В. Босс

ЛЕКЦИИ по МАТЕМАТИКЕ

ТОМ 12

Контрпримеры и парадоксы

МОСКВА

URSS

ББК 22.161я73

Босс В.

Лекции по математике. Т. 12: Контрпримеры и парадоксы.
Учебное пособие. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 216 с.

Рассматриваются контрпримеры и парадоксы, рассеянные по другим томам и территориям. В отличие от специализированных источников подобного сорта здесь проблематика охватывается шире — фактически во всем диапазоне университетского математического образования. Отбор материала производится в основном по критерию идеологической значимости. Главное внимание уделяется осмыслению результатов.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «Книжный дом "ЛИБРОКОМ"».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Псч. л. 13,5. Зак. № 1964.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-397-00311-7

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»

В математике — что-то не так. Проще сказать, конечно, что все в порядке. Но вы-то чувствуете, что чего-то не хватает. То ли — в избытке.

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

1) *живой учитель*;
2) *обыкновенный подробный учебник*;
3) *рядовой задачник*;
4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем»*.

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого сорта книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к двенадцатому то́му

Математика состоит из двух вещей — теорем и контрпримеров.

Д. Пойа

В этом мире между поворотными моментами все движется по инерции. Так и математика течет в рутине эпизодов, однако время от времени разбивается в фейерверк на крутых виражах. При этом формообразующая роль противоречий и неожиданностей не только управляет движением, но и питает эмоции, без которых суть невидима.

Далее собраны факты и положения, рассеянные по другим томам и территориям. В центре внимания — осмысление, ибо цель состоит не в том, чтобы удивить фактурой, — а в том, чтобы уловить, «какова роль, откуда проистекает и на что влияет». Акцент делается на тех примерах, где суть противоречит либо интуитивным представлениям, либо побочным эффектам образования в виде порочных стереотипов мышления.

Глава 1

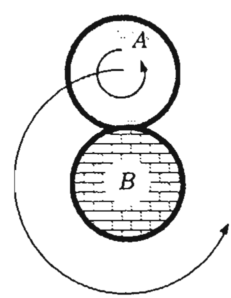
Интуиция как источник парадоксов

Ощущение противоречия мешает пребывать в заблуждении.

Разговор пока предварительный, даже не о математике, — просто для настройки в резонанс. Потому что источники противоречий сами по себе универсальны.

1.1. Противоречия «в» или «вне»

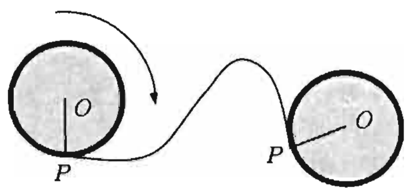
Истоки любых парадоксов и разногласий принято относить на счет Мироздания, т. е. объекта, тогда как бóльшая часть приходится на «неадекватность» субъекта. Патология восприятия сильнее объективной реальности. «В природе» нет никаких противоречий, они все — в голове.

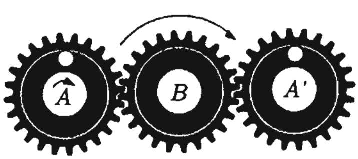


1.1.1. Пример. *Мало кто готов согласиться, что круг A, катящийся без проскальзывания по неподвижному кругу B, за один оборот вокруг B — сам по себе делает два оборота.* **(!)** *Другими словами, любая фиксированная точка на ободе A к моменту первого возвращения круга в исходное положение — совершает два оборота вокруг центра A.*

Причина заблуждения, пожалуй, в поспешности заключения. Колесо, катящееся без проскальзывания по ровной дороге, совершает один оборот, когда проходит расстояние L, равное длине своего периметра. Здесь A проходит такой же путь, так что получается вроде бы «один оборот». Дорога, правда, «неровная», — но с какой стати это должно влиять на обороты? Таков приблизительно врожденный уровень дисциплины ума. Приобретенные навыки и некоторая генетическая «хваткость» не дают мысли успокаиваться раньше времени, и тогда результат уже другой.

Если профиль дороги изгибается, то радиус-вектор OP не может совершать один оборот, когда точка P возвращается на дорогу, потому что новое положение OP не параллельно исходному. Это сдвигает мысль с мертвой точки, и добавление «еще одного поворота» при замыкании профиля дороги вырисовывается более-менее ясно.





Тем не менее когда зубчатое колесо A (слева) прокатывается по неподвижному колесу B — пол-оборота — и переходит в положение A', интуитивно кажется, что оно все-таки должно быть вверх ногами. Ан нет.

1.2. Существует ли логический дальтонизм

Визуальные ловушки для выявления дальтоников, зрительные иллюзии и обманы для развлечения, — все это подталкивает к мысли о существовании аналогов в ментально-логической сфере. Возьмем хорошо известный пример

в котором рисунок меняется при перевороте, что поначалу выглядит по меньшей мере странно. Поворот на 180° превращает девушку в старуху, и воображение, попадая в западню, не в состоянии рассмотреть в правом варианте — левый. Точно так же логические рассуждения подвержены метаморфозам под воздействием неправильных акцентов, побочных резонансов и вообще — неточностей разного калибра.

Не хотелось бы далее углубляться в зрительные обманы, хорошо известные на поверхностном уровне. Структурно в них заложены многие архетипы воображения и мышления, действующие в быту и в математике. Там, где описание задачи, формулировка вопроса непроизвольно или намеренно вызывают неподходящие случаю ассоциации, — включаются нежелательные стереотипы, и мысль уводится в сторону. Вот характерный пример.

Допустим, опрос населения в Ростове и Магадане насчет оценки деятельности президента дал следующие гипотетические результаты (отдельно среди женщин и мужчин).

Ростов	*женщины*	*мужчины*
отрицательно	100	10
положительно	800	90

, $\dfrac{800}{100+800} < \dfrac{90}{10+90}$,

Магадан	*женщины*	*мужчины*
отрицательно	100	890
положительно	0	10

, $\dfrac{0}{0+100} < \dfrac{10}{10+890}$.

Объединение результатов рождает химеру. В Ростове и Магадане процент женщин, оценивающих президента положительно, меньше, чем у мужчин. В целом — наоборот:

Ростов+Магадан	*женщины*	*мужчины*
отрицательно	200	900
положительно	800	100

, $\dfrac{800}{200+800} \gg \dfrac{100}{100+900}$.

На абстрактном уровне речь идет о следующем. Из

$$\frac{\xi_1}{\xi_1+\nu_1} > \frac{A_1}{A_1+B_1}, \qquad \frac{\xi_2}{\xi_2+\nu_2} > \frac{A_2}{A_2+B_2}$$

иногда делается поспешный вывод о справедливости неравенства

$$\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_1+\nu_1+\xi_2+\nu_2} > \frac{A_1+A_2}{A_1+B_1+A_2+B_2},$$

к чему нет никаких предпосылок.

Истоки «неправильного ожидания» находятся в упрощенных моделях «того же типа». Скажем, если женщин в каждом городе больше половины, то и в объединении городов — та же картина,

$$\frac{p}{P} > \frac{1}{2}, \frac{m}{M} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{p+m}{P+M} > \frac{1}{2}.$$

Подобные банальности группируются в «категории», образующие каркас жизненного опыта. Далее подсознание относит новые ситуации к «ближайшей категории». Механизм иногда ошибается, зато работает быстро.

Из той же оперы *парадокс Уилла Роджерса* об увеличении среднего значения обоих числовых множеств A и B при перемещении одного элемента из A в B. Почему-то кажется, что такого не должно быть. Тем не менее перемещение числа 99

$$\text{из} \quad A = \{99, 201\} \quad \text{в} \quad B = \{0, 1\}$$

увеличивает среднее обоих множеств. И так происходит всегда, когда из A в B перемещается элемент, который в A — ниже среднего, в B — выше.

1.3. Инерция и неизобретательность

Интуитивные сбои каждый раз сбоят по-своему. Конечно, всегда есть общее — в движении мысли проторенными ранее путями [1] — но есть и разнообразие форм.

Вот несколько тривиальных «приколов», где негативная роль интуиции ярко выражена.

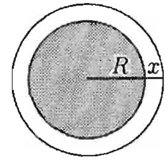
1.3.1. *Землю опоясали веревкой по экватору. Осталось лишних* 10 *метров. Тогда концы соединили и расправили веревку так, чтобы с экватором получилась концентрическая окружность. Спрашивается, каков зазор между веревкой и Землей?*

[1] Ведущими «не туда», потому что все это было утоптано для решения других задач.

Большинству населения интуитивно кажется, что в этот зазор и муравей не пролезет. Но выкладка

$$2\pi(R+x) - 2\pi R = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10}{2\pi}$$

показывает, что зазор больше полутора метров и не зависит от длины экватора вообще.



Источник заблуждения примечателен. Не желая дисциплинированно мыслить, подсознание зацикливается на планетарном масштабе задачи, на фоне которого 10 м сущий пустяк. Фундамент окончательного вывода — в хромающих аналогиях.

1.3.2. *На карте России масштаба*

1 : 10 000 000

все размеры уменьшены в 10 миллионов раз. Если население в 150 миллионов уменьшить во столько же раз — останется 15 человек. Казалось бы, им должно хватать места. Но на карте и одному тесно.

Детский сад, разумеется. Сжатие размеров в 10^7 раз — уменьшает площадь в 10^{14} раз. Опрос населения Европы показывает, тем не менее, что 99 % респондентов попадают в тупик. Простая умственная лень. Но если таких зевков имеется несколько в цепочке рассуждений — возникающий тот или иной «конфуз» бывает трудно распутать.

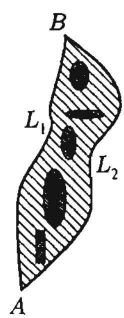
Интуиция легко прикупается на всяких ерундовых хохмах. Сорванец утверждает, что здоровый дядька не поднимет с пола катушку зубами, не дотрагиваясь до той ничем другим. После заключения пари ставит катушку на пол вплотную к стенке, и продвинутому интеллектуалу мешает достичь цели собственная голова, упирающаяся в стенку. Природа заблуждения здесь такая же, как и во многих математических задачах. Когда речь идет о некой общей ситуации, воображение выхватывает из множества допустимых типичный случай — и первый же шаг рассуждений оказывается ошибочным. Особые случаи — типа катушки у стены, или под диваном, или прибитой к полу, или вымазанной дегтем — сразу не приходят на ум. В сложных ситуациях нетипичные варианты совсем не приходят на ум.

1.3.3. Парадокс Смейла. *Сферу в трехмерном пространстве можно вывернуть наизнанку непрерывной деформацией с возможными самопересечениями, но без складок*[2)].

Яркий пример на тему неизобретательности визуального манипулирования в незнакомой области. Собственно, никакого парадокса здесь нет. Просто рядовое геометрическое воображение не способно на гроссмейстерские трюки, и ему кажется, что без перегибов (изломов) — не обойтись. *Смейлу* — удалось подняться на *уровень особых случаев*.

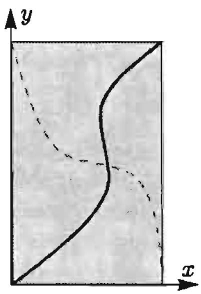
История публикации соответствующей статьи — см. сноску — имеет анекдотическую составляющую, ибо рецензент настаивал на «невозможности», ссылаясь на необходимость сохранения *степени отображения*. Степень отображения действительно при непрерывных деформациях обязана сохраняться — а у тождественного оператора $I(x) \equiv x$ и $-I(x)$ на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ степени разные (1 и -1), — но в соответствующей топологической теории [3, т. 1, глава 9] непрерывные деформации могут быть любыми, в том числе «со складками», однако не должны пересекать центр сферы. Таким образом, в том и другом случае речь идет о совершенно разных задачах и предположениях. Тем не менее частичное совпадение формы влечет за собой мешанину содержания. В результате до сих пор многие думают, что *парадокс Смейла* вступает в противоречие с теорией степени отображения.

У подсознания вообще есть непреодолимые барьеры, принципиально не дающие решить некоторые проблемы. В математике это проявляется на каждом шагу. Возьмем хорошо известную задачу. *Из пункта A в пункт B ведут две дороги L_1 и L_2, по которым две точки из A в B могут двигаться, оставаясь все время в поле зрения друг друга. Вопрос заключается в том, могут ли точки двигаться — одна из A в B, другая из B в A, — оставаясь все время **невидимы** друг другу?*



◄ Пусть x обозначает расстояние от A до точки на L_1 вдоль L_1. Соответственно, y — расстояние от A до точки на L_2 вдоль L_2. Сплошная кривая на рисунке описывает движение точек из A в B, когда они остаются все время в поле зрения друг друга. Движению точек, одной из A в B, другой из B в A, — отвечает

[2)] *Smale S.* A classification of immersions of the two-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. **90**. P. 281–290. Наглядный вариант деформации см. на сайте http://en.wikipedia.org/wiki/Morin_surface. А на сайте http://www.youtube.com/watch?v=R_w4HYXuo9M можно посмотреть видеоролик «выворачивания».



некоторая траектория, изображенная пунктиром. В силу непрерывности кривые пересекаются. В точке пересечения точки видны друг другу. Решение задачи — отрицательно. ►

Решение в итоге совсем просто, но чисто интуитивно задача вообще нерешаема. Потому что в осязаемо ясную форму она переводится актом абстрагирования, чем интуиция не занимается. И там, где для решения требуется метафизический фокус, интуиция пасует. Ошибочные же заключения проистекают обычно из не относящихся к делу обстоятельств.

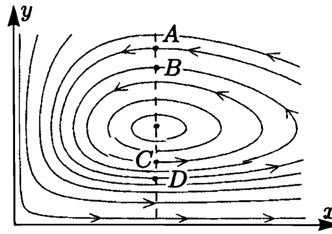
Интуитивные ощущения, если оставаться на материалистической почве, возникают из стихийной классификации. Подсознание, группируя наблюдаемые ситуации по категориям, учитывает массу обстоятельств, иногда даже недоступных для сознательного наблюдения. Уследить, какого сорта ассоциации включаются и какие сигналы принимаются в расчет, бывает очень трудно и даже невозможно. Поэтому смутные предчувствия в виде интуитивных «озарений», иногда «оправданных по ошибке», случаются в таких эмпиреях, где интуиция, казалось бы, не имеет никакого опыта.

1.4. Иллюзии неразрешимости

Представление о неразрешимости той или иной задачи является, понятное дело, мощным тормозом, и возникает по вине интуиции — из-за ограниченности типов используемых механизмов и нацеленности на решение «других проблем». Ошибочные впечатления, само собой, ведут в тупики противоречий.

1.4.1. Парадокс увеличения численности волков после отстрела. *По здравому размышлению — бред, тем не менее — факт. Действуя без математики, биологи долгое время терялись в догадках, привлекая объяснения мистического толка.*

◄ Разгадка тривиальна. Но только после перевода задачи в другую категорию мышления, что подсознанию как раз недоступно. Пусть x, y, соответственно, обозначают численности овец и волков. Для описания динамики такой системы общепринята *модель Вольтерра—Лотки*:



$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y)\, x, \\ \dot{y} = (\gamma x - \delta)\, y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Скорость $\dot{x}$ пропорциональна рождаемости, а значит — численности овец x, но коэффициент пропорциональности $\alpha - \beta y$ тем меньше, чем больше волков. И наоборот, коэффициент $\gamma x - \delta$ роста популяции хищников тем больше, чем больше пищи, т. е. овец.

Решения (1.1) в окрестности равновесия имеют колебательный характер — система движется по замкнутым кривым. Если в точке A производится отстрел волков, система перепрыгивает в точку B. Дальнейшее движение изображающей точки происходит по орбите меньшего размера. Если же отстрел производится в точке C, система переходит в D и движется по большей орбите — амплитуда колебаний увеличивается. Это уже противоречит интуиции, но объясняет явление. Выясняется заодно, что результат определяется выбором момента отстрела. ▶

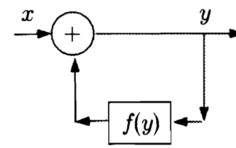
Наука изобилует примерами решения задач, которые долгое время считались неразрешимыми[3]. Либо наоборот, выяснением неразрешимости там, где этого, думалось, не может быть, пп. 8.6.1, 8.6.2. Либо вообще переворотом точки зрения. И это всегда триумф, ибо из психологических тисков, удерживающих течение мысли в предуготованном направлении, — очень трудно вырваться.

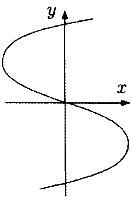
1.5. Движение по накатанной

Большое число ошибок порождается ездой проторенными путями. Условия работоспособности тех или иных методов часто забываются. Да они (условия) не всегда могут быть ясно и просто сформулированы. И тогда большое количество успешно решенных задач создают мираж универсального инструмента. Вот типичный «прокол» в рамках идеологии блок-схем.

[3] См. например, п. 8.8 о шифровании с открытым ключом или организации передачи данных, которая при подслушивании не дает третьей стороне никакой информации.

Рассмотрим блок-схему, в цепи обратной связи которой использован функциональный преобразователь $f(y) = \sqrt{y}$ при $y > 0$ и $f(y) = -\sqrt{-y}$ при $y < 0$.





Результирующая связь между входом x и выходом y системы определяется равенством

$$x + f(y) = y, \qquad (1.2)$$

что приводит к зависимости y от x, изображенной на рисунке слева.

В итоге выход не определяется входом, хотя все звенья системы детерминированы и взаимнооднозначны. Заявление о многозначности связи входа с выходом не решает проблемы, так как безответным повисает вопрос: чему конкретно равно y? В реальной системе ведь значение y должно быть определено. Поэтому на практике приходится уточнять задачу: описывать динамику, учитывать «паразитные» емкости, индуктивности и прочее.

В случае той же блок-схемы, но в дискретном времени, и с «дифференцирующим» блоком f, дающим на выходе сигнал $y[k] - y[k-1]$ при входном сигнале $y[k]$, — из балансового соотношения (1.2), т. е.

$$x[k] + y[k] - y[k-1] = y[k],$$

вытекает $y[k] = x[k+1]$ — блок-схема предсказывает будущее. (!)

1.6. Портрет интуиции

Предыдущее «разбирательство» в некотором роде не в пользу интуиции, что искажает баланс значимости. Подсознание, как эквивалент интуиции, — управляющее сердцем, гормонами, пищеварением; подсказывающее чего бояться, кого любить, — механизм фантастически мощный, быстрый, непостижимый во всей его полноте, наконец, не имеющий равных на своем игровом поле. Абстрактное же мышление придуманными категориями и условными моделями — совсем другое устройство для других надобностей. Поэтому математика не очень подходящая сфера для интуитивных озарений — хотя не так чтобы всесторонне. Потому что «Оно», по выражению Фрейда, явление развивающееся.

Подсознание, взаимодействуя с сознательной частью индивидуума, шаг за шагом вырабатывает представления об источниках ментального происхождения. Процесс медленный, но он идет, и «математические инстинкты» не такая уж редкость среди профессионалов. Однако интуиция, какой ее задумал Бог, ориентирована все же на другие цели и широко пользуется внематематическими средствами, в том числе ненаблюдаемыми[4]. Для подтверждения последнего достаточно ссылки на чисто материалистические причины типа «двадцать пятого кадра».

Было бы, конечно, самонадеянно рассчитывать на понимание того, как «Оно» работает. Но один из аспектов лежит более-менее на поверхности. Впечатление такое, что интуиция действует как обучаемая машина распознавания образов, объединяя наблюдаемые ситуации в группы. Параметров отслеживается много, и поначалу классификация получается идиотская. Ребенка укусила пчела, когда он играл с кошкой. Подсознание для начала помечает кошку как опасный объект. Дальнейшее зависит от «хода истории». Если ситуация, не дай бог, повторится, «урок закрепляется» и может образоваться фобия кошек. Но чаще всего последующий жизненный опыт отсеивает ошибки классификации — снижая нагрузку неврологических клиник.

Короче говоря, механизм напоминает, а можно сказать и — совпадает, с механизмом образования условных рефлексов. В любой профессиональной сфере, будь то гончарное производство или математика, происходит то же самое. С той разницей, что обучение распознаванию жизненно важных обстоятельств продолжается миллионы лет, и многие результаты зашиты в гены, — тогда как математические сюжеты только-только поступают в жернова интуиции, и на «выходе» пока больше ляпсусов, чем завоеваний. В генах еще ничего математического не чувствуется, но в пределах индивидуального опыта успехи случаются. И чем больше задач

[4] В том числе — неконтролируемыми либо не относящимися к делу. Поэтому ощущение ясности или сумбура, тупика или воодушевления — может возникать из-за присутствия в задаче какого-нибудь словосочетания, застрявшего в подсознании занозой с детства при далеко не математических обстоятельствах.

решено и вопросов продумано, тем меньше «мусора» в портфеле интуиции. Тем больше оснований у подсознания исключить несущественные параметры — типа сопровождающей погоды либо урчания в животе, не говоря о потоках «флюидов». Поэтому для расширения компетенции подсознания необходимо многократное повторение. Приходится решать и решать. Иначе в математике действует та часть интуиции, которая воспитана была во времена приматов.

Глава 2

Числа и множества

Черные дыры во Вселенной — бог знает где, в теории множеств — на каждом шагу.

Теоремы выстилают асфальт в допустимых направлениях, парадоксы — не дают свалиться в кювет. Однако вторые манят, первые отпугивают.

2.1. Актуальная бесконечность

Множества — это, в первую очередь, числовые совокупности, тем или иным способом организованные. Проблемы начинаются на игровом поле $[0, 1]$, где источником противоречий служит завершение бесконечно развертывающегося процесса.

Сегмент $[0, 1]$ ловит необъятное, и неограниченно развертывающийся процесс оказывается в клетке. Именно в этом заключается большинство парадоксов. Патология ведь не проявляется в *машине Тьюринга* [3, т. 6], где лента бесконечна в смысле наращиваемости — если потребуется, можно удлинить. Проблемы начинаются, когда бесконечность уже *состоялась*, что как раз имеет место на любом кусочке вещественной прямой.

До определенного исторического момента математики не хотели замечать очевидного. Первым на непроторенную дорогу ступил *Георг Кантор*, и его усилия привели к перевороту математического мышления. Бесконечности, бывшие все на одно лицо, стали непохожи друг на друга.

Счетность. В основу сравнения легла простая идея. Бесконечные множества X и Y *эквивалентны* (*равномощны*), пишут $X \sim Y$, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Множества, эквивалентные натуральному ряду, ***счетны.*** Счетность множества дробей устанавливается просто. Рациональные числа располагаются в виде бесконечной квадратной таблицы и нумеруются вдоль стрелочек, что стало уже классикой, которую не обойдешь:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \multicolumn{8}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}\right)$$

В результате число $\frac{1}{1}$ получает номер 1, $\frac{1}{2}$ — номер 2, $\frac{2}{1}$ — номер 3 и т.д. Ранее встречавшиеся числа пропускаются. При этом устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных чисел и натуральным рядом [1].

Затем Кантор показал, что множество действительных чисел отрезка $[0, 1]$ (*континуум*) — ***несчетно.*** В предположении противного их можно пронумеровать

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{2.1}$$

и тогда любое число b с десятичной записью

$$b = 0, \beta_1, \beta_2 \ldots,$$

[1] Разумеется, аналогичным образом можно перечислить n-мерные целочисленные векторы; алгебраические уравнения с рациональными коэффициентами, а также их корни; компьютерные программы и т. п.

отличающееся от a_1 в первом десятичном знаке, от a_2 — во втором, и т. д., — не входит в список (2.1), что дает противоречие[2)].

Это было более-менее ожидаемо. Но когда выяснилось, что квадрат и отрезок равномощны, *Кантор* был потрясен.

2.1.1. *Квадрат и отрезок равномощны.*

◀ Центральная идея доказательства совсем проста. Точки квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ с координатами

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots, \quad y = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots$$

сопоставляются точкам отрезка $[0, 1]$

$$z = 0{,}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots\,.$$

Уточнение деталей порождает известную канитель, связанную с неоднозначной записью некоторых чисел типа $0{,}35999\ldots = 0{,}36000\ldots$ Обычно предпочтение отдается варианту с бесконечным числом нулей, но это не спасает указанное соответствие от неоднозначности[3)]. Правда, взаимная однозначность восстанавливается, если счетную часть точек отрезка изъять из рассмотрения. Тогда квадрат $[0, 1]\times[0, 1]$ получается равномощен подмножеству $A \subset [0, 1]$, и уже как следствие (по *теореме Кантора—Бернштейна* 2.10.2) — самому отрезку $[0, 1]$. Явное взаимно однозначное соответствие см. в п. 4.7. ▶

Затем Кантор стал искать промежуточное по мощности множество между натуральным рядом и континуумом $[0, 1]$. Одна из попыток в этом направлении вошла в историю под именем *канторова множества* C.

2.1.2. ***Канторово множество** C получается последовательным выбрасыванием третей из сегмента $[0, 1]$. Сначала $[0, 1]$ делится на три равные части, и средняя **(интервал)** удаляется. С каждой из оставшихся частей повторяется аналогичная операция — и так до бесконечности. В пределе от $[0, 1]$ и остается как раз множество C.*

[2)] Такой способ построения числа b называют *диагональным*. Чтобы обойти стороной проблему неоднозначной записи десятичной дроби, достаточно потребовать $b_j \neq 9$ для всех j.

[3)] Разные точки отрезка, например,

$$0{,}11; \quad 0{,}100909090\ldots; \quad 0{,}01909090\ldots,$$

переходят в одну и ту же точку квадрата $\{0, 1;\ 0, 1\}$.

Длина выброшенных третей равна

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\ldots=1,$$

т. е. «вся длина» $[0, 1]$ выбрасывается. Однако оставшееся множество C оказывается *равномощноконтинууму*[4], что и представляет главный сюрприз.

Множество C как пересечение замкнутых множеств — замкнуто. Оно *нигде не плотно* (п. 3.5), поскольку то, что остается после n-й операции удаления, не содержит интервалов длины более $1/3^n$.

Интуитивно кажется, что C составляют концы выброшенных интервалов, но $\boxed{\text{это не так}}$, потому что тогда C было бы счетно. Но C не счетно, поскольку состоит из чисел вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$, где a_k принимают значения 0 или 2, т. е. из чисел, в троичной записи которых не встречается единица. Последовательностей же $a_1, a_2, \ldots$, где a_k могут принимать два разных значения (как при двоичной записи числа), — несчетное количество. Кстати, функция, переводящая точку $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ в точку $y=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/2^{k+1}$ — непрерывна и отображает канторово множество C **на** $[0, 1]$. **(!)**

2.1.3. Гипотеза континуума. *Безуспешные попытки найти промежуточное по мощности множество постепенно привели Кантора к убеждению, что «промежуток» пуст — вслед за счетным множеством сразу идет континуум.*

Гипотеза подорвала здоровье многих математиков, в том числе и самого *Кантора*. На решение проблемы ушла сотня лет. Итог оказался неожиданным. Выяснилось, что гипотезу с равным успехом можно принять или отвергнуть, как аксиому — см. раздел 8.5.

2.2. Аксиома выбора

Легче не пустить, чем потом выгонять.

Ложь и правда неотделимы. Не всегда это ясно, но иногда та́к вспыхнет, что мир начинает выглядеть совсем по-другому.

---

[4] Множества *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. *Континуумом* называют отрезок $[0, 1]$.

2.2.1. Аксиома выбора. *В любом семействе Φ непустых множеств в каждом $X \in \Phi$ можно выбрать по одному элементу. Другими словами, существует функция выбора f, ставящая в соответствие каждому $X \in \Phi$ элемент $f(X) \in X$.*

Навскидку безобидный факт. До 1904 г. им пользовались безотчетно, и ситуация сохранялась бы долгое время, если бы не *Цермело*, привлекший внимание к утверждению своими изысканиями. Общественность задумалась, а потом ахнула. Обнаружились столь невероятные следствия, что от предпосылки впору было отказываться. *Парадокс Банаха—Тарского*, *неизмеримые множества*, *разрывные линейные функции* (см. пп. 2.3, 2.7) — все эти несуразности посыпались как из рога изобилия.

На практике чаще пользуются следующими двумя утверждениями, эквивалентными аксиоме выбора.

2.2.2. Теорема Цермело. *Всякое множество X можно вполне упорядочить так, что у любого подмножества $A \subset X$ будет наименьший элемент $x_0 \in A$.*

2.2.3. Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X любое упорядоченное подмножество ограничено снизу, то в X существует минимальный элемент x^*.*

Обратим внимание, что *наименьший элемент* A — это элемент $x_0 \in A$, меньший любого другого: $x_0 \leqslant x$, если $x \in A$. А *минимальный элемент* — это такой $x^* \in A$, что в A нет элемента, меньшего x^*.

Интересно, что *лемма Цорна*, как и сама *аксиома выбора*, интуитивно правдоподобна, тогда как *теорема Цермело* сомнительна[5], и ее можно ставить в один ряд с *теоремой Банаха—Тарского*, которая не зря именуется парадоксом (п. 2.3). Собственно, с *теоремы Цермело* история и началась. Цермело установил результат 2.2.2, подчеркнув, что при доказательстве была использована *опорная точка* 2.2.1.

---

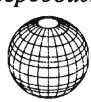
[5] Отрезок $[0, 1]$ при обычном отношении $\geqslant$ не вполне упорядочен, поскольку у интервалов $(a, b) \subset [0, 1]$ нет наименьших элементов.

2.3. Парадокс Банаха—Тарского

Принципиальная особенность аксиомы 2.2.1 заключается в разительном контрасте между ее естественностью и «невероятностью» следствий.

2.3.1. Парадокс Банаха—Тарского. *Шар $B \subset \mathbb{R}^3$,* , *допускает разбиение на конечное число непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_k$, из которых можно составить передвижением B_j, как твердых тел (перенос плюс поворот), два шара*[6] *того же радиуса,*  .

Выглядит шокирующе, однако, в предположении 2.2.1 — это *теорема*. Доказательство совсем просто — но чуть позже (п. 2.6). Популярна также следующая вариация парадокса.

(!) **2.3.2.** *Шар $B \subset \mathbb{R}^3$,* , *допускает разбиение на конечное число непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_k$, из которых можно составить передвижением B_j, как твердых тел, шар удвоенного радиуса,* .

Проще, думается, было бы сразу отказаться от аксиомы, но тогда, как выяснилось, надо отказываться от других удобных и уже привычных инструментов. Например, от эквивалентности определений непрерывности с помощью сходимости последовательностей и (ε, δ)-технологии[7]. В итоге математическая общественность смирилась с парадоксом, переосмыслив «катастрофу», — и теперь к аксиоме выбора принято относиться терпимо.

Безусловно, 2.3.1 — все-таки не катастрофа. Соответствие $y = 2x$ тоже ведь показывает, куда передвинуть точки $x \in [0, 1]$, чтобы из $[0, 1]$ получился отрезок $[0, 2]$. В *теореме* 2.3.1 это гениально обыграно. Особенно сильное впечатление производит возможность подходящего разрезания B на конечное число кус-

[6] Разумеется, где два — там и 2^n.

[7] Сюда можно приплюсовать счетную аддитивность меры Лебега, существование базиса у любого векторного пространства и многое другое.

ков B_j. О «разрезании», вместо разбиения, говорят для усиления эмоционального эффекта. Насчет «кусков» тоже перегиб, B_j неконструктивны, — доказывается существование, но без рецепта. И вообще, для оценки результата в данном случае важно доказательство, без которого не видны причины, каковые очень просты и элементарно гасят экстаз удивления. Более того, в парадоксе виновата не только *аксиома выбора*. Значительная доля вины приходится на актуальную бесконечность, пп. 2.4–2.6.

2.3.3. Определение. *Пусть G — группа изометрий на множестве X. Если существуют $f_1, \ldots, f_k \in G$ и разбиение X на конечное число непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_k$, такие что $f_1(A_1), \ldots, f_k(A_k)$ также не пересекаются и $\bigcup_j f_j(A_j) = Y$, то X и Y называют изометрично разложимыми, **i-разложимыми** либо **i-эквивалентными**, $X \overset{i}{\sim} Y$.*

Нетрудно убедиться, что «$\overset{i}{\sim}$» является отношением эквивалентности. Это избавляет от повторений при рассмотрении цепочек $X \overset{i}{\sim} Y \ldots \overset{i}{\sim} Z$. *Теорема* 2.3.1 может быть сформулирована как *i-эквивалентность* одного шара $B \subset \mathbb{R}^3$ и двух шаров.

В случае, когда X и Y, состоящее их двух дубликатов X, *i-эквивалентны*, будем говорить, что множество X *парадоксально*, или *парадоксально разложимо*. *Теорема* 2.3.1 обобщается всеохватывающим образом (доказательства в п. 2.10).

2.3.4. Теорема. *Любое множество $X \subset \mathbb{R}^3$, имеющее внутренние точки, — парадоксально разложимо.*

2.3.5. Теорема. *Любые множества $X, Y \subset \mathbb{R}^3$, имеющее внутренние точки, — i-эквивалентны.*

2.4. Химеры на окружности

2.4.1. *Пусть Ω — конечное или счетное множество точек на окружности C. Тогда $C - \Omega$ можно разбить на два непересекающихся множества A и B, и после поворота B на некоторый угол — из A*

и повернутого $\varphi(B)$, причем $A \cap \varphi(B) = \varnothing$, сложить полноценную окружность[8] C.

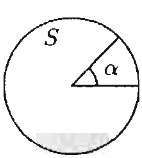
◄ В силу счетности Ω найдется поворот θ (вокруг центра C), такой что $\Omega \cap \theta(\Omega) = \varnothing$. Полагая $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \theta^k(\Omega)$, имеем[9] $A \cup \theta^{-1}(B) = C$. ►

Сдвиг нумерации счетного множества точек на «минус единицу» — приводит к увеличению множества $\{x_k\}_1^\infty$ до $\{x_k\}_0^\infty$, что малоинтересно. Но если точки расположены подходящим образом (как в п. 2.4.1) на окружности, то такой сдвиг осуществляется поворотом всего множества «как твердого тела», и тривиальный механизм обретает нервирующую форму.

2.4.2. Факт. *Поворот множества B «как твердого тела» может увеличивать B в смысле строгого вложения, $\varphi(B) \supset B$.*

Теперь рассмотрим облегченный вариант *теоремы* 2.3.1 в $\mathbb{R}^2$, но без предположения о конечности разбиения.

2.4.3. Факт. *Окружность $C \subset \mathbb{R}^2$ допускает разбиение на счетное число множеств $B_1, B_2, \ldots$, из которых поворотами B_j можно составить две окружности C.*



◄ Пусть f обозначает поворот на иррациональный (по числу оборотов) угол α, f^{-1} — поворот на угол «минус α». Точки x, y окружности C назовем *эквивалентными*, если $f^k x = y$ при некотором целом k, положительном или отрицательном. Тем самым C распадается на классы эквивалентных точек.

В каждом таком классе выберем по одному элементу (*аксиома выбора*), из которых образуем множество Z, и рассмотрим множества

$$Z^k = f^k Z.$$

Очевидно, $\bigcup\limits_k Z^k = C$, причем любое Z^p из Z^q получается поворотом Z^q, как твердого тела, на угол $(p-q)\alpha$. Поэтому, если семейство $\{Z^k\}$ разбито

---

[8] Другими словами, $C - \Omega$ и C i-разложимы.

[9] Множество A получается как $C - \Omega - B$; $\theta^{-1}(B) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \theta^k(\Omega) = \Omega + B$.

изначально на миллион бесконечных совокупностей $\{Z^{\gamma_k}\}$, то из каждой такой совокупности можно опять сложить C, потому что каждое множество Z^{γ_k} переводится в Z^k поворотом. Следовательно, из каждого подмножества

$$\bigcup_k Z^{\gamma_k} \subset C\ (\neq C)$$

передвижением частей Z^{γ_k}, как твердых тел, можно снова составить C. ▶

Пока это *счетная равносоставленность*, представляющая собой первый шаг в направлении результата *Банаха—Тарского*. В $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ — для отрезка и круга — избавиться от «счетности», т. е. ограничиться разбиением шара на конечное число «кусков» — невозможно. В $\mathbb{R}^3$ свобода маневра позволяет обойтись разбиением шара на *пять частей*.

2.5. Разрезание группы поворотов

Рассмотрим группу G вращений в $\mathbb{R}^3$ с двумя образующими f и g. Повороты f и g происходят вокруг разных осей на иррациональные, по числу оборотов, углы α и β. Собственно, от G требуется, чтобы она была *свободной группой*.

Элементами *свободной группы* [3, т. 8] являются всевозможные слова из букв *алфавита* $\mathbb{A}$, *не содержащие рядом стоящих обратных символов* f и f^{-1}. Произведение определяется как простое слияние слов, $abc * ab^{-1} = abcab^{-1}$, с учетом возможных сокращений, $abc^{-1} * cb^{-1}a = abc^{-1}cb^{-1}a = aa$.

Очевидно,

$$G = \{e\} \cup G(f) \cup G(f^{-1}) \cup G(g) \cup G(g^{-1}),$$

где e — единица группы, а $G(q)$ обозначает всевозможные последовательности поворотов, начинающихся с поворота q.

В то же время

$$G = fG(f^{-1}) \cup G(f), \quad \text{а также} \quad G = gG(g^{-1}) \cup G(g), \tag{2.2}$$

где $fG(f^{-1})$ — множество произведений поворотов из $G(f^{-1})$ на f слева. Таким образом:

2.5.1. Факт. *Группа $\boldsymbol{G}$ может быть разрезана на четыре части*

$$G(f), G(f^{-1}), G(g), G(g^{-1}), \tag{2.3}$$

и их поворотами (2.2) *— удвоена.*

◀ Кое-что здесь надо уточнить. Множество $fG(f^{-1})$ состоит из слов вида $ff^{-1}\ldots$, где «...» — что угодно, в том числе e, но только не последовательность поворотов, начинающаяся с f. Поэтому $fG(f^{-1}) \cup G(f) = \boldsymbol{G}$. Аналогично вторая часть (2.2).

Что касается единицы группы, то ее можно добавить, например, в $G(f)$, но тогда f^{-1} надо убрать из $G(f^{-1})$, чтобы не дублировать e в $fG(f^{-1})$. ▶

Разумеется, группа $\boldsymbol{G}$ в п. 2.5.1 может быть любой свободной. Интерес в данном контексте зацикливается на группе поворотов в связи с ахиллесовой пято́й интуиции. Однако интерес могут представлять и другие интерпретации.

2.5.2. Факт. *Множество всех целых чисел* $\mathcal{M}$, *— записываемых с помощью цифр* $\{1, 3, 5, 7\}$ *так, что* 1 *и* 3 *не стоят рядом, так же как* 5 *и* 7, *— может быть разбито на четыре подмножества* A, B, C, D *таким образом, что после зачеркивания первой цифры у чисел из* A *и* C *будет*

$$A' \cup B = \mathcal{M}, \quad C' \cup D = \mathcal{M},$$

где штрих обозначает «зачеркивание первой цифры».

◀ Конструкция шита белыми нитками. Параллель с п. 2.5.1 очевидна. Достаточно изменить обозначения (ввести кодирование):

$$f \rightleftarrows 1, \quad f^{-1} \rightleftarrows 3, \quad g \rightleftarrows 5, \quad g^{-1} \rightleftarrows 7. \quad ▶$$

2.6. Дробление орбит и финиш

Теперь на пути к п. 2.3.1 остается от множества поворотов перейти к множеству точек шара $B \subset \mathbb{R}^3$, а для начала — удобнее рассмотреть сферу $S \subset \mathbb{R}^3$ вместо B. Стандартный прием здесь опирается на рассмотрение *орбит*. Точки $x, y \in S$ принадлежат одной орбите в томм случае, когда x переводится в y некоторым поворотом $h \in G$. Возьмем пока одну «хорошую» орбиту

$$O_x = \{y: \ y = hx, \ h \in G\}, \tag{2.4}$$

на которой каждая точка достигается из любой данной — единственным образом. О существовании таких орбит см. далее.

2.6.1. Теорема. *Орбита* (2.4) *может быть разбита на четыре множества* A, B, C, D, *из которых поворотами можно сложить две орбиты*:

$$A \cup fB = O_x, C \cup gD = O_x.$$

◀ Достаточно взять

$$A = G(f)x, \ B = G(f^{-1})x, \ C = G(g)x, \ D = G(g^{-1})x$$

и сослаться на п. 2.5.1. ▶

До финиша 2.3.1 отсюда рукой подать, но теорема 2.6.1 важна сама по себе, поскольку это отнюдь не ослабленный вариант *парадокса Банаха—Тарского*. Одна орбита выглядит, конечно, менее солидно, чем шар. Зато *парадокс* 2.6.1 *не опирается на аксиому выбора*. **(!)**

Доказательство теоремы 2.3.1. ◀ На каждой орбите, лежащей в S, выберем по одному элементу (*аксиома выбора*), и образуем из этих элементов множество $Z \subset S$. Если бы любая точка y любой орбиты достигалась единственным способом из подходящей точки $x \in Z$ — умножением x на поворот $h \in G$, — парадоксальное разбиение группы (2.3) порождало бы, в силу $\bigcup\limits_{h \in G} hZ = S$, парадоксальное разбиение сферы S. Но тут имеется небольшая загвоздка. Каждому повороту $h \in G$ отвечают точки S, попадающие на ось вращения f или g и остающиеся некоторое время неподвижными, — что нарушает единственность. Множество Ω таких точек счетно, в силу счетности G. Исключая их из рассмотрения, имеем парадоксальное разбиение множества $S - \Omega = S \setminus \Omega$.

Но $S - \Omega \overset{i}{\sim} S$. ◀ Действительно, поскольку Ω счетно, найдется поворот σ, такой что $\Omega \cap \sigma(\Omega) = \varnothing$. Но тогда $\Theta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \sigma^k(\Omega) \subset S - \Omega$. В результате $S - \Omega$ и S *i-эквивалентны*, поскольку $S - \Omega = \Theta + \overline{\Theta}$, а $\sigma^{-1}(\Theta) + \overline{\Theta} = S$, ибо

$$\sigma^{-1}(\Theta) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \sigma^k(\Omega) = \Theta + \Omega. \quad ▶$$

Таким образом, $S - \Omega \overset{i}{\sim} S$, — сфера *парадоксальна*. Отсюда сразу следует *парадоксальность* шара с выколотым центром[10]. Центр O легко подключается с помощью трюка из п. 2.4.1. Берем любую окружность $C \subset B$, проходящую через точку O, и ссылаясь на п. 2.4.1, замечаем $C - O \overset{i}{\sim} C$. ►

Данное поэтапное разложение не оптимально. В идеале достаточно пяти подмножеств, но это уже детали другой истории, не играющие большой роли в идеологическом аспекте. Теорема 2.3.4 также мало что добавляет к парадоксу 2.3.1, и ее доказательство (совсем легкое, кстати) здесь даже мешало бы правильной расстановке акцентов[11]. Существенно более важен в мировоззренческом отношении частный случай 2.6.1, показывающий, что участие *аксиомы выбора* в *парадоксе Банаха—Тарского* вторично. Для существования *парадоксально разложимых* множеств хватает актуальной бесконечности. Причем такие множества получаются конструктивно, ра́вно как и само разложение. Аксиома выбора лишь портит результат[12]. Парадоксально разложимым оказывается «осязаемый» шар, что приятно, зато разложение попадает в область «пойди туда — не знаю куда».

2.7. Разрывная линейная функция

2.7.1. *В предположении* 2.2.1 *существуют разрывные решения функционального уравнения*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y). \qquad (2.5)$$

Это еще одно явление аксиомы выбора в образе привидения. Линейная функция $\varphi(x)$ обычно определяется характеристическим свойством (2.5) при дополнительном требовании непрерывности. Последнее кажется излишним.

---

[10] Парадоксальное разбиение сферы S, ограничивающей B, порождает разбиение лучей, выходящих из центра.

[11] С подробностями, интересными обобщениями и дополнениями можно ознакомиться по руководству [16].

[12] Хотя это дело вкуса.

Напомним сначала, как возникает обычное решение $\varphi(x) = kx$ уравнения (2.5). ◄ Из (2.5) следует $\varphi(px) = p\varphi(x)$ для любого целого p. Поэтому

$$\varphi\left(\frac{z}{p}\right) = \frac{1}{p}\,\varphi(z),$$

что получается в результате замены $z = px$. Это дает

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\,z\right) = \frac{p}{q}\,\varphi(z),$$

откуда

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi(1)\,\frac{p}{q},$$

т. е. $\varphi(x) = kx$ обязано выполняться для всех рациональных x, где $k = \varphi(1)$. Окончательный вывод о неизбежности $\varphi(x) = kx$ делается на основе предположения о непрерывности φ. ►

Возможность иного решения в отсутствие непрерывности кажется маловероятной. Однако аксиома выбора позволяет указать бесконечное число таких решений, говорить о которых удобнее, опираясь на понятие *базиса Гамеля*. Вообще базисом называется любая совокупность линейно независимых векторов

$$\{e_1, \dots, e_n, \dots\},$$

через которые однозначно выражается любой вектор x рассматриваемого пространства, $x = \sum\limits_i x_i\, e_i$, где x_i — координаты x.

Для построения базиса в $\mathbb{R}^n$ берется любая система B линейно независимых векторов и к ней добавляется любой вектор, который линейно не выражается через B. На каком-то шаге процесс заканчивается — иначе возникает противоречие с конечномерностью. При наличии аксиомы выбора аналогичная процедура может быть реализована и в бесконечномерном случае. Получаемые таким образом базисы называются *базисами Гамеля*.

Дополнительное разнообразие ситуаций определяется возможностью вводить те или иные ограничения. Требовать, скажем, рациональность координат. В последнем случае действительная прямая становится бесконечномерным векторным пространством из-за рациональной несоизмеримости многих чисел. Например, 3 и $\sqrt{2}$ линейно независимы, поскольку

$$\lambda_1 3 + \lambda_2\sqrt{2} = 0$$

невозможно при рациональных λ_i.

Возвращаясь теперь к решению функционального уравнения (2.5), возьмем любой *базис Гамеля* на действительной прямой, выберем некоторый базисный вектор e_λ, например, $e_\lambda = \sqrt{5}$ или $e_\lambda = \pi$, или даже $e_\lambda = 1$, и положим

$$\varphi(x) = kx_\lambda, \tag{2.6}$$

что даст функцию, удовлетворяющую (2.5).

В результате, конечно, мы имеем не синицу в руках, а журавля в небе. Функция $\varphi(x)$ существует, но даже не поддается вычислению, за исключением избранных точек. Тем не менее этого оказывается иногда достаточно. Например, при решении *третьей проблемы Гильберта* [3, т. 1, стр. 172] — и это уже серьезный аргумент в пользу *аксиомы выбора*. Вообще, если аксиомы рассматривать как инструменты, то неплохо кое-что заимствовать в качестве прообразов из обыденной жизни. Топором, , можно таких дел наворотить, — но это не умаляет полезности топора в здравых направлениях. Кроме того, инструменты — целесообразно применять системно. Стамеску с молотком, вилку с ножом. Скажем, в присутствии требования непрерывности аксиома выбора ничего плохого с уравнением (2.5) сделать не может. Но до системной проработки аксиоматики руки обычно не доходят, да и как этого достичь? Конечно, всякая аксиоматика есть система, состоящая, однако, из независимых элементов, которые разрешается использовать «как угодно» — а надо бы «с головой», во взаимодействии.

2.8. Конструктивные числа

Материал следующих двух разделов лучше вписывается в главу 7, но здесь он, будучи не на месте, имеет меньше шансов остаться незамеченным.

Интуиционисты (*Брауэр*, *Вейль*) отрицали континуум как множество точек, а рассматривали его как «среду становления точек». Идея любопытная, но она предлагалась в комплекте с некоторыми запретами, которые мало что оставляли от математики. Парадигма конструктивизма, тем не менее, время от времени пробуждается, особенно в связи с веяниями теории алгоритмов.

При десятичной записи чисел

$$a = 0{,}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$$

естественно задаться вопросом, как и чем α_n определяются.

В ситуациях типа

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

есть алгоритм вычисления α_n, т. е. — конечное правило. То же самое можно сказать о любом рациональном числе, и некоторых иррациональных, но не обо всех, поскольку $[0, 1]$ — континуум, а конечных правил счетное число.

Но даже при наличии алгоритма бесконечное количество знаков — в некотором роде фикция, ибо процесс вычислений никогда не заканчивается. Позиция же классического анализа состоит в несколько «безответственной» декларации, что бесконечность состоялась — безостановочная работа проведена до конца, и вот вам, дескать, иррациональное число.

2.8.1. *Число называется* ***конструктивно определяемым****, если все его десятичные знаки α_n алгоритмически вычисляются, т. е. $\alpha_n = f(n)$, где $f(n)$ эффективный алгоритм, определенный при любом n.*

В силу $\alpha_n = f(n)$, где функция $f(n)$ общерекурсивна, т. е. вычислима и определена при любом n, получается, что множество $\mathbb{C}$ конструктивных чисел *неперечислимо* (*теорема* 7.2.7), т. е. *конструктивно несчетно*. Ни равенство $a = b$, ни отношение $a < b$, — для конструктивных чисел в общем случае оказываются непроверяемы (*теорема Райса* 7.8.2).

2.9. Последовательность Шпеккера

При записи числа в двоичной системе каждое α_n принимает одно из двух значений: 0 или 1. Допустим, всюду определенная вычислимая функция $f(k)$ перечисляет *без повторений* те номера n, которым отвечает $\alpha_n = 1$, т. е. те позиции в записи числа, где стоят единицы. Изначально во всех позициях пусть стоят нули. Через N шагов в каких-то N позициях будут расставлены единицы. Получится рациональное число

$$S_n = 0{,}00101101\ldots011.$$

Очевидно, последовательность $\{S_n\}$ строго монотонно возрастает, $S_{n+1} > S_n$, и ограничена, $S_n \leqslant 1$.

Но *если $f(k)$ перечисляет неразрешимое множество, — воспользоваться классической теоремой анализа о сходимости ограниченной монотонной последовательности не удается*. В этом случае $\{S_n\}$ называют *последовательностью Шпеккера*.

2.9.1. *Последовательность Шпеккера, будучи монотонной и ограниченной, не может сходиться, поскольку не является фундаментальной. Например, $f(k) = 2$ все не появляется, но гарантировать, что не появится, — невозможно. Если вдруг появится, — значение S_n сразу подпрыгнет на $\frac{1}{4} = 2^{-2}$, и это может произойти когда угодно*[13].

В то же время $f(k)$ — совершенно нормальная функция с точки зрения анализа, а S_n — совершенно нормальная последовательность рациональных чисел, которая монотонна и ограничена, но не сходится!

Заметим, кстати, что S_n можно записать в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-f(k)}.$$

[13] В результате дискомфорт ожидания потенциально бесконечен. В этом, собственно, и заключается коварство неразрешимых множеств.

На языке числовых рядов отмеченная катастрофа звучит не менее безнадежно. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-f(k)}$$

ограничен ($\leqslant 1$), но не сходится, хотя все члены положительны.

Вспомним, как в анализе доказывается обратное. Пусть Ω_N обозначает множество значений $f(k)$ при $k \geqslant N$, и пусть $m(N)$ есть минимальное в Ω_N число[14]. Легко видеть, что

$$m(N) \to \infty \quad \text{при} \quad N \to \infty, \tag{2.7}$$

поскольку $f(k)$ перечисляет Ω_0 без повторений, т. е. все элементы Ω_0 различны. Из (2.7) следует

$$\sum_{k=N}^{\infty} 2^{-f(k)} \leqslant 2 \cdot 2^{-m(N)} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

т. е. хвост ряда стремится к нулю — ряд сходится. Соответственно, последовательность S_n фундаментальна.

Разногласие подходов локализовано в том месте, где предполагается существование минимального в Ω_N числа $m(N)$. В классическом анализе предположение выглядит естественно, и его фундаментальный характер, способный направить математику по разным путям, — остается незамеченным. Существование $m(N)$ в некотором роде предполагает, что вычисление $f(k)$ проведено до конца, и минимум надо выбрать на «*состоявшемся*» бесконечном множестве Ω_N.

Тут бы, конечно, на конструктивном углублении в анализ лучше не задерживаться. Конфликт респектабельных теорий наносит ущерб репутации обеих сторон. Авторитет машины Тьюринга идет на убыль, когда выясняется, что вычислимость замешана в скандалах с устоявшимися областями математики. В то же время подрывается доверие к анализу, когда уходящий в гудок пар сообщает, что здесь не все чисто. Тем не менее результаты конструктивного анализа, не влияя ни на что рецептурно, поддерживают тонус и бдительность. Последнее весьма существенно для ощущения среды, в которой развивается математика.

[14] Существующее в силу ограниченности Ω_N снизу.

2.10. Замечания и дополнения

2.10.1. Взаимно однозначное соответствие отрезка и квадрата.

Сначала установим взаимно однозначное соответствие

$$[0,1) \leftrightarrows [0,1) \times [0,1). \tag{2.8}$$

Дробную часть числа, записанного в двоичной системе[15], разобьем на группы цифр, ставя разделитель $*$ после каждого нуля. Например,

$$0{,}0 * 10 * 1110 * 110 * 0 * 0 * 10 * \ldots .$$

Теперь соотношение между $(x, y) \in [0,1) \times [0,1)$ и $z \in [0,1)$ по старому рецепту

$$x = 0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots, \quad y = 0{,}\beta_1\beta_2\ldots \rightleftarrows \quad z = 0, \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots,$$

но на этот раз α_i, β_j обозначают указанные группы цифр, обязательно оканчивающиеся одним нулем, — дает искомое соответствие (2.8).

Укладывая далее один к одному отрезок $[1,3]$ на две недостающие стороны квадрата, получаем взаимно однозначное соответствие[16]

$$[0,3] \leftrightarrows [0,1] \times [0,1].$$

Теорема Кантора—Бернштейна

2.10.2. Теорема. *Если A_0 равномощно подмножеству $B_1 \subset B_0$, а множество B_0 — подмножеству $A_1 \subset A_0$, то A_0 и B_0 — равномощны*[17].

Это весьма удобный и эффективный инструмент, избавляющий от необходимости тратить силы на преодоление не относящихся к делу препятствий. Скажем, в п. 2.1.1 малой кровью достигается соответствие между квадратом и частью отрезка $[0,1]$. Равномощность $[0,1]$ подмножеству квадрата тем более очевидна. Теперь из факта 2.10.2 следует равномощность $[0,1]$ и $[0,1] \times [0,1]$, и необходимость в указании конкретного соответствия 2.10.1 отпадает.

◄ Докажем предварительно близкий по характеру результат.

2.10.3. Лемма. *Если $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ и множества A_2 и A_0 равномощны, то все три множества равномощны.*

◄ Если $f : A_0 \to A_2$ взаимно однозначное преобразование, то, как легко видеть,

$$A_4 \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1 \subset A_0,$$

[15] В случае неоднозначной записи, как обычно (п. 2.1.1), выбирается та, у которой бесконечное число нулей.

[16] С учетом $[0,3] = [0,1) \cup [1,3]$.

[17] Равномощность A и B обозначают как $A \sim B$.

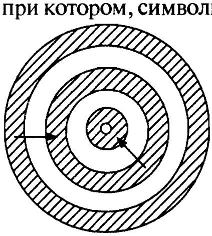
где $A_3 = f(A_1)$, $A_4 = f(A_2)$. Продолжая индуктивный процесс $A_{k+2} = f(A_k)$, получаем цепочку

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots .$$

Взаимно однозначное соответствие A_0 и A_1 обеспечивает преобразование

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in A_{2k} \setminus A_{2k+1}, \\ x, & \text{если} \quad x \in A_{2k+1} \setminus A_{2k+2} \quad \text{или} \quad x \in \bigcap\limits_k^{\infty} A_k, \end{cases}$$

при котором, символически рассуждая, каждый заштрихованный слой $A_{2k} \setminus A_{2k+1}$,



переходит в следующий заштрихованный, а все незаштрихованные слои — остаются на месте. ▶

Если в условиях теоремы 2.10.2 $f : A_0 \to B_1$ и $g : B_0 \to A_1$ соответствующие взаимно однозначные отображения, то gf устанавливает равномощность A_0 и $A_2 = g(f(A_0))$, и в цепочке $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ остается доказать равномощность A_0 и $A_1 \sim B_0$, — что берет на себя лемма 2.10.3. ▶

К парадоксу Банаха—Тарского

Равномощность в пп. 2.10.2, 2.10.3 можно с тем же успехом заменить отношением *изометричной разложимости*.

2.10.4. Лемма. *Если $X_2 \subset X_1 \subset X_0$ и множества X_2 и X_0 изометрично разложимы, то все три множества изометрично разложимы.*

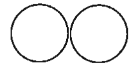
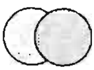
◀ Пусть *i-разложимость* X_0 и X_2 обеспечивается разбиением X_0 на непересекающиеся множества $B_1, \dots, B_k$ и изометричными преобразованиями $f_j : B_j \to X_2$ с непересекающимися $f_1(B_1), \dots, f_k(B_k)$, и $\bigcup\limits_j f_j(B_j) = X_2$.

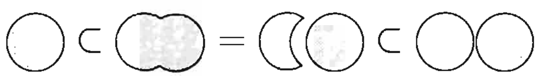
Та же конструкция $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$, что и в п. 2.10.3, приводит к кусочной изометрии

$$\psi(x) = \begin{cases} f_j(x), & \text{если} \quad x \in B_j \cap (X_{2k} \setminus X_{2k+1}), \\ x, & \text{если} \quad x \in X_{2k+1} \setminus X_{2k+2} \quad \text{или} \quad x \in \bigcap\limits_k^{\infty} X_k. \end{cases} \quad ▶$$

Соответственно:

2.10.5. $A_0 \overset{i}{\sim} B_1 \subset B_0, \quad B_0 \overset{i}{\sim} A_1 \subset A_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 \overset{i}{\sim} B_0.$

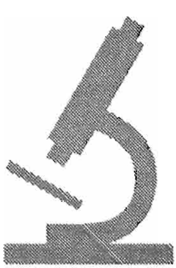
• Результаты 2.10.4, 2.10.5 позволяют достаточно вольно обращаться с множествами — объединяя, вычитая, пересекая, вращая и передвигая их, — без потери свойства парадоксальной разложимости. Два шара , получившиеся из одного в *теореме Банаха–Тарского*, можно надвинуть друг на друга[18)], , и объединить, , потому что



и по лемме 2.10.4 выходит . Поэтому шар B *i-эквивалентен* объединению любого числа шаров B, как угодно расположенных. А поскольку объединением большого числа шаров можно накрыть любое ограниченное множество X, внутри которого, если есть внутренняя точка, можно поместить достаточно малый шарик B, — получается, *лемма* 2.10.4,

$$B \subset X \subset nB, \quad B \overset{i}{\sim} nB \quad \Rightarrow \quad X \overset{i}{\sim} B,$$

что в принципе сразу доказывает все теоремы 2.3.2, 2.3.4 и 2.3.5.



• Короткие доказательства и ясные мотивы — создают ощущение элементарности. Но простота бывает разная. *Кантор* три года искал доказательство в две строчки. Теорема 2.3.1 (*Banach S. and Tarski A.* // Found. Math. 1924. **6**. 244) — того же сорта. Работа опирается на главную идею использования трехмерных вращений, обнаруженную *Хаусдорфом* (*Hausdorff F.* // Math. Ann. 1914. **75**) десятилетием раньше.

2.10.6. Парадокс Хаусдорфа. *Сфера в R^3 после исключения счетного множества Ω может быть разбита на три конгруэнтных множества A, B, C, таких что $B \cup C$ также конгруэнтно любому из A, B, C.*

Доказательство развивается тем же путем. Два трехмерных поворота вокруг перпендикулярных осей, но вращения рассматриваются на углы π и $2\pi/3$ — поэтому группа получается не свободной, из-за чего в итоге разбиение $S - \Omega$ происходит на три множества, а не четыре. Однако парадоксальности и так хватает — фактически удваивается каждое множество A, B, C — поэтому *Хаусдорф* анонсировал результат, не доводя его до эстетической кондиции. Тогда как избавиться от занозы Ω было не так трудно, не говоря о достижении чистого удвоения сферы, а там и шара.

[18)] Картинки плоские, но размерность, конечно, не менее трех.

К аксиоме выбора

• *Лузин* резко отрицательно относился к использованию аксиомы выбора: «...Применять свободный выбор — это значит, по моему мнению, жонглировать соединениями пустых слов, смыслу которых не соответствует никакой интуитивно доступный факт. ...Против аксиомы говорит именно эта самая чрезвычайная легкость ее применения, немедленность даваемых ею ответов, так как математические сущности, сформированные при помощи ее, не крепки, не обладают устойчивостью, имея слишком расплывчатые, неопределенные свойства, чтобы практически служить затем точкой опоры для математических рассуждений, направленных уже на классические математические предметы. Напротив, образование математического предмета без аксиомы Цермело часто представляет чрезвычайные трудности, зато такой математический предмет, будучи построен, почти всегда имеет большую ценность для дальнейших изысканий».

2.10.7. *Функция $\varphi(x)$, заданная на $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любой конечной совокупности непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset (a,b)$*

$$\sum_k |a_k - b_k| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_k \big|\varphi(a_k) - \varphi(b_k)\big| < \varepsilon.$$

Функция $\varphi(x)$ абсолютно непрерывна в том **м** *случае, когда она переводит множества меры нуль в множества меры нуль.*

Абсолютно непрерывная функция отображает измеримое множество в измеримое, на $[a,b]$ имеет *ограниченную вариацию*[19] и почти всюду — конечную производную $\varphi'(x)$, причем вариация $\varphi(x)$ равна

$$V_a^b(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(x)|\, dx.$$

2.10.8. Теорема. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию в том* **м** *случае, когда представима в виде разности двух монотонных функций.*

Непрерывная функция не обязана иметь ограниченную вариацию. Вариация $f(x) = x \sin 1/x$, $f(0) = 0$, на $[0,1]$ не ограничена.

2.10.9. *Любая функция f ограниченной вариации может быть представлена в виде суммы абсолютно непрерывной компоненты f_{abs}, функции скачков f_h и сингулярной функции f_{sing},*

$$f = f_{abs} + f_h + f_{sing},$$

что называют разложением Лебега.

---

[19] *Вариация* $V_a^b(\varphi)$ есть точная верхняя грань сумм

$$\sum_k \big|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)\big|, \qquad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Под *функцией скачков* можно понимать непрерывную слева монотонную функцию. *Сингулярная* — это непрерывная функция, отличная от постоянной, производная которой почти всюду равна нулю. Пример — *канторова лестница*.

Интеграл от f_h и f_{sing} по $[a, b]$ равен нулю. Поэтому при интегрировании вклад дает только абсолютно непрерывная составляющая,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_{abs}(x)\,dx.$$

• В случае $\Phi(t) \equiv t$ мера Лебега—Стилтьеса μ_Φ совпадает с обычной мерой Лебега.

Если $\Phi(t)$ *функция скачков* с разрывами в точках $\{t_j\}$ и скачками $\{h_j\}$, мера $\mu_\Phi(\Omega) = \sum\limits_{t_j \in \Omega} h_j$ называется *дискретной*. *Абсолютно непрерывной мере*[20] отвечает абсолютно непрерывная функция $\Phi(t)$. Наконец, *сингулярной мере* отвечает сингулярная функция $\Phi(t)$.

Сингулярная мера μ_Φ сосредоточена на том множестве лебеговой меры нуль, на котором производная $\Phi' \neq 0$ либо не существует.

В соответствии с лебеговским разложением функции $\Phi(t)$ мера μ_Φ представима как сумма дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной мер. Подробности в [8].

[20] Каковой является обычная мера Лебега.

Глава 3

Мера и категория

В поезде читают, потому что скучно,
в трамвае — потому что интересно.

Илья Ильф

3.1. Меры Жордана, Бореля и Лебега

Все методы измерения площадей (объемов) опираются на «древнегреческую» схему аппроксимации измеряемого множества S изнутри и снаружи:

$$P \subset S \subset Q, \tag{3.1}$$

где P и Q — множества, каковым мера $m(\cdot)$ уже приписана. При совпадении супремума меры $m(P)$ по P и инфимума $m(Q)$ по Q множество S объявлялось измеримым. *Жордан* определял площадь «фигуры» как число, заключенное между площадью любого покрывающего многоугольного комплекса и площадью любой многоугольной конфигурации, лежащей внутри. Для *измеримости по Жордану* требовалось, чтобы граница измеряемой «фигуры» имела границу нулевой площади, но это исключало из рассмотрения почти всю экзотику. *Борель* допустил формирование P и Q в (3.1) с помощью операций дополнения и объединения *счетных* совокупностей простейших множеств [1], значительно расширив диапазон измеримости, но остановившись все же на полпути. Дожал задачу *Лебег*. *Все конструктивно задаваемые множества стали измеримыми.*

[1] Интервалов, прямоугольников или параллелепипедов. При этом мера совокупностей непересекающихся подмножеств полагалась равной сумме ряда, образованного мерами подмножеств.

Мера Лебега [3, т. 5] вводится очень естественным путем, и разглядеть гениальность за фасадом готовой схемы весьма трудно. Вот основная конструкция на примере «плоских» множеств. Площадь прямоугольника P полагается равной $m(P) = ab$, где a и b — стороны P. Площадь фигуры S, составленной из *конечной* совокупности *непересекающихся*[2] прямоугольников $\{P_n\}$, считается равной

$$m(S) = \sum_n m(P_n), \tag{3.2}$$

что называют *аддитивностью* меры $m(S)$. Из аддитивности в данном случае вытекает *счетная аддитивность*, или *σ-аддитивность*, — т. е. справедливость (3.2) в случае бесконечного числа слагаемых.

Далее для ограниченных множеств определяется *внешняя мера*

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n m(P_n), \tag{3.3}$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям множества A конечными или *счетными* системами прямоугольников. Наконец, — и тут как раз собака зарыта — множество A называется *измеримым по Лебегу*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такую конечную совокупность A_ε непересекающихся прямоугольников, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon, \tag{3.4}$$

где Δ обозначает симметрическую разность множеств. *Меру Лебега* $\mu(A)$ измеримого множества A полагают равной[3] $\mu^*(A)$.

По *теореме Лебега*: *совокупность измеримых множеств замкнута относительно операций счетного объединения и счетного пересечения, а мера σ-аддитивна.* Все ограниченные открытые или замкнутые множества, а также их счетные объединения и пересечения измеримы по Лебегу.

Что касается «взаимоотношений с Борелем», то *всякое измеримое по Лебегу множество — есть борелевское плюс множество меры нуль*[4].

---

[2] Площадь прямоугольника не зависит от того, входит ли в него граница, целиком или частями. Возможность отсутствия ребер дает свободу маневра, позволяя говорить о граничащих, но непересекающихся прямоугольниках.

[3] В общем случае работает аналогичная схема. Вместо прямоугольников берется та или иная система простейших множеств, мера которых задается директивно, после чего проделываются похожие манипуляции. В отличие от рассмотренной ситуации σ-аддитивность может «не вытекать», и тогда ее приходится постулировать.

[4] Множество меры нуль может быть не борелевским (!) — см. примечание к примеру 3.6.1.

Множество $\Omega \subset \mathbb{R}$ является *нуль-множеством* (*множеством меры нуль*), если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такую совокупность интервалов $\{I_n\}$, что

$$\Omega \subset \bigcup_n I_n, \qquad \sum_n |I_n| < \varepsilon,$$

где $|I|$ обозначает длину интервала I.

Декларация, конечно, далековата от практического рецепта. Не сразу ясно, например, является ли нуль-множеством совокупность рациональных чисел? Является. Более того:

3.1.1. *Счетное объединение нуль-множеств — также нуль-множество.*

◄ Для каждого нуль-множества Ω_i существует такая последовательность покрывающих Ω_i интервалов I_{ij}, что $\sum\limits_j |I_{ij}| < \varepsilon/2^i$. Множество всех интервалов $\{I_{ij}\}$ покрывает $\Omega = \bigcup\limits_i \Omega_i$ и $\sum\limits_{i,j} |I_{ij}| < \varepsilon$. ►

3.1.2. *Функция f интегрируема по Риману в* то**мм** *случае, когда ограничена, и множество ее точек разрыва имеет меру нуль.*

Разумеется, даже если интересоваться только нуль-множествами, их теория должна быть вписана в общую идеологию. Так что без единой теории обойтись не удается. А бесхитростные, хотя и очень естественные подходы к понятию меры — наталкиваются на явные несуразности.

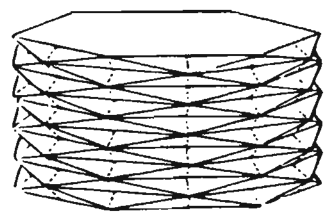
• Фокус (3.4) в конструкции Лебега может быть исполнен опять-таки с помощью «древнегреческой» идеи, но тогда внутреннюю меру μ_* множества $A \subset X$ надо определить как внешнюю меру μ^* дополнения $X \setminus A$. Вот такие мелочи направляют корабль совсем в другие воды, хотя на расхожих примерах кажется «что в лоб, что по лбу».

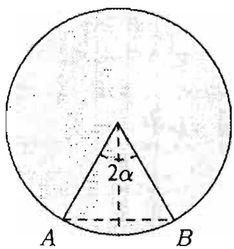
• Секрет механизма (3.4) состоит в том, что $\mu^*(P\Delta Q)$ — есть метрика на комбинациях прямоугольников после отождествления тех P и Q, для которых $\mu^*(P\Delta Q) = 0$. В результате множество комплексов прямоугольников становится метрическим пространством, и дальнейшее сводится к *пополнению* этого пространства, что приводит в итоге к «полному пространству измеримых множеств». Гениальная находка, таким образом, с позиций функционального анализа выглядит стандартным трюком.

3.2. Осечки наивного подхода

В «доэкзотической» теории меры *длина дуги* определяется как предел длины вписанной ломаной при измельчении разбиения, и дефиниция работает. Аналогичная попытка определить *площадь искривленной поверхности* как предел площади вписанной многогранной поверхности — неожиданно терпит фиаско. Следующий казус поверг многих в свое время в недоумение.

3.2.1. Контрпример Шварца.





Вертикальный прямой круговой цилиндр (радиус основания $r = 1$, высота $H = 1$) разрезается на n горизонтальных слоев толщины $h = H/n$. На внешней окружности каждого горизонтального сечения отмечаются m равноотстоящих точек (две соседние — A, B на рисунке видны из центра под углом 2α). Во всех *четных* сечениях выделенные точки находятся строго друг под другом. *Нечетные сечения повернуты относительно четных на угол* α. Две соседние точки любого сечения и третья точка, лежащая посредине — «над» либо под ними, — определяют треугольник, вписанный в боковую поверхность цилиндра. Покрытие из таких треугольников, гармошка, при измельчении все точнее воспроизводит цилиндрическую поверхность, как бы ложась на нее в один слой и равномерно покрывая. Интуитивно кажется, что площадь покрытия в пределе (при $n, m \to \infty$) должна стремиться к площади цилиндрической поверхности, равной в данном случае 2π.

На самом деле *предел может быть любым* $\geqslant 2\pi$ *и даже никаким* (*т. е. не существовать*). В конце девятнадцатого века (1890 г.) этот пример в некотором роде потряс математическую общественность. Стало ясно, что интуитивно очевидное понятие площади представляет собой тонкую материю и требует строгого анализа.

Аномальное поведение предела устанавливается легко. Каждый треугольник покрытия имеет сторону $2\sin\alpha = AB$ и высоту $\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + h^2}$. Его площадь, соответственно,

$$S_\Delta = \sin\alpha\sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + h^2}.$$

Теперь надо учесть, что $\alpha = \pi/m$, $h = 1/n$. Число треугольников в покрытии $2nm$. Поэтому общая площадь треугольного покрытия

$$S = 2m\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{n^2\left(1-\cos\frac{\pi}{m}\right)^2 + 1}.$$

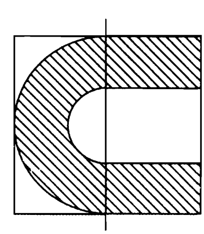
Если при измельчении покрытия сохраняется пропорция $n = \gamma m$, то

$$S \to \pi\sqrt{\gamma^2\pi^2 + 4} \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Получается, выбором γ можно обеспечить любое значение предела $\geqslant 2\pi$.

Другим источником неудовлетворенных потребностей были неординарные множества, то и дело возникавшие в исследованиях. До какого-то момента вычисление длин, площадей и объемов опиралось на *интеграл Римана*. Но потребности анализа приводили к необходимости измерения «фигур», на которых наивные методы переставали работать. Закономерные вопросы о мере совокупности, скажем, недифференцируемых функций даже не поддавались строгой постановке[5]. Кроме того, постепенно выяснялась естественность многих искусственных построений. Диковинные множества, казавшиеся продуктом чисто умозрительных конструкций, очень просто возникали в заурядных ситуациях. Канторово множество, например, выглядит химерой, но рождается банальным образом.

3.2.2. Подкова Смейла.



Рассматривается преобразование $f(x)$ единичного квадрата в себя, вытягивающее квадрат в прямоугольную полоску высотой $1/3$, которая укладывается затем на квадрат в виде подковы, как показано на рисунке. В вертикальном сечении, изображенном пунктиром, при

[5] Необходимо отметить, что в анализе измерение множеств имеет несколько другую мотивировку, нежели в землепользовании. Мера, как аналог объема, расширяет инструментарий исследования, что позволяет оценивать размер исключений, дает инварианты движения и т. п. Например, сохранение по *теореме Лиувилля* фазового объема вдоль траекторий автономной системы дает в руки исследователю дополнительные козыри.

отображении f из отрезка $[0, 1]$ выпадает средняя треть $(1/3,\ 2/3)$ и остаются две крайние, в заштрихованной области,

$$\left[0,\ \frac{1}{3}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{2}{3},\ 1\right]. \tag{3.5}$$

Легко видеть, что при повторной итерации f из отрезков (3.5) опять выпадут средние трети и т. д. В пределе получится канторово множество, каковое строилось ранее умозрительным выбрасыванием третей из отрезка, — и результат представлялся монстром казуистики, имеющим сугубо академический интерес. Теперь же выясняется обыденность невероятных по старым меркам вещей, что особенно зримо проявляется при изучении *фракталов* и *странных аттракторов*.

Отображения рассмотренного типа естественно и довольно часто возникают в динамических системах, порождая так называемый *детерминированный хаос* (глава 9). Допустим, рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x} = X(x)$ в $\mathbb{R}^3$. На пути фазовых траекторий поставим двумерную площадку S с координатной сеткой $\{x, y\}$ и фиксируем зависимость

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{3.6}$$

следующего пересечения траектории $(x', y') \in S$ в зависимости от предыдущего $(x, y) \in S$. Преобразование (3.6) называют *отображением Пуанкаре*, и если оно оказывается типа подковы Смейла, в системе наблюдается «ад кромешный» в виде *странных аттракторов* и других неожиданностей.

Богаты сюрпризами простые модификации канторова множества C.

При построении C на каждом шаге оставалось $2/3$ от того, что было. Поэтому суммарная «длина оставшегося»

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

3.2.3. Канторово множество ненулевой меры. *Если на каждом шаге делить отрезки на три* ***неравных*** *части и регулировать длину выбрасываемых средних интервалов, — мера остающегося* ***канторова множества*** $\widehat{C}$ *может быть любой в диапазоне* $(0, 1)$.

В то же время $\widehat{C}$, как и C, не имеет ни одной внутренней точки, да еще *нигде не плотно*, что некоторым образом выбивает почву из-под ног.

3.2.4. Факт. *Мера множества $\widehat{C}$ положительна, но оно — нигде не плотно.*

3.2.5. Факт. *Граница $\widehat{C}$ открытого множества $[0, 1] \setminus \widehat{C}$ имеет строго положительную меру.*

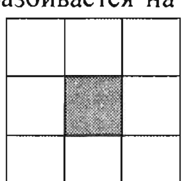
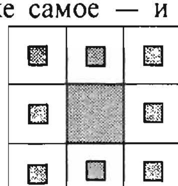
Деление отрезка на части и выбрасывание «средних» — есть универсальный процесс получения экзотических множеств, обладающих разными свойствами. Вот еще один пример.

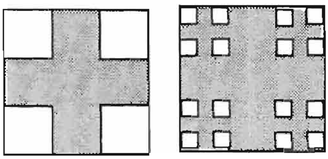
3.2.6. Канторово множество без рациональных точек.

◄ Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — перечисление рациональных чисел на $[0, 1]$. В стандартном процессе «выбрасывания третей» выбрасываемые на k-м шаге интервалы увеличиваем так, чтобы они имели иррациональные края и содержали c_k (если c_k уже не выброшено). В пределе останется множество C_{irr}, содержащее лишь две рациональные точки, 0 и 1. Решение «без изъяна» дает изначальный выбор вместо $[0, 1]$ отрезка $[\alpha, \beta]$ с иррациональными краями α, β. ►

Двумерным аналогом канторова множества служит

3.2.7. Ковер Серпинского.

Каждая сторона квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ делится на три части, в результате квадрат разбивается на 9 квадратов, и внутренность среднего — удаляется, . Потом с оставшимися квадратами повторяется то же самое — и так далее. После второго шага картинка имеет вид .



Можно рассматривать также «ковер», получаемый выбрасыванием из квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ крестов с регулируемой шириной.

Удаляется один крест, потом в каждом из оставшихся квадратов — следующие кресты и т. д. На каждом шаге удаляются также перегородки на серой территории. Если ширина первого креста подобрана так, что его площадь равна $1/4$, площадь четырех вторых крестов в сумме равна $1/8$ и т. д. — то выброшенная площадь и оставшаяся в пределе будут равны $1/2$. Таким образом возникает пример, дополняющий 3.2.7.

3.2.8. Пример. *Область* $\subset [0, 1] \times [0, 1]$, *как связное открытое множество* (*объединение всех заштрихованных территорий*), *имеет вполне несвязную границу* (*пересечение всех остающихся квадратов*) *площади* $1/2$.

3.3. К определению линии и кривые Пеано

Ковры *Серпинского* с точки зрения *Кантора* — определявшего линию на плоскости как континуум, не имеющий внутренних точек, — это линии. Разумеется, линия ненулевой площади как-то не смотрится. Впрочем самый серьезный удар в этом направлении нанес *Пеано*.

3.3.1. ***Кривая Пеано*** — *любое непрерывное отображение отрезка* $[0, 1]$ **на** *квадрат* $[0, 1] \times [0, 1]$.

◄ Первая такая кривая указана *Пеано* (1890). Идея построения тривиальна. На первом шаге квадрат разбивается на четыре квадрата, нумеруемых по часовой стрелке, а $[0, 1]$ — на четыре четверти $[0, 1/4]$, ..., $[3/4, 1]$, и

$$p_1 : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$$

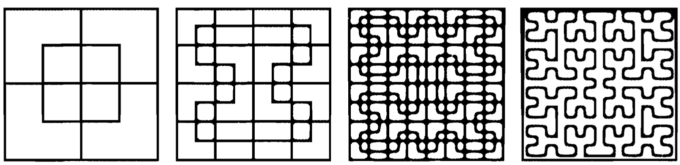
выбирается так, чтобы траектория для t из i-й четверти находилась в i-м квадрате, 

. На втором шаге все повторяется по отношению к «подквадратам и подчетвертям» предыдущего этапа, и так далее. В результате возникает последовательность функций $\{p_n(t)\}$, которая фундаментальна[6], и потому — сходится,

$$p_n(t) \to p^*(t). \tag{3.7}$$

Функция $p^*(t)$ проходит через все точки квадрата $[0, 1]\times[0, 1]$, в силу поточечной сходимости (3.7). ►

Для недоверчивой аудитории переход $p_n(t) \Rightarrow p_{n+1}(t)$ предпочтителен однотипный. Вот, например, четыре итерации варианта *Гильберта* (1891):



Пеано действовал несколько иначе — тоже итерационно. А мы вообще допускали каждый раз новую перестройку $p_n(t)$, в связи с чем конкретика не отвлекала, и было ясно, что она вообще ни при чем.

Поскольку кривые Пеано уже приелись, мало кто согласен считать их удивительными. Тем более что все ясно как божий день. Но было время, когда ясным казалось противоположное. Жордан определял линию как *след от непрерывного движения точки*, не предполагая подвоха. Вряд ли ему приходило в голову, что следом может оказаться сплошной квадрат. Да и никому не приходило. Потом пришло, да так и осталось.

3.3.2. *Если $p^*(t)$ — кривая Пеано, а $f(x)$ — канторова лестница (п. 4.1.4), то $p^*(f(t))$ — почти всюду «не движется»[7], тем не менее зачерчивает квадрат, т. е. опять-таки является кривой Пеано, которая дополнительно отображает канторово нуль-множество C* **на** *квадрат* $[0, 1] \times [0, 1]$[8].

---

[6] На n-м шаге исходный квадрат разбивается на 2^{2^n} квадратов, внутри каждого из которых происходит движение $p_m(t)$, $m \geqslant n$, при t из подходящих отрезков длины $2^{2^{-n}}$. Поэтому $|p_n(t) - p_m(t)| \leqslant 2^{2^{-n}}$, неважно как ведет себя $p_m(t)$, лишь бы соблюдался регламент пребывания траектории в «правильном» квадрате.

[7] Производная $\dfrac{d}{dt}p^*(f(t)) = 0$ для всех $t \in [0, 1] \setminus C$.

[8] Сужение f на C дает непрерывную функцию, накрывающую образами $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/2^{k+1}$ точек $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/3^k \in C$ (a_k — либо 0 либо 2) — весь отрезок $[0, 1]$.

3.4. Множества Витали и Бернштейна

Неизмеримые множества уже конструировались (пп. 2.4—2.6) в связи с *парадоксом Банаха—Тарского*, но там механизмы были несколько перегружены дополнительными задачами. В чистом виде соответствующий рецепт совсем прост.

3.4.1. Неизмеримое множество Витали. *Пусть фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Введем на* $[0,1]$ *отношение эквивалентности*

$$x \sim y, \quad \text{если} \quad \{x-y\} \quad \text{рационально},$$

и отнесем к множеству V *по одному элементу из каждого класса эквивалентности (аксиома выбора). Определим далее множества* V_r *как сдвиг* V *на рациональное* r *по модулю* 1,

$$V_r = \{x : x = \{v+r\},\ v \in V\},$$

т. е. к числам v *прибавляется* r, *и берется дробная часть* $v+r$.

Счетное объединение всех непересекающихся множеств V_r *дает весь промежуток* $[0,1]$. *Поэтому* $\sum\limits_r^{\infty} \mu(V_r) = 1$, *чего не может быть, если* V *измеримо, поскольку все* $\mu(V_r) = \mu(V)$.

Совершенно другая конструкция неизмеримого множества принадлежит *Бернштейну* [11].

3.4.2. Множество Бернштейна. *Существует такое неизмеримое множество* $B \subset \mathbb{R}$, *что как* B, *так и его дополнение* $\overline{B} = \mathbb{R} \setminus B$ — *оба пересекаются с любым несчетным замкнутым подмножеством* $\mathbb{R}$.

Опрометчиво манипулируя *аксиомой выбора*, можно зайти очень далеко. Вплоть до монстра неизмеримости [13]:

3.4.3. Факт. *Существует множество* D, *дающее в пересечении с любым* $X \subset \mathbb{R}$ *ненулевой меры — неизмеримое множество, причем*

$$\mu_*(D \cap X) = 0, \qquad \mu^*(D \cap X) = \mu(X).$$

Таким образом, всякое $X \subset \mathbb{R}$ ненулевой меры содержит неизмеримое подмножество, внутренняя мера которого равна нулю, а внешняя — совпадает с мерой X.

Мы специально опускаем доказательства пп. 3.4.2, 3.4.3, хотя и даем ссылки, потому что здесь важно соблюсти меру. Конечно хорошо, если два-три человека в пределах Галактики будут заниматься построением и анализом подобных примеров. Но не дай бог увлечение станет повальным. Дорога-то ведет в никуда, по-видимому. Для общего образования целесообразны первые несколько шагов: роль аксиомы выбора, растущей из пропасти, существование неизмеримых множеств, как принципиальной преграды для измерения всего и вся. Далее начинается наркомания.

3.5. Категории Бэра

В одном из своих прикладных секторов теория меры призвана выделить множества нулевой либо полной меры, чтобы придать смысл формулировкам «почти всюду», «почти всегда». Аналогичные устремления имеет категорная классификация.

3.5.1. Определение. *Множество $U \subset X$ называется множеством первой категории, если оно представимо в виде объединения счетного числа нигде не плотных*[9] *множеств. Множество не первой категории — называется множеством второй категории.*

Множество рациональных точек вещественной прямой, хотя всюду плотно, является множеством первой категории, как счетное объединение точек, а множество иррациональных — второй. *Канторово множество C* также относится к первой категории, поскольку нигде не плотно.

Категорные идеи возникли при выяснении того, насколько плох может быть предел непрерывных функций. *Поточечный предел на $[0, 1]$ всюду сходящейся последовательности непрерывных функций является функцией, непрерывной всюду, за исключением множества точек первой категории*[10] (*Бэр*). Отсюда следует (?),

---

[9] Множество *плотно* в X, если имеет непустое пересечение с любой окрестностью, и *нигде не плотно*, если не плотно ни в какой окрестности (если его замыкание не имеет внутренних точек).

[10] У монотонных функций множество точек разрыва не более чем счетно.

что производная дифференцируемой функции не может быть всюду разрывной. Множество ее точек разрыва — есть множество точек первой категории.

3.5.2. Теорема Бэра о категории. *Полное метрическое пространство является множеством второй категории.*

Эквивалентная формулировка: *в полном пространстве пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных множеств — всюду плотно.*

◄ Пусть $U_1, U_2, \ldots$ открытые всюду плотные подмножества X, а U_0 — произвольное открытое множество. Любая последовательность вложенных шаров с радиусами $r_n \to 0$

$$\overline{B}_1 \subset U_1 \bigcap U_0, \quad \overline{B}_2 \subset U_2 \bigcap \overline{B}_1, \quad \overline{B}_3 \subset U_3 \bigcap \overline{B}_2, \quad \ldots$$

имеет непустое пересечение[11] (теорема 5.3.4), что влечет за собой непустоту пересечения семейства $U_1, U_2, \ldots$. ►

Теорема 3.5.2 выглядит несколько схоластичной, но на практике она оказывается удобным инструментом.

В принципе, сюрпризом выглядит следующий факт.

3.5.3. Факт. *Всякое множество X на прямой можно разбить на два взаимодополняющих множества A и B, из которых A — множество первой категории, а B имеет меру нуль.*

Понятия «первой категории» и «меры нуль» — то и другое — изобретались в качестве характеристик «ничтожности» множества. Поэтому результат 3.5.3 кажется неожиданным. Но уже пример *канторова множества ненулевой меры* $\widehat{C}$, п. 3.2.3, показывает, что понятия малости тут никак не согласованы. Само $\widehat{C}$ нигде не плотно, и потому — первой категории. В то же время мера $\widehat{C}$ может быть любой положительной в пределах $(0, 1)$, а мера дополнения $[0, 1] \setminus \widehat{C}$, соответственно, — сколь угодно малой. «Дожать» пример можно без особого труда.

---

[11] Существование подходящего шара $\overline{B}_n$ на каждом шаге очевидна.

◄ Разобьем на A и B всю прямую. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — перечисление всех рациональных чисел, а I_{ij} — интервал длины $1/2^{i+j}$ с центром в a_i. Полагая

$$J_j = \bigcup_i^\infty I_{ij}, \qquad B = \bigcap_j^\infty J_j$$

и выбирая $j(\varepsilon)$ так, чтобы $\frac{1}{2^{j(\varepsilon)}} < \varepsilon$, имеем $B \subset \bigcup_i I_{ij(\varepsilon)}$, $\sum_i |I_{ij(\varepsilon)}| < \varepsilon$, откуда следует, что B — нуль-множество. А поскольку J_j плотны в $\mathbb{R}$, то их дополнения $\overline{J}_j$ нигде не плотны, и потому дополнение $A = \overline{B} = \bigcup_j^\infty \overline{J}_j$ — нигде не плотно. ►

3.5.4. Следствие из 3.5.3. *Отрезок* $[0, 1]$ *можно разбить на два взаимодополняющих множества A и B, из которых A — множество второй категории, а B имеет меру* 1.

Несмотря на феномен 3.5.3 во взаимодействии меры и категории прослеживается некоторая доля согласованности. Более того, оказывается справедлив следующий результат, неожиданный теперь в противоположном направлении.

3.5.5. Теорема Серпинского. *В предположении справедливости гипотезы континуума существует такое взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(X)$ имеет меру нуль в томм случае, когда $X \subset \mathbb{R}$ — множество первой категории.*

Неожиданным образом выстреливает *гипотеза континуума*, наделяя теорему 3.5.5 «метафизическими свойствами». Интересно, что сама по себе *гипотеза континуума* в роли «сбоку бантика» с трудом поддается оценке, а вот ее следствия уже могут служить путеводной нитью. В частности, результат 3.5.5 является отправным пунктом для взаимоотношений двойственности [11] между теориями меры и категории. Причем эти «взаимоотношения» работают вне какой бы то ни было зависимости от *гипотезы континуума*. Иными словами, «гипотеза» в качестве аксиомы дает теоремную подсказку, на работоспособность которой потом не влияет замена *гипотезы континуума* ее отрицанием [12].

---

[12] «Есть два вида истины — тривиальная, которую отрицать нелепо, и глубокая, для которой обратное утверждение — тоже истина». *Нильс Бор.*

Лейтмотив данного изложения не вполне согласуется с аппаратными возможностями категорных методов, каковые эффективны при доказательстве теорем существования. С показательными примерами [11] имеет смысл познакомиться.

3.6. Измеримые функции

Напомним прежде всего определения, что существенно из-за характерной здесь неосведомленности о терминологии.

Функцию $f : X \to Y$ называют *измеримой*, если в X измерим прообраз $f^{-1}(A)$ любого измеримого в Y множества A. Однако в случае $f : X \to \mathbb{R}$ на прямой избирается система борелевских множеств (!), а не измеримых по Лебегу. При этом функцию f называют *борелевской*, либо *измеримой по Борелю*, либо *B-функцией*[13], а $f : X \to Y$, для контраста, называют *μ-измеримой*. Но в результате естественной тенденции к упрощению терминологии функции начинают называть просто измеримыми, что вносит определенную путаницу[14]. В частности, *непрерывные функции являются B-функциями, но не обязаны быть измеримыми в смысле Лебега.*

3.6.1. Пример. *Пусть $f : [0, 1] \to [0, 1]$ — канторова лестница. Тогда функция $g(x) = x + f(x)$ непрерывна, строго монотонна — и потому является гомеоморфизмом $[0, 1]$ на $[0, 2]$.*

Поскольку интервалы, удаляемые из $[0, 1]$ при построении канторова множества C, функция g отображает на интервалы такой же длины из $[0, 2]$, то

$$\mu\{g([0, 1] \setminus C)\} = \mu\{[0, 1] \setminus C\} = 1,$$

откуда следует $\mu\{g(C)\} = 1$, т. е. g переводит множество C нулевой меры в множество положительной меры. Но тогда в $g(C)$

[13] Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *измерима по Борелю*, если при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ измеримы *лебеговские множества* $X_\alpha(f) = \{x : f(x) < \alpha\}$.

[14] Вопрос, почему бы не выбросить борелевскую конструкцию за борт, заменив лебеговской и ликвидировав двойственность толкования, — имеет простой ответ. Лебеговская измеримость функции — неудачное понятие, даже непрерывные функции неизмеримы. В то же время борелевские функции переводят измеримые *по Лебегу* множества в измеримые *по Лебегу*, что как раз требуется для интегрирования.

существует неизмеримое множество $\widetilde{C}$ — и гомеоморфизм g переводит измеримое множество $g^{-1}(\widetilde{C}) \subset C$ (меры нуль, потому что $\mu(C) = 0$) — в неизмеримое множество, что давало бы противоречие, будь непрерывные функции измеримы по Лебегу. Но тут к месту вспомнить, что g и g^{-1} обязаны быть измеримыми только по Борелю[15].

3.6.2. *Простейшим примером неизмеримой функции может служить характеристическая функция χ_A любого неизмеримого множества A. Потому что прообраз единицы неизмерим, $\chi_A^{-1}(1) = A$.*

Измеримые функции могут сильно отличаться от непрерывных, будучи разрывными в любой точке. С другой стороны, функция $f(x)$, измеримая на $[a, b]$, отличается от непрерывной не очень сильно в следующем смысле:

3.6.3. Теорема Лузина. *По любому $\varepsilon > 0$ можно указать непрерывную функцию $\varphi(x)$, такую что $f(x) \neq \varphi(x)$ лишь на множестве меры $< \varepsilon$.*

3.7. Факультативная экзотика

«Несуразностей» в теории множеств — хоть отбавляй, и это искажает картину, создавая впечатление бесконечного разнообразия. Однако первоисточников аномалий не так много. По большому счету это *актуальная бесконечность* и *аксиома выбора*[16]. Следующий уровень иерархии: комбинации указанных первопричин с разными идеологическими и прикладными секторами. Остальное — вариации и ремейки. Но они выглядят самодостаточно, и на бегу трудно расставить ударения. Хуже того, не ясно, что можно пропустить мимо ушей без ущерба для мироощущения.

3.7.1. ***Совершенное множество*** *определяется как непустое замкнутое множество, не имеющее изолированных точек. Фишка, как говорится, здесь в том, что*

---

[15] К слову, $g^{-1}(\widetilde{C}) \subset C$ дает пример измеримого множества, которое не является борелевским.

[16] Сюда можно отнести *гипотезу континуума*, аномальные следствия которой не так популярны, но сама «гипотеза» весьма интересна и заслуживает отдельно разговора.

совершенными могут быть множества, не имеющие внутренних точек (вопреки ожиданиям), — канторово множество, например. Другой сюрприз: всякое совершенное множество на $\mathbb{R}$ — несчетно.

3.7.2. Теорема Кантора—Бендиксона. *Любое несчетное замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ может быть представлено как объединение счетного множества и — совершенного.*

Класс несчетных замкнутых подмножеств интересен сам по себе. Если множество всех подмножеств множества X имеет мощность бо́льшую чем мощность X, то:

3.7.3. Факт. *Совокупность всех несчетных замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума c, т. е. ту же мощность что и $\mathbb{R}^n$.*

С 3.7.3 перекликается следующий результат.

3.7.4. Факт. *Совокупность всех борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ имеет мощность континуума*[17].

3.7.5. Определение. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ обладает свойством Бэра, если представимо в виде $X = A \Delta B$, где A — открытое множество, а B — множество первой категории.*

Теория множеств, обладающих *свойством Бэра*, представляет интерес как аналог теории меры Лебега. Обладание «свойством» служит аналогом измеримости, а множества первой категории играют роль *нуль-множеств*, с букетом параллельных результатов. Аксиома выбора «по тем же нотам» позволяет гарантировать существование множеств, не обладающих *свойством Бэра*. Примером такого сорта является *множество Бернштейна*.

3.7.6. Пример Мазуркевича. *На плоскости существует множество, дающее в пересечении с любой прямой — две точки*[18].

Есть масса вариаций подобного сорта. На плоскости существуют:

3.7.7. *Плотное множество, дающее в пересечении с любой вертикальной или горизонтальной прямой — одну точку.*

3.7.8. *Множество с вертикальными сечениями, всюду плотными в $\mathbb{R}$, и горизонтальными сечениями, содержащими ровно по одной точке.*

3.7.9. *Множество X, дающее в пересечении с любой трансляцией*[19] $X + a$, $a \neq 0$, *— ровно одну точку.*

[17] Поэтому «почти все» множества на $\mathbb{R}$ не борелевские.

[18] Разумеется, при опоре на аксиому выбора.

[19] Сдвигом всех элементов на один и тот же вектор a.

Глава 4

Классический анализ

Мастер ошибается по более глубоким причинам.

Определения некоторых понятий далее напоминаются, но в основном предполагается знакомство с основами дифференциального и интегрального исчисления [3, т. 1]. Примеры выбираются на идеологической основе, ориентированной на вскрытие феноменов. Малосущественные вопросы, большей частью, остаются за бортом, хотя не исключаются совсем.

4.1. Непрерывные странности

Всякое определение минирует Вселенную, закладывая противоречия. Казалось бы, что может быть проще и естественнее определения непрерывной функции. Но каковы следствия!

4.1.1. Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке*** *x_0, если*

$$f(x) \to f(x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0,$$

и ***непрерывной на*** *$[a, b]$, если f непрерывна в любой точке отрезка* [1].

Для функций в многомерных пространствах ничего по сути не меняется. Надо лишь отрезок $[a, b]$ заменить областью $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$.

При любом непрерывном отображении $f : X \to Y$ *прообраз открытого множества — открыт*, что может служить определением непрерывности $f : X \to Y$ на всем X. Но образ открытого (замкнутого) множества открыт (замкнут) не обязательно.

---

[1] Эквивалентное определение: *функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ, что*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Однако для доказательства «эквивалентности» требуется *аксиома выбора*.

4.1.2. Пример. *В случае* $\varphi(x) = e^{-x}\cos x$ *образ замкнутого множества* $\{k\pi : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *не замкнут, образ открытого* $(0, \infty)$ *— не открыт.*

Первые признаки того, что определение 4.1.1 вмещает в себя всякую чертовщину, возникают довольно просто. График везде непрерывной[2)] функции $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ невозможно нарисовать, а график непрерывной в нуле функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \quad \text{рационально}, \\ x, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально} \end{cases}$$

всюду дыряв. Но это еще примеры на более-менее привычной платформе, и не такие уж удивительные.

4.1.3. ***Функция Римана***

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \textit{если} \quad x = \dfrac{m}{n}, \quad \textit{дробь}\ \dfrac{m}{n}\ \textit{несократима}, \\ 0, & \textit{если} \quad x \quad \textit{иррационально}, \end{cases} \tag{4.1}$$

являет собой более впечатляющий экземпляр, потому что в подобное загодя трудно поверить. Ибо можно ли заранее вообразить *функцию, непрерывную в иррациональных и разрывную в рациональных точках*[3)]. Соответствующий результат (4.1), конечно, прост, но это задним числом.

◄ Иррациональное x_0 невозможно хорошо приблизить рациональной дробью m/n с ограниченным знаменателем **(?)**. Поэтому чем меньше окрестность x_0, тем больше знаменатели входящих туда дробей m/n — и тем меньше значения $f(m/n) = 1/n$. В итоге $f(x) \to f(x_0) = 0$ при $x \to x_0$. ►

Далее, если двигаться по нарастающей, надо вспомнить *кривую Пеано* — непрерывный образ отрезка $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 1]$,

---

[2)] Здесь и далее подразумевается непрерывное доопределение функций с «выколотыми точками».

[3)] Тем более что наоборот, «*функцию, непрерывную в рациональных и разрывную в иррациональных точках*», построить невозможно.

заполняющий весь квадрат[4]. Опять-таки априори трудно оценить, возможно ли такое. Скорее, нет. Поскольку, как известно, взаимно обратное преобразование не может устанавливать соответствие множеств разной размерности.

Последнее обстоятельство служит иллюстрацией многих оплошностей. Некоторые предположения теорем, находясь в тени, кажутся несущественными, и выводы мерещатся справедливыми без них[5]. Вот тогда и возникает потребность в контрпримерах.

Серьезного удара по непрерывности перечисленные примеры не наносят. Да, емкость понятия оказывается больше, чем хотелось бы, но подсознание все же готово допустить подобное расширение диапазона. Аномалии хоть и неожиданны, но как бы укладываются в рамки «материалистического миропонимания». Но вот *лестница Кантора* и *парадокс Брауэра* «бьют по мозгам» так, что начинает отдавать мистикой.

4.1.4. Канторова лестница. *Пусть функция*

$$f : [0, 1] \to [0, 1]$$

на ***замыкании*** *каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала — принимает значение, равное середине этого интервала*[6]. *Доопределение $f(x)$ в точках второго рода по непрерывности*[7] *дает непрерывную*[8] *монотонную функцию $f(x)$, производная которой почти всюду равна нулю, — тем не менее $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Другими словами, $f(x)$ почти нигде на $[0, 1]$ не растет, успевая ощутимо вырасти на множестве нулевой меры (несмотря на непрерывность).*

[4] Построение см. в разделе 3.3. Интересно что простая линия $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = t$ перекрывает путь любому вертикальному лучу (вдоль z), не являясь непрерывной поверхностью.

[5] В данном случае забывается «взаимообратность».

[6] После двух шагов график $f(x)$ изображен ниже на рисунке.

[7] Концы выброшенных интервалов в *канторовом множестве* C называют точками *первого рода*, остальные — *второго рода*. В точках *второго рода* $\tilde{x}$ полагается $f(\tilde{x}) = \lim f(x_k)$, где $x_k \to \tilde{x}$ и все x_k — точки *первого рода*.

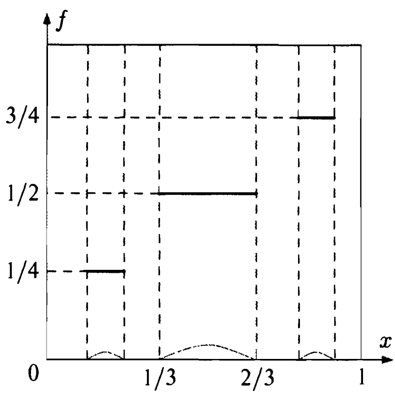
[8] А значит, и *равномерно непрерывную*.

В итоге

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = 0,$$

хотя с общепринятой точки зрения[9]

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0) = 1.$$



Построение существенно опирается на понятие непрерывности. Если бы функция просто конструировалась на замыканиях выбрасываемых третей, как на рисунке, то она бы оказалась неопределенной в точках второго рода, и никакой аномалии не получилось бы. А так, после доопределения, образуется «восьмое чудо света».

Но это еще полбеды.

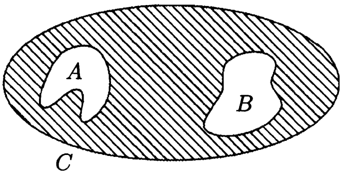
4.1.5. Парадокс Брауэра. *Зададимся следующим вопросом. Могут ли на плоскости три области иметь общую границу? Не общий участок — а одну и ту же границу. Другими словами, может ли некое множество* Γ *делить плоскость на 3 области? Области разные, а граница одна и та же. Похоже на бред, но ответ — положительный.*

Геометрическая интуиция оказывается в нокауте, а понятие непрерывности терпит фиаско. Соответствующий пример конструируется легко.

---

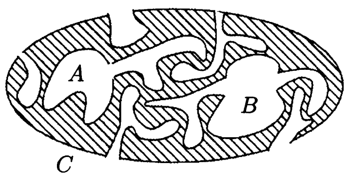
[9] *Абсолютно непрерывная* функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ почти всюду дифференцируема, и $\int_a^t \dot f(s)ds = f(t) - f(a)$ для любого $t \in [a,b]$ (*теорема Лебега*).

Пусть в море C есть остров, а на острове два озера, A и B:



На сухопутной части острова выделим ε-сеть S_ε — множество точек, расположенных в узлах квадратной ε-решетки. Затем от каждого озера и от моря к каждой точке S_ε пророем канал, не доводя его до этой точки на расстояние $\varepsilon/2$.

В духе рисунка



.

На оставшуюся часть суши поместим $(\varepsilon/2)$-сеть, и к точкам $S_{\varepsilon/2}$ пророем каналы, не доходящие до соответствующих точек на $\varepsilon/4$. Потом накроем сушу $(\varepsilon/4)$-решеткой, и так далее. Понятно, что в пределе области A, B, C разрастутся до областей A^∞, B^∞, C^∞ с общей границей Γ. Граница Γ — это все, что останется от суши.

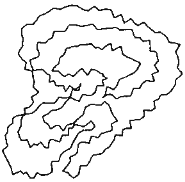
Вот такая неожиданная ситуация. Более того, изначально можно было бы взять остров с миллионом озер — в результате получился бы *пример миллиона областей с общей границей.*

Пример 4.1.5 перекликается со знаменитым результатом *Жордана.*

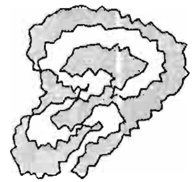
4.1.6. Теорема Жордана. *Гомеоморфный*[10] *образ окружности* (*простой контур*) *делит плоскость на две части* (*на две связные компоненты*) *и является их общей границей.*

Факт из области очевидных на вид утверждений, которые очень трудно доказываются. Поначалу кажется, что теорема ломится в открытую дверь. Но *парадокс Брауэра* рассеивает такое впечатление. Конечно, граница «на острове» простым замкнутым контуром не является, но зрелище впечатляет, и на его фоне теорема Жордана не кажется самоочевидной. Мало ли в какую абракадабру f преобразует окружность:

[10] *Гомеоморфизм* — взаимно однозначное отображение, непрерывное в обе стороны.



Где тут внутренность?
Ответ не так уж труден:



но при усложнении ситуации картинка теряет наглядность.

Еще более удивительно, что картина нескольких областей с общей границей встречается не только в фантазиях, но и на практике. Итерационная процедура

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} \tag{4.2}$$

на комплексной плоскости вычисляет корень кубический из единицы, каковых имеется три,

$$1, \qquad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \tag{4.3}$$

и есть, соответственно, три области притяжения A, B, C. Процесс (4.2) сходится к одному из корней (4.3) в зависимости от того, какой области принадлежит z_0.

Пусть теперь Γ_A, Γ_B, Γ_C обозначают границы областей A, B, C. Невероятно, но факт:

$$\Gamma_A = \Gamma_B = \Gamma_C\ ,$$

т.е. области притяжения имеют одну и ту же границу[11].

4.2. О несбыточности намерений

Финал предыдущего раздела настраивает на пессимистический лад по отношению к непрерывности. Если определение (4.1.1) не преграждает доступ таким химерам, как *парадокс Брауэра*, то

[11] См. [9, п. 8.5], а также книгу: *Пайтген Х. О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.

можно ли работать с ним? И тут начинают витать идеи модернизации. Дескать, французы плохо определили. Конечно, *равномерная непрерывность* или *дифференцируемость* — поджимают непрерывность до более скромных размеров, но это лишь ветвление. Выбрать единственный вариант не удастся, потому что все время идет перетягивание каната в рамках схемы

$$\boxed{\textit{предположения}} \Rightarrow \boxed{\textit{выводы}}$$

с целью усиления и ослабления блоков. И чем пышнее дерево вариантов, тем богаче возможности варьирования. Но корень дерева остается незыблем.

Исполнение всегда неадекватно намерению. Замысел и реализация несоразмерны. Это закон природы. Разумеется, не о мелочах речь. Чем больше «замах» — тем дальше уходит цель. Можно ли из частей шара сложить вдвое больший? Ответ положительный (п. 2.3.2), но надо понимать его относительность. Ответы говорят не о реальности, а о возможностях придуманных инструментов — непрерывность, действительные числа, *аксиома выбора* и т. п. И все аномалии вырастают из этого конгломерата. А «какова реальность» — вопрос бессмысленный. Первичное неопределимо, и мы вынуждены крутиться в стороне — на поле вымышленных конструкций. Зацепка, собственно, остается одна — чувственные восприятия, но они бывают обманчивы. Тем не менее — где удается за них уцепиться, ощущение дискомфорта сходит на нет.

Вот простой пример. Всегда ли точки границы Γ области Ω достижимы изнутри? То есть можно ли любую точку $x \in \Gamma$ соединить непрерывной линией с любой точкой из Ω? Не обязательно, хотя интуитивно кажется — можно, потому что вывод делается на основе тривиальных примеров, находящихся под рукой. Опровержение довольно просто.

4.2.1. Недостижимая изнутри граница. *Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ внутренность Ω бесконечной полуполосы, диаметр которой на бесконечности быстро стремится* *к нулю — так что площадь конечна*[12]*. Далее наматываем «полуполосу убывающей толщины» на некоторую окружность C, с каждым витком приближаясь к окружности, но не пересекая ее. В границу Γ финальной «картинки» войдет не только боковая поверхность «полуполосы», но и окружность C. Точки $x \in C$ не будут достижимы изнутри — к ним нельзя подойти вдоль непрерывной кривой.*

Пример визуально понятен — и его интуиция принимает. Тогда как *функция Римана* и *канторова лестница* принимаются лишь логическим механизмом под аккомпанемент самообмана насчет предельных переходов, поскольку безобидность пределов была многократно продемонстрирована на простых примерах[13].

4.3. Скрытые «изъяны» гомеоморфизмов

О людях обычно думают хуже, чем они того заслуживают, о гомеоморфизмах — лучше. Принято считать, что наличие *гомеоморфизма*[14] $f : X \to Y$, $f^{-1} : Y \to X$, обеспечивает совпадение многих свойств у X и Y. Кое-что в самом деле совпадает, связность, размерность, — но не так много, как думается.

4.3.1. ***Гомеоморфизм, не сохраняющий измеримость и нулевую меру.*** *Пример* 3.6.1.

4.3.2. ***Все канторовы множества C и $\widehat{C}$, нулевой и ненулевой меры, гомеоморфны друг другу.***

◄ Пусть $I_1, I_2, \ldots$ и $J_1, J_2, \ldots$ — последовательности выброшенных интервалов при построении канторовых множеств, соответственно, C и $\widehat{C}$, причем индекс указывает номер шага. Далее функцию f определяем кусочно как линейное монотонно возрастающее отображение каждого I_k на J_k. Непрерывное продолжение f на $[0, 1]$ дает искомый гомеоморфизм. ►

4.3.3. ***Гомеоморфизм, не сохраняющий категорию.***

◄ *Канторова лестница* $f(x)$ не является гомеоморфизмом $[0, 1]$ на $[0, 1]$, но $f(x)$ строго монотонна на точках второго рода $B \subset C$, и гомеоморфно отображает множество B первой категории на множество $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ второй категории. ►

---

[12] $\Omega = \{x, y : |y| < x^{-2},\ 0 < x < \infty\}$.

[13] Чтобы *апории Зенона* более-менее рассосались, потребовалось более двух тысяч лет. Да и то...

[14] В этом случае пространства X, Y называют *гомеоморфными*.

4.3.4. ***Гомеоморфизм всюду плотного множества и — нигде не плотного.***

◄ См. предыдущий пункт. ►

4.4. Дифференциальные свойства

Дифференцируемая функция обладает *свойством Коши*: по *теореме Дарбу ее производная принимает все промежуточные значения.* Это гарантирует, например, что

4.4.1. *Разрывная функция* $\operatorname{sign} x$ *не может быть производной дифференцируемой функции* $F(x)$.

Ощущение банальности этого факта подталкивает к выводу, что в случае дифференцируемости $f(x)$ на $[a, b]$ производная $f'(x)$ обязана быть непрерывной функцией. Да и свойство Коши представляется эквивалентом непрерывности. *Неправильно* то и другое.

4.4.2. Пример. *Производная* ***везде дифференцируемой*** *функции*

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},$$

равная нулю при $x = 0$ *и*

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \textit{при} \quad x \neq 0,$$

разрывна *в точке* $x = 0$, *но обладает свойством Коши*[15].

Пример 4.4.2 задает эталон возможных неприятностей в дифференциальном исчислении. При выборе в качестве мишени точки $x = 0$ ядром замысла обычно является произведение двух функций, одна из которых подходящим образом обнуляется в нуле, а другая, типа $\sin(1/x)$, быстро колеблется, «ускоряясь» по мере приближения к $x = 0$. Если интенсивности колебаний не хватает, то вместо $\sin(1/x)$ берется что-нибудь вроде $\sin(1/x^k)$.

[15] Напомним, функции доопределяются по непрерывности. В данном случае $f(0) = 0$, поскольку $f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

4.4.3. Пример. *Везде дифференцируемая функция*

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

имеет неограниченную разрывную в нуле производную, причем

$$f'(0) = 0 \quad \textit{и}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \quad \textit{при} \quad x \neq 0.$$

4.4.4. Пример. *Функция*

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

имеет производную $f'(0) = 1$, но ***не монотонна*** *в окрестности нуля.*

4.4.5. Пример. *Функция*

$$f(x) = 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x^2}$$

имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но ее производная в сколь угодно малой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения (сколь угодно большие).

Такие примеры способствуют поддержанию бдительности на должной высоте, показывая не только чего надо опасаться, но и при каких обстоятельствах.

Эпизодически поговаривают о чрезмерной либеральности определения производной, которое считает дифференцируемыми в нуле функции типа $x^2 \sin(1/x)$. Дескать, скверная природа таких функций портит столбовую дорогу анализа компрометирующими закоулками.

Однако проблема дифференцируемости абсолютного ответа не имеет и иметь не может. Один скажет: $f(x) = |x|$ не дифференцируема, другой будет настаивать, что $|x|' = \operatorname{sign} x$. Оба правы по-своему. Вопрос в том, кто какими рамками пользуется. Нельзя только, решая задачу, менять рамки. И дело отнюдь не в догматизме. Просто разные дисциплины пользуются одинаковыми именами для различных понятий, что вводит в заблуждение.

Пока речь о классической дифференцируемости. Исторически первый пример нигде не дифференцируемой непрерывной функции

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n \cos(m^n \pi x), \quad m \text{ нечетно},\ 0 < c < 1,\ mc \geqslant 1.$$

В свое время это был выдающийся трюк, сильно изменивший математическое мировоззрение. Теперь, конечно, другие времена. Многое прояснилось, давние находки поблекли — и уже не так интересно разбирать, почему $v(x)$ не дифференцируема. Тем более что всяк понимает, что почти все (в некотором смысле) функции нигде не дифференцируемы [16].

4.5. Интегрирование

Проблемы интегрирования замысловато ветвятся вместе с теорией меры. Но в пределах классики ньютоновского толка все более-менее просто. Хотя без разноголосицы не обходится.

Некоторые осложнения появляются в исходной точке. Интегрирование воспринимают, главным образом, как операцию, обратную дифференцированию. Частично это так. Функцию $F(x)$ — такую что $F'(x) = f(x)$ — называют *первообразной* $f(x)$, а совокупность всех первообразных $F(x) + C$, где C произвольная константа, — *неопределенным интегралом*от $f(x)$, обозначая

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Если первообразная $F(x)$ существует лишь на $[a, b]$, — функцию $f(x)$ считают *интегрируемой* на $[a, b]$.

Но есть еще *определенный интеграл*, каковой в [3, т. 1] определяется [17] как разность $F(b) - F(a)$ со стандартной записью

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{4.4}$$

[16] *Банах* (1931) показал, что в смысле категории почти все непрерывные функции нигде не дифференцируемы [11].

[17] В русле «целесообразной педагогической лжи».

в то время как обычно определенный интеграл вводится с помощью *сумм Дарбу*, а (4.4) возникает как следствие (теорема). Именно так понимается ***интегрируемость по Риману***[18].

Промежуток $[a, b]$ разбивается на n отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ длины Δx_i. На каждом i-м отрезке выбирается произвольная точка ξ_i, и рассматривается сумма

$$\sigma = \sum f(\xi_i)\Delta x_i,$$

предел которой при измельчении разбиения называется *определенным интегралом*. Корректность предельного перехода зависит от сходимости *нижней* $s = \sum m_i \Delta x_i$ и *верхней* $S = \sum M_i \Delta x_i$ *сумм Дарбу* к одному и тому же пределу. Здесь m_i и M_i — точная нижняя и точная верхняя границы $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$.

Когда речь идет об интегрировании непрерывных функций, оба подхода равносильны. Но эквивалентность определений нарушается в общем случае.

4.5.1. Факт. *У интегрируемой по Риману функции первообразной может не быть. Тривиальным примером такой функции служит* $\operatorname{sign} x$, *см. п.* 4.4.1.

На это обстоятельство стоит обратить внимание, потому что (4.4) обычно воспринимают как неотъемлемое свойство интеграла Римана, независимо от контекста. «Сто́ит» хотя бы для того, чтобы не впадать в стандартную ошибку, помня, что

4.5.2. Факт. *В общем случае*

$$\int_a^x f(z)dz = F(x) \not\Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Пример $f(x) = \operatorname{sign} x$, несмотря на банальность, точно указывает, в чем тут дело. Более сложные примеры уводят мысль в сторону.

---

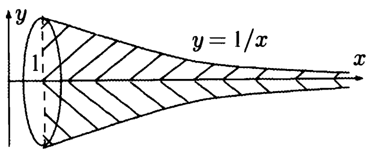
[18] Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ в томм случае, когда она ограничена на $[a, b]$ и множество ее точек разрыва имеет меру нуль [11].

4.5.3. Пример. *В случае интегрирования функции Римана* 4.1.3

$$\int_0^x f(x)\,dx \equiv 0,$$

что не так уж легко аккуратно доказать. Результат опять-таки подтверждает 4.5.2, *поскольку* $\dfrac{d0}{dx} \neq f(x)$.

Определенная коллекция «неожиданностей» возникает в связи с участием интегралов в вычислении площадей и объемов. Особенно при соучастии бесконечности.

4.5.4. Конечный объем с бесконечным сечением. *При вращении графика кривой $y = 1/x$ в диапазоне $(1, \infty)$ вокруг оси x образуется тело вращения,* 

, объем которого,

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi\,dx}{x^2} = \pi,$$

ограничен, но вертикальное сечение, проходящее через ось Ox, имеет бесконечную площадь

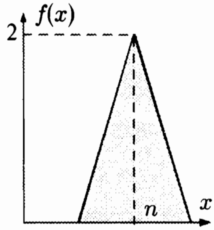
$$S = 2\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

На основе «недоразумения» 4.5.4 получил хождение *парадокс маляра*, привносящий дополнительный колорит.

4.5.5. Парадокс маляра. *Заполнив конечный объем из* 4.5.4 *краской и опустив туда вертикальное сечение в виде пластинки, получаем странный результат: π литров краски хватает для окраски бесконечной площади.*

Часто думают, что для сходимости интеграла $\int^\infty f(x)\,dx$ от положительной функции $f(x)$ требуется $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

4.5.6. Пример. *Если $f(x)$ равна нулю вне треугольных пиков (высотой 2 и шириной основания $1/n^2$) в районе целочисленных аргументов*



, то $\int\limits^{\infty} f(x)\,dx = \sum\limits^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$

4.6. Повторные пределы

Важная роль повторных пределов в анализе проявляется в завуалированном виде. В таких понятиях, как производная, интеграл, — от предельных переходов, лежаших в истоках, на поверхности ничего не остается. А вот изменение их порядка — можно ли менять порядок дифференцирования, дифференцировать интеграл по параметру под знаком интеграла, — это вопросы равенства повторных пределов.

Тот факт, что *повторные пределы*не всегда равны, в принципе, очевиден. А если равны, то нет гарантии, что они совпадают с *двойным* пределом.

Вот пример, где повторные пределы могут не совпадать:

4.6.1. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{ax+cy}{bx+dy}=\dfrac{a}{b}$, *но* $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+cy}{bx+dy}=\dfrac{c}{d}$.

4.6.2. Пример. *У функции*

$$f(x,y)=x\sin(1/y),\quad \text{при}\quad x\to 0,\quad y\to 0,$$

существует двойной предел, но только один из повторных.

Вот еще несколько стандартных примеров.

4.6.3. Пример. *У функции*

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{если}\quad x_1,x_2\neq 0;\\ 0, & \text{если}\quad x_1=x_2=0\end{cases}\tag{4.5}$$

в нуле существуют и равны оба повторных предела, но двойного — вообще нет.

Функция (4.5) имеет разрыв в нуле, причем довольно экзотический:

- Предела у $f(x)$ при $x = (x_1, x_2) \to 0$ нет, но при стремлении x к нулю вдоль любой прямой $x_1 = kx_2$ значение $f(x)$ имеет предел $k/(1+k^2)$.
- Несмотря на разрыв, при любом фиксированном x_2 (в том числе нулевом) функция $\varphi(x_1) = f(x_1, \text{const})$ — непрерывна, и имеет частные производные всюду, в том числе в нуле, т. е. в точке разрыва!

4.6.4. Пример. *Модификация* (4.5)

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}\,, & \text{если} \quad x_1, x_2 \neq 0; \\ 0\,, & \text{если} \quad x_1 = x_2 = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

являет собой пример функции опять-таки разрывной в нуле, и потому недифференцируемой, но имеющей всюду частные производные. В дополнение к ситуации (4.5) *функция* (4.6) *при стремлении x к нулю вдоль любой прямой $x_1 = kx_2$ имеет один и тот же нулевой предел.*

Характерный признак выхода повторных пределов из-под контроля — наличие у функции тех или иных особенностей. В ситуациях «общего положения» предосторожности чаще всего излишни. Необходимо помнить также о стандартных предположениях, которые часто забываются.

4.6.5. Пример. *Функция*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,xy\,, & \text{если} \quad x, y \neq 0; \\ 0\,, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в нуле частные производные $f_{xy}(0,0) = 1$, $f_{yx}(0,0) = -1$, что противоречит расхожему представлению о равенстве смешанных производных независимо от порядка дифференцирования. Но в данном случае «не хватает» непрерывности f_{xy} и f_{yx} в окрестности нуля.

Количество подобных примеров легко умножается. С ними желательно повозиться час-другой, чтобы уловить, какого сорта механизмы мешают совпадению пределов. В багаже, само собой, необходимо иметь результаты позитивного характера.

4.6.6. Теорема. *Если функция $f(x, y)$ при $x \to a$, $y \to b$ имеет двойной предел A (конечный или бесконечный), и при любом y из некоторой окрестности точки b*

существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, *то существует и*

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A.$$

Другой повторный предел, как следует из примера 4.6.2, может не существовать. Если, однако, в дополнение к условиям теоремы, при любом x из некоторой окрестности точки a существует предел $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, то оба повторных предела существуют и равны двойному.

Нетрудно сообразить, что факт 4.6.6 особого выигрыша при вычислении предела не дает, поскольку, если уж существование двойного предела установлено, то его проще найти, полагая $x = y$ и вычисляя предел $f(x,x)$.

Допустим, последовательность функций $f_n(x)$ поточечно сходится к функции $f(x)$, т.е. $f_n(x) \to f(x)$ при каждом фиксированном x. В качестве $f_n(x)$ обычно выступают частичные суммы какого-либо ряда $\sum\limits^{\infty} \varphi_k(x)$.

Здесь возникают стандартные вопросы наследования функцией $f(x)$ тех или иных свойств функций $f_n(x)$. Например, непрерывна ли $f(x)$ в точке x_0, если все $f_n(x)$ непрерывны в x_0? Легко видеть, что положительный ответ эквивалентен равенству

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Проблема существования двойного предела даже не возникает.

Ключом к решению в такого рода задачах является, как правило, та или иная разновидность *равномерной сходимости.*

4.6.7. Теорема. *Последовательность функций $f_n(x)$, поточечно сходящихся к $f(x)$ для любого $x \in X$,* ***сходится равномерно****, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

для всех $n > N$ и $x \in X$.

Идея равномерной сходимости может принимать разные облики. Поэтому важно ощущать саму идею, чтобы не запоминать слишком много определений. Вместо дискретного параметра n, например, может фигурировать — непрерывный y, а вместо $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ — предельный переход

$$f(x,y) \to \varphi(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

4.6.8. Теорема. *Если последовательность непрерывных функций $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на замкнутом ограниченном множестве X, то функция $f(x)$ непрерывна на X.*

4.6.9. Пример. *Последовательность $f_n(x) = x^n$ при любом фиксированном $x \in (0, 1)$ сходится к 0, при $x = 1$ — к 1. Иными словами, последовательность функций x^n на $[0, 1]$ поточечно сходится к разрывной функции.*

4.6.10. Пример. *Пусть*

$$f(x, y) = \begin{cases} g(0, y)\left(1 - \dfrac{x}{y}\right), & \text{при условии } 0 \leqslant x \leqslant y; \\ 0, & \text{при условии } y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

В случае $g(0, y) = 2/y$

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 f(x, y)\, dx = 1, \qquad \int_0^1 \lim_{y \to 0} f(x, y)\, dx = 0.$$

4.6.11. Пример. *Рассмотрим функцию $f_n(x)$, равную $1/n$ при условии*

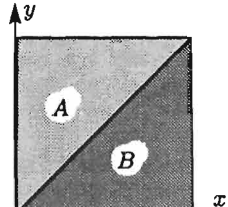
$$0 \leqslant x \leqslant n$$

и нулю для $x > n$. Очевидно, последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к нулю на $[0, \infty)$, но

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = 1.$$

4.6.12. Пример. *Пусть $f(x, y) = 1/y^2$ в области A, $f(x, y) = -1/x^2$ в области B и $f(x, y) = 0$ на границе A и B. Тогда*

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dy dx = -1.$$



4.7. Замечания и дополнения

В [4] есть много контрпримеров, которые здесь обходятся стороной по разным причинам. Скажем, ряд $\sum^\infty a_n$ сходится, а $\sum^\infty b_n$ — расходится, но $\forall n : a_n \geqslant b_n$. Бывает, голова диву дается, пока не вспомнит, что положительность a_n, b_n не требуется. Поэтому можно положить $a_n \equiv 0$, $b_n \equiv -1$.

Такую ловушку не хотелось бы относить к категории парадоксов или хотя бы отчасти важных контрпримеров, потому что здесь все дело в тривиальной невнимательности. Но когда тривиальная невнимательность переходит в нетривиальную — вопрос растяжимый.

4.7.1. Факт. *Ряд Тейлора*

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^{\alpha}$$

не обязан сходиться к $\varphi(x)$. Стандартный пример: функция $\varphi(x) = e^{-1/x^2}$, продолженная в нуле по непрерывности. Все $\varphi^{(\alpha)}(0) = 0$, и ряд

$$0(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$$

сходится к тождественному нулю, но не к $\varphi(x)$. Тем не менее любой отрезок этого ряда хорошо приближает $\varphi(x)$ в окрестности нуля, но не улавливает, что $\varphi(x)$ в нуле имеет минимум.

Пример 4.7.1 не бог весть какой глубокий, но он все же необходим в поле зрения, потому что обычное изложение рядов Тейлора, каковые все-таки часто используются, концентрируется на сходимости — неважно куда.

• При рассмотрении бесконечно дифференцируемых функций с конечным *носителем*[19] возникает опасение (как бы негативная иллюзия), что таковых не бывает — из-за невозможности гладкой стыковки. Пример

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

дает образец всюду гладкой функции с конечным носителем.

4.7.2. *Любая монотонная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — измерима, ограничена, суммируема и почти всюду дифференцируема, и может иметь разрывы только первого рода*[20]*, множество которых не более чем счетно.*

---

[19] *Носитель* $f(x)$ — наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp} f$, вне которого $f(x) = 0$.

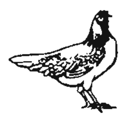
[20] *Разрыв первого рода* характеризуется наличием пределов слева и справа.

Глава 5

Метрические пространства

Чем больше знаешь, тем у́же выбор.

5.1. Конечномерный прецедент

Пространственные наблюдения формируют интуитивные фантазии о размерности и подталкивают расширить представления за пределы чувственного опыта. Конечно, три измерения — мощный барьер и на Земле, , и в Раю, , но идея откладывать аргументы в $f(x_1, \ldots, x_n)$ по осям выдуманного пространства — довольно естественна.

Так или иначе, в пространствах n переменных были определены плоскости, длины, углы, объемы, и установлено их соответствие обычным геометрическим представлениям. В результате стало привычным рассуждать об уравнениях и функциях большого числа переменных, опираясь на понятия нормалей, площадей и прочих визуальных атрибутов, — с подключением потенциала геометрического воображения к широкому классу задач.

Оборотная сторона тоже есть. Совпадение отдельных свойств различных $\mathbb{R}^n$ создают впечатление «одинаковости» пространств. Но время от времени дают о себе знать отличия. В $\mathbb{R}^4$ можно разъединить зацепленные кольца, не разрывая их; развязать узел на контуре, вывернуть наизнанку обычную сферу.

◄ Это, конечно, тривиальные явления. Скажем, зацепленные контуры $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^3$ можно рассматривать как

$$\{x_1(t), x_2(t), x_3(t), 0\}, \quad \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), 0\} \in \mathbb{R}^4.$$

Сдвигая «плавно» у контура $\{y_1(t), y_2(t), y_3(t), 0\}$ четвертую координату на $\varepsilon \neq 0$, т. е. перемещая второй контур в гиперплоскость

$$\mathbb{R}^3 + \varepsilon \subset \mathbb{R}^4,$$

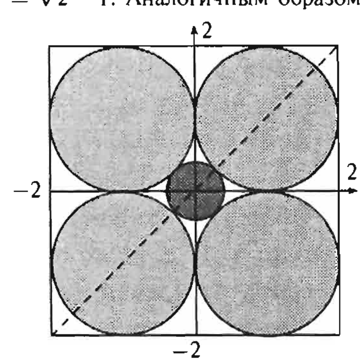
получаем возможность непрерывно двигать $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$, не пересекая первый контур, и уводя второй — сколь угодно далеко. После чего остается вернуть четвертую координату обратно в нуль. ►

Претерпевают также качественные представления о геометрических соотношениях. Единичный куб, сторона 1, объем 1, при увеличении n неограниченно увеличивается в размерах — расстояние между вершинами на большой диагонали равно $\sqrt{n}$. Объем шара при больших n концентрируется у поверхности, а объем куба, вписанного в единичный шар — радиуса 1 — очень быстро убывает,

$$V_n = \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Дисгармония ярко проявляется в нижеследующем наглядном примере.

Квадрат со стороной 4 разбит на 4 одинаковых квадрата, в каждый из которых вписан единичный круг ($R = 1$). В центральную область вписан круг радиуса r, касающийся остальных кругов. Очевидно, $r = \sqrt{2} - 1$. Аналогичным образом в $\mathbb{R}^3$ куб со стороной 4 можно разбить на 8 одинаковых кубов, в каждый из которых вписать единичный шар и т. д. В $\mathbb{R}^3$ радиус центрального вписанного шарика окажется равным $r = \sqrt{3} - 1$. Легко видеть, что в $\mathbb{R}^n$



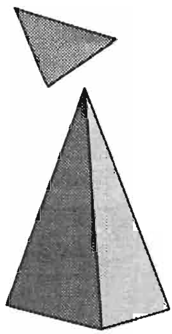
$$r = \sqrt{n} - 1,$$

поскольку $r + R$ при любом n дают длинную диагональ единичного куба, т. е.

$$r + R = \sqrt{n}, \quad \text{а} \quad R = 1.$$

Таким образом, вписанный шарик, начиная с $n = 10$, вылезает за пределы ограничивающего куба, а начиная с $n = 5$, радиус «маленького» шарика превосходит радиус «большого». Но это рядовые «несуразности». В $\mathbb{R}^n$ встречаются неожиданности совсем другого масштаба.

5.2. Циклические многогранники



Зададимся вопросом, какое максимальное число вершин может иметь многогранник, у которого каждые две вершины соединены ребром. На плоскости $\mathbb{R}^2$ указанным свойством обладает лишь треугольник — максимальное число вершин $m = 3$. В $\mathbb{R}^3$ — тетраэдр ($m = 4$). В пространстве четырех измерений и выше такой многогранник *может иметь вершин сколько угодно*!

5.2.1. Теорема. *В $\mathbb{R}^n$ при $n \geqslant 4$ существуют выпуклые многогранники с произвольным количеством смежных вершин.* **(!)**

◀ Рассмотрим так называемый *циклический многогранник* в $\mathbb{R}^4$ с любым числом вершин, лежащих на кривой

$$x(\tau) = \{\tau,\, \tau^2,\, \tau^3,\, \tau^4\}, \qquad \tau \geqslant 0.$$

Удивительное свойство кривой $x(\tau)$ заключается в следующем. Через любые две точки $x(t)$, $x(s)$ можно так провести гиперплоскость H_{ts} (в данном случае трехмерную), что все остальные точки $x(\tau)$ будут находиться по одну сторону H_{ts}. Действительно,

$$\varphi(\tau) = (\tau - t)^2(\tau - s)^2 = \alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \alpha_3\tau^3 + \alpha_4\tau^4 \geqslant 0.$$

Поэтому вся кривая $x(\tau)$ лежит по одну сторону гиперплоскости H_{ts}, описываемой уравнением

$$\langle h, x(\tau)\rangle + \alpha_0 = 0, \qquad h = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

и лишь две точки $x(t)$, $x(s)$ попадают на саму гиперплоскость H_{ts}, поскольку

$$\varphi(t) = \varphi(s) = 0.$$

Далее остается вспомнить, что многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин, в данном случае точек

$$x(\tau_1), \ldots, x(\tau_N). \tag{5.1}$$

Все плоскости $H_{\tau_i\tau_j}$, $\tau_i \neq \tau_j$, *опорные* — поэтому отрезки, соединяющие любые две точки из (5.1), будут ребрами циклического многогранника[1]. ▶

---

[1] Ясно, что отрезок, соединяющий $x(t)$ и $x(s)$, весь лежит в H_{ts}, и ни одна его точка не может быть получена как выпуклая комбинация остальных вершин (5.1), поскольку те лежат по одну сторону H_{ts}.

Аналогичный пример в $\mathbb{R}^n$, $n > 4$, получается из данного. В качестве вершин можно взять любые N точек, у которых первые четыре координаты совпадают с координатами точек (5.1).

5.2.2. Теорема. *У циклического многогранника C_{mN}, где m — размерность многогранника, N — число вершин, не только все вершины попарно смежны, но и любые $k = [m/2]$ — образуют k-грань*[2]*.*

Например, в $\mathbb{R}^{15}$ выпуклая оболочка любых $k \leqslant 7$ точек на кривой

$$x(\tau) = \{\tau, \tau^2, \dots, \tau^{15}\}$$

образует k-грань циклического многогранника, независимо от количества остальных вершин.

Число *фасет* у C_{mN} растет экспоненциально:

$$\nu_{mN} = \begin{cases} \dfrac{N(N-j-1)!}{j!(N-2j)!}, & \text{если} \quad m = 2j, \\ \dfrac{2(N-j-1)!}{j!(N-2j-1)!}, & \text{если} \quad m = 2j+1. \end{cases}$$

Экстремальные свойства циклических многогранников C_{mN} характеризуются *максимальным числом граней любой размерности среди всех многогранников с N вершинами в $\mathbb{R}^m$*.

Возникает вопрос, насколько широко распространены такие многогранники. Довольно неожиданно, что при больших размерностях «аномалия» становится правилом.

5.2.3. Пример. *Выберем наугад (равновероятно) k вершин m-мерного куба $[0,1]^m$, и пусть X обозначает их выпуклую оболочку, а p_{km} — вероятность того, что все вершины многогранника X попарно смежны. При $m \geqslant 4$ и $k \leqslant 2^m$ справедлива оценка*[3]

$$p_{km} > 1 - \frac{k^4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^m. \tag{5.2}$$

---

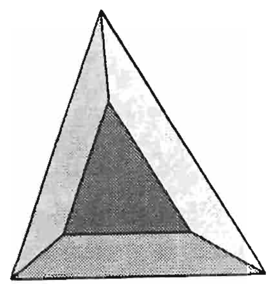
[2] Пересечение многогранника с любой своей опорной гиперплоскостью называют *гранью многогранника*; *k-гранью*, если размерность грани равна k; 0-грани — *вершины*, 1-грани — *ребра*. Грань максимальной размерности называют *фасетой* — у m-мерного многогранника размерность фасет $m-1$.

[3] Обоснование есть в [3, т. 10].

В соответствии с (5.2) получается, что взятые наугад 10^5 вершин 100-мерного куба образуют многогранник, у которого с вероятностью более 0,99 все 100 *тысяч* вершин попарно смежны.

Эффект неожиданности теорем 5.2.1, 5.2.2 несколько смазывается из-за того, что сценарий разворачивается в четырехмерном пространстве, где мы не имеем осязаемого опыта. Поэтому перевод сюжета в привычное $\mathbb{R}^3$ заслуживает дополнительного усилия мысли.

Задумаемся: сколько выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$ могут попарно соприкасаться по двумерным границам? Аналогичный вопрос в $\mathbb{R}^2$ имеет очевидное решение (разумеется, многогранники на плоскости — это многоугольники, и речь идет об одномерных границах). Максимум — четыре многоугольника. Кажется невероятным, что в $\mathbb{R}^3$ таких многогранников может быть *сколько угодно.*

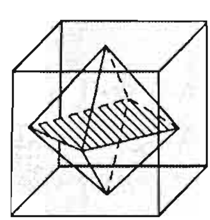


5.2.4. Теорема. *В* $\mathbb{R}^3$ ***можно расположить любое количество выпуклых многогранников, каждая пара которых имеет общую двумерную грань.***

◄ Построить соответствующий пример, располагая моделью циклического многогранника C_{4N}, совсем легко. Рассмотрим двойственный многогранник C^*_{4N}, состоящий из точек $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$xy \leqslant 1 \text{ для любого } y \in C_{mN}.$$

У $C^*_{4N} \subset \mathbb{R}^n$ каждой вершине исходного многогранника C_{4N} соответствует трехмерная грань, и наоборот, причем эти грани соприкасаются по двумерным граням, если соответствующие вершины C_{4N} соединены ребром. На рисунке изображен пример взаимно двойственных куба и октаэдра.



Таким образом, граница C^*_{4N} представляет собой совокупность выпуклых трехмерных многогранников, которые попарно соприкасаются по плоским граням. Далее одна из трехмерных граней C^*_{4N} растягивается, и на нее укладываются остальные грани.

Другой вариант завершения доказательства:
Пусть C^*_{4N} имеет m трехмерных граней. Разобьем R^4 на m конусов так, что все конусы имеют вершину 0, лежащую внутри C^*_{4N}, и каждый конус — в точности содержит одну из трехмерных граней. Получается пример m попарно граничащих четырехмерных конусов. В любом плоском трехмерном сечении, не проходящем через 0, возникает пример попарно соприкасающихся $(m-1)$ трехмерных многогранников. ▶

5.3. Метрика и топология

Множество X называется *метрическим пространством*, если на пáрах его элементов задана *метрика* $\rho(x, y)$, удовлетворяющая четырем аксиомам:

- $\rho(x, y) \geqslant 0$,
- $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (*аксиома треугольника*)[4].

Подобное абстрагирование свойств обычного расстояния оказывается полезным далеко за пределами евклидовой геометрии. Метрика дает действенный инструмент, позволяющий измерять отличия друг от друга функций, множеств, последовательностей, — сохраняя при этом параллели с обычным визуальным опытом. Но не надо забывать, что у всякой аналогии — своя ахиллесова пята. Некоторые сюрпризы лежат на поверхности.

5.3.1. Пример включения большего шара в меньший. *Возьмем отрезок* $[-1, 1]$ *с обычной метрикой. Шар* $|x-1| \leqslant 2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ *лежит строго в единичном шаре* $|x| \leqslant 1$.

Иллюзии разбиваются также о *неархимедовы метрики*, характеризуемые усиленным неравенством треугольника

$$\forall\, x, y, z : \rho(x, y) \leqslant \max\{\rho(x, z),\ \rho(z, y)\}. \tag{5.3}$$

Шокирующие свойства таких метрик представляют собой благотворный холодный душ для завышенных ожиданий.

[4] Метрика ρ в X позволяет определить открытые множества, после чего о ней можно забыть, сохранив бóльшую часть теории. Систему открытых множеств можно определить также посредством аксиом. Это и есть путь, ведущий к *топологическим пространствам*.

5.3.2. Пример. *Если метрика неархимедова, то все треугольники равнобедренные, а любая точка круга* $D = \{x : \rho(x, a) < r\}$ *является его центром.*

При этом аномалия отнюдь не высосана из пальца. Пример *неархимедовой* — дает *p-адическая метрика*, эффективно используемая в теории чисел.

5.3.3. Определение. *Метрика* $\rho(x, y)$ *на множестве рациональных чисел называется p-адической, где p — простое число, если* $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *а в случае* $x \neq y$ *— разность* $x - y$ *представляется в виде*

$$x - y = p^k \frac{m}{n},$$

где целые m *и* n *не делятся на* p, *— и полагается* $\rho(x, y) = 1/p^k$.

Но и без неархимедовости — не все гладко в расхожих представлениях о метрике. Вот пока ожидаемый результат.

5.3.4. Теорема о вложенных шарах. *В полном метрическом пространстве* (X, ρ) *пересечение последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров* $\overline{B}(r_n, x_n)$ *с центрами* x_n, *радиусы которых* r_n *стремятся к нулю, непусто. Результат сохраняет силу для вложенных друг в друга замкнутых множеств с диаметрами, стремящимися к нулю*[5].

Как ни удивительно, но *без требования* $r_n \to 0$ *пересечение всех шаров может оказаться пустым*. Причина тривиальна.

5.3.5. Пример. *В ограниченной метрике*

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \tag{5.4}$$

множества $K_n = [n, \infty)$ *замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.*

Однако корень зла не в противоестественности метрики (5.4).

5.3.6. Пример. *Рассмотрим множества* M_n *в пространстве непрерывных функций* $C[0, 1]$, *состоящие из функций* $x(t)$, *таких что*

[5] *Диаметром* ограниченного множества A в метрическом пространстве X называют число $d(A) = \sup\limits_{x,y \in A} \rho(x, y)$.

$|x(t)| \leqslant 2$, $x(0) = 0$ *и* $x(t) = 1$ *при* $1/n < t < 1$. *Пересечение — опять пусто.*

Улучшение «имиджа» метрических пространств достигается повышением требований к функции $\rho(x, y)$.

Одна из столбовых дорог пролегает через выделение **нормированных пространств**, каковыми называют линейные множества X с заданной *нормой* (скалярной функцией) $\|x\|$, обязанной удовлетворять условиям:

- $\|x\| \geqslant 0$,
- $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*неравенство треугольника*).

Метрика в X определяется по правилу $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Полные нормированные пространства называют *банаховыми*. В таких пространствах пересечение вложенных шаров всегда не пусто, поскольку здесь радиусы вложенных шаров *монотонно убывают*, чего нельзя гарантировать в общем случае метрического пространства. Но тогда либо $r_n \to 0$, и вопрос решается теоремой 5.3.4, либо $r_n \to r > 0$, и тогда центры вложенных шаров «вынуждены» сходиться, в результате чего пересечение опять непусто. Но это — что касается шаров. На сферах патология сохраняется.

5.3.7. Пример. *В бесконечномерном банаховом пространстве E на единичной сфере всегда существует* [3, т. 5, лемма 4.3.6] *последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию*

$$\|x_n - x_m\| = 1 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Множества $K_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ опять замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.

Климат улучшается в *гильбертовом пространстве.*

5.3.8. Факт. *В банаховом пространстве последовательность вложенных замкнутых выпуклых ограниченных множеств может иметь пустое пересечение*[6]. ***В гильбертовом*** *пространстве такая последовательность всегда имеет непустое пересечение.*

[6] Но если это последовательность шаров, то пересечение непусто.

Банахово пространство становится *гильбертовым* при задании нормы с помощью **скалярного произведения**, определяемого как функция $\langle x, y\rangle$, принимающая неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям:

- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
- $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$,
- $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

Скалярное произведение позволяет ввести в X норму $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, и в итоге — метрику:

$$\rho(x, y) = \langle x - y, x - y\rangle^{1/2}.$$

Дополнительные выгоды по сравнению с «банаховым случаем» заключаются, главным образом, в возможности ортогональных разложений. Но это — напоказ. Есть также масса достоинств аппаратного толка. Например, часто принципиален вопрос существования и единственности в рассматриваемом пространстве элемента u, обеспечивающего минимум расстояния от данного x до *замкнутого* подпространства (или выпуклого множества) L:

$$\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

5.3.9. Теорема. *В непустом замкнутом выпуклом подмножестве L гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$ существует единственный элемент $u \in L$, ближайший к $x \notin L$, т. е. $\rho(x, L) = \|x - u\|$.*

5.3.10. Теорема. *Любое замкнутое подпространство $L \subset \boldsymbol{H}$ имеет ортогональное дополнение$L^{\perp} = \{x : \langle x, z\rangle = 0,\ z \in L\}$,*

$$\boldsymbol{H} = L \oplus L^{\perp}.$$

Факт 5.3.10 вроде бы естественный (едва ли не очевидный). Однако *в банаховом пространстве у замкнутого подпространства $L \subset B$ дополнения L' в смысле $B = L \oplus L'$ вообще может не быть*[7].

Тут изложение приближается к опасной черте, за которой бо́льшая часть аудитории теряет интерес. Контрпримеров много, но функциональный анализ солидными частями лежит все-таки

---

[7] Разложения типа $B = L \oplus L'$ в отсутствие скалярного произведения определяются (*проекторами*) P, $P^2 = P$, каковым соответствует разложение B в прямую сумму $B = L \oplus L'$, $L = PB$, $L' = (I - P)B$.

за пределами общего математического образования. Поэтому заинтересованному читателю лучше рекомендовать [3, т. 5].

5.4. О бесконечной размерности

Представления о бесконечномерной природе функций опираются в первую очередь на разложения в функциональные ряды

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots . \tag{5.5}$$

По аналогии с «$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$» величины c_i в (5.5) принимаются за координаты, а функции $\varphi_i(x)$ — за базисные векторы.

Подходить можно, конечно, с другого конца, задавая, например, не базис, а метрику или норму. Но так или иначе в обиход изучения функций был введен геометрический стиль мышления. Плоскости, шары, сферы — стали эффективно применяться при манипуляциях с множествами функций. Однако «шаг в бесконечность» был сопряжен с некоторыми, иногда фундаментальными, потерями.

Так, например, непрерывная функция на *ограниченной замкнутой области* X в $\mathbb{R}^n$ достигает своего максимума и минимума. Это очень важное свойство для оптимизации. Именно поэтому в $\mathbb{R}^n$ задача определения $\max\limits_{x\in X} f(x)$ никогда не упирается в проблему существования решения[8]. В бесконечномерных задачах — это серьезная головная боль.

5.4.1. Пример. *Вариационная задача Ньютона минимизации функционала*

$$J = \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1+(y')^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

не имеет решения, поскольку $J > 0$, *но* $J_n \to 0$ *для*

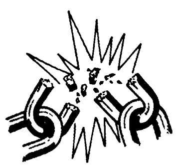
$$y_n(x) = x + \sin^2 n\pi x.$$

Бесконечномерные пространства с конечномерными сближает понятие компактности. *Лемма Больцано—Вейерштрасса* на вещественной прямой: «*существование сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности*», — в общем случае перестает работать. На базе компактности возникают бесконечномерные обобщения «леммы», — и теория оживает. Источником недоразумений здесь служат определения.

[8] Если речь не идет о некомпактном X.

5.4.2. Определение. *Множество $M \subset X$ метрического пространства X называется компактным (компактом), если всякая последовательность в M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из M. Если замыкание множества U компактно, то U называется предкомпактным.*

Недоразумения проистекают из-за того, что компактность $M \subset X$ часто называют *компактностью в себе*, а предкомпактность — *компактностью в X*, и даже просто компактностью, окончательно запутывая картину[9].

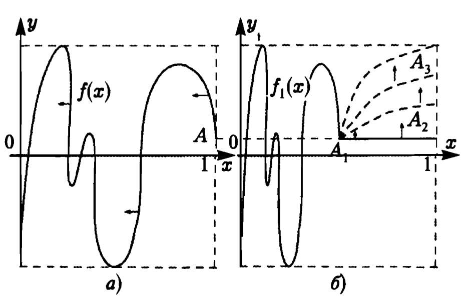


5.4.3. Теорема. *В бесконечномерном банаховом пространстве L шар не является предкомпактным множеством, и на единичной сфере всегда можно указать последовательность $\{x_n\}$ без точек сгущения, причем даже $\|x_n - x_m\| = 1$ при $n \neq m$.*

Еще одно принципиальное отличие. В $\mathbb{R}^n$ сферу невозможно непрерывной деформацией стянуть по себе в точку, что служит основой для результатов о разрешимости уравнений. В бесконечномерном пространстве такой фокус возможен. Рассмотрим, например, сферу в $C[0, 1]$, состоящую из непрерывных функций $f(x)$, таких что

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x)| = 1.$$

5.4.4. Деформация бесконечномерной сферы в $C[0, 1]$.



---

[9] Называя компактность в данном выше определении бикомпактностью. В альтернативной терминологии есть своя логика. Определение предкомпактного множества на самом деле подразумевает, что объемлющее пространство оговорено. В противном случае возникает неоднозначность. Множество рациональных точек из $(0, 1)$ предкомпактно в $\mathbb{R}$, но не предкомпактно в пространстве рациональных чисел. Конечно, можно требовать полноту X, но там возникает свой диапазон возможных оговорок.

◄ Деформацию проведем в три шага. На первом — деформируем $f(x)$ в

$$f_1(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{для} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ f(1) & \text{для} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

при этом функция на рис. *а* переходит в функцию на рис. *б* с помощью деформации

$$h(\tau, x) = \begin{cases} f(\tau x) & \text{для} \quad x \in \left[0, \frac{1}{\tau}\right], \\ f(1) & \text{для} \quad x \in \left[\frac{1}{\tau}, 1\right] \end{cases}$$

при изменении τ от 1 до 2.

На втором шаге все функции вида $f_1(x)$ деформируются в функции $f_2(x)$. График $f_2(x)$ совпадает с графиком $f_1(x)$ на $[0, 1/2]$, а правые концы плавно поднимаются до верхнего «потолка» так, чтобы $f_2(1) = 1$ (отрезок A_1A_2 деформируется в дугу A_1A_3, рис. *б*.

На последнем шаге все функции $f_2(x)$ стягиваются по сфере в любую «точку» $f_0(x)$, если $f_0(1) = 1$. Деформацией может служить

$$H(x, \lambda) = \lambda f_0(x) + (1 - \lambda) f_2(x), \quad \lambda \in [0, 1]. \quad ►$$

Факты 5.4.1 и 5.4.4 расположены на поверхности айсберга и напрямую влияют на прикладные результаты. Но есть масса деталей, рассеянных мелким бисером по всей территории функционального анализа и дающих о себе знать окольными путями. Проблематично даже само понятие размерности.

Пусть речь идет о бесконечномерном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Размерностью $\boldsymbol{H}$ естественно считать *мощность* базиса. С определением последнего возникает неожиданная заминка. *Линейным базисом* (*базисом Гамеля*) называется максимальное линейно независимое множество[10] в $\boldsymbol{H}$, а просто *базисом* (*ортонормированным базисом*) — любое максимальное ортонормированное множество в $\boldsymbol{H}$. Соответственно, о *размерности* $\boldsymbol{H}$ говорят как о *линейной*, и как — об обыкновенной (*ортогональной*). Они принципиально отличаются друг от друга [14]. Если *обыкновенная размерность* широко применима и, как правило, счетна, то *линейная* — «мало кому нужна» и счетной не бывает (по крайней мере континуальна, не менее $2^{\aleph_0}$). Привкус извращенности у линейной размерности возникает в связи с тем, что она используется в основном для построения

[10] По определению, бесконечное множество линейно независимо, если линейно независимо любое его конечное подмножество.

контрпримеров, причем не тех, которые встречаются на практике, а тех, которые «неуловимы», как НЛО.

Вместе с тем атмосфера функционального анализа более доверительна к *базисам Гамеля*, нежели эквилибристика на вещественной прямой (п. 2.7). В то же время не стоит забывать, что препарирование $\mathbb{R}$ с помощью *базисов Гамеля* позволяет не только моделировать уродства, но и решать фундаментальные задачи типа *третьей проблемы Гильберта* [3, т. 1, стр. 172].

5.5. Линейные операторы

Представления о линейных операторах формируются обычно на стадии изучения линейной алгебры, что определяет затем расхождение между мыслью и чувством. Атмосфера функциональных пространств непохожа на тепличные условия $\mathbb{R}^n$, хотя именно общность служит фактором успеха.

Формально *линейный оператор* $A : E_x \to E_y$ определяется как *аддитивный*, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$, и *однородный*, $A(\lambda x) = \lambda Ax$. Оператор A *непрерывен* в точке x^*, если[11]

$$x_n \to x^* \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax^*;$$

и *ограничен*, если существует константа γ, такая что $\|Ax\| \leqslant \gamma\|x\|$. Наименьшее γ в неравенстве называется *нормой линейного оператора* A.

Обычно предполагается, что Ax имеет смысл при любом $x \in E_x$. В общем случае оператор A имеет *область определения* $\mathbf{D}_A \subset E_x$ и *область значений* $\mathbf{R}_A \subset E_y$.

5.5.1. *Непрерывность линейного оператора равносильна ограниченности.*

Подчеркивая бесконечномерную специфику, принято напоминать, что в функциональных пространствах, в отличие от $\mathbb{R}^n$, линейные операторы не обязательно ограничены (непрерывны). Но разница с $\mathbb{R}^n$ не такая уж большая. Примеры разрывных линейных операторов строятся в основном так же, как в п. 2.7, с помощью *аксиомы выбора*. Другое дело, что в «обстановке бесконечномерности» это выглядит менее вычурно, нежели утверждение 2.7.1 применительно к $\mathbb{R}$. Конструктивные примеры тоже известны, но они не совсем полноценны. Вот простой образец.

[11] Линейный оператор, непрерывный в какой-либо точке, непрерывен — в любой другой, т. е. на всем пространстве.

5.5.2. *Линейный оператор дифференцирования $y(t) = Dx(t)$, определенный на линейном многообразии $\mathbf{D}_A \subset C[0, 1]$ непрерывно дифференцируемых функций, не непрерывен как оператор, действующий из $\mathbf{D}_A$ в $C[0, 1]$.*

◀ Результат прозрачен и даже тривиален, поскольку хорошо известно, что производная от предела равномерно сходящейся последовательности $x_n(t)$ не обязана равняться пределу производных $x_n'(t)$, даже если эти производные существуют и непрерывны. ▶ Конечно, многообразие $\mathbf{D}_A$ плотно в $C[0, 1]$, и аналогичный фокус в $\mathbb{R}^n$ не проходит. Тем не менее пример не дотягивает до уровня сколько-нибудь глубокой патологии.

В то же время, опять-таки по причине «бесконечномерной обстановки», экземпляры подобного сорта могут служить отправным пунктом для продолжения оператора с плотного многообразия на все пространство, чему служит примером *теорема Хана—Банаха* о продолжении линейных функционалов, т. е. операторов вида $\varphi : E_x \to \mathbb{R}$. Как известно, схема доказательства *теоремы Хана—Банаха* опирается на *аксиому выбора*, но в случае сепарабельных пространств обходится — без. Так что среди конструктивно задаваемых линейных функционалов все-таки существуют неограниченные.

5.5.3. ***Проблема базиса*** *в банаховом пространстве E (не в гильбертовом) выглядит несколько иначе. Если базис $\{e_n\}$ в E определить как систему векторов, с помощью которой любой элемент $x \in E$ представим сходящимся рядом*

$$x = \sum^{\infty} x_k e_k,$$

то неясно, всегда ли таковой существует (проблема Шаудера) [12]. *В стандартных ситуациях базисы известны.*

Проблематике сопутствует некоторая тонкость, связанная с необходимостью различия понятий базиса и полной системы. *Система векторов* $\{e_n\}$ считается *полной* в E, если ее линейная оболочка всюду плотна в E. Уже из определения ясно, что полная система не обязана быть базисом. Причем существуют такие полные системы, которые нельзя дополнить до базиса, не нарушая требования, чтобы ни один элемент из $\{e_n\}$ не принадлежал замкнутой линейной оболочке остальных.

---

[12] Разумеется, речь может идти только о сепарабельных пространствах, потому что в несепарабельном случае базис заведомо не существует.

5.5.4. Пример. *Стандартная система* $\{1, \sin kx, \cos kx\}$ *полна в* $C[0, 2\pi]$, *но не образует базиса. Она образует базис в* L_2.

Функциональный анализ представляет собой основной своей частью обобщение линейной алгебры на случай бесконечномерных пространств. Иначе говоря, все крутится вокруг уравнения

$$Ax = y$$

с линейным оператором $A : E_1 \to E_2$. К стандартам $\mathbb{R}^n$ добавляется веер нюансов. Уравнение $Ax = y$ называется *корректно разрешимым*, если обратный оператор A^{-1} существует и ограничен, — *нормально разрешимым*, если область значений $\mathbf{R}_A$ замкнута в E_2, — *плотно разрешимым*, если $\mathbf{R}_A$ плотно в E_2. И это лишь часть разбора полетов. Дробление вариантов здесь лишний раз подчеркивает ограниченность упрощенного интуитивного взгляда, формируемого трехмерной визуализацией.

5.6. Слабая сходимость

Особо интересны в функциональных пространствах те феномены, которые при «спуске» в $\mathbb{R}^n$ исчезают.

Последовательность $\{x_n\}$ в линейном нормированном пространстве E называется *слабо сходящейся* к элементу $x \in E$, — пишут $x_n \xrightarrow{w} x$, — если для любого $f \in E^*$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Обычную сходимость в противовес слабой называют — *сильной*, и обозначают либо просто $x_n \to x$, либо $x_n \xrightarrow{s} x$. Сильная сходимость влечет за собой слабую. *В* $\mathbb{R}^n$ *сильная сходимость совпадает со слабой.*

Последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$ в сопряженном пространстве E^* называют *слабо сходящейся* к $f \in E^*$, — обозначение $f_n \xrightarrow{w} f$, — если $f(x_n) \to f(x)$ для любого $x \in E$, т. е. *слабая сходимость последовательности функционалов — это поточечная сходимость.*

5.6.1. Факт. *Элементы ортонормированного базиса* $\{e_n\}$ *в гильбертовом пространстве слабо сходятся к нулю,* $e_n \xrightarrow{w} 0$, *но* $\|e_n\| \equiv 1$.

5.6.2. Факт. *Замкнутый шар в банаховом пространстве слабо замкнут*[13].

5.6.3. Пример. *Любое слабо замкнутое множество Ω сильно замкнуто. Но сильно замкнутая единичная сфера в $\boldsymbol{H}$ слабо незамкнута.* (!)

5.6.4. Пример. *Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ непрерывно по совокупности переменных, но не слабо непрерывно. То есть из*

$$x_n \xrightarrow{w} x, \quad y_n \xrightarrow{w} y$$

не следует $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Контрпример: $x_n = y_n = e_n$.

Явление «слабости» в функциональных пространствах особенно сильно́ слабой компактностью. Множество Ω в банаховом пространстве E называется **слабо компактным**, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset \Omega$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу из Ω.

5.6.5. Факт. *Замкнутый шар в гильбертовом пространстве слабо компактен (**теорема Алаоглу—Банаха—Тихонова**). Но единичная сфера в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является слабо компактным множеством.*

Позитивная часть утверждения 5.6.5 возвращает гильбертовы пространства в «компактное русло»[14]. Компактность, слабая или сильная, есть компактность — и почти тот же «конечномерный» арсенал методов начинает работать. Правда, в атмосфере слабой топологии, но за все приходится платить. К тому же негативная часть 5.6.5 напоминает о необходимой осторожности.

5.7. Полная непрерывность

Оператор $F : E_1 \to E_2$ называется ***вполне непрерывным***, либо ***компактным***, если он отображает ограниченные множества E_1 в предкомпактные множества E_2.

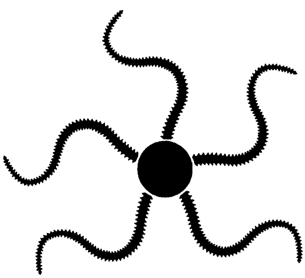
---

[13] Множество Ω *слабо замкнуто*, если слабый предел каждой слабо сходящейся последовательности элементов из Ω принадлежит Ω.

[14] Утешительный результат [3, т. 5, теорема 6.5.2]: *если нормированное пространство сепарабельно, то шар в сопряженном пространстве — слабо компактен.*

Компактные операторы по своим свойствам близки к конечномерным. Вполне непрерывный линейный оператор $A : E \to E$ в естественных предположениях может быть представлен суммой $A = A_1 + A_2$, где A_1 конечномерный оператор, а норма A_2 меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Из-за путаницы в терминологии вполне непрерывным часто называют оператор, переводящий ограниченные множества в компактные (а не предкомпактные). В результате многие думают, что замкнутые ограниченные множества вполне непрерывный оператор переводит именно в компактные. Это неправильно.



5.7.1. Пример. *Поскольку любой непрерывный линейный функционал вполне непрерывен, таковым является и*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$$

в $C[0, 1]$. *Замкнутое множество функций*

$$M = \{x : \|x\| = 1, x(t) \geqslant 0\}$$

функционал f *переводит в полуинтервал* $(0, 1]$.

Причем преобразование замкнутых множеств в незамкнутые для вполне непрерывных операторов является, скорее, правилом, нежели исключением.

5.7.2. *Если область значений вполне непрерывного оператора* A *замкнута, — оператор* A *конечномерный.*

5.8. Спектральные свойства

Спектр линейного оператора как совокупность собственных значений — в функциональных пространствах не годится. Под давлением бесконечномерных обстоятельств его приходится определять иначе. Во многих утилитарных срезах ситуация похожа на конечномерную, но бесконечность все же дает о себе знать.

5.8.1. Определение. *Комплексное* λ *называется регулярным значением непрерывного линейного оператора* A, *если оператор* $A - \lambda I$ *имеет определенный на* E *ограниченный обратный. Спектр* $\sigma(A)$ *оператора* $A : E \to E$ *определяется как дополнение к множеству его регулярных значений.*

Иными словами, спектр $\sigma(A)$ — это совокупность λ, для которых оператор $A-\lambda I$ *необратим*, что может быть по двум причинам: оператор $A-\lambda I$ или *не инъективен* (не взаимно однозначен), или *инъективен, но не сюръективен* (не является отображением «на»). В $\mathbb{R}^n$ встречается только первая причина.

При «неинъективности» уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, называемое *собственным вектором*, а соответствующее λ — *собственным значением* оператора A. В общем случае множество собственных значений не исчерпывает весь спектр (как в $\mathbb{R}^n$). Вот две стандартных иллюстрации.

5.8.2. Пример. *Пусть непрерывный оператор умножения* $Ax(t) = tx(t)$ *действует в* $C[0,1]$. *Уравнение*

$$(A-\lambda I)x(t) = (t-\lambda)x(t) = 0$$

ненулевых решений $x(t)$ *в* $C[0,1]$ *не имеет. Поэтому собственных значений у* A *нет. Но спектр не пуст,* $\sigma(A) = [0,1]$, *поскольку обратный оператор,*

$$(A-\lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t-\lambda}$$

при $\lambda \in [0,1]$ *неограничен и определен не на всем* $C[0,1]$. *Схема работает так же при замене* $C[0,1]$ *на* $L_2[0,1]$.

5.8.3. Пример. *Односторонний сдвиг в* l_2:

$$A\{\xi_0, \xi_1, \dots\} = \{0, \xi_0, \xi_1, \dots\}.$$

Опять-таки собственных значений нет, а спектр $\sigma(A)$ *представляет собой единичный круг на комплексной плоскости* [14].

5.9. Обусловленность и спектр

Проблемы численного счета возникают еще в $\mathbb{R}^n$, где их и надо осознавать, пока бесконечность не застилает взор. Понятно, уравнение $Ax = b$ сталкивается с трудностями, если матрица A близка к вырожденной. Но что значит «близка»? Да и в невырожденности ли дело?

5.9.1. Пример. *Матрица*

$$\begin{bmatrix} 0{,}99 & 1 \\ 1 & 1{,}01 \end{bmatrix}$$

«плоха», потому что изменение ее элементов на 1 % *может увести решение* $Ax = b$ *в бесконечность. Ее детерминант близок к нулю,* $\det A = 10^{-4}$, *— но служит ли это индикатором? Не служит. Потому что у матрицы*

$$\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

детерминант такой же, но это «хорошая» матрица, потому что изменение ее элементов на 1 % *дает в решении относительную ошибку того же порядка.*

Скрытый механизм определяется *числом обусловленности*

$$\boxed{\sigma(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|\,.}$$

Если

$$Ax = b \quad \text{и} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b,$$

где Δx смещение решения $Ax = b$ при возмущении правой части на Δb, то[15]

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \sigma(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Если же $Ax = b$ и $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, где Δx по-прежнему смещение решения $Ax = b$, но уже при возмущении матрицы на ΔA, то «опять-таки»

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leqslant \sigma(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Роль $\sigma(A)$ рассмотренными ситуациями далеко не исчерпывается.

5.9.2. Теорема. *Если матрица A диагонализируема,*

$$A = T^{-1} \Lambda T, \qquad \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},$$

и λ' собственное значение возмущенной матрицы $A + \Delta A$, то найдется такое λ_i, что[16]

$$|\lambda' - \lambda_i| \leqslant \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| = \sigma(T) \|\Delta A\|.$$

Таким образом, при возмущении ΔA возмущением спектра A замаскированно управляет матрица T, приводящая A к диагональному виду. Задним числом это становится понятно. Но с самого начала догадаться не так легко.

---

[15] Детали и дополнительную информацию по поводу содержания данного раздела см. в [3, т. 3].

[16] Здесь $\|\cdot\|$ обозначает одну из двух норм — строчную или столбцовую.

5.9.3. Пример. *Если у полинома*

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - 20),$$

имеющего корни $\{1, 2, \dots, 20\}$, *изменить коэффициент при* λ^{19} *с* -210 *всего лишь на* $-210 + 2^{-23}$, *то у возмущенного полинома появляется, в частности, пара комплексно сопряженных корней с мнимыми частями* $\sim \pm 3i$.

Теперь достаточно выписать сопровождающую матрицу многочлена $p(\lambda)$, *— как получится пример матрицы* 20×20, *у которой изменение одного элемента на величину* 2^{-23} *(приблизительно на* 2^{-24} *%) меняет спектр «революционным» образом.*

Наличие скрытого механизма, управляющего спектром матрицы при ее возмущении, показывает, что первоочередной интерес может представлять вовсе не фасад задачи. Возмущение спектра редко фигурирует в прикладных постановках, но почти всегда присутствует в подводной части айсберга. Спектральные свойства очень сильно влияют на решение задач, где речь идет вроде бы совсем о других вещах. Диагонализирующее преобразование T, как «внутренний орган» A, напрямую редко запрашивается, но именно T, как показывает теорема 5.9.2, отделяет норму от аномалии.

Глава 6

Теория вероятностей

Ошибки и неудачи разворачивают
идущего в правильном направлении.

Теория вероятностей (**ТВ**) знаменита большим количеством недоразумений и сюрпризов, характеризующих главным образом не теорию, а интуицию. Избыток парадоксов тут даже портит картину, создавая иллюзию большого разнообразия причин. Поэтому далее предпринимаются определенные усилия, чтобы отсеять излишки. Иные результаты оказываются за бортом из-за потери былой свежести, хотя они остаются принципиальными. Это, например, распространенные ошибки в связи с законом больших чисел и многочисленные прегрешения по части статистики[1]. За недостающими заблуждениями можно обратиться к другим источникам [3, т. 4], [12].

6.1. Простейшие неполадки

Неполадки в **ТВ** начинаются в самом начале, где вероятность $\mathbf{P}(A)$ события A определяется как

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\textit{число вариантов, в которых наступает } A}{\textit{число всех вариантов}}.$$

При этом элементарные факты типа 6.1.3, 6.1.5, вроде бы лежащие на поверхности, настолько разительно противоречат интуиции, что даже «разбор полетов» не дает полного облегчения.

6.1.1. Парадокс Кардано. *При бросании двух шестигранных костей сумма выпавших чисел получается равной — как 9-ти, так и 10-ти — в двух вариантах:*

$$\begin{aligned} \textit{сумма } 9 \quad &\Leftrightarrow \quad (3,6)\ (4,5), \\ \textit{сумма } 10 \quad &\Leftrightarrow \quad (4,6)\ (5,5). \end{aligned}$$

[1] Кое-чему здесь недостает броскости, а кое-что приелось.

Но вывод о равенстве вероятностей этих событий — ошибочен. Способов получения сумм 9 *и* 10 *на самом деле больше, и их количество разное*:

$$\text{сумма } 9 \quad \Leftrightarrow \quad (3,6)\ (6,3)\ (4,5)\ (5,4),$$

$$\text{сумма } 10 \quad \Leftrightarrow \quad (4,6)\ (6,4)\ (5,5).$$

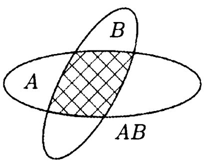
Таким образом, из 36 *возможных пар чисел* 4 *пары дают в сумме* 9, *и только* 3 — 10. *Вероятности, соответственно, равны* $4/36$ *и* $3/36$, *что подтверждает эксперимент — частоты, с которыми в сумме выпадают* 9 *и* 10, *стремятся к указанным вероятностям.*

На примере становится понятно, что в подборе *пространства* Ω *элементарных событий*[2)] имеется определенный произвол. Первый вариант — это 36 равновероятных *упорядоченных* пар (i, j). Второй вариант Ω — это *неупорядоченные* пары (21 пара), но тогда они не равновероятны. Задача выглядит то простой, то сложной. Начинаешь присматриваться, и ум заходит за разум. Дополнительную путаницу создает независимость суммы от перестановки слагаемых. При последовательном выбрасывании костей — первая, потом вторая — проблемы не возникает. Но кости можно выбрасывать одновременно, они падают вместе, и первая от второй не отличается. Тогда различных вариантов имеется только 21 — и не вполне ясно, почему они не равновероятны.

Феномен двух факторов. Сознание приспособлено концентрироваться на одном факторе, что имеет свои плюсы и минусы. Два фактора — уже много, и это подтверждается на каждом шагу, в том числе при необходимости одновременно следить за двумя событиями.

Сначала небольшое напоминание. *Суммой событий* A и B называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A, B и обозначаемое

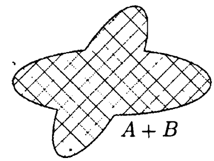
[2)] Пространством элементарных событий называют конечное или бесконечное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$, на котором задана функция $p(\omega_i)$, принимающая значения из $[0, 1]$ и удовлетворяющая условию нормировки $\sum p(\omega_i) = 1$. Значения $p(\omega_i)$ считаются вероятностями *элементарных событий* ω_i. Множества $A \subset \Omega$ называют *событиями* и определяют их вероятности как $\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$.



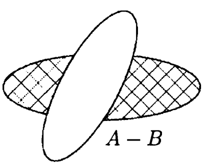
как $A \cup B$ или $A+B$. Первое обозначение прямо указывает, какое множество в пространстве событий Ω отвечает $A+B$. *Произведением событий* A и B называют событие, состоящее в совместном наступлении A, B и обозначаемое как $A \cap B$ или AB.

Очевидно,

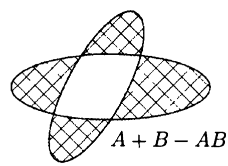
$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB), \qquad (6.1)$$



поскольку при суммировании ω_i по A и B элементарные события из пересечения AB считаются два раза, и один раз $\mathbf{P}(AB)$ приходится вычесть. Если события не пересекаются, то $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.



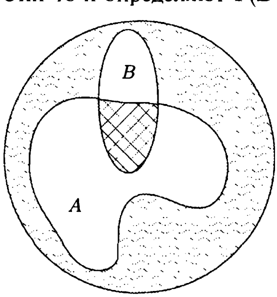
Формулы типа (6.1) удобно мыслить с помощью рисунков. Геометрические параллели естественно продолжаются на событие «не A», которому отвечает дополнение $\bar{A}$ множества A в Ω, а разность $A - B$, интерпретируется как наступление A, но не B. Наконец, *симметрическая разность* $A \Delta B = A + B - AB$



обозначает событие, состоящее в наступлении одного из A, B, но не двух вместе. Пустое множество $\varnothing$, считается, принадлежит Ω и символизирует невозможное событие. При этом $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$. С учетом нормировки $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, очевидно, $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A}) = 1$.

Камнем преткновения часто оказывается *условная вероятность* $\mathbf{P}(B|A)$, каковой называют вероятность события B при условии наступления события A.

Из всех $\omega_i \in A$ входят в B лишь те ω_i, которые входят в пересечение AB. Они-то и определяют $\mathbf{P}(B|A)$ с точностью до нормировки A:



$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}. \qquad (6.2)$$

Иначе говоря, $\mathbf{P}(B|A)$ равно отношению площади заштрихованного крест-накрест пересечения A и B к площади A [3]. Запись (6.2) в форме

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A). \qquad (6.3)$$

называют *формулой умножения вероятностей.*

[3] То есть A по отношению AB играет роль пространства элементарных событий, правда, при отсутствии нормировки A.

6.1.2. Пример. *Имеется три картонки. На одной — с обеих сторон нарисована буква A, на другой — B. На третьей картонке с одной стороны A, с другой — B. Одна из картонок выбирается наугад и кладется на стол. Предположим, на видимой стороне картонки оказывается буква A. Какова вероятность, что на другой стороне — тоже A? «Одна вторая», — ошибочно отвечает интуиция.*

Причина заблуждения далеко не очевидна. Дело в том, что картонка не только случайно выбирается, но и случайно укладывается на одну из сторон. Поэтому эксперимент естественно рассматривать в рамках более сложной схемы. Всего имеется шесть нарисованных букв, из них — три буквы A, две на картонке AA и одна — на AB. Букву A из AA вытащить в два раза более вероятно, чем из AB. Получается, вероятность того, что на столе лежит картонка AA, равна $2/3$.

Таких задач, где здравый смысл терпит фиаско, довольно много. И дело не в том, что ахиллесова пята интуиции приходится на вероятность. Слабое место интуиции в другом. Взаимодействие двух факторов ставит воображение в тупик. А комбинация многофакторности с наглядностью — в теории вероятностей такова, что все время искрит.

Парадокс транзитивности. Сравнивая случайные величины X и Y, будем говорить «*X больше Y по вероятности*», — если

$$\mathbf{P}\{X > Y\} > \mathbf{P}\{X \leqslant Y\}, \tag{6.4}$$

т. е. вероятность неравенства $X > Y$ больше $1/2$.

6.1.3. Пример. *Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из 6 точек, в которых с. в. X, Y, Z, W с равной вероятностью $1/6$ принимают значения согласно таблице*[4]:

X	6	6	2	2	2	2
Y	5	5	5	1	1	1
Z	4	4	4	4	0	0
W	3	3	3	3	3	3

[4] Функция X, например, может быть реализована бросанием шестигранной кости, грани которой помечены цифрами $\{6\ 6\ 2\ 2\ 2\ 2\}$.

Очевидно, $X = 6$ *с вероятностью* $1/3 = 2/6$. *В этом случае* $X > Y$ *независимо от значения* Y. *С вероятностью* $2/3 = 4/6$ *величина* X *равна* 2. *Тогда* $X > Y$, *если* $Y = 1$, *что имеет вероятность* $1/2 = 3/6$. *Поэтому, с учетом формул умножения вероятностей и суммы непересекающихся событий, итоговая вероятность неравенства* $X > Y$ *равна*

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично подсчитывается, что $Y > Z$, $Z > W$, *— с той же вероятностью* $2/3$. *Получается цепочка неравенств*

$$X > Y > Z > W.$$

Возможность $W > X$ *представляется в некотором роде дикой. Тем не менее* $W > X$ *с вероятностью* $2/3$ **(!)**.

Вероятностное неравенство (6.4) совсем непохоже на $3 > 2$, но возникающие ассоциации путают карты. Свойства отношения (6.4) настолько сильно отличаются от обычного неравенства, что знак $>$ имело бы смысл заменить каким-либо иным.

Неразбериху усугубляют другие понятия *больше/меньше* для с. в. Говорят, например, «*X меньше Y стохастически*», если

$$\mathbf{P}\{X < \tau\} \geqslant \mathbf{P}\{Y < \tau\}, \quad \text{причем} \quad \mathbf{P}\{X < \tau_0\} > \mathbf{P}\{Y < \tau_0\}$$

для некоторого τ_0.

Оба понятия вроде бы естественным образом мотивированы, но могут сильно отличаться друг от друга.

6.1.4. Пример. *Если* Y *равномерно распределена на* $[0, 1]$, *а*

$$X = \begin{cases} \varepsilon^2 Y, & \text{с вероятностью } \varepsilon; \\ Y + \varepsilon^2(1 - Y), & \text{с вероятностью } 1 - \varepsilon, \end{cases}$$

то при малых $\varepsilon > 0$

$$X > Y \quad \text{с вероятностью } 1 - \varepsilon, \text{ но} \quad X < Y \quad \text{стохастически}^{5)}.$$

6.1.5. Парадокс ожидания серии. *Какая в случайной* «01»*-последовательности*[6] *комбинация,* 00 *или* 01, *появится раньше? Очевидно, равновероятно,*

[5] Вероятностные неравенства — это главный механизм всех неприятностей в **ТВ**, ибо события, как подмножества Ω, описываются неравенствами, — и ни одна задача не обходится без анализа «равно-больше-меньше». Поэтому без привычки к двойственному характеру неравенств, ограничивающих множества и сравнивающих меры, ориентироваться в **ТВ** трудно.

Большое количество примеров, напрямую связанных с неравенствами, можно найти в «Статистике» [3, т. 4], [12]. Стоит обратить внимание на *парадокс Эджворта* из разряда «чем больше данных, тем хуже результат».

[6] Подразумевается равная вероятность появления нуля и единицы.

поскольку после первого появления нуля на следующем шаге возникнет либо 0, *либо* 1, — *с вероятностью* 1/2. *Напрашивается вывод, что среднее число шагов (среднее время ожидания)* m_{00} *и* m_{01} *до появления, соответственно, серий* 00 *либо* 01 — *тоже одинаково. Но это не так.*

◄ Пусть m_0 обозначает среднее число шагов до появления комбинации 01 при условии, что первая цифра «01»-последовательности оказалась *нулем*, а m_1 — среднее число шагов до появления комбинации 01 при условии, что первая цифра «01»-последовательности оказалась *единицей*. Легко видеть, что

$$m_0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m_0, \qquad m_1 = 1 + \frac{1}{2}m_0 + \frac{1}{2}m_1,$$

откуда $m_0 = 3$, $m_1 = 5$, $m_{01} = \dfrac{m_0 + m_1}{2} = 4$.

Если же m_0^*, m_1^* обозначают аналоги m_0, m_1 в ситуации, когда речь идет о появлении комбинации 00, то

$$m_0^* = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}m_1^*, \qquad m_1^* = 1 + \frac{1}{2}m_0^* + \frac{1}{2}m_1^*.$$

В конечном итоге это дает $m_{00} = \dfrac{m_0^* + m_1^*}{2} = 6$. Дополнительная информация есть в [12]. ►

6.1.6. Факт. *Из*

«$U > V$ по вероятности»,

вообще говоря, не следует $\mathbf{E}\{U\} > \mathbf{E}\{V\}$, *но* $U(\omega) > V(\omega)$, *конечно, влечет за собой* $\mathbf{E}\{U\} > \mathbf{E}\{V\}$.

6.2. Как теория создает заблуждения

Теория вероятностей, как сильнодействующее средство, не только спасает от заблуждений, но и создает их. Принято думать, например, что:

6.2.1. Заблуждение. *В лотерею играть неразумно, поскольку матожидание выигрыша меньше стоимости билета.*

◄ Конечный денежный выигрыш может иметь «бесконечную ценность». Покупка дома, переезд, лечение, образование. Да мало ли что еще — меняет судьбу, и потому в деньгах не измеряется, хотя нуждается в той или иной стартовой сумме. Почему же за 30 копеек не купить шанс? Взвешивание здесь только вредит. Но авторитет иероглифов формул и таинственной терминологии создает гипнотизирующий мираж[7]. ►

6.2.2. Заблуждение. *Раз страхование выгодно компании, оно невыгодно клиенту.*

◄ Клиент страхует собственность на сумму X. Страховой взнос γX, вероятность потери собственности p.

Матожидание потери равно pX, — поэтому страховая компания будет «в плюсе» при условии $\gamma > p$. Использование *среднего* логично для компании, поскольку она имеет дело с массой клиентов, — и картина в целом определяется действием закона больших чисел. В противном случае опора на матожидание сомнительна. Для индивидуального клиента картина иная. Массовость ситуации его не касается. Небеса подбрасывают «его монету» один раз — и усреднять нечего. Поэтому в такого рода ситуациях оптимизация матожидания далека от реальных потребностей.

К сказанному остается добавить, что *возможная* целесообразность страхования для клиента связана с превосходством субъективной ценности страхуемой собственности над ее рыночной стоимостью[8] X. ►

Вот другой яркий пример, хотя и с подмоченной репутацией.

6.2.3. Петербургский парадокс. *Если герб при неоднократном бросании монеты выпадает первый раз в n-й попытке, — игроку выплачивается 2^n рублей. Матожидание выигрыша,*

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots = 1 + 1 + \ldots,$$

бесконечно. Поэтому, с точки зрения теории (как бы), за участие в игре денег можно заплатить сколько угодно — казино в любом случае проиграет.

◄ Хороший пример на тему того, как респектабельная теория направляет ход мыслей не в то русло, тогда как реальная задача не стоит выеденного яйца. Казино проигрывает в среднем, но в данном случае это не дает разумных

---

[7] Здесь уместно вообще задуматься о скользком основании, на котором выдвигаются критерии. Между содержательной задачей и формализацией всегда есть зазор, без понимания которого «трудно не вляпаться».

[8] В этом, собственно, и заключена суть — в расхождении стоимости и рыночной цены. Бывает, например, недвижимость ничего не дает, кроме головной боли. И продать жалко, и толку — чуть. Стоимость меньше цены — страховка неразумна. А бывает наоборот — когда цена возможной потери превосходит индивидуальные возможности.

оснований судить об одноразовой игре. Средние значения продуктивно работают в других ситуациях, но не здесь.

Рассмотрим упрощенный аналог. Монета бросается один раз, и падает плашмя с вероятностью $1 - 2^{-100}$. Выигрыш при этом составляет 1 рубль. На ребро монета становится с вероятностью 2^{-100}, и тогда выигрыш равен 2^{300} рублей. Матожидание выигрыша $\sim 2^{200}$. Но, очевидно, больше рубля за участие в игре платить глупо. Потому что событие, имеющее вероятность 2^{-100} «никогда» не случается, и какая разница, сколько за него обещано. Использование матожидания оказывается просто не к месту. ▶

Примечательно, что вокруг «Петербургского парадокса» было сломано немало копий при участии великих математиков, ошибавшихся, безусловно, по уважительным причинам.

6.3. Подоплека независимости

Независимость играет в теории вероятностей фундаментальную роль. В то же время — это весьма скользкий феномен, совсем не такой, как многие думают.

Формальное определение выглядит совсем просто и невинно. События A и B называют *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{6.5}$$

Сопоставляя (6.5) с *формулой умножения вероятностей* (6.3), видим, что независимость A и B означает $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$, а также $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$. Возвращаясь к (6.2), равенство $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$ трактуем как пропорциональность площадей

$$S_B : S_\Omega = S_{A\cap B} : S_B.$$

Аналогично для $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$. Но если вдуматься, то это совсем не то, что интуитивно подразумевается под независимостью. Подсознание ориентируется на автономию событий. Каждое как бы само по себе. Погода не зависит от возраста синоптика — вот что такое независимость. А (6.5) выглядит подозрительно, потому что напоминает числовую подтасовку фактов[9].

6.3.1. Парадокс Бернштейна. *Бросают две монеты. Пусть выпадение первой монеты гербом обозначает событие A, второй — B. Наконец, C означает, что только одна монета выпала гербом. Для симметричных монет все три события попарно независимы, поскольку*

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}. \tag{6.6}$$

С независимостью A и B интуиция согласна, но не с независимостью A и C (или B и C). И у нее есть основания. Независимость (6.6) *имеет как бы «арифметический» характер, является результатом численного совпадения. Качественные отличия взаимосвязей событий выявляются при нарушении симметрии монет. Для несимметричных монет (с вероятностью выпадения герба $\neq 1/2$) свойство независимости A и B вида* (6.5) *сохраняется, а вот равенства*

$$P(AC) = P(A)P(C) \quad \text{и} \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

нарушаются.

Тем не менее именно «арифметическое» понимание (6.5) определяет независимость в теории вероятности. Содержательная независимость вписывается в (6.5) более-менее удовлетворительно там, где изначально возникает схема формирования элементарных событий ω_{ij} по принципу прямого произведения

$$p(\omega_{ij}) = p(\omega_i^1) \cdot p(\omega_j^2).$$

В применении к случайному вектору с независимыми компонентами $X = \{X_1, X_2\}$ это дает

$$\mathbf{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \mathbf{P}(X_1 < x_1)\mathbf{P}(X_2 < x_2),$$

что влечет за собой

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2),$$

и, как следствие,

$$\rho(x_1, x_2) = \rho_1(x_1)\rho_2(x_2),$$

[9] И это фундаментальное разногласие, между прочим. Определение (6.5) представляет собой жертву, позволяющую построить формальную модель. Жертва гениальная, но иногда — приходится платить.

где $F(x_1, x_2)$ и $\rho(x_1, x_2)$ — *совместные функции и плотности распределения* случайных величин X_1 и X_2. Таким образом, *если случайные величины независимы, то их совместная плотность распределения равна произведению плотностей.*

Исходное определение n независимых событий имеет вид

$$\mathrm{P}(A_1 \dots A_n) = \mathrm{P}(A_1) \dots \mathrm{P}(A_n).$$

В сценарии парадокса Бернштейна в случае (6.6) $\mathrm{P}(ABC) = 0$ при ненулевых вероятностях событий A, B, C, откуда ясно, что из *попарной* независимости A, B, C — их независимость не следует.

6.3.2. Пример [15]. *Пример независимости трех событий при отсутствии попарной независимости дает бросание двух упорядоченных костей*:

$$\begin{aligned} A &= \{(i,j): \quad j = 1, 2 \text{ или } 5\}, \\ B &= \{(i,j): \quad j = 4, 5 \text{ или } 6\}, \\ C &= \{(i,j): \quad i + j = 9\}. \end{aligned}$$

Примеры подобного сорта свидетельствуют о наличии подводных течений, но на практике независимость обычно хорошо работает, минуя аномалии.

6.4. Корреляционные ляпсусы

Напомним определения. Величина

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{E}(X - m_x)^2$$

называется *дисперсией* случайной величины X, а $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{D}(X)}$ — *среднеквадратическим уклонением* X от своего среднего значения m_x.

Важную роль во многих ситуациях играют *корреляционный момент*,

$$R_{xy} = \mathrm{E}\,[(X - m_x)(Y - m_y)],$$

и *коэффициент корреляции*,

$$r_{xy} = R_{xy}/\sigma_x\sigma_y.$$

Независимость X, Y влечет за собой $R_{xy} = 0$. Обратное неверно.

6.4.1. Пример. *Случайные величины X и $Y = X^2$, при равномерном распределении X в промежутке $[-1, 1]$, — связаны функциональной зависимостью, но их корреляция равна нулю*[10),

$$R_{xy} = \int_{-1}^{1} \frac{x(x^2 - m_y)}{2}\,dx = 0.$$

6.4.2. Корреляционные парадоксы. *Ненулевая корреляция свидетельствует о зависимости случайных величин, из чего иногда делались ошибочные выводы о наличии причинных связей. Но причинно-следственная связь и функциональная — совсем разные вещи. Например, процессы, подверженные влиянию солнечной активности, могут коррелировать друг с другом, и их функциональная связь может быть использована для прогноза, но не для объяснения.*

6.5. Проблемы в основаниях

Теорию вероятностей (**ТВ**) часто воспринимают как «учение о реальности», что имеет прискорбные последствия, потому что источники настоящей случайности вообще неясны.

Бросание пресловутой монеты являет собой чисто механическую задачу, решение которой в 99 случаях из 100 определяет сторону падения. Поэтому «герб или решетка» зависит не от монеты, а от бросающего и внешних обстоятельств. Дальнейший анализ усугубляет положение, ибо причинно-следственная цепочка уходит в пропасть, и местоположение возникновения случайности не обнаруживается.

Облегчение приносит, как иногда думают, рождение хаоса в динамических системах — но «детерминированная случайность» это просто фигура речи. Случайность поведения траекторий дифференциальных уравнений рождается в том смысле, что применение вероятностного аппарата в фазовом пространстве становится более-менее адекватным.

[10)] Поскольку линейная составляющая взаимосвязи отсутствует.

И так — каждый раз. Поэтому теория вероятностей в любом приложении остается чисто математическим инструментом, не зависящим от того, как устроена Вселенная. Разговоры о каком-нибудь случайном блуждании частицы, экономя словесный материал на разграничении модели и реальности, создают иллюзию физичности теории, что формирует и укрепляет заблуждение. Тогда как **ТВ** — это игрушка, которая обнаруживает сходство с некоторыми процессами наблюдаемого мира. И это сходство есть чудо, если хорошо присмотреться.

У **ТВ**, конечно, имеются внутренние проблемы. Например, при обобщении исходной вероятностной модели с конечным множеством Ω на счетные и континуальные варианты Ω возникают затруднения. Если в конечном случае можно без предосторожностей рассматривать множество всех подмножеств Ω, то для бесконечных множеств это уже не так, при необходимости ввести меру на Ω.

Дело в том, что сумма и пересечение событий не должны выводить за рамки дозволенного. Поэтому приходится рассматривать такую совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, что

$$A, B \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \subset \mathcal{A}, \quad A \cap B \subset \mathcal{A},$$

само $\Omega \subset \mathcal{A}$, и любое X принадлежит $\mathcal{A}$ вместе с дополнением. Такая совокупность $\mathcal{A}$ множеств называется *алгеброй* подмножеств Ω, и — σ*-алгеброй*, в более общем случае, когда в $\mathcal{A}$ входят любые суммы и пересечения *счетных совокупностей* $X_k \subset \mathcal{A}$:

$$\bigcup_k^{\infty} X_k \subset \mathcal{A}, \qquad \bigcap_k^{\infty} X_k \subset \mathcal{A}.$$

Разумеется, перечисленным требованиям удовлетворяет $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$, но на 2^{Ω} невозможно ввести меру, как показывают *парадоксы Банаха* и *Хаусдорфа*. Поэтому в **ТВ** рассматриваются те $\mathcal{A}$, на которых существует мера.

6.6. Сходимость случайных величин

В **ТВ** популярны в основном три разновидности сходимости.

(P) *Последовательность случайных величин X_n сходится к с. в. X* ***по вероятности***, $X_n \xrightarrow{P} X$, *если для любого $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

(с. к.) *Последовательность случайных величин X_n сходится к с. в. X* ***в среднеквадратическом***, $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, *если*

$$\mathbf{E}\,(X_n - X)^2 \to 0.$$

(п. н.) *Последовательность с. в. X_n сходится к с. в. X* ***почти наверное*** (*синоним*: *«с вероятностью* 1*»*), $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, *если*[11]

$$\mathbf{P}\{|X_k - X| < \varepsilon,\ k \geqslant n\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Разобраться во взаимоотношениях введенных понятий помогают конкретные примеры. Сходимость по вероятности из перечисленных разновидностей самая слабая. Импликация

$$«\xrightarrow{\text{п.н}}» \Rightarrow «\xrightarrow{P}»$$

очевидна, а из *неравенства Чебышева* следует $«\xrightarrow{\text{с.к.}}» \Rightarrow «\xrightarrow{P}»$. Обратное в обоих случаях неверно.

6.6.1. Пример. *Последовательность независимых с. в. X_n при условии*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n\} = \frac{1}{n}$$

сходится к нулю по вероятности[12]***, но не сходится ни в среднем, ни почти наверное.***

◀ Действительно, $\mathbf{E}\,X_n^2 = n \not\to 0$, а расходимость почти наверное следует из *леммы Бореля—Кантелли*, поскольку

$$\sum^{\infty} \mathbf{P}\{|X_k| > \varepsilon\} = \sum^{\infty} \frac{1}{k} = \infty. \quad ▶$$

Стоящие за кадром общие причины достаточно очевидны. Если сходимость по вероятности означает стремление к нулю меры событий $\{|X_n| > \varepsilon\}$, то для «п. н.»-сходимости требуется достаточно быстрое стремление к нулю этой меры. Понятно, что это разные ситуации.

Для «с. к.»-сходимости само по себе стремление к нулю меры событий $\{|X_n| > \varepsilon\}$ вообще недостаточно, поскольку здесь вступает в игру другой фактор:

---

[11] Поскольку с. в. X_n есть на самом деле функция $X_n(\omega)$, можно сказать так: $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, если $X_n(\omega)$ сходится к $X(\omega)$ в обычном смысле почти для всех ω, за исключением ω-множества нулевой вероятности (меры).

[12] Поскольку $\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \dfrac{1}{n} \to 0$ при малых ε.

значения X_n на «плохих траекториях». Поэтому, кстати, «с. к.»-сходимость не следует даже из «п. н.»-сходимости.

6.6.2. Пример.

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n\} = \frac{1}{n^2}.$$

Для «п. н.»-сходимости стремление к нулю $\mathbf{P}\{|X_n| > \varepsilon\}$ *достаточно быстрое*[13], *но* $\mathbf{E}\,X_n^2 = 1 \not\to 0$.

6.6.3. Пример. $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$ *в случае*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = 1\} = \frac{1}{n},$$

но X_n *не сходится к нулю почти наверное.*

Итак, $\left\{\begin{array}{|c|}\hline \xrightarrow{\text{п.н.}} \\ \hline \xrightarrow{\text{с.к.}} \\ \hline\end{array}\right\} \Rightarrow$ «$\xrightarrow{P}$». Других импликаций нет.

Есть еще одна важная разновидность вероятностной сходимости, которая слабее предыдущих.

6.6.4. Определение. *Последовательность случайных величин* X_n *сходится к с. в.* X ***по распределению***, $X_n \xrightarrow{D} X$, *если последовательность соответствующих функций распределения* $F_n(x)$ *слабо сходится к функции распределения* $F(x)$.

Слабая сходимость $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$ означает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dF_n(x) \to \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dF(x),$$

т. е.

$$\mathbf{E}\{\phi(X_n)\} \to \mathbf{E}\{\phi(X)\} \tag{6.7}$$

для любой *непрерывной и ограниченной* функции $\phi(x)$. Это равносильно *поточечной сходимости* $F_n(x) \to F(x)$ *в точках непрерывности* $F(x)$.

Импликация «$\xrightarrow{P}$» $\Rightarrow$ «$\xrightarrow{D}$» очевидна. Обратное неверно.

---

[13] $\sum\limits^{\infty} \mathbf{P}\{|X_k| > \varepsilon\} = \sum\limits^{\infty} 1/k^2 < \infty$, что для обоснования «п. н.»-сходимости позволяет задействовать лемму Бореля—Кантелли.

6.6.5. Пример. *Пусть речь идет о бросании симметричной монеты, и при четном n с. в. $X_n = 1$, если выпадает герб, и $X_n = 0$ в противном случае, а при нечетном n — $X_n = 0$, если выпадает герб, и $X_n = 1$ в противном случае. Сходимость по распределению есть, по вероятности — нет*[14]*.*

6.6.6. Теорема. *Сходимость по распределению*

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

равносильна равномерной (на любом конечном промежутке) сходимости характеристических функций.

Сюжеты вероятностной сходимости часто сопровождает немаловажный вопрос о сходимости математических ожиданий.

6.6.7. Пример. *Случайная величина X_n, определяемая соотношениями*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n^2\} = \frac{1}{n},$$

сходится к нулю по вероятности, $X_n \xrightarrow{P} 0$, но $\mathbf{E}\{X_n\} \to \infty$.

Так часто бывает в играх, в том числе — биржевых. Ожидаемый выигрыш — астрономический, на деле — гарантированный проигрыш.

«Неприятность» 6.6.7 подчеркивает принципиальную роль утверждений, в которых к вероятностной сходимости можно добавить сходимость матожиданий. Некоторые полезные утверждения подобного сорта опираются на понятие *равномерной интегрируемой*последовательности X_n, каковая определяется условием

$$\sup_n \int\limits_{|x|>M} |x| dF_n(x) \to 0 \quad \textit{при} \quad M \to \infty,$$

где $F_n(x)$ — функция распределения X_n.

В условиях равномерной интегрируемости X_n всегда:

---

[14] Но если $X_n \xrightarrow{D} 0$, то $X_n \xrightarrow{P} 0$.

(i) $\sup\limits_n \mathbf{E}\{|X_n|\} < \infty$.

(ii) *Из* $X_n \xrightarrow{D} X$ *следует существование* $\mathbf{E}\{X\}$ *и*

$$\mathbf{E}\{X_n\} \to \mathbf{E}\{X\}.$$

Без равномерной интегрируемости ситуация хуже.

6.6.8. Пример. *Пусть* X *имеет распределение Коши, а*

$$X_n = \begin{cases} X, & \text{если } |X| \leqslant n; \\ 0, & \text{если } |X| > n. \end{cases}$$

Тогда

$$X_n \xrightarrow{D} X,$$

все матожидания $\mathbf{E}\{X_n\}$ *существуют, но*

$$\mathbf{E}\{X\} = \infty.$$

Если же

$$X_n = \frac{X}{n} + Z,$$

где $\mathbf{E}\{Z\} < \infty$, *— получается другая «неприятность»:*

$$X_n \xrightarrow{D} Z, \qquad \mathbf{E}\{Z\} < \infty,$$

но ни одно $\mathbf{E}\{X_n\}$ *не существует.*

Глава 7

Алгоритмическая неразрешимость

Парадокс. *Приговор гласил: «Казнить в течение недели. День казни должен быть неожиданным». Заключенный рассудил так. В последний день недели казнить не могут — будет ожидаемо. Но тогда предпоследний день становится последним из возможных, и его надо исключить по той же причине. И так вплоть до понедельника. Поэтому — не казнят. Умение рассуждать успокоило беднягу.*

В пятницу ***неожиданно*** *пришли — и казнили.*

Глава представляет собой дайджест той части шестого тома [3], где излагаются результаты о «неразрешимостях» и о существовании недоказуемых истин. И где что ни факт — то парадокс фундаментального калибра, в смысле противоречия бытовых ожиданий и космических веяний. В мировоззренческом отношении это наиболее капитальная дисгармония философского толка, на которой произрастает вся наука.

7.1. Алгоритмы и вычислимость

7.1.1. Определение. *Алгоритм — это программа на любом универсальном языке программирования.*

Программой — является *текст*, определяющий работу компьютера. Правильности вычислений алгоритм не предполагает. Допускается написание программы с любыми ошибками.

7.1.2. Определение. *Целочисленную функцию $f(n)$ целочисленного аргумента называют вычислимой, если существует алгоритм, вычисляющий значения $f(n)$, но необязательно приводящий к результату. Множество вычислимых функций обозначается через $\mathbb{F}$.*

Аргумент может быть векторным, $n = \{n_1, \ldots, n_k\}$. Функцию $f(n_1, \ldots, n_k)$ называют k*-местной. Включение запятых в алфавит с последующей перекодировкой цифрами — позволяет все функции считать одноместными.*

Итак, программа — есть запись алгоритма на некотором языке в некотором алфавите $\mathbb{A}$,

$$P = a_1 a_2 \dots a_N, \quad \textit{все} \quad a_j \in \mathbb{A}. \tag{7.1}$$

Программа применяется к различным *входным словам*. Если входные и выходные данные кодируются числами, программа определяет *вычислимую функцию*. С точностью до педантизма к такому определению сводятся все подходы.

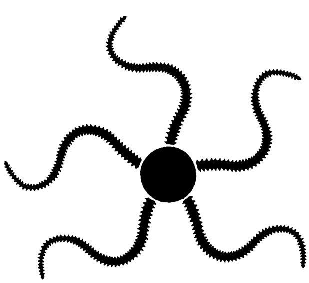
Общепринятый инструмент вычислений — пресловутая *машина Тьюринга* [3, т. 6, раздел 1.8], знакомство с которой вовсе необязательно, чтобы понимать алгоритмическую проблематику. Поверхностное представление желательно, но это уж как во всем.

Запись программы вычислений в виде (7.1) позволяет *все вычислимые функции перенумеровать*,

$$f_1(n), \dots, f_k(n), \dots . \tag{7.2}$$

Сначала перечисляются все программы из одной буквы, потом из двух, потом из трех и так далее[1].

Неопределенность некоторых вычислимых функций на некоторых входах неизбежна, и никакие конструктивные меры не могут предотвратить зацикливание соответствующих программ.



7.1.3. Теорема. *Любая попытка уточнить понятие вычислимой функции так, чтобы каждая $f(n)$ была определена при любом n, а множество всех $f(n)$ оставалось счетно, — обречена на провал.*

◄ Допустим противное, и с помощью нумерации (7.2) определим функцию

$$g(n) = f_n(n) + 1.$$

[1] Таким образом, вычислимая функция — это множество эквивалентных алгоритмов, дающих на любом входе n один и тот же результат — определенный или неопределенный. В нумерации (7.2) каждая функция имеет бесконечное число своих представителей (номеров).

Она не вычислима, так как при $n = 1$ отличается от f_1, при $n = 2$ — от f_2, и так далее. С другой стороны, она вычислима в любом разумном смысле, поскольку к вычисляемому значению $f_n(n)$ всегда можно прибавить 1. ►

Это стандартный «диагональный трюк». В популярной литературе существование $g(n) = f_n(n) + 1$ иногда трактуется как парадокс, что порождает заблуждения. Функция $g(n)$ не существует — существует в предположении «противного».

7.2. Перечислимость и разрешимость

Одна из естественных задач вычислительного характера — перечисление элементов множества, каковое считается *перечислимым*, если существует эффективная процедура (алгоритм) порождения его элементов. Элементы перечислимого множества эффективно нумеруются — в порядке появления.

Множество называется *разрешимым*, если существует эффективная процедура для выяснения принадлежности любого n этому множеству. Говорят также, что разрешимое множество *распознаваемо*.

В более формализованном виде определения выглядят так.

7.2.1. Определение. *Множество X перечислимо, если оно есть область значений либо область определения вычислимой функции.*

7.2.2. Определение. *Множество X разрешимо, если его характеристическая функция,*

$$\theta_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

вычислима.

7.2.3. Теорема Поста. *Для разрешимости X необходимо и достаточно, чтобы X и его дополнение $\overline{X}$ были перечислимы.*

◄ *Необходимость.* Если программа P определяет, принадлежит n множеству X или нет, то ее последовательная работа на $n = 0, 1, 2, \ldots$ разбивает натуральный ряд на два списка X и $\overline{X}$.

Достаточность. Если P перечисляет X, а Q — дополнение $\overline{X}$, то попеременная работа программ P и Q рано или поздно любое n внесет в один из списков X или $\overline{X}$, что дает разрешающий алгоритм. ▶

7.2.4. Теорема. *Существует перечислимое, но неразрешимое множество положительных целых чисел.*

◀ Пусть $S_1, S_2, \ldots$ — эффективное перечисление всех перечислимых множеств[2]. Заметим, если бы все S_n были разрешимы, то и все дополнения $\overline{S}_n$ входили бы в перечисление $S_1, S_2, \ldots$ (теорема 7.2.3).

Образуем множество D из тех номеров n, которые принадлежат S_n. Таким образом,

$$n \in D \cap S_n \quad \Leftrightarrow \quad n \in D \cup S_n,$$

откуда следует невозможность[3] $D \cap S_n = \varnothing$ и в то же время $D \cup S_n = \mathbb{N}$. Это означает, что D не совпадает ни с одним $\overline{S}_n$, т. е. не перечислимо, а значит (теорема 7.2.3) и неразрешимо. ▶

Теорема 7.2.4 — краеугольный результат теории алгоритмов, от которого не так далеко до знаменитых *теорем Гёделя*.

Отметим, наконец, два принципиальных, хотя и очень простых по доказательству, утверждения.

7.2.5. *Образ и прообраз перечислимого множества при вычислимом преобразовании — перечислимы.*

7.2.6. *Для вычислимости $f(x)$ необходима и достаточна перечислимость графика, т. е. множества пар $\{x, f(x)\}$.*

Аналогом разрешимого множества является понятие *эффективно вычислимой функции* $f(n)$, которая, по определению, вычислима и определена при любом n. В теории рекурсивных функций — это так называемые *общерекурсивные функции*.

[2] Существование перечисления перечислимых множеств следует из наличия перечисления (7.2) вычислимых функций, области значений которых и являются множествами $S_1, S_2, \ldots$.

[3] Непустота D при любой организации перечисления $\{S_n\}$ следует хотя бы из того, что $\{S_q = \mathbb{N}\}$ при каком-то q.

7.2.7. Теорема. *Множество эффективно вычислимых функций неперечислимо (не может быть эффективно пронумеровано).*

◀ В данном случае работает та же конструкция, что и в доказательстве теоремы 7.1.3. Если существует нумерация f_n, то функция $g(n) = f_n(n) + 1$ заведомо эффективно вычислима, но не присутствует в списке $\{f_n\}$. ▶

Понятно, что рассматриваемые факты неразрешимости крутятся вокруг одной и той же идеи. Но глубина и простота этой идеи такова, что каждый маленький поворот дает новое освещение. Причем без центрального стержня все эти «повороты» рассыпаются в рой полумистических сентенций, которые, имея общую природу, светятся единой загадкой.

7.3. Диофантовы множества

В 1970 году была отрицательно решена *десятая проблема Гильберта* о существовании универсального алгоритма для выяснения разрешимости диофантовых уравнений.

Пусть $p(z_1, \dots, z_n)$ — полином с целыми коэффициентами типа $p(z_1, z_2) = z_1^5 - 4z_1z_2^3 + 32$. *Диофантовы уравнения*

$$p(z_1, \dots, z_n) = 0 \tag{7.3}$$

подразумевают решение в целых числах.

Часть переменных в (7.3) выделим в качестве параметров, и перепишем уравнение в виде $p(a, x) = 0$, т. е.

$$p(a, x_1, \dots, x_m) = 0, \tag{7.4}$$

где параметр также может быть векторным, $a = \{a_1, \dots, a_k\}$, причем все a_i и x_j принадлежат натуральному ряду

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}.$$

7.3.1. Определение. *Множество A положительных векторов $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ называется диофантовым, если при любом $a \in A$ и*

только при $a \in A$ уравнение (7.4) разрешимо в целых положительных $x_1, \dots, x_m$.

Требование положительности переменных, вообще говоря, не принципиально и связано с техническими причинами. Отрицательные коэффициенты полинома $p(a, x)$ при этом не исключены, например,

$$p(a, x) = x^2 - ax - 1, \qquad p(a, x) = x_1^2 - x_1x_2 - a_1x_2 + a_2x_1x_2^7,$$

т. е. минусы берет на себя запись полинома.

В тех случаях, когда, имея уравнение $p(a, x) = 0$, неразрешимое в целых положительных числах, необходимо указать уравнение, неразрешимое в

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\},$$

выручает известная *теорема Лагранжа*: *каждое целое положительное число является суммой четырех квадратов.* Поэтому замена $p(a, x) = 0$ на

$$p(a, 1 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = 0$$

дает «то что надо». В случае $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ теорема Лагранжа применяется к каждому x_j отдельно.

С виду определение 7.3.1 устанавливает жесткие ограничения, и кажется маловероятным, что диофантовыми будут сколько-нибудь нетривиальные множества. Скажем, множество целых чисел π_n, запись которых совпадает с первыми n разрядами в разложении числа π. Не говоря о «загадочном» множестве простых чисел. *Матиясевич*, поставивший в решении проблемы последнюю точку, вполне мог бы стать миллионером, предлагая до публикации своих результатов вопрос на пари: «диофантово ли множество простых чисел?». Любой, кто был в теме, ответил бы: «нет». Оказалось же, что

7.3.2. Теорема. *Диофантовость множества равносильна перечислимости.* **(!)**

Это был шок. Да еще небольшая переформулировка усиливала эффект. Переформулировка на основе очень простого, но тоже неожиданного результата.

7.3.3. Лемма. *Множество $A \subset \mathbb{N}$ диофантово в томм случае, когда оно является множеством положительных значений некоторого полинома* $P(x_1, \ldots, x_k)$.

Таким образом, существует полином, множество положительных значений которого в точности совпадает с множеством простых чисел. Более того, его можно конкретно указать.

7.3.4. Полином, генерирующий все простые числа.

Множество простых чисел порождают положительные значения следующего полинома[4] от 26 переменных от a до z,

$$
\begin{aligned}
(k+2)\{1 &- [n+l+v-y]^2 - \\
&- [wz+h+j-q]^2 - \\
&- [ai+k+1-l-i]^2 - \\
&- [2n+p+q+z-e]^2 - \\
&- [(a^2-1)l^2+1-m^2]^2 - \\
&- [(a^2-1)y^2+1-x^2]^2 - \\
&- [(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2 - \\
&- [e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2 - \\
&- [16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2 - \\
&- [z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2 - \\
&- [16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2]^2 - \\
&- [q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2 - \\
&- [((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2]^2 - \\
&- [p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m]^2\}.
\end{aligned}
$$

Если каждую квадратную скобку приравнять нулю, — получится система из 14 полиномиальных уравнений. Извлекая из ее положительных решений $\{a, b, \ldots, z\}$ значения k, получаем исчерпывающий список простых чисел $\nu = k+2$, — но в крайне запутанном порядке.

Определенный интерес представляет вопрос о том, насколько сложны полиномы, описывающие нетривиальные множества. Тут

---

[4] *Jones J. P., Sato D., Wada H., Wiens D.* Diophantine representation of the set of prime numbers // Amer. Mathem. Monthly. 1976. **83**(6). 449–464.

можно было бы ожидать астрономических размерностей, но ответ в определенной степени удивителен. Каждый полином (7.4) характеризуется степенью n и числом m переменных x. Для любого диофантова множества A можно указать полином (7.4) с $n \leqslant 4$ (но, возможно, большим m) либо $m \leqslant 9$ (но, может быть, большим n). Чисел n и m порядка двух-трех десятков, как правило, достаточно для самых сложных случаев. Такого порядка n и m достаточно и для записи *универсального полинома* (аналог универсальной машины Тьюринга), генерирующего любое диофантово множество по его номеру.

Если $S_1, S_2, \dots$ — эффективное перечисление всех перечислимых множеств, то существует *универсальный полином* $U(n, s, x_1, \dots, x_k)$, перечисляющий все S_n,

$$s \in S_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, (x_1, \dots, x_k) : U(n, s, x_1, \dots, x_k) = 0,$$

причем $U(n, s, x)$ строится конструктивно, поскольку все звенья за кадром конкретно определены.

В эквивалентном варианте: *существует полином* $\widehat{U}(n, x_1, \dots, x_k)$, *множество положительных значений которого при фиксированном* n *совпадает с* S_n,

$$s \in S_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, (x_1, \dots, x_k) : s = \widehat{U}(n, x_1, \dots, x_k) \wedge s > 0.$$

При этом имеет место удивительный факт. *Каков бы ни был полином* $P(z_1, \dots, z_N)$ (*любой размерности*), *существует полином* $\widehat{U}(x_1, \dots, x_k)$ *фиксированной размерности* k, *множество положительных значений которого в точности совпадает с множеством положительных значений полинома* $P(z_1, \dots, z_N)$.

На фоне открывающихся перспектив 10-*я проблема Гильберта* как-то отходит на второй план. Ее отрицательное решение дает простой перевод на другой язык факта существования перечислимого, но неразрешимого множества. Последнее означает существование такого полинома $P(x_1, \dots, x_k)$, что разрешимость уравнения

$$P(x_1, \dots, x_k) - y = 0 \tag{7.5}$$

по $x_1, \dots, x_k$ при любом положительном y, — алгоритмически непроверяема.

О массовых алгоритмах. В данном случае принято говорить об отсутствии единого алгоритма для распознавания неразрешимых уравнений. При этом, как правило, оговаривается, что в каждом конкретном случае — алгоритм может существовать, из чего вроде бы следует оптимистический вывод: дескать, единообразно нельзя, но специфически — можно.

«Специфически» в самом деле можно, но это выглядит совсем не так, как хотелось бы. Правильный ответ в любой задаче распознавания дает один из двух алгоритмов: первый, независимо от решаемой задачи, все время говорит «да», второй — «нет». И выбраться из этой тривиальности не так просто. Как оставить в поле зрения алгоритмы «осмысленно решающие задачу», а не угадывающие наобум? Понятно, что такие алгоритмы должны правильно работать не на одной задаче, а на разных однотипных. Здесь и возникают оговорки насчет «единых» алгоритмов, называемых еще *массовыми*, что приходится делать в данном случае, если говорить о разрешимости уравнений $Q(x_1, \dots, x_k) = 0$. Если же говорить о задаче (7.5), то здесь «единообразие» заменяется оговоркой «для любого y». Иными словами, отрицательное решение десятой проблемы Гильберта получилось сильнее, чем можно было бы ожидать. Не существует единого алгоритма даже для однопараметрического семейства полиномов (7.5).

Что касается связи с *вычислимыми функциями* $y = f(x)$, то *это функции, график которых* (*множество*)

$$G = \{x_1, \dots, x_n,\ y = f(x_1, \dots, x_n)\},$$

диофантов.

Таким образом, диофантовы уравнения оказываются еще одним вариантом (языком) изучения вычислимости. В каком-то смысле — эквивалентным, в каком-то — более эффективным, в каком-то — менее. Большинство исследований в рассматриваемой области традиционно опирается на машины Тьюринга или на рекурсивные функции. В том и другом случае процесс вычислений — «не дан в ощущениях». Здесь же вычисляются значения обыкновенного полинома, который можно «потрогать». Для некоторых задач это может быть существенно. По крайней мере, к знаменитым *теоремам Гёделя* обеспечивается весьма наглядный путь (раздел 7.4). В любом случае стоит обратить внимание, что «целочисленные» полиномы и диофантовы множества стали полноправными участниками событий, разворачивающихся вокруг вычислимости.

7.4. Теоремы Гёделя

Доказательство — это конечная цепочка аксиоматически допустимых преобразований, соединяющая предположения с выводами. В силу конечности все доказательства могут быть эффективно пересчитаны. Доказуемые теоремы — это те пары «предположения – выводы», которые могут быть соединены правомерными цепочками. Поэтому множество доказуемых теорем перечислимо, тогда как — хотелось бы сказать — совокупность истинных теорем неразрешима.

Но тут есть определенное затруднение с понятием истинности, потому что в некоторых случаях о правильности утверждения может судить лишь Всевидящее Око — см. далее. *Гёдель* выходит из положения следующим образом.

7.4.1. Первая теорема Гёделя о неполноте. *Какова бы ни была непротиворечивая совокупность аксиом — в арифметике существует такое утверждение A, что ни A, ни его отрицание $(\neg A)$ — не доказуемы.*

Заметим, из двух противоположных формул A и «не A», что обозначают как $\neg A$, — одна ложная, другая истинная. Какая неизвестно, но данная формулировка такова, что из нее вытекает невозможность доказать некое истинное утверждение.

◄ Факт 7.4.1 вытекает из теоремы 7.4.3. ►

Вот еще одно *доказательство.* ◄ Пусть $\{A_n(x)\}$ перечисление всех формул в непротиворечивой теории T с одной свободной переменной x, а $B(n)$ высказывание (формула) о *недоказуемости* $A_n(n)$. Причем $B(n)$ может быть как истинным, так и ложным.

Поскольку мы хотим оставаться внутри T, то $B(n)$ формула из T, и с неизбежностью $B(n) = A_r(n)$ при некотором r. Рассмотрим высказывание

$$B(r) = A_r(r). \tag{7.6}$$

Если $B(r)$ доказуемо, то $A_r(r)$ вместе с $B(r)$, в силу (7.6), — недоказуемо. Противоречие. Если же отрицание $\neg B(r)$ доказуемо, то $A_r(r)$, вместе с $B(r)$, доказуемо. Снова противоречие. Остается предположить либо противоречивость аксиоматики, либо недоказуемость $\neg B(r)$ и $B(r)$. ►

7.4.2. Вторая теорема Гёделя о непротиворечивости[5]. *Если непротиворечивая теория T содержит в себе арифметику, то непротиворечивость T недоказуема в T.*

Теория T называется *непротиворечивой*, если в T не могут быть доказаны две противоположные теоремы A и «не A». Такое определение позволяет избежать проблематичного понятия истины.

[5] С доказательством в полсотни страниц можно ознакомиться по приложению к [7]. Совсем короткое доказательство есть в [3, т. 6, глава 2].

Разумеется, теорема 7.4.2 не исключает возможности решения проблемы за счет привлечения дополнительных средств (аксиом), и такого сорта утверждения о непротиворечивости арифметики получены, например, *Генценом*. Но гарантировать непротиворечивость *расширенной аксиоматики* опять-таки нельзя по той же причине, и необходим следующий акт расширения. Путь ведет в «никуда», и в этом смысле *проблема непротиворечивости* не имеет абсолютного решения.

Формулировки теорем 7.4.1, 7.4.2 нередко сопровождаются оговорками и реверансами, создающими вокруг густой туман, — тогда как суть абсолютно проста. Вот вариант *первой теоремы Гёделя*, в некотором роде усиливающий классический результат и свободный от какой бы то ни было размытости.

7.4.3. Теорема. *Какова бы ни была непротиворечивая теория, содержащая арифметику, существует не имеющий целых положительных корней полином*

$$Q(x_1, \dots, x_k),$$

отсутствие у которого таких корней недоказуемо.

◄ *Доказательство.* Пусть алгоритм $\mathscr{A}_1$ перечисляет разрешимые уравнения $P(x_1, \dots, x_k) = 0$. Неперечисленными остаются утверждения

$$\forall x_1, \dots, x_k : P(x_1, \dots, x_k) \neq 0. \tag{7.7}$$

Если допустить, что при некоторой непротиворечивой системе аксиом все факты вида (7.7) доказуемы, это будет означать существование алгоритма $\mathscr{A}_2$, перечисляющего теоремы (7.7), т. е. перечисляющего дополнение к множеству $\mathbb{P}$ полиномов, перечисляемых алгоритмом $\mathscr{A}_1$. Отсюда по теореме 7.2.3 будет следовать разрешимость множества $\mathbb{P}$, что вступает в противоречие с отрицательным решением *десятой проблемы Гильберта*. ►

Следующий пункт усиливает результат 7.4.3.

7.4.4. Теорема. *Существует конкретный — который можно указать — полином $P(x) = P(x_1, \dots, x_k)$, такой что высказывание:*

$$\text{«уравнение} \quad P(x) - y = 0 \quad \text{неразрешимо по } x \text{ при некоторых } y\text{»} \tag{7.8}$$

истинно, но недоказуемо ни в какой непротиворечивой системе аксиом, включающей примитивную арифметику.

Примитивной арифметикой L_0 называют систему, опирающуюся на *диофантов язык* $L_0 = \{+, \times, =, \exists\}$, который допускает для конструирования *высказываний* четыре операции: *сложение*, *умножение*, *равенство и декларацию существования*. Отрицание, импликация, квантор общности, — исключены. И, главное, в L_0 исключена *математическая индукция* — острие *арифметики Пеано*, каковую обычно имеют в виду, когда говорят просто об арифметике. В L_0 ничего нельзя доказать, можно только проверить разрешимость полиномиального уравнения (перебором). Иначе говоря, все верные утверждения $\exists\, x : P(x) = 0$, и только они, в L_0 доказываются. В этом смысле примитивная арифметика непротиворечива.

С помощью L_0 легко выражаются многие функции и отношения, которые могут быть включены в ассортимент языка L_0. В результате L_0 оказывается эквивалентен языку

$$L' = \{+, \times, =, \neq, >, \geqslant, |, \vee, \wedge, \exists\},$$

куда может быть включена еще масса других функций. Но в этом расширении инструментария есть трудный шаг — включение ограниченного квантора общности $\forall_{\leqslant}$, — который необходимо сделать, чтобы пробить тоннель к перечислимым множествам. И как только $\forall_{\leqslant}$ вносится в реестр разрешенных средств, между диофантовыми уравнениями и перечислимыми множествами устанавливается прямая связь. *Диофантовость множества оказывается равносильной его перечислимости.*

7.5. Неформализуемость истины

Будем, для определенности, говорить пока о двух типах формул в арифметике[6]:

$$\exists\, x : P(x) = 0 \quad \text{и} \quad \forall\, x : P(x) \neq 0, \tag{7.9}$$

где $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

[6] Многие математические проблемы не описываются на языке (7.9), ра́вно как и вообще на любом алгоритмическом языке. Примером могут служить некоторые задачи, связанные с *эффективной конечностью* или *бесконечностью*. Для уравнения $P(x) = 0$ невозможно в общем случае (по *теореме Райса*, п. 7.8.2) указать алгоритм, который бы отвечал на вопрос, конечно или бесконечно множество решений. И все нерешенные пока проблемы, где утверждается конечность или бесконечность множества элементов, удовлетворяющих некоторым свойствам, — подпадают под подозрение. Такова, например, *проблема бесконечности пар простых чисел-близнецов*.

Понятно, что в арифметике L_0, если формула $\forall\, x : P(x) \neq 0$ правильна, — то непроверяема в принципе, а $\exists\, x : P(x) = 0$ можно проверить, но только в случае, если $P(x) = 0$ имеет решение[7].

Как в этой ситуации на множестве уравнений $P(x) = 0$ ввести понятие *истины*? При наличии единственного надежного инструмента (перебора) возможность одна: если находится корень, то $\exists\, x : P(x) = 0$ *истинно*, $\forall\, x : P(x) \neq 0$ — *ложно. Истинные* утверждения вида $\forall\, x : P(x) \neq 0$ — «истинные» с точки зрения *Всевидящего Ока* — остаются вне закона.

В *арифметике Пеано* Z есть дополнительные, хотя и менее надежные инструменты: *математическая индукция и правила логического вывода*, с помощью которых часть формул $\forall\, x : P(x) \neq 0$ получают доказательства и могут быть помечены как истинные. Но эта истина все же «второго сорта», потому что *непротиворечивость* средств доказательства принципиально не имеет обоснования. И потому истинность оказывается привязанной к непротиворечивости аксиоматики, что завязывает проблематику в порочный круг.

Как, к слову сказать, происходит формирование системы аксиом? Отталкиваясь от любой стартовой совокупности, можно утверждать существование недоказуемой истины вида

$$\forall\, x > 0 : P(x) \neq 0. \tag{7.10}$$

Но конкретно указать $P(x)$ принципиально нельзя, иначе возникает противоречие с недоказуемостью (7.10). Поэтому у нас могут быть лишь подозрения об истинности утверждений типа (7.10). Присовокупляя их к аксиомам, мы получаем «подозрительную» систему, сидя внутри которой, ничего не можем сказать об истинности фундамента. Разумеется, если аксиомы действительно истинны. Если же в основании пороховая бочка, — остается ждать, когда «заискрит».

---

[7] Тогда x гарантированно находится перебором.

7.6. Неаксиоматизируемость арифметики

Для простоты речи в случае неразрешимости диофантова уравнения

$$P(x) = 0, \qquad x = \{x_1, \dots, x_n\}$$

говорят о *неразрешимости полинома* $P(x)$.

Пониманию рассматриваемой проблематики в значительной мере способствует «переформулировка» теоремы 7.4.3.

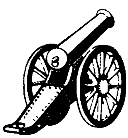
7.6.1. Теорема. *Множество $\mathcal{P}$ неразрешимых полиномов $P(x)$ — неперечислимо, тем более, неразрешимо.*

◄ В предположении противного и при учете перечислимости разрешимых полиномов[8], множество $\mathcal{P}$ оказалось бы разрешимо, что гарантировало бы существование распознающего алгоритма, вразрез с отрицательным решением *десятой проблемы Гильберта.* ►

При таком изложении всю сложность обоснования, разумеется, принимает на себя доказательство эквивалентности понятий диофантова и перечислимого множества. Но сама по себе теорема 7.6.1 выглядит экспонатом из несколько иного окружения, и будь она доказана независимо — *теоремы Гёделя* (рáвно как и решение *десятой проблемы Гильберта*) вытекали бы из нее совсем просто. Не говоря о дополнительной прозрачности результатов. Например, из сказанного в предыдущем разделе может возникнуть впечатление о неком несоответствии. С одной стороны, утверждается существование *неразрешимых полиномов*, с другой, — такие полиномы (7.10) можно добавить в аксиоматику.

Выход из противоречия дает как раз *неперечислимость* множества $\mathcal{P}$. Включение в аксиоматику любого перечислимого (даже бесконечного) подмножества $\widetilde{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}$ — оставляет непустым множество $\mathcal{P} \setminus \widetilde{\mathcal{P}}$ неразрешимых полиномов. Это указывает на справедливость следующего факта.

[8] Перечисление которых обеспечивает обыкновенный перебор.



7.6.2. Теорема. *Арифметика неаксиоматизируема, даже при включении в систему бесконечного, но конструктивно (перечислимо) задаваемого множества аксиом.*

Интересно, что вместо «$\forall x > 0 : P(x) \neq 0$» с неразрешимым полиномом в аксиоматику может быть добавлено противоположное утверждение «$\exists x > 0 : P(x) = 0$», причем *без ущерба для арифметики.* Как бы дико это ни казалось, но опровергнуть декларацию разрешимости неразрешимого полинома — невозможно[9]. Разумеется, ни о каком *конкретном* полиноме этого сказать нельзя, но такой полином существует. Поэтому — можно угадать, но нельзя гарантировать, что догадка правильна. Сказанное дает идеологически порочную систему аксиом — с точки зрения Всевидящего Ока, — которая «так же хороша, как непротиворечивая».

7.7. Универсальные функции и нумерации

Нумерацию вычислимых функций,

$$f_1(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{7.11}$$

можно сделать эффективной, что позволяет считать двухместную функцию

$$U(n, x) = f_n(x)$$

универсальной.

В обычном анализе операция поднятия индекса в аргумент не требует обоснования, являясь вопросом орфографии. В данном случае ситуация иная. Поднятие индекса означает, что функция $U(n, x)$ *вычислима* в рамках той же самой идеологии, т. е. теми же средствами, которые вычисляют сами функции $f_n(x)$.

Далее *подразумевается нумерация программ вычисления — по их длине.* От ощущения тривиальности можно избавиться, рассмотрев *диофантовы множества* как множества положительных значений полиномов. Полиномы с целыми коэффициентами легко упорядочиваются, $P_1(x), P_2(x), \dots$, но индекс «некуда» поднимать. Функция $Q(n, x) = P_n(x)$ не полином — и требуется довольно хитрая эквилибристика, чтобы ситуацию «вернуть в русло».

Способов нумерации программ — бесконечно много. Поэтому универсальных функций тоже бесконечно много.

[9] Иначе это было бы обоснованием недоказуемого «$\forall x > 0 : P(x) \neq 0$».

7.7.1. Определение. *Нумерация* (7.11) *и функция* $U(n, x)$ *называются гёделевскими, если существует всюду определенная вычислимая функция* $s(n)$, *такая что для любой двухместной функции* $f(n, x)$ *справедливо*

$$f(n, x) = U(s(n), x).$$

7.7.2. Теорема. *Упорядочение программ вычисления по их длине дает гёделевскую нумерацию.*

◀ Фиксация n в $f(n, x)$ дает программу вычислений конечной длины, которая в списке (7.11) может быть эффективно найдена. Поэтому функция $s(n)$ вычислима и всюду определена. ▶

Первый аргумент в $U(n, x)$ является номером программы в перечислении (7.11), и в этом смысле n — есть сама программа, однозначно восстанавливаемая по номеру. Поэтому универсальную функцию $U(n, x)$ можно трактовать как механизм, позволяющий отвлечься от процесса вычислений и следить только за номерами[10].

Проблема самоприменимости. *Диагональная функция* $u(n) = U(n, n)$ *заведомо не определена при всех* n *и принципиально недоопределяема, иначе вычислимая функция*

$$g(n) = u(n) + 1, \quad \text{т. е.} \quad g(n) = f_n(n) + 1,$$

не входила бы в перечисление (7.11). Другими словами, существует n, при котором значение $f_n(n)$ не определено, т. е. n-я программа не применима сама к себе.

Проблема останова. Другой поворот ситуации заключается в том, что функция $g(n) = u(n) + 1$ не может быть везде доопределена, иначе ее доопределение $g^*(n)$ не будет входить в перечисление (7.11). Поэтому *среди вычислимых — существуют функции, область*

[10] Из определения следует, например, существование вычислимой функции $\xi(m, n)$, удовлетворяющей тождеству $U[m, U(n, x)] = U[\xi(m, n), x]$. Это означает, что по номерам двух функций $g(x) = U(n, x)$ и $f(x) = U(m, x)$ сразу определяется номер $q = \xi(m, n)$ композиции $f(g(x))$, минуя хлопоты проникновения в суть дела.

определения которых не может быть расширена до $\mathbb{N}$. Одно из возможных следствий — *неразрешимость проблемы останова*. Если бы существовал алгоритм, дающий ответ на вопрос, определено ли значение $f(n)$, то $f(n)$ всегда можно было бы всюду доопределить.

7.8. Теорема Райса

Вспомогательный инструмент:

7.8.1. Теорема Клини о неподвижной точке. *Какова бы ни была вычислимая всюду определенная функция* $q(n)$, *найдется* n, *при котором*

$$U(n, x) = U(q(n), x)$$

тождественно по x, *где* $U(n, x)$ *— гёделевская универсальная функция.*

Бесконечный список алгоритмически неразрешимых проблем укладывается в одно предложение.

7.8.2. Теорема Райса. *Любое нетривиальное свойство*[11] *вычислимых функций алгоритмически неразрешимо.*

◄ Пусть $\mathbb{G}$ — непустое подмножество $\mathbb{F}$, не совпадающее с $\mathbb{F}$, и A — множество гёделевских номеров функций из $\mathbb{G}$. Если предположить разрешимость A, то всюду определенная функция

$$q(n) = \begin{cases} \bar{a}, & \text{если } n \in A, \\ a, & \text{если } n \in \bar{A}, \end{cases} \qquad (\bar{A} \ \text{ дополнение } \ A)$$

где $a \in A$, $\bar{a} \in \bar{A}$, — не будет иметь *неподвижной точки* в смысле теоремы 7.8.1.►

Таким образом, по программе $f_n(x)$ невозможно в общем случае определить, обладает или не обладает вычисляемая функция тем или иным свойством. Алгоритмически неразрешимыми оказываются, в частности, проблемы выяснения:

- *зацикливания алгоритма на любом входе* (*неразрешимость множества номеров нигде не определенной функции*)[12];

[11] Свойство нетривиально, если имеются функции, обладающие этим свойством и — не обладающие.

[12] Множество номеров хоть где-то определенных функций тоже неразрешимо, как дополнение, — но перечислимо.

- *конечности множества решений* $f(x) = 0$;
- *конечности или бесконечности множества значений* $f(x)$;
- *периодичности, ограниченности, порядка роста*;
- *содержит ли в десятичной записи конструктивно определяемое число (типа* π*) сколько угодно идущих подряд нулей.*

Невозможность алгоритмически определить в общем случае, конечно или бесконечно множество значений $f(x)$, интерпретируется как неразрешимость *проблемы эффективной конечности* или *эффективной бесконечности* перечислимого множества.

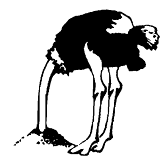
Особо стоит выделить неразрешимость проблемы существования эквивалентного полиномиального алгоритма. Не вдаваясь в подробности, заметим, что необходимые уточнения в формулировку здесь достаточно легко вносятся. Интересно, что при изучении NP-полных задач этот факт как-то упускается из виду. Ответ ищется либо в варианте $NP \neq P$, либо $NP = P$. Но есть и третья возможность: полиномиальный алгоритм для NP-полных задач существует, но факт недоказуем, см. [3, т. 10].

Глава 8

Дискретная проблематика

Любая формулировка топит нюансы.

Замах в главе, конечно, не так широк, как в заголовке. Рассматриваются некоторые вопросы, группирующиеся вокруг аксиоматических систем. В соответствующие «колодцы» приходится заглядывать, чтобы простые задачи не бросать на полпути. Еще затрагивается «P-NP»-тематика, которую не обойти, если не прятать голову в песок; а также отдельные неожиданные результаты в криптографии.



8.1. О разрешенных инструментах

Аксиомы типа $a + b = b + a$ характеризуют операции[1], а не множество $\mathbb{M}$, откуда берутся объекты a, b. Объекты вообще роли не играют. Другое дело, по мере разрастания аксиоматики возможное $\mathbb{M}$ может оказаться, с точностью до изоморфизма, единственным — как, например, в *теореме Фробениуса* [3, т. 8]:

«*Поле действительных чисел и поле комплексных чисел являются единственными конечномерными действительными ассоциативно-коммутативными алгебрами без делителей нуля*».

Или того хуже, добавление аксиом может привести вообще к ликвидации игрового поля, $\mathbb{M} = \varnothing$. А при сужении аксиоматики допустимые модели $\mathbb{M}$, наоборот, множатся, создавая весьма колоритную обстановку. Чтобы не витать в облаках абстракции, рассмотрим показательный пример.

---

[1] В данном случае «$+$».

8.1.1. HSI-проблема Тарского[2].

Рассмотрим систему аксиом A_0:

1) *коммутативность (перестановочность) сложения и умножения*,
2) *правило умножения на единицу*,
3) *произвол в расстановке скобок для суммы и произведения*,
4) *дистрибутивный закон* $a(b+c) = ab + ac$,

позволяющую доказывать тождества, записываемые с помощью сложения, умножения и расстановки скобок. Получается, кстати, замкнутая теория, в которой все истины доказуемы. **(?)** Причем объекты a, b, c не обязаны, вообще говоря, быть числами.

Тарский задался вопросом о «незначительном» расширении языка, добавив к «сложению, умножению и расстановке скобок» возведение в степень и постулировав обычные свойства:

$$\begin{aligned} 1^a &= 1, \qquad a^1 = a, \\ c^{a+b} &= c^a c^b, \\ (ab)^c &= a^c b^c, \quad (a^b)^c = a^{bc}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Будут ли в этом случае, на базе аксиоматики «A_0 *плюс* (8.1)», доказуемы все правильные тождества?

Проблема долгое время не поддавалась решению, потом нашлось верное в $\mathbb{N}$ тождество

$$\begin{aligned} &\left[(1+n)^n + (1+n+n^2)^n\right]^m \left[(1+n^3)^m + (1+n^2+n^4)^m\right]^n = \\ &\quad = \left[(1+n)^m + (1+n+n^2)^m\right]^n \left[(1+n^3)^n + (1+n^2+n^4)^n\right]^m, \end{aligned} \tag{8.2}$$

недоказуемое с помощью аксиом «A_0+(8.1)»[3].

Невозможность доказательства (8.2) с помощью «A_0+(8.1)» не выглядит удивительно на фоне *теорем Гёделя*, но в данном случае теория не содержит в себе арифметику. Идея соответствующего обоснования заключается в создании модели $\mathbb{M}$, отличной от натурального ряда $\mathbb{N}$, в которой аксиомы «A_0+(8.1)» выполняются, а тождество (8.2) ошибочно.

Наглядность проблематики «истинности и доказуемости» в рассмотренном примере обеспечивается благодаря наличию ***внешней теории***, «надтеории» — в данном случае ***арифметики Пеано***.

---

[2] HSI — аббревиатура от *High School Identities*.

[3] Детали см. в [3, т. 6, С. 67–70].

Извне видно, какие формулы верны, хотя и недоказуемы [4]. «Надтеория» как бы играет роль Всевидящего Ока. Однако надо понимать, что истинность здесь, как и везде, относительна, ибо непротиворечивость арифметики под вопросом.

Иногда говорят, что непротиворечивость арифметики обоснована *Генценом*. Строго говоря, это не так, что ясно из ***второй теоремы Гёделя***. Но, как и в приведенном выше примере, непротиворечивость можно доказывать «по пути в никуда», поднимаясь на ступеньку выше, т. е. вводя новые аксиомы для оправдания старой теории. Это и сделал *Генцен*, доказав непротиворечивость арифметики с дополнительным использованием трансфинитной индукции.

Естественно, возникает вопрос, как теория «$A_0+(8.1)$» соотносится с общей проблематикой неразрешимости главы 7. Ответ: «укладывается», — поскольку может быть полностью промоделирована на ***машине Тьюринга***. Но в океане вычислимых функций образует лишь определенный срез [5]. ***Нормальные алгоритмы Маркова*** и ***системы Поста*** [3, т. 6, стр. 71 и далее] тоже моделируются машиной Тьюринга, но они образуют не срез, а занимают весь «океан», потому что сами являются универсальными инструментами счета.

8.2. Парадокс Сколема

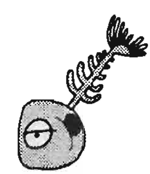
Теорема Лёвенгейма—Сколема в математической логике утверждает: «***если счетная теория имеет модель, то она имеет также счетную модель***». Попросту говоря, все результаты на континуальных моделях могут быть переделаны в теоремы на счетных моделях. Как быть тогда с теоремами *Дедекинда* и *Кантора*, связанными с существованием *континуума*? Это иллюзорное противоречие и называют *парадоксом Сколема*.

[4] В описанных обстоятельствах возникает соблазн присоединить (8.2) к «$A_0+(8.1)$», чтобы получить полный набор аксиом. Но барьер разнообразия средств уже преодолен, и «***тождества начинают размножаться быстрее, чем доказательства***».

[5] Аналогично «$A_0+(8.1)$» можно охарактеризовать по отношению к ***арифметике Пеано*** как подтеорию. Типа ***короткой арифметики Гильберта*** [3, т. 6, стр. 170].

Хотя антиномия притянута за уши и не сто́ит выеденного яйца, суматоха вокруг непропорциональная. ***Континуум***, дескать, на самом деле ***счетен***, и существует его ***взаимно однозначное соответствие*** с натуральным рядом. Но это «соответствие» не находится внутри модели теории множеств, а принадлежит ***метатеории***, — что и разрешает парадокс. Изворот придуман *Сколемом*, и разукрашенные варианты упрочились в литературе в виде стандартного объяснения. В результате мир, где ***континуум можно пересчитать, хотя бы в метатеории***, — стал выглядеть менее скучно. При этом нельзя сказать, что объяснение не годится. Если договориться о подобающей терминологии, все именно так и выглядит[6].

Но реальное положение дел тоже заслуживает внимания. Откуда берется *континуум*? Из конечного рассуждения, после чего в один шаг, от противного, делается заключение о несчетности. «Посадочная площадка» в виде континуума приготовлена заранее, и подмена происходит уже без каких-либо усилий на основе *закона исключения третьего*.



Так или иначе, ***континуум имеет счетное происхождение*** в результате ***счетного тасования*** множества рациональных чисел. Континуальность как таковая — это уже из области художественного вымысла. Поэтому в теории, опирающейся на счетную аксиоматику и конечные выводы, — реальному континууму нет места. Разве что договориться об условном названии некоторых результатов, что, собственно, и произошло.

8.3. Конечная природа счетности

Упомянутая в п. 8.2 *теорема Лёвенгейма—Сколема* хорошему настроению не способствует, потому что в некотором роде наводит тень на плетень. Континуум, вообще говоря, имеет даже не счетную природу, а конечную, как и вся математика. Как счетные

[6] Можно договориться также, что разливающий пиво автомат способен распознавать честных клиентов, не наливая тем, кто не опускает монету.

совокупности проникают в арифметику и анализ? Посредством конечных рассуждений. Но в последних присутствуют «бесконечно вертящиеся элементы» типа «и т. д.», а также счетные правила с конечным описанием. ***Функция следования*** в ***аксиоматике Пеано*** позволяет натуральный ряд продолжать сколь угодно далеко, но говорить об $\mathbb{N}$ как о состоявшемся факте — это уже утопия, с помощью которой удобно общаться, экономя на разговорах о бесконечно разворачивающихся процессах.

Когда сбывается мечта или бесконечность, результат не всегда получается ожидаемый. Выйти может что угодно, от «свершилось» до «стряслось».

8.4. Арифметика Пеано

Аксиоматика Пеано сводит арифметическую систему к алгебре с одной ***операцией счета*** σ, называемой также ***функцией следования***, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, и удовлетворяющей трем ***аксиомам***:

A1 $\sigma(m) = \sigma(n) \;\Rightarrow\; m = n$;

A2 $\forall n \in \mathbb{N} : \sigma(n) \neq 1$;

A3 Если $1 \in Q \subset \mathbb{N}$, где Q — произвольное подмножество $\mathbb{N}$, и «$n \in Q \Rightarrow \sigma(n) \in Q$», то $Q = \mathbb{N}$.

Последняя аксиома $A3$ выражает *принцип математической индукции* и часто формулируется в менее общем виде: если 1 обладает свойством $\mathcal{P}$, т. е. $\mathcal{P}(1) = 1$ и

$$\mathcal{P}(n) = 1 \quad \to \quad \mathcal{P}(\sigma(n)) = 1,$$

то $\mathcal{P}(n) = 1$ для всех n. Такую индукцию называют *ограниченной*[7].

Если говорить точнее, *аксиоматическая система Пеано* есть $A1 - A3$ плюс стандартные «логические аксиомы». В совокупности это порождает весьма нетривиальный механизм, называемый *арифметикой*, или *теорией чисел*. Един-

[7] Разница, безусловно, принципиальна. В последнем случае дело приходится иметь со счетным множеством подмножеств $\mathbb{N}$, в варианте $A3$ — с континуальным. При этом $A3$ постулирует больше, чем арифметика может «проглотить», потому что утверждений и доказательств, а значит, и подмножеств $Q \subset \mathbb{N}$, которые имеют шанс попасть в поле зрения, — счетное число. Последнее обстоятельство связано с тем, что подмножества Q конструктивно выделяются только с помощью перечислимых предикатов.

ственный инструмент доказательства общих утверждений в *арифметике Пеано* — это индукция. Вернее, инструментов много, но без индукции они не работают.

С помощью σ сложение и умножение в $\mathbb{N}$ определяются рекурсивными описаниями, а свойства устанавливаются индукцией $A3$.

Вот как вводится *сложение*, например. Возьмем любое m. Функция

$$\sigma^m(n) = m + n$$

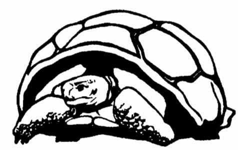
задается рекурсией:

$$\sigma^m(1) = m + 1 = \sigma(m),$$
$$\sigma^m(n+1) = m + (n+1) = \sigma^m(\sigma(n)) = \sigma(\sigma^m(n)),$$

но этого пока мало для завершения начатого дела.

Пусть N_m обозначает множество тех $n \in \mathbb{N}$, для которых функция $\sigma^m(n) = m+n$ определена. В силу принятого описания, $1 \in N_m$ и, если $\sigma^m(n)$ определена, то и $\sigma^m(n+1)$ определена. Теперь $A3$ гарантирует определенность $\sigma^m(n) = m+n$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

8.4.1. Парадокс категоричности.



Вариант аксиоматики Пеано выше был выбран бесхитростный — речь сразу шла о натуральном ряде $\mathbb{N}$. Иногда вместо $\mathbb{N}$ говорят о некотором абстрактном множестве $\mathcal{N}$, добавляя еще две аксиомы,

$$1 \in \mathcal{N} \quad \text{и} \quad n \in \mathcal{N} \Rightarrow \sigma(n) \in \mathcal{N},$$

и доказывая затем *категоричность* (*полноту*) *модели*, т. е. равенство $\mathcal{N} = \mathbb{N}$ с точностью до изоморфизма.

Параллельно известны *нестандартные модели арифметики*[8]. Контраст существования таких моделей на фоне категоричности приводит к недоразумению. Разнобой объясняется в литературе, как правило, скороговоркой насчет различия формальных и неформальных интерпретаций. В принципе, так оно и есть, но здесь имеет смысл особо подчеркнуть проблему, потому что болезнь так хорошо вплетена, что неотличима от здоровой ткани.

---

[8] Конструкция таких моделей описана в [3, т. 6].

Речь идет о двух крайностях. Об аксиоматике, как *чисто синтаксической конструкции*, смысл которой может быть придан только извне, и об аксиоматике, изначально обладающей смысловой интерпретацией. Будь возможности разнесены как черное и белое, говорить было бы не о чем. В реальности же любая аксиоматика представляет смесь ингредиентов. Разделить субстанции нелегко, и даже профессионалы то и дело попадают впросак.

Самое сложное заключается в том, что аксиоматика сама по себе даже не обладает определенной пропорцией синтаксиса и семантики. Смысл привносит человек. Количество зависит от характера, настроения, погоды, с какой ноги встал и т. п. И все это настолько глубоко интегрировано в суть вещей, что говорить об отделении языковой основы от предметной — можно лишь пренебрегая диалектикой.

8.5. Аксиоматика Цермело—Френкеля

Едва ли парадоксы теории множеств, связанные с рассмотрением «множества всех множеств»[9], производят сильное впечатление. Но для аксиоматизации теории — это был серьезный козырь. Попытки исключить возможность появления парадоксов породили различные системы, среди которых наибольшую известность получила *аксиоматика Цермело—Френкеля*, называемая обычно системой ZF или ZFC, где буква C обозначает *аксиому выбора*, которая иногда исключается из списка.

Любая теория вынуждена начинать с неопределяемых понятий. В теории множеств — это понятия «множества» и отношения $\in$ «быть элементом». К языку добавляются логические связки и кванторы, с помощью которых строятся все возможные *предикаты* на базе двух элементарных отношений: $x \in y$ и $u = v$. Ничто другое не допускается, но для удобства используются некоторые сокращения: $x \neq y$, $x \notin y$, $x \subset y$. Включение $x \subset y$, например, обозначает $\forall z : z \in x \to z \in y$. Константы в языке (в *сигнатуре*)

[9] *Парадокс Рассела*: если D — множество всех множеств, не являющихся элементами самих себя, $D = \{x : x \notin x\}$, то: «$D \in D \Leftrightarrow D \notin D$».

не присутствуют, но аксиоматически провозглашаются: существование хоть какого-то множества, $\exists\, x : x = x$, и существование *пустого множества*,

$$x = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \neg\exists\, y : y \in x.$$

Аксиомы существования во многих источниках не присутствуют в списке аксиом, что (наряду с другими нюансами) лишний раз указывает на зыбкость почвы, с которой сталкиваются аксиоматические построения. Цель обойтись минимумом предположений, и тем более обеспечить полную независимость постулатов друг от друга, оказывается недостижима. Получается взаимосвязанная «дышащая» сеть, в которой аксиомы существования, например, обеспечиваются наличием других звеньев.

В основание теории множеств, разумеется, входят логические постулаты. Сугубо «множественная» часть системы ZFC описана в [3, т. 6]. Воспроизведение не имеет особого смысла. Вот кое-что для примера.

$Z1$. *Аксиома объемности.* $\forall\, x : (x \in y \leftrightarrow x \in z) \to y = z$, т. е. множества равны, если и только если состоят из одних и тех же элементов.

$Z3$. *Аксиома отделимости.* Каковы бы ни были x и y, для любого предиката $\varphi(u, v)$ существует множество

$$z = \{t \in x : \varphi(t, y)\},$$

содержащее все $t \in x$, обладающие свойством $\varphi(\cdot, y)$.

$Z5$. *Аксиома степени.* Для любого x существует множество 2^x всех подмножеств множества x.

$Z9$. *Аксиома подстановки* (добавлена *Френкелем*). Для любого множества x и функции f, определенной на x, существует множество, состоящее из образов $z = f(y)$, $y \in x$.

8.5.1. Теорема. *Не существует множества всех множеств.*

◄ Если бы такое множество S существовало, то из *аксиомы отделимости* ($Z3$) вытекало бы существование *множества Рассела*

$$D = \{x \in S : x \notin x\},$$

что приводило бы к противоречию. ►

Обозревать нечто без всякой мотивировки довольно трудно. Здесь, однако, легко найти, чем занять, если не мозги, то руки. Определение с помощью дозволенных средств теоретико-множественных операций $\cap$, $\cup$, Δ, $\setminus$ и их свойств — на первой половине дистанции вызывает раздражение, но после наступления второго дыхания может появиться либо спортивный азарт, либо спасительное отвращение.

В любом случае полезно осознавать, что в лице ZFC-системы происходит соприкосновение с грандиозной реальностью, занимающей в виртуальном мире намного больше места, чем египетские пирамиды на Земле. На создание внешне непритязательных аксиоматических систем уходит обычно колоссальное количество ментальной энергии.

8.6. Гипотеза континуума

Высказанная *Кантором гипотеза континуума* (**ГК**) состоит в предположении, что всякое бесконечное подмножество $[0, 1]$ либо счетно, либо равномощно $[0, 1]$. Иначе говоря, в $[0, 1]$ нет подмножества, промежуточного по мощности между натуральным рядом $\mathbb{N}$ и континуумом[10].

Гёдель (1939) установил, что если система ZF непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после присоединения **ГК** и **АВ** в качестве аксиом. *Коэн* (1963) закрыл проблему.

8.6.1. Теорема. *Если теория ZF непротиворечива, то гипотеза континуума не является теоремой теории ZFC.*

8.6.2. Теорема. *Если теория ZF непротиворечива, то аксиома выбора не является теоремой теории ZF.*

[10] При опоре на аксиому выбора, в системе ZFC, **ГК** означает $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Слово «гипотеза» в комбинации **ГК**, разумеется, стало анахронизмом в свете выяснившихся обстоятельств.

В итоге: к ZF можно с равным успехом добавить как **ГК**, так и ее отрицание. Причем **ГК** в некотором роде претендует на роль утверждения, которое ни при каком расширении ZF не может стать теоремой, см. далее.

Уникальность ситуации заслуживает внимания. Как бы узаконенным получается явное «противоречие». Ничто не запрещает рассматривать множество всех подмножеств $2^{[0,1]}$ отрезка $[0, 1]$. И в этом $2^{[0,1]}$, по крайней мере с точки зрения *Всевидящего Ока*, либо есть множество, промежуточное по мощности между натуральным рядом $\mathbb{N}$ и континуумом, либо — нет. Третьего не дано, вроде бы. Однако в отсутствие инструментов конструирования и проверки бессмысленно говорить — есть или нет. Всякое взаимно однозначное соответствие либо несоответствие, лежащее в основе упорядочения по мощности, обязано инструментально подтверждаться, пусть не конструктивно, но аксиоматически доказательно. Если необходимых инструментов нет, ни фактически, ни гипотетически, то *Всевидящее Око* так же слепо, потому что отсутствуют средства постановки вопроса.

Здесь имеет смысл вернуться к арифметике целых чисел, где есть в некотором роде параллельные результаты. Теорема 7.4.3 гарантирует существование полинома $Q(x)$, у которого нет корней, но это недоказуемо — какова бы ни была заданная непротиворечивая аксиоматика. Соответственно, «$\forall\, x : Q(x) \neq 0$» можно брать аксиомой [11)], но тогда найдется другой многочлен.

Указать $Q(x)$, разумеется, нельзя. Но тут неизвестность можно сузить до значения параметра. Высказывание (7.8) в теореме 7.4.4 допустимо заменить формулой

$$\exists\, n, y \forall\, x_1, \ldots, x_k : U(n, y, x_1, \ldots, x_k) \neq 0, \tag{8.3}$$

где U конкретный универсальный полином. Таким образом, имеется совершенно определенный полином $U(z, x)$, такой что утверждение $\exists\, z \forall\, x : U(z, x) \neq 0$ принципиально недоказуемо.

[11)] Рáвно как и $\exists\, x : Q(x) = 0$, что опровергнуть все равно невозможно.

8.7. P против NP

Нерешенной математической проблемой номер один на сегодняшний день является «$\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$» [3, т. 10]. Тень неразрешимости здесь возникает в экзотической аранжировке.

Проблема упирается в феномен *полиномиального счета*. Комбинаторная задача с *длиной описания* [12] x считается полиномиальной, если она может быть решена за полиномиальное время порядка $\sim x^k$ *полиномиальным алгоритмом*, выполняющим $O(x^k)$ *элементарных операций* (при некотором $k > 0$).

8.7.1. Определение. *Совокупность задач распознавания (с ответом «да» или «нет»), которые могут быть решены некоторым полиномиальным алгоритмом, называется* ***классом* P**.

8.7.2. Определение. Класс NP *определяется как совокупность полиномиально проверяемых задач распознавания, в которых, если решением является ответ «да», то существует «слово» x полиномиальной длины и полиномиальный от x алгоритм, дающий ответ «да».*

Проблема $\mathbf{P} \stackrel{?}{=} \mathbf{NP}$ заключается в выяснении того, совпадают или не совпадают классы P и NP, и сводится, вообще говоря, к простому на вид вопросу: «*Существует ли полиномиальный алгоритм для задачи коммивояжера* [13]», — сто́ящему, между прочим, миллион долларов. Задача коммивояжера здесь может быть заменена любой другой NP-полной [14], но объяснения тут быстро нарастают, как снежный ком, и вместо простого вопроса приходится иметь дело с обширной теорией, местами весьма интересной, каковой посвящена значительная часть десятого тома [3]. Ниже упоминаются лишь некоторые задачи и вопросы, в районе

[12] Обычно подразумевается *размер входа* в битах, т. е. количество двоичных символов, необходимых для задания исходных данных.

[13] *Даны n городов и расстояния r_{ij} между ними. Требуется найти циклический маршрут минимальной длины, заходящий во все города по одному разу.* Это классический оптимизационный вариант *задачи коммивояжера*. Вариант «распознавания»: *существует ли маршрут, проходящий через все города, длина которого, $r_{i_1 i_2} + r_{i_2 i_3} + \ldots + r_{i_n i_1}$, не превосходит r?*

[14] По определению задача NP-*полна*, если к ней полиномиально сводится любая другая NP-задача. Поэтому полиномиальное решение любой NP-*полной задачи* полиномиально решает все остальные NP-*задачи*.

которых локализованы «водовороты непонимания», увлекающие в бездну тысячи исследователей.

8.7.3. *Задача* **СОСТАВНОЕ ЧИСЛО (СЧ)** *заключается в выяснении возможности факторизации, разложения на множители, целого N. Существуют ли такие $N_1 > 1$ и $N_2 > 1$, что $N = N_1 N_2$? Дополнительная задача* **ПРОСТОЕ ЧИСЛО (ПЧ)** *состоит в выяснении простоты N.*

Обе задачи принадлежат классу P, но это стало ясно лишь в результате титанических усилий. Однако даже сейчас, когда проблема решена, СЧ остается белой вороной в ряду комбинаторных задач, поскольку полиномиальна как задача распознавания, но остается труднорешаемой как задача *факторизации*. Другими словами, вопрос: «число N простое или составное?» — может быть решен за полиномиальное число шагов относительно длины описания N, т. е. относительно $\log N$. Но если N окажется составным, $N = N_1 N_2$, то нахождение N_1 и N_2 требует (пока) экспоненциального по $\log N$ счета. При этом на тяжести поиска злополучных сомножителей стоит вся современная криптография.

Особенностью задачи ПЧ оказывается непривычная разновидность *удостоверения*. Вместо обычного «того, что ищется» здесь *удостоверением* является доказательство полиномиальной длины. Собственно, до того как полиномиальность была установлена, под вопросом была даже принадлежность ПЧ классу NP, потому что не ясно было, что можно предъявить в качестве удостоверения, кроме перебора всех вариантов. Однако ПЧ $\in$ NP было установлено до того, как выяснилась полиномиальность ПЧ.

Загвоздка с определением *класса* P заключается в том, что по *теореме Райса* не всякий полиномиальный алгоритм доказуемо полиномиален. Поэтому P-задачи делятся на те, где полиномиальность доказуема, и те, где полиномиальность принципиально невозможно установить. Учет этого обстоятельства несколько преображает проблему $\mathbf{P} \overset{?}{=} \mathbf{NP}$, размывая до некоторой степени и определение *класса* NP [15].

[15] Данное выше определение *класса* NP отличается от общепринятого. Традиционно обычная машина Тьюринга M дополняется *оракулом* — *блоком угадывания*, — способным мгновенно генерировать *удостоверение* x полиномиальной длины (если таковое существует), которое затем «полиномиально проверяется» и дает ответ «да». Тандем машины M с оракулом называют *недетерминированной машиной Тьюринга*. Понятно, что такая машина решает NP-задачи за полиномиальное время, и класс NP можно определить как множество задач, полиномиально решаемых недетерминированными машинами. Никакого влияния на NP-совокупность и на понимание сути проблемы $\mathbf{P} \overset{?}{=} \mathbf{NP}$ — смена определения не оказывает.

8.7.4. Теорема [3, т. 10]. *Множество полиномиальных алгоритмов распознавания перечислимо, но неразрешимо.*

8.8. Сюрреалистические достижения

Дискретная проблематика в рамках передачи информации, кодирования и дешифровки — отмечена в последнее время выдающимися достижениями. Решены задачи, каковые по всем здравым оценкам решены быть не могли. Разве можно было надеяться на создание эффективных шифров с открытым ключом или организацию передачи данных, которая при подслушивании не дает третьей стороне никакой информации? Некоторое время назад такие результаты выглядели мистикой.

Интерактивные протоколы. Тандем машины М с оракулом в определении NP-класса являет собой пример *интерактивной системы*, правда, малоинтересной. Однако интерактивное взаимодействие дает иногда поразительные результаты. Рассматривая процесс как игру двух лиц, скажем, *Оракула* с *Вычислителем*, и устанавливая те или иные *правила игры* — иначе говоря, *регламент*, *протокол*, — можно добиваться разных целей, иногда довольно неожиданных[16]. Вот пример.

8.8.1. Пример. *Оракулу $\mathcal{O}$ известен изоморфизм φ графов G_0 и G_1. Но он посылает Вычислителю $\mathcal{V}$ граф $H = \psi(G_0)$, либо $H = \psi(G_1)$, где ψ — некий другой изоморфизм, не равный φ. $\mathcal{V}$ бросает монетку, и просит изоморфизм либо $H \sim G_0$, либо $H \sim G_1$. В первом случае $\mathcal{O}$ посылает ψ, во втором — $\varphi \cdot \psi^{-1}$. Таких партий разыгрывается N штук.*

Если φ — действительно изоморфизм, $G_0 \sim G_1$, то все проверки будут положительны. Если φ — блеф, с вероятностью 2^{-N} хотя бы

[16] В целом, совокупность задач, которые могут быть полиномиально решены с помощью интерактивного взаимодействия *Оракула* и *Вычислителя*, образует класс IP. Определенным достижением считается установление факта IP=PSPACE, где класс PSPACE это совокупность задач, решаемых с полиномиально ограниченной памятью, — комментарии в [3, т. 10].

одна проверка обнаружит «липу». Та проверка, в которой $\mathcal{V}$ попросит $H \sim G_1$, тогда как $H = \psi(G_0)$. При этом вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой выбором N независимо от размерности задачи.

Трюк выдающийся по контрасту незамысловатости устройства и уникальности эффекта. *Оракул* убедил *Вычислителя* в $G_0 \sim G_1$, так и не огласив самого изоморфизма φ. Иначе говоря, *Оракул* доказал *Вычислителю* знание изоморфизма φ, но по каналу связи не послал никакой информации, которая бы позволила «вражеской стороне» узнать что-либо о φ. Поэтому, если φ пароль, диалог можно вести даже в открытую, — что служит примером *системы с нулевым разглашением*, и представляет собой революционный шаг в криптографии.

«Нашумевший» *класс* PCP (*Probabilistically Checkable Proof System*) представляет собой особую разновидность интерактивных систем. Знаменитая PCP-*теорема*[17] устанавливает равенство

$$\mathrm{NP} = \mathrm{PCP},$$

позволяя тем самым обозревать NP-класс с другой точки зрения.

Шифры RSA[18]**.** Всякое шифрование представляет собой некое преобразование f текста x в $y = f(x)$. В *системах с открытым ключом* шифрование ведется в открытую, в том смысле что функция f всем известна. Дешифровка заключается в обратном преобразовании $x = f^{-1}(y)$. Конечно, функция f^{-1} может оказаться не по зубам врагу из-за большого объема вычислений. Но тогда и адресату будет не по силам расшифровать сообщение y. Так подсказывает здравый смысл. Контрпримером служит любая система шифрования RSA. Идея, лежащая в основе RSA, проста до гениальности.

---

[17] Дополнительная информация в [3, т. 10].

[18] Криптографические модули RSA используются в MS Windows и сотнях других программных продуктов. Компания RSA Data Security создана в 1982 году. О размахе дела свидетельствует чистый годовой доход более миллиарда долларов США.

8.8.2. Пример. *Цифровой текст x шифруется с помощью легко вычисляемой функции*

$$f(x) = x^e \pmod N, \tag{8.4}$$

где числа e и N, составляющие открытый ключ, общедоступны. При определенных требованиях к $\{e, N\}$, о которых сказано ниже, функция (8.4) обратима, но f^{-1} вычисляется уже не просто. Точнее говоря, значения f^{-1} легко определяются, если известен секрет, без которого расшифровка практически невозможна. В сказанное с трудом верится, поскольку для расшифровки сообщения $y = f(x)$ надо всего лишь решить уравнение

$$x^e = y \pmod N, \tag{8.5}$$

но тут коса на камень как раз и находит.

Существенную роль здесь играет *функция Эйлера* $\varphi(N)$, равная количеству натуральных $n < N$, взаимно простых с N. Значение $\varphi(N)$ легко вычисляется, если известно разложение N на простые множители, ибо $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ для простых p, и $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$ для взаимно простых p и q. Поэтому

$$\varphi(N) = N \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

где $p|N$ обозначает простые делители числа N.

По *теореме Эйлера*

$$x^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod N$$

для любого натурального x взаимно простого с N.

В RSA обычно полагается $N = pq$, где p и q — различные простые числа, а показатель e выбирается взаимно простым с $\varphi(N)$. *В этом случае решение* (8.5) *единственно и определяется формулой*

$$x \equiv y^d \pmod N,$$

где натуральное $d < \varphi(N)$ однозначно извлекается из условия

$$de = 1 \pmod{\varphi(N)}. \tag{8.6}$$

Вот, собственно, и все. Впечатление поначалу странное. Секрет d выглядит секретом полишинеля. Ибо что мешает разложить N на простые множители, после чего вычислить $\varphi(N)$ и решить (8.6), извлекая d? Иными словами, открытый ключ $\{e, N\}$ содержит полную информацию о секрете d. Но фокус в том и заключается. Первый же шаг вычисления d сталкивается с необходимостью разложения N на простые множители, что при современных технологиях для больших N оказывается непосильной задачей, — см. предыдущий раздел.

Разделение секрета. При наличии функциональной связи $Z = f(X, Y)$ величины X и Y дают полную информацию о Z. Возможно ли, что X и Y по отдельности не дают никакой информации о Z? Вопреки естественному ожиданию — возможно.

Пусть X, Y, Z представляют собой n-разрядные числа в десятичной системе. Тогда число (функция) Z, определяемое поразрядным сложением по модулю 10,

$$Z_k = X_k + Y_k \pmod{10}$$

обладает нужными свойствами.

Например,

$$X = 123,\ Y = 948 \quad \Rightarrow \quad Z = 061.$$

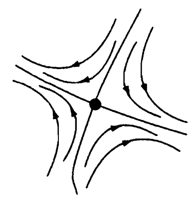
Понятно, что задание X никак не уменьшает число возможных вариантов Z.

Глава 9

Динамические системы

Привыкая к понятиям, перестаешь видеть их глубину.

9.1. Дуализм описания



Об *автономной* динамической системе говорят в двух ситуациях. Когда имеется дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x)$, описывающее движение точки в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$; и когда имеется семейство непрерывных отображений $\{U(x,t)\}$, $U(x,0) \equiv x$, обладающее *групповым свойством*:

$$U(U(x,t_1),t_2) = U(x,t_1+t_2).$$

Точки зрения «сходятся» в том смысле, что $U(x,t)$ можно рассматривать как *оператор сдвига по траекториям* $\dot{x} = f(x)$. В этом случае $U(x,t)$ обычно записывают как $U(x,t) = U_t x = x(t)$, подразумевая под $x(t)$ решение дифура $\dot{x} = f(x)$, проходящее через точку x в момент $t = 0$.

Неавтономные системы характеризуются дифурами

$$\dot{x} = f(x,t)$$

либо двупараметрическими семействами $\{U(x,t_0,t_1)\}$ [3, т. 2].

Взаимосвязь дифференциальных уравнений с операторами сдвига не такая уж однозначная. Решение *задачи Коши*

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{9.1}$$

существует всегда[1] (*теорема Пеано*), хотя в функциональных пространствах это уже не так. Что касается единственности решения (9.1), то здесь непрерывности правой части не хватает.

9.1.1. Пример. *Решением*

$$\dot{x} = 2\sqrt{x} \tag{9.2}$$

в области $x \geqslant 0$ служат функции $x(t) = (t+C)^2$ при $t \geqslant -C$. Но в данном случае есть также особое решение $x(t) \equiv 0$. Помимо этого, решениями будут функции, получаемые склеиванием $x(t) \equiv 0$ с полупараболами

$$x(t) = (t+C)^2, \quad t \geqslant -C.$$

Получается, что через любую точку оси $x = 0$ проходит бесчисленное множество различных траекторий уравнения (9.2).

Единственность в примере 9.1.1 нарушается там, где частная производная $f'_x(x,t)$ обращается в бесконечность, т. е. в тех точках, где поле $f(x,t)$ бесконечно быстро меняется по x. Именно это обстоятельство часто служит источником неприятностей, и запрет на него сразу обеспечивает единственность решения. Более общий результат (**теорема Пикара**), гарантирующий единственность, опирается на предположение о *липшицевости*[2] правой части $f(x,t)$.

Другой водораздел связан с нелокальной продолжимостью решений *задачи Коши*, поскольку *теоремы Пеано и Пикара* гарантируют только локальную разрешимость (9.1), чего для задания полноценных операторов сдвига недостаточно.

9.1.2. Пример. *Любое решение $x(t) = \operatorname{tg}(t+C)$ уравнения*

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

определено лишь на промежутке длины π по причине ухода траекторий в бесконечность.

---

[1] Разумеется, в предположении непрерывности $f(x,t)$.

[2] Функция $f(x,t)$ называется **липшицевой** по x, если существует такая константа L, что

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leqslant L\|x-y\|$$

для любых x, y, t в рассматриваемой области.

Тем не менее для рассмотрения семейства операторов сдвига $U(x,t)$ важна все же не столько продолжимость решений (9.1), сколько продолжимость траекторий, — которые продолжимы «всегда» [3, т. 11, п. 3.10], и все становится на свои места при перепараметризации времени.

В данном контексте естественно упомянуть также уравнения с частными производными, которые часто вообще не решаются[3]. Аналогом инструментов *существования* здесь служит *теорема Ковалевской* в тандеме с известным ее же *контрпримером*. Описание вместе с «кругами на воде» есть в [3, т. 11].

9.2. Устойчивость равновесия

При изучении динамических систем приходится сталкиваться с явлением *устойчивости равновесия*. Несмотря на относительную простоту феномена, беспечно расслабиться не удается.

Точки $\boldsymbol{x}^*$, в которых система перестает двигаться, т. е.

$$f(x^*,t) \equiv 0 \quad \text{или} \quad U(x^*,t) \equiv x^*, \tag{9.3}$$

называются *равновесными*. Нижнее и верхнее положение равновесия маятника, например, — первое из которых устойчиво, второе — нет. В случае неавтономной системы — (9.3) заменяется на

$$f(\boldsymbol{x}^*,t) \equiv 0 \quad \text{или} \quad U(x^*,t_0,t_1) \equiv x^*.$$

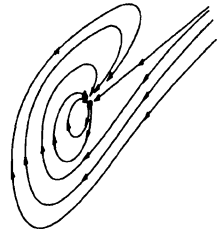
9.2.1. Определение. *Положение равновесия динамической системы*[4] *называется устойчивым по Ляпунову, если по любой его окрестности V можно указать такую его окрестность W, что любое движение, начинающееся в W, не выходит за пределы V.*

9.2.2. Определение. *Положение равновесия $\boldsymbol{x}^*$ динамической системы называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и любая траектория $\boldsymbol{x}(t)$, начинающаяся в достаточно малой окрестности $\boldsymbol{x}^*$, стремится к $\boldsymbol{x}^*$ при $t \to \infty$.*

[3] Элементарный пример *неразрешимого* ЧП-уравнения: $\nabla u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$, при условии что поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ не потенциально.

[4] Автономной или неавтономной.

Навскидку определение 9.2.2 «куста боится», как пуганая ворона. Требование устойчивости выглядит излишним[5], раз уж все траектории $x(t)$ сходятся к x^*. Но видимость коварна.



9.2.3. Пример *неустойчивого равновесия* x^*, *к которому стремятся все траектории* $x(t)$ *при* $t \to \infty$. *Изображенному здесь фазовому портрету не так трудно сопоставить формульный вариант.*

В теории устойчивости популярен **второй метод Ляпунова**, предоставляющий удобный язык описания ожидаемых и неожиданных явлений. Суть метода для системы

$$\dot{x} = f(x)$$

заключается в поиске скалярной функции $V(x)$, ведущей себя подходящим образом в окрестности равновесия.

Если, например, в окрестности $x^* = 0$ существует *положительно определенная функция*[6] $V(x)$, которая непрерывно дифференцируема и

$$f(x) \cdot \operatorname{grad} V(x) < 0 \quad \textit{при любом} \quad x \neq 0, \tag{9.4}$$

то это означает, что V на траекториях $\dot{x} = f(x)$ строго убывает, поскольку (9.4) — не что иное, как отрицательность производной функции

$$V(t) = V(x(t))$$

по времени. Поэтому любое движение $\dot{x} = f(x)$, начавшись в окрестности $V(x) < \varepsilon$, — в этой окрестности и остается, что обеспечивает устойчивость нулевого равновесия[7].

В случае неавтономной системы $\dot{x} = f(x, t)$ и функции Ляпунова $V(x)$, не зависящей явно от t, — все остается *почти* без изменений. С той лишь разницей, что теперь траектория, несмотря на $\dot{V} < 0$, может не добраться до равновесия.

[5] Для линейных систем оно действительно излишне.

[6] То есть такая, что $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ при $x \neq 0$.

[7] Имеет место также асимптотическая устойчивость, поскольку $V(t)$ строго убывает, что приводит к $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

9.2.4. Пример. *В скалярном случае*

$$\dot{x} = -xe^{-t}$$

функция Ляпунова $V(x) = x^2$ *строго убывает,*

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2x^2e^{-t} < 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0,$$

но система «быстро устает» (БУ-система), и решения

$$x(t) = ce^{e^{-t}}$$

останавливаются по дороге к равновесию, не достигая в пределе $x^* = 0$.

В скалярном случае этого можно избежать, запретив возможность

$$f(x,t) \to 0, \quad x \neq 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty,$$

но рецепт перестает работать уже на плоскости.

9.2.5. Пример. *Система (в полярных координатах)*

$$\dot{r} = -re^{-t}, \qquad \dot{\varphi} = 1$$

все время совершает оборот в секунду, но радиус-вектор r *не убывает до нуля, хотя производная* $V(r) = r^2$ *по времени строго отрицательна на любой траектории* $\{r(t), \varphi(t)\}$, *причем* $\{r(t), \varphi(t)\} \not\to 0$ *при* $t \to \infty$.

Поэтому в многомерном случае выход из положения заключается в исключении ситуации

$$\nabla V(x) \cdot f(x,t) \to 0, \quad x \neq 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

Об устойчивости равновесия бывает удобно судить по линейному приближению. А именно, если $F(x^*) = 0$ и матрица $F'(x^*)$ *гурвицева*[8], то равновесие x^* системы

$$\dot{x} = F(x) \tag{9.5}$$

асимптотически устойчиво.

В этом направлении полвека назад возникла *гипотеза*, назовем ее KMY, предполагающая сходимость всех траекторий (9.5) к нулю, если $F(0) = 0$ и все матрицы $F'(x)$ *гурвицевы* $(\forall\, x \in \mathbb{R}^n)$.

---

[8] Все собственные значения имеют отрицательные действительные части. Вообще говоря, надо добавить предположение либо о различии собственных значений, либо о совпадении алгебраических и геометрических кратностей — см. п. 9.4.3.

Определенный резон в этом был. Гурвицевость $F'(x)$ влечет за собой [3, т. 2, раздел 4.5] существование метрики, по которой оператор сдвига по траекториям (9.5) сжимает в окрестности точки x. А если оператор сжимает локально, то он сжимает и глобально в эквивалентной метрике[9]. Но это так лишь в том случае, когда оператор сжимает локально по одной и той же метрике. А тут — другой случай. Тем не менее на плоскости гипотеза оказалась справедлива.

9.2.6. Контрпример к гипотезе KMY[10]. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *определяется как*

$$F(x) = \{-x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3),\ -x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2,\ -x_3, \dots,\ -x_n\}.$$

Тогда существует решение (9.5), *уходящее в бесконечность при* $t \to \infty$.

◀ Легко видеть, что все собственные значения матрицы $F'(x)$ при любом x равны -1. В бесконечность уходит решение

$$x_1(t) = 18e^t, \quad x_2(t) = -12e^{2t}, \quad x_3(t) = e^{-t}, \dots,\ x_n(t) = e^{-t}. \quad ▶$$

Конечно, подобного сорта вопросы представляют интерес в основном для специалистов. Хотя, с какой стороны посмотреть.

9.3. Связь локального с глобальным

В скалярном случае $\dot{x} = f(x)$, если равновесие x^* асимптотически устойчиво и единственно, то оно асимптотически устойчиво в целом. Если функция Ляпунова $V(x)$ убывает при любом $x \neq x^*$, то все траектории $x(t)$ сходятся к x^*. Если некоторая функция $\varphi(x)$ имеет в x^* локальный минимум и не имеет других экстремальных точек, то минимум в x^* является глобальным.

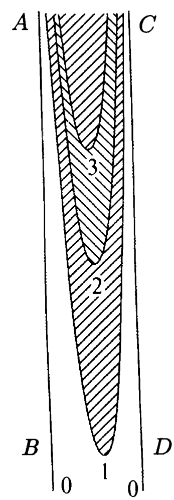
Вся эта простота рушится в многомерном случае. Положительно определенная функция Ляпунова $V(x)$ может строго убывать при любом $x \neq x^*$, но это не мешает траекториям $x(t)$ уходить в бесконечность. Кроме того, взаимоотношения локальных и глобальных экстремумов в многомерной ситуации бывают

[9] См.: *Опойцев В. И.* Обращение принципа сжимающих отображений // Успехи матем. наук. 1976. **31**(4). С. 169–198, где рассматриваются некоторые аспекты динамических систем неожиданного характера.

[10] Подробности в: *Cima A., Essen A., Gasull A., Hubbers E., Manosas F.* A Polynomial Counterexample to the Markus—Yamabe Conjecture // Advances in mathematics. 1997. **131**. P. 453–457. Там же есть вариации гипотезы и контрпримеры.

довольно неожиданны. Пусть $\varphi(x)$ имеет в точке x^* локальный минимум и не имеет других экстремальных точек, т. е. $\nabla\varphi(x) \neq 0$ при $x \neq x^*$. Уже на плоскости минимум в x^* не обязан быть глобальным. Соответствующие примеры легко строятся на базе следующей конструкции.

9.3.1. Пример. *Представим, что на полосе, ограниченной параллельными прямыми AB и CD, задана функция $y = \varphi(x)$, график которой представляет собой горный хребет, уходящий «тем выше — чем севернее». Уровень $\varphi(x)$ на прямых AB и CD — нулевой, а срезы $\varphi(x) = c > 0$ — тем севернее, чем больше $c > 0$. Наконец,* $\operatorname{grad}\varphi(x)$ *везде отличен от нуля.*



Таким образом, полоса делит плоскость на две части (левую и правую), и $\varphi(x)$ убывает в полосе по мере приближения к AB и CD. При этом градиент $\varphi(x)$ в близких к AB и CD точках направлен внутрь полосы. Это позволяет продолжать $\varphi(x)$ на всю плоскость «нисходящим образом». Левее AB, например, устроить локальный минимум (продавив воронку в точке x^*), а правее CD образовать склон, уходящий в минус бесконечность. В таком варианте при одном локальном минимуме — глобального не будет вообще.

Склон $\varphi(x)$ правее CD можно не опускать ниже уровня $\varphi(x^*)$, — и тогда автономная система

$$\dot{x} = -\nabla\varphi(x)$$

будет иметь положительно определенную функцию Ляпунова $\varphi(x)-\varphi(x^*)$, везде (кроме $x = x^*$) строго убывающую, но траектории $x(t)$, начинающиеся правее CD, будут уходить в минус бесконечность.

Уход траекторий $x(t)$ в бесконечность возможен и в том случае, когда единственный локальный минимум функции Ляпунова $V(x)$ является глобальным, но не все области $V(x) \leqslant c$ ограничены. Примером такой функции служит

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2.$$

Переформулировка сказанного обращает внимание на дополнительные важные аспекты.

9.3.2. Пример. *В случае*

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

функция $V(x)$ *строго больше нуля везде кроме* $x = 0$, *но при движении по минус градиенту,*

$$\dot{x} = -\operatorname{grad} V(x), \tag{9.6}$$

не все траектории $x(t)$ *сходятся к равновесию — некоторые уходят в бесконечность. При этом система* (9.6), *разумеется, не диссипативна*[11].

9.4. Бифуркациии

Бифуркацией называют качественную перестройку системы при изменении параметров. В частности — перестройку фазового портрета системы

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon)$$

при переходе параметра ε через критическое значение ε_0. Оттенок парадоксальности здесь присутствует почти в каждом сюжете, поскольку малые изменения влекут за собой большие последствия[12].

9.4.1. Пример. *Дифференциальному уравнению*

$$\dot{x} = -x + e^{-\lambda t} \tag{9.7}$$

в случае $\lambda \neq 1$ *удовлетворяет семейство траекторий*

$$x(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{1-\lambda} + Ce^{-t}, \quad C \text{ — произвольная константа.}$$

---

[11] Несмотря на то что положительно определенная функция $V(x)$ строго убывает при движении (9.6).

[12] В жизни такие примеры не редкость. Но в дифурах, где работает теорема о непрерывной зависимости решения от параметров, скачкообразная трансформация картины поведения целиком зачастую удивляет.

Решением (9.4.1) *в случае* $\lambda = 1$ *является*

$$x(t) = te^{-t} + Ce^{-t}.$$

В первом случае при $t \to \infty$ ***все траектории сходятся к нулю, во втором — уходят в бесконечность. Таким образом, малейшее возмущение параметра*** $\lambda = 1$ ***превращает «идущую вразнос» систему*** (9.4.1) ***в асимптотически устойчивую.***

Пример заслуживает самостоятельного осмысления, ибо улавливает общий механизм, работающий в разных формах. На той же платформе возникает феномен *секулярных членов* [3, т. 2, глава 3], что приводит к солидному «переполоху» в линейной теории.

9.4.2. Пример. *Система второго порядка*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \end{cases} \tag{9.8}$$

при любом $\lambda < 0$ *имеет гурвицеву матрицу* $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, *каковая в случае* $\boxed{\lambda = -1}$ *неустойчива.* **(!)**

◄ Потому что интегрирование второго уравнения $\dot{x}_2 = -x_2$ дает $x_2 = c_2 e^{-t}$, и тогда

$$\dot{x}_1 = -x_1 + c_2 e^{-t}$$

переходит после умножения на e^t в $\dfrac{d}{dt}(x_1 e^t) = c_2$. Окончательно,

$$x_1(t) = (c_2 t + c_1)e^{-t}.$$

В результате все траектории в случае $c_2 \neq 0$ уходят в бесконечность. Таким образом, асимптотически устойчивая система (9.8) при непрерывном изменении λ в области $\lambda < 0$ на «один миг» при прохождении значения $\lambda = -1$ теряет устойчивость, затем снова ее обретает. ►

Таким образом:

9.4.3. Факт. *Гурвицева матрица не обязательно устойчива.*

Факт 9.4.3, конечно, не новость. Он хорошо известен, однако располагается в области ментального слепого пятна. И говорить об устойчивости линейной системы, у которой все собственные значения имеют отрицательные действительные части, — «общепринятый недосмотр». На противоположном полюсе этой «воронки» случаются другие прегрешения. Классический пример — известная *ошибка Лагранжа*, который письменно обмолвился, что в консервативной механической системе при равных частотах будут возникать секулярные члены — хотя заведомо ясно, что при отсутствии внешнего источника энергии — колебаний с бесконечно возрастающими амплитудами не может быть. Спасение заключается в том, что такие системы описываются линейными уравнениями с ***нормальными матрицами***, симметрия коэффициентов которых вытекает из законов механики. У нормальных же матриц всегда (независимо от того, есть равные собственные значения или нет) существуют n линейно независимых собственных векторов — и поэтому секулярные члены появиться не могут, поскольку $\dot{x} = Ax$ в R^n не может иметь более n линейно независимых решений [13].

Вот несколько иной пример на тему кратных собственных значений.

9.4.4. Пример. *Характеристический полином $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$ уравнения*

$$x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0 \tag{9.9}$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = i$ и $\lambda_{3,4} = -i$. Поэтому общее решение

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\sin t,$$

включает колебания с неограниченно растущими амплитудами.

Тогда как характеристический полином близкого к (9.9) уравнения

$$x^{(4)} + (2+\varepsilon)\ddot{x} + (1+\varepsilon)x = 0 \tag{9.10}$$

при малых $\varepsilon \neq 0$ имеет четыре различных корня

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{1+\varepsilon},$$

что дает только ограниченные решения

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos\sqrt{1+\varepsilon}\, t + c_4 \sin\sqrt{1+\varepsilon}\, t.$$

Таким образом, уравнение (9.10), имеющее исключительно ограниченные решения, при $\varepsilon = 0$ переходит в уравнение (9.9), имеющее неограниченные решения.

---

[13] Чтобы хорошо разобраться в подобных явлениях, надо из *дифференциальных уравнений* спуститься в *линейную алгебру* [3, т. 3], фокусируя внимание на разнице между алгебраической и геометрической кратностью собственных значений.

9.4.5. Пример Бореля. *Маятник на пружине имеет интеграл энергии*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kx^2 = E$$

и периодические (синусоидальные) решения. Сколь угодно слабая подкачка энергии εt меняет уравнение движения на

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kx^2 = E + \varepsilon t,$$

что после дифференцирования переходит в

$$(m\ddot{x} + 2kx)\dot{x} = \varepsilon. \tag{9.11}$$

Последнее уравнение исключает возможность $\dot{x} = 0$ в силу $\varepsilon > 0$. Но тогда решение $x(t)$ не может иметь ни максимума, ни минимума. Это означает, что не только колебания в системе пропали, но не осталось ничего похожего на колебательный процесс с растущей амплитудой. Решения стали возможны только монотонные.

◄ Здесь важно развеять ореол загадочности. Уравнение (9.11) эквивалентно

$$m\ddot{x} + 2kx = \frac{\varepsilon}{\dot{x}},$$

а это уже совсем другое дело. Производная $\dot{x}$ ушла в знаменатель, и теперь даже о непрерывной зависимости от параметра нельзя говорить. Остается добавить, что равномерная энергетическая подкачка εt осциллятора без качественных катаклизмов в системе — невозможна. ► Тем не менее пример ласкает взор, демонстрируя трудноодолимый потенциал самообмана.

Бифуркационные метаморфозы часто сопровождаются перерождением статики — появлением новых либо исчезновением старых положений равновесия и т. п.

9.4.6. Пример. *В системе*

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3$$

бифуркационным значением является $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon \leqslant 0$ система имеет единственное нулевое равновесие, которое асимптотически устойчиво. При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ оно становится неустойчивым, а в его окрестности появляется два других, асимптотически устойчивых равновесия $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$. В терминах потенциалов ($f(x,\varepsilon) = -U'(x,\varepsilon)$) ситуация равносильна возмущению потенциала $U(x) = (1/4)x^4$ добавкой $-(\varepsilon/2)x^2$. Исходный нулевой минимум $U(x)$ при $\varepsilon > 0$

превращается в локальный максимум, по бокам которого возникают новые локальные минимумы.

9.4.7. Пример. *Для системы*

$$\dot{x} = \varepsilon x^2 - x$$

с асимптотически устойчивым равновесием при любом ε *значение* $\varepsilon = 0$ *критично по другой причине. При возмущении* ε *новое неустойчивое положение равновесия* $x = \varepsilon^{-1}$ *приходит из бесконечности. При этом решения, начинающиеся в точках* $x(0) > \varepsilon^{-1} > 0$, *оказываются непродолжимы вправо; в случае* $x(0) < \varepsilon^{-1} < 0$ — *влево.*

9.4.8. Парадокс Циглера.

Движение двух шарнирно соединенных стержней в условиях вязкого трения, характеризуемого коэффициентом b, описывается некой системой дифференциальных уравнений [14)]

$$\dot{x} = f(x, b, P), \tag{9.12}$$

где x — вектор обобщенных координат, P — некоторая нагрузка.

Для определения *в случае* $b = 0$ критической нагрузки P^*, при которой равновесие системы (9.12) теряет устойчивость, есть два пути. Можно сразу положить $b = 0$, и тогда получится, что равновесие устойчиво лишь при условии $0 \leqslant P \leqslant P_1^*$. В более трудоемком варианте определяется критическая нагрузка как функция параметра b, после чего делается переход к пределу при $b \to 0$. В результате получается другая критическая нагрузка $P_2^* < P_1^*$. Разные способы решения дают разные ответы, — это и составляет *парадокс*.

Если забыть о механической интерпретации задачи, то ничего удивительного здесь нет, поскольку устойчивость по Ляпунову не является структурно устойчивым свойством [15)]. В диапазоне $P_2^* < P < P_1^*$ устойчива модель (9.12), но не реальная механическая система. Наличие сколь угодно малого трения ($b > 0$) пробуждает неустойчивость. Это большой сюрприз на фоне бытующего

[14)] Несущественные в данном контексте подробности есть в [3, т. 2]. Обстоятельно *парадокс Циглера* изложен в книге: *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М., 1979.

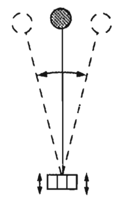
[15)] Поэтому множество «допустимых» P не обязано плавно зависеть от b, что и служит источником расхождения.

представления о том, что трение — благо с точки зрения устойчивости. В том смысле, что если уж система устойчива в отсутствие вязкого трения ($b = 0$), то появление трения ($b > 0$) лишь раздвигает границы устойчивости. Парадокс Циглера показывает, что это не всегда так.

9.5. Феномен вибрации

Бифуркационные изменения бывают совершенно неожиданны. Особенно, если они проявляются в реальной физической системе.

9.5.1. Факт. *Если точка подвеса маятника вибрирует, т. е. колеблется с малой амплитудой и большой частотой $\omega \gg \omega_0$ — верхнее положение маятника неожиданно становится устойчивым.*



◀ Маятник с вибрирующей точкой подвеса описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + (\omega_0^2 + \varepsilon\omega^2 \cos \omega t) \sin \varphi = 0 \tag{9.13}$$

с малым ε (малой амплитудой вибрации) и $\omega \gg \omega_0$, где ω — частота вибрации, ω_0 — собственная частота маятника. Уравнение (9.13) не так уж легко поддается анализу. Решение приходится представлять в виде суммы $\varphi = \psi + \xi$, где $\psi(t)$ — медленная составляющая движения (обусловленная собственной частотой ω_0), а $\xi(t)$ — быстрая (вынужденная осцилляция с частотой ω). В итоге усредненная потенциальная энергия колебаний,

$$U(\psi) \sim -\cos \psi + \frac{\delta}{2} \sin^2 \psi,$$

имеет минимум как при $\psi = 0$, так и при $\psi = \pi$. Получается, что верхнее положение маятника тоже устойчиво. Подробности в [3, т. 2, п. 6.6]. ▶

9.6. Внутренний резонанс

Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{x}_1 + b_{12}\ddot{x}_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ b_{12}\ddot{x}_1 + b_{22}\ddot{x}_2 + a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

описывает колебания связанных друг с другом линейных осцилляторов. Квадратичные формы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$,

$$\begin{cases} (x, Ax) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \\ (x, Bx) = b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2, \end{cases}$$

представляют потенциальную и кинетическую энергию системы, и потому — положительно определены.

9.6.1. Парадокс полной перекачки энергии *от одного осциллятора к другому при совпадении парциальных частот*[16],

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{a_{11}}{b_{11}}} \quad и \quad \theta_2 = \sqrt{\frac{a_{22}}{b_{22}}}.$$

Феномен, конечно, удивительный. При отклонении одного маятника и сколь угодно слабой связи (маятники в разных помещениях), через некоторое время происходит полная перекачка энергии — от первого ко второму. Математически — вещь тривиальная, но физически, и даже философски, — поразительная. Почему перекачка не прекращается, когда энергия колебаний распределяется между маятниками поровну? Аналитически — ответ прост. Но во Вселенной, где так решаются линейные уравнения, очень слабые сигналы могут играть очень большую роль.

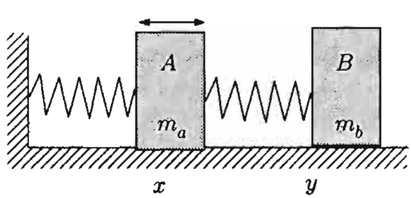
9.6.2. Виброгаситель. *Два тела A и B упруго соединены пружинами. К телу A с массой m_a приложена гармоническая сила $f = \nu \sin \omega t$. Движение грузов описывается системой уравнений*

$$\begin{cases} m_a\ddot{x} + k_a x - k_b(y - x) = \nu \sin \omega t, \\ m_b\ddot{y} + k_b(y - x) = 0. \end{cases}$$

Совершенно неожиданно, при

$$k_b = m_b\omega^2$$

амплитуда колебаний тела A оказывается нулевой (**!**). *Трения нет, к телу приложена внешняя сила, но оно не движется*[17].



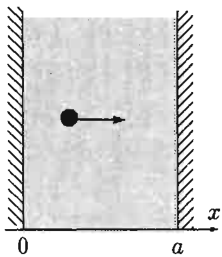
---

[16] При изучении системы (9.14) важную роль играют ***нормальные частоты***, являющиеся корнями *векового уравнения*, но это другая тема [3, т. 2].

[17] См. [3, т. 2, п. 8.5]. Идея гашения вибраций подсоединением к вибрирующему телу подходящего балласта широко используется: успокоители качки на судах, запирание электрической цепи колебательным контуром и т. п.

9.7. Адиабатические процессы

Физические явления, где «все на виду», нередко ведут себя непредвиденным образом. Рассмотрим, для примера, задачу о движении шарика между двумя стенками.



Движение происходит по инерции с упругим отражением при ударе. Стенки медленно сближаются либо раздвигаются, например, левая — закреплена, а скорость правой $|\dot{a}|$ много меньше скорости шарика $|v|$.

В этом случае говорят об *адиабатическом* изменении параметров. Естественно ожидать преимуществ, вытекающих из «медленности», — каковые действительно имеются, но ситуация намного сложнее, чем при высокочастотном возмущении. Интегралом движения оказывается

$$\frac{\langle T\rangle}{\nu} = \text{const}, \tag{9.15}$$

где $\langle T\rangle$ — средняя кинетическая энергия, ν — частота колебаний шарика; $\langle T\rangle/\nu$ называют *адиабатическим инвариантом*.

Вывод (9.15), опирающийся здесь на так называемую *теорему вириала*, вообще говоря, приблизительный [3, т. 2, п. 7.3]. Движение шарика, строго говоря, не периодично, — период $\tau = 2a/v$, но a меняется, — поэтому интервал усреднения аккуратно не определен. Тем не менее поведение реальных систем согласуется с закономерностью (9.15).

Парадоксальность ситуации заключена в том, что интеграл движения (9.15) не зависит от скорости $|\dot{a}|$, лишь бы она была достаточно мала по сравнению с $|v|$. Но если в момент удара стенки останавливать — скорость шарика по модулю не будет меняться совсем. Если стенку ускорять в момент удара — результат будет другой. Поэтому рассчитывать на эффект (9.15) возможно лишь в случае сближения, в некотором смысле не зависящего от движения шарика (от моментов удара). Все это аккуратно уточнить до сих пор не удается. Поэтому теория *адиабатических процессов* по сей день остается незаконченной.

В классической задаче об изменении периода колебаний маятника при медленном изменении длины стержня получается тот же адиабатический инвариант (9.15), — возникающий «всегда» в задачах подобного толка [6].

Особый интерес представляют задачи, где «адиабатическая независимость» возникает сама. Пусть, например, легкий шарик раз за разом падает на массивную плиту и упруго отскакивает. Плита колеблется пилообразно «вверх-вниз» со скоростью V. При определенных условиях оказывается [6], что при отскоке шарик в среднем ускоряется, и его скорость $v(t)$ растет. При $V \ll v(t)$ движения плиты и шарика становятся «независимыми», и моменты ударов хаотично распределяются[18].

9.8. Управляемость

На управляемости в контексте «неожиданностей» есть резон остановиться по следующей причине.

Для линейных систем регулирования

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где x состояние, u управление, A и B матрицы, — вроде бы естественно ожидать необходимости превосходства размерности u над x, иначе не будет хватать рычагов управления[19].

9.8.1. Пример. *Пусть*

$$\dot{x}_1 = -x_2 + u,$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2.$$

Хотя «рычаг» только один — управление действует только на x_1 — система управляема, поскольку матрица

$$U = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{9.16}$$

невырождена[20].

---

[18] Если бы шарик действительно падал на плиту в случайные моменты, то факт его ускорения в среднем был бы легко объясним. По той же причине, по которой встречных машин всегда больше, чем попутных, — шарик бы чаще ударялся в те моменты, когда плита движется навстречу.

[19] Речь идет о возможности перевести систему — управлением $u(t)$ — из любого начального положения $x(0) = x_0$ в любое желаемое. При положительном ответе это называют *управляемостью* системы.

[20] Для управляемости необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (9.16) был равен n [3, т. 2, п. 8.6].

9.9. Аттракторы и фракталы

Кривотолки о неожиданностях в сфере аттракторов и фракталов постепенно утихают. Первопричины сохраняются, конечно, но первоначальные восторги так высоко подняли планку ожидания чудес, что реальность заметно недотягивает. Тем не менее обнаруженные здесь явления фундаментальны и нетривиальны. Область в целом довольно обширна, и для знакомства целесообразно рекомендовать специальную литературу [9]. Ограничимся несколькими эскизными штрихами.

Аттрактор — это притягивающее множество. Скажем, если отображение f — в том числе многозначное — преобразует в себя компакт X, то множества $f^k(X)$ оказываются вложены друг в друга,

$$\ldots \subset f^k(X) \subset \ldots \subset f(X) \subset X,$$

и при $k \to \infty$ будут сходиться к аттрактору A. При этом A будет неподвижным множеством отображения f, т. е. $f(A) = A$.

Если U_t — оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x)$, и $U_t X \subset X$ при $t > 0$, то аттрактор A снова определяется как предельное множество[21)], $U_t(X) \to A$ при $t \to \infty$.

Аттракторы простых динамических систем нередко представляют собой довольно экзотические образования. Например, *канторово множество* C является аттрактором двузначного отображения $f(x) = f_1(x) \cup f_2(x)$, где $f_1(x) = 1/3x, f_2(x) = 1/3x + 2/3$, преобразования подобия отрезка $[0, 1]$. В результате C можно описать как неподвижное множество преобразования f. Тот факт, что функции f_1 и f_2 суть преобразования подобия, влечет за собой *свойство самоподобия* множества C — и это характерно для многих аттракторов.

Аттрактор не обязательно, но часто оказывается *фракталом*. Фракталами называются множества, имеющие *дробную размерность по Хаусдорфу*, которая определяется следующим образом. Множество A в R^n покрывается кубиками со стороной ε. Если $N(\varepsilon)$ обозначает минимальное число кубиков, необходимых для покрытия A, и $N(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ растет пропорционально ε^{-d}, то

[21)] При рассмотрении динамических систем $x_{k+1} = f(x_k)$ часто подразумевается сдвиг по траекториям $\dot{x} = g(x)$ в единицу времени.

величина d называется размерностью A по Хаусдорфу. У канторова множества эта размерность равна $\log_3 2$.

В рядовых ситуациях величина d совпадает с обычной размерностью. Стандартный пример фрактала — *кривая Кох*. Ее построение начинается с единичного отрезка, который заменяется ломаной из четырех отрезков, каждый из которых имеет длину $1/3$: . Далее с каждым звеном ломаной операция повторяется с поправкой на коэффициент подобия и т. д. Длина ломаной n-го порядка получается равной $(4/3)^n$, результирующая длина — бесконечна. Если построение кривой начинается с треугольника, получается *снежинка Кох*.

Аттрактор, являющийся фракталом, называют *странным*. Достойны удивления здесь два аспекта. Во-первых, «странным» является сам по себе фрактал — уродливое и одновременно изящное детище заурядных манипуляций — с его дробной размерностью, бесконечной длиной и очень простой генетикой самоподобия. Во-вторых, «странна» обыденность фракталов в качестве инвариантов динамических систем.

9.9.1. Странный аттрактор Лоренца.

При изучении динамических систем значительный интерес представляет движение в пределах самого аттрактора. В случае непрерывного времени разнообразие возможностей *на плоскости* не очень велико. Причина проста. Требование единственности решения $\dot{x} = g(x)$ не позволяет траекториям самопересекаться, и тогда варианты поведения не так многочисленны. В случае $n \geqslant 3$ запрет самопересечения траекторий уже большой роли не играет, и сложные аттракторы возникают в довольно простых с виду системах. Значительный фурор в 1963 году произвел *аттрактор Лоренца*, открытый при изучении системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y, \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = -\dfrac{8}{3}z + xy. \end{cases}$$

Изображение аттрактора Лоренца напоминает перекрученный моток ниток. Размерность — дробная, движение траектории — хаотичное, очень чувствительное к заданию начальных данных.

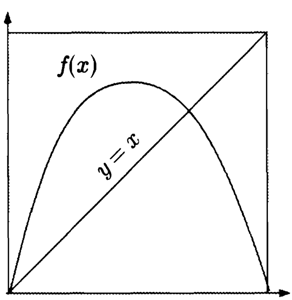
Обычные похвалы *Лоренцу* за обнаружение детерминированного хаоса в условиях малой размерности несколько путают карты. Траектория одномерной системы $x_{k+1} = \{\lambda x_k\}$, где фигурные скобки обозначают дробную часть числа, при больших λ дает вполне убедительный пример хаотичного поведения, чрезвычайно критичного к заданию начальных данных. Революционный характер находки Лоренца заключается в другом. Был обнаружен очень простой пример *невыдуманной* динамической системы со сложным поведением, которая возникла в рядовой вычислительной практике. Стало ясно, что детерминированный хаос — это не экзотика, а рутина, которую мы не замечали раньше из-за отсутствия вычислительных средств[22].

9.9.2. Иерархия циклов Шарковского.

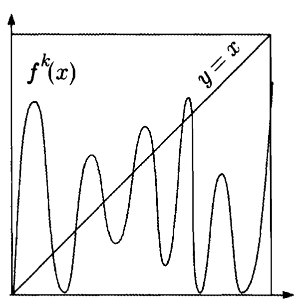
Численные эксперименты позволили обнаружить удивительные явления в рамках очень простых итерационных процедур вида $x_{k+1} = f(x_k, \lambda)$. Пусть, например,

$$x_{k+1} = 4\lambda x_k(1 - x_k). \tag{9.17}$$

Понятно, что итерации функции $f(x) = 4\lambda x(1-x)$ приводят к полиномам возрастающей степени ($f^k(x)$ — полином степени 2^k), причем $f^k(x)$ при условии $\lambda \in (0, 1)$ и любом k отображает $[0, 1]$ в $[0, 1]$. У функции $f(x)$ неподвижная точка одна ($\lambda \leqslant 1/4$) либо две ($1/4 < \lambda < 1$ — рис. *а*). С увеличением количества итераций количество неподвижных точек (число пересечений прямой $y = x$ с графиком функции $f^k(x)$) может увеличиваться (рис. *б*), — и определяется значением λ.



а)



б)

Неподвижная точка $f^k(x)$ (решение уравнения $x = f^k(x)$) — это цикл k-го порядка: после k итераций точка возвращается в исходное положение. При увеличении λ в системе происходит бесконечное число бифуркаций. Сначала процедура (9.17) сходится к одному из равновесий, потом начинают появляться

[22] Всегда важно понимать, как может реализоваться та или иная возможность, и может ли. Детерминированный хаос мог бы возникать в системах лишь с очень сложным описанием, специально сконструированных, нереалистичных — и тогда бы мы имели дело совсем с другой Вселенной.

циклы удвоения[23], $C(2), C(2^2), \ldots$, затем при некотором λ_∞ наступает хаос, потом снова циклы и т. д.

Пресловутая *иерархия циклов Шарковского* состоит в следующем. Если в системе из существования цикла $C(m)$ следует существование $C(n)$, пишут $m \succ n$. *Шарковский* установил общую закономерность:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 3 \cdot 2 \succ 5 \cdot 2 \succ 7 \cdot 2 \succ \ldots$$
$$\ldots \succ 3 \cdot 2^2 \succ 5 \cdot 2^2 \succ 7 \cdot 2^2 \ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Таким образом, цикл $C(3)$ как бы самый старший. Из его наличия вытекает существование любых других циклов.

9.10. Волны и солитоны

Когда *солитоны* станут привычны, о них не надо будет рассказывать как о неожиданных явлениях. Но пока обойти молчанием нелинейные волны в рассматриваемом контексте было бы преждевременно. О солитонах написано много и обстоятельно, но не всегда есть резон браться за толстые книжки, чтобы разобраться в существе дела. Краткая информация имеется в [3, тт. 2, 11].

Главное заключается в принципиальном отличии нелинейных волновых процессов от — линейных, и в устоявшемся «линейном мировоззрении». Привычное *волновое уравнение*

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \tag{9.18}$$

описывающее *линейные колебания* в различных средах — струна, звук, свет, — обладает рядом характерных свойств, ставших каркасом стереотипного мышления в области распространения волн. Конечно, дело не только в уравнении (9.18), но и в наблюдаемых физических процессах, которые согласованно перекликались с «линейной математикой».

Критически настроенная часть аудитории тут, конечно, может ухмыльнуться. Что же, дескать, физики раньше не наблюдали нелинейные колебания? Или

[23] Циклом $C(p)$ длины p называют траекторию $x_1, \ldots, x_p$, удовлетворяющую (9.17) и условию $x_1 = x_p$.

Всевышний до поры до времени их не показывал? В некотором роде «не показывал». В том смысле, что «человек видит в мире лишь то, что несет уже в себе самом». Мысль известная — хотя кажется парадоксальной, но подтверждается на каждом шагу. Эффекты за рамками теории игнорируются[24]. Документальное описание солитона [3, т. 11], сделанное корабельным инженером *Расселом* (1834), было просто бойкотировано как нелепость, не укладывающаяся в парадигму физических представлений того времени[25].

Ко всему надо добавить, что поверхностный анализ ЧП-уравнений[26] не сулил особых новостей. Как уравнение (9.18), так и нелинейные уравнения различных видов обладали решениями типа *бегущей волны* $u(x,t) = f(x - ct)$. Каким бы ни было ЧП-уравнение относительно $u(x,t)$ — с коэффициентами, не зависящими явно от x и t, — подстановка в него $u(x,t) = f(x-ct)$ приводит к обыкновенному дифуру относительно f, поскольку

$$u_t = -cf', \quad u_x = f', \quad u_{tt} = c^2 f'', \quad u_{xx} = f'', \quad u_{tx} = -cf'', \ldots,$$

и присутствие в исходном уравнении частных производных сколь угодно высокого порядка тут ничему не мешает. Решение соответствующего обыкновенного дифура является солитоном.

Волновое уравнение (9.18) в этом отношении выделяется тем, что возникающий обыкновенный дифур допускает бегущую волну любой формы (функция f — любая). В общем случае нелинейные ЧП-уравнения допускают бегущие волны только специальной формы — так называемые *уединенные волны*, или *солитоны*, которые обладают частицеподобным поведением.

Проследить возникновение солитонов и описать их форму довольно просто. Знаменитое *уравнение Кортвега — де Фриза*, или *КдФ-уравнение*,

$$u_t + \alpha\, u\, u_x + \beta\, u_{xxx} = 0 \tag{9.19}$$

[24] Показательно феноменальное отличие реальной экономики от теоретической, формируемой большой армией фантазеров.

[25] Теоретический анализ нелинейных волн был проведен *Кортвегом* и *де Фризом* в 1895 году, но дело сдвинулось с мертвой точки только после работы: *Zabusky N. J.*, *Kruskal M. D.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. **15**. P. 240–243.

[26] Уравнений с частными производными.

для бегущих импульсов $u(x,t) = f(x - ct)$ переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение .

$$-cf' + \alpha f \cdot f' + \beta f''' = 0 \tag{9.20}$$

относительно функции f, а *уравнение синус-Гордона*

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{9.21}$$

для $u(x,t) = \varphi(x - ct)$ переходит в уравнение

$$(c^2 - 1)\varphi'' + \sin\varphi = 0, \tag{9.22}$$

описывающее колебание нелинейного маятника.

Уравнения (9.20), (9.22) легко решаются [3, т. 11], и их решения являются как раз *солитонами*. Результат поначалу не производит впечатления. Бегут какие-то импульсы — ну и что? Они могли бы бежать и под юрисдикцией линейного уравнения $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Тут, правда, ситуация особая. И дело даже не в уникальности формы или зависимости скорости солитона от амплитуды, — а в устойчивости и «неуничтожимости». Тщательный анализ обнаруживает неожиданные с линейной точки зрения свойства. Солитоны не затухают и не разбегаются подобно обычным волнам, сохраняя размеры и форму как угодно долго. Они подобны локализованным сгусткам энергии. Движутся, но не рассеиваются. Проходят друг через друга и выходят из области столкновения не изменившись. В результате выясняется, что энергия в сплошной среде может распространяться устойчиво без рассеяния. Нелинейный импульс возмущения оказывается неустраним, как узел на замкнутом контуре. Солитоны начинают играть роль гармоник. Если один солитон догоняет другой, то на какое-то время они складываются, но «сумма» не удовлетворяет КдФ-уравнению и вынуждена раздвоиться на те же слагаемые.

Что же касается решений типа бегущей волны линейных ЧП-уравнений, то в реальной среде всегда есть *дисперсия* — колебания разной частоты распространяются с разной скоростью. Поэтому любое возмущение довольно быстро распадается на гармоники и «размазывается». Для нелинейных волн было естественно ожидать того же эффекта — может быть, в другой аранжировке. Но такие ожидания как раз и не оправдались.

Интересно заметить, что решения $u(x,t)$ типа *бегущей волны* характерны не только для «волновых уравнений». Подстановка $u(x,t) = f(x - ct)$ в линейное уравнение диффузии $u_t = \lambda u_{xx}$ быстро приводит к решениям

$$u(x,t) = \exp\left\{-\frac{c}{\lambda}(x - ct)\right\}. \tag{9.23}$$

Экспоненты (9.23) бегут вправо, каждая со скоростью c — причем с любой наперед заданной.

В связи с этим принято говорить о *парадоксе бесконечной скорости диффузии* (*распространения тепла*). *Фундаментальное решение уравнения теплопроводности* [3, т. 11]

$$\mathcal{E}_t - a^2\Delta\mathcal{E} = \delta(\boldsymbol{x}, t),$$

как реакция системы на импульсное воздействие

$$\delta(\boldsymbol{x}, t) = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t),$$

имеет внешне безобидный вид

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\exp\left\{-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4a^2t}\right\}. \tag{9.24}$$

Но обнаруживается странная вещь. Мгновенная тепловая вспышка (либо впрыск диффундирующего вещества) приводит фактически сразу к повышению температуры (концентрации),

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{x}, t) > 0,$$

в любой точке пространства $\boldsymbol{x}$, сколь бы далеко она (точка) ни была от местоположения первичного воздействия.

Глава 10

Игры и теория голосования

Сила существует как сила лишь в момент действия. Потом она существует как легенда — до очередной проверки.

Интуиция не приспособлена к осознанию игрового противостояния, что мешает восприятию теоретико-игровых конструкций. *Смешанные стратегии* и *равновесие Нэша* — вот два революционных понятия, каковые описываются в каждом учебнике, но так и остаются в тени миропонимания.

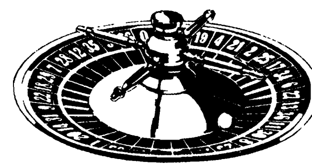
10.1. Сюрпризы смешанных стратегий

Оптимизацию в условиях неопределенности естественно понимать как максимизацию выбором стратегии x_1 целевой функции $D(x_1, x_2)$ в наихудшем по x_2 случае. Иначе говоря, требуется решить задачу

$$\min_{x_2 \in X_2} D(x_1, x_2) \to \max_{x_1 \in X_1} . \qquad (10.1)$$

10.1.1. Задача. *Три карты лежат рубашками вверх, одна из них — туз. Стратегия x_1 — указание порядка, в котором карты вскрываются, цель — минимизация номера шага, вскрывающего туза.*

Задача представляется бессмысленной, потому что гарантированный минимум равен 3 шагам — в худшем случае туз будет вскрыт последним по счету. И похоже, можно держать пари, что добиться лучшего результата невозможно. Оказывается, возможно — и это не фокус, а настоящее математическое открытие. Начнем, однако, с более наглядной ситуации.



Рентабельность убыточных акций. Допустим, на рынке ценных бумаг имеется два типа акций, S_1 и S_2, прибыльность которых зависит от каких-то трудно прогнозируемых событий A и B. Акция S_1 даст либо $8\,\%$ (в случае — A), либо $2\,\%$ прибыли (в случае — B); S_2, соответственно, — либо *минус* $4\,\%$, либо *плюс* $14\,\%$. Компактно ситуацию удобно записать в виде

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{Vmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 14 \end{Vmatrix}.$$

Покупатель выбирает столбец, т. е. какие акции покупать; строка определяется неизвестными заранее обстоятельствами A, B.

Покупать акции S_2 рискованно, можно оказаться в минусе, а гарантированная прибыль S_1 — всего $2\,\%$. Тем не менее из ситуации «выжимаются» $5\,\%$ прибыли. (!) Действительно, если акции S_1, S_2 купить в количестве x_1, x_2 штук, то прибыль будет либо

$$d_1 = \frac{1}{x_1 + x_2}(8x_1 - 4x_2)\,\%,$$

либо

$$d_2 = \frac{1}{x_1 + x_2}(2x_1 + 14x_2)\,\%.$$

Максимум гарантированной прибыли $\min\{d_1, d_2\}$ достигается при $d_1 = d_2$, откуда следует $x_1 : x_2 = 3 : 1$. В этом случае

$$\min\{d_1, d_2\} = 5\,\%,$$

независимо от обстоятельств. Тем самым *покупка потенциально убыточных акций поднимает гарантированную прибыль с двух до пяти процентов*. Причем играть можно с «открытыми картами». Стоит купить 3 акции S_1 и одну S_2 — скажем, по \$25 каждая — и прибыль \$5 обеспечена. Даже если *Недоброе Око* знает выбор и выбирает A или B задним числом.

Другое дело, если денег хватает на покупку всего одной акции. В этом случае избежать риска позволяет только покупка S_1. Однако возможна и другая точка зрения. Полагаясь на случайный опыт, S_1 можно купить с вероятностью p_1, S_2 — с вероятностью p_2, и тогда матожидание прибыли (с учетом $p_1 + p_2 = 1$) будет равно либо

$$d_1 = 8p_1 - 4p_2 \quad \text{в ситуации } A,$$

либо

$$d_2 = 2p_1 + 14p_2 \quad \text{в случае } B.$$

Максимум гарантированного минимума матожидания обеспечивает то же отношение $p_1 : p_2 = 3 : 1$, т. е.

$$p_1 = \frac{3}{4}, \qquad p_2 = \frac{1}{4}. \tag{10.2}$$

Получается удивительная вещь. Прежде чем покупать акцию, необходимо произвести случайный опыт с вероятностями исхода (10.2), и выбор сделать по результатам этого опыта. Выходит, без помощи «монеты» решить задачу оптимально принципиально нельзя. **(!)** Как говорят, задача в чистых стратегиях не решается, только — в *смешанных* [1].

Вернемся теперь к задаче 10.1.1. Оптимальное решение здесь имеет, вообще говоря, шоковый характер. По крайней мере, в голове не укладывается.

Итак, свобода выбора заключается в избрании того или иного порядка открытия карт — пусть для удобства рубашки карт помечены как A, B, C.

порядок: →	ABC	CAB
A	1	2
B	2	3
C	3	1

Левый столбец в таблице показывает, какая из карт туз — A, B или C. А первая строка — порядок открытия карт, рассмотрены два варианта ABC и CAB. На пересечении столбца и строки стоит цифра, показывающая на каком

[1] Случайный выбор из чистых стратегий, в данном случае S_1, S_2, называют *смешанной стратегией*.

шаге будет открыт туз. Вариант ABC выбираем с вероятностью p; CAB — с вероятностью $1 - p$. Матожидание числа шагов в случае A:

$$1p + 2(1 - p) = 2 - p.$$

Аналогично,

$$2p + 3(1 - p) = 3 - p,$$
$$3p + 1 - p = 1 + 2p.$$

Поскольку $3 - p$ мажорирует $2 - p$, то максимум гарантированного минимума находится из

$$3 - p = 1 + 2p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{3}.$$

Матожидание гарантированного результата получается $2\,1/3$, вместо 3.

Если вдуматься, результат фантастический. Получается, надо не просто смириться с ситуацией и открывать карты в любом порядке, а фиксировать разные порядки вскрытия, и осуществить случайный выбор с рассчитанными заранее вероятностями. Хотя, казалось бы, что в лоб что по лбу.

Мы не будем помещать задачу под микроскоп и варьировать детали, хотя это до некоторой степени интересно. Для данного контекста главное в другом — ***в наличии выгоды от бесполезного действия***. Беда в том, что подобные явления подсознание обходит стороной, поскольку они не вмещаются в готовые стереотипы мышления.

10.2. Антагонистические игры

Смешанные стратегии достаточно естественно возникают в играх с нулевой суммой, в которых выигрыш первого игрока G_1 определяется матрицей

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix},$$

а выигрыш второго, G_2, — матрицей $-A$. Причем стратегией G_1 является выбор строки, стратегией G_2 — столбца.

В *антагонистической игре* (выигрыш одного есть проигрыш другого) первому логично так выбирать i, чтобы добиться максимума a_{ij} при наихудшем для себя j, второму — наоборот. Для существования решения игры требуется

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}, \tag{10.3}$$

что выполняется не всегда.

В смешанных стратегиях G_1 — выбирает строки матрицы A с вероятностями $\{p_1, \dots, p_n\}$, G_2 — столбцы с вероятностями $\{q_1, \dots, q_m\}$. Матожидание выигрыша первого тогда равно

$$W(p,q) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j,$$

и он его, так или иначе, пытается максимизировать.

В *антагонистической игре* логика решения естественная. Первый так выбирает $\{p_1, \dots, p_n\}$, чтобы добиться максимума W при наихудшем для себя $\{q_1, \dots, q_m\}$, второй — наоборот. В результате решением игры оказываются наборы вероятностей

$$p^* = \{p_1^*, \dots, p_n^*\}, \qquad q^* = \{q_1^*, \dots, q_m^*\},$$

обеспечивающие равенство

$$\max_p \min_q \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = \min_q \max_p \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j. \tag{10.4}$$

Теперь решением (10.4) является седловая точка $W(p,q)$, которая по *теореме фон Неймана о минимаксе* всегда существует.

Допустим, в игре с матрицами выигрышей-проигрышей

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

первая матрица и выбор строки отвечают первому игроку, вторая и выбор столбца — второму. Легко убедиться, что в чистых стратегиях игра решения не имеет, причем долгие, но «не фейнмановские», размышления настраивают на пессимистический лад. Игра выглядит дурацкой, и надежды на разумное решение не возникает.

В смешанных стратегиях оптимальное решение для первого игрока есть

$$p_1 = \frac{7}{12}, \qquad p_2 = \frac{5}{12},$$

для второго наоборот,

$$q_1 = \frac{5}{12}, \qquad q_2 = \frac{7}{12}.$$

Матожидание выигрыша первого — равно $1/12$, второго — минус $1/12$. Игра, как выясняется, выгодна первому игроку, в чем разобраться навскидку весьма сложно. При многократном повторении первый будет выигрывать в среднем $1/12$ за партию, если оба придерживаются оптимальных стратегий.

10.3. Нэшевские решения

Эталонная игровая ситуация включает в себя двух игроков G_1, G_2. У каждого своя функция выигрыша, $D_1(x_1, x_2)$ у G_1, $D_2(x_1, x_2)$

у G_2. Первый распоряжается выбором x_1, второй — x_2. Положение дел, надо признать, весьма запутанно.

В общем случае имеется n взаимосвязанных элементов G_i, распоряжающихся выбором переменной $x_i \in X_i$. Интерес G_i состоит в максимизации своей *функции выигрыша*

$$D_i(\boldsymbol{x}) = D_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Переменную x_i, — которая может быть скаляром, вектором, функцией, множеством, — называют *стратегией игрока* A_i, что плохо укладывается в семантику слова «стратегия», но термин общепринят.

Описанная ситуация типична для экономики. Каждая ячейка системы имеет собственную степень свободы x_i (закупки сырья, ассортимент выпуска, внутренний график работ), но выбор x_i не определяет свой выигрыш D_i — многое зависит от действий других элементов системы.

Решением игры по Нэшу называется такая точка $\boldsymbol{x}^*$, в которой ни один из игроков не может добиться увеличения своего выигрыша изменением собственной переменной x_i, т. е. каждая функция $D_i(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}^*$ достигает оптимума по собственной переменной x_i,

$$D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^*, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \max_{x_i \in X_i} D_i(x), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В случае когда все x_i являются скалярными величинами, а функции $D_i(x)$ — гладкие, равновесие по Нэшу обязано удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial D_i(x^*)}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{10.5}$$

Парадокс заключенного[2] возникает в классической игре двух участников с матрицей проигрышей:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{1}; 1) & (\mathbf{9}; 0) \\ (\mathbf{0}; 9) & (\mathbf{8}; 8) \end{bmatrix}.$$

Первый игрок (заключенный) выбирает строку, второй — столбец. На пересечении стоят годы тюрьмы. Первая цифра, выделенная жирным, обозначает, сколько сидеть первому заключенному, вторая — второму[3]. Решая, что делать,

[2] Известен также под именем *дилеммы заключенного*.

[3] Схема обычно дополняется какой-нибудь небылицей. Заключенные, дескать, совершили тяжкое преступление. Но у прокурора нет доказательств, и он «организует игру».

первый заключенный стоит перед дилеммой: получить **1** год или **9** лет тюрьмы, сознавшись и выбрав первую строку (см. сноску), либо **0** или **8**, не сознаваясь и выбирая вторую. Во второй строке он в любом случае выигрывает. Но игра симметрична. Партнеру точно так же выгоднее выбрать второй столбец. В результате оба сознаются в совершении преступления, и получают по 8 лет. Это и есть нэшевское решение.

Парадокс не снимается возможностью предварительной договоренности. В конечном итоге каждый принимает решение самостоятельно, при этом оказывается выгодно нарушить коллективный договор. Нелепость нэшевских решений — скорее правило, нежели исключение, и многие экономические системы находятся именно в таком равновесии. До некоторой степени удивительно, что для эффективности экономики в целом это часто не имеет никакого значения, см. [3, т. 7, раздел 5.3].

10.4. Теорема Эрроу

Имеется n объектов $a, b, c \ldots$, и N субъектов $A, B, C \ldots$, предпочитающих объекты в том или ином порядке. Например,

$A:$	a	b	c
$B:$	b	c	a
$C:$	c	a	b

(10.6)

Задача состоит в том, чтобы из индивидуальных *ранжировок* образовать коллективную. Иными словами, как голосовать, чтобы результат голосования был в некотором роде «правильным». *Хорошей системы голосования*, оказывается, *не существует*. К подобному заключению легко прийти, анализируя примеры.

Пусть в случае (10.6) эксперты A, B, C в первом туре голосуют за (a, b). Тогда победит a, а во втором туре, при голосовании за (a, c) победит $\boxed{c}$. Если же в первом туре на выбор предлагаются альтернативы (b, c), итоговый результат получается другой:

$$(b, c) \Rightarrow b; \quad (a, b) \Rightarrow \boxed{a}.$$

Сознавшийся и представивший доказательства — выходит на свободу, упорствующий — получает 9 лет тюрьмы. Если оба не сознаются — получают по году (например, за незаконное хранение оружия). Оба сознаются — получают по 8 лет.

Наконец,

$$(a, c) \Rightarrow c; \quad (b, c) \Rightarrow \boxed{b}\,.$$

Три варианта голосования — три разных победителя! *Результат определяется не голосующими, а тем, кто устанавливает правила игры* (систему голосования).

Пусть теперь речь идет не о трех экспертах, а о многочисленном электорате, и каждый голосует за лучшую с его точки зрения альтернативу. Допустим, 45 % голосующих ранжируют a, b, c как (a, b, c). Общая картина:

45 % :	a	b	c
40 % :	b	c	a
15 % :	c	a	b

(10.7)

Побеждает a, набирающее 45 % голосов. Но если b исключается из голосования — побеждает c!

Такой же казус возникает в системе (10.7) и при другой процедуре: если ни один из кандидатов не набирает более 50 % голосов, во второй тур выходят два лучших, и там уже победитель определяется простым большинством. Опять-таки побеждает a, но если b исключается — побеждает c!

Уже из этих примеров ясно, что универсального решающего правила не существует. Какая бы ни была система голосования, найдется такая совокупность индивидуальных предпочтений, на которой система будет давать сбой. Формулировка, конечно, размыта. Чтобы придать ей строгость, выдвигается список разумных требований[4], и тогда *теорема Эрроу* утверждает отсутствие подходящего решающего правила. В списке требований имеется запрещение на диктатуру — голосуют сто человек, а мнение 42-го объявляется коллективным. При исключении запрета теорема Эрроу приобретает экзотический вид.

10.4.1. Теорема. *Единственная разумная система голосования — это диктатура.*

[4] Например: (*независимость*) результат сравнения A и B может зависеть только от индивидуальных сравнений между собой, но не с другими альтернативами; (*монотонность*) если один из голосующих меняет свое мнение в пользу A, то итоговое положение A не может ухудшиться.

Глава 11

Оптимизация

Ничто так не помогает сосредоточиться, как близость виселицы.

Сэмюэль Джонсон

11.1. Морсовские седла

Точки, в которых градиент обращается в нуль, называют *критическими*. Как и в одномерном случае, где оптимум можно оценивать по знаку второй производной, в общей ситуации тоже можно судить о характере критической точки по квадратичной части в разложении Тейлора. Если второй дифференциал (*гессиан*) положительно определен, т. е.

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0,$$

то в критической точке x^* — минимум, поскольку

$$f(x^* + \Delta x) > f(x^*)$$

в малой окрестности x^*. В случае отрицательной определенности — максимум.

В окрестности невырожденной критической точки (с невырожденным гессианом) любой функционал заменой переменных приводится к сумме «± квадратов». Точная формулировка известна как

11.1.1. Лемма Морса. *Пусть гладкая функция*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

имеет в нуле невырожденную критическую точку, и $\varphi(0) = 0$. Тогда в достаточно малой окрестности нуля существует локальная система координат $z_1, \ldots, z_n$, в которой [1)]

$$\varphi[x(z)] = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 \ldots - z_n^2, \tag{11.1}$$

причем $x(z)$ — диффеоморфизм, а k — максимальная размерность подпространства, на котором матрица Гессе $\nabla^2 \varphi$ положительно определена.

1) Функция (11.1) называется *морсовским k-седлом*.

Лемма 11.1.1 показывает, что невырожденные критические точки, которым отвечают *гессианы* одинакового ранга[2], — эквивалентны друг другу[3].

При вырождении матрицы Гессе $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$ ситуация усложняется. В скалярном случае о характере критической точки можно судить по первому ненулевому члену ряда Тейлора. Широко распространен миф, что для функций n переменных дело обстоит аналогичным образом. На самом деле это не так. Вопрос об эквивалентности в нуле функции $\varphi(x)$ и ее *k-струи*[4] $j^k\varphi(x)$ — довольно сложен, и упирается в выяснение свойств полинома $j^k\varphi(x)$, обеспечивающих эквивалентность $j^k\varphi(x)$ и $j^k\varphi(x) + q(x)$ при любой функции $q(x)$, разложение которой начинается со степени $m > k$. При положительном ответе на этот вопрос функцию $\varphi(x)$ называют *k-определенной* в нуле.

11.1.2. Пример[5]**.** *Функция $x_1 x_2^2$ не является k-определенной ни при каком k.*

11.1.3. Пример. *Функция*

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1^{11} + g(x_1, x_2),$$

где разложение в ряд Тейлора $g(x_1, x_2)$ начинается с членов порядка не менее 12-го, оказывается 11-определенной, и поэтому эквивалентна вблизи нуля многочлену $x_1 x_2^2 + x_1^{11}$. О неэквивалентности $x_1 x_2^2$ и $x_1 x_2^2 + x_1^{11}$ можно судить по различию их линий нулевого уровня: $x_1 x_2^2 = 0$ удовлетворяют обе оси координат, а $x_1 x_2^2 + x_1^{11} = 0$ — только $x_1 = 0$.

11.1.4. Пример. *Функция*

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^5 + x_2^5,$$

---

[2] Напомним, что *рангом квадратичной формы* называется не ранг задающей матрицы, а число отрицательных слагаемых в каноническом представлении, каковое сохраняется при невырожденных преобразованиях.

[3] Гладкие функции $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ локально эквивалентны в нуле, если существует такой локальный диффеоморфизм $z(x)$, что

$$\varphi(x) = \psi[z(x)] + \xi$$

в некоторой окрестности нуля при подходящей константе ξ. Если при этом $\nabla\varphi(0) = \nabla\psi(0) = 0$, говорят об *эквивалентности критических точек.*

[4] Начальный отрезок ряда Тейлора,

$$j^k\varphi(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{\varphi^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} x^a,$$

называется *k-струей* функции φ в нуле. Считается, что φ имеет в нуле *порядок k*, если первой ненулевой производной является $\varphi^{(k)}(0)$.

[5] О примерах типа 11.1.2–11.1.6 см.: *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980.

которая не является 5*-определенной, но* 6*-определена*(!), *т. е.* $x_1^5+x_2^5$ *и* $x_1^5+x_2^5+\psi(x)$ *гарантированно эквивалентны в нуле лишь в том случае, когда разложение* $\psi(x)$ *начинается со степени* $m \geqslant 7$.

11.1.5. Пример. *Функции*

$$f(x,y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2,$$
$$g(x,y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2 + h(x,y),$$

где разложение $h(x,y)$ *начинается с членов порядка не менее четвертого, в общем случае могут быть не эквивалентны. Однако если разложение* $h(x,y)$ *начинается лишь с членов пятого порядка, то* f *и* g *— эквивалентны.* (!)

11.1.6. Пример. *Оба многочлена*

$$f_1(x,y) = x^2 - 2xy + y^2,$$
$$f_2(x,y) = x^2 - y^2$$

обращаются в нуль при $x = y$, *второй — также при* $x = -y$.

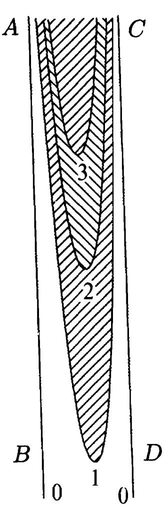
Между ними имеется принципиальная разница. Функция f_2 *определяет седло, и седловой характер критической точки не может быть нарушен добавлением членов третьего порядка и выше. Ничего подобного нельзя сказать о первом многочлене* f_1. *Прибавление к нему членов более высокого порядка может менять характер критической точки, так или иначе.*

11.2. Взаимодействие экстремумов

Сосуществование экстремумов подчиняется определенным правилам, что уже частично рассматривалось в п. 9.3. В скалярном случае, если некоторая функция $\varphi(x)$ имеет хотя бы два локальных минимума, то у нее должен быть локальный максимум. В многомерном случае это уже не так.

11.2.1. Пример. *Функция* $\varphi(x) = x_1^2 - \cos x_2$ *имеет бесконечно много минимумов в точках* $\{0, 2k\pi\}$ *и ни одного максимума.*

Правда, у $\varphi(x)$ из п. 11.2.1 есть *седловые* критические точки $\{0, (2k+1)\pi\}$, без которых, вообще говоря, можно обойтись. Ключом к построению различного рода примеров оптимизационного характера служит конструкция 9.3.1. Напомним суть дела.



9.3.1. Пример. *Пусть в плоскости на полосе, ограниченной параллельными прямыми AB и CD, задана функция $y = \varphi(x)$, график которой представляет собой горный хребет, уходящий «тем выше — чем севернее». Уровень $\varphi(x)$ на прямых AB и CD — нулевой, а срезы $\varphi(x) = c > 0$ — тем севернее, чем больше $c > 0$, и* $\operatorname{grad}\varphi(x)$ *везде отличен от нуля. Такой функцией, например, является*

$$\varphi(x) = x_1(1 - x_1)e^{x_2}$$

в полосе $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$.

Таким образом, полоса делит плоскость на две части (левую и правую), и $\varphi(x)$ внутри $ABCD$ убывает по мере приближения к AB и CD, т. е. градиент $\varphi(x)$ в близких к AB и CD точках направлен внутрь полосы. Это позволяет продолжать $\varphi(x)$ на всю плоскость «нисходящим образом». Левее AB, например, устроить локальный минимум (продавив воронку в точке x^*), а правее CD образовать склон, уходящий в минус бесконечность. В таком варианте *при одном локальном минимуме — глобального не будет вообще*. В другом варианте, продавив по обе стороны от полосы по одной воронке, получаем два локальных минимума без дополнительных критических точек[6]. Организуя систему горных хребтов, которая делит равнинную часть на N компонент связности, и продавливая в каждой «компоненте» воронку, получаем функцию, все N критических точек которой являются точками локального минимума — при отсутствии каких бы то ни было других критических точек.

Рассматриваемую проблематику дополнительно освещают следующие два результата — см. [3, т. 7].

[6] Следовательно, горный перевал при наличии двух вершин — необязателен. Его можно утащить в бесконечность. Однако на замкнутой поверхности «перевал» девать некуда. Поэтому на сфере невозможно задать функцию, у которой два локальных минимума и нет других критических точек.

11.2.2. Теорема. *Пусть x^* — единственная критическая точка функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию неограниченного роста*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty. \tag{11.2}$$

Тогда в x^* достигается глобальный минимум функции[7] $\varphi(x)$.

11.2.3. Лемма. *Пусть* 0 *— единственная критическая точка функции $\varphi(x)$, и $\|\nabla\varphi(x)\| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ при $\|x\| \geqslant r_0 > 0$. Тогда потенциал $\varphi(x)$ удовлетворяет условию* (11.2).

11.3. Вариационное исчисление

Вариационное исчисление изучает задачи типа

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt, \tag{11.3}$$

где, в данном случае, ищутся гладкие функции $q(t)$, принимающие на концах заданного промежутка времени $[t_0, t_1]$ фиксированные значения $q(t_0)$ и $q(t_1)$.

Речь в (11.3) идет о бесконечномерной задаче оптимизации. Разумеется, необходимо договориться, какое *функциональное пространство* подразумевается, но решить этот вопрос раз и навсегда не удается. Пространство E приходится подбирать так, чтобы задача решалась при разумных усилиях. Казалось бы, необходимое условие оптимума определяется равенством нулю градиента ∇W. Но градиент является вектором *сопряженного пространства*, что создает дополнительные, часто значительные трудности — подробности в [3, т. 5]. Не говоря о том, что сами задачи вариационного исчисления не всегда имеют решение по не вполне очевидным причинам, см. пример 5.4.1 и вообще пп. 5.3, 5.4. Добавим еще два экземпляра.

11.3.1. Пример Гильберта. *Для задачи*

$$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{t}\,\right)^2 \dot{q}^2(t) \to \min, \qquad q(0) = 0, \quad q(1) = 1$$

---

[7] Условие (11.2) само по себе достаточно для существования у функционала $\varphi(x)$ глобального минимума — без упоминания о существовании критической точки и даже без предположения гладкости.

уравнением Эйлера служит

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sqrt[3]{t}\,\right)^2\dot{q}(t)\right] = 0,$$

что приводит к решению $q(t) = \sqrt[3]{t}$, *которое действительно обеспечивает минимум, но не является непрерывно дифференцируемым на* $[0, 1]$.

11.3.2. Пример Вейерштрасса. *В задаче*

$$\int_0^1 t^2\dot{q}^2(t) \to \min, \qquad q(0) = 0, \quad q(1) = 1$$

уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}[t^2\dot{q}(t)] = 0$$

имеет общее решение $q(t) = \alpha/t + \beta$, *ни одно из которых не проходит через нужные точки.*

Подобного сорта неприятности могут возникать по нескольким причинам. Одна из них — отсутствие допустимых решений. Но если в $\mathbb{R}^n$ выяснение сводится к проверке разрешимости системы неравенств, то здесь ситуации бывают весьма сложные. Другая причина — специфика бесконечномерных пространств, в которых непрерывный функционал на ограниченном замкнутом множестве не обязан достигать своего минимума. Приятное исключение — гильбертовы пространства.

11.3.3. Теорема [3, т. 5]. *Непрерывный выпуклый функционал, определенный на гильбертовом пространстве, достигает своего минимума на любом выпуклом замкнутом ограниченном множестве.*

Такое преимущество жалко терять. Поэтому при исследовании вариационных задач определенную часть пути выгодно проходить по «гильбертовой» территории.

Возвращаясь к поиску минимума функционала (11.3), заметим, что классические методы опираются на варьирование скалярной функции

$$\xi(\tau) = W(q + \tau\delta q).$$

В случае функции двух переменных $z = \varphi(x, y)$ этому соответствует изучение вертикальных сечений графика $z = \varphi(x, y)$, из чего, конечно, гарантий существования минимума $\varphi(x, y)$, равно как и $W(q)$, — извлечь нельзя.

11.3.4. Типовой пример. *Пусть*

$$z = \varphi(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Сужение $\varphi(x, y)$ на любую прямую $y = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$,

$$\phi(x) = \varphi(x, \alpha x) = \alpha^2 x^2 - 3\alpha x^3 + 2x^4,$$

принимает в нуле локально минимальное значение, поскольку

$$\phi''(0) = 2\alpha^2 > 0.$$

На прямых $x = 0$, $y = 0$ — тоже минимум. Тем не менее в сколь угодно малой окрестности нуля $\varphi(x, y)$ принимает не только положительные, но и отрицательные значения (для $y = \beta x^2$, $1 < \beta < 2$).

Тем не менее «наивная» методика работает, и во многих случаях легко и просто приводит к искомому решению[8], потому что решение *уравнений Эйлера* оказывается единственным, а наличие минимума вытекает из «физических» соображений.

Получить достаточные условия оптимума W с помощью второй вариации — тем более не просто. Из $\delta^2 W(q) = \xi''(0) \geqslant 0$, и даже $\xi''(0) > 0$, выводятся условия второго порядка, но они остаются *необходимыми*: *условие Лежандра* $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \geqslant 0$, *условие Вейерштрасса*:

$$E(q, \dot{q}, p, t) \geqslant 0,$$

где

$$E(q, \dot{q}, p, t) = L(q, \dot{q}, t) - L(q, p, t) - \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}(\dot{q} - p),$$

а также *условия Вейерштрасса—Эрдмана*, требующие дополнительно непрерывности производных

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad \text{и} \quad L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

в точках излома экстремалей. Перечисленные условия до уровня достаточных дожимаются дополнительными усилиями [3, т. 7, п. 7.5].

---

[8] Тогда как соблюдение «высоких стандартов» функционального анализа нередко заводит ситуацию в тупик, где из-за нерефлексивности пространств вопросы дифференцируемости превращаются в кошмар. Поэтому «дедовские» методы имеют свои преимущества. Слабое звено — проблема существования решения, на чем делается упор при попытках перетащить вариационное исчисление на поле функционального анализа.

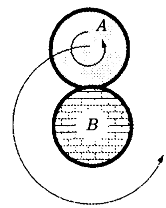
Глава 12

Перечень фактов и определений

По возможности дается полная формулировка контрпримеров, но в ряде случаев — где суть все равно непонятна без сопровождающих комментариев — список опускается на уровень оглавления. Некоторые темы вообще выпадают из перечисления.

12.1. Интуиция как источник парадоксов

1.1.1 Пример. *Мало кто готов согласиться, что круг A, катящийся без проскальзывания по неподвижному кругу B, за один оборот вокруг B — сам по себе делает два оборота.* **(!)** *Другими словами, любая фиксированная точка на ободе A к моменту первого возвращения круга в исходное положение — совершает два оборота вокруг центра A.*



1.3.3 Парадокс Смейла. *Сферу в трехмерном пространстве можно вывернуть наизнанку непрерывной деформацией с возможными самопересечениями, но без складок.*

1.4.1 Парадокс увеличения численности волков после отстрела. *По здравому размышлению — бред, тем не менее — факт. Действуя без математики, биологи долгое время терялись в догадках, привлекая объяснения мистического толка.*

12.2. Числа и множества

2.1.1. *Квадрат и отрезок равномощны.*

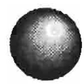
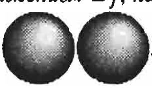
2.1.2. Канторово множество *C получается последовательным выбрасыванием третей из сегмента $[0, 1]$. Сначала $[0, 1]$ делится на три равные части, и средняя* **(интервал)** *удаляется. С каждой из оставшихся частей повторяется аналогичная операция — и так до бесконечности. В пределе от $[0, 1]$ и остается как раз множество C.*

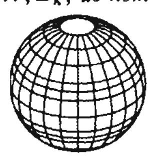
2.1.3. Гипотеза континуума. *Безуспешные попытки найти промежуточное по мощности множество постепенно привели Кантора к убеждению, что «промежуток» пуст — вслед за счетным множеством сразу идет континуум.*

2.2.1. Аксиома выбора. *В любом семействе Φ непустых множеств в каждом $X \in \Phi$ можно выбрать по одному элементу. Другими словами, существует функция выбора f, ставящая в соответствие каждому $X \in \Phi$ элемент $f(X) \in X$.*

2.2.2. Теорема Цермело. *Всякое множество X можно вполне упорядочить так, что у любого подмножества $A \subset X$ будет наименьший элемент $x_0 \in A$.*

2.2.3. Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X любое упорядоченное подмножество ограничено снизу, то в X существует минимальный элемент x^*.*

2.3.1. Парадокс Банаха—Тарского. *Шар $B \subset \mathbb{R}^3$,* *, допускает разбиение на конечное число непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_k$, из которых можно составить передвижением B_j, как твердых тел (перенос плюс поворот), два шара того же радиуса,* .

2.3.2. *Шар $B \subset \mathbb{R}^3$,* *, допускает разбиение на конечное число непересекающихся множеств $B_1, \dots, B_k$, из которых можно составить передвижением B_j шар удвоенного радиуса,* .

2.3.3. Определение. *Пусть G — группа изометрий на множестве X. Если существуют $f_1, \dots, f_k \in G$ и разбиение X на конечное число непересекающихся множеств $A_1, \dots, A_k$, такие что $f_1(A_1), \dots, f_k(A_k)$ также не пересекаются и $\bigcup_j f_j(A_j) = Y$, то X и Y называют изометрично разложимыми,* ***$\mathfrak{i}$-разложимыми*** *либо* ***$\mathfrak{i}$-эквивалентными****, $X \overset{i}{\sim} Y$.*

2.3.4. Теорема. *Любое множество $X \subset \mathbb{R}^3$, имеющее внутренние точки, — парадоксально разложимо.*

2.3.5. Теорема. *Любые множества $X, Y \subset \mathbb{R}^3$, имеющее внутренние точки, — $\mathfrak{i}$-эквивалентны.*

2.4.1. Факт. *Пусть Ω — конечное или счетное множество точек на окружности C. Тогда $C \setminus \Omega$ можно разбить на два непересекающихся множества A и B, и после* *поворота B на некоторый угол — из A и повернутого $\varphi(B)$, $A \cap \varphi(B) = \varnothing$, сложить полноценную окружность C.*

2.4.2. Факт. *Поворот множества B «как твердого тела» может увеличивать B в смысле строгого вложения, $\varphi(B) \supset B$.*

2.4.3. Факт. *Окружность $C \subset \mathbb{R}^2$ допускает разбиение на счетное число множеств $B_1, B_2, \ldots$, из которых поворотами B_j можно составить две окружности C.*

2.5.1. Факт. *Группа $\boldsymbol{G}$ может быть разрезана на четыре части*

$$G(f), G(f^{-1}), G(g), G(g^{-1}),$$

и их поворотами — удвоена.

2.5.2. Факт. *Множество всех целых чисел $\mathcal{M}$, — записываемых с помощью цифр $\{1, 3, 5, 7\}$ так, что 1 и 3 не стоят рядом, так же как 5 и 7, — может быть разбито на четыре подмножества A, B, C, D таким образом, что после зачеркивания первой цифры у чисел из A и C, будет*

$$A' \cup B = \mathcal{M}, \qquad C' \cup D = \mathcal{M},$$

где штрих обозначает «зачеркивание первой цифры».

2.6.1. Теорема. *Орбита $O_x = \{y : y = \boldsymbol{h}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{h} \in \boldsymbol{G}\}$ может быть разбита на четыре множества A, B, C, D, из которых поворотами можно сложить две орбиты:*

$$A \cup fB = O_x, \qquad C \cup gD = O_x.$$

2.7.1. Разрывная линейная функция. *Аксиома выбора влечет за собой существование разрывных решений функционального уравнения*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$

2.10.2. Теорема Кантора—Бернштейна. *Если A_0 равномощно подмножеству $B_1 \subset B_0$, а множество B_0 — подмножеству $A_1 \subset A_0$, то A_0 и B_0 — равномощны.*

2.10.3. Лемма. *Если $A_2 \subset A_1 \subset A_0$ и множества A_2 и A_0 равномощны, то все три множества равномощны.*

2.10.4. Лемма. *Если $\boldsymbol{X}_2 \subset \boldsymbol{X}_1 \subset \boldsymbol{X}_0$ и множества $\boldsymbol{X}_2$ и $\boldsymbol{X}_0$ изометрично разложимы, то все три множества изометрично разложимы.*

2.10.6. Парадокс Хаусдорфа. *Сфера в R^3 после исключения счетного множества Ω может быть разбита на три конгруэнтных множества A, B, C, таких что $B \cup C$ также конгруэнтно любому из A, B, C.*

12.3. Мера и категория

3.1.1. *Счетное объединение нуль-множеств — также нуль-множество.*

3.2.1. Контрпример Шварца *о невозможности определить площадь искривленной поверхности как предел площади вписанной многогранной поверхности.*

3.2.2. Подкова Смейла, *как простой механизм порождения канторова множества.*

3.2.3. Канторово множество ненулевой меры. *Если на каждом шаге делить отрезки на три* ***неравных*** *части, и регулировать длину выбрасываемых средних интервалов, — мера остающегося* ***канторова множества*** $\widehat{C}$ *может быть любой в диапазоне* $(0, 1)$.

3.2.4. Факт. *Мера множества* $\widehat{C}$ *положительна, но оно нигде не плотно.*

3.2.5. Факт. *Граница* $\widehat{C}$ *открытого множества* $[0, 1] \setminus \widehat{C}$ *имеет строго положительную меру.*

3.2.6. Канторово множество без рациональных точек.

3.2.7. Ковер Серпинского — *плоский вариант канторова множества.*

3.3.1. Кривая Пеано — *любое непрерывное отображение отрезка* $[0, 1]$ **на** *квадрат* $[0, 1] \times [0, 1]$.

3.3.2. Пример. *Если* $p^*(t)$ *— кривая Пеано, а* $f(x)$ *— канторова лестница, то траектория* $p^*(f(t))$ *— почти всюду «не движется», тем не менее зачерчивает квадрат, т. е. опять-таки является кривой Пеано, которая дополнительно отображает канторово нуль-множество* C **на** *квадрат* $[0, 1] \times [0, 1]$.

3.4.1. Неизмеримое множество Витали. *Пусть фигурные скобки обозначают дробную часть числа. Введем на* $[0, 1]$ *отношение эквивалентности*

$$x \sim y, \quad \text{если} \quad \{x - y\} \quad \text{рационально},$$

и отнесем к множеству V *по одному элементу из каждого класса эквивалентности (аксиома выбора). Определим далее множества* V_r *как сдвиг* V *на рациональное* r *по модулю* 1,

$$V_r = \{x : x = \{v + r\},\ v \in V\},$$

т. е. к числам v *прибавляется* r, *и берется дробная часть* $v + r$. *Счетное объединение всех непересекающихся множеств* V_r *дает весь промежуток* $[0, 1]$. *Поэтому* $\sum_r^{\infty} \mu(V_r) = 1$, *чего не может быть, если* V *измеримо, поскольку в предположении противного все* $\mu(V_r) = \mu(V)$.

3.4.2. Множество Бернштейна. *Существует такое неизмеримое множество* $B \subset \mathbb{R}$, *что как* B, *так и его дополнение* $\overline{B} = \mathbb{R}\backslash B$ *— оба пересекаются с любым несчетным замкнутым подмножеством* $\mathbb{R}$.

3.4.3. Факт. *Существует множество* D, *дающее в пересечении с любым* $X \subset \mathbb{R}$ *ненулевой меры — неизмеримое множество, причем*

$$\mu_*(D \cap X) = 0, \qquad \mu^*(D \cap X) = \mu(X).$$

Таким образом, всякое $X \subset \mathbb{R}$ *ненулевой меры содержит неизмеримое подмножество, внутренняя мера которого равна нулю, а внешняя — совпадает с мерой* X.

3.5.1. Определение. *Множество* $U \subset X$ *называется множеством первой категории, если оно представимо в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств. Множество не первой категории — называется множеством второй категории.*

3.5.2. Теорема Бэра о категории. *Полное метрическое пространство является множеством второй категории.*

3.5.3. Факт. *Всякое множество* X *на прямой можно разбить на два взаимодополняющих множества* A *и* B, *из которых* A *— множество первой категории, а* B *имеет меру нуль.*

3.5.5. Теорема Серпинского. *В предположении справедливости гипотезы континуума существует такое взаимно однозначное отображение* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что* $f(X)$ *имеет меру нуль в* **томм** *случае, когда* $X \subset \mathbb{R}$ *— множество первой категории.*

3.6.1. Пример. *Пусть* $f : [0,1] \to [0,1]$ *— канторова лестница. Тогда функция* $g(x) = x + f(x)$ *непрерывна, строго монотонна — и потому является гомеоморфизмом* $[0,1]$ *на* $[0,2]$.

3.6.2. Пример. *Простейшим примером неизмеримой функции может служить характеристическая функция* χ_A *любого неизмеримого множества* A. *Потому что прообраз единицы неизмерим,* $\chi_A^{-1}(1) = A$.

3.6.3. Теорема Лузина. *По любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать непрерывную функцию* $\varphi(x)$, *такую что* $f(x) \neq \varphi(x)$ *лишь на множестве меры* $< \varepsilon$.

3.7.2. Теорема Кантора—Бендиксона. *Любое несчетное замкнутое подмножество* $\mathbb{R}^n$ *может быть представлено как объединение счетного множества и — совершенного.*

3.7.3. Факт. *Совокупность всех несчетных замкнутых подмножеств* $\mathbb{R}^n$ *имеет мощность континуума* $\mathfrak{c}$, *т. е. ту же мощность что и* $\mathbb{R}^n$.

3.7.4. Факт. *Совокупность всех борелевских подмножеств* $\mathbb{R}^n$ *имеет мощность континуума, — поэтому «почти все» множества на* $\mathbb{R}$ *не борелевские.*

3.7.6. Пример Мазуркевича. *На плоскости существует множество, дающее в пересечении с любой прямой — две точки.*

12.4. Классический анализ

4.1.2. Пример. *В случае* $\varphi(x) = e^{-x}\cos x$ *образ замкнутого множества* $\{k\pi : k = 0, 1, 2, \ldots\}$ *не замкнут, образ открытого* $(0, \infty)$ *— не открыт.*

4.1.3. *Функция Римана*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad x = \dfrac{m}{n}, \quad \text{дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима}, \\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{иррационально}, \end{cases}$$

непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках.

4.1.4. Канторова лестница. *Пусть функция*

$$f : [0, 1] \to [0, 1]$$

*на **замыкании** каждого выбрасываемого (в процессе построения канторова множества) интервала — принимает значение, равное середине этого интервала. Доопределение* $f(x)$ *в точках второго рода по непрерывности дает непрерывную монотонную функцию* $f(x)$, *производная которой почти всюду равна нулю, — тем не менее* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. *Другими словами,* $f(x)$ *почти нигде на* $[0, 1]$ *не растет, успевая ощутимо вырасти на множестве нулевой меры (несмотря на непрерывность).*

4.1.5. Парадокс Брауэра. *Зададимся следующим вопросом. Могут ли на плоскости три области иметь общую границу? Не общий участок — а одну и ту же границу. Другими словами, может ли некое множество* Γ *делить плоскость на 3 области? Области разные, а граница одна и та же. Похоже на бред, но ответ — положительный.*

4.2.1. Недостижимая изнутри граница. *Рассмотрим в* $\mathbb{R}^2$ *внутренность* Ω *бесконечной полуполосы, диаметр которой на бесконечности быстро стремится к нулю — так что площадь конечна. Далее наматываем «полуполосу убывающей толщины» на некоторую окружность* C, *с каждым витком приближаясь к окружности, но не пересекая ее. В границу* Γ *финальной «картинки» войдет не только боковая поверхность «полуполосы», но и окружность* C. *Точки* $x \in C$ *не будут достижимы изнутри — к ним нельзя подойти вдоль непрерывной кривой.*

4.3.1. Гомеоморфизм, не сохраняющий измеримость и нулевую меру.

4.3.2. Все канторовы множества C и $\widehat{C}$, нулевой и ненулевой меры, гомеоморфны друг другу.

4.3.3. Гомеоморфизм, не сохраняющий категорию.

4.3.4. Гомеоморфизм всюду плотного множества и — нигде не плотного.

4.4.2 Пример. *Производная* ***везде дифференцируемой*** *функции*

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},$$

равная нулю при $x = 0$ *и*

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \textit{при} \quad x \neq 0,$$

разрывна *в точке* $x = 0$, *но обладает свойством Коши.*

4.4.3. Пример. *Везде дифференцируемая функция*

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет неограниченную разрывную в нуле производную, причем $f'(0) = 0$ *и*

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

4.4.4. Пример. *Функция*

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет производную $f'(0) = 1$, *но* ***не монотонна*** *в окрестности нуля.*

4.4.5. Пример. *Функция*

$$f(x) = 2x^2 + x^2 \sin\frac{1}{x^2}$$

имеет в нуле строгий минимум и равную нулю производную, но ее производная в сколь угодно малой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения (сколь угодно большие).

4.5.2. Факт. *В общем случае*

$$\int_a^x f(z)dz = F(x) \not\Rightarrow F'(x) = f(x).$$

4.5.3. Пример. *В случае интегрирования функции Римана* 4.1.3

$$\int_0^x f(x)\,dx \equiv 0,$$

что не так уж легко аккуратно доказать. Результат опять-таки подтверждает 4.5.2, *поскольку* $\dfrac{d0}{dx} \neq f(x)$.

4.5.4. Конечный объем с бесконечным сечением. *При вращении графика кривой* $y = 1/x$ *в диапазоне* $(1, \infty)$ *вокруг оси* x *образуется тело вращения, объем которого,*

$$V = \int_1^\infty \frac{\pi\,dx}{x^2} = \pi,$$

ограничен, но вертикальное сечение, проходящее через ось Ox, *имеет бесконечную площадь*

$$S = 2\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

4.5.5. Парадокс маляра. *Заполнив конечный объем из* 4.5.4 *краской и опустив туда вертикальное сечение этого объема в виде пластинки, получаем странный результат:* π *литров краски хватает для окраски бесконечной площади.*

4.6.1. Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{ax+cy}{bx+dy} = \dfrac{a}{b}$, *но* $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ax+cy}{bx+dy} = \dfrac{c}{d}$.

4.6.2. Пример. У функции

$$f(x,y) = x\sin(1/y), \quad \text{при} \quad x \to 0, \quad y \to 0,$$

существует двойной предел, но только один из повторных.

4.6.3. Пример. *У функции*

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}, & \text{если} \quad x_1, x_2 \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

в нуле существуют и равны оба повторных предела, но двойного — вообще нет.

4.6.4. Пример. *Функция*

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2^2}{x_1^2+x_2^4}, & \textit{если} \quad x_1, x_2 \neq 0; \\ 0, & \textit{если} \quad x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

разрывна в нуле, и потому недифференцируема, но имеет всюду частные производные. В дополнение к ситуации п. 4.6.3 функция g при стремлении x к нулю вдоль любой прямой $x_1 = kx_2$ имеет имеет один и тот же нулевой предел.

4.6.5. Пример. *Функция*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy, & \text{если} \quad x, y \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

имеет в нуле частные производные $f_{xy}(0,0) = 1$, $f_{yx}(0,0) = -1$, что противоречит расхожему представлению о равенстве смешанных производных независимо от порядка дифференцирования. Но в данном случае «не хватает» непрерывности f_{xy} и f_{yx} в окрестности нуля.

4.6.10. Пример. *Пусть*

$$f(x, y) = \begin{cases} g(0, y)\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) & \text{при условии } 0 \leqslant x \leqslant y; \\ 0 & \text{при условии } y \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

В случае $g(0, y) = 2/y$

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 f(x, y)\, dx = 1, \qquad \int_0^1 \lim_{y \to 0} f(x, y)\, dx = 0.$$

4.6.11. Пример. *Рассмотрим функцию $f_n(x)$, равную $1/n$ при условии*

$$0 \leqslant x \leqslant n$$

и нулю для $x > n$. Очевидно, последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно сходится к нулю на $[0, \infty)$, но

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = 1.$$

12.5. Метрические пространства

5.2.3. Пример. *Выберем наугад (равновероятно) k вершин m-мерного куба $[0, 1]^m$, и пусть X обозначает их выпуклую оболочку, а p_{km} — вероятность того, что все вершины многогранника X попарно смежны. При $m \geqslant 4$ и $k \leqslant 2^m$ справедлива оценка*

$$p_{km} > 1 - \frac{k^4}{4}\left(\frac{5}{8}\right)^m.$$

5.2.4. Теорема. *В $\mathbb{R}^3$ можно расположить любое количество выпуклых многогранников, каждая пара которых имеет общую двумерную грань.*

5.3.1. Пример включения большего шара в меньший. *Возьмем отрезок $[-1, 1]$ с обычной метрикой. Шар $|x-1| \leqslant 2-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ лежит строго в единичном шаре $|x| \leqslant 1$.*

5.3.2. Пример. *Если метрика неархимедова, то все треугольники равнобедренные, а любая точка круга $D = \{x : \rho(x, a) < r\}$ — его центр.*

5.3.4. Теорема о вложенных шарах. *В полном метрическом пространстве (X, ρ) пересечение последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров $\overline{B}(r_n, x_n)$ с центрами x_n, радиусы которых r_n стремятся к нулю, непусто. Результат сохраняет силу для вложенных друг в друга замкнутых множеств с диаметрами, стремящимися к нулю.*

5.3.5. Пример. *В ограниченной метрике*

$$\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \tag{12.1}$$

множества $K_n = [n, \infty)$ замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.

5.3.6. Пример. *Рассмотрим множества M_n в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$, состоящие из функций $x(t)$, таких что $|x(t)| \leqslant 2$, $x(0) = 0$ и $x(t) = 1$ при $1/n < t < 1$. Пересечение — опять пусто.*

5.3.7. Пример. *В бесконечномерном банаховом пространстве E на единичной сфере всегда существует* [3, т. 5, лемма 4.3.6] *последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию*

$$\|x_n - x_m\| = 1 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Множества $K_n = \{x_k : k \geqslant n\}$ опять замкнуты, ограничены и вложены друг в друга, но их пересечение — пусто.

5.3.8. Факт. *В банаховом пространстве последовательность вложенных замкнутых выпуклых ограниченных множеств может иметь пустое пересечение. В **гильбертовом** пространстве такая последовательность всегда имеет непустое пересечение.*

5.4.1. Пример. *Вариационная задача Ньютона минимизации функционала*

$$J = \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+(y')^2}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

не имеет решения, поскольку $J > 0$, но $J_n \to 0$ для

$$y_n(x) = x + \sin^2 n\pi x.$$

5.4.3. Теорема. *В бесконечномерном банаховом пространстве L шар не является предкомпактным множеством, и на единичной сфере всегда можно указать последовательность $\{x_n\}$ без точек сгущения, причем даже $\|x_n - x_m\| = 1$ при $n \neq m$.*

5.4.4. Деформация бесконечномерной сферы.

5.5.3. Проблема базиса *в банаховом пространстве E (не в гильбертовом) выглядит несколько иначе. Если базис $\{e_n\}$ в E определить как систему векторов, с помощью которой любой элемент $x \in E$ представи́м сходящимся рядом*

$$x = \sum^{\infty} x_k e_k,$$

то неясно, всегда ли таковой существует (проблема Шаудера). В стандартных ситуациях базисы известны.

5.5.4. Пример. *Стандартная система $\{1, \sin kx, \cos kx\}$ полна в $C[0, 2\pi]$, но не образует базиса. Она образует базис в L_2.*

5.6.1. Факт. *Элементы ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве слабо сходятся к нулю, $e_n \xrightarrow{w} 0$, но $\|e_n\| \equiv 1$.*

5.6.2. Факт. *Замкнутый шар в банаховом пространстве слабо замкнут.*

5.6.3. Пример. *Любое слабо замкнутое множество Ω сильно замкнуто. Но сильно замкнутая единичная сфера в $\boldsymbol{H}$ слабо незамкнута.*

5.6.4. Пример. *Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ непрерывно по совокупности переменных, но не слабо непрерывно. То есть из*

$$x_n \xrightarrow{w} x, \quad y_n \xrightarrow{w} y$$

не следует $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Контрпример: $x_n = y_n = e_n$.

5.6.5. Факт. *Замкнутый шар в гильбертовом пространстве слабо компактен (**теорема Алаоглу—Банаха—Тихонова**). Но единичная сфера в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является слабо компактным множеством.*

5.7.1. Пример. *Поскольку любой непрерывный линейный функционал вполне непрерывен, таковым является и*

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$$

в $C[0,1]$. *Замкнутое множество функций* $M = \{x : \|x\| = 1, x(t) \geqslant 0\}$ *функционал* f *переводит в полуинтервал* $(0, 1]$.

5.8.2. Пример. *Пусть непрерывный оператор умножения* $Ax(t) = tx(t)$ *действует в* $C[0,1]$. *Уравнение*

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t) = 0$$

ненулевых решений $x(t)$ *в* $C[0,1]$ *не имеет. Поэтому собственных значений у* A *нет. Но спектр не пуст,* $\sigma(A) = [0,1]$, *поскольку обратный оператор,*

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \frac{x(t)}{t - \lambda},$$

при $\lambda \in [0,1]$ *неограничен, и определен не на всем* $C[0,1]$. *Схема работает так же при замене* $C[0,1]$ *на* $L_2[0,1]$.

5.8.3. Пример. *Односторонний сдвиг в* l_2:

$$A\{\xi_0, \xi_1, \ldots\} = \{0, \xi_0, \xi_1, \ldots\}.$$

Опять-таки собственных значений нет, а спектр $\sigma(A)$ *представляет собой единичный круг на комплексной плоскости.*

5.9.1. Пример. *Матрица*

$$\begin{bmatrix} 0{,}99 & 1 \\ 1 & 1{,}01 \end{bmatrix}$$

«плоха», потому что изменение ее элементов на 1 % *может увести решение* $Ax = b$ *в бесконечность. Ее детерминант близок к нулю,* $\det A = 10^{-4}$, — *но служит ли это индикатором? Не служит. Потому что у матрицы*

$$\begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

детерминант такой же, но это «хорошая» матрица, потому что изменение ее элементов на 1 % *дает в решении относительную ошибку того же порядка.*

5.9.3. Пример. *Если у полинома*

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)\ldots(\lambda - 20),$$

имеющего корни $\{1, 2, \ldots, 20\}$, *изменить коэффициент при* x^{19} *с* -210 *всего лишь на* $-210 + 2^{-23}$, *то у возмущенного полинома появляется, в частности, пара комплексно сопряженных корней с мнимыми частями* $\sim \pm 3i$.

Теперь достаточно выписать сопровождающую матрицу многочлена $p(\lambda)$, — *как получится пример матрицы* 20×20, *у которой изменение одного элемента на величину* 2^{-23} (*приблизительно на* 2^{-24} %) *меняет спектр «революционным» образом.*

12.6. Теория вероятностей

6.1.1. Парадокс Кардано. *При бросании двух шестигранных костей сумма выпавших чисел получается равной — как 9, так и 10 — в двух вариантах:*

$$\text{сумма } 9 \quad \Leftrightarrow \quad (3,6)\ (4,5),$$
$$\text{сумма } 10 \quad \Leftrightarrow \quad (4,6)\ (5,5).$$

Но вывод о равенстве вероятностей этих событий — ошибочен. Способов получения сумм 9 и 10 на самом деле больше, и их количество разное:

$$\text{сумма } 9 \quad \Leftrightarrow \quad (3,6)\ (6,3)\ (4,5)\ (5,4),$$
$$\text{сумма } 10 \quad \Leftrightarrow \quad (4,6)\ (6,4)\ (5,5).$$

Таким образом, из 36 возможных пар чисел 4 пары дают в сумме 9, и только 3 — 10. Вероятности, соответственно, равны $4/36$ и $3/36$, что подтверждает эксперимент — частоты, с которыми в сумме выпадают 9 и 10, стремятся к указанным вероятностям.

6.1.2. Пример. *Имеется три картонки. На одной — с обеих сторон нарисована буква A, на другой — B. На третьей картонке с одной стороны A, с другой — B. Одна из картонок выбирается наугад и кладется на стол. Предположим, на видимой стороне картонки оказывается буква A. Какова вероятность, что на другой стороне — тоже A? «Одна вторая», — ошибочно отвечает интуиция.*

6.1.3. Парадокс транзитивности. *Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из 6 точек, в которых с. в. X, Y, Z, W с равной вероятностью $1/6$ принимают значения согласно таблице:*

X	6	6	2	2	2	2
Y	5	5	5	1	1	1
Z	4	4	4	4	0	0
W	3	3	3	3	3	3

Очевидно, $X = 6$ с вероятностью $1/3 = 2/6$. В этом случае $X > Y$ независимо от значения Y. С вероятностью $2/3 = 4/6$ величина X равна 2. Тогда $X > Y$, если $Y = 1$, что имеет вероятность $1/2 = 3/6$. Поэтому, с учетом формул умножения вероятностей и суммы непересекающихся событий, итоговая вероятность неравенства $X > Y$ равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично подсчитывается, что $Y > Z$, $Z > W$, — с той же вероятностью $2/3$. Получается цепочка неравенств

$$X > Y > Z > W.$$

Возможность $W > X$ представляется в некотором роде дикой. Тем не менее $W > X$ с вероятностью $2/3$.

6.1.5. Парадокс ожидания серии. *Какая в случайной «01»-последовательности комбинация, 00 или 01, появится раньше? Очевидно, равновероятно, поскольку после первого появления нуля на следующем шаге возникнет либо 0, либо 1, — с вероятностью $1/2$. Напрашивается вывод, что среднее число шагов (среднее время ожидания) m_{00} и m_{01} до появления, соответственно, серий 00 либо 01 — тоже одинаково. Но это не так.*

6.1.6. Факт. *Из «$U > V$ по вероятности», вообще говоря, не следует $\mathbf{E}\{U\} > \mathbf{E}\{V\}$, но $U(\omega) > V(\omega)$, конечно, влечет за собой $\mathbf{E}\{U\} > \mathbf{E}\{V\}$.*

6.2.1. Заблуждение. *В лотерею играть неразумно, поскольку матожидание выигрыша меньше стоимости билета.*

6.2.2. Заблуждение. *Раз страхование выгодно компании, оно невыгодно клиенту.*

6.2.3. Петербургский парадокс. *Если герб при неоднократном бросании монеты выпадает первый раз в n-й попытке, — игроку выплачивается 2^n рублей. Матожидание выигрыша,*

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots = 1 + 1 + \ldots,$$

бесконечно. Поэтому, с точки зрения теории (как бы), за участие в игре денег можно заплатить сколько угодно — казино в любом случае проиграет.

6.3.1. Парадокс Бернштейна. *Бросают две монеты. Пусть выпадение первой монеты гербом обозначает событие A, второй — B. Наконец, C означает, что только одна монета выпала гербом. Для симметричных монет все три события попарно независимы, поскольку*

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, \qquad P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}. \tag{12.2}$$

C независимостью A и B интуиция согласна, но не с независимостью A и C (или B и C). И у нее есть основания. Независимость (12.2) имеет как бы «арифметический» характер, является результатом численного совпадения. Качественные отличия взаимосвязей событий выявляются при нарушении симметрии монет. Для несимметричных монет (с вероятностью выпадения герба $\neq 1/2$) свойство независимости A и B сохраняется, а вот равенства

$$P(AC) = P(A)P(C) \quad \text{и} \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

нарушаются.

6.4.1. Пример. *Случайные величины* X *и* $Y = X^2$, *при равномерном распределении* X *в промежутке* $[-1, 1]$, *— связаны функциональной зависимостью, но их корреляция равна нулю,*

$$R_{xy} = \int_{-1}^{1} \frac{x(x^2 - m_y)}{2}\, dx = 0.$$

6.4.2. Корреляционные парадоксы. *Ненулевая корреляция свидетельствует о зависимости случайных величин, из чего иногда делались ошибочные выводы о наличии причинных связей. Но причинно-следственная связь и функциональная — совсем разные вещи. Например, процессы, подверженные влиянию солнечной активности, могут коррелировать друг с другом, и их функциональная связь может быть использована для прогноза, но не для объяснения.*

6.6.1. Пример. *Последовательность независимых с. в.* X_n *при условии*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n\} = \frac{1}{n}$$

сходится к нулю по вероятности, но не сходится ни в среднем, ни почти наверное.

6.6.2. Пример.

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n\} = \frac{1}{n^2}.$$

Для «п. н.»-сходимости стремление к нулю $\mathbf{P}\{|X_n| > \varepsilon\}$ *достаточно быстрое, но* $\mathbf{E}\, X_n^2 = 1 \nrightarrow 0$.

6.6.3. Пример. $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} 0$ *в случае*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = 1\} = \frac{1}{n},$$

но X_n *не сходится к нулю почти наверное.*

6.6.5. Пример. *Пусть речь идет о бросании симметричной монеты, и при четном* n *с. в.* $X_n = 1$, *если выпадает герб, и* $X_n = 0$ *в противном случае, а при нечетном* n *—* $X_n = 0$, *если выпадает герб, и* $X_n = 1$ *в противном случае. Сходимость по распределению есть, по вероятности — нет.*

6.6.7. Пример. *Случайная величина* X_n, *определяемая соотношениями*

$$\mathbf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\{X_n = n^2\} = \frac{1}{n},$$

сходится к нулю по вероятности, $X_n \xrightarrow{P} 0$, *но* $\mathbf{E}\,\{X_n\} \to \infty$.

6.6.8. Пример. *Пусть X имеет распределение Коши, а*

$$X_n = \begin{cases} X, & \text{если } |X| \leqslant n; \\ 0, & \text{если } |X| > n. \end{cases}$$

Тогда $X_n \xrightarrow{D} X$, все матожидания $\mathbf{E}\{X_n\}$ существуют, но $\mathbf{E}\{X\} = \infty$. Если же $X_n = X/n + Z$, где $\mathbf{E}\{Z\} < \infty$, — получается другая «неприятность»:

$$X_n \xrightarrow{D} Z, \qquad \mathbf{E}\{Z\} < \infty,$$

но ни одно $\mathbf{E}\{X_n\}$ не существует.

12.7. Алгоритмическая неразрешимость

7.1.3. Теорема. *Любая попытка уточнить понятие вычислимой функции так, чтобы каждая $f(n)$ была определена при любом n, а множество всех $f(n)$ оставалось счетно, — обречена на провал.*

7.2.4. Теорема. *Существует перечислимое, но неразрешимое множество положительных целых чисел.*

7.2.7. Теорема. *Множество эффективно вычислимых функций неперечислимо (не может быть эффективно пронумеровано).*

7.3.2. Теорема. *Диофантовость множества равносильна перечислимости.* **(!)**

7.3.4. Полином, генерирующий все простые числа.

7.4.1. Первая теорема Гёделя о неполноте. *Какова бы ни была непротиворечивая совокупность аксиом — в арифметике существует такое утверждение A, что ни A, ни его отрицание $(\neg A)$ — не доказуемы.*

7.4.2. Вторая теорема Гёделя о непротиворечивости. *Если непротиворечивая теория T содержит в себе арифметику, то непротиворечивость T недоказуема в T.*

7.4.3. Теорема. *Какова бы ни была непротиворечивая теория, содержащая арифметику, существует не имеющий целых положительных корней полином $Q(x_1, \ldots, x_k)$, отсутствие у которого таких корней недоказуемо.*

7.4.4. Теорема. *Существует конкретный — который можно указать — полином $P(x) = P(x_1, \ldots, x_k)$, такой что высказывание:*

«уравнение $P(x) - y = 0$ неразрешимо по x при некоторых y»

истинно, но недоказуемо ни в какой непротиворечивой системе аксиом, включающей примитивную арифметику.

7.6.1. Теорема. *Множество $\mathcal{P}$ неразрешимых полиномов $P(x)$ — неперечислимо, тем более, неразрешимо.*

7.6.2. Теорема. *Арифметика неаксиоматизируема, даже при включении в систему бесконечного, но конструктивно (перечислимо) задаваемого множества аксиом.*

7.8.2. Теорема Райса. *Любое нетривиальное свойство вычислимых функций алгоритмически неразрешимо.*

12.8. Дискретная проблематика

8.1.1. HSI-проблема Тарского.

8.2. Парадокс Сколема.

8.4.1. Парадокс категоричности.

8.6.1. Теорема. *Если теория ZF непротиворечива, то гипотеза континуума не является теоремой теории ZFC.*

8.6.2. Теорема. *Если теория ZF непротиворечива, то аксиома выбора не является теоремой теории ZF.*

8.7.4. Теорема. *Множество полиномиальных алгоритмов распознавания перечислимо, но неразрешимо.*

8.8. Интерактивные протоколы.

12.9. Динамические системы

9.1.1. Пример. *Решением $\dot{x} = 2\sqrt{x}$ в области $x \geqslant 0$ служат функции $x(t) = (t+C)^2$ при $t \geqslant -C$. Но в данном случае есть также особое решение $x(t) \equiv 0$. Помимо этого, решениями будут функции, получаемые склеиванием $x(t) \equiv 0$ с полупараболами*

$$x(t) = (t+C)^2, \quad t \geqslant -C.$$

Получается, что через любую точку оси $x = 0$ проходит бесчисленное множество различных траекторий уравнения $\dot{x} = 2\sqrt{x}$.

9.1.2. Пример. *Любое решение $x(t) = \operatorname{tg}(t+C)$ уравнения*

$$\dot{x} = 1 + x^2$$

определено лишь на промежутке длины π по причине ухода траекторий в бесконечность.

9.2.3. Пример *неустойчивого равновесия* x^*, *к которому стремятся все траектории* $x(t)$ *при* $t \to \infty$.

9.2.4. Пример. *В скалярном случае*

$$\dot{x} = -xe^{-t}$$

функция Ляпунова $V(x) = x^2$ *строго убывает,*

$$\dot{V} = 2x\dot{x} = -2x^2e^{-t} < 0 \qquad \text{при} \qquad x \neq 0,$$

но система «быстро устает», и решения

$$x(t) = ce^{e^{-t}}$$

останавливаются по дороге к равновесию, не достигая в пределе $x^* = 0$.

9.2.5. Пример. *Система (в полярных координатах)*

$$\dot{r} = -re^{-t}, \qquad \dot{\varphi} = 1$$

все время совершает оборот в секунду, но радиус-вектор r *не убывает до нуля, хотя производная* $V(r) = r^2$ *по времени строго отрицательна на любой траектории* $\{r(t), \varphi(t)\}$, *причем* $\{r(t), \varphi(t)\} \nrightarrow 0$ *при* $t \to \infty$.

9.2.6. Контрпример к гипотезе KMY. *Пусть* $n \geqslant 3$ *и* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *определяется как*

$$F(x) = \{-x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3),\ -x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2,\ -x_3, \ldots,\ -x_n\}.$$

Тогда существует решение $\dot{x} = F(x)$, *уходящее в бесконечность при* $t \to \infty$.

9.3.2. Пример. *В случае*

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} + x_2^2$$

функция $V(x)$ *строго больше нуля везде кроме* $x = 0$, *но при движении по минус градиенту,*

$$\dot{x} = -\operatorname{grad} V(x),$$

не все траектории $x(t)$ *сходятся к равновесию — некоторые уходят в бесконечность.*

9.4.1. Пример. *Дифференциальному уравнению*

$$\dot{x} = -x + e^{-\lambda t} \tag{12.3}$$

в случае $\lambda \neq 1$ *удовлетворяет семейство траекторий*

$$x(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{1 - \lambda} + Ce^{-t}, \quad C \text{ — произвольная константа.}$$

Решением (12.3) *в случае* $\lambda = 1$ *является*

$$x(t) = te^{-t} + Ce^{-t}.$$

В первом случае при $t \to \infty$ *все траектории сходятся к нулю, во втором — уходят в бесконечность. Таким образом, малейшее возмущение параметра* $\lambda = 1$ *превращает «идущую вразнос» систему* (12.3) *в асимптотически устойчивую.*

9.4.2. Пример. *Система второго порядка*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

при любом $\lambda < 0$ *имеет гурвицеву матрицу* $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, *каковая в случае* $\boxed{\lambda = -1}$ *неустойчива.*

9.4.3. Факт. *Гурвицева матрица не обязательно устойчива.*

9.4.5. Пример Бореля. *Маятник на пружине имеет интеграл энергии*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kx^2 = E$$

и периодические (синусоидальные) решения. Сколь угодно слабая подкачка энергии εt *меняет уравнение движения на*

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + kx^2 = E + \varepsilon t,$$

что после дифференцирования переходит в

$$(m\ddot{x} + 2kx)\dot{x} = \varepsilon.$$

Последнее уравнение исключает возможность $\dot{x} = 0$, *в силу чего решения возможны только монотонные (колебания пропадают).*

9.4.6. Пример. *В системе*

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3$$

бифуркационным значением является $\varepsilon = 0$. *При* $\varepsilon \leqslant 0$ *система имеет единственное нулевое равновесие, которое асимптотически устойчиво. При сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$ *оно становится неустойчивым, а в его окрестности появляется два других, асимптотически устойчивых равновесия* $x = \pm\sqrt{\varepsilon}$. *В терминах потенциалов* $(f(x,\varepsilon) = -U'(x,\varepsilon))$ *ситуация равносильна возмущению потенциала* $U(x) = (1/4)x^4$ *добавкой* $-(\varepsilon/2)x^2$. *Исходный нулевой минимум* $U(x)$ *при* $\varepsilon > 0$ *превращается в локальный максимум, по бокам которого возникают новые локальные минимумы.*

9.4.7. Пример. *Для системы*

$$\dot{x} = \varepsilon x^2 - x$$

с асимптотически устойчивым равновесием при любом ε *значение* $\varepsilon = 0$ *критично по другой причине. При возмущении* ε *новое неустойчивое положение равновесия* $x = \varepsilon^{-1}$ *приходит из бесконечности. При этом решения, начинающиеся в точках* $x(0) > \varepsilon^{-1} > 0$, *оказываются непродолжимы вправо; в случае* $x(0) < \varepsilon^{-1} < 0$ *— влево.*

9.4.8. Парадокс Циглера.

9.5.1. Факт. *Если точка подвеса маятника вибрирует, т. е. колеблется с малой амплитудой и большой частотой* $\omega \gg \omega_0$ *— верхнее положение маятника неожиданно становится устойчивым.*

9.6.2. Виброгаситель. *Два тела* A *и* B *упруго соединены пружинами. К телу* A *с массой* m_a *приложена гармоническая сила* $f = \nu \sin \omega t$. *Движение грузов описывается системой уравнений*

$$\begin{cases} m_a \ddot{x} + k_a x - k_b(y - x) = \nu \sin \omega t, \\ m_b \ddot{y} + k_b(y - x) = 0. \end{cases}$$

Совершенно неожиданно, при

$$k_b = m_b \omega^2$$

амплитуда колебаний тела A *оказывается нулевой* **(!)**. *Трения нет, к телу приложена внешняя сила, но оно не движется.*

9.8.1. Пример. *Пусть*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Хотя «рычаг» только один — управление действует только на x_1 *— система управляема, поскольку матрица*

$$U = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

невырождена.

9.9.1. Странный аттрактор Лоренца.

9.9.2. Иерархия циклов Шарковского.

12.10. Игры и теория голосования

Проще ознакомиться с содержанием главы.

12.11. Оптимизация

11.1.2. Пример. *Функция $x_1x_2^2$ не является k-определенной ни при каком k.*

11.1.3. Пример. *Функция*

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2^2 + x_1^{11} + g(x_1, x_2),$$

где разложение в ряд Тейлора $g(x_1, x_2)$ начинается с членов порядка не менее 12-го, оказывается 11-определенной, и поэтому эквивалентна вблизи нуля многочлену $x_1x_2^2 + x_1^{11}$. О неэквивалентности $x_1x_2^2$ и $x_1x_2^2 + x_1^{11}$ можно судить по различию их линий нулевого уровня: $x_1x_2^2 = 0$ удовлетворяют обе оси координат, а $x_1x_2^2 + x_1^{11} = 0$ — только $x_1 = 0$.

11.1.4. Пример. *Функция*

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^5 + x_2^5,$$

которая не является 5-определенной, но 6-определена(!), т. е. $x_1^5+x_2^5$ и $x_1^5+x_2^5+\psi(x)$ гарантированно эквивалентны в нуле лишь в том случае, когда разложение $\psi(x)$ начинается со степени $m \geqslant 7$.

11.1.5. Пример. *Функции*

$$f(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2,$$
$$g(x, y) = 3x^2 + 2x^3 - 6xy^2 + h(x, y),$$

где разложение $h(x, y)$ начинается с членов порядка не менее четвертого, в общем случае могут быть не эквивалентны. Однако если разложение $h(x, y)$ начинается лишь с членов пятого порядка, то f и g — эквивалентны.

11.1.6. Пример. *Оба многочлена*

$$f_1(x, y) = x^2 - 2xy + y^2,$$
$$f_2(x, y) = x^2 - y^2$$

обращаются в нуль при $x = y$, второй — также при $x = -y$.
Между ними имеется принципиальная разница. Функция f_2 определяет седло, и седловой характер критической точки не может быть нарушен добавлением членов третьего порядка и выше. Ничего подобного нельзя сказать о первом многочлене f_1. Прибавление к нему членов более высокого порядка может менять характер критической точки, так или иначе.

11.2.1. Пример. *Функция $\varphi(x) = x_1^2 - \cos x_2$ имеет бесконечно много минимумов в точках $\{0, 2k\pi\}$ и ни одного максимума.*

9.3.1. *Конструкция для построения оптимизационных контрпримеров.*

11.2.2. Теорема. *Пусть* x^* — *единственная критическая точка функции* $\varphi(x)$, *удовлетворяющей условию неограниченного роста*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = \infty.$$

Тогда в x^* *достигается глобальный минимум функции* $\varphi(x)$.

11.3.1. Пример Гильберта. *Для задачи*

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{t})^2 \dot{q}^2(t) \to \min, \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

уравнением Эйлера служит

$$\frac{d}{dt}\left[(\sqrt[3]{t})^2 \dot{q}(t)\right] = 0,$$

что приводит к решению $q(t) = \sqrt[3]{t}$, *которое действительно обеспечивает минимум, но не является непрерывно дифференцируемым на* $[0, 1]$.

11.3.2. Пример Вейерштрасса. *В задаче*

$$\int_0^1 t^2 \dot{q}^2(t) \to \min, \qquad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$$

уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left[t^2 \dot{q}(t)\right] = 0$$

имеет общее решение $q(t) = \dfrac{\alpha}{t} + \beta$, *ни одно из которых не проходит через нужные точки.*

11.3.4. Типовой пример. *Пусть*

$$z = \varphi(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

Сужение $\varphi(x, y)$ *на любую прямую* $y = \alpha x$ $(\alpha \neq 0)$,

$$\phi(x) = \varphi(x, \alpha x) = \alpha^2 x^2 - 3\alpha x^3 + 2x^4,$$

принимает в нуле локально минимальное значение, поскольку

$$\phi''(0) = 2\alpha^2 > 0.$$

На прямых $x = 0$, $y = 0$ — *тоже минимум. Тем не менее в сколь угодно малой окрестности нуля* $\varphi(x, y)$ *принимает не только положительные, но и отрицательные значения* (*для* $y = \beta x^2$, $1 < \beta < 2$).

Сокращения и обозначения

◄ и ► — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

(**?**) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки»

(**!**) — предлагает обратить внимание

«в то**мм** случае» — «в том и только том случае»

АВ — аксиома выбора

ГК — гипотеза континуума

с. в. — случайная величина

п. н. — почти наверное

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \backslash Y$ — объединение, пересечение и разность множеств X и Y

$X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$ — симметрическая разность множеств X и Y

$X \subset Y$ — X подмножество Y, в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

$\varnothing$ — пустое множество

2^{Ω} — множество всех подмножеств множества Ω

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел $[0, 1]$

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

$\mathbb{F}$ — множество вычислимых функций

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

$[a]$ — целая часть числа a

$\{a\}$ — дробная часть числа a

C — либо *канторово множество*, либо «произвольная константа», в зависимости от контекста

$x \equiv a \bmod p$ — «x при делении на p дает в остатке a»

$\exists$ — квантор существования

$\forall$ — квантор общности

$\neg A$ — «не A»

$\overset{i}{\sim}$ — знак изометрической разложимости, или i-эквивалентности

$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A

$\mathbf{E}(X)$ — математическое ожидание случайной величины X

$\mathbf{D}(X) = \mathbf{E}\,[X - \mathbf{E}(X)]^2$ — дисперсия случайной величины X

Литература

1. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963.
2. *Босс В.* Интуиция и математика. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
3. *Босс В.* Лекции по математике. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10: Перебор и эффективные алгоритмы; Т. 11: Уравнения математической физики. М.: URSS, 2004–2008.
4. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2007.
5. *Davis M.* Hilbert's Tenth Problem is Unsolvable // The Amer. Math. Monthly. 1973. № 3. P. 233–269.
6. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. М., 1988.
7. *Клини С. К.* Введение в метаматематику. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»/URSS, 2009.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1977.
9. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.
10. *Матиясевич Ю. В.* Диофантовы множества // УМН. 1972. Т. 22. Вып. 5. С. 185–222.
11. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
12. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990.
13. *Халмош П.* Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
14. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
15. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
16. *Wagon S.* The Banach—Tarski Paradox. Cambridge Univ. Press, 1986.

Предметный указатель

Представляем Вам наши лучшие книги:

Титчмарш Э. **Введение в теорию интегралов Фурье.**
Курант Р. **Геометрическая теория функций комплексной переменной.**
Бор Г. **Почти периодические функции.**
Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. **Курс современного анализа.**
Голубов Б. И. **Элементы двоичного анализа.**
Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. **Ряды и преобразования Уолша.**
Рам Ж. де. **Дифференцируемые многообразия.**
Картан А. **Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.**
Полиа Г., Сеге Г. **Изопериметрические неравенства в математической физике.**
Гельфонд А. О. **Вычеты и их приложения.**
Гельфонд А. О. **Исчисление конечных разностей.**
Сикорский Ю. С. **Элементы теории эллиптических функций.**
Иосида К. **Функциональный анализ.**
Луговая Г. Д., Шерстнев А. Н. **Функциональный анализ: Специальные курсы.**
Князев П. Н. **Функциональный анализ.**
Князев П. Н. **Интегральные преобразования.**
Фиников С. П. **Проективно-дифференциальная геометрия.**
Фиников С. П. **Курс дифференциальной геометрии.**
Фиников С. П. **Аналитическая геометрия.**
Бюшгенс С. С. **Дифференциальная геометрия.**
Позняк Э. Г., Шикин Е. В. **Дифференциальная геометрия: первое знакомство.**
Рашевский П. К. **Курс дифференциальной геометрии.**
Рашевский П. К. **Геометрическая теория уравнений с частными производными.**
Рашевский П. К. **Риманова геометрия и тензорный анализ.**
Рашевский П. К. **Теория спиноров.**
Стройк Д. Я. **Очерк истории дифференциальной геометрии (до XX столетия).**
Феденко А. С. **Пространства с симметриями.**
Смирнов Ю. М. **Курс аналитической геометрии.**
Дарбу Г. **Принципы аналитической геометрии.**
Клейн Ф. **Неевклидова геометрия.**
Клейн Ф. **Высшая геометрия.**
Клейн Ф. **Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени.**
Стинрод Н. **Топология косых произведений.**
Хаусдорф Ф. **Теория множеств.**
Александров П. С. **Введение в теорию множеств и общую топологию.**
Александров П. С. **Что такое неэвклидова геометрия.**
Понтрягин Л. С. **Основы комбинаторной топологии.**
Понтрягин Л. С. **Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.**
Яглом И. М. **О комбинаторной геометрии.**
Яглом И. М. **Комплексные числа и их применение в геометрии.**
Яглом И. М. **Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.**
Гильберт Д., Кон-Фоссен С. **Наглядная геометрия.**
Бэр Р. **Линейная алгебра и проективная геометрия.**
Шноль Э. Э. **Семь лекций по вычислительной математике.**

В *«Лекциях по математике» В. Босса* **вышли тома:**
1. Анализ. 2. Дифференциальные уравнения.
3. Линейная алгебра. 4. Вероятность, информация, статистика. 5. Функциональный анализ. 6. От Диофанта до Тьюринга. 7. Оптимизация. 8. Теория групп. 9. ТФКП. 10. Перебор и эффективные алгоритмы. 11. Уравнения математической физики. 12. Контрпримеры и парадоксы.

Готовятся: «Топология», «Теория чисел», «Нелинейный анализ»

В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Поэтому учить надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший – покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, – но по-другому.

В. Босс

Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет, надо освободить его от деталей, обнажить центральные конструкции. Это тяжелая работа, которая в «Лекциях» проделывается автором.

Дается то, чего недостает. Общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо увязано. Громоздкие доказательства ужаты до нескольких строчек. Виртуозное владение языком.

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
E-mail URSS@URSS.ru
Каталог изданий в Интернете
http://URSS.ru
Тел./факс 7 (499) 135–42–16
URSS Тел./факс. 7 (499) 135–42–46

6605 ID 84712

9 785397 003117