

В. Босс

ЛЕКЦИИ *по*
МАТЕМАТИКЕ

ТОМ

13

Топология

МОСКВА



URSS

Босс В.

Лекции по математике. Т. 13: Топология: Учебное пособие. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 216 с.

Рассматриваются непрерывные преобразования геометрических фигур с прицелом на изучение инвариантных свойств. Особое внимание уделяется задачам о неподвижных точках, иначе говоря, о разрешимости систем уравнений. Рассматриваются также основные направления алгебраической топологии в расчете на новичков.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 13,5. Зак. № 2339.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–397–00619–4

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА	
	E-mail: URSS@URSS.ru
	Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru
	Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
	URSS Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

7024 ID 96115



9 785397 006194

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения владельца.

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»	7
Предисловие к тринадцатому то́му	9
Глава 1. Приготовления и авансы в наглядной редакции	10
1.1. Предмет топологии	10
1.2. Деформационная техника	12
1.3. Сферы с ручками	15
1.4. Рогатая сфера Александра	18
1.5. Лист Мёбиуса	20
1.6. Проективная плоскость	25
1.7. Ориентация	28
1.8. Бутылка Клейна	30
1.9. Узлы	31
1.10. Многообразия	35
1.11. Ангуановское множество	37
1.12. Замкнутые поверхности	38
1.13. Метод инвариантов	39
1.14. Графовая структура поверхности	43
Глава 2. Неподвижные точки	46
2.1. Предварительные соображения	46
2.2. Гомотопические переходы	48
2.3. Вращение векторного поля	49
2.4. Гомотопные векторные поля	52
2.5. Скелет теории	55
2.6. Разрешимость уравнений	57
2.7. Еще раз об ориентации	59

2.8. Индексы и алгебраическое число нулей	60
2.9. Вращение линейного поля	62
2.10. Нечетные поля	63
2.11. Собственные векторы	64
2.12. Векторные поля на плоскости	66
Глава 3. Дополнения и приложения	71
3.1. Теорема Брауэра и ее обобщения	71
3.2. Глобальная обратимость	74
3.3. Технические уловки и фурнитура	76
3.4. Строгие определения вращения	79
3.5. Зачем нужна общность	80
Глава 4. Многозначные отображения	83
4.1. Общие сведения	83
4.2. О редукции задач	85
4.3. Отображения с выпуклыми образами	87
4.4. Теоремы о неподвижных точках	88
4.5. Теорема о селекторе	91
4.6. Отображения с невыпуклыми образами	92
Глава 5. Алгебраизация топологии	94
5.1. Результаты и рецепты	94
5.2. Абстрактная схема	95
5.3. Фундаментальная группа	98
5.4. Вычисление фундаментальной группы	101
5.5. Высшие гомотопические группы	103
5.6. Гомотопическая эквивалентность	105
5.7. Проблема Пуанкаре	107
5.8. Контрпримеры Пуанкаре и Уайтхеда	109
Глава 6. Симплициальные гомологии	112
6.1. В чем состоит идея	112
6.2. Симплициальные комплексы	114
6.3. Ориентируемые псевдомногообразия	121

6.4. Симплициальные отображения	123
6.5. Индуцируемые гомоморфизмы	124
6.6. Проблемы вычисления	126
Глава 7. Теория гомологий	128
7.1. Общая схема	128
7.2. CW-комплексы и клеточные гомологии	131
7.3. Сингулярные гомологии	133
7.4. Степень отображения	134
7.5. Числа Бетти и группа кручения	137
7.6. Эйлерова характеристика	139
7.7. Число Лефшеца	139
7.8. Градиентные потоки и теория Морса	142
7.9. Относительные гомологии	144
7.10. Точные последовательности	145
7.11. Когомологии	147
7.12. Взаимосвязь гомологий и гомотопий	149
Глава 8. Расслоения	150
8.1. Суть идеи	150
8.2. Формальные определения	153
8.3. Расслоения Хопфа	155
8.4. Поднятие гомотопии	157
8.5. Накрытия	159
Глава 9. Аппаратные формальности	160
9.1. Истоки непрерывности	160
9.2. Топологический подход	162
9.3. Фактортопология	164
9.4. Непрерывные отображения	165
9.5. Карты и атласы	167
9.6. Гомотопия векторных полей	168
9.7. Гомеоморфизмы	169
9.8. Дифференцируемость	171

9.9. Гладкие многообразия	173
9.10. Теорема Сарда	174
9.11. Обратные и неявные функции	175
Глава 10. Элементы теории групп	178
10.1. Определения и примеры	178
10.2. Смежные классы	182
10.3. Нормальные делители и фактор-группы	183
10.4. Автоморфизмы и гомоморфизмы	185
10.5. Порождающие множества	188
10.6. Свободные группы	188
10.7. Тожества в группах	189
10.8. Абелевы группы	191
10.9. Конечнопорожденные группы	192
10.10. Прямое произведение и прямая сумма	193
10.11. Циклическая природа абелевых групп	195
Глава 11. Избранные фрагменты	197
Сокращения и обозначения	203
Литература	205
Предметный указатель	207

Предисловие к «Лекциям»

*Этот человек сел писать книгу,
дабы рассказать миру то, что мир
уже много лет рассказывал ему.*

Сэмюэль Джонсон

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

- 1) *живой учитель;*
- 2) *обыкновенный подробный учебник;*
- 3) *рядовой задачник;*
- 4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем».*

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантели с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств — такого сорта книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты

самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано», — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть — но по-другому.

Предисловие к тринадцатому тому

*Без умения пребывать в неведении
к топологии лучше не подступаться.*

О топологии трудно рассказывать, не попадая в положение хозяйки, решающей дилемму: «Накрыть стол для гостей так, чтобы еще раз пришли, или так — чтобы больше не приходили». Из-за энциклопедичности изложений дисциплине не хватает рамок, которые бы помогли ей занять место в системе общего образования, не говоря о побочном влиянии перестройки мозгов.

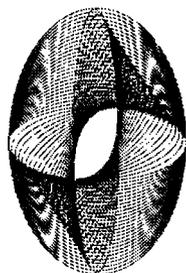
Кое-что из инструментов, правда, давно проникло в классический анализ и прижилось. В подвешенном состоянии остается тематика «неподвижных точек», каковая служит далее предметом особой заботы. Странное положение занимает алгебраическая часть теории со всеми ее гомотопиями, гомологиями и расслоениями. Странное потому — что в своей безвестности имеет необыкновенную притягательную силу. Тем большую — чем менее ясно, о чем речь. И тут главная задача — помочь не столько топологии «занять место», сколько аудитории — избавиться от иллюзий и необоснованных надежд.

Глава 1

Приготовления и авансы в наглядной редакции

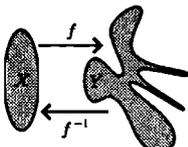
Видимость сильнее реальности.

Для настройки на «топологическую волну» рассматривается тот срез «деформационной геометрии», который обладает наглядностью и в то же время демонстрирует нетривиальность возникающих вопросов и неожиданность ответов. Параллельно вскрывается визуальное понимание той части дисциплины, каковая ныне зашифрована до неузнаваемости.



1.1. Предмет топологии

Топология, как часто говорят, изучает свойства геометрических фигур, не меняющиеся под действием взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразований, называемых *гомеоморфизмами*. Предмет изучения на самом деле гораздо шире ¹⁾, но классификация многообразий *с точностью до гомеоморфизма* занимает в топологии важное место, и базируется на отождествлении X и Y , если существует гомеоморфизм f , такой что

$$f(X) = Y, \quad f^{-1}(Y) = X. \quad (1.1)$$


¹⁾ В свободном определении можно было бы сказать, что топология изучает понятие непрерывности — непрерывные отображения и последствия их применения к геометрическим объектам.

Эквивалентность $X \sim Y$ в смысле (1.1), вообще говоря, требует уточнения. Многообразия X, Y , расположенные в некотором объемлющем \mathbb{R}^n , — гомеоморфны, если гомеоморфизм f определен на X , и не обязательно — на всем \mathbb{R}^n . В этом случае принято говорить о *внутреннем топологическом устройстве* фигур, а об эквивалентности — как о *топологической*. Подобным образом топологически эквивалентны простой контур  и трилистник



, но они отличаются *способом вложения*²⁾ в \mathbb{R}^3 . Поэтому здесь невозможен гомеоморфизм \mathbb{R}^3 на себя, обеспечивающий соответствие контура и трилистника.

Интересно, что в \mathbb{R}^4 соответствующее различие между контурами исчезает, поскольку в четырехмерном пространстве узел непрерывной *деформацией без самопересечений* убирается с контура. Роль четвертого измерения тут проще всего пояснить на примере разъединения сцепленных контуров A, B , которые при параметрическом задании можно рассматривать как

$$\begin{aligned} & \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), 0\}, \\ & \{b_1(t), b_2(t), b_3(t), 0\}. \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{[Diagram of two linked circles]} \\ & \end{aligned} \quad (1.2)$$



Сдвигая «плавно» у контура $\{b_1(t), b_2(t), b_3(t), 0\}$ четвертую координату на $\varepsilon \neq 0$, т. е. перемещая B в гиперплоскость

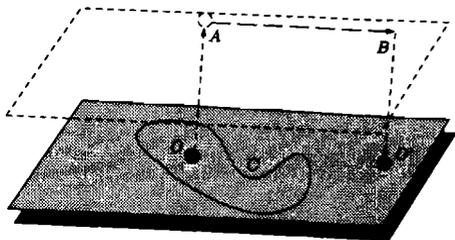
$$\mathbb{R}^3 + \varepsilon \subset \mathbb{R}^4,$$

получаем возможность непрерывно двигать $b_1(t), b_2(t), b_3(t)$, не пересекая A , и уводя B — сколь угодно далеко. После чего можно вернуть четвертую координату обратно в нуль.

Похожим образом в \mathbb{R}^4 можно развязать узел на контуре, не разрывая его, вывернуть наизнанку обычную сферу S^2 , вынуть наружу любую фигуру изнутри S^2 .

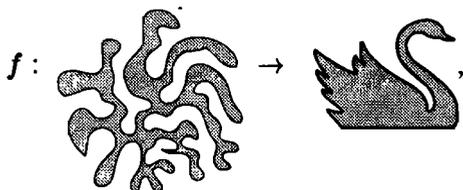
²⁾ Отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *вложением* X в \mathbb{R}^n , если f обеспечивает гомеоморфизм X на образ $f(X)$.

Идею проще всего понять во взаимодействии \mathbb{R}^2 с \mathbb{R}^3 . Если точка O на плоскости не вытаскивается из контура C , то при наличии дополнительной степени свободы это легко делается. Точка O по x_3 переводится в другую плоскость, и по траектории $OABO'$ выводится за пределы C .



1.2. Деформационная техника

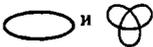
Эквивалентность фигур в том или ином смысле изучается в топологии с помощью различных деформационных ухищрений. Бремя указания конкретного соответствия f , например,



бывает весьма тяжелым. Не легче даются также гарантии отсутствия подходящего гомеоморфизма. Инструментом выяснения «равенства» $X \sim Y$ часто служит проверка возможности деформировать X в Y , т. е. погрузить X, Y в семейство фигур

$$\{Z_t\}, \quad t \in [0, 1], \quad Z(0) = X, \quad Z(1) = Y,$$

в котором X плавно переходит в Y по мере изменения t . При этом точки $x = z(0) \in X$ переходят в точки $y = z(1) \in Y$ по траекториям $z(t)$. Если траектории $z(t)$ нигде не пересекаются и не соприкасаются, — деформация происходит без слипаний и разрывов, чего собственно достаточно для гомеоморфности³⁾. Именно такие де-

³⁾ Однако  — гомеоморфные сами по себе — друг в друга не деформируются, ибо по-разному вложены в \mathbb{R}^3 .

формации подразумеваются далее — и они, как легко видеть, обеспечивают *топологическую эквивалентность*⁴⁾.

Но для проведения деформаций необходимо предоставить пространство достаточно высокой размерности, чтобы игнорировать вопросы вложения и говорить о *топологической эквивалентности*. Можно ограничиться конкретным \mathbb{R}^n — и тогда наличие или отсутствие деформации будет дополнительно свидетельствовать о характеристиках вложения, см. далее.

Эффективны в качестве инструмента бывают деформации не только множеств, но и отображений. Говорят, что преобразование $F : X \rightarrow Y$ деформируется в $G : X \rightarrow Y$, если существует такая функция $H(x, t)$, $t \in [0, 1]$, что

$$H(x, 0) \equiv F(x), \quad H(x, 1) \equiv G(x),$$

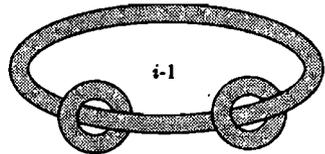
и $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$.

Разумеется, речь всегда идет о *деформациях (гомотопиях)*, удовлетворяющих тем или иным условиям, поскольку «лишь бы какая» $H(x, t)$ в любой момент под рукой⁵⁾:

$$H(x, t) = (1 - t)F(x) + tG(x), \quad (1.3)$$

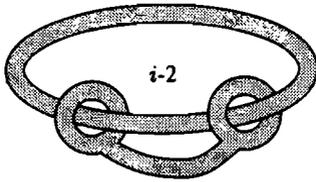
но она может не удовлетворять требованию: $H(x, t) \in Y$ при любых $x \in X$ и $t \in [0, 1]$.

Теперь остановимся на нескольких примерах. Пусть на обруч ($i-1$) одето два кольца. Понятно, что, не разрывая колец, их нельзя снять с обруча. Хотя через некоторое время это станет не совсем понятно, ради чего, собственно, разговор и затевается.



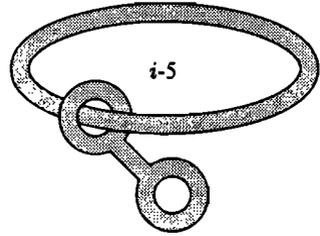
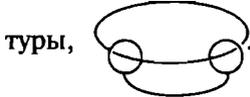
⁴⁾ Деформацию X в Y без *слипаний и разрывов* можно мыслить как движение по несоприкасающимся траекториям $z(t)$ хорошего дифференциального уравнения (без особенностей).

⁵⁾ Функцию (1.3) называют *линейной гомотопией*, см. [5, тт. 1, 7].



Задачу вроде бы не облегчает соединение колец перешейком, рис. ($i-2$). Тем не менее ($i-2$) непрерывно деформируется (без склеек и разрывов) в ($i-5$), во что с трудом верится. Однако приходится.

Не имея намерений интриговать, сразу оговоримся, что все кольца телесны и эластичны — не только легко изгибаются, но и воскообразны. Жесткая веревка не подойдет. Не годится также вырождение колец в одномерные кон-



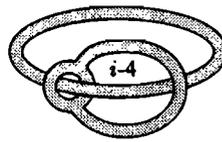
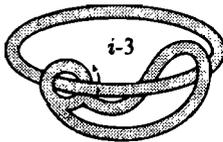
туры, Но и в этих условиях мало кто готов поставить пачку сигарет против контрольного пакета Газпрома на эквивалентность

$$(i-2) \sim (i-5) \text{ в } \mathbb{R}^3.$$

Однако в ($i-2$) одно кольцо с обруча легко снимается по схеме

$$(i-2) \Rightarrow (i-3) \Rightarrow (i-4) \Rightarrow (i-5),$$

где



Сценарий « $(i-2) \Rightarrow \dots \Rightarrow (i-5)$ » полезно осмыслить⁶⁾, дабы ощутить мотивировку топологических исследований. Дело, как оказывается, заключено не в отдельных фокусах, а в нетривиальных механизмах, управляющих непрерывными преобразованиями. Причем интуиция здесь теряется, ибо не имеет опыта, вернее, имеет весьма ограниченный опыт.

⁶⁾ Печатная зарисовка малопригодна для описания используемых деформаций. Воображение тоже не очень подходит. Тут бы лучше подошла пластилиновая модель.

Вот еще одно хитросплетение. Кто поверит, что в (i-6) зацепление можно ликвидировать непрерывной деформацией? Мало кто. Однако фокус опять-таки легко выполняется с помощью манипуляций типа использованных выше. «Легко», но непривычно, и потому — неожиданно.



Иначе говоря, зацепленные кольца  можно расцепить, соединив их предварительно перешейком и предполагая, разумеется, «воскообразность» конструкции ⁷⁾,



Что касается затронутых примеров — каковым несть числа, — то они показывают шаткость геометрической очевидности. Если (i-2) деформируется в (i-5), едва ли не вопреки здравому смыслу, то как можно быть уверенным, что кольца  не расцепляются? Решение подобных вопросов, несомненно, должно быть поставлено на какую-то доказательную платформу. Кроме того, визуальный инструментарий весьма неуклюж, и его бы неплохо заменить чем-то менее шатким.

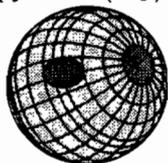
1.3. Сферы с ручками

В теории замкнутых поверхностей наиболее известны сфера и тор — поверхность бублика ⁸⁾, . Двусторонние замкнутые

⁷⁾ Описание деформации и дополнительные примеры можно найти в [17]. Однако надо иметь в виду, что увлечение цирковой стороной дела — типа выворачивания наизнанку свитера на человеке со сцепленными руками (свитер снимается на руки и протягивается через один из рукавов) — особо не помогает проникновению в суть предмета. Двух-трех иллюстраций достаточно, чтобы оценить необходимость привлечения новых инструментов.

⁸⁾ Сам бублик называют *сплошным тором*, а иногда и просто тором. Тор в \mathbb{R}^3 получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в плоскости окружности и её не пересекаю-

поверхности исчерпывают сферы с ручками. Сфера с одной ручкой (тор) образуется заклеиванием двух отверстий в сфере

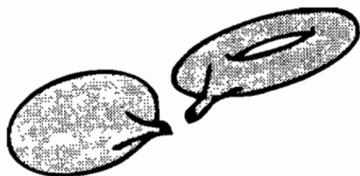


половинкой тора



Получается «двухпу-

довая гиря», или привычный тор после косметической деформации. Тот же результат получается, если в сфере и торе проделать по одному отверстию, и склеить их по краю:



⇒

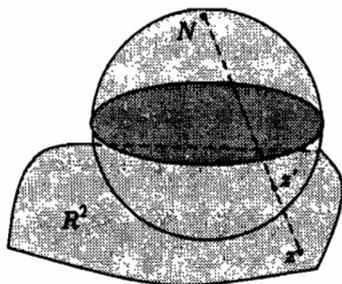


Иначе говоря, «заклеивание двух дырок в сфере половинкой тора» и «заклеивание одной дырки в сфере — тором с дыркой»,



топологически эквивалентные операции⁹⁾.

Сфера с выколотой точкой — это вся плоскость \mathbb{R}^2 , либо открытый круг. Гомеоморфизмы многое уравнивают. Гомеоморфизм \mathbb{R}^2 и « S^2 без северного полюса N » задается известным образом: из N проводятся всевозможные лучи, и точки протыкания z' и z приходят в соответствие.

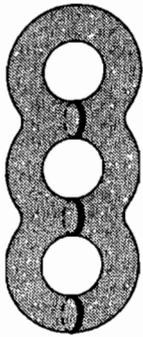


шей. Результирующее уравнение:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0,$$

где R — расстояние от центра окружности до оси вращения, а r — радиус окружности.

⁹⁾ Обратим внимание, что сфера с дыркой — это круг. Разумеется, с точностью до деформации без склеек и разрывов, что везде подразумевается.

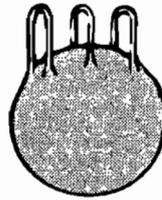


Сферы с несколькими ручками

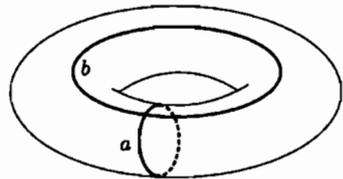


— «го-

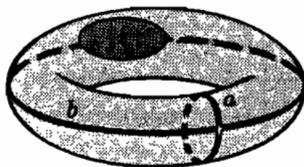
меоморфно причесанные» — могут выглядеть различно. В том числе как на рисунке слева или внизу. Кроме того, *ручки могут переплетаться*, но их зацепление теория поверхностей не учитывает, поскольку концентрируется на изучении внутренней топологии.



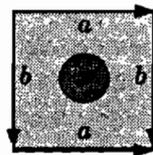
Рассмотрим подробнее тор. Через его любую точку проходят две разные окружности, a — *меридиан тора*, b — *параллель*.



Тор, разрезанный по меридиану a , превращается в трубочку, разрезание которой по b дает квадрат — стрелки на сторонах отвечают ориентациям меридиана и параллели, если таковые заданы. Говорить о квадрате вместо прямоугольника позволяет опять-таки отождествление гомеоморфных фигур.



\Leftrightarrow



(1.4)

Обратная последовательность действий — склеивание (отождествление) противоположных сторон квадрата — снова дает тор. Такой способ образования тора показывает, что меридиан и параллель не отличаются друг от друга. Но это с точки зре-

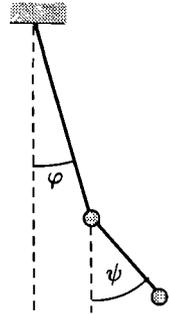
ния внутренней топологии поверхности ¹⁰⁾. Если же принимать в расчет вложение тора в \mathbb{R}^3 , то они качественно отличаются. Меридиан можно стянуть в точку, оставаясь внутри тора, а параллель — нельзя. Поэтому гомеоморфизм \mathbb{R}^3 на себя, переводящий меридианы тора в параллели, — невозможен.

Классический пример возникновения тора в механике — плоский двойной маятник, состояние которого однозначно характеризуется двумя углами φ и ψ , причем

$$\varphi = \varphi + 2\pi,$$

$$\psi = \psi + 2\pi.$$

Поэтому множество состояний здесь — квадрат $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, у которого отождествлены противоположные стороны как на рисунке (1.4) справа, что равносильно тору.



- В шаре высверлены три непересекающихся сквозных цилиндрических отверстия. Поверхность образовавшегося тела гомеоморфна сфере с тремя ручками. (?) 
- В шаре высверлены три сквозных цилиндрических отверстия, проходящих через центр шара. Поверхность образовавшегося тела гомеоморфна сфере с пятью ручками. (?)

1.4. Рогатая сфера Александера

Данный раздел несколько выпадает из общей линии изложения, но тут прицел стратегический — на отдельных достаточно разнообразных примерах дать представление о причинах, мешающих попыткам найти «царские пути к геометрии».

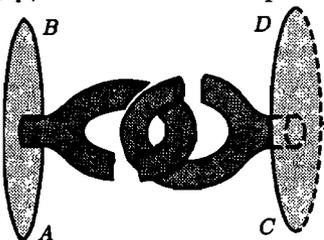
Если двумерная сфера *гладко* вложена в \mathbb{R}^3 , — с помощью *дiffeоморфизма* ¹¹⁾, — то она разбивает пространство на две

¹⁰⁾ Существует гомеоморфизм тора, переводящий меридианы в параллели, но такой гомеоморфизм не может быть продолжен на \mathbb{R}^3 .

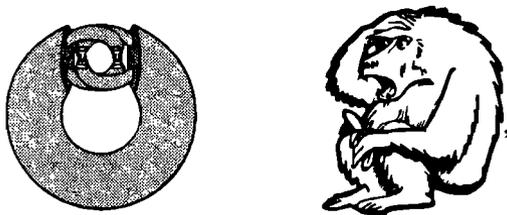
¹¹⁾ Гладкого гомеоморфизма.

открытые области, одна из которых гомеоморфна трехмерному шару, а другая — дополнению этого шара в \mathbb{R}^3 . Требование гладкости навскидку кажется лишним. По крайней мере, *простой контур* (гомеоморфный образ окружности) разбивает \mathbb{R}^2 на две открытые области, одна из которых гомеоморфна кругу, а другая — его дополнению¹²⁾. В \mathbb{R}^3 , как ни удивительно, это не так.

Контрпример построен *Александром* (1924). Сначала сфера деформируется в изогнутый цилиндр, из оснований которого AB и CD

вытягиваются два щупальца,  которые

как бы зацепляются, но не смыкаются полностью, повторяя в меньшем масштабе ситуацию противостоящих оснований цилиндра. Далее процедура итерационно повторяется. В пределе получается *рогатая сфера*, внутренность которой гомеоморфна шару, а внешность — не гомеоморфна дополнению этого шара. После двух итераций картинка выглядит примерно так:

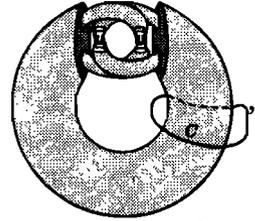


а с точностью до разрешающей способности так выглядит и предельный вариант с бесконечным зацеплением бесконечно раздваивающихся щупалец. Внутренность построенной поверхности остается гомеоморфной шару¹³⁾, внешность — не гомеоморфна,

¹²⁾ Это теорема Шенфлиса, усиливающая известную теорему Жордана о том, что простой контур разбивает плоскость на две части.

¹³⁾ Каждую итерацию последовательных вложений сферы можно сделать даже гладкой, и потому — локально плоской. Однако предельное отображение локально плоским уже не является, и потому — обойтись диффеоморфизмом не удастся.

потому что не *односвязна*¹⁴⁾, ибо петля C ,



при стягивании в точку вынуждена пересекать рогатую сферу, поскольку невозможно выпутаться из бесконечного числа зацеплений щупалец.

Достаточно обстоятельно *сфера Александра* рассматривается в популярной статье Д. Фукса (Квант. 1990. № 6). Можно обратиться и к более «солидным» источникам — однако никакая «высокая наука» тут ничего особенно не добавляет, хотя иногда уменьшает ответственность, как всякая многозначительная ссылка на «высшие сферы».

Замечание. Вытягивание щупалец внутрь сферы обеспечило бы, наоборот, построение поверхности, гомеоморфной сфере, внутренность которой не гомеоморфна шару, а внешность — гомеоморфна дополнению шара.

Сферу Александра часто называют одной из наиболее патологических конструкций, но это — дело вкуса¹⁵⁾. Тем не менее для топологии экспонат принципиальный, ибо указывает на «дыру», через которую проникают «монстры».

1.5. Лист Мёбиуса

Еще один топологический феномен, шокирующий геометрическую интуицию, — *неориентируемые и односторонние поверхности*. Определения следуют далее. Пока же достаточно чисто интуитивного восприятия. Двусторонняя поверхность так окрашивается

¹⁴⁾ *Односвязность* X означает, что любой непрерывный замкнутый контур, лежащий в X , непрерывно стягивается в точку по X , не выходя из X . Гомеоморфное преобразование множества сохраняет свойство односвязности.

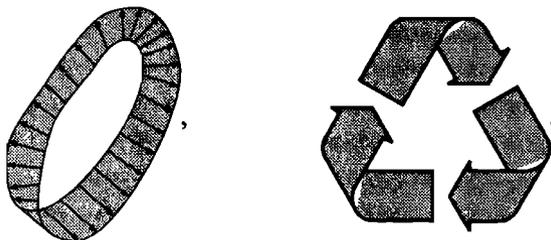
¹⁵⁾ *Пример Брауэра* (см. п. 1.10.1) миллиона областей, имеющих одну и ту же границу, впечатляет сильнее.

в два цвета, что цвета соприкасаются либо по краю,

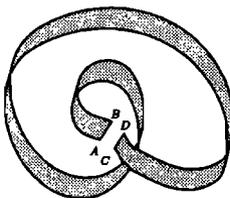


либо вообще не соприкасаются (на замкнутых поверхностях). Хорошо известными эталонами односторонних поверхностей служат лист Мёбиуса и бутылка Клейна.

Лист Мёбиуса¹⁶⁾ (ЛМ) играет в топологии важную роль как фундаментальный элемент теории поверхностей, разнообразие каковых сводится к заклеиванию отверстий в сфере либо ручками либо лентами Мёбиуса (теорема 1.12.1),



Результат обеспечивается склеиванием концов ленты



после перекручивания CD на пол-оборота — в результате C соединяется с B , D с A .

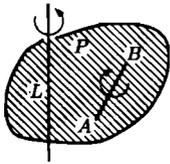
Один из формульных вариантов вложения ЛМ в \mathbb{R}^3 :

$$x(\varphi, h) = \left(1 + \frac{h}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \cos \varphi,$$

$$y(\varphi, h) = \left(1 + \frac{h}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi,$$

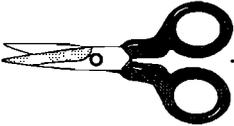
$$z(\varphi, h) = \frac{h}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad h \in [-1, 1].$$

¹⁶⁾ В качестве синонимов используются также лента и кольцо Мёбиуса.



Разные модификации легко извлекаются из простой геометрической модели. Отрезок AB и прямая L лежат в плоскости P , которая вращается вокруг оси L . За один оборот вокруг L отрезок AB поворачивается вокруг своей середины на пол-оборота, оставаясь все время в плоскости P . След движения отрезка и будет листом Мёбиуса.

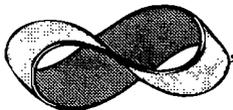
Поверхность ЛМ, как известно, односторонняя. Феномен ди-ковинный, но уже приелся. Тем не менее имеет смысл изготовить

модель и повозиться с ней, . Не для того, конеч-

но, чтобы убедиться в отсутствии двух сторон, — это более-менее очевидно, и легко поддается разумению. Однако на этом резервы воображения, пожалуй, заканчиваются. Мало кто предвидит, чем закончится разрезание «листа» вдоль средней линии по кругу. Получается не две ленты, как ожидает интуиция, воспитанная на других примерах, а одна — два раза перекрученная на полный оборот, т. е. на 4 пол-оборота. Если же исходный «лист» резать вдоль, отступив изначально на *одну треть* от края, получатся две ленты.

Вот так, варьируя вопросы и ошибаясь в ответах, с помощью ножниц можно расширить границы жизненного опыта.

Еще одна неожиданность связана с *двойным листом Мёбиуса*,



получаемым наложением друг на друга двух

полосок бумаги и склеиванием концов после перекручивания их на пол-оборота. На первый взгляд кажется, что тут два вложенных друг в друга листа Мёбиуса. Однако разворачивание обнаруживает, что лента всего одна — «вдвое большего диаметра», двусторонняя, перекрученная на 4 пол-оборота¹⁷⁾.

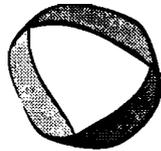
¹⁷⁾ Интересно, что в шель «двойного листа» можно вставить разделяющую прокладку другого цвета. С торца видно, что кольца двойного листа «разделены». Но прокладкой оказывается односторонний лист Мёбиуса. (!) Иначе говоря, «тройной лист Мёбиуса» состоит из двух колец. Еще одна модель визуализации *двойного листа Мёбиуса*: поверхность

Вот что пишет *М. Гарднер* о насекомом, заползшем в щель «между» бумажными лентами двойного листа Мёбиуса: «... Оно всегда ползало бы по одной полоске бумаги, спинка его касалась бы другой полоски, и ему нигде не удалось бы найти точку, в которой „пол“ сходится с „потолком“. Отсюда наделенное разумом насекомое заключило бы, что оно путешествует между поверхностями двух отдельных полосок.

Но представим себе, что наше насекомое оставило на полу метку и совершает обход вокруг полосок до тех пор, пока не встретит ее снова. Тогда оно обнаружит, что метка находится не на полу, а на потолке и что необходимо обойти еще раз вокруг, чтобы метка снова очутилась на полу! Насекомое вряд ли должно обладать недюжинным воображением, чтобы понять, что пол и потолок образуют одну сторону одной-единственной полоски».

Легко сказать. А что если «щель» — это весь мир обитания и единственный источник опыта? Там про обороты ничего не известно.

Три раза перекрученная лента ¹⁸⁾, $3-L$,



— тоже является односторонней поверхностью. Ее отличие — в устройстве края. Край листа Мёбиуса — обыкновенный незаузелненный контур. Край у $3-L$ — также контур, но он завязан в узел.

Односторонние поверхности могут иметь и несколько краев.

Помимо тривиальных ситуаций типа



очевидные конструкции, в которых края могут быть заузлены и зацеплены друг с другом (либо не зацеплены). Вот три простейших примера,



LM_2 засохшего слоя краски, покрывающего обычный лист Мёбиуса. Это и есть двойной лист, причем двусторонний характер поверхности LM_2 очевиден, поскольку одна ее сторона обращена к окрашенному листу, другая — вовне.

¹⁸⁾ Которую можно получить склеиванием дальних краев полосы после предварительной перекрутки одного края на три пол-оборота.

Поведение односторонних поверхностей демонстрирует ахиллесову пяту визуального чутья, отказывающего в простых с виду ситуациях. Если неожиданные свойства *рогатой сферы* опираются на «дискуссионные» инструменты состоявшейся бесконечности, то здесь все на виду — лента, ножницы, — а результат не угадывается¹⁹⁾. Разумеется, кто-то будет спорить. Однако ошибки при обсуждении результатов разрезания односторонних поверхностей довольно широко распространены, что свидетельствует о наличии проблемы. А кто справляется с предсказанием некоторых результатов — согласится, что успех опирается не на мгновенное чутье, а на логическое рассуждение.

Возвращаясь к описаниям рассмотренных объектов, отметим, что вместо бумажных лент и склеиваний можно говорить об отождествлении определенных точек тех или иных фигур. Если тор (1.4) получается отождествлением противоположных сторон

квадрата , то *лист Мёбиуса* получается отождествлением одной пары противоположных сторон квадрата с учетом встречного направления: . При этом никакого про-

странственного движения квадрата не предполагается, равно как не предполагается наличие объемлющего пространства. Поэтому вопрос о вложении не стоит. Все остается в рамках внутренней топологии, осязание каковой только и доступно двумерному существу, живущему в полосе (квадрате). Разнообразие вариантов перекручивания полосы тут распадается всего на две категории: на четное число полуоборотов или — нечетное.

Если отождествление (склеивание) сторон мыслится под аккомпанемент изгибания всего квадрата в \mathbb{R}^3 , возникают дополнительные вопросы. Можно ли так изогнуть бумажный квадрат, чтобы не произошло самопересечения? Нельзя. Его надо вытянуть,

¹⁹⁾ Злые языки тут говорят о пространственном кретинизме воображения.

но в топологии, здравствующей с точностью до деформации, — это не проблема для беспокойства. Поэтому вместо прямоугольника принято, для простоты, говорить о квадрате. В других ситуациях склеивания, скажем, двух квадратов для получения *проективной плоскости*, *бутылки Клейна* — самопересечений в \mathbb{R}^3 не удастся избежать вообще. Там возникает вопрос о возможности вложения без самопересечений в пространство большей размерности.

1.6. Проективная плоскость

Склеивание края *листа Мёбиуса* с границей круга образует замкнутую неориентируемую поверхность, называемую *проективной плоскостью*²⁰⁾ $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, каковая наряду с S^2 является собой один из простейших эталонов в теории поверхностей. Склеивание краев ЛМ и круга можно расценивать и как заклеивание отверстия в сфере²¹⁾ *листом Мёбиуса*. Разумеется, мы танцуем от ЛМ в силу контекста. Обычные определения заходят с другой стороны.

1.6.1. Определение. *Проективным пространством $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ размерности n называется множество прямых в \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через начало координат.*

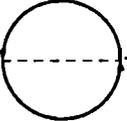
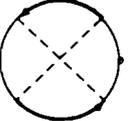
С точки зрения 1.6.1 гомеоморфный вариант $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ представляет собой сферу с центром в нуле, у которой отождествлены (склеены) противоположные точки, ибо две такие точки однозначно определяют прямую в \mathbb{R}^3 , проходящую через нуль. Поэтому верхнюю полусферу, $z > 0$, можно отбросить, оставляя нижнюю чашечку,



диаметрально противоположные точки экваториальной окружности. Либо «распрямляя» полусферу, получаем эквивалентную модель: круг, у которого отождествлены противоположные точки границы, т. е. склеены нижняя и верхняя дуги с учетом на-

²⁰⁾ И наоборот, ЛМ получается, если из проективной плоскости вырезать круг, т. е. проделать отверстие или даже выколоть точку, что «деформационно эквивалентно».

²¹⁾ Сфера с дыркой гомеоморфна кругу.

правлений,  Последняя картинка возникает на базе постепенного увеличения ориентированных дуг в «округленном квадрате»,  соединение ориентированных дуг в котором порождает лист Мёбиуса, — из чего собственно ясно, что $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ получается, как уже отмечалось, склеиванием краев ЛМ и круга.

Без самопересечений $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ в \mathbb{R}^3 не вкладывается²²⁾. В \mathbb{R}^4 места уже хватает. Вот пример поверхности [7], топологически эквивалентной $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ и не имеющей самопересечений. Результат достигается отображением сферы

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \quad (1.5)$$

в \mathbb{R}^4 с помощью преобразования

$$x = u^2 - v^2, \quad y = uv, \quad z = uw, \quad t = vw,$$

которое отождествляет диаметрально противоположные точки (1.5), как того требует рассмотренная выше модель. Гладкость и отсутствие самопересечений легко проверяются.

Что касается общей ситуации вложения $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^m без самопересечений, то здесь необходимо $m = 2n$, и $m < 2n$ — не годится. Большого запаса никогда не требуется. По *теореме Уитни любой гладкий n -мерный компакт гладко вкладывается в \mathbb{R}^{2n}* .

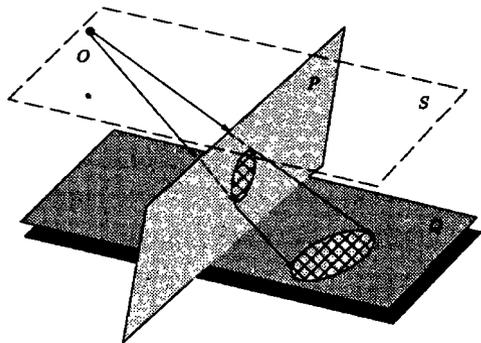
В частности, любая двумерная поверхность Π_2 без самопересечений вкладывается в \mathbb{R}^4 . Но любая Π_2 без самопересечений вкладывается в проективное пространство $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$. Вложение поверхностей не обязательно в евклидово пространство — меняет подоплеку, и возникает другая картина. Если в обычной идеологии понятия ориентируемости и двусторонности совпадают, то при «хитрых» вложениях ориентируемая поверхность может стать односторонней, а двусторонняя — неориентируемой, см. [9].

Исторически первое определение проективной плоскости базировалось на дополнении обычной евклидовой плоскости *бесконечно удаленной прямой*, состоящей из бесконечно удаленных

²²⁾ И это отрицательно сказывается на визуальной популярности. В результате о $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ много говорят, но «никто не видел».

точек. На определение 1.6.1 это не походит, но гомеоморфизмы порождают часто весьма неожиданные топологические эквивалентности. Мотивировка определения $\mathbb{P}R^2$ была связана с механизмом центрального проектирования.

Центральное проектирование плоскости P в плоскость Q из точки O , не лежащей ни на P , ни на Q , заключается в сопоставлении точкам $A \in P$ точек $A' \in Q$ так, чтобы A, A', O лежали на одной прямой.



Механизм имеет ахиллесову пята. Если плоскости P и Q не параллельны, преобразование оказывается неопределенным для некоторых точек плоскости P . Точнее говоря, плоскость S , проходящая через центр O и параллельная Q , — пересекается с P по прямой L , и ни одна точка $L \subset P$ «никуда не проектируется», т. е. проектируется в бесконечность.

Поэтому прямые, лежащие в плоскости P и пересекающиеся в некоторой точке прямой L , переходят в параллельные прямые на плоскости Q , а параллельные на P — в пересекающиеся прямые плоскости Q .

Изучение центрального проектирования сталкивается, таким образом, с необходимостью постоянной заботы об исключениях, рассыпающих теорию на частности. Консолидирует ситуацию пополнение любой рассматриваемой плоскости *бесконечно удаленными точками*, совокупность которых (декларативно) образует *бесконечно удаленную прямую*. Плоскость, пополненная указанным образом, называется *проективной*.

Далее *проективные преобразования* определяются как преобразования проективной плоскости, переводящие любую прямую в прямую²³⁾. В таком варианте определения ясно, что проективные преобразования составляют группу.

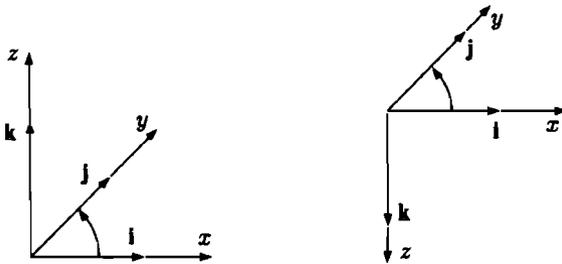
²³⁾ *Проективные преобразования* помимо центрального проектирования включают также параллельное проектирование (центр O в бесконечности).

Разумеется, все это требует проверки корректности, которая без особого труда выполняется в проективной геометрии. Специального внимания здесь заслуживает фокус пополнения плоскости явно фиктивными элементами. Благополучный финал лишний раз подчеркивает, что для *существования* в математике нужна лишь непротиворечивость.

- Проективная прямая $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$ гомеоморфна окружности S^1 .
- Проективная плоскость $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ не гомеоморфна сфере S^2 .
- Трехмерное проективное пространство $\mathbb{P}\mathbb{R}^3$ гомеоморфно группе трехмерных вращений, а также пространству единичных касательных векторов к сфере S^2 .

1.7. Ориентация

Явление ориентации в той или иной мере общеизвестно из классического анализа и базируется, главным образом, на ориентации системы координат. На рисунке



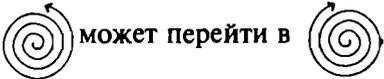
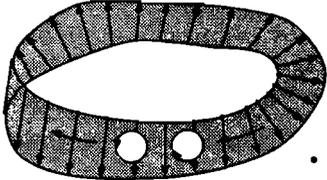
изображены две системы с перпендикулярными осями (x, y, z) , по которым направлены *единичные орты* (i, j, k) .

Правая/левая система координат характеризуется тем, что при вращении по кратчайшему пути от x к y буравчик движется по направлению z — для правой системы, и в противоположном — для левой. В неортогональном случае определение расплывается. Вот более надежный вариант.

1.7.1. Определение. Упорядоченная тройка некопланарных векторов a, b, c , исходящих из точки 0 , называется *правой*, если для наблюдателя, расположенного в нуле, обход концов a, b, c в ука-

занном порядке происходит по часовой стрелке. В противном случае тройка a, b, c — левая. Соответственно классифицируются базисы.

На гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ в каждой точке есть касательная плоскость, которая непрерывно изменяется вместе с точкой касания A . Располагая оси x, y локальной системы координат в касательной плоскости и направляя ось z вовне, например по внешней нормали, — двигаем точку касания. При движении A нормаль, как и плоскость касания, меняется непрерывно. Если при обходе точкой A любого контура на S нормаль возвращается в исходное положение, поверхность S называют *двусторонней*²⁴⁾. На односторонних поверхностях нормаль при возврате может принять противоположное направление.

В топологии предпочтение отдается внутреннему определению ориентации поверхности, независимо от вложения. Поверхность S называется *ориентируемой*, если у контура с заданным направлением обхода \curvearrowright при возврате в исходное положение по любому замкнутому пути в S направление обхода не меняется. Иначе говоря, любой вихрь сохраняет направление закрутки. На неориентируемой поверхности по возвращению в исходное положение вихрь  может перейти в .

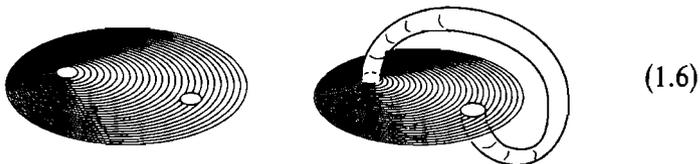
«Метаморфозы» могут иметь разную интерпретацию (например, после обхода буква P переходит в мягкий знак $Ь$), но суть каждый раз одна: левое переходит в правое. Не «скачком», как мы привыкли, а плавно, что несколько шокирует.

²⁴⁾ Процедура «отделения» внешней стороны от внутренней может быть организована покусочно: поверхность S разбивается на маленькие участки — *накладывающиеся друг на друга* — и, начиная с некоторого исходного кусочка, на котором направление нормали назначается декларативно, продолжается на соседние участки с согласованием ориентации на пересечениях.

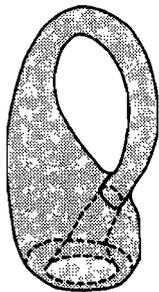
Общепринятый стандарт — маленький треугольник с нумерацией вершин 123. В ориентируемом случае треугольник после любого путешествия по S возвращается в исходное положение с учетом нумерации. В неориентируемом случае — нумерация «сбивается», совмещение не удастся. Ухищрение с треугольником удобно легкостью многомерных обобщений (*нумерация вершин симплексов*).

1.8. Бутылка Клейна

Диск с двумя отверстиями — представляющий собой двустороннюю поверхность с краем — преобразуется в одностороннюю поверхность приклеиванием трубки, как показано на рис. (1.6).



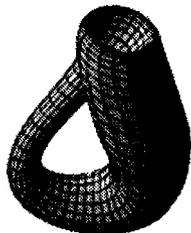
Ползущий муравей теперь может попасть в любую точку конструкции, не преодолевая край.



Если рецепт (1.6) применить не к диску, а к сфере S^2 , — получится *бутылка Клейна*. Точнее говоря, здесь возникает препятствие. Приклеивая трубку к отверстиям в сфере



изнутри, а потом извне, — принципиально не удастся избежать пересечения поверхностей. Поэтому *бутылка Клейна* в \mathbb{R}^3 без самопересечения не помещается.



Бутылка Клейна получается также соединением двух листов Мёбиуса перемычкой, как на рисунке справа, что образует фигуру с краем, гомеоморфным окружности, каковой затем наклеивается на границу круга.

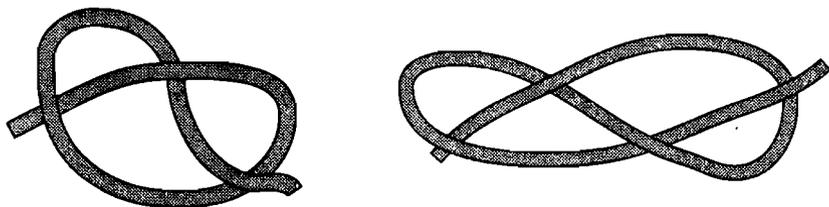


1.9. Узлы

Узлам исстари придавался глубокий смысл мистического толка. Завязыванием узлов маги и колдуны пытались лечить, калечить и вообще направлять ход истории. А *лорд Кельвин* составил периодическую таблицу химических элементов, считая атомы вихрями эфира, завязанными в узлы²⁵⁾. Интересен также сугубо материалистический аспект в русле завязывания шнурков, шпагата, страховочных фалов космонавтами и парашютистами, буксирных и якорных тросов, ткацких нитей, — каковой присутствует в обиходе тысячи лет. И действовать каждый раз необходимо избирательно, ибо в одном случае нужны незатягивающиеся петли, в другом — затягивающиеся. Не говоря о быстроразвязывающихся узлах, декоративных, особых морских узлах для связывания двух тросов, — да всего и не перечислишь²⁶⁾.



Топология, конечно, прикладными свойствами веревочных манипуляций не занимается, концентрируясь на классификации. Различия интуитивно очевидны. *Простой узел в восьмерку*,



не протаскивая концы через петлю, трансформировать не удастся. Но это ничего не доказывает. Необходима формализация.

Первым делом целесообразно уйти от расплывчатого «протаскивания через петлю», что достигается соединением концов

²⁵⁾ Выдумка, как известно, рухнула при участии *Менделеева*. Однако близкая идея возникла ныне в *теории суперструн*, воображающей элементарные частицы крутящимися петлями.

²⁶⁾ *Скрягин Л. Н. Морские узлы. М.: Транспорт, 1994.*

между собой. *Простой узел* при этом превращается в трилистник  восьмерка — в узел Листинга,  также

называемый *восьмеркой*. Далее, игнорируя «толщину веревки», приходим к стерильной дефиниции.

1.9.1. Определение. *Узлом называется гомеоморфный образ окружности S^1 в \mathbb{R}^3 . При задании направления обхода узел считается ориентированным.*

Итак, все узлы гомеоморфны друг другу. Отличия определяются способами вложения в \mathbb{R}^3 .

1.9.2. Определение. *Узлы K_1 и K_2 эквивалентны, если существует гомеоморфизм \mathbb{R}^3 на себя, отображающий K_1 на K_2 .*

Эквивалентность 1.9.2 — не совсем то, что имелось в виду выше. Трилистник и его зеркальный образ, например,



эквивалентны в смысле 1.9.2 — требуемый гомеоморфизм существует. Тем не менее один узел в другой физически не переводится²⁷⁾. Поэтому в теории узлов чаще используют более тонкий инструмент, опирающийся на понятие *изотопии*.

Гомеоморфизм $F(x)$ называют *изотопным* тождественному, если существует непрерывное отображение²⁸⁾ $H(x, t)$, $t \in [0, 1]$, такое что

$$H(x, 0) \equiv x, \quad H(x, 1) \equiv F(x)$$

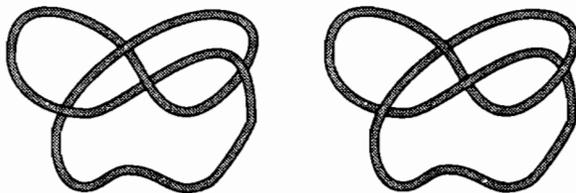
²⁷⁾ Хотя просто так это не доказывается — нужна теоретическая база.

²⁸⁾ Называемое изотопией.

и $H(x, t) = F_t(x)$ при любом фиксированном $t \in [0, 1]$ является гомеоморфизмом \mathbb{R}^3 на себя. Другими словами, *изотопия* представляет собой семейство гомеоморфизмов, связывающее $F(x)$ с тождественным гомеоморфизмом.

1.9.3. Определение. Узлы K_1 и K_2 имеют один и тот же *изотопический тип*²⁹⁾, если существует изотопия $H(x, t)$ в \mathbb{R}^3 , такая что $H(K_1, 1) = K_2$.

Разрешающей способности определения 1.9.3 уже хватает для ситуации (1.7). Зеркально противоположные трилистники не изотопны. Однако зеркальное отражение узла не всегда меняет изотопический тип. Например, зеркальная симметрия восьмерки



не меняет изотопического типа.

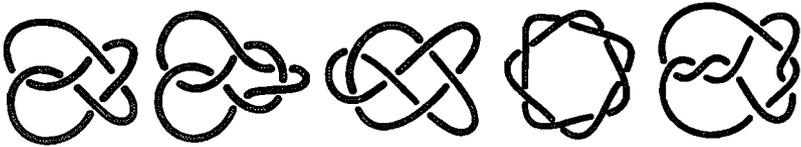
Разобраться в совпадениях и отличиях друг от друга «запутанных» узлов чрезвычайно сложно. Правда, на первом этапе «наведения порядка» иногда возникает иллюзия, что не так уж все головоломно. Узел, дескать, сначала расправляем, чтобы в проекции на плоскость осталось *минимальное число N двойных точек самопересечения*³⁰⁾. Такая проекция³¹⁾ с указанием для каждой двойной точки, какая ветвь проходит «над», называется *диаграм-*

²⁹⁾ Узлы одного типа обязательно эквивалентны в смысле 1.9.2. Обратное не верно — пример (1.7). Но изотопные узлы часто называют также эквивалентными, что создает терминологическую путаницу.

³⁰⁾ В таблицах узлы традиционно упорядочиваются по числу N . В случае N , равного 1 или 2, узел тривиален (на контуре нет узла). Простейший нетривиальный узел — трилистник, 3_1 , — $N=3$, и с точностью до зеркального отражения это единственный узел с тремя пересечениями. Затем идет восьмерка, 4_1 . При пяти самопересечениях появляется два неэквивалентных узла, а в случае $N=8$ число неэквивалентных вариантов достигает уже 21.

³¹⁾ Представляющая собой трансверсально самопересекающуюся замкнутую кривую на плоскости, не имеющую других особых точек кроме двойных.

мой узла. Далее кажется, что по диаграмме узла, если уж не визуально, то по крайней мере алгоритмически — все худо-бедно должно раскладываться по полочкам.



Но не тут-то было. Многие естественные и простые на вид вопросы насчет узлов до сих пор не имеют ответа, другие же — решены совсем недавно³²⁾. Долгое время, например, было неясно, определяется ли изотопический тип неориентированного узла топологическим типом его дополнения, и только в 1989 году было установлено: *если дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ и $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$ узлов K_1 и K_2 гомеоморфны, то сами узлы изотопны друг другу*³³⁾. Но многие другие задачи так и остаются нерешенными.

Заметим, под дополнением $\mathbb{R}^3 \setminus K$ подразумевать можно следующее. Узел K , как гомеоморфный образ окружности, заменяется на его трубчатую окрестность, каковая представляет собой заузленный полный тор, из которого затем удаляется внутренность.

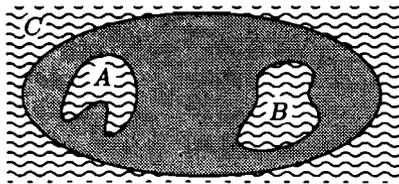
Короче говоря, несмотря на участие великих Гаусса и Пуанкаре, а также филдсовских лауреатов Джонса, Дринфельда, Концевича, Уиттена и других выдающихся исследователей, проблема классификации узлов остается решенной лишь частично. Это говорит о наличии в задаче не только рутинных трудностей, но и принципиальных. И если рассуждать о сложности топологической классификации многообразий, то в качестве наглядных, но непробиваемых объектов достаточно представлять себе узлы, а еще лучше их дополнения в \mathbb{R}^3 . А уж об ахиллесовой пяте интуиции

³²⁾ См. [15, 18], а также: *Матвеев С. В.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий // УМН. 1997. 52. Вып. 5. С. 147–174; *Дужин С. В., Чmutов С. В.* Узлы и их инварианты // Матем. просв. 1999. 3. Вып. 3. С. 59–93.

³³⁾ *Gordon C., Luecke J.* Knots are determined by their complements // J. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 2. P. 371–415.

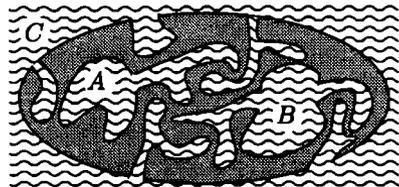
1.10.1. Пример Брауэра³⁵⁾. *Может ли некое множество Γ делить \mathbb{R}^n на $k \geq 3$ областей? Области разные, а граница одна и та же. На вид фантазмагория, но ответ — положительный.*

Вот соответствующая конструкция.



квадратной ε -решетки. Затем от каждого озера и от моря к каждой точке S_ε пророем канал, не доводя его до этой точки на расстояние $\frac{\varepsilon}{2}$. В духе рисунка справа.

◀ Пусть в море C есть остров, а на острове два озера, A и B . На сухопутной части острова выделим ε -сеть S_ε — множество точек, расположенных в узлах



На оставшуюся часть суши поместим $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть, и к точкам $S_{\frac{\varepsilon}{2}}$ пророем каналы, не доходящие до соответствующих точек на $\frac{\varepsilon}{4}$. Потом накроем сушу $\frac{\varepsilon}{4}$ -решеткой, и т. д. Понятно, что в пределе области A, B, C разрастутся до областей $A^\infty, B^\infty, C^\infty$ с общей границей Γ . Граница Γ — это все, что останется от суши. ►

Изначально можно было бы взять остров с миллионом озер — в результате получился бы *пример миллиона областей с общей границей*. Так что допускать к рассмотрению произвольные области весьма рискованно, особенно если заботиться о получении визуально ясных результатов. Граница Γ может оказаться вовсе не поверхностью, у области может не быть в граничных точках внешних или внутренних нормалей, — соответственно многие привычные категории мышления теряют смысл, и объект исследования уходит в «потусторонних направлениях».

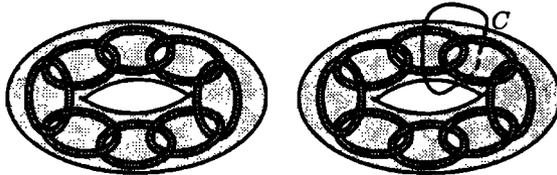
Поэтому топология в своих наиболее внятных разделах жертвует общностью, рассматривая вместо потенциально злокаче-

³⁵⁾ В качестве парадокса не один раз упоминался в предыдущих томах.

ственных областей *клеточные комплексы*³⁶⁾, *гладкие многообразия* и другие относительно покладистые объекты.

1.11. Антуановское множество

Внутри сплошного тора T_0 расположим замкнутую цепь T_1 , состоящую из сцепленных звеньев.



В каждое звено, представляющее собой сплошной тор меньшего калибра, опять вставим замкнутую цепь, и множество этих более мелких цепей обозначим T_2 . Продолжая процесс, получим последовательность вложенных множеств

$$\dots \subset T_k \subset \dots \subset T_1 \subset T_0.$$

Пересечение³⁷⁾ $A = \bigcap_k T_k$, известное как *антуановское множество* [1], обладает неожиданными свойствами, раскрывающими особенности одного из топологических ракурсов.

Множество A нульмерно, ибо размеры звеньев T_k стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, и потому в A нет связных подмножеств за исключением отдельных точек. Через такое «сито» A , казалось бы, можно протащить линию, но оказывается — нельзя. Точнее говоря, в дополнении $\mathbb{R}^3 \setminus A$ не всякий контур стягиваем в точку, что выглядит неожиданно.

◀ Пусть контур C охватывает тор T_0 , как показано на рисунке. Допустим противное, C стягивается в точку в $\mathbb{R}^3 \setminus A$, и деформация C оставляет след P .

³⁶⁾ Склеенные из клеток — гомеоморфных образов шаров.

³⁷⁾ Пересечение бесконечной последовательности замкнутых вложенных множеств непусто в \mathbb{R}^3 . В общем случае полного метрического пространства это не всегда так [5, т. 5].

Поверхность (пленка) P , очевидно, пересекается с любым T_x , а потому — и с множеством A . Это означает, что обойти A при деформации контура C в точку $x \notin A$ — невозможно. ►

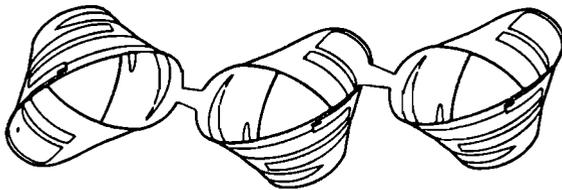
1.12. Замкнутые поверхности

Определение замкнутой поверхности как двумерного многообразия, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную кругу, — несколько далековато от прозаических задач. Удобнее «близлежащая» дефиниция замкнутой поверхности как двумерного многообразия, полученного склеиванием сторон конечного числа выпуклых многоугольников с последующим гомеоморфным преобразованием. Такой прием уже использовался при образовании тора подходящим склеиванием сторон квадрата ³⁸⁾.

На этом пути мыслимое разнообразие поверхностей возникает на базе двух вариантов:

- Поверхности M_p получаются из сферы с p отверстиями, заклеенными ручками.
- Неориентируемые поверхности N_q получаются из сферы с q отверстиями, заклеенными листами Мёбиуса ³⁹⁾.

Геометрически высказаться об N_q можно иначе. Например, N_3 получается соединением трех листов Мёбиуса перемычками, как на рисунке,



в результате чего образуется фигура с краем, гомеоморфным окружности, каковой наклеивается на границу круга, — и этот трюк в \mathbb{R}^3 уже неисполним без самопересечения. Зато любая

³⁸⁾ При получении замкнутых поверхностей подразумевается, что несклеенных сторон не остается. В противном случае образуются незамкнутые поверхности. Например, лист Мёбиуса.

³⁹⁾ Все поверхности N_q могут быть расположены в \mathbb{R}^4 без самопересечений.

поверхность N_q после вырезания одного отверстия помещается в \mathbb{R}^3 , превращаясь в гирлянду листов Мёбиуса.

Поначалу кажется, что список

$$M_0, M_1, \dots, M_p, \dots, N_1, \dots, N_q, \dots \quad (1.10)$$

не исчерпывает всех возможностей, ибо часть отверстий можно заклеить *ручками*, часть — *листами Мёбиуса*. Тем не менее, если $p + q$ отверстий в сфере заклеиваются p ручками и $q \geq 1$ листами Мёбиуса, то полученная поверхность оказывается топологически эквивалентной N_{2p+q} .

1.12.1. Теорема. *Список (1.10) дает полную топологическую классификацию замкнутых поверхностей в \mathbb{R}^3 .*

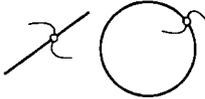
В (1.10) M_0 — сфера, M_1 — тор, N_1 — проективная плоскость, N_2 — бутылка Клейна. Все N_q — поверхности неориентируемые, в \mathbb{R}^3 без самопересечений не вкладываются.

Числа p и q называют *родом поверхности*. Определению при-
суща известная неуклюжесть. Число, скажем, 25 само по себе род не определяет. Надо еще указать, о гомеоморфизме M_p или N_q идет речь, т. е. ориентируемая или неориентируемая поверхность рассматривается. В ориентируемом случае род поверхности Π представляет собой максимальное число замкнутых простых непесекающихся контуров, по которым можно разрезать Π , не разделяя ее на отдельные части.

1.13. Метод инвариантов

В топологии широко используются различные инварианты для сравнения объектов с точки зрения возможности их перевода друг в друга с помощью определенной группы преобразований. Сама идея гениально проста.

Например, любой гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$ сохраняет связность пространства. Поэтому отрезок и окружность негомео-

морфны, , ибо отрезок после выкалывания точки теряет связность, а окружность — сохраняет. Таким образом, *связность является инвариантом гомеоморфных преобразований*, помогающим *иногда* различить негомеоморфные фигуры.

Основополагающую роль в топологии играют такие инварианты, как *гомотопические и гомологические группы* (главы 5, 6). Используются также различные числовые инварианты. Наиболее известна *эйлерова характеристика*⁴⁰⁾

$$\chi(\Pi) = \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0, \quad (1.11)$$

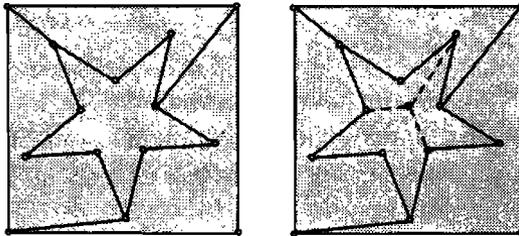
где Π — двумерная триангулируемая поверхность, α_0 — число вершин, α_1 — число ребер, α_2 — число граней триангуляции Π .

Триангуляцией называется разбиение пространства на криволинейные многогранники, гомеоморфные обычным многогранникам. В частности — разбиение двумерной поверхности на криволинейные многоугольники, не обязательно на треугольники.

Эйлерова характеристика сферы, например,

$$\chi(S^2) = 2. \quad (1.12)$$

Независимость результата (1.12) от триангуляции S^2 устанавливается совсем легко. Возьмем некоторую триангуляцию S^2 , растянем одну из граней на плоскости и на нее уложим остальные — нижеследующий рисунок слева дает пример.



⁴⁰⁾ Формула (1.11) естественным образом обобщается на случай многомерных топологических пространств, п. 7.6.

Если теперь добавить одну новую вершину и k ребер (в данном случае это 3 пунктирных ребра), то общее число граней увеличивается на $k - 1$ (появилось 3 новых грани, но звезда исчезла). Поэтому новые значения

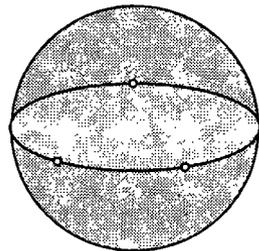
$$\alpha'_0 = \alpha_0 + 1, \quad \alpha'_1 = \alpha_1 + k, \quad \alpha'_2 = \alpha_2 + k - 1,$$

откуда видно, что значение (1.11) при переходе к новой триангуляции не меняется. А поскольку любую триангуляцию можно получить из простейшей последовательным добавлением одной вершины и нескольких ребер, становится ясно, что $\chi(\Pi)$, хотя и определяется с помощью триангуляции, зависит только от топологического устройства поверхности Π .

В итоге $\chi(\Pi)$ можно вычислять на максимально простой триангуляции. Например, разбивая S^2 треугольным экватором на две грани, имеем

$$\alpha_0 = 3, \quad \alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 2,$$

что приводит к (1.12).



Триангулируя аналогичным образом *тор* треугольным меридианом, получаем те же значения $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 3$, но разбиения на грани не происходит, т. е. $\alpha_2 = 0$, откуда

$$\chi(\text{тора}) = 0.$$

Сюда можно присовокупить

$$\chi(\text{листа Мёбиуса}) = 0, \quad \chi(\text{диска}) = 1, \quad \chi(\text{ручки}) = -1.$$

Определенные удобства для вычисления эйлеровой характеристики дает следующий результат. Пусть поверхности Π_1 , Π_2 имеют края b_1 , b_2 , гомеоморфные окружности. Триангулируем Π_1 и Π_2 так, чтобы на b_1 и b_2 получилось одинаковое число вершин

и ребер, отождествляя (склеивая) которые, получаем фактор-объединение $\Pi_1 \widehat{\cup} \Pi_2$. Если число вершин на краях k , то

$$\alpha_0 \left(\Pi_1 \widehat{\cup} \Pi_2 \right) = \alpha_0(\Pi_1) + \alpha_0(\Pi_2) - k,$$

$$\alpha_1 \left(\Pi_1 \widehat{\cup} \Pi_2 \right) = \alpha_1(\Pi_1) + \alpha_1(\Pi_2) - k,$$

$$\alpha_2 \left(\Pi_1 \widehat{\cup} \Pi_2 \right) = \alpha_2(\Pi_1) + \alpha_2(\Pi_2),$$

поэтому

$$\chi \left(\Pi_1 \widehat{\cup} \Pi_2 \right) = \chi(\Pi_1) + \chi(\Pi_2), \quad (1.13)$$

что во многих ситуациях облегчает вычисления.

Пусть ${}_p S^2$ обозначает сферу с p отверстиями. Заклеивая эти отверстия дисками, в силу $\chi(\text{диска}) = 1$ и (1.13), получаем

$$\chi(S^2) = \chi({}_p S^2) + p,$$

откуда

$$\chi({}_p S^2) = 2 - p. \quad (1.14)$$

Заклеивая отверстия ${}_p S^2$ ручками, в силу (1.14), $\chi(\text{ручки}) = -1$ и опять-таки (1.13), имеем

$$\chi(M_p) = 2 - 2p.$$

Аналогично получается

$$\chi(N_q) = 2 - q.$$

В частности,

$$\chi(\text{бутылки Клейна}) = \chi(N_2) = 0, \quad \chi(\mathbb{P}R^2) = \chi(N_1) = 1.$$

Разумеется, эйлерова характеристика не является *полным инвариантом*, с помощью которого можно было бы провести исчерпывающую классификацию поверхностей, — потому что, например, $\chi = 0$ у *бутылки Клейна*, *листа Мёбиуса* и *тора*. Тем не менее

в епархии замкнутых ориентируемых поверхностей Π значения $\chi = 0$ однозначно характеризуют класс Π ,

$$\chi(\Pi) = 2 - 2p \quad \leftrightarrow \quad \Pi \sim M_p.$$

Эйлерова характеристика помогает разобраться в причинах существования всего пяти правильных многогранников. Здесь, конечно, можно отдавать предпочтение основополагающей роли трехмерных поворотов [5, т. 8], но есть и чисто топологическая подоплека. У правильного многогранника в каждой вершине сходится одно и то же число K ребер и одно и то же число N ребер ограничивает каждую грань. Поэтому

$$N \cdot \alpha_2 = 2\alpha_1, \quad K \cdot \alpha_0 = 2\alpha_1, \quad (1.15)$$

ибо в том и другом случае каждое ребро считается дважды. Теперь $\alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 = 2$ с учетом (1.15) приводит к

$$\left(\frac{2}{K} - 1 + \frac{2}{N} \right) \alpha_1 = 2.$$

Все возможные значения K и N легко определяются прямым перебором целочисленных решений неравенства

$$\frac{2}{K} + \frac{2}{N} > 1.$$

При очевидном ограничении $K, N > 2$ имеется пять решений:

$$K = 3, \quad N = 3 \text{ — тетраэдр,}$$

$$K = 3, \quad N = 4 \text{ — куб,}$$

$$K = 3, \quad N = 5 \text{ — додекаэдр,}$$

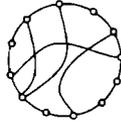
$$K = 4, \quad N = 3 \text{ — октаэдр,}$$

$$K = 5, \quad N = 3 \text{ — икосаэдр.}$$

1.14. Графовая структура поверхности

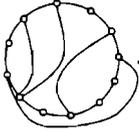
Триангуляция двумерной поверхности Π , как легко убедиться, равносильна изображению на Π некоторого графа без пересечения

ребер⁴¹⁾. Подобного сорта графы на плоскости либо на сфере S^2 называют *плоскими*. Граф



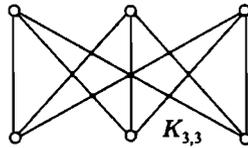
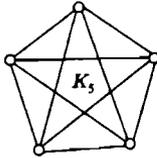
— плоский, поскольку может

быть изображен (уложен на плоскость) без пересечения ребер,



. Но не всякий граф, конечно, плоский.

1.14.1. Теорема Понтрягина—Куратовского [22]. *Граф является плоским в том случае, когда не содержит подграфа, гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$.*



Таким образом, *графы Куратовского K_5 и $K_{3,3}$ на сфере не укладываются, но они могут быть уложены на листе Мёбиуса и бутылке Клейна, на которых укладывается также полный граф K_6 с шестью вершинами. А на тор укладывается даже полный граф K_7 .*

Попытка как-то единообразно и просто охарактеризовать графы, укладываемые на поверхности Π , приводит к использованию *хроматического числа* графа.

Окрашивание вершин графа в n цветов, при котором никакие две смежные вершины не окрашены одинаково, называют *n -окраской* графа. *Хроматическое число* графа определяется как наименьшее n , для которого граф имеет n -окраску. *Хроматическим числом* $\text{colour}(\Pi)$ поверхности Π называется минимальное n , для которого любой граф, уложенный на Π , допускает n -окраску.

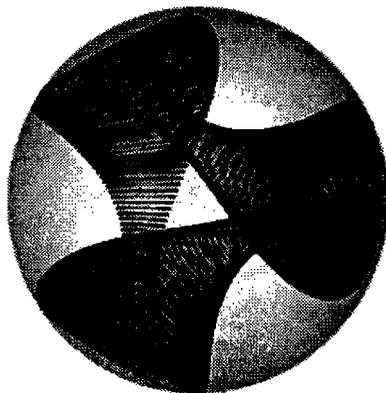
⁴¹⁾ Определения графовых понятий есть в [5, т. 10], но они общеприняты и широко известны.

Внушительные усилия многих исследователей привели к следующему результату. Хроматическое число поверхности Π , за исключением бутылки Клейна N_2 , дается формулой Хивуда

$$\text{colour}(\Pi) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(\Pi)}}{2} \right\rceil, \quad (1.16)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть. Исключение из (1.16) единственное⁴²⁾: $\text{colour}(N_2) = 6$. В итоге для замкнутых ориентируемых поверхностей опять-таки оказывается, что хроматическое число может служить полным инвариантом.

- Граф, у которого из любых двух смежных вершин одна имеет степень 3, допускает 4-окраску. (?)



⁴²⁾ Если считать, что задача о четырех красках действительно имеет положительное решение [5, т. 6, с. 82].

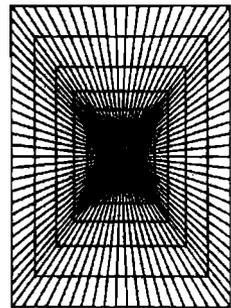
Глава 2

Неподвижные точки

*Сотри случайные черты —
и ты увидишь: мир прекрасен.*

А. Блок

Теоремы о неподвижных точках, имеющие топологическое происхождение, пользуются значительным спросом далеко за пределами топологии — потому что *проблемы существования решений* всевозможных задач давно выдвинулись на передний план. Тем не менее инструментарий остается малоизвестным, за редкими исключениями типа *теоремы Брауэра*. Пропедевтический набросок соответствующей теории был дан в [5, т. 1]. Ниже предлагается более развернутое изложение, опять-таки не претендующее на строгость, зато сохраняющее наглядность.

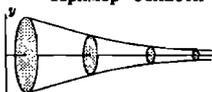


2.1. Предварительные соображения

Пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^n , $\dot{\Omega}$ — ее граница, а $f(\dot{\Omega})$ — образ границы при непрерывном отображении $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. В этом случае f будем называть также *оператором* и говорить, что f задает в \mathbb{R}^n *векторное поле* $f(x)$.

Что касается Ω , пока будем предполагать, что к рассмотрению допускаются «покладистые» области Ω , например, с гладкой достижимой изнутри границей¹⁾, — дабы избежать аномальных ситуаций типа миллиона разных областей с одной и той же границей (*пример Брауэра* в п. 1.10.1).

¹⁾ Пример области с недостижимой изнутри границей. Бесконечное тело вращения



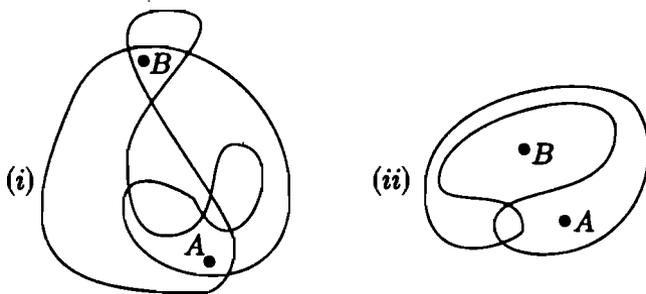
конечного объема будем наматывать на некоторую окружность S^1 , с каждым витком приближаясь к окружности, но не пересекая ее. В границу Γ финальной

Допустим, нас интересует существование решения уравнения

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

в области Ω . Другими словами, мы интересуемся, принадлежит ли 0 образу Ω или нет. Действительно, если $0 \in f(\Omega)$, то это означает существование такого $x^* \in \Omega$, что $f(x^*) = 0$, т. е. уравнение (2.1) разрешимо в Ω .

Если ответ на поставленный вопрос мы хотим получить в терминах значений оператора f на границе $\dot{\Omega}$, — рассуждать можно так. Интуиция подсказывает, что образ $f(\Omega)$ заполняет область, находящуюся внутри $f(\dot{\Omega})$. Если при этом 0 лежит *внутри* $f(\dot{\Omega})$, то $0 \in f(\Omega)$, и задача решена²⁾. На самом деле все не так просто. Главная трудность заключается в определении понятия «внутри». Например, окружность под действием f может перейти в замкнутую кривую, изображенную на рисунке (i).



Нетривиальность ситуации здесь достаточно очевидна³⁾. Если же понятие «внутри» не определено, то интуитивный вывод о том, что $f(\Omega)$ заполняет внутренность $f(\dot{\Omega})$, теряет смысл⁴⁾. Наконец,

«картинки» войдет не только боковая поверхность, но и окружность S^1 . При этом любая точка из S^1 не будет достижима изнутри, т. е. ее нельзя соединить с внутренней точкой Ω непрерывной кривой.

²⁾ С тем же успехом изначально можно говорить об уравнении $f(x) = y$, и тогда эквивалентом $0 \in f(\Omega)$ будет $y \in f(\Omega)$.

³⁾ Если внутренность определить подходящим образом, — точка A на рис. (i) будет внутренней, B — внешней. Ситуация (ii) визуально проще.

⁴⁾ Более того, даже в простейшем случае, когда Ω — сфера и f оставляет $\dot{\Omega}$ на месте, такой вывод — нетривиальный топологический факт, равносильный *теореме Брауэра* или утверждению о нестягиваемости сферы.

если даже эти трудности будут преодолены, необходимо развить формализм, который бы в случае $n > 2$ позволял обходиться без чертежей.

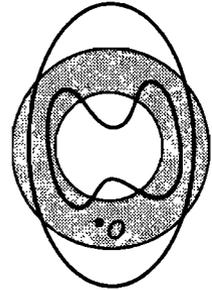
2.2. Гомотопические переходы

Рассмотрим простейшую ситуацию, опираясь на следующее (временное) понятие «внутри». Пусть $0 \in \Omega$. Договоримся, что в этом случае точка 0 лежит *внутри* замкнутой поверхности Γ , если мы можем, непрерывно деформируя Γ , совместить ее с $\dot{\Omega}$ и при этой деформации не задеваем точку 0 , т. е. поверхность в процессе деформации не пересекает точку 0 .

Это «определение» полезно продумать на конкретных примерах. Сначала для поверхностей $\dot{\Omega}$ типа сферы

$$S = \{x : \|x\| = 1\},$$

а затем для более сложных поверхностей, не обязательно связных. Например, для границы кольца.



Итак, чтобы установить, что 0 лежит внутри $f(\dot{\Omega})$, достаточно деформировать указанным способом $f(\dot{\Omega})$ на $\dot{\Omega}$. В процессе такой деформации каждая точка $f(x) \in f(\dot{\Omega})$ описывает некоторую траекторию, заканчивающуюся на $\dot{\Omega}$. При этом концами каждой траектории пусть будет пара точек $x \in \dot{\Omega}$ и $f(x) \in f(\dot{\Omega})$. Эта деформация описывается некоторым непрерывным отображением $H : \dot{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющим условиям

$$H(x, 0) \equiv f(x), \quad H(x, 1) \equiv x,$$

т. е. $H(x, t)$ — невырожденная гомотопия от f к тождественному отображению $I : \dot{\Omega} \rightarrow \dot{\Omega}$. Условие невырожденности

$$H(x, t) \neq 0$$

обеспечивается тем, что деформация не задевает точку 0 .

Таким образом, если существует отображение $H(x, t)$ с описанными свойствами, — уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω . Например, когда при любом $x \in \dot{\Omega}$ векторы x и $f(x)$ не направлены противоположно, в качестве $H(x, t)$ можно взять

$$H(x, t) = tx + (1 - t)f(x).$$

Непротивоположная направленность x и $f(x)$ здесь гарантирует невырожденность: $H(x, t) \neq 0$. Следовательно, непротивоположная направленность векторов x и $f(x)$ при любом $x \in \dot{\Omega}$ обеспечивает разрешимость уравнения

$$f(x) = 0.$$

Отсюда в несколько строчек выводится теорема Брауэра и ряд других теорем о неподвижных точках, что будет сделано далее.

Может встретиться также иной тип деформаций: концы каждой траектории (см. выше) представляют собой пару точек

$$\alpha_x Ax \in \dot{\Omega} \quad \text{и} \quad f(x) \in f(\dot{\Omega}),$$

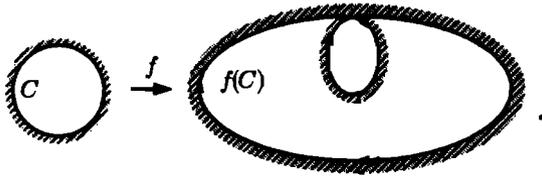
где A — линейное невырожденное преобразование, $\alpha_x > 0$ — поправочный множитель. В случае $\det A < 0$ это означает, что поверхность $\dot{\Omega}$ отображением f как бы выворачивается наизнанку.

Использованное выше понятие «внутри» исключает из рассмотрения ситуации, в которых указанная деформация невозможна, а уравнение $f(x) = 0$ тем не менее разрешимо. Например, в случае $\dot{\Omega} = S$ поверхность $f(S)$, будучи деформирована на S , а потом растянута по S (разглаживанием складок), может окутывать S несколько раз (а не один — как в рассмотренных выше случаях). Число этих окутываний является абсолютным значением вращения векторного поля $f(x)$ на S — см. далее.

2.3. Вращение векторного поля

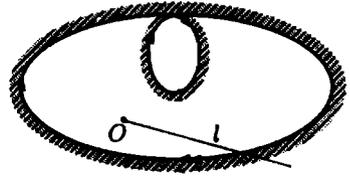
Допустим, поверхность $f(\dot{\Omega})$ не имеет слипшихся частей, и на одном ее кусочке фиксирована внешняя сторона. Разобьем $f(\dot{\Omega})$

на маленькие участки — *накладывающиеся друг на друга* — и, начиная с исходного кусочка, продолжим определение внешней стороны на соседние участки, согласуя ориентацию на пересечениях. И так, пока не определится внешняя сторона на всей поверхности $f(\dot{\Omega})$. Перед глазами полезно иметь какую-нибудь простую картинку. Пусть окружность S^1 оператор f переводит в контур с петлей,



Внешняя, заштрихованная, сторона определяется постепенным расползанием лоскутов ориентации, как оговорено выше, — при движении по контуру $f(S^1)$, например, по часовой стрелке.

Теперь из точки O выпустим произвольный луч l и посчитаем, сколько раз l протыкает $f(\dot{\Omega})$ *изнутри наружу* — допустим, γ_{\oplus} раз, и сколько — *снаружи внутрь* — допустим, γ_{\ominus} раз. Величину

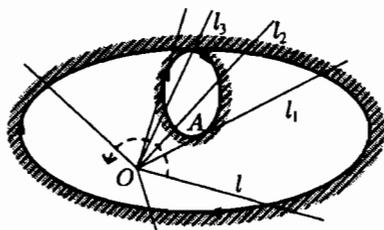


$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma_{\oplus} - \gamma_{\ominus}$$

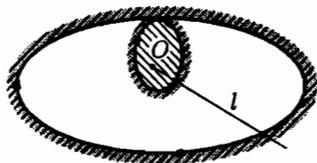
назовем *вращением векторного поля f на $\dot{\Omega}$* .

Для *корректности* определения требуется независимость $\gamma(f, \dot{\Omega})$ от выбора l . Очевидно, величина $\gamma(f, \dot{\Omega})$, как функция l , локально постоянна — не меняется при малых шевелениях луча. Изменений можно ожидать, если при повороте луч пересекает точку касания (точка A на рисунке ниже). Однако геометрически ясно, что при вращении l и переходе критического положения l_1 появляется пара точек протыкания. Причем, если в одной из них луч протыкает $f(\dot{\Omega})$ изнутри наружу, то в другой — наоборот.

Поэтому точки протыкания появляются или исчезают только парами (полярными), и γ не меняется.

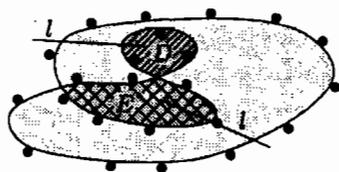


Если $f(\hat{\Omega})$ имеет слипшиеся участки, то надо считать, что в соответствующем месте луч протыкает поверхность столько раз, сколько там слиплось слоев — и все остается по-прежнему. Это же должно быть сказано в отношении лучей, протыкающих поверхность в точках самопересечения $f(\hat{\Omega})$ (луч l_3 на рисунке). В рассматриваемом случае получается $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 1$.



Если бы нуль внутри контура располагался в другом месте, например, в заштрихованной области, получилось бы $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 2$, поскольку луч l протыкает $f(\hat{\Omega})$ два раза, и оба — изнутри наружу.

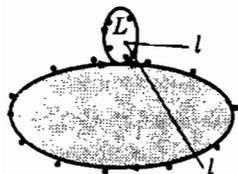
В более сложном варианте (черные шарики на внешней стороне) $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 1$, если O лежит в серой области, $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 2$, если O — в области E , наконец, $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 0$, если O — в области D .



А в ситуации слева

$$\gamma(f, \hat{\Omega}) = -1,$$

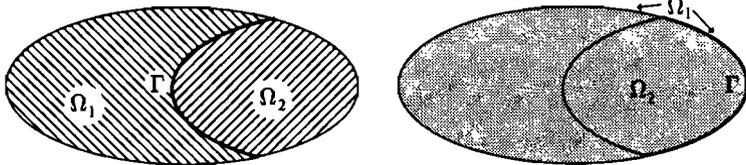
если O лежит в области L .



Для большинства приложений произвол в задании ориентации «исходного кусочка» поверхности $f(\hat{\Omega})$ сам по себе не принципиален⁵⁾. Важно другое — правильное согласование ориентаций при одновременном рассмотрении нескольких областей.

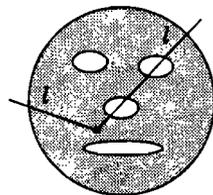
⁵⁾ Потому что эти приложения базируются на разграничении двух ситуаций: $\gamma(f, \hat{\Omega}) = 0$ и $\gamma(f, \hat{\Omega}) \neq 0$ (неважно $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$).

Пусть, например, Ω_1 и Ω_2 граничат по $\Gamma = \dot{\Omega}_1 \cap \dot{\Omega}_2$, внешняя сторона $\dot{\Omega}_1$ задана — и тем самым определена ориентация на Γ , как части поверхности $\dot{\Omega}_1$. Ориентация на Γ , как части поверхности $\dot{\Omega}_2$, меняется на противоположную (сохраняется), если Ω_2 находится по другую сторону Γ (по ту же сторону Γ). Эта новая ориентация Γ переносится на всю поверхность $\dot{\Omega}_2$ описанным выше способом «покусочного расширения».



2.3.1. Если $0 \in \Omega$, то вращение тождественного отображения $I(x) \equiv x$ на $\dot{\Omega}$ равно 1.

Это, пожалуй, единственная ситуация, где определение внешней стороны у $I(\dot{\Omega})$ не вызывает вопросов, поскольку $\dot{\Omega}$ остается на месте. Луч сначала протыкает $\dot{\Omega}$ изнутри, потом — снаружи, ..., последний раз — изнутри.



2.4. Гомотопные векторные поля

Деформации, или гомотопические переходы, которые затрагивались в п. 2.2, играют в топологии центральную роль.

2.4.1. Определение. Невырожденные⁶⁾ на $\dot{\Omega}$ отображения f и g называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует такая невырожденная непрерывная деформация (гомотопия) $H(x, t)$,

$$H : \dot{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

что

$$H(x, 0) \equiv f(x), \quad H(x, 1) \equiv g(x).$$

⁶⁾ Не обращающиеся в нуль.

Гомотопность отображений является отношением эквивалентности.

Операции гомотопического перехода от f к g с помощью $H(x, t)$ соответствует непрерывное деформирование поверхности $f(\dot{\Omega})$ в поверхность $g(\dot{\Omega})$. Требование невырожденности, $H(x, t) \neq 0$, означает, что деформируемая поверхность не имеет права пересекать точку 0.

Геометрически ясно, что невырожденная деформация не может поменять величину вращения $\gamma(\cdot)$, поскольку — двигается ли луч (п. 2.3), деформируется ли поверхность — точки протыкания исчезают и возникают парами (разумеется, пока деформируемая поверхность не пересекает нуля). Поэтому справедлив следующий важный результат.

2.4.2. Теорема. *Гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения.*

Становится ясно, что бесконечное разнообразие практических ситуаций может быть разбито на категории. Деформирование $f(\dot{\Omega})$ на единичную сферу S , с центром в нуле, и последующее разглаживание складок — порождает многослойную поверхность, окутывающую сферу $|\gamma(f, \dot{\Omega})|$ раз⁷⁾. Отрицательный знак $\gamma(f, \dot{\Omega})$ связан с выворачиванием $\dot{\Omega}$ наизнанку.

Несмотря на элементарный характер утверждения 2.4.2, оно играет важную роль, поскольку служит основным инструментом для вычисления вращений векторных полей, позволяя переходить с помощью гомотопии от изучаемых полей к более простым, часто стандартным, вращение которых известно.

2.4.3. Самый распространенный на практике вид деформаций — линейная гомотопия:

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

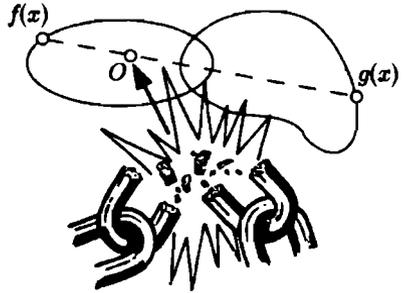
связывающая отображения f и g .

⁷⁾ Если f отображает S в S , то $\gamma(f, S)$ — это так называемая топологическая степень отображения f .

Линейная гомотопия может оказаться вырожденной лишь в том случае, когда найдется точка $x \in \Omega$, в которой $f(x)$ и $g(x)$ имеют разные знаки,

$$f(x) = -\frac{t}{1-t}g(x).$$

Поэтому в случае *непротивоположной направленности* в любой точке $x \in \Omega$ отображения $f(x)$ и $g(x)$ линейно гомотопны и, в соответствии с теоремой 2.4.2, имеют одинаковые вращения.



В связи с теоремой 2.4.2 закономерно возникает вопрос о справедливости обратного утверждения. Обязательно ли гомотопны поля с одинаковым вращением? В общем случае это не так. Если же Ω — шар, положительный ответ на поставленный вопрос дает знаменитая *теорема Хопфа*.

2.4.4. Теорема. *Невырожденные на сфере $S \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, векторные поля с одинаковым вращением — гомотопны.*

Теорема 2.4.4 не участвует в формировании излагаемого далее аппарата, но показывает, что «аппарат» достигает максимума возможного. В том смысле, что за рамками соответствующей «деформационной идеологии» не остается каких-либо других топологических инвариантов (помимо вращения), из которых можно было бы вытащить дополнительную информацию.

Выше подразумевался гомотопический переход от f_0 к векторному полю f_1 , деформирующий поверхность $f_0(\Omega)$ в $f_1(\Omega)$, с помощью гомотопии

$$f_t(x) = H(x, t).$$

Однако деформация может осуществляться не только за счет изменения оператора, но и за счет изменения области. Как бы деформация ни происходила, для сохранения величины вращения существенно лишь, чтобы деформируемая поверхность не пересекала точку 0. Вот точная формулировка результата. Пусть Ω_t ($t \in [0, 1]$) описывает непрерывный переход от области Ω_0 к Ω_1 .

Результирующую деформацию $f_t(\dot{\Omega}_t)$ назовем невырожденной, если

$$f_t(x) \neq 0$$

при любых $t \in [0, 1]$, $x \in \dot{\Omega}_t$.

2.4.5. Теорема. Пусть деформация $f_t(\dot{\Omega}_t)$ невырождена. Тогда

$$\gamma(f_0, \dot{\Omega}_0) = \gamma(f_1, \dot{\Omega}_1).$$

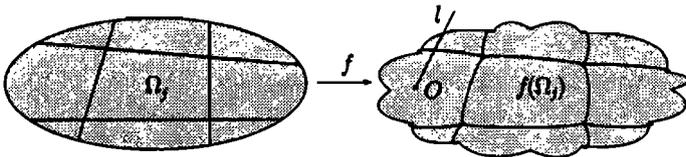
Это простое обобщение теоремы 2.4.2 иногда оказывается полезным, позволяя при вычислении вращения переходить не только к более простому полю, но и к более простой области.

2.5. Скелет теории

Вращение векторного поля обладает *свойством аддитивности* в следующем смысле.

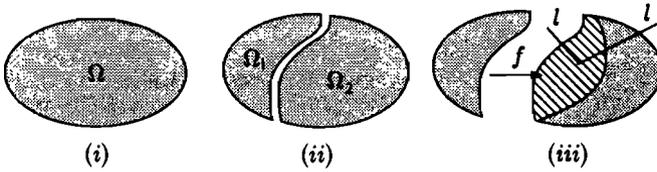
2.5.1. Теорема. Пусть векторное поле $f(x)$ определено и невырождено на границах областей $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_m$, причем области Ω_j ($j = 1, \dots, m$) попарно не пересекаются и $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$. Тогда

$$\gamma(f, \Omega) = \sum_{j=1}^m \gamma(f, \Omega_j). \quad (2.2)$$



◀ Результат очевиден в контексте определения $\gamma(\dots)$ методом «протыкающего луча». Если Ω_i и Ω_k граничат друг с другом, то граничат и $f(\Omega_i)$ с $f(\Omega_k)$ по некоторому участку Γ_{ik} . Протыканию лучом Γ_{ik} , например, изнутри при подсчете $\gamma(f, \Omega_i)$ будет соответствовать протыкание Γ_{ik} снаружи при подсчете $\gamma(f, \Omega_k)$. Поэтому в сумме (2.2) справа — все протыкания внутренних перегородок взаимно сократятся. ▶

Рассмотрим простейшую иллюстрацию. Область Ω , ограниченная эллипсом (i), разбивается на две подобласти Ω_1 и Ω_2 , левую и правую, (ii).

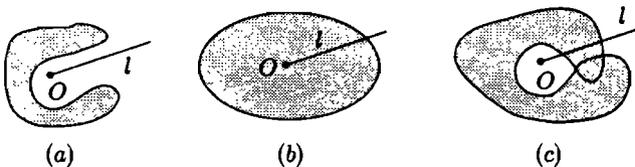


Правая — под действием преобразования f остается на месте, а левая — как бы переворачивается и после небольшой деформации накладывается на правую заштрихованной «изнанкой» (iii). Если нуль расположен в заштрихованной части, то

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0, \quad \gamma(f, \dot{\Omega}_1) = -1, \quad \gamma(f, \dot{\Omega}_2) = 1,$$

в чем полезно убедиться в качестве упражнения.

Будем говорить, что невырожденное на $\dot{\Omega}$ векторное поле $f(x)$ имеет *прокол*, если $f(x)$ не принимает значений какого-то направления, как на рис. (a). Иначе говоря, $f(x) \neq \lambda h$ для всех $x \in \dot{\Omega}$, $\lambda > 0$ и некоторого ненулевого $h \in \mathbb{R}^n$. На рисунках (b) и (c) направления $f(x)$ исчерпывают полный «телесный» угол, но ситуации, очевидно, разные.



2.5.2. Теорема. Если векторное поле $f(x)$ на $\dot{\Omega}$ имеет прокол, то $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ Для доказательства достаточно в качестве l взять луч, задаваемый вектором h ,

$$l = \{x : x = \lambda h, \lambda \in [0, \infty)\},$$

он поверхность $f(\dot{\Omega})$ вообще не протыкает. ▶

2.5.3. Лемма. Пусть поле $f(x)$ невырождено на замыкании области Ω , т. е. $f(x) \neq 0$ при любом $x \in \bar{\Omega}$. Тогда $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ Разобьем Ω на непересекающиеся области Ω_j настолько малых размеров, что все векторы на каждом замыкании $\bar{\Omega}_j$ составляют друг с другом острый угол. В этом случае на любой границе Ω_j поле f имеет прокол. Поэтому (теорема 2.5.2) все $\gamma(f, \Omega_j) = 0$. Окончательный вывод следует из теоремы 2.5.1. ▶

Из леммы 2.5.3 вытекает фундаментальный результат:

2.5.4. Теорема. Если $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 0$, то уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω , т. е. в Ω существует нуль векторного поля $x^* \in \Omega$, $f(x^*) = 0$.



Таким образом, любая теорема об отличии от нуля вращения векторного поля f может трактоваться как принцип разрешимости уравнения $f(x) = 0$.

Отметим в заключение справедливость полезного дополнения к теореме 2.5.1, вытекающего из объединения теоремы 2.5.1 с леммой 2.5.3.

2.5.5. Утверждение теоремы 2.5.1 справедливо без предположения $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$, но при условии невырожденности f на $\bar{\Omega} \setminus \bigcup \bar{\Omega}_j$.

2.6. Разрешимость уравнений

2.6.1. Пусть $0 \in \Omega$ и для любого $x \in \dot{\Omega}$ выполняется одно из условий:

- векторы x и $f(x)$ не направлены противоположно;
- $\|f(x) - x\| < \|f(x)\| + \|x\|$;
- скалярное произведение $(f(x), x) > 0$.

Тогда уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω .

◀ В случае непротивоположной направленности x и $f(x)$ теоремы 2.4.2, 2.3.1 обеспечивают равенства

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \gamma(I(x), \dot{\Omega}) = 1,$$

что по теореме 2.5.4 влечет за собой разрешимость $f(x) = 0$. Два других условия влекут за собой непротивоположную направленность x и $f(x)$. ►

Изучаемые уравнения часто имеют специальный вид

$$x = T(x). \quad (2.3)$$

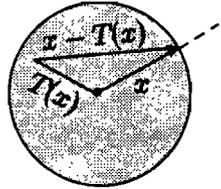
В этом случае решение (2.3) называют *неподвижной точкой* оператора T . Чтобы воспользоваться здесь результатом 2.6.1, достаточно перейти к векторному полю $f(x) = x - T(x)$. В итоге, например, можно гарантировать существование у T неподвижной точки, если

$$(Tx, x) < (x, x), \quad x \in \Omega.$$

Особую популярность имеет *теорема Брауэра* 9.4.3, которая в рамках теории вращения доказывается несколько иначе.

2.6.2. Теорема. *Оператор T , переводящий в себя замкнутый шар B , всегда имеет неподвижную точку $x^* \in B$.*

◀ Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Предположим противное: T не имеет неподвижной точки в B . Тогда поле $x - T(x)$ невырождено на сфере \dot{B} и, в силу $T(B) \subset B$, векторы $x \in \dot{B}$ и $x - T(x)$ — не противоположно направлены, иначе точке $T(x)$ пришлось бы лежать на продолжении радиус-вектора $x \in \dot{B}$, что противоречит условию $T(B) \subset B$. ►



Из доказательства п. 2.6.2 видно, что непротивоположная направленность x и $x - T(x)$ обеспечивается в гораздо более свободных предположениях. Поэтому справедлив следующий результат.

2.6.3. *Пусть Ω — произвольная область, $0 \in \Omega$ и оператор T на границе $\dot{\Omega}$ удовлетворяет условию $T(x) \neq \lambda x$ при $\lambda > 1$. Тогда у T существует неподвижная точка $x^* \in \bar{\Omega}$.*

Важное замечание. Вращение векторного поля относится к разряду структурно устойчивых (грубых) характеристик. Оно не меняется при малых изменениях как отображения f , так и области Ω . Поэтому любые теоремы о разрешимости уравнений,

опирающиеся на оценки $\gamma(\cdot)$, «выдерживают» малые возмущения. При вычислениях самого вращения оказывается возможным пользоваться различными аппроксимациями, не нарушая выводов, — например, вместо $f(x)$ в окрестности x_0 можно рассматривать линейное приближение $f'(x_0)(x - x_0)$ (разумеется, если производная $f'(x_0)$ невырождена).

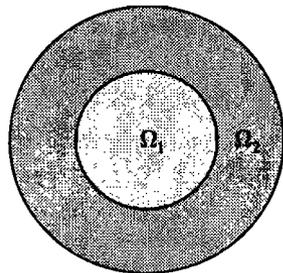
2.7. Еще раз об ориентации

Пусть Ω — шар в \mathbb{R}^3 с центром в нуле, сфера S — его граница. Что с S делает отображение $f(x) = -x$? Вроде бы ничего. Сфера остается на месте. Поэтому, казалось бы, внешняя сторона S и $f(S)$ одна и та же. Тем не менее здесь имеется принципиальное отличие, и оно выстреливает в тех задачах, где важно согласование ориентаций разных поверхностей. Скажем, сумма (2.2) потеряла бы смысл без приведения вращений $\gamma(f, \hat{\Omega}_j)$ «к общему знаменателю», т. е. к согласованию внешних сторон у разных $f(\hat{\Omega}_j)$.

Если бы на S были нарисованы вихри, закрученные по часовой стрелке (при виде, допустим, изнутри), то на $f(S)$ эти вихри крутились бы уже против часовой стрелки. Такой казус возникает потому, что отображение $f(x) = -x$ как бы выворачивает сферу наизнанку — в результате внешняя сторона оказывается внутренней, а вращение отрицательным,

$$\gamma(-x, S) = -1.$$

Такое уточнение становится принципиальным, например, в следующей ситуации. Пусть Ω_1 — шар в \mathbb{R}^3 с центром в нуле, Ω_2 — шаровое кольцо, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Пусть $f(x) = -x$ на $\hat{\Omega}_1$, $f(x) = x$ на $\hat{\Omega}_2$. По теореме 2.5.1



$$\gamma(f, \hat{\Omega}) = \gamma(f, \hat{\Omega}_1) + \gamma(f, \hat{\Omega}_2).$$

Поэтому, учитывая $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$, $\gamma(f, \dot{\Omega}_1) = -1$, имеем $\gamma(f, \dot{\Omega}_2) = 2$, что влечет за собой $f(x^*) = 0$ для некоторого $x^* \in \Omega_2$. Другими словами, образ шарового кольца $f(\Omega_2)$ обязан накрывать точку 0, что, вообще говоря, просто так не очевидно.

Визуально согласование ориентаций можно представлять так. На $\dot{\Omega}$ рисуются одинаково закрученные вихри. Потом наблюдатель, сидя в нуле, смотрит вдоль луча l и протыкание поверхности $f(\dot{\Omega})$ засчитывает как «изнутри наружу», если в районе протыкания вихрь крутится в ту же сторону, — и наоборот. В общем случае вместо вихрей используют левые и правые базисы. Делается это следующим образом.

Предполагаем $\dot{\Omega}$ и f гладкими (в противном случае можно перейти к гладким аппроксимациям). В точке $x \in \dot{\Omega}$ локальный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ выбирается так, чтобы вектор e_1 был направлен по внешней нормали, а векторы e_2, \dots, e_n лежали в касательном пространстве T_x к $\dot{\Omega}$ в точке x . Нормаль e'_1 к поверхности $f(\dot{\Omega})$ в точке $f(x)$ называют внешней, если базис

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = \{e_1, f'(x)e_2, \dots, f'(x)e_n\}$$

одинаково ориентирован с базисом⁸⁾ $\{e_1, \dots, e_n\}$.

2.8. Индексы и алгебраическое число нулей

Нуль $x_0 \in \Omega$ векторного поля $f(x)$ называют *изолированным*, если в достаточно малой окрестности x_0 нет других нулей. Вращение поля f на сферах достаточно малого радиуса с центром в x_0 называют *индексом* x_0 и обозначают $\text{ind}(f, x_0)$.

Корректность такого определения вытекает из одинаковости вращений f на сферах достаточно малого радиуса. Действительно, если шары B_1 и B_2 не содержат других нулей, кроме x_0 , и $B_1 \subset B_2$,

⁸⁾ Напомним [5, т. 3], два базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ называются одинаково ориентированными, если $e'_i = \sum a_{ij}e_j$ и $\det |a_{ij}| > 0$.

то из теоремы 2.5.5 следует $\gamma(f, \dot{B}_1) = \gamma(f, \dot{B}_2)$. Из той же теоремы 2.5.5 вытекает следующий фундаментальный результат.

2.8.1. Теорема об алгебраическом числе нулей. Пусть векторное поле $f(x)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и имеет в Ω лишь изолированные нули. Тогда

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum_j \text{ind}(f, x_j), \quad (2.4)$$

где суммирование идет по всем нулям $x_j \in \Omega$ поля f .

◀ Доказательство сразу вытекает из п. 2.5.5, если области Ω_j определить как шары достаточно малых радиусов с центрами в точках x_j . ▶

Теорема 2.8.1 имеет разнообразные применения. Гарантирует, например, существование неизвестного нуля, если сумма индексов известных нулей отлична от $\gamma(f, \dot{\Omega})$. В различных вариантах позволяет устанавливать единственность решения. Скажем, пусть $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$ и производная (матрица Якоби) $f'(x)$ невырождена на Ω . Этого, оказывается, достаточно для существования и *единственности* решения $f(x) = 0$ на Ω .

◀ Действительно, если x_0 — нуль поля f , то $f(x)$ и $f'(x_0)(x - x_0)$ не противоположно направлены в достаточно малой окрестности x_0 , поскольку

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

В силу невырожденности $f'(x)$ детерминант $\det f'(x)$ сохраняет знак, поэтому индексы всех нулей обязаны быть одинаковыми,

$$\text{ind}(f, x_0) = \text{sign det } f'(x_0) = 1.$$

А это, благодаря условию $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$, допускает не более одного нуля. ▶

Иногда удобно пользоваться понятием *индекса поля на бесконечности*. Пусть поле f невырождено при достаточно больших по норме $x \in \mathbb{R}^n$. В этом случае говорят, что особая точка ∞ поля f изолирована. При этом теорема 2.5.1 и лемма 2.5.3 гарантируют, что вращение $f(x)$ на сферах достаточно большого радиуса одно и то же. Это общее вращение обозначают $\text{ind}(f, \infty)$.

Если поле $f(x)$ имеет лишь изолированные нули x_j и определен индекс f на бесконечности (т. е. $f(x)$ не вырождено при достаточно больших по норме $x \in \mathbb{R}^n$), то число нулей x_j конечно, и в силу п. 2.5.5 имеет место равенство

$$\sum_j \text{ind}(f, x_j) = \text{ind}(f, \infty).$$

Пусть

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|f(x) - f'(\infty)x\|}{\|x\|} = 0,$$

где $f'(\infty)$ — матрица. В этом случае поле f называют асимптотически линейным, а матрицу $f'(\infty)$ — производной на бесконечности оператора f .

2.8.2. Пусть поле f асимптотически линейно и $\det f'(\infty) \neq 0$. Тогда особая точка ∞ поля f изолирована и

$$\text{ind}(f, \infty) = \text{sign det } f'(\infty).$$

◀ Доказательство совсем просто. По условию $\|f(x) - f'(\infty)x\| = o(\|x\|)$. Но так как матрица $f'(\infty)$ невырождена, это влечет за собой справедливость неравенств

$$\|f(x) - f'(\infty)x\| \leq \|f'(\infty)x\|$$

на сферах достаточно больших радиусов, что гарантирует непротивоположную направленность полей $f(x)$ и $f'(\infty)x$. ▶

2.9. Вращение линейного поля

Пусть A — линейное невырожденное преобразование и $0 \in \Omega$. Возьмем открытый шар B с центром в нуле настолько малого радиуса, что $\bar{B} \subset \Omega$. Поскольку Ax невырождено на $\bar{\Omega} \setminus B$, то⁹⁾

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \gamma(A, \dot{B}) + \gamma(A, \Omega \setminus B) = \gamma(A, \dot{B}).$$

Образ $A\dot{B}$ сферы \dot{B} также является сферой, но в другой норме. Следовательно, любой луч протыкает поверхность $A\dot{B}$ ровно один раз, откуда $|\gamma(A, \dot{\Omega})| = 1$.

⁹⁾ Наряду с $\gamma(f, \dot{\Omega})$ мы используем эквивалентное обозначение $\gamma(f, \Omega)$.

◀ Чтобы определить знак вращения, необходимо проследить за ориентацией поверхности $A\dot{\Omega}$ — см. п. 2.7. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ — локальный базис в точке $x \in \dot{B}$. Как было оговорено в п. 2.7, векторы e_2, \dots, e_n расположены в касательном пространстве T_x , а e_1 направлен по внешней нормали. Если $\det A > 0$, то в качестве локального базиса в точке $Ax \in A\dot{B}$ можно взять ¹⁰⁾

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = \{Ae_1, \dots, Ae_n\},$$

который в силу $\det A > 0$ будет одинаково ориентирован с исходным. Таким образом, в случае $\det A > 0$ любой луч протыкает поверхность $A\dot{B}$ изнутри, откуда $\gamma(A, \dot{\Omega}) = 1$. Если же $\det A < 0$, то в качестве локального базиса в $Ax \in A\dot{B}$ можно взять

$$\{e'_1, \dots, e'_n\} = \{-Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}.$$

Поверхность $A\dot{B}$ при этом ориентируется так, что любой луч ее протыкает извне. В результате $\gamma(A, \dot{\Omega}) = -1$. ▶ Следовательно:

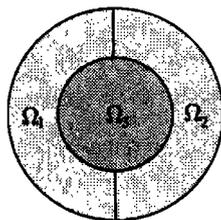
2.9.1. Пусть $0 \in \Omega$ и A — линейное невырожденное преобразование. Тогда

$$\gamma(A, \dot{\Omega}) = \text{sign det } A.$$

2.10. Нечетные поля

Векторное поле f называют *нечетным* на центрально-симметричном множестве Γ , если $f(-x) = -f(x)$ при любом $x \in \Gamma$.

Пусть нечетное поле f задано на границе шара B с центром в нуле. Представим B в виде объединения трех областей, шара меньшего радиуса Ω_3 и двух половинок Ω_1, Ω_2 шарового кольца. Положим $f(x) \equiv x$ на $\dot{\Omega}_3$ и продолжим $f(x)$ (невырожденным образом) на всю границу $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$.



◀ Возможность такого продолжения в плоском случае очевидна. На одной радиальной перегородке поле f задается произвольно (но с соблюдением заданных условий на концах), — на другую нечетно продолжается. Далее работает индукция по размерности пространства. В \mathbb{R}^3 перегородка — это плоское

¹⁰⁾ Вектор e'_1 не обязательно должен быть направлен по внешней нормали. Главное, чтобы он был направлен во внешнюю сторону.

круговое кольцо. Берем одну половинку, задаем на ней поле произвольно, но с соблюдением краевых условий (поскольку на ее границе нечетное поле уже задано), — на другую половинку поле f продолжаем нечетно. И так далее. ►

По теореме 2.5.1

$$\gamma(f, \dot{B}) = \gamma(f, \dot{\Omega}_1) + \gamma(f, \dot{\Omega}_2) + \gamma(f, \dot{\Omega}_3).$$

Заметим теперь, что $\gamma(f, \dot{\Omega}_3) = 1$, а $\gamma(f, \dot{\Omega}_1) = \gamma(f, \dot{\Omega}_2)$. Последнее вытекает из нечетности f . Действительно, если луч l протыкает поверхность $f(\dot{\Omega}_1)$ в точках x_1, \dots, x_k , то противоположный луч $-l$ протыкает $f(\dot{\Omega}_2)$ в точках $-x_1, \dots, -x_k$, причем характер протыкания (изнутри, извне) сохраняется.

Таким образом,

$$\gamma(f, \dot{B}) = 2\gamma(f, \dot{\Omega}_1) + 1,$$

т. е. *вращение нечетного поля всегда нечетно*, а значит, не равно нулю. Факт, казалось бы, относится к весьма частному случаю нечетных полей, но деформации обычно дают возможность значительно «расширить» утверждение.

2.10.1. Пусть векторы невырожденного на \dot{B} поля $f(x)$ в симметричных точках направлены неодинаково, т. е.

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \neq \frac{f(-x)}{\|f(-x)\|}, \quad x \in \dot{B}.$$

Тогда $\gamma(f, \dot{B})$ нечетно и, следовательно, уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в B .

◀ В указанных предположениях $f(x)$ гомотопно нечетному векторному полю $f(x) - f(-x)$. Деформацией может служить

$$H(x, t) = f(x) - tf(-x). \quad \blacktriangleright$$

2.11. Собственные векторы

На практике часто приходится рассматривать уравнения

$$G(x, \lambda) = 0$$

со скалярным параметром λ .

2.11.1. Пусть

$$\gamma[G(x, \lambda_1), \dot{\Omega}] \neq \gamma[G(x, \lambda_2), \dot{\Omega}].$$

Тогда при некотором $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ на $\dot{\Omega}$ существует решение уравнения $G(x, \lambda) = 0$.

◀ В противном случае поля $G(x, \lambda_1)$ и $G(x, \lambda_2)$ соединил бы невырожденный гомотопический мост

$$H(x, t) = G[x, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2]. \blacktriangleright$$

Когда уравнение с параметром имеет специальный вид

$$f(x) = \lambda x,$$

его решения называют *собственными векторами оператора* ¹¹⁾ f .

2.11.2. В нечетномерном пространстве в случае $0 \in \Omega$ невырожденный на $\dot{\Omega}$ оператор f всегда имеет на $\dot{\Omega}$ собственный вектор, т. е.

$$f(x) = \lambda x$$

при некоторых $\lambda \neq 0$ и $x \in \dot{\Omega}$.

◀ Если $\gamma(f, \dot{\Omega}) \neq 1$, то поле f не гомотопно тождественному и, следовательно, при некоторых $x \in \dot{\Omega}$ и $t \in (0, 1)$

$$tf(x) + (1-t)x = 0, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = \frac{t-1}{t}x.$$

Если же $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 1$, то поле f не гомотопно полю $-I(x)$, и тогда при некоторых $x \in \dot{\Omega}$ и $t \in (0, 1)$

$$tf(x) - (1-t)x = 0, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = \frac{1-t}{t}x. \blacktriangleright$$

2.11.3. В нечетномерном пространстве сферу невозможно причисать (без макушки), т. е. задать на сфере невырожденное касательное поле.

◀ Это сразу становится ясным, если центр сферы расположить в нуле и применить результат 2.11.2 к касательному полю $f(x)$. \blacktriangleright

¹¹⁾ По аналогии с линейным случаем.

Отсюда следует, что на сфере в \mathbb{R}^3 любая динамическая система имеет равновесие. Иначе говоря, любой оператор сдвига U_t , осуществляющий гомеоморфизм S на S при любом фиксированном t , имеет неподвижную точку. В то же время существуют гомеоморфизмы S на S без неподвижных точек, п. 3.1.

Упражнения.

1. Что означает результат 2.11.2 для невырожденного касательного поля на торе в \mathbb{R}^3 ?
2. Пусть $0 \notin \Omega$ и вращение поля $x - f(x)$ на Ω не равно нулю. Тогда уравнение

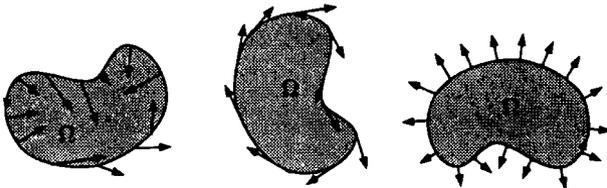
$$f(x) = \lambda x$$

разрешимо на Ω при некотором $\lambda > 1$.

2.12. Векторные поля на плоскости

Теорию вращения полезно «проиграть» в плоском варианте — в результате кое-что может стать яснее. Плоскими картинками мы оперировали и ранее, но здесь речь идет о другом способе определения вращения. «Другом» по облику, но это позволяет взглянуть на общую картину под иным углом зрения.

Итак, пусть Ω — некоторая область на плоскости с границей Γ . Пусть Ω пока гомеоморфна кругу, а на контуре Γ задано направление обхода против часовой стрелки (так, что при обходе область Ω остается слева). Векторы $f(x)$ отображения (векторного поля) $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно представлять себе начинающимися в точках $x \in \Gamma$, — что естественно в рамках обычной идеологии свободно закрепленных векторов.



На параллельной картинке векторы $f(x)$ можно рисовать выходящими из единого центра O . При обходе изображающей точкой x

контура Γ — вектор $f(x)$ совершит некое, понятно, целое число оборотов, каковое и назовем вращением $\gamma(f, \Gamma)$ векторного поля¹²⁾ $f(x)$ на Γ . Соответствие с определением через «протыкание», п. 2.3, легко прослеживается.

Обратим также внимание на устойчивость характеристики $\gamma(f, \Gamma)$ к невырожденному гомотопическому преобразованию функции f . Во-первых, невырожденное на Γ поле $f(x)$ можно нормировать — от этого число оборотов у $f(x)/\|f(x)\|$ не изменится. Поэтому невырожденную деформацию $H(x, t)$, переводящую $f_0(x)$ в $f_1(x)$, без ограничения общности также можно считать нормированной,

$$\|H(x, t)\| \equiv 1.$$

Но тогда переход от

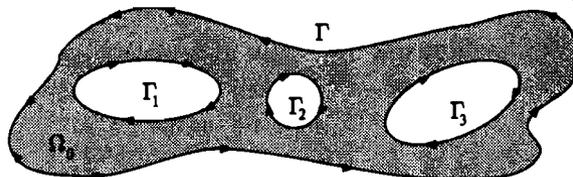
$$f_0(x) = H(x, 0) \quad \text{к} \quad f_1(x) = H(x, 1)$$

можно представить в виде последовательности достаточно малых шагов по точкам $t_1, \dots, t_n = 1$, при которых разность углов

$$H(x, t_{i+1}) - H(x, t_i)$$

будет мала при любом $x \in \Gamma$ — поэтому $H(x, t_{i+1})$ и $H(x, t_i)$ не могут разойтись по числу оборотов, а значит, не могут разойтись по числу оборотов¹³⁾ $H(x, 0)$ и $H(x, 1)$. Следовательно, $\gamma(f, \Gamma)$ инвариантно по отношению к невырожденным деформациям.

Далее $\gamma(f, \dot{\Omega}_0)$ определяется для дырявых областей типа



¹²⁾ Напомним, пока рассматривается частная ситуация области Ω , гомеоморфной кругу. Полноценное определение $\gamma(f, \Gamma)$ дано ниже.

¹³⁾ Непрерывная функция, принимающая только целочисленные значения, обязана быть константой.

В данном случае

$$\gamma(f, \dot{\Omega}_0) = \gamma(f, \Gamma) + \gamma(f, \Gamma_1) + \gamma(f, \Gamma_2) + \gamma(f, \Gamma_3)$$

с учетом того, что для выбранной ориентации контуров при их обходе область Ω_0 остается слева. Если бы у всех контуров направление обхода было выбрано одинаковым, против часовой стрелки, формула приобрела бы вид

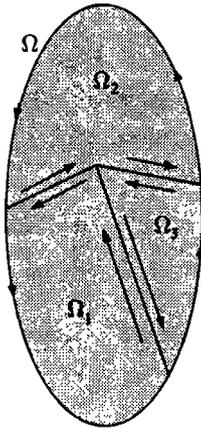
$$\gamma(f, \dot{\Omega}_0) = \gamma(f, \Gamma) - \gamma(f, \Gamma_1) - \gamma(f, \Gamma_2) - \gamma(f, \Gamma_3)$$

а в случае n дырок

$$\gamma(f, \dot{\Omega}_0) = \gamma(f, \Gamma) - \sum_{i=1}^n \gamma(f, \dot{\Omega}_i). \quad (2.5)$$

Если внутренность Γ назвать областью Ω , а Ω_i считать не дырками, а подобластями Ω , то (2.5) записывается в виде

$$\gamma(f, \dot{\Omega}) = \sum_{i=0}^n \gamma(f, \dot{\Omega}_i), \quad (2.6)$$



т. е. вращение на области равно сумме вращений на всех ее подобластях (теорема 2.5.1). Пока, правда, результат (2.6) опирается на ситуации разбиения, где у каждой подобласти только одна соседняя. Для полной реабилитации теоремы 2.5.1 достаточно рассмотреть пример, изображенный слева, и учесть, что число оборотов поля на контуре равно приращению угловой функции при обходе контура. Приращения на внутренних участках границ в сумме (2.6) взаимно уничтожаются.

Далее все развивается по описанному выше плану. Но некоторые доказательства обретают дополнительные краски. Теорема 2.5.2, например, «если векторы $f(x)$ на $\dot{\Omega}$ не принимают какого-то направления, то $\gamma(f, \dot{\Omega}) = 0$ » — очевидна, потому что запрет

направления не позволяет $f(x)$ при обходе любого контура совершать полные обороты. Поэтому все $\gamma(f, \dot{\Omega}_i)$ в (2.6) равны нулю.

Лемма 2.5.3 и центральный принцип 2.5.4 возникают по старой схеме, и вообще для дальнейшего развития теории не суть важно, определяется ли вращение оборотами или методом «протыкающего луча». К теореме 2.8.1 об алгебраическом числе нулей, например, фактически нечего добавить. Но в отдельных случаях появляются упрощения и вариации. Скажем, факт *нечетности вращения нечетного поля* (п. 2.10) в \mathbb{R}^2 устанавливается совсем просто. Из-за нечетности поля,

$$f(-x) = -f(x),$$

приращение *угловой функции*¹⁴⁾ на верхней полуокружности (и на нижней), , равно

$$2k\pi + \pi.$$

Поэтому суммарный прирост в оборотах:

$$\gamma(f, S^1) = \frac{1}{2\pi}(2k\pi + \pi + 2k\pi + \pi) = 2k + 1.$$

Само вращение на плоскости в среднем вычисляется легче.

2.12.1. Возьмем отображение f кольца  в себя, переводя-

щее в себя и каждую граничную окружность. Причем точки одной окружности f движет по часовой стрелке, другой — против часовой. Сразу очевидно

$$|\gamma(I - f, \dot{\Omega})| = 2.$$

Поэтому, если $I - f$, т. е. $x - f(x)$, еще и локальный гомеоморфизм¹⁵⁾, а значит, все индексы $I - f$ по модулю равны 1, то

¹⁴⁾ Угловая функция измеряет угол поворота вектора $f(x)$ при движении точки x по контуру Γ .

¹⁵⁾ Например, если f — оператор сдвига за единицу времени по траекториям «хорошего» дифференциального уравнения, допускающего только изолированные положения равновесия.

из теоремы 2.8.1 вытекает наличие у f в кольце как минимум двух неподвижных точек.

Факт 2.12.1 интересно сопоставить с *последней теоремой Пуанкаре*, в которой требование локальной гомеоморфности $I - f$ заменено условием, что f сохраняет площадь.



Глава 3

Дополнения и приложения

*Неразрешимые задачи вышибают ум,
освобождая рассудок для восприятия за-
предельного мира.*

Приведение теорем о неподвижных точках в систему меняет топологический облик теории на фактуру нелинейного анализа. При этом фаза перевоплощения не попадает ни в одну из дисциплин, и в результате остается мало кому известной. В огнях рампы высвечиваются «ядро теории» и «вымышленная практика», связующие нити ютятся на заднем плане. В главе кое-что извлекается из тени и подвязывается к топологической епархии, чтобы она не выглядела слишком оторванной от жизненной прозы и чересчур куцей в академическом отношении.



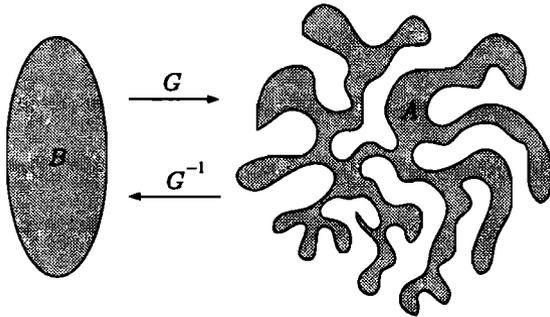
3.1. Теорема Брауэра и ее обобщения

Традиционно в условиях *теоремы Брауэра* (п. 9.4.3, равносильно 2.6.2) фигурирует замкнутый шар, но с равным успехом он может быть заменен произвольным замкнутым ограниченным выпуклым множеством¹⁾ — прежняя схема доказательства будет работать без изменений. Кроме того, избыточно требование $T(B) \subset B$, что учитывает обобщенная теорема 2.6.3.

Наконец, элементарным образом теорема Брауэра обобщается на случай множества A , гомеоморфного замкнутому шару. Предыдущая схема рассуждений, правда, не работает, но несложное дополнительное построение быстро приводит к цели.

¹⁾ Не обязательно телесным и центрально-симметричным, иначе в подходящей норме это опять-таки будет шар.

◀ Пусть оператор T переводит в себя множество A , гомеоморфное замкнутому шару B , и G — соответствующий гомеоморфизм.



В этом случае оператор $G^{-1}TG$ отображает в себя B и по теореме 2.6.2 имеет неподвижную точку $x^* \in B$, т. е.

$$G^{-1}TG(x^*) = x^* \Rightarrow TG(x^*) = G(x^*).$$

Следовательно, $y^* = G(x^*) \in A$ — неподвижная точка оператора T . ▶

Говорят, что множество \mathcal{R} обладает *свойством неподвижной точки*, если любое его непрерывное отображение в себя имеет неподвижную точку. Поэтому теорема Брауэра может звучать так: *любой замкнутый шар обладает свойством неподвижной точки*. При попытках усиления этого результата естественно идти по пути изучения тех классов отображений $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}$, относительно которых свойство неподвижной точки инвариантно. Таковым является класс *τ -отображений*, который существенно шире класса гомеоморфизмов. Отображение $T: X \rightarrow Y$ (здесь предполагается $Y = T(X)$, т. е. T отображает X на Y) называется *τ -отображением*, если для него существует правое обратное ²⁾, т. е. существует отображение $S: Y \rightarrow X$, такое что TS представляет собой тождественное отображение Y на Y .

3.1.1. Теорема. *Если множество \mathcal{R} обладает свойством неподвижной точки, а $T: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}$ является τ -отображением, то $\mathcal{P} = T(\mathcal{R})$ также обладает свойством неподвижной точки.*

◀ Доказательство весьма просто. Пусть F — любое непрерывное преобразование \mathcal{P} в себя, а S — правое обратное для T . Тогда отображение

²⁾ Напоминаем, все отображения считаются непрерывными.

$G = SFT : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ по предположению имеет неподвижную точку $x^* \in \mathcal{X}$, т. е. $SFT(x^*) = x^*$. Но тогда

$$FT(x^*) = TSFT(x^*) = T(x^*).$$

Следовательно, $T(x^*) \in \mathcal{P}$ — неподвижная точка отображения F . ►

Объединение теоремы 3.1.1 с теоремой Брауэра приводит к довольно сильным следствиям и гарантирует наличие *свойства неподвижной точки* у весьма экзотических множеств.

Обычно принято указывать более частную формулировку теоремы 3.1.1 для так называемых ретракций: *τ -отображение*

$$T : X \rightarrow Y$$

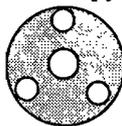
называется *ретракцией*, если $Y \subset X$ и правое обратное — тождественное отображение Y на Y . Множество $Y \subset X$ называется *ретрактом*, если существует ретракция X на Y . Иными словами, $Y \subset X$ — ретракт X , если существует непрерывное отображение $T : X \rightarrow Y$, оставляющее все точки $Y \subset X$ на месте. Из теоремы 3.1.1 следует, что любой ретракт множества, обладающего *свойством неподвижной точки*, также обладает этим свойством.

Встречается фольклорная теорема: любой стягиваемый по себе компакт в \mathbb{R}^n (в частности, звездный компакт) обладает *свойством неподвижной точки*. Утверждение неверно³⁾. Декларация приобретает силу при дополнительном предположении.

3.1.2. Теорема. *Стягиваемый по себе компакт в \mathbb{R}^n при условии локальной стягиваемости — обладает свойством неподвижной точки.*

Определенную популярность имеют задачи конструирования гомеоморфизма множества на себя — без неподвижных точек. Скажем, диск с отверстием сначала гомеоморфно деформируется в круг с круглой дыркой в центре,  затем поворачивается на угол, не кратный 2π , после чего картинка гомеоморфно возвращается к исходному виду. Неподвижных точек нет.

³⁾ Контрпримеры есть в обзоре Бунга: Bing R. H. The elusive fixed point property // Amer. Math. Monthly. 1969. 76. № 2. P. 119–132.

Легко решается задача и при нескольких отверстиях, > 2 . Без ограничения общности можно считать, что одна круглая дырка в центре, остальные симметрично по кругу,  Картинка

поворачивается на подходящий угол, в данном случае на 120° , — и преобразование обходится без неподвижных точек.

В случае двух отверстий такой фокус не проходит, и задача решается не так просто. Вернее — просто, если придумать как.

◀ Заметим сначала, что круг с двумя отверстиями гомеоморфен сфере с тремя круглыми дырками, каковые симметрично располагаем по экватору. Далее сферу поворачиваем на 120° вокруг оси z , после чего зеркально отражаем относительно экваториальной плоскости. Готово. ▶



Аналогично получается гомеоморфизм сферы в \mathbb{R}^3 на себя без неподвижных точек⁴⁾. Разве что сферу можно поворачивать вокруг оси z на любой угол, не кратный 2π , что обеспечивает некоторое разнообразие по сравнению с простым $f(x) = -x$.

3.2. Глобальная обратимость

Обратимся к следующему общему результату из раздела 9.11.

9.11.1. *Чтобы f было гомеоморфизмом \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- (i) *f является локальным гомеоморфизмом,*
- (ii) *прообраз любого ограниченного множества ограничен.*

В рамках идеологии вращения векторных полей результат получает дополнительное освещение.

3.2.1. Лемма. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — локальный гомеоморфизм. Тогда индексы любых двух точек u, v у векторных полей $f(x) - f(u)$ и $f(x) - f(v)$ равны.*

⁴⁾ Достаточно в предыдущем примере исключить из рассмотрения дырки.

◀ В силу локальной обратимости f функция $\text{ind}[f(x) - f(u), u]$ локально постоянна в достаточно малой окрестности любой точки $u \in \mathbb{R}^n$. Переход из u в любую другую точку v можно представить в виде последовательности сколь угодно малых шагов вдоль отрезка

$$\lambda u + (1 - \lambda)v, \quad \lambda \in [0, 1].$$

Поэтому функция $\text{ind}[f(x) - f(u), u]$ постоянна⁵⁾ в \mathbb{R}^n . ▶

◀ *Доказательство теоремы 9.11.1. Необходимость* условий (i), (ii) очевидна. Установим *достаточность*.

1-й шаг. В силу (ii) деформация

$$H(x, t) = f(x) - tf(0) - (1 - t)y$$

невырождена на сферах S достаточно большого радиуса. Поэтому вращения полей $f(x) - f(0)$ и $f(x) - y$ на S равны при любом y (линейная гомотопия не может вырождаться на S). А так как все индексы одинаковы, то по теореме 2.8.1 об алгебраическом числе нулей число решений уравнения $f(x) = y$, как функция y , есть константа, отличная от нуля.

2-й шаг. Допустим, $f(x) = y$ имеет $m > 1$ решений. Например, $y = 0$ соответствуют решения x_1, \dots, x_m . При движении по любому лучу

$$l = \{vt : v \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \infty)\}$$

из каждой точки x_i выходит непрерывная кривая $x_i(t)$ — такая, что

$$f(x_i(t)) = vt.$$

В силу локальной обратимости f кривые $x_i(t)$ не могут пересекаться.

Отнесем теперь к множеству C_i все точки кривых $x_i(t)$, соответствующие всевозможным v и t . В силу локальной обратимости f множества C_i открыты и не пересекаются. Но $\bigcup C_i = \mathbb{R}^n$. Это противоречит связности \mathbb{R}^n , а значит, и предположению $m > 1$. ▶

Вместо (ii) удобнее пользоваться эквивалентным условием

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty, \quad (3.1)$$

которое легче в голове укладывается.

◀ Эквивалентность легко устанавливается. Если (ii) справедливо, а (3.1) не выполняется, то найдется последовательность x_k , такая что $\|x_k\| \rightarrow \infty$, но $f(x_k) = y_k \rightarrow y^*$. В этом случае прообраз ограниченного множества $\{y_k\} \cup \{y^*\}$ неограничен.

⁵⁾ В случае невырожденности производной $f'(x)$ постоянство индекса очевидно сразу.

Наоборот, пусть справедливо (3.1) и существует ограниченное множество Ω , прообраз которого $f^{-1}(\Omega)$ неограничен. Тогда найдется последовательность $x_k \in f^{-1}(\Omega)$, такая что $\|x_k\| \rightarrow \infty$. В силу (3.1) $\|f(x_k)\| \rightarrow \infty$. С другой стороны, $\forall k : f(x_k) \in \Omega$. Противоречие. ►

Наконец, в качестве удобного на практике частного случая теоремы 9.11.3 отметим следующий результат.

3.2.2. Для глобальной разрешимости

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

относительно x необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- уравнение $\Phi(x, y) = 0$ локально разрешимо;
- если $\Phi(x_k, y_k) = 0$, $\|x_k\| \rightarrow \infty$, то $\|y_k\| \rightarrow \infty$.

3.3. Технические уловки и фурнитура

На практике не всегда удается обойтись непосредственным применением готовых теорем. Здесь нередко требуется проявление изобретательности, которая может опираться на ряд характерных технических приемов.

Нелинейная гомотопия. При доказательстве гомотопности векторных полей $f_0(x)$ и $f_1(x)$ часто используется идея введения вспомогательного промежуточного поля $f(x)$. Желаемый результат достигается, если удастся показать гомотопность сначала f_0 и f , а затем f и f_1 . На каждом шаге может работать линейный гомотопический переход, и тогда результирующая гомотопия между f_0 и f_1 будет кусочно-линейной.

Пример. Покажем, что $\gamma(f, \Omega)$ не меняется при изменении знаков перед четным числом компонент $f_i(x)$ оператора $f(x)$. Разумеется, достаточно показать инвариантность $\gamma(f, \Omega)$ при изменении знаков всего у двух компонент. Итак, убедимся в гомотопности полей

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\} \quad \text{и} \quad f^2(x) = \{-f_1(x), -f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Линейная гомотопия здесь не работает. Введем вспомогательное поле

$$f^1(x) = \{-f_2(x), f_1(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\}.$$

Допустим, Ω_1, Ω_2 — ограниченные области соответственно в \mathbb{R}^{n_1} и \mathbb{R}^{n_2} , и нас интересует существование решения (3.4) в

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n.$$

Предположим, невырожденный гомотопический переход на $\dot{\Omega}$ переводит поле $G(\mathbf{x})$ в поле

$$F(\mathbf{x}) = \{F_1(\mathbf{u}), F_2(\mathbf{v})\}, \quad (3.5)$$

которое обычно называют прямой суммой F_1 и F_2 и обозначают $F = F_1 \dot{+} F_2$.

Уравнение $F(\mathbf{x}) = 0$ в данном случае имеет вид системы двух несвязанных уравнений

$$F_1(\mathbf{u}) = 0, \quad F_2(\mathbf{v}) = 0, \quad (3.6)$$

разрешимость которых естественно изучать отдельно друг от друга. Предположим,

$$\gamma(F_1, \dot{\Omega}_1) \neq 0, \quad \gamma(F_2, \dot{\Omega}_2) \neq 0, \quad (3.7)$$

что гарантирует разрешимость (3.6) в $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Можно ли из (3.7) сделать вывод о разрешимости в Ω системы (3.4)? Оказывается, можно.

3.3.1. Теорема⁶⁾. Пусть поля F_1 и F_2 невырождены соответственно на $\dot{\Omega}_1$ и $\dot{\Omega}_2$. Тогда

$$\gamma(F_1 \dot{+} F_2, \dot{\Omega}) = \gamma(F_1, \dot{\Omega}_1)\gamma(F_2, \dot{\Omega}_2). \quad (3.8)$$

Таким образом, (3.7) влечет за собой $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$, и вывод о разрешимости системы (3.4) в указанных выше предположениях очевиден.

Слабо связанные системы. Теорема 3.3.1 о произведении вращений в определенных условиях позволяет сводить вычисление $\gamma(F, \dot{\Omega})$ к вычислению вращений в пространствах меньшей размерности. Рассмотрим пример, представляющий самостоятельный интерес.

⁶⁾ Легко доказывается «методом протыкающего луча».

В случае $\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0$ можно гарантировать существование нуля в Ω не только у $F(x)$, но и у поля $F(x) + Q(x)$, если только $Q(x)$ на $\dot{\Omega}$ достаточно мало по норме. Было бы полезно располагать возможностью аналогичного заключения в несколько иной ситуации, когда изучаемое уравнение имеет вид системы слабо связанных уравнений

$$\begin{cases} G_1(u, v) = F_1(u) + Q_1(u, v) = 0, \\ G_2(u, v) = F_2(u) + Q_2(u, v) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Слабо связанных в том смысле, что добавки Q_1 и Q_2 достаточно малы по норме по сравнению с нормами главных частей F_1 и F_2 . Для определенности положим $\gamma(F_1, \dot{\Omega}_1) \neq 0$, $\gamma(F_2, \dot{\Omega}_2) \neq 0$. В этом случае с точки зрения предыдущего пункта можно гарантировать наличие решения у системы (3.9). К этому заключению приводят два внешне различных рассуждения. Малость по норме добавок на $\dot{\Omega}$ обеспечивает невырожденность гомотопии

$$H(u, v, t) = \{F_1(u) + tQ_1(u, v), F_2(u) + tQ_2(u, v)\}.$$

Далее остается сослаться на п. 3.3.1. Можно рассуждать и по-другому, с самого начала отправляясь от теоремы 3.3.1, гарантирующей

$$\gamma(F, \dot{\Omega}) \neq 0.$$

После этого вывод о разрешимости системы (3.9) можно представить как обычное следствие инвариантности вращения при малых деформациях поля.

3.4. Строгие определения вращения

Наименее уязвимый (но зато и наименее наглядный) способ введения вращения — аксиоматический. Если потребовать

$$x_0 \in \Omega, \quad f(x) = x - x_0 \Rightarrow \gamma(f, \dot{\Omega}) = 1,$$

а также принять за аксиомы утверждения теорем 2.4.2 и 2.5.5 (с небольшим уточнением), то эти три свойства однозначно определяют целочисленную характеристику $\gamma(f, \dot{\Omega})$.

Помогает также опора на понятие *степени отображения* (п. 7.4). Достаточно сказать, что вращение $\gamma(f, \dot{\Omega})$ есть степень отображения

$$G(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \quad (3.10)$$

границы $\dot{\Omega}$ в единичную сферу S .

Для читателя с техническим образованием, по-видимому, наиболее предпочтительны аналитические способы определения *степени отображения*. Остановимся на одном из таких способов.

Пусть для начала отображение (3.10) и граница $\dot{\Omega}$ — гладкие. Введем на $\dot{\Omega}$ локальные координаты, дополнив их до локальных координат в \mathbb{R}^n определением первой координаты точки по внешней нормали к $\dot{\Omega}$, причем эти локальные координаты выберем одинаково ориентированными с основной системой координат в \mathbb{R}^n . Такие же локальные координаты введем на единичной сфере $S = \{x : \|x\| = 1\}$, предполагая $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.

Далее для регулярных значений $y \in S$ вводится величина

$$\deg(G, y) = \sum_{x \in G^{-1}(y)} \text{sign det } G'(x),$$

которая, как легко видеть, конечна, — поскольку компактный прообраз регулярного значения состоит не более чем из конечного числа точек, — и локально постоянна как функция y , пробегающего множество \tilde{S} регулярных значений (плотное в S по *теореме Сарда*). Далее несложными рассуждениями устанавливается, что $\deg(G, y)$ вообще не зависит от $y \in \tilde{S}$, т. е. $\deg(G, y) = \deg G$. Эта величина $\deg G$ и называется *степенью гладкого отображения* $G : \dot{\Omega} \rightarrow S$. Степень отображения без предположений о гладкости определяется через достаточно точные гладкие аппроксимации отображения и области.

3.5. Зачем нужна общность

В топологии, как и вообще в математике, значительное внимание уделяется смягчению различных требований во имя общности.

В предыдущих главах, например, области Ω предполагались гладкими либо полиэдральными. По крайней мере «не слишком сложными». И этого, казалось бы, должно хватать с избытком. Но теория на определенном витке дает пользователю возможность говорить о любых областях Ω , что иногда расценивается как излишество. Потому что тогда приходится принимать в расчет аномальные явления типа миллиона областей с одной и той же границей⁷⁾ (пример Брауэра). Вдобавок аудитории кажется, будто выбор Ω в той или иной степени находится у нее в руках, из чего, дескать, следует возможность обойтись без рассмотрения патологических экземпляров Ω . Но это не совсем так. Напомним сказанное в [5, т. 7] по аналогичному поводу.

Негладкость часто возникает в глубине задачи, и тогда от нее трудно избавиться. Например, если матрица $A(x)$ гладко зависит от параметра x , то спектральный радиус $\rho(x) = \rho[A(x)]$ таким свойством не обладает, и минимизация

$$\rho(x) \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

в классическую теорию не помещается. Нечто подобное возникает во многих других ситуациях. Функция

$$\varphi(x) = \min_y \psi(x, y)$$

непрерывна (если непрерывна ψ), но никакая гладкость $\psi(x, y)$ в общем случае не обеспечивает гладкость $\varphi(x)$, и при необходимости дифференцировать $\varphi(x)$ — есть над чем задуматься.

Подобные аргументы могут показаться неубедительными, если не видеть, что стоит за кадром. По первому впечатлению, ничто не мешает «закруглить» $\rho(x)$ или $\varphi(x)$. Но как сглаживать финишное явление, связанное с источником неконтролируемо? Откуда гарантии, что «закругление» не вызовет бифуркацию? Наконец, многие конструкции доказательств перестают работать. И это самое главное. Если функции поддаются сглаживанию, рассуждения — противятся, и теряют доказательную силу.

Такая же песня возникает в связи с областями Ω в теории вращения. Например, область притяжения равновесия у диффура $\dot{x} = f(x)$ с «хорошей правой частью» может вполне оказаться «из ряда вон». Тут тебе, как говорится, и Юрьев день. Приходится

⁷⁾ Если ограниченные области $\Omega_1, \dots, \Omega_k$ имеют одну и ту же границу Γ , вращения $\gamma(f, \Omega_1), \dots, \gamma(f, \Omega_k)$ могут быть различны.

иметь дело с областью Ω , которая возникает опосредованно, сама по себе, и благоприятным возмущениям не поддается, если не соглашаться на качественные метаморфозы.

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 бесконечную трубку ограниченного объема, диаметр которой стремится к нулю по мере удаления в бесконечность. Зададим поле $f(x)$ таким образом, чтобы внутренность трубки была областью притяжения единственного равновесия поля. Затем свернем трубку в спираль так, чтобы ее хвосты нависали на некоторые окружности. В результате получится ограниченная область притяжения, замыкание которой представляет собой свернутую трубку плюс две окружности.

А хотелось бы иметь дело с ограниченной областью, имеющей границу Γ , гомеоморфную сфере, каковую невозможно причесать (теорема 2.11.3), а стало быть, нельзя задать на Γ невырожденное касательное поле. И тогда вырисовывалась бы «теорема»: область притяжения неограниченна, если положение равновесия системы $\dot{x} = f(x)$ единственно, асимптотически устойчиво и размерность пространства нечетна. Но увы...

Глава 4

Многозначные отображения

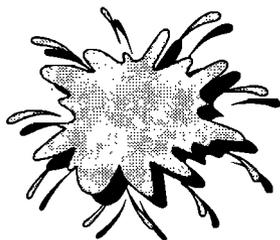
*Можно привести лошадь к водопою,
но нельзя заставить ее пить.*

Пословица

Теория многозначных отображений весьма обширна. В главе рассматриваются вопросы, связанные с разрешимостью включений

$$0 \in T(x) \text{ либо } x \in T(x).$$

В первом случае говорят о нуле, во втором — о неподвижной точке многозначного векторного поля.



4.1. Общие сведения

Многозначным (точечно-множественным) отображением¹⁾

$$T : X \rightarrow 2^Y$$

называется оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторое непустое подмножество множества Y , т. е. $T(x) \subset Y$ для любого $x \in X$.

Далее под X подразумевается некоторое подмножество \mathbb{R}^n с индуцированной из \mathbb{R}^n топологией. Если не оговорено противное, считается $Y = \mathbb{R}^n$. Отображения $T : X \rightarrow 2^Y$ предполагаются ограниченными, которые каждое ограниченное множество $A \subset X$ переводят в ограниченное множество

$$T(A) = \bigcup \{T(x) : x \in A\}.$$

¹⁾ 2^Y обозначает множество всех подмножеств множества Y .

4.1.1. Определение. Многозначное отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ называется *замкнутым*, или *полу непрерывным сверху*, если график этого отображения

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in T(x)\}$$

замкнут в $X \times Y$.

Для ограниченных отображений можно дать эквивалентное определение: отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ *полу непрерывно сверху*, если по любой окрестности U любого множества-образа $T(x)$ можно указать окрестность V точки x , такую что $T(V) \subset U$. Еще одно равносильное определение:

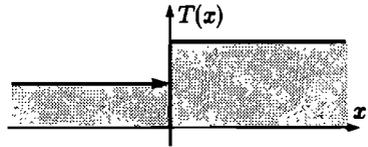
$$\text{если } x_k \rightarrow x, y_k \in T(x_k), y_k \rightarrow y, \text{ то } y \in T(x).$$

4.1.2. Определение. Многозначное отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ называется *замкнутым*, или *полу непрерывным снизу*, если для любых точек $x \in X$ и $y \in T(x)$ и любой последовательности $x_k \rightarrow x$ (все $x_k \in X$) найдется такая последовательность y_k , что $y_k \in T(x_k)$ и $y_k \rightarrow y$.

Отображение

$$T_1(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{при } x < 0, \\ [0, 2] & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

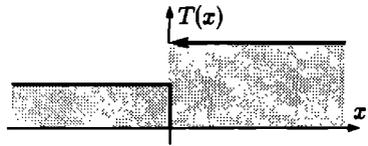
полу непрерывно сверху, но не снизу.



Отображение

$$T_2(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{при } x \leq 0, \\ [0, 2] & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

полу непрерывно снизу, но не сверху.



Многозначное отображение, одновременно полу непрерывное сверху и снизу, называется *непрерывным по Какутани*.

Пусть все образы отображения $T : X \rightarrow 2^Y$ компактны. Если через Y_C обозначить множество всех компактных подмножеств множества Y , то T можно рассматривать как обычное однозначное отображение $T : X \rightarrow Y_C$. Если при этом Y_C метризовано

с помощью метрики Хаусдорфа (определение см. ниже), то о непрерывности T можно говорить как о непрерывности однозначного отображения $T: X \rightarrow Y_C$. В этом случае T называется непрерывным по Хаусдорфу.

4.1.3. *Непрерывное по Хаусдорфу отображение непрерывно и по Какутани. Для ограниченных отображений верна также обратная импликация.*

Метрика Хаусдорфа конструируется следующим образом. Для множеств $A, B \subset Y$ уклонение A от B определяется как

$$\delta(A, B) = \sup_{x \in A} \rho(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \rho(x, y),$$

где ρ — метрика в Y . Хаусдорфовым расстоянием между A и B называется максимальное из уклонений $\delta(A, B)$, $\delta(B, A)$.

4.2. О редукции задач

Путь к успеху иногда пролегает через усложнение задачи, каковым, в частности, является привнесение многозначности. Рассмотрим две классические иллюстрации.

- Задача о существовании у скалярной функции $\varphi(x, y)$ седловой точки²⁾ эквивалентна вопросу о справедливости равенства

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} \varphi(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \varphi(x, y) = \varphi(x^*, y^*). \quad (4.1)$$

Стандартный путь доказательства равенства (4.1) состоит в следующем. Вводятся два многозначных отображения³⁾

$$U(y) = \text{Arg} \min_x \varphi(x, y) \quad \text{и} \quad V(x) = \text{Arg} \max_y \varphi(x, y).$$

²⁾ Напомним [5, т. 7], точка (x^*, y^*) называется седловой точкой функции $\varphi(x, y)$, если $\varphi(x^*, y) \leq \varphi(x^*, y^*) \leq \varphi(x, y^*)$. Минимакс всегда больше (\geq) максимина, а в случае равенства (4.1) гарантируется существование седловой точки.

³⁾ $\text{Arg} \min_x \varphi(x, y)$ обозначает множество тех $x \in X$, при которых достигается минимум $\varphi(x)$. Аналогично определяется $\text{Arg} \max_y \varphi(x, y)$.

Теперь из существования неподвижной точки у многозначного отображения $U(x) \times V(y)$ следует (4.1). Действительно, пусть

$$(x^*, y^*) \in U(y^*) \times V(x^*).$$

Это означает, что

$$\min_y \varphi(x^*, y) = \varphi(x^*, y^*) = \max_x \varphi(x, y^*).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y} \max_{x \in X} \varphi(x, y) &\leq \max_{x \in X} \varphi(x, y^*) = \varphi(x^*, y^*) = \\ &= \min_{y \in Y} \varphi(x^*, y) \leq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \varphi(x, y). \end{aligned}$$

Но справедливость обратного неравенства очевидна, поэтому (4.1) установлено. Конечно, при условии существования неподвижной точки у многозначного отображения $T = U \times V$.

• Другой пример. Пусть имеется игра N лиц [5, т. 7] с функциями выигрыша $D_i(x_1, \dots, x_N)$, где $x_i \in X_i$ — стратегия i -го игрока. Введем обозначение

$$\psi_i(y_i, x) = D_i(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_N).$$

Решением игры по Нэшу называют точку $x^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}$, такую что

$$\max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x^*) = \psi_i(x_i^*, x^*), \quad i = 1, \dots, N.$$

Далее вводятся многозначные отображения

$$W_i(x) = \text{Arg} \max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x),$$

и задача о существовании равновесия по Нэшу сводится к вопросу существования решения у включения $x \in W(x)$, где

$$W(x) = W_1(x) \times \dots \times W_N(x).$$

4.3. Отображения с выпуклыми образами

Ниже Ω обозначает ограниченную область в \mathbb{R}^n . Рассматриваются многозначные отображения T , заданные на $\bar{\Omega}$ и имеющие выпуклые образы $T(x) \subset \mathbb{R}^n$ при любом $x \in \bar{\Omega}$.

Многозначное отображение $T(x)$ называют также *многозначным векторным полем*, а точку x , в которой $0 \in T(x)$, — *нулем многозначного поля*. Поле $T(x)$ считается невырожденным на множестве Γ , если на Γ оно не имеет нулей. Изучаемые далее поля предполагаются невырожденными на границах $\dot{\Omega}$ рассматриваемых областей.

Аппроксимационная конструкция. В силу компактности $\dot{\Omega}$ при любом $\varepsilon > 0$ в $\dot{\Omega}$ существует ε -сеть

$$L_\varepsilon = \{x_1, \dots, x_N\}.$$

В каждом множестве $T(x_i)$ фиксируем произвольную точку $y_i \in T(x_i)$, и определим N весовых функций

$$\alpha_{i\varepsilon} = \frac{\Theta_{i\varepsilon}(x)}{\sum_j \Theta_{j\varepsilon}(x)},$$

где $\Theta_{j\varepsilon}(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x_j\|\}$. Заметим, что $\sum \Theta_{j\varepsilon}(x) > 0$ для любого $x \in \dot{\Omega}$, поскольку набор точек x_j образует ε -сеть.

Назовем теперь однозначное отображение

$$t(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\varepsilon}(x) y_i \quad (4.2)$$

ε -аппроксимацией отображения $T(x)$.

4.3.1. Определение. Пусть отображение $T(x)$ (с выпуклыми образами) невырождено на $\dot{\Omega}$ и замкнуто. В этом случае вращением $\gamma(T, \dot{\Omega})$ многозначного векторного поля $T(x)$ на $\dot{\Omega}$ назовем вращение однозначного векторного поля (4.2) на $\dot{\Omega}$ при достаточно малых ε .

◀ Проверка корректности определения в данном случае сводится к проверке независимости вращения ε -аппроксимаций (4.2) от выбора ε -сети (при достаточно малых ε) и от выбора точек y_i .

В силу невырожденности T на $\dot{\Omega}$ любое замкнутое выпуклое множество $T(x)$ не содержит нуля. Поэтому существует некоторая выпуклая окрестность U множества $T(x)$, также не содержащая нуля. Но так как отображение T полунепрерывно сверху, то в U лежат все образы $T(y)$ точек y из некоторой окрестности V исходной точки x . Таким образом, каждой точке $x \in \dot{\Omega}$ можно поставить в соответствие шаровую окрестность V_x , обладающую тем свойством, что ее образ $T(V_x)$ лежит в выпуклом множестве, не содержащем нуля. Из покрытия компакта $\dot{\Omega}$ открытыми шарами V_x выберем конечное подпокрытие. Пусть такое подпокрытие образуют шары V_1, \dots, V_m .

4.3.2. Лемма. *Существует такое $\delta > 0$, что шар радиуса δ с центром в любой точке $x \in \dot{\Omega}$ целиком лежит в одном из множеств V_1, \dots, V_m .*

◁ Пусть $\epsilon(x)$ обозначает максимальный радиус шара с центром в x , целиком лежащего в одном из множеств V_1, \dots, V_m . Очевидно,

$$\epsilon(x) \geq \epsilon(y) - \|x - y\|, \quad \epsilon(y) \geq \epsilon(x) - \|x - y\|$$

для достаточно близких точек x, y . Отсюда $|\epsilon(x) - \epsilon(y)| \leq \|x - y\|$, т. е. функция $\epsilon(x)$ непрерывна на $\dot{\Omega}$. Для завершения доказательства достаточно положить

$$\delta = \min\{\epsilon(x) : x \in \dot{\Omega}\}. \quad \triangleright$$

Возьмем любую ϵ_1 -сеть и любую ϵ_2 -сеть ($\epsilon_1, \epsilon_2 < \delta/2$) на $\dot{\Omega}$, и пусть

$$t_1(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\epsilon_1}(x) y_i, \quad t_2(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_{j\epsilon_2}(x) z_i \quad (4.3)$$

соответствующие однозначные аппроксимации вида (4.2). Для произвольного $x \in \dot{\Omega}$ в суммах (4.3) ненулевые коэффициенты могут быть только при тех y_i, z_i , которые принадлежат образу δ -окрестности точки x . Но этот образ лежит в одном из образов $T(V_k)$, который в свою очередь лежит в некотором выпуклом множестве, не содержащем нуля. Поэтому в любой точке $x \in \dot{\Omega}$ все векторы y_i, z_i , коэффициенты при которых в (4.3) отличны от нуля, также лежат в выпуклом множестве, не содержащем нуля. Отсюда вытекает невырожденность и непротивоположная направленность однозначных полей $t_1(x), t_2(x)$ на $\dot{\Omega}$, что влечет за собой их гомотопность. Корректность определения вращения многозначного поля доказана. ►

4.4. Теоремы о неподвижных точках

После того как $\gamma(T, \dot{\Omega})$ сведено к вращению однозначной аппроксимации (4.2), теория вращения многозначных полей развивается проторенными путями. Доказательства фактически не требуются. Достаточно ссылок на скалярные аналоги пп. 2.5, 2.6.

4.4.1. Определение. Многочленные векторные поля $T_0(x)$ и $T_1(x)$ называются гомотопными на $\dot{\Omega}$, если существует замкнутое по совокупности переменных многозначное отображение (с выпуклыми образами) $H(x, t)$ ($x \in \dot{\Omega}$, $t \in [0, 1]$), такое что при любом $t \in [0, 1]$ поле $H(x, t)$ невырождено на $\dot{\Omega}$ и

$$H(x, 0) \equiv T_0(x), \quad H(x, 1) \equiv T_1(x).$$

4.4.2. Теорема. Гомотопные многозначные векторные поля имеют одинаковые вращения.

4.4.3. Лемма. Если многозначное векторное поле T невырождено на замыкании $\bar{\Omega}$, то $\gamma(T, \dot{\Omega}) = 0$.

◀ При достаточно малых ϵ аппроксимации (4.2)⁴⁾ поля T невырождены на $\bar{\Omega}$. Далее остается сослаться на лемму 2.5.3. ▶ Такому образцу следуют и другие доказательства.

4.4.4. Теорема. Пусть $\gamma(T, \dot{\Omega}) \neq 0$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в Ω , т. е. существует точка $x^* \in \Omega$, в которой

$$0 \in T(x^*).$$

4.4.5. Теорема. Если при любом $x \in \dot{\Omega}$ произвольные векторы $y_1 \in T_1(x)$, $y_2 \in T_2(x)$ не направлены противоположно, то поля $T_1(x)$ и $T_2(x)$ гомотопны.

Теорему Брауэра обобщает получившая широкое распространение

4.4.6. Теорема Какутани. Пусть многозначное отображение $T(x)$ переводит в себя замкнутый шар B , т. е. $T : B \rightarrow 2^B$. Тогда у T в B есть неподвижная точка $x^* \in T(x^*)$.

◀ Без ограничения общности центр шара B можно считать расположенным в нуле. Предположим противное: T не имеет неподвижной точки в B . Тогда поле $x - T(x)$ невырождено на сфере \dot{B} и, в силу $T(B) \subset B$, векторы $x \in \dot{B}$ и $x - y$ при любом $y \in T(x)$ — не противоположно направлены, иначе

⁴⁾ Имеются в виду ϵ -аппроксимации не на границе, а на замыкании $\bar{\Omega}$.

точке y пришлось бы лежать на продолжении радиус-вектора $x \in \dot{B}$, что противоречит условию $T(B) \subset B$. Далее решает ссылка на теорему 4.4.5. ► Обратим внимание, что схема доказательства почти слово в слово повторяет обоснование теоремы 2.6.2. Такая аналогия имеет место и для следующих результатов.

4.4.7. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \geq 0$ для любой пары векторов

$$x \in \dot{\Omega}, \quad y \in T(x). \quad (4.4)$$

Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\overline{\Omega}$.

4.4.8. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \leq \langle x, x \rangle$ для любой пары векторов (4.4). Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{\Omega}$.

4.4.9. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и для любой пары векторов (4.4) существует индекс i , такой что $x_i y_i > 0$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в Ω .

4.4.10. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $y \neq \lambda x$ для любой пары векторов (4.4) и любого $\lambda > 1$. Тогда отображение T имеет неподвижную точку $x^* \in \overline{\Omega}$.

Аналогию с однозначными отображениями можно было бы продолжить. Так, например, легко доказать аналоги теорем о существовании у многозначных отображений собственных векторов, т. е. о разрешимости включений $\lambda x \in T(x)$ при некотором λ . Для многозначных отображений справедлива также теорема об алгебраическом числе неподвижных элементов поля, аналогичная теореме 2.8.1. Под неподвижными элементами в данном случае понимаются связные множества нулей многозначного поля, и речь идет об изолированных неподвижных элементах, имеющих непересекающиеся окрестности.

В приведенных выше теоремах фигурируют различные предположения относительно пары векторов (4.4). Эти предположения было бы полезно ослабить, требуя справедливости тех или иных условий не для любого $x \in \dot{\Omega}$ и любого $y \in T(x)$, а для любого $x \in \dot{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. В отдельных случаях такое послаб-

ление возможно. Вот два примера соответствующих утверждений, первое из которых обобщает *теорему Какутани*.

4.4.11. Пусть B — замкнутый шар и для любого $x \in \mathring{B}$ некоторый вектор $y \in T(x)$ принадлежит B , т. е. пересечение любого образа $T(x)$ ($x \in \mathring{B}$) с B не пусто. Тогда у T в B есть неподвижная точка $x^* \in T(x^*)$.

◀ Сначала заметим, что *теорема Какутани* остается справедливой, если T переводит в B не весь шар B , а лишь его границу (только это и было использовано в доказательстве теоремы 4.4.6). В данном случае этому условию удовлетворяет отображение $B \cap T(x)$. Далее желаемый вывод обеспечивается ссылкой на п. 4.4.6). ▶

4.4.12. Теорема. Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathring{\Omega}$ и некоторого $y \in T(x)$. Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\overline{\Omega}$.

◀ Положим $P(x) = \{z : \langle x, z \rangle \geq 0\}$. Отображение $P(x) \cap T(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 4.4.7. ▶

4.5. Теорема о селекторе

Теоремы раздела 4.4 остаются в силе при замене полунепрерывности сверху полунепрерывностью снизу. Соответствующий вывод легко может быть сделан на основе следующего результата *Майкла*⁵⁾.

4.5.1. Теорема. Мнозначное отображение $T: X \rightarrow Y$ с выпуклыми образами, полунепрерывное снизу, имеет непрерывный селектор, т. е. существует однозначная непрерывная функция $t: X \rightarrow Y$, такая что $t(x) \in T(x)$ для любого $x \in X$.

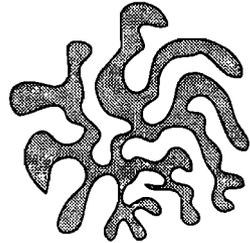
Понятно, что в теоремах раздела 4.4 соответствующие селекторы будут удовлетворять условиям теорем о неподвижных точках однозначных отображений. Любая же неподвижная точка селектора $t(x)$ автоматически является неподвижной точкой $T(x)$.

⁵⁾ Michael E. Continuous selections. I // Ann. Math. 1956. 63. № 2. P. 361–381.

4.6. Отображения с невыпуклыми образами

От требования выпуклости образов отображения $T(x)$ освободиться не так просто. Несмотря на обилие результатов⁶⁾, имеется мало практически удобных теорем. В целом здесь преобладают два подхода. Один из них, аппроксимативный, опирается обычно на предположение асферичности образов во всех размерностях. Второй подход, гомологический, предполагает, как правило, ацикличность образов.

То и другое близко к требованию *стягиваемости* образов, что с прикладной точки зрения более-менее приемлемо, но получаемые здесь теоремы в значительной степени обесцениваются наложением дополнительных трудно проверяемых ограничений (типа стягиваемости проекций образов на сферу). В этом отношении выгодно отличается следующее обобщение *теоремы Какутани*.



4.6.1. Теорема. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — стягиваемый локально связный компакт, а $T : X \rightarrow 2^X$ — замкнутое многозначное отображение со стягиваемыми образами. Тогда T имеет в X неподвижную точку.

Интересно отметить технический прием, использованный *Эйленбергом* и *Монтгомери*⁷⁾ для доказательства теоремы 4.6.1. С одной стороны, он полезен вообще при изучении неподвижных точек многозначных отображений, а с другой — указывает на важность определенного типа теорем о совпадениях.

4.6.2. Теорема. Пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ — стягиваемый локально связный компакт, $M \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, а

$$\tau : M \rightarrow N \quad \text{и} \quad t : M \rightarrow N$$

⁶⁾ См. [3], а также: *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. 35. Вып. 1. С. 59–126.

⁷⁾ *Eilenberg S., Montgomery D.* Fixed point theorems for multi-valued transformations // Amer. J. Math. 1946. 68. № 2. P. 214–222.

непрерывные однозначные отображения, причем все прообразы $t^{-1}(y)$ (при любом $y \in N$) не пусты и стягиваемы. Тогда r и t имеют точку совпадения, т. е. $r(x) = t(x)$ для некоторого $x \in M$.

◀ Из этого результата теорема 4.6.1 выводится довольно просто. Пусть Z — график отображения $T : X \rightarrow 2^X$. Введем в рассмотрение два однозначных отображения $r : Z \rightarrow X$ и $t : Z \rightarrow X$,

$$r(x, y) = y, \quad t(x, y) = x.$$

Очевидно, $t^{-1} = T(x)$. Поэтому все прообразы отображения t стягиваемы. Все предположения теоремы 4.6.2 выполнены. Следовательно, существует точка $(x^*, y^*) \in Z$, в которой

$$r(x^*, y^*) = t(x^*, y^*),$$

т. е. $x^* = y^*$, что означает $x^* \in T(x^*)$. ▶

Глава 5

Алгебраизация топологии

Под пером Голдсмита даже Естественная История превращается в персидскую сказку.

Сэмюэль Джонсон

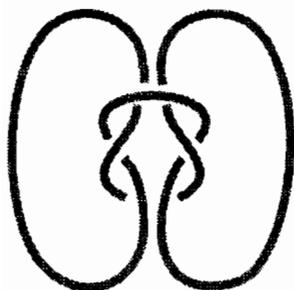


Под пером топологов размытые категории мышления превратились в алгебраическую теорию. От визуальных представлений остались от жилетки рукава. Получилась, конечно, симфония, но она распугала непосвященных, а профессионалов возвела в ранг небожителей. С другой стороны, как иначе «ускользающую геометрию» поместишь в математические рамки?

Главы 5-8 не предназначены для изучения алгебраической топологии. Цель другая — дать представление о дисциплине. Глубже популярного, но об овладении техникой и деталями речь не идет. Тем более что все соприкосновения с аппаратными манипуляциями здесь в определенной степени бессмысленны без освоения элементов теории групп (глава 10), каковые сами по себе являются достаточно высоким барьером, ибо просто так в голову не укладываются, требуя выработки новых стереотипов мышления. Тем не менее, занимаясь совсем другими делами, о топологических подводных течениях полезно иметь сведения, потому что какая-нибудь гомотопическая химера может навредить в любой области, оставаясь в роли невидимки. Не говоря о том, что может и помочь.

5.1. Результаты и рецепты

В каждой теории имеется две составляющих — результаты и методика. Последняя часто работает «далеко за пределами», и потому — важнее фактов.



Дело ведь не только в том, чтобы методика помогала решать топологические задачи. Важна еще наработка стереотипов мышления, образующих идеологический каркас, на котором держится вся психологическая надстройка. И где аukaется какой-нибудь фокус перехода от сферы с ручками к ее фундаментальной группе — очень трудно уследить. Тем более что аukaется везде.

Это вовсе не означает, что какие-то гомотопические группы надо осваивать закусив удила. Тут усердие даже пагубно, если топология — не судьба. Потому что вычисление этих групп, за исключением простейших, не дается даже профессионалам. Конечно, отдельные удачные попытки можно приспособить куда-нибудь в укромное место сопредельной дисциплины, но большой выгоды здесь не добьешься. Поэтому, действуя с общеобразовательным уклоном, имеет смысл сконцентрироваться на самих принципах, избегая деталей.

5.2. Абстрактная схема

Извечный вопрос «с какого конца начинать» при изложении топологии стоит довольно остро. Индуктивный способ, как всегда, предпочтителен. Но в данном случае важна и общая платформа, поскольку с нее начинают путь совсем разные на вид теории¹⁾. Поэтому о единой парадигме есть резон сказать заранее, не вдаваясь в детали.

Алгебраизация топологических объектов « $f : X \rightarrow Y$ » происходит по следующей схеме. Пространствам X , Y сопоставляются некие группы $F(X)$, $F(Y)$, а непрерывным отображениям f — гомоморфизмы $f_* : F(X) \rightarrow F(Y)$, т. е. отображения из группы в группу, сохраняющие групповую операцию.

¹⁾ Теория гомотопий и теория гомологий.

Система «визивиг»²⁾, само собой, разрушается, но задача — хотя и в зашифрованном виде — становится иногда проще.

Тут полезно опереться на какой-либо характерный пример. Возьмем одну из центральных проблем топологии — задачу продолжения отображения $g : A \rightarrow Y$ с A на X , состоящую в нахождении отображения $f : X \rightarrow Y$, такого что $fh = g$, где h — вложение A в X . Иначе говоря, вопрос сводится к поиску коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow h & \nearrow f \\ & X & \end{array} \quad (5.1)$$

или выяснению существования таковой³⁾.

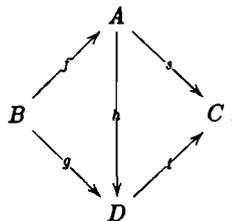
В рамках упомянутой выше схемы возникает производная алгебраическая задача относительно диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_k(A) & \xrightarrow{g_*} & H_k(Y) \\ & \searrow h_* & \nearrow f_* \\ & H_k(X) & \end{array}, \quad (5.2)$$

где $H_k(\cdot)$ — группы гомологий.

Задачи (5.1), (5.2) не равносильны, но (5.1) влечет за собой (5.2). Поэтому неразрешимость алгебраической задачи (5.2) будет означать невозможность продолжения g с A на X , что в той или иной позитивной переформулировке дает различные теоремы существования. Например, непродолжимость на шар отображения f сферы S^{n-1} в себя (раздел 7.4) дает теорему Брауэра 9.4.3.

Коммутативные диаграммы заслуживают отдельного упоминания в качестве инструментов, действительно запутывающих суть дела. Картинка



²⁾ WYSIWYG — аббревиатура от What You See Is What You Get (что видишь, то и получаешь).

³⁾ Задача продолжения в форме (5.1) для неподготовленной психики имеет оттенок извращенности. Особенно на фоне обычного рабоче-крестьянского определения — см. (9.1). Но таков сложившийся стиль, и в определенных отношениях у него есть свои плюсы.

где малые буквы — суть отображения, означает: если от одного объекта к другому можно пройти (вдоль стрелок) разными путями, то соответствующие композиции отображений совпадают. В данном случае:

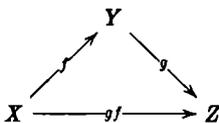
$$fh = g, \quad fs = gt, \quad ht = s,$$

Иногда это облегчает интерфейс, но часто используется как графическое украшение и затуманивает изложение.

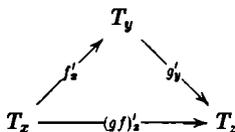
Правило дифференцирования сложной функции, например,

$$(gf)' = g'_y f'_x,$$

где $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, топологи излагают так: каждому коммутативному треугольнику



соответствует коммутативный треугольник линейных отображений



Как говорится, ощутите разницу.

К указанной выше трансформации задач в алгебраическую форму — предъявляются два требования:

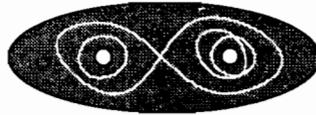
- Тожественным отображениям отвечают тождественные гомоморфизмы.
- Композициям fg соответствуют композиции $(fg)_* = f_*g_*$.

Подобное сопоставление — называют *ковариантным функтором из категории топологических пространств в категорию групп*⁴⁾, что на первом этапе освоения топологии эффективно тормозит процесс обучения, ибо «как назовешь, так и поедешь».

Главный вопрос, безусловно, в конкретном подборе *функторов*. Один из популярных примеров: сопоставление топологическому пространству X так называемой *фундаментальной группы*⁵⁾ —

⁴⁾ Примеры *категорий*: множества и их отображения; топологические пространства и их отображения; группы и их гомоморфизмы.

группы *петель*, в которой элементами группы служат классы эквивалентных (деформируемых друг в друга) *замкнутых контуров*. На нижеследующем рисунке изображены три контура, не деформируемых друг в друга.



Другой важный пример: *группы гомологий* (глава 6), в простейшем случае возникающие в результате *триангуляции* X и специфического рассмотрения *симплициальных комплексов*.

В любом случае переход к алгебраической задаче способствует классификации топологических пространств по части различения негомеоморфных представителей.

5.2.1. Если группы $F(X)$, $F(Y)$ не изоморфны, — пространства X , Y не гомеоморфны.

В случае изоморфизма $F(X)$ и $F(Y)$ соотношение между X и Y может быть любым, как $X \sim Y$ так и $X \not\sim Y$. Поэтому желательно, чтобы переход от пространства к группе сопровождался как можно меньшей потерей информации. Но есть и обратная сторона медали. Преобразование $X \Rightarrow F(X)$ тем легче применять в конкретных задачах, чем оно проще, а значит, информационно ущербнее.

5.3. Фундаментальная группа

5.3.1. Определение. Петлей в пространстве X с выделенной точкой x_0 назовем замкнутый ориентированный контур, возникающий в результате движения изображающей точки $\varphi(t)$,

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow X, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = x_0,$$

при изменении t от 0 до 1.



⁵⁾ Подробности в следующем разделе.

Петлей φ называют также само непрерывное отображение φ .

5.3.2. Определение. Две петли φ и ψ считаются гомотопными, $\varphi \sim \psi$, если φ и ψ гомотопны как непрерывные отображения из $[0, 1]$ в X , и дополнительно: их гомотопия $H(t, \lambda)$ в процессе деформации закреплена в точке x_0 ,

$$\forall \lambda \in [0, 1] : H(0, \lambda) = H(1, \lambda) = x_0.$$

Отношение гомотопии 5.3.2 разбивает петли на классы эквивалентных петель, и множество этих классов образует так называемую фундаментальную группу $\pi_1(X, x_0)$ пространства X .

Групповая операция $*$ в $\pi_1(X, x_0)$ определяется естественным образом. Композицией петель φ и ψ считается петля

$$\chi = \varphi * \psi, \quad (5.3)$$

получаемая объединением контуров φ и ψ , в котором сначала проходит первый контур, потом второй⁶⁾. Результат при этом может зависеть от порядка прохождения петель — поэтому операция (5.3), а значит, и группа $\pi_1(X, x_0)$ некоммутативна. Единичным элементом группы служит класс петель, стягиваемых в точку $x_0 \in X$. Один из представителей единицы: $1(t) \equiv x_0$. Обратный элемент — класс петель, проходимых в обратном направлении, $\varphi^{-1}(t) = \varphi(1 - t)$.

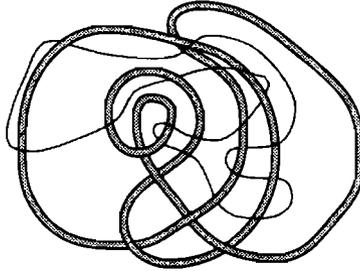
Различение элементов (классов петель) группы $\pi_1(X, x_0)$ относительно просто в бесхитростных ситуациях.



Но в мало-мальски каверзных обстоятельствах классификация петель превращается в квадратуру круга. Достаточно представить себе петли в дополнительном пространстве к какому-нибудь сложному узлу, где петли — сами узлы, гомотопность которых

⁶⁾ Аккуратное втискивание сказанного в лоно определения 5.3.1 немудрено, хотя связано с некоторой писаниной, не приносящей пользы восприятию. С движением «парового катка» определений можно ознакомиться по любому стандартному учебнику.

бывает трудно разглядеть и в «чистом» \mathbb{R}^3 . А тут пространство вдобавок проточено «диггером», и задача усложняется.



Недаром изложение фундаментальных групп обычно заканчивается «скороговоркой» насчет группы окружности или кольца, где, очевидно, $\pi_1(S^1, x_0)$ изоморфна группе \mathbb{Z} , потому что гомотопические классы петель определяются числом оборотов (с учетом знака, т. е. направления) вокруг центра.

Если петли φ и ψ совершают одно и то же число оборотов, то их связывает линейная гомотопия $\lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi$.

Удобно также говорить о выпуклых, а значит стягиваемых множествах, где группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиальна⁷⁾, поскольку все петли деформируются в точку x_0 .

Невзирая на скудость выставочных результатов прикладного характера, *теория гомотопий*, безусловно, является серьезным инструментом, дающим в руки потребителя эффективные топологические инварианты. Как, скажем, обосновать негомеоморфность круга и кольца? Фигуры, конечно, проще не придумаешь, да и ответ интуитивно очевиден, но как доказать формально? Фундаментальные группы тут как раз кстати. У круга группа π_1 тривиальна, а у кольца $\pi_1 \sim \mathbb{Z}$ — и вопрос исчерпан, в силу:

5.3.3. Если $f : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, фундаментальные группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ изоморфны⁸⁾.

⁷⁾ Состоит лишь из единичного элемента.

⁸⁾ Пространства X, Y , как обычно в теории гомотопий, предполагаются линейно связными. В этом случае $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от x_0 , и обозначение упрощается до $\pi_1(X)$.

◀ Петли $\varphi \subset X$ отображением f переводятся в петли $\psi = f\varphi \subset Y$,

$$\psi(t) = f(\varphi(t)).$$

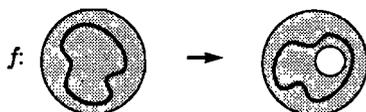
То же самое (в обратном направлении) для f^{-1} . ▶

В подоплеке результата 5.3.3 лежит понятие *индуцированного гомоморфизма* f_* , сопоставляющего классу петель с представителем $\varphi \subset X$ класс петель с представителем $\psi = f\varphi \subset Y$.

Легко проверяется, что определение f_* корректно:

- не зависит от выбора представляющей петли;
- тождественному отображению пространств сопоставляется тождественный гомоморфизм групп;
- суперпозиция гомеоморфизмов отвечает суперпозиция гомоморфизмов.

Упомянутый выше пример негомеоморфных круга и кольца не очень показателен, ибо здесь можно обойтись без группового инструментария. Достаточно того, что в кольце есть петля, которая не стягивается в точку, тогда как в круге любая петля стягиваема. И в предположении существования гомеоморфизма



сразу получается противоречие, поскольку f взаимно однозначно отображает деформации.

Однако уже при сопоставлении



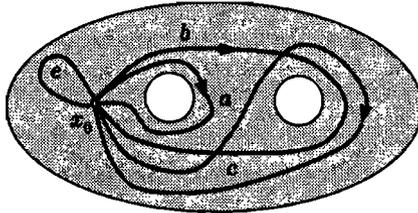
не говоря о сложных узлах, каждый из двух объектов (5.4) содержит бесконечное множество негомотопных петель. И сравнивать эти множества «просто так» было бы затруднительно.

5.4. Вычисление фундаментальной группы

Несмотря на существенные технические сложности, фундаментальная группа во многих случаях так или иначе вычисляется.

Естественным способом описания группы оказывается выделение образующих элементов (петель) и задание *определяющих соотношений*⁹⁾ (раздел 10.7). Выглядит это примерно так.

На многообразии (X, x_0) с выделенной точкой, изображенном на нижеследующем рисунке,



рассматриваются в качестве образующих попарно негомотопные петли. В данном случае их четыре:

$$a, \quad b, \quad c, \quad e.$$

Петля e стягиваема, $e = 1$; a и c обходят вокруг дырок по одному разу, каждая — вокруг своей; наконец, b охватывает обе дырки. При этом a^{-1} , b^{-1} , c^{-1} , e^{-1} — те же петли, проходимые в обратном направлении. Разумеется, a , b , c , e являются представителями своих классов гомотопных петель. Очевидно, $ac = b$, что в стандартной форме (10.8) *определяющего соотношения* имеет вид $acb^{-1} = 1$.

Далее приходится выяснять, нет ли в группе других независимых тождеств, и вообще становиться на скользкую тропу изучения фундаментальной группы с помощью определяющих соотношений¹⁰⁾. Кое-что на этом пути удастся выяснить.

- *Фундаментальная группа окружности (кольца)*

$$\pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}.$$

- *Фундаментальная группа тора T^2 представляет собой бесконечную абелеву группу с двумя образующими,*

$$\pi_1(T^2) \sim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

⁹⁾ Заданне π_1 с помощью определяющих соотношений называют *копредставлением фундаментальной группы*.

¹⁰⁾ В большей степени известными сопутствующими неприятностями [5, т. 8].

- *Фундаментальная группа проективной плоскости $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ есть циклическая группа второго порядка,*

$$\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{R}^2) \sim \mathbb{Z}_2^+.$$

- *Разумеется, $\pi_1(S^2) \sim 0$ — потому что любая петля по S^2 стягивается в точку.*

Описанный выше метод построения групп $\pi_1(X)$ с помощью *копредставлений* — не является универсальным, поскольку во многих достаточно простых ситуациях не позволяет в принципе ответить на элементарные вопросы о свойствах соответствующих групп. Поэтому определенной популярностью пользуются другие методы [23], позволяющие вычислять фундаментальные группы в некоторых частных случаях, например, если X представляет собой некое специальное объединение многообразий X_1 и X_2 , фундаментальные группы которых уже известны.

5.5. Высшие гомотопические группы

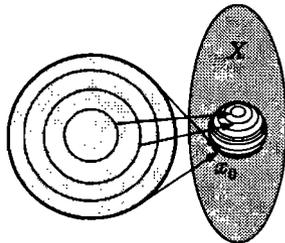
Высшие гомотопические группы $\pi_n(X, x_0)$ определяются аналогично фундаментальной группе. С той разницей что вместо петель рассматриваются *сфероиды*.

5.5.1. Определение. *Сфероидом размерности n в пространстве X с выделенной точкой x_0 называется непрерывное отображение*

$$\varphi : B^n \rightarrow X,$$

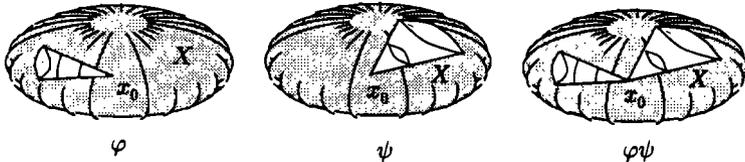
переводящее границу S^{n-1} шара B^n в точку x_0 .

Если, например, на круг B^2 натянута пленка, то в результате преобразования φ пленка как-то деформируется, а граничная окружность S^1 «съеживается» в точку x_0 . Таким образом, пленка (внутренность исходного круга) образует «нечто вроде пузыря с выколотой точкой». Легко сообразить, что пузырей может быть несколько — букет пузырей, закрепленных в x_0 .



На множестве $\pi_n(X, x_0)$ классов гомотопически эквивалентных отображений $\varphi : B^n \rightarrow X$, переводящих S^{n-1} в x_0 , естественным образом вводится групповая операция, в результате чего $\pi_n(X, x_0)$ становится n -мерной гомотопической группой.

Введение групповой операции на $\pi_n(X, x_0)$ поясняет рисунок:



Если заданы отображения $\varphi, \psi : B^n \rightarrow X$, т.е. представители классов, то их композиция $\varphi\psi$ на геометрическом финише получается объединением пузырей. Подобрать соответствующего представителя $\varphi\psi : B^n \rightarrow X$ не составляет труда.

Группы $\pi_n(X, x_0)$ в случае $n > 1$ получаются коммутативными¹¹⁾. По той же причине, что и в разделе 5.3, для линейно связных пространств группа $\pi_n(X, x_0)$ не зависит от x_0 , и обозначение упрощается до $\pi_n(X)$.

5.5.2. Определение. Пространство X называют n -связным, если оно линейно связно и группы $\pi_1(X), \dots, \pi_n(X)$ тривиальны.

Определение высших гомотопических групп неконструктивно, как и определение $\pi_1(X)$. Поэтому их вычисление сложно не только технически, но и принципиально. Достаточно заметить, что даже $\pi_m(S^n)$ не все известны. Факт довольно странный, потому что сфера «вся на виду», будто бы, и вопрос до некоторых пор выглядел решенным — ибо легко устанавливается $\pi_n(S^n) \sim \mathbb{Z}$, а также тривиальность групп $\pi_m(S^n)$ при $m < n$. В случае же $m > n$ изоморфность нулю $\pi_m(S^n) \sim 0$ считалась тем более очевидной. Но последнее неожиданно обернулось заблуждением. С легкой руки Хопфа (см. раздел 8.3), открывшего негомотопное нулю отображение

$$S^3 \rightarrow S^2,$$

¹¹⁾ Некоммутативность фундаментальной группы возникала из-за того, что играл роль порядок прохождения петель.

внезапно выяснилась нетривиальность группы $\pi_3(S^2)$. Далее «пошло-поехало». Феномен $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ оказал позитивно шоковое влияние на развитие теории гомотопий в целом.

Что касается сведений о группах $\pi_m(S^n)$, то они в известной степени фрагментарны. Вот кое-что для примера ¹²⁾:

$$\pi_{n+1}(S^n) = \pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2^+, \quad n \geq 3,$$

$$\text{но } \pi_3(S^2) = \mathbb{Z},$$

$$\pi_4(S^2) = \pi_5(S^2) = \mathbb{Z}_2^+,$$

$$\pi_6(S^2) = \pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}^+,$$

$$\pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}^+,$$

$$\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}^+, \quad n \geq 5.$$

«Банальная сфера», таким образом, оказалась с гомотопической точки зрения весьма сложным объектом. Дополнительную информацию можно почерпнуть в учебном пособии *Рохлина и Фукса* с несколько обманчивым названием «Начальный курс топологии», либо в монографии [23].

5.6. Гомотопическая эквивалентность

Обратимся к понятию гомотопных отображений $f: X \rightarrow Y$, см. раздел 9.6 ¹³⁾.

Непрерывную деформацию f_0 в f_1 естественно представлять как путь в пространстве $C(X, Y)$. Формализация такова.

5.6.1. Определение. *Непрерывные отображения $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ гомотопны, $f_0 \sim f_1$, если существует такая непрерывная функция $H(x, t)$, $t \in [0, 1]$, что*

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x).$$

¹²⁾ Знак \Leftarrow ниже обозначает изоморфизм \Leftarrow .

¹³⁾ В книгах повторяться не принято, что прискорбно. Стержневые моменты целесообразно напоминать, не заставляя читателя метаться по главам, погружаясь каждый раз в новую обстановку.

Любые два отображения $f, g \in C(X, Y)$ гомотопны друг другу, если пространство Y стягиваемо. (?) *Стягиваемость*, по определению, означает гомотопность тождественного отображения $I_Y : Y \rightarrow Y$ постоянному отображению Y в точку $y_0 \in Y$.

Гомотопность $f_0 \sim f_1$ является отношением эквивалентности.

5.6.2. *Если существует пара отображений f и g из X в Y , таких что*

$$gf \sim I_X : X \rightarrow X, \quad fg \sim I_Y : Y \rightarrow Y,$$

пространства X, Y называют гомотопически эквивалентными¹⁴⁾ и пишут $X \sim Y$.

О гомотопически эквивалентных пространствах говорят как о пространствах одного и того же *гомотопического типа*¹⁵⁾. Гомотопическая эквивалентность является некоторым огрублением понятия гомеоморфизма пространств, но в этом направлении обычно идут дальше.

5.6.3. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ называют слабой гомотопической эквивалентностью, если оно индуцирует изоморфизм гомотопических групп всех размерностей. В этом случае пространства X, Y называют слабо гомотопически эквивалентными.*

Любая гомотопическая эквивалентность является слабой. Обратное верно, если X, Y — *клеточные пространства (теорема Уайтхеда)*.

- Хотя гомеоморфность из гомотопической эквивалентности не следует, хороших подтверждающих примеров здесь нет. Само существование гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных многообразий в высоких размерностях следует из результатов *С. П. Новикова* (Филдсовская медаль 1970 года).

- С одной стороны, известно, что любую конечно определенную группу можно реализовать как фундаментальную группу

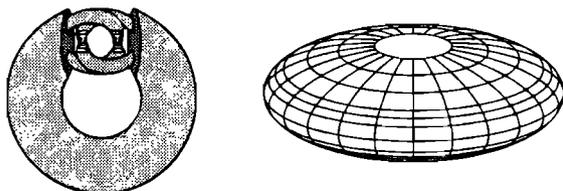
¹⁴⁾ Разумеется, гомеоморфные X, Y гомотопически эквивалентны.

¹⁵⁾ Пространство *стягиваемо*, если имеет тип одноточечного пространства.

компактного n -мерного многообразия при условии $n \geq 4$. С другой стороны, *проблема тождества слов* для конечно определенных групп неразрешима [5, т. 8], в силу чего проблема изоморфности групп, заданных определяющими соотношениями, принадлежит той же категории. Соответственно, в размерности $n \geq 4$ алгоритмически неразрешима проблема гомотопической эквивалентности многообразий, а значит, и проблема гомеоморфности.

5.7. Проблема Пуанкаре

Негомеоморфные, но гомотопически эквивалентные пространства называют иногда *фальшивыми копиями* друг друга. Сферы S^n , как вытекает из положительного решения обобщенной *гипотезы Пуанкаре*, — фальшивых копий не имеют.



Изначально *проблема Пуанкаре*, теперь уже решенная, утверждала: *любая трехмерная замкнутая односвязная¹⁶⁾ поверхность X гомеоморфна S^3* . Иначе говоря¹⁷⁾,

$$\pi_1(X) = 0 \Rightarrow X \sim S^3. \quad (5.5)$$

О трехмерной сфере в данном контексте стоит предварительно задуматься. Как граница четырехмерного шара, сфера S^3 определяется уравнением

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = 1.$$

Сфера S^3 с выколотой точкой — гомеоморфна \mathbb{R}^3 , а значит — открытому трехмерному шару¹⁸⁾.

¹⁶⁾ Поверхность односвязна, если любая петля по ней стягивается в точку.

¹⁷⁾ Таким образом, для замкнутых трехмерных многообразий одна лишь тривиальность фундаментальной группы влечет за собой совпадение всех остальных гомотопических групп, $\forall n : \pi_n(X) = \pi_n(S^3)$.

¹⁸⁾ Тут уместно задуматься вообще о трехмерных многообразиях. Скажем, о *трехмерном торе* (не путать со сплюснутым тором), получаемом склеиванием противоположных граней куба.

Еще в XIX веке было известно, что результат типа (5.5) верен для обычной сферы S^2 . Попытка подняться в размерности на одну ступеньку выше оказалась невероятно сложной. Неудачные попытки решения постепенно вывели «гипотезу» на одно из первых мест в списке самых сложных математических проблем.

Вопрос был закрыт Григорием Перельманом (2002), решившим более сложную задачу геометризации Торстена (1983)¹⁹⁾, в которой речь идет о базисных трехмерных многообразиях, из которых остальные получаются путем склеивания²⁰⁾. Список таких многообразий и был обоснован Перельманом. Справедливость гипотезы Пуанкаре оказалась простым следствием.

История заслуживает внимания в нескольких отношениях.

• *Во-первых, возникает тема важности решенной задачи. И хотя тут притянутой за уши оказывается разная чепуха, в поле зрения попадает также глобальное устройство локально трехмерной Вселенной. Получается ведь: если Мир ограничен и любой контур может быть стянут в точку без выхода в преисподнюю, то Вселенная — суть трехмерная сфера S^3 , и ничто другое. После рюмки хорошего коньяка такой вывод кажется бесполезным.*

Однако величие математических проблем заключено вовсе не в прикладной значимости. Проблема Пуанкаре сама по себе на протяжении века инициировала, направляла, оплодотворяла, дразнила, вдохновляла, обогащала, зажигала факелы, вытачивала инструменты, — оставив в конце концов фундаментальный след в топологии.

• *Во-вторых, история богата поучительными закоулками нравственного толка. Перельман, как известно, опубликовал три довольно кратких препринта в Интернете²¹⁾, не послав статьи в печатный*

¹⁹⁾ См. [21], а также: Scott G. P. The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. 15. 401–487.

²⁰⁾ Примерно как все замкнутые двумерные многообразия получались склеиванием с ручками и листами Мёбиуса дырявой сферы.

²¹⁾ См. работы Перельмана: «The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications» (<http://arXiv.org/abs/math.DG/0211159>); «Ricci Flow with Surgery on Three-Manifolds» (<http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>); «Finite Extinction Time for the Solutions to

журнал²²⁾. Группа математиков переизложила доказательство, разъясняя по сути известные специалистам вещи, но утверждая, что тем самым восполнены принципиальные пробелы, и оценивая вклад Перельмана в двадцать процентов. Так или иначе, но из-за коллоброжений вокруг — было проведено специальное расследование (2006) силами американской экспертной группы. Эксперты признали доказательство результатом усилий исключительно одного человека, Григория Перельмана²³⁾.

• В-третьих, Перельману была присуждена Филдсовская медаль (2006). Но он от нее отказался, и это послужило источником шумной кампании с вызывающими сожаление инсинуациями насчет психического здоровья бенефицианта. Разумеется, демарш не укладывается в обтекаемую конформистскую модель поведения и отдает болезненной нетерпимостью к среде обитания. Но у поступка есть другая сторона. Следование этическим принципам и убеждениям — пусть даже являющимся результатом житейской слепоты. Именно это представляет здесь настоящий интерес, как образец приоритетности духа, и только эта сторона дела заслуживает обсуждения и восхищения. Тогда как ингредиенты человеческой слабости слишком широко распространены, чтобы на них концентрироваться в данном экстраординарном случае интеллектуального подвига.

5.8. Контрпримеры Пуанкаре и Уайтхеда

В топологии довольно много копий сломано при изучении зазора между гомеоморфностью многообразий и той или иной разновидностью гомотопической (а также гомологической, глава 6) эквивалентности. Зазор есть. Местами он очень узок, а местами — широк. *Гипотеза Пуанкаре* пришлась на ту делянку, где зазора совсем нет, в пределах «гомотопического среза». Однако на «гомологическом поле» ситуация иная.

the Ricci Flow on Certain Three-Manifolds» (<http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>). См. также на том же сайте: Bruce Kleiner and John Lott, «Notes On Perelman'S Papers», 2008.

²²⁾ Что было одним из требований института им. Клея, назвавшего гипотезу Пуанкаре одной из проблем тысячелетия и учредившего премию за ее решение в миллион долларов.

²³⁾ При более широком взгляде даже Ньютон «стоял на плечах гигантов».

5.8.1. Заблуждение. Если трехмерное компактное многообразие M имеет такие же группы гомологий, как у сферы S^3 , то $M \sim S^3$, т. е. M гомеоморфно S^3 .

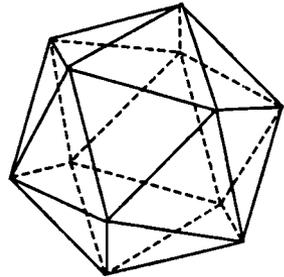
Эта довольно красивая ошибка принадлежит Пуанкаре, который быстро исправился, построив изящный контрпример.

Контрпример Пуанкаре. Множество вписанных в S^2 икосаэдров параметрически характеризуется трехмерным многообразием M , в котором каждому икосаэдру могут быть сопоставлены, например, широта и долгота какой-либо фиксированной вершины, плюс азимут соседней вершины. Возможны и другие варианты, но, так или иначе, M гомеоморфно фактор-множеству группы поворотов \mathbb{R}^3 по подгруппе инвариантных поворотов икосаэдра (преобразующих икосаэдр в себя), [5, т. 8].

В данном случае M имеет те же группы гомологий что и S^3 , т. е.

$$H_0(M) = H_3(M) = \mathbb{Z}$$

и $H_n(M) = 0$ при остальных n . В то же время след икосаэдра в M при его вращении на угол от нуля до $2\pi/5$ вокруг оси, проходящей через фиксированную вершину и центр S^2 , представляет собой петлю, которая в M не стягивается в точку. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(M)$ нетривиальна²⁴⁾, что влечет за собой негомеоморфность M и S^3 .



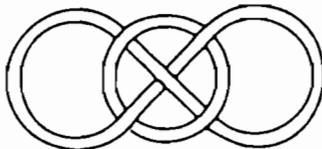
Еще один промах того же рода допустил Уайтхед.

5.8.2. Заблуждение. Любое открытое трехмерное многообразие M , стягиваемое по себе, гомеоморфно \mathbb{R}^3 .

Контрпример Уайтхеда. Внутри открытой трехмерной сферы S^3 возьмем замкнутый незаузеленный сплошной тор T_1 . Дополнение

²⁴⁾ В данном случае $\pi_1(M)$ — группа 120-го порядка.

T_1 в S^3 также представляет собой сплошной тор²⁵⁾. Далее вложим в T_1 сплошной тор T_2 так, чтобы T_2 и трубчатая окрестность меридиана T_1 образовывали *зацепление Уайтхеда*:



При этом тор T_2 , разумеется, стягиваем в дополнении меридиана T_1 , равно как меридиан T_1 стягиваем в дополнении T_2 .

Далее аналогичным образом вложим в T_2 тор T_3 и т. д. *Континуум Уайтхеда* W определяется как пересечение всех T_j :

$$C_W = \bigcap_j^\infty T_j.$$

Многообразие Уайтхеда $W = S^3 \setminus C_W$ не имеет границы, стягиваемо, но не гомеоморфно \mathbb{R}^3 , потому что в

$$W \setminus M, \quad \text{если } T_1 \subset M,$$

есть нестягивающиеся петли. Поэтому $\pi_1(W) \neq 0 \Rightarrow W \not\approx \mathbb{R}^3$.

²⁵⁾ Обычный тор разбивает \mathbb{R}^3 на внутреннюю часть (сплошной тор) и — внешнюю. При пополнении одной точкой внешняя часть становится сплошным тором, а \mathbb{R}^3 — сферой S^3 .

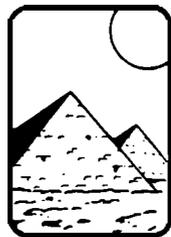
Глава 6

Симплициальные гомологии

*Век принес уроки всякие,
Но одно — венец всему:
Ярче света светят факелы,
Уводящие во тьму.*

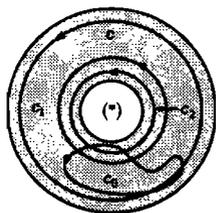
И. Губерман

Гомологическая ветвь топологии в широкой аудитории потенциально интересна с точки зрения укрепления «общего фундамента», без которого трудно двигаться в любом конкретном направлении. Представление «как нечто делается» полезно вне зависимости от прикладных устремлений, ибо стиль рассуждений может перениматься совсем в другой области. И потому даже вязание веников — помогает сочинять музыку, хотя не всяк с этим согласится.



6.1. В чем состоит идея

Теория гомологий преследует те же топологические цели, что и теория гомотопий, но заменяет деформационные инструменты «похожим» средством. Суть дела в миниатюре схематично такова. Рассмотрим, например, круговое кольцо Ω , рис. (*). Кривые в Ω назовем *1-цепями*. Ориентированные кривые без границ, т. е. замкнутые кривые, — *1-циклами*.



Терминология в отличие от теории гомотопий несколько иная, хотя ясно, что *1-циклы* — это *петли*. Но пока на комментариях останавливаться рано. Итак, в случае (*) есть два типа *1-циклов*: цикл c_0 является границей (площадки внутри контура), циклы c_1, c_2 границами не являются.

Но разность ¹⁾ $c_1 - c_2$ служит границей кольца, ограниченного контурами c_1, c_2 . Такие циклы называют *гомологичными* друг другу, и пишут $c_1 \sim c_2$. Цикл, являющийся границей, считается *гомологичным нулю*. Таким образом,

$$c_1 - c_2 \sim 0.$$

Под суммой $c_1 + c_2$ подразумевается цикл, огибающий центральное отверстие дважды. Тем самым определяется цикл tc_1 , и вообще $tc_1 + nc_2$ при целых t и n . Множество

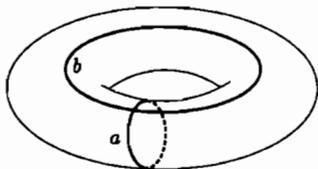
$$H_1(\Omega) = \{\dots, -2c, -c, 0, c, 2c, \dots\} \quad (6.1)$$

представляет собой *первую группу гомологий*, совпадающую во многих случаях с фундаментальной группой $\pi_1(\Omega)$. Потому что при вычислении группы гомологий H_1 мы делаем почти то же самое, что и при вычислении фундаментальной группы π_1 , но игнорируем порядок, в котором наматываются петли. Поэтому группа H_1 всегда коммутативна (абелева), а π_1 — не всегда ²⁾.

В случае кольца (*) $H_1(\Omega)$ изоморфна группе \mathbb{Z} целых чисел по сложению, а если в круге p отверстий, то

$$H_1 = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z},$$

где \mathbb{Z} суммируется p раз. Если же Ω тор, то $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.



Во главу угла в рассматриваемой методике ставится выяснение того, образуют ли те или иные кривые границу области.

В ситуации



$a - b$ ограничивает заштрихованную площадку Ω , т. е. пути a и b гомологичны, $a \sim b$. В то же время

¹⁾ Цикл с минусом — тот же цикл, ориентированный противоположно. «Правильной» ориентацией границы считается задание направления ее обхода, при котором внутренность остается все время слева.

²⁾ Группа H_1 изоморфна прокоммутированной группе π_1 (теорема 7.12.1).

это равносильно деформируемости a в b по заштрихованной территории. Если же в Ω вырезать отверстие



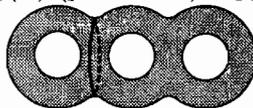
то это ликвидирует как гомологичность a и b , так и деформируемость друг в друга (гомотопическую сводимость), из чего напрашивается преждевременный вывод об эквивалентности понятий.

На самом деле гомологичность адаптирована к другим задачам. В ситуации



$c - a - b \sim 0$, но это не влечет за собой гомотопию c и $a + b$, а улавливает определяющее соотношение в фундаментальной группе $\pi_1(\Omega)$ (раздел 5.4). Другой пример:

контур на перешейке кренделя



не стягиваем, но гомологичен нулю. Поэтому идея концентрации внимания на взаимодействии областей и границ (в том числе относительных), лежащая в основе теории гомологий, работает весьма продуктивно.

6.2. Симплициальные комплексы

Доведение до ума наводящих соображений предыдущего раздела связано с преодолением серии технических препятствий. Надо решить, какие области и границы допускаются к рассмотрению, как задаются и согласуются ориентации, как определяются гомологические группы в высших размерностях, и т. п. Вариантов множество — поэтому группы гомологий бывают разные: *симплициальные*, *сингулярные* и др. На простых топологических объектах все эти разноименные группы совпадают. Рассмотрим пока наиболее простые, *симплициальные гомологии*³⁾.

³⁾ Естественный путь познания всегда начинается с понятий, предусмотренных Создателем. Это не значит, что оно так и должно лежать в голове потом. Скажем, язык со временем можно поместить в координатную сетку грамматики. Но с грамматики нельзя начинать. То же самое можно сказать о *сингулярных* и *клеточных гомологиях*. Симплициальные гомологии отягощены скучными подробностями, но лучше согласуются с воображением.

Симплекс представляет собой обобщение понятия отрезка (1-симплекс), треугольника (2-симплекс), тетраэдра (3-симплекс). Общее определение: *k-мерным симплексом* (*k-симплексом*)

$$s^k = (a_0, \dots, a_k)$$

называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, таких что

$$x = \sum_{j=0}^k \lambda_j a_j, \quad \sum_{j=0}^k \lambda_j = 1, \quad \text{все } \lambda_j \geq 0,$$

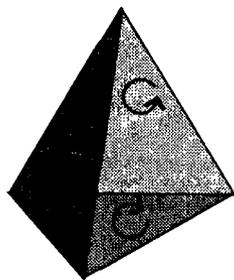
в предположении линейной независимости векторов

$$a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0,$$

где точки $a_j \in \mathbb{R}^n$ представляют собой *вершины симплекса*, λ_j — *барицентрические координаты* точки x . О гомеоморфных образах симплексов говорят как о *криволинейных симплексах*⁴⁾. Очевидно, симплекс s^k представляет собой выпуклую оболочку своих вершин. Выпуклая оболочка любого подмножества вершин называется *гранью симплекса*.

Симплициальным комплексом $K \subset \mathbb{R}^n$ называют конечное семейство симплексов s_i^k , расположение которых характеризуется тем, что пересечение любых двух s_i^p, s_j^q или пусто, или является гранью как s_i^p , так и s_j^q .

Множество всех точек из \mathbb{R}^n , принадлежащих симплексам комплекса K , с топологией, индуцированной из \mathbb{R}^n , называют *полиэдром* комплекса K и обозначают $|K|$, а комплекс K именуют *триангуляцией* полиэдра $|K|$. Геометрически очевидно, что любой полиэдр можно сколь угодно мелко триангулировать, делая максимальный диаметр составляющих симплексов сколь угодно малым.



⁴⁾ Криволинейный симплекс отличается от гомеоморфного шара тем, что на этом шаре должны быть выделены точки (вершины), с помощью которых определяется ориентация, см. далее.

Ориентация. Об ориентации в \mathbb{R}^3 см. разделы 1.7, 2.7.

Два базиса $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ и $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ в \mathbb{R}^n считаются *одинаково ориентированными*, если $\det A > 0$ ($e' = Ae$). В случае $\det A < 0$ говорят, что базисы e и e' *противоположно ориентированы*. В результате все базисы распадаются на два класса эквивалентных, *положительно ориентированных (одинаково ориентированных по отношению к фиксированному базису)*, и *отрицательно ориентированных*.

О положительной/отрицательной *ориентации симплекса*

$$s^n = (a_0 \dots a_n) \quad (6.2)$$

говорят в зависимости от того, одинаково или противоположно с избранным базисом \mathbb{R}^n ориентирован базис

$$e_1 = a_1 - a_0, \dots, e_n = a_n - a_0.$$

Симплекс $(a_{i_0} \dots a_{i_n})$, построенный на тех же вершинах, что и (6.2), но взятых в другом порядке, будет совпадать либо с s^n , либо с $-s^n$. Четное (нечетное) число перестановок двух вершин симплекса не меняет (меняет) его ориентацию. *Неориентированный симплекс* обозначается $|s^n|$.

Инцидентность и граничный оператор ∂ . Пусть крышечка над вершиной симплекса исключает эту вершину, т. е.

$$(a_0 \dots \widehat{a_i} \dots a_n) = (a_0 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n).$$

В результате от s^n остается $(n-1)$ -мерная грань s^{n-1} .

Рассмотрим теперь ориентированный симплекс s^n и его ориентированную грань s^{n-1} , не содержащую, например, вершину a_i симплекса s^n . Допустим, порядок вершин $a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}$ определяет выбранную ориентацию грани $|s^{n-1}|$. При этом порядок

$$a_i, a_{i_0}, \dots, a_{i_{n-1}}$$

вершин симплекса $|s^n|$ определяет либо исходную ориентацию s^n , либо ориентацию $-s^n$. В первом случае *коэффициент инцидентности* ($s^n : s^{n-1}$) считается равным $+1$, во втором — равным -1 . Если же s^{n-1} — *не грань* s^n , то $(s^n : s^{n-1}) = 0$.

6.2.1. Граница ориентированного симплекса определяется как

$$\partial s^n = \sum_{i=0}^n (s^n : s_i^{n-1}) s_i^{n-1},$$

где суммирование идет по всем $(n - 1)$ -мерным граням s_i^{n-1} .

Оператор ∂ называется *граничным*, и снабжается иногда индексом: ∂_n . Индекс, как правило, опускается, чтобы не перегружать обозначения.

Если договориться об ориентации граней в соответствии с правилом

$$s^n = (a_0 \dots a_n), \quad s_i^{n-1} = (a_0 \dots \widehat{a}_i \dots a_n), \quad (6.3)$$

то, как легко проверить,

$$\partial s^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i s_i^{n-1}.$$

Граница симплекса — частный случай общего понятия цепи: r -мерная цепь x^r комплекса K определяется как *формальная* сумма

$$x^r = \sum_i \alpha_i s_i^r,$$

где α_i — целочисленные коэффициенты. При этом *граница цепи*,

$$\partial x^r = \sum_i \alpha_i \partial s_i^r,$$

является $(r - 1)$ -мерной цепью.

Если в множестве всех цепей комплекса K ввести операцию сложения цепей (как линейных форм), то это множество становится *группой* и обозначается $L_r(K)$. Граничный оператор, таким образом, действует из L_r в L_{r-1} .

Циклы. Любая цепь x^r с нулевой границей ($\partial x^r = 0$) называется *циклом*. Множество r -мерных циклов $Z_r(K)$ является подгруппой группы $L_r(K)$. Другими словами, Z_r — это ядро гомоморфизма

$$\partial_r : L_r \rightarrow L_{r-1},$$

т. е. $Z_r = \ker \partial_r$.

В группе циклов $Z_r(K)$ можно выделить подгруппу $B_r(K)$ r -мерных границ, т. е. множество r -мерных цепей, являющихся границами некоторых $(r + 1)$ -мерных цепей.

◀ Чтобы проверить, что $B_r(K)$ — действительно подгруппа $Z_r(K)$, достаточно установить⁵⁾

$$\partial\partial x^r = 0, \quad (6.4)$$

поскольку ядро любого гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow H$ — подгруппа G .

Так как оператор ∂ линеен, (6.4) достаточно проверить в случае, когда x^r — симплекс:

$$\begin{aligned} \partial\partial s^r &= \partial \left[\sum_i (-1)^i (a_0 \dots \hat{a}_i \dots a_r) \right] = \\ &= \sum_i (-1)^i \left[\sum_{j < i} (-1)^j (a_0 \dots \hat{a}_j \dots \hat{a}_i \dots a_r) + \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_r) \right]. \end{aligned}$$

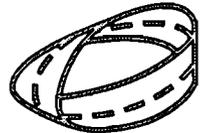
Легко видеть, что грань $(a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_r)$ входит в сумму дважды: один раз с коэффициентом $(-1)^{i+j}$, другой раз с коэффициентом $(-1)^{i+j-1}$, что в сумме дает нуль. Поэтому $\partial\partial s^r = 0$. ▶

6.2.2. Неограничивающий цикл x^r , который при умножении на целое γ становится ограничивающим, называется циклом с кручением.

Обнаружить негомологичные нулю циклы x^r , кратные которых гомологичны нулю, $\gamma x^r \sim 0$ при некотором γ , — в рядовых ситуациях маловероятно. Но вот на проективной плоскости $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ такие циклы есть.

Для осознания последнего обстоятельства достаточно вспомнить две вещи (глава 1).

1. Проективная плоскость получается склеиванием края листа Мёбиуса с границей диска.
2. Разрезание листа Мёбиуса вдоль средней линии (пунктирного контура x) дает не две ленты, а одну — два раза перекрученную.

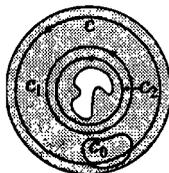


В результате берега разреза сливаются в один контур, который оказывается ограничивающим, при условии что лист Мёбиуса изначально заклеен диском. Получается $2x \sim 0$.

⁵⁾ Т. е. граница границы сама по себе не имеет границы.

6.2.3. Фактор-группа $H_r = Z_r/B_r$ группы циклов Z_r по подгруппе границ B_r называется r -й группой гомологий, или группой Бетти, комплекса K .

В ситуации «кольца»



группа Z_1 — это группа

всевозможных циклов типа $mc_1 + nc_2$, и вообще

$$\alpha c_0 + mc_1 + nc_2 + \dots + kc_p,$$

а B_1 — группа ограничивающих циклов, таких как $c_1 - c_2 \sim 0$. В фактор-группе H_1 гомологичные друг другу циклы объединяются в один класс. В результате

$$H_1 = \{\dots, -2c, -c, 0, c, 2c, \dots\},$$

где контур c выступает в роли представителя своего класса (контуров, обходящих центральное отверстие один раз против часовой стрелки). Таким образом, группа гомологий, в данном случае $H_1 \sim \mathbb{Z}$, совпадает с фундаментальной группой кольца π_1 .

Группы H_r , Z_r , B_r введены здесь для комплекса K , тогда как основной интерес представляет изучение самого полиэдра $|K|$. На простых примерах легко видеть, что группы Z_r , B_r при измельчении триангуляции полиэдра $|K|$ разрастаются, но эти изменения в группах Z_r , B_r оказываются тесно связанными, и фактор-группа $H_r = Z_r/B_r$ не меняется. Это общее правило.

6.2.4. Группа гомологий $H_r(K)$ не зависит от триангуляции, а определяется самим полиэдром. Гомеоморфные полиэдры имеют одинаковые (изоморфные) группы гомологий⁶⁾.

Соответственно, вычислять группы гомологий можно на основе произвольной триангуляции — наиболее простой и удобной. В то же время понятие симплициального комплекса представляет

⁶⁾ Доказательство несколько громоздко, но рутинно и прозрачно — см. любой учебник по алгебраической топологии.

собой не более чем технический прием для введения групп гомологий. Достижением топологии явилось обобщение этой техники с криволинейных полиэдров на случай любых компактов. Помимо определенных выше симплициальных групп в топологии используются различные другие группы гомологий: *сингулярные*, *Виеториса*, *Чеха* и др. На классе полиэдров все эти разновидности совпадают между собой. Для всех разновидностей гомологий остается справедливым результат 6.2.4 с поправкой на общую ситуацию: «Группа гомологий $H_r(K)$ определяется самим компактом K . Гомеоморфные компакты имеют изоморфные группы гомологий.» Более того, группы гомологий изоморфны в более общей ситуации.

6.2.5. *Гомотопически эквивалентные компакты имеют изоморфные группы гомологий.*

Из п. 6.2.5 сразу следует, что все группы гомологий

$$H_r(K), \quad r \geq 1,$$

стягиваемого компакта тривиальны ⁷⁾, поскольку стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно точке. Компакт, группы гомологий которого тривиальны, называется *ациклическим*. Таким образом, *стягиваемый компакт всегда ацикличесок*.

Пример. Рассмотрим в качестве криволинейного полиэдра P *тор*. Одномерные циклы x^1 на P — не что иное, как замкнутые ориентированные (с заданным направлением обхода) кривые. Такие кривые (циклы) подразделяются на те, которые ограничивают некоторую область (цикл z), и те, которые никакой области не ограничивают, т. е. не принадлежат группе границ (*меридиан* и *параллель* тора, a и b).



Обратим внимание, что цикл $A + 2B + C$ (равный сумме циклов), ограничивает «область» $A + 2B + C$, в которую «территория» B входит дважды. Поэтому, если говорить точнее, то надо сказать, что все циклы подразделяются

⁷⁾ Группа H_0 представляет собой свободную абелеву группу, ранг которой совпадает с числом компонент связности рассматриваемого компакта.

на те, которые являются границами некоторых двумерных цепей⁸⁾, и те, которые границами не являются.

Будем все ограничивающие циклы считать несущественными, а «существенные» — разобьем на *гомологичные циклы*. Циклы x_1 и x_2 называются *гомологичными*, если их разность $x_1 - x_2$ — ограничивающий цикл (*гомологичный нулю*)⁹⁾. Эти *классы гомологий* и есть элементы *группы гомологий* H_1 . На торе все такие классы гомологий выражаются через класс меридианов a и класс параллелей b . Если цикл x обходит тор α раз по меридиану и β раз по параллели, то

$$x = \alpha a + \beta b,$$

и потому a и b — образующие группы H_1 , а сама группа H_1 представляет собой прямую сумму¹⁰⁾ $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$.

На сфере S^2 группа гомологий H_1 тривиальна — состоит из единственного, нулевого, класса гомологий — поскольку все одномерные циклы на S^2 гомологичны между собой. Группа гомологий H_2 на S^2 изоморфна \mathbb{Z} .

6.3. Ориентируемые псевдомногообразия

В предыдущем разделе обозначена лишь канва теории. Далее рассматриваются некоторые уточнения. Опять-таки — не с целью добиться замкнутого изложения (каковых имеется достаточное количество), а с намерением дать некоторое представление о масштабах сопутствующих проблем.

Комплекс K^n размерности n называется n -мерным комбинаторным псевдомногообразием, если он *сильно связан*¹¹⁾, и каждый $(n-1)$ -мерный симплекс этого комплекса — грань двух и только двух n -мерных симплексов комплекса K^n .

Пусть s_i^n и s_j^n — n -мерные псевдомногообразия K^n , имеющие общую грань s_{ij}^{n-1} . Ориентации симплексов s_i^n , s_j^n называются *когерентными*, если

$$(s_i^n : s_{ij}^{n-1}) = -(s_j^n : s_{ij}^{n-1}).$$

⁸⁾ А не областей в обычном понимании этого слова.

⁹⁾ Например, два различных меридиана тора с одинаковой ориентацией — гомологичны друг другу.

¹⁰⁾ Точнее говоря, изоморфна прямой сумме.

¹¹⁾ Комплекс K^n называют *сильно связным*, если: (I) любой симплекс $s^r \in K^n$, $r < n$, представляет грань некоторого симплекса $s^n \in K^n$ и (II) если K^n представим в виде объединения подкомплексов K_1^n и K_2^n , то размерность $K_1^n \cap K_2^n$ не меньше $n-1$.

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора ориентации грани $|s_{ij}^{n-1}|$.

Псевдомногообразия K^n называется *ориентируемым*, если ориентации всех его (граничащих друг с другом) n -мерных симплексов могут быть выбраны *когерентными*¹²⁾.

6.3.1. Теорема. *Ориентации всех n -мерных симплексов ориентируемого псевдомногообразия $K^n = \{s_1^n, \dots, s_m^n\}$ когерентны в том случае, когда цепь*

$$z^n = \sum_{i=1}^m s_i^n \quad (6.5)$$

является циклом.

◀ Это очевидно ввиду

$$\partial z^n = \sum_{i,j} [(s_i^n : s_{ij}^{n-1}) + (s_j^n : s_{ij}^{n-1})] s_{ij}^{n-1}. \quad \blacktriangleright$$

6.3.2. Теорема. *Группа гомологий H_n ориентируемого псевдомногообразия K^n изоморфна группе \mathbb{Z} .*

◀ Ясно, что группа n -мерных границ K^n тривиальна (нулевая), так как в K^n отсутствуют $(n+1)$ -мерные цепи. Поэтому группа гомологий H_n в данном случае совпадает с группой n -мерных циклов, и теорема будет доказана, если показать, что любой цикл x^n имеет вид

$$x^n = \alpha z^n,$$

где α целое, а z^n определяется соотношением (6.5).

Для произвольной цепи $x^n = \sum_i \alpha_i s_i^n$ имеем

$$\partial x^n = \sum_{i,j} [\alpha_i (s_i^n : s_{ij}^{n-1}) + \alpha_j (s_j^n : s_{ij}^{n-1})] s_{ij}^{n-1},$$

поэтому, чтобы цепь x^n была циклом, необходимо и достаточно $\alpha_i = \alpha_j$ для всех i, j . ▶

¹²⁾ Легко видеть, что задание ориентации любого симплекса s_0^n ориентируемого псевдомногообразия K^n однозначно определяет когерентные ориентации всех остальных симплексов $s^n \in K^n$, и вообще всех симплексов $s^r \in K^n$, $r \leq n$, что вытекает из сильной связности K^n .

Примером ориентируемого многообразия может служить край n -мерного симплекса s^n , т. е. $(n - 1)$ -мерный комплекс K^{n-1} , состоящий из всех граней s_i^{n-1} симплекса s^n . Ориентировать K^{n-1} можно, выбрав ориентации граней s_i^{n-1} так, чтобы

$$\forall i : (s_i^n : s_{ij}^{n-1}) = 1.$$

Из теоремы 6.3.2 вытекает, что группа гомологий H_{n-1} края симплекса s^n изоморфна группе \mathbb{Z} . Сфера S^{n-1} — криволинейный полиэдр, гомеоморфный краю симплекса s^n (гомеоморфизм осуществляется, например, центральным проектированием). Поэтому группа гомологий H_{n-1} сферы S^{n-1} также изоморфна группе \mathbb{Z} .

6.4. Симплициальные отображения

Пусть имеется некоторое преобразование φ вершин симплекса $s^p = (a_0 \dots a_p)$ в вершины симплекса $s^q = (b_0 \dots b_q)$, что можно записать так:

$$\varphi(a_i) = b_{i(\varphi)}.$$

Преобразованию φ сопоставим линейное отображение

$$\tilde{\varphi} : |s^p| \rightarrow |s^q|,$$

определяемое следующим образом:

$$\tilde{\varphi} \left(\sum_i \lambda_i a_i \right) = \sum_j \mu_j b_j, \quad \text{где} \quad \mu_j = \sum_{i(\varphi)=j} \lambda_i.$$

Рассмотрим теперь некоторое преобразование φ вершин комплекса K в вершины комплекса L , удовлетворяющее условию: если точки a_0, \dots, a_p определяют некоторый симплекс из K , то на $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_p)$ натянут некоторый симплекс из L (разумеется, среди вершин $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_p)$ могут быть повторяющиеся).

Преобразование $\varphi : K \rightarrow L$ определяет линейное на каждом симплексе из K отображение $\tilde{\varphi} : |K| \rightarrow |L|$, называемое *симплициальным отображением*.

Два обычных непрерывных отображения

$$f : |K| \rightarrow |L| \quad \text{и} \quad g : |K| \rightarrow |L|$$

назовем L -близкими, если для каждого $x \in |K|$ можно указать такой симплекс $s(x) \in L$, что $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $s(x)$.

Если отображения $f, g : |K| \rightarrow |L|$ L -близки, то они гомотопны — годится линейная гомотопия

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Если непрерывное отображение $f : |K| \rightarrow |L|$ и симплициальное отображение $\varphi : K \rightarrow L$ таковы, что для каждого $x \in |K|$ точка $\tilde{\varphi}(x)$ принадлежит наименьшему симплексу $s \in K$, содержащему $f(x)$, то φ называется *симплициальным приближением* отображения f . Из определения сразу следует, что $f(x)$ и его симплициальное приближение φ всегда гомотопны, так как заведомо L -близки.

6.4.1. У всякого непрерывного отображения $f : |K| \rightarrow |L|$ существует симплициальное приближение.

Приведенное утверждение нуждается в уточнении. Подразумевается возможность так триангулировать полиэдр $|K|$, что для некоторой его триангуляции K' будет существовать симплициальное приближение $\varphi : K' \rightarrow L$ отображения f . В идейном отношении доказательство просто, но несколько громоздко. Нужная триангуляция полиэдра $|K|$ получается многократным барицентрическим подразделением комплекса K . Идея построения симплициального приближения φ также прозрачна.

6.5. Индуцируемые гомоморфизмы

Пусть имеется симплициальное отображение φ комплекса K_α в комплекс K_β . Введем с помощью φ гомоморфизм φ_{*r} группы $L_r(K_\alpha)$ в группу $L_r(K_\beta)$, полагая

$$\varphi_{*r}(s_\alpha^r) = (\varphi(a_0) \dots \varphi(a_r)), \quad s_\alpha^r = (a_0 \dots a_r),$$

если вершины $\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_r)$ различны, и

$$\varphi_{*r}(s_\alpha^r) = 0$$

в противном случае. На цепи гомоморфизм φ_{*r} распространяется линейно, т. е.

$$\varphi_{*r}(x_\alpha^r) = \sum_i \gamma_i \varphi_{*r}(s_i^r), \quad \text{где} \quad x_\alpha^r = \sum_i \gamma_i s_{\alpha i}^r.$$

Легко проверяется, что φ_{*r} коммутирует с граничным оператором, т. е. для любой цепи $x^r \in L_r(K_\alpha)$

$$\varphi_{*r}(\partial x^r) = \partial \varphi_{*r}(x^r).$$

Отсюда сразу следует, что φ_{*r} переводит циклы в циклы, границы в границы, а значит, группу гомологий $H_r(K_\alpha)$ в группу гомологий $H_r(K_\beta)$.

Гомоморфизм φ_{*r} называется гомоморфизмом, индуцируемым симплициальным отображением φ . Каждое симплициальное отображение φ индуцирует целый набор гомоморфизмов φ_{*r} , где индекс r указывает размерность групп гомологий.

С каждым непрерывным отображением

$$f : |K| \rightarrow |L|,$$

таким образом, можно связать набор гомоморфизмов

$$f_{*r} : H_r(K) \rightarrow H_r(L),$$

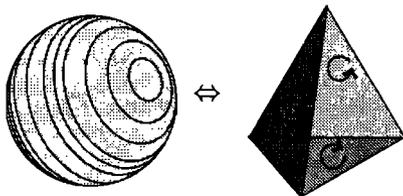
индуцируемых некоторым симплициальным приближением отображения f . Можно показать корректность такого определения, т. е. независимость гомоморфизмов от выбора того или иного симплициального приближения f . Более того, справедлив следующий результат.

6.5.1. Теорема. *Гомоморфизмы f_{*r}, g_{*r} гомотопных отображений $f, g : |K| \rightarrow |L|$ совпадают¹³⁾.*

¹³⁾ Гомоморфизмы I_{*r} тождественного отображения $I : |K| \rightarrow |K|$, очевидно, являются изоморфизмами.

6.6. Проблемы вычисления

Для вычисления групп гомологий $H_r(K)$ принципиальную роль играет теорема 6.2.4 о независимости результата от триангуляции и гомеоморфной деформации полиэдра. Это позволяет для счета выбирать на практике самые простые симплициальные комплексы. Например, с учетом гомеоморфности сферы S^2 и границы трехмерного симплекса



гомологии S^2 можно считать исходя из разбиения сферы на четыре треугольника, что уже проделывалось в комментариях к теореме 6.3.2 и в самом доказательстве теоремы.

Но уже для тора минимальное число треугольников в разбиении становится существенно больше ¹⁴⁾, и счет усложняется, не говоря о поверхностях M_p , N_q с большими p и q .

Само вычисление гомологий осуществляется на базе сопоставления каждому граничному гомоморфизму

$$\partial_r : L_r \rightarrow L_{r-1}$$

матрицы A_r , переводящей базисные векторы ¹⁵⁾ группы L_r в линейные комбинации базисных векторов L_{r-1} . С помощью *элементарных преобразований* [5, т. 3] матрицы A_r приводятся к диагональному виду, и на этой основе делается однозначный вывод о группах гомологий, каковые всегда устроены по регламенту

$$H_r(K) = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z} + \text{tors}_r(K),$$

¹⁴⁾ Если память не изменяет — требуется минимум 14 треугольников.

¹⁵⁾ Базисные векторы группы цепей L_r — это избранные линейно независимые линейные комбинации симплексов: $e^r = \sum_i \alpha_i \delta_i^r$.

где число слагаемых \mathbb{Z} равно числу свободных образующих, а группа кручения $\text{tors}_r(K)$ устроена «похожим образом»¹⁶⁾. Все это подробно расписывается в учебниках алгебраической топологии, и может быть эффективно запрограммировано. Так что вычисление гомологических групп, в отличие от гомотопических, принципиальных трудностей не имеет.

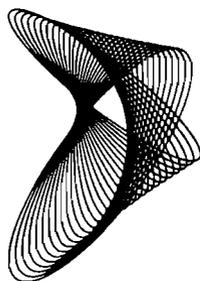
¹⁶⁾ Равна сумме групп вычетов по некоторым модулям, также определяемым диагональным представлением матриц A_r .

Глава 7

Теория гомологий

Избегая неудобных вопросов, легче контактировать со Вселенной. Но каких-то вопросов Она ждет.

Симплициальная идеология — далеко не единственный источник, порождающий группы гомологий. От разнообразия существующих подходов, конечно, рябит в глазах, но многоликость механизмов имеет свой плюс. Разные понятия гомологий на практических задачах все совпадают, зато в теоретических изысканиях попеременно опережают друг друга, работая на общую копилку. Возникает суммарный эффект, какового не добьешься, опираясь только на эквивалентные определения. Подобный опыт есть резон перенять в других дисциплинах.



7.1. Общая схема

В предыдущей главе симплициальные комплексы с помощью граничного оператора по сути были переработаны в цепочки вида

$$\dots \rightarrow L_{n+1} \xrightarrow{\partial} L_n \xrightarrow{\partial} L_{n-1} \rightarrow \dots, \quad \partial\partial = 0, \quad (7.1)$$

каковые представляют собой частный случай следующего общего понятия сугубо теоретико-группового свойства.

7.1.1. Определение. *Последовательность C_S абелевых групп и гомоморфизмов*¹⁾

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \quad (7.2)$$

называется цепным комплексом, если $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ для любого n .

¹⁾ Здесь ∂_n не обязательно граничный оператор в указанном выше смысле.

Так что (7.1) — частный случай (7.2). И переход от топологического пространства к *цепному комплексу* (тем или иным макаром) составляет основу любой теории гомологий — *симплициальной, сингулярной, клеточной, Виеториса, Чеха* и т. п.

7.1.2. *Безотносительно к содержательному наполнению — группы C_n в (7.2) называются группами цепей комплекса C_S , а гомоморфизмы ∂_n — дифференциалами. Ядро*

$$Z_n = \ker \partial_n \subset C_n$$

называется группой n -мерных циклов, а образ

$$B_n = \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset C_n$$

гомоморфизма ∂_{n+1} — группой n -мерных границ²⁾ комплекса C_S . Наконец, фактор-группа

$$H_n = \frac{Z_n}{B_n}$$

называется n -мерной группой гомологий комплекса C_S .

Параллели с разделом 6.2 очевидны. Еще раз подчеркнем, что понятие цепного комплекса чисто теоретико-групповое. Связь с топологией устанавливается через сопоставление многообразию X комплекса (7.2), в результате чего появляется возможность группы H_n называть группами гомологий многообразия X . Точнее говоря, для этого надо доказать, что группы гомологий, в отличие от групп циклов и границ, не зависят от произвола механизма перехода $X \mapsto C_S$, а также от выбора многообразия, гомотопически эквивалентного X — и это уже тополого-групповая часть теории.

Определенную роль в теории играют отображения одного комплекса в другой.

7.1.3. *Цепным отображением φ комплекса C_S в цепной комплекс C'_S называется совокупность гомоморфизмов*

$$\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n$$

²⁾ В рамках легенды о симплициальных комплексах включение $B_n \subset Z_n$ очевидно, но оно остается справедливым и общем случае цепного комплекса.

при условии

$$\varphi_n \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \varphi_{n+1}. \quad (7.3)$$

Из (7.3) следует $\varphi_n(\ker \partial_n) \subset \ker \partial'_n$, $\varphi_n(\operatorname{im} \partial_{n+1}) \subset \operatorname{im} \partial'_{n+1}$. Поэтому φ индуцирует также гомоморфизмы групп гомологий,

$$\varphi_n : H_n(C_\S) \rightarrow H_n(C'_\S).$$

Топологи обычно записывают (7.3) в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\ \dots & \rightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} & \rightarrow & \dots \end{array}$$

7.1.4. Комплекс C_\S^0 называется подкомплексом комплекса C_\S , если C_n^0 являются подгруппами групп C_n , а дифференциалы ∂_n^0 — сужениями ∂_n на C_n^0 . При этом определены гомоморфизмы вложения $i_n : C_n^0 \rightarrow C_n$, что позволяет говорить о вложении

$$i_* : C_\S^0 \rightarrow C_\S.$$

Часто используется следующая конструкция. На последовательности фактор-групп $\widehat{C}_n = C_n/C_n^0$ гомоморфизмы ∂_n индуцируют гомоморфизмы $\widehat{\partial}_n : \widehat{C}_n \rightarrow \widehat{C}_{n-1}$. При этом последовательность

$$\dots \rightarrow \widehat{C}_{n+1} \xrightarrow{\widehat{\partial}_{n+1}} \widehat{C}_n \xrightarrow{\widehat{\partial}_n} \widehat{C}_{n-1} \rightarrow \dots$$

образует цепной комплекс \widehat{C}_\S , а эпиморфизмы факторизации

$$j_n : C_n \rightarrow \widehat{C}_n$$

образуют гомоморфизм факторизации цепных комплексов

$$j_* : C_\S \rightarrow \widehat{C}_\S.$$

Безусловно, изложение гомологических начал заводит большую часть аудитории в тупик, из чего напрашивается вывод о нецелесообразности процесса. Ситуация отчасти напоминает чемодан без ручки, «нести неудобно, а выбросить жалко», но главное в другом. Наша непригодность к алгебраическим

формам мышления носит фундаментальный характер. Поэтому изначальное непонимание алгебраической топологии вполне нормально, и глава пишется не для того, чтобы по ней можно было изучить теорию гомологий, а для понимания того, что оную можно не изучать. Такое понимание также требует определенных усилий. Так что продолжим.

7.2. CW-комплексы и клеточные гомологии

Представление многообразий с помощью симплициальных разбиений, даже простейших, приводит к необходимости манипулирования довольно большим количеством треугольников и вообще симплексов. Если на S^2 достаточно взять четыре треугольника, то на торе для разбиения не хватает — десятка. С другой стороны, почему бы не представить S^2 объединением открытого круга и выколотой точки. Или, скажем, тор — в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами — и никакой мороки с разбиением на треугольники.

Подобные соблазны привели к возникновению идеологии *клеточных пространств*, называемых также *CW-комплексами*, и представляющих собой объединения *клеток*. Обычно говорят о *клеточном разбиении* многообразия $X \subset \mathbb{R}^n$ на *клетки* σ_α^k , гомеоморфные открытым шарам B^k всевозможных размерностей,

$$X = \bigcup_{\alpha, k} \sigma_\alpha^k.$$

От гомеоморфизмов

$$\chi_\alpha^k : B^k \rightarrow \sigma_\alpha^k$$

требуется, чтобы они продолжались до непрерывных отображений $\widehat{\chi}_\alpha^k$ на замыканиях \overline{B}^k , причем образы границ B^k принадлежали конечному множеству клеток меньших размерностей³⁾.

Далее сюжет развивается по образу и подобию симплициальной теории (раздел 6.2): *r-мерные цепи* x^r определяются как

³⁾ Последнее требование называют аксиомой (C). Есть еще аксиома (W), о которой в данном контексте нет смысла говорить.

формальные суммы

$$x^r = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \sigma_{\alpha}^r, \quad (7.4)$$

γ_{α} — целочисленные коэффициенты, и т. п. Граничный оператор на клетках определяется аналогично п. 6.2.1,

$$\partial \sigma_{\alpha}^n = \sum_{\beta} (\sigma_{\alpha}^n : \sigma_{\beta}^{n-1}) \sigma_{\beta}^{n-1},$$

где суммирование идет по всем $(n-1)$ -мерным клеткам с коэффициентами инцидентности $(\sigma_{\alpha}^n : \sigma_{\beta}^{n-1})$, каковые теперь определяются несколько иначе и могут принимать любые целочисленные значения⁴⁾. Отображение $\widehat{\chi}_{\alpha}^k$ переводит сферу S^{k-1} , ограничивающую B^k , в границу клетки σ_{α}^k . При этом клетка σ_{β}^{k-1} может иметь несколько прообразов в S^{k-1} . Число этих прообразов с учетом ориентации и есть $(\sigma_{\alpha}^n : \sigma_{\beta}^{n-1})$.

Все очень похоже на «симплициальный вариант теории», но, как говорится, шаг в сторону — и попадаешь в дебри. Общие теоремы даются здесь с большим трудом. Зато конкретные вычисления — намного проще. Вот несколько примеров.

• Разбивая сферу S^n на две клетки, $S^n = \sigma^0 \cup \sigma^n$, размерностей 0 и n , приходим к цепному комплексу

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad (7.5)$$

где нули возникают из-за отсутствия клеток промежуточных размерностей. Все гомоморфизмы (граничные операторы), очевидно, нулевые. Поэтому

$$H_0(S^n) \sim \mathbb{Z}, \quad H_n(S^n) \sim \mathbb{Z},$$

остальные H_k тривиальны.

• Проективное пространство $\mathbb{P}R^n$ можно рассматривать как результат отождествления в S^n диаметрально противоположных точек. Разбиваем S^n экватором S^{n-1} на две клетки (полусферы)

⁴⁾ А не только $\{0, \pm 1\}$.

$\sigma_1^{n-1}, \sigma_2^{n-1}$. Затем экватор S^{n-1} разбиваем экватором S^{n-2} и т. п. В итоге получаем разбиение S^n , в котором содержится по две клетки каждой размерности $k \leq n$. Отождествляя пары клеток одной размерности указанным выше способом, получаем клеточное разбиение $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ на $(n+1)$ клеток — по одной в каждой размерности. Цепной комплекс имеет вид

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0. \quad (7.6)$$

• На последнем шаге предыдущего построения окружность S^1 разбивается двумя точками на две полуокружности. Склеивание диаметрально противоположных точек S^1 превращает круг в $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$, две полуокружности — в ребро e , две точки деления — в одну точку. Таким образом, данное клеточное разбиение $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ содержит одну вершину, одно ребро e и одну двумерную клетку. Ребро e — единственный образующий элемент группы $\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{R}^2)$. Склеивание полуокружностей в противоходе дает $e = e^{-1}$, т. е. определяющее соотношение $e^2 = 1$ группы. В результате $\pi_1(\mathbb{P}\mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}_2^+$. Аналогично

$$H_1(\mathbb{P}\mathbb{R}^2) = H_1(N_1) = \mathbb{Z}_2^+.$$

• Разрезая *тор* M_1 по меридиану a и параллели b , получаем клеточное разбиение, состоящее из точки (пересечения a и b), двух ребер a и b и двумерной клетки. Для π_1 определяющее соотношение: $aba^{-1}b^{-1} = 1$, т. е. $ab = ba$. В итоге $\pi_1(M_1) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Тот же результат для первой группы гомологий:

$$H_1(M_1) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}.$$

7.3. Сингулярные гомологии

Еще одно ответвление теории гомологий опирается на понятие *сингулярного симплекса* на многообразии X , каковым называют произвольное непрерывное отображение *стандартного симплекса* s^k :

$$\varphi : s^k \rightarrow X.$$

Стандартные симплексы предполагаются фиксированными — по одному в каждой размерности⁵⁾.

Далее все опять-таки развивается по обычному сценарию, r -мерные цепи x^r определяются как *формальные* суммы сингулярных симплексов σ_α^k с целочисленными коэффициентами, а граничный оператор на σ_α^k определяется как

$$\partial\sigma_\alpha^k = \partial\varphi(s_\alpha^k) = \sum_i (-1)^i \varphi\left(\xi_i^{k-1}(s_i^{k-1})\right),$$

где суммирование идет по всем $(k-1)$ -мерным граням s_i^{k-1} симплекса s^k , а ξ_i^{k-1} отображает s_i^{k-1} с ориентацией, выбираемой по правилу (6.3), в $(k-1)$ -мерный стандартный симплекс.

Затем проторенным уже путем определяются циклы, границы и гомологии. Но попытки воспользоваться такой теорией для вычисления групп гомологий в простейших ситуациях наталкиваются на непреодолимые препятствия. Короче говоря, сингулярные гомологии реально не считаются. Но есть свои плюсы. Очень просто доказываются общие теоремы. Кроме того, сингулярные гомологии определены для произвольных топологических пространств, что при болезненной тяге к общности несколько успокаивает.

7.4. Степень отображения

Пусть имеется непрерывное отображение $f: |K_\alpha| \rightarrow |K_\beta|$, где K_α и K_β — ориентируемые n -мерные псевдомногообразия, например n -мерные сферы.

Поскольку (теорема 6.3.2)

$$H_n(K_\alpha) = H_n(K_\beta) = \mathbb{Z},$$

⁵⁾ Для увязки с обычным жизненным опытом под *сингулярным симплексом* более естественно подразумевать образ $\varphi(s^k)$, каковой, понятно, может быть вырожденным (сингулярным).

причем образующими групп $H_n(K_\alpha)$, $H_n(K_\beta)$ являются, соответственно, элементы

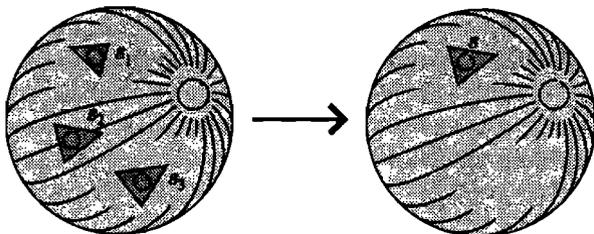
$$z_\alpha^n = \sum_i s_{\alpha i}^n, \quad z_\beta^n = \sum_i s_{\beta i}^n,$$

и $f_{*n} z_\alpha^n \in H_n(K_\beta)$, то

$$f_{*n} z_\alpha^n = \gamma z_\beta^n, \quad (7.7)$$

где γ — целое число, называемое *степенью отображения* f .

Геометрический смысл степени отображения довольно прозрачен. Поскольку γ в (7.7) одно и то же для любых цепей z_α^n , z_β^n , переводимых одна в другую, — то же самое γ будет и в случае, когда цепью z_β^n является один симплекс s . Допустим, в s переводятся три симплекса s_1 , s_2 , s_3 , как на нижеследующем рисунке.

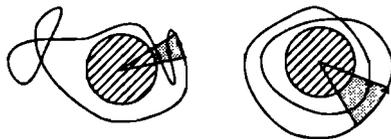


Иначе говоря, s_1 , s_2 , s_3 — прообразы s , причем с учетом ориентации в s переходит цепь $s_1 - s_2 + s_3$. Получается $\gamma = 1$. Будь ориентация s_2 такой же как у s_1 и s_3 , степень γ была бы равна трем ⁶⁾.

Визуально ситуацию можно представлять так. Скажем, отображение сферы S^2 на S^2 происходит в два этапа. Сначала S^2 преобразуется в некую замкнутую поверхность Ω , которая потом проецируется обратно на S^2 . Если даже Ω , будучи деформирована на S^2 , а потом растянута по S^2 разглаживанием складок, — окутывает S^2 всего один раз, — треугольничек на S^2 может иметь несколько прообразов, каковые должны суммироваться в цепь

⁶⁾ Разумеется, если рассматриваемое отображение не симплициально, для вычисления степени его нужно предварительно аппроксимировать симплициальным.

с учетом ориентаций, с плюсом или минусом. Число «окутываний» будет степенью γ . Нагляднее ситуация в \mathbb{R}^2 .



Граница заштрихованного круга B отображается сначала в некоторую замысловатую кривую, которая потом стягивается на B , и в первом случае (слева) окутывает B один раз, $\gamma = 1$, во втором — два раза, $\gamma = 2$. В выделенных секторах отмечены, для примера, симплексы — в данном случае это ориентированные отрезки.

Сказанное выше уместно сопоставить с тем, как степень отображения определяется в дифференциальной топологии. Пусть X, Y — гладкие ориентированные многообразия одинаковой размерности, причем X компактно, Y связно, и $f : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Пусть x — регулярная точка отображения f , т. е.

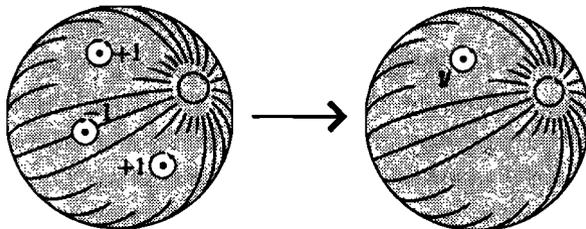
$$f'_x : T_x \rightarrow T_{f(x)}$$

линейный изоморфизм касательных пространств $T_x, T_{f(x)}$. Далее для регулярных значений y вводится величина⁷⁾

$$\deg(f; y) = \sum_{z \in f^{-1}(y)} \text{sign } f'_z, \quad (7.8)$$

каковая локально постоянна как функция от y , которая определена на открытом всюду плотном множестве (по *теореме Сарда*), и потому — $\deg(f; y)$ не зависит от y , являя собой степень $\deg f$.

Картинка, соответствующая (7.8), фактически совпадает с иллюстрацией в рамках симплициальной топологии после замены треугольников вихрями с подходящей закруткой.



⁷⁾ Значение $\text{sign } f'_z$ равно $+1$, если f'_z сохраняет ориентацию, и равно -1 , если f'_z изменяет ориентацию.

Остановимся теперь на элементарном приложении степени отображения. Пусть имеется некоторое отображение f сферы S^{n-1} в себя, *степень которого отлична от нуля*. Покажем, что такое отображение не может быть продолжено на шар B^n , ограничиваемый сферой S^{n-1} .

Поскольку шар B^n стягиваем, то его группа гомологий $H_{n-1}(B^n)$ тривиальна, а группа гомологий $H_{n-1}(S^{n-1})$ изоморфна группе \mathbb{Z} , т. е.

$$H_{n-1}(B^n) = 0, \quad H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}.$$

Предположим, отображение f продолжимо на B^n и

$$g : B^n \rightarrow S^{n-1}$$

— его продолжение. Пусть

$$h_{*(n-1)} : H_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(B^n)$$

гомоморфизм, индуцированный отображением вложения

$$h : S^{n-1} \subset B^n.$$

Поскольку $H_{n-1}(B^n) = 0$, то гомоморфизм $h_{*(n-1)}$ — нулевой. Поэтому

$$g_{*(n-1)}h_{*(n-1)} = 0.$$

С другой стороны,

$$g_{*(n-1)}h_{*(n-1)} = f_{*(n-1)} \neq 0,$$

что приводит к противоречию и завершает доказательство.

7.5. Числа Бетти и группа кручения

Элементами *групп гомологий (групп Бетти)* $H_r(K)$ являются суммы (комбинации) циклов

$$k_1 z_1^r + \dots + k_p z_p^r + m_1 x_1^r + \dots + m_s x_s^r. \quad (7.9)$$

Точнее говоря, z_i^r, x_j^r — представители классов гомологичных друг другу циклов. Разница между z_i^r и x_j^r заключена в том, что

цикл $k_i z_i^r$ ни при каком целом k_i не ограничивающий, тогда как $m_j x_j^r$ при некоторых $m_j > 1$ ограничивающий цикл, т. е. x_j^r — циклы с кручением. Соответственно любая группа H_r представляет собой сумму вида

$$H_r(K) = \mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z} + \text{tors}_r(K), \quad (7.10)$$

т. е. является абелевой группой с конечным числом образующих, см. теорему 10.11.2.

Число p_r свободных циклических слагаемых⁸⁾ в (7.10) называют рангом группы H_r , или числом Бетти размерности r . Число Бетти p_r представляет собой максимальное число гомологично независимых циклов⁹⁾ комплекса K .

На замкнутых поверхностях в \mathbb{R}^3 минимальное число $h(\Pi)$ неизбежно гомологично зависимых циклов называют порядком связности поверхности Π . Очевидно,

$$h(\Pi) = p_1 + 1.$$

В частности,

$$h(M_k) = 2k + 1, \quad h(N_k) = k + 1.$$

Отметим формулу Пуанкаре

$$\chi(K) = \sum (-1)^r p_r,$$

связывающую характеристику Эйлера с числами Бетти.

Что касается группы кручения $\text{tors}_r(K)$ конечного порядка m_r , в том числе нулевого, то ее устройству в теории абелевых групп предписывается регламент:

$$\text{tors}_r(K) = \mathbb{Z}_{f_1^r}^+ + \dots + \mathbb{Z}_{f_s^r}^+, \quad f_1^r \dots + f_s^r = m_r,$$

где f_j^r — так называемые коэффициенты кручения группы H_r .

⁸⁾ Число слагаемых в сумме $\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}$.

⁹⁾ Циклы x_1^r, \dots, x_q^r считаются гомологично независимыми, если никакая их сумма $t_1 x_1^r + \dots + t_q x_q^r$ не гомологична нулю хотя бы при одном $t_j \neq 0$.

7.6. Эйлерова характеристика

Эйлерова характеристика (см. раздел 1.13) в произвольной размерности определяется как

$$\chi(K) = \sum_r (-1)^r K_r, \quad (7.11)$$

где K_r — число r -мерных симплексов (либо клеток) в симплициальном (либо клеточном) комплексе K .

Как и в двумерном случае, характеристика (7.11) не зависит от разбиения и является топологическим¹⁰⁾ инвариантом самого многообразия.

В случае n -мерной сферы

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n.$$

Поскольку различные топологические инструменты нацелены на решение «одних и тех же» задач, многие результаты совпадают, но оказываются выражены на разных языках. Эйлерова характеристика (7.11) выражается с помощью *чисел Бетти*¹¹⁾

$$\chi(K) = \sum (-1)^r p_r,$$

а также *формулой Гаусса—Бонне*

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \oint K(x) d\sigma, \quad (7.12)$$

где никакая триангуляция не нужна, интегрирование в (7.12) происходит по самой замкнутой поверхности, и на передний план неожиданно выходит *гауссова кривизна* $K(x)$.

7.7. Число Лefшеца

Всякое симплициальное отображение $f : |K| \rightarrow |K|$, как отмечалось, индуцирует набор гомоморфизмов

$$f_{*,r} : H_r(K) \rightarrow H_r(K). \quad (7.13)$$

¹⁰⁾ А также гомологическим и гомотопическим инвариантом.

¹¹⁾ Обоснование в следующем разделе.

7.7.1. Величина

$$\Lambda_f = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \operatorname{trace}(f_{*r}) \quad (7.14)$$

называется числом Лefшеца симплициального отображения

$$f : |K| \rightarrow |K|.$$

В (7.14) $\operatorname{trace}(f_{*r})$ — след матрицы f_{*r} . Записать гомоморфизм f_{*r} в виде матрицы позволяет любой выбор базиса в $H_r(K)$.

Помимо гомоморфизмов (7.13) отображение $f : |K| \rightarrow |K|$ индуцирует также гомоморфизмы цепей

$$\widehat{f}_{*r} : L_r(K) \rightarrow L_r(K).$$

При этом совпадают величины (7.14) и

$$\Lambda_f = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \operatorname{trace}(\widehat{f}_{*r}), \quad (7.15)$$

что более-менее ясно при наличии «теоретико-группового опыта», но в принципе относительно легко устанавливается и без него. Факт совпадения величин (7.14) и (7.15) позволяет с выгодой маневрировать, выбирая ту или иную формулу.

7.7.2. Теорема. Если $\Lambda_f \neq 0$, то у симплициального отображения $f : |K| \rightarrow |K|$ существует неподвижная точка $x \in |K|$, $x = f(x)$.

◀ Доказательство просто. В силу $\Lambda_f \neq 0$ и (7.15), найдется r , для которого $\operatorname{trace}(\widehat{f}_{*r}) \neq 0$, откуда следует существование симплекса s'_α , переводимого отображением f в себя¹²⁾. Далее остается сослаться на теорему Брауэра. ▶

7.7.3. Число Лefшеца тождественного отображения

$$I : |K| \rightarrow |K|$$

равно эйлеровой характеристике комплекса $|K|$.

¹²⁾ В базисе, состоящем из самих симплексов s'_α , но не из их линейных комбинаций, матрица \widehat{f}_{*r} имеет лишь элементы $0, \pm 1$, и тогда из $\operatorname{trace}(\widehat{f}_{*r}) \neq 0$ вытекает существование ориентированного симплекса $s'_\alpha \in K$, переводимого отображением f либо в s'_α , либо в $-s'_\alpha$.

◀ Очевидно,

$$\text{trace}(f_{rr}) = p_r, \quad \text{trace}(\hat{f}_{rr}) = K_r,$$

где p_r — числа Бетти, K_r — число r -мерных симплексов в комплексе K .

Теперь из совпадения (7.14) и (7.15) вытекает

$$\chi(K) = \sum_r (-1)^r p_r = \sum_r (-1)^r K_r. \quad \blacktriangleright$$

Стандартные аппроксимационные конструкции (глава 6) позволяют перейти от симплицеальных к обычным отображениям, «сохраняя» предыдущие определения и выводы. Заметим также, что в силу *теоремы 6.5.1* Λ_f является гомотопическим инвариантом.

Аллилуйя числу Лефшеца не может обойтись, конечно, без упоминания *теоремы Лефшеца—Хопфа*¹³⁾:

7.7.4. *Если все неподвижные точки отображения $f: M \rightarrow M$ изолированы и невырождены, а M — размерно-однородный полиэдр, то*

$$\Lambda_f = \sum_j \text{ind}(f, x_j), \quad (7.16)$$

где суммирование идет по всем неподвижным точкам $x_j \in M$.

◀ Результат в комплексе с доказательством нуждается в разъяснении. Но при повышенной щепетильности на это уходит десяток страниц убористого текста. В то же время факт (7.16) относительно прозрачен. Если под f подразумевать уже симплицеальное приближение, то в размерности r многообразия M в триангуляции каждой неподвижной точке x_j будет отвечать свой симплекс s_j^r , переводимый в себя то ли с той же ориентацией — тогда $\text{ind}(f, x_j) = +1$ и у гомоморфизма на диагонали тоже стоит $+1$, — то ли с противоположной — тогда $\text{ind}(f, x_j) = -1$ и у гомоморфизма на диагонали стоит -1 . Таким образом, в данном случае диагональные элементы матрицы гомоморфизма в размерности r совпадают с индексами (из-за невырожденности неподвижных точек)¹⁴⁾, поэтому, собственно, то и другое оказывается *числом Лефшеца*. ▶

¹³⁾ См., например, [2].

¹⁴⁾ В низших размерностях все обнуляется по «граничным» соображениям.

Насчет индексов в (7.16) надо все же заметить, что под индексом неподвижной точки подразумевается *индекс нуля* (п. 2.8) векторного поля $x - f(x)$. В гладком случае индекс невырожденной неподвижной точки равен знаку детерминанта производной $(x - f(x))'_x$, т. е. ± 1 , в подходящих локальных координатах. Тут хотелось бы еще заметить, что (7.16) сохраняет силу не обязательно в условиях невырожденности неподвижных точек (и тогда индексы могут принимать любые целые значения), но в этом случае требуется столько уточнений и объяснений, что удобнее промолчать.

7.8. Градиентные потоки и теория Морса

Число Лефшеца — удобный инструмент при изучении касательных векторных полей и вообще потоков на гладких многообразиях M . Допустим, $U_t : M \rightarrow M$ — оператор сдвига по траекториям «хорошего» дифференциального уравнения, и поле $U_t x$ имеет на M только изолированные невырожденные положения равновесия. Все поля $U_t x$ при любом фиксированном t гомотопны друг другу¹⁵⁾, а значит, гомотопны тождественному $U_0 x \equiv x$. Но тогда в силу п. 7.7.3 и гомотопической инвариантности Λ_f

$$\forall t : \sum_j \text{ind}(U_t, x_j) = \chi(M), \quad (7.17)$$

где x_j — неподвижные точки U_t , т. е. сумма индексов любого векторного поля $U_t x - x$ на M (в том числе касательного¹⁶⁾) в оговоренных условиях равна *характеристике Эйлера* многообразия M , и от самого поля — не зависит.

Поскольку в ряду

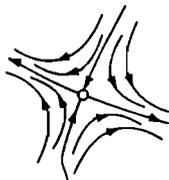
$$M_0, M_1, M_2, \dots \quad (M_0 = S^2)$$

нулевую характеристику Эйлера имеет лишь тор M_1 , то касательное поле без особых точек невозможно ни на одной замкнутой поверхности M_p , $p \neq 1$, а не только на сфере S^2 , что уже отмечалось в п. 2.11.3.

¹⁵⁾ Сама параметрическая запись служит деформацией.

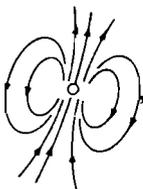
¹⁶⁾ В пределе касательного.

Подчеркнем, речь здесь идет о невырожденных равновесных точках x_j , индексы которых могут быть равны лишь ± 1 . На двумерных многообразиях это точки типа  $\Rightarrow \text{ind}(\cdot) = 1$,



$\Rightarrow \text{ind}(\cdot) = -1$. Фазовые портреты



или, скажем,  уже не подходят, поскольку индексы

тут выходят за рамки дозволенного.

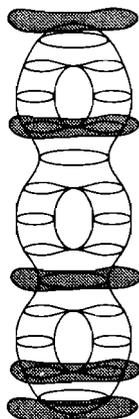
Соотношение (7.17) часто рассматривается применительно к градиентным потокам в *теории Морса*.

Гладкая скалярная функция $\varphi(x)$ на гладком компакте M называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены. По *лемме Морса* [5, т. 7] в окрестности невырожденной критической точки всегда можно указать локальную систему координат, в которой

$$\varphi[x(z)] = z_1^2 + \dots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \dots - z_n^2. \quad (7.18)$$

Разность $n - k$ в (7.18) называют *индексом Морса*.

Напомним, критическую точку называют невырожденной, если второй дифференциал (*гессиан* $\nabla^2 \varphi$) является невырожденной квадратичной формой. Функцию, имеющую вырожденные критические точки, всегда можно сколь угодно малым шевелением сделать *морсовской*. Критические точки при этом могут исчезать или разветвляться. Невырожденные критические точки устойчивы по отношению к малым шевелениям.



Если теперь $U_t x$ обозначает движение вдоль градиента $\nabla \varphi(x)$, то (7.17) можно переписать в виде ¹⁷⁾

$$\sum_k (-1)^k m_k = \chi(M), \quad (7.19)$$

где k *индекс Морса*, а m_k число критических точек индекса k .

¹⁷⁾ С учетом того, что обычный индекс нуля поля (7.18) равен $(-1)^k$.

Но (7.19) не лежит в фарватере теории Морса, гомологическая часть которой представляет собой технологию клеточного разбиения многообразия M с помощью функций $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ и последующим извлечением групповых характеристик на этой основе [13].

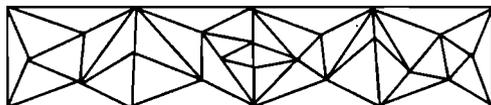
7.9. Относительные гомологии

При построении теории гомологий в качестве отправной точки берется, как правило, не одно многообразие, а пара (X, A) , при условии $A \subset X$. И если не сказано, зачем это нужно, мотивация остается невидимой, пока не догадаешься.

Первоначальным источником интереса к парам

$$(X, A), \quad A \subset X,$$

послужили многообразия X с краем A , при рассмотрении которых ту же роль, что и циклы, играют подмногообразия, опирающиеся на *край*.



Разумеется, некоторые выгоды от рассмотрения пар пространств возникают за пределами многообразий с краем, что собственно и подталкивает ряд авторов подняться на более высокий и менее понятный уровень абстракции. Целесообразнее, конечно, оставаться в наглядных обстоятельствах.

Внимательный анализ ситуации — при наличии в «багаже» теоретико-групповых инструментов — показывает, что вместо групп цепей $L(X)$, $L(A)$ тут надо отталкиваться от *группы относительных цепей*, представляющей собой фактор-группу

$$L_r(X, A) = L_r(X)/L_r(A),$$

каковая образует цепной комплекс, гомологии которого $H_r(X, A)$ называются *гомологиями пары*.

Взаимосвязь гомологий пары с обычными гомологиями так или иначе «расплывается», но в случае клеточных пространств имеет место следующий факт:

$$H_r(X, A) = H_r(X/A), \quad r = 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

Похожим образом в теории гомотопий вводятся *относительные гомотопические группы* [6].

7.10. Точные последовательности

Для вычисления групп гомологий и гомотопий¹⁸⁾ в топологии широко используется инструмент точных последовательностей, имеющий сугубо теоретико-групповое происхождение.

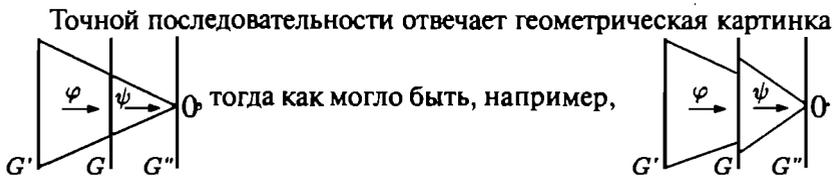
Напомним, последовательность гомоморфизмов

$$G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G'' \quad (7.21)$$

называют *точной*, если образ $\text{im } \varphi = \varphi(G')$ совпадает с ядром $\ker \psi = \{x : \psi(x) = 0\}$. Тот же принцип используется и для более длинных последовательностей

$$G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_n,$$

в том числе бесконечных, в одну или обе стороны. При этом точную последовательность определяет согласованность всех звеньев: $\text{im } \varphi_{j-1} = \ker \varphi_j$.



Для контроля над ситуацией здесь в голове надо держать теорему 10.4.1 о гомоморфизме: *если гомоморфизм φ отображает G' в G , то $H = \ker \varphi$ — инвариантная подгруппа в G' , а группа G изоморфна фактор-группе G'/H .*

¹⁸⁾ И вообще для выявления групповых характеристик многообразий и отображений.

В частности, если $\ker \varphi = 0$, то группа G изоморфна группе G' . А если $\text{im } \varphi = 0$, — это означает, что вся группа G' является ядром φ . Соответственно, если точна последовательность

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \rightarrow 0, \quad (7.22)$$

то это означает изоморфизм $G_1 \sim G_2$.

Если же точна последовательность

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \rightarrow 0, \quad (7.23)$$

то это, как легко убедиться, помимо $\text{im } \varphi = \ker \psi$, означает *инъективность* φ и *сюръективность* ψ , откуда следует

$$G_2/G_1 \sim G_3. \quad (7.24)$$

В ситуациях $0 \rightarrow G$ и $G \rightarrow 0$ гомоморфизмы над стрелочками не указываются, поскольку они очевидны (тривиальные). Но в точных последовательностях часто опускают и нетривиальные гомоморфизмы, когда основной интерес представляют взаимоотношения групп типа (7.24). Каковы гомоморфизмы в (7.23) — неважно, главное, что последовательность точна¹⁹⁾, и это обеспечивает справедливость (7.24), либо $G_1 \sim G_2$ в случае (7.22).

До сих пор в сказанном участия топологии нет. Топология вплетается, когда начинают рассматриваться *цепные комплексы* и другие конструкции гомологического и гомотопического толка. Однако цепные комплексы с граничными операторами не обязаны быть точными последовательностями, хотя — могут, и тогда все группы гомологий тривиальны. Гомоморфизмы в теории гомологий выбираются более разнообразно. Часто используются короткие точные последовательности типа (7.23):

$$0 \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \rightarrow 0, \quad (7.25)$$

¹⁹⁾ Т. е. подходящие гомоморфизмы существуют.

где i_* — вложение, j_* — факторизация, что равносильно²⁰⁾

$$H_n(X, A) = H_n(X)/H_n(A).$$

Интересно, что короткие цепочки (7.25) в соседних размерностях с помощью специального гомоморфизма δ_* — описание его конструкции есть в любом учебнике — удается замкнуть в длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots, \quad (7.26)$$

в записи которой гомоморфизмы обычно опускают за ненадобностью:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \dots \quad (7.27)$$

Простейшие приемы использования точных последовательностей проиллюстрированы в главе 8.

7.11. Когомологии

Теория когомологий сопряжена (двойственна) теории гомологий. По заданному цепному комплексу (7.2), т. е.

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots, \quad (7.28)$$

определяется группа коцепей²¹⁾ C^n как группа всех гомоморфизмов, действующих из C_n в \mathbb{Z} либо в другую числовую группу G , см. замечание в конце раздела. Таким образом, каждая n -мерная коцепь является функционалом, заданным на группе C_n .

Примером такого функционала может служить интеграл по линейной комбинации (7.4) n -мерных клеток, откуда ясна связь теории когомологий с теорией дифференциальных форм [5, т. 11].

Если функционал $y(x)$, принимающий значения коцепи y на цепи x , записывать в виде

$$y(x) = \langle y, x \rangle,$$

²⁰⁾ См. (7.20).

²¹⁾ В обозначении индекс перемещается вверх.

то определение *кограничного оператора* $\delta_n : C^{n-1} \rightarrow C^n$ принимает форму определения *сопряженного линейного оператора*:

$$\langle \delta_n y, x \rangle = \langle y, \partial_n x \rangle, \quad x \in C_n, \quad y \in C^{n-1}. \quad (7.29)$$

Из (7.29) и $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ следует $\delta_{n+1} \delta_n = 0$, — поэтому *коцепной комплекс*

$$\dots \leftarrow C^{n+1} \xleftarrow{\delta_{n+1}} C^n \xleftarrow{\delta_n} C^{n-1} \leftarrow \dots \quad (7.30)$$

является по сути (по определению) цепным, разве что с иной нумерацией и направлением стрелок, хотя стрелки можно и перенаправить. *Группы n -мерных коциклов и кограниц* определяются соответственно как

$$Z^n = \ker \delta_{n+1}, \quad B^n = \operatorname{im} \delta_n.$$

7.11.1. *Факторгруппа $H^n = Z^n / B^n$ называется n -мерной группой когомологий коцепного комплекса (7.30).*

Пусть M — гладкое многообразие, C^n — пространства дифференциальных n -форм на M , δ_n — операторы внешнего дифференцирования²²⁾. В этом случае группы когомологий комплекса (7.30) называются *группами когомологий де Рама*²³⁾.

Вникать в когомологии далее только лишь с ознакомительной целью — особого смысла нет. Достаточно успокоиться на мысли, что это стандартный «двойственный трюк» по отношению к гомологиям, приводящий иногда к некоторым выгодам.

Замечание. Коэффициенты в определении цепи (7.4) бывает удобно считать принимающими значения не обязательно в \mathbb{Z} , а в какой-либо вспомогательной группе G , — например, вещественными, либо комплексными, либо вычетами по модулю. То же самое можно сказать о значениях функционалов $\langle y, x \rangle$. В этом случае теории гомологий и когомологий протекают под знаком группы G .

²²⁾ Поднимающие размерность, т. е. переводящие k -формы в $(k+1)$ -формы, и удовлетворяющие требованию $\delta_{n+1} \delta_n = 0$, см. [5, т. II].

²³⁾ Если начинать с дифференциальных форм, когомологии выглядят проще и естественнее гомологий.

Если G — поле [5, т. 8], тогда группа цепей с коэффициентами в G образует линейное векторное пространство над G , а группа коцепей со значениями в G — сопряженное к нему пространство, со всеми вытекающими последствиями [5, т. 3]. Но если G — не поле, например, $G = \mathbb{Z}$, возникают трудности, связанные с кручением.

7.12. Взаимосвязь гомологий и гомотопий

Гомологическая и гомотопическая методики идут параллельными курсами, временами расходясь и сближаясь. Рукава теории разные, но близость постоянно подталкивает к сравнению. Отличия убедительно проявляются на n -мерной сфере. Все $H_m(S^n)$ при $m > n$ — тривиальны, тогда как гомотопические группы $\pi_m(S^n)$ ведут себя очень странно (раздел 5.5) с точки зрения здравого смысла. Однако для $m \leq n$ — группы совпадают. Последнее в известной степени является общим правилом.

7.12.1. Теорема Гуревича. *У связного многообразия первая нетривиальная гомологическая группа $H_n(M)$ и первая нетривиальная гомотопическая — $\pi_n(M)$ в случае $n > 1$ — совпадают (изоморфны)²⁴. Если же $n = 1$, то*

$$H_1(M) = \pi_1(M) / [\pi_1(M), \pi_1(M)],$$

где $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ — коммутант [5, т. 8] группы $\pi_1(M)$.

²⁴ При этом: $H_k(M) = 0 \Leftrightarrow \pi_k(M) = 0, 1 \leq k < n$.

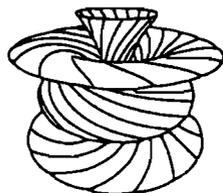
Глава 8

Расслоения

*Не в силах внешние умы
Вообразить живьем
Ту смесь курорта и тюрьмы,
В которой мы живем.*

И. Губерман

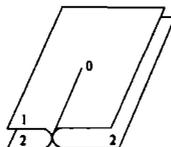
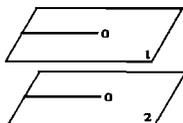
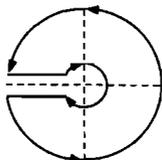
Понятие расслоенного пространства работает, главным образом, в самой топологии. «За пределами» — является сбоку бантиком, но, давая намек о приобщенности к высокой науке, имеет притягательную силу. Тем более что «безжалостные» изложения порождают у неопытного читателя надежды, связанные с возможностью кое-что приспособить на своем «огороде».



Глава преследует две цели: дать легкий намек о сути дела и привлечь внимание к *расслоениям Хопфа*, каковые являются принципиальным феноменом, свидетельствующим о пробелах геометрической интуиции.

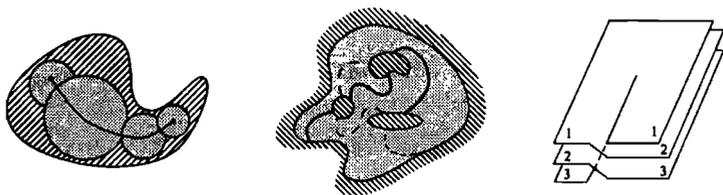
8.1. Суть идеи

Удобств \mathbb{R}^n не всегда хватает. Общеизвестный прецедент — ситуация с многозначностью аналитических функций, породившая римановы пространства [5, т. 9], где возникают разрезы и перекрестное склеивание берегов по определенным правилам ¹⁾.



¹⁾ В результате чего многозначность «растворяется».

Все это можно воспринимать, конечно, как проблему благоустроенности, не имеющую принципиального значения. Однако математическая мысль нуждается в комфорте, и лавировать среди исключений не любит. Главный инструмент в ТФКП — аналитическое продолжение функций — в условиях многозначности перестает работать. Вернее, работает, но требует неуклюжих оговорок, и если путь не близок, до цели не доберешься. Перевод театра действий на римановы поверхности, безусловно, имеет свои минусы, зато ликвидирует многозначность — и ТФКП оживает.



Разговор к тому, что технические усовершенствования далеко не второстепенная вещь. Шероховатости часто не позволяют обратиться замыслы в теорию. Поэтому разные «топологические штучки» иногда принципиально расширяют горизонты. Однако кое-что остается за пределами общего образования — и слава Богу, кстати говоря.

Одна из «закадровых» топологических магистралей — *расслоенные пространства*. Штука весьма полезная как инструмент внутренней кухни. Но «за пределами» малоэффективна. Тем не менее ей присущ ореол таинственности — вплоть до соблазна хоть как-то пристроить расслоения в своей диссертации.

Идея, лежащая в основе, тут достаточно проста. Пространство переменных E неким способом разрезается на слои — с целью извлечения некоторой выгоды.

Хорошо известным примером расслоения является *прямое произведение* $X \times Y$, каковым называют множество упорядоченных пар

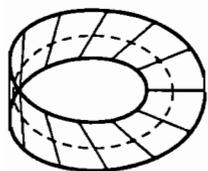
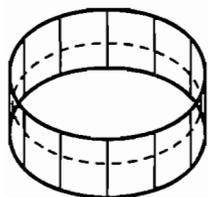
$$(x, y) \in X \times Y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

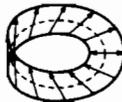
Скажем, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$. Тор можно представить в виде прямого произведения двух окружностей

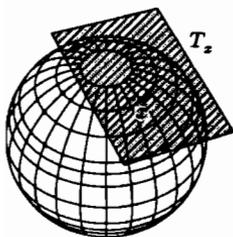


а $M \times N$, где M и N соответственно m - и n -мерное многообразие — тоже многообразие размерности $m + n$.

Разумеется, все шито белыми нитками. Устройство $X \times Y$ как бы специально заготовлено под разрезание. Каждой точке $x \in X$ отвечает слой Y .



Но встречаются и другие ситуации. Скажем, лист Мёбиуса можно представлять как окружность (пунктирная на рисунке), к точкам которой подвязаны слои в виде отрезков. Однако так же представимо и обыкновенное кольцо. Локально оба представления эквивалентны, с точностью до гомеоморфизма. Но в целом — принципиально отличаются, что особенно ясно становится, если слоям придать направление,  Визуально понятно, что в случае кольца расслоение сводится к *прямому произведению*, в случае Мёбиуса — не сводится.



Другой пример — многообразие M с подвязанными в каждой точке $x \in M$ касательными пространствами T_x в качестве слоев. В случае $M = S^2$ опять-таки ясно, что конструкция к *прямому произведению* глобально не сводится.

Хотя формальные определения еще не даны, из сказанного вырисовывается следующая картина. Речь идет о расслоениях, локально устроенных как *прямые произведения*. Причем конгломерат, скажем, S^2 с касательными плоскостями T_x — вовсе

не учитывает расположения T_x в пространстве. Касание здесь из другой песни. Все $T_x \equiv \mathbb{R}^2$ — и весь сказ²⁾. То же самое можно сказать о расслоении листа Мёбиуса. Слои — суть отрезки, неважно как расположенные. Неважно в контексте расслоения. Поэтому создается впечатление, что здесь нет ничего нового по сравнению с обычными присказками классического анализа о касательных пространствах. Впечатление с точки зрения анализа в основном верное. Расслоенные пространства эффективны в топологии. Расслоение дает другой способ описания многообразий, что оказывается плодотворным в рамках группового анализа гомотопического и гомологического толка.

8.2. Формальные определения

Наиболее точные определения — самые плохие, потому что слишком многое учитывают. Поэтому с точки зрения понимания лучше начинать с «плохих» определений.

8.2.1. Определение. *Расслоением называется произвольное сюръективное отображение³⁾ $p : E \rightarrow B$, где топологические пространства E, B и само p называют соответственно **пространством, базой и проекцией расслоения**.*

Определение 8.2.1, в принципе, бессодержательно, ибо расслоением названо просто любое отображение. Правда, введены новые термины и акцентировано внимание на разбиении E на *слои* $p^{-1}(x)$ при «проектировании» E на B с помощью p .

Дальнейшая регламентация обычно опирается на предположения об одинаковости *слоев*⁴⁾,

$$\forall x \in B : p^{-1}(x) = F,$$

и о локальной тривиальности p .

²⁾ Строгие определения обходят неприятность, предполагая гомеоморфность $T_x \sim \mathbb{R}^2$. Но суть дела это не меняет, поскольку расположение T_x в \mathbb{R}^3 все равно остается за кадром.

³⁾ То есть отображение на. В другой аранжировке *расслоением* именуют тройку (E, B, p) .

⁴⁾ Точнее, гомеоморфности всех $p^{-1}(x)$ *типичному слою* F .

8.2.2. Определение. Расслоение $p : E \rightarrow B$ называется локально тривиальным, если по любому $x \in B$ можно указать окрестность U , прообраз которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфен $U \times F$, причем гомеоморфизм

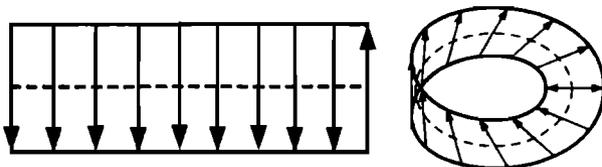
$$\varphi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$$

в композиции с p дает тривиальное расслоение $\tilde{p} = p \circ \varphi : U \times F \rightarrow U$, $\tilde{p}(u, f) = u$.

Другими словами, расслоение локально тривиально, если локально эквивалентно⁵⁾ прямому произведению. Как правило, локальная тривиальность автоматически подразумевается, когда речь заходит о расслоениях.

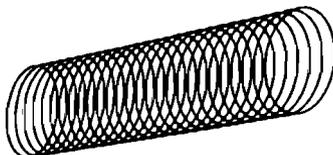
Примеры

• *Лист Мёбиуса*, о котором речь шла уже в предыдущем разделе. Здесь подчеркнем дополнительно, что контекст расслоений не обязывает говорить о «листе» как о готовой модели, вложенной в \mathbb{R}^3 . Вполне годится прямоугольник с вертикальными слоями и средней горизонтальной линией в качестве базы, у которого отождествлены боковые ребра в противоходе.



Средняя линия при отождествлении ребер замыкается в окружность S^1 — и получается расслоение над S^1 с типичным слоем $F = [0, 1]$.

• *Бутылка Клейна* — есть расслоение над базой S^1 с типичным слоем $F = S^1$. По технологии перехода к фактор-пространству «бутылку» можно представлять как отождествление (склеивание) концов трубки.



Обычное склеивание, позволяющее обойтись без самопересечения, дает тор; склеивание с синхронизацией противохода краев — бутылку Клейна.

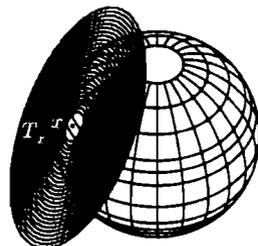
⁵⁾ Расслоения $p_1 : E_1 \rightarrow B$ и $p_2 : E_2 \rightarrow B$ эквивалентны, если $p_1 = p_2 \circ \varphi$, где $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ — гомеоморфизм.

Заметим, что расслоение над S^1 с типичным слоем $F = [0, 1]$ помимо листа Мёбиуса может давать также простое кольцо и другие многократно перекрученные ленты k - L . А расслоение над S^1 с типичным слоем $F = S^1$ может давать как тор, так и бутылку Клейна. Поэтому само по себе расслоение не является волшебной палочкой, которая избавляла бы от необходимости ломать голову над устройством многообразия. Выигрыш состоит в другом. Представление объекта в виде расслоенного пространства облегчает вычисление топологических групп, т. е. групп многообразия E по характеристикам расслоения (E, B, F, p) . Например, в естественных условиях *характеристики Эйлера* пространств (E, B, F) оказываются связаны соотношением

$$\chi(E) = \chi(B)\chi(F).$$

В частности, эйлерова характеристика прямого произведения равна произведению эйлеровых характеристик.

Изучение векторных полей на гладких многообразиях M естественным образом инспирирует расслоения с касательными пространствами T_x в качестве слоев. Это так называемые *векторные расслоения*, в которых, по определению, каждый слой снабжен строением векторного пространства. Простейший пример $M = S^2$ уже достаточно интересен.



8.3. Расслоения Хопфа

Расслоения могут быть не только следствием рутины, но и предметом неожиданного открытия. К таковым можно отнести локально тривиальные расслоения сфер:

$$p: S^3 \rightarrow S^2, \quad p: S^7 \rightarrow S^4, \quad p: S^{15} \rightarrow S^8, \quad (8.1)$$

открытые Хопфом (1935).

Для описания первого расслоения $p: S^3 \rightarrow S^2$ сферу S^3 удобно представлять как единичную сферу в \mathbb{C}^2 , т. е.

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,$$

где обе комплексные координаты $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, а сферу S^2 — как проективную прямую $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$ (с точностью до гомеоморфизма), т. е. как совокупность лучей, проходящих через (z_1, z_2) . Пары (z_1, z_2) могут быть нормированы делением на $|z_1|^2 + |z_2|^2$.

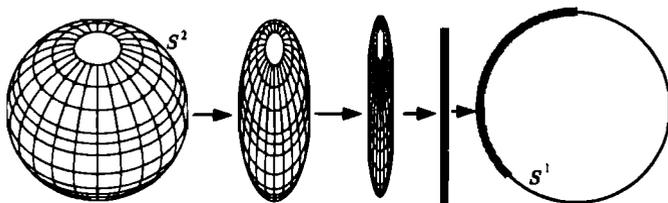
Прообраз $p^{-1}(z_1, z_2)$ любой точки $(z_1, z_2) \in S^3$ состоит из точек вида $(\lambda z_1, \lambda z_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. Таким образом S^3 расслаивается на большие окружности $S^1 \subset S^3$. База — S^2 .

Тут, конечно, надо было заметить и доказать локальную тривиальность этого расслоения (см., например, [23]), на чем мы не останавливаемся из-за целевых установок изложения⁶⁾.

В том же духе S^n над S^m в общем случае не расслаиваются. Расслоения Хопфа $p : S^7 \rightarrow S^4$ и $p : S^{15} \rightarrow S^8$ строятся аналогично предыдущему с помощью *кватернионов* и *чисел Кэли*. Интересно, что все хопфовские отображения не гомотопны нулю (постоянному отображению).

Неопытный читатель едва ли оценит сказанное, хотя академические издания по топологии в лучшем случае дают именно такой комментарий к *отображениям Хопфа* (8.1). Для акцента тут не хватает контекста. Отображение $p : S^3 \rightarrow S^2$ удивительно по следующим причинам.

Любое отображение сферы в окружность $S^2 \rightarrow S^1$ можно представлять как сплющивание S^2 в одномерную колбаску с последующим укладыванием оной на S^1 .



⁶⁾ В томе многие подробности опущены по аналогичной причине. Заходя во все хижины, об африканском континенте впечатления не составишь.

«Колбаска», понятное дело, может быть по S^1 стянута в точку⁷⁾. Поэтому любое отображение $f : S^2 \rightarrow S^1$ гомотопно постоянному (гомотопно нулю). Соответственно группа $\pi_2(S^1)$ тривиальна. И вообще, все группы $\pi_n(S^1)$ при $n > 1$ тривиальны.

На этом фоне математики долгое время были уверены, что любое отображение $S^n \rightarrow S^m$ при $m < n$ гомотопно постоянному, и нетривиальны только группы $\pi_n(S^n)$. Интуитивно чувствовалось, что с точки зрения разнообразия отображений понижение размерности образа играет в данном случае пагубную роль. Тут открытие Хопфа и явилось как гром среди ясного неба. Нашлось отображение⁸⁾ $p : S^3 \rightarrow S^2$, негомотопное нулю, откуда, как оказалось (см. следующий раздел), вытекал совершенно неожиданный дотоле факт нетривиальности группы $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

По поводу *хопфовских отображений* (8.1) стоит заметить, что несмотря на свою гомотопическую нетривиальность (негомотопность нулю), они индуцируют нулевые во всех размерностях гомоморфизмы групп гомологий и когомологий. Это демонстрирует в частности принципиальную недостаточность гомотопических инструментов для решения задач гомотопической классификации отображений.

8.4. Поднятие гомотопии

Говорят, что отображение $f^* : Z \rightarrow E$ клеточного пространства Z в пространство расслоения $p : E \rightarrow B$ является *поднятием отображения* $f : Z \rightarrow B$, если $pf^* = f$. В этом случае говорят также, что f^* *накрывает* f .

8.4.1. Определение. *Расслоение обладает свойством накрывающей гомотопии, если для любого клеточного пространства Z любая гомотопия $f_t : Z \times [0, 1] \rightarrow B$ по любому $f_0 : Z \rightarrow E$ поднимается до гомотопии $H_t : Z \times [0, 1] \rightarrow E$, $H_0 = f_0$.*

⁷⁾ Даже если уложена на S^1 внахлест.

⁸⁾ Равно как и два других в (8.1).

8.4.2. Теорема. *Всякое локально тривиальное расслоение обладает свойством накрывающей гомотопии⁹⁾.*

Из теоремы 8.4.2 извлекается следующий полезный факт.

8.4.3. Гомоморфизмы

$$\pi_k(E, F) \rightarrow \pi_k(B)$$

являются изоморфизмами.

Поэтому связанная с парой пространств (E, F) точная последовательность¹⁰⁾

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(E, F) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \quad (8.2)$$

в случае расслоения принимает вид

$$\dots \rightarrow \pi_n(F) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \pi_n(B) \rightarrow \pi_{n-1}(F) \rightarrow \dots \quad (8.3)$$

Возьмем для примера расслоение Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. Выделяя в (8.3) фрагмент

$$\pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3), \quad F = S^1,$$

в силу

$$\pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = 0$$

имеем

$$\pi_2(S^2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Фокусируя внимание на другом участке (8.3):

$$\pi_3(S^1) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_2(S^1),$$

и учитывая $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = 0$, получаем (см. раздел 8.3)

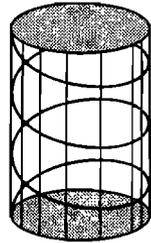
$$\pi_3(S^3) = \pi_3(S^2) = \mathbb{Z}. \quad (!)$$

⁹⁾ Теория расслоенных пространств *Серра* [23, 24] исходит из более общих определений (не предполагая «локальную тривиальность»), и там используется аксиома о накрывающей гомотопии, подменяющая результат 8.4.2 в различных построениях.

¹⁰⁾ Точная последовательность (8.2) строится аналогично (7.26).

8.5. Накрытия

Локально тривиальное расслоение $p: E \rightarrow B$ со связными E , B и дискретным слоем (состоящим из изолированных точек) является *накрытием*. Вертикальная проекция *винтовой линии* E (конечной с целым числом оборотов либо бесконечной) на окружность B дает пример накрытия.



Разбиение E на целое или бесконечное число кусков (*листов*), гомеоморфных B , позволяет говорить о k -листных и бесконечнолистных накрытиях. В естественных предположениях имеется связь между фундаментальными группами ¹¹⁾ $\pi_1(E)$ и $\pi_1(B)$, а также взаимосвязь возможных накрытий $E \rightarrow B$ с подгруппами фундаментальных групп ¹²⁾. Подобная родственность — одна из главных причин интереса к накрывающим отображениям.

Примеры накрытий

- Прямая \mathbb{R} бесконечнолистно накрывает окружность,

$$\{\cos t, \sin t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- *Лист Мёбиуса* накрывается двойным листом Мёбиуса, см. раздел 1.5.



Возникающая здесь метаморфоза оказывается общим правилом: *всякая односторонняя поверхность двулистно накрывается некоторой двусторонней поверхностью*.

- Сфера S^k накрывает проективное пространство $\mathbb{P}\mathbb{R}^k$.
- Поверхность N_q накрывается сферой с $q - 1$ ручками.

¹¹⁾ Например, если E k -листно накрывает B и $\pi_1(E)$ имеет конечный порядок n , то порядок $|\pi_1(B)| = kn$.

¹²⁾ По любой подгруппе $G \subset \pi_1(B)$ можно указать такое накрытие $p: E \rightarrow B$, что $p_*\pi_1(E) = G$.

Аппаратные формальности

*Шел себе в баню. По дороге
засмотрелся, познакомился, же-
нился. Так в баню и не попал.*

Привходящие обстоятельства всегда уводят в сторону и превращаются в самостоятельную головную боль. Феномен выразительно проявляется в топологии, где «резиновым устремлениям» противостоит трясина сопутствующих вопросов, уводящая мысль из *топологии Пуанкаре* [19] в безбрежный океан *общей топологии* [11].



9.1. Истоки непрерывности

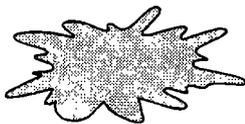
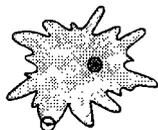
Явление непрерывности возникает в анализе задолго до осознания топологических потребностей. Поэтому топология начинает развиваться на готовой базе метрической идеологии, которая в основных чертах сводится к введению понятия метрики с последующим ее приспособлением для изучения сходимости. Для первичных помыслов хватает вообще-то евклидова пространства, но тенденция «объять необъятное» толкает в пропасть обобщений. Напомним опорные вехи стандартного пути ¹⁾.

- *Открытым (замкнутым) шаром* $B(r, y)$ радиуса $r > 0$ с центром y в метрическом пространстве ²⁾ (X, ρ) называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x, y) < r$ ($\leq r$).

¹⁾ Проблематика топологических пространств и непрерывных отображений подробно затрагивается в [5, т. 5], но ключевые моменты в данном контексте целесообразно иметь под рукой, причем некоторые мелочи даже требуют расшифровки.

²⁾ Метрика — функционал $\rho(x, y)$ на парах элементов, удовлетворяющий требованиям:
• $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, • $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, • $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

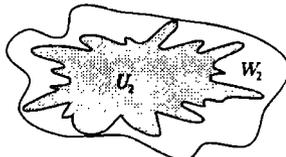
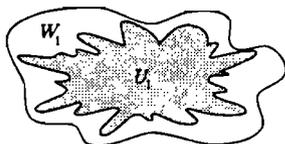
- *Окрестностью* точки $z \in X$ называется любой открытый шар с центром в этой точке, а ε -окрестностью $z \in X$ — шар $\{x : \rho(x, z) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
- Элемент $u \in X$ считается *предельной точкой* множества $U \subset X$, если любая окрестность u содержит хотя бы одну точку из U помимо самой u .
- *Внутренняя точка* $u \in U$ определяется наличием окрестности, целиком лежащей в U .
- Множество $U \subset X$ *открыто*, если вместе с каждой точкой $u \in U$ оно содержит некоторую окрестность u , и — *замкнуто*, если содержит все свои предельные точки.
- Множество \bar{U} , полученное присоединением к U всех его предельных точек, называется *замыканием* U .



- Объединение **любого** числа и пересечение **конечного** числа открытых множеств есть открытое множество.
- Объединение **конечного** числа и пересечение **любого** числа замкнутых множеств — замкнутое множество.

9.1.1. Теорема отделимости. Если замкнутые множества $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ не пересекаются, то существуют два открытых множества W_1 и W_2 , таких что

$$U_1 \subset W_1, \quad U_2 \subset W_2 \quad \text{и} \quad W_1 \cap W_2 = \emptyset.$$



9.1.2. Определение. Метрическое пространство X считается *связным*, если оно не представимо в виде объединения двух открытых непересекающихся множеств.

Далее вводится понятие *сходимости*³⁾, и на его основе — непрерывности. У стандартного определения, правда, есть ахиллесова пята: опора на предельную точку x , существование которой априори неизвестно. В то же время ясно, что сходимость в некотором роде является внутренним свойством последовательности. И «по дороге в баню» опять приходится отвлекаться:

³⁾ Последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x \in X$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x, x_n) = 0$.

9.1.3. Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $n, m > N$.

На вещественной прямой работает **критерий Коши**: последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ сходится в том случае, когда она фундаментальна. В произвольном метрическом пространстве (X, ρ) это уже не так. Принципиальную роль играет полнота⁴⁾: пространство (X, ρ) полно, если любая фундаментальная последовательность сходится в X .

9.1.4. Теорема о вложенных шарах. В полном метрическом пространстве пересечение любой последовательности замкнутых, вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, непусто.

Как ни удивительно, но без требования $r_n \rightarrow 0$ пересечение всех $\bar{B}(r_k, x_k)$ может оказаться пустым. Если речь идет о банаховом пространстве, то условие $r_n \rightarrow 0$ необязательно, см. [5, т. 5].

9.2. Топологический подход

Метрическая конструкция в топологическом ракурсе выглядит несколько противоестественно, потому что топологии нет дела до расстояний — и неясно, зачем с них начинать. Тогда можно стать на аксиоматическую точку зрения, каковая освобождает от необходимости иметь дело с непринципиальными деталями.

9.2.1. Определение. Топологическим пространством называется множество X , в котором выделено семейство τ открытых подмножеств⁵⁾, удовлетворяющее двум требованиям:

- (i) Само X и пустое множество \emptyset принадлежат τ .
- (ii) Сумма любого и пересечение конечного числа множеств из τ принадлежат τ .

Если τ задавать метрически, то овчинка не стоит выделки. Однако не всякая топология метризуема. Примеры см. в [5, т. 5]. Там же обсуждается мотивация рассмотрения неметризуемых пространств.

⁴⁾ Обоснование полноты пространства — серьезная задача. Редко — простая, чаще — сложная, о чем свидетельствует пример вещественной прямой, полнота которой была установлена в XIX веке в результате нелегких изысканий, см. [5, т. 1] — о дедекиндовых сечениях.

⁵⁾ Семейство τ называют *топологией*, что в известной степени является терминологической накладкой.

На одном и том же множестве X могут быть заданы разные топологии. Говорят, что топология τ_2 *слабее* топологии τ_1 , и пишут $\tau_2 \subset \tau_1$, если

$$\Omega \in \tau_2 \Rightarrow \Omega \in \tau_1.$$

Какова бы ни была совокупность подмножеств X , существует *минимальная* (по включению) *топология* ее содержащая.

Семейство $\hat{\tau} \subset \tau$ называется *базой* топологии τ , если любой элемент из τ представим в виде объединения элементов из $\hat{\tau}$. В метрическом пространстве базу образуют открытые шары.

Окрестностью точки $x \in X$ объявляется любое открытое множество, содержащее эту точку. Пространство (X, τ) называется **хаусдорфовым** (как и топология τ), если у различных точек существуют *непересекающиеся* окрестности ⁶⁾.

При изучении топологических пространств употребительны различные градации *отделимости*. Наиболее жесткая из них — требует существования непересекающихся окрестностей у непересекающихся замкнутых множеств. В этом случае пространство считается *нормальным*. Все метрические пространства нормальны (теорема 9.1.1). Требование *хаусдорфовости* менее жестко.

Множество $U \subset X$ определяется как *замкнутое*, если его дополнение $X \setminus U$ открыто. *Замыканием* \bar{U} считается наименьшее, по включению, замкнутое множество, содержащее U . В *хаусдорфовых пространствах* точки, равно как и *счетные их множества*, — *замкнуты*.

Система θ замкнутых множеств *похожа* на τ :

- Само X и пустое множество \emptyset принадлежат θ .
- Сумма *конечного* и пересечение *любого* числа множеств из θ принадлежат θ .

Перестановка «конечного» и «любого» не позволяет в общем случае объявить замкнутые множества открытыми.

9.2.2. Определение. *Множество $K \subset X$ называется компактным, если каждое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.*

9.2.3. Определение. *Пространство X называется связным, если в его топологии нет, кроме X и \emptyset , других множеств, одновременно открытых и замкнутых.*

⁶⁾ При этом говорят об *аксиоме отделимости Хаусдорфа*. Все метрические пространства хаусдорфовы.

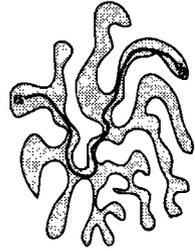
Характеристическое свойство: *связное пространство нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых непустых множеств.*

9.2.4. При непрерывном отображении образ связного X — *связен.*

9.2.5. Определение. Пространство X *линейно связно*, если для любых $a, b \in X$ существует непрерывное отображение

$$P : [0, 1] \rightarrow X,$$

такое что $P(0) = a$, $P(1) = b$, т. е. любые две точки могут быть соединены непрерывной кривой, целиком лежащей в X .



9.2.6. *Линейная связность влечет за собой связность. Обратное неверно.*

Объединение графика функции

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1]$$

с вертикальным отрезком $[-1, 1]$ на оси y дает пример связного множества, не обладающего линейной связностью.

9.3. Фактортопология

Любое отношение эквивалентности \sim на множестве X приводит к разбиению X на классы Θ_α эквивалентных элементов,

$$X = \bigcup_{\alpha} \Theta_\alpha.$$

Семейство классов $\{\Theta_\alpha\}$ называют *фактормножеством* множества X по отношению \sim , и обозначают X/\sim . Топология (*фактортопология*) в $X/\sim = \{\Theta_\alpha\}$ вводится естественным образом. Множество U открыто в X/\sim , если его прообраз открыт в X .

Для начала полезно вспомнить переходы к фактортопологии в функциональном анализе. По заданному линейному многообразию $X_0 \subset X$ линейное пространство X разбивается на *классы смежности* (множества эквивалентных элементов) L . Два элемента полагаются эквивалентными в том случае, когда $x_1 - x_2 \in X_0$. В данном случае совокупность классов смежности,

фактор-пространство X/X_0 , наделяется дополнительно структурой линейного пространства [5, т. 5]. Размерность фактор-пространства X/X_0 (конечная или бесконечная) называется *коразмерностью*, или *дефектом*, подпространства X_0 в пространстве X .

Описанный механизм широко используется при изучении измеримых функций, отождествляемых на множествах нулевой меры. Тогда в качестве X_0 берется множество функций, равных нулю почти всюду.

При изучении линейных операторов в банаховом пространстве E рассматривают фактор-пространство соек $A = E/\mathbf{R}_A$, называемое *коядром* оператора A , — где \mathbf{R}_A множество элементов $y = Ax$.

В теории многообразий фактортопологии возникают на основе различных «склеек», каковые фактически являются отождествлением элементов. Достаточно вспомнить попарную склейку про-

тивоположных сторон квадрата , в результате которой

образуется тор, см. (1.4), а также склеивание одной пары противоположных сторон квадрата с учетом встречного направления,



, приводящее к образованию *листа Мёбиуса*. При этом

речь не идет о каком-либо скручивании квадрата в объемлющем пространстве. Для возникновения фактортопологии наличие «среды» необязательно.

9.4. Непрерывные отображения

Определения сходимости и непрерывности в чисто топологическом варианте легко освобождаются от метрической специфики.

9.4.1. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ считается сходящейся к точке x , если любая окрестность x содержит хвост $\{x_n\}$, т. е. все точки $\{x_n\}$, начиная с некоторой.

9.4.2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке x , если по любой окрестности V точки $y = f(x)$ можно указать окрестность U точки x , такую что $f(U) \subset V$.

В метрическом пространстве эта дефиниция соответствует обычному « ϵ, δ »-определению. Интересно (а иногда и полезно), что непрерывность f на всем X ,

стандартно определяемая как непрерывность f в каждой точке $x \in X$, равносильна открытости прообраза $f^{-1}(\Omega) \subset X$ любого открытого множества⁷⁾ $\Omega \subset Y$.

В ситуации $y = f(x)$ элемент y считается образом x , а совокупность элементов x , образом которых служит y , — прообразом⁸⁾ y . Прообраз y записывают как $f^{-1}(y)$.

Сужение и продолжение отображений. Для любого преобразования $f : X \rightarrow Y$ естественным образом определяется отображение

$$g : Z \rightarrow Y, \quad Z \subset X, \quad (9.1)$$

такое что $g(x) = f(x)$ для любого $x \in Z$. Отображение g называется *сужением* f на Z и обозначается символом $f|_Z$. В свою очередь, f называется *продолжением* g на X .

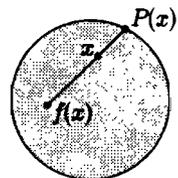
Одна из важных задач топологии — *задача продолжения*: можно ли данное отображение (9.1) непрерывно продолжить на X ? Известно, например, что тождественное отображение сферы S на себя не может быть продолжено на ограничиваемый ею шар B . Негативный характер утверждения не умаляет его ценности. Будучи надлежащим образом переформулировано, оно приводит к позитивному утверждению:

9.4.3. Теорема Брауэра. Любое непрерывное отображение⁹⁾

$$f : B \rightarrow B$$

имеет неподвижную точку $x^* \in B$, т. е. $f(x^*) = x^*$.

◀ Предположим $f : B \rightarrow B$ не имеет неподвижных точек, т. е. $f(x) \neq x$ для любого $x \in B$. Соединим точки x и $f(x)$ отрезком и продолжим его за точку x до пересечения со сферой в некоторой точке $P(x)$. Очевидно, $P : B \rightarrow S$ представляет собой непрерывное продолжение на шар B тождественного отображения сферы на себя, что невозможно (раздел 7.4). ▶



⁷⁾ Либо замкнутости любого прообраза замкнутого множества.

⁸⁾ Либо полным прообразом, оставляя за термином «прообраз» любой элемент x , переходящий в y .

⁹⁾ Подразумевается замкнутый шар B .

9.5. Карты и атласы

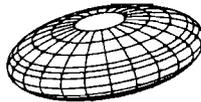
Понятие локальных координат, хорошо известное из классического анализа, в топологии приобретает несколько иной оттенок, в результате чего иногда «своих не узнаешь».

Система координат, или, другими словами, параметризация множества M ,

$$x : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

называется *картой* на M , при условии что x гомеоморфизм¹⁰⁾ M на $f(M)$. Карту на открытом подмножестве $U \subset M$ называют *локальной*. Таким образом, *локальная карта* определяется парой (U, x) , открытым множеством $U \subset M$ и гомеоморфизмом x .

Варианты координатных сеток различных криволинейных координат хорошо известны,



но локальные карты на замкнутых поверхностях не выстраиваются во взаимно однозначные глобальные координатные функции

$$x(p) = \{x_1(p), \dots, x_n(p)\}.$$

И тогда во избежание противоречий предпринимаются дополнительные меры.

Две карты (U, x) , (V, y) называют *согласованными*, если образы пересечения $x(U \cap V)$ и $y(U \cap V)$ — открыты¹¹⁾ в \mathbb{R}^n . В зависимости от контекста предъявляются также те или иные требования гладкости: дифференцируемости композиции yx^{-1} .

Наконец, множество

$$A = \{U_\alpha, x_\alpha\}$$

согласованных между собой локальных карт (U_α, x_α) , покрывающих в совокупности M , — называется *атласом* множества M .

¹⁰⁾ Либо диффеоморфизм — в дифференциальной топологии.

¹¹⁾ Пустое множество \emptyset — открыто.

9.6. Гомотопия векторных полей

Частным случаем задачи продолжения является вопрос гомотопности отображений.

9.6.1. Определение. *Отображения $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ называются гомотопными, если существует непрерывное по совокупности переменных отображение $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, такое что*

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x), \quad (9.2)$$

и $H(x, t)$ при любом $t \in [0, 1]$ действует из X в Y .

При этом $H(x, t)$ называют деформацией, или гомотопией, или гомотопическим мостом от f_0 к f_1 . Построение гомотопии от f_0 к f_1 равносильно продолжению отображения

$$H : X \times \{0\} \times \{1\} \rightarrow Y,$$

определяемого условиями (9.2), на пространство $X \times [0, 1]$.

9.6.2. *Гомотопность $f_0 \sim f_1$ является отношением эквивалентности.*

9.6.3. *Если существует пара отображений*

$$f : X \rightarrow Y, \quad g : Y \rightarrow X,$$

таких что $gf \sim I_X : X \rightarrow X$, $fg \sim I_Y : Y \rightarrow Y$, где I — тождественное отображение, пространства X, Y называют гомотопически эквивалентными, и пишут $X \sim Y$.

9.6.4. *Пространство, гомотопически эквивалентное точке, называют стягиваемым (по себе). Равносильное определение: пространство X стягиваемо, если оно может быть непрерывно деформировано в точку $x_0 \in X$, т. е. существует непрерывное отображение $H : X \times \{0\} \times \{1\} \rightarrow X$, такое что*

$$H(x, 0) \equiv x, \quad H(x, 1) \equiv x_0.$$

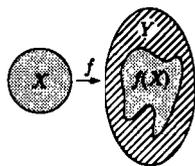
Отображение, переводящее все элементы $x \in X$ в одну общую точку, называется постоянным. Если f гомотопно постоянному отображению, то говорят, что f гомотопно нулю, и пишут $f \sim 0$.

Заметим, наконец, что отображения в определенном контексте называют также *векторными полями* — вектору x сопоставляется вектор $f(x)$.

9.7. Гомеоморфизмы

Всякое свойство пространства, инвариантное относительно гомеоморфных преобразований, называется *топологическим*. Таким образом, гомеоморфные пространства обладают одинаковыми топологическими свойствами, и неотличимы друг от друга топологическими средствами.

Остановимся на точных определениях.



9.7.1. Множество $f(X) \subset Y$ именуют *образом* X . А в случае $f(X) = Y$ говорят, что f — *сюръективное отображение*, или *отображение «на»*.

9.7.2. Если образы различных элементов $x_1 \neq x_2$ не совпадают, f называют *инъективным отображением*, или *инъекцией*. В этом случае уравнение $y = f(x)$ имеет (если имеет) единственное решение $x = f^{-1}(y)$, где f^{-1} называют *обратным отображением*, которое может быть определено не на всем Y . Но если f еще и сюръекция, то $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

9.7.3. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ инъективно, сюръективно и непрерывно в обе стороны, то говорят, что f — *гомеоморфизм* X на Y . Пространства, между которыми можно установить гомеоморфизм, считаются *гомеоморфными*, или *пространствами одного и того же топологического типа*.

Инъективность часто называют *взаимной однозначностью*. Но иногда под взаимной однозначностью $f : X \rightarrow Y$ подразумевают инъективность плюс сюръективность¹²⁾.

9.7.4. Отображение называют *локальным гомеоморфизмом*, если у любой пары точек x, y , такой что $f(x) = y$, найдутся окрестности, гомеоморфно отображаемые друг на друга.

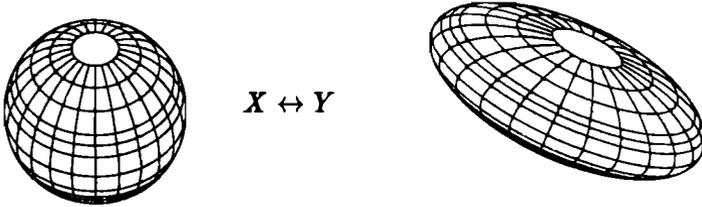
¹²⁾ До гомеоморфизма не хватает лишь непрерывности в обе стороны.

В случае $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ широко известно достаточное условие локальной гомеоморфности, состоящее в невырожденности *матрицы Якоби*

$$f'(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right].$$

Принято считать, что наличие *гомеоморфизма*

$$f : X \rightarrow Y, \quad f^{-1} : Y \rightarrow X$$

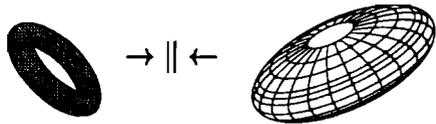


обеспечивает совпадение многих свойств у X и Y . Кое-что в самом деле совпадает, — но не так много, как думается. В [5, т. 12] можно ознакомиться с *примерами гомеоморфизмов, не сохраняющих измеримость, нулевую меру, категорию пространства*.

9.7.5. *Гомеоморфизм $f : X \rightarrow Y$ сохраняет связность, линейную связность, стягиваемость, размерность.*

- Все бесконечномерные сепарабельные банаховы пространства [5, т. 5] гомеоморфны между собой.
- \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m при $n \neq m$ негомеоморфны — результат *Брауэра*, несколько поднявший авторитет интуиции, поколебленный равномошностью \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m .

- Тор и сфера негомеоморфны.



9.7.6. *Инъективное отображение $f : X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом между X и образом $f(X)$ в томм случае, когда*

$$f(\overline{\Omega}) = \overline{f(\Omega)} \quad \text{для любого } \Omega \subset X.$$

◀ Включение $f(\overline{\Omega}) \subset \overline{f(\Omega)}$, как уже отмечалось, равносильно непрерывности f , а $\overline{f(\Omega)} \subset f(\overline{\Omega})$ — непрерывности f^{-1} . ▶

9.8. Дифференцируемость

9.8.1. Оператор $f : E_1 \rightarrow E_2$ называют дифференцируемым по Фреше в точке $x \in E_1$, если существует линейный ограниченный оператор $f'_x : E_1 \rightarrow E_2$, называемый производной Фреше в точке x , — такой что $f(x+h) - f(x) = f'_x h + \nu(x, h)$ и

$$\frac{\|\nu(x, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

Линейная часть приращения $f'_x h$ называется дифференциалом Фреше. Эквивалентные названия: сильная производная и сильный дифференциал.

При дифференцируемости F в каждой точке $x \in \Omega$ и непрерывности F'_x как оператора из Ω в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ оператор F называется непрерывно дифференцируемым по Фреше на Ω . О равномерной дифференцируемости на Ω говорят в случае, когда $\frac{\|\nu(x, h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ равномерно по $x \in \Omega$.

Производная Фреше обладает типичными свойствами обычной производной: производная суммы равна сумме производных, производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'_{g(x)} g'_x \quad \text{и т. д.}$$

Суть дифференцируемости всегда сводится к возможности линейной аппроксимации

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'_x \Delta x + o(\|\Delta x\|).$$

В одномерном случае f'_x — обычная производная. Для скалярной функции n переменных внешне все остается тем же самым, но f'_x — становится градиентом, а $f'_x \Delta x$ — скалярным произведением. Для оператора¹³⁾ $f(x)$, действующего в \mathbb{R}^n ,

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\},$$

тоже ничего не меняется, внешне. Разве что f'_x становится матрицей Якоби

$$f'_x = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right],$$

а в $f'_x \Delta x$ подразумевается умножение матрицы на вектор¹⁴⁾.

¹³⁾ Оператор, отображение, преобразование, — употребляются здесь как синонимы.

¹⁴⁾ В ТФКП требуется, чтобы f'_x было комплексным числом.

Слабым дифференциалом, или дифференциалом Гато, называют предел

$$\delta f(x, h) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + \tau h) - f(x)}{\tau}.$$

Если предел $\delta f(x, h)$ оказывается линейным по h ,

$$\delta f(x, h) = f'_x h,$$

оператор f'_x называют производной Гато (слабой производной) в точке x .

Производная Фреше, если существует, является производной Гато. Обратную импликацию обеспечивает требование непрерывности производной Гато по x .

9.8.2. Производная Фреше вполне непрерывного оператора — вполне непрерывна¹⁵⁾.

Если f'_x дифференцируем по Фреше в точке x , то оператор f называется дважды дифференцируемым по Фреше в точке x . Аналогично определяются производные n -го порядка, и по той же схеме, что и в классическом анализе, $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

9.8.3. Определение. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества. Отображение $f : X \rightarrow Y$,

$$f(x) = \{f_1(x), \dots, f_m(x)\},$$

называется гладким, если все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ существуют и непрерывны¹⁶⁾.

9.8.4. Определение. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется диффеоморфизмом, если f — гомеоморфизм и оба отображения f и f^{-1} гладкие.

¹⁵⁾ Оператор называют вполне непрерывным, если он непрерывен и ограниченные множества отображает в предкомпактные, см. [5, т. 5].

¹⁶⁾ Гладкими называют также отображения, у которых предполагается существование и непрерывность частных производных лишь первого порядка.

9.9. Гладкие многообразия

Есть ветви топологии, изучающие деформации произвольных множеств. Но достижения обратно пропорциональны широте замаха. Поэтому результаты богаче в рамках более узких классов многообразий: *гладких, полиэдральных, клеточных*.

9.9.1. Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким m -мерным многообразием*, если для любой точки $x \in X$ можно указать окрестность $V \cap X$, диффеоморфную открытому множеству $U \subset \mathbb{R}^m$.

Установление диффеоморфизма между U и $V \cap X$ равносильно введению параметризации области $V \cap X$: точки $y \in V \cap X$ описываются взаимно однозначным и взаимно гладким преобразованием $y_j = y_j(x_1, \dots, x_m)$, $j = 1, \dots, n$. Переменные x_1, \dots, x_m называют *локальными координатами* на $V \cap X$.

Пусть Q_m обозначает полупространство

$$Q_m = \{x : x = \{x_1, \dots, x_m\} \in \mathbb{R}^m, x_1 \geq 0\}.$$

Край Q_m называется плоскость $x_1 \equiv 0$.

9.9.2. Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *гладким m -мерным многообразием с краем*, если для любого $x \in X$ можно указать окрестность $V \cap X$, диффеоморфную открытому множеству $U \subset Q_m$ полупространства Q_m . *Край* X — это множество тех точек X , которые под действием соответствующих диффеоморфизмов переходят в точки края¹⁷⁾ Q_m .

Что касается гладких отображений, то в общем случае удобнее стать на бескоординатную точку зрения. Если $X \subset \mathbb{R}^n$ — m -мерное гладкое многообразие с краем или без, — то в каждой точке $x \in X$ вводится касательная m -мерная плоскость, наилучшим образом аппроксимирующая X вблизи x . Параллельная ей плоскость T_x , проходящая через начало координат, называется *касательным пространством* многообразия X в точке x . Аналогично определяются касательные пространства T_y в точках $y = f(x) \in Y$. Наилучшая линейная

¹⁷⁾ Например, краем замкнутого шара является сфера. Сфера же — многообразие без края.

аппроксимация f в точке x отображает T_x в T_y и называется производной f в точке x . В случае многообразия без края эта производная может быть записана как *матрица Якоби* в локальных координатах.

9.10. Теорема Сарда

Пусть $f'(x)$ обозначает производную в локальных координатах гладкого отображения $f: X \rightarrow Y$ многообразий одинаковой размерности n .

9.10.1. В случае $\det f'(x) \neq 0$ ($= 0$) — $x \in X$ называется *регулярной* (*критической*) *точкой* отображения $f: X \rightarrow Y$. Точку $y \in Y$ называют *регулярным* (*критическим*) *значением*, если ее прообраз $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных (*критических*) точек¹⁸⁾.

9.10.2. Теорема Сарда. Множество критических значений отображения $f: X \rightarrow Y$ имеет нулевую лебегову меру в Y .

◀ Поскольку X покрывается счетным множеством окрестностей, теорему достаточно доказать для случая, когда X — единичный куб $[0, 1]^n$.

Разобьем $[0, 1]^n$ на N^n равных кубиков, разделив каждое ребро на N равных частей. Для любой пары точек x_0, x , лежащих в одном из таких кубиков,

$$\|f(x) - f'(x_0)(x - x_0)\| = o\left(\frac{1}{N}\right). \quad (9.3)$$

Если x_0 — критическая точка, т. е. $\det f'(x_0) = 0$, то из (9.3) ясно, что объем образа этого кубика есть $o\left(\frac{1}{N^n}\right)$. Если теперь k обозначает число кубиков, содержащих критические точки, то суммарный объем образов таких кубиков есть $N^k \cdot o\left(\frac{1}{N^n}\right)$, причем заведомо $k \leq n$. В пределе при $N \rightarrow \infty$ приходим к выводу о том, что лебегова мера в Y множества критических значений равна нулю. ▶

9.10.3. Следствие. Множество регулярных значений отображения $f: X \rightarrow Y$ всюду плотно в Y .

¹⁸⁾ В случае, когда прообраз $f^{-1}(y)$ пуст, точку y относят к регулярным значениям. Очевидно, если X — компакт, то прообраз любого регулярного значения состоит не более чем из конечного числа точек.

9.11. Обратные и неявные функции

Локальной обратимости отображения f в каждой точке, конечно, недостаточно для глобальной обратимости. Но последнюю обеспечивает простое дополнительное условие.

9.11.1. Теорема. *Чтобы f было гомеоморфизмом \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- (i) *f является локальным гомеоморфизмом,*
- (ii) *прообраз любого ограниченного множества ограничен.*

Условие (ii), кстати, обеспечивает требование $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|f(x)\| = \infty$.

К обсуждению п. 9.11.1 мы еще вернемся в разделе 3.2, а пока остановимся на более общем результате.

9.11.2. Теорема. *Пусть $f: X \rightarrow Y$, где X, Y линейно связны, причем любая замкнутая кривая в Y может быть стянута в точку. Тогда, чтобы f было гомеоморфизмом X на Y , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- (a) *f является локальным гомеоморфизмом,*
- (b) *прообраз любого компакта из Y компактен в X .*

◀ *Доказательство*¹⁹⁾. Необходимость условий (a), (b) очевидна. Покажем достаточность. Установим сначала сюръективность f . В силу (a) множество $f(X)$ открыто в Y . Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_k \rightarrow y$ и $\forall k: y_k \in f(X)$. В силу (b) прообраз компактного множества $\{y_k\} \cup \{y\}$ компактен в X . Поэтому у последовательности $\{x_k \in f^{-1}(y_k)\}$ существует сходящаяся подпоследовательность, которую снова обозначим через $x_k \rightarrow x$. Учитывая непрерывность f , получаем $y_k = f(x_k) \rightarrow f(x)$, откуда $f(x) = y$, т.е. $y \in f(X)$. Итак, $f(X)$ одновременно открыто и замкнуто в Y , а поскольку Y связно, то $f(X) = Y$. Сюръективность доказана.

Следующий этап — доказательство инъективности. В предположении противного найдутся $x_1 \neq x_2$, такие что $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Соединим x_1 и x_2 непрерывной кривой $P(t)$, $t \in [0, 1]$, $P(0) = x_1$, $P(1) = x_2$, и рассмотрим ее образ $Q(t) = f(P(t))$, представляющий собой замкнутую кривую. Пусть $H(t, \lambda)$

¹⁹⁾ Если не очень надо, лучше не читать. Для понимания сути результата предпочтительнее ознакомиться с наглядным обоснованием более простой теоремы 9.11.1 в разделе 3.2.

$(\lambda \in [0, 1])$ — непрерывная деформация $Q(t)$ в точку y_0 ,

$$H(t, 0) = Q(t), \quad H(t, 1) = y_0.$$

Поскольку f сюръективно, для любых $t, \lambda \in [0, 1] \times [0, 1]$ прообраз $H(t, \lambda)$ не пуст. Кроме того, в силу (а), (б) из каждой точки $P(t) \in X$ выходит однозначная непрерывная по λ ветвь

$$P(t, \lambda) \in f^{-1}[H(t, \lambda)],$$

определенная для любого $\lambda \in [0, 1]$. Если теперь показать, что при любом фиксированном λ , в том числе при $\lambda = 1$, $P(t, \lambda)$ представляет собой непрерывную кривую, получится требуемое противоречие. Действительно, в этом случае прообраз точки $y_0 \in Y$ будет содержать непрерывную кривую $P(t, 1)$, что противоречит (а).

Покажем непрерывность $P(t, \lambda)$ по t в любой наперед заданной точке $t_0 \in [0, 1]$ при любом фиксированном λ . В силу (а), (б) прообраз каждой точки $y \in Y$ состоит не более чем из конечного числа точек. Поэтому для каждого $y \in Y$ существует такой открытый шар $W_y \subset Y$, что для каждого $x \in f^{-1}(y)$ существует окрестность $V_x \subset X$, такая что сужение f на V_x есть гомеоморфизм V_x на W_y . Выберем $\Delta\lambda_1$ из условия

$$\forall \gamma \in [0, \Delta\lambda_1] : H(t_0, \gamma) \in W_y, \quad y = H(t_0).$$

Тогда для t , достаточно близких к t_0 , очевидно

$$P(t, \Delta\lambda_1) \in f_{V_x}^{-1}[H(t, \Delta\lambda_1)],$$

где f_{V_x} — сужение f на V_x , $x = P(t_0, 0)$. Аналогичным образом можно представить второй шаг $P(t, \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_1)$ и т. д. Поскольку множество $H([0, 1], [0, 1])$ компактно²⁰⁾, то из его покрытия шарами можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому $P(t, \lambda)$ при любом наперед заданном $\lambda \in [0, 1]$ и t , достаточно близких к t_0 , можно определить с помощью конечного числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность t_0 есть композиция конечного числа непрерывных операторов. Это устанавливает непрерывность $P(t, \lambda)$ по t и завершает доказательство инъективности.

Непрерывность f^{-1} вытекает из (а). ►

В более широкой постановке речь может идти о глобальной разрешимости неявных функций, т. е. о разрешимости уравнения

$$\Phi(x, y) = z_0, \tag{9.4}$$

где $\Phi : X \times Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, $z_0 \in X$. Пространства X, Y линейно связны, а Y стягиваемо по себе.

²⁰⁾ Как непрерывный образ компакта $[0, 1] \times [0, 1]$.

Уравнение (9.4) назовем *локально разрешимым*, если:

1. Существует хотя бы одна пара $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющая (9.4).
2. Для любой пары $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, удовлетворяющей (9.4), можно указать окрестности $V \subset X$, $W \subset Y$ и непрерывное отображение $G : W \rightarrow V$, такие что для любого $y \in W$

$$\Phi(G(y), y) = z_0,$$

и $\Phi(x, y) \neq z_0$, если $x \neq G(y)$. Другими словами, (9.4) на множестве $V \times W$ эквивалентно уравнению $x = G(y)$.

Уравнение (9.4) назовем *глобально разрешимым*, если существует непрерывное отображение $G : Y \rightarrow X$, такое что (9.4) на $X \times Y$ эквивалентно уравнению $x = G(y)$.

В этом случае говорят также, что (9.4) неявно задает функцию $G(y)$. Очевидно, задача о разрешимости (9.4) в указанном смысле является более общей, чем задача о гомеоморфизме, каковая может быть сформулирована в виде вопроса о глобальной разрешимости уравнения $f(x) - y = 0$ относительно x .

9.11.3. Теорема²¹⁾. Чтобы уравнение (9.4) было глобально разрешимо, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- уравнение (9.4) локально разрешимо;
- если множество $S \subset Y$ компактно, то множество

$$T = \{x : \Phi(x, y) = z_0, y \in S\}$$

компактно в X .



²¹⁾ Доказательство есть в монографии: Опоицев В. И. Нелинейная системостатика. М.: Наука, 1986.

Глава 10

Элементы теории групп

*Hard work has a future payoff,
laziness pays off now.*

Теоретико-групповые премудрости изложены в [5, т. 8]. Ниже представлен их конспективный срез в топологической перспективе. Не только для облегчения знакомства с предыдущими главами, но и вообще — если алгебраическая топология нарушит вдруг ритм жизни.



10.1. Определения и примеры

10.1.1. *Группой G называется конечная или бесконечная совокупность элементов, на которой задана групповая операция « \cdot », сопоставляющая любой паре элементов $a, b \in G$ некоторый элемент c из той же совокупности G :*

$$a \cdot b = c.$$

При этом групповая операция, называемая обычно умножением¹⁾, обязана удовлетворять трем условиям:

- $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ (ассоциативность).
- В группе существует единичный элемент 1 , обладающий свойством $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для любого $x \in G$.
- Каждый элемент $x \in G$ имеет обратный x^{-1} :

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

¹⁾ Для обозначения групповой операции используются и другие знаки, равно как и отсутствие знака, как при обычном умножении.

Понятие группы, таким образом, относится к алгебраическим структурам с одной бинарной операцией. Вариация требований выделяет различные другие понятия. Множество с операцией, от которой требуется только ассоциативность, называется *полугруппой*. Полугруппа с единицей — *моноид*. Моноид, в котором каждый элемент обратим, — это уже *группа*.

10.1.2. Группу G , содержащую n элементов, называют *конечной*, а $|G| = n$ — ее *порядком*. Порядок $|G|$ может быть бесконечным.

Подмножество $H \subset G$, образующее группу, — при той же групповой операции, что и в G , — называется *подгруппой*. Подгруппы — это строительные блоки, из которых собрана группа, — поэтому изучение их структуры во многом характеризует свойства группы и, как правило, находится в центре внимания.

10.1.3. Подмножество $H \subset G$ является подгруппой в том случае, если из $a, b \in H$ следует $ab^{-1} \in H$.

Групповое произведение $x \dots x$ с n сомножителями обозначают как x^n , полагая $x^0 = 1$. Очевидно, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$. Группа G , в которой все элементы могут быть получены путем последовательного возведения в степень одного элемента a ,

$$G = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}, \quad (10.1)$$

называется *циклической*.

Если в (10.1) все степени a^k ($k \geq 0$) различны, группа G бесконечна. Если же $a^k = a^q$, $k < q$, то $a^{q-k} = 1$. Фиксировав наименьший положительный показатель, при котором $a^n = 1$, легко приходим к выводу, что группа G исчерпывается степенями $a^0, a, a^2, \dots, a^{n-1}$, которые все различны, причем для $m = sn + r$ ($0 \leq r < n$)

$$a^m = a^r.$$

Если циклическая группа конечна, то среди a, a^2, \dots, a^{n-1} обязательно есть a^{-1} . В бесконечной циклической группе ни одна из положительных степеней a^k не совпадает с a^{-1} . Поэтому иногда говорят, что бесконечная циклическая группа имеет две образующих a и a^{-1} .

В общем случае минимальное n в равенстве $b^n = 1$ называют *порядком* или *периодом* элемента b и обозначают через $|b|$. В случае $b^n \neq 1$ при любом $n > 0$, — считают $|b| = \infty$.

Если порядки всех элементов группы G (кроме единичного) бесконечны, — говорят, что G — *группа без кручения*. Если же порядки всех элементов группы конечны, группу называют *периодической*.

Групповую операцию, как уже отмечалось, называют *умножением*, и часто вообще обходятся без знака. Это соответствует *мультипликативной точке зрения*. Для *абелевых* (*коммутативных*) групп, в которых, по определению, $a \cdot b = b \cdot a$, обычно используется *аддитивная терминология*. Групповая операция при этом называется *сложением* и обозначается знаком $+$, а единицу именуют нулем ²⁾.

Гомотопические и гомологические группы рассматривались выше. Горизонты абстракции раздвигают примеры из других областей.

Примеры групп:

- Положительные рациональные числа (без нуля) по отношению к операции умножения.
- Группа целых чисел \mathbb{Z} по отношению к сложению.
- \mathbb{R}^n по отношению к сложению векторов.
- Совокупность невырожденных матриц по отношению к матричному умножению.
- Множество «самосовмещений» тетраэдра (куба, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра) по отношению к последовательному выполнению соответствующих вращений, отражений.
- Совокупность верхних (нижних) треугольных матриц с ненулевыми элементами диагонали:

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & t_{nn} \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \right).$$

Произведение треугольных матриц одного типа — есть треугольная матрица того же типа. Обратная к треугольной — тоже треугольная матрица, соответственно, верхняя или нижняя.

²⁾ Перемена точки зрения, технически равноценная, все же меняет освещение предмета, в результате чего некоторые результаты интуитивно ясны в мультипликативной аранжировке, некоторые — в аддитивной.

- Аддитивная группа \mathbb{Z}_p^+ вычетов по модулю p , где p простое число. Ее элементами являются числа $0, 1, 2, \dots, p-1$, а групповое произведение $a \circ b$ равно остатку от деления обычной суммы $a + b$ на p , т. е.

$$a \circ b = a + b \pmod{p}.$$

Проверка групповых свойств тривиальна. Единицей группы служит нуль.

- Мультипликативная группа \mathbb{Z}_p^\times вычетов по модулю p , где p обычно простое число. Ее элементами являются $p-1$ чисел $1, 2, \dots, p-1$, а групповое произведение $a \times b$ равно остатку от деления обычного произведения ab на p , т. е.

$$a \times b = ab \pmod{p}.$$

Группа \mathbb{Z}_p^\times , очевидно, абелева³⁾.

- Группы подстановок, играющие ключевую роль при изучении конечных групп, поскольку *других конечных групп не бывает*. Точнее говоря, *конечные группы с точностью до изоморфизма исчерпываются подгруппами группы подстановок (теорема Кэли)*. Рассмотрение предмета обычно начинается с *перестановок* (не подстановок), что создает в головах некоторую путаницу. Стандартный способ описания *перестановок* n предметов сводится нумерацией к перестановкам чисел от 1 до n . Результаты записываются в виде строк $(j_1 j_2 \dots j_n)$.

Запись одной *перестановки* под другой,

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}, \quad (10.2)$$

определяет *подстановку*, при которой каждое j_k переходит в i_k . Порядок записи столбцов в (10.2), разумеется, не играет роли.

Произведение (композиция) подстановок $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ определяется как последовательное применение σ_2 , потом σ_1 . Множество S_n всех подстановок вида (10.2) с композицией в качестве групповой операции — называется *симметрической группой n -й степени*, $|S_n| = n!$, единица группы — тождественная подстановка

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Обратной к (10.2) является подстановка

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Любые *группы подстановок являются подгруппами S_n* . Вместо S_n иногда удобнее говорить об изоморфной группе отображений $\text{Sym}(G)$, $n = |G|$, где за кадром подразумеваются перестановки элементов группы G , а не чисел $1, \dots, n$, — изоморфизм достигается нумерацией элементов группы.

³⁾ Проверка групповых свойств связана с некоторыми хлопотами [5, т. 8].

10.2. Смежные классы

Если H подгруппа группы G , то множество элементов

$$g_1 \cdot H = \{g_1 h : h \in H\}, \quad g_1 \in G, \quad g_1 \notin H,$$

не пересекается с H . Аналогично, $g_2 \cdot H$ — при условии $g_2 \notin H$, $g_2 \notin g_1 \cdot H$, — не пересекается ни с H , ни с $g_1 \cdot H$. Продолжая этот процесс до исчерпания всех элементов *конечной* группы, получаем разбиение G на p непересекающихся совокупностей:

$$H, \quad g_1 \cdot H, \quad g_2 \cdot H, \quad \dots, \quad g_{p-1} \cdot H. \quad (10.3)$$

Число p называют *индексом подгруппы H* . Распространено обозначение $p = |G : H|$. В силу взаимной однозначности

$$gH \leftrightarrow Hg^{-1},$$

индекс $|G : H|$ не зависит от того, какие *смежные классы* имеются в виду, левые или правые.

Из (10.3) вытекает $|G| = p |H|$, т. е. $|G| = |H| \cdot |G : H|$, что влечет за собой справедливость *теоремы Лагранжа*:

10.2.1. *Порядок любой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы.*

Теорема Лагранжа обращается лишь частично. Если простое p делит порядок группы $n = |G|$, то в G есть элемент порядка p (*теорема Коши*), а если p^k делит $n = |G|$, то G имеет подгруппу порядка p^k (см. *теоремы Силова* [5, т. 8]).

10.2.2. Теорема. *Любой элемент a любой конечной группы G произвольного порядка $n = |G|$ — удовлетворяет условию $a^n = 1$.*

Из п. 10.2.2 следует $a^{-1} = a^{n-1}$ для любого $a \in G$, при условии $|G| = n$.

Множества $g_k \cdot H$ в (10.3) называют *левыми смежными классами* по подгруппе H . Аналогично определяются *правые смежные классы*, как $H \cdot g_k$. Ни один смежный класс, кроме самой подгруппы H , не образует группу, поскольку не содержит единичного элемента. В *коммутативных (абелевых)* группах левые и правые смежные классы, разумеется, совпадают. Но подобное совпадение встречается и в некоммутативном случае (см. *инвариантные*

подгруппы), что, собственно, и составляет наименее тривиальную часть теории.

Размышляя о смежных классах, полезно иметь в виду параллели с другими областями. Например, в функциональном анализе [5, т. 5] линейное пространство X разбивается на *классы смежности* по линейному многообразию $H \subset X$ следующим образом. Считается, что два элемента принадлежат одному и тому же классу, если и только если $x_1 - x_2 \in H$. Два класса смежности либо совпадают, либо не пересекаются.

Если X плоскость, H прямая (проходящая через нуль), то классы смежности это прямые в плоскости X , параллельные H .

Сразу имеет смысл вспомнить, как в функциональном анализе сюжет развивается дальше. Совокупность всех классов смежности образует *фактор-пространство* X/H , наделяемое структурой линейного пространства следующим образом. Если классы L_1 и L_2 имеют представителями x_1 и x_2 , то суммой $L_1 + L_2$ объявляется класс, которому принадлежит элемент $x_1 + x_2$. Размерность фактор-пространства X/H (конечная или бесконечная) называется *коразмерностью*, или *дефектом*, подпространства H в X .

При изучении линейных операторов в *банаховом пространстве* E это некоторым образом «выстреливает». Рассматривается *ядро* $\ker A$, или *нуль-пространство* оператора A , — представляющее собой множество элементов x , для которых $Ax = 0$, — и *образ* R_A : множество элементов $y = Ax$. Далее вводится фактор-пространство $\text{соker } A = E/R_A$, называемое *коядром* оператора A , и т. п.

10.3. Нормальные делители и фактор-группы

Совокупность элементов $g^{-1} \cdot h \cdot g$, где h пробегает все элементы подгруппы $H \subset G$, а g фиксированный элемент группы G , — является подгруппой⁴⁾, как говорят, *подобной*, или *сопряженной*, подгруппе H .

10.3.1. Если все подобные H подгруппы совпадают с самой H , т. е. при любом $g \in G$

$$g^{-1} \cdot H \cdot g = H, \quad (10.4)$$

то H называется *инвариантной подгруппой*, или *нормальным делителем* группы G , или просто *нормальной подгруппой*, — и пишут $H \triangleleft G$.

⁴⁾ Проверяется элементарно.

Заметим, что (10.4) равносильно требованию

$$g \cdot H = H \cdot g, \quad (10.5)$$

т. е. левые смежные классы по инвариантной подгруппе обязаны совпадать с правыми.

Если H — нормальная подгруппа группы G , то запись

$$x = y \pmod{H}, \quad x, y \in G,$$

означает, что x и y лежат в одном и том же смежном классе по H . В частности, $x = 0 \pmod{H} \Rightarrow x \in H$ (подразумевается *аддитивная интерпретация*).

- Пусть G — группа невырожденных $n \times n$ матриц, $H \subset G$ — подгруппа матриц, имеющих детерминант, равный 1. Поскольку

$$|C^{-1}AC| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = 1, \quad A \in H, \quad C \in G,$$

подгруппа H инвариантна. Смежные классы по H состоят из всех матриц с одинаковым определителем.

- Подгруппа матриц $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : z \in \mathbb{Q} \right\}$ — нормальна в группе

$$\left\{ \begin{bmatrix} u & v \\ 0 & w \end{bmatrix} : u, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Пусть H — инвариантная подгруппа G . Произведение смежных классов⁵⁾ $f \cdot H$ и $g \cdot H$ — определяется как

$$(f \cdot H) \cdot (g \cdot H) = f \cdot (H \cdot g) \cdot H = (f \cdot g) \cdot H,$$

давая в результате снова смежный класс. Кроме того,

$$(g \cdot H) \cdot (g^{-1} \cdot H) = H.$$

Следовательно, совокупность смежных классов по инвариантной подгруппе H является группой, которую называют *фактор-группой* и обозначают как G/H . Из вышесказанного ясно, что единицей G/H служит подгруппа H . В случае $|G| < \infty$, порядок G/H равен *индексу группы H* .

⁵⁾ В силу инвариантности — неважно каких, левых или правых.

Группа, не имеющая нетривиальных инвариантных подгрупп ⁶⁾, называется *простой*. Простые группы наиболее сложны для изучения, поскольку представляют собой как бы единый клубок, в котором невозможно выделить структурные части.

Элементы x и y при условии $y = gxg^{-1}$ для некоторого $g \in G$, называют *сопряженными*. Множество x^G всех сопряженных x элементов называют *классом сопряженных элементов*,

$$x^G = \{gxg^{-1} : g \in G\}.$$

Подгруппа $H \subset G$ нормальна в том случае, когда она является объединением классов сопряженных элементов, т. е. когда H вместе с каждым своим элементом x содержит все элементы, сопряженные x .

- В абелевой группе любой класс сопряженных элементов состоит из одного элемента.
- В S_n подстановки сопряжены в том случае, когда они имеют одинаковую циклическую структуру. Подстановки

$$P = (i_1 i_2 \dots)(j_1 j_2 \dots)(\dots) \dots,$$

$$P' = (i'_1 i'_2 \dots)(j'_1 j'_2 \dots)(\dots) \dots$$

с циклами одинаковой длины, выписанными друг под другом, сопрягаются с помощью подстановки

$$Q = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & j_1 & j_2 & \dots \\ i'_1 & i'_2 & \dots & j'_1 & j'_2 & \dots \end{pmatrix},$$

что легко проверяется.

В частности, подстановки (12)(345) и (24)(513) сопряжены в S_5 .

- Матрицы сопряжены в том случае, когда приводятся к одинаковой жордановой форме.

10.4. Автоморфизмы и гомоморфизмы

Прикладной потенциал теории групп тривиален до гениальности. При изучении объекта полезно следить за группой его автоморфизмов, т. е. преобразований, на которые объект «не реагирует». Но обо всем по порядку.

⁶⁾ Тривиальными являются единичная подгруппа и сама группа.

Две группы G и G' называются *изоморфными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $\varphi : G \rightarrow G'$, такое что ⁷⁾

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b). \quad (10.6)$$

Изоморфные группы *эквивалентны*, $G \sim G'$, с точки зрения их групповых свойств, хотя природа элементов и операций может быть различна ⁸⁾. Изоморфное отображение группы на себя называется *автоморфизмом*. Автоморфизмы $G \rightarrow G$ образуют *группу автоморфизмов*, обозначаемую $\text{Aut } G$.

Если в данном выше определении изоморфизма отображение $\varphi : G \rightarrow G'$ не обязательно обратимо, но по-прежнему удовлетворяет условию (10.6), — то говорят о *гомоморфном* отображении группы G в G' , а φ называют *гомоморфизмом* ⁹⁾.

Сюръективный (накрывающий) гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow G'$, отображающий G на G' , называется *эпиморфизмом*, а всякое гомоморфное отображение группы в себя — *эндоморфизмом*. Терминология слишком пестра, чтобы ее сразу всю запоминать, но *изоморфизм*, *автоморфизм* и *гомоморфизм* желательно расположить в памяти «на виду».

- Гомоморфный образ подгруппы является подгруппой.
- Гомоморфизм $\varphi_f(g) = f^{-1} \cdot g \cdot f$ при любом фиксированном f является автоморфизмом. Совокупность $\{\varphi_f\}$ образует *группу* так называемых *внутренних автоморфизмов* $\text{Int } G$.
- Изоморфизм сохраняет все групповые свойства. Гомоморфизм может кое-что терять, преобразуя, например, группу без кручения в периодическую, либо некоммутативную группу в коммутативную. Конечность, коммутативность, цикличность — сохраняются при любом гомоморфизме.

При гомоморфном отображении G в G' единица в G переходит в единицу группы G' . Совокупность всех элементов из G ,

⁷⁾ Равенство (10.6) было бы корректнее писать в виде $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$, где точка обозначает умножение в G , а « \circ » — в G' .

⁸⁾ Группы вращений куба и октаэдра — изоморфны.

⁹⁾ При гомоморфизме различные элементы из G могут переходить в один и тот же элемент группы G' .

переходящих в единицу группы G' , называется *ядром гомоморфизма* $\varphi : G \rightarrow G'$, и обозначается как $\ker \varphi$.

Гомоморфизмы играют в теории групп ключевую роль, в связи с чем требуют к себе пристального внимания.

Если $H \subset G$ — нормальная подгруппа, то преобразование каждого элемента $g \in G$ в смежный класс $g \cdot H$ является гомоморфным отображением G на фактор-группу G/H , которое называется *естественным гомоморфизмом* G на G/H . Ядром этого гомоморфизма служит подгруппа H .

10.4.1. Теорема о гомоморфизме. *Если гомоморфизм φ отображает G на G' , то $H = \ker \varphi$ — инвариантная подгруппа в G , а группа G' изоморфна фактор-группе G/H .*

С точностью до изоморфизма естественные гомоморфизмы исчерпывают все гомоморфизмы группы. Доказательство теоремы 10.4.1 [5, т. 8] показывает, что любой гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow G'$ есть композиция

$$\varphi = \omega \circ \nu,$$

где ν — естественный гомоморфизм, ω — изоморфизм.

10.4.2. Теорема о соответствии. *Пусть гомоморфизм φ отображает G на G' ; $H = \ker \varphi$; и $\mathcal{K} = \{K : H \subset K \subset G\}$ обозначает совокупность всех подгрупп $K \subset G$, содержащих H . Тогда соответствие $K \leftrightarrow \varphi(K)$ является биекцией¹⁰⁾ между \mathcal{K} и всеми подгруппами G' . При этом соответствующие друг другу группы одновременно нормальны, а фактор-группы по ним — изоморфны, т. е.*

$$H \subset K \triangleleft G \Leftrightarrow \varphi(K) \triangleleft G', \quad G/K \sim G'/\varphi(K).$$

Гомоморфизмы в теории групп применяются весьма часто, причем в большинстве случаев использование инструмента носит тривиальный характер, — но требует привычки.

¹⁰⁾ Биекцией называется взаимно однозначное отображение «на», т. е. инъективное и одновременно сюръективное преобразование $X \rightarrow X$, множество которых обозначают $\text{Sym}(X)$.

10.5. Порождающие множества

Пересечение любой совокупности подгрупп является подгруппой. В том числе пересечение подгрупп, содержащих некоторое подмножество S группы G . Такое пересечение обозначается как $\langle S \rangle$ и называется подгруппой, порожденной множеством S , которое, в свою очередь, именуется *порождающим множеством*.

Легко видеть, что $\langle S \rangle$ состоит из всевозможных произведений

$$g_1^{\alpha_1}, \dots, g_k^{\alpha_k},$$

где все $g_i \in S$, а «показатели степени» $\alpha_i = \pm 1$.

В ситуации $\langle S \rangle = G$ говорят, что группа G порождается множеством S . Выделение в группе «небольшого» порождающего множества S обычно имеет целью сузить ассортимент «строительных блоков».

- Симметрическую группу подстановок S_n порождает любое из множеств: всевозможных циклов, транспозиций, упорядоченных транспозиций (ij) , $i < j$, а также транспозиций Мура—Кокстера:

$$(12), (23), \dots, ((n-1)n).$$

Перечисленное, разумеется, не исчерпывает возможностей. Например, S_n порождается одной транспозицией (12) и одним циклом $(12 \dots n)$.

- Знакопеременная группа A_n порождается множеством 3-циклов.
- Группа поворотов C_n порождается одним поворотом $t = \frac{2\pi}{n}$, а группа диэдра D_n — поворотом t и отражением r относительно одной из осей, которая переходит в другие оси отражения при поворотах t^k . В отрыве от содержательной интерпретации на образующие t и r приходится накладывать ограничения типа $t^n = 1$, $r^2 = 1$, а также $(tr)^2 = 1$ — см. раздел 10.7.

10.6. Свободные группы

Пусть алфавит \mathbb{A} содержит пустой символ, никак не обозначаемый, а все остальные символы входят в \mathbb{A} парами: если $a \in \mathbb{A}$, то и $a^{-1} \in \mathbb{A}$, причем

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \text{«пустому символу»}.$$

Элементами так называемой *свободной группы* являются всевозможные слова из букв алфавита \mathbb{A} , не содержащие рядом стоящих обратных символов. Например,

$$a, \quad daah^{-1}c, \quad bbb.$$

Произведение определяется как простое слияние слов,

$$abc \cdot ab^{-1} = abcab^{-1},$$

с учетом возможных сокращений:

$$abc^{-1} \cdot cb^{-1}a = abc^{-1}cb^{-1}a = aa.$$

Аксиомы группы легко проверяются. Роль единицы играет пустое слово. Обратным для слова abc — будет $c^{-1}b^{-1}a^{-1}$. Проверка ассоциативности несколько более хлопотна. Алфавит \mathbb{A} для свободной группы является *порождающим множеством*.

10.6.1. Теорема. *Любая группа G изоморфна некоторой факторгруппе некоторой свободной группы.*

10.7. Тождества в группах

Дабы вычислять топологические группы, их нужно уметь задавать. Один из распространенных способов — задание группы с помощью определяющих соотношений.

Рассмотрим сначала пример. В группе *диздра* D_n поворот $t = \frac{2\pi}{n}$ и отражение r относительно одной из осей удовлетворяют равенствам

$$t^n = 1, \quad r^2 = 1, \quad (tr)^2 = 1. \quad (10.7)$$

Естественно, возникает вопрос: определяют ли тождества (10.7) группу D_n или только «что-то о ней говорят». Задачу можно сформулировать иначе. Пусть в группе с двумя образующими t и r выполняются тождества (10.7). Что это за группа, и совпадает ли она с D_n ?

◀ В данном случае проблема относительно легко решается. Из $(tr)^2 = 1$ следует:

$$rtr = t^{-1}, \quad rt^k r = rt^{k-1} r r t r = rt^{k-1} r t^{-1} = \dots = t^{-k}.$$

Поэтому любое слово из t и r заменами (10.7) приводится к слову (произведению), в котором r встречается не более одного раза. С учетом опять-таки легко выводимого равенства $t^k r = r t^{n-k}$, нетрудно посчитать, что в искомой группе $2n$ элементов, — и потому она изоморфна D_n . ►

Тождества типа (10.7) называют *определяющими соотношениями* группы. Точнее говоря, пусть дано некоторое множество символов $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$ и некоторая система соотношений

$$\omega_1 = 1, \quad \dots, \quad \omega_N = 1, \quad (10.8)$$

приравнивающих единице некоторые слова ω_j , записанные в алфавите \mathbb{A} . Эти соотношения определяют — с точностью до изоморфизма — группу G как фактор-группу F/H , где F свободная группа над алфавитом \mathbb{A} , а ее нормальный делитель H порожден левыми частями соотношений (10.8).

Сказанное выглядит научнообразно, но такое впечатление обманчиво. Конечно, пример соотношений (10.7) создает иллюзию, что о группе *диздра* D_n можно говорить, не обращаясь к понятиям свободной группы и фактор-группы. Но вопрос в том — откуда начинать. Если изначально речь идет о содержательно определенной группе D_n , то говорить о соотношениях (10.7) как об *определяющих* — нет необходимости. Если же на (10.7) смотреть как на тождества, определяющие некоторую группу G , — то поневоле приходится стать на описанную выше точку зрения.

При этом рецептура чаще всего ведет в тупик. С одной стороны, задание группы образующими и определяющими соотношениями является универсальным способом. С другой — о так заданной группе в общем случае (причем — как правило) почти ничего нельзя сказать. Конечно она или бесконечна, коммутативна ли, содержит ли хотя бы один элемент кроме единицы? По этой причине *определяющие соотношения* в большей степени известны сопутствующими «неприятностями». В частности, сюда относится неразрешимая проблема эквивалентности слов в группе, заданной определяющими соотношениями ¹¹⁾.

¹¹⁾ См. [5, т. 6, гл. 4], где есть беглое обсуждение и ссылки.

Выше речь шла об определяющих соотношениях в свободной группе. При этом главная проблема заключалась в выяснении того, какую группу эти соотношения определяют. На ту же проблематику возможна другая точка зрения. Рассматриваются конкретные дискретные группы и выясняется, какие соотношения их определяют.

Пусть $G = \langle S \rangle$, и порождающее множество S состоит из элементов

$$s_1, \dots, s_m.$$

Соотношения

$$g_k(s_1, \dots, s_m) = 1, \quad k = 1, \dots, r, \quad (10.9)$$

называются *определяющими*, если любое другое соотношение между порождающими элементами s_1, \dots, s_m следует из (10.9). Совокупность порождающих элементов и определяющих соотношений называют *генетическим кодом*, или просто *кодом группы*, знание которого иногда существенно облегчает выяснение различных свойств изучаемых объектов.

10.8. Абелевы группы

Коммутативность групповой операции упрощает теорию. Но надо иметь в виду, что привычка к «мультипликативному мышлению» мешает «мыслить аддитивно». Напомним, для абелевых (коммутативных) групп обычно используется *аддитивная терминология*: групповая операция называется *сложением* и обозначается знаком $+$, а единица группы именуется и обозначается нулем. Определение 10.1.1 переименовывается так.

10.8.1. *Абелевой группой A называется конечная или бесконечная совокупность элементов, на которой задана групповая операция « $+$ », сопоставляющая любой паре элементов $a, b \in A$ некоторый элемент c из той же совокупности A :*

$$a + b = c.$$

При этом групповая операция коммутативна ($a + b = b + a$) и обязана удовлетворять трем условиям:

(i) $p + (q + r) = (p + q) + r$ (ассоциативность)¹²⁾.

(ii) В группе существует нулевой элемент 0 , обладающий свойством

$$0 + x = x + 0 = x$$

для любого $x \in A$.

¹²⁾ Благодаря ассоциативности скобки в любой сумме можно убрать или, наоборот, произвольно расставить.

(iii) Каждый элемент $x \in A$ имеет обратный $-x$:

$$x + (-x) = x - x = 0.$$

Прежние определения и факты выглядят иначе:

- Подмножество $B \subset A$ является подгруппой A в том случае, если из $a, b \in B$ следует $a - b \in B$.
- Групповую сумму $x + \dots + x$ с n слагаемыми обозначают как nx . Группа A , в которой все элементы могут быть получены как ja ,

$$A = \{\dots, -2a, -a, 0, a, 2a, \dots\},$$

называется *циклической*.

- Минимальное n в равенстве $nb = 0$ называют *порядком* или *периодом* элемента b и обозначают через $|b|$. В случае $nb \neq 0$ при любом $n > 0$ — считают $|b| = \infty$.
- Если порядки всех элементов группы A (кроме единичного) бесконечны, — говорят, что A — *группа без кручения*. Если же порядки всех элементов группы конечны, группу называют *периодической*.
- Совокупность всех кратных $\{g\}$ любого элемента $g \in A$ является циклической подгруппой группы A , $|\{g\}| = |g|$.
- Если g_α при изменении α пробегает все элементы группы A , и g_0 произвольный элемент A , то $g_0 + g_\alpha$ также пробегает все элементы группы.
- Понятие сопряженных элементов теряет смысл (равно как и понятия *центра* и *коммутанта*). Все подгруппы абелевой группы — нормальные; левые и правые смежные классы совпадают. Сумма смежных классов $f + H$ и $g + H$ определяется как

$$(f + H) + (g + H) = (f + g) + H,$$

потому что $H + H = H$. Таким образом, сумма смежных классов снова дает смежный класс. Кроме того, $(g + H) + (-g + H) = H$. Следовательно, совокупность смежных классов по инвариантной подгруппе H является группой, которую называют *фактор-группой* и обозначают как A/H . Нулем A/H служит подгруппа H .

10.9. Конечнопорожденные группы

В силу коммутативности, суммы элементов абелевой группы A можно записывать в виде

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k, \quad \text{все } \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad u_i \in A. \quad (10.10)$$

Если «линейные комбинации» (10.10) исчерпывают все элементы группы¹³⁾ A , то конечная совокупность элементов $\{u_1, \dots, u_k\}$ порождает группу A .

При этом *порождающая система* $\{u_1, \dots, u_k\}$ называется *линейно зависимой*, если

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0 \quad (10.11)$$

при некоторых целых $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, не равных нулю «поголовно»; и *линейно независимой* — в противном случае.

Линейно независимую систему порождающих $\{u_1, \dots, u_k\}$, если таковая существует, называют *свободной*, а о порождаемой группе говорят как о *свободной абелевой группе*. Представление любого элемента $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$ в свободной группе — однозначно. Свободную систему порождающих называют также *базисом*, а целое k — *рангом группы*.

Роль свободных абелевых групп аналогична роли *свободных групп* общего вида (раздел 10.6). Соответственно, имеет место аналог теоремы 10.6.1.

10.9.1. Теорема. *Всякая конечнопорожденная абелева группа A изоморфна некоторой фактор-группе свободной группы того же ранга.*

10.10. Прямое произведение и прямая сумма

В теории групп представляют интерес различные конструкции, с помощью которых из одних групп получаются другие. Прямое произведение — одно из таких приспособлений, которое особенно часто применяется в абелевых группах, где — в случае аддитивной точки зрения — называется *прямой суммой*. Общее определение выглядит так.

10.10.1. *О группе G говорят как о **прямом произведении** своих подгрупп H_1, \dots, H_n при условии:*

¹³⁾ То есть любой элемент $x \in A$ представим в виде $x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$.

- Любые элементы $a \in H_i, b \in H_j, i \neq j$ коммутируют, $ab = ba$.
- Любой элемент $g \in G$ представим в виде

$$g = h_1 \dots h_n, \quad h_i \in H_i. \quad (10.12)$$

Требование коммутативности умножения подгрупп в определении 10.10.1 в некотором роде раскрывает карты, показывая, что при переходе к абелевым группам никаких существенных изменений, кроме терминологических, не происходит. За исходное чаще принимается определение, в котором перечисленные требования заменяются совокупностью трех условий:

- Подгруппы H_1, \dots, H_n нормальны в G .
- Совокупность $\{H_1, \dots, H_n\}$ порождает G .
- Разложение (10.12) однозначно.

О декартовом произведении $X \times Y$ также говорят как о прямом произведении, полагая элементами группы $X \times Y$ пары (x, y) , где $x \in X, y \in Y$. Групповая операция определяется как

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2).$$

При этом, в отличие от предыдущего случая, групповые операции в X и Y могут быть различны.

Смешение понятий декартова произведения и прямого — объясняется следующим фактом.

10.10.2. Если X и Y — подгруппы одной группы G , то прямое и декартово произведение с точностью до изоморфизма порождают одну и ту же группу¹⁴⁾.

Если X и Y — подгруппы абелевой группы A , их декартово произведение называют *прямой суммой*, используя обозначение $X \oplus Y$. Абелева группа A (необязательно конечнопорожденная) считается прямой суммой своих подгрупп $B_\gamma, \gamma \in \Gamma$, когда любой ее элемент $x \in A$ однозначно представим в виде суммы конечного числа элементов, взятых из различных подгрупп B_γ .

¹⁴⁾ Изоморфизм φ определяется соответствием $xy \xrightarrow{\varphi} (x, y)$.

10.10.3. Если X и Y — нормальные подгруппы группы G , и ¹⁵⁾

$$X \cap Y = 1, \quad XY = G, \quad (10.13)$$

то G — изоморфна декартову произведению $X \times Y$.

10.11. Циклическая природа абелевых групп

Допустим, группа G состоит из всевозможных пар (a, b) , где a — корни пятой степени из единицы, b — корни седьмой степени, т. е.

$$a = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0, \dots, 4;$$

$$b = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}, \quad k = 0, \dots, 6,$$

а групповая операция — покоординатное умножение.

Группа \widehat{G} всевозможных пар (a, b) с покомпонентным умножением — состоит из $5 \cdot 7 = 35$ элементов, но циклична ли эта группа? — Циклична, и 35 степеней

$$\left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right)^s, \quad s = 1, \dots, 35,$$

исчерпывают (по модулю 2π) все ее пары, что, вообще говоря, требует обоснования. Но пункт 10.10.2 гарантирует, что группа \widehat{G} изоморфна совокупности попарных произведений $\{ab\}$, для которых цикличность очевидна — образующий элемент: $\cos \frac{2\pi}{35} + i \sin \frac{2\pi}{35}$.

Пример является прообразом следующего результата.

10.11.1. Прямая сумма двух циклических групп взаимно простых порядков m и n является циклической группой порядка mn .

Разумеется, прямая сумма k циклических групп A_j попарно взаимно простых порядков n_1, \dots, n_k является циклической группой порядка n_1, \dots, n_k . В общем случае, если

$$\text{НОК}\{n_1, \dots, n_k\} \neq n_1, \dots, n_k,$$

абелева группа $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$ не циклична ¹⁶⁾.

¹⁵⁾ Условие (10.13) равносильно коммутативности элементов из разных подгрупп: $xy = yx$, $x \in X$, $y \in Y$.

¹⁶⁾ Поскольку в A нет элемента порядка $|A| = n_1, \dots, n_k$. В этом случае говорят, что показатель группы $d = \min\{k > 0 : kx = 0, \forall x \in A\}$ меньше порядка $|A|$.

Оказывается, прямые суммы циклических групп исчерпывают конечнопорожденные абелевы группы.

10.11.2. Теорема. *Конечнопорожденная абелева группа является прямой суммой конечного числа бесконечных циклических подгрупп и конечного числа циклических примарных групп¹⁷⁾.*

Результат называют *основной теоремой* об абелевых группах с конечным числом образующих. Вокруг теоремы 10.11.2 имеется множество вариаций, обнажающих дополнительные ракурсы.

10.11.3. Подгруппой кручения $\text{tors}(A)$ абелевой группы A называется совокупность элементов A конечного порядка.

Всякая конечнопорожденная абелева группа A является прямой суммой $\text{tors}(A)$ и некоторой свободной абелевой группы. А потому всякая конечнопорожденная абелева группа A без кручения — свободна (имеет линейно независимую систему образующих, базис).

¹⁷⁾ *Примарными* считаются абелевы p -группы (группы порядка p^k , где p простое число).

Глава 11

Избранные фрагменты

Легче найти ошибку, нежели истину.

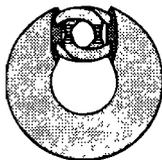
И. Гёте

Информация в книгах нередко прячется в уютных закоулках и тонет в водоворотах подробностей. В результате кое-что открываешь для себя, лишь в сотый раз заглядывая в учебник. Поэтому какие-то факты и нюансы, имеющие тенденцию «ускользнуть», есть резон помешать на видном месте или хотя бы дублировать.

- На обруч одеты два кольца, соединенных перешейком, рис. (i-2). Непрерывной деформацией одно кольцо снимается с обруча, рис. (i-5), см. раздел 1.2.



- Зацепление (i-6) ликвидируется непрерывной деформацией, раздел 1.2.

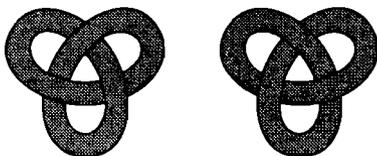


- Внутренность *рогатой сферы* гомеоморфна шару, а внешность — не гомеоморфна дополнению этого шара, раздел 1.4.

- *Лист Мёбиуса* играет в топологии важную роль как фундаментальный элемент теории поверхностей, разнообразие каковых сводится к заклеиванию отверстий в сфере либо *ручками* либо *лентами Мёбиуса* (теорема 1.12.1).
- Склеивание края *листа Мёбиуса* с границей круга образует замкнутую неориентируемую поверхность, называемую *проективной плоскостью* $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$.
- 1.6.1. **Определение.** Проективным пространством $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ размерности n называется множество прямых в \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через начало координат. С точки зрения 1.6.1 гомеоморфный вариант $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ представляет собой сферу с центром в нуле, у которой отождествлены (склеены) диаметрально про-

типоволожные точки, ибо две такие точки однозначно определяют прямую в \mathbb{R}^3 , проходящую через нуль.

- **1.9.1. Определение.** Узлом называется гомеоморфный образ окружности S^1 в \mathbb{R}^3 . При задании направления обхода узел считается ориентированным.
- **1.9.2. Определение.** Узлы K_1 и K_2 эквивалентны, если существует гомеоморфизм \mathbb{R}^3 на себя, отображающий K_1 на K_2 .
Трилистник и его зеркальный образ



эквивалентны в смысле 1.9.2 — требуемый гомеоморфизм существует. Тем не менее один узел в другой физически не переводится. Поэтому в теории узлов чаще используют более тонкий инструмент, опирающийся на понятие *изотопии*.

- **1.12.1. Теорема.** Список (1.10),

$$M_0, M_1, \dots, M_p, \dots, N_1, \dots, N_q, \dots$$

дает полную топологическую классификацию замкнутых поверхностей в \mathbb{R}^3 .

- **2.4.1. Определение.** Невырожденные на Ω отображения f и g называются гомотопными на Ω , если существует такая невырожденная непрерывная деформация (гомотопия) $H(x, t)$,

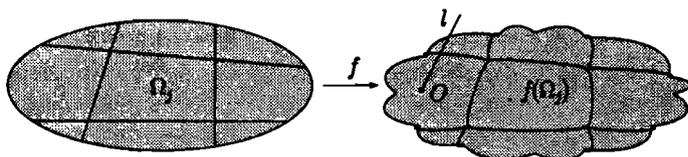
$$H : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

что

$$H(x, 0) \equiv f(x), \quad H(x, 1) \equiv g(x).$$

- **2.4.2. Теорема.** Гомотопные векторные поля имеют одинаковые вращения. Результат служит основным инструментом для вычисления вращений векторных полей.
- **2.5.1. Теорема.** Пусть векторное поле $f(x)$ определено и невырождено на границах областей $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_m$, причем области Ω_j ($j = 1, \dots, m$) попарно не пересекаются и $\bar{\Omega} = \bigcup \bar{\Omega}_j$. Тогда

$$\gamma(f, \bar{\Omega}) = \sum_{j=1}^m \gamma(f, \bar{\Omega}_j).$$



- **2.5.4. Теорема.** Если $\gamma(f, \Omega) \neq 0$, то уравнение $f(x) = 0$ разрешимо в Ω , т. е. в Ω существует нуль векторного поля $x^* \in \Omega$, $f(x^*) = 0$.
- **2.6.2. Теорема.** Оператор T , переводящий в себя замкнутый шар B , всегда имеет неподвижную точку $x^* \in B$.
- **2.8.1. Теорема об алгебраическом числе нулей.** Пусть векторное поле $f(x)$ невырождено на Ω и имеет в Ω лишь изолированные нули. Тогда

$$\gamma(f, \Omega) = \sum_j \text{ind}(f, x_j),$$

где суммирование идет по всем нулям $x_j \in \Omega$ поля f .

- **3.1.2. Теорема.** Если стягиваемый по себе компакт в \mathbb{R}^n локально стягиваем, то он обладает свойством неподвижной точки.
- **4.1.1. Определение.** Многозначное отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ называется замкнутым, или **полунепрерывным сверху**, если график этого отображения

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in T(x)\}$$

замкнут в $X \times Y$.

- **4.1.2. Определение.** Многозначное отображение $T : X \rightarrow 2^Y$ называется замкнутым, или **полунепрерывным снизу**, если для любых точек $x \in X$ и $y \in T(x)$ и любой последовательности $x_k \rightarrow x$ (все $x_k \in X$) найдется такая последовательность y_k , что $y_k \in T(x_k)$ и $y_k \rightarrow y$.
- **4.4.6. Теорема Какутани.** Пусть многозначное отображение $T(x)$ переводит в себя замкнутый шар B , т. е. $T : B \rightarrow 2^B$. Тогда у T в B есть неподвижная точка $x^* \in T(x^*)$.
- **4.4.7. Теорема.** Пусть $0 \in \Omega$ и $\langle x, y \rangle \geq 0$ для любой пары векторов

$$x \in \Omega, \quad y \in T(x).$$

Тогда включение $0 \in T(x)$ разрешимо в $\bar{\Omega}$.

- **4.5.1. Теорема.** Многозначное отображение $T : X \rightarrow Y$ с выпуклыми образами, полунепрерывное снизу, имеет непрерывный селектор, т. е. существует однозначная непрерывная функция $t : X \rightarrow Y$, такая что $t(x) \in T(x)$ для любого $x \in X$.
- **5.3.1. Определение.** Петлей в пространстве X с выделенной точкой x_0 назовем замкнутый ориентированный контур, возникающий в результате движения изображающей точки $\varphi(t)$,

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow X, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = x_0,$$

при изменении t от 0 до 1.

Петлей φ называют также само непрерывное отображение φ .



- **5.3.2. Определение.** Две петли φ и ψ считаются гомотопными, $\varphi \sim \psi$, если φ и ψ гомотопны как непрерывные отображения из $[0, 1]$ в X , и дополнительно: их гомотопия $H(t, \lambda)$ в процессе деформации закреплена в точке x_0 ,

$$\forall \lambda \in [0, 1] : H(0, \lambda) = H(1, \lambda) = x_0.$$

Отношение гомотопии 5.3.2 разбивает петли на классы эквивалентных петель, и множество этих классов образует так называемую *фундаментальную группу* $\pi_1(X, x_0)$ пространства X .

5.3.3. Если $f : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм, фундаментальные группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ изоморфны. Пространства X, Y , как обычно в теории гомотопий, предполагаются линейно связными. В этом случае $\pi_1(X, x_0)$ не зависит от x_0 , и обозначение упрощается до $\pi_1(X)$.

- Вычисление фундаментальной группы и высших гомотопических групп — сложно не только технически, но и принципиально. Достаточно заметить, что даже $\pi_m(S^n)$ не все известны. Факт довольно странный, потому что сфера как бы «вся на виду», и вопрос до некоторых пор выглядел решенным — ибо легко устанавливается $\pi_n(S^n) \sim \mathbb{Z}$, а также тривиальность групп $\pi_m(S^n)$ при $m < n$. В случае же $m > n$ изоморфность нулю $\pi_m(S^n) \sim 0$ считалась тем более очевидной. Но последнее неожиданно обернулось заблуждением. С легкой руки Хопфа, открывшего негомотопное нулю отображение

$$S^3 \rightarrow S^2,$$

внезапно выяснилась нетривиальность группы $\pi_3(S^2)$, что оказало шоковое влияние на развитие теории гомотопий в целом.

- **5.6.1. Определение.** Непрерывные отображения $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ гомотопны, $f_0 \sim f_1$, если существует такая непрерывная функция $H(x, t)$, $t \in [0, 1]$, что

$$H(x, 0) \equiv f_0(x), \quad H(x, 1) \equiv f_1(x).$$

- **5.6.2** Если существует пара отображений f и g из X в Y , таких что

$$gf \sim I_X : X \rightarrow X, \quad fg \sim I_Y : Y \rightarrow Y,$$

пространства X, Y называют гомотопически эквивалентными, и пишут $X \sim Y$. Разумеется, гомеоморфные X, Y гомотопически эквивалентны.

- **5.6.3.** Отображение $f : X \rightarrow Y$ называют слабой гомотопической эквивалентностью, если оно индуцирует изоморфизм гомотопических групп всех размерностей. В этом случае пространства X, Y называют слабо гомотопически эквивалентными. Любая гомотопическая эквивалентность является слабой. Обратное верно, если X, Y — *клеточные пространства* (теорема Уайтхеда).
- **5.8.1. Заблуждение.** Если трехмерное компактное многообразие M имеет такие же группы гомологий, как у сферы S^3 , то $M \sim S^3$, т.е. M гомеоморфно S^3 .
- **5.8.2. Заблуждение.** Любое открытое трехмерное многообразие M , стягиваемое по себе, гомеоморфно \mathbb{R}^3 .

- **6.2.3.** Фактор-группа $H_r = Z_r/B_r$ группы циклов Z_r по подгруппе границ B_r называется r -й группой гомологий, или группой Бетти, комплекса K .
- **6.2.5.** Гомотопически эквивалентные компакты имеют изоморфные группы гомологий.
- **6.3.2. Теорема.** Группа гомологий H_n ориентируемого псевдомногообразия K^n изоморфна группе Z .
- **7.1.1. Определение.** Последовательность C_\S абелевых групп и гомоморфизмов

$$\dots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \dots \quad (11.1)$$

называется **цепным комплексом**, если

$$\partial_n \partial_{n+1} = 0 \quad \text{для любого } n.$$

- **7.1.2.** Безотносительно к содержательному наполнению — группы C_n в (11.1) называются **группами цепей** комплекса C_\S , а гомоморфизмы ∂_n — **дифференциалами**. Ядро

$$Z_n = \ker \partial_n \subset C_n$$

называется **группой n -мерных циклов**, а образ

$$B_n = \text{im } \partial_{n+1} \subset C_n$$

гомоморфизма ∂_{n+1} — группой n -мерных границ комплекса C_\S . Наконец, фактор-группа $H_n = Z_n/B_n$ называется **n -мерной группой гомологий** комплекса C_\S .

- **7.1.3.** **Цепным отображением** φ комплекса C_\S в цепной комплекс C'_\S называется совокупность гомоморфизмов

$$\varphi_n : C_n \rightarrow C'_n$$

при условии

$$\varphi_n \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \varphi_{n+1}.$$

- **7.7.1.** Величина ¹⁾

$$\Lambda_f = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \text{trace}(f_{*r})$$

называется **числом Лefшеца** симплициального отображения

$$f : |K| \rightarrow |K|.$$

- **7.7.2. Теорема.** Если $\Lambda_f \neq 0$, то у симплициального отображения $f : |K| \rightarrow |K|$ существует неподвижная точка $x \in |K|$,

$$x = f(x).$$

¹⁾ Всякое симплициальное отображение $f : |K| \rightarrow |K|$ индуцирует набор гомоморфизмов $f_{*r} : H_r(K) \rightarrow H_r(K)$.

- 7.7.3. Число Лефшеца тождественного отображения

$$I : |K| \rightarrow |K|$$

равно эйлеровой характеристике комплекса $|K|$.

- 7.7.4. Если все неподвижные точки отображения $f : M \rightarrow M$ изолированы и невырождены, а M — размерно-однородный полиэдр, то

$$\Lambda_f = \sum_j \text{ind}(f, x_j),$$

где суммирование идет по всем неподвижным точкам $x_j \in M$.

- Хопфом были открыты локально тривиальные расслоения сфер:

$$p : S^3 \rightarrow S^2, \quad p : S^7 \rightarrow S^4, \quad p : S^{15} \rightarrow S^8,$$

явившиеся как гром среди ясного неба. Математики долгое время были уверены, что любое отображение $S^n \rightarrow S^m$ при $m < n$ гомотопно постоянному. Отображения Хопфа развеяли это заблуждение, см. раздел 8.3.

- Группы гомологий для двумерных замкнутых поверхностей:

Все $H_0(M_p \text{ или } N_q) = \mathbb{Z}$; $H_2(M_p) = \mathbb{Z}$; $H_k(M_p) = 0$ при $k > 2$; $H_k(N_q) = 0$ при $k > 1$;

$$\bullet \quad H_1(M_p) = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{2p}; \quad H_1(N_q) = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{q-1} + \mathbb{Z}_2^+.$$

- Группы гомологий сферы S^n :

$$H_0(S^n) = H_n(S^n) = \mathbb{Z},$$

остальные $H_k(S^n) = 0$.

- Группы гомологий проективного пространства $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$:

для четного n : $H_0(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$; $H_k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}_2^+$, $k = 2p + 1$, $1 \leq k < n$;

для нечетного n : $H_0(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = H_n(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$; $H_k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}_2^+$, $k = 2p + 1$, $1 \leq k \leq n$;

остальные: $H_k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = 0$.

Сокращения и обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

(?) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки»

(!) — предлагает обратить внимание

«в том случае» — «в том и только том случае»

ЛМ — лист Мёбиуса

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ — объединение, пересечение и разность множеств

$X \subset Y$ — X подмножество Y , в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т. е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

\sim — отношение эквивалентности, определяемое контекстом; в случае изоморфизма вместо \sim чаще используется знак обыкновенного равенства $=$

\emptyset — пустое множество

$\overline{\Omega}$ — замыкание Ω

$\dot{\Omega} = \partial\Omega$ — граница Ω

2^Ω — множество всех подмножеств множества Ω

\mathbb{N} — множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$

\mathbb{Z} — группа целых чисел $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ по сложению

\mathbb{Z}_p^+ — аддитивная группа вычетов по модулю p

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство

$[a]$ — целая часть числа a

$\{a\}$ — дробная часть числа a

\exists — квантор существования

\forall — квантор общности

S^2 — единичная сфера в \mathbb{R}^3

$\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ — проективная плоскость

$\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ — проективное пространство размерности n

$C(X, Y)$ — множество всех непрерывных отображений из X в Y

I_X — тождественное отображение $X \rightarrow X$

C_n — группа поворотов на углы $\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

D_n — группа диэдра, изоморфна *группе самосовмещений* правильного n -угольника

$\ker \varphi$ — ядро гомоморфизма φ

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G

Литература

1. *Болтянский В. Г., Ефремович В. А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.
2. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. М.: Наука, 1995.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: URSS, 2005.
4. *Босс В.* Интуиция и математика. 3-е изд. М.: ЛКИ/URSS, 2008.
5. *Босс В.* Лекции по математике. Т. 1: Анализ; Т. 2: Дифференциальные уравнения; Т. 3: Линейная алгебра; Т. 4: Вероятность, информация, статистика; Т. 5: Функциональный анализ; Т. 6: От Диофанта до Тьюринга; Т. 7: Оптимизация; Т. 8: Теория групп; Т. 9: ТФКП; Т. 10: Перебор и эффективные алгоритмы; Т. 11: Уравнения математической физики; Т. 12: Контрпримеры и парадоксы. М.: URSS, 2004–2009.
6. *Васильев В. А.* Введение в топологию. М.: Фазис, 1997.
7. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. 4-е изд. М.: URSS, 2004.
8. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. 5-е изд. М.: URSS, 2001.
9. *Зейферт Г., Трельфалль В.* Топология. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
10. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
11. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966.
12. *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
13. *Милнор Дж.* Теория Морса. 2-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
14. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология: Начальный курс. М.: Мир, 1972.
15. *Мантуров В. О.* Лекции по теории узлов и их инвариантов. М.: URSS, 2001.
16. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. 2-е изд. М.: URSS, 2004.

17. *Прасолов В. В.* Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995.
18. *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.
19. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972.
20. *Стинрод Н., Чинн У.* Первые понятия топологии. 3-е изд. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
21. *Тёрстон У.* Трехмерная геометрия и топология. М.: МЦНМО, 2001.
22. *Харари Ф.* Теория графов. 4-е изд. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ"/URSS, 2009.
23. *Ху Сы-Цзян.* Теория гомотопий. 2-е изд. М.: URSS, 2004.
24. *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.

Предметный указатель

- Автоморфизм** 186
аксиома отделимости Хаусдорфа
 163
атлас 167
ацикличность 120
- База** 153, 163
базис 193
барицентрические координаты
 115
бесконечно удаленная прямая 27
бутылка Клейна 30
- Векторное поле** 46, 66, 169
— — многозначное 87
вложение 11
вращение векторного поля 50
- Гипотеза Пуанкаре** 107
гомеоморфизм 10, 169
— локальный 169
гомеоморфные пространства 169
гомологии клеточные 131, 133
— относительные 144
гомологии пары 144
гомологичные циклы 113, 121
гомоморфизм 186
гомотопическая
 эквивалентность 106
— — слабая 106
гомотопические группы
 относительные 145
- гомотопический мост 168
— тип 106
гомотопия 48, 168
— накрывающая 157
— невырожденная 48
гомотопность нулю 168
гомотопные отображения 52, 168
граница симплекса 117
— цепи 117
граничный оператор 117
грань симплекса 115
граф плоский 44
графы Куратовского 44
группа 178
— \mathbb{Z}_p^* 181
— абелева 180, 191
— автоморфизмов 186
— без кручения 180
— Бетти 119
— внутренних автоморфизмов
 186
— вычетов аддитивная 181
— гомологий 119
— кограниц 148
— конечная 179
— коцепей 147
— коциклов 148
— относительных цепей 144
— периодическая 180
— простая 185
— свободная 189

— — абелева 193
 — симметрическая n -й степени 181
 — цепей 117
 — циклическая 179
 групповая операция 178
 группы изоморфные 186

Двусторонняя поверхность 29

декартово произведение 194
 дефект 165, 183
 деформация 13, 168
 диаграмма узла 34
 диффеоморфизм 18, 172
 дифференциал 129
 — Гато 172
 — Фреше 171
 дифференцируемость по Фреше 171

Естественный гомоморфизм 187

Задача продолжения 166
 замыкание 163
 зацепление Уайтхеда 111

Изотопический тип 33

изотопия 32
 индекс Морса 143
 — нуля 60
 — подгруппы 182
 индуцированный гомоморфизм 101
 индуцируемый гомоморфизм 125
 инъекция 169

Карта 167

— локальная 167

карты согласованные 167
 касательное пространство 173
 категория 97
 класс смежности 164
 — сопряженных элементов 185
 клеточное пространство 131
 когерентные ориентации 121
 когомологии де Рама 148
 кограничный оператор 148
 код генетический 191
 — группы 191
 композиция петель 99
 контрпример Пуанкаре 109, 110
 — Уайтхеда 109, 110
 копредставление 102
 коразмерность 165, 183
 коэффициент инцидентности 116
 коэффициенты кручения 138
 коядро оператора 183
 край 23
 критерий Коши 162
 критическая точка 174
 критическое значение 174

Левые смежные классы 182

лист Мёбиуса 21
 локальные координаты 173

Матрица Якоби 171

меридиан тора 17
 метрика Хаусдорфа 85
 многообразии гладкое 173
 — с краем 173
 — Уайтхеда 111
 множество антуановское 37
 — замкнутое 161, 163

- компактное 163
- открытое 161, 162
- моноид 179
- мультипликативная группа
вычетов 181

Накрытие 159

- невыврожденная деформация 52
- непрерывность по Какутани 84
- по Хаусдорфу 85
- нормальный делитель 183
- нуль векторного поля 57, 60
- нуль-пространство 183

Образ 166, 183

- односвязность 20
- окрестность 161, 163
- определяющие соотношения
190, 191
- ориентация 28, 116
- симплекса 116
- ориентируемое
псевдомногообразие 122
- орт 28
- отделимость 163
- отображение гладкое 172
- инъективное 169
- многозначное 83
- «на» 169
- накрывающее 157
- обратное 169
- полунепрерывное сверху 84
- — снизу 84
- постоянное 168
- сюръективное 169
- цепное 129
- отображения гомотопные 105

Параллель тора 17

- перестановка 181
- период элемента 179
- петля 98
- подгруппа 179
- инвариантная 183
- кручения 196
- нормальная 183
- подобная 183
- порожденная 188
- сопряженная 183
- подкомплекс 130
- поднятие отображения 157
- подстановка 181
- показатель группы 195
- полиэдр 115
- полный инвариант 42
- полугруппа 179
- порождающая система 193
- порождающее множество 188
- порядок группы 179
- связности 138
- элемента 179
- последняя теорема Пуанкаре 70
- последовательность Коши 162
- правые смежные классы 182
- пример Брауэра 36
- продолжение отображения 166
- проективная плоскость 25, 27
- проективное преобразование 27
- производная Гато 172
- Фреше 171
- прокол 56
- прообраз 166
- простой контур 19
- пространство нормальное 163
- полное 162

- связное 161
- стягиваемое 168
- топологическое 162
- хаусдорфово 163
- прямая сумма 194
- прямое произведение 151, 193

- Ранг группы** 138, 193
- расслоение 153
 - векторное 155
 - локально тривиальное 154
 - тривиальное 154
- регулярная точка 174
- регулярное значение 174
- ретракт 73
- ретракция 73
- рогатая сфера 19
 - — Александра 18
- род поверхности 39

- Свободная система порождающих** 193
- свойство неподвижной точки 72
 - топологическое 169
- связность 163
 - линейная 164
- седловая точка 85
- селектор 91
- сильная производная 171
- сильный дифференциал 171
- симплекс 115
 - криволинейный 115
- симплициальное отображение 123
 - приближение 124
- симплициальные гомологии 114
- симплициальный комплекс 115
- сингулярный симплекс 133
- система координат правая/левая 28
- слабая производная 172
- слабый дифференциал 172
- слой 153
- сопряженные элементы 185
- сравнение топологий 163
- степень отображения 53, 135
- стягиваемость 106, 168
- сужение отображения 166
- сфера с ручками 16
- сходимость 165

- Теорема Брауэра** 58, 166
 - Гуревича 149
 - Жордана 19
 - Какутани 89
 - Коши 182
 - Кэли 181
 - Лефшеца—Хопфа 141
 - о вложенных шарах 162
 - о селекторе 91
 - отделимости 161
 - Сарда 174
 - Уайтхеда 106
 - Уитни 26
 - Шенфлиса 19
- теория когомологий 147
 - Морса 143
- типичный слой 153
- топологическая эквивалентность 11
- топология 162
- тор сплошной 15
- точка внутренняя 161
 - предельная 161

точная последовательность 145
триангуляция 40, 115
трилистник 11

Угловая функция 69
узел 32, 198
узлы эквивалентные 32

Фактормножество 164
фактор-группа 184
фактор-пространство 165, 183
фактортопология 164
фальшивая копия 107
формула Пуанкаре 138
— Хивуда 45
формулой Гаусса—Бонне 139
фундаментальная группа 99
— последовательность 162
функтор 97
функция Морса 143

Хвост последовательности 165
хроматическое число 44

Цепной комплекс 128
цепь r -мерная 117
цикл 117
— гомологичный нулю 113
— с кручением 118

Число Бетти 138
— Лефшеца 140

Эйлерова характеристика 40, 139
эквивалентность изоморфных
групп 186
эндоморфизм 186
эпиморфизм 186

Ядро гомоморфизма 187
— оператора 183

ε -окрестность 161
 CW -комплекс 131
 $|G : H|$ 182
 $H \triangleleft G$ 183
 $\ker \varphi$ 187
 n -мерная гомотопическая
группа 104
 n -связность 104
 r -отображение 72
 $\langle S \rangle$ 188
 S_n 181
 $\text{Sym}(G)$ 181
 $\text{Sym}(X)$ 187
 $X \oplus Y$ 194
 x^G 185
 \mathbb{Z}_p^+ 181

Другие книги нашего издательства:



URSS

Краснов М. Л. и др. Вся высшая математика. Т. 1–7.

Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Сборники задач «Вся высшая математика» с подробными решениями.

Тактаров Н. Г. Справочник по высшей математике для студентов вузов.

Боярчук А. К. и др. Справочное пособие по высшей математике (Амтдеимович). Т. 1–5.

Пухначев Ю. В., Попов Ю. П. Математика без формул. Кн. 1, 2.

Гарднер М. Этот правый, левый мир.

Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.

Крыжановский Д. А. Изопериметры. Свойства геометрических фигур.

Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение (с решениями).

Фиников С. П. Проективно-дифференциальная геометрия.

Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии.

Фиников С. П. Аналитическая геометрия.

Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия.

Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство.

Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии.

Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными.

Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ.

Смирнов Ю. М. Курс аналитической геометрии.

Дарбу Г. Принципы аналитической геометрии.

Горшкова Л. С., Паньженский В. И., Марина Е. В. Проективная геометрия.

Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия.

Серия «НАУКУ — ВСЕМ! Шедевры научно-популярной литературы»

Колмогоров А. Н. Математика — наука и профессия.

Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского.

Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии.

Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии.

Мизес Р. Вероятность и статистика.

Менхен Ф. Некоторые тайны артистов-вычислителей.

Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег, или Букварь по теории стратегических игр.

Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. Кн. 1, 2.

Гарднер М. Теория относительности для миллионов.

Хвольсон О. Д. Теория относительности А. Эйнштейна и новое миропонимание.

Сазанов А. А. Четырехмерная модель мира по Минковскому.

Перельман Я. И. Занимательная астрономия.

Кононович Э. В. Солнце — дневная звезда.

Липунов В. М. В мире двойных звезд.

Каганов М. И. Электроны, фононы, магноны.

Каганов М. И., Цукерник В. М. Природа магнетизма.

Харкевич А. А. Автоколебания.

Ашкинази Л. А. Электронные лампы: Из прошлого в будущее.

Шейд К. Опыты по химии для начинающих.

Кац Е. А. Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры.

Другие книги нашего издательства:



URSS

Дифференциальные и интегральные уравнения

- Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений.
Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения.
Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.
Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.
Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию.
Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.
Сикорский Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения.
Трикоми Ф. Дж. Дифференциальные уравнения.
Трикоми Ф. Дж. Лекции по уравнениям в частных производных.
Филипп Г. Дифференциальные уравнения.
Амелькин В. В. Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения.
Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях.
Амелькин В. В., Калинин Б. С. Изохронные и импульсные колебания двумерных динамических систем.
Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.
Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений.
Кузьмина Р. П. Асимптотические методы для обыкновенных диф. уравнений.
Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений.
Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения.
Ландау Э. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление.
Теория чисел
Вейль А. Основы теории чисел.
Вейль Г. Алгебраическая теория чисел.
Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел.
Хинчин А. Я. Цепные дроби.
Понтрягин Л. С. Обобщения чисел.
Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел.
Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм.
Ожигова Е. П. Развитие теории чисел в России.
Ожигова Е. П. Что такое теория чисел.
Оре О. Приглашение в теорию чисел.
Гельфонд А. О. Трансцендентные и алгебраические числа.
Серия «Физико-математическое наследие: математика (теория чисел)»
Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах.
Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу.
Дирихле П. Г. Л. Лекции по теории чисел.
Дедекин Р. Непрерывность и иррациональные числа.
Берман Г. Н. Число и наука о нем: Общедоступные очерки по арифметике натур. чисел.
Ингам А. Э. Распределение простых чисел.

Другие книги нашего издательства:



URSS

Алгебра

Чеботарев Н. Г. Теория Галуа.

Чеботарев Н. Г. Основы теории Галуа. В 2 кн.

Шевалле К. Введение в теорию алгебраических функций.

Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия.

Никифоров В. А., Шкода Б. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.

Яглом И. М. Необыкновенная алгебра.

Уокер Р. Алгебраические кривые.

Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований.

Фробениус Ф. Г. Теория характеров и представлений групп.

Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления.

Серия «Физико-математическое наследие: математика (алгебра)»

Чеботарев Н. Г. Введение в теорию алгебр.

Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций.

Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли.

Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.

Бохер М. Введение в высшую алгебру.

Теория вероятностей

Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.

Гнеденко Б. В. Очерк по истории теории вероятностей.

Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.

Хинчин А. Я. Асимптотические законы теории вероятностей.

Хинчин А. Я. Математические основания квантовой статистики.

Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания.

Боровков А. А. Теория вероятностей.

Боровков А. А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов.

Питъев Ю. П. Возможность. Элементы теории и применения.

Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике.

Золотаревская Д. И. Теория вероятностей. Задачи с решениями.

Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.

Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.

Теория графов

Харари Ф. Теория графов.

Оре О. Графы и их применение.

Березина Л. Ю. Графы и их применение.

Емеличев В. А., Мельников О. И. и др. Лекции по теории графов.

Мельников О. И. Незнайка в стране графов.

Мельников О. И. Теория графов в занимательных задачах.

Мельников О. И. Обучение дискретной математике.

Родионов В. В. Методы четырехцветной раскраски вершин плоских графов.

Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации.

Другие книги нашего издательства:



URSS



Босс В.

Интуиция и математика

Книга раскрывает существо многих математических идей и явно представляет собой новый шаг в области популяризации науки. Неожиданно просто и коротко передается смысл фундаментальных результатов. Сложные факты предстают в интуитивно ясном виде. Стиль изложения необыкновенно экономен. Интонация дружественная.

Для широкого круга читателей. В первую очередь для студентов и преподавателей, инженеров и научных работников. И даже для старших школьников, которые сумеют обойти незначительные вкрапления высшей математики.

Харди Г. Г. Курс чистой математики.

Харди Г. Г. Расходящиеся ряды.

Харди Г. Г., Рогозинский В. В. Ряды Фурье.

Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Поля Г. Неравенства.

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы.

Милнор Дж. Теория Морса.

Клейн Ф. Неевклидова геометрия.

Клейн Ф. Высшая геометрия.

Ху Сы-Цзян. Теория гомотопий.

Стинрод Н. Топология кривых произведений.

Александров П. С. Что такое неевклидова геометрия.

Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию.

Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии.

Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий.

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Т. 1-3.

Грин Б. Элегантная Вселенная. Пер. с англ.

Грин Б. Ткань космоса. Пер. с англ.

Пенроуз Р. НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ. О компьютерах, мышлении и законах физики.

В. Босс. Наваждение



Тел./факс:

(499) 135-42-46,

(499) 135-42-16,

E-mail:

URSS@URSS.ru

<http://URSS.ru>

Наши книги можно приобрести в магазинах:

«Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мысицкая, 6. Тел. (495) 625-2457)

«Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (495) 203-8242)

«Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (495) 238-5001, 780-3370)

«Дом научно-технической книги» (Ленинский пр-т, 40. Тел. (495) 137-6019)

«Дом книги на Ладонской» (м. Бауманская, ул. Ладонская, 8, стр. 1. Тел. 267-0302)

«Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (495) 939-4713)

«У Нептуна» (РГТУ) (м. Новослободская, ул. Чапаева, 15. Тел. (499) 973-4301)

«СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 448-2355)

Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:



В. Босс. Лекции по математике Т. 12. Контрпримеры и парадоксы

Рассматриваются контрпримеры и парадоксы, рассеянные по другим томам и территориям. В отличие от специализированных источников подобного сорта здесь проблематика охватывается шире — фактически во всем диапазоне университетского математического образования. Отбор материала производится в основном по критерию идеологической значимости. Главное внимание уделяется осмыслению результатов.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

В. Босс. Лекции по математике

Вышли в свет:

- Т. 1. Анализ
- Т. 2. Дифференциальные уравнения
- Т. 3. Линейная алгебра
- Т. 4. Вероятность, информация, статистика
- Т. 5. Функциональный анализ
- Т. 6. От Дюфанта до Тьюринга
- Т. 7. Оптимизация
- Т. 8. Теория групп
- Т. 9. ТФКП
- Т. 10. Перебор и эффективные алгоритмы
- Т. 11. Уравнения математической физики
- Т. 12. Контрпримеры и парадоксы
- Т. 13. Топология

Планируются к изданию следующие тома:

- Теория чисел
- Нелинейный анализ

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
 тел./факс (499) 135-42-16, 135-42-46
 или электронной почтой URSS@URSS.ru
 Полный каталог изданий представлен
 в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная
литература



В «Лекциях по математике» В. Босса вышли тома:
 1. Анализ. 2. Дифференциальные уравнения. 3. Линейная алгебра. 4. Вероятность, информация, статистика.
 5. Функциональный анализ. 6. От Диофанта до Тьюринга.
 7. Оптимизации. 8. Теория групп. 9. ТФКП. 10. Перебор и эффективные алгоритмы. 11. Уравнения математической физики. 12. Контрпримеры и парадоксы. 13. Топология.

*Готовятся: «Теория чисел»,
 «Нелинейный анализ».*



В условиях
 информатронного
 навальства
 инструменты
 вычисления для
 персонального
 работника.
 Поэтому учить
 надо как-то иначе.
 «Лекции» дают
 пример.
 Удобно ли, короткий –
 покажет время.
 Да в любом случае,
 это продукт нового
 поколения.
 Не же колеса,
 тот же экран, та же
 математическая
 суть. – не по-другому.

В. Босс



Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет,
 надо освободить его от деталей,
 обобщить центральные
 конструкции. Это тяжелая
 работа, которая в «Лекциях»
 прделывается автором.

Дается то, чего недостает. Общая
 картина, мотивация, взаимосвязи.
 И самое главное — легкость
 вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо
 уязвано. Громоздкие доказательства
 уязвы и занимают много строчек.
 Виртуоз

НИСШАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



В сети: URSSURSS.ru
 Каталог изданий в Интернете:
<http://URSS.ru>

Тел./факс: 7 (495) 136-42-16
 URSS Тел./факс: 7 (495) 136-42-06

7024 ID 96110



9 785397 006194 >

Содержание
 в сети: URSSURSS.ru
 Каталог изданий в Интернете:
 http://URSS.ru
 Тел./факс: 7 (495) 136-42-16
 URSS Тел./факс: 7 (495) 136-42-06