

В. Босс

ЛЕКЦИИ *по*
МАТЕМАТИКЕ

том

9

ТФКП

МОСКВА



Босс В.

Лекции по математике. Т. 9: ТФКП. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 216 с.

Содержание книги охватывает обычное ядро теории аналитических функций и дает некоторое представление об окрестностях, вплоть до проблематики, связанной с дзета-функцией и гипотезой Римана, остающейся до сих пор математической проблемой номер один. Рассматривается также стандартный набор приложений: дифференциальные уравнения, гармонические функции, асимптотические методы.

Изложение отличается краткостью и прозрачностью.

Для студентов, преподавателей, инженеров и научных работников.

Издательство ЛКИ, 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60 × 90/16. Печ. л. 13,5. Зак. № 1008.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

ISBN 978–5–382–00196–8

© Издательство ЛКИ, 2007



НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:

<http://URSS.ru>

Тел./факс: 7 (495) 135–42–16

Тел./факс: 7 (495) 135–42–46

5047 ID 59264



9 785382 001968 >

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения Издательства.

Оглавление

Предисловие к «Лекциям»	7
Предисловие к девятому тому	9
Глава 1. Предварительные сведения	11
1.1. Комплексные числа	11
1.2. Причины эффективности	13
1.3. Алгебраические истоки	17
1.4. Сфера Римана	18
1.5. Топологические понятия	20
Глава 2. Аналитические функции	24
2.1. Дифференцируемость	24
2.2. Примеры	28
2.3. Простейшие свойства	29
2.4. Физические интерпретации	32
2.5. Интегрирование и теорема Коши	34
2.6. Важные примеры	40
2.7. Интеграл Коши	43
2.8. Бесконечная дифференцируемость	45
2.9. Теорема Лиувилля	47
2.10. Существование обратной функции	48
2.11. Принцип компактности	50
Глава 3. Комплексные ряды	53
3.1. Числовые ряды	53
3.2. Функциональные ряды	55
3.3. Степенные ряды	58
3.4. Ряд Тэйлора	60
3.5. Аналитическое продолжение	61
3.6. Ряды Лорана	64

3.7. Особые точки	66
3.8. Бесконечно удаленная точка	70
3.9. Целые и мероморфные функции	72
3.10. Дополнения и задачи	76
Глава 4. Конкретные функции	78
4.1. Продолжение с действительной оси	78
4.2. Многозначные эталоны	81
4.3. Гамма-функция	84
4.4. Дзета-функция	87
Глава 5. Аналитическое продолжение и многозначность	90
5.1. Аналитический феномен	90
5.2. Теорема о монодромии	91
5.3. Корень квадратный	93
5.4. Точки ветвления и регулярные ветви	95
5.5. Римановы поверхности	98
5.6. Связь с теорией Галуа	100
Глава 6. Теория вычетов	103
6.1. Основная теорема	103
6.2. Вычет в бесконечности	106
6.3. Примеры	107
6.4. Логарифмические вычеты	110
6.5. Принцип аргумента	110
Глава 7. Конформные отображения	114
7.1. Мотивация	114
7.2. Общие свойства	117
7.3. Дробно-линейные преобразования	121
7.4. Функция Жуковского	127
7.5. Другие преобразования	129
7.6. Комплексная динамика	131
Глава 8. Операционное исчисление	133
8.1. Механизм производящих функций	133
8.2. Преобразование Лапласа	134

8.3. Обращение	139
8.4. Дельта-функция	139
8.5. Дифференциальные уравнения	142
8.6. Автоматическое регулирование	144
Глава 9. Гармонические функции	146
9.1. Контрпример	146
9.2. Свойства	147
9.3. Инвариантность и единственность	150
9.4. Задача Дирихле	152
9.5. Вариационный подход	154
Глава 10. Дзета-функция и гипотеза Римана	156
10.1. История вопроса	156
10.2. Ряды Дирихле	159
10.3. Теоретико-числовая подоплека	160
10.4. Идеология погружения	162
10.5. Теорема об универсальности ζ -функции	164
Глава 11. Функции нескольких переменных	166
11.1. Аналитичность	167
11.2. Степенные ряды	169
11.3. Области Рейнхарта	171
11.4. Кратный интеграл Коши	172
11.5. Особенности и нули	174
Глава 12. Асимптотические методы	175
12.1. Схемы и примеры	175
12.2. Асимптотика интегралов и рядов	178
12.3. Метод Лапласа	181
12.4. Метод стационарной фазы	183
12.5. Метод перевала	184
Глава 13. Сводка определений и результатов	187
13.1. Аналитические функции	187
13.2. Комплексные ряды	191
13.3. Конкретные функции	196

13.4. Аналитическое продолжение и многозначность	198
13.5. Теория вычетов	200
13.6. Конформные отображения	201
13.7. Операционное исчисление	203
13.8. Гармонические функции	205
13.9. Функции нескольких переменных	206
Сокращения и обозначения	209
Литература	210
Предметный указатель	211

Предисловие к «Лекциям»

Каркас доказательства состоит из пауз.

Для нормального изучения любого математического предмета необходимы, по крайней мере, 4 ингредиента:

- 1) *живой учитель;*
- 2) *обыкновенный подробный учебник;*
- 3) *рядовой задачник;*
- 4) *учебник, освобожденный от рутины, но дающий общую картину, мотивы, связи, «что зачем».*

До четвертого пункта у системы образования руки не доходили. Конечно, подобная задача иногда ставилась и решалась, но в большинстве случаев — при параллельном исполнении функций обыкновенного учебника. Акценты из-за перегрузки менялись, и намерения со второй-третьей главы начинали дрейфовать, не достигая результата. В виртуальном пространстве так бывает. Аналог объединения гантеля с теннисной ракеткой перестает решать обе задачи, хотя это не сразу бросается в глаза.

«Лекции» ставят 4-й пункт своей главной целью. Сопутствующая идея — экономия слов и средств. Правда, на фоне деклараций о краткости и ясности изложения предполагаемое издание около 20 томов может показаться тяжеловесным, но это связано с обширностью математики, а не с перегрузкой деталями.

Необходимо сказать, на кого рассчитано. Ответ «на всех» выглядит наивно, но он в какой-то мере отражает суть дела. Обозримый вид, обнаженные конструкции доказательств, — такого sorta книги удобно иметь под рукой. Не секрет, что специалисты самой высокой категории тратят массу сил и времени на освоение математических секторов, лежащих за рамками собственной специализации. Здесь же ко многим проблемам предлагается короткая

дорога, позволяющая быстро освоить новые области и освежить старые. Для начинающих «короткие дороги» тем более полезны, поскольку облегчают движение любыми другими путями.

В вопросе «на кого рассчитано» — есть и другой аспект. На сильных или слабых? На средний вуз или физтех? Опять-таки выходит «на всех». Звучит странно, но речь не идет о регламентации кругозора. Простым языком, коротко и прозрачно описывается предмет. Из этого каждый извлечет свое и двинется дальше.

Наконец, последнее. В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Не потому, что изучаемые дисциплины чересчур разрослись, а потому, что новых секторов жизни стало слишком много. И в этих условиях мало кто готов уделять много времени чему-то одному. Поэтому учить всему — надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Но в любом случае, это продукт нового поколения. Те же «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

Предисловие к девятому тóму

*Маленькие шаги покрывают
большие расстояния.*

Когда на лекционный курс выделяется n -е количество часов, — проблема обычно заключается не в том, как уместить предмет в заданные рамки, а в том, чем бы эти часы заполнить. Еще хуже ситуация при написании учебника. Чтобы книга не получилась слишком тонкой, ее нагружают чем придется. И ТФКП¹⁾ в этом отношении страдает больше других дисциплин. Теория-то в своей основе небольшая, но подробности, как и везде, неисчерпаемы. В итоге внимание, вместо того чтобы концентрироваться на ядре, размазывается по необозримой территории. Причем беда — не в самой толщине книг, а в отсутствии четко выраженных акцентов, в результате чего главное и второстепенное выглядят одинаково, как горячий утюг и холодный.

Для ТФКП даже принятый в «Лекциях» сравнительно небольшой объем тома — несколько великоват. Ядро теории намного уже университетских курсов. Например, «конформные отображения» обычно включаются в «основы» по инерции, хотя в принципе — это хороший материал для получения представлений об окрестностях²⁾. «Операционное исчисление» — общезначимо само по себе, но соседство с теорией аналитических функций — при наличии свободного места — вполне уместно. Что касается «дзета-функции» (глава 10), — то это явно самостоятельная тема, которая в общих курсах, как правило, разве что упоминается. Однако наличие приводных ремней здесь очевидно, а гипотеза Римана относительно нулей дзета-функции остается пока математической проблемой но-

¹⁾ ТФКП — теория функций комплексной переменной, эквивалент «теории аналитических функций».

²⁾ Разумеется, для кого-то окрестности лежат в центре профессионального интереса.

мер один — при весьма внушительном списке возможных следствий фундаментального характера. Поэтому глава 10, хотя и не добавляет чего-либо существенного к основам ТФКП, ее содержание терпимо в диапазоне общего образования.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1. Комплексные числа

1.1.1. Комплексными числами (КЧ) называются числа вида

$$z = x + iy,$$

где x, y – обыкновенные вещественные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2 = -1$. Величину x называют действительной частью, y – мнимой, и пишут

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Операции сложения и вычитания определяются покоординатным сложением и вычитанием:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

Два КЧ считаются равными, когда равны их действительные и мнимые части. Понятия «больше», «меньше» для КЧ не определены.

Правило умножения получается обычным раскрытием скобок. С учетом $i^2 = -1$, это дает

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2),$$

что удовлетворяет требованиям коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Для деления используется несложный трюк избавления от мнимой единицы в знаменателе, опирающийся на факт вещественности произведения

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

где $\bar{z} = x - iy$ — сопряженное число¹⁾. В результате деление

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

сводится к умножению $z_1 \bar{z}_2$ в числителе.

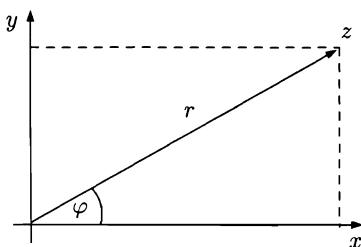


Рис. 1.1

Широко используется геометрическое представление КЧ, при котором числу $z = x + iy$ сопоставляется вектор на плоскости $z = \{x, y\}$ (рис. 1.1).

На базе геометрического представления возникает **тригонометрическая форма** КЧ. В полярных координатах ($\varphi = \arg z$ — аргумент, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль z)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

что позволяет записать z в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

В силу периодичности тригонометрических функций аргумент φ , вообще говоря, многозначен:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Неожиданно обнаруживается, что «неуклюжее» умножение имеет прозрачный геометрический смысл. При умножении z_1 и z_2 модули перемножаются, аргументы складываются. Формула

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

¹⁾ Для обозначения операции сопряжения помимо черты сверху используется также звездочка: $\bar{z} = z^*$.

элементарно проверяется, как и формула деления:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Более того, появляется естественная возможность извлечения корня, о чём в алгебраической записи говорить весьма неудобно. При $k = 0, 1, \dots, n-1$ получаются n различных корней n -й степени из z

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

что проверяется обратным возведением в n -ю степень по очевидной формуле *Муавра*

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

и учетом периодичности синуса и косинуса.

Отметим также формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

истинная природа которой будет выявлена в дальнейшем.

- Равенству $|z - a| + |z - b| = c$ удовлетворяют точки z , расположенные на эллипсе с фокусами a и b . (?)
- Равенство $|z - a| = |z - b|$ описывает прямую, проходящую перпендикулярно через середину отрезка ab . (?)

1.2. Причины эффективности

При невнимании к причинам — следствия, как правило, удивляют. Подобное творилось с комплексными числами два-три столетия подряд, и безотчетно воспринималось как мистика²⁾.

«Магическая природа» комплексных чисел дает о себе знать интуитивно неожиданным образом. Ситуация на *действительной*

²⁾ См. [3] и [4, т. 8], где обсуждаются характерные сюрпризы.

прямой странным образом почти всегда оказывается зависящей от того, как соответствующие задачи инсталлированы в комплексную плоскость. Линейные дифференциальные уравнения при попытке ограничиться рассмотрением \mathbb{R}^n из красивой теории превращаются в неудобный клубок загадочных фактов. Электротехника без КЧ блекнет и теряет логическую основу. Трансформаторы, разумеется, продолжают работать, но причины как-то смазываются. Если \mathbb{R} не расширить до \mathbb{C} , почему-то невозможно разобраться в механизме, управляющем сходимостью степенных рядов. Ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

сходится только при $|x| < 1$, а причина на территории \mathbb{R} выглядит странно. У $\frac{1}{1+x^2}$ есть, видите ли, особая точка $x = i$. Но с какой стати точка $i \in \mathbb{C}$ управляет сходимостью ряда на \mathbb{R} ?

Выход в комплексную плоскость вскрывает внутренние механизмы многих теорий. Скажем, теория матриц без КЧ — вообще не теория. Начинается-то все с естественных вопросов. Как найти систему координат, в которой матрица A стала бы диагональной, т. е. как найти преобразование T , обеспечивающее трансформацию A в наиболее простую форму:

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

◀ В случае (1.1) A' на векторы нового базиса $\{\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_n\}$ действует предельно просто: $A'\mathbf{f}'_j = \lambda_j \mathbf{f}'_j$, — что после умножения слева на T , справа на T^{-1} , дает $TA'T^{-1} \cdot T\mathbf{f}'_j T^{-1} = \lambda_j T\mathbf{f}'_j T^{-1}$, т. е. $A\mathbf{f}_j = \lambda_j \mathbf{f}_j$, где $\mathbf{f}_j = T\mathbf{f}'_j T^{-1}$. ►

Таким образом, для определения чисел λ_j и векторов \mathbf{f}_j надо решить уравнение $(A - \lambda I)x = 0$, каковое может иметь ненулевые решения $x = \mathbf{f}_j$ лишь в том случае, если матрица $A - \lambda I$ вырождена, т. е. $\det(A - \lambda I) = 0$, что называют *характеристическим уравнением* матрицы A , его решения λ_j — *собственными значениями*, а соответствующие ненулевые решения \mathbf{f}_j — *собственными векторами* матрицы A .

Далее линейный анализ подходит к фундаментальному поворотному моменту. Если уравнение $\det(A - \lambda I) = 0$ имеет n различных

действительных корней λ_j , то все слишком хорошо. Каждому λ_j соответствует свой собственный вектор \mathbf{f}_j . Эти векторы составляют базис новой системы, в которой матрица $T^{-1}AT$ принимает диагональный вид, а матрица перехода T образуется столбцами \mathbf{f}_j .

Угроза потери этих благ из-за того, что полином n -й степени редко имеет n действительных корней, подталкивает к выходу в комплексную плоскость. Там характеристическое уравнение всегда имеет n корней. Но если параметр λ комплексный, то к рассмотрению надо допускать комплексные векторы, иначе нет смысла говорить о ненулевых решениях x уравнения $(A - \lambda I)x = 0$.

Затем возникает необходимость в сдаче следующей позиции. Столбцы \mathbf{f}_j (теперь комплексные) образуют в совокупности матрицу перехода T , которая приводит A к диагональной форме $T^{-1}AT$, причем у $T^{-1}AT$ на диагонали могут стоять в том числе комплексные λ_j . Получается, что надо допускать к рассмотрению комплексные матрицы. Поэтому проще всего — и целесообразнее — с самого начала все считать комплексным. Конечно, не все так просто, как поначалу кажется, — подробности в [4, т. 3] — но комплексный вариант не только спасает теорию матриц от блуждания впопыхах, но и открывает многие ракурсы, которые иначе остались бы незамеченными. Спектр матрицы в \mathbb{C} , например, гарантирует в \mathbb{R}^n асимптотическую устойчивость системы $\dot{x} = Ax + b$, если $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех j . Система $\dot{x} = Ax + b$ изначально «действительна», но ее поведение оказывается следствием «комплексных пружин». И такое положение вещей характерно для действительного анализа вообще.

Вычисление k -й производной функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ весьма обременительно.

В то же время представление функции в виде

$$y = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right)$$

легко дает

$$y^{(k)} = \frac{i}{2} (-1)^k k! \left[\frac{1}{(x+i)^{k+1}} - \frac{1}{(x-i)^{k+1}} \right],$$

что легко переводится в действительную форму.

Вот пример «действительной» задачи [4, т. 8], которая без мнимой единицы просто-таки не решается. Числовая последовательность

$$1, 1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, \dots,$$

устроенная по правилу

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n, \quad a_0 = a_1 = 1, \quad (1.2)$$

с помощью подстановки $a_n = x^n$ в (1.2) приводится к квадратному уравнению $x^2 - 2x + 2 = 0$, имеющему комплексные корни $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$.

Общим решением (1.2) служит $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. Константы c_1 , c_2 определяются из начальных условий ($a_0 = a_1 = 1$). В результате

$$a_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2},$$

или, с учетом обычных тригонометрических ухищрений,

$$a_n = (\sqrt{2})^n \cos \frac{n\pi}{4}. \quad (1.3)$$

Первоначально задача не содержит даже намека на комплексные числа, каковых нет и в ответе (1.3). Тем не менее именно на просторах \mathbb{C} достигается результат. Возникает впечатление, что вспомогательный прием затрагивает какой-то глубинный механизм, работающий на «другом» топливе.

Такого sorta эмоции были широко распространены в «доалгебраические» времена, когда понятия *групп*, *кольц* и *полей* только внедрялись в сознание. Когда еще не сформировалась привычка к абстрактному мышлению алгебраического толка, и уже все было, но в то же время ничего не было. Когда изучение действий в отрыве от объектов приложения казалось противоестественным.

Однако постепенно идеология модельных реализаций вошла в плоть и кровь, и свободомыслie вторглось в мир «чисел». Стало ясно, что обычная единица ничуть не реальнее мнимой. В вопросе «что первично, курица или яйцо» тоже произошел переворот. Главенствующую роль взяли на себя операции (сложение, умножение, вычитание, деление) и их свойства. Числа стали как бы вторичны. Для выполнимости действий требовалось лишь подходящее игровое поле. Поначалу думалось — неважно какое. Потом выяснилось — вариант один: \mathbb{C} .

Иначе говоря, арифметические операции порождают цепную реакцию. Из натурального ряда возникают отрицательные числа, потом дроби, затем мнимая единица и, наконец, комплексные числа. На этом *единственно возможное* [4, т. 8] *расширение* игрового поля заканчивается. Таким образом, комплексную плоскость \mathbb{C} , как неизбежный финал роста натурального ряда, порождает арифметика, на которой стоит вся остальная математика. Именно поэтому КЧ дают о себе знать практически в любой области.

1.3. Алгебраические истоки

О происхождении комплексных чисел удобнее всего судить в обрамлении декораций из общей алгебры. Приведем небольшую выжимку из [4, т. 8].

1.3.1. Теорема. *По любому многочлену $f(x)$ над любым полем P всегда можно указать расширение поля $P' \supset P$, в котором $f(x)$ имеет корень.*

◀ В качестве P' годится фактор-кольцо $P[x]/I$, где $P[x]$ кольцо полиномов над P , а идеал $I = f(x)P[x]$ состоит из полиномов, делящихся на $f(x)$. Иначе говоря, элементами P' являются *классы вычетов по модулю идеала*. Сумма и произведение в P' определяются как остатки от деления на $f(x)$ обычной суммы и обычного произведения полиномов. ►

Поначалу возникает впечатление, что корнем объявлено нечто взятое с потолка. Однако это не так. Построено вполне определенное расширение $P' \supset P$ исходного поля P , и в этом расширении указан корень полинома. Другое дело, если имеется желание «пощупать» P' , но это уже вопрос изоморфизма полей с ориентацией на выбор удобных интерпретаций.

Рассмотрим, для примера, расширение поля действительных чисел \mathbb{R} присоединением к \mathbb{R} корня уравнения

$$x^2 + 1 = 0.$$

Начинать в самом деле можно «с потолка», объявив корнем некое i , — благо обозначение в нашей власти. Но далее мы оказываемся связанными «правилами игры». Расширение $\mathbb{R}' \supset \mathbb{R}$ обязано быть полем, включая в себя элементы

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Запись (1.4) однозначна, иначе из

$$z = a + bi = c + di, \quad b \neq d,$$

следовало бы

$$i = \frac{c - a}{d - b} \in \mathbb{R}.$$

Требования из определения поля приводят затем к свойствам, которые принято характеризовать как правила обращения с комплексными числами. Туман окончательно расступается в лучах следующего факта.

1.3.2. Все расширения поля действительных чисел \mathbb{R} , полученные присоединением к \mathbb{R} корня уравнения

$$x^2 + 1 = 0,$$

изоморфны между собой [4, т. 8].

Например, матрицы вида

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

образуют поле, изоморфное полю комплексных чисел $a+bi$. Сохранение операций и соответствия

$$1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

легко проверяются. В частности,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{т. е. } i^2 = -1.$$

Если бы, кстати, вместо i была введена в свое время матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

и стали бы рассматривать «числа»

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

вместо $a+ib$, — философских завихрений, надо полагать, поубавилось бы. Дело в том, что использование матриц вместо чисел выглядит странно, но вполне «материально». Механизм оголен, все на виду, почвы для фантазии не остается. Когда же речь заходит о мнимой единице, появляется возможность домысливать, что уводит в потусторонних направлениях.

1.4. Сфера Римана

Рассмотрим единичную *сферу S (Римана)*, лежащую на комплексной плоскости \mathbb{C} и касающуюся \mathbb{C} южным полюсом S . Северный полюс сферы N (рис. 1.2) соединим отрезком прямой с произвольной точкой $z \in \mathbb{C}$. Соединяющий отрезок пересечет поверхность S в некоторой точке z' . Геометрически очевидно возникновение взаимно

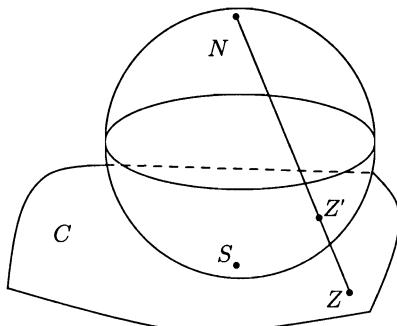


Рис. 1.2

однозначного соответствия $z \rightleftharpoons z'$. Исключение составляет северный полюс N . Однако, если \mathbb{C} пополнить «бесконечно удаленной точкой ∞ » — пополнение обозначают $\overline{\mathbb{C}}$ и называют *расширенной комплексной плоскостью* — соответствие $z \rightleftharpoons z'$ с дополнением $N \rightleftharpoons \infty$ становится полноценным. При этом $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow S$ называют *стереографической проекцией*.

Главный выигрыш рассмотрения $\overline{\mathbb{C}}$ или S заключается в переходе к компактному пространству³⁾ S с извлечением соответствующих выгод. Разумеется, фокус пополнения плоскости «бесконечно удаленной точкой ∞ » сам по себе ничего решить не может. Аналогичное пополнение \mathbb{R}^2 , например, ничего не дает (как правило). Вопрос в том, какого сорта задачи стоят за кадром. И вот для аналитических функций оказывается, что все бесконечно удаленные точки без потерь (и даже с выигрышем) могут быть объединены в один элемент ∞ . Просто таковы задачи ТФКП, лежащие в центре внимания, — что безбрежность окраин комплексной плоскости не так существенна, как их удаленность.

Приведенной информации о сфере Римана, вообще говоря, достаточно, чтобы не испытывать неудобств из-за недостатка сведений о деталях. Последние, как правило, не нужны, но сами по себе интересны и несколько неожиданны. При отображениях

$$\overline{\mathbb{C}} \rightarrow S, \quad S \rightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

³⁾ Заданием на сфере S той или иной компактной топологии, которая индуцирует также компактную топологию в $\overline{\mathbb{C}}$.

как выясняется, окружности переходят в окружности⁴⁾. Такого рода совпадения обычно свидетельствуют о наличии каких-то скрытых механизмов.

Специфика взаимного соответствия $S \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$ легко прослеживается на формулах. Пусть (x, y) — координаты комплексной плоскости, а (ξ, η, ζ) — координаты на S , причем оси ξ, η совпадают с осями x, y , а ось ζ направлена вертикально вверх, и центр S имеет координаты⁵⁾ $(0, 0, 1/2)$.

Уравнение прямой, проходящей через точки $z(x, y, 0)$ и $N(0, 0, 1)$, имеет вид

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{1 - \zeta}{1},$$

откуда

$$\xi = x(1 - \zeta), \quad \eta = y(1 - \zeta),$$

что приводит к формулам преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{1 - \zeta}, & y &= \frac{\eta}{1 - \zeta}; \\ \xi &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, & \eta &= \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, & \zeta &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}, \end{aligned}$$

с помощью которых легко убедиться, что при стереографической проекции окружность в $\bar{\mathbb{C}}$ переходит в окружность на S , и наоборот.

- Стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми. (?)

1.5. Топологические понятия

Сюжеты ТФКП развиваются в основном на плоских множествах, но *римановы поверхности* и функции многих комплексных переменных — несколько расширяют диапазон потребностей. Поэтому некоторые сведения топологического характера напоминаются далее в общей форме.

- Функцию $f : X \rightarrow Y$ называют *непрерывной* в точке x_0 , если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ , что⁶⁾ $\rho_Y[f(x), f(x_0)] < \varepsilon$, если $\rho_X(x, x_0) < \delta$; и — *непрерывной на X*, если она непрерывна в любой точке X .

⁴⁾ Окружность, проходящая на сфере Римана через северный полюс N (центр проектирования), отвечает на комплексной плоскости прямой линии. Прямые линии в $\bar{\mathbb{C}}$ также считаются окружностями (бесконечного радиуса).

⁵⁾ Для упрощения формул считаем, что сфера Римана имеет единичный диаметр (а не радиус).

⁶⁾ Индекс у ρ_Y указывает, о метрике какого пространства идет речь.

• Функция $f : X \rightarrow Y$ называется *равномерно непрерывной* на X , если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ , что $\rho_Y[f(x), f(y)] < \varepsilon$ для любых $x, y \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, y) < \delta$.

• Множество значений $f(X) \subset Y$ именуют *образом* X . А при совпадении, $f(X) = Y$, говорят, что f — *сюръективное отображение*, или *отображение «на»*. В общем случае $f : X \rightarrow Y$ говорят, что f отображает X «в» Y .

• Если образы различных элементов $x_1 \neq x_2$ не совпадают, f называют *инъективным отображением*, или *инъекцией*. В этом случае уравнение $y = f(x)$ имеет (если имеет) единственное решение $x = f^{-1}(y)$, где f^{-1} называют *обратным отображением*, которое может быть определено не на всем Y . Но если f еще и *сюръекция*, то $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

• В ТФКП инъективное на множестве Ω отображение f называют *однолистным* на Ω . При этом $w = f(z)$ является *взаимно однозначным* отображением Ω на $\Omega' = f(\Omega)$. Говорят, что функция $f(z)$ *однолистна в точке* $z = a$, если существует окрестность точки a , в которой $f(z)$ однолистна.

• *Гомеоморфизмом* называют взаимно однозначное (инъективное плюс сюръективное) и непрерывное в обе стороны⁷⁾ отображение $f : X \rightarrow Y$. Пространства, между которыми можно установить гомеоморфизм, считаются *гомеоморфными*. Отображение называют *локальным гомеоморфизмом*, если у любой пары точек x, y , такой что $f(x) = y$, найдутся окрестности, гомеоморфно отображаемые (с помощью f) друг на друга.

• Пространство X называется *связным*, если в его топологии нет, кроме X и \emptyset , других множеств, одновременно открытых и замкнутых. Характеристическое свойство: *связное пространство нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых непустых множеств*.

• Пространство X считается *линейно связным*, если для любых двух точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $P : [0, 1] \rightarrow X$, такое что $P(0) = a$, $P(1) = b$, т. е. любые две точки могут быть соединены непрерывной кривой, целиком лежащей в X . *Линейная связность* влечет за собой *связность — обратное неверно*. Однако *открытое множество* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *связно в томм*⁸⁾ *случае*, когда оно линейно связано.

Специфика ТФКП заключена, главным образом, в используемых понятиях областей и границ. *Область*, определяемая как *открытое связное множество*, для целей комплексного анализа

⁷⁾ Непрерывно как f , так и f^{-1} .

⁸⁾ См. «Сокращения и обозначения».

оказывается чересчур общим понятием, имея дело с которым, пришлось бы учитывать «неприятности» топологического порядка, малосущественные в теории аналитических функций.

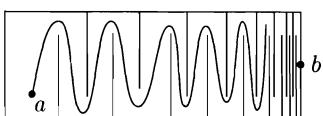


Рис. 1.3

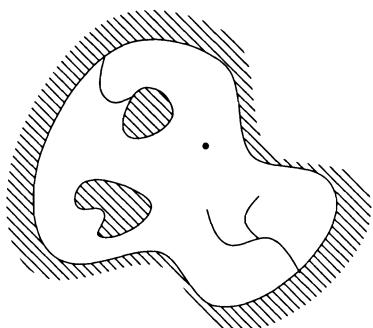


Рис. 1.4

Пришлось бы, например, учитывать парадокс Брауэра [3] о существовании любого числа областей, имеющих одну и ту же (!) границу. Либо допускать возможность существования областей с недостижимой изнутри границей⁹⁾. И даже в «менее аномальных» ситуациях пришлось бы иметь дело со сложностями, уводящими от фарватера.

Поэтому под *областью* в комплексной плоскости \mathbb{C} обычно подразумевают открытое связное множество с *достаточно простой границей* — например, *кусочно-гладкой* (состоящей из конечного числа

кривых, описываемых непрерывно дифференцируемыми функциями $z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$). При этом считается, как правило, что *граница представляет собой объединение конечного числа замкнутых кривых, разрезов и точек* (рис. 1.4). Число связных частей границы называют *порядком связности области*. Область с границей из одного связного куска — *односвязна*¹⁰⁾. *Направление обхода* границы, при котором область остается слева, принято считать *положительным*.

Соблазн формулировки результатов в наиболее общем виде часто подталкивает к использованию менее жестких понятий. Широко распространенный

⁹⁾ Полосу $\{(x, y) : x > 1, 0 < y < 1/x^2\}$ будем наматывать на себя без самопересечений, приближаясь изнутри к некоторой окружности C . Скрученная полоса образует область Ω , в границу которой входит C . Точки $z \in C$ недостижимы изнутри области, их нельзя соединить с точками $w \in \Omega$ кривыми, лежащими в Ω . Другой пример: внутренность прямоугольника с двумя удаленными гребенками, имеющими бесконечное число зубьев, накапливающихся по мере смещения вправо — рис. 1.3. Точки a и b соединить непрерывной кривой не удается.

¹⁰⁾ Это, вообще говоря, не противоречит обычному пониманию односвязной области как множества, в котором любая замкнутая кривая может быть стянута (непрерывно деформирована, гомотопирована) в точку.

стандарт: *жорданова область*, определяемая как область, ограниченная *простой замкнутой кривой*, или *жордановым контуром*¹¹⁾. При этом в жертву приносится гладкость границы.

Особого упоминания заслуживает понятие окрестности. С одной стороны, говорить здесь не о чем, ибо *окрестность* точки a есть открытое множество (в частности, шар), точку a содержащее. Но иногда, а в ТФКП особенно часто, требуется «окрестность без точки a », что оговаривается тем или иным способом типа $z \neq a$ либо: «окрестность с выколотой точкой a ». Но оговорки надоедают, и тогда в рассуждениях начинают фигурировать просто окрестности, что может приводить к недоразумениям. Однако вольность речи имеет свои плюсы, и здесь трудно рассчитывать на «соблюдение правил движения».

Проблема может показаться малозначительной, но она довольно весома. Вот тематическая ошибка, растиражированная в учебниках в миллионах экземпляров.

«Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ , что $|f(x) - A| < \varepsilon$ как только $|x - a| < \delta$ ».

Правильно в конце: $0 < |x - a| < \delta$ вместо $|x - a| < \delta$. Иначе говоря, в ошибочном определении сказано «как только x принадлежит δ -окрестности точки a », а надо добавить «с выколотой точкой a ». Дело в том, что предел $f(x)$ при $x \rightarrow a$ существует (или не существует) независимо от значения $f(a)$ и даже от того, определена ли функция $f(x)$ в точке a . Ошибочное определение требует еще и непрерывности: $f(a) = A$.

¹¹⁾ То есть — гомеоморфным образом окружности.

Глава 2

Аналитические функции

В главе дается описание каркаса теории, каковой желательно иметь в голове, прежде чем углубляться в детали. Рассматриваются стартовые понятия и результаты с некоторым «забеганием вперед». Тут не всегда все до конца ясно, но есть общая картина, скелет, на который удобно впоследствии нанизывать дополнительные подробности.

2.1. Дифференцируемость

Функцией комплексного переменного

$$z = x + iy$$

можно было бы считать любую функцию вида

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

но тогда, с точностью до декораций, все свелось бы к изучению отображений на плоскости, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}.$$

Аналитические функции, изучаемые в ТФКП, выделяет особое понятие *дифференцируемости*, каковая определяется как представимость приращения функции в виде

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|), \quad (2.1)$$

где A — комплексное число, зависящее от точки z , которое называют *производной* $f(z)$ в точке z и обозначают $f'(z)$ либо df/dz .

Может показаться, что ничего особенного в таком определении нет, но это только на первый взгляд. Если бы речь шла, например,

просто об отображении плоскости, то определение дифференцируемости f совпадало бы по записи с (2.1), но A было бы матрицей,

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Мы же хотим, чтобы A было комплексным числом¹⁾. Это очень сильно ограничивает класс рассматриваемых функций.

Определение производной записывают также в виде

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad (2.3)$$

но в (2.3) требуется дополнительно независимость предела от пути стремления Δz к нулю, что приводит к *необходимости выполнения для $f = u + iv$ условий Коши–Римана*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}}. \quad (2.4)$$

Необходимость (2.4) устанавливается совсем просто.

◀ В случае $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и $\Delta x \rightarrow 0$ — вычисление предела (2.3) дает

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'(z),$$

в случае $\Delta z = 0 + i\Delta y$ и $\Delta y \rightarrow 0$ тот же предел (2.3) оказывается равным

$$\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = f'(z).$$

Оба варианта обязаны совпадать, что и приводит к (2.4). ►

¹⁾ Другими словами, чтобы действие матрицы A на Δz было эквивалентно умножению на комплексное число (растяжение плюс поворот). Такие матрицы, как известно, имеют вид $k \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$, откуда следует необходимость условия (2.4).

(!) Независимость предела (2.3) от характера стремления Δz к нулю — позволяет вычислять производную $f'(z)$ любым удобным способом:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{либо} \quad f'(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

С учетом (2.4) это дает дополнительно:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.5)$$

2.1.1. Необходимые условия Коши—Римана (2.4) в случае непрерывности частных производных функций u, v в некоторой области D достаточны для дифференцируемости f в D , т. е. в каждой точке $z \in D$.

- ◀ В силу непрерывности частных производных²⁾:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta z|).$$

Аналогично для Δv . С учетом условий Коши—Римана это приводит к

$$\Delta f(z) = \Delta u + i \Delta v = \left(\frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx} \right) (\Delta x + i \Delta y) + o(|\Delta z|),$$

что совпадает с определением (2.1). ►

(!) Требование непрерывности частных производных в п. 2.1.1 — необязательно. Достаточно дифференцируемости u и v как функций действительных переменных в каждой точке $(x, y) \in D$, для чего одного лишь существования частных производных не хватает [4, т. 1].

2.1.2. Функции, дифференцируемые в некоторой области D , называются **аналитическими** в D .

Тавтология терминов может показаться странной. Зачем для дифференцируемой функции выдумывать еще одно имя? Но тут есть исключительное оправдание. Оказывается, *аналитические функции обладают совершенно неожиданным свойством*. Дело заключается в следующем. Обыкновенный анализ приучает к мысли, что функция может быть дифференцируема либо один раз, либо два, либо n раз. Как будет показано далее, имеет место удивительный факт:

Аналитическая функция, дифференцируемая по определению всего один раз, оказывается бесконечно дифференцируемой.

²⁾ Ниже Δ обозначает (пока) приращение, а не оператор Лапласа.

Заметим, что аналитичность далее подразумевает существование *области*, в которой функция дифференцируема (хотя бы в некоторой окрестности некоторой точки). Иногда говорят об аналитичности в точке, но это к пониманию предмета не прибавляет чего-нибудь существенного, хотя аномальные ситуации, разумеется, встречаются. Функция $f(z) = |z|^2$, например, дифференцируема только при $z = 0$.

Отметим своеобразные, иногда удобные, обозначения,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y). \quad (2.6)$$

◀ Происхождение (2.6) объясняется записью дифференциалов:

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy,$$

откуда

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}.$$

Это приводит для

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

(для f как функции двух переменных) к соотношению³⁾

$$df = \frac{1}{2}(f_x - if_y) dz + \frac{1}{2}(f_x + if_y) d\bar{z} = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad ▶$$

С помощью (2.6) условия Коши—Римана (2.4) записываются в форме

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \quad (2.7)$$

что интерпретируется как независимость $f(z)$ от \bar{z} .

Равенство (2.7) для $f = u + iv$ означает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i^2 \frac{\partial v}{\partial y} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned}$$

т. е. эквивалентно условиям Коши—Римана.

³⁾ Заметим, f_x и $\frac{\partial f}{\partial x}$ — равносильные обозначения.

2.2. Примеры

Несмотря на довольно жесткие рамки, аналитические функции весьма многочисленны и разнообразны.

1. Функция $f(z) = z^n$ при любом натуральном n дифференцируема, ее производная $f'(z) = nz^{n-1}$ легко вычисляется:

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} + (\dots) \cdot \Delta z \rightarrow nz^{n-1}$$

при $\Delta z \rightarrow 0$. Независимость от характера стремления Δz к нулю очевидна.

2. Сумма и произведение аналитических в D функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — аналитичны в D . Функция $f_1(z)/f_2(z)$ аналитична в D всюду, где $f_2(z) \neq 0$. Композиция аналитических функций, $f(g(z))$, аналитична.

◀ Обоснование слова в слово повторяет обычные доказательства аналогичных утверждений (по поводу дифференцируемости) в случае действительного аргумента. ►

3. Функция $f(z)$, представимая сходящимся в некотором круге ($|z| < R$) рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

аналитична при $|z| < R$. Пример дается пока авансом⁴⁾.

4. Положим

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^{x+iy}.$$

На действительной оси функция совпадает с e^x . Условия Коши—Римана легко проверяются. (?) Это может служить пока формальным определением комплексной экспоненты. Более глубокие мотивы такого определения вскроются позже.

5. Функция $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ не аналитична. Условия Коши—Римана выполняются только при $z = 0$.

Из перечисленных примеров может возникнуть впечатление, что почти все функции аналитичны. На самом деле, конечно, «почти все — не аналитичны», если их оценивать на фоне непрерывных функций и даже — непрерывно дифференцируемых. Но практика сталкивает нас в большинстве случаев с аналитическими функциями: синусы, логарифмы, дробно-рациональные выражения и т. п.

⁴⁾ До рассмотрения вопросов сходимости комплексных рядов.

Однако есть в некотором роде обескураживающий пример. Функция $\bar{z} = x - iy$ не аналитична⁵⁾. Сопряжение нарушает аналитичность и в общем случае. «Зеркальный образ»

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

и сама функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

не могут одновременно удовлетворять условиям Коши—Римана, если не говорить о тривиальном исключении $f(z) \equiv \text{const.}$

2.3. Простейшие свойства

Остановимся на некоторых свойствах аналитических функций, где понимание достигается малой кровью.

1. Чем меньше окрестность точки z , тем точнее выполняется соотношение $\Delta f = f'(z)\Delta z$, которое означает, что все Δz поворачиваются на один и тот же угол и растягиваются в одно и то же число раз. Растижение и поворот определяются множителем $f'(z)$. Поэтому *малые фигуры переводятся функцией f в подобные* (углы сохраняются, размеры пропорционально изменяются — разумеется, с точностью до «о малых»). Это служит основанием называть такие преобразования *конформными*.

Разумеется, если кривые пересекаются в плоскости z под углом α , то их образы при отображении f пересекаются в точности под углом α без всяких «о малых».

2. Тот факт, что аналитическое преобразование $w = f(z)$ локально представляет собой растяжения и повороты, влечет за собой обязательное сохранение ориентации. Иначе говоря, образы всех маленьких вихрей оказываются закрученены в ту же сторону, в силу чего невозможны *отражения*. Именно поэтому дифференцируемость

⁵⁾ Нигде не дифференцируема также функция $f(z) = 2x + iy$, что указывает на широкое поле контрпримеров, если в таковых есть потребность. Однако теория, как и Вселенная, растет в благоприятных направлениях.

$f(z)$ исключает дифференцируемость $\overline{f(z)}$. При этом двукратное сопряжение $\overline{f(\bar{z})}$ сохраняет аналитичность (см. п. 7.2.3).

3. Задание частных производных определяет функцию с точностью до константы. Поэтому задание одной из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, в силу условий Коши—Римана, с точностью до константы определяет вторую.

4. В силу условий Коши—Римана

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x \equiv 0, \quad (2.8)$$

т. е. градиенты функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ортогональны в любой точке z , а значит, ортогональны линии постоянного уровня⁶⁾ функций u и v .

Это, в свою очередь, влечет за собой многочисленные следствия. Например, если аналитическая в области D функция f не константа, то ее модуль $|f(z)|$ не может принимать максимальное значение внутри D — так называемый *принцип максимума модуля*. Вышесказанное позволяет указать причину. Чтобы $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ было максимально, требуется

$$2u \operatorname{grad} u + 2v \operatorname{grad} v = 0,$$

что при условии (2.8) перпендикулярности градиентов $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{grad} v$ и $u, v \neq 0$ возможно лишь в случае равенства нулю обоих градиентов. Иначе говоря, точка максимума функции $u^2 + v^2$ обязана быть экстремальной точкой обеих функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ одновременно. Наложить подходящим образом картинки линий постоянного уровня функций u и v — не удается⁷⁾. Поэтому максимум модуля аналитической функции, если достигается, то только на границе области.

Для превращения высказанных соображений в строгое доказательство необходимо повозиться с деталями. Поэтому *принцип*

⁶⁾ Семейства кривых $u(x, y) = C$, $v(x, y) = C$.

⁷⁾ Если $u(x, y)$ достигает минимума или максимума в точке (x_0, y_0) , то в окрестности (x_0, y_0) линии тока поля $\operatorname{grad} u$ или расходятся, или сходятся. Но тогда линии тока перпендикулярного поля $\operatorname{grad} v$ будут замыкаться по кругу, что невозможно, ибо любое градиентное поле обязано быть безвихревым, т. е. $\operatorname{grad} v \equiv 0$ [4, т. I].

максимума предпочтают доказывать на том этапе развития теории, когда это делается легко и без натяжек. Беда лишь в том, что «легко» и «прозрачно» не всегда совпадают. Легкость обоснования иногда оставляет впечатление фокуса. Поэтому наглядность даже с изъянами имеет свою цену.

5. Дифференцируя условия Коши—Римана и исключая одну из функций u или v , легко убедиться, что обе удовлетворяют *уравнению Лапласа*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

и являются, таким образом, гармоническими функциями, хорошо известными благодаря другим источникам происхождения.

Кто знаком с дифференциальными уравнениями в частных производных, может сразу сделать неожиданный (для аналитических функций) вывод. Задание поведения гармонической функции на границе области полностью определяет ее значения внутри области. Для дифференциальных уравнений такая связь естественна и привычна, но для ТФКП — несколько шокирующая. Все, чем занимается теория аналитических функций, — как выясняется — это изучение решений одного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Специалисты по дифурам удивляются противоположным образом: «Неужели теория одного дифура — это целая ТФКП?»⁸⁾

- При использовании полярных координат для $z = re^{i\varphi}$ условия Коши—Римана для функции $f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$ принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \quad (2.9)$$

- ◀ Это сразу вытекает из обобщенных условий Коши—Римана [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.10)$$

⁸⁾ Здесь есть некоторая натяжка в ту и другую сторону — см. главу 9.

где $\partial/\partial s$, $\partial/\partial t$ обозначают производные по взаимно перпендикулярным направлениям s и t , при условии $is = t$.

В случае полярных координат (r, φ) , полагая s — единичным вектором, касательным к окружности $|z| = r$ и направленным против часовой стрелки, а t — внутренней нормалью к той же окружности, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{r\partial\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r},$$

что и приводит к (2.9). ►

2.4. Физические интерпретации

Гидродинамическая модель. Вектор скорости

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

двумерного безвихревого потока — без источников и стоков — обязан удовлетворять двум уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Чтобы (2.11) совпадало с условиями Коши—Римана, достаточно взять за исходную функцию

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y),$$

каковая «видится в зеркале» при наблюдении за $f(z)$. В данном случае аналитической должна быть $\overline{f(z)}$, но не $f(z)$, — если желательно говорить об условиях Коши—Римана.

Линии тока в модели совпадают с траекториями дифференциального уравнения $dz/dt = \overline{f(z)}$. Взаимосвязь моделей (ТФКП и гидродинамики) двусторонняя. Интуитивные представления о ламинарных течениях позволяют кое-что заключать об аналитических функциях, и «наоборот».

Вот пример взаимодействия моделей. Действительная часть неопределенного интеграла Φ от комплексной скорости $\overline{f(z)}$, как выясняется, — может служить потенциалом скорости потока \mathbf{v} . Действительно, пусть

$$\Phi'_z(z) = \frac{d\Phi}{dz} = \overline{f(z)}, \quad \Phi(z) = \theta(x, y) + i\xi(x, y).$$

В силу (2.5)

$$\Phi'_z(z) = \frac{\partial \theta}{\partial x} - i \frac{\partial \theta}{\partial y} = u - iv,$$

откуда

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = v.$$

В результате $\operatorname{grad} \theta = \mathbf{v}$. Иначе говоря, θ является потенциалом скорости потока.

Волновой «мираж». Линейное волновое уравнение

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0$$

имеет решением

$$U(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct),$$

где c — скорость распространения, а φ и ψ — более-менее произвольные функции (начальные возмущения, распространяющиеся влево и вправо). Результат сразу вытекает из разложения (факторизации) *волнового оператора*

$$\square = \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x),$$

сводящего задачу к уравнениям первого порядка:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Действуя аналогичным образом в задаче

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0,$$

приходим к разложению *оператора Лапласа*

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = (\partial_y - i\partial_x)(\partial_y + i\partial_x).$$

Считая теперь y — временем, i — скоростью распространения волны, получаем решение

$$U(x, y) = \varphi(x - iy) + \psi(x + iy),$$

где

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

что означает для

$$\varphi = u(x, y) - iv(x, y) \quad \text{и} \quad \psi = v(x, y) + i\xi(x, y)$$

выполнение условий Коши—Римана.

2.5. Интегрирование и теорема Коши

При рассмотрении интегрирования аналитических функций одной из опорных точек является *формула Грина*⁹⁾ преобразования криволинейного интеграла по контуру C , ограничивающему область $S \subset \mathbb{R}^2$, — в двойной интеграл по S :

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx dy. \quad (2.12)$$

Смысъл (2.12) заключается в равенстве потока векторного поля

$$\mathbf{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$$

через границу C — сумме (интегралу) интенсивностей источников и стоков,

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

внутри C .

Комплексный интеграл

$$\int_L f(z) dz$$

вдоль кривой L можно рассматривать как предел суммы

$$\sum_k f(z_k) \Delta z_k$$

при стандартном измельчении разбиения. После умножения $f = u + iv$ на $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и перехода к пределу получается:

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L u dy + v dx.$$

⁹⁾ См. раздел 7.6 в [4, т. 1].

2.5.1. Теорема Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D . Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру C , лежащему в D , равен нулю.

◀ Доказательство моментально дает применение к действительной и мнимой части контурного интеграла

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C u dy + v dx$$

формулы Грина (2.12) с последующим учетом того, что u и v удовлетворяют условиям Коши—Римана. ►

(!) Доказано, вообще говоря, меньше, чем утверждает теорема 2.5.1. Дело в том, что формула Грина (2.12) обычно предполагает непрерывную дифференцируемость P и Q , не говоря о той или иной гладкости контура C . Однако непрерывная дифференцируемость $f(z)$ в рамках *теоремы Коши*, как выясняется задним числом, имеет место сама по себе, — и ее нет смысла предполагать. В то же время для (2.12) одной лишь дифференцируемости P и Q в D — недостаточно. Из цугцванга выводит классическая *лемма Гурса*, представляющая собой дословное повторение формулировки теоремы 2.5.1 с заменой произвольного контура C треугольником, лежащим в D . Доказательство обходится без *формулы Грина* и без «непрерывной дифференцируемости». Переход к произвольному контуру C осуществляется аппроксимацией C многоугольником с последующим разбиением того на треугольники, и переходом к пределу. При этом, конечно, возникают претензии к контуру, но они и так подразумеваются — по крайней мере, интеграл по C обязан существовать¹⁰⁾.

Все это для кого-то выглядит наукообразием, и здесь нет резона спорить. Каждый идет своим путем, в зависимости от характера и настроения. Упрощенный взгляд помогает видеть целое, структуру, причины, связи. Скрупулезный анализ отделяет реальное положение дел от кажущегося. То и другое важно, но второе без первого, надо признать, теряет опору.

Теорема 2.5.1 остается справедливой и в более общем случае. Область D может быть не обязательно односвязной. Если контур C

¹⁰⁾ Что обеспечивается *спрямляемостью* кривой C , каковая равносильна конечности длины.

таков, что его можно стянуть (деформировать) в точку по области D , то интеграл от $f(z)$ по C равен нулю. Более того, интегрировать можно не по контуру, а по многокомпонентной границе.

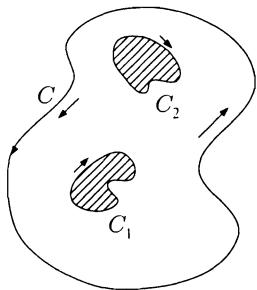


Рис. 2.1

На рис. 2.1 изображен пример области, ограниченной «извне» контуром C , «изнутри» — контурами C_1 , C_2 . Таким образом, заштрихованные участки выбрасываются.

Нулю будет равен интеграл по границе $\Gamma = \{C, C_1, C_2\}$, состоящей из всех трех контуров. При этом важно лишь согласование ориентаций. Обычно принимается *положительная ориентация*, задающая направление движения вдоль контуров, при котором область остается слева.

В ситуации, изображенной на рис. 2.1, этому соответствует движение по контуру C против часовой стрелки, по контурам C_1 и C_2 — по часовой.

В условиях теоремы 2.5.1, если кривые $L_1 \in D$ и $L_2 \in D$ имеют одни и те же концевые точки a, b , то

$$\int_{L_1} f(z) dz = \int_{L_2} f(z) dz,$$

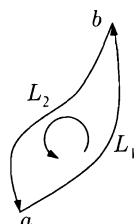


Рис. 2.2

что сразу получается интегрированием по замкнутому контуру $\{L_1 \cup L_2\}$ (рис. 2.2). Но для этого (!) *внутри контура, образованного кривыми L_1 и L_2 , не должно быть особых точек, в которых $f(z)$ не аналитична*¹¹⁾. В этом случае говорят о *гомотопности кривых L_1 и L_2* — иначе говоря, о возможности непрерывно деформировать L_1 в L_2 (особая точка внутри контура $\{L_1 \cup L_2\}$ была бы препятствием).

Другими словами, интеграл

$$\int_L f(z) dz$$

¹¹⁾ Иначе нарушается предположение теоремы 2.5.1 об аналитичности функции $f(z)$ в области D .

не зависит от пути интегрирования, а определяется лишь начальной и конечной точками. Поэтому вместо

$$\int_L f(z) dz$$

можно писать

$$\int_a^b f(z) dz.$$

При этом очевидно *свойство аддитивности*:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

Для $f(z)$, аналитичной в односвязной области D , положим

$$F(z) = \int_a^z f(w) dw,$$

где подразумевается путь интегрирования по произвольной кривой, лежащей в D и ведущей из a в z .

2.5.2. Функция $F(z)$ также аналитична, причем

$$F'(z) = f(z).$$

◀ Действительно, в силу независимости интеграла от пути,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z + \Delta z} f(w) dw,$$

откуда

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(w) - f(z)] dw.$$

Независимо от характера стремления $\Delta z \rightarrow 0$ — интеграл справа стремится к нулю¹²⁾, что обеспечивает $F'(z) = f(z)$. ►

Множество *первообразных* $\Phi(z)$,

$$\Phi'(z) = f(z),$$

называется *неопределенным интегралом функции* $f(z)$. Очевидно, первообразные отличаются друг от друга на константу. (?) Поэтому для любой из них

$$\int_a^b f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отметим наконец следующий результат, обратный теореме Коши 2.5.1.

2.5.3. Теорема Морера. *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл*

$$\oint_C f(z) dz$$

по любому замкнутому контуру C , лежащему в D , равен нулю, то $f(z)$ аналитична в D .

◀ Предположения теоремы обеспечивают независимость интеграла

$$\int_{z_0}^z f(z) dz$$

от пути интегрирования, определяя тем самым функцию

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz,$$

аналитичность которой вместе с равенством $F'(z) = f(z)$ устанавливается по сути так же, как в п. 2.5.2. Аналитичность производной $f(z) = F'(z)$ следует из аналитичности $F(z)$. ►

¹²⁾ Опять-таки в силу независимости интеграла от пути, можно считать — при достаточно малом по норме Δz , — что интегрирование происходит по прямолинейному отрезку, соединяющему z с $z + \Delta z$.

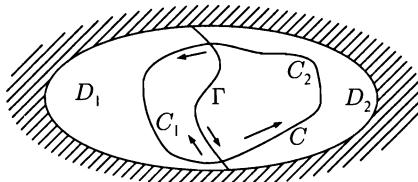


Рис. 2.3

Теорема 2.5.3 выручает в тех ситуациях, когда выхода из положения с ходу не видно. Например, пусть функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны, соответственно, в областях D_1 и D_2 , которые ограничены по гладкой кривой Γ (рис. 2.3), и $\varphi(z) \equiv \psi(z)$ на Γ , причем φ и ψ — непрерывны, каждая на объединении «своей» области с Γ . Будет ли тогда функция

$$f(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \text{для } z \in D_1 \cup \Gamma, \\ \psi(z), & \text{для } z \in D_2 \cup \Gamma, \end{cases} \quad (2.13)$$

аналитична на объединении¹³⁾ $D_1 \cup \Gamma \cup D_2$?

Это весьма важный вопрос для проблематики *аналитического продолжения* (глава 5), и он ставит в тупик при бесхитростном подходе. Выход из положения обеспечивает *теорема Морера*.

◀ Сложение равенств¹⁴⁾

$$\oint_{C_1} \varphi(z) dz = 0, \quad \oint_{C_2} \psi(z) dz = 0,$$

верных в силу аналитичности $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, — для функции (2.13) дает

$$\oint_C f(z) dz = 0,$$

поскольку часть пути по Γ при обходе контура C_1 проходит в одном направлении, при обходе C_2 — в противоположном. Далее остается сослаться на теорему 2.5.3. ►

¹³⁾ Точнее говоря, на внутренности $\overline{D_1 \cup D_2}$.

¹⁴⁾ Контуры C , C_1 , C_2 изображены на рис. 2.3.

2.5.4. В оговоренных выше предположениях относительно функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функция (2.13) аналитична на «объединенной» области $D_1 \cup \Gamma \cup D_2$.

Вот другой пример, который опять-таки служит принципиальной вехой комплексного анализа.

2.5.5. Теорема о равномерном пределе. Если функция двух переменных $f(z, \xi)$ аналитична в области D при любом ξ и

$$f(z, \xi) \rightarrow g(z) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \xi_0$$

равномерно по z на любом замкнутом подмножестве D , то функция $g(z)$ также аналитична в D .

◀ Ядро доказательства состоит в простой манипуляции. Смена порядка интегрирования и предельного перехода,

$$\oint_C g(z) dz = \oint_C \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} f(z, \xi) dz = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \oint_C f(z, \xi) dz, \quad (2.14)$$

возможна благодаря равномерной сходимости. Последний интеграл в (2.14) равен нулю по *теореме Коши*. Поэтому

$$\oint_C g(z) dz = 0,$$

и остается сослаться на *теорему Морера*. ►

2.6. Важные примеры

2.6.1. Функция z^n при любом $n = 1, 2, \dots$ аналитична везде. Поэтому интеграл от z^n по любому замкнутому контуру равен нулю.

2.6.2. Пусть C — окружность с центром в нуле. Тогда

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i, \quad (2.15)$$

если контур C положительно ориентирован¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Против часовой стрелки.

◀ Это принципиальный для дальнейшего сценария факт. Интеграл легко вычисляется в полярных координатах. Чтобы точка z при увеличении угла φ двигалась против часовой стрелки, полагаем

$$z = R(\cos \varphi - i \sin \varphi) = Re^{-i\varphi},$$

а так как $R = \text{const}$, то

$$dz = R(-\sin \varphi - i \cos \varphi) d\varphi = iRe^{-i\varphi} d\varphi.$$

Поэтому

$$\oint_C \frac{dz}{z} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \quad ▶$$

Наряду с (2.15) очевидно также

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad (2.16)$$

где Γ — окружность с центром в z_0 .

Равенство (2.16) из (2.15) получается заменой координат.

Интеграл (2.16) оказывается не равным нулю, но противоречия с теоремой 2.5.1 нет, поскольку функция $1/(z - z_0)$ не аналитична при $z = z_0$, и контур C нельзя стянуть в точку в $\mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}$. Именно последнее обстоятельство является критическим для справедливости теоремы Коши.

Если контур C не деформируется в точку, отличие контурного интеграла от нуля, разумеется, не обязательно. Например:

2.6.3. Интеграл по тому же контуру, что и в п. 2.6.2,

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{при целом } n \neq 1. \quad (2.17)$$

◀ В обозначениях предыдущего доказательства:

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\varphi} d\varphi = 0,$$

в силу

$$e^{i(n-1)\varphi} = \cos(n-1)\varphi + i \sin(n-1)\varphi$$

и 2π -периодичности синуса и косинуса. ▶

Разумеется,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0 \quad \text{при целом } n \neq 1, \quad (2.18)$$

где Γ — окружность с центром в z_0 .

(!) Принципиальное отличие ситуации (2.15) от (2.17) заключается в том, что интеграл от $1/z^n$ при $n \neq 1$ — есть однозначная функция $z^{1-n}/(1-n)$, а интеграл от $1/z$ — равен многозначному логарифму (глава 5).

Для дальнейшего важно еще отметить *аддитивность* контурного интеграла в следующем смысле. Если контуры C_1 и C_2 имеют общий участок C_{12} , после выбрасывания которого образуется контур C , причем C_{12} проходится в противоположных направлениях при интегрировании по C_1 и C_2 , то

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = \oint_C f(z) dz.$$

Это не что иное как свойство слагаемых противоположных знаков взаимно сокращаться. Ситуация на рис. 2.4 *a* абсолютно прозрачна.

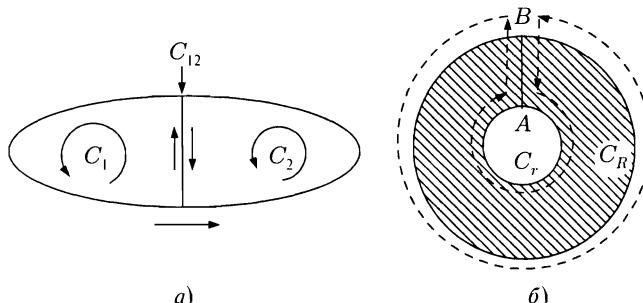


Рис. 2.4

На рис. 2.4 *б* изображен более сложный пример. Функция $f(z)$ аналитична в кольце, ограниченном малой C_r и большой окружностью C_R . Интеграл по замкнутому контуру C_{rR} , проходящему C_R против часовой стрелки, потом по BA , затем C_r по часовой стрелке, затем возврат в исходную точку по AB , — равен нулю. Поэтому, если C_r и C_R ориентированы одинаково¹⁶⁾,

¹⁶⁾ Либо $\oint_{C_R} f(z) dz + \oint_{C_r} f(z) dz = 0$, если C_r и C_R ориентированы противоположно.

$$\oint_{C_R} f(z) dz = \oint_{C_r} f(z) dz, \quad (2.19)$$

что является следствием

$$\oint_{C_{rR}} f(z) dz = 0,$$

поскольку AB при движении по контуру C_{rR} проходится два раза в противоположных направлениях.

2.7. Интеграл Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри контура C , содержащего внутри точку z , и на самом контуре C . Тогда $f(w)/(w - z)$, как функция w , аналитична на C и внутри C за исключением точки $w = z$. Поэтому

$$\oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw = \oint_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad (2.20)$$

где C_r обозначает окружность радиуса r с центром в z . Равенство (2.20) можно получить так же, как и (2.19), поскольку в обосновании (2.19) никакой роли не играло, что C_R окружность.

Поскольку $f(w) = f(z) + o(w - z)$, то

$$\oint_{C_r} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \oint_{C_r} \frac{dw}{w - z} + \oint_{C_r} \frac{o(w - z)}{w - z} dw. \quad (2.21)$$

При $r \rightarrow 0$ второй интеграл справа в (2.21) обнуляется, а первое слагаемое, в силу (2.15), оказывается равным $f(z) \cdot 2\pi i$. В результате

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad (2.22)$$

что называют *интегральной формулой Коши*.

В случае, когда C является окружностью C_r , представляет интерес перейти в (2.22) к интегрированию в полярных координатах:

$$w = z + re^{i\varphi}, \quad dw = ire^{i\varphi} d\varphi.$$

В результате получается формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi, \quad (2.23)$$

или, равносильно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} f(w) ds, \quad (2.24)$$

где ds — дифференциал дуги окружности C_r .

Выходит, что $f(z)$ в точности равно среднему значению f на окружности C_r с центром в z .

2.7.1. Принцип максимума модуля. Функция $f(z)$, не равная константе и аналитическая на замыкании области Ω , — может достигать максимума своего модуля $|f(z)|$ только на границе области Ω .

◀ Доказательство легко вытекает из факта (2.24), ибо при равенстве среднего значения f на окружности C_r значению f в центре C_r — максимум модуля $|f|$ в центре — невозможен. Поэтому во внутренней точке области невозможен локальный максимум модуля, тем более — глобальный. ►

Если в дополнение к предположениям 2.7.1 функция f в Ω не обращается в нуль, то ее модуль не достигает также своего минимума внутри Ω , что сразу следует из принципа максимума модуля в применении к функции $1/f(z)$.

Принцип максимума имеет многочисленные следствия, широко применяемые в качестве подручных инструментов.

2.7.2. Лемма Шварца. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $B = \{z : |z| < 1\}$, непрерывна на замыкании \bar{B} , $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$. Тогда

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{при } z \in \bar{B},$$

причем, если $|f(z_0)| = |z_0|$ хотя бы в одной точке $z_0 \in \bar{B}$, то

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

при некотором действительном θ .

◀ В силу $f(0) = 0$ функция $\varphi(z) = f(z)/z$ аналитична в B . Поэтому в замкнутом круге любого радиуса $r < 1$, в силу $|f(z)| \leq 1$,

$$\forall r < 1 : |\varphi(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r} \Rightarrow |\varphi(z)| \leq 1, \quad \text{откуда } |f(z)| \leq |z|.$$

Если же $|f(z_0)| = |z_0|$, то $|\varphi(z)| \geq |\varphi(z_0)| = 1$, с одной стороны, и $|\varphi(z)| \leq 1$ — с другой. Следовательно,

$$|\varphi| \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) = e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{i\theta} z. \quad \blacktriangleright$$

В связи с *формулой Коши* (2.22), напоминающей змею, кусающую себя за хвост, отметим интересный трюк Э. Ландау [9]. Если M — максимум функции $f(z)$ на контуре C , то для z внутри C из *формулы Коши* следует

$$|f(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \oint_C \left| \frac{dw}{w-z} \right| = \gamma M,$$

где γ зависит лишь от контура и точки z внутри C . Поэтому $|f(z)|^n \leq \gamma M^n$, откуда $|f(z)| \leq \sqrt[n]{\gamma} M$, что при $n \rightarrow \infty$ дает «почти принцип максимума»: $|f(z)| \leq M$.

Утверждение 2.7.1 представляет собой один из возможных эталонов *принципа максимума*. Вариации тривиальны с точки зрения доказательств, но они расширяют кругозор.

2.7.3. *Если аналитическая в области D функция достигает локального максимума модуля внутри D , то она — постоянна.*

2.8. Бесконечная дифференцируемость

Уникальность ситуации, которую улавливает интегральная формула Коши, заключается в том, что (2.22) можно продифференцировать по параметру z и получить

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw, \quad (2.25)$$

потом снова продифференцировать (2.25) по z , получить формулу для второй производной,

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw,$$

и так далее,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw. \quad (2.26)$$

Перенос дифференцирования под знак интеграла здесь легко обосновывается, поскольку дифференцирование под интегралом само функцию f вообще не затрагивает.

В результате выявляется удивительный феномен. *Аналитическая функция оказывается бесконечно дифференцируемой сама по себе, без каких бы то ни было дополнительных требований.* Интеграл Коши дает простой ключ к пониманию этого факта. Функция $f(z)$ в силу (2.22) определяется интегрированием самого себя, а поскольку интеграл обладает улучшающими свойствами¹⁷⁾, то $f(z)$ обязана быть лучше, чем того можно ожидать. Выход из положения один — быть «бесконечно хорошей».

Дифференцирование интеграла по параметру. Сказанное выше о дифференцируемости интегралов типа (2.25) по параметру имеет смысл уточнить в общем виде.

2.8.1. Интеграл

$$H(z) = \oint_C h(z, w) dw \quad (2.27)$$

в случае непрерывности $h(z, w)$ и $h'_z(z, w)$ по совокупности переменных и аналитичности $h(z, w)$ при любом фиксированном $w \in C$ — представляет собой аналитическую функцию, производная которой может вычисляться по формуле

$$H'(z) = \oint_C h'_z(z, w) dw. \quad (2.28)$$

◀ В оговоренных условиях действительная и мнимая части интеграла

$$H(z) = \oint_C h(z, w) dw = u(x, y) + iv(x, y)$$

¹⁷⁾ Из непрерывной функции делает дифференцируемую, из дифференцируемой — дважды дифференцируемую и т. д.

непрерывно дифференцируемы, и производные u_x, u_y, v_x, v_y могут быть получены дифференцированием $\operatorname{Re} h$ и $\operatorname{Im} h$ под знаком интеграла. Условия Коши—Римана для u и v оказываются следствием аналитичности $h(z, w)$ по z . ►

2.9. Теорема Лиувилля

2.9.1. Теорема. *Аналитическая на всей комплексной плоскости \mathbb{C} функция $f(z)$, ограниченная по модулю: $|f(z)| \leq M$ при любом $z \in \mathbb{C}$, — может быть только константой.*

◀ В силу (2.25)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \frac{|f(w)|}{|w - z|^2} dl \leq \frac{M}{R}, \quad (2.29)$$

где C_R — окружность радиуса R с центром в z , а dl — дифференциал длины дуги на C_R . Поскольку (2.29) справедливо при любых z и R , то $|f'(z)| \equiv 0$, что влечет за собой $f(z) = \text{const}$. ►

Теорема 2.9.1 лежит, конечно, на поверхности, но за пределами ТФКП ее следствия далеко не очевидны. Докажем, например, основную теорему алгебры о существовании корня у любого полинома $P(z) \neq \text{const}$.

◀ В предположении противного функция $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ аналитична и ограничена по модулю, ибо $|P(z)| \rightarrow \infty$ при $|z| \rightarrow \infty$. Но тогда возникает противоречие: $P(z) = \text{const}$. ►

Забегая несколько вперед, отметим другой *вариант теоремы Лиувилля*.

2.9.2. Аналитическая на всей расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ функция $f(z)$ — может быть только константой.

◀ При обсуждении особых точек (глава 3) будет ясно, что для аналитичности $f(z)$ в точке $z = \infty$ необходимо существование конечного предела $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Поэтому все сводится к предыдущей теореме. ►

- Если функция $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} и не принимает значений, лежащих на границе (стоящей более чем из одной точки) некоторой области, — то $f(z)$ константа. (?)

Это, можно сказать, усиленный вариант теоремы Лиувилля. При данном местоположении упражнение, по-видимому, сложное. Легкое доказательство обеспечивает *теорема Римана* (п. 7.2.1).

2.10. Существование обратной функции

В скалярном случае $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ условие $f'(a) \neq 0$ гарантирует существование обратной функции f^{-1} в некоторой окрестности точки $x = a$. Соответствующим аналогом этого факта в случае $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — является невырожденность производной Фреше (матрицы Якоби)

$$Df(a) = \left[\frac{\partial f_j(a)}{\partial x_k} \right].$$

На комплексной плоскости \mathbb{C} , казалось бы, тоже придется говорить о невырожденности производной $Df(a)$. Но неожиданно оказывается, что достаточно потребовать $f'(a) \neq 0$, ибо благодаря условиям Коши—Римана невырожденность производной Фреше функции $f = \{u(x, y), v(x, y)\}$ в точке $z = a$ получается автоматически:

$$\det Df(a) = |f'(a)|^2, \quad (2.30)$$

что можно записать разными способами — см. (2.5), — например,

$$\det Df = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 > 0.$$

Более того, если в предыдущем случае $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ невырожденность $Df(a)$ необязательна (чтобы отображение f в точке a было локальным гомеоморфизмом), то на комплексной плоскости¹⁸⁾ условие $f'(a) \neq 0$ необходимо и достаточно для локальной гомеоморфности¹⁹⁾ f в точке a . Вот более общий результат:

¹⁸⁾ Либо на \mathbb{R}^2 , где у $f = \{u(x, y), v(x, y)\}$ взаимоотношения компонент u и v регулируются условиями Коши—Римана.

¹⁹⁾ Условие $f'(x) \neq 0$ на действительной прямой ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) необязательно для локальной гомеоморфности. Функция $f(x) = x^3$ имеет в нуле нулевую производную, но является локальным гомеоморфизмом.

2.10.1. Теорема. Пусть аналитическая в окрестности точки $z = a$ функция $f(z)$ имеет нулевую при $z = a$ производную, причем нуль у $f'(z)$ в этой точке $(n - 1)$ -го порядка. Тогда функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности $z = a$ является n -листной, т. е. уравнение $w = f(z)$ при w , достаточно близких к $f(a)$, — имеет ровно n решений.

◀ В силу предположений теоремы

$$f(z) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + R(z - a), \quad \text{где} \quad R(z - a) = o[(z - a)^n].$$

Пусть

$$g(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n.$$

Очевидно, $|g(z)| > |R(z - a)|$ на границе достаточно малой окрестности Ω точки $z = a$. Поэтому из теоремы Руше (теорема 6.5.2)²⁰⁾ следует, что в Ω функция

$$g(z) + R(z - a) = f(z) - f(a)$$

имеет столько же нулей, сколько и функция $g(z)$, у которой n нулей в Ω . ▶

Из теоремы 2.10.1 следует, что при условии $f'(a) = 0$ функция $f(z)$ в малой окрестности точки $z = a$ — по крайней мере двулистна. Поэтому, напоминаем еще раз, условие $f'(a) \neq 0$ **необходимо и достаточно** для локальной гомеоморфности f в окрестности $z = a$.

Если $f(a) = b$ и $z = f^{-1}(w)$ обозначает функцию, обратную к $w = f(z)$, — то

$$(f^{-1}(b))' = \lim_{w \rightarrow b} \frac{z - a}{w - b} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{\frac{w - b}{z - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Иначе говоря,

$$(f^{-1}(b))' = (f'(a))^{-1},$$

(2.31)

где индекс « -1 » справа — обозначает степень, слева — обратную функцию. Таким образом, дифференцирование с обращением «как бы можно менять местами».

²⁰⁾ Мы здесь забегаем вперед, но без образования порочного круга.

Наличие предела (2.31), т. е. дифференцируемость обратной функции, — свидетельствует о том, что при условии $f'(a) \neq 0$ преобразование $f^{-1}(w)$ — не только гомеоморфизм, но и *аналитическая функция* в окрестности точки b .

В поисках предмета для удивления сказанное иногда переформулируют в другом виде: «*Если аналитическая функция взаимно однозначна, то обратная функция — аналитична*». С точки зрения действительного анализа факт неожиданный. Функция $f(x) = x^3$ на \mathbb{R} гладкая и взаимно однозначная, — но f^{-1} в нуле не дифференцируема.

В литературе определенное внимание уделяется обращению степенных рядов. Другими словами, — записи $f^{-1}(w)$ в виде ряда по заданному разложению в ряд функции $w = f(z)$ (см., например, [6, 7]). Здесь есть интересные аспекты, но тематика, вообще говоря, повисает невостребованной.

2.11. Принцип компактности

Как известно, лемма Больцано—Вейерштрасса²¹⁾, представляющая собой главный инструмент анализа на вещественной прямой, в общем случае перестает работать. Особенно страдают функциональные пространства. Множества аналитических функций обладают в этом отношении серьезными преимуществами. Вот несколько неожиданный результат на фоне обычного анализа.

2.11.1. Лемма. *Пусть функции последовательности $f_1(z), f_2(z), \dots$ аналитичны и равномерно ограничены в области D . Тогда все f_k равностепенно непрерывны²²⁾ на любом замкнутом множестве S , лежащем в D .*

◀ Пусть Ω — какая-нибудь подобласть D , содержащая S и имеющая границу Γ , лежащую в D . В силу

$$f'_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

²¹⁾ О существовании сходящейся подпоследовательности у любой ограниченной последовательности.

²²⁾ Семейство функций $\{f\}$ называется *равностепенно непрерывным* на множестве S , если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $|z - w| < \delta$, $z, w \in S$ следует $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ для любого $f \in \{f\}$.

и равномерной ограниченности $\{f_k(z)\}$ справедлива равномерная на S оценка производных:

$$|f'_k(z)| \leq \frac{ML^2}{2\pi\epsilon^2},$$

где M — максимум модуля $|f_k(z)|$ по всем k и $z \in D$, причем $M < \infty$ в силу равномерной ограниченности $\{f_k(z)\}$, L — длина Γ , а ϵ — расстояние от S до Γ . ►

Поэтому аналог теоремы Арцела [4, т. 5] для аналитических функций дожимается без предположения о равностепенной непрерывности.

2.11.2. Из любой последовательности функций $f_1(z), f_2(z), \dots$, аналитических и равномерно ограниченных в области D , — можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом замкнутом множестве, лежащем в D .

◀ Пусть z_1, z_2, \dots — перечисление точек D с рациональными координатами. Выберем из последовательности $\{f_k(z)\}$ подпоследовательность

$$f_{11}(z), f_{12}(z), f_{13}(z), \dots, \quad (2.32)$$

сходящуюся в точке z_1 ; из (2.32) — подпоследовательность

$$f_{21}(z), f_{22}(z), f_{23}(z), \dots,$$

сходящуюся в z_2 , и т. д. Диагональная последовательность

$$f_{11}(z), f_{22}(z), f_{33}(z), \dots \quad (2.33)$$

сходится в этом случае во всех точках $\{z_n\}$.

Дожать сходимость (2.33) до равномерной позволяет *равностепенная непрерывность*. В предположении противного найдется такое $\epsilon_0 > 0$, такое $S \subset D$ и такая последовательность $\{\zeta_k\} \subset S$, что

$$|f_{kk}(\zeta_k) - f_{nn}(\zeta_k)| > \epsilon_0 \quad (2.34)$$

при любом k и некотором $n = n(k) > k$.

Без ограничения общности $\zeta_k \rightarrow \zeta_0 \in S$, иначе можно перейти к подпоследовательности. Но тогда, в силу сходимости (2.33) на плотном в S множестве и равностепенной непрерывности,

$$\begin{aligned} |f_{kk}(\zeta_k) - f_{nn}(\zeta_k)| &= |f_{kk}(\zeta_k) - f_{kk}(\zeta_0) + f_{kk}(\zeta_0) - f_{nn}(\zeta_0) + f_{nn}(\zeta_0) - f_{nn}(\zeta_k)| \leq \\ &\leq |f_{kk}(\zeta_k) - f_{kk}(\zeta_0)| + |f_{kk}(\zeta_0) - f_{nn}(\zeta_0)| + |f_{nn}(\zeta_0) - f_{nn}(\zeta_k)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $k, n \rightarrow \infty$, что противоречит (2.34). ►

Принцип компактности 2.11.2 эффективно работает во многих ситуациях, хотя может показаться, что выигрыша по сравнению с действительным случаем не возникает.

В самом деле, равномерно ограниченная в круге $|z| < 1$ последовательность функций $f_n(z) = z^n$ не сходится равномерно. А на замкнутых подмножествах $|z| \leq 1$ — так здесь ничего удивительного. То же самое будет и в случае действительного z . Однако в случае действительного аргумента у равномерно ограниченной последовательности непрерывных²³⁾ функций

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{если } |x| \leq 1, \\ x^{-n}, & \text{если } 1 \leq |x| < 2, \end{cases}$$

на замкнутых подмножествах интервала $(-2, 2)$ нельзя гарантировать даже простую сходимость. Для аналитических функций такого не может быть.

Оба результата 2.11.1 и 2.11.2 можно было бы переформулировать, предполагая область D замкнутой, но при этом подразумевая, что аналитичность и равномерная ограниченность сохраняются в некотором открытом расширении D (в открытой области, содержащей D). Тогда как *равностепенную непрерывность*, так и существование равномерно сходящейся подпоследовательности можно было гарантировать непосредственно в D . Хрен редьки, конечно, не слаше, но ракурс — все же немного другой.

²³⁾ А можно было бы устроить — и m раз непрерывно дифференцируемых.

Глава 3

Комплексные ряды

3.1. Числовые ряды

В комплексном анализе существенную идеологическую роль играют разложения аналитических функций в ряды. Прежде чем об этом говорить, необходимо рассмотреть числовые и функциональные ряды как таковые. Многое здесь «параллельно» ситуации на действительной прямой.

Суммы вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

с комплексными слагаемыми $a_n \in \mathbb{C}$ — называют бесконечными рядами.

3.1.1. Конечный или бесконечный предел A частичной суммы

$$A_n = a_1 + \dots + a_n$$

определяют как сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ряд, имеющий конечную (бесконечную) сумму, называют сходящимся (расходящимся).

Бесконечные ряды представляют собой, вообще говоря, эквивалентный язык для изучения последовательностей и пределов, ибо сходимость ряда означает сходимость варианты A_n . Обратно, сходимость любой последовательности $\{b_n\}$ равносильна сходимости ряда

$$b_1 + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) + \dots .$$

Поэтому для сходимости ряда необходимо и достаточно (*критерий Коши*), чтобы A_n была последовательностью Коши, т. е. $|A_n - A_m| \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$.

- Сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать на константу.

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \rightarrow 0$.

◀ Две последовательности A_n и A_{n-1} сходятся к одному и тому же пределу. Следовательно,

$$a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow 0. \quad ▶$$

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $|a_1| + |a_2| + \dots$ из абсолютных величин. Любой абсолютно сходящийся ряд сходится, что сразу следует из критерия Коши.

- *Признак Коши.* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow a < 1,$$

и расходится, если $a > 1$.

◀ Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ — такого что $a + \varepsilon < 1$, — начиная с некоторого $n = N$, будет $|a_n| \leq (a + \varepsilon)^n$. Поэтому исходный ряд¹⁾ мажорируется сходящимся рядом $\sum (a + \varepsilon)^n$. ▶

- *Признак Даламбера.* Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow a < 1,$$

и расходится, если $a > 1$.

◀ Аналогично предыдущему, для достаточно малого $\varepsilon > 0$ — такого что $a + \varepsilon < 1$, — начиная с некоторого $n = N$, возникает оценка

$$|a_{n+1}| \leq (a + \varepsilon)|a_n|.$$

¹⁾ Вернее, его хвост, начиная с $n = N$.

Поэтому исходный ряд мажорируется сходящимся рядом

$$c_1 + c_2 \cdot \sum_{n=N}^{\infty} (a + \varepsilon)^n,$$

где c_1, c_2 — некоторые константы. ►

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится при любом $z \in \mathbb{C}$ (по *признаку Даламбера*).
- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ сходится при любом $|z| < 1$ и любом k . (?)

• Абсолютно сходящиеся ряды «беспроблемны». Они допускают любое изменение порядка суммирования. Их можно без предосторожностей перемножать,

$$\sum_n a_n = A, \quad \sum_n b_n = B \quad \Rightarrow \quad \sum_{n,k} a_n b_k = AB,$$

произвольно устанавливая порядок суммирования членов $a_n b_k$.

3.2. Функциональные ряды

Представление аналитических функций в виде бесконечных сумм,

$$f(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) + \dots, \quad (3.1)$$

дает возможность приближения $f(z)$ частичными суммами

$$f_n(z) = \varphi_0(z) + \dots + \varphi_n(z),$$

при условии $f_n(z) \rightarrow f(z)$. Сходимость к нулю хвоста,

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

влечет за собой сходимость ряда (3.1), но вопрос о том, что является пределом (какая функция) — лежит в другой плоскости.

Ряд (3.1) называют сходящимся в области $D \subset \mathbb{C}$, если при любом $z \in D$ соответствующий числовой ряд сходится. Такая сходимость, как известно еще из теории функций действительного переменного,

малоэффективна²⁾. Адекватным инструментом для работы с функциональными рядами является понятие *равномерной сходимости*.

3.2.1. Определение. Ряд (3.1) сходится равномерно в D , если равномерно сходится к нулю его хвост (3.2), т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n > N$:

$$|f(z) - \varphi_0(z) - \dots - \varphi_n(z)| < \varepsilon \quad \text{при любом } z \in D.$$

Признаки равномерной сходимости комплексных рядов устанавливаются почти дословным повторением рассуждений для вещественных рядов.

3.2.2. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (3.1) необходимо и достаточно, чтобы $f_n(z)$ была равномерной последовательностью Коши, т. е. $|f_n(z) - f_m(z)| \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$ равномерно по z .

3.2.3. Признак Вейерштрасса. Функциональный ряд (3.1), мажорируемый абсолютно сходящимся числовым рядом, сходится равномерно.

3.2.4. Пусть функции $\varphi_n(z)$ непрерывны и ряд (3.1) сходится равномерно в D . Тогда ряд можно почленно интегрировать по любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \varphi_n(z) dz.$$

Если же $\varphi_n(x)$ аналитичны, то аналитичен неопределенный интеграл и

$$\int_a^w f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^w \varphi_n(z) dz.$$

◀ Доказательство элементарно. Из равномерной сходимости к нулю хвоста ряда следует стремление к нулю интеграла хвоста

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \sum_{k=0}^n \int_{\Gamma} \varphi_k(z) dz \right| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по z . ►

²⁾ Сходящийся ряд непрерывных функций не обязательно сходится к непрерывной функции.

3.2.5. Теорема. Пусть функции $\varphi_n(z)$ аналитичны и ряд (3.1) сходится равномерно в D . Тогда почленно проинтегрированный ряд (3.1) сходится к производной $f'(z)$, т. е.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(z),$$

причем $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(z)$ сходится равномерно.

Таким образом, равномерно сходящийся ряд аналитических функций можно почленно интегрировать и дифференцировать без всяких дополнительных условий. Доказательство имеет технический характер. Некоторое удивление может вызывать лишь следующее обстоятельство. Для возможности почленного дифференцирования ряда функций действительного переменного обычно выдвигается дополнительное требование: взятие производных не должно нарушать равномерную сходимость ряда [4, т. I]. В данном случае равномерная сходимость сохраняется автоматически благодаря аналитичности. Причина заключается в следующем. Если остаток ряда $r_n(z)$ на контуре C меньше ϵ по модулю, то в силу

$$r'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{r_n(w)}{(w-z)^2} dw$$

справедлива равномерная на C оценка

$$|r'_n(w)| < \frac{2\pi\rho^2}{L}\epsilon,$$

где L — длина контура C , а ρ — максимальное расстояние от z до контура C .

3.2.6. Теорема Вейерштрасса. Пусть все функции $\varphi_n(x)$ аналитичны в области D и ряд (3.1) сходится равномерно. Тогда его сумма $f(z)$ — аналитическая функция.

◀ Пусть $z_0 \in D$ — произвольная точка, и $D' \subset D$ — ее односвязная окрестность. По теореме 3.2.4 интеграл суммы

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)$$

равен сумме интегралов, а

$$\oint_C \varphi_n(z) dz = 0$$

по любому замкнутому контуру $C \subset D'$, т. е.

$$\oint_C f(z) dz = \sum_n^{\infty} \oint_C \varphi_n(z) dz = 0.$$

Остается сослаться на *теорему Морера* (п. 2.5.3). ►

- Пусть все функции $\varphi_n(z)$ аналитичны в области D , непрерывны на замыкании \bar{D} и ряд (3.1) сходится равномерно на границе области. Тогда ряд (3.1) — сходится равномерно в \bar{D} . (?) Это еще одна теорема Вейерштрасса.

3.3. Степенные ряды

Фундаментальную роль в теории *степенных рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

играет следующий простой результат.

3.3.1. Теорема Абеля. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при каком-то z , равном по модулю r , то при условии $|z| < r$ он сходится **абсолютно**, а при $|z| \leq r - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) — еще и **равномерно**.

◀ Из сходимости $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ вытекает $c_n z^n \rightarrow 0$, а значит, и ограниченность: $|c_n r^n| < M$. Поэтому для $|z| < r$ будет

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n| \cdot \left| \frac{z}{r} \right|^n < M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{r} \right|^n < \infty,$$

что обеспечивает абсолютную сходимость в круге $|z| < r$. Аналогичная выкладка дает требуемую равномерную сходимость. ►

Из п. 3.3.1 сразу следует существование такого r (радиуса сходимости)³⁾, что внутри круга $|z - z_0| < r$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится, а вне — расходится, причем в любом круге

$$|z - z_0| \leq \rho < r$$

³⁾ Радиус сходимости может быть конечным или бесконечным.

ряд сходится равномерно. При этом можно гарантировать, что в круге $|z - z_0| < r$ степенной ряд сходится к аналитической функции и его можно почленно интегрировать и дифференцировать.

- Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ и его производная $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

- Ряды

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

сходятся при любом z , что моментально выводится как из *признака Коши*, так и из *признака Даламбера*.

- Те же признаки Коши и Даламбера легко позволяют установить сходимость степенных рядов

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots,$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \dots,$$

но уже при $|z| < 1$.

Во всех перечисленных случаях признаки Коши и Даламбера позволяют точно уловить границы сходимости, т. е. заодно определяют радиусы сходимости рядов⁴⁾. В общем случае радиус сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (3.3)$$

равносильно

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

вычисляется с помощью верхнего предела по формуле

$$r^{-1} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (3.4)$$

⁴⁾ Суммы рядов e^z , $\sin z$, $\frac{1}{1-z}$, $\ln(1+z)$ — выписаны пока авансом.

◀ Если $r \neq 0, \infty$, и $r^{-1}|z| > 1$, т. е. $|z| > r$, то для бесконечного множества номеров $\sqrt[n]{|c_n z^n|} > 1$, поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = r^{-1}|z|, \quad (3.5)$$

где r^{-1} пока просто обозначает правую часть (3.4). Отсюда $\lim c_n z^n \neq 0$ — поэтому ряд (3.3) расходится.

Если же $|z| < r$, то $\sqrt[n]{|c_n z^n|} < \delta^n$, начиная с некоторого n , для некоторого $\delta \in (r^{-1}|z|, 1)$. Поэтому ряд (3.3) сходится, ибо мажорируется суммой $\text{const} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n$.

Ситуации $r = 0, \infty$ разбираются еще проще. ►

3.4. Ряд Тэйлора

3.4.1. Теорема. *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности W точки a , то она представима рядом Тэйлора,*

$$f(z) = f(a) + f'(z)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \dots \quad (3.6)$$

в любом шаре $|z - a| < r$, принадлежащем этой окрестности.

Ситуация кардинально отличается от той, которая имела место в случае действительной переменной. Там ряд Тэйлора мог сходиться вообще к другой функции [4, т. I]⁵⁾.

◀ Для доказательства возьмем максимальное r , при котором контур C_r принадлежит W , и рассмотрим сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} + \frac{z - a}{(w - a)^2} + \dots + \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}} + \dots, \quad (3.7)$$

где $w \in C_r$, а z лежит внутри C_r , и потому знаменатель прогрессии $\frac{z - a}{w - a}$ по модулю меньше единицы. В результате ряд (3.7) на C_r сходится равномерно. Умножая равенство (3.7) на $f(w)$ и интегрируя по C_r , с учетом (2.26) получаем (3.6). ►

⁵⁾ Функция $h(x) = e^{-1/x^2}$, доопределенная в нуле по непрерывности, $f(0) = 0$, имеет нулевые производные, $h^{(n)}(0) = 0$ при любом n . Поэтому ее ряд Тэйлора сходится не к e^{-1/x^2} , а к тождественному нулю (пример *Вейерштрасса*). Соответственно, какова бы ни была функция f , все функции $f + \alpha h$ имеют один и тот же ряд Тэйлора.

3.4.2. Определение. Функция $f(z)$, представимая рядом (3.6), сходящимся в некоторой окрестности точки a , называется *регулярной* или *голоморфной* в точке a .

Казалось бы, еще один перехлест в нагромождении терминов. Дифференцируемость в окрестности a , аналитичность и регулярность (голоморфность) — просто совпадают. Но это в ТФКП. В анализе на действительной прямой это совершенно различные понятия. Кроме того, в самой ТФКП за каждым понятием стоят свои собственные особые признаки, что удобно для расстановки акцентов. Упоминание регулярности функции, например, подчеркивает ее разложимость в ряд Тейлора.

Тем не менее на прилагательные: *аналитическая, регулярная и голоморфная* (функция) — надо смотреть как на синонимы. Это главное. Чтобы фразы типа «аналитическая функция, голоморфная в такой-то области» — не stavili в тупик. Особенно поначалу. Потом уже синонимам можно придавать оттенки.

3.4.3. Любой степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Разумеется, это переформулировка теоремы 3.4.1. Однако новая форма часто привносит дополнительные краски, и «процесс» начинает развиваться другим путем.

3.5. Аналитическое продолжение

Благодаря теореме 3.4.1 степенные ряды в ТФКП играют роль универсального инструмента. Но при этом есть свои трудности. Например, функция $1/(1-z)$ представляется степенным рядом

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad (3.8)$$

который сходится лишь при $|z| < 1$ (круг A на рис. 3.1).

В то же время функция $1/(1-z)$ аналитична везде⁶⁾ за исключением $z = 1$. Поэтому ее можно разложить в ряд в любой точке

⁶⁾ Потому что везде дифференцируема, кроме $z = 1$.

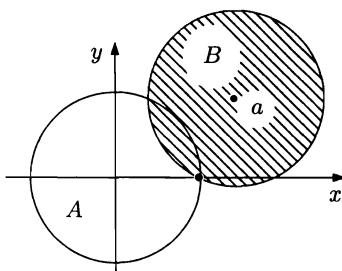


Рис. 3.1

$a \neq 1$. Получится другой ряд Тэйлора⁷⁾, который будет сходиться в другом круге B (рис. 3.1). В каком соотношении находятся эти ряды и сама функция $1/(1-z)$? За кадром здесь просматривается очевидная идея.

Если на области A (речь идет уже не обязательно о кругах) задана аналитическая функция $f_1(z)$, на B — $f_2(z)$ и на пересечении $A \cap B$ значения функций совпадают, то было бы хорошо $f_2(z)$ считать продолжением $f_1(z)$ на более широкую область (равно как и $f_1(z)$ — продолжением $f_2(z)$). Чтобы такой трюк был законным, не хватает «малости» — гарантий единственности продолжения.

Если же на областях A и B значения функций совпадают, то было бы хорошо $f_2(z)$ считать продолжением $f_1(z)$ на более широкую область (равно как и $f_1(z)$ — продолжением $f_2(z)$). Чтобы такой трюк был законным, не хватает «малости» — гарантий единственности продолжения.

3.5.1. Теорема единственности. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают в различных точках $a_n \in D$, причем $a_n \rightarrow a \in D$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в D .

◀ Очевидно, аналитическая в D функция $h(z) = f(z) - g(z)$ в точках a_n обращается в нуль, а потому и $h(a) = 0$, в силу $a_n \rightarrow a$ и непрерывности h . Поэтому в разложении

$$h(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots \quad (3.9)$$

коэффициент $c_0 = 0$. Следовательно, $h(z) = (z-a)h_1(z)$. Но тогда

$$h(a_n) = 0 \Rightarrow h_1(a_n) = 0.$$

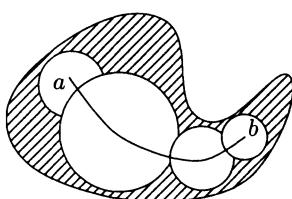


Рис. 3.2

Снова, по непрерывности, $h_1(a) = 0$, что означает $c_1 = 0$. И так далее. Все коэффициенты в разложении h оказываются нулевыми. Поэтому $h(z) \equiv 0$ в круге сходимости ряда (3.9), т. е. $f(z) \equiv g(z)$.

Окончательный вывод о тождественности нулю $h(z)$ в D вытекает из возможности попасть в любую точку $w \in D$ по цепочке пересекающихся кругов (рис. 3.2), в каждом из которых $h(z)$ разла-

⁷⁾ Разложение функции (3.8) в ряд Тэйлора в окрестности $z = a$ ($|a| < 1$) дает степенной ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$, сходящийся в круге $|z-a| < |1-a|$, который при $a \notin [0, 1]$ выходит за пределы $|z| < 1$.

гается в свой ряд Тэйлора и повторяется предыдущее рассуждение (для некоторой новой последовательности a_n из предыдущего круга, где уже $h(z) \equiv 0$). ►

На рис. 3.2 центры кругов сходимости степенных рядов расположены на кривой, соединяющей точки a и b . При этом механизм называют *аналитическим продолжением функции вдоль пути*, ведущего из a в b .

Из приведенного выше доказательства легко усмотреть, что аналитичность влечет за собой *изолированность нулей*, если функция не равна тождественно нулю. Но главный вывод заключается, если можно так сказать, в «*голографическом устройстве*» аналитических функций. Целое отражается в любом маленьком фрагменте. *Задание функции на кусочке дуги определяет все остальное.*

Поэтому функции e^x , $\sin x$, $\ln x$ на действительной прямой автоматически порождают соответствующие функции в комплексной плоскости. Вопрос лишь в том, как их найти. Проблема может оказаться сложной, но принципиально она всегда разрешима. Разложение в степенные ряды позволяет гарантированно расширить область определения аналитической функции до максимальных размеров. Иногда это реализуется совсем просто. Скажем, в ситуациях

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

в которых ряды имеют неограниченный радиус сходимости, достаточно поменять действительное x на комплексное z — и аналитические функции e^z и $\sin z$ готовы. В случае логарифма⁸⁾,

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad (3.10)$$

проблема сложнее. Конечно, x здесь можно заменить на z , но это даст лишь ряд Тэйлора, сходящийся при $|z-1| < 1$, тогда как логарифм определен в гораздо более широком диапазоне. Выход из положения заключается в расширении области определения по-

⁸⁾ Более привычный вид разложения (3.10): $\ln(1+t) = t - (t^2/2) + \dots$

шаговым переходом к другим рядам по цепочкам пересекающихся кругов, как на рис. 3.2. Это обязательно приведет к успеху, но только «идеологическому». Логарифм везде, где возможно, будет определен и даже вычислим, но единой формулы это не даст. Общая формула,

$$\ln z = \int_1^z \frac{dw}{w}, \quad (3.11)$$

получается из других соображений. Для действительных $0 < x < 2$ интеграл (3.11) дает $\ln x$, и это совпадает с (3.10), т. е. функции

$$\int_1^z \frac{dw}{w} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

совпадают там, где обе определены. Но тогда теорема 3.5.1 гарантирует идентичность соответствующих аналитических продолжений.

При этом $\int_1^z \frac{dw}{w}$ имеет максимально возможную область определения (везде, кроме нуля), что и дает единую формулу для логарифма.

В сказанном важно обратить внимание на следующий аспект. Любая аналитическая функция может быть продолжена до функции, определенной на максимально возможной области⁹⁾. Для $\sin z$ — это вся плоскость, для $z/(z-1)$ — плоскость с выколотой точкой $z = 1$. Но так или иначе появляется возможность вообще не упоминать область определения, считая $f(z)$ определенной везде, где возможно. Это еще одна удивительная особенность ТФКП. Область определения задается самой функцией.

3.6. Ряды Лорана

Использование в ТФКП рядов Тэйлора в качестве стандартного инструмента удобно, но не обязательно. Использование других рядов имеет свои плюсы и минусы. Широкое распространение при

⁹⁾ Это правда, но не вся. Трудности откладываются до главы 5.

изучении аналитических функций получили, например, ряды Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}. \quad (3.12)$$

Первая сумма справа в (3.12) представляет собой обычный степенной ряд (*регулярную часть ряда*), сходящийся в некотором круге радиуса r_1 . Вторая сумма (называемая обычно *главной частью лорановского ряда*) после замены $w = 1/(z-a)$ тоже превращается в обычный степенной ряд, который сходится в плоскости w в круге радиуса r_2 , а в плоскости z — вне круга радиуса $1/r_2$.

Поэтому областью сходимости (3.12) является кольцо (рис. 3.3), что и служит причиной популярности рядов Лорана. Чтобы накрыть изолированную особую точку требуется бесконечно много «кругов Тэйлора» либо одно «кольцо Лорана».

Несложные выкладки показывают, что коэффициенты в (3.12) могут быть определены при любом n по единой формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad (3.13)$$

где C — произвольный замкнутый контур, лежащий в кольце $1/r_2 < |z-a| < r_1$ и охватывающий точку a .

◀ К разложению (3.12) приводит следующее рассуждение. *Формула Коши* (для двусвязной области) дает равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw, \quad (3.14)$$

где окружность C_1 пусть имеет радиус чуть меньший r_1 , а окружность C_2 — радиус чуть больший $1/r_2$. При этом радиусы подбираются так, чтобы точка z попала внутрь уменьшенного кольца.

В первом интеграле $1/(w-z)$ заменим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}},$$

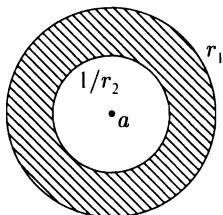


Рис. 3.3

сходящимся в силу $|z - a| < |w - a|$ на C_1 . Замена возникает естественным образом:

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{w - a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}}.$$

Во втором интеграле аналогичным образом возникает разложение в ряд

$$\frac{1}{w - z} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - a)^n}{(z - a)^{n+1}} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - a)^n}{(w - a)^{n+1}},$$

сходящийся в силу $|w - a| < |z - a|$ на C_2 .

Подставляя эти разложения в интегралы (3.14) и почленно интегрируя, получаем (3.12), (3.13)¹⁰⁾. ►

О связи с рядами Фурье. Если в (3.13) $a = 0$, а C — единичная окружность, то

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad (3.15)$$

и разложение Лорана (3.12) с этими коэффициентами в точках $z = e^{i\varphi}$ есть

$$f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi},$$

что представляет собой ряд Фурье функции $h(\varphi) = f(e^{i\varphi})$.

3.7. Особые точки

В жизни все выходит не так, как поначалу кажется. Особые точки — не исключение. Выглядят малопривлекательно, и никто их не хочет априори изучать, потому что — не до аномалий. Но «выходит», что особые точки иногда требуются даже не сами по себе, а как инструмент решения «стандартных» вопросов, в которых аномалии присутствуют лишь виртуально, как «угроза». Кроме того, аномалии — обычно наиболее информативная часть явления в целом.

¹⁰⁾ Возможность интегрировать в (3.13) по любому контуру в кольце вытекает из теоремы Коши (в многосвязном варианте).

Точку $z = a$ называют *изолированной особой точкой* функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична и однозначна в некотором кольце

$$0 < |z - a| < r,$$

а в самой точке a — не дифференцируема.

Если дифференцируемость в a восстанавливается при *до-* либо *переопределении* значения функции в этой точке, то a называют *устранимой особой точкой*. Особая точка a устранима в томм случае, когда существует конечный предел ¹¹⁾ $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$. В этом случае, полагая $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$, имеем аналитичность $f(z)$ в круге $|z - a| < r$.

3.7.1. Особая точка a функции $f(z)$ устранима в томм случае, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит отрицательных степеней.

Функции

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{\ln(1+z)}{z}, \quad \frac{z^2 - z^3}{z^2}$$

имеют устранимую особую точку $z = 0$.

Если все коэффициенты c_{-n} разложения Лорана $f(z)$ в a равны нулю при $n > k$, но $c_{-k} \neq 0$, точку a называют *полюсом k -го порядка*. Равносильное определение: *точка a — полюс k -го порядка* функции $f(z)$ в том случае, когда функция $h(z) = (z - a)^k f(z)$ при $z = a$ аналитична и не равна нулю ¹²⁾. Полюсы 1-го порядка называют *простыми*. В полюсе модуль $f(z)$ всегда уходит в бесконечность при $z \rightarrow a$. Более того, *точка a является полюсом (конечного порядка) функции $f(z)$ в томм случае, когда существует предел*

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty, \tag{3.16}$$

что подразумевает $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

Существование предела (3.16) в качестве определения полюса может показаться неожиданным, поскольку за кадром (3.16) могут стоять, вроде бы, весьма разнообразные причины. Но здесь не надо забывать об аналитичности $f(z)$ в кольце $0 < |z - a| < r$ — см. далее.

¹¹⁾ Не зависящий, разумеется, от способа стремления z к a .

¹²⁾ Точнее говоря, $z = a$ — устранимая особая точка функции $h(z)$.

О взаимосвязи нулей и полюсов. Поскольку в полюсе модуль $f(z)$ уходит в бесконечность при $z \rightarrow a$, то в некоторой окрестности полюса функция $f(z)$ не равна нулю, и потому функция $g(z) = 1/f(z)$ аналитична (в этой окрестности), причем $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$. Поэтому $z = a$ — устранимая особая точка $g(z)$, что позволяет аналитическим образом доопределить $g(z)$, полагая $g(a) = 0$. В итоге полюс $f(z)$ оказывается нулем¹³⁾ функции $g(z) = 1/f(z)$. И наоборот, если при $z = a$ функция $f(z)$ имеет изолированный нуль, то у $g(z) = 1/f(z)$ — полюс в точке $z = a$.

3.7.2. Подчеркнем еще раз. Точка a является полюсом функции $f(z)$ в томм случае, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a имеет лишь конечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - a)$.

- Функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ имеет простые полюсы в точках $z = \pm i$.
- Функция $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+2)^2}$ имеет простой полюс при $z = 1$ и полюс 2-го порядка в точке $z = -2$. Те же полюсы имеет функция $\frac{z+3}{(z-1)(z+2)^2}$.

Наконец, $z = a$ называют *существенно особой точкой*, если разложение Лорана $f(z)$ в a содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями $(z - a)$. Эквивалентное определение: $z = a$ — существенно особая точка, если предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует.

3.7.3. Теорема Сохоцкого—Вейерштрасса. В окрестности существенно особой точки $z = a$ аналитическая функция ведет себя беспорядочно, принимая все мыслимые значения с любой наперед заданной точностью¹⁴⁾.

◀ Заведомо существует последовательность $z_n \rightarrow a$, на которой $f(z_n) \rightarrow \infty$. В противном случае у $f(z)$ в $z = a$ существовал бы конечный предел (?), и особая точка $z = a$ была бы устранима.

¹³⁾ Соответственно, как изолированный нуль аналитической функции обязан иметь конечный порядок, так и полюс, определенный существованием предела (3.16), вынужден быть полюсом некоторого порядка.

¹⁴⁾ То есть для любого A можно указать последовательность $z_n \rightarrow a$, на которой $f(z_n) \rightarrow A$.

Далее. В предположении противного существует такое A , что $f(z) \neq A$ в некотором кольце $0 < |z - a| < \varepsilon$. Но тогда в этом кольце функция $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ аналитична, причем a не может быть для нее ни полюсом, ни устранимой особой точкой, иначе a не была бы существенно особой точкой функции $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$.

Поэтому a — существенно особая точка $g(z)$, что влечет за собой существование последовательности $z_n \rightarrow a$, на которой $g(z_n) \rightarrow \infty$ (см. начало доказательства). Но в этом случае

$$f(z_n) = A + \frac{1}{g(z_n)} \rightarrow A. \quad \blacktriangleright$$

Теорему 3.7.3 дополняет

3.7.4. Теорема Пикара. *В окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает бесконечно много раз любое значение, за исключением, быть может, одного*¹⁵⁾.

- Точка $z = 0$ является существенно особой точкой функций:

- (i) $e^{1/z}$ — пикаровское исключительное значение 0,
- (ii) $\cos(1/z)$ — исключительных значений нет.

- На практике могут встречаться и неизолированные особые точки. Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n!$$

(3.17)

дает пример функции, аналитичной в круге $|z| < 1$, но все точки окружности $|z| = 1$ для нее — особые.

◀ На лучах $z = re^{i2\pi\alpha}$ при рациональных $\alpha = p/q$ функция $f(z)$ уходит в бесконечность при $r \rightarrow 1$, потому что в представлении

$$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^n! + \sum_{n=q}^{\infty} z^n!$$

первая сумма, как многочлен, имеет при $r \rightarrow 1$ конечный предел, а вторая, поскольку q делит $n!$ при $n \geq q$,

$$\sum_{n=q}^{\infty} z^n! = \sum_{n=q}^{\infty} r^n! \rightarrow \infty.$$

¹⁵⁾ Которое называется пикаровским исключительным значением.

Поэтому вершины правильного q -угольника, вписанного в единичную окружность, являются особыми точками $f(z)$, и это справедливо при любом q . Следовательно, особые точки $f(z)$ всюду плотно расположены на окружности $|z| = 1$. ►

- Аномальные свойства функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

— такие же, как у функции (3.17). Оба факта являются частными случаями *теоремы Адамара о лакунах*: Если номера n_1, n_2, \dots отличных от нуля коэффициентов степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

удовлетворяют условию $n_{k+1} > \theta n_k$, $\theta > 1$, то граница круга сходимости ряда вся состоит из особых точек.

В таких случаях границу называют *естественной границей функции* $f(z)$, за которую $f(z)$ аналитически не продолжается.

- Нуль — существенно особая точка функции $h(z) = e^{-1/z^2}$. Поэтому $h(z)$ при $z \rightarrow 0$ не имеет предела и будучи доопределена с помощью $h(0) = 0$ будет разрывна в нуле. Интересно, что так доопределенная функция $h(z)$ везде в \mathbb{C} имеет частные производные, для которых при любом $z \in \mathbb{C}$ (!) выполняются условия Коши—Римана.

3.8. Бесконечно удаленная точка

Проекция расширенной комплексной плоскости на *сферу Римана* в некотором роде уравнивает в правах все точки $z \in \overline{\mathbb{C}}$, как бы напоминая, что с бесконечностью могут случаться «обычные неприятности». В частности, $z = \infty$ может оказаться изолированной особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$ — в рамках изложенной в предыдущем разделе классификации.

На ту же мельницу льет воду замена $z = 1/w$, в результате которой $f(z)$ трансформируется в $g(w) = f(1/w) = f(z)$, а $z = \infty$ переходит в особую точку $w = 0$. При этом $z = \infty$ является *устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой* функции $f(z)$ — соответственно категории особой точки $w = 0$ функции $g(w)$.

Разумеется, мыслить о z в терминах w совсем не обязательно, но тогда о бесконечно удаленной точке надо сказать отдельно, потому что кое-что здесь выглядит иначе. В первую очередь это касается самого понятия изолированности: $z = \infty$ является изолированной особой точкой, если существует такое R , что в круговом кольце $R < |z| < \infty$ у $f(z)$ нет особых точек.

При этом ∞ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$ — в зависимости от того, конечен, бесконечен, или не существует предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. В этом смысле $z = \infty$ ничем не отличается от других точек $z = a$.

Что касается классификации особых точек на эквивалентной основе вида лорановского разложения, — то здесь происходят очевидные, в связи с $z \rightleftarrows 1/w$, изменения. Разложение

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad R < |z| < \infty, \quad (3.18)$$

в окрестности $z = \infty$ начинает характеризовать бесконечность, как особую точку, не количеством отрицательных степеней в (3.18), а — положительных. Точнее говоря, ∞ является устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой однозначной аналитической функции $f(z)$ — в зависимости от того, отсутствуют ли положительные степени в (3.18), конечно их число или бесконечно.

- Функция $f(z) = z$ имеет в $z = \infty$ полюс 1-го порядка.

- Функция $f(z) = \frac{z^7}{(z+1)^2}$ имеет в $z = \infty$ полюс 5-го порядка ($z = -1$ — полюс 2-го порядка).

- Точка $z = \infty$ — существенно особая для функций:

$$ze^{-z}, \quad \frac{\cos z}{z^2}, \quad \sin\left(\frac{1}{\sin(1/z)}\right).$$

Имеют ли перечисленные функции другие особые точки?

- Точка $z = \infty$ у $f(z) = \operatorname{tg} z$ не является изолированной особой точкой. Она служит предельной точкой для полюсов 1-го порядка $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

3.9. Целые и мероморфные функции

Целыми называют аналитические функции, не имеющие конечных особых точек. Если целая f не константа¹⁶⁾, то $z = \infty$ — либо *полюс*, либо *существенно особая точка*. Если — полюс, то главная часть лорановского разложения $f(z)$ является полиномом $g(z)$, но тогда $f(z) - g(z)$ — целая функция с устранимой особой точкой ∞ , т. е. константа. Поэтому:

3.9.1. Целая функция с полюсом в бесконечности — обязательно полином.

Целые функции с существенно особой точкой $z = \infty$ (например, $\sin z$, e^z) называют *целыми трансцендентными*.

3.9.2. Функция $f(z)$ является целой в томм случае, когда она представима рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходящимся при любом $z \in \mathbb{C}$.

◀ Результат сразу вытекает из теоремы 3.4.1. ▶

Простейший вариант целой функции с конечным числом нулей $\{z_n\}$ — многочлен

$$f(z) = f(0) \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right). \quad (3.19)$$

При бесконечном количестве нулей произведение (3.19) может расходиться¹⁷⁾. Поэтому для погашения неприятностей в (3.19) вводится дополнительный множитель. Точнее говоря, всякая целая

¹⁶⁾ Если — константа, то $z = \infty$ — устранимая особая точка.

¹⁷⁾ Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + c_n)$ сходится, если частичные произведения $\prod_{n=1}^N (1 + c_n)$ имеют предел, для чего необходима и достаточна сходимость ряда $\sum \ln(1 + c_n)$. В определении обычно исключаются из рассмотрения нулевые сомножители $(1 + c_n)$ и ситуация $\prod_N \rightarrow 0$.

функция оказывается представимой в виде:

$$f(z) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + \dots + \frac{z^{k_n}}{k_n z_n^{k_n}} \right\} \right]. \quad (3.20)$$

Это не слишком конкретно, однако, если f имеет конечный порядок¹⁸⁾, разложение приобретает более определенную форму.

3.9.3. Теорема Адамара о разложении на множители. Целая функция f порядка ρ с нулями в точках $\{z_n\}$ при условии $f(0) \neq 0$ представима в виде

$$f(z) = P(z)e^{Q(z)},$$

где $P(z)$ – каноническое произведение, построенное по нулям $\{z_n\}$, а $Q(z)$ – многочлен степени не выше ρ .

◀ Для функций конечного порядка k_n в (3.20) могут быть выбраны равномерно ограниченными по n . Произведение (3.20) с минимально возможной границей для k_n сверху – называется *каноническим*. Детали и несложное обоснование теоремы 3.9.3 см. в [11]. ►

Несмотря на элементарный характер приведенной теоремы, она позволяет практически с ходу разлагать некоторые функции в бесконечные произведения. Например¹⁹⁾,

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n},$$

что после попарного объединения множителей с индексами $\pm n$, приводит к

$$\sin \pi z = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Другая интерпретация (3.20): «для всякой последовательности $\{z_n\}$, не имеющей точек накопления кроме ∞ , существует целая

¹⁸⁾ Целая функция f считается функцией конечного порядка при условии существования такого $\rho > 0$, что $|f(z)| = O(e^{|z|^\rho})$ на бесконечности. Нижняя грань таких ρ называется порядком f . Функция e^z , как и $\sin z$, имеет порядок 1, e^{z^ρ} – порядок ρ , e^{e^z} – бесконечный порядок.

¹⁹⁾ Здесь приходится для достижения полной определенности задействовать кое-что дополнительно [11].

функция с нулями в точках z_n и только в z_n » — называется теоремой Вейерштрасса о заказанных нулях²⁰⁾.

Функция $f(z)$ называется *мероморфной*, если она не имеет в \mathbb{C} других особенностей, кроме полюсов. Мероморфные функции называют также *дробными* — причиной служит следующий факт.

3.9.4. *Если $z = \infty$ — или устранимая особенность, или полюс мероморфной функции $f(z)$, то $f(z)$ — дробно-рациональна²¹⁾.*

◀ Поскольку, выходит, $z = \infty$ — изолированная особая точка, то число полюсов у $f(z)$ конечно. Пусть $\varphi_k(z)$ — главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности k -го полюса. Тогда функция

$$f(z) - \sum_{k=1}^N \varphi_k(z)$$

не имеет неустранимых особенностей в $\overline{\mathbb{C}}$, и поэтому (по теореме Лиувилля) — равна константе. ►

Если число полюсов неограниченно $\left(\operatorname{tg} z, \frac{1}{\sin z} \right)$, то они скапливаются в бесконечности, и $z = \infty$ оказывается неизолированной особой точкой.

3.9.5. Теорема Миттаг-Леффлера. *Каковы бы ни были последовательность точек $a_n \rightarrow \infty$ и последовательность полиномов $P_n(\cdot)$, — существует мероморфная функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках a_n , и только в них, причем главная часть f в каждом полюсе a_n равна $P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$.*

В основных чертах результат прозрачен. Представлением f оказывается

$$f(z) = g(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - h_n(z) \right\}, \quad (3.21)$$

²⁰⁾ Нули в $\{z_n\}$ могут повторяться. Иначе говоря, теорема гарантирует существование функции с нулями z_n любой заданной наперед кратности.

²¹⁾ То есть равна отношению многочленов.

где g — целая функция, h_n — некоторые *поправочные полиномы*. Перемена точки зрения позволяет утверждать, что *любая мероморфная функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (3.21)*. Такой рецепт «стандартного представления», конечно, несколько размыт, но во многих практических ситуациях элементарно срабатывает. Вот два примера — подробные объяснения есть в [14, с. 225].

- Мероморфная функция $\frac{1}{\sin^2 z}$ имеет полюсы второго порядка в точках $a_n = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Ряд из главных частей²²⁾

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}$$

оказывается хорош сам по себе — не требует поправочных многочленов h_n . Наконец, несложными рассуждениями устанавливается, что в данном случае $g(z) \equiv 0$. Окончательно:

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n\pi)^2}.$$

- Мероморфная функция $\operatorname{ctg} z$ имеет полюсы первого порядка в тех же точках $n\pi$, но ряд из главных членов

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - n\pi}$$

расходится²³⁾. Поэтому требуются поправочные многочлены (нулевой степени): $h_n = \frac{1}{n\pi}$ в случае $n \neq 0$, и $h_0 = 0$. При этом

$$\frac{1}{z - n\pi} - \frac{1}{n\pi} = \frac{z}{n\pi(z - n\pi)}.$$

В итоге, опять-таки после обоснования $g(z) \equiv 0$,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{z}{n\pi(z - n\pi)}.$$

Конечно, ряды (3.21) менее удобны, чем степенные. Но это все же некоторая определенность и единообразие в представлении

²²⁾ Имеющий, кстати, период π . (?)

²³⁾ Для «мероморфных рядов» сходимость определяется своеобразным способом [14]: ряд (3.21) считается сходящимся на компакте K , если только конечное число его членов имеет полюсы на K , и после удаления этих членов — ряд сходится.

мероморфных функций. Особенно, если сравнивать с общей ситуацией аналитического продолжения вдоль путей, не гарантирующего никакой единой формулы описания функции.

Другой вариант стандартизации мероморфных функций представляет собой обобщение утверждения 3.9.4.

3.9.6. *Любая мероморфная функция f является отношением двух целых функций.*

◀ *Теорема Вейерштрасса о заказанных нулях* гарантирует существование такой целой функции h , умножение на которую убивает все полюса f . В результате функция $g = f \cdot h$ будет целой. Окончательно, $f = g/h$. ►

3.10. Дополнения и задачи

- Пусть аналитичная в окрестности действительной точки a функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

принимает при действительных значениях z действительные значения. Тогда все коэффициенты c_n действительны.

- Если $n(r)$ обозначает число нулей целой функции f порядка ρ в круге $|z| \leq r$, то

$$n(r) < Kr^{\mu+\varepsilon},$$

где константа K определяется $\varepsilon > 0$ и не зависит от r .

- *Производная $f'(z)$ целой функции имеет тот же порядок, что и сама $f(z)$.*
- *Теорема Лагерра²⁴⁾. Целая функция $f(z)$ порядка меньшего двух, вещественная при вещественных z и с вещественными нулями, имеет производную $f'(z)$, у которой нули также вещественны и отделены друг от друга нулями $f(z)$.*
- Пусть $\mu(r)$ обозначает минимум модуля $f(z)$ на окружности $|z| = r$. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ , то существуют окружности сколь угодно большого радиуса, на которых

$$\mu(r) > e^{-r^{\mu+\varepsilon}}.$$

- *Теорема Пикара. Целая функция f , не являющаяся многочленом, принимает бесконечно много раз любое значение, за исключением, быть может, одного.* ◀ *Если*

²⁴⁾ Обоснования большинства пунктов можно найти в [6, 11].

f не полином, то $z = \infty$ — существенно особая точка (п. 3.9.1), и тогда работает теорема 3.7.4. ►

- **Теорема Иенсена.** Пусть $r_1 \leq \dots \leq r_n \leq \dots$ — модули нулей функции $f(z)$, аналитической в круге $|z| < R$, причем $f(0) \neq 0$. Тогда

$$\ln \frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad r_n \leq r \leq r_{n+1}. \quad (3.22)$$

Детали и обобщения есть в [11]. Равенство (3.22) интересно тем, что связывает модуль функции с ее нулями. Из этого зерна вырастает обширная теория о распределениях значений целых и мероморфных функций. Некоторые результаты в этом направлении см. в [7, 11].

Глава 4

Конкретные функции

Строительным материалом в ТФКП является некоторый стандартный набор тех же, обычных для классического анализа, полиномов, экспонент, логарифмов, тригонометрических функций и прочих эталонов. Но это «те же» функции лишь по названиям, а по сути — новые объекты, за которыми стоит другая реальность.

4.1. Продолжение с действительной оси

Функции комплексного переменного строятся, как правило, с помощью двух инструментов: *аналитического продолжения* и *теоремы единственности*. Однако аналитическое *продолжение вдоль пути*, описанное в разделе 3.5, является теоретическим инструментом. Конкретно — приходится пользоваться другими механизмами. Что касается теоремы единственности (теорема 3.5.1), то она удобнее в следующей, менее общей, формулировке.

Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D , и их значения совпадают на некоторой дуге, лежащей в D , то

$$f(z) \equiv g(z), \quad z \in D.$$

Это показательно работает на примере логарифма. Воспроизведем схему рассуждений еще раз с некоторыми уточнениями. Степенной ряд

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

после замены x на z дает аналитическое продолжение логарифма, сходящееся при $|z-1| < 1$, — и не очень ясно, какова максимальная область определения, которую охватывает процесс расширения. В то же время $\int_1^z \frac{dw}{w}$ дает некую аналитическую функцию (обозначим ее авансом $\ln z$), определенную везде кроме нуля. Вопрос

лишь в том, «одинаковы ли эти два логарифма». Ответ: «да», — потому что обе формулы

$$\int_1^z \frac{dw}{w} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

совпадают, например, при действительных $z \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$.

(!) Данное выше построение логарифма, вообще говоря, некорректно.

Беда в том, что $\int_1^z \frac{dw}{w}$ не является функцией. Это многозначная конструкция, и для приведения ситуации в норму потребуются дополнительные соглашения. Причем даже не соглашения, а — технология. Забегая вперед, отметим, что трудности на этом пути успешно преодолеваются, и в частности логарифм как $\int_1^z \frac{dw}{w}$ обретает законный статус, но за кадром при этом возникает дополнительное понимание скрытых пружин.

Там, где радиус сходимости ряда Тэйлора бесконечен, задача продолжения совсем проста. Пониманию, однако, мешают декорации. Скажем, экспонента $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ продолжается естественным образом¹⁾: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. При этом ряд $\sum \frac{z^n}{n!}$ аналитически продолжает $\sum \frac{x^n}{n!}$ единственным образом (теорема 3.5.1). Тем не менее иногда спрашивают: «А почему e^z продолжает e^x ?» Да потому, что e^z — не что иное как обозначение (этикетка) ряда $\sum \frac{z^n}{n!}$, соответственно, e^x — ряда $\sum \frac{x^n}{n!}$. Вот и все. Проблемы отсутствуют из-за того, что в аналитическом случае ряды Тэйлора сходятся

¹⁾ Еще один эквивалентный способ введения экспоненты:

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Разумеется, обоснование (существования предела и проч.) требует определенных затрат.

к самим функциям (теорема 3.4.1), а не бог знает куда, как на действительной оси. Поэтому нет угрозы «дрейфа обозначения либо определения» к какой-нибудь несуразице, как это иногда бывает в процессе рассуждений с люфтом толкования.

- Аналогична ситуация с функциями²⁾

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad (4.1)$$

- Сопоставляя ряд $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ с (4.1) и подставляя $z = i\zeta$, получаем формулу Эйлера

$$e^{i\zeta} = \cos \zeta + i \sin \zeta, \quad (4.2)$$

справедливую при любом комплексном значении ζ .

Из (4.2) вытекают полезные формулы для синуса и косинуса:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad (4.3)$$

следствием которых является

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (4.4)$$

- Гиперболические косинус и синус определяются как

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

что в комбинации с (4.3) дает

$$\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \sin z = -\operatorname{sh} iz.$$

Разложения в степенные ряды получаются из (4.1) упразднением $(-1)^n$:

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

²⁾ Общепринято соглашение $0! = 1$.

Перенос тождеств. Обычное тождество $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ сохраняется в \mathbb{C} , поскольку аналитическая функция

$$\sin^2 z + \cos^2 z - 1$$

тождественно равна нулю (работает все та же теорема 3.5.1), ибо она обращается в нуль на действительной оси.

Если формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, либо ее следствия типа (4.3), (4.4), обосновываются изначально для действительных значений $z = \varphi$, то их справедливость для произвольных $z \in \mathbb{C}$ вытекает из продолжения исходных тождеств с \mathbb{R} на \mathbb{C} .

Аналогичным образом сохраняются и другие привычные тождества типа $e^{\ln z} = z$, а также тождества с несколькими переменными, например,

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

или, скажем, $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

Упражнение

Пусть функции $f(z_1), \dots, f(z_n)$ аналитичны в областях D_1, \dots, D_n , и $\Theta[f(z_1), \dots, f(z_n)] \equiv 0$ на произведении дуг $\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n$, где каждая $\Gamma_j \subset D_j$, а функция Θ аналитична по каждому своему аргументу в отдельности. Тогда

$$\Theta[f(z_1), \dots, f(z_n)] \equiv 0 \quad \text{на } D_1 \times \dots \times D_n.$$

4.2. Многозначные эталоны

Проблема многозначности встает в полный рост, когда о функции $f(z)$ приходится говорить как об аналитическом продолжении степенного ряда либо фрагмента функции³⁾ при неясной перспективе такого продолжения. Получится ли в результате однозначная функция или многозначный небоскреб?

Почему продолжение рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ может приводить к принципиально разным результатам? В чем секрет отличия

³⁾ Определенного тем или иным способом. То, что здесь несколько вольно называется *фрагментом*, а иногда и *осколком* функции, — обычно называют *элементом функции*, подразумевая задание функции в окрестности некоторой точки с помощью степенного ряда.

последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$? А если заранее ясно, что итог будет многозначным, то как его получить в компактной форме — в виде единой формулы или обозримого описания? Последнее относительно легко удается, когда «продукт на выходе» возникает в результате обращения однозначной функции. Таковы в большинстве случаев многозначные функции, с которыми приходится иметь дело на практике.

Логарифм. Вот соответствующий рецепт получения логарифма (отличный от рассмотренного выше). Решение уравнения

$$e^w = z$$

относительно w — есть логарифм: $w = \ln z$.

Полагая $w = u + iv$, имеем $z = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$, откуда

$$e^u = |z|, \quad v = \arg z, \quad \text{т. е.} \quad u = \ln |z|, \quad v = \arg z,$$

где $\ln |z|$ — обычный логарифм действительного числа. Окончательно:

$$w = \boxed{\ln z = \ln |z| + i \arg z.} \quad (4.5)$$

В (4.5) обычно подразумевается $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Вместо (4.5) пишут также

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad (4.6)$$

считая в (4.6) аргумент многозначным: $\arg z = \varphi + 2k\pi$. Соответственно, многозначным получается логарифм, какой записывают когда как: либо $\ln z$, либо $\ln z$. Иногда $\ln z$ называют *главным значением логарифма* $\ln z$, но чаще оба логарифма обозначают символом $\ln z$, возлагая разницу на контекст.

Приведенные выкладки показывают, что $\ln z$ определен везде, кроме нуля — т. е. везде, где определен $\arg z$.

Манипуляции упрощаются в тригонометрической форме, $z = re^{i\varphi}$. Тогда

$$\ln z = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi.$$

Обратим внимание, что обычный логарифм $\ln x$ ($x > 0$) имеет также комплексные значения $\ln x + i2k\pi$, а при $x < 0$ — только комплексные:

$$\ln x = \ln |x| + i(2k + 1)\pi.$$

Корень n -й степени. Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к $z = w^n$, многозначна, ибо все n значений

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp \left\{ i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right\}$$

при $k = 0, 1, \dots, n - 1$ различны, но при возведении в n -ю степень дают z .

Степенная функция z^α при любых комплексных значениях α определяется равенством

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Арксинус. Еще одна многозначная функция — арксинус $w = \operatorname{Arcsin} z$, возникающий из решения уравнения $z = \sin w$. Последнее, в силу (4.3), может быть переписано в виде

$$z = \frac{1}{2i} \left(e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} \right),$$

откуда⁴⁾

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

В итоге

$$w = \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \ln (iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Главное значение $\operatorname{arcsin} z$ возникает в результате дополнительного соглашения о выборе одного из двух значений

$$w = \frac{1}{i} \ln (iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

где под \ln подразумевается главное значение логарифма. При этом «обрезание» Arcsin происходит таким образом, что $\operatorname{Re}(\operatorname{arcsin} z) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Вот соответствующее разложение в степенной ряд:

$$\operatorname{arcsin} z = z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \dots .$$

Встречается также формула

$$\operatorname{arcsin} z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

⁴⁾ В результате решения квадратного уравнения $e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$.

но здесь без оговорок не обойтись, поскольку под интегралом стоит многозначная функция.

Арктангенс. Решением $z = \operatorname{tg} w$, в силу (4.4),

$$z = \operatorname{tg} w = -i \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}},$$

является $e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$, т. е.

$$w = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Главное значение,

$$\operatorname{arctg} z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz} \quad (z \neq \pm i),$$

лежит в пределах: $\operatorname{Re}(\operatorname{arctg} z) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Альтернативные формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg} z &= \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \\ \operatorname{arctg} z &= z - \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots . \end{aligned}$$

Обнажение связей. Разнородные формулы с участием действительного переменного в комплексном анализе часто оказываются лишь разными лицами одного явления. Например, трудно отделаться от ощущения, что известные (на \mathbb{R}) интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}),$$

либо

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a},$$

имеют где-то в глубине общий корень. На вещественной прямой дальше ощущений дело не двигается. В ТФКП один интеграл переходит в другой (левый в правый, и наоборот) при замене x на ix .

4.3. Гамма-функция

В комплексную плоскость продолжаются не только функции действительного переменного, но и — дискретного. Такова *гамма-функция Эйлера* $\Gamma(z)$, возникшая из факториала, $\Gamma(n+1) = n!$.

Есть разные способы введения $\Gamma(z)$. Один из них непосредственно отталкивается от функционального уравнения⁵⁾

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (4.7)$$

характеризующего факториал при целых положительных z .

Логарифмируя (4.7) и дважды дифференцируя, имеем итерационное соотношение

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(z+1)}{dz^2} = -\frac{1}{z^2} + \frac{d^2 \ln \Gamma(z)}{dz^2},$$

приводящее, после n итераций, к

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{k=0}^n (z+k)^{-2} + \frac{d^2 \ln \Gamma(z+n+1)}{dz^2},$$

что, как оказывается, имеет решением

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (z+k)^{-2}. \quad (4.8)$$

Интегрирование (4.8), с учетом (4.7) и «привязки» $\Gamma(1) = 1$ после некоторых манипуляций⁶⁾ дает

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{z/k}, \quad (4.9)$$

где

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

постоянная Эйлера.

Функция (4.9) мероморфна, ее особые точки — простые полюсы⁷⁾ при $z = 0, -1, -2, \dots$. Нулей у гамма-функции нет. На рис. 4.1 изображена зависимость $y = \Gamma(x)$ для действительного x .

Разумеется, возникает вопрос, единственное ли это решение уравнения (4.7) при условии $\Gamma(1) = 1$, не говоря о том, почему это

⁵⁾ Другие исходные постулаты дают (4.7) в качестве следствия.

⁶⁾ Мы опускаем технические подробности, поскольку они есть «везде» — см., например, [6]. Кроме того, как показывает опыт, среднестатистический студент избегает что-либо читать о гамма-функции. Главная причина, пожалуй, заключается в неудобстве для подсознания определения $\Gamma(z)$. «Потусторонняя логика» исключает из поля зрения и другие специальные функции.

⁷⁾ Вычет $\Gamma(z)$ в полюсе $z = -n$ равен $\frac{(-1)^n}{n!}$.

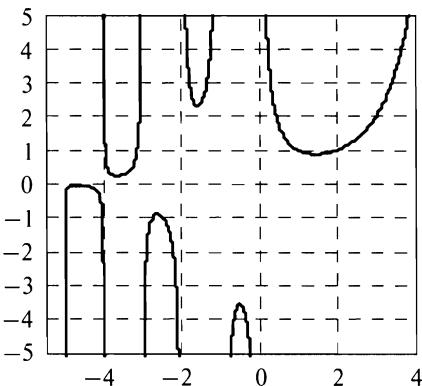


Рис. 4.1

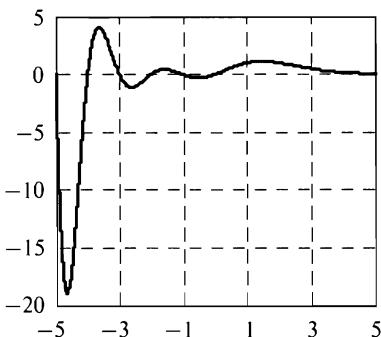


Рис. 4.2

«аналитическое продолжение факториала» — ведь условия *теоремы единственности* (п. 3.5.1) вроде бы не выполняются. У последовательности $n = 1, 2, \dots$ нет точки сгущения — но это в обычной топологии на \mathbb{C} . В *расширенной комплексной плоскости* последовательность $1, 2, \dots$ сходится к ∞ . Поэтому (4.9) единственна возможная аналитическая функция⁸⁾, совпадающая с $\Gamma(n+1) = n!$.

Недостаток визуальной ясности в определении $\Gamma(z)$ восполняется многочисленными формулами, характеризующими $\Gamma(z)$ с разных сторон. Но даже интегральное представление в правой полу-плоскости ($\operatorname{Re} z > 0$)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (4.10)$$

не обладает достаточной интуитивной обозримостью.

Соотношение (4.10) представляет собой полезный тренажер для приобретения навыков комплексного анализа. Главное упражнение состоит в обосновании того, что правая часть (4.10) является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} z > 0$. Последующее жонглирование формулой (4.10) приносит разнообразные плоды.

⁸⁾ Говорить об аналитическом продолжении здесь, безусловно, некорректно, как и в любом другом случае, где «продолжается» функция, заданная лишь на дискретном множестве. Но идеологически — это все же явления одного порядка.

На всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0, -1, -2, \dots$ функцию Γ задает формула Ганкеля⁹⁾

$$\Gamma(z) = (e^{2\pi iz} - 1)^{-1} \oint_C w^{z-1} e^{-w} dw,$$

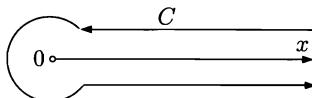


Рис. 4.3

интегрирование в которой идет по контуру, изображенному на рис. 4.3.

Несмотря на слабую популярность в широких кругах, гамма-функция играет в математике исключительную роль. С ее помощью решаются различные дифференциальные уравнения, «суммируется» большое количество интегралов и рядов. С гамма-функцией оказываются связаны различные специальные функции, многие вопросы теории чисел и других дисциплин.

4.4. Дзета-функция

Дзета-функция изначально определяется рядом Дирихле

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots, \quad (4.11)$$

сходящимся¹⁰⁾ при условии $\operatorname{Re} z > 1$. Справедливо также равносильное представление Эйлера

$$\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad (4.12)$$

где p пробегает все простые числа.

Функция $\zeta(z)$, введенная Эйлером, более ста лет «простаивала» и немного изучалась как функция действительного переменного. Риман вывел исследование $\zeta(z)$ в комплексную плоскость, и тем обеспечил прорыв глубинного потенциала. Хлынул поток результатов.

Нечто подобное характерно для развития математики вообще. Решая задачи в том пласте, в котором они возникают, часто при-

⁹⁾ Здесь в $w^{z-1} = e^{(z-1)\ln w}$ подразумевается ветвь логарифма, на которой $-\pi < \arg \ln w \leqslant \pi$, — см. главу 5.

¹⁰⁾ И равномерно сходящимся в области $\operatorname{Re} z \geqslant 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

ходится действовать вслепую¹¹⁾. Таковы труднорешаемые задачи планиметрии, которые возникают в плоских разрезах объемных фигур [3] и становятся тривиальными при выходе снова в \mathbb{R}^3 . Таковы любые модели [4, т. 6], обретающие прозрачность при погружении в общие схемы. Частные случаи поэтому почти всегда сложнее общих принципов. Проекции настоящих механизмов в прокрустовом ложе «плоского эскиза» теряют логику. Простые факты обращаются в ребус, и надо подняться уровнем выше, чтобы достичь прозрения.

В этом отношении показателен всякий выход в комплексную плоскость со стартовой площадки действительной прямой либо натурального ряда. Запуск любой игрушки в \mathbb{C} , будь то функция или другая конструкция, — задействует процесс на подмножествах типа \mathbb{R} , и там загадочно плодоносит. «Загадочно», если не обозревать всю плоскость \mathbb{C} , — см. примеры в разделе 1.2.

Но вернемся к нашим барапам. Совпадение правых частей (4.11) и (4.12) служит той ЭДС, которая в значительной мере питает теоретическую надстройку и помогает выявить связи ζ -функции с многочисленными математическими проблемами. Стимулом же неослабевающего интереса к данной области остается знаменитая гипотеза Римана¹²⁾ о нулях $\zeta(z)$ — разумеется, речь идет об аналитическом продолжении ряда (4.11), иначе о нулях говорить бессмысленно.

При этом в некоторых источниках можно встретить утверждения о том, что ряд (4.11) сходится не только в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 1$, но и в \mathbb{C} без точки $z = 1$. Это, конечно, заблуждение. Аналитическое продолжение, как правило, меняет облик функции. В данном случае продолжением (4.11) служит, например,

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i e^{\pi iz}} \oint_C \frac{w^{z-1} dw}{e^w - 1}, \quad (4.13)$$

где интегрирование идет по контуру, изображенному на рис. 4.3, и достаточно близко примыкающему к полуоси x . Правая часть (4.13) определяет $\zeta(z)$ во всей плоскости \mathbb{C} без точки $z = 1$. Подозри-

¹¹⁾ Как говорил Эйнштейн, никакую проблему нельзя решить на том же уровне, на котором она возникла.

¹²⁾ Одна из приоритетных нерешенных (2006) проблем — см. главу 10.

тельно здесь выглядят полюсы гамма-функции $\Gamma(1 - z)$ в точках $z = 2, 3, \dots$, но это устранимые особенности — благодаря обращению интеграла в нуль.

Что касается вывода (4.13), то он достаточно прост, и заинтересованный читатель может обратиться к монографии [12]. Мы избегаем технических подробностей, чтобы не нарушать пропорций. Иначе ТФКП будет ассоциироваться с мозаикой взятия интегралов по частям.

Глава 5

Аналитическое продолжение и многозначность

5.1. Аналитический феномен

Идея *аналитического продолжения*, описанная в разделе 3.5, играет в комплексном анализе центральную роль. При этом теоремы 3.4.1 и 3.5.1, гарантирующие, вкупе с элементарными соображениями, возможность и единственность продолжения, — порождают необычный для классического анализа феномен. *Любая аналитическая функция единственным образом продолжается до функции, определенной на максимально возможной области*, как бы сама задает свою область определения, и в любом ее «осколке», как в голограмме, отражается вся информация о функции в целом, — что в некоторой степени укрепляет Космическую идею самоповторения целого в собственных частях.

Это, безусловно, приятный сюрприз. Непрерывная функция продолжается «как угодно», аналитическая — только одним способом, и ее достаточно задать «на пятачке», остальное разворачивается само собой.

Есть и «неприятный» сюрприз, о котором пока речь всерьез не заходила и который до некоторой степени подрывает сказанное выше. Продолжение вдоль разных путей может приводить к разным результатам. И это отнюдь не экзотика. Рядовые функции $\sqrt[n]{z}$, $\ln z$ — многозначны. Явление с определенной точки зрения три-виально, однако порождает неудобства, преодоление которых шаг за шагом ведет в топологические дебри. Поэтому регламентация обращения в условиях многозначности является в ТФКП принципиальной задачей.

Но проблема заключается не в описании, — что само по себе бывает просто, а в стыковке явления многозначности с технологией аналитического продолжения. Насильственные методы хирургического толка — типа принудительного обрезания области значений, как у действительного арксинуса — имеют свою нишу, но это не снимает главного вопроса. Как узаконить процедуру аналитического продолжения при потенциальной возможности неоднозначного исхода?

5.2. Теорема о монодромии

Упоминание аналитической функции часто несет в себе некоторую долю лукавства. Не всегда ясно, что имеется в виду — фрагмент или функция в целом.

Радиус сходимости ряда $f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ равен 1, но $f(z)$, вообще говоря, может быть продолжена до логарифма $\ln(1+z)$, определенного на всей комплексной плоскости за исключением $z = -1$. Если, однако, подразумевается $f(z) = \ln(1+z)$, то прилагается ли в комплекте способ аналитического продолжения? Более того, в разделе 3.5 неявно предполагалась однозначность продолжаемой функции, чего в случае логарифма нет и в помине.

Презумпция однозначности продолжения действует, правда, и в «многозначных» ситуациях, но допущение здесь оправдывается способом интерпретации. Аналитическое продолжение рассматривается либо на подобластях, в которых проблем не возникает, либо на римановых поверхностях, на которых многозначные функции — становятся однозначными.

«Не возникает проблем», когда в выделенной области все *кривые*, соединяющие любые данные две точки, — *гомотопны* друг другу. В этом случае продолжение функции вдоль любой кривой, ведущей из a в b , дает один и тот же результат и позволяет говорить об аналитическом продолжении как о непротиворечивом инструменте. Это и есть *теорема о монодромии*:

5.2.1. *Если все кривые, лежащие в области D и соединяющие любые данные две точки, гомотопны друг другу, — то аналитическое про-*

должение функции вдоль любой кривой, ведущей из a в b , дает один и тот же результат.

Резон придания этой теореме особого статуса заключен в следующем. Определение *аналитической функции* (п. 2.1.2) до некоторой степени неудовлетворительно. Регулярность $f(z)$ в области D влечет за собой существование сходящихся степенных рядов в окрестности любой точки из D , но откуда следует, что из этих рядов можно «сшить» функцию $f(z)$? Ниоткуда. Результат сшивания может оказаться противоречивым (многозначным)¹⁾.

Если же все кривые в D , соединяющие любые две точки, — гомотопны, а это имеет место в случае односвязной области D , теорема о монодромии гарантирует корректность аналитического продолжения в D . Результат всегда получается однозначным, фрагменты функции сшиваются в единое целое.

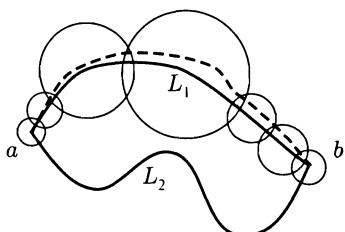


Рис. 5.1

Перейдем к обоснованию п. 5.2.1. Перед этим напомним и уточним некоторые понятия. *Продолжением функции $f(z)$ вдоль пути L* называют обычное аналитическое продолжение $f(z)$ по цепочкам степенных рядов с центрами кругов сходимости на L .

Кривые L_1 и L_2 (с общими концами — рис. 5.1), лежащие в D , считаются *гомотопными* в D , если их можно непрерывно деформировать друг в друга, не выходя за пределы

области D . Геометрически очевидно, что для такой деформации требуется, чтобы внутри контура, образованного кривыми L_1 и L_2 , не было особых точек, в которых $f(z)$ не аналитична²⁾.

◀ **Доказательство теоремы 5.2.1.** Однозначность продолжения функции вдоль гомотопных кривых вытекает из следующего рассуждения. Каждой точке кривой L_1 соответствует круг, в котором сходится соответствующий степенной ряд, представляющий $f(z)$ в данной точке. Из покрытия L_1 такими кругами выделим

¹⁾ Оправданием определения 2.1.2 служит фактическое предположение, что $f(z)$ — функция, т. е. однозначное соответствие $z \mapsto y = f(z)$. Но в ТФКП функциями считают также и многозначные соответствия, называя последние иногда *полными функциями*, чтобы избежать люфта толкования.

²⁾ Особая точка внутри контура $\{L_1 \cup L_2\}$ была бы препятствием.

конечное подпокрытие³⁾, которое образует область Ω однозначного определения и продолжения функции $f(z)$, ибо Ω представляет собой цепочку пересекающихся кругов — с равными значениями степенных рядов на пересечениях. По этой причине продолжение $f(z)$ из a в b по любой кривой, целиком лежащей в Ω , будет давать один и тот же результат.

Поэтому, если $f(z)$ регулярна в точках кривой, скажем, L_1 , то продолжение $f(z)$ по любой близкой к L_1 кривой⁴⁾ будет давать тот же результат, что и продолжение вдоль L_1 . При отсутствии особых точек внутри $\{L_1 \cup L_2\}$ переход от L_1 к L_2 можно представить в виде конечной последовательности переходов к близким кривым. ►

Довольно часто теоремой о монодромии называют следствие теоремы 5.2.1:

5.2.2. *Если область D односвязна и фрагмент $f(z)$ аналитически продолжается в любую точку D вдоль некоторой кривой, то функция $f(z)$ аналитична в D и однозначна.*

Либо еще проще:

5.2.3. *Функция, аналитическая в односвязной области, однозначна.*

Требование односвязности области в *теореме о монодромии* исключает из поля зрения многие практические важные ситуации, но вернуться в русло теоремы иногда помогают обходные маневры. Например, добавление к области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ точки ∞ превращает D в односвязную область $\widetilde{D} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. В этом случае однозначность многих функций типа $f(z) = 1/z$ в D следует из однозначности $f(z)$ в более широкой области \widetilde{D} .

5.3. Корень квадратный

С проблемой многозначности лучше всего разбираться на самом простом примере. Рассмотрим функцию \sqrt{z} на области

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

В этом случае о D говорят как о *комплексной плоскости с разрезом* по действительной оси от 0 до $-\infty$.

³⁾ Существующее в силу компактности L_1 .

⁴⁾ Пунктирная кривая на рис. 5.1.

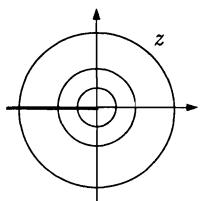


Рис. 5.2

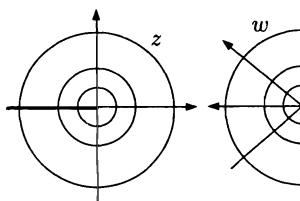
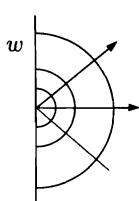


Рис. 5.3

Для $z \in D$ из двух возможных значений \sqrt{z} выберем то, которое имеет положительную действительную часть, и обозначим его через ${}_1\sqrt{z}$. Функция $w = {}_1\sqrt{z}$ как функция на D — однозначна, аналитична и переводит D в правую полуплоскость плоскости w (рис. 5.2). Аналитичность и однозначность ${}_1\sqrt{z}$ в D проверяется непосредственно, а также следует из *теоремы о монодромии*⁵⁾.

При записи в тригонометрической форме, $z = re^{i\varphi}$,

$${}_1\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi). \quad (5.1)$$

Аналогично определяется функция $w = {}_2\sqrt{z}$, приписывающая \sqrt{z} значение, лежащее в левой полуплоскости плоскости w (рис. 5.3). В полярных координатах

$${}_2\sqrt{z} = -\sqrt{r}e^{i\varphi/2}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi). \quad (5.2)$$

Если теперь взять два листа \mathbb{C} — оба с разрезом по действительной оси от 0 до $-\infty$ (рис. 5.4) — и функцию ${}_1\sqrt{z}$ считать определенной на одном листе, а ${}_2\sqrt{z}$ — на другом, то объединение ${}_1\sqrt{z}$ и ${}_2\sqrt{z}$ можно считать однозначной функцией, заданной на совокупности двух листов.

Сопоставление (5.1) и (5.2) показывает, что значения ${}_1\sqrt{z}$ на верхнем (нижнем) берегу разреза и ${}_2\sqrt{z}$ — на нижнем (верхнем), по мере приближения z к разрезу стремятся к общему пределу $i\sqrt{r}$ ($-i\sqrt{r}$). Поэтому каждую функцию ${}_1\sqrt{z}$, ${}_2\sqrt{z}$ можно продолжить по непрерывности на берега разреза⁶⁾. Сшивая затем верхний берег первого листа с нижним второго, и наоборот, получим так называемую *риманову поверхность*, на которой функция \sqrt{z} не-

⁵⁾ Область D односвязна, производная $({}_1\sqrt{z})' \neq 0$ при любом $z \in D$.

⁶⁾ Считая разрез расщепленным на «берега», т. е. на «верхнюю» полуось, и — «нижнюю».

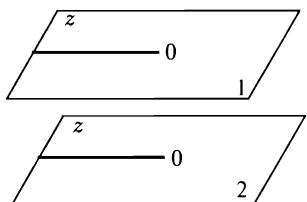


Рис. 5.4

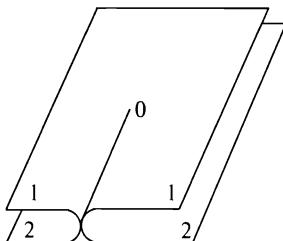


Рис. 5.5

прерывна и однозначна (!). Соединить указанным образом берега разрезов первого и второго листа без пересечения поверхностей, разумеется, невозможно (рис. 5.5), но это в \mathbb{R}^3 . При желании избавиться от самопересечений римановы поверхности можно помещать в пространство большей размерности, о чем можно и не заботиться. Достаточно иметь правило «возможного движения точки в районе самопересечения».

Здесь имеет смысл обратить внимание на простую аналогию. Окружность на плоскости, $x^2 + y^2 = 1$, представляет из себя достаточно «покладистый» объект. Однако разделение переменных на аргумент и функцию порождает многозначность, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, избавиться от которой можно было бы, рассматривая y как функцию не отрезка $[-1, 1]$, а дуги окружности. Либо окружность можно было бы сплюснуть на $[-1, 1]$ и считать отрезок $[-1, 1]$ состоящим из двух слоев. Значение $y = \sqrt{1 - x^2}$ тогда сопоставлялось бы верхнему слою, $y = -\sqrt{1 - x^2}$ — нижнему.

Сплющенные графики аналитических функций $w = f(z)$, собственно, и являются римановыми поверхностями. Будь геометрическое воображение работоспособно в четырехмерном пространстве переменных $w \times z$, — можно было бы просто говорить о графиках функций, не обременяя себя хлопотами сплющивания.

5.4. Точки ветвления и регулярные ветви

Возвращаясь к функции $w = \sqrt{z}$, рассмотренной в предыдущем разделе, необходимо заметить, что выбор разреза $(-\infty, 0]$ необязателен. Годился бы любой разрез, соединяющий нуль с бесконечно-

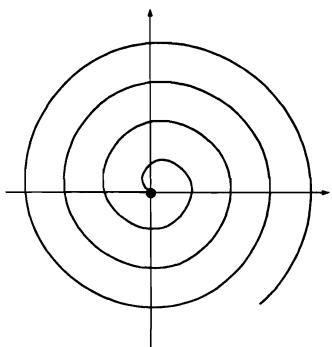


Рис. 5.6

стью, — в том числе спираль, изображенная на рис. 5.6.

Причина состоит в следующем. Разрез обязан препятствовать замкнутой кривой, вдоль которой происходит аналитическое продолжение, сделать хотя бы один оборот вокруг нуля⁷⁾. Разрезанная таким образом плоскость $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (с выколотым нулем) преобразуется в односвязную область D , и по *теореме о монодромии* 5.2.2 становится базой для однозначных аналитических продолжений — стоит лишь выбрать начальный элемент (фрагмент) функции, например, разложение в ряд ${}_1\sqrt{z}$ или ${}_2\sqrt{z}$ в некоторой точке из D . При этом аналоги функций ${}_1\sqrt{z}$, ${}_2\sqrt{z}$ в целом получатся другими.

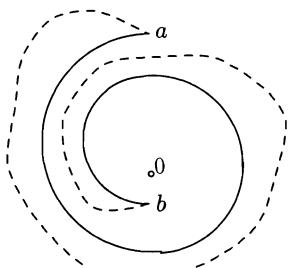


Рис. 5.7

В случае спиралевидного разреза (рис. 5.6) кривые, вдоль которых происходит аналитическое продолжение, — могут совершать сколь угодно много оборотов вокруг нуля (рис. 5.7). Но число этих оборотов однозначно определяется начальной и конечной точками a и b . Оба пути на рис. 5.7, сплошной и пунктирный, в этом смысле эквивалентны, а замкнутый контур, состоящий из сплошного пути из a в b и пунктирного — из b в a , не содержит внутри себя нуля, чем гарантируется однозначность аналитических продолжений вдоль *разрешенных путей*.

Разрез, таким образом, играет роль инструмента, отделяющего *разрешенные пути* аналитического продолжения от *неразрешенных*. Если при этом замкнутые контуры из разрешенных путей не содержат внутри себя особых точек, разрез справляется со своей функцией. Комплексная плоскость без такого разреза образует *область однолистности* функции $f(z)$, а заданная на этой области однозначная ветвь $f(z)$ называется *регулярной*⁸⁾.

⁷⁾ Каковой в данном случае является *точкой ветвления* — см. далее.

⁸⁾ Вариантов выделения регулярных ветвей бесконечно много, так же как возможностей проведения подходящих разрезов.

Отталкиваясь от рассмотренного примера, можно перейти к более формальным определениям.

5.4.1. *Ветвью аналитической, вообще говоря, многозначной функции $f(z)$ на области D называется функция $f_D(z)$, которая получается из фиксированного фрагмента $f(z)$ с помощью аналитических продолжений вдоль путей, лежащих в D . Однозначная ветвь считается регулярной.*

5.4.2. *Если при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ аналитична в кольце⁹⁾*

$$R_a = \{z : 0 < |z - a| < \varepsilon\},$$

но многозначна, то $z = a$ называется изолированной точкой ветвления.

В случае конечного числа значений $f(z)$ в кольце R_a точку $z = a$ называют *точкой ветвления порядка n* (по числу «значений»). Если же $f(z)$ в R_a принимает бесконечное число значений, точка ветвления $z = a$ называется *логарифмической*.

Аналитические функции в кольцевой окрестности R_a точки ветвления порядка n разлагаются по лорановскому образцу:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^{k/n}. \quad (5.3)$$

◀ Обоснование (5.3) довольно просто. Функция

$$g(\zeta) = f(a + \zeta^n)$$

аналитична и однозначна в кольце $0 < |\zeta| < \varepsilon^{1/n}$. Однозначность $g(\zeta)$ вытекает из следующего соображения. Аналитическое продолжение $g(\zeta)$ по окружности $|\zeta| = \rho$ после одного оборота — равносильно аналитическому продолжению $f(z)$ по окружности $|z - a| = \rho^n$ после n оборотов. Последнее приводит к исходному элементу, ибо порядок ветвления равен n . Следовательно, $g(\zeta)$ однозначна. Разлагая далее $g(\zeta)$ в ряд Лорана и выражая f через g ,

$$f(z) = g(\sqrt[n]{z - a}),$$

получаем (5.3). ►

⁹⁾ То есть любой ее фрагмент аналитически продолжается вдоль любого пути, лежащего в R_a .

Если разложение (5.3) имеет конечное число членов с отрицательными степенями $z - a$, точка ветвления $z = a$ называется алгебраической¹⁰⁾.

Замечание. Точки ветвления, вообще говоря, не исчерпывают многозначных особенностей. Сказанное не охватывает простейшую ситуацию $f(z) = \sqrt{z^2}$. Функция f многозначна,

$$f(z) = \pm z.$$

При движении через нуль можно «плавно» перейти с ветви $f = z$ на $f = -z$, но $z = 0$ здесь не является точкой ветвления. При ее обходе перейти на другую ветвь не удается — надо идти через саму точку. Просто $z = 0$ в данном случае оказывается точкой соприкосновения ветвей. С понятийной точки зрения явление малоинтересное, близкое к механическому объединению функций типа $f(z) = e^z$ и $f(z) = e^z + 2$. Но при концентрации внимания на более привлекательных объектах — можно оказаться застигнутым врасплох.

5.5. Римановы поверхности

В общем случае *риманова поверхность* для $f(z)$ строится подобно тому, как это было сделано для \sqrt{z} . Исходная область D с удаленными особыми точками и подобластями с помощью разрезов превращается в односвязную, затем выделяются однозначные ветви $f_k(z)$ с последующим их продолжением по непрерывности на берега разрезов. На заключительной стадии берега разрезов, на которых значения разных ветвей совпадают, — сшиваются между собой¹¹⁾.

На рис. 5.8 изображены примеры четырехсвязных ограниченных областей. В случае (i) область D имеет три заштрихованных отверстия, в ситуации (ii) — одно отверстие и два прокола (особые точки $z = a$ и $z = b$). Подходящие разрезы можно провести разными способами. В каждом случае приведены по два варианта: «жирные разрезы» и «пунктирные».

¹⁰⁾ Хождение имеют также различные эквивалентные определения [6, 7].

¹¹⁾ После сшивания (склеивания) на римановой поверхности не остается даже следов разрезов. Потому что разрезы с функцией никак не связаны, это лишь промежуточный технический прием — делать разрезы можно «и так и эдак».

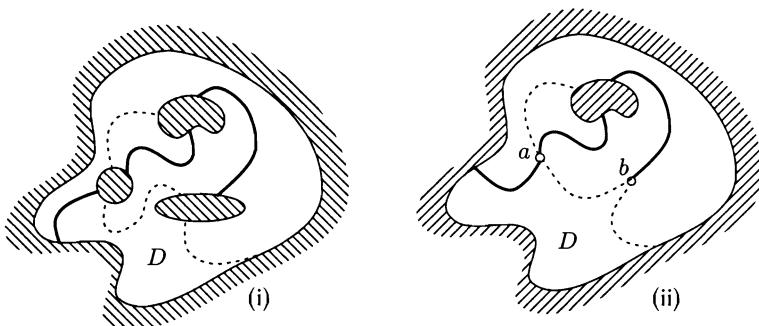


Рис. 5.8

В общих курсах комплексного анализа изучение римановых поверхностей на этом заканчивается, что создает дискомфортное ощущение недоученного урока. Тем не менее двигаться дальше нет особого смысла, если не ставить перед собой совсем другие цели. Теория аналитических функций на римановых поверхностях — это другая наука. Возникает, правда, вопрос, зачем тогда городить огород в рамках общеобразовательного курса ТФКП? — Но тут резон тренировочного характера. Пока занимаешься «римановой эквилибристикой», лучше начинаешь понимать *ветви, особые точки, и вообще, многозначность*. Да и кругозор — не последняя вещь. Хотя, надо признать, сказанного недостаточно, чтобы представить, как все это может развиваться.

Поначалу кажется, что перспективы тут не идут дальше переливания из пустого в порожнее. Действительно, расширение диапазона задач показывает, что, с точностью до некоторой топологической эквивалентности, дело каждый раз сводится к простой общей схеме, в рамках которой возникает несколько листов (экземпляров \mathbb{C}), попарно сшитых друг с другом по разрезам. И вся разница, собственно, заключается в порядке сшивания листов, следствием чего является порядок, в котором можно перебираться с листа на лист, пересекая разрезы.

Что за разрезы, опять-таки с точностью до топологической эквивалентности, не суть важно. Дело вообще не в разрезах, а в точках ветвления, при обходе которых по кругу каждый раз пересекается тот самый «не суть важный разрез», и происходит переход на другой

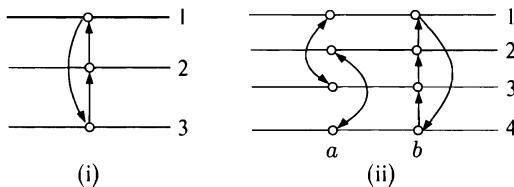


Рис. 5.9

лист. Поэтому ситуацию характеризует количество листов и указание возможных переходов.

На рис. 5.9 изображены два примера. Листам сопоставлены горизонтальные линии, стрелки изображают допустимые переходы. Варианту (i) отвечает, например, функция $\sqrt[3]{z}$. Либо $\sqrt[3]{z - c}$, что сводится к $\sqrt[3]{z}$ переносом особой точки в другое место. Переходы с листа на лист могут осуществляться только в циклическом порядке¹²⁾.

Ситуация на рис. 5.9 (ii) сложнее. Здесь точек ветвления две, a и b . В окрестности a переходы возможны только между уровнями (листами) 2–4 либо 1–3, в окрестности b — в циклическом порядке. Такая риманова поверхность отвечает функции $\sqrt[4]{(z - a)^2(z - b)^3}$.

При первом знакомстве здесь возникает, конечно, масса вопросов. Не может ли, скажем, риманова поверхность зависеть от способа проведения разрезов, особенно при нескольких точках ветвления? Если из точек ветвления проводить непересекающиеся разрезы в бесконечность, то — нет. (?) Разумеется риманова поверхность получается одна и та же с точностью до изоморфизма — в данном случае с точностью до нумерации листов.

5.6. Связь с теорией Галуа

Алгебраическое уравнение

$$P_n(z) - w = 0, \quad (5.4)$$

где $P_n(z)$ — полином n -й степени, при $n \geq 2$ неявно определяет многозначную функцию $z(w)$, потому что уравнение (5.4) всегда

¹²⁾ При каждом обороте точки z вокруг нуля — аргумент $\sqrt[3]{z}$ увеличивается на $2\pi/3$.

имеет n решений в \mathbb{C} . Вопрос заключается в том, что это за функция, $z(w)$? Выражается ли она в радикалах? Оказывается, нет — не всегда. Отсюда тем более следует, что алгебраические уравнения тоже не всегда решаются в радикалах.

Вопрос относительно подробно рассмотрен в [4, т. 8]. Разрешимость в радикалах алгебраического уравнения $P(x) = 0$ сводится¹³⁾ к возможности последовательного решения уравнений вида $z^m - a = 0$. Например, если $P(x)$ преобразуется в

$$P(x) = [(x^{n_1} - a)^{n_2} - b]^{n_3} - c, \quad (5.5)$$

то решением $P(x) = 0$ будет

$$\sqrt[n_1]{a + \sqrt[n_2]{b + \sqrt[n_3]{c}}},$$

где a, b, c «радикально» выражаются через коэффициенты исходного полинома

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Определенный интерес представляет взгляд на проблему с позиции аналитических функций. Допустим, \mathcal{P} обозначает класс функций $z(w)$, определяемых с помощью уравнений вида (5.4), а \mathcal{R} — класс «радикальных» функций $z(w)$, которые могут быть получены из $I(z) \equiv z$ и констант с помощью извлечения корней целой степени и четырех арифметических операций.

Алгебраические уравнения были бы разрешимы в радикалах в случае $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$, но это не так¹⁴⁾, о чём можно судить, кстати, по несовпадению соответствующих классов римановых поверхностей. То есть на самих функциях можно не фокусироваться. Далее. О несовпадении классов римановых поверхностей можно судить, изучая не сами поверхности, а возможные переходы с листа на лист. Такие переходы, как оказывается, образуют группы, которые в случае $z(w) \in \mathcal{R}$ — обязаны быть *разрешимыми*. А поскольку некоторым функциям $z(w) \in \mathcal{P}$ отвечают неразрешимые группы, то отсюда и вытекает *теорема Абеля*. Все это было проделано в [4, т. 8] без какого-либо обращения к аналитическим функциям и римановым поверхностям. *Группа Галуа* сразу строилась по многочлену.

¹³⁾ Хотя это и не очевидно сразу.

¹⁴⁾ По *теореме Абеля*, представляющей собой «существенно меньшую половину» *теоремы Галуа* [4, т. 8].

Новый момент, который появляется в связи с рассмотрением аналитических функций, заключается в расширении класса \mathcal{R} за счет пополнения его, например, любыми целыми функциями с последующим замыканием всевозможными комбинациями опять-таки с помощью извлечения корней целой степени и четырех арифметических действий. Групповая характеристика функций расширенного класса \mathcal{R} остается прежней — группы Галуа обязаны быть разрешимы, поскольку добавление целых функций не меняет римановых поверхностей¹⁵⁾. Но тогда становится ясно, что алгебраические уравнения в общем случае неразрешимы, даже если включить дополнительно использование, скажем, экспонент и синусов.

¹⁵⁾ С точностью до изоморфизма.

Глава 6

Теория вычетов

Теория вычетов чем-то напоминает топологическую теорию неподвижных точек [4, т. 1] с фокусом внимания на индексах и алгебраическом числе нулей. Здесь, правда, речь идет не о нулях векторного поля, а о полюсах.

6.1. Основная теорема

В силу (2.16), (2.18), интеграл от функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

по любому контуру, не содержащему внутри других особых точек, кроме z_0 , равен $2\pi i c_{-1}$, откуда ясна особая роль коэффициента c_{-1} в лорановских разложениях¹⁾.

Этот коэффициент

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

ряда Лорана (3.12) называется *вычетом* и обозначается $\text{res}(f, a)$.

Равносильное определение:

$$\text{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz,$$

¹⁾ Если $c_{-1} \neq 0$, то z_0 заведомо особая точка. При изучении нулей функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

отдаленно похожую роль играют коэффициенты a_1 , характеризуя в случае $a_1 \neq 0$ невырожденные нули.

если $z = a$ — либо изолированная особая точка (однозначного характера), либо точка голоморфности; а r достаточно мало. Корректность второго определения будет ясна из дальнейшего.

6.1.1. Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична на замкнутом контуре C и внутри него, за исключением конечного числа точек a_1, \dots, a_k . Тогда

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{res}(f, a_1) + \dots + \operatorname{res}(f, a_k)]. \quad (6.1)$$

◀ В силу аддитивности контурный интеграл

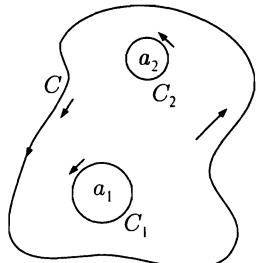


Рис. 6.1

сводится к сумме контурных интегралов по маленьким окружностям²⁾ с центрами в особых точках. Это и дает (6.1). ►

Соотношение (6.1) обычно работает справа налево. Тяжелая задача вычисления криволинейного интеграла подменяется легким упражнением определения вычетов.

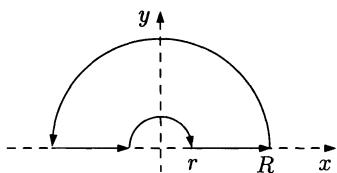


Рис. 6.2

В простейшем случае все вычеты внутри контура C — нулевые, по причине аналитичности функции внутри C . Например, интегрирование

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

по контуру, изображенному на рис. 6.2, дает

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^R + \int_{-R}^{-r} + \int_{C_R} + \int_{C_r} = 0.$$

²⁾ С направлением обхода против часовой стрелки (рис. 6.1). В противном случае

$$\oint_C f(z) dz + 2\pi i [\operatorname{res}(f, a_1) + \dots + \operatorname{res}(f, a_k)] = 0.$$

Интеграл $\int_{C_R} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, а

$$\int_{C_r} \rightarrow -i\pi \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (?)$$

Кроме того,

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

В результате

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Если a — простой полюс, т. е.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

вычет определяется как предел

$$\boxed{\operatorname{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)}, \quad (6.2)$$

что очевидно.

В случае, когда $f(z)$ представима в окрестности a как отношение аналитических функций,

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

причем $\varphi(a) \neq 0$, а точка a — нуль *первого порядка*³⁾ функции ψ , — следствием (6.2) является

$$\boxed{\operatorname{res}(f, a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}} \quad (6.3)$$

³⁾ То есть разложение Тэйлора $\psi(z)$ в точке a начинается с $\psi'(a)(z-a)$.

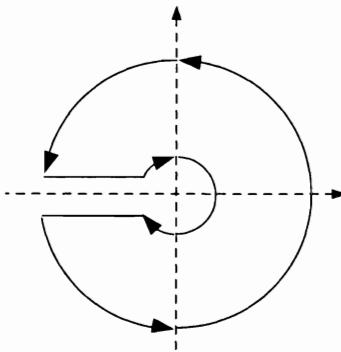


Рис. 6.3

Необходимо подчеркнуть, что точки ветвления в теории вычетов исключаются (из рассмотрения). Анализ многозначных функций возможен, но только с выделением однозначных ветвей. В результате приходится изобретать довольно хитрые контуры интегрирования, типа изображенного на рис. 6.3, где подразумевается точка ветвления в нуле и разрез по отрицательной полуоси x .

- $\operatorname{res}\left(\operatorname{tg} \pi z, \frac{1}{2}\right) = -\pi^{-1}, \quad \operatorname{res}\left(z \cos \frac{1}{z-3}, 3\right) = 0,$
 $\operatorname{res}\left(z^2(1+z^2)^{-2}, i\right) = -\frac{i}{4}, \quad \operatorname{res}\left(z^2(1+z^2)^{-2}, -i\right) = \frac{i}{4}. (?)$

• Если $f(z)$ имеет n нулей внутри C , то у $f'(z)$ внутри C — на один нуль меньше. (?)

• Если a полюс k -го порядка,

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

то

$$c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}[(z-a)^k f(z)]}{dz^{k-1}}. \quad (?)$$

6.2. Вычет в бесконечности

Если $z = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, т. е. у f вне круга некоторого радиуса R нет других особых точек, то вычет

$f(z)$ в точке $z = \infty$ определяется как⁴⁾

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz.$$

Большого смысла в понятии вычета на бесконечности, вообще говоря, нет. Весь сыр-бор происходит из-за симпатичной формулы

$$\operatorname{res}(f, a_1) + \dots + \operatorname{res}(f, a_k) + \operatorname{res}(f, \infty) = 0, \quad (6.4)$$

которая есть не что иное как (6.1) в других обозначениях. С поправкой на то, что под a_1, \dots, a_k в (6.4) подразумеваются *все конечные особые точки* функции $f(z)$.

С другой стороны, понятие $\operatorname{res}(f, \infty)$ вносит определенную путаницу, потому что возможно $\operatorname{res}(f, \infty) \neq 0$ в том случае, когда ∞ особой точкой не является (устранимая особенность).

6.3. Примеры

- В силу (6.1)

$$\oint_C \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}, ia\right),$$

где C — контур, состоящий из диаметра (от $-r$ до r) и полуокружности C_r радиуса r (рис. 6.4). Причем вычет в точке $z = ia$ по формуле (6.2) равен

$$\operatorname{res}\left(\frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}, ia\right) = \frac{e^{-a}}{2}. \quad (6.5)$$

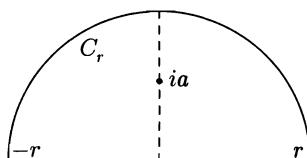


Рис. 6.4

Далее, интеграл по полуокружности

$$\left| \int_{C_r} \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} dz \right| \leq \frac{r^2}{r^2 - a^2} \int_0^\pi e^{-r \sin \varphi} d\varphi \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow \infty$.

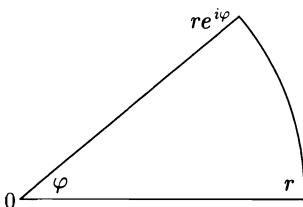
⁴⁾ Либо $\operatorname{res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz$, но тогда обход контура $|z| = R$ подразумевается по часовой стрелке.

Интеграл же по диаметру:

$$\int_{-r}^r \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \int_0^r \frac{x(e^{ix} - e^{-ix})}{x^2 + a^2} dx = 2i \int_0^r \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx.$$

В пределе, с учетом (6.5),

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-a}}{2}.$$



• Интеграл

$$\oint_C e^{-z^2} dz$$

по контуру C , ограничивающему сектор, изображенный на рис. 6.5, равен нулю, потому что функция e^{-z^2} аналитична в секторе. При этом интеграл распадается в сумму трех интегралов:

Рис. 6.5

$$\oint_C e^{-z^2} dz = \int_0^r e^{-x^2} dx - \int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz + \int_{C_r} e^{-z^2} dz.$$

Последний интеграл по дуге C_r стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ в связи с равномерным (по φ) и достаточно быстрым стремлением к нулю модуля подынтегральной функции (см. далее). Вследствие этого, а также оговоренного уже условия

$$\oint_C e^{-z^2} dz = 0,$$

имеет место равенство:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-x^2} dx,$$

откуда, в силу известного

$$\int_0^r e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и

$$\int_0^{re^{i\varphi}} e^{-z^2} dz = e^{i\varphi} \int_0^r [\cos(x^2 \sin 2\varphi) - i \sin(x^2 \sin 2\varphi)] e^{-x^2 \cos 2\varphi} dx,$$

следует:

$$\int_0^\infty e^{-x^2 \cos 2\varphi} \cos(x^2 \sin 2\varphi) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \varphi,$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2 \cos 2\varphi} \sin(x^2 \sin 2\varphi) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \varphi.$$

При $\varphi = \pi/4$ это дает значения интегралов Френеля:

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Примеры аналогичного толка в большом количестве разбросаны по многочисленным руководствам, но теперь уже не то время, когда находки подобного сорта вызывают удивление.

При манипуляциях описанного толка часто возникает потребность ликвидировать в пределе ($R \rightarrow \infty$) интегралы по окружностям радиуса R или их частям. Чтобы каждый раз не городить огород заново, обычно ссылаются на лемму Жордана, даже если ситуация отличается в деталях, — потому что предположения п. 6.3.1 очевидным образом могут варьироваться.

6.3.1. Лемма Жордана. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и равномерно относительно $\arg z$ стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0, \quad \lambda > 0,$$

где C_R — верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

◀ Из $\sin \varphi \geq (2/\pi)\varphi$ при $\varphi \in [0, \pi/2]$ вытекает

$$|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda R \sin \varphi} \leq e^{-2\lambda R \varphi / \pi}.$$

Поэтому на участке C'_R полуокружности C_R , которому отвечает $\varphi \in [0, \pi/2]$,

$$\left| \int_{C'_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \mu(R) \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R \varphi / \pi} R d\varphi = \mu(R) \frac{\pi}{2\lambda} (1 - e^{-\lambda R}),$$

где $\mu(R)$ — максимум модуля $f(z)$ на C'_R . Аналогичная оценка получается для другой половинки полуокружности C_R . ►

6.4. Логарифмические вычеты

О нулях и полюсах аналитической функции $f(z)$ удобно судить по логарифмическим вычетам — вычетам производной логарифма

$$[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

◀ Допустим, $f(z)$ в точке a имеет нуль n -го порядка, т. е.

$$f(z) = c_n(z - a)^n + c_{n+1}(z - a)^{n+1} + \dots \quad (c_n \neq 0).$$

В этом случае

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nc_n + (n+1)c_{n+1}(z - a) + \dots}{c_n(z - a) + c_{n+1}(z - a)^2 + \dots} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

и формула (6.3) приводит к результату:

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = n.$$

Если же $f(z)$ в точке a имеет полюс m -го порядка, аналогичные выкладки приводят к

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, a\right) = -m. \quad ▶$$

6.4.1. В результате⁵⁾:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (6.6)$$

где N и P , соответственно, — полное число нулей и полюсов⁶⁾ $f(z)$ внутри контура C .

6.5. Принцип аргумента

Интеграл (6.6) имеет также другую естественную интерпретацию.

◀ Элементарное преобразование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \ln f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d \ln |f(z)| + \frac{1}{2\pi} \oint_C d \arg f(z) \quad (6.7)$$

⁵⁾ С учетом (6.1).

⁶⁾ Каждый нуль и полюс считается столько раз, каков его порядок.

показывает, что⁷⁾

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z),$$

где $\Delta_C \arg f(z)$ — изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе контура C точкой z . ►

Таким образом,

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z).$$

В частности, если $f(z)$ аналитична внутри контура C , то в области, ограниченной контуром C , функция $f(z)$ имеет

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) \quad (6.8)$$

нулей. Факт может обыгрываться различным образом.

6.5.1. Теорема об однолистном накрытии. *Если функция $f(z)$ аналитична внутри контура C , ограничивающего область D , непрерывна на замыкании \bar{D} и взаимно однозначно отображает C на контур $f(C)$, то она однолистна в области D .*

◀ Пусть $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0)$. Число решений в D уравнения $f(z) = w_0$, в силу (6.8), равно числу оборотов $\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) - w_0]$, когда z обходит контур C . Поскольку контуры C и $f(C)$ отображаются взаимно однозначно, точка $w = f(z)$ обходит контур $f(C)$ один раз, когда z один раз обходит C . Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) - w_0] = \frac{1}{2\pi} \Delta_{f(C)} \arg [w - w_0] = 1. \quad \blacktriangleright$$

6.5.2. Теорема Руше. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и непрерывны на замыкании \bar{D} , причем $|f(z)| > |g(z)|$ на границе D , то $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в D одинаковое число нулей.*

⁷⁾ Первый интеграл в (6.7) обнуляется, поскольку при обходе контура C функция $\ln|f(z)|$ возвращается к своему исходному значению, а второй интеграл справа дает как раз изменение аргумента $f(z)$ при обходе точкой z контура C .

◀ На границе D , в силу

$$|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0 \Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \geq 0,$$

функции f и $f + g$ нулей не имеют. Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)] &= \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left\{ f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right], \end{aligned}$$

причем $\arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] = 0$, потому что вектор $1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ не может сделать оборота вокруг нуля, оставаясь в правой полуплоскости, в силу $\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$. Поэтому

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)] = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N_f. \quad ▶$$

В применении к ситуации

$$f(z) = z^n, \quad g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

теорема Руше сразу дает основную теорему алгебры⁸⁾, потому что все требования выполняются на кругах достаточно большого радиуса.

Устойчивые полиномы. Принцип аргумента широко используется в теории устойчивости, где он приобретает некоторую специфическую окраску. Вот как это выглядит на примере анализа характеристических многочленов [4, т. 2].

Полиномы $P(\lambda)$, все корни λ_k которых удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, также называют *устойчивыми*, либо *гурвицевыми*, а задачу об устойчивости $P(\lambda)$ — *проблемой Рауса—Гурвица*.

При подстановке $\lambda = i\omega$ в

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

многочлен P записывается в форме $|P(i\omega)|e^{i \arg P(i\omega)}$, либо

$$P(i\omega) = g(\omega) + ih(\omega), \tag{6.9}$$

где g и h — многочлены от ω . Например, в случае $P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$,

$$g(\omega) = -\omega^2 + a_2, \quad h(\omega) = a_1\omega.$$

Кривая (6.9) в комплексной плоскости, задаваемая параметром ω , называется *амплитудно-фазовой характеристикой* полинома, либо *годографом Михайлова*.

⁸⁾ О существовании n корней у алгебраического уравнения n -й степени.

6.5.3. Критерий Михайлова. Если аргумент $P(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ меняется на величину $n \frac{\pi}{2}$, то многочлен $P(\lambda)$ устойчив.

◀ Из представления

$$P(i\omega) = (i\omega - \lambda_1) \dots (i\omega - \lambda_n)$$

видно, что изменение аргумента $P(i\omega)$ равно сумме приращений аргументов сомножителей $(i\omega - \lambda_k)$. Изображающая точка $(i\omega - \lambda_k)$ при изменении ω от нуля до $+\infty$ движется (по комплексной плоскости) вверх вдоль вертикальной прямой, проходящей через $-\lambda_k$ (рис. 6.6). При этом ясно, что аргумент $(i\omega - \lambda_k)$ меняется на $\pi/2$, в случае действительного корня $\lambda_k < 0$, на $\pi/2 - \varphi$ (рис. 6.6), в случае комплексного корня с вещественной частью $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, и на $\pi/2 + \varphi$, в случае комплексно сопряженного корня λ_k^* .

Результирующая сумма получается равной $n \frac{\pi}{2}$. ►

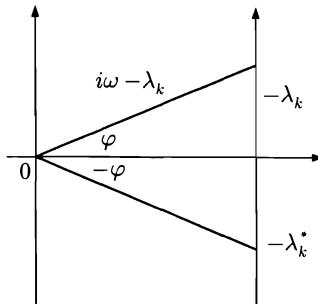


Рис. 6.6

В [4, т. 2] есть примеры годографов устойчивых многочленов. Для решения вопроса об изменении аргумента точность, понятно, не нужна. Достаточно прикинуть точки пересечения с осями и направление ухода в бесконечность. Это делается легко и быстро.

Глава 7

Конформные отображения

7.1. Мотивация

Конформным называют непрерывное отображение, сохраняющее подобие бесконечно малых фигур¹⁾. Аналитическая функция $f(z)$ является *конформным преобразованием* в точке z_0 в томм случае, когда $f'(z_0) \neq 0$. При этом в окрестности z_0

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + o(\dots),$$

т. е. малые элементы Δz умножаются на комплексное число $f'(z_0)$, что приводит к растяжению во всех направлениях в $|f'(z_0)|$ раз и повороту Δz на угол²⁾ $\arg f'(z_0)$. Это обеспечивает сохранение подобия фигур с точностью до «о-малых».

(i) Существенность требования $f'(z_0) \neq 0$ понятна. Если $f'(z_0) = 0$, то в первом приближении окрестность z_0 сплющивается в точку и о подобии первого порядка можно забыть — остаются лишь нелинейные эффекты.

(ii) Аналитические конформные преобразования не только сохраняют углы по абсолютной величине, но и по направлению обхода³⁾. В рамках комплексного анализа рассматривают также *не аналитические* конформные преобразования типа $f(z) = \bar{z}$, которые «направление обхода» меняют на противоположное.

(iii) Напомним, условие $f'(z_0) \neq 0$ гарантирует, что f , как преобразование двух переменных,

$$f = \{u(x, y), v(x, y)\},$$

¹⁾ Сохраняющее «форму».

²⁾ Определенный благодаря условию $f'(z_0) \neq 0$.

³⁾ Имеются в виду углы между кривыми и их образами.

действующее в плоскости \mathbb{R}^2 , — является *локальным гомеоморфизмом*. Действительно, якобиан f , в силу условий Коши—Римана⁴⁾, невырожден,

$$\det f' = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = |f'(z_0)|^2 > 0.$$

Более того, условие $f'(z_0) \neq 0$ необходимо для локальной гомеоморфности аналитической функции f (в точке z_0) — см. раздел 2.10. Поэтому конформные преобразования среди аналитических функций можно было бы охарактеризовать как *локально гомеоморфные отображения*.

Пока речь шла о *конформности в точке*. Аналитическое отображение f области D на D' считается *конформным*, если оно конформно при любом $z \in D$ и, кроме того, взаимно однозначно. Проще говоря, с учетом приведенного выше замечания (iii), *аналитическая функция $f : D \rightarrow D'$ конформна в томм случае, когда осуществляет гомеоморфизм D на D'* .

Конечно, определение конформного преобразования как гомеоморфизма — ретуширует аналитическую специфику $f(z)$. Но в любом случае при упоминании конформных преобразований *областей* важно помнить, что речь идет о *взаимно однозначных отображениях $f(z)$* . Многолистные функции $f(z)$ допускаются к рассмотрению, но лишь при условии урезания области до «размеров», в которых $f(z)$ однолистны.

Конформная тематика обычно концентрируется вокруг проблемы преобразования одних областей в другие, и педагогическая настойчивость дает определенный результат. Некоторая часть студентов запоминает, как полуплоскость преобразовать в круг, но мало кто в итоге знает, зачем это нужно.

С точки зрения классического анализа задача, «во что переходит область D под действием f », — выглядит довольно странной. Особенно нелепым кажется повышенный интерес к мелким деформациям изучаемых областей — вмятинам, луночкам и т. п. Поэтому здесь имеет смысл раскрыть карты заранее.

⁴⁾ Напомним условия Коши—Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$.

Многие вопросы, скажем, гидро- и аэродинамики охватываются решением уравнения Лапласа,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (7.1)$$

при тех или иных граничных условиях (глава 9). Задача в естественных предположениях сводится к поиску аналитической функции с заданными значениями на границе некоторой области D .

Возникает естественный соблазн использовать решение $u(x, y)$ с граничными условиями на области D для решения аналогичной задачи, но с другой областью D' . Этому, собственно, и служит выбор подходящего конформного преобразования $w = f(z)$, дающего замену переменных $z \mapsto w$, которая переводит D в D' и не нарушает уравнения (7.1).

Такая идея используется двояко. Либо решение интересующей задачи получается из эталонного (например, с кругом или полуплоскостью в роли стандартной области), либо внимание концентрируется на последствиях малых деформаций изучаемой области — и тут луночки и вмятины приходятся кстати⁵⁾. В любом случае конформное преобразование D в D' служит ключом к решению задачи в целом.

Более конкретно суть дела описана в главе 9, но саму идею полезно иметь в виду «до того», чтобы «конформная эквилибристика» не казалась извращением.

Рассказ о конформных преобразований обычно сопровождается изобилием картинок типа тех, что изображены на рис. 7.1. Это не так плохо, если декорациям не приписывать главенствующей роли. Иначе кому-то начинает казаться, что квинтэссенция ТФКП заключена в этих «мандалах», и без углубления в их суть не обойтись. В результате о расстановке акцентов возникает искаженное представление, что может препятствовать восприятию дисциплины с естественной иерархией ее главных задач⁶⁾.

⁵⁾ Показывая, например, как малые изменения профиля крыла самолета влияют на обтекание, подъемную силу и т. п.

⁶⁾ Это общая проблема. Новичку бывает сложно отличить стержневые результаты теории от второстепенных, особенно, если последние преобладают текстуально и эстетически.

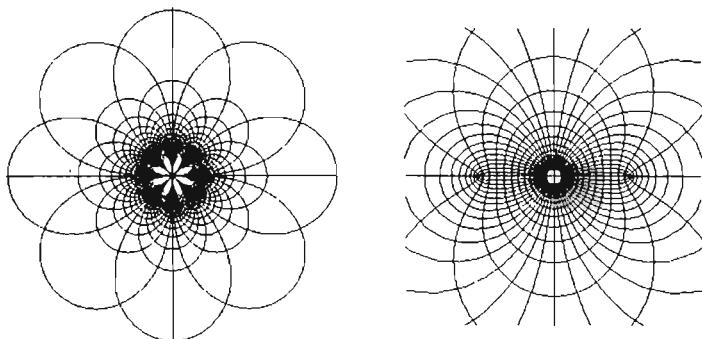


Рис. 7.1

Слева на рис. 7.1 — фрагмент образа декартовой сети при отображении $1/\sqrt{z}$, справа — такого же сорта фрагмент при отображении $1/(\cos z)$. Удивительное обстоятельство при этом заключено в том, что сложные и эстетически привлекательные узоры получаются с помощью довольно простых отображений. А уж предельные множества при итерациях совсем элементарного преобразования $z^2 + c$ (раздел 7.6) получаются тем более удивительными.

7.2. Общие свойства

Хорошо известно, что при непрерывном преобразовании прообразы открытых множеств — открыты. Образы открытых множеств — открыты необязательно. Например, $f(x) = x^2$ преобразует интервалы $(-\varepsilon, \varepsilon)$ в «половинчики» множества $[0, \varepsilon^2]$.

Однако, если f — локальный гомеоморфизм, то образы открытых множеств — также открыты⁷⁾. И это присуще конформным преобразованиям, поскольку они являются локальными гомеоморфизмами (теорема 2.10.1).

- Если аналитическая в области D функция $f(z)$ — не константа, то образ $f(\Omega)$ любого открытого множества $\Omega \subset D$ — открыт⁸⁾. (?)
- Функция $f(z)$ в окрестности полюса в точке $z = a$ однолистна в том случае, когда полюс — первого порядка. (?)

⁷⁾ «Та же» функция $f(z) = z^2$, но уже на комплексной плоскости, круги $|z| < \varepsilon$ преобразуют в открытые множества $|z| < \varepsilon^2$.

⁸⁾ Допускается возможность $f'(z) = 0$, $z \in \Omega$ — так что конформность необязательна.

- Функция $f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$ в окрестности⁹⁾ $z = \infty$ однолистна в томм случае, когда $c_1 \neq 0$. (?)
- Если $w = f(z)$ — конформное отображение области D на D' , то площадь D' определяется формулой¹⁰⁾

$$\sigma(D') = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy. \quad (?)$$

Центральным в теории конформных отображений принято считать следующий результат.

7.2.1. Теорема Римана. Для любых односвязных областей D и D' — с границами, состоящими более чем из одной точки, — существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на D' . Если дополнительно выдвигается требование¹¹⁾

$$w_0 = f(z_0), \quad \arg f'(z_0) = \gamma_0,$$

то такое отображение существует и единственно.

В другом варианте *теорема Римана* формулируется несколько иначе: Все односвязные области D в $\bar{\mathbb{C}}$ разбиваются на три класса конформно эквивалентных. Первый класс характеризуется отсутствием граничных точек у D , во втором классе D имеет только одну граничную точку, в третьем — не меньше двух.

◀ В первый класс попадает единственная область, сама расширенная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$. Во второй — попадают области, представляющие собой $\bar{\mathbb{C}}$ с выколотой точкой a , конформно переходящие в \mathbb{C} под действием преобразований $(z - a)^{-1}$. Наконец, третий класс отвечает предположениям п. 7.2.1. Граничных точек, по крайней мере, две. Они сначала конформно переводятся в 0 и ∞ , после чего с помощью некоторой эквилибристики область конформно отображается на круг $|z| < 1$. «Эквилибристика» описывается в стандартных руководствах [6, 7]. ►

Односвязность областей D и D' в теореме 7.2.1 принципиальна. Например, для существования конформного отображения кольца

⁹⁾ Окрестностями бесконечно удаленной точки являются, например, множества $|z| > R$.

¹⁰⁾ Ключ к решению: якобиан $\det f' = |f'(a)|^2$.

¹¹⁾ Для любых точек $z_0 \in D$, $w_0 \in D'$ и любого угла γ_0 .

$r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $R_1 < |w| < R_2$ необходимо и достаточно¹²⁾:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

На фоне теоремы Римана факт несколько обескураживающий. Некоторой компенсацией может служить канонический характер колец: *любая двусвязная область может быть конформно отображена на некоторое кольцо*¹³⁾.

Принцип соответствия границ. При конкретном построении конформного отображения наиболее проблематична однолистность функции $f : D \rightarrow D'$ на всей области D . Задача в целом сводится к установлению гомеоморфизма D на D' . «Аналитическая специфика» опять-таки выручает, позволяя ограничиться проверкой взаимной однозначности отображения границ D и D' . Соответствующий результат носит название *принципа соответствия границ*:

7.2.2. Теорема. *Пусть D и D' — односвязные области, ограниченные жордановыми контурами C и C' , и пусть функция $f : D \rightarrow D'$, аналитичная в D , непрерывна на замыкании \bar{D} и взаимно однозначно отображает C на C' с сохранением направления обхода. Тогда $f(z)$ конформно¹⁴⁾ отображает D на D' .*

◀ Результат фактически представляет собой переформулировку теоремы 6.5.1 об однолистном накрытии. ►

Выше приведена обычная формулировка теоремы 7.2.2, в которой требование сохранения направления обхода при отображении контуров в принципе излишне, потому что ориентация при конформном преобразовании сохраняется автоматически, а соответствие $D \mapsto D'$ оговорено в предположениях. На практике приходится обычно сталкиваться с несколько иной ситуацией. Например,

¹²⁾ Достаточность, в силу пропорциональности, обеспечивает обычное растяжение. Обоснование необходимости легко получается из принципа симметрии — см. [8].

¹³⁾ Келдыш М. В. Конформные отображения многосвязных областей на канонические области // УМН. 1939. Вып. VI. С. 90–119.

¹⁴⁾ Значит, однолистно, причем $f'(z) \neq 0$ в любой точке D , — что, заметим, относится к выводам, а не к предположениям.

пусть f взаимно однозначно отображает окружность C в окружность C' . Отображает ли оно круг в круг, а не во внешность круга? Для положительного ответа требуется сохранение направления обхода контуров, не говоря о некоторых других условиях.

7.2.3. Принцип симметрии Римана–Шварца. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D , частью границы которой является интервал (a, b) действительной прямой, и пусть значения $f(z)$, $z \in (a, b)$, — действительны. Тогда функция

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

аналитична в области D^* , симметричной относительно действительной прямой, а

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{для } z \in D \cup (a, b), \\ f^*(z), & \text{для } z \in D^* \cup (a, b), \end{cases}$$

аналитична на совокупной области $D \cup (a, b) \cup D^*$.

◀ Если $a \in D$, то из аналитичности f следует:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

и ряд справа сходится в некотором круге. Но тогда

$$\overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\bar{z}-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n(z-\bar{a})^n,$$

и ряд справа имеет тот же радиус сходимости, что обеспечивает аналитичность $\overline{f(\bar{z})}$ в D^* . Далее ситуация укладывается в предположения п. 2.5.4. ►

Результат 7.2.3 представляет собой зерно, из которого легко вырастают более общие утверждения. В частности, если вместо фигурирующего в п. 7.2.3 интервала (a, b) на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ область D имеет на своей границе другой прямолинейный участок S , — то все остается по-прежнему, если в качестве D^* взять область, симметричную D относительно S . Ситуация сводится к предыдущей *дробно-линейным преобразованием* (раздел 7.3), переводящим S в интервал на \mathbb{R} .

Поскольку любую дугу окружности Γ также можно выпрямить и передвинуть на \mathbb{R} с помощью дробно-линейного преобразования

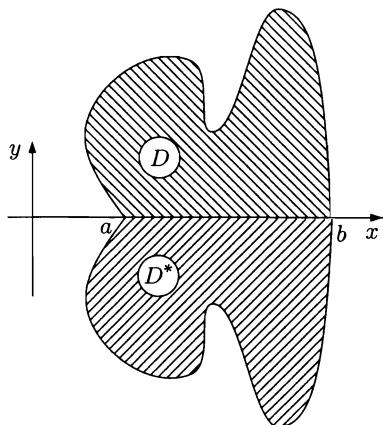


Рис. 7.2

ния, — вместо (a, b) в п. 7.2.3 можно взять Γ , но тогда D^* обязана быть симметричной¹⁵⁾ D относительно Γ .

7.3. Дробно-линейные преобразования

Функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (7.2)$$

называется *дробно-линейным преобразованием* (ДЛП). Условие

$$ad - bc \neq 0$$

обеспечивает непропорциональность числителя и знаменателя, что влечет за собой $f(z) \neq \text{const}$. Любая функция (7.2) доопределяется по непрерывности,

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

в результате чего считается заданной на всей расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В итоге: всякое ДЛП $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ является однолистным (взаимно однозначным) отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

¹⁵⁾ *Инверсно сопряженной* — по терминологии следующего раздела.

Производная (7.2),

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

существует и отлична от нуля всюду, кроме точки $z = -d/c$ и, вообще говоря, $z = \infty$. Это, однако, не мешает преобразованию (7.2) быть конформным во всех точках расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$.

◀ Противоречие с определением здесь снимается доопределением ситуации в точке $z = \infty$. Конформность в неисключительных точках следует из существования конечной производной $f'(z) \neq 0$. В обоих исключительных случаях фигурирует бесконечно удаленная точка. Один раз в роли аргумента, другой — образа. Для $z = \infty$ вводится понятие *угла между кривыми в бесконечности*¹⁶⁾ и устанавливается, что преобразование (7.2) всегда сохраняет углы, чего достаточно для конформности. ►

Дробно-линейное преобразование обладает многими замечательными свойствами, но его выдающуюся роль определяет, пожалуй, следующий результат.

7.3.1. Теорема. *Если функция $f(z)$ однолистна и аналитична всюду в расширенной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, одной точки z_0 , то она дробно-линейна¹⁷⁾.*

◀ Если $f(z)$ аналитична всюду в расширенной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$, то она константа (теорема 2.9.2). Если $z_0 \neq \infty$ — особая точка $f(z)$, то z_0 — простой полюс¹⁸⁾. Но тогда функция

$$g(z) = f(z) - \frac{c_{-1}}{z - z_0}$$

аналитична в $\bar{\mathbb{C}}$ и по той же теореме 2.9.2 является константой: $g(z) \equiv A$, откуда следует дробная линейность

$$f(z) = A + \frac{c_{-1}}{z - z_0}.$$

Случай $z_0 = \infty$ заменой переменной $z \mapsto 1/z$ сводится к предыдущему. ►

¹⁶⁾ С точки зрения пересечения кривых «северный полюс» сферы Римана, отвечающий $z = \infty$, не отличается от любой другой точки. Но за кадром здесь остается необходимость определенных уточнений — подробности есть в любом стандартном курсе ТФКП.

¹⁷⁾ Другая вариация этой теоремы такова: *если $f(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно $\bar{\mathbb{C}}$ на $\bar{\mathbb{C}}$, то она дробно-линейна* [6].

¹⁸⁾ Иначе в окрестности z_0 функция $f(z)$ не будет однолистной (раздел 3.7).

7.3.2. ДЛП образуют группу относительно композиции.

Иными словами, если $f(z)$ и $g(z)$ — преобразования вида (7.2), то и $f(g(z))$ — преобразование того же вида. Это до некоторой степени неожиданно, но элементарно проверяется, причем обнаруживается взаимно однозначное соответствие

$$\frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

с группой невырожденных матриц второго порядка [4, т. 8]. Иными словами, композиции $f(g(z))$ отвечает ДЛП с коэффициентами, совпадающими с элементами произведения соответствующих матриц. Требование

$$ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$$

исключает из рассмотрения вырожденные матрицы. Обратным к $w = \frac{az + b}{cz + d}$ является преобразование $z = \frac{dw - b}{-cw + a}$, что явно перекликается с

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в силу взаимно однозначного соответствия с группой невырожденных матриц, дробно-линейные преобразования образуют группу $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ относительно композиции отображений¹⁹⁾.

Кроме того, любое дробно-линейное преобразование является гомеоморфизмом из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Простейшие дробно-линейные преобразования:

- Умножение: $z \mapsto az$ (растяжение в $|a|$ раз и поворот на угол $\arg a$);
- Сдвиг: $z \mapsto z + b$;
- Инверсия: $z \mapsto 1/z$.

7.3.3. Любое дробно-линейное преобразование разлагается в композицию простейших.

¹⁹⁾ Обозначение $\text{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ не случайно. Дробно-линейные преобразования, и только они, являются конформными автоморфизмами сферы Римана. Группу ДЛП называют еще группой Мёбиуса. Конформные ДЛП вместе с антиконформными преобразованиями $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ также составляют группу.

◀ Идея доказательства тривиальна. Надо разделить на знаменатель. Например,

$$\frac{2z - 1}{z + 3} = \frac{2(z + 3) - 7}{z + 3} = 2 - \frac{7}{z + 3}.$$

Запись в общем виде прибавляет хлопот, но остается в тех же идеологических рамках. ►

Факт 7.3.3 позволяет ограничиваться проверкой свойств ДЛП только для простейших преобразований. Например, обоснование пункта 7.3.2 предельно упрощается, не требуя даже бумаги и карандаша.

7.3.4. ДЛП переводит окружности в окружности²⁰⁾.

◀ Проверка имеет чисто технический характер. Достаточно убедиться, что уравнение окружности (или прямой, при $\alpha = 0$)

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

под действием преобразования $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ не меняет своего вида²¹⁾. Меняются только коэффициенты. ►

Определенный интерес здесь представляет и другая точка зрения, опирающаяся на понятия *инверсной геометрии*.

- Точки p и q назовем *инверсно сопряженными* относительно окружности C радиуса ρ , если они лежат на одном луче, выходящем из центра C , и произведение их расстояний до центра C равно ρ^2 . Центр C полагают *инверсно-сопряженным* точке ∞ .

В случае, когда C — прямая (радиус бесконечен), определение трансформируется следующим образом. Точки p и q *инверсно сопряжены* относительно прямой L , если они зеркально симметричны относительно L .

- Точки z и $1/\bar{z}$ *инверсно сопряжены* относительно окружности $|z| = 1$.
- Обычное уравнение окружности радиуса ρ с центром z_0 есть $|z - z_0| = \rho$. Менее привычно уравнение окружности

$$\left| \frac{z - p}{z - q} \right| = k, \quad k \neq 1, \tag{7.3}$$

по отношению к которой точки p и q *инверсно сопряжены* друг другу.

²⁰⁾ Прямые считаются окружностями бесконечного радиуса.

²¹⁾ В силу (7.3.3) можно ограничиться рассмотрением лишь простейших преобразований.

- Легко убедиться, что простейшие ДЛП не меняют вида уравнения (7.3), что опять-таки, в tandemе с 7.3.3, доказывает п. 7.3.4.

- Точки p и q инверсно сопряжены относительно C в томм случае, когда любая окружность Γ , проходящая через точки p и q , пересекает окружность C перпендикулярно²²⁾. (?)

- ДЛП переводит инверсно сопряженные точки относительно окружности C — в инверсно сопряженные точки относительно образа C . (?)

7.3.5. Ангармоническим отношением четырех точек²³⁾

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ называется число

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

7.3.6. Ангармоническое отношение попарно различных точек сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

- В томм случае, когда их ангармоническое отношение равно действительному числу. (?)

7.3.7. Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 и любых трех различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛП, переводящее z_k в w_k , и это ДЛП определяется равенством

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{w - w_1}{w - w_2}. \quad (7.4)$$

- Тот факт, что ДЛП определяется образами трех точек, вполне прозрачен, поскольку отображение $(az + b)/(cz + d)$ фактически зависит лишь от трех комплексных параметров²⁴⁾, которые могут быть косвенно заданы тремя уравнениями: $w_j = \text{ДЛП}(z_j)$. Возможность выразить соответствующую зависимость w от z в один прием из (7.4) — это вопрос удачи. По счастливой случайности подвернулось «ангармоническое отношение», обладающее инвариантностью.

Примеры

Круг в круг. Любая окружность C определяется тремя точками. Поэтому ДЛП, переводящее C в C' , может быть определено из (7.4) заданием трех точек z_1, z_2, z_3 на C и каких-нибудь (само собой, различных) трех точек w_1, w_2, w_3 на C' .

²²⁾ Факт лежит в стороне от основной линии изложения, но сам по себе весьма примечателен.

²³⁾ Или двойным отношением четырех точек.

²⁴⁾ После деления числителя и знаменателя на ненулевой коэффициент — от четырех коэффициентов a, b, c, d остается три.

Если теперь вычисленное $\frac{az + b}{cz + d}$ переводит

$$\{z_1, z_2, z_3\} \quad \text{в} \quad \{w_1, w_2, w_3\},$$

то это же преобразование переводит C в C' , п. 7.3.4. Последний вопрос: переводится ли круг в круг? Необязательно. Внутренность C может «вывернуться наизнанку» и перейти во внешность C' . Чтобы этого не произошло, необходимо согласование ориентаций. Точки z_j, w_j должны быть заранее упорядочены так, чтобы их прохождение в порядке возрастания нумерации давало одинаковое направление обхода контуров C и C' (по часовой стрелке либо — против). В этом случае гарантии обеспечивает *принцип соответствия границ*, п. 7.2.2.

Полуплоскость в круг. Напомним, ДЛП переводит окружности в окружности (п. 7.3.4), причем в поле зрения попадают и прямые, как окружности бесконечного радиуса. Поэтому изложенная выше схема «круг в круг» охватывает все варианты: «полуплоскость в круг» — рис. 7.3, «круг в полуплоскость», «полуплоскость в полуплоскость».

При этом, если контур C — прямая линия, прохождению трех точек на C в порядке возрастания нумерации отвечает положительное направление обхода

(как бы против часовой стрелки) относительно той полуплоскости, которая при движении вдоль C остается слева.

Функция

$$w = re^{i\varphi} \frac{z - c}{z - \bar{c}}$$

преобразует верхнюю полуплоскость в круг радиуса r с центром в нуле. В нуль переходит точка $z = c$.

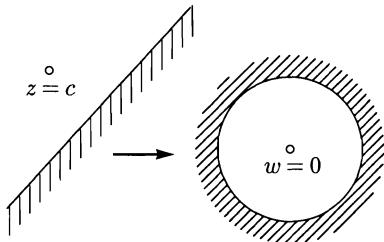


Рис. 7.3

Замечание. Здесь имеет смысл расставить некоторые акценты. Не столько по части дробно-линейных преобразований, сколько по поводу математического образования вообще.

Не все в разделе рассмотрено с той степенью детализации, которая принята в учебниках. Кое-что оставлено без доказательств (кстати, совсем коротких), каковые проще было бы привести, нежели объяснять, почему — нет. Тем не менее воздержание от части декораций имеет свой резон. Одно дело, когда ДЛП рассматриваются сами по себе, другое — в рамках комплексного анализа.

Проблематика-то в целом многогранна. Скажем, *ангармоническое отношение четырех точек* уходит протуберанцами совсем в другие области, такие как *проективная геометрия* и — *неевклидова*.

Стоит ли отвлекаться, занимаясь аналитическими функциями? Однозначного ответа, конечно, нет. Многое зависит от обстоятельств, вплоть до настроения. Но для восприятия каркаса ТФКП «неевклидов азимут», безусловно, вторичен, не говоря о том, что создает слишком много звона в ушах.

Малосущественные детали есть и в пределах «каркаса», типа угла в бесконечности, который по своей роли находится на отшибе, хотя и проливает дополнительный свет на расширение комплексной плоскости. «Дополнительный свет» это как раз то универсальное средство, побочное действие которого часто превосходит полезный эффект.

7.4. Функция Жуковского

Функция Жуковского

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (7.5)$$

аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и конформна везде кроме $z = \pm 1$, ибо имеет производную

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0$$

при z , не равном ± 1 .

Что касается многозначности обратной (7.5) функции

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

то она двузначна. Равенство

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}, \quad \text{т. е.} \quad z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 \cdot z_2},$$

возможно лишь при условии²⁵⁾

$$z_1 \cdot z_2 = 1, \quad (7.6)$$

которое может служить лакмусовой бумажкой однолистности $f(z)$ в той или иной области. В частности, функция (7.5) однолистна внутри единичного круга, $|z| < 1$, либо — вне, $|z| > 1$.

²⁵⁾ Разумеется, $z_1 \neq z_2$.

В полярных координатах $z = re^{i\varphi}$ функция (7.5) имеет вид,

$$\begin{aligned} w &= u(r, \varphi) + iv(r, \varphi), \\ u &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Поэтому любая окружность $|z| \equiv r \neq 1$ переводится в эллипс

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

с полуосами

$$a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|.$$

Окружности радиусов r_1, r_2 , если $r_1 \cdot r_2 = 1$, переводятся в один и тот же эллипс. При $r \rightarrow 1$ соответствующие эллипсы сплюшиваются в отрезок $[-1, 1]$, заштрихованный на рис. 7.4. В случае $r \rightarrow 0$ либо $r \rightarrow \infty$ — эллипсы растут до бесконечности. Окружность $|z| = 1$ отображается (двузначно) на $[-1, 1]$.

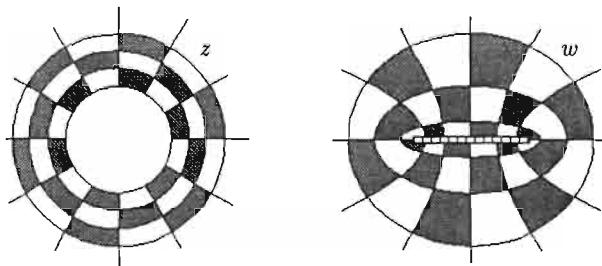


Рис. 7.4

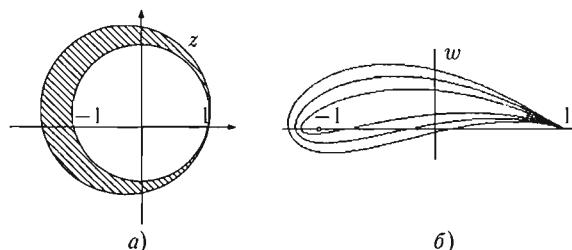


Рис. 7.5

Лучи $\arg z = \varphi_0$ переводятся отображением (7.7) в гиперболы (рис. 7.4)²⁶⁾

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1. \quad (7.8)$$

При любом φ_0 фокусы гиперболы (7.8) находятся в точках ± 1 .

Популярность функции (7.5) определяется приложениями к гидро- и аэромеханике, связанными с построением *крыльев-профилей Жуковского*, каковые — рис. 7.5 б — получаются преобразованием (7.5) областей типа заштрихованных полумесяцев — рис. 7.5 а. Детали есть в любом учебнике, но сейчас это уже представляет в основном исторический интерес.

7.5. Другие преобразования

Функция $z \mapsto \ln z$ сектор $\alpha < \arg z < \beta$ переводит в горизонтальную полосу $\alpha < v < \beta$. Точнее говоря, полоса — бесконечно много, что сразу ясно из

$$z = re^{i\varphi} \Rightarrow w = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi),$$

где многообразие порождают различные k . Для конформности отображения $w = \ln z$ необходимо $\beta - \alpha < 2\pi$, и тогда можно фиксировать k , выбрав тем самым однозначную ветвь логарифма. Обратное преобразование $z = e^w$ отображает полосы в углы.

Еще проще анализ степенной функции $w = z^n$, $n = 1, 2, \dots$, которая секторы $\alpha < \varphi < \beta$ разворачивает в угловые области $n\alpha < \varphi < n\beta$. Разумеется, для конформности преобразования $w = z^n$ требуется однолистность, что в секторе $\alpha < \varphi < \beta$ обеспечивается условием $\beta - \alpha < 2\pi/n$. Обратное преобразование $z = \sqrt[n]{w}$ также отображает углы в углы, но уже «сворачивая» — уменьшая раствор в n раз.

В аналогичные рамки укладывается также преобразование $w = z^\gamma$ в случае рационального $\gamma = p/q$. Попытка со стартовой площадки $w = z^n$ рассмотреть

²⁶⁾ Точнее говоря, в ветви гиперболы (7.8) переходят участки лучей $0 < r < 1$, $1 < r < \infty$.

случай иррационального γ наталкивается на определенные трудности²⁷⁾. Поэтому здесь обычно отталкиваются от представления

$$z^\gamma = e^{\gamma \ln z},$$

опираясь на уже регламентированное понятие логарифма (раздел 4.2). Тем не менее при переходе от целого n к иррациональному γ суть дела не меняется — $w = z^\gamma$ отображает углы в углы, увеличивая раствор в γ раз.

Определенную известность имеет интеграл Шварца—Кристоффеля

$$w(z) = C \int_{z_0}^z (\zeta - \alpha_1)^{\theta_1-1} (\zeta - \alpha_2)^{\theta_2-1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{\theta_n-1} d\zeta, \quad (7.9)$$

где z_0 и C — некоторые константы. Функция (7.9) осуществляет конформное преобразование верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z$ на внутренность многоугольника с углами

$$\begin{aligned} \theta_1\pi, \theta_2\pi, \dots, \theta_n\pi, \\ \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = n - 2, \end{aligned}$$

причем в вершины многоугольника переходят заданные точки действительной оси: $a_1 < \dots < a_n$.

«Разбор полетов» здесь требует несколько многословных пояснений [8], но идея, лежащая в основе преобразования (7.9), совсем проста. Аргумент функции $(\zeta - \alpha)^\beta$ при движении точки ζ по действительной оси, пока ζ не переходит точку α , — не меняется. Соответственно, аргумент функции

$$\frac{dw}{d\zeta} = C(\zeta - \alpha_1)^{\theta_1-1} (\zeta - \alpha_2)^{\theta_2-1} \dots (\zeta - \alpha_n)^{\theta_n-1}, \quad (7.10)$$

сохраняет свое значение, когда точка ζ движется по участкам²⁸⁾ (α_{k-1}, α_k) . А когда ζ , двигаясь вправо, проходит точку α_k «сверху», $\arg(\zeta - \alpha_k)$ скачком падает с π до 0. В результате $\arg(dw/d\zeta)$ уменьшается на $(1 - \alpha_k)\pi$, что отвечает внутреннему углу $\alpha_k\pi$ многоугольника. Формула (7.9) возникает в результате интегрирования (7.10).

Рассуждение, конечно, проведено «по верхам», но из него вполне усматривается использование *принципа соответствия границ* (теорема 7.2.2). О внутренности

²⁷⁾ Приближение γ рациональными дробями вовлекает в процесс корни все более высокой степени.

²⁸⁾ В том числе по (α_n, α_1) — через бесконечность.

многоугольника думать не надо, достаточно позаботиться о переходе действительной оси в границу многоугольника.

Поскольку композиция конформных отображений снова дает конформное преобразование, то десяток эталонов позволяет создавать сотни комбинаций. Если f конформно отображает полуплоскость в многоугольник, а g — круг в полуплоскость, то в нашем распоряжении оказывается преобразование fg круга в многоугольник. С многочисленными вариантами в неторопливом изложении можно ознакомиться по книге [8].

7.6. Комплексная динамика

На преобразования $w = f(z)$ можно смотреть двояко, считая z переходящим в точку w другой комплексной плоскости либо — той же самой. В последнем случае определенный интерес могут представлять итерации

$$z_{k+1} = f(z_k), \quad (7.11)$$

даже для функций f весьма простого вида. В частности, итерационный процесс с простейшей функцией $f(z) = z^2 + c$, т. е.

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad (7.12)$$

отнял у человечества уйму времени. Хорошо это или плохо — другой вопрос, но за кадром (7.12) оказалось столько разнообразия, что каждый мог получить индивидуальную игрушку.

Удивление, охватившее широкие слои населения в связи с динамической процедурой (7.12), проистекало из неожиданного контраста. Очень простой механизм непостижимым образом порождал очень сложные графические характеристики процесса. Завораживающим явлением оказалось понятие *множества Жюлиа*. Последнее представляет собой, по определению, границу множества точек z , начиная с которых процесс (7.11) уходит в бесконечность²⁹⁾. В слу-

²⁹⁾ В другом варианте *множество Жюлиа* определяется как множество точек z , начиная с которых процесс (7.11) остается ограниченным. Именно такой вариант изображен на рис. 7.6.

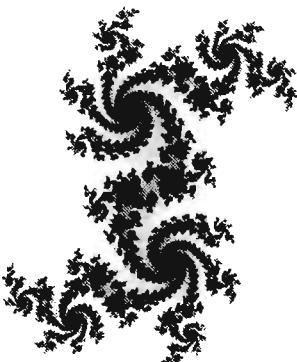


Рис. 7.6

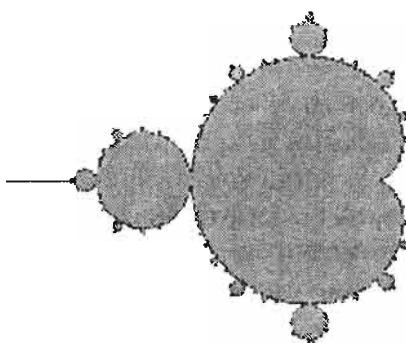


Рис. 7.7

чае (7.12) каждому c отвечает свое множество Жюлиа. Один из вариантов изображен на рис. 7.6.

При $c = 0$, как нетрудно сообразить, множество Жюлия является единичной окружностью. И это гармонирует с простотой описания процесса (7.12). Естественно, казалось бы, ожидать того же и при других значениях c . Но не тут-то было. Интернет полон красивыми картинками, в которых есть что-то эстетически притягательное.

- Если $|c| < 2$ и последовательность $\{z_k\}$, устроенная по правилу (7.12), достигает при некотором k_0 значения $|z_{k_0}| \geq 2$, то $z_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. (?)

Множество всех точек c , для которых итерации (7.12) остаются ограниченными при $z_0 = 0$, называется *множеством Мандельброта* — рис. 7.7.

Глава 8

Операционное исчисление

8.1. Механизм производящих функций

Чтобы люди не перепутались, им дают имена. Бесконечную последовательность чисел $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ тоже можно поместить под одну крышу, заранее индивидуально пометив все a_n . Один из вариантов «кошелька» для $\{a_n\}$ — ряд

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n. \quad (8.1)$$

Если в (8.1) $f(s)$ — не просто обозначение ряда, а его компактная сумма типа

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \dots, \quad \text{либо} \quad \ln(1+s) = s - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3} - \dots,$$

манипуляция оказывается эффективной для работы с $\{a_n\}$.

Достаточно вспомнить соотношение

$$(1+s)^n = 1 + C_n^1 s + C_n^2 s^2 + \dots + C_n^n s^n,$$

из которого извлекается масса тождеств для биномиальных коэффициентов. Аналогичная техника работоспособна в очень широком диапазоне¹⁾.

Степенной характер производящего ряда необязателен. Возможно использование рядов Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(s)$$

¹⁾ См.: Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.

с ортогональной системой функций $\{\varphi_n(s)\}$. Например,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{ins}.$$

Конечно, в теории рядов Фурье мысль направляется от функции к ряду, но движение навстречу не запрещено.

Интересно, между прочим, что многие комбинаторные задачи ведут к произвольным функциям, хорошо известным по другим сюжетам. И наоборот, разложение элементарных функций в ряд Тэйлора дает последовательности коэффициентов $\{f^{(n)}(0)/n!\}$ значения, имеющие естественную комбинаторную интерпретацию. Взаимосвязь местами прозрачна, кое-где — загадочна.

Похожие рецепты применяются к функциям²⁾ с заменой суммирования интегрированием. Широко используется, например, интегральное преобразование Фурье³⁾

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (8.2)$$

Тут, правда, образуется впечатление, что шило меняется на мыло, поскольку одна функция, f , заменяется другой, \widehat{f} . Однако \widehat{f} в некоторых отношениях, особенно с точки зрения дифференцирования, получается скомпонованной рациональнее. В итоге достигается выигрыш при решении линейных дифференциальных уравнений, и, что более важно, возникают новые категории мышления [4, т. 2, гл. 8].

8.2. Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (8.3)$$

²⁾ Как бы к ситуациям, когда индекс у a_n меняется непрерывно.

³⁾ Обратное преобразование: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$

где $p = \sigma + i\omega$, — усовершенствует методику, основанную на преобразовании (8.2). Функцию $f(t)$ при этом называют *оригиналом*, а $\widehat{f}(p)$ — *изображением*, что записывают обычно как

$$f(t) \doteq \widehat{f}(p), \quad \text{либо} \quad \widehat{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Традиционно предполагается кусочная непрерывность $f(t)$. Точнее, на любом ограниченном участке допускается не более чем конечное число разрывов первого рода⁴⁾. Разумеется, также $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$, и показатель роста ограничен: $|f(t)| < Ke^{\alpha t}$ для некоторых α , $K > 0$ и всех $t \geq 0$.

Выгоды *преобразования Лапласа* по сравнению со стандартным *преобразованием Фурье* заключаются в том, что при больших $\operatorname{Re} p = \sigma$ метод (8.3) справляется с быстрорастущими функциями, тогда как (8.2) упирается в расходящиеся интегралы. В этом, собственно, и заключается роль действительной части σ , которую можно выбирать по своему усмотрению, исходя из потребностей задачи⁵⁾. В частности, при $\sigma = 0$ получается преобразование Фурье функции $f(t)$, если $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Успех *преобразования Лапласа* при изучении линейных систем определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, линейностью:

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \doteq \lambda \widehat{f}(p) + \mu \widehat{g}(p).$$

Во-вторых, заменой дифференцирования умножением. Точнее говоря,

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &\doteq \int_0^\infty e^{-pt} \dot{f}(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} df(t) = \\ &= e^{-pt} f(t) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty pe^{-pt} f(t) dt = p \widehat{f}(p) - f(0), \end{aligned} \quad (8.4)$$

⁴⁾ *Разрыв первого рода* характеризуется существованием конечных пределов слева и справа.

⁵⁾ Правильнее даже сказать, что σ вообще заботы не требует. Выбирать и фиксировать значения σ не надо. Важно лишь понимать, что при достаточно больших σ интеграл (8.3) сходится.

где при взятии интеграла по частям действительная часть p выбирается настолько большой, чтобы модуль $e^{-pt}f(t)$ при $t = \infty$ обращался в ноль.

Естественно, предпочтение отдается задачам, в которых $f(0) = 0$, и тогда

$$\dot{f}(t) \doteq p\widehat{f}(p).$$

Есть и другие удобные свойства.

- *Изображение интеграла:*

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} \widehat{f}(p). \quad (8.5)$$

- ◀ В силу (8.4) для

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau, \quad g(0) = 0,$$

имеем

$$f(t) = g'(t) \doteq p\widehat{g}(p),$$

т. е. $f(p) = p\widehat{g}(p) \Rightarrow (8.5)$. ►

- *Дифференцирование изображения:*

$$\widehat{f}'(p) \doteq -tf(t).$$

- *Интегрирование изображения:*

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty \widehat{f}(p) dp,$$

где путь интегрирования целиком лежит в области существования изображения $\widehat{f}(p)$.

- *Запаздывание:*

$$f(t-a) \doteq e^{-pa}\widehat{f}(p), \quad a > 0.$$

◀ Поскольку $f(t - a) = 0$ при $t < a$, то

$$f(t - a) \doteq \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+a)} d\tau = e^{-pa} \hat{f}(p). \quad ▶$$

• Свертка:

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \doteq \hat{f}(p)\hat{g}(p). \quad (8.6)$$

◀ Здесь и выше обходятся стороной вопросы ограниченности скорости роста оригиналов на бесконечности. В (8.6) подразумевается, что при условии существования изображений $\hat{f}(p)$ и $\hat{g}(p)$ преобразование (8.3) свертки

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

существует и равно правой части (8.6)⁶⁾. Если без этих хлопот, — обоснование сводится к выкладке

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau &\doteq \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} g(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(\xi)e^{-p\xi} d\xi = \hat{f}(p)\hat{g}(p). \quad ▶ \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа хорошо работает и в применении к многомерным системам. Например, преобразуя матричное уравнение $\dot{x} = Ax$ в соответствии с (8.3), получаем

$$p\hat{x}(p) - x(0) = A\hat{x}(p),$$

откуда $\hat{x}(p) = (Ip - A)^{-1}x(0)$, т. е. $x(t) \doteq (Ip - A)^{-1}x(0)$. Теперь сравнение с известным фактом $x(t) = e^{At}x(0)$ дает

$$e^{At} \doteq (Ip - A)^{-1}.$$

⁶⁾ Иначе говоря, если значения действительной части в $p = \sigma + i\omega$ можно взять такими, что преобразование (8.3) существует как для $f(t)$, так и для $g(t)$, — то подходящее σ существует и для свертки (8.6).

В скалярном случае, когда A сводится к скалярной величине λ , последняя формула переходит в

$$e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{(p - \lambda)}.$$

Примеры и упражнения

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0.$$

$$t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \operatorname{arctg} p.$$

$$t \sin \omega t \doteq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

$$e^{\lambda t} t^n \doteq \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}.$$

$$\theta(t) \doteq \frac{1}{p}, \quad \text{где} \quad \theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

- Изображение $\hat{f}(p)$ функции $f(t)$ является аналитической функцией в области $\operatorname{Re} p > \alpha$, где α — оценка степени роста $f(t)$, т. е. такая постоянная, что $|f(t)| < K e^{\alpha t}$ для некоторого $K > 0$ и всех $t \geq 0$.

- Если $p \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \hat{f}(p) = f(0).$$

А если существует предел $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{f}(p) = f(\infty),$$

где $p \rightarrow 0$ внутри того же сектора $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

8.3. Обращение

Преобразование (8.3) обратимо. Оригинал по изображению вычисляется по формуле Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \hat{f}(p) dp, \quad (8.7)$$

где интегрирование идет вдоль вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, причем значение σ в (8.7) — не менее показателя степени роста функции $f(t)$.

◀ Рецепт (8.7) фактически сводится к обращению преобразования Фурье⁷⁾. Применяя к экспоненциально убывающей функции $e^{-\sigma t} f(t)$ сначала преобразование (8.2), а потом его обращение, имеем, с учетом $f(\omega) \equiv 0$ при $\omega < 0$,

$$\begin{aligned} e^{-\sigma t} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma\omega} f(\omega) e^{-i\tau(t-\omega)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} d\tau \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\tau)\omega} f(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau t} \hat{f}(p) d\tau, \end{aligned}$$

где $p = \sigma + i\tau$. Деление на $e^{-\sigma t}$ приводит к

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+i\tau)t} \hat{f}(p) d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \hat{f}(p) dp. \quad ▶$$

8.4. Дельта-функция

Преобразование Лапласа в применении к обобщенным функциям представляет собой в некотором роде «следующий шаг», расширяющий круг приложений и облегчающий достижение результатов. Основная доля практических успехов приходится на использование *дельта-функции*. Соответствующая теория описана, по крайней мере схематично, в [4, т. 5, глава 8]. Кое-что сказано в т. 2. Но поскольку, как уже говорилось, нельзя по дороге в баню отвлекаться на поездку в Сочи, — основные моменты целесообразно напомнить здесь.

⁷⁾ Обоснование «с нуля» можно найти в любом учебнике.

Изначально $\delta(t)$ определялась как предел единичных импульсов⁸⁾ $\delta_\varepsilon(t)$, например, прямоугольной формы, — при стремлении к нулю ширины импульса, $\varepsilon \rightarrow 0$. Трудность заключалась в противовесности обстоятельств. В пределе получалась функция, равная бесконечности в нуле и нулю — в остальных точках. Однако ситуации, в которых возникала потребность в чем-то подобном, всегда сводились к вариантам, когда $\delta(t)$ стояла под интегралом. То есть $\delta(t)$ нужна была не как функция, а как *нечто*, обеспечивающее при интегрировании определенный эффект. Но тогда и обыкновенный предел не нужен был. Хватало сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) \varphi(t) dt \rightarrow \varphi(0) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

что позволяло определить $\delta(t)$ как особый предел $\delta_\varepsilon(t) \rightarrow \delta(t)$ в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) \varphi(t) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt.$$

Иначе говоря, под $\delta(t)$ достаточно было понимать «*нечто*», действующее на функции φ по правилу:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0). \quad (8.8)$$

Но (8.8) — это функционал. Надо лишь подходящим образом организовать пространство вспомогательных функций φ .

Соотношение (8.8) служит прообразом общего определения. Обобщенные функции f описываются как функционалы

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in \mathbb{D}, \quad (8.9)$$

на множестве \mathbb{D} *финитных функций*⁹⁾, непрерывно дифференцируемых любое число раз. Топология в \mathbb{D} вводится своеобразно [4, т. 5], но на этом лучше не застывать. Существенно другое: последовательность $\{f_n\}$ полагается *сходящейся к обобщенной функции* f , если $\langle f_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ для любой функции $\varphi \in \mathbb{D}$.

⁸⁾ Характеризуемых условием $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$.

⁹⁾ Непрерывная функция $\varphi(t)$ называется *финитной*, если область, в которой $\varphi(t) \neq 0$, — ограничена. Замыкание области, где $\varphi(t) \neq 0$, называется *носителем* $\varphi(t)$ и обозначается как $\text{supp } \varphi$. Разные функции из \mathbb{D} могут быть отличны от нуля на разных областях (у каждой свой носитель).

8.4.1. Всякий линейный непрерывный функционал $\langle f, \varphi \rangle$ на \mathbb{D} называется обобщенной функцией¹⁰⁾.

Дифференцирование определяется правилом переброски производной,

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

каковое в ситуации (8.9) возникает само по себе в результате интегрирования по частям с учетом финитности функций φ .

На $\delta(t)$ общая часть теории проецируется следующим образом. *Дельта-функция* декларируется как функционал, действующий в \mathbb{D} по правилу $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. В рамках (8.9) это не укладывается, но для достижения единобразия чисто условно пишут (8.8) — тем более что натяжка получается небольшая. Производная $\delta'(t)$ действует в результате как

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

Следствием правила переброски производной является также полезное соотношение

$$\theta'(t) = \delta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хэвисайда¹¹⁾.

Замена переменной при интегрировании указывает на справедливость соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\varphi(t) dt = \varphi(a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(at)\varphi(t) dt = \frac{1}{a}\varphi(0),$$

а также

$$\delta[f(t)] = \sum_{f(t_k)=0} \frac{\delta(t-t_k)}{|f'(t_k)|}.$$

В частности,

$$\delta(t^3 - 1) = \frac{\delta(t-1)}{3}, \quad \delta(t^2 - 1) = \frac{\delta(t-1)}{2} + \frac{\delta(t+1)}{2}.$$

Преобразование Лапласа

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

обобщенных функций было бы естественно рассматривать как значение функционала f на функциях e^{-pt} . Но $e^{-pt} \notin \mathbb{D}$, однако \mathbb{D}

¹⁰⁾ Не каждый функционал на \mathbb{D} может быть представлен в виде (8.9). Если это возможно, — обобщенную функцию $f(t)$ называют *регулярной*.

¹¹⁾ Единичный скачок: $\theta(t \geq 0) = 1$ и $\theta(t < 0) = 0$.

можно безболезненно переопределить, например, как совокупность бесконечно дифференцируемых функций, для которых $t^k \varphi^{(l)}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и любых целых $k, l \geq 0$. В этом случае обычные свойства преобразования Лапласа (раздел 8.2) остаются без изменения. В частности,

$$\langle \delta, e^{-pt} \rangle = e^{-pt} \Big|_{t=0} = 1, \quad \text{т. е.} \quad \widehat{\delta}(p) = 1.$$

Обычным образом определяются изображения производных $\delta^{(n)}(t)$,

$$\widehat{\delta^{(n)}}(p) = \langle \delta^{(n)}, e^{-pt} \rangle = p^n,$$

запаздывания, $\delta(t - \tau) = e^{-p\tau}$, и т. п.

8.5. Дифференциальные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = y(t) \quad (8.10)$$

с начальными условиями

$$x(0) = b_0, \quad x'(0) = b_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = b_{n-1} \quad (8.11)$$

под действием *преобразования Лапласа* переходит в

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \widehat{x}(p) &= \widehat{y}(p) + \\ &+ b_0 (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + \\ &+ b_1 (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + b_{n-1} a_0, \end{aligned}$$

т. е.

$$A(p) \widehat{x}(p) = \widehat{y}(p) + B(p),$$

откуда

$$\widehat{x}(p) = \frac{\widehat{y}(p) + B(p)}{A(p)},$$

и для окончательного решения задачи Коши (8.10)–(8.11) остается перейти от $\widehat{x}(p)$ к $x(t)$. Такова, собственно, общая схема применения *преобразования Лапласа* к дифференциальным уравнениям.

С примерами и особенностями можно ознакомиться по стандартным учебным пособиям.

Решение задачи (8.10)–(8.11) часто записывают в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)f(s) ds, \quad (8.12)$$

называя ядро $G(t, s)$ интегрального оператора (8.12) *функцией Грина*.

Для автономного дифференциального оператора, с не зависящими от времени коэффициентами, что в данном случае подразумевается,

$$Lx = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x,$$

ядро $G(t, s)$ оказывается функцией лишь одного параметра $\tau = t - s$. В результате (8.12) приобретает вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau)f(t - \tau) d\tau,$$

причем $G(\tau)$ является решением уравнения¹²⁾

$$LG(t) = \delta(t). \quad (8.13)$$

В случае нулевых начальных условий преобразование Лапласа (8.13) дает следующее изображение функции Грина

$$\mathcal{L}\{LG(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} \Rightarrow \widehat{L}(p)\widehat{G}(p) = 1 \Rightarrow \widehat{G}(p) = \frac{1}{\widehat{L}(p)}.$$

Оригинал, как правило, определяется по таблицам. В крайнем случае — с помощью формулы Меллина.

Уравнение теплопроводности¹³⁾ (диффузии),

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

при краевых условиях

$$T\Big|_{t=0} = 0, \quad T\Big|_{x=0} = f(t),$$

под действием преобразования \mathcal{L} переходит в

$$p\widehat{T} = a \frac{d^2 \widehat{T}}{dx^2}, \quad \widehat{T}\Big|_{x=0} = \widehat{f}(p). \quad (8.14)$$

¹²⁾ Объяснение см. в [4, т. 2], где есть и другая полезная информация о функциях Грина.

¹³⁾ Где $T(x, t)$ — температура как функция времени t и пространственной (линейной) переменной x .

Последняя задача Коши для обыкновенного диф-уравнения имеет решение

$$\widehat{T} = \widehat{f}(p) e^{-x\sqrt{p/a}}.$$

Дальнейшее — дело техники. Восстановление *оригинала* приводит к окончательному решению [8]

$$T(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{at})}^{\infty} f\left(t - \frac{x^2}{4a\tau^2}\right) e^{-\tau^2} d\tau.$$

Традиционно закрепилось мнение, что преобразование Лапласа решает обыкновенные диф-уравнения, а уравнения с частными производными только лишь сводят к обыкновенным, что и случилось в рассмотренном примере. Но промежуточное обыкновенное уравнение (8.14) можно было снова решать с помощью преобразования \mathcal{L} . Это эквивалентно векторному преобразованию Лапласа с параметром $p = \{p_1, p_2\}$. Так что линейные уравнения с частными производными могут решаться с помощью векторного аналога преобразования (8.3):

$$\widehat{f}(p_1, \dots, p_n) = \int_0^{\infty} e^{-p_1 t_1 - \dots - p_n t_n} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n.$$

8.6. Автоматическое регулирование

В теории управления *преобразование Лапласа* сыграло в свое время революционную роль. Хотя, на первый взгляд, ничего экстраординарного не произошло. Было всего лишь осознано, что реальные системы регулирования можно представлять в виде соединенных друг с другом блоков вида $x_{\text{in}} \rightarrow \boxed{W} \rightarrow x_{\text{out}}$, каждый из которых описывается уравнением

$$Lx_{\text{out}} = Mx_{\text{in}}, \quad (8.15)$$

где L и M — линейные дифференциальные операторы, а x_{in} и x_{out} , соответственно, входной и выходной сигналы.

Преобразование Лапласа уравнения (8.15) дает

$$L(p)\hat{x}_{\text{out}}(p) = M(p)\hat{x}_{\text{in}}(p), \quad (8.16)$$

где $L(p)$ и $M(p)$ — обычные характеристические полиномы. Например,

$$Lx = \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x \Rightarrow L(p) = p^2 + \alpha p + \beta.$$

В результате (8.16) приводит к очень простому соотношению

$$\hat{x}_{\text{out}}(p) = W(p)\hat{x}_{\text{in}}(p),$$

в котором

$$W(p) = \frac{M(p)}{L(p)} \quad (8.17)$$

называют *передаточной функцией* блока. Таким образом, если вместо сигналов $x_{\text{in/out}}(t)$ рассматривать их изображения $\hat{x}_{\text{in/out}}(p)$, то преобразованный выход получается умножением входа на передаточную функцию¹⁴⁾. Наконец, система в целом оказывается представимой объединением различных блоков — их последовательным и параллельным соединением, а также включением петель обратной связи, — что в итоге дает (с помощью простых формул) передаточную функцию системы того же вида (8.17). При этом устойчивость (работоспособность) системы регулирования определяется расположением в комплексной плоскости корней знаменателя $L(p)$ — подробности см. в [4, т. 2].

Картина в целом не производит впечатления революционного прорыва. Более того, все укладывается вроде бы в рамки обычной теории дифференциальных уравнений, что в свое время дало основания некоторым математикам отрицать существование автоматического регулирования как науки. И их можно понять, потому что эмерджентные явления бывает трудно рассмотреть. Догадаться, правда, легко — достаточно попытаться сконструировать какой-либо регулятор. Дифуры решаются, интегралы берутся, а чего-то — не хватает.

¹⁴⁾ Всегда дробно-рациональную, если дифференциальные операторы линейные и автономные (с постоянными коэффициентами).

Глава 9

Гармонические функции

Функции, удовлетворяющие *уравнению Лапласа*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

называются *гармоническими*.

Гармонические функции u и v , удовлетворяющие *условиям Коши—Римана*, называют *сопряженными*. Сопряженная пара u, v — не что иное как действительная и мнимая части аналитической функции¹⁾

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (9.1)$$

Наряду с $u(x, y)$ используется также обозначение $u(z)$.

9.1. Контрпример

В ТФКП притягательный потенциал гармонических функций невелик, поскольку фокус внимания на половинке $u(x, y)$, когда функция $f(z)$ изучена в целом, — представляется малоинтересным. Но в центре внимания *гармонического анализа* стоят все же несколько иные задачи. В частности, краевые:

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = u_0(x, y),$$

где Γ — граница некоторой области. Не говоря о том, что при переходе к изучению гармонических функций большего числа переменных комплексный анализ превращается из инструмента в источник идеологии.

¹⁾ См. раздел 2.3.

Наконец, подходящая однозначная аналитическая функция существует не всегда. Например, логарифмический потенциал

$$u(x, y) = \ln r = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \quad (9.2)$$

представляет собой гармоническую функцию, которая в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ не является действительной частью никакой однозначной аналитической функции.

Функция

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

также имеет особенность в нулевой точке, но ситуация здесь иная,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right),$$

где функция $1/z$ однозначна в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Сопряженная функция,

$$v(x, y) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

существует, и не очень ясно (в рамках идеологии \mathbb{R}^2), чем особая точка в данном случае лучше особой точки логарифма (9.2).

Однако контрпример (9.2) не выводит ситуацию полностью из сферы комплексного анализа. Логарифмический потенциал является все же действительной частью *многозначной* аналитической функции (4.5),

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

и это оказывается общим правилом: *гармоническая функция $u(z)$ всегда является действительной частью (быть может, многозначной) аналитической функции.*

9.2. Свойства

Вопрос об однозначности «аналитического источника» положительно решается во многих практических ситуациях. Чаще других используется следующий результат.

9.2.1. Любая функция $u(x, y)$, гармоническая в односвязной области D , является действительной частью однозначной аналитической в D функции.

- ◀ В силу уравнения Лапласа и формулы Грина (2.12), интеграл²⁾

$$v(x, y) = \int\limits_{z_0}^z \left\{ -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right\} \quad (9.3)$$

не зависит от пути интегрирования, и потому — определяет сопряженную $u(x, y)$ функцию (разумеется, к (9.3) можно добавить произвольную константу). Однозначность и аналитичность соответствующей функции (9.1) элементарно проверяется. ►

Рис. 9.1. aa

Формулой (9.3) можно пользоваться и в случае произвольной области D , но тогда она (формула) будет давать, *вообще говоря, многозначную* функцию $v(x, y)$ и, как следствие, многозначную аналитическую функцию (9.1). Если же вопрос стоит «локально», то ответ насчет однозначности всегда положителен:

9.2.2. Любая функция $u(x, y)$, гармоническая в достаточно малой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, является действительной частью однозначной функции, аналитической в окрестности³⁾ z_0 .

- ◀ Факт непосредственно следует из п. 9.2.1. ►

Из п. 9.2.2 вытекает, что гармоническая функция $u(x, y)$ в окрестности z_0 представима суммой абсолютно сходящегося ряда

$$u(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m (y - y_0)^n. \quad (9.4)$$

Обратное, разумеется, неверно. Сумма абсолютно сходящегося ряда (9.4) не обязана быть гармонической функцией. Достаточно сказать, даже не любой полином гармоничен.

²⁾ Где $z_0 \in D$ — фиксированная точка.

³⁾ В целях экономии слов под окрестностью проще понимать шар. Напомним, в принятой здесь терминологии можно было бы даже говорить просто об аналитичности в точке z_0 , ибо существование подходящей окрестности предполагается, что позволяет не разграничивать аналитичность и регулярность — см. раздел 3.4.1.

Заметим, функции *действительных переменных*, представимые суммами абсолютно сходящихся рядов, часто называют *аналитическими*. В случае одной переменной,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

это имеет резон, поскольку замена x на z сразу дает аналитическую функцию. При большем числе переменных смешение терминов создает путаницу.

Связь гармонических функций с аналитическими порождает серию «параллельных» результатов (следствий), которые доказываются в одно касание.

9.2.3. Теорема о среднем. *Если функция $u(z)$ гармонична в круге радиуса r с центром в точке ζ , то ее значение в центре равно среднему значению на граничной окружности:*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

◀ Обоснование дает выделение действительной части в (2.23). ►

9.2.4. Принцип максимума. *Если гармоническая в области D функция достигает локального⁴⁾ максимума (или минимума) внутри D , то она — постоянна.*

◀ Если $u(x, y)$ достигает максимума во внутренней точке $z_0 \in D$, то в этой же точке достигает максимума модуль $|e^f| = e^u$, где $u = \operatorname{Re} f$ (существование функции f в окрестности z_0 гарантирует п. 9.2.2). Но тогда возникает противоречие с *принципом максимума 2.7.1*.

Случай минимума сводится к предыдущему заменой $u(x, y)$ гармонической функцией $-u(x, y)$. ►

9.2.5. *Пусть функция $u(z) \neq \text{const}$ гармонична в \mathbb{C} . Тогда область Ω ее значений совпадает с $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.*

◀ В силу односвязности \mathbb{C} , существует⁵⁾ целая функция $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, такая что $u = \operatorname{Re} f$. Область Ω , очевидно, линейно связна. Поэтому, в предположении противного, либо $u < M < \infty$, либо $u > -M$. Допустим, $u < M$. Пусть $h =$

⁴⁾ Тем более, глобального.

⁵⁾ По теореме 9.2.1.

конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Re} f < M$ на единичный круг (h существует по *теореме Римана*, п. 7.2.1). Тогда композиция $h(f(z))$ — целая ограниченная функция, обязанныя по теореме 2.9.1 быть константой. Но тогда и $u(z)$ константа. Противоречие. ►

Следующие два результата⁶⁾ относятся к инструментальным средствам.

9.2.6. *Если последовательность функций $\{u_n(z)\}$, гармонических в области D и непрерывных в \bar{D} , равномерно сходится на границе области, то она равномерно сходится в D , $u_n \rightarrow u$, и предельная функция $u(z)$ — гармонична в D .*

9.2.7. *Если неотрицательные функции $u_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$, гармоничны в области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ сходится хотя бы в одной точке $z \in D$, то он (ряд) равномерно сходится в любой замкнутой подобласти D , а его сумма — гармоническая функция.*

Вот еще один вспомогательный факт, выстреливающий при переходе к сопряженным краевым задачам.

9.2.8. *Если функция $u(z)$ гармонична в односвязной области D и непрерывно дифференцируема в \bar{D} , то*

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0, \quad (9.5)$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по нормали к границе Γ области D .

- Линии уровня $u(x, y) = \text{const}$, $v(x, y) = \text{const}$ сопряженных гармонических функций образуют ортогональные семейства кривых. (?)

9.3. Инвариантность и единственность

Инвариантность уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ относительно конформных преобразований, о которой шла речь в начале главы 7, в данном контексте очевидна:

⁶⁾ Называемые, соответственно, первой и второй *теоремами Гарнака*.

9.3.1. Конформная замена координат не нарушает гармоничности функции.

◀ Утверждать можно больше. Если функция $h : D \rightarrow D'$ — аналитична в D , а $u(\cdot)$ — гармонична в D' , то композиция $u(h(z))$ — гармонична в D .

Локально: $u = \operatorname{Re} f$ (теорема 9.2.2). Функция $f(h(z))$ — аналитична, как композиция аналитических, а $u(h(z)) = \operatorname{Re} f(h(z))$. Наконец, если h еще и конформное преобразование — хуже не будет⁷⁾. ►

Что касается проблемы единственности, то здесь возможны сюрпризы. Гармонические функции x и $2x$ равны на мнимой оси, но не совпадают друг с другом. Поэтому «совпадения на дуге» недостаточно. Предполагать надо чуть больше.

9.3.2. Теорема единственности. Если гармонические в области D функции $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ совпадают в некоторой окрестности $\Omega \subset D$, то $u_1(z) \equiv u_2(z)$ в D .

◀ Пусть $u = u_1 - u_2$ и $u = \operatorname{Re} f$, где f , быть может, многозначная аналитическая функция. Поскольку $u \equiv 0$ в Ω , то сопряженная с u функция v постоянна в Ω , что, с учетом условий Коши—Римана, следует из

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv 0.$$

Поэтому f константа в Ω , а значит, и в D (теорема 3.5.1). Но тогда $u(x, y) \equiv 0$ в D . ►

Теорема 9.3.2 имеет, в основном, философское значение, потому что в гармоническом анализе требуется нечто иное: *единственность решения краевой задачи*

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = u_0(x, y). \quad (9.6)$$

Иначе говоря, единственность гармонической функции при заданных ее значениях на границе области⁸⁾.

Для положительного решения вопроса нужны дополнительные предположения, вообще говоря, незначительные — с точки зрения

⁷⁾ А замена координат будет невырожденной, локально и глобально.

⁸⁾ Запись (9.6), вообще говоря, неточна. К ней надо прилагать указание области — внешность или внутренность контура.

практики. Пусть, например, Γ — граница ограниченной области D , а от решения (9.6) требуется непрерывность на \bar{D} .

◀ Если u_1, u_2 — два различных решения задачи (9.6), то $u = u_1 - u_2$ — гармоническая функция в D , и $u|_{\Gamma} \equiv 0$. Но тогда из *принципа максимума* (теорема 9.2.4) вытекает $u|_D \equiv 0$. ►

Принцип максимума, иногда модернизированный, позволяет дать положительный ответ насчет единственности решения задачи (9.6) и в более общих ситуациях, за счет баланса предположений. В том числе для неограниченных областей и при наличии разрывов у функции u_0 на границе⁹⁾.

9.4. Задача Дирихле

Краевую задачу (9.6), называемую *задачей Дирихле*, для круга $|z| < 1$ (Γ — окружность $|z| = 1$) решает *интеграл Пуассона*

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\xi) P(r, \xi - \varphi) d\xi, \quad (9.7)$$

где функция $u(r, \varphi)$, выражаемая в полярных координатах, принимает на окружности $|z| = 1$ значения $u_0(\xi)$, а

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta.$$

Разложение в ряд Фурье

$$u_0(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi)$$

приводит к решению задачи Дирихле в виде ряда:

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad r < 1,$$

суммирование которого и дает формулу (9.7).

⁹⁾ См., например, [7, 8].

Конечно, при выводе (9.7) можно обойтись и без этих хлопот.

- ◀ Если $u = \operatorname{Re} f$, то по формуле Коши¹⁰⁾:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\xi}) \frac{e^{i\xi}}{e^{i\xi} - re^{i\varphi}} d\xi. \quad (9.8)$$

Теперь у $f = u + iv$ достаточно выделить действительную часть. Правда, для этого может потребоваться мнимая часть $f(e^{i\xi})$, что заводит ситуацию вроде бы в тупик. Опасения, тем не менее, беспочвенные. Взяв *инверсно сопряженную* точку¹¹⁾

$$\hat{z} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r} e^{i\varphi},$$

по теореме Коши (п. 2.5.1) имеем

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - \hat{z}} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\xi}) \frac{re^{i\xi}}{re^{i\xi} - e^{i\varphi}} d\xi. \quad (9.9)$$

Вычитая (9.9) из (9.8), после элементарных преобразований получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\xi}) P(r, \xi - \varphi) d\xi,$$

откуда действительная часть (9.7) сразу выделяется. ►

Задача Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

называют также первой краевой задачей. Вторая краевая задача

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = \psi(x, y) \quad (9.10)$$

называется задачей Неймана¹²⁾.

Задача (9.10) сводится к задаче Дирихле. Действительно, в силу обобщенных условий Коши—Римана (2.10)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{\partial v}{\partial s} = \psi(\theta),$$

¹⁰⁾ Для $z = re^{i\varphi}$.

¹¹⁾ Заведомо лежащую вне круга $|z| < 1$.

¹²⁾ Есть еще и третья краевая задача: $\Delta u = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \gamma u \right)|_{\Gamma} = \psi, \gamma > 0$.

откуда на контуре

$$v|_{\Gamma} = - \int_0^s \psi(\theta) d\theta.$$

Поэтому задача (9.10) может быть решена в два шага. Сначала ищется гармоническая функция v , удовлетворяющая условию

$$v|_{\Gamma} = - \int_0^s \psi(\theta) d\theta$$

(т. е. решается задача Дирихле), после чего решение (9.10) определяется как сопряженная функция

$$u = \int \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + \text{const.} \quad (9.11)$$

Решение задачи Неймана, разумеется, всегда неединственно.

9.5. Вариационный подход

Решение первой краевой задачи (9.6) является функцией, которая обеспечивает минимум интегралу Дирихле

$$D[u] = \iint_{\Omega} (\nabla u)^2 dx dy$$

среди непрерывно дифференцируемых функций $u(x, y)$, принимающих на границе Γ области Ω значения $u_0(x, y)$. Соответствующий вывод легко получается методом множителей Лагранжа [4, т. 7]. При этом, правда, получаются лишь необходимые условия оптимума, но в силу существования и единственности решения задачи (9.6) — они также достаточны.

- Интеграл Дирихле инвариантен по отношению к конформным преобразованиям. (?)

- Интеграл Дирихле от гармонической в Ω функции $u = \operatorname{Re} f$ равен площади образа Ω при отображении f :

$$D[u] = \iint_{\Omega} |f'(z)|^2 dx dy = \iint_{f(\Omega)} d\sigma. \quad (?)$$

Замена краевой задачи (9.6) вариационной,

$$D[u] \rightarrow \min,$$

инициирует появление новых методов решения и анализа. Явления такого сорта хорошо известны. Наиболее яркий пример — аналитическая механика, где вариационные принципы сыграли в свое время революционную роль. Оптимизационная трактовка задач, связанных с гармоническими функциями, также приносит плоды, но это уже другая история — см., например, [6].

Глава 10

Дзета-функция и гипотеза Римана

Гипотеза Римана о нулях ζ -функции обычно держит первые места в списках нерешенных математических проблем¹⁾. При этом высокий рейтинг определяется не только спортивным интересом, но и реальной связью с широким кругом задач, особенно в теории чисел. Подробное знакомство с темой, пребывающей отчасти во взвешенном состоянии, возможно по специальной литературе, см., например, [5, 12]. В главе дается общее представление — с заботой о том, чтобы не увлечь²⁾, но и не отпугнуть.

10.1. История вопроса

Как уже отмечалось в разделе 4.4, дзета-функция была введена Эйлером с помощью ряда

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad (10.1)$$

а также равносильного представления в виде бесконечного произведения

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad (10.2)$$

где p пробегает все простые числа.

◀ Каждый сомножитель в (10.2) представляет собой сумму геометрической прогрессии со знаменателем $1/p^s$. Поэтому произведение (10.2) может быть переписано в виде

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right).$$

¹⁾ В 2001 г. Математический институт Клея (Кембридж, штат Массачусетс) учредил премию в миллион долларов за ее решение.

²⁾ Воронка гипотезы Римана легко проглатывает судьбы, задуманные Создателем для других дел.

Формальное раскрытие скобок здесь приводит к (10.1), в силу единственности разложения любого n на простые множители. Уточнение деталей превращает соображение в строгое обоснование. ►

Долгое время $\zeta(s)$ изучалась как функция действительного переменного (Эйлер, Дирихле, Чебышев). Существенное углубление результатов произошло в связи с переходом (Риман, 1876) к рассмотрению $\zeta(s)$ как функции комплексного аргумента

$$s = \sigma + i\tau.$$

Главным источником интереса к дзета-функции была и остается ее связь с разнообразными задачами теории чисел. Довольно легко обнаруживаются многочисленные плодоносящие соотношения. Вот несколько примеров:

$$\ln \zeta(s) = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)} dx, \quad (10.3)$$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad (10.4)$$

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \quad (10.5)$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad (10.6)$$

где:

- $\pi(x)$ — число простых чисел, меньших x ($\leqslant x$);
- $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, если n является произведением k различных простых чисел, и $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа;
- $\tau(n)$ — число делителей n ;
- $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта, $\Lambda(n) = \ln p$, если n равно какой-либо степени простого числа p , и $\Lambda(n) = 0$ в противном случае.

Ряд (10.1) и бесконечное произведение (10.2) сходятся для $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Риман показал, что $\zeta(s)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость³⁾ \mathbb{C} без точки $s = 1$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s). \quad (10.7)$$

Поведение ζ -функции, — которая в изучаемых соотношениях часто оказывается под логарифмом либо в знаменателе, — во многом зависит от распределения ее нулей. Поскольку $\zeta(s) \neq 0$ в полуплоскости $\sigma > 1$, то из (10.7) следует, что $\zeta(s)$ при $\sigma < 0$ имеет лишь так называемые *тривиальные нули* в точках⁴⁾ $s = -2k$, $k = 1, 2, \dots$. Остальные (*нетривиальные*) нули $\zeta(s)$ сосредоточены в вертикальной полосе $\sigma \in [0, 1]$, причем их бесконечно много и все они комплексные.

Относительно нулей ζ -функции Риман высказал несколько гипотез. Все, кроме одной, были доказаны Адамаром и Мангольдтом. Гипотеза Римана о расположении всех нетривиальных нулей на прямой $\sigma = 1/2$ — остается математической проблемой «номер один» до сих пор. Имеется множество аргументов «за» общего характера, начиная от доказанной бесконечности числа нулей с действительной частью $\sigma = 1/2$ и заканчивая различными довольно тонкими оценками. Время от времени появляются сообщения о решении проблемы, но вопрос пока остается открытым, хотя уже мало кто сомневается, что предположение верно. Особенно в связи с численными экспериментами. Все первые 10^{13} нетривиальных нулей — нумерация идет в порядке возрастания модуля мнимой части — лежат на прямой $\sigma = 1/2$. Кроме того, два «пробных» миллиарда нулей в районе нуля с номером 10^{24} также лежат «где надо»⁵⁾.

³⁾ Аналитическое продолжение, например, обеспечивает формула (4.13).

⁴⁾ При $\sigma < 0$ функция $\zeta(1-s)$ не имеет нулей, так же как и $\Gamma(1-s)$, а в точках $s = -2, -4, \dots$ обращается в нуль синус в правой части (10.7).

⁵⁾ Xavier Gourdon. The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height. October 24th 2004 (<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf>).

10.2. Ряды Дирихле

Разложение (10.1) является частным случаем ряда Дирихле

$$f(s) = \frac{a_1}{1^s} + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots, \quad (10.8)$$

который можно рассматривать как *производящую функцию* (см. раздел 8.1) последовательности $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Таким образом, дзета-функция отвечает последовательности $\{1, 1, 1, \dots\}$.

Принципиальное значение рядов Дирихле для теории чисел заключается в специфике их перемножения:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu+\nu=n}^{\infty} a_{\mu} b_{\nu} \right) n^{-s},$$

где внутреннее суммирование идет по всем разложениям n в произведение двух сомножителей⁶⁾, что в определенной степени схватывает мультипликативное устройство натуральных чисел.

Для обычного анализа ряды Дирихле не представляют большого интереса. С их помощью представимы только весьма специальные функции⁷⁾. Однако с точки зрения обеспечения контраста степенным рядам — игрушка полезная. Привычные круги сходимости заменяются полуплоскостями: если ряд (10.8) сходится в точке $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, то он сходится во всех точках $s = \sigma + i\tau$ при условии $\sigma > \sigma_0$. (?) Но отличия на этом не заканчиваются.

- Если круги сходимости, абсолютной сходимости и голоморфности степенного ряда обязательно совпадают друг с другом, то соответствующие полуплоскости ряда (10.8) — могут быть различны, см. [12].
- Если граница круга сходимости степенного ряда обязательно проходит через особую точку, то на границе полуплоскости сходимости ряда (10.8) — особых

⁶⁾ При перемножении степенных рядов внутреннее суммирование идет по всем разложениям n в сумму двух слагаемых,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu+\nu=n}^{\infty} a_{\mu} b_{\nu} \right) s^n.$$

⁷⁾ Так называемые — *почти периодические*.

точек может не быть. Не говоря о том, что аналитическое продолжение суммы ряда (10.8) может оказаться целой функцией.

Сумма ряда (10.8) в области сходимости является аналитической функцией, которая, вообще говоря, может быть продолжена на более широкую область.

10.3. Теоретико-числовая подоплека

Связи $\zeta(s)$ с арифметикой типа (10.3)–(10.6) лежат более-менее на поверхности.

- Разложение (10.2) элементарно преобразуется в (10.3):

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= - \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) = - \sum_{n=2}^{\infty} [\pi(n) - \pi(n-1)] \ln \left(1 - \frac{1}{n^s} \right) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \left[\ln \left(1 - \frac{1}{n^s} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right] = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \int_n^{n+1} \frac{s dx}{x(x^s - 1)} = s \int_2^{\infty} \frac{\pi(x) dx}{x(x^s - 1)}. \end{aligned}$$

- Перемножение в

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

и учет основной теоремы арифметики (об однозначности разложения n на простые множители) — дает (10.4).

- Равенство (10.5) вытекает из очевидного

$$\zeta^2(s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu\nu=n} 1 \right) \frac{1}{n^s},$$

где, как легко убедиться, $\sum_{\mu\nu=n} 1 = \tau(n)$.

- Наконец,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = (-\ln \zeta(s))' = \left(-\ln \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} \right)' = \sum_p \left(\ln \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

что подтверждает (10.5).

Список взаимоотношений $\zeta(s)$ с теоретико-числовыми функциями может быть значительно продолжен. Но дело, конечно, не в самих взаимоотношениях, а в следствиях, которые из них могут быть выведены. Скажем, асимптотика распределения простых чисел,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

возникает на базе предварительного решения уравнения (10.3) относительно $\pi(x)$, для чего существенным оказывается отсутствие у $\zeta(s)$ нулей на вертикальной прямой $\sigma = 1$. Последнее было установлено Адамаром и Валле-Пуссеном.

Тот факт, что *свойства $\zeta(s)$ полностью определяются ее нетривиальными нулями*, вытекает из *теоремы Адамара о разложении на множители* (п. 3.9.3). Чтобы воспользоваться этой теоремой, надо от $\zeta(s)$ перейти к целой *кси-функции Римана*

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2} \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Полюс $\zeta(s)$ гасится множителем $(s-1)$, а нули $\zeta(s)$ в точках $-2, -4, \dots$ аннигилируют с полюсами $\Gamma(s/2)$. Нулевой полюс $\Gamma(s/2)$ ликвидируется множителем s . В итоге $\xi(s)$ — целая функция первого порядка, нули которой совпадают с нетривиальными нулями $\zeta(s)$.

Применяя теперь теорему 3.9.3 и разматывая клубок в направлении $\xi(s) \Rightarrow \zeta(s)$, получаем

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{bs} (s-1)^{-1} \Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2} + 1\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}, \quad (10.9)$$

где b — константа, $b = \frac{1}{2} \Gamma'(1) + \ln 2\pi - 1$, а ρ_n — нетривиальные нули дзета-функции.

Обратим внимание, для *кси-функции* функциональное уравнение (10.7) в одной из эквивалентных форм принимает вид

$$\xi(s) = \xi(1-s),$$

а если положить

$$\Xi(\tau) = \xi\left(\frac{1}{2} + i\tau\right),$$

то (10.7) оказывается в итоге равносильным

$$\boxed{\Xi(\tau) = \Xi(-\tau).} \quad (10.10)$$

Уравнение (10.10) примечательно своей простотой. Целая функция $\Xi(\tau)$ действительна для действительных τ , а ее нули на оси x отвечают нулям $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1/2$. Гипотеза Римана сводится к утверждению, что все нули $\Xi(\tau)$ действительны.

Следствия из гипотезы Римана весьма многочисленны — см. монографию Титчмарша [12], где в сослагательном наклонении написана целая глава. Использование схемы «если „гипотеза“ верна, то...» — подхвачено в криптографии и теории сложности алгоритмов.

10.4. Идеология погружения

Здесь уместно напомнить об идеологии погружения задач в более общие схемы. О целесообразности расширения поля зрения говорилось не раз. В том числе, в разделе 1.2. Но там речь шла о примерах, где эффект достигался обыкновенным переходом от \mathbb{R} к \mathbb{C} — от действительного аргумента к комплексному. В данном случае «расширение» происходит на более высоком уровне. Не аргументу придается более широкий смысл, а сама функция $\zeta(z)$ доопределяется на чужой, вроде бы, территории.

Произведению (10.2) сопоставляется совсем другое произведение (10.9), которое совпадает с (10.2) в области $\operatorname{Re} z > 1$, но именно «подводная часть» (10.9) в диапазоне $\operatorname{Re} z \leqslant 1$ — дает о $\zeta(s)$, как о производящей функции, гораздо больше информации. В принципе, ничего удивительного. Свет зажигает щелчок выключателя, расположенного в другом месте.

Но сама идея погружения, кстати, никак не связана с перетягиванием каната между \mathbb{R} и \mathbb{C} . И было бы жалко потерять за декораци-

ями комплексного анализа основополагающий принцип. Не в мнимой единице дело. Вернее, не только в ней. Вот несколько простых примеров вне территории \mathbb{C} .

- Если на

$$\int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$$

взглянуть как на седьмой член последовательности

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx,$$

то легко заметить:

$$I_n = -x^n e^{-x} \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1},$$

откуда $I_n = n!$, поскольку $I_0 = 1$. Таким образом, помещение отдельного экземпляра в общий ряд, устроенный по единому правилу, — помогает видеть взаимосвязи соседних членов, и это включает дополнительный механизм решения задачи.

- Интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Пуассон вычислял «растворением» его в более общей задаче нахождения двойного интеграла

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

каковой в полярных координатах вычисляется элементарно⁸⁾,

$$J = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

А поскольку, очевидно, $I^2 = J$, то

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Воистину, более сложные задачи решаются проще.

⁸⁾ Якобиан перехода к полярным координатам равен r [4, т. I].

- Погружая интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ в параметрическое семейство

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin \theta x}{x} e^{-\lambda x} dx, \quad \theta, \lambda > 0,$$

в результате дифференцирования имеем

$$I'_\theta = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos \theta x dx = \frac{\lambda}{\theta^2 + \lambda^2}.$$

Интегрируя $I'_\theta = \frac{\lambda}{\theta^2 + \lambda^2}$ и учитывая $I(\theta = 0) = 0$, получаем $I = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{\lambda}$. Небольшая возня с переходом к пределу при $\lambda \rightarrow +0$ приводит к окончательному результату:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

В это русло, если брать самую суть, ложатся весьма разнообразные методы и приемы. Идею погружения отдельных задач в ансамбль — своеобразно реализуют *гомотопические переходы* в топологии [4, т. 1]. *Деформационная техника* в оптимизации [4, т. 7] позволяет за счет введения дополнительного параметра трансформировать экстремальные задачи в более простые. При этом важно в каждом конкретном случае, даже закапываясь в деталях, не терять из виду общей картины. Потому что иначе сеть математических дисциплин распадается на осколки.

10.5. Теорема об универсальности ζ -функции

Пристальное внимание к дзета-функции стимулирует весьма разностороннее ее изучение, в результате которого обнаруживаются иногда неожиданные явления.

10.5.1. Теорема Воронина [5]. *Пусть $0 < r < 1/4$, функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| < r$, непрерывна вплоть до его границы $|s| = r$, и $f(s) \neq 0$ при $|s| < r$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T > 0$, что*

$$\max_{|s| \leqslant r} \left| f(s) - \zeta \left(s + \frac{3}{4} + iT \right) \right| < \varepsilon.$$

В свободной интерпретации теорема 10.5.1 означает следующее. При вертикальном сдвиге в плоскости аргумента s всегда можно подыскать круговой участок радиуса r , на котором график ζ -функции будет сколь угодно точно совпадать с графиком в круге $|s| \leq r$ любой наперед заданной функции $f(s)$. В этом смысле дзета-функция универсальна, как бы содержит в себе, с некоторой натяжкой, все другие функции. Но тут уместно вспомнить *Прокла*: «Все во всем». Видимо, он имел в виду, что в ТФКП «всякая функция содержит в себе все другие». Но кто теперь уточнит условия?

Глава 11

Функции нескольких переменных

Нижеследующий текст представляет собой не более чем беглую экскурсию. Подробности есть в специальной литературе, см., например, [14], но это уже за рамками общего образования.

Многомерный комплексный анализ изучает функции вида

$$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \text{а также} \quad f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m.$$

По отношению к одномерному анализу это другая научная дисциплина, которая в обычные курсы ТФКП, как правило, даже не включается. В то же время некоторое представление о пограничной территории полезно иметь, хотя бы потому, что знакомство с окрестностями проливает дополнительный свет. Тем более — в данном случае с увеличением размерности многое принципиально меняется.

Необходимые приготовления минимальны. Для комплексного вектора

$$z = \{z_1, \dots, z_n\} \in \mathbb{C}^n$$

введем норму

$$\|z\|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2.$$

Множество

$$B = \{z : \|z - a\| < r\},$$

как обычно, именуется *шаром* радиуса r с центром в точке a . Декартово произведение кругов

$$\{z_k : |z_k - a_k| < r_k\}$$

называется *полидиском*.

Специфические обозначения (2.6), не принесшие особых выгод в предыдущих главах, при переходе к изучению функций нескольких комплексных переменных начинают играть полезную роль. По аналогии с одномерным случаем

вводятся обозначения¹⁾:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right), \quad (11.1)$$

в которых дифференциал функции f расщепляется на две части,

$$df = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right) = \hat{df} + \bar{df}, \quad (11.2)$$

где

$$dz_k = dx_k + i dy_k, \quad d\bar{z}_k = dx_k - i dy_k.$$

11.1. Аналитичность

Непрерывную функцию $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ назовем *аналитической* в точке $z = a$ (в области $D \subset \mathbb{C}^n$), если $\boxed{\bar{df} = 0}$ в некоторой окрестности точки a (всюду в D), что очевидным образом перекликается с условиями Коши–Римана в форме (2.7). Иначе говоря, аналитическая функция обязана иметь дифференциал $\boxed{df = \hat{df}}.$

За иероглифами определения здесь стоит то же содержание, что и в одномерном²⁾ случае. И можно было бы, по аналогии с (2.1) либо (2.3), говорить о независимости пределов от пути стремления Δz к нулю при определении градиента функционала $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, не выпуская при этом ситуацию из \mathbb{C}^n в \mathbb{R}^{2n} . В итоге рассуждение пришло бы к тому же требованию, вернее, к двум требованиям: (i) функция f непрерывна, (ii) $\bar{df} = 0$. Условие (ii) влечет за собой необходимость

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (11.3)$$

т. е. аналитическая функция f обязана быть аналитической по каждой в отдельности переменной z_k , — см. (2.7). Вопрос «не следует ли аналитичность f из (11.3)» — кажется наивным. По опыту изучения отображений в конечномерных пространствах к условиям (11.3)

¹⁾ См. (2.6) с сопровождающими пояснениями.

²⁾ Разумеется, комплексно-одномерном.

надо было бы добавить **(i)**, и даже непрерывную дифференцируемость³⁾. Но тут в некотором роде сюрпризом оказывается *основная теорема Хартогса*:

11.1.1. Функция $f(z_1, \dots, z_n)$, аналитическая в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждой в отдельности переменной z_k , аналитична в D .

Таким образом, аналитичность f по переменным z_k в отдельности — влечет за собой непрерывность f (вопреки конечномерным ассоциациям).

Другой вариант определения аналитичности опирается на разложение в степенной ряд. Функция $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична в точке $z = a$, если представима сходящимся⁴⁾ рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}. \quad (11.4)$$

Для (11.4) обычно используется сокращенная запись:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad k = \{k_1, \dots, k_n\}.$$

В последнем случае f чаще называют *голоморфной функцией*. Некоторые авторы делают рокировку, считая разложение (11.4) признаком аналитичности, а (11.3) — голоморфности. Но так или иначе, из (11.3) следует существование разложения (11.4), и наоборот, что также называют *теоремой Хартогса*, — а понятия *голоморфности* и *аналитичности* сливаются воедино, превращаясь в синонимы.

В многомерном случае, как и в одномерном, принципиальную роль играет *аналитическое продолжение*. Идеология здесь не претерпевает существенных изменений, но технические нюансы шаг

³⁾ Стандартный пример: функция

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{если } x_1, x_2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

имеющая частные производные **всюду**, но не дифференцируемая и даже разрывная в нуле.

⁴⁾ В некоторой окрестности $z = a$.

за шагом сильно преображают тему. Отличия возникают и на самых первых этапах. Например, если произвольная область $D \subset \mathbb{C}$ может быть областью голоморфности некоторой функции $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, то (максимальные по включению) области определения голоморфных функций $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $n > 1$, обязаны удовлетворять ряду принципиальных ограничений⁵⁾.

Механизм аналитического продолжения, как обычно, опирается на **теорему единственности**: если голоморфная функция f равна нулю в некоторой области (окрестности), то $f \equiv 0$ во всей области определения.

В отличие от одномерного случая — обращения в нуль f на множествах нулевой меры недостаточно. Функция $f(z) = z_1 z_2$ равна нулю на плоскостях $\{z_1 = 0\}$, $\{z_2 = 0\}$, но не равна нулю тождественно.

Кое-что при $n > 1$ сохраняется почти в неизменном виде. Например:

11.1.2. Принцип максимума модуля. Если голоморфная функция f достигает локального максимума модуля внутри своей области определения, то $f \equiv \text{const.}$

◀ Пусть $a \in \mathbb{C}^n$ — точка локального максимума, а $b \in \mathbb{C}^n$ — произвольная точка. Голоморфная функция одного переменного

$$g_b(z) = f(a + z b), \quad z \in \mathbb{C},$$

определенна в окрестности $z = 0$ и достигает в нуле локального максимума, в силу чего (п. 2.7.3) $g_b \equiv \text{const.}$ В итоге $f \equiv \text{const.}$ ►

11.2. Степенные ряды

Степенные ряды в случае нескольких переменных,

$$\sum_k^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_k^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n} \quad (11.5)$$

⁵⁾ См. далее комментарии к п. 11.3.1, а также *теорему Осгуда—Брауна*.

обладают определенной спецификой, которая отличает их от степенных рядов одной переменной. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2+1} = \frac{z_2}{(1-z_1)(1-z_2)}$$

имеет множеством сходимости объединение полидиска $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ с плоскостью $\{z_2 = 0\}$. Поэтому ряд сходится при любом $z = \{z_1, 0\}$, но из этого не следует его сходимость при z с меньшим модулем, как в обычной *теореме Абеля* (п. 3.3.1).

Чтобы исключить подобные аномалии, область сходимости для $n > 1$ определяют иначе.

11.2.1. Областью сходимости ряда (11.5) называется *внутренность* множества тех z , при которых ряд сходится.

При этом полидиском сходимости называют открытый полидиск максимального радиуса, исключая граничные точки, в которых ряд сходится⁶⁾.

11.2.2. Если в точке $z = b$ члены ряда (11.5) равномерно ограничены, т. е. существует такое M , что $|c_k(b-a)^k| < M$ при всех k , то в полидиске $\{z_k : |z_k - a_k| < r_k\}$, $r_k = |b_k - a_k|$, ряд (11.5) сходится равномерно.

◀ Члены ряда (11.5) мажорируются числовой последовательностью⁷⁾:

$$|c_k(z-a)^k| = \left| c_{k_1 \dots k_n} (b_1 - a_1)^{k_1} \dots (b_n - a_n)^{k_n} \frac{z_1 - a_1}{b_1 - a_1} \dots \frac{z_n - a_n}{b_n - a_n} \right| \leqslant M q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n},$$

где $q_j = \left| \frac{z_j - a_j}{b_j - a_j} \right| < 1$. ▶

⁶⁾ В итоге, после того как определение забывается, — многие результаты о сходящихся рядах вида (11.5) начинают выглядеть удивительно.

⁷⁾ Заметим, что при $|q_j| < 1$

$$\sum_k^{\infty} q_1^{k_1} \dots q_n^{k_n} = \frac{1}{1-q_1} \dots \frac{1}{1-q_n}. \quad (?)$$

Роль полидисков сходимости, вообще говоря, вторична. *Области сходимости в многомерном случае более разнообразны, но подчиняются существенному ограничению:*

11.2.3. Область сходимости Ω ряда (11.5) логарифмически выпукла⁸⁾.

◀ Пусть $u, v \in \Omega$ и $|c_k u^k| \leq M$, $|c_k v^k| \leq M$ для всех $k = \{k_1, \dots, k_n\}$. Если $w \in \Omega$ такая точка, что

$$\ln |w_j| = \lambda \ln |u_j| + (1 - \lambda \ln |v_j|), \quad \lambda \in [0, 1],$$

то

$$|c_k w^k| = |c_k u^k|^\lambda |c_k v^k|^{(1-\lambda)} \leq M^\lambda M^{1-\lambda} = M.$$

Теперь остается сослаться на п. 11.2.2. ►

• Ряд

$$\sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} C_{k_1+k_2}^{k_1} z_1^{k_1} z_2^{k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (z_1 + z_2)^k$$

сходится при условии $|z_1 + z_2| < 1$.

• Областью сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (z_1 z_2)^k$ является $\{|z_1 z_2| < 1\}$.

11.3. Области Рейнхарта

Логарифмически выпуклые полные области Рейнхарта в случае нескольких переменных играют ту же роль, что круги сходимости — для степенных рядов одной переменной.

Область в \mathbb{C}^n с центром в a , содержащая вместе с каждой точкой $z^0 = \{z_k^0\}$ все точки

$$\{z : |z_k - a_k| = |z_k^0 - a_k|\}, \quad (11.6)$$

называется *областью Рейнхарта*. Замена в (11.6) равенств неравенствами, $\{z : |z_k - a_k| \leq |z_k^0 - a_k|\}$, дает определение *полной области*

⁸⁾ Область считается логарифмически выпуклой, если ее образ при отображении

$$\ln |z| = \{\ln |z_1|, \dots, \ln |z_n|\}$$

является выпуклым в \mathbb{R}^n .

Рейнхарта, каковая всегда звездообразна относительно своего центра a и является, очевидно, объединением полидисков.

В случае $n = 1$ кольца $\{r < |z - a| < R\}$ исчерпывают примеры областей Рейнхарта, круги $\{|z - a| < R\}$ — примеры полных областей.

11.3.1. Любая функция f , голоморфная в полной области Рейнхарта, представляется в этой области рядом Тэйлора,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k. \quad (11.7)$$

Факт тривиальный, но из него и п. 11.2.3 следует, что логарифмически не выпуклая область Ω — не может быть областью голоморфности никакой аналитической функции. Иначе говоря, любая голоморфная на Ω функция аналитически продолжается на более широкую область. С точки зрения $n = 1$ это принципиально новый эффект.

К сожалению, области Рейнхарта, и тем более преобразования

$$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C},$$

геометрически далеко не наглядны. Наглядность, собственно, не на высоте даже в ситуациях $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, потому что графики $w = f(z)$ надо было бы рассматривать в четырехмерном пространстве, а уж о сценариях при $n > 1$ — и говорить нечего. Поэтому в комплексном анализе широко распространены различные трюки символьного характера, нивелирующие дискомфорт потери пространственной ориентации. Таковы *диаграммы Рейнхарта* [14], манипулирование которыми помогает создавать иллюзии о преобразованиях областей Рейнхарта⁹⁾.

11.4. Кратный интеграл Коши

Фиксируя переменные, кроме первой, и применяя формулу Коши (2.22), получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

⁹⁾ Таковы и различные *мандалы*, «способствующие познанию Мира».

Применяя ту же манипуляцию по z_2 к $f(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)$, имеем

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{C_1 \times C_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, z_3, \dots, z_n)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (11.8)$$

Разумеется, для перехода к (11.8) надо сослаться «по дороге» на теорему Фубини [4, т. 5] о замене повторного интеграла двойным. В итоге, по завершению n шагов,

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{C_1 \times \dots \times C_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\prod_k (\zeta_k - z_k)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n, \quad (11.9)$$

что называют *кратным интегралом Коши*.

Формула (11.9) позволяет легко перейти к разложению $f(z)$ в ряд Тэйлора. Действительно, умножая

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \dots (\zeta_n - z_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}$$

на $\frac{f(\zeta)}{(2\pi i)^n}$ и подставляя в (11.9), получаем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad k = \{k_1, \dots, k_n\}, \quad (11.10)$$

где

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{C_1 \times \dots \times C_n} \frac{f(\zeta)}{\prod_m (\zeta_m - a_m)^{k_m + 1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

Разложение (11.10) обычно записывают в виде ряда Тэйлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right|_{z=a} (z - a)^k,$$

подразумевая $(z - a)^k = (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}$,

$$\frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k f}{\partial z^k} \right|_{z=a} = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \left. \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}} \right|_{z=a}.$$

Существование и аналитичность частных производных $\partial^k f / \partial z^k$ выводится из (11.9) аналогично тому, как это делалось в одномерном случае.

11.5. Особенности и нули

11.5.1. Голоморфная функция более чем одного переменного не может иметь ни изолированных особенностей¹⁰⁾, ни изолированных нулей.

Это достаточно простой и более-менее очевидный факт, но он иногда вызывает удивление. Видимо потому, что интуиция привыкла «думать» по инерции, как бы не замечая увеличения размерности. Однако простые примеры вскрывают элементарные причины. В ситуации $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ уравнение $f(z_1, z_2) = 0$ в общем случае имеет решениями не точки, а зависимости $z_1 = \varphi(z_2)$. Особенностью

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 - z_2}$$

является поверхность $z_1 = z_2$.

- Если функция f голоморфна в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$) с выколотой точкой, т. е. в $\Omega \setminus \{a\}$, то f продолжается до функции, голоморфной на всей области Ω . (?)

Для $n = 1$ это, конечно, сюрприз. Но в случае $n > 1$ область голоморфности не может иметь не только выколотых точек, но и компактных дырок.

11.5.2. Теорема Осгуда–Брауна. *Если функция f голоморфна в $\Omega \subset K$, где $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ($n > 1$), K – компакт, то f голоморфно продолжается на всю область Ω .*

Все это элементарная часть многомерного комплексного анализа. Центр тяжести приходится на изучение поверхностей нулей и особенностей, где широко используется аппарат алгебраической топологии. Результаты впечатляют, но не ясно, кому бы их продать.

¹⁰⁾ Точнее говоря, изолированные особенности могут быть, но они устранимы доопределением или переопределением функции.

Глава 12

Асимптотические методы

Отголоски асимптотических методов в сфере общего математического образования не дают ясного представления о предмете, а специальные руководства¹⁾ слишком подробны, чтобы удовлетворять «умеренный интерес». Кроме того, даже беглое изложение соответствующей техники в рамках ТФКП обычно не спасает положения, потому что проблема заключается не столько в «избыточных подробностях», сколько в акцентах. У профессионалов, например, часто возникает потребность разобраться в смежных областях «без особых затрат», тогда как руководства, можно сказать, стесняются снизойти на уровень популяризации, и дать ответы на простые и естественные вопросы типа «зачем это нужно». В результате краткая, но не адаптированная информация остается невостребованной, а спрос неудовлетворенным.

12.1. Схемы и примеры

Выяснение асимптотических свойств состоит обычно в обнаружении законов предельного поведения функций, на чем поконится значительная часть теории вероятностей [4, т. 4]. Возможных постановочных ракурсов здесь не так много. Идеологически самая простая задача касается «одинаковости» на бесконечности:

$$\varphi(\lambda) \sim \psi(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (12.1)$$

Эквивалентность (12.1) далее понимается как²⁾ $\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)} \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Параметр λ может быть как непрерывным, так и дискретным. Общеизвестный пример — формула Стирлинга:

$$n \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

¹⁾ См., например, [2, 13].

²⁾ Возможны и другие варианты, $\varphi(\lambda)/\psi(\lambda) \rightarrow C > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, или, скажем, $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda) + o(\lambda)$.

Вместо эквивалентности часто можно удовлетвориться теми или иными оценками. В этом случае удобно понятие «*o*-большого»,

$$\varphi(\lambda) = O(\psi(\lambda)), \quad \lambda \rightarrow \lambda_0 \quad (\lambda \rightarrow \infty), \quad (12.2)$$

означающее существование постоянной M и окрестности W точки λ_0 (либо ∞), в которой $|\varphi(\lambda)| < M|\psi(\lambda)|$.

Другой тип постановки задач — поиск предельных функций в конструкциях типа

$$\varphi(x, \lambda) \rightarrow \psi(x), \quad \lambda \rightarrow \lambda_0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

- Например, **закон арксинуса** в задаче о случайному блуждании:

$$\varphi(x, n) = P\{k_n < xn\} \rightarrow \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

где $P\{\cdot\}$ — вероятность события, записанного в скобках, $2k_n$ — число значений $j \in (0, 2, n)$, при которых сумма $X_1 + \dots + X_j$ неотрицательна, а X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины (с. в.), принимающие два значения ± 1 с вероятностями $1/2$.

Разумеется, характер предельных переходов может варьироваться³⁾. Вот два стандартных примера.

- Пусть в *последовательности испытаний Бернулли* единица каждый раз появляется с вероятностью p , нуль — с вероятностью $1-p$. В силу независимости испытаний вероятность в n испытаниях получить k единиц и $n-k$ нулей в каком-либо определенном порядке — равна $p^k(1-p)^{n-k}$, а независимо от порядка —

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (12.3)$$

Это называют *биномиальным распределением*. *Распределение Пуассона*

$$p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (12.4)$$

из (12.3) возникает в случае предельного перехода, при котором $n \rightarrow \infty$, а вероятность p меняется так, что $pn \rightarrow a$.

³⁾ Не говоря о том, что даже в рамках (12.1), (12.2) частная специфика порождает большое разнообразие — см. далее.

Действительно, $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ при условии $p = a/n$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^n \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{(1-p)^k} = \\ & = \frac{a^k}{k!} \left[\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n/a} \right]^a \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^k}. \end{aligned}$$

Закон Пуассона (12.4) получается с учетом

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n/a} \rightarrow e^{-1}, \quad \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{a}{n}\right)^k} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

- **Распределение простых чисел** [4, т. 4]. Доля чисел в промежутке $[x, x + \Delta x]$, делящихся на простое p , равна $1/p$. Доля же чисел в этом промежутке, не делящихся ни на одно простое число, равна

$$\rho(x) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (12.5)$$

При этом ясно, что говорить имеет смысл о простых p , меньших \sqrt{x} , и о $\Delta x \ll x$, но $\Delta x > \varepsilon x$ при некотором малом $\varepsilon > 0$.

Самых простых чисел в рассматриваемом промежутке⁴⁾

$$\rho(x)\Delta x \approx \pi(x + \Delta x) - \pi(x),$$

т. е. $\rho(x)$ играет роль плотности.

Далее. Поскольку

$$1 - \frac{1}{p} = e^{-1/p} + o\left(\frac{1}{p}\right)$$

для больших p , то с точностью до «о-малых»,

$$\ln \rho(x) = - \sum_k \frac{1}{p_k},$$

где p_k обозначает k -е простое число.

На сегменте $[x, x + \Delta x]$, в силу $\Delta x \ll x$, можно считать $p_k \sim x$, и сумма по этому промежутку

$$\sum \frac{1}{p_k} \sim \frac{1}{x} \rho(x) \Delta x,$$

⁴⁾ Здесь $\pi(x)$ — число простых чисел, меньших x ($\leqslant x$).

откуда

$$\ln \rho(x) = - \sum_k \frac{1}{p_k} \sim - \int_1^x \frac{\rho(u)}{u} du,$$

что после дифференцирования по x приводит к уравнению

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = -\frac{\rho(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{dx}{x},$$

решение которого $\rho(x) = \frac{1}{(C + \ln x)}$ при больших x переходит в

$$\rho(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

Как следствие,

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Рассуждение во втором примере, конечно, является только канвой обоснования. Обилие технических деталей характерно при выяснении асимптотических свойств. Поэтому без жертв и умолчаний рассказывать о соответствующих методах можно лишь специальному контингенту.

12.2. Асимптотика интегралов и рядов

Так же как дифуры изучать проще бывает в терминах преобразования Лапласа или Фурье, так и анализ асимптотики иногда упрощается после интегральных преобразований изучаемых функций. Соответственно, большая часть задач на территории асимптотических методов имеет комплексную природу.

Особенно ярко это проявляется в теории вероятностей, где случайной величине (с.в.) X с плотностью распределения $\rho(x)$ обычно сопоставляется характеристическая функция (х.ф.)

$$\varphi(\lambda) = E(e^{i\lambda X}),$$

здесь E — оператор математического ожидания. Иначе говоря,

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) e^{i\lambda x} dx, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

что в несущественных деталях отличается от преобразования Фурье (8.2) плотности $\rho(x)$. Если с. в. X_1, \dots, X_n независимы, то

$$\mathbf{E}(e^{i\lambda(X_1+\dots+X_n)}) = \mathbf{E}(e^{i\lambda X_1}) \dots \mathbf{E}(e^{i\lambda X_n}), \quad (12.6)$$

то есть х. ф. $\varphi(\lambda)$ суммы $S_n = X_1 + \dots + X_n$ равна произведению х. ф. слагаемых:

$$\varphi(\lambda) = \prod_k \varphi_k(\lambda)$$

— что и определяет заметную роль характеристических функций в теории вероятностей.

Если случайная величина X принимает дискретные значения $X = k$ с вероятностями p_k , то

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

называют *производящей функцией* с. в. X . С характеристической функцией $\varphi(\lambda)$ ее связывает соотношение

$$\varphi(\lambda) = \Pi(e^{i\lambda}).$$

При изучении асимптотического поведения возможность перехода от функций распределения (в частности, от плотностей) к характеристическим функциям, и обратно, — имеется благодаря следующему факту.

12.2.1. *Сходимость по распределению последовательности случайных величин $X_n \xrightarrow{D} X$ равносильна равномерной (на любом компакте) сходимости $\varphi_n(\lambda) \rightarrow \varphi(\lambda)$ их характеристических функций⁵⁾.*

Вот как это работает.

12.2.2. *Пусть X_1, X_2, \dots — независимые случайные величины, имеющие одинаковое распределение со средним $\mu = 0$ и дисперсией σ^2 . Тогда последовательность с. в. S_n/\sqrt{n} , где $S_n = X_1 + \dots + X_n$, сходится по распределению к случайной величине, имеющей нормальное распределение с нулевым матожиданием и дисперсией σ^2 .*

⁵⁾ Детали в [4, т. 4]. Аналогичный результат справедлив и для преобразования Лапласа.

◀ Если $\varphi(\lambda)$ — характеристическая функция X_k , то в силу (12.6)

$$\mathbb{E} \left(\exp \left\{ i\lambda \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right\} \right) = \left[\varphi \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \right]^n.$$

Разложение х. ф. в ряд дает

$$\varphi(\mu) = 1 - \frac{\sigma^2 \mu^2}{2} + o(\mu^2),$$

откуда при $n \rightarrow \infty$

$$\left[\varphi \left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} \right) \right]^n = \left[1 - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2n} + o \left(\frac{\lambda^2}{n} \right) \right]^n \rightarrow \exp \left\{ - \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2} \right\},$$

т. е. характеристическая функция с. в. S_n / \sqrt{n} сходится к х. ф. нормального закона, и в силу п. 12.2.1 сама с. в. S_n / \sqrt{n} сходится по распределению к нормальному закону. ►

Пуассоновские потоки. Разобьем интервал $(0, t)$ на n равных частей $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, и пусть $X_k(\Delta_k)$ обозначает число событий в потоке на промежутке Δ_k . Вероятность одного события предполагается равной

$$\mathbf{P}\{X_k(\Delta_k) = 1\} = \frac{\lambda t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где λ — средняя интенсивность потока. В предположении независимости времени наступления событий производящая функция $\Pi_n(z)$ последовательности $p_j = \mathbf{P}\{X_k(\Delta_k) = j\}$ не зависит от k и равна

$$\Pi_n(z) = \left[1 - \frac{\lambda t}{n} \right] + \frac{\lambda t}{n} z + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Производящая функция суммы $X_1(\Delta_1) + \dots + X_n(\Delta_n)$ вычисляется как произведение

$$\Pi(z) = [\Pi_n(z)]^n = \left[1 + \frac{\lambda t}{n}(z - 1) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n.$$

В пределе при $n \rightarrow \infty$ получается производящая функция числа событий $X(t)$, поступивших на интервале $(0, t)$:

$$\Pi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\lambda t}{n}(z - 1) \right]^n = e^{\lambda t(z-1)}.$$

Соответствующее распределение вероятностей

$$\mathbf{P}\{X(t) = j\} = \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \tag{12.7}$$

где (12.7) — коэффициенты разложения $e^{\lambda t(z-1)}$ в ряд Тэйлора по z , оказывается пуассоновским.

Фундаментальный характер приведенных примеров может на-вести на мысль, что «асимптотические задачи» все давно решены. Дескать, нормальный закон и пуассоновский — вот и весь круг при-ложений. На самом деле «асимптотическая проблематика» очень широка. Теория массового обслуживания, комбинаторика, не гово-ря о статистической физике... Да, собственно, что угодно. Дифуры, нелинейный анализ. Все, где есть потребность в оценках роста и упрощении описания, — сталкивается с изучением асимптотиче-ского поведения. Но многое здесь удается сделать на основе здра-вого смысла. Поэтому нет резона выделять направление в самосто-ятельную дисциплину. Однако часть специфических, но достаточно широко распространенных задач, рассматриваемых ниже, имеют под собой консолидированную основу и стекаются в одно русло.

12.3. Метод Лапласа

Метод Лапласа работает при выяснении асимптотики на бесконеч-ности функций φ вида

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b e^{\lambda h(x)} dx, \quad (12.8)$$

где (пусть пока будет) все вещественно.

Если $h(x)$ имеет в точке $x_0 \in [a, b]$ строгий максимум, то мак-симум $e^{\lambda h(x)}$ в точке x_0 тем острее, чем больше λ . Поэтому при боль-ших λ интеграл (12.8) можно заменить интегралом по малой окрест-ности точки x_0 , и такое приближение будет тем точнее, чем больше λ . Это простое соображение и составляет суть *метода Лапласа*.

Асимптотика $\varphi(\lambda)$ выясняется в зависимости от обстоятельств. Допустим, например, что $h'(x_0) = 0$, и в окрестности x_0

$$h(x) = h(x_0) + \frac{h''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\varphi(\lambda) \sim e^{\lambda h(x_0)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp \left\{ \frac{\lambda h''(x_0)}{2} \xi^2 \right\} d\xi,$$

и после замены $\zeta^2 = -\lambda h''(x_0)\xi^2$ имеем

$$\varphi(\lambda) \sim e^{\lambda h(x_0)} \frac{1}{\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\lambda}}^{\varepsilon\sqrt{\lambda}} e^{-\zeta^2/2} d\zeta \sim e^{\lambda h(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda h''(x_0)}}, \quad (12.9)$$

поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2/2} d\zeta = \sqrt{2\pi}$.

Возможны различные вариации. Максимум $h(x)$ может достигаться на краю $[a, b]$, промежуток $[a, b]$ может быть бесконечным, функция $h(x)$ не дифференцируемой. Но это уже детали. Идея остается прежней, а ее реализация — несложной [2, 13]. Ничего практически не меняется в более общей, по сравнению с (12.8), ситуации

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{\lambda g(x)} dx. \quad (12.10)$$

В (12.9) справа — добавляется лишь множитель $f(x_0)$. Но в случае (12.10) можно говорить о функциях $f(x)$ и λ , принимающих комплексные значения. При этом охватываются преобразования Лапласа.

Например, преобразование Лапласа

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-\lambda x} dx$$

при условии гладкости $f(x)$ и абсолютной сходимости интеграла при некотором λ_0 — имеет в секторе $|\arg \lambda| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ асимптотику [13]:

$$\hat{f}(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} f^{(n)}(0), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Результат получается разложением $f(x)$ в нуле в ряд Тейлора и промежуточной заменой бесконечного промежутка интегрирования — конечным, возможной для $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$ в силу абсолютной сходимости интеграла при $\lambda = \lambda_0$.

Другой пример — асимптотика Г-функции. Исходя из представления

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx$$

и преобразуя его к виду

$$\Gamma(\lambda + 1) = \lambda^{\lambda+1} \int_0^\infty e^{\lambda(\ln x - x)} dx,$$

приводим задачу к стандарту (12.8). Функция $\ln x - x$ имеет максимум при $x = 1$. В силу абсолютной сходимости интеграла — при больших λ его можно заменить интегралом по конечному промежутку, с точностью до о-малых. Далее, опираясь на (12.9), получаем в итоге опять-таки формулу Стирлинга

$$\Gamma(\lambda + 1) \sim \sqrt{2\pi\lambda} \left(\frac{\lambda}{e} \right)^\lambda, \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

но уже работающую в более общей ситуации, в том числе для комплексных λ в секторе $|\arg \lambda| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$.

12.4. Метод стационарной фазы

Несколько иная ситуация возникает в близком к (12.10) варианте

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx, \quad (12.11)$$

где $g(x)$ и λ принимают вещественные значения, $f(x)$ — неважно какие, но пусть тоже будут вещественные (для простоты разговора), причем f и g — гладкие функции.

В естественных предположениях интеграл Фурье (12.11) при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к нулю⁶⁾. Но как быстро, — это и есть вопрос асимптотического поведения. Если $g'(x) \neq 0$ на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx = \int_a^b \frac{f(x)}{i\lambda g'(x)} de^{i\lambda g(x)} = \frac{f(x)}{i\lambda g'(x)} e^{i\lambda g(x)} \Big|_a^b + o(\lambda^{-1}),$$

откуда ясно, что асимптотика определяется ситуацией на краю $[a, b]$. Интегрируя по частям многократно, можно получить разложение $\varphi(\lambda)$ на бесконечности в виде ряда по степеням λ^{-n} . Но это

⁶⁾ За счет быстрой осцилляции $e^{i\lambda g(x)} = \cos \lambda g(x) + i \sin \lambda g(x)$.

при условии $g'(x) \neq 0$. В стационарных точках, где $g'(x) = 0$, осцилляция замедляется, и это вносит дополнительный вклад в асимптотику. Принципиально все ясно. Критические точки надо погрузить в малые окрестности, и по ним интегрировать отдельно. Техническое исполнение получается несколько громоздким [13], что при написании диссертаций имеет свои плюсы.

12.5. Метод перевала

При выяснении асимптотики интегралов

$$\int_a^b f(x)e^{\lambda g(x)} dx$$

имеется еще одна возможность. Если функции f и g аналитически продолжаются в комплексную плоскость, то интегрирование по $[a, b]$ можно заменить интегрированием по «любому» пути⁷⁾ Γ , соединяющему a и b ,

$$\varphi(\lambda) = \int_{\Gamma} f(z)e^{\lambda g(z)} dz, \quad (12.12)$$

а затем путь Γ выбрать так, чтобы интегрировать было легко. Разумеется, в постановке задачи об асимптотическом поведении интеграла (12.12) не обязательно себя привязывать к ситуации⁸⁾ $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Концевые точки a, b и сам изначальный путь интегрирования могут принадлежать \mathbb{C} .

Метод перевала чем-то похож на шаровую молнию. Он существует и часто хорошо работает, но природа его неясна большинству

⁷⁾ Имеется в виду, что особые точки подынтегрального выражения не должны мешать деформации Γ в $[a, b]$.

⁸⁾ Не обязательно привязывать себя и к виду подынтегрального выражения. Можно говорить о более общем случае

$$\varphi(\lambda) = \int_{\Gamma} h(z, \lambda) dz,$$

но функция $h(z, \lambda)$ здесь обязана, конечно, обладать некоторыми свойствами, аналогичными $e^{\lambda g(z)}$, с точки зрения асимптотического поведения.

пользователей. А причина заключена в популярности слишком подобных объяснений, которые разными способами обыгрывают выгоду добираться из A в B через перевал, если экономить бензин, и вообще «не лезть в гору». К делу это имеет слабое отношение, потому что интеграл (12.12) не зависит от пути, и «преодоление высот» не играет роли. Тем не менее идти через перевал выгодно, но совсем по другим соображениям.

Суть метода составляет следующий *рецепт*. Ищется точка z_0 , в которой производная $g'(z_0)$ обращается в нуль, после чего путь интегрирования Γ выбирается так, чтобы он проходил через z_0 и, по возможности, шел вдоль градиента $\operatorname{Re} g(z)$, особенно в районе точки z_0 .

Мотивация. Если кривую Γ параметризовать, то интеграл (12.12) можно рассматривать как

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s) e^{\lambda g(s)} ds,$$

помещая задачу в рамки методов из предыдущих двух разделов. Но это в общем случае ничего не дает, потому что на произвольном контуре не выполняются подходящие условия. Другое дело, если движение вдоль Γ происходит по градиенту $u(x, y)$, где

$$g(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

В этом случае осцилляция мнимой части $v(x, y)$ не мешает, поскольку градиенты ортогональны⁹⁾, $\nabla u \cdot \nabla v = 0$, что означает $v = \text{const}$ при движении вдоль ∇u . Максимум u по s будет достигаться там, где градиент ∇u обнуляется¹⁰⁾, т. е. в точке z_0 , где оба градиента ∇u и ∇v равны нулю, — что дает основания применить для оценки действительной и мнимой части интеграла (12.12) технологию методов *Лапласа* и *стационарной фазы*.

Описанные соображения при попытках уточнений имеют тенденцию неограниченно растекаться, тем более что обстоятельства могут сильно разниться.

⁹⁾ См. (2.8).

¹⁰⁾ А не там, где градиент перпендикулярен пути Γ .

В итоге возникает редкая ситуация, когда осмысливание имеет больше минусов, чем плюсов. Причина тривиальна. Эвристика относительно выбора пути интегрирования в данном случае не может и не должна иметь строгой доказательной силы. Принципиально можно брать любой путь Γ , и далее мучиться тем или иным способом, докапываясь до асимптотики. Мучения при движении через перевал ($g'(z_0) = 0$), как правило, оказываются терпимы и дают результат, хотя гарантий никаких нет. С примерами можно ознакомиться по [2, 13] и другим источникам.

Что касается условия $g'(z_0) = 0$, то критическая точка z_0 обязана быть седловой точкой функции $u(x, y)$, равно как и $v(x, y)$, в силу *принципа максимума*¹¹⁾.

¹¹⁾ Благодаря которому ни $u(x, y)$, ни $v(x, y)$ — не могут иметь внутренних локальных максимумов.

Глава 13

Сводка определений и результатов

13.1. Аналитические функции

- ✓ *Аналитические функции*, изучаемые в ТФКП, выделяет особое понятие *дифференцируемости*, каковая определяется как представимость приращения функции в виде

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = A\Delta z + o(|\Delta z|),$$

где A — комплексное число, зависящее от точки z , которое называют *производной* $f(z)$ в точке z , и обозначают $f'(z)$, либо df/dz .

- ✓ Определение производной записывают также в виде

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

где требуется независимость предела от пути стремления Δz к нулю, что приводит к *необходимости выполнения для* $f = u + iv$ *условий Коши—Римана*:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.}$$

- ✓ **2.1.1.** *Необходимые условия Коши—Римана в случае непрерывности частных производных функций u, v в некоторой области D достаточны для дифференцируемости f в D , т. е. в каждой точке $z \in D$.*

Требование непрерывности частных производных в п. 2.1.1 — необязательно. Достаточно дифференцируемости u и v как функций действительных переменных в каждой точке $(x, y) \in D$.

- ✓ **2.1.2.** *Функции, дифференцируемые в некоторой области D , называются аналитическими в D .*

Обыкновенный анализ приучает к мысли, что функция может быть дифференцируема либо один раз, либо два, либо n раз. Имеет место удивительный факт:

Аналитическая функция, дифференцируемая по определению всего один раз, оказывается бесконечно дифференцируемой.

✓ (!) *Аналитичность* везде в книге подразумевает существование *области*, в которой функция дифференцируема (хотя бы в некоторой окрестности некоторой точки). Иногда говорят об аналитичности в точке.

✓ Функция $f(z) = z^n$ при любом натуральном n дифференцируема, ее производная $f'(z) = nz^{n-1}$ легко вычисляется:

$$\frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1} + (\dots) \cdot \Delta z \rightarrow nz^{n-1}$$

при $\Delta z \rightarrow 0$. Независимость от характера стремления Δz к нулю очевидна.

✓ Функция $\bar{z} = x - iy$ не аналитична. Сопряжение нарушает аналитичность и в общем случае. «Зеркальный образ»

$$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$$

и сама функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ не могут одновременно удовлетворять условиям Коши—Римана, если не говорить о тривиальном исключении $v(x, y) \equiv 0$.

✓ Чем меньше окрестность точки z , тем точнее выполняется соотношение $\Delta f = f'(z)\Delta z$, которое означает, что все Δz поворачиваются на один и тот же угол и растягиваются в одно и то же число раз. Тот факт, что аналитическое преобразование $w = f(z)$ локально представляет собой растяжения и повороты, влечет за собой обязательное сохранение ориентации.

✓ Задание частных производных определяет функцию с точностью до константы. Поэтому задание одной из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, в силу условий Коши—Римана, с точностью до константы определяет вторую.

✓ Дифференцируя условия Коши—Римана и исключая одну из функций u или v , легко убедиться, что обе удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

и являются таким образом гармоническими функциями.

✓ Комплексный интеграл $\int_L f(z) dz$ вдоль кривой L можно рассматривать как предел суммы $\sum_k f(z_k)\Delta z_k$ при стандартном измельчении разбиения. После умножения $f = u + iv$ на $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и перехода к пределу получается:

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \int_L u dy + v dx.$$

✓ **Теорема Коши 2.5.1.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D . Тогда интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру C , лежащему в D , равен нулю.

✓ **2.5.2.** Для $f(z)$, аналитичной в односвязной области D , интеграл

$$F(z) = \int_a^z f(w) dw$$

также аналитичен, причем

$$F'(z) = f(z).$$

✓ **Теорема Морера 2.5.3.** Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл

$$\oint_C f(z) dz$$

по любому замкнутому контуру C , лежащему в D , равен нулю, то $f(z)$ аналитична в D .

Теорема Морера служит удобным инструментом для получения многих результатов. Например:

Теорема о равномерном пределе 2.5.5. Если функция двух переменных $f(z, \xi)$ аналитична в области D при любом ξ и

$$f(z, \xi) \rightarrow g(z) \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \xi_0$$

равномерно по z на любом замкнутом подмножестве D , то функция $g(z)$ также аналитична в D .

✓ Функция z^n при любом $n = 1, 2, \dots$ аналитична везде. Поэтому интеграл от z^n по любому замкнутому контуру равен нулю.

2.6.2. Пусть C — окружность с центром в нуле. Тогда

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i,$$

если контур C положительно ориентирован (против часовой стрелки).

Интеграл по тому же контуру, что и в п. 2.6.2,

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 0 \quad \text{при целом} \quad n \neq 1.$$

- ✓ Интегральная формула Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

где z находится внутри контура C .

✓ **Принцип максимума модуля 2.7.1.** Функция $f(z)$, не равная константе и аналитическая на замыкании области Ω , — может достигать максимума своего модуля $|f(z)|$ только на границе области Ω .

✓ Принцип максимума имеет многочисленные следствия, широко применяемые в качестве подручных инструментов.

Лемма Шварца 2.7.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $B = \{z : |z| < 1\}$, непрерывна на замыкании \bar{B} , $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$. Тогда

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{при } z \in \bar{B},$$

причем, если $|f(z_0)| = |z_0|$ хотя бы в одной точке $z_0 \in \bar{B}$, то

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

при некотором действительном θ .

- ✓ Многократное дифференцирование интегральной формулы Коши дает:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw.$$

В результате аналитическая функция оказывается бесконечно дифференцируемой сама по себе, без каких бы то ни было дополнительных требований.

- ✓ **2.8.1. Интеграл**

$$H(z) = \oint_C h(z, w) dw$$

в случае непрерывности $h(z, w)$ и $h'_z(z, w)$ по совокупности переменных, и аналитичности $h(z, w)$ при любом фиксированном $w \in C$, — представляет собой аналитическую функцию, производная которой может вычисляться по формуле

$$H'(z) = \oint_C h'_z(z, w) dw.$$

✓ **Теорема Лиувилля 2.9.1.** Аналитическая на всей комплексной плоскости \mathbb{C} функция $f(z)$, ограниченная по модулю: $|f(z)| \leq M$ при любом $z \in \mathbb{C}$, — может быть только константой.

✓ Из теоремы Лиувилля сразу вытекает, например, основная теорема алгебры о существовании корня у любого полинома $P(z) \neq \text{const}$. В предположении противного функция $f(z) = 1/P(z)$ аналитична и ограничена по модулю, ибо $|P(z)| \rightarrow \infty$ при $|z| \rightarrow \infty$. Но тогда возникает противоречие: $P(z) = \text{const}$.

✓ На комплексной плоскости условие $f'(a) \neq 0$ необходимо и достаточно для локальной гомеоморфности f в точке a . Вот более общий результат:

Теорема 2.10.1. Пусть аналитическая в окрестности точки $z = a$ функция $f(z)$ имеет нулевую при $z = a$ производную, причем нуль у $f'(z)$ в этой точке $(n - 1)$ -го порядка. Тогда функция $f(z)$ в достаточно малой окрестности $z = a$ является n -листной, т. е. уравнение $w = f(z)$ при w , достаточно близких к $f(a)$, – имеет ровно n решений.

✓ **Лемма 2.11.1.** Пусть функции последовательности

$$f_1(z), f_2(z), \dots$$

аналитичны и равномерно ограничены в области D . Тогда все f_k равностепенно непрерывны на любом замкнутом множестве S , лежащем в D .

✓ **Принцип компактности 2.11.2.** Из любой последовательности функций $f_1(z), f_2(z), \dots$, аналитических и равномерно ограниченных в области D , – можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на любом замкнутом множестве, лежащем в D .

13.2. Комплексные ряды

✓ Конечный или бесконечный предел A частичной суммы

$$A_n = a_1 + \dots + a_n$$

определяют как сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд, имеющий конечную (бесконечную) сумму, называют сходящимся (расходящимся).

✓ Сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать и умножать на константу. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $a_n \rightarrow 0$.

✓ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $|a_1| + |a_2| + \dots$ из абсолютных величин. Любой абсолютно сходящийся ряд сходится.

- ✓ **Признак Коши.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если

$$\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow a < 1,$$

и расходится, если $a > 1$.

- ✓ **Признак Даламбера.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, если

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow a < 1,$$

и расходится, если $a > 1$.

✓ Абсолютно сходящиеся ряды «беспроblemны». Они допускают любое изменение порядка суммирования. Их можно без предосторожностей перемножать,

$$\sum_n^{\infty} a_n = A, \quad \sum_n^{\infty} b_n = B \quad \Rightarrow \quad \sum_{n,k}^{\infty} a_n b_k = AB,$$

произвольно устанавливая порядок суммирования членов $a_n b_k$.

- ✓ **Функциональный ряд**

$$f(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) + \dots$$

называют сходящимся в области $D \subset \mathbb{C}$, если при любом $z \in D$ соответствующий числовой ряд сходится. Такая сходимость, как известно еще из теории функций действительного переменного, малоэффективна (сходящийся ряд непрерывных функций не обязательно сходится к непрерывной функции). Адекватным инструментом для работы с функциональными рядами является понятие *равномерной сходимости*.

- ✓ **Определение 3.2.1.** Ряд

$$\varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) + \dots$$

сходится равномерно в D , если равномерно сходится к нулю его хвост, т. е. по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N , что при $n > N$:

$$|f(z) - \varphi_0(z) - \dots - \varphi_n(z)| < \varepsilon$$

при любом $z \in D$.

✓ **Критерий Коши 3.2.2.** Для равномерной сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм

$$f_n(z) = \varphi_0(z) + \dots + \varphi_n(z)$$

была равномерной последовательностью Коши, т. е. $|f_n(z) - f_m(z)| \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$ равномерно по z .

✓ **Признак Вейерштрасса 3.2.3.** Функциональный ряд, мажорируемый абсолютно сходящимся числовым рядом, сходится равномерно.

✓ **3.2.4.** Равномерно сходящийся в области D ряд можно почленно интегрировать по любой кусочно-гладкой кривой $\Gamma \subset D$:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \varphi_n(z) dz.$$

Если же $\varphi_n(x)$ аналитичны, то аналитичен неопределенный интеграл и

$$\int_a^w f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^w \varphi_n(z) dz.$$

✓ **Теорема 3.2.5.** Пусть функции $\varphi_n(z)$ аналитичны и ряд сходится равномерно в D . Тогда почленно продифференцированный ряд сходится к производной $f'(z)$, т. е.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(z),$$

причем $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n(z)$ сходится равномерно.

✓ **Теорема Вейерштрасса 3.2.6.** Пусть все функции $\varphi_n(x)$ аналитичны в области D и ряд сходится равномерно. Тогда его сумма — аналитическая функция.

✓ Фундаментальную роль в теории степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ играет следующий результат.

Теорема Абеля 3.3.1. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится при каком-то z , равном по модулю r , то при условии $|z| < r$ он сходится абсолютно, а при $|z| \leq r - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, еще и равномерно.

✓ Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ и его производная $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ имеют один и тот же радиус сходимости.

✓ **Теорема 3.4.1.** Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности W точки a , то она представлена рядом Тэйлора,

$$f(z) = f(a) + f'(z)(z - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n + \dots$$

в любом шаре $|z - a| < r$, принадлежащем этой окрестности.

Ситуация кардинально отличается от случая действительной переменной, где ряд Тэйлора может сходиться вообще к другой функции.

✓ **Определение 3.4.2.** Функция $f(z)$, представимая рядом Тэйлора, сходящимся в некоторой окрестности точки a , называется **регулярной**, или **голоморфной** в точке a .

(?) На прилагательные: **аналитическая, регулярная и голоморфная** (функция) — надо смотреть как на синонимы.

✓ **3.4.3.** Любой степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Тэйлора своей суммы.

✓ **Аналитическое продолжение функций** (на более широкие области определения) опирается на следующий результат.

Теорема единственности 3.5.1. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают в различных точках $a_n \in D$, причем $a_n \rightarrow a \in D$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ в D .

Более популярна менее общая формулировка. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают на некоторой дуге, лежащей в D , то $f(z) \equiv g(z)$ в D .

✓ Любая аналитическая функция может быть продолжена до функции, определенной на максимально возможной области. В результате **область определения задается самой функцией**. Это правда, но не вся. Трудности откладываются до главы 5, где рассматриваются вопросы многозначности.

✓ Широкое распространение при изучении аналитических функций имеют ряды Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}.$$

Первая сумма справа представляет собой обычный степенной ряд (**регулярную часть** ряда), сходящийся в некотором круге радиуса r_1 . Вторая сумма (называемая **обычно главной частью** лорановского ряда) после замены $w = 1/(z-a)$ тоже превращается в обычный степенной ряд, который сходится в плоскости w в круге радиуса r_2 , а в плоскости z — вне круга радиуса $1/r_2$. Поэтому областью сходимости является кольцо, что служит причиной популярности рядов Лорана. Чтобы накрыть изолированную особую точку требуется бесконечно много «кругов Тэйлора» либо одно «кольцо Лорана».

✓ Точку $z = a$ называют **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична и однозначна в некотором кольце $0 < |z-a| < r$, а в самой точке

a — не дифференцируема. Если дифференцируемость в a восстанавливается при do -либо *переопределении* значения функции в этой точке, то a называют *устранимой особой точкой*. Особая точка a функции $f(z)$ устранима в томм случае, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности a не содержит отрицательных степеней.

✓ В том случае, когда все коэффициенты c_{-n} разложения Лорана $f(z)$ в a равны нулю при $n > k$, но $c_{-k} \neq 0$, точку a называют *полюсом k -го порядка*. Равносильное определение: *точка a — полюс k -го порядка* в том случае, когда функция $h(z) = (z - a)^k f(z)$ при $z = a$ аналитична и не равна нулю. Полюсы 1-го порядка называют *простыми*. В полюсе модуль $f(z)$ всегда уходит в бесконечность при $z \rightarrow a$. Более того, *точка a является полюсом (конечного порядка) функции $f(z)$* в томм случае, когда существует предел $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, что подразумевает $|f(z)| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$.

✓ **Теорема Сохоцкого—Вейерштрасса 3.7.3.** В окрестности существенно особой точки $z = a$ аналитическая функция ведет себя беспорядочно, принимая все мыслимые значения с любой наперед заданной точностью.

✓ **Теорема Пикара 3.7.4.** В окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает бесконечно много раз любое значение, за исключением, быть может, одного.

✓ Целыми называют аналитические функции, не имеющие конечных особых точек. Если целая f не константа, то $z = \infty$ — либо полюс, либо существенно особая точка.

3.9.1. Целая функция с полюсом в бесконечности — полином.

✓ Функция $f(z)$ является целой в томм случае, когда она представима рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, сходящимся при любом $z \in \mathbb{C}$.

✓ Простейший вариант целой функции с конечным числом нулей $\{z_n\}$ — многочлен:

$$f(z) = f(0) \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n} \right).$$

При бесконечном количестве нулей это произведение может расходиться. Поэтому дополнительно вводится дополнительный множитель. В результате, всякая целая функция оказывается представимой в виде:

$$f(z) = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \exp \left\{ \frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + \dots + \frac{z^{k_n}}{k_n z_n^{k_n}} \right\} \right].$$

- ✓ **Теорема Адамара о разложении на множители 3.9.3.** Целая функция f порядка ρ с нулями в точках $\{z_n\}$ при условии $f(0) \neq 0$ представима в виде

$$f(z) = P(z)e^{Q(z)},$$

где $P(z)$ — каноническое произведение, построенное по нулям $\{z_n\}$, а $Q(z)$ — многочлен степени не выше ρ .

✓ Функция $f(z)$ называется *мероморфной*, если она не имеет в \mathbb{C} других особенностей, кроме полюсов. Мероморфные функции называют также *дробными* — причиной служит следующий факт.

3.9.4. Если $z = \infty$ — или устранимая особенность, или полюс мероморфной функции $f(z)$, то $f(z)$ — дробно-рациональна.

✓ **Теорема Миттаг—Леффлера 3.9.5.** Каковы бы ни были последовательность точек $a_n \rightarrow \infty$ и последовательность полиномов $P_n(\cdot)$, — существует мероморфная функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках a_n , и только в них, причем главная часть f в каждом полюсе a_n равна $P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$.

✓ Любая мероморфная функция f является отношением двух целых функций.

13.3. Конкретные функции

✓ Механизм аналитического продолжения функций на базе теоремы единственности (п. 3.5.1) показательно работает при продолжении функций с действительной оси на комплексную плоскость. Вот как это выглядит на примере логарифма.

Степенной ряд

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

после замены x на z дает аналитическое продолжение логарифма, сходящееся при $|z-1| < 1$, — но не очень ясно, какова максимальная область определения,

которую может охватить процесс расширения. В то же время $\int_1^z \frac{dw}{w}$ дает некоторую аналитическую функцию (обозначим ее авансом $\ln z$), определенную везде кроме нуля. Вопрос лишь в том, «одинаковы ли эти два логарифма». Ответ: «да», — потому что обе формулы совпадают, например, при действительных $z \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

(!) Такое построение логарифма, вообще говоря, некорректно. Причина в том, что $\int_1^z \frac{dw}{w}$ является многозначной функцией. Однако уточнения приводят ситуацию в норму (глава 5).

✓ Целые функции получаются в результате простой замены действительного переменного x комплексным z . Например,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

✓ Многозначные функции на практике чаще всего возникают в результате обращения — однозначных. Вот соответствующий рецепт получения логарифма. Решение уравнения $e^w = z$ относительно w — есть логарифм $w = \ln z$. Полагая $w = u + iv$, имеем $z = e^{u+iv} = e^u e^{iv}$, откуда

$$e^u = |z|, \quad v = \arg z, \quad \text{т. е.} \quad u = \ln |z|, \quad v = \arg z,$$

где $\ln |z|$ — обычный логарифм действительного числа. Окончательно:

$$w = \boxed{\ln z = \ln |z| + i \arg z},$$

где обычно подразумевается $-\pi < \arg z \leq \pi$. Но, вообще говоря, аргумент многозначен: $\arg z = \varphi + 2k\pi$. Выкладки показывают, что $\ln z$ определен везде кроме нуля — т. е. везде, где определен $\arg z$.

✓ Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к $z = w^n$, многозначна, ибо все n значений

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp \left\{ i \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right\}$$

при $k = 0, 1, \dots, n-1$ различны, но при возведении в n -ю степень дают z .

✓ z^α при любых комплексных значениях α определяется равенством

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

✓ Еще одна многозначная функция — арксинус $w = \operatorname{Arcsin} z$, возникающий из решения уравнения $z = \sin w$, которое может быть переписано в виде

$$z = \frac{1}{2i} \left(e^{iw} - \frac{1}{e^{iw}} \right),$$

откуда $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$. В итоге

$$w = \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \ln (iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

✓ Гамма-функция Эйлера $\Gamma(z)$ возникла из факториала, $\Gamma(n+1) = n!$. В результате решения функционального уравнения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ получается:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-Cz}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k} \right) e^{z/k},$$

где C — постоянная Эйлера.

Гамма-функция *мероморфна*, ее особые точки — *простые полюсы* при $z = 0, -1, -2, \dots$. Нулей у гамма-функции нет.

- ✓ Широко известно интегральное представление $\Gamma(z)$ в правой полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

На всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0, -1, -2, \dots$ функцию Γ задает *формула Ганкеля*

$$\Gamma(z) = (e^{2\pi iz} - 1)^{-1} \oint_C w^{z-1} e^{-w} dw,$$

интегрирование в которой идет по контуру, изображенном на рис. 4.3.

- ✓ *Дзета-функция* изначально определяется *рядом Дирихле*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots,$$

сходящимся при условии $\operatorname{Re} z > 1$. Справедливо также равносильное *представление Эйлера*

$$\zeta(z) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

где p пробегает все простые числа.

- ✓ Аналитическим продолжением $\zeta(z)$ служит, например,

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi i e^{\pi iz}} \oint_C \frac{w^{z-1} dw}{e^w - 1},$$

где интегрирование идет по контуру, изображенном на рис. 4.3. Функция $\zeta(z)$ определена во всей плоскости \mathbb{C} с выколотой точкой $z = 1$.

13.4. Аналитическое продолжение и многозначность

- ✓ **Теорема о монодромии 5.2.1** Если все кривые, лежащие в области D и соединяющие любые данные две точки, гомотопны друг другу, — то аналитическое продолжение функции вдоль любой кривой, ведущей из a в b , дает один и тот же результат.

- ✓ **5.2.2.** Если область D односвязна и фрагмент $f(z)$ аналитически продолжается в любую точку D вдоль некоторой кривой, то функция $f(z)$ аналитична в D и однозначна.

- ✓ 5.2.3. Функция, аналитическая в односвязной области, однозначна.
- ✓ С проблемой многозначности проще всего разбираться на простом примере. Многозначная функция \sqrt{z} на области (на комплексной плоскости с разрезом по действительной оси от 0 до $-\infty$)

$$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

оказывается однозначной. Однако возможно два варианта. Для $z \in D$ из двух возможных значений \sqrt{z} выберем то, которое имеет положительную действительную часть, и обозначим его через ${}_1\sqrt{z}$. Функция $w = {}_1\sqrt{z}$, как функция на D , — однозначна, аналитична, и переводит D в правую полуплоскость плоскости w . Аналитичность и однозначность ${}_1\sqrt{z}$ в D следует из теоремы о монодромии. Аналогично определяется функция $w = {}_2\sqrt{z}$, приписывающая \sqrt{z} значение, лежащее в левой полуплоскости плоскости w .

✓ Если теперь взять два листа \mathbb{C} — оба с разрезом по действительной оси от 0 до $-\infty$, и функцию ${}_1\sqrt{z}$ считать определенной на одном листе, а ${}_2\sqrt{z}$ — на другом, то объединение ${}_1\sqrt{z}$ и ${}_2\sqrt{z}$ можно считать однозначной функцией, заданной на совокупности двух листов. Далее проверяется, что значения ${}_1\sqrt{z}$ на верхнем (нижнем) берегу разреза и ${}_2\sqrt{z}$ — на нижнем (верхнем), по мере приближения z к разрезу стремятся к общему пределу $i\sqrt{r}$ ($-i\sqrt{r}$). Поэтому каждую функцию ${}_1\sqrt{z}$, ${}_2\sqrt{z}$ можно продолжить по непрерывности на берега разреза. Сшивая затем верхний берег первого листа с нижним второго, и наоборот, получаем так называемую *риманову поверхность*, на которой функция \sqrt{z} непрерывна и однозначна. (!)

- ✓ 5.4.1. Ветвью аналитической, вообще говоря, многозначной функции $f(z)$ на области D называется функция $f_D(z)$, которая получается из фиксированного фрагмента $f(z)$ с помощью аналитических продолжений вдоль путей, лежащих в D . Однозначная ветвь считается *регулярной*.
- ✓ 5.4.2. Если при достаточно малом $\epsilon > 0$ функция $f(z)$ аналитична в кольце $R_a = \{z : 0 < |z - a| < \epsilon\}$, но многозначна, то $z = a$ называется *изолированной точкой ветвления*.

В случае конечного числа значений $f(z)$ в кольце R_a точку $z = a$ называют *точкой ветвления порядка n* (по числу «значений»). Если же $f(z)$ в R_a принимает бесконечное число значений, точка ветвления $z = a$ называется *логарифмической*.

- ✓ В общем случае *риманова поверхность* для $f(z)$ строится подобно тому, как это делается для \sqrt{z} . Исходная область D с удаленными особыми точками и подобластями с помощью разрезов превращается в односвязную, затем выделяются однозначные ветви $f_k(z)$ с последующим их продолжением по непрерывности на берега разрезов. На заключительной стадии берега разрезов, на которых значения разных ветвей совпадают, — сшиваются между собой.

13.5. Теория вычетов

✓ Коэффициент

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

ряда Лорана (3.12) называется *вычетом* и обозначается $\text{res}(f, a)$.

Равносильное определение:

$$\text{res}(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz,$$

если $z = a$ — либо изолированная особая точка (однозначного характера), либо точка голоморфности, а r достаточно мало.

✓ **6.1.1.** Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична на замкнутом контуре C и внутри него, за исключением конечного числа точек a_1, \dots, a_k . Тогда

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{res}(f, a_1) + \dots + \text{res}(f, a_k)].$$

✓ Если a — простой полюс, т. е.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

вычет определяется как предел

$$\text{res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z).$$

✓ В случае, когда $f(z)$ представима в окрестности a как отношение аналитических функций, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(a) \neq 0$, а точка a — нуль первого порядка функции ψ , — то

$$\text{res}(f, a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

✓ Если $z = \infty$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, т. е. у f вне круга некоторого радиуса R нет других особых точек, то вычет $f(z)$ в точке $z = \infty$ определяется как

$$\text{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} f(z) dz.$$

✓ **Лемма Жордана 6.3.1.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и равномерно относительно $\arg z$ стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0, \quad \lambda > 0,$$

где C_R — верхняя полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z > 0$.

✓ О нулях и полюсах аналитической функции $f(z)$ удобно судить по логарифмическим вычетам, вычтем производной логарифма

$$[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

по формуле

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

где N и P , соответственно, — полное число нулей и полюсов $f(z)$ внутри контура C .

✓ Если $\Delta_C \arg f(z)$ — изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе контура C точкой z , то в области, ограниченной контуром C , функция $f(z)$ имеет

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

нулей.

✓ **Теорема об однолистном накрытии 6.5.1.** Если функция $f(z)$ аналитична внутри контура C , ограничивающего область D , непрерывна на замыкании \bar{D} и взаимно однозначно отображает C на контур $f(C)$, то она однолистна в области D .

✓ **Теорема Руше 6.5.2.** Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D и непрерывны на замыкании \bar{D} , причем $|f(z)| > |g(z)|$ на границе D , то $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в D одинаковое число нулей.

13.6. Конформные отображения

✓ Конформным называют непрерывное отображение, сохраняющее подобие бесконечно малых фигур. Аналитическая функция $f(z)$ является *конформным преобразованием* в точке z_0 в томм случае, когда $f'(z_0) \neq 0$. При этом в окрестности z_0

$$\Delta f = f'(z_0) \Delta z + o(\dots),$$

т.е. малые элементы Δz умножаются на комплексное число $f'(z_0)$, что приводит к растяжению во всех направлениях в $|f'(z_0)|$ раз и повороту Δz на угол $\arg f'(z_0)$, что и обеспечивает сохранение подобия фигур с точностью до «о-малых».

✓ Аналитическое отображение f области D на D' считается *конформным*, если оно конформно в каждой точке $z \in D$ и, кроме того, взаимно однозначно.

✓ **Теорема Римана 7.2.1.** Для любых односвязных областей D и D' – с границами, состоящими более чем из одной точки, – существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на D' . Если дополнительно выдвигается требование

$$w_0 = f(z_0), \quad \arg f'(z_0) = \gamma_0,$$

то такое отображение существует и единственno.

✓ Односвязность областей D и D' в теореме 7.2.1 принципиальна. Например, для существования конформного отображения кольца $r_1 < |z| < r_2$ на кольцо $R_1 < |w| < R_2$ необходимо и достаточно:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

На фоне *теоремы Римана* факт несколько обескураживающий. Некоторой компенсацией может служить канонический характер колец: *любая двусвязная область может быть конформно отображена на некоторое кольцо*.

✓ **Принцип соответствия границ 7.2.2.** Пусть D и D' – односвязные области, ограниченные жордановыми контурами C и C' , и пусть функция $f : D \rightarrow D'$, аналитичная в D , непрерывна на замыкании \bar{D} и взаимно однозначно отображает C на C' с сохранением направления обхода. Тогда $f(z)$ конформно отображает D на D' .

✓ **Принцип симметрии Римана–Шварца 7.2.3.** Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D , частью границы которой является интервал (a, b) действительной прямой, и пусть значения $f(z)$, $z \in (a, b)$, – действительны. Тогда функция

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

аналитична в области D^* , симметричной относительно действительной прямой, а

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & \text{для } z \in D \cup (a, b), \\ f^*(z), & \text{для } z \in D^* \cup (a, b), \end{cases}$$

аналитична на совокупной области $D \cup (a, b) \cup D^*$.

✓ Функция вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

называется *дробно-линейным преобразованием* (ДЛП). Условие $ad - bc \neq 0$ обеспечивает непропорциональность числителя и знаменателя, что влечет за собой $f(z) \neq \text{const}$. Любая функция ДЛП доопределется по непрерывности,

$$f(\infty) = \frac{a}{c}, \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

в результате — считается заданной на всей расширенной плоскости. В итоге: всякое ДЛП $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ является односстным отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$.

✓ Дробно-линейное преобразование обладает многими замечательными свойствами, но его выдающаяся роль определяет следующий результат.

Теорема 7.3.1. Если функция $f(z)$ односстна и аналитична всюду в расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, быть может, одной точки z_0 , то она дробно-линейна.

✓ 7.3.2. ДЛП образуют группу относительно композиции.

✓ Простейшие дробно-линейные преобразования:

- умножение: $z \mapsto az$ (растяжение в $|a|$ раз и поворот на угол $\arg a$);
- сдвиг: $z \mapsto z + b$;
- инверсия: $z \mapsto 1/z$.

✓ 7.3.3. Любое дробно-линейное преобразование разлагается в композицию простейших.

✓ 7.3.4. ДЛП переводит окружности в окружности.

✓ Ангармоническим отношением четырех точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ называется число

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

✓ Ангармоническое отношение попарно различных точек сохраняется при дробно-линейных преобразованиях.

✓ Для любых трех различных точек z_1, z_2, z_3 и любых трех различных точек w_1, w_2, w_3 существует единственное ДЛП, переводящее z_k в w_k , и это ДЛП определяется равенством

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} : \frac{w - w_1}{w - w_2}.$$

13.7. Операционное исчисление

✓ Преобразование Лапласа

$$\widehat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt,$$

где $p = \sigma + i\omega$, — усовершенствует методику преобразования Фурье. Функцию $f(t)$ при этом называют *оригиналом*, а $\widehat{f}(p)$ — *изображением*, что записывают обычно как $f(t) \doteq \widehat{f}(p)$ либо $\widehat{f}(p) \doteq f(t)$.

✓ Выгоды преобразования Лапласа по сравнению со стандартным преобразованием Фурье заключаются в том, что при больших $\operatorname{Re} p = \sigma$ метод Лапласа справляется с быстрорастущими функциями, тогда как преобразование Фурье упирается в расходящиеся интегралы. В этом, собственно, и заключается роль действительной части σ , которую можно выбирать и фиксировать по своему усмотрению, исходя из потребностей задачи.

✓ Успех преобразования Лапласа при изучении линейных систем определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, линейностью:

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \doteq \lambda \hat{f}(p) + \mu \hat{g}(p).$$

Во-вторых, заменой дифференцирования умножением. Точнее говоря,

$$\dot{f}(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt} \dot{f}(t) dt = p\hat{f}(p) - f(0),$$

где при взятии интеграла по частям действительная часть p выбирается настолько большой, чтобы модуль $e^{-pt} f(t)|_{t=\infty} = 0$. Естественно, предпочтение отдается задачам, в которых $f(0) = 0$, и тогда $\dot{f}(t) \doteq p\hat{f}(p)$.

✓ Изображение интеграла:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} \hat{f}(p).$$

✓ Дифференцирование изображения:

$$\hat{f}'(p) \doteq -tf(t).$$

✓ Интегрирование изображения:

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty \hat{f}(p) dp,$$

где путь интегрирования целиком лежит в области существования изображения $\hat{f}(p)$.

✓ Запаздывание:

$$f(t-a) \doteq e^{-pa} \hat{f}(p), \quad a > 0.$$

✓ Свертка:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \doteq \hat{f}(p)\hat{g}(p).$$

- ✓ Преобразование Лапласа обратимо. Оригинал по изображению вычисляется по формуле Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \hat{f}(p) dp,$$

где интегрирование идет вдоль вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = \sigma$, причем значение σ выбирается — не менее показателя степени роста функции $f(t)$.

13.8. Гармонические функции

- ✓ Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

называются гармоническими.

Гармонические функции u и v , удовлетворяющие условиям Коши—Римана, называют сопряженными. Сопряженная пара u, v — не что иное как действительная и мнимая части аналитической функции

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

- ✓ 9.2.1. Любая функция $u(x, y)$, гармоническая в односвязной области D , является действительной частью однозначной аналитической в D функции.

- ✓ 9.2.2. Любая функция $u(x, y)$, гармоническая в достаточно малой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, является действительной частью однозначной функции, аналитической в окрестности.

- ✓ Связь гармонических функций с аналитическими порождает серию «параллельных» результатов (следствий), которые доказываются в одно касание.

Теорема о среднем 9.2.3. Если функция $u(z)$ гармонична в круге радиуса r с центром в точке ζ , то ее значение в центре равно среднему значению на граничной окружности:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Принцип максимума 9.2.4. Если гармоническая в области D функция достигает локального максимума (или минимума) внутри D , то она — постоянна.

- ✓ 9.2.5. Пусть функция $u(z) \neq \text{const}$ гармонична в \mathbb{C} . Тогда область Ω ее значений совпадает с $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

- ✓ **9.3.1. Конформная замена координат не нарушает гармоничности функции.**
- ✓ **Теорема единственности 9.3.2.** Если гармонические в области D функции $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ совпадают в некоторой окрестности $\Omega \subset D$, то $u_1(z) \equiv u_2(z)$ в D .

✓ Краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\Gamma} = u_0(x, y),$$

называемую *задачей Дирихле*, для круга $|z| < 1$ (Γ — окружность $|z| = 1$) решает интеграл Пуассона

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\xi) P(r, \xi - \varphi) d\xi,$$

где функция $u(r, \varphi)$, выражаемая в полярных координатах, принимает на окружности $|z| = 1$ значения $u_0(\xi)$, а

$$P(r, \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\theta.$$

13.9. Функции нескольких переменных

- ✓ В многомерном анализе широко используются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

в которых дифференциал функции f расщепляется на две части,

$$df = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right) = \hat{d}f + \bar{d}f,$$

где

$$dz_k = dx_k + i dy_k, \quad d\bar{z}_k = dx_k - i dy_k.$$

- ✓ Непрерывная функция $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ называется *аналитической* в точке $z = a$ (в области $D \subset \mathbb{C}^n$), если $\boxed{\bar{d}f = 0}$ в некоторой окрестности точки a (всюду в D). Иначе говоря, аналитическая функция обязана иметь дифференциал $\boxed{df = \hat{d}f}$.

За иероглифами определения здесь стоит то же содержание, что и в комплексно-одномерном случае. И можно было бы, по аналогии, говорить о независимости пределов от пути стремления Δz к нулю при определении градиента функционала $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, не выпуская при этом ситуацию из \mathbb{C}^n в \mathbb{R}^{2n} .

✓ **Теорема Хартогса 11.1.1.** Функция $f(z_1, \dots, z_n)$, аналитическая в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждой в отдельности переменной z_k , аналитична в D .

✓ Другой (равносильный) вариант определения аналитичности опирается на разложение в степенной ряд. Функция $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична в точке $z = a$, если представима сходящимся, в некоторой окрестности $z = a$, рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}.$$

В этом случае f чаще называют *голоморфной функцией*. Но так или иначе, определения равносильны, — и потому понятия *голоморфности* и *аналитичности* сливаются воедино, превращаясь в синонимы.

✓ В многомерном случае, как и в одномерном, принципиальную роль играет *аналитическое продолжение*. Идеология здесь не претерпевает существенных изменений, но технические нюансы шаг за шагом сильно преображают тему. Механизм *аналитического продолжения*, как обычно, опирается на **теорему единственности**: если голоморфная функция f равна нулю в некоторой области \mathbb{C}^n , то $f \equiv 0$ во всей области определения. В отличие от одномерного случая — обращения в нуль f на множествах нулевой меры недостаточно. Функция $f(z) = z_1 z_2$ равна нулю на плоскостях $\{z_1 = 0\}$, $\{z_2 = 0\}$, но не равна нулю тождественно.

✓ Кое-что при $n > 1$ сохраняется в неизменном виде. Например, **принцип максимума модуля**: если голоморфная функция f достигает локального максимума модуля внутри своей области определения, то $f \equiv \text{const.}$

✓ Степенные ряды в случае нескольких переменных

$$\sum_k^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_k^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}$$

обладают определенной спецификой, которая отличает их от степенных рядов одной переменной. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2+1} = \frac{z_2}{(1 - z_1)(1 - z_2)}$$

имеет множеством сходимости объединение полидиска $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ с плоскостью $\{z_2 = 0\}$. Поэтому ряд сходится при любом $z = \{z_1, 0\}$, но из этого не следует его сходимость при z с меньшим модулем, как в обычной *теореме Абеля* (п. 3.3.1).

Чтобы исключить подобные аномалии *область сходимости* для $n > 1$ определяют иначе (п. 11.2.1), как *внутренность* множества тех z , при которых ряд сходится. При этом *полидиском сходимости* называют *открытый* полидиск максимального радиуса, исключая граничные точки, в которых ряд сходится

✓ Роль полидисков сходимости, вообще говоря, вторична. Области сходимости в многомерном случае более разнообразны, но подчиняются существенному ограничению логарифмической выпуклости (п. 11.2.3).

✓ Область в \mathbb{C}^n с центром в a , содержащая вместе с каждой точкой $z^0 = \{z_k^0\}$ все точки

$$\{z : |z_k - a_k| = |z_k^0 - a_k|\},$$

называется *областью Рейнхарта*. Замена равенств неравенствами,

$$\{z : |z_k - a_k| \leq |z_k^0 - a_k|\},$$

дает определение *полной области Рейнхарта*.

✓ 11.3.1. Любая функция f , голоморфная в полной области Рейнхарта, представляется в этой области рядом Тэйлора,

$$f(z) = \sum_k^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

✓ Кратный интеграл Коши:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{C_1 \times \dots \times C_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\prod_k (\zeta_k - z_k)} d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

✓ Голоморфная функция более чем одного переменного не может иметь ни изолированных особенностей, ни изолированных нулей.

Сокращения и обозначения

◀ и ▶ — начало и конец рассуждения, темы, доказательства

(?) — предлагает проверить или доказать утверждение в качестве упражнения, либо довести рассуждение до «логической точки», — но не является вопросом «правильно или неправильно?»

(!) — предлагает обратить внимание

«в томм случае» — «в том и только том случае»

$A \Rightarrow B$ — из A следует B

$x \in X$ — x принадлежит X

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ — объединение, пересечение и разность множеств X и Y

$X \subset Y$ — X подмножество Y , в том числе имеется в виду возможность $X \subseteq Y$, т.е. между $X \subset Y$ и $X \subseteq Y$ различия не делается

\overline{X} — замыкание X

\emptyset — пустое множество

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ — вещественная прямая

\mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство

\mathbb{C} — комплексная плоскость

$z = x + iy$ — комплексное число, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ — его тригонометрическая запись, $x = \operatorname{Re} z$ — действительная часть, $y = \operatorname{Im} z$ — мнимая; $\bar{z} = z^* = x - iy$ — комплексно сопряженное число

$\varphi(\lambda) = O(\psi(\lambda))$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ — существует постоянная M и окрестность W точки λ_0 , в которой $|\varphi(\lambda)| < M|\psi(\lambda)|$

$\nabla f(x) = \operatorname{grad} f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$ — градиент функции $f(x)$

$\pi(x)$ — число простых чисел, меньших x ($\leqslant x$)

$\tau(n)$ — число делителей n

Литература

1. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2001.
2. Де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: ИЛ, 1961.
3. Босс В. Интуиция и математика. М.: Айрис-Пресс, 2003. 2-е изд. М.: КомКнига/URSS, 2007.
4. Босс В. Лекции по математике. Т. 1. Анализ; Т. 2. Дифференциальные уравнения; Т. 3. Линейная алгебра; Т. 4. Вероятность, информация, статистика; Т. 5. Функциональный анализ; Т. 6. От Диофанта до Тьюринга; Т. 7. Оптимизация; Т. 8. Теория групп. М.: URSS, 2004–2007.
5. Воронин С. М., Карацуба А. А. Теория дзета-функции. М.: Физматлит, 1994.
6. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.
7. Евграфов М. А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
9. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.
10. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1970.
11. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.
12. Титчмарш Е. Теория дзета-функции. Череповец: Меркурий-Пресс, 2000.
13. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
14. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

Предметный указатель

Абсолютно сходящийся ряд 54
амплитудно-фазовая
характеристика 112
аналитическое продолжение 61
ангармоническое отношение 125
арксинус 83

Бесконечное произведение 72
биномиальное распределение 176

Ветвь 97

Гамма-функция 84
гармоническая функция 31, 146
гармонические функции
 сопряженные 146
гиперболический косинус 80
 — синус 80
гипотеза Римана 158
главное значение логарифма 82
годограф Михайлова 112
гомеоморфизм 21
 — локальный 21
гомеоморфные пространства 21
гомотопные кривые 36
граница недостижимая изнутри
 22
группа Мёбиуса 123

Дельта-функция 141
дзета-функция 87, 198
дробно-линейное преобразование
 121

Естественная граница функции
 70

Жорданов контур 23
жорданова область 23

Задача Дирихле 152
 — Неймана 153

Изолированность нулей 63
инверсно сопряженные точки 124
интеграл Дирихле 154
 — Пуассона 152
 — Шварца—Кристоффеля 130
интегралы Френеля 109
интегральная формула Коши 43
инъекция 21

Комплексное число 11
конформное преобразование 29
кратный интеграл Коши 173
критерий Коши 53
крыло Жуковского 129
кси-функции Римана 161

Лемма Гурса 35
лист 94
логарифм 82
логарифмическая выпуклость 171
логарифмический вычет 110

Метод Лапласа 181
 — перевала 184

- стационарной фазы 183
- множество Жюлиа 131
- Мандельброта 132

- Направление обхода** 22
- неопределенный интеграл 38
- носитель функции 140

- Область** 21
 - односвязная 22
 - Рейнхарта 171
 - сходимости 170
 - обобщенная функция 141
 - однолистность в точке 21
 - основная теорема алгебры 47
 - особая точка изолированная 67
 - — существенная 68
 - — устранимая 67
 - особые точки 67
 - отображение «в» 21
 - инъективное 21
 - конформное 114
 - «на» 21
 - обратное 21
 - однолистное 21
 - сюръективное 21

- Парадокс Брауэра** 22
- первообразная 38
- передаточная функция 145
- пикаровское исключительное значение 69
- полидиск 166
- полином гурвицев 112
 - устойчивый 112
- положительная ориентация 36
- полюс k -го порядка 67
 - простой 67

- полярные координаты 12
- порядок связности области 22
 - функции 73
- постоянная Эйлера 85
- преобразование Лапласа 134
 - Фурье 135
- признак Даламбера 54
 - Коши 54
- принцип компактности 52
 - максимума модуля 30, 45
 - соответствия границ 119
- продолжение вдоль пути 63, 92
- производная 24
- простая замкнутая кривая 23

- Равномерная непрерывность** 21
 - сходимость 56
- равностепенная непрерывность 50
- радиус сходимости 58
- распределение Пуассона 176
- расширенная комплексная плоскость 19
- регулярная ветвь 96
- риманова поверхность 94, 98
- ряд Дирихле 159
 - Лорана 65
 - —, главная часть 65
 - —, регулярная часть 65
 - Тейлора 60

- Связность** 21
 - линейная 21
- собственное значение 14
- собственный вектор 14
- согласование ориентаций 36
- сопряженное число 12
- спрямляемость кривой 35

- степенной ряд 58
стереографическая проекция 19
сфера Римана 18
- Теорема Адамара о лакунах** 70
— Вейерштрасса о заказанных нулях 74
— Гарнака 150
— единственности 169
— Иенсена 77
— о монодромии 91
— Пикара 76
— Хартогса 168
точка ветвления 97
— алгебраическая 98
— логарифмическая 97
— порядка n 97
- Уравнение Лапласа** 146
условия Коши—Римана 25
- Финитная функция** 140
формула Ганкеля 87
- Грина 34
— Меллина 139
— Муавра 13
— Стирлинга 175
— Эйлера 13, 80
функция $\pi(x)$ 157
— аналитическая 26
— — многих переменных 167
— голоморфная 61, 168
— Грина 143
— Жуковского 127
— конечного порядка 73
— Мангольдта 157
— Мёбиуса 157
— мероморфная 74
— полная 92
— регулярная 61
— целая 72
— — трансцендентная 72
- Характеристическое уравнение** 14
- Частичная сумма** 55



- В «Лекциях по математике» В. Босса вышли тома:
1. Анализ.
 2. Дифференциальные уравнения.
 3. Линейная алгебра.
 4. Вероятность, информация, статистика.
 5. Функциональный анализ.
 6. От Диофанта до Тьюринга.
 7. Оптимизация.
 8. Теория групп.
 9. ТФКП.

Готовятся: 10. Труднорешаемые задачи.

11. ЧП-уравнения.



В условиях информационного наводнения инструменты вчерашнего дня перестают работать. Поэтому учить надо как-то иначе. «Лекции» дают пример. Плохой ли, хороший — покажет время. Что в любом случае, это продукт нового поколения. Тоже «колеса», тот же «руль», та же математическая суть, — но по-другому.

В. Босс

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете:

<http://URSS.ru>

Тел./факс: 7 (495) 135-42-16

URSS Тел./факс: 7 (495) 135-42-46

5047 ID 59264



9 785382 001968 >



Из отзывов читателей:

Чтобы усвоить предмет, надо освободить его от деталей, обнажить центральные конструкции, понять, как до теорем можно было додуматься. Это тяжелая работа, на которую не всегда хватает сил и времени. В «Лекциях» такая работа проделывается автором.

Популярность книг В. Босса легко объяснима. Даётся то, чего недостает: общая картина, мотивация, взаимосвязи. И самое главное — легкость вхождения в любую тему.

Содержание продумано и хорошо увязано. Громоздкие доказательства ужаты до нескольких строчек. Виртуозное владение языком.

Отзывы о настоящем издании:
а также обнаруженные опечатки присыпайте по адресу URSS@URSS.ru.
Ваши замечания и предложения будут учтены
и отражены на web-странице этой книги
в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>.

