случае говорят о фундаментальной системе решений дифура $\dot{x} = \Phi(\mathbf{x}, t)$. За пределами линейного случая, в котором фундаментальная система решений существует всегда, вопрос решается следующей теоремой.

4.4.1. Теорема Ли. Система $\dot{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}, t)$ имеет фундаментальную систему решений, если она представима в виде

$$\dot{x}_i = \nu_1(t)\xi_{i1}(x) + \dots + \nu_r(t)\xi_{ir}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

и операторы

$$X_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, \dots, r,$$

образуют алгебру Ли. При этом $r \geqslant n$.

4.5. Уравнение Гамильтона—Якоби

Нелинейное уравнение $H(\mathbf{x}, \nabla S(\mathbf{x})) = 0$, т. е.

$$H\left(x_1, \dots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (4.25)$$

²³⁾ Неразрешимость в квадратурах $\dot{x} = x^2 - t$, сводимого подстановкой $\dot{x} = \dot{z}/z$ к линейному $\ddot{z} + tz = 0$, вытекает из теоремы Лиувилля [3, т. 2].

принято записывать в виде $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$, где $p_i = \partial S / \partial x_i$. Ассоциации с аналитической механикой — не случайны.

Пусть $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ — решение $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0$. Дифференцируя $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x})) \equiv 0$ по x_i , имеем

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0, \quad (4.26)$$

что с учетом

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \quad \left(\text{ибо } = \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

дает *квазилинейное* уравнение относительно p_i ,

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (4.27)$$

для которого уравнением характеристик (4.7) служит система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \\ \dots \\ \dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Объединяя системы (4.28) по всем i , имеем

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Наконец, вспоминая $S_x(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x})$ и дифференцируя $S(\mathbf{x})$ по t ,

$$\dot{S} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} = \langle \mathbf{p}, H_{\mathbf{p}} \rangle,$$

получаем $(2n+1)$ -е уравнение, дополняющее *уравнения Гамильтона* (4.29) до *характеристической системы уравнения* (4.25):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}, \\ \dot{S} = \langle \mathbf{p}, H_{\mathbf{p}} \rangle. \end{cases} \quad (4.30)$$

Если уравнение (4.25) зависит еще и от S , то дифференцируя $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}), S) \equiv 0$ по x_i , будем иметь в (4.26) дополнительное слагаемое $\partial H / \partial S p_i$, что приведет к замене в (4.29), (4.30) уравнения $\dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}}$ на

$$\dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{x}} - \langle \mathbf{p}, H_{\mathbf{p}} \rangle.$$

Частным случаем (4.25) является *уравнение эйконала*

$$[S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})]^2 = c^{-2}, \quad (4.31)$$

описывающее распространение света в однородной изотропной среде со скоростью c . Характеристическая система (4.30) здесь:

$$\dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0, \quad \dot{S} = 2c^{-2}. \quad (4.32)$$

Проекции характеристик

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{p}(0)t, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(0)$$

на пространство \mathbf{x} -ов, т. е. *лучи*, в силу (4.32) удовлетворяют системе уравнений $\ddot{\mathbf{x}} = 0$.

4.6. Шаг в сторону — и другая картина

Стоит вместо одного уравнения взять два, как ситуация меняется кардинальным образом. Скажем, система

$$\begin{cases} u_x = v_y, \\ v_x = -u_y \end{cases} \quad (4.33)$$

представляет собой *условия Коши—Римана* [3, т. 9], которые среди функций $f = u(x, y) + iv(x, y)$ выделяют *аналитические*, т. е. дифференцируемые. В результате пара уравнений описывает все, чем занимается ТФКП. Другими словами, теория аналитических функций сводится к изучению системы (4.33), каковая удобна в качестве примера еще и потому, что u и v здесь удовлетворяют *уравнению Лапласа*²⁴⁾:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \quad (4.34)$$

²⁴⁾ Чтобы получить (4.34), достаточно продифференцировать (4.33) и исключить одну из функций u или v .

и являются таким образом гармоническими функциями²⁵⁾, известными благодаря различным источникам происхождения.

Дифференцируемость в ТФКП определяется как возможность записи приращения функции в виде

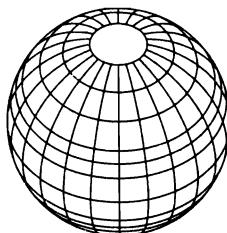
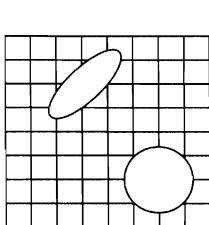
$$\delta f(z) = f(z + \delta z) - f(z) = A\delta z + o(|\delta z|), \quad (4.35)$$

где A — комплексное число. Если бы речь шла просто об отображениях плоскости, то определение дифференцируемости (*аналитичности*) f совпадало бы по записи с (4.35), но A было бы матрицей. Требование, чтобы A было комплексным числом, сильно ограничивает класс рассматриваемых функций, и сводится (с небольшими оговорками) к условиям Коши—Римана.

- Аналитические функции, дифференцируемые по определению один раз, оказываются бесконечно дифференцируемы. Феномен не имеет аналогов в классическом анализе и в значительной мере определяет лицо ТФКП.
- Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ называют взаимно сопряженными. Задание одной из них с точностью до константы определяет вторую.
- В силу условий Коши—Римана

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x \equiv 0, \quad (4.36)$$

т. е. градиенты функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ортогональны друг другу в любой точке z , а значит, ортогональны линии $u(x, y) = C$, $v(x, y) = C$ постоянного уровня, как меридианы и параллели на сфере.



Самое удивительное — «голографическое устройство» аналитических функций. Целое отражается в любом маленьком фрагменте. *Задание функции в малой окрестности и даже на кусочке дуги определяет²⁶⁾ функцию целиком, в том числе — вместе с областью определения.* Это до некоторой степени не вяжется со стереотипами

²⁵⁾ Удовлетворяющими, по определению, уравнению Лапласа.

²⁶⁾ В результате аналитического продолжения.

изучения ЧП-уравнений. Чтобы выделить из семейства функций, удовлетворяющих (4.34), одну — в урматах задают краевые условия и решают задачу, например,

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = u_0. \quad (4.37)$$

Однако есть другой рецепт, практически нереализуемый, но проливающий свет на природу самого уравнения $\Delta u = 0$. Будь решение (4.37) известно в любой сколь угодно малой окрестности, то по этому кусочку можно было бы восстановить решение целиком, сшивая фрагменты²⁷⁾. Таким образом, непрерывная функция продолжается «как угодно», гармоническая — только одним способом, и ее достаточно задать «на пятаке», остальное разворачивается само собой.

В описанной идиллии есть свои осложнения. Аналитическое продолжение вдоль разных путей может приводить к разным результатам, т. е. быть многозначным. Однако *любая функция, аналитическая в односвязной области, однозначна*. Проблемы возникают в случае многосвязных областей (рис. 4.6), и там есть свои достижения, касающиеся не только ТФКП, но и гармонических функций вообще. Все это непосредственно причастно к задачам вида (4.37), и более-менее связано излагается в [3, т. 9].

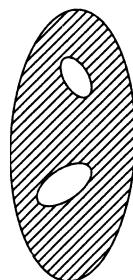


Рис. 4.6

Еще один контекстуально важный ингредиент ТФКП — конформная тематика²⁸⁾, концентрирующаяся вокруг проблемы преобразования одних областей в другие. Причина интереса заключена в естественном соблазне использовать решение задачи (4.37) с граничными условиями на области D для решения аналогичной задачи, но с другой областью D' . Этому, собственно, и служит выбор подходящего конформного преобразования $w = f(z)$, дающего замену переменных $z \mapsto w$, которая переводит D в D' и не разрушает уравнения Лапласа.

²⁷⁾ Краевые условия удовлетворились бы автоматически.

²⁸⁾ Конформным называют непрерывное отображение, сохраняющее подобие бесконечно малых фигур. Аналитическая функция $f(z)$ является конформным преобразованием в точке z_0 в томм случае, когда $f'(z_0) \neq 0$.

Связь гармонических функций с аналитическими порождает серию «параллельных» результатов.

4.6.1. Теорема о среднем. *Если функция $u(z)$ гармонична в круге радиуса r с центром в точке ζ , то ее значение в центре равно среднему значению на границной окружности:*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

4.6.2. Принцип максимума²⁹⁾. *Если гармоническая в области D функция достигает локального максимума или минимума внутри D , то она — постоянна.*

4.6.3. *Пусть функция $u(x, y) \neq \text{const}$ определена и гармонична в \mathbb{R}^2 . Тогда область ее значений совпадает с $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

Вот еще два инструментальных средства (теоремы Гарнака).

4.6.4. *Если последовательность функций $\{u_n(x, y)\}$, гармонических в области D и непрерывных в \overline{D} , равномерно сходится на границе области, то она равномерно сходится в D , $u_n \rightarrow u$, и предельная функция $u(x, y)$ — гармонична в D .*

4.6.5. *Если неотрицательные функции $u_n(x, y)$, $n = 1, 2, \dots$, гармоничны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y)$ сходится хотя бы в одной точке $(x, y) \in D$, то он (ряд) равномерно сходится в любой замкнутой подобласти D , а его сумма — гармоническая функция.*

²⁹⁾ «Гармонический».

Глава 5

Группы Ли и ЧП-симметрия

Вселенная, ускользая, укладывается в любую теорию.

Групповая идеология относительно подробно рассматривается в [3, т. 8]. Там же есть глава по группам Ли с приложениями к дифурам, которая пересекается с нежеследующим текстом. Здесь кое-что опущено, кое-что добавлено, и больший упор делается на ЧП-уравнения, но главное — используется несколько иной строительный материал. А «другое слово» — добавленное или убранное — иногда открывает глаза.

5.1. Методы подобия и размерности

Разговор об использовании групповых методов в урматах естественно начинать с простейшего варианта — групп растяжений, каковые обычно ассоциируются с *методами подобия и размерности*, играющими выдающуюся роль в физике, если оценивать по критерию «*эффективность/простота*».

Закулисная сторона впечатляет загадочной легкостью. Высота, на которую взлетает тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v , пропорциональна v^2/g , потому что из v и ускорения свободного падения g образуется единственная величина подходящей размерности (длины) v^2/g . Задача решена с точностью до безразмерной константы, зато без всяких хлопот.

А период колебаний маятника $\tau \sim \sqrt{l/g}$, потому что $\sqrt{l/g}$ — единственная комбинация размерности времени, которую можно образовать из g и длины маятника l . К списку параметров, потенциально влияющих на решение задачи, можно добавить вес стержня, но в компании $\{l, g, P\}$ даже вес наблюдателя P не создает новых комбинаций — решение остается прежним. Другое дело, если к первичной $\{l, g\}$ причислить размах колебаний a , — тогда получится $\tau = k(l/a)\sqrt{l/g}$, где $k(\cdot)$ — неизвестная функция.

Методика базируется на простом соображении: взаимосвязь физических переменных

$$\varphi(z_1, \dots, z_N) = 0 \quad (5.1)$$

не может зависеть от используемой системы единиц измерения.

Скажем, $\tau = 2\pi\sqrt{l/g}$ или $F = \gamma m_1 m_2 / r^2$. Взаимосвязи справедливы в любой системе единиц измерения. Сами значения переменных при переходе к другой системе меняются, но формула взаимосвязи (5.1) остается прежней. То же самое можно сказать про любую формулу правильного решения любой физической задачи.

За кадром подразумевается, что во всякой задаче имеются независимые переменные¹⁾ $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_k\}$, меняющиеся при увеличении/уменьшении \mathbf{q} в $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ раз по формулам²⁾

$$q'_j = \lambda_j q_j. \quad (5.2)$$

Остальные переменные $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ при этом трансформируются согласно «однородным преобразованиям»

$$Q'_j = \lambda_1^{\alpha_1 j} \dots \lambda_k^{\alpha_k j} Q_j. \quad (5.3)$$

Если отправным пунктом служит ситуация (5.1), то

$$\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_N\}$$

удобно разделить на две части, $\mathbf{z} = \{\mathbf{q}, \mathbf{Q}\}$, независимых и зависимых переменных, преобразующихся по формулам (5.2), (5.3). Замена в (5.1)

$$q_j \mapsto \lambda_j q_j, \quad Q_j \mapsto \lambda_1^{\alpha_1 j} \dots \lambda_k^{\alpha_k j} Q_j$$

дает тождество по $\boldsymbol{\lambda}$, выбор в котором $\lambda_j = 1/q_j$ приводит к соотношению

$$\varphi(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_n) = 0, \quad (5.4)$$

¹⁾ Имеющие независимые размерности, типа массы M , длины L , времени T . Размерности длины L , скорости L/T и силы ML/T^2 -- также независимы; длины L , скорости L/T и ускорения L/T^2 -- зависимы.

²⁾ Штрих констатирует новое значение переменной.

где

$$\Pi_j = \frac{Q_j}{q_1^{\alpha_1 j} \cdots q_k^{\alpha_k j}}$$

— новые безразмерные переменные. Возможность перехода от (5.1) к (5.4) называют *П-теоремой*, означающей, что *любое соотношение между физическими величинами равносильно некоторому соотношению между их безразмерными комбинациями*.

Практический рецепт прост. Сначала определяется набор переменных \mathbf{z} , от которых зависит решение стоящей задачи³⁾, и далее находится полный комплект их безразмерных комбинаций Π_1, \dots, Π_n , между которыми утверждается наличие функциональной связи. Если безразмерная комбинация только одна, произвел решения минимальный — с точностью до скалярного множителя. Показательные примеры имеются в [3, т. 8] — вплоть до оценки массы камней, необходимой для перекрытия реки, см. также [1, 16].

Методика оставляет в решении, как минимум, неопределенные константы, а то и функции. Однако в названии не случайно фигурирует еще и *подобие*. Решения с неопределенными факторами дают ориентиры для проведения экспериментов на упрощенных моделях, позволяющих делать в итоге однозначные умозаключения. На дешевом макете перекрывается малюсенький ручеек, а вывод делается — для Ангары! Ключевую роль при этом играет, конечно, понимание характера функциональных зависимостей. Последнее имеет существенное значение и в теоретических исследованиях. Одно дело искать решение $u_t = u_{xx}$ как $u(x, t)$, другое дело — в виде $u(x, t) = 1/\sqrt{t}\varphi(x/\sqrt{t})$, подстановка чего в уравнение сразу приводит к обыкновенному дифуру.

Два замечания

- О преобразованиях (5.2) говорят обычно по отношению к *единицам измерения, базовым переменным* — типа массы, длины, времени — тогда как z_j в (5.1) — это переменные задачи, которые все преобразуются по формулам (5.3), но среди них можно выделить независимые и назначить их базовыми. Проще

³⁾ Иногда это непосредственно определяется дифференциальными и другими уравнениями, описывающими статику и динамику задачи. Но уравнения, вообще говоря, не нужны. Их может заменять понимание физики задачи, что иной раз ставит исследование на скользкий путь.

говоря, задача состоит в том, чтобы среди $\{z_1, \dots, z_N\}$ выделить независимые величины и выразить через них остальные z_j .

- Соотношение размерностей означает инвариантность изучаемого объекта по отношению к той или иной группе растяжений. А потому уравнения матфизики, будучи соотношениями между физическими величинами, всегда допускают некоторую группу растяжений.

5.2. Автомодельные решения

Об *автомодельных решениях* $u(\mathbf{x}, t)$ говорят, когда согласованное растяжение переменных и функции не меняет $u(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, речь идет опять-таки об инвариантности к определенным группам преобразований. Но перед общим разговором имеет смысл посмотреть, как это работает в миниатюре.

Замена

$$t \mapsto at, \quad x \mapsto \beta x, \quad u \mapsto \gamma u \quad (5.5)$$

не меняет задачи Коши

$$u_t = \lambda u_{xx}, \quad u(x, 0) = \delta(x) \quad (5.6)$$

при условии $\lambda\alpha = \beta^2$, что следует из $u_t = \lambda u_{xx}$; и $\gamma = \beta^{-1}$, что вытекает из $u(x, 0) = \delta(x)$. Поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda t}}\right), \quad (5.7)$$

подстановка чего в $u_t = u_{xx}$, для простоты далее полагаем $\lambda = 1$, приводит к обыкновенному дифуру

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{1}{2}\varphi = 0, \quad \tau = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad (5.8)$$

решение которого обязано вместе со своей производной стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow +0, x \neq 0$), в силу чего интегрирование (5.8) дает $d\varphi/d\tau + 1/2\tau\varphi = 0$. Следующее интегрирование с учетом нормировки δ -функции приводит к окончательному результату

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\}. \quad (5.9)$$

Обратим внимание, что (5.7) можно было бы выводить из соображений размерности, ибо из комплекта $\{t, x, \lambda, u\}$ — образуются только две безразмерные комбинации $x/\sqrt{\lambda t}$ и $u\sqrt{\lambda t}$, откуда, собственно, и следует (5.7). А дальнейшее уже не имеет отношения ни к размерностям, ни к теории групп. И может показаться, что здесь изобретается велосипед. Это не совсем так. Вместо (5.6) можно было бы рассматривать просто уравнение $u_t = \lambda u_{xx}$, и тогда в (5.5) значение γ осталось бы произвольным — и его тот или иной выбор $\gamma = \beta^\nu$ приводил бы к автомодельным решениям вида $(\lambda t)^{-\xi} \varphi(x/\sqrt{\lambda t})$. Интересно, что любая попытка логичного выбора значения ξ приводит к $\xi = 1/2$. Это следует, например, из постоянства интеграла $\int u(x, t) dx$, выражающего закон сохранения массы⁴⁾.

Физики определяют *автомодельность* как симметрию задачи, позволяющую масштабирование переменных компенсировать растяжением самого решения. Проще и точнее говоря, *автомодельная функция* $u(x, t)$, по определению, инвариантна к некоторой группе растяжений. Но это не очень хорошая дефиниция, ибо — не инвариантна к преобразованиям переменных. Например, замена $x_i \mapsto \ln x_i$, $t \mapsto \ln t$ — переводит операторы растяжения в операторы переноса (сдвига). Поэтому *автомодельными* лучше называть функции, инвариантные относительно *абелевых* групп. Тогда охватываются *бегущие волны* (п. 7.5)

$$u(x, t) = f(x - ct),$$

которые после замены $x = \ln \xi$, $t = \ln \tau$ переходят в исходно автомодельную форму $f(\ln(\xi/\tau^c)) = \varphi(\xi/\tau^c)$.

Эффективность автомодельных подстановок, сводящих ЧП-уравнения к обыкновенным дифурам, побуждает задуматься, нельзя ли добиться тех или иных выгод заменами переменных иного типа? Можно, в некоторых случаях. Но такие подстановки должны опираться на групповые свойства изучаемых уравнений.

⁴⁾ Если подразумевается диффузия, и $u(x, t)$ — плотность диффундирующего вещества.

5.3. Непрерывные группы

Семейство преобразований $\mathbf{G} = \{G\}$ образует группу с композицией в качестве группового умножения, если выполняются обычные аксиомы группы⁵⁾:

1. $G_1, G_2 \in \mathbf{G} \Rightarrow G_1 G_2 \in \mathbf{G}$.
2. Тождественное отображение $I(x) \equiv x$ входит в \mathbf{G} .
3. Любое отображение $G \in \mathbf{G}$ имеет обратное $G^{-1} \in \mathbf{G}$.

Группа называется *параметрической*, если элементы совокупности $\{G\}$ «континуально пересчитаны» с помощью некоторого параметра a . Далее: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r$, и $\{G_a\}$ — семейство непрерывных функций $G_a(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, преобразующих точки \mathbf{x} в точки $\mathbf{x}' = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ того же пространства \mathbb{R}^n (*штрих не обозначает дифференцирования*).

Перечисленные выше требования к \mathbf{G} теперь звучат так:

1. Групповая операция не должна выводить из $\{G_a\}$, т. е.

$$\mathbf{x}' = G(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \quad \mathbf{x}'' = G(\mathbf{x}', \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}'' = G(\mathbf{x}, \mathbf{c})$$

при некотором $\mathbf{c} = \varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Иными словами,

$$G_b G_a = G_{\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})}.$$

2. $G(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \equiv \mathbf{x}$ при некотором $\mathbf{a} = \mathbf{e}$, что гарантирует существование единичного элемента группы. Обычно полагают $G(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathbf{x}$.
3. Уравнение $\mathbf{x}' = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ обязано решаться: $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x}', \mathbf{a})$, причем функция $\psi(\mathbf{x}', \mathbf{a})$ после подходящей перепараметризации должна попадать в то же семейство, т. е.

$$\psi(\mathbf{x}', \mathbf{a}) = G(\mathbf{x}', \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}),$$

что обеспечивает существование обратных элементов, $G_a^{-1} = G_{b(\mathbf{x})}$.

Группы Ли из параметрических выделяются, упрощенно говоря, определенной гладкостью $G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathbf{b}(\mathbf{a})$ и $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Если бы не это — можно было бы рассматривать только однопараметрические группы ($r = 1$), ибо конечномерный куб взаимно однозначно отображается на свою сторону [3, т. 1].

⁵⁾ Требуемая в определении группы ассоциативность умножения, $F(GH) = (FG)H$, в случае композиции — выполняется автоматически.

Примером группы Ли может служить *семейство операторов сдвига* $\{G_t\}$ по траекториям дифференциального уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \xi(\mathbf{x}). \quad (5.10)$$

В некотором роде пример исчерпывает *однопараметрические* группы Ли. По крайней мере, в ситуации $\varphi(a, b) = a + b$, $b(a) = -a$, т. е.

$$G_b G_a = G_{a+b}, \quad G_a^{-1} = G_{-a}, \quad (5.11)$$

существование подходящего дифура (5.10) очевидно — достаточно положить

$$\xi(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_{t=0}, \quad (5.12)$$

потому что оператор сдвига $G_t \mathbf{x} = G(\mathbf{x}, t)$ выражается через композицию

$$G(\mathbf{x}, t) = G_{N\Delta t} \mathbf{x} + o(\Delta t),$$

откуда ясно, что G_t задается операторами $G_{\Delta t}$ при малых Δt ,

$$G_{\Delta t} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}) \Delta t + o(\Delta t),$$

т. е. *вся группа определяется производными в нуле* (5.12).

Независимо от условия (5.11)⁶⁾ — *однопараметрические группы Ли* исчерпываются *операторами сдвига* по траекториям систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \sigma(t) \xi(\mathbf{x}), \quad (5.13)$$

фазовые траектории которых совпадают с траекториями автономных дифференциальных уравнений (5.10). Отличие заключено в скорости движения по этим траекториям. Замена «времени» преобразует (5.13) к форме (5.10).

5.4. Инвариантность и генераторы группы

Инвариантность функции $u(\mathbf{x})$ под действием группы $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ означает

$$u[G(\mathbf{x}, a)] \equiv u(\mathbf{x}), \quad (5.14)$$

⁶⁾ В однопараметрической группе заменой переменных всегда можно добиться $\varphi(a, b) = a + b$.

что в силу (5.12) и свойств первых интегралов (п. 4.1) влечет за собой касание в точке \mathbf{x} векторов $\xi(\mathbf{x})$ поверхности $u(\mathbf{x}) = \text{const}$ — иначе говоря, $\langle \xi(\mathbf{x}), \nabla u \rangle = 0$, т. е.

$$\sum_i \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

а это представляет собой знакомое ЧП-уравнение типа (4.1), которое можно записать в виде $\boxed{Xu = 0}$ с помощью оператора

$$X = \sum_i \xi_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (5.15)$$

где под знак частного дифференцирования автоматически попадает функция $u(\mathbf{x})$ при воздействии на нее оператором X . Если танцевать от $Xu = 0$, то группа $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ оказывается набором *характеристик* уравнения (5.14).

В случае (5.12), т. е. $\xi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \Big|_{a=0}$, (5.15) называется

инфinitезимальным оператором группы $\{G(\mathbf{x}, a)\}$, или *генератором* группы, с *касательным векторным полем* $\xi(\mathbf{x})$.

- В группе $\{x' = ax, y' = (1/a)y\}$ единичному элементу отвечает значение $a = 1$. Поэтому⁷⁾

$$\frac{\partial ax}{\partial a} \Big|_{a=1} = x, \quad \frac{\partial y/a}{\partial a} \Big|_{a=1} = -y.$$

В результате

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Для группы *вращений*

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases} \quad (5.16)$$

имеем

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = -y, \quad \frac{\partial y'}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = x.$$

⁷⁾ Если единичным элементом группы является $G(\mathbf{x}, a_0)$, то формула (5.12) для $\xi_i(\mathbf{x})$ меняется на $\xi_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, a)}{\partial a} \Big|_{a=a_0}$.

Генератор группы⁸⁾:

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- В случае гиперболических вращений (группа Лоренца),

$$\begin{cases} x' = x \cosh \psi + y \sinh \psi, \\ y' = x \sinh \psi + y \cosh \psi, \end{cases}$$

получается:

$$X = y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Для растяжений $\{x' = xe^a, y' = ye^{\theta a}\}$:

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \theta y \frac{\partial}{\partial y}.$$

- Проективным преобразованиям

$$\left\{ x' = \frac{x}{1 - ax}, \quad y' = \frac{y}{1 - ax} \right\} \quad (5.17)$$

отвечает $X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$.

Здесь стоит обратить внимание, что преобразования (5.17) не определены при всех значениях a . Но при малых a на пути анализа не возникает препятствий — в частности, при рассмотрении X . Такого сорта группы называют *локальными*. Взаимоотношения X с $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ перекликаются с вопросами продолжимости решений ЧП-уравнений первого порядка (глава 4), ибо эксплуатация феномена X означает переход на описание операторов сдвига $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ диф-уравнениями (5.10) или (5.12). И если переключение с $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ на X фактически тривиально, то для обратной трансформации дифур надо еще, дай бог, решить.

Функцию $u(\mathbf{x})$, инвариантную в смысле (5.14), т. е. удовлетворяющую условию $Xu = 0$, называют *инвариантом группы* $\{G(\mathbf{x}, a)\}$ и говорят, что $u(\mathbf{x})$ *допускает* группу $\{G(\mathbf{x}, a)\}$.

⁸⁾ В полярных координатах $X = \partial/\partial\varphi$, группа $\{r' = r, \varphi' = \varphi + a\}$.

5.4.1. Однопараметрическая регулярная⁹⁾ группа имеет $n - 1$ глобальных функционально независимых инвариантов

$$J_1(\mathbf{x}), \dots, J_{n-1}(\mathbf{x}),$$

через которые выражается любой другой инвариант.

Разумеется, можно говорить об инвариантности отдельных поверхностей, вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и уравнений, с очевидными оговорками¹⁰⁾. При этом, если $Lu(\mathbf{x}) = 0$, неважно что за оператор L , имеет множество решений $\{u(\mathbf{x}, C)\}$ и под действием группы

$$\{\mathbf{x}' = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}$$

переходит точно в такое же уравнение $Lu(\mathbf{x}') = 0$ — разве что с другим обозначением переменных, штрихованным, — то новое уравнение будет иметь идентичное множество решений $\{u(\mathbf{x}', C')\}$. Соответствие «нумерующих констант» C и C' при действии преобразования G_a на решения извлекается из

$$u(G(\mathbf{x}, \mathbf{a}), C') = u(\mathbf{x}, C).$$

Результат не меняется по сути, если преобразования группы действуют еще и на u . В описанной ситуации говорят, что уравнение $Lu(\mathbf{x}) = 0$ допускает группу $\{G(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}$.

5.5. Многопараметрическая симметрия

Многопараметрическая ситуация, $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_r\}$, меняет декорации. Функция $u(\mathbf{x})$ под действием преобразования $G(\mathbf{x}, \delta \mathbf{a})$,

⁹⁾ Однозначная разрешимость $\mathbf{x}' = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ относительно \mathbf{x} при любом \mathbf{x}' называется регулярностью действия группы, что равносильно единственности и нелокальной продолжимости решений соответствующего дифура.

¹⁰⁾ Уравнение $\dot{x} + \alpha x^2 - \beta t^{-2} = 0$ инвариантно к группе преобразований

$$\left\{ t = kt', \quad x = \frac{1}{k}x' \right\} \quad (k > 0)$$

не потому, что не меняет формы, а потому, что переходит в эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{k^2}(\dot{x} + \alpha x^2 - \beta t^{-2}) = 0.$$

имеющего n компонент

$$G_i(x_1, \dots, x_n, \delta a_1, \dots, \delta a_r),$$

получает приращение¹¹⁾

$$\begin{aligned} \delta u &= \sum_{j=1}^r \delta a_j \left(\sum_{i=1}^n \xi_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + o(\|\delta a\|) = \\ &= \sum_{j=1}^r \delta a_j X_j u + o(\|\delta a\|), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$X_j = \sum_{i=1}^n \xi_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, \dots, r, \quad (5.19)$$

инфinitезимальные операторы группы, которых теперь r штук вместо одного, а «касательные поля» определяются элементами

$$\xi_{ij}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial G_i(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial a_j} \right|_{\mathbf{a}=0}. \quad (5.20)$$

Таким образом, для *инвариантности* $u(\mathbf{x})$ относительно группы преобразований $\{G(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}$ теперь требуется больше, чем прежде. Равенство нулю приращения δu в первом приближении — влечет за собой необходимость обращения в нуль r скалярных произведений градиента ∇u на r касательных векторов:

$$\xi_1(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \xi_r(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi_{1r} \\ \vdots \\ \xi_{nr} \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

т. е.

$$X_j u = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (5.22)$$

¹¹⁾ Технические детали в [3, т. 8].

Аналогом (5.13) в данном случае является система дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial z_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^r \xi_{ik}(z) \sigma_{kj}(\mathbf{a}), \quad (5.23)$$

решения которой $z = G(\mathbf{x}, \mathbf{a})$.

- Группа невырожденных преобразований

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

имеет единичный элемент при $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Генераторы группы:

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_4 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

• При вращении твердого тела вокруг оси x_1 с единичной скоростью точка $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ имеет скорость $v = \{0, -x_3, x_2\}$. Скорость изменения любой функции $u(x)$ в этой точке равна $-x_3 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_3}$. Поэтому инфинитезимальные операторы вращения в \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, & X_2 &= x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ X_3 &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

что характеризует вращение твердого тела, закрепленного в точке. При освобождении поступательных степеней свободы к (5.24) надо добавить еще три оператора:

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_6 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Соответствующие касательные поля скоростей:

$$\begin{aligned} \xi_1(\mathbf{x}) &= (0, -x_3, x_2), & \xi_2(\mathbf{x}) &= (x_3, 0, -x_1), & \xi_3(\mathbf{x}) &= (-x_2, x_1, 0), \\ \xi_4(\mathbf{x}) &= (1, 0, 0), & \xi_5(\mathbf{x}) &= (0, 1, 0), & \xi_6(\mathbf{x}) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

- Уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

допускает группы, сведенные в следующую таблицу:

группа	генератор
$\{x, t, u + a\mu(x, t)\}, \mu_t = \mu_{xx}$	$X_\infty = \mu(x, t)\partial_u$
$\{x + a, t, u\}$	$X_1 = \partial_x$
$\{x, t + a, u\}$	$X_2 = \partial_t$
$\{x, t, ue^a\}$	$X_3 = u\partial_u$
$\{xe^a, te^{2a}, u\}$	$X_4 = x\partial_x + 2t\partial_t$
$\{x + 2at, t, ue^{-ax-a^2t}\}$	$X_5 = 2t\partial_x - ux\partial_u$
$\left\{ \frac{x}{1-at}, \frac{t}{1-at}, u\sqrt{1-at} \exp\left\{ \frac{-4ax^2}{1-at} \right\} \right\}$	$X_6 = tx\partial_x + t^2\partial_t - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u$

Первые пять групп очевидны¹²⁾, чего не скажешь о последних двух, но подыскивать объяснения нет необходимости, поскольку такие задачи решаются на регулярной основе с помощью конкретных уравнений, которые позволяют определить все допускаемые группы преобразований.

Да и проблема не только в том, откуда взялись X_5 и X_6 , а все ли виды симметрии уравнения $u_t = u_{xx}$ выяснены? Совокупности генераторов группы часто оставляют за кадром принципиальный вопрос: не объединение ли это отдельных представителей однопараметрических групп, которые не могут быть консолидированы в одну группу, многопараметрическую? На этом пути возникают задачи пополнения «совокупностей» до полноценных комплектов — так, чтобы охватить все преобразования, относительно которых инвариантно изучаемое уравнение. Решению проблем такого сорта помогают алгебры Ли.

5.6. Инфинитезимальные продолжения

Попытка записать условие инвариантности типа $Xu = 0$ для дифуравнения, скажем $f(\dot{x}, x, t) = 0$ либо $u_t = u_{xx}$, связана с опреде-

¹²⁾ Первая, фактически бесконечномерная, ибо $\mu(x, t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности, отражает *принцип суперпозиции*.

ленными неудобствами технического характера. Действие генератора X на производные приводит к довольно громоздким формулам. Однако, как выясняется, подобную черновую работу нет необходимости проделывать для каждого дифура отдельно, потому что действие X , например на $f(\dot{x}, x, t)$, равносильно действию некого расширенного генератора группы $\overset{1}{X}$ на функцию $f(p, x, t)$, где p — независимая переменная. Причем расширение $\overset{1}{X}$ — продолжение X — не зависит от f , а только от X . Выходит, все дифуры первого порядка можно обслужить единообразно. Для второго порядка вычисляется продолжение $\overset{2}{X}$ и т. д. В результате инвариантность дифуров проверяется как инвариантность обыкновенных функций, только по отношению к продолженным операторам,

$$\overset{k}{X}f = 0 \quad (5.25)$$

вместо $\overset{k}{X}f(x^{(k)}, \dots, \dot{x}, x) = 0$. Переменных в (5.25) больше, зато оператор $\overset{k}{X}$ действует стандартным образом (5.15).

Затевать здесь описание технической стороны дела, безусловно, нет резона — можно обратиться к более обстоятельным руководствам *Ибрагимова, Овсянникова, Олвера*⁽¹³⁾. Однако получить представление можно и на простых примерах.

Пусть элементы группы $\mathbf{G} = \{G_a\}$ действуют по правилу

$$y = \Phi(x, t, a), \quad \tau = \Psi(x, t, a). \quad (5.26)$$

Тогда в новых переменных

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{\Phi_t + \dot{x}\Phi_x}{\Psi_t + \dot{x}\Psi_x} = \Theta(\dot{x}, x, t), \quad (5.27)$$

что в совокупности с (5.26) дает описание продолженной группы $\overset{1}{\mathbf{G}}$, действующей в расширенном пространстве переменных $\{\dot{x}, x, t\}$, где \dot{x} обозначает просто независимую переменную.

Группу можно продолжать на производные более высоких порядков,

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{d\tau} = \frac{\Theta_t + \dot{x}\Theta_x + \ddot{x}\Theta_{\dot{x}}}{\Psi_t + \dot{x}\Psi_x}, \quad (5.28)$$

что, будучи добавлено к (5.26) и (5.27), дает продолженную группу $\overset{2}{\mathbf{G}}$, действующую в пространстве переменных $\{\ddot{x}, \dot{x}, x, t\}$.

⁽¹³⁾ Ссылки есть в [3, т. 8], но рассчитывать на легкую экскурсию не стоит.

Для инфинитезимальных операторов декорации усложняются, и «удобства» становятся принципиальны. Пусть $X = \xi \partial/\partial t + \eta \partial/\partial x$. Заменяя уравнения (5.26) на $y = x + a\eta + o(a)$, $\tau = t + a\xi + o(a)$ и переходя к формулам типа (5.27), (5.28) с точностью до о-малых, получаем

$$\dot{y} = \dot{x} + a\omega_1, \quad \ddot{y} = \ddot{x} + a\omega_2,$$

где

$$\omega_1 = D(\eta) - \dot{x}D(\xi), \quad \omega_2 = D(\omega_1) - \ddot{x}D(\xi)$$

записано с помощью *оператора полного дифференцирования*

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \dots .$$

В результате *инффинитезимальный оператор первого продолжения*¹⁴⁾:

$$\overset{1}{X} = X + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}} = \xi \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial x} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \dot{x}}.$$

Компонента ω_1 , как можно проследить, зависит только от ξ, η , и содержит первые производные ξ, η . Принцип устройства *генератора группы* (5.15) сохраняется. Оператор *второго продолжения*:

$$\overset{2}{X} = \overset{1}{X} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \dot{x}}. \quad \text{Комментарии те же.}$$

В случае оператора X для уравнения $u_t = u_{xx}$ необходимое продолжение имело бы вид¹⁵⁾

$$\overset{2}{X} = X + \omega_{11} \frac{\partial}{\partial u_t} + \omega_{22} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

- Для оператора $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ группы вращений:

$$\overset{1}{X} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + y_x^2) \frac{\partial}{\partial y_x}.$$

5.7. Допускаемые группы

Напомним, функция $u(x)$ допускает группу $\{G(\mathbf{x}, a)\}$, если она инвариантна по отношению к преобразованиям $G(\mathbf{x}, a)$, иначе говоря, если $Xu = 0$, где X — *генератор группы*.

Уравнение $Xu = 0$ можно решать как относительно u , так и относительно X , определяя в первом случае инварианты данной

¹⁴⁾ Чтобы не плодить обозначения, независимая переменная, отвечающая производной \dot{x} , обозначается тем же символом \dot{x} . Трюк общепринят.

¹⁵⁾ Действие $\overset{2}{X}$ по переменным u_{tt}, u_{tx} отсутствует, поскольку таковых в $u_t = u_{xx}$ нет.

группы, во втором — виды симметрии данной функции. Скажем, $Xu = 0$ при заданной функции $u(x, t)$ есть

$$\xi u_x + \eta u_t = 0,$$

где u_x , u_t — суть данные функции, как и сама $u(x, t)$. А потому, не считая проблем с обращением знаменателя в нуль, $\xi/\eta = -u_t/u_x$, что порождает массу генераторов¹⁶⁾ X .

Проблема *допускаемых групп* чаще возникает в отношении диф-уравнений $f(\dots) = 0$. С точки зрения инфинитезимальных продолжений (п. 5.6) это не отличается от только что сказанного, поскольку сводится к решению (5.25) относительно X^k . Но требуется-то X . Поэтому уравнение (5.25) решается относительно направляющих ξ оператора X . А поскольку компоненты ω касательного поля оператора X^k выражаются через ξ с помощью частных производных, то определяющее уравнение

$$X^k f = 0$$

оказывается линейным ЧП-уравнением первого порядка относительно ξ . Конечно, ЧП-уравнения не так легко решаются, но в принципе методология позволяет выявить *все виды* симметрии изучаемого уравнения. А если еще учесть, что реально представляют интерес стержневые уравнения достаточно простого типа, то вскрытие *допускаемых групп* действительно происходит.

Примером служит полный комплект симметрий для уравнения $u_t = u_{tx}$, сведенный в таблицу в п. 5.5 и добытый как раз указанным способом. Неочевидные генераторы группы X_5 , X_6 получены решением определяющего уравнения

$$X^2 (u_t - u_{tx}) = 0.$$

Полнота здесь подразумевается в смысле базиса. Поскольку все операторы X_j линейны, то их линейные комбинации тоже являются *генераторами группы*, которые исчерпывают все *допускаемые симметрии*. Вопрос лишь в том, как удостовериться в полноте найденного набора.

¹⁶⁾ В этом смысле «большинство» функций обладают симметрией, хотя та и не воспринимается неподготовленным воображением.

5.8. Алгебры Ли

Территория алгебр Ли из быстро идущего транспорта выглядит приблизительно так¹⁷⁾. Факт представимости любой группы Ли своим «инфinitезимальным ядром» $\{X\}$, несущим на себе всю информацию о группе, в контексте вышесказанного более-менее очевиден. Неожиданно другое. Оказывается, $\{X\}$ может быть превращено в алгебраическую структуру с помощью операции коммутирования, и эта структура может эффективно работать.

Дело в том, что композиция операторов

$$X_1 = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad X_2 = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (5.29)$$

является дифференциальным оператором второго порядка, поскольку

$$\xi_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \xi_j(x) \frac{\partial \eta_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_i(x) \xi_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Но коммутатор

$$[X_1, X_2] = X_1 X_2 - X_2 X_1, \quad (5.30)$$

называемый *скобкой Ли*, является дифференциальным оператором *первого порядка*, ибо смешанные производные взаимно уничтожаются, в силу их независимости от порядка дифференцирования.

Скобка Ли в результате:

$$[X_1, X_2] = \sum_{i,j=1}^n \left[\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right] \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Коммутатор векторных полей $\xi(x), \eta(x)$ полагается равным

$$[\xi, \eta] = \left\{ \sum_i^n \left[\xi_1 \frac{\partial \eta_i}{\partial x_1} - \eta_1 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \right], \dots, \sum_i^n \left[\xi_n \frac{\partial \eta_i}{\partial x_n} - \eta_n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n} \right] \right\}.$$

¹⁷⁾ Беда математического образования в черно-белой пристальности внимания. Либо досконально, либо никак. Дескать, если в Париж, так на полгода. Очень неудобно, и как теперь говорят, контрпродуктивно.

Коммутатор (5.30) служит *билинейной операцией*, лежащей в основе определения *алгебры Ли*, какой называют векторное пространство L , замкнутое относительно операции $[\cdot, \cdot]$, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

- *Билинейность*:

$$\begin{aligned}\alpha[X_1, X_2] &= [\alpha X_1, X_2] = [X_1, \alpha X_2], \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ [X_1, X_2 + X_3] &= [X_1, X_2] + [X_1, X_3], \\ [X_1 + X_2, X_3] &= [X_1, X_3] + [X_2, X_3].\end{aligned}$$

- *Антисимметричность*:

$$[X_1, X_2] = -[X_2, X_1].$$

- *Тождество Якоби*:

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0. \quad (5.31)$$

Если функции $\xi_j(x)$ гладкие, то множество операторов $\{X\}$ с умножением (5.30) — образует алгебру Ли. При этом набор инфинитезимальных операторов (5.19) составляет базис *конечномерной алгебры Ли* L_r , причем $X_\lambda, X_\mu \in L_r$ влечет за собой $[X_\lambda, X_\mu] \in L_r$, т. е.

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_{\nu=1}^r c_{\lambda\mu}^\nu X_\nu, \quad \lambda, \mu = 1, \dots, r, \quad (5.32)$$

где $c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{R}$ — *структурные константы* алгебры L_r . Условие (5.32) необходимо и достаточно, чтобы совокупность *генераторов* $\{X_1, \dots, X_N\}$ была алгеброй Ли¹⁸⁾.

Все это, безусловно, требует здравой оценки. Если «далеко не ходить», то ни алгебры Ли, ни даже инфинитезимальные операторы, — не так уж нужны. Конечно, «поблизости» тоже есть выгоды. Проверка инвариантности $u(\mathbf{x})$ по индикатору $X u = 0$ бывает проще, чем выяснение справедливости

$$u(G_a \mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}).$$

¹⁸⁾ Алгебра Ли коммутативна в томм случае, когда все $[X_\lambda, X_\mu] = 0$.

И размножение интегралов движения в механике с помощью скобки Пуассона¹⁹⁾ хорошо известно. Да и стрельба из пушек по воробьям — дает эффект, какой-никакой. Однако сила артиллерии выявляется при решении иных прикладных задач, а роль алгебр Ли — при постановке более сложных вопросов, которые с первого взгляда иногда даже не ясно, как решить, и можно ли вообще. Не говоря о том, что пушки приносят больше пользы не как инструмент, а как аргумент.

По контексту нужна, конечно, иллюстрация. Вот несколько замусоленный, но показательный пример. На вещественной прямой \mathbb{R} генераторами группы $G(x, a)$ могут быть операторы $\xi_i(x)\partial_x$ с линейно независимыми функциями $\xi_i(x)$ — и их линейные комбинации. Разложение функций $\xi(x)$ в ряд по $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$ и поиск конечной алгебры с базисом

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x, \quad \dots, \quad X_{r+1} = x^r\partial_x$$

показывает, что r не может быть больше двух, поскольку

$$[X_r, X_{r+1}] = x^{2r-2}\partial_x = X_{2r-1},$$

что противоречит требованию (5.32) в случае $r > 2$.

Таким образом, на вещественной прямой \mathbb{R} возможны лишь три конечно-мерные алгебры Ли (с точностью до диффеоморфизма):

- алгебра с единственным инфинитезимальным оператором ∂_x , порождающая группу сдвигов $G(x, a) = x + a$;
- алгебра с двумя генераторами,

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x,$$

порождающая двухпараметрическую группу $G(x, a) = a_1x + a_2$;

- алгебра с тремя генераторами,

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x, \quad X_3 = x^2\partial_x,$$

порождающая трехпараметрическую группу, эквивалентную проективной группе $G(x, a) = \frac{a_1x + a_2}{a_3x + 1}$.

Обратим внимание, что в каждом из перечисленных случаев указана многопараметрическая группа. Это принципиальный момент, который характеризует совокупности генераторов

$$\{X_1, \dots, X_r\}, \tag{5.33}$$

¹⁹⁾ Стреляющей в том же направлении, что и скобка Ли.

образующие (в качестве базиса) алгебру Ли. Если комплект (5.33) не образует алгебру Ли, ситуация малопрозрачна. Каждый оператор X_j генерирует однопараметрическую группу, однако не ясно, можно ли эти группы свести воедино (в многопараметрическую), и нет ли других необнаруженных у системы симметрий. Разумеется, картина может быть доработана за счет взятия скобок Ли и доукомплектования (5.33) до «алгебраического набора» со всеми вытекающими последствиями.

Усилия в подобном направлении бывают оправданы, когда случайно найденного «не хватает». Дело ведь в том, что по наитию всегда обнаруживаются исключительно однопараметрические группы преобразований, каковых не всякий раз достаточно для получения желаемых решений. Иногда, и даже часто, везет. Скажем, автомодельное решение уравнения $u_t = u_{xx}$ (п. 5.2) — это наиболее важная иголка в стоге сена. Другие решения в том стоге большей частью пребывают в роли пустой породы, но время от времени требуются все же аномальные экземпляры, легче всего извлекаемые из общего решения, которое, в свою очередь, выплавляется из многопараметрической группы преобразований, отражающей *все* свойства симметрии уравнения $u_t = u_{xx}$.

Еще один существенный аспект — разрешимые алгебры Ли, устроенные по принципу *разрешимых групп* [3, т. 8]. Этакая матрешечная структура, представляющая собой цепочку вложенных подалгебр, с которой необходимо согласовывать анализ изучаемых уравнений. Дело в том, что неосторожное *частичное* использование комплекта симметрий (5.33) — скажем, в виде замен переменных, — может разрушать групповые свойства преобразованного уравнения, если из (5.33) «расходовалась» часть, не соответствующая вложенной подалгебре вышеупомянутой цепочки. В результате на втором этапе от исходной групповой инвариантности ничего не остается, хотя не все было исчерпано.

Наконец, самая важная remarque насчет алгебр Ли заключается в том, что эта штука не для повседневного пользования²⁰⁾. Для напи-

²⁰⁾ Не об отдельных лабораториях речь.

сания диссертации, может быть. Но главное — это один из столбов, подпирающих свод математических небес, каковым естественно пользоваться в его неподвижной ипостаси.

5.9. Прикладные аспекты

Общая теория, как правило, ветвится частностями. Скажем, *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u = 0, \quad n \geq 3, \quad (5.34)$$

инвариантно к группе вращений. Инварианты группы: u и $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Поиск решения в виде $u(r)$ после дифференцирования,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = u'(r) \frac{x_j}{r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = u''(r) \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 + \frac{u'(r)}{r} \left(1 - \left(\frac{x_j}{r} \right)^2 \right),$$

и подстановки в (5.34) приводит к

$$\Delta u = u'' + \frac{n-1}{r} u' = 0, \quad (5.35)$$

что равносильно $\frac{1}{r}[ru' + (n-2)u]' = 0$, и дает решение²¹⁾

$$u = \frac{C_1}{r^{n-2}} + C_2. \quad (5.36)$$

В случае $n = 2$ до (5.35) выкладки идентичны, после чего интегрирование $u'' + \frac{1}{r}u' = 0$ приводит к

$$u = \ln \frac{C}{r}.$$

- Волновое уравнение $u_{tt} = u_{xx}$ инвариантно к группе растяжений

$$\{t, x, u\} \mapsto \{at, ax, u\} \quad (t > 0).$$

²¹⁾ В (5.36) при подходящем выборе констант входит *фундаментальное решение* уравнения Лапласа.

Инварианты: u и $z = x/t$. Поиск решения в виде $u(x, t) = \varphi(z)$ после дифференцирования,

$$\begin{aligned} u_t &= -t^2 x \varphi' = -t^{-1} z \varphi', & u_x &= t^{-1} \varphi', \\ u_{tt} &= t^{-2}(z^2 \varphi'' + 2z\varphi'), & u_{xx} &= t^{-2} \varphi'', \end{aligned}$$

и подстановки в $u_{tt} = u_{xx}$ приводит к обыкновенному диф-уравнению

$$z^2 \varphi'' + 2z\varphi' - \varphi'' = 0.$$

Решение:

$$\varphi = C_1 \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| + C_2 \quad \Rightarrow \quad u = C_1 \ln \left| \frac{x-t}{x+t} \right| + C_2.$$

- Тепловое уравнение $u_t = u_{xx}$ инвариантно к группе переносов

$$\{t, x, u\} \mapsto \{t + \alpha, x + c\alpha, u\} \quad (t > 0). \quad (5.37)$$

Инварианты: u и $z = x - ct$. Поиск решения в виде $u(x, t) = \varphi(z)$ после дифференцирования,

$$u_t = -c\varphi', \quad u_x = \varphi', \quad u_{xx} = \varphi'',$$

и подстановки в $u_t = u_{xx}$ приводит к $\varphi'' + c\varphi' = 0$. Решением оказывается своеобразный солитон

$$u(x, t) = ke^{-cx - c^2 t} + \tilde{C}, \quad (5.38)$$

движущийся со скоростью c .

- Но (5.37) не исчерпывает симметрию уравнения $u_t = u_{xx}$. Еще есть, например, группа растяжений

$$\{t, x, u\} \mapsto \{at, \sqrt{\alpha}x, \alpha^\beta u\} \quad (t > 0)$$

с неопределенным «до поры до времени» параметром β . Инварианты: $t^{-\beta}u$ и $z = x/\sqrt{t}$. Инвариантное решение имеет вид

$$u = t^\beta \varphi(z).$$

Далее закулисная логика (п. 5.2) приводит к значению $\beta = -1/2$ и решению (5.9). Но на этом пути получаются решения, выражаемые через специальные функции, и для произвольных значений β . В частности,

$$\beta = 0 \Rightarrow u(x, t) = C_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) + C_2.$$

В рассмотренных примерах речь шла о так называемых *инвариантных решениях* — особых решениях, инвариантных к той же группе преобразований что и само уравнение. Такие решения, безусловно, не исчерпывают всех решений, ибо есть еще другие симметрии, и решения не обязаны быть инвариантны к допускаемым уравнениями группам. Напомним кое-что на примере обыкновенных дифуров, где «лучше видно».

Инвариантность дифференциального уравнения к той или иной группе преобразований влечет за собой инвариантность к той же группе — *совокупности*²²⁾ решений. Именно, не отдельных решений, а всей совокупности²²⁾, что позволяет весьма эффективно *размножать решения*. Например, инвариантный к группе растяжений $\{Cx, Ct\}$ дифур

$$t \frac{dx}{dt} = x + \sqrt{x^2 + t^2},$$

имеет частное решение $x = 1/2(t^2 - 1)$, в котором замена $x \mapsto Cx$, $t \mapsto Ct$ приводит к общему решению исходного уравнения:

$$x = \frac{1}{2} \left(Ct^2 - \frac{1}{C} \right).$$

Из одного решения получаются сразу все. Но трюк не всегда работает. Скажем, уравнение Риккати,

$$\dot{x} + x^2 = \frac{2}{t^2}, \quad (5.39)$$

инвариантное относительно группы растяжений $G = \{Cx, 1/Ct\}$, имеет общее решение

$$x = \frac{3t^2}{t^3 + C} - \frac{1}{t},$$

²²⁾ Инвариантность алгебраического уравнения $P(x) = 0$ к тем или иным преобразованиям — сохраняет корни, но может менять их местами. На этом пути возникают *группы Галуа* [3, т. 8].

которое не может быть получено групповым воздействием ни из частного решения $x = -1/t$, ни из $x = 2/t$, но получается из решения

$$x = \frac{3t^2}{t^3 + 1} - \frac{1}{t}$$

подстановкой $x \mapsto Cx$, $t \mapsto \frac{1}{C}t$ с последующей заменой константы $C^3 \mapsto C$.

Причина вскрывается при рассмотрении первых интегралов. Инвариантами группы \mathbf{G} служат кривые $xt = k$, среди которых лишь две, $xt = 2$ и $xt = -1$ переводятся группой \mathbf{G} сами в себя, что проверяется подстановкой $xt = k$ в (5.39). Это и есть *инвариантные решения* — именно они не подходят для целей «размножения». В любом другом частном решении действие группы $x \mapsto Cx$, $t \mapsto \frac{1}{C}t$ сдвигает константу, и механизм работает.

Аналогичная картина возникает в ЧП-задачах. Если уравнение инвариантно к группе преобразований

$$\{t, x, u\} \mapsto \{G_1(t, C), G_2(x, C), u\},$$

то из любого решения $u(x, t) = \varphi(x, t)$ может быть получено семейство решений

$$u(x, t) = \varphi(G_2(x, C), G_1(t, C)).$$

Глава 6

Обобщенные решения

Вовочка, не бей мальчика по голове лопатой, а то вспотеешь.

Мысль, пущенная в обход, приводит иногда к интересным результатам. Думать не обязательно в русле «как доказать существование». Почему бы искомое не определить так, чтобы и доказывать нечего было?

6.1. Обобщенные функции

Обычное понятие функции $y = f(x)$, ставящей в соответствие значениям аргумента x значения y , настолько плотно обосновывается в голове, что другие взгляды в этой нише пробивают себе дорогу с большим трудом. Хотя, строго говоря, ничто в этом мире нельзя описать точечным соответствием « $x \mapsto y$ » — ибо что такое температура в точке, как не результат усреднения кинетической энергии молекул в некоторой окрестности.

Источником возникновения теории обобщенных функций послужила *дельта-функция Дирака*, которая эффективно использовалась в физических исследованиях задолго до обоснования подходящей идеологии. Да и сейчас δ -функция остается весомой частью в приложениях общей теории [3, т. 2, 5]. Тем не менее разговор приходится начинать каждый раз заново, потому что трудно расчитывать пока на взаимопонимание в деталях.

Изначально $\delta(x)$ определялась как предел единичных импульсов¹⁾ $\delta_\varepsilon(x)$, прямоугольной либо колоколообразной формы (рис. 6.1), — при стремлении к нулю

¹⁾ Характеризуемых условием $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$.

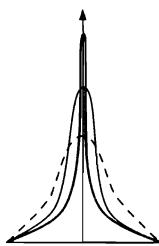


Рис. 6.1

«ширины» импульса, $\varepsilon \rightarrow 0$. Трудность заключалась в том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ никакого разумного предела вроде бы нет. Получается функция, равная бесконечности в нуле и нулю — в остальных точках.

Однако ситуации, в которых возникала потребность в чем-то подобном, всегда характеризовались тем, что $\delta(x)$ стояла под интегралом. То есть $\delta(x)$ нужна была не как функция, а как нечто, обеспечивающее при интегрировании определенный эффект. Но тогда и обыкновенный предел не нужен был. Достаточно было сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

что позволяло определить дельта-функцию как предел в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx. \quad (6.1)$$

А поскольку правую часть (6.1) можно рассматривать как скалярное произведение в подходящем функциональном пространстве, дельта-функция оказывается функционалом, действующим на другие функции φ по правилу $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Это приводит к мысли рассматривать *обобщенные функции* f не как механизм соответствия, а как функционалы

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (6.2)$$

на некотором подходящем *пространстве* \mathbb{D} вспомогательных функций $\varphi(x)$, которые принято называть *основными*²⁾.

Пространство \mathbb{D} обычно определяется как совокупность *финитных функций*³⁾, непрерывно дифференцируемых любое число

²⁾ При достаточном ассортименте элементов $\varphi(x)$ для обычных функций $f \neq g$ находится элемент $\varphi_{fg} \in \mathbb{D}$, позволяющий отличить f от g :

$$\langle f, \varphi_{fg} \rangle \neq \langle g, \varphi_{fg} \rangle.$$

Смещения, таким образом, не происходит. Старые возможности сохраняются, появляются — новые.

³⁾ Измеримая функция $\varphi(x)$ *финитна*, если имеет ограниченный *носитель* — наименьшее замкнутое множество $\text{supp } \varphi$, вне которого $\varphi(x) = 0$ почти всюду.

раз. В \mathbb{D} вводится специальная сходимость⁴⁾, в результате чего \mathbb{D} оказывается линейным топологическим пространством [3, т. 5].

6.1.1. *Всякий линейный непрерывный функционал $\langle f, \varphi \rangle$ на \mathbb{D} называют обобщенной функцией. Совокупность таких функционалов обозначают через \mathbb{D}^* .*

В результате возникает несколько неприятная разноголосица. Хорошо было бы говорить о функционалах, но вектор $f(x)$, с помощью которого записывается функционал (6.2), классифицируется как обобщенная функция. В итоге теория развивается с помощью функционалов f , аргументами которых служат $\varphi \in \mathbb{D}$, но в уме держатся функции f с аргументами $x \in \mathbb{R}$. То и другое имеет свой резон, как две стороны одной медали.

Не всякий функционал на \mathbb{D} может быть представлен в виде (6.2). Если это возможно, — функцию называют *регулярной*. Регулярными являются обычные функции. Интегрирование в (6.2) — фактически по ограниченной области, в силу финитности φ , — упрощает ситуацию, понижая требования к $f(x)$ до *локальной суммируемости*. Для кусочно-непрерывных $f(x)$ достаточно интегрировать по Риману, для измеримых — по Лебегу⁵⁾.

Определение $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$ в рамки (6.2) не укладывается, но для достижения единобразия чисто условно пишут

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x) dx.$$

6.1.2. *Последовательность $\{f_n\}$ обобщенных функций называют сходящейся к обобщенной функции f , если $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ для любой функции $\varphi \in \mathbb{D}$.*

⁴⁾ Последовательность $\varphi_n \subset \mathbb{D}$ сходится к φ , если объединение всех носителей,

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp } \varphi_n,$$

ограничено и производные $\varphi_n^{(k)}(x)$ любого фиксированного порядка k сходятся к $\varphi^{(k)}(x)$ равномерно на Ω .

⁵⁾ Функции, интегрируемые по любому ограниченному множеству, принято называть *локально интегрируемыми (суммируемыми)*.

Таким образом, сходимость обобщенных функций — есть *поточечная сходимость функционалов* (но не поточечная сходимость самих обобщенных функций).

Дифференцирование. В случае регулярной функции интегрирование по частям приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x) dx = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x) dx,$$

а поскольку $f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ в силу финитности φ , возникает простое *правило переброски производной*⁶⁾

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle. \quad (6.3)$$

Если f не регулярна, но $f_n \rightarrow f$, и все f_n регулярны, то

$$\langle f'_n, \varphi \rangle = -\langle f_n, \varphi' \rangle \rightarrow \langle f, \varphi' \rangle = -\langle f', \varphi \rangle,$$

что позволяет считать формулу (6.3) определением производной обобщенной функции независимо от способа представления функционала.

Последовательное применение (6.3) k раз дает формулу для k -й производной:

$$\boxed{\langle f^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \varphi^{(k)} \rangle.} \quad (6.4)$$

В соответствии с (6.4) k -я производная дельта-функции определяется функционалом

$$\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0),$$

а производная функции Хэвисайда $\theta(x)$ (единичного скачка) оказывается равной $\delta(x)$. Действительно,

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

откуда $\theta' = \delta$.

⁶⁾ При этом дифференцируемыми в обобщенном смысле оказываются разрывные и вообще измеримые функции. Тяжесть операции перекладывается на плечи $\varphi(x)$.

Дифференцируемость без всяких ограничений — одно из главных достижений теории обобщенных функций. Обобщенная функция дифференцируется сколько угодно раз.

Свертка обычных функций определяется как

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy. \quad (6.5)$$

Аналогично (с некоторыми оговорками) определяется свертка обобщенных функций⁷⁾. В частности,

$$\delta * f = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)f(x-z) dz = f(x),$$

а поскольку в данном случае дифференцирование по параметру перестановочно с интегрированием, то

$$\frac{d}{dx}(\delta * f) = \frac{d\delta}{dx} * f = \delta * \frac{df}{dx}.$$

Общее правило дифференцирования свертки:

$$(f * g)' = (f' * g) = (f * g').$$

Поэтому, если L — линейный дифференциальный оператор, то

$$L(f * g) = (Lf * g) = (f * Lg),$$

что определяет успех применения обобщенных функций в теории дифференциальных уравнений.

С точки зрения более широкого осознания роли обобщенных функций полезно задуматься о «сходимости расходящихся рядов». Если $f_n \rightarrow f$, то $f'_n \rightarrow f'$, и если на f_n смотреть как на частичные суммы некоторого ряда, получается удивительная вещь. Сходящийся ряд можно сколько угодно раз дифференцировать, он будет сходиться. Разумеется, в обобщенном смысле.

⁷⁾ Свертка обобщенных функций существует далеко не всегда. Достаточное условие: ограниченность носителя одной из функций.

Например, ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad (6.6)$$

сходится к разрывной периодической функции $f(x)$, принимающей значения $(\pi - x)/2$ на внутренности промежутка $[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi) = 0$.

Обобщенная производная

$$f'(x) = -1/2 + \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi).$$

С другой стороны, почленное дифференцирование (6.6) дает расходящийся в обычном смысле ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$. Но оба результата как обобщенные функции равны друг другу — поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = -\frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi).$$

Конечно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$ сходится и расходится одновременно.

Вопрос в том, для чего он используется. Если фигурирует только в промежуточных выкладках, но в итоге попадает под гусеницы интегрирования, — его можно считать сходящимся как обобщенную функцию. Это хороший пример на тему необходимости понимания обстоятельств за кадром.

«Дельта-тематика» не исчерпывает приложений обобщенных функций. Пример — функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, определяемая функционалом

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \text{Vp} \int \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

При этом

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

В квантовой механике используются также обобщенные функции $\frac{1}{x \pm i0}$, определяемые как пределы в \mathbb{D}^* функций $\frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ при

$\varepsilon \rightarrow +0$. Легко проверяются формулы Сохоцкого⁸⁾:

$$\frac{1}{x+i0} = -i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

$$\frac{1}{x-i0} = i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

6.2. Многомерная ситуация

Сказанное выше легко переносится с вещественной прямой на случай \mathbb{R}^n . Пространство \mathbb{D} определяется также, как совокупность финитных функций $\varphi(\mathbf{x})$, с той разницей, что теперь аргумент $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Не меняется и определение 6.1.1 обобщенных функций как линейных функционалов $\langle f, \varphi \rangle$ на \mathbb{D} . В регулярном случае функционалы записываются в форме

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где по сравнению с (6.2) интегрирование идет по \mathbb{R}^n .

Что касается дифференцирования, в действие вступают частные производные, но особой новизны при этом не возникает. Формула (6.3) меняется на

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad (6.7)$$

Аналогично определяется и делта-функция $\delta(\mathbf{x})$,

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Однако дополнительные степени свободы позволяют старыми инструментами достигать новых эффектов. Как правило, — за счет композиции, что эффективно работает даже на прямой.

Комбинация замен

$$\langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(\mathbf{u}), \quad \langle \delta(\gamma\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}) \rangle = |\gamma|^{-1}\varphi(0)$$

⁸⁾ Всякое равенство обобщенных функций доказывается скалярным умножением обеих частей на произвольную функцию φ из \mathbb{D} с последующей проверкой совпадения результатов.

приводит к

$$\langle \delta(\alpha x - \beta), \varphi(x) \rangle = |\alpha|^{-1} \varphi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

что позволяет говорить о равенстве $\delta(\alpha x - \beta) = |\alpha|^{-1} \delta(x - \beta/\alpha)$. В более общем случае функции $f(x)$ из C^∞ с простыми нулями — аналогично получается формула

$$\delta[f(x)] = \sum_{f(x_k)=0} \frac{\delta(x - x_k)}{|f'(x_k)|}. \quad (6.8)$$

В частности,

$$\delta(x^3 - 1) = \frac{\delta(x - 1)}{3}, \quad \delta(x^2 - 1) = \frac{\delta(x - 1)}{2} + \frac{\delta(x + 1)}{2}.$$

В \mathbb{R}^n аналогом (6.8) оказывается

$$\int \delta[f(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} d\sigma, \quad (6.9)$$

где Γ — поверхность $f(\mathbf{x}) = 0$. Необходимые оговорки очевидны.

Наличие модуля градиента в (6.9) бывает нежелательно. В этих случаях вместо δ -функции используют обобщенную функцию $\delta_{\mu\Gamma}$, действующую по правилу

$$\langle \delta_{\mu\Gamma}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \mu(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\sigma \quad (6.10)$$

и называемую *простым слоем* на поверхности Γ .

Простой слой $\delta_{\mu\Gamma}$ является в некотором роде обобщением обычной дельта-функции. Обобщением производной $-\delta'(\mathbf{x})$ служит так называемый *двойной слой* $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\delta_{\nu\Gamma})$ на поверхности Γ с нормалью \mathbf{n} , действие которого характеризуется функционалом⁹⁾

$$\left\langle -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\delta_{\nu\Gamma}), \varphi \right\rangle = \int_{\Gamma} \nu(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} d\sigma. \quad (6.11)$$

⁹⁾ Обобщенная функция $-\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\delta_{\nu\Gamma})$ описывает распределение диполей на поверхности Γ , ориентированных вдоль текущей нормали \mathbf{n} и распределенных с плотностью моментов $\nu(\mathbf{x})$.

6.3. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье $\Phi(f)$ обобщенных функций f строится на той же идее переброски преобразования в скалярном произведении с f на φ , т. е. $\Phi(f) = \hat{f}$ определяется равенством

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle. \quad (6.12)$$

Для этого, разумеется, должно быть определено преобразование основных функций. Обычная дефиниция¹⁰⁾

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \Phi[\varphi] = \int \varphi(x) e^{i\langle \xi, x \rangle} dx \quad (6.13)$$

порождает некоторое неудобство, преобразуя финитные функции в нефинитные. Поэтому *преобразование Фурье* (6.13) обычно рассматривается не на \mathbb{D} , а на пространстве \mathbb{D}_∞ бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $\|x\|^{-1}$.

Соответствующая точка зрения принята в [5, 19]. Преимущество \mathbb{D}_∞ заключено в том, что преобразование Фурье не выводит за пределы \mathbb{D}_∞ , и это позволяет свободно пользоваться обратным преобразованием

$$\Phi^{-1}[\widehat{\varphi}] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \varphi(\xi) e^{-i\langle \xi, x \rangle} d\xi.$$

Тем не менее значительная часть выгод преобразования Фурье может быть сохранена и в \mathbb{D} [6], наряду с плюсами финитности.

Главный трюк, который позволяет делать преобразование Фурье, — это замена дифференцирования умножением:

$$\Phi[D^\alpha \varphi] = (-i\xi)^\alpha \Phi[\varphi], \quad (6.14)$$

и наоборот,

$$D^\alpha \Phi[\varphi] = \Phi[(ix)^\alpha \varphi],$$

где α — мультииндекс.

¹⁰⁾ Область интегрирования \mathbb{R}^n подразумевается.

В случае однократного дифференцирования на \mathbb{R} фокус заключается в использовании интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) e^{i\xi x} dx = \varphi(x) e^{i\xi x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx,$$

с учетом быстрого убывания φ на бесконечности (что обнуляет первое слагаемое справа). В силу $\varphi \in \mathbb{D}_{\infty}$ операцию дифференцирования можно повторять сколько угодно раз.

Что касается определения (6.12) преобразования Фурье обобщенных функций, то здесь необходимо отметить два обстоятельства. При ориентации на \mathbb{D}_{∞} приходится предполагать, что f не слишком быстро растут на бесконечности¹¹⁾ — например, не быстрее чем полиномиально, «безобразничая как угодно» в ограниченных областях¹²⁾. Второй момент стандартный. В случае интегрируемых функций f равенство (6.12) вытекает из теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx \right] \varphi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\xi x} d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx, \end{aligned}$$

а в общем случае может быть принято в качестве определения за счет опоры на сходящиеся к линейным функционалам регулярные последовательности¹³⁾.

Следствием переброски (6.12) и замены дифференцирования умножением (6.14) в \mathbb{D}_{∞} — является аналогичный факт для обоб-

¹¹⁾ Принято говорить о функциях медленного (умеренного) роста.

¹²⁾ Ограничений роста на бесконечности можно избежать, полагая изначально $\varphi \in \mathbb{D}$, но за это приходится платить другой монетой.

¹³⁾ За всеми такими замечаниями стоят определенные технические подробности, каковых набирается солидный ворох. Это к тому, что функциональный анализ в значительной степени представляет собой совокупность предельных переходов, завораживающих поначалу многообразием форм. На «зрелой стадии» все это сливаются в скучную рутину.

шенных функций:

$$\boxed{\Phi[D^\alpha f] = (-i\xi)^\alpha \Phi[f].} \quad (6.15)$$

К (6.15) можно добавить свойства, характерные для преобразования Фурье обычных функций,

- $D^\alpha \Phi[f] = \Phi[(ix)^\alpha f]$,
- $\Phi^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^n} \Phi[f(-x)] \Rightarrow \Phi^{-1}[\Phi[f]] = f$, $\Phi[\Phi^{-1}[f]] = f$,
- $\Phi[f(\mathbf{x} - \mathbf{z})] = e^{i\langle \mathbf{z}, \xi \rangle} \Phi[f]$,
- $\Phi[f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})] = \Phi[f](\xi) \cdot \Phi[g](\eta)$,

а также соотношения с участием дельта-функции¹⁴⁾,

- $\Phi[\delta(\mathbf{x})] = 1$, $\Phi[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})] = e^{i\langle \xi, z \rangle}$,
- $\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{ikx}$,
- $\Phi[\theta] = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$.

Принципиально для дальнейшего Фурье-преобразование свертки обобщенных функций, одна из которых финитна (имеет компактный носитель)¹⁵⁾,

$$\boxed{\Phi[f * g] = \Phi[f] \cdot \Phi[g].} \quad (6.16)$$

¹⁴⁾ $\Phi[\delta(\mathbf{x})] = 1$ следует из $\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

¹⁵⁾ Финитность одной из функций «нужна», собственно, для существования самой свертки.

6.4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФУРЫ

Прежде чем переходить к ЧП-уравнениям, напомним, как дельта-функция работает на территории обыкновенных дифуров.

Решение линейных дифференциальных уравнений

$$Lx(t) = f(t), \quad (6.17)$$

где $Lx = x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx$, основывается на фундаментальном решении $\widehat{x}(t)$, удовлетворяющем уравнению

$$L\widehat{x}(t) = \delta(t),$$

описывающем реакцию системы на импульсное внешнее воздействие $\delta(t)$.

Решение (6.17) получается сверткой $\widehat{x}(t)$ с правой частью $f(t)$,

$x(t) = \widehat{x} * f,$

что легко проверяется:

$$L(\widehat{x} * f) = (L\widehat{x} * f) = (\delta * f) = f.$$

В неавтономном случае,

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x,$$

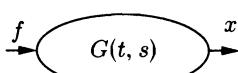

получается такой же результат. Пусть $G(t, s)$ обозначает фундаментальное решение уравнения $Lx = \delta(t - s)$. Умножая

Рис. 6.2

$$LG(t, s) = \delta(t - s)$$

на $f(s)$ и интегрируя по s , с учетом *принципа суперпозиции* и равенства

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t - s) dS,$$

получаем $Lx(t) = f(t)$, т. е.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s) dS, \quad (6.18)$$

где ядро $G(t, s)$ называют также *функцией Грина*¹⁶⁾.

В автономном случае $G(t, s)$ является функцией разности

$$\tau = t - s,$$

и вместо (6.18) получается

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau) f(t - \tau) d\tau,$$

что называют также *интегралом Дюамеля*.

6.5. О слабых и обобщенных решениях

Главный фокус, производимый обобщенными функциями в урматах, выглядит при поверхностном взгляде следующим образом. Например,

$$\Delta u = f(x) \quad (6.19)$$

умножается на «произвольную до некоторой степени» функцию $\varphi(x)$ и интегрируется,

$$\forall \varphi : \int \Delta u \cdot \varphi dx = \int f(x) \varphi dx, \quad (6.20)$$

что дает равносильное уравнение, ибо если (6.19) нарушается в точке x_0 , то ненулевая в малой окрестности x_0 функция $\varphi(x)$, равная нулю в остальных точках, привела бы к нарушению (6.20).

Пусть теперь $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $\varphi(x)$ достаточно быстро убывают на бесконечности вместе с первыми производными. Интегрируя тогда слева (6.20) *дважды по частям*, получим уравнение

$$\forall \varphi : \int u \cdot \Delta \varphi dx = \int f(x) \varphi dx, \quad (6.21)$$

¹⁶⁾ В теории автоматического регулирования $G(t, s)$ называют *импульсной переходной функцией*, и на систему $Lx = f(t)$ смотрят как на преобразование *входа* $f(t)$ в *выходной сигнал* $x(t)$ (рис. 6.2). О решениях типа (6.18) уже говорилось в п. 3.7, но это заслуживает многократного упоминания. В учебниках, правда, заведено вытаскивать на свет всякую тему не более одного раза, что с успехом нивелирует акценты.

в котором дифференцирование с искомой функции $u(\mathbf{x})$ вообще снято. Такие решения $u(\mathbf{x})$ называются *слабыми*, и они могут быть вообще недифференцируемы в обычном смысле, хотя их вполне естественно принимать за решения (6.19).

Подстерегающая за кадром неприятность заключена здесь в том, что для непрерывных функций $u(\mathbf{x})$ левая часть (6.21) не всегда представляется в виде

$$\int f(\mathbf{x})\varphi \, d\mathbf{x}$$

— функция f может не существовать. В результате кое-что трещит по швам, и теория слабых решений, каковая изначально выдвигалась в качестве альтернативы, не спасает. Теория обобщенных функций (*теория распределений*) идет в этом отношении дальше, принимая к рассмотрению выражения типа

$$\int u \cdot \Delta\varphi \, d\mathbf{x},$$

даже если они не представимы в виде

$$\int f(\mathbf{x})\varphi \, d\mathbf{x}.$$

Внешняя эскизная часть остается похожей, но «под микроскопом» это уже другая теория.

Расхождение начинается с определения пространства \mathbb{D} , каковое в финитном случае не банахово. Поэтому нет прямой возможности говорить о слабой сходимости функционалов, о сопряженном пространстве \mathbb{D}^* и обо всей совокупности стандартных faktov, облегчающих изучение банаховых пространств. Более того, \mathbb{D} — не нормированное и даже не метрическое пространство. Тем не менее это «хорошее» топологическое пространство, но оно требует специального внимания и соблюдения стандартных предосторожностей, что влечет за собой некоторую возню, естественную для монографий, но не очень подходящую для учебной литературы.

6.6. Фундаментальные решения

Обобщенным решением уравнения¹⁷⁾

$$L(D)u = f(\mathbf{x}) \quad (6.22)$$

считается всякая обобщенная функция $u \in \mathbb{D}^*$, удовлетворяющая (6.22) в смысле

$$\langle L(D)u, \varphi \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \varphi \rangle, \quad (6.23)$$

или равносильно, из-за переброски дифференцирования,

$$\langle u, L(-D)\varphi \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \varphi \rangle. \quad (6.24)$$

Если обобщенное решение имеет достаточную степень гладкости, то оно одновременно является классическим.

В случае «импульсного внешнего воздействия», $f(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, решение $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ уравнения (6.22), т. е.

$$L(D)\mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}), \quad (6.25)$$

называется *фундаментальным*.

Роль фундаментальных решений заключена в элементарно проверяемом соотношении¹⁸⁾

$$u = \mathcal{E} * f,$$

(6.26)

порождающем решения (6.22) с помощью свертки \mathcal{E} и f , при условии что такая свертка существует.

Смысл (6.26) заключается в представлении

$$f(\mathbf{x}) = \int f(\boldsymbol{\xi})\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

¹⁷⁾ Где $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, $L(D) = \sum a_\alpha D^\alpha$. Для простоты рассматриваются уравнения с постоянными коэффициентами. Общий случай связан с рассмотрением дифференциального оператора $L(\mathbf{x}, D) = \sum a_\alpha(\mathbf{x})D^\alpha$.

¹⁸⁾ $L(D)(\mathcal{E} * f) = L(D)\mathcal{E} * f = \delta(\mathbf{x}) * f = f$.

в виде суммы точечных источников $f(\xi)\delta(\mathbf{x} - \xi)$, порождающих реакции системы $f(\xi)\mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi)$, с последующим представлением решения в виде суперпозиции этих реакций,

$$u = \mathcal{E} * f = \int f(\xi)\mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi) d\xi.$$

Как фундаментальные, так и обобщенные решения неоднородных уравнений (6.22) в силу принципа суперпозиции определены с точностью до решения однородных уравнений $L(D)u = 0$. Иначе говоря, общее решение (6.22) есть $\mathcal{E} * f + u_0$, где $\mathcal{E} * f$ — частное решение, а u_0 — решение однородного уравнения $L(D)u = 0$. Однако роль u_0 тут практически никакая¹⁹⁾, ибо:

(!) в классе функций $u \in \mathbb{D}^*$, свертка которых с \mathcal{E} существует, решение (6.26) единственno. Действительно, в этом классе однородное уравнение $L(D)u = 0$ имеет только нулевое решение, поскольку

$$u = u * \delta = u * L(D)\mathcal{E} = L(D)u * \mathcal{E} = 0 * \mathcal{E} = 0. \blacksquare$$

Существование свертки здесь в некотором роде связано с чем-то типа *принципа причинности* [3, т. 2], в силу которого реакция системы не возникает до начала воздействия.

Применяя к (6.25) преобразование Фурье и опираясь на (6.14) и $\Phi[\delta] = 1$, получаем *необходимое и достаточное условие*

$$L(-i\xi) \cdot \Phi[\mathcal{E}] = 1, \quad (6.27)$$

чтобы \mathcal{E} было фундаментальным решением оператора $L(D)$.

Таким образом, рецепт поиска \mathcal{E} заключается в решении (6.27) и последующем применении преобразования Φ^{-1} . Вопрос только в том, существует ли решение (6.27), потому что $\Phi[\mathcal{E}] = L^{-1}(-i\xi)$ «хорошо выглядит» вне множества нулей полинома L . Тем не менее в случае $L(D)$ с постоянными коэффициентами решение (6.27) существует всегда — *теорема Хёрмандера*²⁰⁾.

¹⁹⁾ Она неизмеримо вырастает при рассмотрении функций Грина, п. 9.5.

²⁰⁾ Решений, как правило, много. Например, $\xi\Phi(\cdot) = 1$ имеет решение $\sim 1/\xi$ с вариациями поведения в нуле: $\mathscr{P}\frac{1}{\xi}, \quad \frac{1}{\xi \pm i0}$.

В [5, 6, 19] действие соответствующего механизма в конкретных ситуациях расписано достаточно подробно. Вот как это выглядит при беглом взгляде.

- Применяя к уравнению теплопроводности

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t)$$

Фурье-преобразование по \mathbf{x} , имеем

$$\Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}_t] - a^2 \Phi_{\mathbf{x}}[\Delta \mathcal{E}] = \Phi_{\mathbf{x}}[\delta(\mathbf{x}, t)].$$

С учетом

$$\Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}_t] = \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}], \quad \Phi_{\mathbf{x}}[\Delta \mathcal{E}] = -\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}],$$

$$\Phi_{\mathbf{x}}[\delta(\mathbf{x}, t)] = \Phi_{\mathbf{x}}[\delta(\mathbf{x}) \cdot \delta(t)] = \delta(t),$$

получаем фактически обыкновенное диф-уравнение:

$$-\frac{\partial \Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}]}{\partial t} + a^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}] = \delta(t),$$

решением которого служит²¹⁾

$$\Phi_{\mathbf{x}}[\mathcal{E}] = \theta(t) e^{-a^2 \|\boldsymbol{\xi}\|^2 t}. \quad (6.28)$$

Применяя к (6.28) обратное преобразование $\Phi_{\mathbf{x}}^{-1}$, имеем окончательно:

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t} \right\}. \quad (6.29)$$

- Действуя в том же ключе в отношении волнового уравнения

$$\square_c \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t),$$

²¹⁾ Фундаментальным решением обыкновенного дифура $Lz = \delta(t)$ является $\mathcal{E}(t) = \theta(t)z(t)$, где $z(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} Lz &= z^{(m)} + b_1(t)z^{(m-1)} + \dots + b_m(t)z = 0, \\ z(0) = z'(0) = \dots = z^{(m-2)}(0) &= 0, \quad z^{(m-1)}(0) = 1. \end{aligned}$$

в итоге получаем

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \theta(t) \Phi_{\boldsymbol{\xi}}^{-1} \left[\frac{\sin c\|\boldsymbol{\xi}\|t}{c\|\boldsymbol{\xi}\|} \right]. \quad (6.30)$$

В частности²²⁾,

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2c} \theta(ct - |\mathbf{x}|), \quad (6.31)$$

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(ct - \|\mathbf{x}\|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}}, \quad (6.32)$$

$$\mathcal{E}_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2). \quad (6.33)$$

- Фундаментальные решения оператора Лапласа

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x}\|, \quad (6.34)$$

и в общем случае $n \geq 3$:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\|\mathbf{x}\|^{-n+2}}{(n-2)\sigma_n}, \quad (6.35)$$

где σ_n площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , — фактически (с точностью до нормировки) были найдены в разделе 5.9.

В русле (6.27), т. е. в данном случае

$$-\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \cdot \Phi[\mathcal{E}] = 1, \quad (6.36)$$

задача также легко решается. Для $n = 2$ соотношению (6.36) удовлетворяет функция $-\mathcal{P} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}$. Действительно,

$$\left\langle \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \mathcal{P} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}, \varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2}, \|\boldsymbol{\xi}\|^2 \varphi \right\rangle = \int \varphi(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Применение обратного Фурье-преобразования дает (6.34). Аналогично выводится (6.35).

²²⁾ Решение вида (6.26), $V_n = \mathcal{E}_n * f$, в данном случае называют запаздывающим потенциалом с плотностью f .

6.7. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\square_c u = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u = f(\mathbf{x}, t), \quad (6.37)$$

$$u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=+0} = u_1(\mathbf{x}). \quad (6.38)$$

В классе функций $u(\mathbf{x}, t)$ и $f(\mathbf{x}, t)$, равных нулю при $t < 0$, задача (6.37)–(6.38) равносильна волновому уравнению

$$\square_c u = f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta'(t) + u_1(\mathbf{x})\delta(t). \quad (6.39)$$

Переход к (6.39) от (6.37)–(6.38) легче всего осознается на более простой задаче Коши для обыкновенного дифура:

$$u'' = f(t), \quad u|_{t=+0} = u_0, \quad u'|_{t=+0} = u_1. \quad (6.40)$$

Если $u(t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, то, в связи со скачком в нуле, к первой производной добавляется скачок $0 \mapsto u' + u_0\delta(t)$, а ко второй производной —

$$0 \mapsto u'' + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t). \quad (6.41)$$

В силу (6.41) задача (6.40) переходит в уравнение²³⁾

$$u'' = f(t) + u_0\delta'(t) + u_1\delta(t). \quad (6.42)$$

Благодаря замене (6.37)–(6.38) \Rightarrow (6.39) задача попадает под юрисдикцию механизма (6.26), и решение (6.37)–(6.38) получается с помощью свертки *фундаментального решения оператора Д'Аламбера* (6.30) с правой частью уравнения (6.39),

$$u = \mathcal{E} * [f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta'(t) + u_1(\mathbf{x})\delta(t)], \quad (6.43)$$

откуда видна *корректность* исходной задачи (непрерывная зависимость решения от начальных данных). Конкретные реализации (6.43) — *формулы Д'Аламбера* ($n = 1$), *Пуассона* ($n = 2$), *Кирхгофа* ($n = 3$) — довольно громоздки, и при избытке свободного времени могут обеспечить каким-никаким занятием. Не таким уж

²³⁾ При обязательном условии обнуления $u(t)$ и $f(t)$ при $t < 0$.

особо значимым, но вполне осмысленным, и представляющим безусловный интерес в области распространения волн. Тем более что в подноготной простой с виду формулы (6.43) имеются тонкости [5].

Задача Коши для уравнения теплопроводности,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f(\mathbf{x}, t), \quad (6.44)$$

$$u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x}), \quad (6.45)$$

так же как и (6.37)–(6.38) сводится, в классе функций $u(\mathbf{x}, t)$ и $f(\mathbf{x}, t)$, равных нулю при $t < 0$, к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta(t), \quad (6.46)$$

решение которого определяется сверткой вида (6.26) фундаментального решения (6.29) с правой частью уравнения (6.46).

Глава 7

Волновые процессы

Понимание дороже отдельно решенной задачи.

Распространение волн — «один из двух» возможных процессов распространения возбуждения в сплошной среде. Разнообразие вариантов здесь весьма велико, но есть и общий стержень, за который полезно держаться, чтобы тематика не расплзлась по закоулкам. «Пребывать в резонансе», конечно, не так легко, потому что, скажем, нелинейные явления тут просто-таки опровергают привычные воззрения, выросшие из линейной идеологии. А размерность среды так сильно влияет на характер колебаний, что соответствующие феномены дробят предмет на «несовместимые» части, как поначалу кажется. Например, при переходе от \mathbb{R}^3 к \mathbb{R}^2 возникает явление *диффузии волн*, в результате чего теряет силу *принцип Гюйгенса*, и плоскую Вселенную приходится рисовать другими красками. Тем не менее, хотя в подноготной уравнения $u_{tt} = c^2 \Delta u$ в каждом \mathbb{R}^n есть свой скелет в шкафу, уравнение на прямой $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ концентрирует в себе 90 % общей теории $u_{tt} = c^2 \Delta u$, — и это некоторым образом цементирует дисциплину.

7.1. Свободные колебания

Уравнение распространения волны вдоль прямой,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (7.1)$$

заменой переменных

$$\zeta = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

приводится к

$$u_{\zeta\eta} = 0,$$

что в силу $u_{\zeta\eta} = (u_\zeta)_\eta$ элементарно интегрируется:

$$u = f(\zeta) + g(\eta),$$

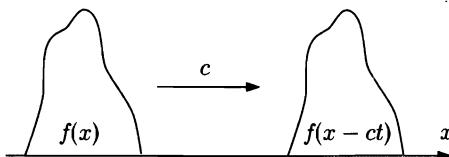


Рис. 7.1

где f и g произвольные функции, однократно (!) дифференцируемые¹⁾. Стало быть, общее решение в исходных переменных:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (7.2)$$

Слагаемое $f(x - ct)$ в (7.2) описывает движение начального возмущения $f(x)$ при $t = 0$ со скоростью c вправо (рис. 7.1). При этом возмущение движется, *не меняя формы*, что позволяет говорить о скорости распространения сигнала²⁾. Слагаемое $g(x + ct)$ в (7.2) описывает движение начального возмущения $g(x)$ с той же скоростью c влево.

В случае колебания неограниченной струны решение задачи Коши

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (7.3)$$

дается формулой Д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\zeta) d\zeta, \quad (7.4)$$

что элементарно проверяется.

Колебание струны с закрепленными концами:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (7.5)$$

¹⁾ Однако возврат к исходным переменным требует в (7.2) дважды непрерывной дифференцируемости функций f и g . Для решения парадокса необходимо задуматься о требованиях к гладкости замены координат.

²⁾ Если протяженное во времени возмущение движется, меняя форму, понятие скорости, строго говоря, теряет смысл.

также можно описать с помощью (7.4), но для этого функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, задающие начальные условия (7.3) на $[0, l]$, надо специальным образом продолжить на всю ось:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \quad \varphi(x + 2l) = \varphi(x), \quad (7.6)$$

$$\psi(-x) = -\psi(x). \quad \psi(x + 2l) = \psi(x). \quad (7.7)$$

Легко убедиться, что колебание (7.4) бесконечной струны с такими начальными условиями обеспечивает (7.5) при любом t .

Периодичность решения возникает из периодичности продолжения начальных условий (7.6), (7.7). Полученному решению можно было дать и другое толкование, не выходя за пределы $[0, l]$ и считая, что в точках 0 и l происходит отражение движущихся импульсов.

7.2. Разделение переменных и метод Фурье

Волновое уравнение представляет собой частный случай уравнения вида

$$u_{tt} - Lu = 0, \quad (7.8)$$

где L — эллиптический оператор, действующий только на пространственные переменные \mathbf{x} . Решение (7.8) ищется обычно в прокрустовом ложе краевых условий типа (2.6). Благодаря линейности задачи и разделенности переменных \mathbf{x} и t в (7.8), решение $u(\mathbf{x}, t)$ разыскивают в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = c(t) \cdot \psi(\mathbf{x}), \quad (7.9)$$

что после подстановки в (7.8) приводит к $\ddot{c}\psi = cL\psi$, т. е.

$$\frac{\ddot{c}}{c} = \frac{L\psi}{\psi} = \lambda. \quad (7.10)$$

В (7.10) дифур $\ddot{c} = \lambda c$ решается при любых λ , а вот уравнение $L\psi = \lambda\psi$ в паре с (2.6) — только при исключительных. Поэтому в центре внимания оказывается поиск собственных значений λ_k и

собственных функций ψ_k оператора L на границе Γ рассматривающей области,

$$L\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad \alpha \frac{\partial \psi_k}{\partial \mathbf{n}} + \beta \psi_k|_{\Gamma} = 0. \quad (7.11)$$

В стандартных ситуациях, например

$$-\Delta \psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad \psi_k|_{\Gamma} = 0,$$

собственные значения являются вещественными, положительными, имеют конечную кратность, и $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, причем существует полная ортонормированная система собственных функций $\{\psi_k\}$.

В силу линейности исходного уравнения (7.8) решение $u(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_k c_k(t) \cdot \psi_k(\mathbf{x}). \quad (7.12)$$

Подстановка (7.12) в (7.8) ведет к $\ddot{c}_k = \lambda_k c_k$ и, соответственно, к решению

$$c_k(t) = A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t, \quad \omega_k^2 = \lambda_k.$$

Коэффициенты A_k , B_k определяются из начальных условий

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}),$$

приводящих к разложениям

$$\sum_k A_k \psi_k = u_0(\mathbf{x}), \quad \sum_k \omega_k B_k \psi_k = u_1(\mathbf{x}).$$

Это, конечно, схема, реализация которой способна испортить немало крови. В «подневольном варианте», когда учить приходится, что скажут, — выбора нет. В условиях какой-никакой свободы кое-что, самое простое, имеет смысл посмотреть, чтобы заткнуть пустоту абстракции даже ненужной вещью³⁾.

³⁾ Из ненужных кирпичей неплохие дома получаются.

Рассмотрим задачу о колебаниях струны,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

с закрепленными концами,

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

и при начальных условиях

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

В качестве (7.11) в данном случае имеем

$$\psi'' + \lambda\psi = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (7.13)$$

При $\lambda > 0$ общее решение (7.13):

$$\psi(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x, \quad \omega^2 = \lambda,$$

и краевые условия условия удовлетворяются при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ в случае $\sin \omega l = 0$, откуда

$$\omega l = k\pi \Rightarrow \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$$

с ортогональными на $[0, l]$ собственными функциями

$$\left\{ \psi_k(x) = \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right) \right\}.$$

Заключительный этап с разложением $u_0(x), u_1(x)$ идеологически ясен. Результирующее колебание имеет вид

$$u(x, t) = \sum_k \left(A_k \sin \frac{k\pi ct}{l} + B_k \cos \frac{k\pi ct}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Равносильно

$$u(x, t) = \sum_k D_k \sin \left(\frac{k\pi ct}{l} + \varphi_k \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (7.14)$$

Слагаемые (7.14),

$$u_k(x, t) = D_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \left(\frac{k\pi ct}{l} + \varphi_k \right),$$

представляют собой собственные колебания струны. При данном k все точки $\mathbf{x} \in [0, l]$ совершают гармонические колебания переменной амплитуды $D_k \sin(k\pi x/l)$ с одинаковой частотой $k\pi c/l$ и фазой φ_k , одновременно достигая максимума и синхронно проходя через положение равновесия. Такие колебания «в унисон» называют *стоячими волнами*.

Сказанного, само собой, не всегда достаточно. Потребность в дополнительной информации зависит от генотипа читателя, наличия свободного времени и дальнейших планов. Но в любом случае надо иметь в виду, что расширение поля зрения производит определенный эффект. Решения задачи о струне при разных $u_0(x)$, $u_1(x)$, и даже о колебаниях мембранны, — казалось бы, не дают ничего принципиального нового. Тем не менее абстрактная схема наполняется материей, и понимание поднимается на стадию ощущений. Разумеется, диалектика оставляет вопрос о путях познания без ответа, и каждый выбирает тропу на свой вкус.

7.3. О роли спектрального разложения

Изложение метода разделения переменных (п. 7.2) воспроизводит общепринятую схему, каковая, несмотря на свою простоту, при внимательном рассмотрении вызывает ощущение дискомфорта. С какой стати решение (7.8) ищется в виде произведения (7.9)? Ведь из $u_{tt} = Lu$, где L действует только по \mathbf{x} , вовсе не следует $u(\mathbf{x}, t) = c(t) \cdot \psi(\mathbf{x})$. Тем более что в итоге оказывается

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_k c_k(t) \cdot \psi_k(\mathbf{x}). \quad (7.15)$$

Шаг за шагом, конечно, картина проясняется. Однако акценты все же целесообразно расставить иначе, выстраивая факты в другой последовательности. Итак, гипотетическое решение $u(\mathbf{x}, t)$ при любом фиксированном t разложим по какому-нибудь ортонормированному базису $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$, имея в результате (7.15), что после подстановки в $u_{tt} = Lu$ дает

$$\sum_k \ddot{c}_k \cdot \psi_k = \sum_k c_k \cdot L\psi_k. \quad (7.16)$$

Из (7.16) в общем случае ничего хорошего не получается. Но если

$$L\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad (7.17)$$

т. е. ψ_k собственные функции оператора L , — ситуация кардинально меняется. Равенство (7.16) превращается в

$$\sum_k \ddot{c}_k \cdot \psi_k = \sum_k \lambda_k c_k \cdot \psi_k, \quad (7.18)$$

для справедливости чего достаточно

$$\ddot{c}_k = \lambda_k c_k. \quad (7.19)$$

Вот, собственно, и весь сюжет. Становится ясно, что сначала надо найти собственные значения и собственные функции оператора L , т. е. решить (7.17) — разумеется, с учетом краевых условий, — затем наступает очередь (7.19)⁴⁾. Требования к L (самосопряженность и кое-что еще) необходимы для полноты системы собственных функций $\{\psi_k(\mathbf{x})\}$, иначе невозможно было бы утверждать представимость решения в виде (7.15).

7.4. Фронт и диффузия волн

Перечисленные в п. 6.6 фундаментальные решения (6.31)–(6.33) волнового уравнения проскальзывают мимо сознания, тогда как их принципиальные различия заслуживают внимания. В \mathbb{R}^3

$$\mathcal{E}_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2),$$

и это означает распространение возмущения $\mathcal{E}_3(\mathbf{x}, t)$ от точечного источника $\delta(\mathbf{x}) \cdot \delta(t)$ в виде *сферической волны* $\|\mathbf{x}\| = ct$, т. е. возмущение в момент $t > 0$ сконцентрировано на сфере радиуса ct с центром в $\mathbf{x} = 0$.

Если исходное возмущение мгновенно, но не точечно по \mathbf{x} , скажем $u_0(\mathbf{x}) \cdot \delta(t)$, то из каждой точки носителя $u_0(\mathbf{x})$ распространяется своя сферическая волна. Эти волны движутся со скоростью c

⁴⁾ Об этом и шла речь в п. 7.2, где предлагалось начинать с (7.10) без всех этих хлопот, но и без достаточного понимания обстоятельств.

и складываются в силу *принципа суперпозиции*, — в результате чего образуются⁵⁾ передний и задний фронт волны, как внешняя и внутренняя огибающая сферических волн. Область между фронтами возбуждена, ее дополнение находится в покое. В этом случае принято говорить о действии *принципа Гюйгенса*⁶⁾.

На прямой

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2c} \theta(ct - |x|),$$

и картина уже другая. Возмущение $\mathcal{E}_1(x, t)$ от точечного источника $\delta(x) \cdot \delta(t)$ в момент $t > 0$ целиком заполняет отрезок⁷⁾

$$-ct \leq x \leq ct,$$

и, в отличие от \mathbb{R}^3 , за фронтом волны покой не наступает. При этом говорят, что на прямой имеет место *диффузия волн*. Задние фронты не возникают, и авторитет *принципа Гюйгенса* терпит существенный урон.

Похожая картина имеет место на плоскости

$$\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(ct - \|\mathbf{x}\|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}},$$

где возмущение $\mathcal{E}_2(\mathbf{x}, t)$ от точечного источника $\delta(\mathbf{x}) \cdot \delta(t)$ в момент $t > 0$ целиком заполняет круг радиуса ct . Аналогично предыдущему говорят о нарушении *принципа Гюйгенса* и о *диффузии волн*.

Сопоставление фундаментальных решений с общим решением (7.2) волнового уравнения иногда вызывает недоумение из-за «нестыковки». Разногласия заключены в отличии однородного $\square_c \mathcal{E} = 0$

⁵⁾ Если носитель $u_0(\mathbf{x})$ компактен.

⁶⁾ Принципом Гюйгенса называют представление о том, что каждая точка среды, до которой дошло возмущение, становится источником вторичных волн. Представления о следствиях несколько расплывчаты. Одни говорят, что вторичные волны взаимодействуют по законам интерференции, другие, во избежание противоречий (см. далее), просто постулируют, что волны гасятся в «нежеланных» направлениях, оставляя на прицеле только движение переднего фронта.

⁷⁾ При постоянной амплитуде $1/(2c)$ возмущения.

и неоднородного уравнения $\square_c \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t)$. Форма сигнала $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ не меняется при движении по t как вправо, так и влево. Сигнал же $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ обязан аннигилировать при $t < 0$. Иначе говоря, решение $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t)$ при попутном движении как бы «схлопывается» при $t = 0$.

7.5. Бегущая волна

Решение $u(x, t) = f(x - ct)$ называют *бегущей волной*. В общественном сознании такие решения приписываются волновому уравнению, но они распространены гораздо шире. Каким бы ни было автономное⁸⁾ ЧП-уравнение относительно $u(x, t)$, подстановка в него $u(x, t) = f(x - ct)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции f , поскольку

$$\begin{aligned} u_t &= -cf', & u_x &= f', & u_{tt} &= c^2 f'', & u_{xx} &= f'', \\ u_{tx} &= -cf'', & \dots, \end{aligned}$$

и присутствие в исходном уравнении частных производных сколь угодно высокого порядка тут ничему не мешает.

Волновое уравнение (7.2) в этом отношении выделяется тем, что возникающий обыкновенный дифур допускает бегущую волну любой формы. Действительно, подстановка $u(x, t) = f(x - \tilde{c}t)$ в $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ приводит к

$$(\tilde{c}^2 - c^2)f'' = 0,$$

что в случае $\tilde{c}^2 = c^2$ выполняется для любой функции⁹⁾ f . Но (7.2) — не единственное исключение. Тем же свойством обладает, например, уравнение

$$u_t + cu_x = 0.$$

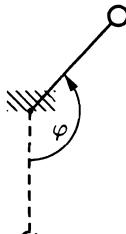
В общем случае ЧП-уравнения допускают бегущие волны только специальной формы. Диапазон возможностей довольно широк.

⁸⁾ Коэффициенты которого не зависят явно от x и t .

⁹⁾ А при $\tilde{c}^2 \neq c^2$ — для любой линейной функции $f = \alpha\tau + \beta$, $\tau = x - \tilde{c}t$.

От малоинтересных ситуаций типа *уравнения Хонфа* (п. 8.3)

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad (7.20)$$

 допускающего в качестве бегущей волны только константу¹⁰⁾, до экзотических солитонных решений. Знаменитое *уравнение Кортвега—де Фриза (КдФ-уравнение)*

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (7.21)$$

для бегущих импульсов $f(x - ct)$ переходит в

Рис. 7.2

$$-cf' + \alpha f \cdot f' + \beta f''' = 0.$$

Уравнение синус-Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (7.22)$$

для $u(x, t) = \varphi(x - ct)$ переходит в уравнение

$$(c^2 - 1)\varphi'' + \sin \varphi = 0,$$

описывающее колебание нелинейного маятника (рис. 7.2).

7.6. Солитоны и КдФ-уравнение

Коэффициенты α, β в (7.21) заменой переменных можно сделать любыми¹¹⁾. Один из стандартных вариантов *уравнения Кортвега—де Фриза*¹²⁾:

$$u_t + 6u \cdot u_x + u_{xxx} = 0, \quad (7.23)$$

что в случае $u(x, t) = f(x - ct)$ переходит в

$$-cf' + 6f \cdot f' + f''' = 0. \quad (7.24)$$

Интегрирование (7.24) приводит к уравнению второго порядка

$$-cf + 3f^2 + f'' = C_1,$$

¹⁰⁾ Подстановка $f(x - ct)$ в (7.20) приводит к $(f - c)f' = 0 \Rightarrow f = \text{const.}$

¹¹⁾ Включая изменение знаков.

¹²⁾ Наряду с (7.23) встречается $u_t - 6u \cdot u_x + u_{xxx} = 0$.

умножение которого на $2f'$ и повторное интегрирование дает

$$(f')^2 = -2f^3 + cf^2 + C_1 f + C_2,$$

что после очередного интегрирования описывает семейство решений f , среди которых находятся и солитоны,

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ch}^{-2} \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right], \quad (7.25)$$

каковыми называют импульсы, или волны, устойчивые к возмущениям и движущиеся без изменения формы¹³⁾. Решения (7.25) получаются в результате обнуления констант интегрирования, необходимость чего вытекает из естественных предположений $f, f', f'' \rightarrow 0$ на бесконечности, и выбора подходящего начала отсчета.

Заметим, когда эпопея интегрирования дифура типа (7.24) завершается без констант, — создается впечатление о магической изобретательности математики. Однако находчивое манипулирование краевыми условиями, поведением на бесконечности и прочими «хитростями» — никакого отношения к математике не имеет. Это физика, выделяющая осмысленные ограничения. Формально же общее решение (7.24) с балластом всех положенных констант удовлетворяет исходному уравнению.

Решения (7.25) были получены Кортвегом и де Фризом еще в 1895 году несложным интегрированием дифура (7.24), что схематично воспроизведено выше. В этой части — никаких сложностей. Да и результат поначалу не производит впечатления. Бегут какие-то шапочки (7.25) — рис. 7.3, ну и что? Под крышей

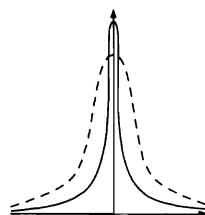


Рис. 7.3

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

что попало — бегущая волна. Тут, правда, эксклюзивные решения. Но есть ли основания бить в колокола?

Как ни странно — есть. И дело не в особой форме или зависимости скорости от амплитуды¹⁴⁾, а в устойчивости и «не-

¹³⁾ Отсюда происходит по той причине, что «бежать» могут не только импульсы ограниченной амплитуды и мощности, но и разные фантастические образования, не имеющие физического смысла. Например, уравнение теплопроводности тоже обладает бегущей волной в виде бесконечно большой экспоненты (5.38), (8.4).

¹⁴⁾ Скорость с движения солитона (7.25) пропорциональна амплитуде $c/2$.

уничтожимости». Возмущения (7.25) не затухают и не разбегаются подобно обычным волнам, сохраняя размеры и форму как угодно долго. Они подобны локализованным сгусткам энергии. Движутся, но не рассеиваются. Проходят друг через друга и выходят из области столкновения не изменившись. Встреча волны с «антиволной» заканчивается аннигиляцией.

Вот первое документальное описание солитона, сделанное корабельным инженером *Расселом* (1834): «Я следил за движением баржи, которую быстро тянула по узкому каналу пара лошадей, когда баржа неожиданно остановилась; но масса воды, которую баржа привела в движение, не остановилась; вместо этого она собралась около носа судна в состоянии безудержного движения, затем неожиданно оставила его позади, катясь вперед с огромной скоростью и принимая форму возвышения, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости».

Конечно, солитоны превратились в открытие — относительно недавно. Бум начался с работы *Забуски и Крускала*¹⁵⁾, описавших численные эксперименты с многосолитонными решениями и обнаруживших частицеподобное поведение. Выяснилось, что в природе существуют немыслимые по старым понятиям феномены. Линейному мировоззрению был нанесен серьезный удар.

В существование уединенной волны долгое время даже не верили, почему, собственно, КdФ-уравнение и пребывало в забвении. Сомнения опирались на «линейный опыт», в котором из-за дисперсии возмущения затухают, распадаясь на гармоники. Для нелинейных волн было естественно ожидать того же эффекта¹⁶⁾ — может быть, в другом оформлении. Однако выяснилось и постепенно устоялось понимание того, что энергия может распространяться устойчиво в локализованном виде без рассеяния. Нелинейный импульс возмущения оказывается неустраним как узел на замкнутом контуре. Солитоны начинают играть роль гармоник. Если один солитон догоняет другой, то на какое-то время они складываются,

¹⁵⁾ Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. **15**. P. 240–243.

¹⁶⁾ Теоретические выводы часто сильнее фактов. «Пока астрономические наблюдения не подтверждаются теорией, верить им нельзя» — Эддингтон.

но «сумма» не удовлетворяет КdФ-уравнению и вынуждена раздвоиться на те же слагаемые. В результате один солитон проходит сквозь другой почти не меняя формы.

Устойчивость распространения сигналов в нелинейной среде широко используется ныне для существенного повышения эффективности передачи информации в оптических линиях связи (скорость повышается в разы). Это рукотворное использование механизма. Эксплуатация того же феномена при Сотворении дала более грандиозные результаты.

В нелинейных волнах эмоциональная сторона — самая важная. Для познающей аудитории. Ибо литература по солитонам обширна, но изобилует подробностями, каковые не добавляют к общеобразовательному ядру чего-то существенного.

7.7. Фазовая скорость и дисперсия

Бегущую волну $u(x, t) = f(x - ct)$ в случае гармонического сигнала (когда бежит синусоида) принято записывать в форме

$$u(x, t) = \sin(\omega t - kx),$$

где $\omega = 2\pi\nu$ — круговая частота, ν — обычная, k — волновой вектор¹⁷⁾. При этом скорость

$$c = \frac{\omega}{k} \quad (7.26)$$

называется фазовой¹⁸⁾.

Понятие скорости волны весьма туманно из-за возможного изменения формы сигнала с течением времени, рис. 7.4, — в результате чего не ясно, за движением какой точки надо следить. За передним фронтом, положением максимума импульса¹⁹⁾ или

¹⁷⁾ В пространстве kx заменяется скалярным произведением $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle$.

¹⁸⁾ Фаза $\varphi = \omega t - kx = \text{const}$ для наблюдателя, движущегося со скоростью (7.26) вдоль оси x .

¹⁹⁾ Скорость движения максимума называют групповой. Тут часто вклинивается упоминание максимума огибающей волнового пакета — и понятие групповой скорости несколько расплывается.



Рис. 7.4

«центром тяжести». Однако при распространении электромагнитных волн в плотной среде каждая гармоника распространяется со своей постоянной *фазовой скоростью*, и в случае их различия говорят о *дисперсии*. Если ощущимая дисперсия отсутствует, то сигнал (световой в вакууме, звуковой в чистом поле) доходит до адресата в неискаженном виде — модель

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad c = \text{const}, \quad (7.27)$$

оказывается вполне точна. В других ситуациях дисперсия играет весомую роль, белый свет разлагается в красивый спектр, и (7.27) требует корректировки.

Глава 8

Диффузия

Симпатичная ложь превыше заумной правды.

Вопрос в том, что изучать. Диффузию как физический процесс¹⁾ или как решение уравнения теплопроводности? Возня с $u_t = u_{xx}$ напоминает судебную власть, находящуюся в зависимости от юридических норм и вынужденную игнорировать понятия внеправовых ценностей. Сосредоточение на $u_t = u_{xx}$ тоже уводит от реальности. И дело не в малых погрешностях, а в идеологическом несоответствии.

8.1. Парадокс бесконечной скорости

Фундаментальное решение (6.29) уравнения теплопроводности

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t),$$

как реакция системы на импульсное воздействие $\delta(\mathbf{x})\delta(t)$, имеет внешне безобидный вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t} \right\}. \quad (8.1)$$

Но обнаруживается странная вещь. Мгновенная тепловая вспышка (либо впрыск диффундирующего вещества) приводит фактически сразу²⁾ к повышению температуры (концентрации)

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) > 0$$

в любой точке пространства \mathbf{x} , сколь бы далеко она (точка) ни была от местоположения первичного воздействия³⁾.

¹⁾ Не говоря о миграции населения либо о распространении слухов.

²⁾ При любом $t > 0$.

³⁾ Обратим внимание, что фундаментальные решения (6.31)–(6.33) волнового уравнения — такой нелепости не допускают. Возмущение распространяется строго со скоростью c .

Выходит, *тепло (математическое) распространяется с бесконечной скоростью*, что физически, конечно, чушь. Разумеется, (8.1) служит хорошим приближением реального процесса, но это спасает положение только в прагматическом отношении. Остается болезненный вопрос идеологического толка. Как «вывод» уравнения мог породить противоречие с устройством поднебесной? И как при таких катастрофических оплошностях можно доверять инструментам?

Скажем, если $u(x, t)$ — плотность диффундирующего вещества, то физически ясен закон *сохранения массы*

$$\forall t : \int u(x, t) dx \equiv M, \quad (8.2)$$

а также *момента 1-го порядка*

$$\forall t : \int x \cdot u(x, t) dx \equiv M_1. \quad (8.3)$$

Но теперь непонятно, можно ли надеяться на точное соблюдение (8.2)–(8.3), если иметь в виду не реальный процесс, а математическую модель $u_t = \lambda u_{xx}$. Хорошо, что формальное доказательство занимает одну строчку:

$$\frac{d}{dt} \int u(x, t) dx = \int \frac{\partial u}{\partial t} dx = \lambda \int u_{xx} dx = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

в естественном предположении о затухании производной $\partial u / \partial x$ на бесконечности⁴⁾.

Аналогично устанавливается (8.3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int xu(x, t) dx &= \int x \frac{\partial u}{\partial t} dx = \lambda \int xu_{xx} dx = \lambda \int x du_x = \\ &= \lambda \left[x \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] = \lambda \left[x \frac{\partial u}{\partial x} - u \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] = 0. \end{aligned}$$

Что касается «доверия к инструментам», то вывод *уравнения диффузии* (п. 2.2) был по сути чисто квазистатическим и не опирался ни на какие представления о динамике процесса. Действительно,

⁴⁾ Без предположений все-таки не обходится, потому что $u_t = u_{xx}$ вмещает много всякой «ерунды» типа *многочленов теплопроводности*: x , $x^2 + 2t$, $x^3 + 6xt$, ...

были использованы только балансовые закономерности⁵⁾, а это и есть квазистатика. Поэтому надеяться на адекватные оценки скорости было бы опрометчиво.

Возвращаясь к «парадоксу», интересно обратить внимание на решения $u(x, t)$ типа *бегущей волны* (п. 7.5). Подстановка $u(x, t) = f(x - ct)$ в уравнение $u_t = \lambda u_{xx}$ быстро приводит к решениям

$$u(x, t) = \exp \left\{ -\frac{c}{\lambda}(x - ct) \right\}. \quad (8.4)$$

Экспоненты (8.4) бегут вправо, каждая со скоростью c — с любой наперед заданной. Это лишний раз напоминает, что модель $u_t = \lambda u_{xx}$ не улавливает реального поведения системы на микроравнении, выдавая любые скорости, получаемые в результате подгонки решений под балансовые соотношения.

8.2. Нелинейная теплопроводность

Определим реакцию одной из нелинейных моделей теплопроводности на импульсное воздействие⁶⁾:

$$u_t = (u \cdot u_x)_x, \quad u(x, 0) = \delta(x). \quad (8.5)$$

Задачу Коши (8.5) проще всего решать на основе групповых соображений (глава 5). Из переменных $\{u, x, t\}$ можно образовать только две независимых безразмерных комбинации⁷⁾ (см. п. 5.1):

$$u \sqrt[3]{t} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt[3]{t}}.$$

Поэтому $u \sqrt[3]{t} = f(x/\sqrt[3]{t})$, где функция f пока неизвестна. Подставляя

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt[3]{t}}\right)$$

⁵⁾ Сколько втекло — настолько нагрелось: поток тепла пропорционален градиенту температуры.

⁶⁾ Поток тепла в (8.5) тем больше, чем выше температура.

⁷⁾ Заметим, размерность дельта-функции, а значит и функции u в силу $u(x, 0) = \delta(x)$, обратно пропорциональна размёрности x .

в уравнение $u_t = (u \cdot u_x)_x$, получаем обыкновенный дифур

$$(f \cdot f')' + \frac{1}{3} \left[\frac{x}{\sqrt[3]{t}} f' + f \right] = 0 \quad (8.6)$$

для нахождения f . Решая (8.6) в предположении $f, f' \rightarrow 0$ на бесконечности, получаем в итоге

$$u(x, t) = t^{-1/3} \theta(C - x^2 t^{-2/3}), \quad (8.7)$$

где константа C определяется нормировкой.

Процесс (8.7) принципиально отличается от (8.1), поскольку в данном случае к моменту $t > 0$ тепло распространяется исключительно в пределах области

$$|x| < \sqrt{C} t^{1/3},$$

не достигая точек за ее пределами. Количество тепла (масса частиц), как и в линейной модели $u_t = \lambda u_{xx}$, здесь сохраняется.

Обратим внимание еще раз, что манипулирование краевыми условиями, поведением на бесконечности, нормированием и прочими «хитростями» — проистекает из представлений о физической природе изучаемых процессов. Формально же общее решение (8.6) с комплексом всех положенных констант удовлетворяет исходному уравнению.

8.3. Уравнения Хопфа и Бюргерса

Явления диффузии и колебаний, хотя и разнесены в разные категории, имеют между собой кое-что общее, и переходят друг в друга иногда при изменении параметров, а иногда и — точки зрения. В том и другом случае речь идет о распространении возмущений в среде. В случае диффузии — о проникновении одного ингредиента в другой, а в случае волнового процесса — о движении возбуждения, оставляющем частицы колебаться возле положения равновесия. Но это достаточно условно, ибо что осуществляет теплопередача? Дрейфуют не молекулы, а средняя скорость, — однако процесс диффузионный. Не говоря об ударных волнах при движении жидкости. Так что присутствие некоторых уравнений уместно в разных областях.

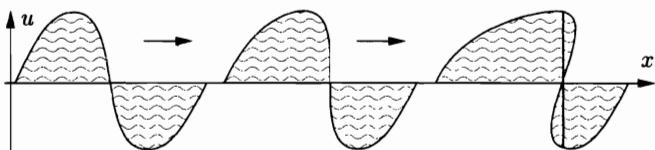


Рис. 8.1

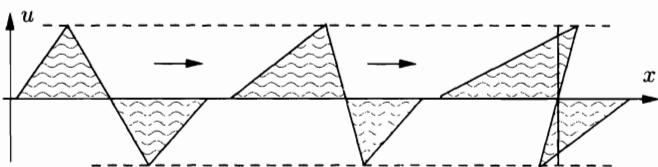


Рис. 8.2

Ситуация в связи с уравнением Хопфа (7.20),

$$u_t + u \cdot u_x = 0, \quad (8.8)$$

малоинтересна (п. 7.5) с точки зрения существования бегущей волны в ее обычном понимании, но здесь имеется волна, бегущая с переменной скоростью⁸⁾:

$$u(x, t) = \psi(x - ut). \quad (8.9)$$

Изюминка (8.9) заключена в том, что скорость частиц пропорциональна высоте $u(x, t)$ их положения на профиле волны. На гребне скорость максимальна. Поэтому процесс развивается примерно как на рис. 8.1, 8.2. Гребень движется быстрее основания, и в какой-то момент «голова обгоняет туловище» и происходит опрокидывание волны. Момент опрокидывания связан с появлением разрывного решения⁹⁾, называемого ударной волной.

Об ударной волне говорят, когда в довольно узкой зоне происходит смена характеристик потока, теплопередачи, диффузии, горения, — что принято интерпретировать как «разрыв» параметров среды.

⁸⁾ См. (4.10) с комментариями. Уравнение Хопфа — один из нелинейных вариантов $u_t + c(u) \cdot u_x = 0$, в которых скорость c зависит от амплитуды u . К таким волнам относятся возмущения в потоке невзаимодействующих частиц, движущихся вдоль оси x . Под $u(x, t)$ можно подразумевать отклонения от инерциальных траекторий либо плотность частиц в точке (x, t) .

⁹⁾ Функция $u(x, t) = \psi(x - ut)$ становится неоднозначной.

Учет вязкости¹⁰⁾ с коэффициентом μ превращает (8.8) в *уравнение Бюргерса*

$$u_t + u \cdot u_x = \mu u_{xx}, \quad (8.10)$$

уже имеющее решение в виде бегущей волны. В данном случае — в виде *бегущей ступеньки*

$$u(x, t) = \left[1 + \exp \left\{ \frac{x - 1/2 \cdot t}{2\mu} \right\} \right]^{-1}, \quad (8.11)$$

которая при $\mu \rightarrow 0$ переходит в решение с вертикальным фронтом , но опрокидывания волны не происходит.

◀ Решение (8.11) получается для «краевых условий»

$$u \rightarrow 1 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (8.12)$$

и $u_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Начинается все с подстановки $u(x, t) = f(x - ct)$ в (8.10), приводящей к дифференциальному уравнению

$$\mu f'' - f \cdot f' + c \cdot f' = 0,$$

интегрирование которого с учетом поведения f на бесконечности приводит к (8.11), давая по ходу дела значение скорости $c = 1/2$. ►

Если пределы в (8.12) вместо «один, ноль», соответственно, $u^- > u^+$, — скорость получается $c = (u^- + u^+)/2$. Зависимость (8.11) меняет асимптоты, но качественно остается прежней. Процесс может служить моделью течения жидкости по трубопроводу после резкого увеличения давления, а также свободного течения воды при образовании большого перепада высот.

Коул и Хонф обнаружили, что (8.10) заменой

$$u = -\frac{2\mu}{w} w_x$$

сводится к уравнению теплопроводности $w_t = \mu w_{xx}$.

¹⁰⁾ Обусловленной жидким трением друг о друга слоев жидкости.

Это примечательный факт сводимости нелинейного уравнения к линейному. Причина нелинейности ведь может заключаться в каверзном преобразовании переменных. И тогда обнаружение «линейного ядра» становится предметом открытия.

Идея заманчива, но толку от нее бывает мало. Решение

$$\begin{cases} \dot{u} = a(t)u + b(t)v, \\ \dot{v} = c(t)u - a(t)v \end{cases}$$

при условии $v(t) \neq 0$ — дает решение $x(t) = u(t)/v(t)$ нелинейного уравнения Риккати

$$\dot{x} - 2a(t)x - b(t) + c(t)x^2 = 0,$$

но оба «не решаются» [3, т. 2].

Глава 9

Эллиптические задачи

Всякое понимание — суть иллюзия, вырастающая из осознанных частностей и не подозревающая о пропастях между опорными точками.

Об эллиптических задачах целесообразно думать как о задачах статики, в которых исчезает роль времени и возникают стационарные режимы. При этом объект может «не стоять на месте». Среда колеблется, но распределение амплитуды стоячих волн «неподвижно». Вода течет, но потенциал скорости «парализован». Тепло приходит и уходит, а температура постоянна. Все это обычно укладывается в рамки *эллиптических уравнений*, как правило, *Лапласа*, *Пуассона*, *Гельмгольца*, о фундаментальном характере которых свидетельствует хотя бы охват ими законов гравитационного притяжения, не говоря о массе малозначительных задач, где в фокус внимания настойчиво проникает одна и та же «эллиптическая идея».

9.1. Эллиптические операторы

Напомним (п. 3.4), дифференциальный ЧП-оператор

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} A_\alpha(\mathbf{x}) D^\alpha, \quad (9.1)$$

α — мультииндекс, считается *эллиптическим*, если форма k -й степени

$$Q(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(\mathbf{x}) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$$

положительно (либо отрицательно) определена, т. е. не обращается в нуль при $\xi \neq 0$. В случае $k = 2$ поверхности уровня $Q(\mathbf{x}, \xi)$ — *эллипсоиды*, что объясняет происхождение термина. Определенность формы $Q(\mathbf{x}, \xi)$ приводит к отсутствию *характеристических поверхностей* у эллиптических уравнений, и это делает осмыслившими практически любые *краевые задачи* эллиптического типа (см. п. 3.5).

Формально *сопряженным оператором* к (9.1) является

$$L^*u = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [A_\alpha(\mathbf{x})u],$$

который эллиптичен как и (9.1), причем $L^{**} = L$, если тому не препятствует недостаточная гладкость коэффициентов.

Здесь мы рассматриваем эллиптические операторы второго порядка¹⁾,

$$Lu = - \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_k a_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + au, \quad (9.2)$$

что специфику только усиливает, и не выходит, если разобраться, за рамки свойств *оператора Лапласа*. Более того, принято считать, что всякое свойство уравнения *Лапласа* или *Пуассона* справедливо (в пределах здравого смысла) и для общего эллиптического уравнения. Поэтому без особых потерь далее можно считать $L = -\Delta$.

Замечание. При изучении некоторых вопросов можно пользоваться определением, с точки зрения которого, «если L эллиптичен, то и минус L — того же сорта». Но иногда, например при рассмотрении спектральных свойств, удобна большая конкретность. И тогда в (9.2) обязательно фигурирует минус, а матрица $[a_{ij}]$ предполагается положительно определенной.

9.2. Принцип максимума

Эллиптические операторы обладают выдающимися свойствами²⁾, среди которых видное место занимает *принцип максимума*, формулируемый обычно для *гармонических функций*, удовлетворяющих по определению *уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$. Вот пока слабая формулировка принципа, вскрывающая причины.

9.2.1. Гармоническая функция не может иметь строгий локальный максимум внутри области своего определения.

¹⁾ Характеризуемые положительной определенностью матрицы $[a_{ij}]$ и действующие на некоторой области Ω с достаточно гладкой границей Γ (поверхность Γ , как правило, считается *ляпуновской*). Коэффициенты в (9.2) также предполагаются достаточно гладкими.

²⁾ См. п. 3.4.1 и далее.

◀ Допустим противное. Пусть $u(\mathbf{x})$ имеет строгий локальный максимум в нуле³⁾. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция

$$v = u + \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad (9.3)$$

с одной стороны, тоже имеет локальный максимум в нуле, и потому матрица $\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right]$ отрицательно определена, что влечет за собой

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2} \leq 0,$$

с другой стороны, дифференцируя (9.3), имеем

$$\Delta v = \Delta u + 2n\varepsilon > 0. \blacktriangleright$$

Строгий локальный минимум внутри области определения тоже не достигается, ибо функция «минус u » равным образом гармоническая. Вокруг формулировки 9.2.1 легко накручиваются различные вариации, касающиеся в основном снятия предположения о строгости максимума.

9.2.2. Принцип максимума. Пусть функция $u(\mathbf{x})$ гармонична в области Ω . Тогда:

1. Если Ω ограничена, максимум и минимум $u(\mathbf{x})$ на замыкании $\bar{\Omega}$ достигаются на границе Γ .
2. Если максимум и минимум на Γ совпадают, то $u(\mathbf{x})$ константа; в частности, $u|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow u \equiv 0$ на $\bar{\Omega}$.
3. Если $u(\mathbf{x})$ достигает максимума или минимума внутри области, то $u(\mathbf{x})$ постоянна на Ω .
4. Пусть $u(\mathbf{x})$ достигает положительного максимума в точке $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, тогда либо $u(\mathbf{x})$ постоянна в Ω , либо производная по внешней нормали $\frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} > 0$.
5. В случае $\Omega = \mathbb{R}^n$ область значений $u(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Факт 9.2.2 с виду на микрон выше 9.2.1, но этого микрона часто как раз не хватает. Однако инструмент обоснования 9.2.1 в ситуации 9.2.2 напрямик не работает — замена есть в п. 9.3.

³⁾ Если в другой точке, то ее можно переместить в нуль сдвигом координат.

Принцип максимума интересен главным образом с точки зрения *теорем единственности*, каковые возникают по следующей схеме. Краевая задача Дирихле $\Delta u = f(\mathbf{x})$, $u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x})$ не может иметь двух решений u_1 и u_2 , потому что разность $u_1 - u_2$ является решением краевой задачи с нулевым граничным условием,

$$\Delta(u_1 - u_2) = 0, \quad (u_1 - u_2)|_{\Gamma} = 0,$$

которая в силу 9.2.2 имеет только нулевое решение.

Более того, такая схема с естественными оговорками работает при рассмотрении параболических уравнений

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0, \quad (9.4)$$

где эллиптический оператор L не содержит производных по времени, причем $a = 0$ в записи (9.2). С некоторой натяжкой (9.4) попадает в разряд «эллиптических уравнений». Натяжка заключается в том, что матрица $[a_{ij}]$ положительно определена нестрого — одна строка у нее (у матрицы) целиком нулевая⁴⁾. Тем не менее, с подобающими реверансами и в различных вариациях, — можно гарантировать единственность решения уравнения теплопроводности. Разнообразие предположений и выводов здесь несколько шире, чем у стерильно эллиптических задач.

Схема работает и в задаче Неймана

$$\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = u_1(\mathbf{x}).$$

Идея состоит в следующем. В предположении существования двух решений u_1 и u_2 , разность $\tilde{u} = u_1 - u_2$ является решением однородной задачи Неймана

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0,$$

⁴⁾ Из-за этой специфики о принципе максимума для параболических уравнений обычно говорят отдельно.

которой удовлетворяет только $\tilde{u} = \text{const}$. Действительно, гармоническая функция \tilde{u} вынуждена принимать максимальное значение на границе Γ в некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, причем максимум можно считать положительным, иначе полагаем $\tilde{u} = u_2 - u_1$. Условие $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} = 0$ исключает возможность $\frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{n}} > 0$. Но тогда 4-й пункт принципа максимума гарантирует $u = \text{const}$.

9.3. Гармонические функции

Решениям уравнения Лапласа присущее многое, что характерно для аналитических функций $f = u + iv$ в ТФКП и гармонических функций u и v на плоскости. В размерности $n > 2$ удобно опираться на формулы Грина (1.13), (1.14). Перепишем их с более привычными здесь обозначениями:

$$\int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) d\mathbf{x} = \oint_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma, \quad (9.5)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) d\mathbf{x} = \oint_{\Gamma} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right\} d\sigma, \quad (9.6)$$

где $d\mathbf{x}$ — дифференциал объема, $d\sigma$ — площади на S .

Обоснование (9.5), (9.6) в п. 1.2 подразумевало $n = 3$, но в общем случае ничего не меняется. Тем не менее далее будем считать $n = 3$, поскольку именно шаг из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^3 показывает, что специфика ТФКП для гармоничности не играет принципиальной роли.

Формулы Грина содержат в замаскированной форме различные свойства гармонических функций. Вот один из принципиальных фактов.

9.3.1. Гармоническая функция $u(\mathbf{x})$ на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей Γ имеет представление⁵⁾

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \right) d\sigma, \quad (9.7)$$

*

⁵⁾ Интегрирование происходит в пространстве переменных $\boldsymbol{\xi}$, переменная \mathbf{x} под интегралом играет роль параметра. Формула для \mathbb{R}^n получается заменой в (9.7) фундаментального решения \mathcal{E}_3 на \mathcal{E}_n .

т. е. значения $u(\mathbf{x})$ внутри Ω выражаются через ее значения на границе области⁶⁾.

◀ Подстановка $v = 1/\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|$ в (9.6) приводит к равенству

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\Delta u(\boldsymbol{\xi})}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} d\boldsymbol{\xi}, \quad (9.8)$$

справедливому для любой достаточно гладкой функции⁷⁾ $u(\mathbf{x})$. Конечно, легко сказка сказывается. Равенство (9.8) возникает в результате преодоления некоторых технических осложнений, связанных с обращением знаменателей в ноль. Поэтому точка $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ окружается малым шаром B_r , формула (9.6) переписывается для области $\Omega \setminus B_r$, после чего (9.8) получается устремлением к нулю радиуса шара B_r . Соотношение (9.7) вытекает из (9.8), поскольку функция $u(\mathbf{x})$ гармоническая, а значит $\Delta u = 0$. ▶

9.3.2. Теорема о среднем. Среднее значение гармонической функции $u(\mathbf{x})$ на границе S_r шара B_r равно значению функции в центре шара⁸⁾,

$$u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{S_r} u(\boldsymbol{\xi}) d\sigma. \quad (9.9)$$

◀ Полагая $v = 1$ в (9.5), имеем⁹⁾

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0. \quad (9.10)$$

Применяя (9.7) к S_r и полагая $\mathbf{x} = 0$, с учетом (9.9) получаем (9.10). ▶¹⁰⁾

Теорема 9.3.2 обобщает хорошо известный в ТФКП результат. Последствия аналогичные. Легко получается, например, полноценное обоснование *принципа максимума* 9.2.2.

⁶⁾ Что является аналогом интегральной формулы Коши.

⁷⁾ Не обязательно гармонической.

⁸⁾ Формула (9.9) записана для $n = 3$. В случае $n > 3$ знаменатель $4\pi r^2$ надо заменить площадью сферы в \mathbb{R}^n .

⁹⁾ Строго говоря, под интегралом в (9.10) стоит, в общем-то, скалярное произведение $u(\boldsymbol{\xi}) \cdot d\sigma$, но оба векторных сомножителя одинаково направлены... Факт (9.10) полезен сам по себе. Из него следует, например, неразрешимость задачи Неймана $\Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} \equiv 1$. Подразумевается, конечно, $\Delta u = 0$ в любой точке Ω .

¹⁰⁾ Мы допускаем некоторую вольность. Функция $u(\mathbf{x})$ должна быть гармонична в $B_r = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < r\}$ и непрерывна на \bar{B}_r . Тогда при обосновании надо взять $r' < r$, а потом перейти к пределу $r' \rightarrow r$.

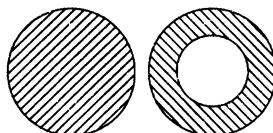
◀ Допустим, $u(\mathbf{x})$ принимает максимальное значение M на $\bar{\Omega}$ во внутренней точке $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Из теоремы 9.3.2 легко следует $u(\mathbf{x}) \equiv M$ на любом шаре ⁽¹¹⁾ $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \bar{\Omega}$ с центром в \mathbf{x}_0 .

Далее выбираем максимальное r при условии $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) \subset \bar{\Omega}$, и точку $\mathbf{x}_1 \in \partial B_r(\mathbf{x}_0)$, лежащую в Ω . Получаем $u(\mathbf{x}) \equiv M$ на любом шаре $\bar{B}_r(\mathbf{x}_1) \subset \bar{\Omega}$ и т. п. Продолжая в том же духе, исчерпываем всю область Ω . ►

9.4. Ньютоны потенциалы

Проникновение в суть вещей нуждается в осознании взаимосвязей. Пока всемирное тяготение с уравнением Лапласа лежат на разных полках — консолидации нет. Тогда как силы, обратно пропорциональные квадрату расстояния, $F \sim 1/r^2$, и направленные «по линии соединяющей», можно вычислять как антиградиент потенциала $\psi(r) \sim 1/r$, хотя и мифического, но продуктивного идеологически.

Физики мистифицируют друг друга, делая вид будто потенциалы не математический фокус, а материалистическая реальность. Возможно, они правы, но если электрон создает потенциал $\psi(\mathbf{r})$, неважно электрический или гравитационный, то это он сам? — лично присутствующий Везде, или напряжение в среде — тогда какой? Как бы там ни было, подобные вопросы неудобны и безответны. Конечно, легко сказать, что электрон занимает всю Вселенную, но мы еще не дотягиваем до такой истины.



Однако независимо от первичности сил или потенциалов — инструмент получается удобный. К материальным точкам подсоединяются потенциалы, заполняющие все пространство, которые рождают *поля сил* и тривиально складываются. Ощущение надуманности быстро проходит при первых же попытках решения элементарных задач. С какой силой действует на материальную точку M массивный шар B ? Или шаровое кольцо? Разумеется, принципиально все ясно. Гравитационную массу надо разбить на мелкие ячейки, и считая те приближенно материальными точками, найти результирующую их

⁽¹¹⁾ Непосредственно из 9.3.2 следует $u(\mathbf{x}) \equiv M$ на любой сфере $S_r(\mathbf{x}_0) \subset \bar{\Omega}$, а значит и на шаре.

воздействия. Окончательный результат достигается предельным измельчением разбиения. Рецепт уже выглядит громоздко, а если чего доброго M и B движутся относительно друг друга — без конца пересчитывать? Тут умение вычислять потенциал, создаваемый шаровым слоем, сильно бы помогло.

Удобный подход к задаче дает *уравнение Пуассона*¹²⁾

$$\Delta\psi = -4\pi\rho(\mathbf{r}). \quad (9.11)$$

Путь к (9.11) довольно прост. Исходный потенциал $\psi(\mathbf{r}) = 1/r$, как легко проверить, например с помощью (11.1), — вне особой точки удовлетворяет *уравнению Лапласа*¹³⁾ $\Delta\psi = 0$, а потенциал \mathcal{E} точечного гравитационного источника¹⁴⁾ в положении ξ — уравнению $\Delta\mathcal{E} = \delta(\mathbf{r} - \xi)$, см. п. 6.6.

Пусть теперь гравитационные заряды распределены с плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Далее остается воспользоваться принципом суперпозиции. Представляя $\rho(\mathbf{r})$ в виде суммы

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho(\xi)\delta(\mathbf{r} - \xi) d\xi$$

точечных источников $\rho(\xi)\delta(\mathbf{r} - \xi)$, порождающих реакции системы $\rho(\xi)\mathcal{E}(\mathbf{r} - \xi)$, с последующим представлением решения ψ уравнения (9.11) в виде суперпозиции этих реакций,

$$\psi = \mathcal{E} * f = \int \rho(\xi)\mathcal{E}(\mathbf{r} - \xi) d\xi.$$

¹²⁾ Коэффициент 4π общепринят. Равен площади единичной сферы в \mathbb{R}^3 . Упрощает вид решения, поскольку у потенциала (6.35) исчезает множитель $1/(4\pi)$ (при $n = 3$), и его не надо таскать за собой, производя выкладки. Знак минус в (9.11) тоже выдумка — условная — связана с желанием иметь растущий или убывающий потенциал (отталкивающий или притягивающий).

¹³⁾ Подыскать уравнение для $\psi(\mathbf{r}) = 1/r$ легко и без «криволинейных премудростей». Прямолинейное дифференцирование дает

$$\psi_{xx} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \psi_{yy} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \psi_{zz} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

что после сложения приводит к $\Delta\psi = 0$.

¹⁴⁾ Так называемое *фундаментальное решение*.

С учетом (6.35) для \mathbb{R}^3 получается универсальная формула¹⁵⁾

$$\psi = \int \frac{\rho(\xi)}{\|\mathbf{r} - \xi\|} d\xi, \quad (9.12)$$

решающая сразу как бы «все задачи»¹⁶⁾. Несмотря на это, о происхождении общей формулы из уравнения (9.11) не стоит забывать. Если потенциалы — это механизм, порождающий силы, то уравнение Пуассона — это механизм, порождающий потенциалы¹⁷⁾. И о свойствах решения иногда удобнее судить по свойствам уравнения.

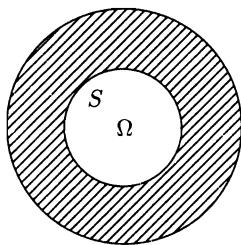


Рис. 9.1

В случае шарового кольца (рис. 9.1) из соображений сферической симметрии уравнения (9.11) ясно, что на внутренней сфере S потенциал ψ постоянен. Но тогда из *принципа максимума* 9.2.2 следует $\psi \equiv \text{const}$ на внутренней области Ω , что в свою очередь влечет за собой $\text{grad } \psi \equiv 0$ в Ω . Таким образом, внутри шарового слоя гравитационные силы не действуют. Факт не такой уж очевидный, если обосновывать его исходя из $F = \gamma m M / r^2$.

В (9.12) подразумевается, вообще говоря, плотность $\rho(\mathbf{r})$ непрерывной, с компактным носителем M . В этом случае потенциал ψ непрерывно дифференцируем в M , бесконечно дифференцируем в $\mathbb{R}^3 \setminus M$, и $\psi \rightarrow 0$ на бесконечности.

Допустимы также сингулярные плотности, характеризующие распределение масс (электрических зарядов) на поверхностях Γ . Тут идея (9.12) остается внешне без изменения, но привлекается функция $\delta_{\mu\Gamma}$ простого слоя, см. (6.10), что в итоге дает *потенциал простого слоя*

$$\psi = \int_{\Gamma} \frac{\mu(\xi)}{\|\mathbf{r} - \xi\|} d\sigma, \quad (9.13)$$

¹⁵⁾ Аналогичная формула в плоскости, с учетом (6.34),

$$\psi \sim \int \rho(\xi) \ln (\|\mathbf{r} - \xi\|) d\xi.$$

¹⁶⁾ О сингулярном распределении источников поля см. далее.

¹⁷⁾ Неплохо бы иметь механизм, порождающий уравнения.

с заменой объемного интегрирования (9.12) поверхностным. При этом $\mu(\xi)$ в (9.13) уже не объемная, а поверхностная плотность.

В электростатике, где существуют положительные и отрицательные заряды, на поверхности Γ могут быть сконцентрированы *диполи*, и тогда в действие вступает идеология *двойного слоя*. Комбинация схемы (9.12) с функционалом (6.11) дает *потенциал двойного слоя*

$$\psi = \int_{\Gamma} \nu(\xi) \frac{\partial \|r - \xi\|^{-1}}{\partial n} d\sigma, \quad (9.14)$$

с аналогичным приведенному выше уточнением, $\nu(\xi)$ в (9.14) — поверхностная плотность диполей.

Потенциалы (9.13), (9.14) удовлетворяют, соответственно, уравнениям Пуассона:

$$\Delta\psi = -4\pi\delta_{\mu\Gamma}, \quad \Delta\psi = 4\pi \frac{\partial}{\partial n} (\delta_{\nu\Gamma}).$$

9.5. Функция Грина

Обобщенные решения уравнения

$$Lu = f(x) \quad (9.15)$$

определенны с точностью до решения соответствующего однородного уравнения $Lu = 0$. В п. 6.6 за основу брались *фундаментальные решения* $\mathcal{E}(x)$, единственность которых, как решений уравнения $L\mathcal{E} = \delta(x)$, проистекала из предположения о существовании свертки

$$u = \mathcal{E} * f = \int f(\xi) \mathcal{E}(x - \xi) d\xi,$$

каковое и обеспечивало единственность \mathcal{E} в \mathbb{R}^n .

При «заходе с другой стороны» можно было бы сказать по-другому. *Фундаментальные решения*¹⁸⁾ $\mathcal{E}(x)$ единственны, если

¹⁸⁾ Напомним, в главе речь идет об эллиптических операторах.

из решений $L\mathcal{E} = \delta(\mathbf{x})$ выделяются определенные в \mathbb{R}^n и стремящиеся к нулю на бесконечности. Тогда, мол, $u = \mathcal{E} * f$ из $Lu = f(\mathbf{x})$ получается однозначным образом.

Если же, как это часто бывает, (9.15) фигурирует в паре с граничными условиями, например, речь идет о *задаче Дирихле*¹⁹⁾

$$Lu = f(\mathbf{x}), \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (9.16)$$

то здесь самое время вспомнить о неиспользованной свободе при определении \mathcal{E} . Всевозможные реакции системы $Lu = \delta(\mathbf{x} - \xi)$ на воздействие $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ в точке ξ — есть не $\mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi)$, а

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi) + \psi(\mathbf{x}, \xi), \quad (9.17)$$

где ψ — любое решение $L\psi = 0$, и если выбором ψ распорядиться так, чтобы $G(\mathbf{x}, \xi)|_{\Gamma} = 0$, — не заботясь о поведении G на бесконечности, ибо игровое поле теперь Ω , — то $G(\mathbf{x}, \xi)$ будет реакцией системы на импульсное воздействие $\delta(\mathbf{x} - \xi)$,

$$LG(\mathbf{x}, \xi) = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad (9.18)$$

которая обнуляется на Γ и именуется *функцией Грина*²⁰⁾.

Далее сценарий развивается подобно п. 6.6. Решение (9.16), в предположении достаточной гладкости f и Γ , получается типа свертки:

$$u = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (9.19)$$

◀ что удовлетворяет (9.16), ибо $G|_{\Gamma} = 0 \Rightarrow u|_{\Gamma} = 0$, поскольку суперпозиция решений $G(\mathbf{x}, \xi)$, обнуляющихся на границе, дает такую же «сумму». Кроме того,

$$Lu = \int_{\Omega} LG(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \xi) f(\xi) d\xi = f(\mathbf{x}). \blacktriangleright$$

¹⁹⁾ На компактной области Ω с границей Γ . Обычно мы имеем в виду *внутреннюю задачу*, предполагающую поиск функции в Ω , внутри Γ . *Внешняя задача* предполагает поиск функции вне Ω .

²⁰⁾ Добавка $\psi(\mathbf{x})$ в (9.17) называется *компенсирующей функцией*. Она удовлетворяет граничному условию $\psi(\mathbf{x}, \xi)|_{\Gamma} = -\mathcal{E}(\mathbf{x} - \xi)|_{\Gamma}$.

Таким образом, функция Грина — тоже «фундаментальное решение», только не в \mathbb{R}^n , а в области Ω .

Некоторая чехарда возникает иногда относительно определяющего уравнения (9.18), которое временами записывают с минусом,

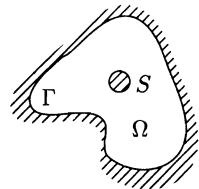
$$LG(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad (9.20)$$

что ведет к перестройке знаков в решениях и является вопросом удобства. В гравитации принят знак $+\delta$, и тогда потенциал (6.35) отрицателен. В электростатике заряды бывают разных знаков, и там удобнее «то так, то эдак».

Важную роль с точки зрения благоприятных последствий играет знакоопределенность функции Грина.

9.5.1. В случае определения функции Грина²¹⁾ для $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \Omega$, исходя из (9.20), имеем $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) > 0$ на $\Omega \setminus 0$.

◀ В случае (9.20) $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow \infty$ при $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}$. Поэтому, если начало отсчета перенести в точку $\boldsymbol{\xi}$, то на достаточно малых сферах S с центром в нуле функция G будет строго положительна, и будучи нулевой на Γ , будет в силу принципа максимума строго положительной на $\Omega \setminus 0$. ►



Функция Грина $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ вне диагонали (при $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$) непрерывна по совокупности переменных. Имеют место оценки:

$$\begin{aligned} 0 < G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &< \gamma_0 \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^{-n+2}, \quad n > 2, \\ 0 < G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &< \zeta_0 |\ln \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\||, \quad n = 2, \end{aligned}$$

из которых, а также из теорем Соболева об операторах типа потенциала следует, что интегральный оператор (9.19) действует из каждого L_p ($p > n/2$) в пространство непрерывных функций C на $\bar{\Omega}$ и вполне непрерывен²²⁾.

Все это играет существенную роль при изучении интегральных уравнений Гаммерштейна,

$$u = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(u, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (9.21)$$

²¹⁾ Задачи Дирихле (9.16).

²²⁾ А также вполне непрерывен, как оператор из C в C .

которые служат обращением задач вида

$$Lu = f(u, \mathbf{x}), \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

где правая часть дифференциального уравнения нелинейным образом зависит от искомой функции $u(\mathbf{x})^{23)}$. Знакопределенность функции Грина позволяет здесь использовать обширный арсенал теории нелинейных операторов в пространствах с конусом²⁴⁾.

В случае $f(u, \mathbf{x}) = \lambda u$ (9.21) становится линейным интегральным уравнением

$$u = \lambda \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u \, d\boldsymbol{\xi}, \quad (9.22)$$

обратным к задаче $Lu = \lambda u$, $u|_{\Gamma} = 0$.

Построение функции Грина — отдельная, часто далеко не простая задача. Там, где интересующая область Ω является пересечением шаров и полупространств, результата добиваются подходящим размещением точечных зарядов (положительных и отрицательных), если мыслить электростатическими категориями. Вот пример построения $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ для шара, $\Omega = B_r$. Точке $\boldsymbol{\xi}$ ставится в соответствие инверсно-сопряженная точка²⁵⁾

$$\boldsymbol{\xi}^* = \boldsymbol{\xi} \frac{r^2}{\|\boldsymbol{\xi}\|^2},$$

и функция Грина ищется в виде

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} - \frac{q}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*\|},$$

т. е. для обеспечения условия

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{S_r} = 0 \quad (9.23)$$

при любом $\boldsymbol{\xi} \in B_r$ — используется всего один параметр, заряд «минус q », расположенный в точке²⁶⁾ $\boldsymbol{\xi}^*$. Как ни странно, решение

²³⁾ Плотность от потенциала, внешнее воздействие от амплитуды и т. п.

²⁴⁾ См. Опоццев В. И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Тр. Моск. матем. об-ва. 1978. 36. С. 237–273.

²⁵⁾ В предположении $\boldsymbol{\xi} \neq 0$, которое в итоге снимается.

²⁶⁾ Другой (единичный) заряд располагается в точке $\boldsymbol{\xi}$.

существует. Граничное условие (9.23) обеспечивается при $q = r/\|\xi\|$. Пример сам по себе интересный, но это другая тематика, геометрическая. Стандартный комплект иллюстраций имеется практически в любом учебнике.

9.6. Ненулевые граничные условия

Задача Дирихле с ненулевыми граничными условиями,

$$\Delta u = -f(\mathbf{x}), \quad u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x}), \quad (9.24)$$

автоматически решается с помощью функции Грина:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi - \oint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} u_0(\mathbf{x}) d\sigma. \quad (9.25)$$

◀ Подстановка $v = G(\mathbf{x}, \xi)$ в (9.6), с учетом (9.24), приводит к равенству

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) d\xi + \oint_{\Gamma} \left(G \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Технические манипуляции аналогичны выводу (9.8).

Далее остается учесть $u = u_0$ и $G = 0$ на Γ . ►

Теперь, располагая, например, функцией Грина для шара B_r , с помощью (9.25) после несложных выкладок получаем *формулу Пуассона*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r} \oint_{S_r} \frac{r^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x} - \xi\|^3} u_0(\xi) d\sigma,$$

которая решает задачу Дирихле для шара:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{S_r} = u_0(\mathbf{x}).$$

Задачу Дирихле на плоскости (для единичного круга) решает *интеграл Пуассона* [3, т. 9]:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\xi) P(r, \xi - \varphi) d\xi, \quad P(r, \theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta.$$

Что касается задачи Неймана в \mathbb{R}^2 ,

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_r} = u_1(\mathbf{x}), \quad (9.26)$$

то, в силу обобщенных условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial v}{\partial t} = u_1(\theta),$$

имеем

$$v \Big|_{S_r} = - \int_0^t u_1(\theta) d\theta.$$

Поэтому, если задача (9.26) решается, то она может быть решена в два этапа. Сначала ищется гармоническая функция v , удовлетворяющая условию

$$v \Big|_{S_r} = - \int_0^t u_1(\theta) d\theta$$

(т. е. решается задача Дирихле), после чего решение (9.26) определяется как сопряженная функция

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + \text{const.}$$

Задача Неймана часто замалчивается, поскольку для разрешимости (9.26) требуется, в силу (9.10),

$$\oint_{\Gamma} u_1(\mathbf{x}) d\sigma = 0,$$

что является довольно жестким условием.

В случае неоднородной задачи

$$\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_r} = u_1(\mathbf{x}), \quad (9.27)$$

условием разрешимости является не менее жесткое требование

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \oint_{\Gamma} u_1(\mathbf{x}) d\sigma = 0, \quad (9.28)$$

вытекающее из формулы Грина (9.6) при $v = 1$ и учета (9.27).

Приведенный выше трюк из ТФКП для решения задачи (9.26) на плоскости обобщается на любые $n \geq 3$, но это не меняет аномальной природы задачи Неймана. Малейшие возмущения граничных условий могут нарушать баланс (9.28), трансформируя разрешимые задачи в неразрешимые.

Замечание о корректности²⁷⁾. Правая часть (9.25) представляет собой непрерывный оператор, и потому задача Дирихле (9.24) *корректно поставлена*. С задачей Неймана (9.26) так легко разделаться не удается, поскольку решение определено с точностью до константы, и в таких обстоятельствах разговор о корректности невозможен. Однако можно договориться выбирать константу из условия

$$\oint_{\Gamma} u \, d\sigma = 0,$$

тогда решение будет единственным, и если допускать возмущения только не нарушающие ограничения (9.28), задача становится корректной.

9.7. Спектральные свойства

Необходимость поиска собственных значений λ и собственных функций ψ оператора L при определенных краевых условиях, например²⁸⁾

$$L\psi = \lambda\psi, \quad \psi|_{\Gamma} = 0, \tag{9.29}$$

возникает в различных ситуациях. Во-первых, описание (9.29) может иметь исходная содержательная задача. Скажем, диффузия при поглощении частиц средой пропорционально их концентрации, $\sim \lambda\psi$. Либо описание стационарных амплитуд колебаний, в зависимости от частот, что в квантовой механике, кстати, равносильно выяснению распределения энергетических состояний. Во-вторых, но это даже более важно, решение (9.29) во всей полноте, т. е. определение всех собственных значений и функций, позволяет изучать

²⁷⁾Хотя мы более-менее избегаем уточнять, в каких пространствах действуют рассматриваемые операторы, о корректности можно говорить, поскольку «диапазон» приблизительно ясен.

²⁸⁾Или с более общим граничным условием $\alpha \partial\psi/\partial\mathbf{n} + \beta\psi|_{\Gamma} = 0$.

оператор L (граничные условия подразумеваются) на основе его спектральных свойств (п. 11.3).

В разделе 7.3 описан сценарий, в рамках которого возникает необходимость спектрального разложения эллиптического оператора L при анализе *волнового уравнения* $u_{tt} = Lu$. То же самое происходит в случае уравнения теплопроводности $u_t = Lu$. Подстановка потенциального решения

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_k^{\infty} c_k(t) \cdot \psi_k(\mathbf{x}),$$

разложенного по некоторому базису $\{\psi_k\}$, приводит к

$$\sum_k^{\infty} \dot{c}_k \cdot \psi_k = \sum_k^{\infty} c_k \cdot L\psi_k, \quad (9.30)$$

что в общем случае не сулит каких-либо выгод. Однако в случае, когда ψ_k — собственные функции оператора L ,

$$L\psi_k = \lambda_k \psi_k, \quad (9.31)$$

ситуация меняется, (9.30) переходит в

$$\sum_k \dot{c}_k \cdot \psi_k = \sum_k \lambda_k c_k \cdot \psi_k,$$

для справедливости чего достаточно

$$\dot{c}_k = \lambda_k c_k.$$

Вместо двух точек над c_k теперь одна — вот и вся разница с $u_{tt} = Lu$. А в сердцевине в том и другом случае задача (9.31) о собственных значениях и функциях эллиптического оператора L — в частности, $L = -\Delta$.

9.8. Комментарии

- Эллиптические операторы вида (9.2) часто записывают в *самосопряженной форме*:

$$Lu = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + au.$$

Матрица $[a_{ij}(\mathbf{x})]$ положительно определена, причем ее собственные значения ограничены снизу некоторым $\varepsilon > 0$ равномерно на $\bar{\Omega}$.

Интегрирование по частям дает L -формулу Грина:

$$\int_{\Omega} Luv \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} uLv \, d\mathbf{x} + \oint_{\Gamma} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} - v \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right\} d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ — дифференцирование по конормали:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{x}_j, \mathbf{n}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i},$$

\mathbf{n} внешняя нормаль к Γ .

- Замена Δ эллиптическим оператором (9.2) иногда не требует мер безопасности, но в ряде случаев необходимы уточнения. Вот пример обобщения 9.2.1: «Функция $u(\mathbf{x})$, удовлетворяющая уравнению $Lu = 0$ на области Ω , при условии $a = 0$ в (9.2), не может иметь строгий локальный максимум внутри Ω ». Здесь потребовалась ликвидация в L свободного члена au .

◀ Схема доказательства та же самая, что и в п. 9.2.1, с заменой $\Delta \Rightarrow L$. Необходимо заметить также, что первые производные в максимуме равны нулю и сам максимум без ограничения общности можно считать нулевым. Далее надо добавить, что из отрицательной определенности $\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right]$ вытекает²⁹⁾ отрицательная определенность матрицы $\left[a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right]$, при условии что $[a_{ij}]$ положительно определена. Это влечет за собой³⁰⁾ $Lv \leqslant 0$, что дает противоречие при сопоставлении с $Lv = Lu + 2n\varepsilon > 0$. ►

- Принцип максимума 9.2.2 при замене $\Delta \Rightarrow L$ остается без изменений, если $a = 0$ в (9.2). Если $a \leqslant 0$, $Lu \geqslant 0$ и функция $u(\mathbf{x})$ достигает своего максимума во внутренней точке, причем «максимум» положителен, то $u(\mathbf{x})$ постоянна.

- Если $a \leqslant 0$, то решение $u(\mathbf{x})$ задачи Дирихле $Lu = f(\mathbf{x})$, $u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x})$ удовлетворяет неравенству

$$\|u\| \leqslant \max \|u_0\| + \gamma \max \|f\|, \quad (9.32)$$

²⁹⁾ По теореме Шура [3, т. 3, стр. 101].

³⁰⁾ Потому что у отрицательно определенной матрицы сумма всех элементов отрицательна. Достаточно в $\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j < 0$ положить все $x_k = 1$.

где γ зависит от диаметра области, размерности задачи и диапазона, в который укладываются все a_{ij} и a_i . Получается, оценка (9.32) не зависит ни от формы области Ω , ни от величины a .

- При беглом изложении предмета не обходится без потерь, в том числе — эмоциональных. Над задачей Дирихле $\Delta u = f(x)$, $u|_{\Gamma} = u_0(x)$ ломали голову многие соискатели. Брешь пробил Пуассон, нашедший решение в случае сферы. Общее решение для произвольной гладкой поверхности Γ дал Фредгольм. Поэтому легкость, с которой предмет излагается задним числом, обманчива.

- Задача Штурма—Лиувилля является одномерным примером краевой задачи с эллиптическим оператором³¹⁾. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(\alpha u')' + \beta u = \lambda u, \quad \alpha(x), \beta(x) > 0,$$

рассматривается в комбинации с теми или иными граничными условиями на отрезке $[a, b]$. Пример показателен, но он «везде есть». К тому же, если уж пытаться извлечь пользу, то задачу важно не осмотреть, а повозиться самостоятельно.

- При изучении спектра эллиптического оператора фокус внимания приходится на разные стороны задачи. Какие-то спектральные свойства гарантируют полноту системы собственных функций, и там целесообразность усилий не вызывает сомнений. Но какие-то характеристики спектра выглядят бесполезными. Вот один из таких результатов, на самом деле весьма важный. Рассмотрим задачу

$$-\frac{1}{2}\Delta u = \lambda u, \quad u|_{\Gamma} = 0,$$

и пусть $A(\lambda)$ обозначает число собственных значений меньших λ . Лоренц (1908) выдвинул предположение об асимптотическом поведении

$$A(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda^{2/3} \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (9.33)$$

обоснованное впоследствии Вейлем (1911). Факт (9.33) кажется бесплодным, но тут надо вспомнить физику. Собственные значения в квантовых системах, да и в классических, характеризуют энергетические уровни, распределение которых играет ключевую роль при описании изучаемых объектов, — достаточно вспомнить распределение Максвелла молекул по скоростям.

³¹⁾Хотя обычно эллиптический оператор предполагают (по некоторым причинам) действующим в размерности $n \geq 2$.

Глава 10

Дифференциальные формы

Изучение \mathbb{R}^n в координатной нотации — это рытье котлована зубочисткой.

Дифференциальные формы изначально возникли в рамках замыслов о многомерных обобщениях *дивергенции*, *ротора*, *теоремы Стокса*, — а затем превратились в инструмент гораздо более широкого назначения. Для чтения предыдущих глав «инструмент» не требуется, но в рассматриваемой области иногда применяется. Поэтому есть резон иметь общее представление, чтобы развеять ощущение тарасницы.

10.1. Внешние формы

Жирным шрифтом, как и прежде, обозначаются векторы из некоторого евклидова конечномерного пространства.

10.1.1. Внешней формой степени k , или k -формой, называется знакопеременная¹⁾ полилинейная²⁾ функция $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$, принимающая вещественные значения. Вместо ω иногда пишут ω^k .

- 1-формы — это линейные функционалы, т. е. скалярные произведения $\omega(\xi) = \langle a, \xi \rangle$. Если в \mathbb{R}^n выбрана система координат x_1, \dots, x_n , то любая координата $x_i(\xi)$ вектора ξ является 1-формой. Более того, систему координат в \mathbb{R}^n всегда можно выбрать так, что данная 1-форма $\omega^1(\xi)$ будет, например, первой координатой³⁾.

¹⁾ Меняющая знак при перестановке любых двух аргументов, что влечет за собой перемену знака при любой нечетной перестановке аргументов, и нечувствительность к четным перестановкам.

²⁾ То есть линейная по каждой отдельной переменной.

³⁾ Тривиальные формы $\omega \equiv 0$ мы оставляем за бортом.

- Примером k -формы может служить определитель⁴⁾

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{k1} & \dots & \xi_{kk} \end{vmatrix}, \quad (10.1)$$

где $\xi_i = \{\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik}\}$. Если $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — невырожденная матрица, то $\phi(\eta_1, \dots, \eta_k) = \omega(A\eta_1, \dots, A\eta_k)$ — также k -форма.

Шаблон (10.1) является, вообще говоря, исчерпывающим, поскольку выбором подходящей системы координат для данной k -формы всегда можно добиться записи ω в виде (10.1)⁵⁾.

• Формы одной степени можно обычным образом складывать и умножать на число, — поэтому ω^k сами образуют линейное пространство.

• Значение ω на линейно зависимых векторах ξ_1, \dots, ξ_k равно нулю. Вследствие этого $\omega^k \equiv 0$ в \mathbb{R}^n при условии $k > n$.

Если не считать некоторых неудобств в связи с оговорками насчет линейных замен координат, — получается, что k -формы есть *определители*, и какая-то часть их теории — не что иное как теория *ориентированных объемов параллелепипедов*. Поэтому многое, что уже перемалывалось в линейной алгебре, здесь повторяется на другом языке. Заметим также, что внешние формы, по существу, являются *дифференциальными формами*. Разница лишь в том, что последние определяются на касательных пространствах, каковые — суть те же \mathbb{R}^m .

10.2. Внешнее умножение

Операция внешнего умножения играет в дифференциальных формах стержневую роль, но не очень хорошо укладывается в голове. Поэтому некоторые усилия на обдумывание тут не помешают.

⁴⁾ Полилинейность и знакопеременность детерминанта известна из курса линейной алгебры [3, т. 3].

⁵⁾ Но часто приходится работать в заданной системе координат, и тогда каноническая форма записи ω^k другая — см. (10.4).

10.2.1. Внешнее произведение $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$ 1-форм определяется как

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_k(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1(\xi_k) & \dots & \omega_k(\xi_k) \end{vmatrix} \quad (10.2)$$

и представляет собой k -форму⁶⁾, принимающую значение ориентированного объема параллелепипеда, построенного на векторах $\omega_1, \dots, \omega_k$, где $\omega_i = \{\omega_i(\xi_1), \dots, \omega_i(\xi_k)\}$.

- Если каждая 1-форма $\omega_i(\xi)$ есть i -я координата $x_i(\xi)$ вектора ξ , то (10.2) переходит в

$$\omega^k = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{k1} & \dots & \xi_{kk} \end{vmatrix}, \quad (10.3)$$

$\xi = \{\xi_{11}, \dots, \xi_{kk}\}$. Вариант (10.3) в некотором роде канонический, поскольку

$$\omega_i(\xi) = x_i(\xi)$$

можно обеспечить выбором подходящей системы координат.

- В системе координат x_1, \dots, x_n произведение $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$ есть ориентированный объем проекции параллелепипеда $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ на подпространство x_{i_1}, \dots, x_{i_k} параллельно остальным координатам.

- Внешние формы вида $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$, линейно независимы и образуют базис линейного пространства k -форм в \mathbb{R}^n , при этом всякая k -форма в \mathbb{R}^n представляется в виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}. \quad (10.4)$$

10.2.2. Внешним произведением $\omega^k \wedge \omega^l$ k -формы на l -форму в \mathbb{R}^n называется $(k+l)$ -форма в \mathbb{R}^n , значение которой равно

$$(\omega^k \wedge \omega^l)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum \pm \omega^k(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \omega^l(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_l}), \quad (10.5)$$

где знак плюс перед слагаемым выбирается, если перестановка i_1, \dots, i_k , j_1, \dots, j_l из $1, \dots, k+l$ — четная, и знак минус, если — нечетная; а суммирование в (10.5) происходит по всем возрастающим нумерациям, $i_1 < \dots < i_k$, $j_1 < \dots < j_l$.

⁶⁾ Называемую также внешним одночленом.

Внешнее умножение:

- *кососимметрично*: $\omega^k \wedge \omega^l = (-1)^{kl} \omega^l \wedge \omega^k$,
- *ассоциативно*: $(\omega^k \wedge \omega^l) \wedge \omega^m = \omega^k \wedge (\omega^l \wedge \omega^m)$, благодаря чему в произведениях $f \wedge g \wedge \dots \wedge h$ можно не заботиться о расстановке скобок.
- *дистрибутивно*: $(\lambda \omega^k + \mu \omega^l) \wedge \omega^m = \lambda \omega^k \wedge \omega^m + \mu \omega^l \wedge \omega^m$.

Перезапись (10.5) в варианте (10.1) превращает равенство (10.5) в *теорему Лапласа* о разложении определителя $(k+l)$ -го порядка в сумму произведений миноров k -го порядка по избранным столбцам на их алгебраические дополнения⁷⁾. Поэтому об определении внешнего произведения $\omega^k \wedge \omega^l$ можно сказать так: в $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ существует система координат, в которой все ω^k , ω^l и $\omega^k \wedge \omega^l$ выражаются определителями вида (10.1).

Для примера, пусть 1-форма $\omega^1(\xi)$ дает первую координату аргумента ξ , а 2-форма $\omega^2(\mu, \nu)$ — равна $\det \begin{bmatrix} \mu_2 & \nu_2 \\ \mu_3 & \nu_3 \end{bmatrix}$. И пусть

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} a_z \\ b_z \\ c_z \end{bmatrix}.$$

Тогда (10.5) есть

$$\omega^1 \wedge \omega^2 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

10.3. Дифференциальные формы

С точностью до обозначений 1-форма

$$\omega(\xi) = \langle a, \xi \rangle = a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n \tag{10.6}$$

и дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \tag{10.7}$$

⁷⁾ Большая общность (10.5) является результатом допуска к рассмотрению *теоремы Лапласа* в комбинации с преобразованием переменных.

при условии $a_i = \partial f / \partial x_i$, — одно и то же, ибо dx_i в (10.7) — любые числа, а не «малые приращения», см. комментарии в [3, т. 1]. Поэтому дифференциал в точке естественно воспринимать как внешнюю 1-форму. Если же (10.7) рассматривать как функцию точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то это уже называют *дифференциальной 1-формой*.

При этом возникает потребность говорить о двух пространствах \mathbb{R}^n — одно для векторов \mathbf{x} , другое — для дифференциалов

$$d\mathbf{x} = \{dx_1, \dots, dx_n\}. \quad (10.8)$$

А поскольку функции $f(\mathbf{x})$ и другие конструкции часто рассматривают на гладких многообразиях $M \subset \mathbb{R}^n$, — удобнее более общая точка зрения. Каждой точке $\mathbf{x} \in M$ сопоставлено *касательное пространство* $M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ векторов (10.8).

10.3.1. *Дифференциальной формой ($\mathcal{D}\Phi$) степени⁸⁾ k в точке $\mathbf{x} \in M$, называется внешняя k -форма $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$ на касательном пространстве $M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$.*

Логичнее обозначение $\omega(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k)$. Кроме того, векторы $\xi \in M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ в п. 10.3.1 нередко обозначают как $d\mathbf{x} \in M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$. Особой разницы нет, поскольку буква d в записи дифференциала ничего не значит, кроме напоминания, что в подоплеке речь идет о линейных приращениях. Поэтому *дифференциальную форму* $\omega(\mathbf{x}, \xi_1, \dots, \xi_k)$ записывают также в виде $\omega(\mathbf{x}, d\mathbf{x}_1, \dots, d\mathbf{x}_k)$, а чаще всего и просто как ω .

10.3.2. *Если ω в п. 10.3.1 определена в каждой точке $\mathbf{x} \in M$ и дифференцируема по \mathbf{x} , то об ω говорят как о дифференциальной k -форме⁹⁾ на многообразии M .*

Универсальное представление (10.4) k -формы в заданной системе координат работает и в данном случае. Теперь только коэффициенты в (10.4) будут зависеть от \mathbf{x} . Таким образом, *дифференциальная k -форма на многообразии M* при заданной системе координат записывается в каноническом виде

$$\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (10.9)$$

⁸⁾ 0-формой называют просто функцию $f(\mathbf{x})$.

⁹⁾ И даже просто как о k -форме, опираясь на контекст.

где $\mathbf{x} \in M$, $d\mathbf{x} \in M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$.

Стало быть, задание ω^k равносильно заданию набора коэффициентов $\{a_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x})\}$. В случае ω^1 каноническое описание (10.9) имеет вид (10.6) с точностью до $\xi \leftrightarrow d\mathbf{x}$, и на специальном подклассе 1-форм (см. далее) $a(\mathbf{x})$ совпадает с градиентом $\nabla f(\mathbf{x})$ некоторой функции f . А в случае ω^n сумма (10.9) содержит всего одно слагаемое, коэффициент $a(\mathbf{x})$ — тоже всего один, и опять-таки на специальном подклассе n -форм он совпадает с *дивергенцией* некоторого поля (п. 10.4).

Что касается внешних произведений $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ в (10.9), то при *ортогональной* системе координат в $M\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ они отличаются от обычных произведений $dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$ только знаком¹⁰⁾.

10.4. Внешние производные

10.4.1. Внешняя производная $d\omega^k$ дифференциальной формы (10.9) определяется как $(k+1)$ -форма

$$d\omega^k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} [da_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x})] \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (10.10)$$

где дифференциал da вычисляется по формуле (10.7).

Правило дифференцирования (10.10) в употреблении совсем просто. Раскрытие дифференциала da в квадратной скобке дает выражение

$$d\omega^k = \sum_{j=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial a_{i_1\dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

после чего остается учесть, что все произведения $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, в которых встречаются одинаковые сомножители, обращаются в нуль.

10.4.2. Повторное внешнее дифференцирование всегда дает нулевой результат,

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0. \quad (10.11)$$

¹⁰⁾ При условии, что объемы параллелепипедов единообразно нормированы.

◀ Действительно,

$$d^2\mathbf{a} = d\left(\sum_j \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_j} dx_j\right) = \sum_j d\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i x_j}\right) dx_i \wedge dx_j = 0,$$

поскольку $dx_i \wedge dx_i = 0$ и $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, а перекрестные производные равны¹¹⁾. ►

Важную роль играют следующие два понятия.

10.4.3. Форма ω с нулевой производной, $d\omega=0$, называется замкнутой.

10.4.4. Форма ω , возникшая в результате внешнего дифференцирования другой формы, $\omega = d\phi$, называется точной.

В силу (10.11) точная форма всегда замкнута, но не наоборот. Однако, если форма точна на односвязной области, то она замкнута (лемма Пуанкаре).

- Форму

$$\omega^1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{dx} \rangle = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

можно рассматривать как работу силового поля $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ на перемещении $\mathbf{dx} = \{dx_x, dx_y, dx_z\}$. Внешний дифференциал равен¹²⁾

$$d\omega^1 = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

т. е.

$$d\omega^1 = \text{rot}_x \mathbf{a} \cdot dy \wedge dz + \text{rot}_y \mathbf{a} \cdot dz \wedge dx + \text{rot}_z \mathbf{a} \cdot dx \wedge dy.$$

Другими словами, внешний дифференциал формы ω^1 , определяемой векторным полем \mathbf{a} , является 2-формой $d\omega^1$, определяемой полем ротора $\text{rot } \mathbf{a}$. Поэтому $\text{rot } \mathbf{a} = 0 \Rightarrow d\omega^1 = 0$ со всеми вытекающими последствиями.

• Формула Гаусса—Остроградского (1.9) вычисляет поток векторного поля $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ через поверхность S , для чего

¹¹⁾ На уточнение степени гладкости мы не отвлекаемся.

¹²⁾ Часть слагаемых пропадает из-за обнулений типа $dz \wedge dy \wedge dz = 0$, а минусы появляются вследствие $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

элементам поверхности dS приписывается направление нормали, и под интегралом оказывается скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, dS \rangle$, представляющее собой дифференциальную 2-форму, имеющую канонический вид¹³⁾:

$$\omega^2 = a_x dy \wedge dz + a_y dz \wedge dx + a_z dx \wedge dy. \quad (10.12)$$

Использование внешних произведений типа $dx \wedge dy$ здесь обеспечивает правильный знак скалярного произведения $\langle \mathbf{a}, dS \rangle$ под интегралом.

В результате внешнего дифференцирования (10.12) возникает 3-форма

$$d\omega^2 = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \operatorname{div} \mathbf{a} dx \wedge dy \wedge dz,$$

откуда следует $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow d\omega^2 = 0$.

- Равенства $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ следуют из $d(d\omega) = 0$.
- В \mathbb{R}^n аналогично (10.12) поток векторного поля $\mathbf{a}(x)$ через границу параллелепипеда выражается $(n - 1)$ -формой

$$\omega^{n-1} = \sum_i (-1)^{i+1} a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (10.13)$$

крышечка говорит об отсутствии dx_i в произведении.

Внешнее дифференцирование (10.13) порождает n -форму

$$d\omega^{n-1} = \operatorname{div} \mathbf{a} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}.$$

Опять-таки $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow d\omega^{n-1} = 0$.

¹³⁾ Обратим внимание на порядок сомножителей во втором слагаемом в (10.12). Если вместо $dz \wedge dx$ взять $dx \wedge dz$, то перед $a_y dx \wedge dz$ надо поставить минус. Манипулирование знаками — тут едва ли не главная проблема, потому что согласование ориентаций, особенно в пространствах больших размерностей, хуже китайской грамоты. По счастью, дифференциальные формы хорошо с этим справляются.

10.5. Наглядная интерпретация

Надо признать, что определение 10.4.1 *внешнего дифференцирования* с интуитивной точки зрения слабо мотивировано. Примеры из \mathbb{R}^3 свидетельствуют о «попадании», но логики индуктивного характера все-таки не видно. Истоки обнажаются при взгляде с другой стороны, с точки зрения интегрирования.

Напомним сначала, как в \mathbb{R}^3 возникает *дивергенция* в интуитивно геометрическом сценарии. Для этого вычислим поток векторного поля

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \{a_x(\mathbf{r}), a_y(\mathbf{r}), a_z(\mathbf{r})\}$$

через границу кубика со сторонами¹⁴⁾

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z, \quad (10.14)$$

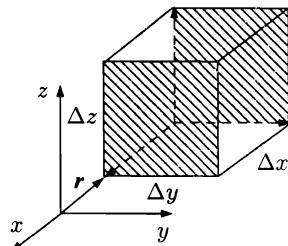


Рис. 10.1

параллельными осям координат (рис. 10.1). При этом (10.14) — естественно считать *векторами*, раз уж оговорена параллельность осей, и под производственными типа $\Delta x \cdot \Delta y$, $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, — понимать площади и объемы соответствующих параллелограммов и параллелепипедов с *точностью до знаков* (пока).

Через грани, параллельные плоскости Oyz , течет лишь составляющая a_x . Разность значений a_x на этих гранях равна

$$a_x(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - a_x(\mathbf{r}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial a_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial a_z}{\partial z} \Delta z + o(\|\Delta \mathbf{r}\|). \quad (10.15)$$

Умножение (10.15) на $\Delta y \Delta z$, в силу¹⁵⁾

$$\Delta y \Delta y \Delta z = \Delta z \Delta y \Delta z = 0,$$

оставляет только

$$\left[\frac{\partial a_x}{\partial x} \Delta x + o(\Delta x) \right] \Delta y \Delta z,$$

что является разностью потоков вектора a через грани, параллельные Oyz .

Аналогично по другим граням, — и после суммирования имеем

$$\left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right] \Delta V + o(\Delta V), \quad \Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Поэтому с точностью до o -малого искомый поток равен $\operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \Delta V$.

¹⁴⁾ Здесь Δ — **не** оператор Лапласа.

¹⁵⁾ Объем кубика на векторах, два из которых совпадают, равен нулю.

Слабое звено этого сюжета — неопределенность знака умножения векторов (10.14). В случае ортогональной системы координат и при фиксированном масштабе длины, — неопределенность в знаке только и остается. Да и в неортогональной системе координат, собственно, проблем нет — достаточно опереться на *смешанное произведение* векторов, но порядок умножения (определяющий знак) требует уточнения. Однако все это в ситуации \mathbb{R}^3 не так трудно преодолеть¹⁶⁾, и можно убедиться, что операция \wedge в качестве умножения сводит концы с концами. Таким образом, внешнее дифференцирование 2-формы (10.12), выражающей поток через границу параллелепипеда P , позволяет получить тот же результат умножением интенсивности потока $\operatorname{div} \mathbf{a}$ на объем P . Иначе говоря, для достаточно малого P

$$\oint_{\partial P} a_x \, dy \wedge dz + a_y \, dz \wedge dx + a_z \, dx \wedge dy = \int_P \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \wedge dy \wedge dz, \quad (10.16)$$

где ∂P , как это принято, обозначает границу P .



Рис. 10.2

Справедливость (10.16) для более-менее произвольной области Ω вместо P устанавливает простое соображение. Разбив Ω на маленькие параллелепипеды P_i (рис. 10.2), имеем¹⁷⁾

$$\oint_{\partial\Omega} \omega^2 = \sum_i \oint_{\partial P_i} \omega^2, \quad (10.17)$$

потому что потоки через грани, находящиеся внутри Ω , в сумме (10.17) взаимно уничтожают друг друга — вытекающий поток из P_i втекает в соседний по внутренней грани параллелепипед P_j . Вклад в сумму дают лишь потоки через внешние грани. Аддитивность объемного интеграла не требует доказательства. В итоге (10.16)

¹⁶⁾ Долго только писать, еще дольше читать.

¹⁷⁾ От приграничных «осколков» можно избавиться стандартным образом.

обобщается на область Ω ,

$$\oint_{\partial\Omega} \omega^2 = \int_{\Omega} d\omega^2, \quad (10.18)$$

что является *теоремой Гаусса—Остроградского*.

Выдавить из вышесказанного более общие результаты тем труднее, чем большего мы хотим добитьсяся. Достаточно легко обобщить (10.18) на случай $(n - 1)$ -форм в \mathbb{R}^n — схема и рассуждения почти не меняются. Но вот универсальность правила

$$\oint_{\partial\Omega} \omega^k = \int_{\Omega} d\omega^k \quad (10.19)$$

для любых $k \leq n - 1$, именуемого *теоремой Стокса*, устанавливается несколько сложнее.

10.6. Техническое дополнение

Справка по ориентации. В \mathbb{R}^3 упорядоченная тройка некомплексных векторов a, b, c называется *правой*, если для наблюдателя, расположенного в нуле, обход концов a, b, c в указанном порядке происходит по часовой стрелке. В противном случае тройка a, b, c — *левая*. Соответственно классифицируются базисы. В общем случае \mathbb{R}^n понятий «правого» и «левого» не существует, но дихотомия остается. Два базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ в \mathbb{R}^n считаются *одинаково ориентированными*, если

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = A\{e_1, \dots, e_n\} \quad \text{и} \quad \det A > 0.$$

В случае $\det A < 0$ говорят, что базисы *противоположно ориентированы*¹⁸⁾. В результате все базисы распадаются на два класса эквивалентных.

Для положительной ориентации двусторонней $(n - 1)$ -мерной поверхности $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ достаточно задать ориентацию локально [3, т. I]

¹⁸⁾ Очевидно, $A = \{e'_1, \dots, e'_n\}\{e_1, \dots, e_n\}^{-1}$.

в любой точке $\mathbf{x} \in \Gamma$, ради чего базис $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ в \mathbf{x} выбирается так, чтобы вектор e'_1 был внешней нормалью Γ , а репер $\{e'_2, \dots, e'_n\}$, ориентирующий Γ , лежал в касательном пространстве к Γ в точке \mathbf{x} . Обращение к понятию внешней нормали показывает, что вопрос однозначно решается лишь в том случае, когда речь идет о Γ как о границе некоторой области.

Итак, еще раз, но с другими акцентами. Вопрос об ориентации \mathbb{R}^n сам по себе ответа не имеет. Ориентацию \mathbb{R}^n определяет выбор базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ с обязательным указанием порядка следования векторов e_i , после чего про любой другой базис можно сказать, задает ли он ту же самую ориентацию.

Задание базиса в \mathbb{R}^n **не** определяет ориентацию поверхностей $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ до тех пор, пока не выделена одна сторона Γ . Естественным образом это происходит, когда Γ — граница области. Затем базис $\{e'_2, \dots, e'_n\}$ на Γ в точке \mathbf{x} выбирается так, чтобы репер $\{\mathbf{n}, e'_2, \dots, e'_n\}$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль, был одинаково ориентирован с базисом \mathbb{R}^n .

Интегрирование дифференциальных форм по поверхностям требует уточнения. Остановимся сначала на интегрировании $(n-1)$ -формы (10.13) по $(n-1)$ -мерной поверхности Γ в \mathbb{R}^n , что в силу аddитивности интеграла сводится к интегрированию слагаемых¹⁹⁾

$$\oint_{\Gamma} a_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (10.20)$$

Как отмечалось выше, здесь нельзя сказать, с каким знаком надо брать элемент поверхности $dS \sim dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$. Если Γ это грань параллелепипеда, ортогональная e_i , а $\{e_1, \dots, e_n\}$ — базис \mathbb{R}^n , то на грани Γ надо взять внешнюю нормаль $\mathbf{n} = e_i$ или $\mathbf{n} = -e_i$, и ориентацию Γ считать положительной (отрицательной), если *репер*

$$\{\mathbf{n}, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n\}$$

¹⁹⁾ Напомним, крышечка означает отсутствие dx_i в произведении.

ориентирован одинаково (противоположно) с $\{e_1, \dots, e_n\}$. Соответственно, перед dS будет знак плюс (минус)²⁰⁾.

Ничего особенно не меняется, если Γ — не грань параллелепипеда, а гладкая граница $\partial\Omega$ более-менее произвольной области Ω . Исчезает разве что специфика ортогональности, и задача помещается в рамки общей схемы ориентации, см. выше. Кроме того, процесс согласования ориентации \mathbb{R}^n с ориентацией $(n-1)$ -мерных многообразий можно индуктивно продолжить, определяя ориентации многообразий меньших размерностей.

Индукированные отображения. Несмотря на вышесказанное, с многообразиями малых размерностей обращаются проще, параметризуя их введением локальных координат и переводя задачу из $M \subset \mathbb{R}^n$ в $U \subset \mathbb{R}^k$. При этом, например, интегрирование $\mathrm{d}\Phi$ сводится к k -кратным интегралам вида

$$\int_{\Omega} \omega^k = \int_{\Omega} a(\mathbf{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k. \quad (10.21)$$

Редукция осуществляется параметризующими отображениями

$$f : M \rightarrow U,$$

которые устанавливают соответствие дифференциальных k -форм ω на M и *индукированных* k -форм ($f^*\omega$) на U :

$$(f^*\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(f' \cdot \xi_1, \dots, f' \cdot \xi_k), \quad (10.22)$$

где $f' = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\}$ в точке $\mathbf{x} \in M$.

При этом интегрирование по M заменяется интегрированием по U , если M и U какие-нибудь «приличные» компакты,

$$\int_M \omega = \int_U f^*\omega,$$

что работает как определение интеграла по M .

²⁰⁾ Данный комментарий вскрывает причины некоторой чехарды со знаками либо порядком сомножителей в записи $\mathrm{d}\Phi$, см. сноску к (10.12).

Прямолинейная методика. Использование рецептуры типа (10.22) имеет свои минусы. Иногда удобнее действовать «в лоб». Рассмотрим, например, обоснование (10.19) в случае, когда Ω — маленький $(k+1)$ -мерный кубик P в \mathbb{R}^n . Если $k+1 < n$ — потоковая интерпретация теряет смысл²¹⁾. Однако интеграл

$$\oint_{\partial P} \omega^k = \oint_{\partial P} \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \quad (10.23)$$

по границе ∂P определен. Собственно даже, знак интеграла можно убрать из-за малости P — тогда равенство будет с точностью до o -малого.

Чтобы поддержать далее параллель с рассуждениями начала п. 10.5 насчет дивергенции, можно иметь в виду соответствие обозначений $d \leftrightarrow \Delta$.

Для оценки вклада слагаемых $a_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ на гранях, параллельных плоскости $Ox_{i_1} \dots dx_{i_k}$, надо взять разности типа (10.15), которые в данном случае будут иметь вид

$$da_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) = \sum_j \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j + o(\dots), \quad (10.24)$$

и умножить их внешним образом на $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$. Останутся лишь слагаемые, содержащие $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, где j не совпадает ни с одним из i_1, \dots, i_k . Но об этом можно даже не упоминать, поскольку при записи

$$da_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

все происходит (обнуляется) автоматически. В итоге поверхностный интеграл (10.23) превращается в сумму

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} da_{i_1 \dots i_k}(\mathbf{x}) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

что с учетом малости P означает справедливость (10.19) в случае $\Omega = P$ и дает геометрическую интерпретацию внешнего дифференцирования $d\omega^k$ как операции, позволяющей переходить от вектор-

²¹⁾ До некоторой степени. Потоки текут «вбок».

ного поля к его «векторной плотности». Это, в свою очередь, дает возможность «векторный поток» через границу вычислять интегрированием «плотности» по объему. В случае ω^{n-1} в \mathbb{R}^n «плотность» получается скалярная, $\operatorname{div} \mathbf{a}$. «Потоковые определения» векторного анализа (1.8), (1.11), (1.17) как раз из этой оперы.

10.7. Интегрирование и теорема Стокса

Интегрирование дифференциальной формы ω^k относительно легко в \mathbb{R}^k . В этом случае (10.21) есть обычный k -кратный интеграл.

Недобства начинаются, когда $\Phi \omega^k$ определена на k -мерном многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$ в пространстве большей размерности, $n > k$. Тогда надо быть готовым к разбиению M на криволинейные параллелепипеды P_i и согласованию ориентаций касательных пространств $M\mathbb{T}_x$ как между собой, так и с ориентацией объемлющего пространства \mathbb{R}^n . В принципе — все это преодолимо, но обычно предпочитают другой путь.

Многообразие $M \subset \mathbb{R}^n$ разбивается на какие-нибудь «приличные» фрагменты, например, на симплексы²²⁾, и каждому k -мерному симплексу $s \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие многогранник, например куб, или снова симплекс σ , но уже в \mathbb{R}^k , после чего интеграл по s определяется как

$$\int_s \omega = \int_{\sigma} f^* \omega,$$

где $f : s \rightarrow \sigma$ осуществляет параметризацию s .

Это позволяет *теорему Стокса*, утверждающую справедливость равенства (10.19) для любых $k \leq n - 1$, свести к единственному варианту $k = n - 1$, который относительно просто устанавливается рассуждениями из п. 10.5.

Если в

$$\oint_{\partial\Omega} \omega^k = \int_{\Omega} d\omega^k$$

²²⁾ В этом случае говорят: *триангулируется*.

переход от области Ω к границе $\partial\Omega$ считать результатом применения граничного оператора ∂ , то двукратное применение ∂ дает:

$$\oint_{\partial\Omega} \omega^k = \int_{\partial\Omega} d\omega^k = \int_{\Omega} dd\omega^k = 0,$$

в силу $d(dd\omega) = 0$ (п. 10.4.2). Другими словами, *граница границы не имеет границы*²³⁾, $\partial\partial\Omega = \emptyset$.

10.8. Топологические мотивы

Истратив немало времени на дифференциальные формы, было бы жалко ограничиться *теоремой Стокса*, поскольку не так далеко расположены и другие прикладные области. В частности, *топология*, о которой речь пойдет в отдельном томе, но кое-что уместно сказать впрок. Многие наслышаны о *комбинаторной* топологической ветви, где в центре внимания находятся, в том числе, вопросы согласования ориентаций. При этом одной из основных задач является классификация многообразий с точностью до гомеоморфных преобразований. Инструменты базируются, как правило, на встраивании в изучаемые объекты каркасов из элементарных кирпичиков, например, симплексов. Последние удобны тем, что имеют не так много вершин, $n+1$ в \mathbb{R}^n , тогда как у куба их (вершин) 2^n .

Симплексы и комплексы. Симплекс представляет собой обобщение понятия отрезка, треугольника, тетраэдра. Общее определение: *k -мерным симплексом (k -симплексом) $s^k = (\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k)$* называется множество точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, таких что

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^k \lambda_j \mathbf{a}_j, \quad \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1, \quad \text{все } \lambda_j \geq 0,$$

в предположении линейной независимости векторов

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \quad \dots, \quad \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0,$$

²³⁾ См. следующий раздел о цепях и границах.

где точки $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ представляют собой *вершины симплекса*, λ_j — *барицентрические координаты*. О гомеоморфных образах симплексов говорят как о *криволинейных симплексах*. Очевидно, симплекс s^k представляет собой выпуклую оболочку своих вершин. Выпуклая оболочка любого подмножества вершин называется *гранью симплекса*.

Симплексиальным комплексом $K \subset \mathbb{R}^n$ называют конечное семейство симплексов s_i^k , расположение которых характеризуется тем, что пересечение любых двух s_i^p , s_j^q или пусто, или является гранью как s_i^p , так и s_j^q . Множество всех точек из \mathbb{R}^n , принадлежащих симплексам комплекса K , с топологией, индуцированной из \mathbb{R}^n , называют *полиэдром комплекса* K и обозначают $|K|$, а комплекс K именуют *триангуляцией* полиэдра $|K|$. Геометрически очевидно, что любой полигон можно сколь угодно мелко триангулировать, делая максимальный диаметр составляющих симплексов сколь угодно малым.

Ориентация симплекса

$$s^n = (\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_n) \quad (10.25)$$

положительна (отрицательна), если базис

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0$$

одинаково (противоположно) ориентирован с избранным базисом \mathbb{R}^n .

Симплекс $(\mathbf{a}_{i_0} \dots \mathbf{a}_{i_n})$, построенный на тех же вершинах, что и (10.25), но взятых в другом порядке, будет совпадать²⁴⁾ либо с s^n , либо с $-s^n$. Четное (нечетное) число перестановок двух вершин симплекса не меняет (меняет) его ориентацию. *Неориентированный симплекс* обозначается $|s^n|$.

Коэффициенты инцидентности и граничный оператор ∂ . Пусть крышечка над вершиной симплекса исключает эту вершину, т. е.

$$(\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \mathbf{a}_n) = (\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_{i-1} \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n).$$

В результате от s^n остается $(n-1)$ -мерная грань s^{n-1} .

²⁴⁾ По ориентации.

Рассмотрим теперь ориентированный симплекс s^n и его ориентированную грань s^{n-1} , не содержащую, например, вершину \mathbf{a}_i симплекса s^n . Допустим, порядок вершин $\mathbf{a}_{i_0}, \dots, \mathbf{a}_{i_{n-1}}$ определяет выбранную ориентацию грани $|s^{n-1}|$. При этом порядок

$$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i_0}, \dots, \mathbf{a}_{i_{n-1}}$$

вершин симплекса $|s^n|$ определяет либо исходную ориентацию s^n , либо ориентацию $-s^n$. В первом случае коэффициент инцидентности $(s^n : s^{n-1})$ считается равным $+1$, во втором $-(s^n : s^{n-1}) = -1$. Если же s^{n-1} — не грань s^n , то $(s^n : s^{n-1}) = 0$.

Граница симплекса определяется как «сумма граней»:

$$\partial s^n = \sum_{i=0}^n (s^n : s_i^{n-1}) s_i^{n-1}.$$

Оператор ∂ называется *границальным*.

Ориентации граней выбираются в соответствии с правилом

$$s^n = (\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_n), \quad s_i^{n-1} = (\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \mathbf{a}_n).$$

При этом

$$\partial s^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i^{n-1}.$$

Граница симплекса — частный случай общего понятия цепи: r -мерная цепь c^r комплекса K определяется как формальная сумма

$$c^r = \sum_i \alpha_i s_i^r,$$

где α_i — целочисленные коэффициенты. При этом *граница цепи*,

$$\partial c^r = \sum_i \alpha_i \partial s_i^r,$$

является $(r-1)$ -мерной цепью.

Если в множестве всех цепей комплекса K ввести операцию сложения цепей, то это множество становится группой и обозначается $L_r(K)$. Границочный оператор, таким образом, действует из L_r в L_{r-1} .

Циклы. Любая цепь c^r с нулевой границей ($\partial c^r = 0$) называется *циклом*. Множество r -мерных циклов $Z_r(K)$ является подгруппой группы $L_r(K)$. Другими словами, Z_r — это ядро гомоморфизма²⁵⁾

$$\partial : L_r \rightarrow L_{r-1}.$$

В группе циклов $Z_r(K)$ можно выделить подгруппу $B_r(K)$ r -мерных границ, т. е. множество r -мерных цепей, являющихся границами некоторых $(r+1)$ -мерных цепей.

◀ Чтобы проверить, что $B_r(K)$ — действительно подгруппа $Z_r(K)$, достаточно установить²⁶⁾

$$\partial \partial s^r = 0, \quad (10.26)$$

поскольку ядро любого гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow H$ — подгруппа G .

Поскольку оператор ∂ линеен, (10.26) достаточно проверить в случае, когда s^r — симплекс:

$$\begin{aligned} \partial \partial s^r &= \partial \left[\sum_i (-1)^i (\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \mathbf{a}_r) \right] = \\ &= \sum_i (-1)^i \left[\sum_{j < i} (-1)^j (\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_j \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \mathbf{a}_r) + \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \widehat{\mathbf{a}}_j \dots \mathbf{a}_r) \right]. \end{aligned}$$

Легко видеть, что грань $(\mathbf{a}_0 \dots \widehat{\mathbf{a}}_i \dots \widehat{\mathbf{a}}_j \dots \mathbf{a}_r)$ входит в сумму дважды: один раз с коэффициентом $(-1)^{i+j}$, другой раз с коэффициентом $(-1)^{i+j-1}$, что в сумме дает нуль. Поэтому $\partial \partial s^r = 0$. ►

Фактор-группа $H_r = Z_r / B_r$ группы циклов Z_r по подгруппе границ B_r называется r -й группой гомологий комплекса K .

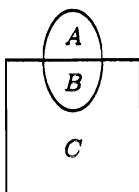
Главный интерес, разумеется, представляет сам полиэдр $|K|$, а не комплекс K , для которого введены группы H_r , Z_r , B_r . Взаимосвязь обеспечивается приближением полиэдра комплексом за счет измельчения триангуляции. При этом группы Z_r , B_r разрастаются, но фактор-группа $H_r = Z_r / B_r$ не меняется. И это общее правило. Группа гомологий $H_r(K)$ не зависит от триангуляции, а определяется самим полиэдром. Гомеоморфные полиэдры имеют одинаковые (изоморфные) группы гомологий. Соответственно, вычислять группы

²⁵⁾ По поводу групповых понятий см. [3, т. 8].

²⁶⁾ То есть граница границы сама по себе не имеет границы.

гомологий можно на основе произвольной триангуляции — наиболее простой и удобной.

Если в качестве криволинейного полиэдра взять *тор* T , то одномерные циклы c^1 на T — не что иное как замкнутые ориентированные (с заданным направлением обхода) кривые. Такие кривые (циклы) подразделяются на те, которые ограничивают некоторую



область, и те, которые никакой области не ограничивают, т. е. не принадлежат группе границ (меридиан и параллель тора). Обратим внимание, чтоцикл, изображенный на рис. 10.3 (равный сумме циклов), ограничивает «область» $A + 2B + C$, в которую «территория» B входит дважды. Поэтому, если говорить точнее, то

Рис. 10.3 надо сказать, что все циклы подразделяются на те, которые являются границами некоторых двумерных цепей²⁷⁾, и те, которые границами не являются.

Будем все ограничивающие циклы считать несущественными, а «существенные» — разобьем на *гомологичные* циклы. Циклы c_1 и c_2 называются *гомологичными*, если их разность $c_1 - c_2$ — ограничивающий цикл (*гомологичный нулю*)²⁸⁾. Эти классы гомологий есть элементы группы гомологий H_1 . На торе все такие классы гомологий выражаются через класс меридианов c_m и класс параллелей c_p . Если цикл c обходит тор α раз по меридиану и β раз по параллели, то

$$c = \alpha c_m + \beta c_p,$$

и потому c_m и c_p — образующие группы H_1 , а сама группа H_1 представляет собой прямую сумму²⁹⁾ $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

На двумерной сфере S^2 группа гомологий H_1 тривиальна — состоит из единственного, нулевого, класса гомологий — поскольку все одномерные циклы на S^2 гомологичны между собой. Группа гомологий H_2 на S^2 изоморфна \mathbb{Z} .

²⁷⁾ А не областей в обычном понимании этого слова.

²⁸⁾ Например, два различных меридиана тора с одинаковой ориентацией — гомологичны друг другу.

²⁹⁾ Точнее говоря, изоморфна прямой сумме.

Классификация многообразий — одна из главных задач топологии — базируется на «непрерывной преобразуемости». Сначала определяются *симплексиальные отображения*, преобразующие комплексы в комплексы. После этого *непрерывные отображения* приближаются (сколь угодно точно за счет измельчения триангуляции) — *симплексиальными*, что индуцирует *гомоморфизмы* φ_r^* группы $L_r(K_\alpha)$ в группу $L_r(K_\beta)$. В итоге группы гомологий $\{H_r\}$ многообразия оказываются топологическими инвариантами преобразований φ_r^* , благодаря чему играют роль индикаторов классификации.

Классификации способствует также наблюдение за поведением r -форм на многообразии, каковые являются группами по сложению. Фактор-группа *замкнутых* форм по *точным* формам называется *r -й группой когомологий* комплекса K (многообразия M).

Глава 11

Справочная информация

11.1. Криволинейные координаты

Время от времени выгоднее вместо обычных декартовых координат $\{x, y, z\}$ использовать те или иные криволинейные координаты $\{q_1, q_2, q_3\}$, более приспособленные к специфике рассматриваемой задачи. Текущий радиус-вектор r при этом может записываться как $r(x, y, z)$ и как $r(q_1, q_2, q_3)$.

Относительно часто используются *цилиндрические координаты*¹⁾, $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$ (рис. 11.1), формулы перехода:

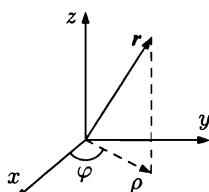


Рис. 11.1

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

и *сферические координаты*²⁾, $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$ (рис. 11.2) с формулами перехода:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

В общем случае криволинейных координат $\{q_1, q_2, q_3\}$ в каждой точке r вводятся единичные векторы $\{e_1, e_2, e_3\}$, направленные по касательным к координатным линиям, и числа H_i в

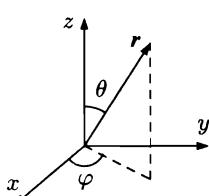


Рис. 11.2

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i$$

¹⁾ Фактически *цилиндрические координаты* — это *полярные координаты* в плоскости Oxy плюс декартова координата по ортогональной оси Oz .

²⁾ Здесь r — расстояние до начала координат, φ — долгота, θ — «широта». В географической практике широту принято исчислять от экватора. Этому соответствует выбор в качестве θ угла, составляемого вектором r не с осью Oz , а с плоскостью Oxy . Формулы перехода тогда принимают вид:

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta.$$

называются *коэффициентами Ламэ*. Дифференциальные операции производятся по формулам:

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 a_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 a_3) \right\},$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right\} \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right\} \mathbf{e}_2 + \\ &\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right\} \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

В цилиндрических координатах $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$,

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & a_\varphi & a_z \end{vmatrix}.$$

В сферических координатах $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$,

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \frac{\partial u}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} e_\varphi, \\ \text{div } \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \Delta u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \\ \text{rot } \mathbf{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & r e_\varphi \sin \theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r a_\varphi \sin \theta \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.2. Аналитические функции

При изучении ЧП-уравнений определенный интерес представляют аналитические функции, проливающие свет на более обширные территории.

Среди функций комплексного переменного $z = x + iy$ в ТФКП [3, т. 9] выделяются *дифференцируемые* функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

каковые, по определению, удовлетворяют условию

$$\delta f(z) = f(z + \delta z) - f(z) = A \cdot \delta z + o(|\delta z|), \tag{11.2}$$

где A — комплексное число, зависящее от точки z , которое называют *производной* $f(z)$ в точке z и обозначают $f'(z)$ либо df/dz .

Определение производной записывают также в виде

$$f'(z) = \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \delta z) - f(z)}{\delta z}, \tag{11.3}$$

но в (11.3) требуется дополнительно независимость предела от пути стремления δz к нулю, что приводит к *необходимости* выполнения

для $f = u + iv$ условий Коши—Римана,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

которые в случае непрерывности частных производных в некоторой области Ω также достаточны для дифференцируемости f в Ω . Функции, дифференцируемые в Ω , называются *аналитическими* в Ω .

Нагромождение терминов поначалу кажется странным, ибо для дифференцируемой функции выдумывается еще одно имя. Но *аналитические функции обладают совершенно неожиданным свойством*. Если обыкновенный анализ приучает к мысли, что функция может быть дифференцируема только n раз, то *аналитическая функция*, дифференцируемая по определению всего один раз, оказывается *бесконечно дифференцируемой*.

Отметим некоторые свойства.

- Задание частных производных определяет функцию с точностью до константы. Поэтому задание одной из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, в силу условий Коши—Римана, с точностью до константы определяет вторую.
- Если аналитическая в области Ω функция f не константа, то ее модуль $|f(z)|$ не может принимать максимальное значение внутри Ω — так называемый *принцип максимума модуля*.
- Дифференцируя условия Коши—Римана и исключая одну из функций u или v , легко убедиться, что обе удовлетворяют *уравнению Лапласа*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (11.4)$$

и являются таким образом *гармоническими функциями*, хорошо известными благодаря другим источникам происхождения. Поскольку задание краевых условий (значений на границе) определяет решение (11.4) внутри области, возникает как бы «неловкость», ибо

выходит: все, чем занимается ТФКП, — это изучение решений одного дифференциального уравнения (11.4). Другая часть аудитории удивляется противоположным образом: «Нужели теория одного дифура — это целая ТФКП?»

При рассмотрении интегрирования аналитических функций одной из опорных точек является *формула Грина* преобразования криволинейного интеграла по контуру C , ограничивающему область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, — в двойной интеграл по Ω :

$$\oint_C P dx + Q dy = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx dy. \quad (11.5)$$

11.2.1. Теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области Ω . Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру C , лежащему в Ω , равен нулю³⁾.

Если функция $f(z)$ аналитична внутри контура C , содержащего внутри точку z , и на самом контуре C , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad (11.6)$$

что называют *интегральной формулой Коши*, каковая напоминает змею, кусающую себя за хвост, и позволяет раскрутить бесконечную карусель. Дифференцируя (11.6) по параметру z , имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad (11.7)$$

снова дифференцируем (11.7) по z , получаем формулу для второй производной, и так далее:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (11.8)$$

³⁾ Результат верен и в обратном направлении (*теорема Морера*), что важно для математики аналитического продолжения функций.

В результате выявляется удивительный феномен. *Аналитическая функция оказывается бесконечно дифференцируемой сама по себе, без каких бы то ни было дополнительных требований.* Интеграл Коши дает простой ключ к пониманию этого факта.

11.3. Спектральный анализ

Анализ спектральных свойств линейных операторов в функциональных пространствах приводит к необходимости комплексификации функциональных пространств. Ситуация в этом аспекте не отличается от линейной алгебры. *Комплексным расширением* вещественного пространства E' называют комплексное пространство E с элементами $z = x + iy$ ($x, y \in E'$), линейные операции над которыми (сложение, умножение) определяются естественным образом. Норма в E определяется как

$$\|x + iy\| = \max_{\tau} \|x \sin \tau + y \cos \tau\|,$$

а операторы $L : E' \rightarrow E'$ продолжаются на E по правилу

$$L(x + iy) = Lx + iLy,$$

что, в том числе, сохраняет норму $\|L\|_E = \|L\|_{E'}$.

11.3.1. Комплексное число λ называется регулярным значением непрерывного линейного оператора $L : E \rightarrow E$, если оператор $L - \lambda I$ имеет определенный на E ограниченный обратный. Спектр $\sigma(L)$ оператора L определяется как дополнение к множеству его регулярных значений.

Иными словами, спектр $\sigma(L)$ — это совокупность λ , для которых оператор $L - \lambda I$ необратим, что может быть по двум причинам: оператор $L - \lambda I$ или не инъективен (не взаимно однозначен), или инъективен, но не сюръективен (не является отображением «на»). В \mathbb{R}^n встречается только первая причина. В случае «неинъективности» уравнение

$$Lx = \lambda x$$

имеет ненулевое решение, называемое *собственным вектором*, а соответствующее λ — *собственным значением* оператора L .

Совокупность всех собственных векторов, отвечающих собственному значению λ , вместе с нулевым элементом, — называется *собственным подпространством* N_λ оператора L . В общем случае *множество собственных значений не исчерпывает весь спектр* (как в \mathbb{R}^n)⁴⁾. В контексте собственных значений общая ситуация имеет прямые аналогии с линейной алгеброй.

11.3.2. *Если оператор L имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$, и каждому λ_j отвечает свой собственный вектор x_j , то множество $\{x_j\}$ линейно независимо.*

Спектральный радиус $\rho(L)$ — это радиус минимального круга, содержащего весь спектр $\sigma(L)$.

Обращение дифференциального оператора представляет собой, как правило, *вполне непрерывный (компактный)* интегральный оператор $G = L^{-1}$. Последние обладают полезными свойствами, сближающими их с линейными операторами в \mathbb{R}^n — подробности в [3, т. 5].

11.3.3. *Собственное подпространство вполне непрерывного оператора, отвечающее ненулевому собственному значению, — конечномерно.*

11.3.4. *Ненулевые точки спектра λ_n вполне непрерывного оператора изолированы⁵⁾.*

11.3.5. *Ненулевая часть спектра вполне непрерывного оператора состоит только из собственных значений.*

⁴⁾ Стандартная иллюстрация — оператор умножения $Lx(t) = tx(t)$, действующий в $C[0, 1]$. Поскольку уравнение $(L - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t) = 0$ ненулевых решений $x(t)$ в $C[0, 1]$ не имеет, — собственных значений у L нет. Но спектр не пуст, $\sigma(L) = [0, 1]$, поскольку обратный оператор,

$$(L - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda},$$

при $\lambda \in [0, 1]$ неограничен, и определен не на всем $C[0, 1]$.

⁵⁾ Отсюда вытекает, что число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_k| > \varepsilon > 0$, — конечно. Накопление может происходить только в нуле.

11.3.6. Спектр $\sigma(G)$ вполне непрерывного оператора — счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Ненулевые $\lambda \in \sigma(G)$ являются собственными значениями конечной кратности.

Если пространство гильбертово, а оператор G самосопряжен, — ситуация улучшается известным образом. Компактный самосопряженный оператор обязательно имеет ненулевое собственное значение. Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, — ортогональны.

11.3.7. Теорема Гильберта—Шмидта. Пусть G — компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с нулевым ядром ($\ker G = 0$, т. е. $Gx \neq 0$ при $x \neq 0$). Тогда в H существует ортонормированный базис $\{h_n\}$ из собственных векторов оператора G , в котором оператор имеет диагональный вид

$$Gx = \sum_n \lambda_n x_n h_n,$$

где x_n — координаты вектора

$$x = \sum_n x_n h_n,$$

а λ_n — собственные значения, отвечающие векторам h_n .

11.4. Теория Фредгольма

Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода⁶⁾

$$x(t) = \int_a^b G(t, s)x(s) dS + y(t)$$

является частным случаем уравнения $Ax = y$ в банаховом пространстве с линейным оператором $A = I - T$, где T — вполне

⁶⁾ Уравнение Фредгольма 1-го рода: $\int_a^b G(t, s)x(s) dS = y(t)$.

непрерывен. И на таком уровне это имеет непосредственное отношение к ЧП-уравнениям эллиптического типа. Теория имеет «непредсказуемые повороты». Особенно это касается «существования решения из единственности» — п. 11.4.4.

11.4.1. Теорема⁷⁾. *Пусть T действует и вполне непрерывен в базаховом пространстве E . Тогда уравнения⁸⁾*

$$x - Tx = y, \quad f - T^*f = g$$

*либо оба разрешимы при любых правых частях, что соответствует исключительно нулевой разрешимости однородных уравнений $x - Tx = 0$ и $f - T^*f = 0$, либо однородные уравнения имеют конечное число линейно независимых решений⁹⁾*

$$x_1, \dots, x_n; \quad f_1, \dots, f_n;$$

*и тогда для разрешимости $x - Tx = y$ ($f - T^*f = g$) необходимо и достаточно, чтобы при всех j от 1 до n :*

$$\langle f_j, y \rangle = 0 \quad (\text{соответственно}, \langle g, x_j \rangle = 0).$$

*Общие решения уравнений $x - Tx = y$ и $f - T^*f = g$ в этом случае имеют вид линейных комбинаций*

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, \quad f = f_0 + \sum_{j=1}^n \mu_j f_j,$$

где x_0 и f_0 — какие-либо частные решения исходных уравнений.

Разделение теоремы 11.4 на ингредиенты позволяет расставить акценты и подчеркнуть принципиальные моменты.

11.4.2. *Для разрешимости $x - Tx = y$ при любом данном y необходимо и достаточно $\langle f, y \rangle = 0$ для любого функционала f , удовлетворяющего сопряженному однородному уравнению $f - T^*f = 0$.*

Утверждению 11.4.2 двойственен следующий результат.

⁷⁾ Подробности содержания раздела см. в [3, т. 5].

⁸⁾ T^* — сопряженный оператор.

⁹⁾ Число которых совпадает. (!)

11.4.3. Для разрешимости $f - T^*f = g$ при любом данном $g \in E^*$ необходимо и достаточно $\langle g, x \rangle = 0$ для любого x , удовлетворяющего однородному уравнению $x - Tx = 0$.

Из приведенных утверждений ясно, что при отсутствии ненулевых решений у $f - T^*f = 0$ уравнение $x - Tx = y$ разрешимо при любом y . Аналогично: из « $x - Tx = 0 \Rightarrow x = 0$ » вытекает разрешимость $f - T^*f = g$ при любом g . Более того:

11.4.4. Теорема об альтернативах Фредгольма. Для разрешимости неоднородного уравнения $x - Tx = y$ либо $f - T^*f = g$ при любой правой части необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение (любое из $x - Tx = 0$, $f - T^*f = 0$) имело только тривиальное решение.

По ходу дела выясняются следующие факты.

11.4.5. Однородные уравнения $x - Tx = 0$ и $f - T^*f = 0$ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

11.4.6. Нуль-пространство оператора $I - T$, т. е. множество решений однородного уравнения $x - Tx = 0$, — конечномерно.

11.5. Пространства Соболева

ЧП-уравнения естественно изучать в их взаимодействии с функциональным анализом, получая дополнительную пользу в понимании роли функциональных пространств. Но это несколько иной ракурс, который на определенных этапах изучения дисциплины становится главенствующим, тогда как для первого знакомства малопригоден. А попытка охватить сразу все целиком — не проходит, ибо при всестороннем рассмотрении «ничего не видно». Тем не менее отдаленное представление о пространствах, используемых при рассмотрении уравнений с частными производными, иметь полезно. По крайней мере, чтобы декорации не раздражали.

Пространства Соболева W_p^l при целом l и $p \in (1, \infty)$ состоят из функций $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, суммируемых с p -й степенью вместе

со своими производными до l -го порядка включительно. Норма в W_p^l вводится как¹⁰⁾

$$\|u\|_{W_p^l} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u(\mathbf{x})\|_{L_p} \right)^{1/p}.$$

Определение W_p^l с помощью несколько громоздкой конструкции расширяется на все значения $l \in (-\infty, \infty)$. Пространством Соболева называют также $\overset{\circ}{W}_p^l$, представляющее собой подпространство W_p^l , полученное замыканием в W_p^l множества всех бесконечно дифференцируемых функций.

Взаимоотношения пространств Соболева при различных l и p детально изучены, соответствующие результаты называются *теоремами вложения*. Например, если $p \geq q$ и,

$$\frac{n}{p} - l \geq \frac{n}{q} - k, \quad (11.9)$$

то W_q^k вложено в W_p^l . Если неравенство (11.9) строгое, вложение компактно.

Целесообразность использования всей этой кухни поначалу, конечно, не усматривается. Но с увеличением широты замаха — с разрастанием совокупности решаемых вопросов — выясняется, что инструмент полезный. Потребности вытекают из необходимости сводить концы с концами в смысле согласования разных сторон задачи.

Скажем, *эллиптический оператор* L (глава 9), действующий в функциональном пространстве E , при рассмотрении *обобщенных решений* приходится считать определенным на таком максимальном подмножестве $\mathbb{D}_L \subset \mathbb{D}$, которое включено в E и на котором значения L также принадлежат E . Но сия конструкция приводит к доопределенному оператору, какой-то малоудобен и даже не замкнут. Доопределение L на W_p^k дает продуктивный выход

¹⁰⁾ Напомним, пространство $L_p(\Omega)$ состоит из измеримых по Лебегу функций $u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, суммируемых с p -й степенью, $1 \leq p < \infty$. Норма в $L_p(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

из положения. Внешняя форма записи сохраняется, но D^α в (9.1) теперь обозначает *обобщенное дифференцирование в смысле Соболева*¹¹⁾, а оператор считается определенным на W_p^k , вместо \mathbb{D}_L .

11.6. Список задач и решений

Уравнение диффузии, или теплопроводности,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0,$$

есть $u_t = a^2 \Delta u$, $a^2 = k/(c\rho)$. В \mathbb{R}^3 выглядит как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

на прямой: $u_t = a^2 u_{xx}$.

Тип *гиперболический*, скорость распространения — бесконечная¹²⁾. Имеет характеристики $t = C$, описываемые уравнением

$$0 \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - a^2 \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

Начальное условие ограничивается требованием $u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x})$.

Фундаментальное решение, как решение уравнения¹³⁾

$$\mathcal{E}_t - a^2 \Delta \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t),$$

стремящееся к нулю на бесконечности, есть

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t} \right\}.$$

¹¹⁾ Обобщенная производная Соболева $v(\mathbf{x}) = D^\alpha u(\mathbf{x})$ определяется равенством

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) D^\alpha \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (-1)^\alpha \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

где $\varphi \in \mathbb{D}$.

¹²⁾ С некоторыми оговорками, см. п. 8.1.

¹³⁾ То есть как реакция на импульсный «впрыск» $\delta(\mathbf{x}, t)$.

Задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t), \quad u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x})$$

в классе функций $u(\mathbf{x}, t)$ и $f(\mathbf{x}, t)$, равных нулю при $t < 0$, равносильна уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta(t),$$

решение которого получается с помощью свертки правой части с фундаментальным решением,

$$u = \mathcal{E} * [f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta(t)].$$

Задача корректна¹⁴⁾.

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

с помощью оператора Д'Аламбера

$$\square_c = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

записывают в виде $\square_c u = 0$.

Тип параболический, скорость распространения — c . Решением характеристического уравнения

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 - c^2 \sum_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

служат характеристики

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0,$$

¹⁴⁾ Понятно, все рассматриваемые задачи корректны, иначе они бы не имели смысла. Другое дело, какого сорта возмущения считать допустимыми в том или ином случае.

с вершинами в точках (\mathbf{x}_0, t_0) , выделяющие в теории относительности конус «абсолютно будущих», по отношению к (\mathbf{x}_0, t_0) , событий

$$K_+(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : c(t - t_0) > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\}$$

и конус «абсолютно прошедших» событий¹⁵⁾

$$K_-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : c(t_0 - t) > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\}.$$

Начальные условия задаются в форме

$$u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=+0} = u_1(\mathbf{x}).$$

Фундаментальное решение, как решение уравнения

$$\square_c \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x}, t),$$

зависит от размерности. В частности,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2c} \theta(ct - |\mathbf{x}|), & n = 1, \\ \mathcal{E}_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{\theta(ct - \|\mathbf{x}\|)}{2\pi c \sqrt{c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}}, & n = 2, \\ \mathcal{E}_3(\mathbf{x}, t) &= \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(c^2 t^2 - \|\mathbf{x}\|^2), & n = 3. \end{aligned}$$

О принципиальных различиях распространения волн в пространствах разной размерности см. раздел 7.4. В \mathbb{R}^3 есть передний и задний фронт волны. При меньшей размерности задний фронт отсутствует, из-за чего говорят о нарушении *принципа Гюйгенса*.

Задача Коши

$$\square_c u = f(\mathbf{x}, t), \quad u|_{t=+0} = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=+0} = u_1(\mathbf{x})$$

в классе функций $u(\mathbf{x}, t)$ и $f(\mathbf{x}, t)$, равных нулю при $t < 0$, равносильна уравнению

$$\square_c u = f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta'(t) + u_1(\mathbf{x})\delta(t),$$

¹⁵⁾ В том смысле, что в любой системе отсчета события из K_+ происходят после, а из K_- — до события (\mathbf{x}_0, t_0) .

решение которого получается с помощью свертки правой части с *фундаментальным решением волнового уравнения*,

$$u = \mathcal{E} * [f(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x})\delta'(t) + u_1(\mathbf{x})\delta(t)].$$

Задача *корректна*.

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

либо неоднородный вариант, **уравнение Пуассона**: $\Delta u = f(\mathbf{r})$. Последнее в \mathbb{R}^3 часто записывают в виде $\Delta u = -4\pi\rho(\mathbf{r})$ — см. замечание к (9.11).

Характеристик не имеет. Все краевые задачи корректны¹⁶⁾. Функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, называются *гармоническими*.

Фундаментальным решением уравнения

$$\Delta \mathcal{E} = \delta(\mathbf{x})$$

является

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\|\mathbf{x}\|^{-n+2}}{(n-2)\sigma_n} \quad \text{при } n \geq 3$$

и

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \|\mathbf{x}\| \quad \text{в случае } n = 2.$$

Гармоническая функция $u(\mathbf{x})$ на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей Γ имеет представление

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|} \right) d\sigma.$$

Другими словами, значения $u(\mathbf{x})$ *внутри* Ω *выражаются через ее значения на границе области.*

¹⁶⁾ Для корректности задачи Неймана необходимы уточнения, см. п. 9.6.

Функцией Грина $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ оператора Δ на области Ω с границей Γ называется решение уравнения

$$\Delta G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}),$$

обнуляющееся на Γ . Иначе говоря, $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ представляет собой потенциал заряда, расположенного в точке $\boldsymbol{\xi}$, подобранный так, что

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma : G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0.$$

Очевидно,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{E}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) + \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}),$$

где ψ — гармоническая в Ω функция, и если выбором ψ распорядиться, решая задачу

$$\Delta\psi = 0, \quad \psi|_{\Gamma} = -\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{\Gamma},$$

то $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ будет искомой реакцией на импульсное воздействие $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$.

Общее решение задачи Дирихле $\Delta u = f(\mathbf{x})$, $u|_{\Gamma} = 0$ в случае непрерывной функции f дает формула типа свертки

$$u = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Задачу Дирихле с ненулевыми граничными условиями,

$$\Delta u = -f(\mathbf{x}), \quad u|_{\Gamma} = u_0(\mathbf{x}),$$

решает

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \oint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} u_0(\mathbf{x}) d\sigma.$$

По поводу задачи Неймана см. п. 9.6, а в случае сингулярного характера $f(\mathbf{x})$ действуются потенциалы простого и двойного слоя (п. 9.4).

Уравнения Максвелла в вакууме при отсутствии *токов смещения* образуют систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{cases} \quad (11.10)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей. При наличии электрических зарядов, распределенных с плотностью ρ , уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ заменяется на $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Из первых двух уравнений (11.10) следует:

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Так что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} удовлетворяют *волновому уравнению*.

Уравнение Шрёдингера

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \psi$$

в пространственно-одномерном случае переходит в

$$\psi_t = \frac{i\hbar}{2m} \psi_{xx},$$

и при поиске периодических решений с переменной амплитудой

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\epsilon t/\hbar}$$

приводит к уравнению для амплитуды $\psi(x)$:

$$\psi_{xx} + \frac{2m\epsilon}{\hbar^2} \psi(x) = 0,$$

которое также называют *уравнением Шрёдингера*. В абстрактной классификации это *уравнение Гельмгольца*.

Пидро- и газодинамика в случае ламинарных потоков описывается полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, плотностью $\rho(\mathbf{r})$ и давлением $p(\mathbf{r})$, взаи-

многоотношение которых регулируется *уравнением Эйлера*¹⁷⁾

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = 0,$$

в силу $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, обычно записываемого в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0.$$

Уравнение Эйлера решается в комплексе с *уравнением неразрывности*¹⁸⁾

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

и *уравнением состояния*, связывающим давление и плотность. Например, $p/\rho^\gamma = \text{const}$ в случае адиабатического течения газа. Либо $\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости.

В случае несжимаемой жидкости $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. А если при этом существует еще и *потенциал скорости* φ ,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

то $\boxed{\Delta \varphi = 0}$, в силу $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$.

Нелинейные уравнения

$$u_t + u \cdot u_x = 0 \quad (\text{Хонфа}), \quad \text{п. 8.3};$$

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (\text{Кортвеге—де Фриза}), \quad \text{п. 7.6};$$

$$u_t + u \cdot u_x = \mu u_{xx} \quad (\text{Бюргерса}), \quad \text{п. 8.3};$$

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \quad (\text{синус-Гордона}), \quad \text{п. 7.5}.$$

Бегущая волна (п. 7.5) представляет собой решение вида $u(x, t) = f(x - ct)$, характерное для многих уравнений с частными производными, не только для *волнового уравнения*, поскольку подстановка

¹⁷⁾ Являющимся непрерывным аналогом второго закона Ньютона. При наличии внешних сил $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ нуль справа меняется на \mathbf{F} .

¹⁸⁾ Следствие закона сохранения массы. Если, конечно, нет источников. В противном случае нуль справа заменяется интенсивностью источников $f(\mathbf{r}, t)$. Эквивалентная форма *уравнения неразрывности*: $d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

$u(x, t) = f(x - ct)$ в ЧП-задачу приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции f , в силу

$$u_t = -cf', \quad u_x = f', \quad u_{tt} = c^2 f'', \quad u_{xx} = f'', \quad u_{tx} = -cf'', \dots$$

О связи этой идеи с общими принципами симметрии см. главу 5.

Сокращения и обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

(?) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки», — но не является вопросом «правильно или неправильно?»

(!) — предлагает обратить внимание

«в томм случае» — «в том и только том случае»

ЧП- — приставка, указывающая на принадлежность к области уравнений с частными производными

ДФ — дифференциальная форма

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ — объединение, пересечение, разность множеств

$X \subset Y$ — X подмножество Y , в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

\overline{X} — замыкание X

∂P — граница множества P

\emptyset — пустое множество

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство

$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — вектор, x_i — его координаты; в \mathbb{R}^3 векторы часто обозначаются как $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{ab} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ — скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}

$z = x + iy$ — комплексное число, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — его тригонометрическая запись, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая; $\bar{z} = z^* = x - iy$ — комплексно сопряженное число

\mathbf{x}' — в зависимости от контекста может обозначать производную $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ либо новую координату

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\} \text{ — градиент функции } f(\mathbf{x})$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \text{ — оператор Лапласа}$$

$$\square_c = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{ — оператор Д'Аламбера}$$

$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ — дивергенция, или расхождение, векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ — ворт, или циркуляция, векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$

$\theta(x)$ — функция Хэвисайда, единичный скачок, $\theta(x \geq 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}, \dots, \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right), \text{ где } \alpha \text{ — мультииндекс}$$

$$L(D) = \sum a_\alpha D^\alpha \text{ — дифференциальный оператор}$$

Литература

1. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963.
2. *Босс В.* Интуиция и математика. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
3. *Босс В.* Лекции по математике. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10: Перебор и эффективные алгоритмы. М.: URSS, 2004–2008.
4. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Математический анализ в задачах и упражнениях. М.: Изд-во МГУ, 1988.
5. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 1–3. М.: Физматгиз, 1958.
7. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
8. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: URSS, 2004.
9. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
12. *Ландау Л. Д., Лишин Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7: Теория упругости. М.: Наука, 1965.
13. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Меркурий-ПРЕСС, 2000.
14. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Лань, 2002.
15. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях в частных производных. М.: Наука, 1961.

16. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.
17. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: URSS, 2001.
18. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 2003.
19. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. I: Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

Предметный указатель

Автомодельность 91

алгебра Ли 104

Бегущая волна 139

Векторное поле 16

внешний одночлен 173

внешняя производная 176

волновой вектор 143

волны Рэлея 31

— стоячие 136

вязкое трение 38

Гармоническая функция 84, 195

генератор группы 94

гиперболический поворот 34

гиперплоскость 76

гомологичные циклы 190

градиент 15

— одного вектора по другому 22

граница симплекса 188

— цепи 188

граничный оператор 188

грань симплекса 187

группа гомологий 189

— когомологий 191

— Ли 92

— параметрическая 92

Двойной слой 118

дивергенция 16

дисперсия 144

диффузия волн 138

допускаемая группа 101

допускать группу 95

Задача внешняя 162

— внутренняя 162

— Дирихле 58

— корректно разрешимая 50

— Коши 129

— Неймана 58

— третья краевая 58

— Штурма—Лиувилля 170

замена Коула—Хопфа 150

запаздывающий потенциал 128

Идеальная жидкость 38

импульсная переходная функция 123

инвариант группы 95

инвариантное решение 109

интеграл Дюамеля 123

интегральная формула Коши 196

интегрирующий множитель 74

инфinitезимальный оператор 94, 97

Касательное векторное поле 94

— пространство 175

КdФ-уравнение 140

коммутатор векторных полей 103

комплексное расширение 197

конормаль 169

контрпример Ковалевской 47

коэффициент инцидентности 188

коэффициенты Ламэ 193

краевые условия 26

круговая частота 143

Лемма Пуанкаре 177

- Многочлены теплопроводности** 146
мультииндекс 11
- Носитель функции** 112
- Обобщенная производная** Соболева 203
— функция 113
— — регулярная 113
обобщенное решение 125
однородные функции 77
оператор Гамильтона 18
— Д'Аламбера 30
— Лапласа 18, 32
— «набла» 18
— сопряженный 153
— эллиптический 152
опрокидывание волны 149
ориентация 181
отображение конформное 85
- Первый интеграл** 68, 76
поверхность Ляпунова 63
поле скоростей 36
— соленоидальное 17
полиэдр 187
полный дифференциал 10
постоянная Планка 40
потенциал двойного слоя 161
— простого слоя 160
— скорости 38
правило переброски производной 114
преобразование Фурье 119
преобразования Лоренца 35
принцип Гойгенса 138
— максимума 154
— — модуля 195
— суперпозиции 59
- продолженная группа 100
производная Ли 68
— обобщенной функции 114
— по направлению векторного поля 68
простой слой 118
пространства Соболева 201
пространство \mathbb{D} 112
- Расхождение** 16
регулярное значение 197
ротор 20
- Симплекс** 186
симплексиальный комплекс 187
система характеристическая 71
скобка Ли 103
скорость групповая 143
— фазовая 143
собственное значение 198
— подпространство 198
собственный вектор 198
солитон 141
спектр 197
спектральный радиус 198
структурные константы 104
сферическая волна 137
сферические координаты 192
сходимость обобщенных функций 113
- Теорема Гаусса—Остроградского** 17
— Гильберта—Шмидта 199
— Ковалевской 47
— Ли 81
— Лиувилля 81
— Морера 196
— о выпрямлении 80
— о среднем 157

- Стокса 21, 181, 185
- Фробениуса 75
- Хёрмандера 126
- теоремы вложения 202
- теория распределений 124
- тождество Якоби 104
- точка нехарактеристическая 71
- триангуляция 187

- Ударная волна** 149
- уравнение Бюргерса 150
 - волновое 30, 204
 - Гамильтона 82
 - Гамильтона—Якоби 81
 - Гаммерштейна 62
 - Гельмгольца 32
 - гиперболического типа 52
 - диффузии 24, 203
 - квазилинейное 71
 - Кортвеге—де Фриза 140
 - Лапласа 32, 206
 - неоднородное 72
 - неразрывности 37
 - однородное 67
 - параболического типа 52
 - Пуассона 32
 - Пфаффа 73
 - синус-Гордана 140
 - теплопроводности 25, 203
 - Трикоми 54
 - Фредгольма 199
 - характеристик 67
 - Хопфа 72, 140, 149
 - эйконала 83
 - эллиптического типа 52
- уравнения Максвелла 39
- условия Коши—Римана 83, 195

- Финитная функция** 112
- форма замкнутая 177
 - точная 177
- формула Грина 19, 22, 196
 - Д'Аламбера 132
 - Пуассона 165
 - Эйлера 77
- формулы Сохоцкого 117
- фронт волны 138
- фундаментальная система решений 81
- фундаментальное решение 122, 125
- функция гармоническая 153
 - Грина 123, 162
 - компенсирующая 162
 - Хэвисайда 114
- Характеристическая поверхность** 55
- Цепь τ -мерная** 188
- циклы «топологические» 189
- цилиндрические координаты 192
- циркуляция 20
- Частная производная** 9
- ЧП-уравнения** 23
- П-теорема** 89
- k -форма** 171
- k -форма дифференциальная** 175
- 0-форма** 175



В «Лекциях по математике» В. Босса вышли тома:

1. Анализ.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Линейная алгебра.
4. Вероятность, информация, статистика.
5. Функциональный анализ.
6. От Диофанта до Тьюринга.
7. Оптимизация.
8. Теория групп.
9. ТФКП.
10. Перебор и эффективные алгоритмы.
11. Уравнения математической физики.

Готовятся: «Теория чисел», «Топология», «Контрпримеры и парадоксы».



В условиях информационного наблюдения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Поэтому учить надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Что в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

В. Босс



Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет, надо освободить его от деталей, обнажить центральные конструкции. Это тяжелая работа, которая в «Лекциях» проделывается автором.

Дается то, чего недостает. Общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо увязано. Громоздкие доказательства ужаты до нескольких строчек. Виртуозное владение языком.

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:

<http://URSS.ru>

Тел./факс: 7 (499) 135-42-16

URSS Тел./факс: 7 (499) 135-42-46

6215 ID 77731



9 785397 000208 >

Отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные ошибки присыпайте по адресу URSS@URSS.ru.

Ваше замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>.

