ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ,
ԱՐԾՐ.Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

ԴԱՍԱԽՈՍՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2011

ՀՏԴ 51(042)
ԳՄԴ 22.161.6
Ղ 249

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ Ա.Գ.

Ղ 249 Սովորական դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հավասարումներ (դասախոսություններ): / Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Վ. Ցուցուլյան, Ա.Ս. Սարգսյան; ԵՊՀ. – Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2011. – 100 էջ:

Սույն ձեռնարկը նվիրված է մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դիֆերենցիալ հավասարումներին և Ֆրեդհոլմի (Վոլտերայի) ինտեգրալ հավասարումներին: Այն համապատասխանում է ԵՊՀ – ի ֆիզիկայի և Իջևանի մասնաճյուղի բնագիտական ֆակուլտետների ուսումնական ծրագրերին:

Ձեռնարկում յուրաքանչյուր բաժին մեկնաբանվում է համապատասխան օրինակներով, որոնք նպաստում են նյութի ընկալմանը:

Ձեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ – ի, նրա Իջևանի մասնաճյուղի ինչպես նաև այլ ԲՈՒՀ - երի բնագիտական ֆակուլտետների ուսանողության համար:

ՀՏԴ 51(042)
ԳՄԴ 22.161.6

ISBN 978-5-8084-1464-8

I. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐ

1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԳԱՂԱՓԱՐ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ, ՆՐԱ ԼՈՒԾՄԱՆ, ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՄԱՍԻՆ

Սահմանում 1: Անկախ փոփոխականի, որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալների միջև առնչությունն անվանում են դիֆերենցիալ հավասարում:

Այն ընդհանուր դեպքում ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0: \qquad (1.1)$$

Սահմանում 2: Եթե անհայտ ֆունկցիան կախված է մեկ անկախ փոփոխականից, ապա նրա ածանցյալները սովորական ածանցյալներ են, այդ հավասարումն էլ կոչվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարում: Եթե անհայտ ֆունկցիան կախված է մի քանի անկախ փոփոխականներից, ապա նրա ածանցյալները մասնակի ածանցյալներ են, և հավասարումը կոչվում է մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Այս ձեռնարկը նվիրված է միայն սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներին, որոնց կարճ կանվանենք դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Քննարկենք ֆիզիկայի որոշ խնդիրներ, որոնք բերվում են դիֆերենցիալ հավասարումների:

Խնդիր1: Դիտարկենք ռադիոակտիվ նյութի տրոհման խնդիրը: Դիցուք տրված ռադիոակտիվ նյութի զանգվածը ժամանակի t պահին $N(t)$ է: Փորձից հայտնի է, որ ռադիոակտիվ նյութի տրոհման արագությունը ուղիղ համեմատական է այդ պահին եղած նյութի զանգվածին՝

$$\frac{dN(t)}{dt}=-kN(t), \qquad (1.2)$$

որտեղ k - ն ռադիոակտիվ նյութը բնորոշող հաստատուն է:

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի՝

$$dN(t) = \frac{dN(t)}{dt}dt = -kN(t)dt,$$

ստանում ենք՝ $\frac{dN(t)}{N(t)} = -kdt$, կամ՝ $dlnN(t) = d(-kt)$: Որտեղ՝

$$ln(N(t)) = -kt + \ln c \Rightarrow$$

$$N(t) = ce^{-kt}: \quad (1.3)$$

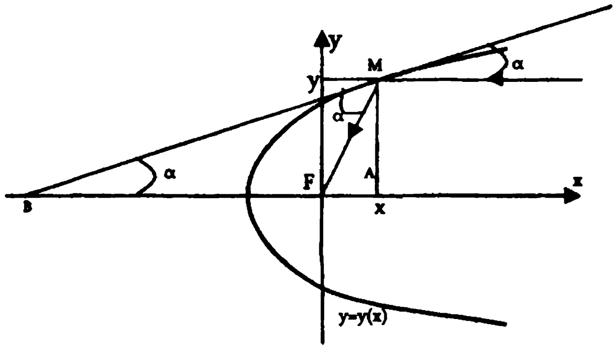
Եթե սկզբնական $t = 0$ պահին ռադիոակտիվ նյութի զանգվածը $N(0) = N_0$ է (սկզբնական պայման), ապա (1.3) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$N(t) = N_0e^{-kt}: \quad (1.4)$$

Այսպիսով ռադիոակտիվ նյութը նվազում է էքսպոնենցիալ օրենքով (զրո չի դառնում):

Խնդիր 2: Գտնել այն հայելային մակերևույթի տեսքը, որն ունի առանցքային համաչափություն և այնպիսին է, որ առանցքին զուգահեռ լույսի ճառագայթները անդրադառնում են առանցքի որոշակի F կետի (ֆոկուսի):

Լուծում: Խնդիրը լուծենք փնտրվող մակերևույթի առանցքային հատույթի համար (նկ.1): Համարենք, որ ֆոկուսը համընկնում է կոորդինատների սկզբնակետի հետ $(F = O)$: Կորի կամայական $M(x, y)$ կետով տանենք շոշափող և նշանակենք շոշափողի և OX առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունը α :



Նկ. 1

Քանի որ ըստ լույսի անդրադարձման օրենքի՝ անկման և անդրադարձման անկյուններն իրար հավասար են, ապա ΔFAM -ից կունենանք՝

$$BF = FM = z(x) \equiv \sqrt{x^2 + y^2(x)},$$

ΔABM -ից ունենք՝ $y'(x) \equiv tg\alpha \equiv \dfrac{y(x)}{x + z(x)}$:

Տեղադրելով $z(x)$-ի արժեքը, կստանանք հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{1.5}$$

որին որոնելի ֆունկցիան դարձնում է նույնություն՝

$$y'(x) \equiv \frac{y(x)}{x + \sqrt{x^2 + y^2(x)}}:$$

Աջ մասի համարիչն ու հայտարարը բազմապատկելով հայտարարի լծորդով, կստանանք՝

$$y'(x) \equiv \frac{y(x)\left(\sqrt{x^2 + y^2(x)} - x\right)}{y^2(x)}: \tag{1.6}$$

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի, որոշ ձևափոխություններից հետո կունենանք՝

$xdx + y(x)dy(x) \equiv \sqrt{x^2 + y^2(x)}dx$, կամ՝ $\dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2 + y^2(x))}{\sqrt{x^2 + y^2(x)}} \equiv dx$:

Այստեղից ստանում ենք՝

$$d\sqrt{x^2 + y^2(x)} \equiv d(x + c) \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2(x)} \equiv x + c \Rightarrow$$

$$y^2(x) \equiv 2xc + c^2 \Rightarrow x \equiv \frac{1}{2c}y^2(x) - \frac{c}{2}:$$

Ստացանք պարաբոլների ընտանիք: Պտտելով OX առանցքի շուրջը, կստանանք պտտման պարաբոլոիդների ընտանիք:

Սահմանում 3: Դիֆերենցիալ հավասարման կարգ ասելով հասկանում են հավասարման մեջ մասնակցող ածանցյալների ամենաբարձր կարգը:

Սահմանում 4: Դիֆերենցիալ հավասարման լուծում է կոչվում այնպիսի $y = y(x)$ ֆունկցիա, որոշված ինչ – որ X միջակայքում, որը (1.1) դիֆերենցիալ հավասարումը այդ միջակայքում դարձնում է նույնություն:

Սահմանում 5: $y = y(x, c_1, ..., c_n)$ տեսքի ֆունկցիան կոչվում է (1.1) դիֆֆերենցիալ հավասարման **ընդհանուր լուծում**, եթե՝

1. $\forall c_1, ..., c_n$ հաստատունների դեպքում $y = y(x, c_1, ..., c_n)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1) – ի լուծում ինչ – որ X միջակայքում,

2. (1.1) – ի կամայական $z = z(x)$ լուծման համար $\exists c_1, ..., c_n$ հաստատուններ, այնպիսիք որ $z(x) \equiv y(x, c_1, ..., c_n)$:

Երբ լուծում ենք (ինտեգրում ենք) դիֆերենցիալ հավասարումը, հաճախ ստացվում է կապ x - ի, y - ի և հաստատունների միջև, որտեղից չի հաջողվում գտնել ընդհանուր լուծումը: Դիֆերենցիալ հավասարումը համարվում է լուծված, երբ վերը նշված կապը ստացվել է:

Սահմանում 6:

$$\varphi(x, y, c_1, ..., c_n) = 0 \tag{1.7}$$

տեսքի առնչությունը կոչվում է (1.1) հավասարման **ընդհանուր ինտեգրալ**, եթե՝

1. $\forall$ $c_1, ..., c_n$ հաստատունների դեպքում (1.7) – ից որոշվող, n անգամ դիֆերենցելի անբացահայտ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.1) հավասարման լուծում:

2. (1.1) հավասարման ինչպիսի $y = y(x)$ լուծում էլ վերցնենք, $\exists$ $c_1, ..., c_n$ հաստատուններ, այնպիսիք որ $y = y(x)$ ֆունկցիան (1.7)–ը դարձնում է նույնություն ինչ – որ միջակայքում:

Տրված դիֆերենցիալ հավասարման լուծման պրոցեսը անվանում են ինտեգրում (հավանաբար այն պատճառով, որ լուծման պրոցեսում հարկավոր է լինում կատարել բազմաթիվ ինտեգրումներ):

II. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. $y' = f(x, y)$ ՏԵՍՔԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՄԵԿՆԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր տեսքը հետևյալն է՝

$$F(x, y, y') = 0 : \qquad (1.1)$$

Նախ քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ հավասարումը լուծված է ածանցյալի նկատմամբ, այսինքն՝

$$y' = f(x, y) : \qquad (1.2)$$

Սահմանում 1: Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է XOY հարթության ինչ – որ (D) տիրույթում: Այդ տիրույթի յուրաքանչյուր (x_1, y_1) կետով տանենք այնպիսի ուղիղ (հատված), որի OX առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած α_1 անկյունը որոշվի $tg\alpha_1 = f(x_1, y_1)$ պայմանից: Այդ ուղիղը կոչվում է (x_1, y_1) կետում (1.2) հավասարումով որոշվող **ուղղություն**: Ստացվեց, որ (D) տիրույթի յուրաքանչյուր կետով անցնում է որոշակի ուղղություն: Այդ ուղղությունների բազմությունը կոչվում է ուղղությունների դաշտ:

Այսպիսով պարզ է դառնում լուծման երկրաչափական իմաստը: Գտնել (1.2) հավասարման լուծման գրաֆիկը (ինտեգրալային կորը) նշանակում է գտնել (D) - ում այնպիսի ողորկ կոր, որի յուրաքանչյուր կետում տարված շոշափողը համընկնի այդ կետում դաշտի ուղղության հետ:

Սահմանում 2: Այն կետերի երկրաչափական տեղը, որտեղ դաշտն ունի միևնույն ուղղությունը, կոչվում է տվյալ դիֆերենցիալ հավասարման **իզոկլին** կամ **հավասարաթեք** (հավասար թեքությունների գիծ): Իզոկլինը որոշվում է $f(x, y) = c$ պայմանից:

Օրինակ 1: Դիտարկենք $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ հավասարումը և կառուցենք նրա իզոկլինները և ինտեգրալային կորերը: Իզոկլինները որոշվում են $-\frac{x}{y}=c$ պայմանից, այսինքն՝ $y=-\frac{1}{c}x$ ուղիղներն են, որոնց անկյունային գործակիցն է $k_1=-\frac{1}{c}$: Այդ իզոկլինի յուրաքանչյուր կետում ուղղության անկյունային գործակիցն է $k_2=c$: Քանի որ $k_1\cdot k_2=-1$, ապա ստացվում է, որ իզոկլինի յորաքանչյուր կետում ուղղությունը ուղղահայաց է իզոկլինին: Ուրեմն, դժվար չէ հասկանալ, որ ինտեգրալային կորերը կլինեն $(0,0)$ կենտրոնով շրջանագծեր:

Այժմ դիտարկենք առաջին կարգի ճշգրտորեն լուծվող դիֆերենցիալ հավասարումների դասերը:

2. ԱՆՋԱՏՎՈՂ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

$$f(y)dy=g(x)dx \tag{2.1}$$

տեսքի հավասարումներն անվանում են **անջատված փոփոխականներով** դիֆերենցիալ հավասարումներ:

Թեորեմ 1: Ենթադրենք $f(x)$ - ը և $g(y)$ - ն անընդհատ ֆունկցիաներ են XOY հարթության ինչ – որ (D) տիրույթում և $f(y)\neq 0$: Այդ դեպքում (2.1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int f(y)dy-\int g(x)dx-c=0: \tag{2.2}$$

Եթե c - ն ընտրվում է այնպես, որ $y(x_0)=y_0$ ((x_0,y_0) - ն (D) - ի կամայական կետ է), ապա (2.2) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{y_0}^{y} f(s)ds=\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \tag{2.2'}$$

Ապացուցում: Դիցուք $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.1) հավասարման կամայական լուծում է (նրա գրաֆիկը անցնում է (D) տիրույթին պատկանող կամայական $M_0(x_0,y_0)$ կետով): Այսինքն՝

$$f(y(x))dy(x)\equiv g(x)dx\quad ((x,y)\in(D), y(x_0)=y_0): \qquad (2.3)$$

Ինտեգրելով ստացված նույնությունը x_0 - ից x սահմաններում, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x} f(y(t))dy(t)\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt: \qquad (2.4)$$

Ներմուծենք նշանակում՝ $F(y)=\int_{y_0}^{y} f(s)\,ds\ \left(F'(y)\equiv f(y)\right)$:

Այդ դեպքում՝

$$\int_{x_0}^{x} f(y(t))dy(t)=F(y(x))-F(y(x_0))=F(y)-F(y_0)=\int_{y_0}^{y} f(s)ds$$

Այսպիսով, $y(x)$ լուծումը (2.2՝) – ը դարձնում է $\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt$ տեսքի նույնություն:

Այժմ, դիցուք հակառակն է՝ $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.2՝) – ը դարձնում է նույնություն՝ $\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds\equiv\int_{x_0}^{x} g(t)dt$:

Եթե նշանակենք՝ $H(x,y)=\int_{x_0}^{x} g(t)dt-\int_{y_0}^{y} f(s)ds$, ապա խնդիրը հանգում է նրան, թե երբ է $H(x,y)=0$ հավասարումը որոշում $y=y(x)$ անբացահայտ, անընդհատորեն դիֆերենցելի ֆունկցիա: Դրա համար բավարար են հետևյալ պայմանները ([7],[9])՝

$H(x,y), H'_x(x,y)=g(x), H'_y(x,y)=f(y)$ ֆունկցիաները լինեն անընդհատ (D) - ում և $H'_y(x,y)=f(y)\neq 0$: Այս բոլոր պայմանները առկա են: Դիցուք $y=y(x)$ այդ անբացահայտ ֆունկցիան է, այսինքն՝

$\int_{y_0}^{y(x)} f(s)ds \equiv \int_{x_0}^{x} g(t)dt$: Կիրառելով դիֆերենցման օպերատորը

այդ նույնության վրա, կստանանք՝ $f(y(x))dy(x)\equiv g(x)dx$:

Այսինքն՝ $y=y(x)$ ֆունկցիան (2.1) – ի լուծումն է[1]: ■

Դիֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է **անջատվող փոփոխականներով**, եթե այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_1(y)g_2(x)dy=g_1(x)f_2(y)dx,$$

որտեղ $f_1(y), f_2(y), g_1(x), g_2(x)\in C((D))$,

$$f_2(y)\neq 0, g_2(x)\neq 0, \left(\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\right)'\neq 0:$$

Այս հավասարումը բերվում է անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարման՝

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx:$$

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

$$y'ctgx+y=2, y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0:$$

Անցնելով դիֆերենցիալների տեսքի՝ $ctgx\cdot dy=(2-y)dx$ և կատարելով բաժանում (մինչև բաժանելը, նկատենք, որ $y\equiv 2$ մասնավոր լուծում է, բայց այն չի բավարարում սկզբնական պայմանին) ստանում ենք՝ $\frac{dy}{y-2}=-tgxdx$: Ինտեգրելով $\int\frac{dy}{y-2}=-\int\frac{sinx}{cosx}dx+ln|c|$,

[1] (■ սիմվոլը նշանակում է թեորեմի ապացուցման ավարտը)

Սահմանում 2:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{3.1}$$

տեսքի դիֆֆերենցիալ հավասարումը կոչվում է համասեռ, եթե $P(x,y)$ և $Q(x,y)$ ֆունկցիաները նույն (α) կարգի համասեռ ֆունկցիաներ են:

Երբ $x>0$, ձևափոխելով (3.1) հավասարումը և օգտվելով P,Q ֆունկցիաների համասեռությունից, կստանանք՝

$$P\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)dx+Q\left(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x}\right)dy=0\Rightarrow$$

$$x^{\alpha}P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+x^{\alpha}Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}\equiv f\left(\frac{y}{x}\right)\ \left(P,Q\in C(D),(D)\subset \mathbb{R}^2,Q(x,y)\neq 0\right):$$

Երբ $x<0$, վերը նշված ձևափոխություններում x - ը պետք է փոխարինել $-x$ ով: Այսպիսով համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումները բերվում են հետևյալ տեսքի՝

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),\ f\in C(D): \tag{3.2}$$

Ներմուծենք նոր որոնելի ֆունկցիա՝

$$z(x)=\frac{y}{x}\Rightarrow y=zx\Rightarrow y'=z+xz'\Rightarrow z+xz'=f(z)$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{f(z)-z}=\dfrac{dx}{x}$ $\left(f(z)\neq z\right)$ ($f(z)\equiv z$ դեպքը հատուկ քննարկման կարիք ունի): Ստացվեց անջատված փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարում:

Օրինակ 1: Լուծել $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+tg\frac{y}{x}$ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը: Նշանակելով $y=xz$, կստանանք՝ $\frac{dy}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z$: Տեղադրելով սկզբնական հավասարման մեջ, կստանանք՝ $x\frac{dz}{dx}+z=z+tgz$:

Պարզ է, որ $sinz=0$ $(z=\pi k,\ y=\pi kx,\ k\in Z)$ հավասարման լուծում է: Համարելով այժմ, որ $sinz\neq 0$, կստանանք՝ $\frac{cosz}{sinz}dz=\frac{dx}{x}$,

$ln|sinz|=ln|x|+ln|c|$, $sinz=cx$, $sin\frac{y}{x}=cx$:

$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ տեսքի հավասարումները ևս բերվում են համասեռ դիֆերենցիալ հավասարման կոորդինատների սկզբնակետը տեղափոխելով $a_1x+b_1y+c_1=0$ և $a_2x+b_2y+c_2=0$ ուղիղների հատման (x_0,y_0) կետը՝ $\begin{cases}a_1x_0+b_1y_0+c_1=0\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0\end{cases}$: Արդյունքում, եթե իհարկե ուղիղները զուգահեռ չեն՝ $a_1b_2\neq a_2b_1$, կատարելով

$\begin{cases}\tilde{x}=x-x_0\\ \tilde{y}=y-y_0\end{cases}$ կոորդինատական ձևափոխությունը, կստանանք՝

$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\frac{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}{a_2\tilde{x}+b_2\tilde{y}}\right)$, կամ $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{a_2+b_2\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right)\equiv\varphi\left(\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right)$, որը համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է: Եթե $a_1x+b_1y+c_1=0$ և $a_2x+b_2y+c_2=0$ ուղիղները զուգահեռ են՝ $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$, այս մեթոդը կիրառելի չէ: Բայց այդ դեպքում՝

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)\equiv F(a_1x+b_1y) \text{ (տես (2.5))}:$$

4. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Առաջին կարգի գծային դիֆերենցիալ հավասարում է կոչվում այն հավասարումը, որը գծային է որոնելի ֆունկցիայի և նրա ածանցյալի նկատմամբ, այսինքն՝ հետևյալ տեսքի հավասարում՝

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{4.1}$$

որտեղ $p(x)$, $q(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են ինչ – որ X միջակայքում:

Գծային (4.1) հավասարումը լուծվում է այսպես կոչված հաստատունի փոփոխարկման (վարիացիայի) մեթոդով: Նախ լուծում ենք համասեռ հավասարումը ($q(x)\equiv 0$)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0: \tag{4.2}$$

Համասեռ հավասարման մեջ անջատելով փոփոխականները և ինտեգրելով, կստանանք՝

$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx \Rightarrow ln|y|=-\int p(x)dx+ln|c|:$$

Այստեղից, համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0=ce^{-\int p(x)dx}, \quad c\neq 0 \tag{4.3}$$

(բաժանելով y-ի վրա մենք կորցրեցինք $y\equiv 0$ լուծումը, սակայն եթե համարենք, որ c կարող է ընդունել նաև զրո արժեքը, ապա (4.3)-ը կպարունակի նաև $y\equiv 0$ լուծումը):

Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման (4.3) տեսքը հուշում է, թե ինչ տեսքով որոնենք ոչ համասեռ (4.1) հավասարման լուծումը, այն է՝

$$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{4.4}$$

որտեղ $c(x)$ - ը նոր որոնելի ֆունկցիա է: Ածանցելով, (4.4) – ը և տեղադրելով (4.1) – ի մեջ, կստանանք՝

$$y'(x) = c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx},$$

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$$

$$c'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1,$$

որտեղ c_1 - ը հաստատուն է: Այսպիսով, (4.4) – ից ստանում ենք (4.1) հավասարման ընդհանուր լուծումը՝

$$y = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx, \tag{4.5}$$

որը բաղկացած է համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման և ոչ համասեռ հավասարման $e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ մասնավոր լուծման գումարից: Քանի որ ոչ համասեռ հավասարման երկու լուծումները իրարից տարբերվում են համասեռ հավասարման լուծումով, ուստի ոչ համասեռի ընդհանուր լուծման (4.5) բանաձևում կարելի է որպես ոչ համասեռի մասնավոր լուծում ընտրել որը պատահի: Այս հանգամանքը հաշվի առնելով, եթե հաջողվում է գտնել ոչ համասեռ հավասարման որևէ լուծում, ապա այլևս հաստատունի փոփոխարկման մեթոդին կարելի է չդիմել:

Նկատենք, որ կոնկրետ դեպքերում նպատակահարմար չէ օգտվել (4.5) բանաձևից: Ավելի հարմար է յուրաքանչյուր դեպքում կատարել վերը նշված քայլերը:

Օրինակ 1: Լուծել հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝ $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$: Նախ լուծենք $xy' + (x+1)y = 0$ համասեռ հավասարումը՝

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x+1}{x}dx \Rightarrow ln|y| = -x - ln|x| + ln|c| \Rightarrow y_0 = c\frac{e^{-x}}{x}:$$

Ոչ համասեռի լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$y = c(x)e^{-x}x^{-1} \Rightarrow y' = c'(x)\frac{e^{-x}}{x} - c(x)\frac{e^{-x}}{x} - c(x)\frac{e^{-x}}{x^2}:$$

Տեղադրելով ոչ համասեռ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$c'(x)e^{-x}-c(x)e^{-x}-c(x)\frac{e^{-x}}{x}+c(x)e^{-x}+c(x)\frac{e^{-x}}{x}=$$

$$=3x^2e^{-x}\Rightarrow c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3+c_1\Rightarrow y=x^2e^{-x}+c_1\frac{e^{-x}}{x}:$$

Օրինակ 2: Լուծել $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^2$ հավասարումը: Ինտեգրենք համապատասխան համասեռ հավասարումը.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},\ \ln|y|=\ln|x|+\ln c,\ y_0=cx:$$

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք $y_1=ax^3$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$3ax^2-ax^2=x^2\Rightarrow a=\frac{1}{2}:$$

Այսպիսով՝ $y_1=\frac{1}{2}x^3$: Ուրեմն, ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $y=cx+\frac{x^3}{2}$:

Որոշ դիֆերենցիալ հավասարումներ փոփոխականի փոխարինման միջոցով կարելի է բերել գծային հավասարման: Օրինակ՝ Բեռնուլիի հավասարումները, որոնք ունեն հետևյալ տեսքը՝

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}\ (\alpha\neq 0,\alpha\neq 1):$$

Բաժանելով y^{α} - ի վրա (մինչև բաժանելը պետք է քննարկել $y\equiv 0$ լուծում լինելու հարցը), կստանանք՝

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x), \tag{4.6}$$

կամ՝ $\frac{1}{1-\alpha}\left(y^{1-\alpha}\right)'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x):$

Նշանակելով $y^{1-\alpha}=z(x)$ ստանում ենք գծային դիֆերենցիալ հավասարում:

Օրինակ 3: Լուծել $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}+\frac{x^2}{2y}$ Բեռնուլիի հավասարումը: Այն բերելով հետևյալ տեսքի՝ $2y\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x}+x^2$ և նշանակելով $y^2\equiv z(x)$, կստանանք՝ $\frac{dz}{dx}=\frac{z}{x}+x^2$ գծային հավասարումը, որի ընդհանուր լուծումն է՝ (տես օրինակ 2.) $z=c_1x+\frac{x^3}{2}$: Որտեղ՝ $y=\pm\sqrt{c_1x+\frac{x^3}{2}}$:

Հանդիպում են նաև որոշ դեպքերում գծային հավասարման բերվող, Ռիկատիի հավասարումներ: Դրանք են հետևյալ տեսքի հավասարումները՝

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)y^2=f(x): \tag{4.7}$$

Հայտնի է, որ ընդհանուր դեպքում Ռիկատիի հավասարումը հնարավոր չէ ճշգրտորեն լուծել, բայց եթե հաջողվել է գտնել այդ հավասարման որևէ $y_1(x)$ մասնավոր լուծում, ապա փոփոխականի $y(x)=y_1(x)+z(x)$ փոխարինման միջոցով կարելի (4.7) – ը բերել Բեռնուլիի հավասարման: Իրոք, տեղադրելով $y(x)=y_1(x)+z(x)$ (4.7) – ի մեջ, կստանանք՝ $y_1'+z'+p(x)(y_1+z)+q(x)(y_1+z)^2=f(x)$: Քանի որ $y_1'+p(x)y_1+q(x)y_1^2\equiv f(x)$, կստանանք Բեռնուլիի հավասարումը. $z'+[p(x)+2q(x)y_1]z+q(x)z^2=0$:

Օրինակ 4: Լուծել $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$ հավասարումը: Դժվար չէ տեսնել, որ հավասարումն ունի $y_1=\frac{a}{x}$ տեսքի մասնավոր լուծում: Տեղադրելով հավասարման մեջ, ստանում ենք՝

$$-\frac{a}{x^2}=\frac{a^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\Rightarrow a^2+a-2=0\Rightarrow a_1=-2, a_2=1:$$

Այսպիսով,

օրինակ $y_1 = \frac{1}{x}$: Նշանակելով $y = z + \frac{1}{x}$, կստանանք՝ $y' = z' - \frac{1}{x^2}$, $z' - \frac{1}{x^2} = z^2 + 2\frac{z}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}$, կամ $z' = z^2 + 2\frac{z}{x}$, որը Բեռնուլիի հավասարում է:

5. ԼՐԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Սահմանում: Դիցուք $P, Q \in C(D)$, որտեղ (D) - ն R^2 տարածության տիրույթ է (բաց կապակցված բազմություն):

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{5.1}$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է լրիվ դիֆերենցիալներով, եթե (D) - ում գոյություն ունի դիֆերենցելի $U(x,y)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ՝

$$dU(x,y) \equiv P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ ((x,y) \in (D)): \tag{5.2}$$

Այսպիսով, լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$dU(x,y) = 0 : \tag{5.2`}$$

Քանի որ $dU(x,y) \equiv \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy$ - dx, dy աճերը անկախ են, ապա (5.2`) պայմանը համարժեք է (D) - ում որոշված $U(x,y)$ ֆունկցիայի գոյությանը, որը բավարարում է հավասարումների հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{5.3}$$

Քանի որ $P,Q \in C(D)$, (5.3) – ի $U(x,y)$ լուծումը կլինի դիֆերենցելի:

Թեորեմ 5.1: Լրիվ դիֆերենցիալներով (5.1) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$U(x,y)=c, \tag{5.4}$$

որտեղ $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} \neq 0$, c - ն կամայական հաստատուն է, :

Ապացույց: Դիցուք $y=y(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է ինչ-որ X միջակայքում (5.1), ուրեմն նաև (5.2՛) հավասարման լուծում՝

$$dU(x,y(x)) \equiv 0 \ (x \in X):$$

Այստեղից ստանում ենք՝ $U(x,y(x)) \equiv c \ (x \in X)$:

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $\tilde{y}=y(x)$ ֆունկցիան որոշվել է (5.4) - ից՝ $U(x,y(x)) \equiv c \ (x \in X)$ (նկատենք, որ բավարարված են անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության բոլոր պայմանները ([7],[9]): Ուրեմն՝ $dU(x,y(x)) \equiv 0 \ (x \in X)$, որն էլ նշանակում է, որ $y=y(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (5.1) հավասարմանը: ■

Սահմանում 5.1: Կասենք, որ (D) տիրույթը միակապ է, եթե ինչպիսի անընդհատ փակ կոր էլ ընտրենք (D) - ում, նրանով սահմանափակված տիրույթը պարունակվում է (D) - ում:

Մաթ. անալիզից հայտնի է, որ եթե (D) միակապ տիրույթում $f(x,y)$, $f'_y(x,y)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա՝

$$\frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)dx=\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx, \text{ որտեղ } (x,y)\in(D) \ ([7],[9]):$$

Թեորեմ 5.2: Դիցուք $P,\dfrac{\partial P}{\partial y},Q,\dfrac{\partial Q}{\partial x}\in C(D)$, (D) - ն միակապ տիրույթ է: Որպեսզի (5.1) – ը լինի լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը՝

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\ \left((x,y)\in(D)\right): \tag{5.5}$$

Ապացուցում: Անհրաժեշտություն: Տրված է որ (5.1) - ը լրիվ դիֆերենցիալներով հավասարում է: Այսինքն՝ գոյություն ունի (5.3) - ի $U(x,y)$ լուծում $\left((x,y)\in(D)\right)$՝

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}\equiv P(x,y): & (5{,}6)\\[2ex] \dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}\equiv Q(x,y): & (5{,}7)\end{cases}$$

(5.6) – ի երկու երկու կողմը ածանցենք ըստ y - ի, (5.7) – ի երկու կողմը՝ ըստ x - ի: Կստանանք՝

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y\partial x}\equiv\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}: & (5{,}8)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}\equiv\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}: & (5{,}9)\end{cases}$$

Քանի որ (5.8) –ի և (5.9) –ի աջ մասերը անընդհատ են, ապա անընդհատ են նաև ձախ մասերը (խառը ածանցյալները), ուրեմն նրանք նույնաբար հավասար են ([7],[9]), այսինքն ճիշտ է (5.5) - ը: ■

Բավարարություն: Դիցուք $U(x,y)$ - ը բավարարում է (5.3) –ին, այսինքն ճիշտ են (5.6) - ն և (5.7) - ը: Վերցնելով կամայական $M_0(x_0,y_0)\in(D)$ կետ, կունենանք նաև հետևյալ պայմանները՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(M_0)=P(M_0),\ \frac{\partial U}{\partial y}(M_0)=Q(M_0): \tag{5.10}$$

Տեսնենք, թե $U(x,y)$ լուծումը ինչպես է արտահայտվում P, Q ֆունկցիաներով: Որից հետո, ածանցելով հեշտությամբ կարող ենք ցույց տալ հակառակը՝ որ այն (5.3) - ի լուծումն է: (5.6) – ում հաստատագրենք y - ը և ինտեգրենք ըստ x - ի, կստանանք՝

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y): \qquad (5.11)$$

Այստեղ հաշվի առանք, որ ինտեգրման հաստատունը կախված չէ x - ից, բայց, ընդհանրապես ասած, կախված է y - ից: Ածանցենք (5.11) – ի երկու կողմը ըստ y -ի և հաշվի առնենք (5.7) –ը, կստանանք՝

$$Q(x,y)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx+\varphi'(y): \qquad (5.12)$$

Այստեղից՝

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\equiv\Psi(x,y): \qquad (5.13)$$

Ցույց տանք, որ իրականում $\Psi(x,y)$ ֆունկցիան կախված չէ x - ից, այսինքն՝ $\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}\equiv 0$: Թեորեմի պայմանների առկայությամբ, հաշվի առնելով նաև (5.5) նույնությունը, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial\Psi(x,y)}{\partial x}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx\equiv$$

$$\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0:$$

Ուրեմն՝

$$\varphi(y)\equiv\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy:$$

Այսպիսով՝

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left[Q(x,y)-\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx\right]dy: \qquad (5.14)$$

Մնում է ստուգել, որ (5.14) – ով որոշված $U(x,y)$ - ը բավարարում է (5.3) համակարգին: Իրոք՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\equiv P(x,y)+\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dy\equiv P(x,y)+c,$$

որտեղ c - ն հաստատուն է: Հաշվի առնելով (5.10) – ը, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) \equiv P(x,y):$$

Նույն կերպ ապացուցվում է, որ՝ $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) \equiv Q(x,y)$: ■

Դիտողություն: Հաշվի առնելով մաթ. անալիզից հայտնի կորագիծ ինտեգրալի ինտեգրման ճանապարհից անկախ լինելու տեսությունը ([7],[9]), $U(x,y)$ ֆունկցիան կարելի է գտնել հետևյալ դատողությամբ: Վերը նշված թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ

$\int\limits_{(A,M)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ կորագիծ ինտեգրալը կախված չէ ինտեգրման ճանապարհից, այլ կախված է միայն $A, M \in (D)$ կետերից: Ուստի, եթե հաստատագրենք $A(x_0, y_0)$ կետը և վերցնենք փոփոխական $M(x,y)$ կետ, ապա որոնելի $U(x,y)$ ֆունկցիան կլինի

$$U(x,y) = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy:$$

Եթե $A(x_0,y_0), B(x,y_0), M(x,y)$ բեկյալը պարունակվում է (D)-ում, ապա՝

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta:$$

6. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ $y' = f(x,y)$ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Դիցուք $(D) = [x_0 - a; x_0 + a] \times [y_0 - b; y_0 + b]$ ուղղանկյունն է: Ենթադրենք, որ՝ $f \in C(D)$, որտեղից հետևում է՝ $\exists \max\limits_{(D)} |f(x,y)| = M$:

Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝

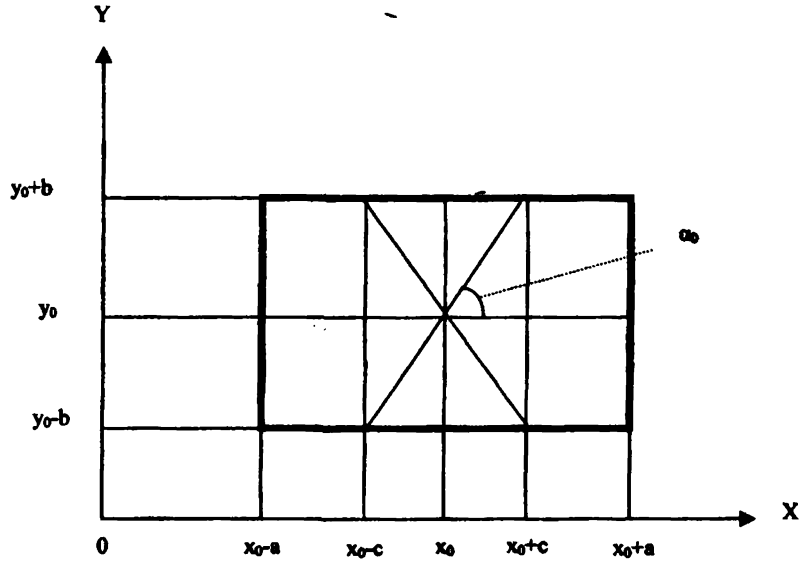
$$\begin{cases} y' = f(x,y), & (6.1)\\ y(x_0) = y_0: & (6.2)\end{cases}$$

Հնարավոր է երկու դեպք՝

1. $M = 0 \Rightarrow f(x,y) \equiv 0$: Այս դեպքում (6.1), (6.2) խնդրի լուծումն է՝ $y(x) \equiv y_0$:

2. $M > 0$: Նշանակենք $\alpha_0 = arctgM\,(tg\alpha_0 = M)$:

Ըստ (6.1) հավասարման $y(x)$ լուծման երկրաչափական մեկնաբանության, որոնելի լուծման գրաֆիկի (ինտեգրալային կորի) յուրաքանչյուր կետում տարված շոշափողի (ուղղության) կազմած α անկյունը $0x$ առանցքի հետ այնպիսին է, որ $|\alpha| \le |\alpha_0|$: Այդ պատճառով



Նկ.2

ինտեգրալային կորը չի հատի (D)- ի հորիզոնական եզրերը, եթե $|x - x_0| \le c$ (տես նկ.2): Ընդ որում, ըստ նկ.2 – ի՝

$$M = tg\alpha_0 = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{M}:$$

Կասենք, որ f ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին ըստ y – ի, եթե՝

$\exists L > 0,\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in (D)$ ճիշտ է հետևյալ պայմանը՝

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|: \tag{6.3}$$

Նկատենք, որ Լիպշիցի պայմանի տեղի ունենալու համար բավարար է, (բայց ոչ անհրաժեշտ) որ $f(x, y)$ -ը ունենա սահմանափակ ածանցյալ ըստ y – ի՝ $|f'_y(x, y)| \le L$ $((x, y) \in (D))$: Իրոք, ըստ Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի՝

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f'_y(x, \eta)||y_1 - y_2| \le$$

$$\le L|y_1 - y_2| \ (\eta \in (y_1; y_2)) \Rightarrow (6.3):$$

Դիցուք h դրական թիվը այնպիսին է, որ՝

$$0 < h < min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}, \text{ իսկ՝ } X = [x_0 - h; x_0 + h]: \tag{6.4}$$

Թեորեմ 6.1 (գոյության և միակության): Եթե $f \in C(D)$ և բավարարում է Լիպշիցի (6.3) պայմանին, ապա $C(X)$ դասում (6.1), (6.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Նախ բերենք (6.1), (6.2) խնդիրը համարժեք ինտեգրալ հավասարման:

Դիցուք $y(x)$ - ը $(x \in X)$ հանդիսանում է (6.1), (6.2) խնդրի լուծում: Ունենք՝

$$y'(t) \equiv f(t, y(t)) \ (t \in [x_0; x], x \in X) \tag{6.5}$$

((6.5) – ից հետևում է, որ $y \in C^1(X)$): Ինտեգրելով (6.5) – ը և հաշվի առնելով (6.2) - ը, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,\ y(x) - y(x_0) \equiv \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \Rightarrow$$

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt: \tag{6.6}$$

Այսինքն, $y(x)$ - ը հանդիսանում է

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{6.7}$$

ինտեգրալ հավասարման լուծում $C(X)$ դասում:

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $y(x)$ - ը $(y \in C(X))$ բավարարում է (6.7) ինտեգրալ հավասարմանը, այսինքն ճիշտ է (6.6) նույնությունը: (6.6) – ից հետևում է (6.2) - ը: Ածանցելով (6.6) – ը և հաշվի առնելով այն, որ $f(t, y(t))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է, կստանանք՝

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)) \quad (x \in X): \tag{6.8}$$

Այսպիսով, ստացանք, որ $y(x)$ - ը բավարարում է (6.1) դիֆերենցիալ հավասարմանը և (6.2) սկզբնական պայմանին: Ընդ որում, (6.8) – ից հետևում է, որ $y(x)$ - ը ոչ միայն անընդհատ է, այլ ունի նաև անընդհատ ածանցյալ$\left(y \in C^1(X)\right)$: Այսպիսով, մնում է ապացուցել, որ (6.7) ինտեգրալ հավասարումը $C(X)$ դասում ունի լուծում և այն միակն է: Կառուցենք ինդուկտիվ եղանակով հետևյալ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը՝

$$y_n(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt \ (y_0(x) \equiv y_0),\ n = 1, 2, \ldots: \tag{6.9}$$

Սահմանվորապես՝

$y_1(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \Rightarrow |y_1(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} Mdt\right| \le M|h| < b$: Պարզ է (այստեղ պետք է կիրառել ինդուկցիայի մեթոդը), որ ՝

$$|y_n(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt\right| = \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n-1}(t))| dt\right| \le$$

$$\leq M\left|\int_{x_0}^{x} dt\right| \leq Mh < b \quad (n = 1, 2, \ldots):$$

Այսպիսով կառուցված հաջորդականության անդամների գրաֆիկները դուրս չեն գալիս (D) – ից: Ապացուցենք, որ այս ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է X - ում ինչ- որ $y(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ հանդիսանում է (6.7) – ի լուծում: Դրա համար դիտարկենք հետևյալ շարքը՝

$$y_0(x) + \left[y_1(x) - y_0(x)\right] + \ldots + \left[y_n(x) - y_{n-1}(x)\right] + \ldots, \qquad (6.10)$$

որի մասնակի գումարների հաջորդականությունը համընկնում է $y_n(x)$ - ի հետ:

Ցույց տանք, որ (6.10) շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X - ում: Դրա համար գնահատենք (6.10) շարքի անդամները: (տես (6.9) –ը)

$$\left|y_1(x) - y_0(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(t, y_0(t))\right| dt\right| \leq Mh:$$

$$\left|y_2(x) - y_1(x)\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(t, y_1(t)) - f(t, y_0)\right| dt\right| \leq$$

$$\leq L\left|\int_{x_0}^{x} \left|y_1(t) - y_0\right| dt\right| \leq MLh^2:$$

Ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|y_n(x) - y_{n-1}(x)\right| \leq \frac{M}{L}(Lh)^n \quad (n = 1, 2, \ldots): \qquad (6.11)$$

Քանի որ՝ $0 < Lh < 1$ (տես (6.4)), ապա $\frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}(Lh)^n$ շարքը զուգամետ է, հետևաբար, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի (6.10) շարքը հավասարաչափ և բացարձակ զուգամետ է : Եթե (6.10) շարքի գումարը $y(x)$ - ն է, ապա՝ $y_n(x)$ - ը հավասարաչափ զուգամիտում է $y(x)$ - ին X միջակայքում, այսինքն՝

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n\ge N,\forall x\in X:\left|y_n(x)-y(x)\right|<\frac{\varepsilon}{Lh}: \qquad (6.12)$$

Քանի որ $y_n\in C(X)$ $(n=1,2,\ldots)$, ապա, ըստ մաթ.անալիզի հայտնի թեորեմի՝ $y\in C(X)$ ([7],[9]): Անցնենք սահմանի (6.9) – ում, նախապես ցույց տալով, որ՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt-\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt\underset{n\to\infty}{\to}0:$$

Օգտվելով Լիպշիցի (6.3) պայմանից և հավասարաչափ զուգամիտության (6.12) պայմանից, կստանանք՝

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left[f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y(t))\right]dt\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y_{n-1}(t))-f(t,y(t))\right|dt\right|\le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_{n-1}(t)-y(t)\right|dt\right|\le\frac{\varepsilon}{Lh}L\left|\int_{x_0}^{x}dt\right|\le\frac{\varepsilon}{h}h=\varepsilon\quad(n\ge N+1):$$

Այսպիսով, անցնելով (6.9) – ում սահմանի, երբ n - ը ձգտում է անվերջի, ստանում ենք, որ $y(x)$ - ը հանդիսանում է (6.7) ինտեգրալ հավասարման լուծում:

Այժմ ապացուցենք լուծման միակությունը $C(X)$ դասում: Դիցուք (6.7) - ը ունի երկու $\varphi(x),\psi(x)$ լուծում $C(X)$ դասում: Այսինքն՝

$$\varphi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt\quad(x\in X) \qquad (6.13)$$

և

$$\psi(x)\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\psi(t))dt\quad(x\in X): \qquad (6.14)$$

Նշանակելով $\phi(t) \equiv \varphi(t) - \psi(t)$, օգտվելով Լիպշիցի պայմանից և հանելով (6.13) –ից (6.14) – ը, կստանանք՝

$$|\phi(x)| \le \left| \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))| dt \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} |\phi(t)| dt \right| \le$$

$$\le L\|\phi\| h \ (x \in X), \tag{6.15}$$

որտեղ՝ $\|\phi\| = \max\limits_{X} |\phi(x)|$ (նորմ ϕ): (6.15) – ից հետևում է՝ $\|\phi\| \le Lh\|\phi\|$ ։ Եթե ենթադրենք, $\|\phi\| > 0$, ապա կստանանք՝ $1 \le Lh$, որը հակասում է h - ի ընտրությանը (տես (6.4)): Ուրեմն՝

$$\|\phi\| = \max_{X} |\phi(x)| = 0 \Rightarrow \phi(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv \psi(x) \ \ (x \in X): \blacksquare$$

Դիտողություն 1: Նկատենք, որ թեորեմի ապացույցը տալիս է նաև մեթոդ նշված Կոշիի խնդիրը մոտավոր լուծելու համար: Դրա համար պետք է հաշվել (6.9) բանաձևով որոշվող մոտարկումները, որը բերում է որոշակի ինտեգրալների հաշվմանը: Բայց ինտեգրալները միշտ չէ, որ ճշգրտորեն հաշվվում են: Այս թերությունից զերծ է գոյության և միակության թեորեմի մեկ այլ ապացույց (համեմատաբար բարդ), հենված էյլերի բեկյալների հաջորդականության մեթոդի վրա ([1]):

7. ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՆԿԱՏՄԱՄԲ ՉԼՈՒԾՎԱԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Ածանցյալի նկատմամբ չլուծված դիֆերենցիալ հավասարումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F(x,y,y') = 0: \tag{7.1}$$

Դիցուք, որոնելի ֆունկցիան բավարարում է

$$y(x_0) = y_0 \tag{7.2}$$

պայմանին: Դիտարկենք $F(x_0, y_0, z) = 0$ հանրահաշվական հավասարումը և դիցուք այն ունի z_k լուծումներ՝

$(F(x_0, y_0, z_k)=0,\ k=0,1,...)$: Ընտրենք այդ լուծումներից, օրինակ z_0 - ն: Այսինքն՝ $F(x_0, y_0, z_0)=0$: Ուրեմն, բնական է պահանջել, որ բավարարվի նաև հետևյալ պայմանը՝

$$y'(x_0)=z_0: \tag{7.3}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝ $M_0(x_0, y_0, z_0), N_0(x_0, y_0)$:

Գոյության և միակության թեորեմը ածանցյալի նկատմամբ չլուծված (7.1) հավասարման համար հենվում է համապատասխան թեորեմի վրա ածանցյալի նկատմամբ լուծված $y'=f(x,y)$ հավասարման համար և մաթ. անալիզից հայտնի անբացահայտ ֆունկցիաների տեսության վրա ([7],[9]): Ձևակերպենք այդ տեսության այն թեորեմը, որից պետք է օգտվենք:

Թեորեմ 7.1 (անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության և միակության մասին):

Դիցուք տրված է

$$F(x,y,y')=0 \tag{7.4}$$

հավասարումը, որտեղ $F, F'_x, F'_y, F'_{y'}$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, $F(M_0)=0, F'_{y'}(M_0)\neq 0$: Այդ դեպքում, գոյություն ունի $N_0(x_0, y_0)$ - կետի $U_\delta(N_0)$ շրջակայք, այնպիսին, որ այդտեղ (7.4) հավասարումը որոշում է միակ անբացայայտ ֆունկցիա

$$y'=f(x,y)\ (F(x,y,f(x,y))\equiv 0,(x,y)\in U_\delta(N_0)),$$

այնպիսին, որ՝ $f, f'_y\in C(U_\delta(N_0)), f(N_0)=z_0$: Ածանցելով $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$ նույնությունը ըստ y - ի, ստանում ենք՝

$$F'_y(x,y,f(x,y))+F'_{y'}(x,y,f(x,y))\cdot f'_y(x,y)\equiv 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_y(x,y)\equiv -\frac{F'_y(x,y,f(x,y))}{F'_{y'}(x,y,f(x,y))}\Rightarrow f'\in C(U_\delta(N_0)),$$

(եթե հարկավոր է կարելի է δ - ն փոքրացնել):

Թեորեմ 7.2 (գոյության և միակության թեորեմ ածանցյալի նկատմամբ չլուծված դիֆերենցիալ հավասարման համար): Դիցուք $F, F'_x, F'_y, F'_{y'}$ ֆունկցիաները որոշված են և անընդհատ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի ինչ-որ շրջակայքում, $F(M_0)=0, F'_{y'}(M_0)\neq 0$: Այդ դեպքում (7.1) - (7.3) խնդիրը x_0 կետի ինչ - որ $U_\gamma(x_0)$ շրջակայքում ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Քանի որ տեղի ունեն նախորդ թեորեմի բոլոր պայմանները, ապա գոյություն ունի $N_0(x_0, y_0)$ կետի $U_\delta(N_0)$ շրջակայք, այնպիսին, որ այդտեղ (7.1) հավասարումը որոշում է միակ անբացահայտ ֆունկցիա $y'=f(x,y)$, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝ $f, f'_y \in C(U_\delta(N_0)), f(N_0)=z_0$: Այժմ օգտվենք գոյության և միակության թեորեմից $y'=f(x,y)$ հավասարման համար: Այն բանից, որ $f'_y \in C(U_\delta(N_0))$ հետևում է $f'_y \in C(\overline{U}_{\delta/2}(N_0))$ պայմանը, որը նշանակում է, որ f'_y - ը սահմանափակ է $U_{\delta/2}(N_0)$ - ում, հետևաբար f - ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Այսպիսով, ըստ գոյության և միակության թեորեմի, (7.1), (7.2) խնդիրը ունի լուծում $y=y(x)$ և այն միակն է x_0 – ի ինչ-որ $U_\gamma(x_0)$ շրջակայքում: Այսինքն՝

$$y'(x)\equiv f(x,y(x)), x\in U_\gamma(x_0), (x,y(x))\in U_{\delta/2}(N_0),$$

$$y(x_0)=y_0:$$

Քանի որ, $F(x,y,f(x,y))\equiv 0, (x,y)\in U_{\delta/2}(N_0)$, ապա մասնավորապես՝ $F(x,y(x),f(x,y(x)))\equiv 0 \ (x\in U_\gamma(x_0))$, որտեղ $y=y(x)$ - ը բավարարում է (7.1) հավասարմանը:

Քանի որ՝ $y'(x)\equiv f(x,y(x)) \ (x\in U_\gamma(x_0)), y(x_0)=y_0$ և $f(x_0,y_0)=z_0$, ապա ստանում ենք՝

$$y'(x_0)=f(x_0,y(x_0))=f(x_0,y_0)=z_0:$$

Այսպիսով, բավարարվում է նաև (7.3) պայմանը: Խնդրի լուծման միակությունը հետևում է ապացուցման պրոցեսից: ■

Սահմանում 7.1: Կասենք, որ (7.1) հավասարման $y=\bar{y}(x)$ լուծումը եզակի լուծում է, եթե նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր կետով անցնում է նույն հավասարման մեկ այլ $y=y(x,c)$ լուծում, այնպիսին, որ այդ կետում երկու լուծումների շոշափողները համընկնում են, այսինքն՝

$$\forall x_0:\begin{cases}\bar{y}(x)(x_0)=y(x_0,c)\\ \bar{y}'(x)(x_0)=y'(x_0,c)\end{cases} \tag{7.5}$$

Պարզ է, որ եզակի լուծում լինելու համար անհրաժեշտ է, որ խախտվեն նախորդ թեորեմի պայմանները: Այսինքն եզակի լուծումը իմաստ ունի որոնել հետևյալ համարգի լուծումների դասում՝ (այդ լուծումների գրաֆիկները անվանում են դիսկրիմինանտային կորեր)

$$\begin{cases}F(x,y,y')=0\\ F'_{y'}(x,y,y')=0\end{cases}: \tag{7.6}$$

Դիսկրիմինանտային կորը գտնելուց հետո պետք է նախ համոզվել որ այն ինտեգրալային կոր է, այնուհետև ստուգել, որ այն բավարարում է (7.5) համակարգին:

Այժմ քննարկենք ածանցյալի նկատմամբ չլուծված (7.1) հավասարումը ինտեգրելու մեթոդները: Դիտարկենք հետևյալ դեպքերը՝

1. (7.1) հավասարումը լուծվում է y'– ի նկատմամբ (թեկուզ ոչ միարժեք):

Օրինակ 7.1: Լուծել $(y')^3+y^2-yy'^2-yy'=0$ հավասարումը:

Վերլուծելով արտադրիչների, կստանանք՝

$$y'^2(y'-y)-y(y'-y)=0\Rightarrow(y'-y)(y'^2-y)=0:$$ Որտեղ՝

$$\left[\begin{array}{l}y'=y\\ y'=\pm\sqrt{y}\end{array}\right.: \tag{7.7}$$

Պարզ է, որ $y\equiv0$ լուծում է: Համարելով այժմ, որ $y\neq0$ և անջատելով փոփոխականները, կստանանք՝

$$\left[\begin{aligned}&\frac{dy}{y}=dx\\&\frac{dy}{\sqrt{y}}=\pm dx\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&y=ce^{x}\\&y=\left(\frac{x}{2}+c\right)^{2}\end{aligned}\right.:$$

Այժմ որոնենք եզակի լուծումները, նախապես որոշելով դիսկրիմի-նանտային կորերը: Դրա համար հարկավոր է լուծել հետևյալ համա-կարգը՝

$$\begin{cases}(y')^{3}+y^{2}-yy'^{2}-yy'=0, & (7{,}8)\\ 3(y')^{2}-2yy'-y=0: & (7{,}9)\end{cases}$$

Քանի որ (7.8) – ը համարժեք է (7.7) – ին, ապա (7.9) – ից ստանում ենք՝

$y=0$ կամ $y=1$: Բայց պարզ է,որ $y=1$ լուծում չէ: Այսպիսով, եզակի լուծում լինելու տեսանկյունից կասկածելի է միայն $\bar{y}(x)\equiv 0$: Մնում է ստուգել, որ $\bar{y}(x)\equiv 0$ լուծումը եզակի է: Այսինքն՝ստուգել հետևյալ պայմանների իրականացումը՝

$$\forall x_0:\begin{cases}\left(\frac{x_0}{2}+c\right)^{2}=0\\ 2\left(\frac{x_0}{2}+c\right)=0\end{cases}\Rightarrow c=-\frac{x_0}{2}:$$

Այսպիսով՝ $\bar{y}(x)\equiv 0$ եզակի լուծում է:

2. (7.1) հավասարումը լուծվում է y – ի նկատմամբ՝

$$y=f(x,y') \tag{7.10}$$

որտեղ f - ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(x)$, ապա (7.10) – ը կնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$y=f(x,p), \tag{7.11}$$

Ածանցելով (7.11) – ը և հաշվի առնելով նշանակումը, կստանանք՝ $p = f_x'(x,p) + f_y'(x,p)p'$: Ստացվեց ածանցյալի նկատմամբ լուծված հավասարում: Եթե այն հաջողվի լուծել և ստանալ $p = p(x,c)$ ընդհանուր լուծումը, ապա (7.11) – ից կստանանք (7.10) հավասարման ընդհանուր լուծումը՝ $y = f(x, p(x,c))$: Իսկ, եթե հաջողվի գտնել միայն $x = x(p,c)$ լուծումը, ապա (7.10) հավասարման լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝ $\begin{cases} x = x(p,c) \\ y = f(x(p,c),p) \end{cases}$:

Օրինակ 7.2: Լուծել $y = ln(1+y'^2)$ հավասարումը: Ներմուծելով $y'(x) \equiv p(x)$ նշանակումը, կստանանք՝ $y = ln(1+p^2)$: Ածանցելով ստացված հավասարումը կունենանք՝ $p = \dfrac{2pp'}{1+p^2}$: Այստեղից ստանում ենք, որ կամ $p = 0 \Rightarrow y \equiv 0$, կամ

$$\frac{dp}{p^2+1} = \frac{dx}{2} \Rightarrow arctgp = \frac{x}{2} + c \Rightarrow p = tg\left(\frac{x}{2}+c\right):$$

Ի վերջո, ստանում ենք՝ $y = \ln\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}+c\right)\right)$: Այժմ որոնենք եզակի լուծումները, նախապես որոշելով դիսկրիմինանտային կորերը, որոնք որոշվում են հետևյալ համակարգից՝

$$\begin{cases} y = ln(1+y'^2) \\ \dfrac{2y'}{1+y'^2} = 0 \Rightarrow y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y \equiv 0:$$

$\overline{y} \equiv 0$ լուծումը եզակի է, եթե այն բավարարում է հետևյալ համակարգին՝

$$\begin{cases} ln\left(1+tg^2\left(\frac{x_0}{2}+c\right)\right)=0 \\ 2tg\left(\frac{x_0}{2}+c\right)\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow c=-\frac{x_0}{2}:$$

Այսպիսով, $\bar{y}(x)\equiv 0$ եզակի լուծում է:

1. (7.1) հավասարումը լուծվում է x – ի նկատմամբ՝

$$x=f(y,y'), \tag{7.12}$$

որտեղ f - ը դիֆերենցելի ֆունկցիա է: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(y)$ $(p(y)\neq 0)$, ապա (7.12) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$x=f(y,p): \tag{7.13}$$

Հաշվի առնելով, որ $x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{p}$, ածանցելով (7.13) – ը ըստ y - ի, կստանանք՝ $\frac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)p'_y$: Եթե ստացված հավասարումը հաջողվում է լուծել p - ի նկատմամբ$(p=p(y,c))$, ապա տրված հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $x=f(y,p(y,c))$: Իսկ եթե հաջողվում է ստացված հավասարումը լուծել y - ի նկատմամբ $(y=y(p,c))$, ապա լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝ $x=f(y(p,c),p)$, $y=y(p,c)$:

Օրինակ 7.3: Լուծել $2xy'-y=y'ln(yy')\Rightarrow x=\frac{y}{2y'}+\frac{1}{2}ln(yy')$ հավասարումը: Եթե նշանակենք՝ $y'(x)\equiv p(y)$, ապա կստանանք՝ $x=\frac{y}{2p}+\frac{1}{2}ln(yp)$ $(p\neq 0)$: Ածանցելով ստացված հավասարումը ըստ y -ի, կստանանք՝ $\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}-\frac{yp'}{2p^2}+\frac{p+yp'}{2yp}$: Կամ՝ $\frac{y-p}{2py}=\frac{p-y}{2p^2}p'$:

Հնարավոր է երկու դեպք՝ կամ $p = y \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(p^2\right) = \frac{1}{2} + \ln|p|$, կամ՝ $p \neq y$, այդ դեպքում, ստանում ենք՝

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = -\ln|y| + \ln|c| \Rightarrow p = \frac{c}{y} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2c} + \frac{1}{2}\ln c:$$

(7.11) տեսքի հավասարումներից առանձնանում են x - ի նկատմամբ գծային, այսպես կոչված, Լագրանժի հավասարումները՝

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$, որտեղ φ – ն, ψ - ն դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

Ներմուծելով $y' = p$ նշանակումը և ածանցելով $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ հավասարումը ըստ x - ի, կստանանք՝

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p':$$

Փոխելով անկախ փոփոխականի և որոնելի ֆունկցիաների դերերը, կստանանք՝ $(p - \varphi(p))x' = x\varphi'(p) + \psi'(p)$:

Լուծելով այս գծային հավասարումը, կստանանք լուծումը պարամետրական տեսքով՝ $x = x(p,c), y = x(p,c)\varphi(p) + \psi(p)$: Կարևոր է այս հավասարման մասնավոր դեպքը, այսպես կոչված, Կլերոյի հավասարումը՝ $y = xy' + \psi(y')$: Կրկնելով նախորդ դատողություններ, կստանանք՝

$$p = p + xp' + \psi'(p)p' \Rightarrow p'(x + \psi'(p)) = 0 \Rightarrow p' = 0 (p = c),$$

կամ՝ $x = -\psi'(p)$: $p = c$ դեպքին համապատասխանում է $y = cx + \psi(c)$ ուղիղ գծերի ընտանիքը, իսկ $x = -\psi'(p)$ դեպքում ունենք՝ $y = px + \psi(p) = -p\psi'(p) + \psi(p)$: Ստացվածը կլինի լուծում, եթե ապացուցենք, որ $y'(x) = p$: Իրոք՝

$$y' = p + xp' + \psi'(p)p' = p - \psi'(p)p' + \psi'(p)p' = p:$$

Օրինակ 7.4 : Լուծել $y = 2xy' - 4y'^3$ հավասարումը: Ներմուծելով նշանակում՝ $y'(x) \equiv p(x)$, ստանում ենք՝ $y = 2xp - 4p^3$: Ածանցելով ըստ x – ի, կստանանք՝ $p = 2p + 2xp' - 12p^2p'$: Նախ նկատենք, որ

$p=0 \Rightarrow y\equiv 0$ այս հավասարման լուծում է: Այնուհետև, համարելով, որ $p\neq c$ և փոխելով x -ի և p -ի դերերը, կստանանք x -ի նկատմամբ գծային հավասարում $px'=12p^2-2x$: Նախ լուծում ենք $px'=-2x$ համասեռ հավասարումը՝ $\frac{dx}{x}=-2\frac{dp}{p}\Rightarrow x_0=\frac{c}{p^2}$: Պարզ է, որ ոչ համասեռ $px'=12p^2-2x$ հավասարումը ունի $x=ap^2$ տեսքի լուծում, որն էլ տեղադրելով հավասարման մեջ, գտնում ենք $a=3$: Այսպիսով ոչ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝ $x=\frac{c}{p^2}+3p^2$: Ուրեմն, նախնական հավասարման լուծումը կտրվի պարամետրական տեսքով՝

$$\begin{cases} x=3p^2+\frac{c}{p^2}, \\ y=2p^3+2\frac{c}{p} \end{cases}:$$

Ունենք նաև $y\equiv 0$ մասնավոր լուծումը:

Օրինակ 7.5: Լուծել $y=xy'-\ln y'$ հավասարումը: Ներմուծելով նշանակում՝ $y'(x)\equiv p(x)$, ստանում ենք՝ $y=xp-\ln p$: Ածանցելով ըստ x – ի, կստանանք՝

$$p=p+xp'-\frac{1}{p}p'\Rightarrow p'\left(x-\frac{1}{p}\right)=0\Rightarrow p'=0(p=c) \text{ կամ՝ } p=\frac{1}{x}:$$

Ստանում ենք լուծումների $y=cx-\ln c$ ընտանիքը և մասնավոր $\bar{y}=1+\ln x$ լուծում: Որոնենք եզակի լուծումները: Դիսկրիմինանտային կորը կորոշվի հետևյալ համակարգից՝

$$y=xy'-\ln y', x-\frac{1}{y'}=0\Rightarrow \bar{y}(x)=1+\ln x:$$

Վերցնելով $\forall x_0>0$ ստուգենք որ լուծումը եզակի է, այսինքն՝ $1+\ln x_0=cx_0-\ln c$, $\frac{1}{x_0}=c$, որը ճշմարիտ է: Այսպիսով՝ $\bar{y}=1+\ln x$ լուծումը եզակի է:

III. ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԹԵՈՐԵՄԸ ՆՈՐՄԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԱՄԱՐ

Առաջին կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների նորմալ համարգ է կոչվում հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots y_n) \end{cases} : \tag{3.1}$$

Այս համակարգի լուծում ասելով հասկանում ենք $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ֆունկցիաների այնպիսի n – յակ, որ երբ $y_k(x)$ $(k = 1, \dots, n)$ ֆունկցիաները տեղադրում ենք համակարգի մեջ, ապա հավասարումներից յուրաքանչյուրը դառնում է նույնություն x_0 կետի ինչ – որ շրջակայքում: Ենթադրվում է, որ այդ ֆունկցիաները բավարարում են հետևյալ սկզբնական պայմաններին՝ (Կոշիի խնդիր)

$$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} : \tag{3.2}$$

(3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը կարելի է գրել համարժեք վեկտորական տեսքով: Դիցուք՝

$$\vec{Y}(x) = (Y_1(x), \dots, Y_n(x)),\ \vec{Y}'(x) = (Y_1'(x), \dots, Y_n'(x)),$$

$$\vec{F}(x) = \left(f_1\left(x, \vec{Y}(x)\right), \dots, f_n\left(x, \vec{Y}(x)\right)\right), \vec{Y_0} = (y_{10}, \dots, y_{n0}):$$

(3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը կգրվի հետևյալ համարժեք կերպ՝

$$\vec{Y}'(x) = \vec{F}\left(x, \vec{Y}(x)\right), \vec{Y}(x_0) = \vec{Y}_0 :$$

Նկատում ենք, որ վեկտորական տեսքով գրված Կոշիի խնդիրը նման է արդեն ուսումնասիրած սկալյար դեպքին համապատասխան Կոշիի խնդրին, ուստի բերենք առանց ապացույցի նորմալ համակարգի համար (3.1), (3.2) խնդրի գոյության և միակության թեորեմը, նախապես ներմուծելով հետևյալ նշանակումը՝ $M_0\left(x_0, \vec{Y_0}\right) = (x_0, y_{10}, \dots y_{n0})$:

Թեորեմ 1 (գոյության և միակության)։ Դիցուք՝

$f_k \in C^1\left(U_\delta\left(M_0\right)\right)$ $\left(k=1,\dots,n\right)$: Այդ դեպքում (3.1), (3.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում

$\left(y_1\left(x\right),\dots,y_n\left(x\right)\right)$ և այն միակն է $C^1\left(U_\gamma\left(x_0\right)\right)$ $\left(\gamma<\delta\right)$ դասում։

IV. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիտարկենք անանցյալի նկատմամբ լուծված բարձր կարգի հետևյալ տեսքի դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right): \tag{4.1}$$

Պահանջվում է, որ լուծումը բավարարի հետևյալ "սկզբնական" պայմաններին՝

$$y\left(x_0\right)=y_{10},y'\left(x_0\right)=y_{20},\dots,y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n0}: \tag{4.2}$$

(4.1), (4.2) Կոշիի խնդիրը բերենք նորմալ համակարգի, ներմուծելով հետևյալ նշանակումները՝

$$y\left(x\right)\equiv y_1\left(x\right),y'\left(x\right)\equiv y_1'\left(x\right)\equiv y_2\left(x\right),\dots,y^{(n-1)}\left(x\right)\equiv y_{n-1}'\equiv y_n\left(x\right):$$

Ստացվում է հավասարումների հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} y_1'\left(x\right)=y_2\left(x\right)\equiv f_1\left(x,y_1,\dots,y_n\right)\\ y_2'\left(x\right)=y_3\left(x\right)\equiv f_2\left(x,y_1,\dots,y_n\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}'\left(x\right)=y_n\left(x\right)\equiv f_{n-1}\left(x,y_1,\dots,y_n\right)\\ y_n'=f\left(x,y_1,\dots y_n\right)\end{cases}, \tag{4.3}$$

բավարարող հետևյալ պայմաններին՝

$$y_1\left(x_0\right)=y_{10},\dots,y_n\left(x_0\right)=y_{n0}: \tag{4.4}$$

Նկատենք, որ (4.3) – ի աջ մասի f_k $(k = 1,...,n-1)$ գծային ֆունկ-ցիաները արնդիատ են իրենց ածանցյալների հետ մեկտեղ՝ $\frac{\partial f_k}{\partial y_j} = \begin{cases} 1, j = k+1 \\ 0, j \neq k+1 \end{cases}$: Ուրեմն մնում է պահանջներ դնել միայն f - ի վրա:

Թեորեմ 1 (գոյության և միակության): Դիցուք $f \in C^1(U_\delta(M_0))$, որտեղ $M_0 = M_0(x_0, y_{10}, ... y_{n0})$: Այդ դեպքում (4.1), (4.2) Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է $C^n(U_\gamma(x_0))$ $(\gamma < \delta)$ դասում:

Ապացուցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ (4.3) համակարգը, (4.4) պայմանների առկայությամբ ունի լուծում $(y_1(x),...,y_n(x))$ և այն միակն է $C^1(U_\gamma(x_0))$ $(\gamma < \delta)$ դասում (տես III թ.1): Ապացուցենք, որ $y(x) \equiv y_1(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.1), (4.2) Կոշիի խնդրի լուծում: Իրոք՝

$$y(x_0) = y_1(x_0) = y_{10},\ y'(x) = y_1'(x) = y_2(x) \Rightarrow y'(x_0) = y_{20},$$

$$..., y^{(n-1)}(x) = y_n(x) \Rightarrow$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_n(x_0) = y_{n0},$$

$$y^{(n)}(x) = y_n'(x) = f(x, y, y', ... y^{(n-1)}):$$

Լուծման միակությունը հետևում է (4.3) համակարգի համար խնդրի $y_1(x),...,y_n(x)$ լուծման միակությունից, որը նշանակում է որ միակն է նաև $y(x) \equiv y_1(x)$ ֆունկցիան: ■

Այժմ ուսումնասիրենք բարձր կարգի դիֆերենցիալ հավասարում-ների կարգը իջեցնելու մեթոդներ: Կարգը կարելի է իջեցնել հետևյալ դեպքերում՝

1. Հավասարման մեջ բացակայում են $y, y', ..., y^{(k-1)}$, այսինքն հա-վասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝ $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$: Եթե ներմուծենք նշանակում՝ $y^{(k)}(x) \equiv z(x)$, ապա հավասարման կարգը կիջնի k - ով:

Օրինակ 4.1: Լուծել $xy''' = y'' - xy''$ հավասարումը: Նշանակենք $y''(x) \equiv z(x)$, կստանանք՝

$$xz' = z(1-x) \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{1-x}{x}dx \Rightarrow ln|z| =$$
$$= ln|x| - x + ln|c| \Rightarrow z = cxe^{-x} \Rightarrow y'' = cxe^{-x}:$$

Մնում է երկու անգամ ինտեգրել ստացվածը, կամ օգտվել ստորև դուրս բերվող բազմապատիկ ինտեգրալի միապատիկի բերելու բանաձևից (տես V (2.1)): Օգտվենք վերջինից, կստանանք՝

$$y = c_1\int_0^x (x-t)te^{-t}dt + c_2x + c_3:$$

Կատարելով մասերով ինտեգրում, ի վերջո ստանում ենք՝

$$y = c_1(x+2)e^{-x} + c_2x + c_3:$$

2. Հավասարման մեջ x - ը բացահայտ չի մասնակցում: Այս դեպքում հավասարման կարգը մեկով կիջնի, եթե կատարենք հետևյալ նշանակումը՝ $y' = z(y)$: Անցնելով ածանցումից ըստ x - ի ածանցմանը ըստ y - ի, կստանանք՝

$$y''_{xx} = z'_y \cdot y'_x = z' \cdot z, y''' = (z' \cdot z)'_y \cdot y'_x = \left(z'' \cdot z + (z')^2\right)z, \dots$$

Ինչպես տեսնում ենք նոր հավասարման կարգը մեկով իջավ:

Օրինակ 4.2: Լուծել $yy'' = y'^2 - y'^3$ հավասարումը: Անցնելով նոր որոնելի ֆունկցիայի $z(y) = y', (y''_{xx} = z'_y y'_x = z' \cdot z)$, որտեղ y-ը նոր անկախ փոփոխականի դերում է, կստանանք՝ $yz'z = z^2 - z^3$:

Նկատելով, որ $z \equiv 0$ $(y' \equiv 0, y \equiv c)$, $z \equiv 1$ $(y' \equiv 1, y \equiv x+c)$, լուծումներ են և համարելով, որ արդեն $z \neq 0, z \neq 1$, անջատելով փոփոխականները, կստանանք՝ $\dfrac{dz}{z(1-z)} = \dfrac{dy}{y}$: Ինտեգրելով կստանանք՝

$ln\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = ln|y| + ln|c_1|$, կամ՝ $\dfrac{z}{1-z} = c_1y$: Այստեղից՝ $z = \dfrac{c_1y}{c_1y+1}$, կամ՝ $\frac{dy}{dx}=\frac{c_1y}{c_1y+1}\Rightarrow\frac{c_1y+1}{c_1y}dy=dx$: Ինտեգրելով, կստանանք՝

$y+c_1ln|y|=x+c_2$ (նկատենք, որ այս լուծումների մեջ կա $y\equiv x+c$ լուծումը, բայց $y\equiv c$ լուծումը պետք է առանձին նշել):

3. Կարգը մեկով կիջնի, եթե հավասարման ձախ և աջ մասերում հաջողվում է առաջացնենք լրիվ ածանցյալներ:

Օրինակ 4.3: Լուծել $yy''=y'(y'+1)$ հավասարումը: Այն ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$\frac{(y'+1)'}{y'+1}=\frac{y'}{y}\Rightarrow(ln|y'+1|)'=(ln|y|)'\Rightarrow y'+1=c_1y\Rightarrow\frac{dy}{c_1y-1}=dx:$$

Նկատենք, որ բաժանման պրոցեսում կորցրել ենք $y'+1=0\Rightarrow y=-x+c$ և $y=0$ լուծումները: Ինտեգրելով $\frac{dy}{c_1y-1}=dx$ հավասարումը, կստանանք՝

$$ln|c_1y-1|=lnc_2+c_1x\Rightarrow c_1y-1=c_2e^{c_1x};y=c-x;y=0:$$

4. $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)=0$ հավասարման կարգը մեկով կիջնի, եթե F ֆունկցիան համասեռ է y-ի և նրա ածանցյալների նկատմամբ: Այսինքն՝ $F\left(x,ty,ty',...,ty^{(n)}\right)=t^{\alpha}F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ $(t>0)$: Այս դեպքում, $\frac{y'}{y}=z(x)$ $(y'=yz, y''=y'z+yz'=y(z'+z^2)),...$:

y փոփոխականից "ազատվում ենք" շնորհիվ $F\left(x,y,y',...,y^{(n)}\right)$ ֆունկցիայի համասեռության:

Օրինակ 4.4: Լուծել $xyy''+xy'^2-2yy'=0$ հավասարումը: Այս հավասարման ձախ մասը երկրորդ կարգի համասեռ ֆունկցիա է y,y',y'' փոփոխականների նկատմամբ: Նախ նկատենք, որ հավասարումն ունի $y\equiv0$ լուծում: Այնուհետև, համարելով, որ $y(x)\neq0$, անցնենք նոր $z(x)\equiv\dfrac{y'(x)}{y(x)}$ որոնելի ֆունկցիայի: Այստեղից ստանում ենք՝ $y'\equiv y\cdot z\Rightarrow y''\equiv y'\cdot z+y\cdot z'\Rightarrow y''\equiv y\left(z'+z^2\right)$: Տեղադրելով հավասարման մեջ և կրճատելով y^2 - ով, կստանանք՝

$$x\left(z'+z^2\right)+xz^2-2z=0\Rightarrow xz'+2xz^2-2z=0$$

(Բեռնուլիի հավասարումը): Նկատենք, որ $z\equiv 0\Rightarrow y'\equiv 0\Rightarrow y\equiv c$ լուծում է: Այժմ, համարելով, որ $z(x)\neq 0$ և բաժանելով հավասարման երկու կողմը z^2 վրա, անցնենք $u\equiv\dfrac{1}{z}$ փոփոխականի, կստանանք գծային $xu'+2u=2x$ հավասարումը: Նախ լուծենք համասեռ $\dfrac{du}{u}=-2\dfrac{dx}{x}$ հավասարումը, կստանանք՝ $u_0=\dfrac{c}{x^2}$: Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք $u_1\equiv ax$ տեսքով: Տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝ $u_1\equiv\dfrac{2}{3}x$: Այսպիսով՝

$$u(x)\equiv\frac{c}{x^2}+\frac{2}{3}x\Rightarrow z(x)\equiv\frac{x^2}{c+\frac{2}{3}x^3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{y}\equiv\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{2}{3}x^3+c\right)}{\frac{2}{3}x^3+c}\Rightarrow y(x)\equiv c_1\left(\frac{2}{3}x^3+c\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)\equiv c_3\left(x^3+\tilde{c}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y^2\equiv c_1x^3+c_2:$$

Նկատենք, որ ստացված լուծման մեջ պարունակվում են $y(x)\equiv 0$ և $y(x)\equiv c$ լուծումները:

V. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. ԳԾԱՅԻՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐԸ, ՆՐԱ ՊԱՐԶԱԳՈՒՅՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Սահմանենք հետևյալ օպերատորը՝

$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)y(x)$,

որտեղ $p_k(x)$ գործակիցները նախապես տրված իրական արժեքանի ֆունկցիաներ են՝ $p_k \in C[a;b]$ $(k=1,\ldots,n)$: Քանի որ ածանցման օպերատորը գծային է, ապա պարզ է որ գծային է նաև L օպերատորը՝ $L[\alpha\cdot y_1+\beta\cdot y_2](x)=\alpha\cdot L[y_1](x)+\beta\cdot L[y_2](x)$, որտեղ α - ն և β - ն հաստատուններ են, իսկ $y_1(x)$ - ը և $y_2(x)$ - ը n անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են $[a;b]$ - ում:

$$L[y](x)=f(x)$$

$$(y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots p_n(x)y(x)=f(x)) \qquad (1.1)$$

հավասարումը, որտեղ $f\in C[a;b]$ կոչվում է n կարգի գծային, **ոչ համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում**:

$$L[y](x)=0 \qquad (1.2)$$

հավասարումը կոչվում է n կարգի **գծային, համասեռ դիֆերենցիալ հավասարում**:

Համասեռ (1.2) հավասարման լուծումների բազմությունը նշանակենք Λ - ով: Քանի որ L օպերատորը գծային է, ապա պարզ է, որ Λ - ն գծային տարածություն է: Հետագայում ցույց կտանք, որ այն n - չափանի է: Ճշմարիտ է հետևյալ պնդումը:

Լեմմա 1.1: Դիցուք $y(x)=u(x)+i\cdot v(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (1.2) հավասարման լուծում $[a;b]$ - ում, $u(x), v(x)$ ֆունկցիաները իրական արժեքանի են, i - ն կեղծ միավորն է: Այդ դեպքում $y(x)$

լուծման իրական և կեղծ մասերը՝ $u(x), v(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են (1.2) – ի լուծումներ՝

$$L[u](x) \equiv 0, L[v](x) \equiv 0 \; (x \in [a;b]):$$

Ապացույց: Քանի որ L օպերատորը գծային է և $p_k(x)$ գործակիցները իրական արժեքանի են, ապա՝

$$0 \equiv L[u + i \cdot v](x) \equiv L[u](x) + i \cdot L[v](x) \Rightarrow L[u](x) \equiv 0$$

$$\text{և } \; L[v](x) \equiv 0: \; ■$$

2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԲԵՐՈՒՄԸ ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆԸ

Լեմմա 2.1 (բազմապատիկ ինտեգրալի բերումը միապատիկի): Դիցուք $f \in C[a;b]$: Ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը, որը կապում է n – պատիկ ինտեգրալը միապատիկի հետ՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \; (n = 2,3,\ldots), x \in [a;b] \tag{2.1}$$

Ապացույց: Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Նախ ստուգենք, որ (2.1) – ը ճիշտ է, երբ $n = 2$: Այսինքն՝

$$\int_a^x dt \int_a^t f(s)ds = \int_a^x (x-t) f(t)dt: \tag{2.2}$$

Ներմուծենք օժանդակ ֆունկցիա՝

$$F_t(s) = \begin{cases} f(s), a \le s \le t \\ 0, t < s \le x \end{cases}:$$

Այդ դեպքում՝

$$\int_a^x dt \int_a^t f(s)ds = \int_a^x dt \int_a^x F_t(s)ds = \int_a^x ds \int_a^x F_t(s)dt = \int_a^x ds \int_s^x f(s)dt =$$

$$= \int_a^x f(s)ds \int_s^x dt = \int_a^x f(s)(x-s)ds = \int_a^x (x-t)f(t)dt:$$

Այսպիսով, (2.2) – ը ապացուցված է: ■

Դիտողություն 2.1: Նկատենք, որ (2.2) – ը դուրս բերելու ընթացքում եկանք ավելի ընդհանուր փաստի. եթե $f(s,t)$ ֆունկցիան անընդհատ է $C([a;b]\times[a;b])$ - ում, ապա՝

$$\int_a^x dt \int_a^t f(s,t)ds = \int_a^x ds \int_s^x f(s,t)dt: \qquad (2.3)$$

Այժմ ենթադրենք, (2.1) – ը ճիշտ է n - ի համար, ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $n+1$ դեպքում: Այսինքն, ճշմարիտ է՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (t-x)^{n-1} f(t)dt:$$

Պետք է ապացուցել, որ

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \frac{1}{n!}\int_a^x (t-x)^n f(t)dt \quad (n = 2,3,\ldots):$$

Բայց՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \int_a^x g(t_1)dt_1,$$

որտեղ՝

$$g(t_1) = \int_a^{t_1} dt_2 \int_a^{t_2} \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt:$$

Ըստ (2.3) – ի՝

$$g(t_1) \equiv \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-1} f(t)dt:$$

Այսպիսով, օգտվելով նաև (2.2) – ից ստանում ենք՝

$$\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} (t_1-t)^{n-1} f(t)dt =$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)dt \int_t^x (t_1-t)^{n-1} dt_1 = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)dt : \blacksquare$$

Վերադառնանք նորից

$$L[y](x) = f(x) \tag{2.4}$$

հավասարմանը, որտեղ՝ $p_k \in C[a;b]$ $(k=1,\ldots,n)$, $f \in C[a;b]$:

Վերցնենք $\forall x_0 \in [a;b]$ և դիտարկենք հետևյալ սկզբնական պայմանները՝

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} : \tag{2.5}$$

Թեորեմ 2.1: (2.4), (2.5) Կոշիի խնդիրը համարժեք է հետևյալ Վոլտերայի ինտեգրալ հավասարմանը՝

$$z(x) = \int_{x_0}^x K(x,t)z(t)dt + F(x) \quad (z \in C[a;b]) : \tag{2.6}$$

Այսինքն, եթե $y(x)$- ը հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում $C^n[a;b]$ դասում, ապա $z(x)$ - ը ($y^{(n)}(x) \equiv z(x)$, $z \in C[a;b]$) հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում, որտեղ՝

$$K(x,t) \equiv -\sum_{i=1}^n p_i(x)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \tag{2.7}$$

$$F(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n p_i(x)\sum_{k=1}^i y_{n-k}\frac{(x-x_0)^{i-k}}{(i-k)!} : \tag{2.8}$$

և հակառակը՝ եթե $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) – ի լուծում, որտեղ $K(x,t)$ կորիզը և $F(x)$ ազատ մասը որոշվում են (2.7), (2.8) բանաձևերով, ապա $y(x)$ - ը, որը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$y(x)\equiv\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}z(t)dt+y_0+y_1(x-x_0)+\ldots+$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (2.9)$$

հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում: Ընդ որում պարզ է, որ՝ $K\in C(\Delta)$, $\Delta=\{(x,t);a\le x\le b,a\le t\le x\}$, $F\in C[a;b]$:

Ապացուցում: Դիցուք $y(x)$ - ը $(x\in[a;b])$ հանդիսանում է (2.4), (2.5) Կոշիի խնդրի լուծում: Ներմուծենք նշանակում՝ $y^{(n)}(x)\equiv z(x)$ $(x\in[a;b])$: Ցույց տանք, որ $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում $C[a;b]$ դասում: Ինտեգրելով $y^{(n)}(t)\equiv z(t)$ $(t\in[a;b])$ նույնությունը x_0 - ից x սահմաններում և հաշվի առնելով (2.5) - ը, կստանանք՝

$$\int_{x_0}^{x}\left(y^{(n-1)}\right)'(t)dt\equiv\int_{x_0}^{x}z(t)dt\Rightarrow y^{(n-1)}(x)\equiv\int_{x_0}^{x}z(t)dt+y_{n-1}:$$

Նորից ինտեգրելով ստացված նույնությունը և հաշվի առնելով (2.1) -ը, կունենանք՝ $y^{(n-2)}(x)\equiv\int_{x_0}^{x}(x-t)z(t)dt+y_{n-2}+y_{n-1}(x-x_0):$

Շարունակելով ինտեգրման պրոցեսը, կստանանք՝

$$y^{(n-3)}(x)\equiv\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2z(t)dt+y_{n-3}+y_{n-2}(x-x_0)+$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^2}{2!},\ldots,$$

$$y(x)\equiv\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}z(t)dt+y_0+y_1(x-x_0)+\ldots+$$

$$+y_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$ (ստացանք (2.9) – ը):

Տեղադրելով ստացվածը (2.4) հավասարման մեջ, կստանանք որ $y^{(n)}(x) \equiv z(x)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.6) ինտեգրալ հավասարմանը (տես նաև (2.7), (2.8)):

Դիցուք այժմ հակառակը՝ $z(x)$ - ը հանդիսանում է (2.6) ինտեգրալ հավասարման լուծում $C[a;b]$ դասում, իսկ $y(x)$ - ը որոշվում է (2.9) բանաձևով: Պարզ է, որ $y(x_0) = y_0$: n անգամ ածանցելով (2.9) – ը հեշտ է ստուգել, որ $y(x)$ - ը բավարարում է թե (2.4) հավասարմանը, թե (2.5) սկզբնական պայմաններին: ■

Թեորեմ 2.2: Վոլտերայի (2.6) ինտեգրալ հավասարումը, երբ նրա կորիզը՝ $K \in C(\Delta)$ և ազատ մասը՝ $F \in C[a;b]$, ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Թեորեմի ապացույցը տես ինտեգրալ հավասարումներ բաժնում:

Դիտարկենք հետևյալ Կոշիի խնդիրը՝ գտնել $L[y](x) = f(x)$ հավասարման ($p_k \in C[a;b]$ $(k = 1,\dots,n)$, $f \in C[a;b]$) այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ սկզբնական պայմաններին՝

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \left(x_0 \in [a;b]\right):$$

Թեորեմ 2.3 (գոյության և միակության): Վերը նշված Կոշիի խնդիրը ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Թեորեմի ապացույցը բխում է նախորդ դատողություններից:

3. ԳԾՈՐԵՆ ԱՆԿԱԽ ԵՎ ԿԱԽՅԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ: ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳ: ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Սահմանում 3.1: $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են **գծորեն անկախ** X միջակայքում, եթե

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0 \qquad (x \in X)$$

նույնությունից հետևում է՝ $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$:

Սահմանում 3.2: $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ֆունկցիաները կոչվում են գծորեն կախյալ X միջակայքում, եթե նրանք գծորեն անկախ չեն, այսինքն՝ ճշմարիտ է

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 \qquad (x \in X)$$

նույնությունը, երբ ոչ բոլոր c_k հաստատուններն են հավասար զրոյի:

Օրինակ 3.1: Ապացուցել,որ $1, x, x^2, \ldots, x^n$ $(n \in N)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են կամայական X միջակայքում: Դիցուք հակառակն է՝ առկա է

$$c_0 1 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n \equiv 0 \quad (x \in X)$$ նույնությունը, բայց՝

$$c_k \neq 0, c_{k+1} = \ldots = c_n = 0 \quad (k \leq n)$$: Այսինքն՝

$P_k(x) = c_0 1 + c_1 x^1 + \ldots + c_k x^k$ k-րդ կարգի բազմանդամը նույնաբար զրո է X - ում (ունի անվերջ քանակությամբ զրոներ), որը հակասում է հանրաշվից հայտնի փաստի՝ k-րդ կարգի բազմանդամն ունի ճիշտ k հատ զրոներ, հաշվի առած և կոմպլեքս արմատները և արմատի պատիկությունը: Ստացված հակասությունը ապացուցում է պնդումը:

Օրինակ 3.2: Ապացուցել, որ $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ $(\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են կամայական X միջակայքում (λ_j - երը, ընդհանրապես ասած, կոմպլեքս թվեր են):

Դիցուք ճիշտ է հակառակը, ունենք՝

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots c_n e^{\lambda_n x} \equiv 0 \quad (x \in X)$$

նույնությունը, բայց (որոշակիության համար) $c_n \neq 0$: Այդ նույնության երկու կողմը բաժանելով $e^{\lambda_1 x}$ – ի վրա և ստացված նոր նույնությունը ածանցելով, կստանանք՝

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \ldots + c_n(\lambda_n - \lambda_1)e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} \equiv 0$$: Այս պրոցեսը (էքսպոնենտի վրա բաժանելու և ածանցելու) շարունակենք $n-1$ անգամ: Արդյունքում կստանանք՝

$$c_n(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2)\ldots(\lambda_n - \lambda_{n-1})e^{(\lambda_n - \lambda_{n-1})x} \equiv 0:$$

Ստացվեց հակասություն, որն էլ ապացուցեց պնդումը:

Օրինակ 3.3: Դիցուք $y_1(x)\equiv 0$, իսկ $y_2(x),...,y_n(x)$ կամայական ֆունկցիաներ են, որոշված ինչ-որ X միջակայքում: Ապացուցենք, որ այս ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են: Իրոք, վերցնելով $c_1=1, c_2=...=c_n=0$, կստանանք՝

$$1\cdot 0+0\cdot y_2(x)+...+0\cdot y_n(x)\equiv 0 \quad (x\in X):$$

Խնդիր 3.1: Ապացուցել, որ եթե $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են X միջակայքում և X_1 միջակայքը պարունակվում է X - ում, ապա պարտադիր չէ, որ այդ ֆունկցիաները լինեն գծորեն անկախ X_1 միջակայքում:

Բերենք հետևյալ օրինակը՝ $y_1(x)\equiv x$, $y_2(x)\equiv|x|$ $(x\in[-1;1])$: Այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[-1;1]$ հատվածում: Իրոք, դիցուք $c_1x+c_2|x|\equiv 0$ $(x\in[-1;1])$:

Տալով x - ին $1,-1$ արժեքներ, կստանանք՝ $c_1+c_2=0$, $c_1-c_2=0$ $\Rightarrow c_1=c_2=0$: Եթե այդ ֆունկցիաները դիտարկենք $[0;1]$ հատվածում, ապա այնտեղ նրանք համընկնում են և, ուրեմն գծորեն կախյալ են:

Ֆունկցիաների գծորեն անկախ (կախյալ) լինելու հարցում կարևոր դեր ունի Վրոնսկիի որոշիչը, որը $n-1$ անգամ դիֆերենցելի $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$ $(x\in X)$ ֆունկցիաների համար սահմանվում է, հետևյալ կերպ՝

$$W(x)\equiv\begin{vmatrix} y_1(x) & ...... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ...... & y_n'(x) \\ ...... & ...... & ...... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}:$$

Թեորեմ 3.1: Եթե $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^{(n-1)}(X)\right)$ ֆունկցիաները գծորեն կախյալ են X միջակայքում, ապա նրանց Վրոնսկիի որոշիչը՝ $W(x)\equiv 0$ $(x\in X)$:

Ապացուցում: Դիցուք, հակառակը՝ $\exists x_0 \in X, W(x_0) \neq 0$: Ունենք նույնություն $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0$, որտեղ ոչ բոլոր գործակիցներն են զրո: Ածանցելով $n-1$ անգամ այդ նույնությունը և այնուհետև տեղադրելով $x = x_0$, կստանանք հետևյալ համակարգը $c_1, \ldots, c_n$ – ի նկատմամբ՝

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \quad\quad + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \quad\quad + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Այս համակարգի գլխավոր որոշիչը՝ $\Delta = W(x_0) \neq 0$: Որեմն այն ունի միայն զրոյական լուծում, որը հակասում է այդ ֆունկցիաների գծորեն կախյալ լինելուն: ■

Հետևանք 3.1: Թեորեմից հետևում է, որ եթե ինչ – որ ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը միջակայքի ինչ – որ կետում զրո չէ, ապա այդ միջակայքում նրանք գծորեն անկախ են:

Նկատենք որ, ընդհանրապես ասած հակառակը սխալ է, այսինքն, ֆունկցիաները կարող են լինել գծորեն անկախ, բայց նրանց Վրոնսկիի որոշիչը լինի նույնաբար զրո: Օրինակ, կառուցենք հետևյալ երկու ֆունկցիաները՝

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1;0] \\ 0, & x \in [0;1] \end{cases}, \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0, x \in [-1;0] \\ x^2, x \in [0;1] \end{cases}:$$

Պարզ է որ՝

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [-1;0] \\ 0, & x \in [0;1] \end{cases}, y_2'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1;0] \\ 2x, & x \in [0;1] \end{cases}:$$

Այս ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[-1;1]$ հատվածում: Իրոք, եթե $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \ (x \in [-1;1])$ նույնության մեջ վերցնենք $x = \pm 1$, կստանանք՝ $c_2 = 0, c_1 = 0$: Հաշվենք այս ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը՝ $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) y_2(x) \\ y_1'(x) y_2'(x) \end{vmatrix}$:

Եթե $x \in [-1;0]$, ապա՝ $W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = 0$, իսկ եթե $x \in [0;1]$, ապա՝ $W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$: Այսպիսով՝ $W(x) \equiv 0$ $(x \in [-1;1])$:

Սակայն, որոշ լրացուցիչ պայմանների առկայությամբ, թեորեմ 3.1 – ը հակադարձելի է: Ավելի ստույգ, ճշմարիտ է հետևյալը պնդումը:

Թեորեմ 3.2: Դիցուք $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ $\left(y_k \in C^{(n)}[a;b]\right)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ հատվածում և հանդիսանում են $L[y](x) = 0$ գծային անընդհատ գործակիցներով ($p_k \in C[a;b]$) դիֆերենցիալ հավասարման լուծումներ: Այդ դեպքում՝ $\forall x \in [a;b]$: $W(x) \neq 0$:

Ապացուցում: Դիցուք հակառակը՝ $\exists x_0 \in [a;b]$: $W(x_0) = 0$: Դիտարկենք հետևյալ համակարգը $c_1, \dots, c_n$ գործակիցների նկատմամբ՝

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + \qquad\qquad + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + \qquad\qquad + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases} :$$

Քանի որ այս համակարգի գլխավոր որոշիչը՝ $\Delta = W(x_0) = 0$, ապա այն ունի նաև ոչ զրոյական $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ լուծում: Ներմուծենք ֆունկցիա՝ $\bar{y}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x)$, որն ակնհայտորեն բավարարում է $L[y](x) = 0$ հավասարմանը և $\bar{y}(x_0) = 0,\ \bar{y}'(x_0) = 0, \dots,\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ պայմաններին: Բայց ակնհայտ է նաև, որ նույն հավասարմանը և պայմաններին բավարարում է $z(x) \equiv 0$ ֆունկցիան: Ըստ գոյության և միակության 2.3 թեորեմի՝ $\bar{y}(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x) \equiv 0$, Բայց ոչ բոլոր $\bar{c}_k$ – են զրո, որն հակատում է $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ ֆունկցիաների գծորեն անկախությանը: ■

Սահմանում 3.3: $L[y](x)=0$ հավասարման գծորեն անկախ $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ լուծումները բազմությունը կոչվում է այդ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Թեորեմ 3.3: Անընդհատ գործակիցներով $(p_k \in C[a;b])$ $L[y](x)=0$ գծային համասեռ դիֆերենցիալ հավասարումը ունի լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացույց: Դիցուք $A=\|a_{ij}\|_{ij=1}^{n}$ - և ինչ-որ մատրից է, որի որոշիչը՝ $detA \neq 0$ (օրինակ միավոր մատրից): Նշանակենք $y_1(x)$ - ով $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ $y_1(x_0)=a_{11}, y_1'(x_0)=a_{21}, ..., y_1^{(n-1)}(x_0)=a_{n1}$:

Այդպիսի ֆունկցիա գոյություն ունի ըստ գոյության և միակության 2.3 թեորեմի: Նշանակենք $y_2(x)$ - ով $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$y_2(x_0)=a_{12}, y_2'(x_0)=a_{22}, ..., y_2^{(n-1)}(x_0)=a_{n2}$:

Այսպես շարունակելով, ի վերջո $y_n(x)$- ով նշանակենք $L[y](x)=0$ հավասարման այն լուծումը, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ $y_n(x_0)=a_{1n}, y_n'(x_0)=a_{2n}, ..., y_n^{(n-1)}(x_0)=a_{nn}$

Քանի որ այս ֆունկցիաների Վրոնսկիի որոշիչը x_0 կետում համընկնում է $detA$- ի հետ, որը զրո չէ, ուստի նրանք գծորեն անկախ են, այսինքն կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ: ■

Դիտողություն 3.1: Քանի որ լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի կառուցումը կապված է ոչ զրոյական որոշիչ ունեցող մատրիցի հետ, իսկ այդպիսիք անվերջ են, ուրեմն կա անվերջ քանակությամբ լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Թեորեմ 3.4: Համասեռ $L[y](x)=0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը ունի հետևյալ տեսքը՝

$y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$, որտեղ $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են նույն հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացուցում: Նախ ապացուցենք որ ցանկացած c_k հաստատունների դեպքում $y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ հանդիսանում է $L[y](x)=0$ հավասարման լուծում:

Իրոք՝

$$L[y_0](x)\equiv L\left[\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right](x)\equiv\sum_{k=1}^{n} c_k L[y_k](x)\equiv\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot 0\equiv 0:$$

Դիցուք այժմ $z(x)$ - ը հանդիսանում է $L[y](x)=0$ հավասարման որևէ լուծում: Վերցնենք $\forall x_0\in[a;b]$ և ներմուծենք նշանակումներ՝ $z(x_0)=z_0, z'(x_0)=z_0^{(1)},...,z^{(n-1)}(x_0)=z_0^{n-1}$: Պահանջենք, որ $y_0(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ լուծումը բավարարի նույն սկզբնական պայմաններին ինչ $z(x)$ - ը՝ $y_0(x_0)=z_0, y_0'(x_0)=z_0^{(1)},...,y_0^{(n-1)}(x_0)=z_0^{n-1}$: Այսինքն՝

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+ \qquad\qquad +c_ny_n(x_0)\equiv z_0\\ c_1y_1'(x_0)+ \qquad\qquad +c_ny_n'(x_0)\equiv z_0^{(1)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)\equiv z_0^{(n-1)}\end{cases}$$

Քանի որ այս համակարգի գլխավոր որոշիչը համընկնում է $W(x_0)$ $(W(x_0)\neq 0)$ Վրոնսկիի որոշիչի հետ, ապա համակարգն ունի միակ $\bar{c}_1,...,\bar{c}_n$ լուծում: Եթե նշանակենք՝ $\bar{y}(x)=\sum_{k=1}^{n}\bar{c}_k y_k(x)$, ապա $\bar{y}(x)$ և $z(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են միևնույն $L[y](x)=0$

հավասարման լուծումներ, բավարարող միևնույն սկզբնական պայմաններին, ուստի, ըստ գոյության և միակության թեորեմի նրանք համընկնում են, այսինքն՝ $z(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x)$:■

Դիտողություն 3.2: Թեորեմ 3.4 – ից հետևում է որ $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումների Λ տարածությունը, վերը նշված պայմանների առկայությամբ n - չափանի գծային տարածություն է, որի բազիսն է հանդիսանում լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը:

Թեորեմ 3.5: Ոչ համասեռ $L[y](x)=f(x)$ հավասարման, $(p_k \in C[a;b]\ \ (k=1,\dots,n), f \in C[a;b])$ ընդհանուր լուծումն իրենից ներկայացնում է համասեռ $L[y](x)=0$ հավասարման ընդհանուր լուծման և ոչ համասեռի որևէ մասնավոր $\bar{y}(x)$ լուծման գումար՝

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)+\bar{y}(x),$$

որտեղ $y_1(x), y_2(x),\dots,y_n(x)$ ֆունկցիաները հանդիսանում են համասեռ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ:

Ապացուցում: Մի կողմը ակնհայտ է՝ կամայական c_k հաստատունների դեպքում՝

$$L\left[\sum_{i=1}^{n} c_k y_k+\bar{y}(x)\right](x)\equiv \sum_{k=1}^{n} c_k L[y_k](x)+L[\bar{y}](x)\equiv f(x):$$

Դիցուք, այժմ $z(x)$ - ը ոչ համասեռ հավասարման կամայական լուծում է՝ $L[z](x)\equiv f(x)$: Այդ դեպքում պարզ է, որ $\varphi(x)\equiv z(x)-\bar{y}(x)$ հանդիսանում է համասեռ հավասարման լուծում՝

$$L[z-\bar{y}](x)\equiv L[z](x)-L[\bar{y}](x)\equiv f(x)-f(x)\equiv 0:$$

Համաձայն նախորդ թեորեմի,

$$\exists \bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n\ :\ z(x)-\bar{y}(x)\equiv \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x)\equiv \bar{y}(x)+\sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k y_k(x):■$$

Հարց է առաջանում, ըստ համասեռ հավասարման լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի ինչպես գտնել ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը: Այստեղ, ինչպես առաջին կարգի հավասարման դեպքում գործում է հաստատունների փոփոխարկման (վարիացիայի) մեթոդը:

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$z(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x), \tag{3.1}$$

որտեղ $c_k(x)$ - րը նոր որոնելի ֆունկցիաներ են: Հարկավոր է n անգամ ածանցել և տեղադրել $L[y](x) = f(x)$ հավասարման մեջ: Կստացվի մեկ հավասարում n անհայտով: Ուստի կարող ենք պահանջել, որ տեղի ունենան ևս (հարմար) $n-1$ պայմաններ: Այնպես վարվենք, որ $c_k(x)$ - րը ածանցվեն միայն մեկ անգամ: Ունենք՝

$$z'(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k'(x):$$

Պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k(x) \equiv 0 :$$

Այդ դեպքում՝

$$z'(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z''(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k'(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k''(x):$$

Նորից պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k'(x) \equiv 0:$$

Այսպես շարունակելով $n-1$ քայլին կունենանք՝

$$z^{(n-1)}(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-2)}(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k(x)y_k^{(n-1)}(x):$$

Պահանջենք, որ՝

$$\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-2)}(x)\equiv 0:$$

Ի վերջո կունենանք՝

$$z^{(n)}(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k(x)y_k^{(n)}(x):$$

Տեղադրենք ստացվածը

$$z^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n}p_k(x)z^{(n-k)}(x)\equiv f(x)$$

հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k(x)y_k^{(n)}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}p_k(x)\sum_{j=1}^{n}c_j(x)y_j^{(n-k)}(x)\equiv f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k(x)(y_k^{(n)}(x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}p_j(x)y_k^{(n-j)}(x))\equiv f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)+\sum_{k=1}^{n}c_k(x)L[y_k](x)\equiv f(x):$$

Քանի որ $\forall k\ :\ L[y_k](x)\equiv 0$, ապա ի վերջո, ստանում ենք՝

$$\sum_{k=1}^{n}c_k'(x)y_k^{(n-1)}(x)\equiv f(x):$$

Այսպիսով, ստանում ենք հետևյալ համակարգը $c_k'(x)$ - ի նկատմամբ՝

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k(x)=0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k'(x)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-2)}=0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k^{(n-1)}=f(x) \end{cases} \qquad 3.2)$$

$c_k'(x)$ - ի նկատմամբ՝ (3.2) համակարգի գլխավոր որոշիչը համընկնում է $y_1(x),\dots,y_n(x)$ գծորեն անկախ լուծումների $W(x)\neq 0$ Վրոնսկիի որոշիչի հետ: Այդ պատճառով (3.2) – ը ունի միակ անընդհատ լուծում՝ $\left(c_1'(x),\dots,c_n'(x)\right)$: Պարզ է, որ $c_k'(x)$ - ը հավասար է երկու անընդհատ ֆունկցիաներից կազմված որոշիչների հարաբերությանը, ընդ որում հայտարարում $W(x)$ - ն է, որը զրո չէ

$$c_k'(x)\equiv g_k(x)\equiv\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x)\dots & 0 \dots & y_n(x) \\ y_1'(x)\dots & 0\dots & y_n'(x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ y_1^{(n-1)}(x)\dots & f(x)\dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

k

$$c_k(x)\equiv\int g_k(x)dx+\overline{c}_k \quad (k=1,\dots,n),$$

որտեղ $\overline{c}_k$ - ն հաստատուն է: Տեղադրելով (3.1) – ի մեջ, կստանանք՝

$$z(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}\overline{c}_k y_k(x)+\sum_{k=1}^{n}y_k(x)\int g_k(x)dx:$$

Նկատենք, որ թեպետ որոնում էինք ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծում, բայց ստացանք այդ հավասարման ընդհանուր լուծումը:

4. ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՈՒՄԸ ԸՍՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԴԱՄԵՆՏԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ

Դիցուք տրված են $y_1(x),\dots,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^n[a;b]\right)$, որոնք գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում: Դնենք մեր առջև հետևյալ խնդիրը՝ որն է այն գծային հավասարումը, որի համար այդ ֆունկցիաները կհանդիսանան լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ: Ճշմարիտ են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 4.1 (միակություն): Դիցուք $y_1(x),\dots,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^n[a;b]\right)$ գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում: Այն n կարգի գծային, համասեռ, անընդհատ գործակիցներով (ավագ ածանցյալի գործակիցը հավասար մեկի) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի համար նշված ֆունկցիաները կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ միակն է:

Ապացուցում: Դիցուք հակառակը՝ գոյություն ունեն երկու տարբեր այդպիսի հավասարումներ՝

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\dots+p_n(x)=0\ \left(p_k\in C[a;b]\right), \qquad (4.1)$$

$$y^{(n)}+q_1(x)y^{(n-1)}+\dots+q_n(x)=0\ \left(q_k\in C[a;b]\right), \qquad (4.2)$$

որոնց համար $y_k(x)$ $(k=1,\dots,n)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը հանդիսանում է լուծում: Հետևաբար, նրանք բավարարում են նաև

$$r_1(x)y^{(n-1)}+\dots+r_n(x)=0, \qquad (4.3)$$

որտեղ՝ $r_k(x)\equiv p_k(x)-q_k(x);\ p_k,q_k\in C[a;b]$ $(k=1,\dots,n)$: Դիցուք՝ $r_1(x)\equiv r_2(x)\equiv\dots\equiv r_{m-1}(x)\equiv 0$, իսկ $r_m(x)$ $(1\le m<n)$ նույնաբար զրո չէ $[a;b]$ - ում: Այսինքն՝ $\exists x_0\in[a;b]$: $r_m(x_0)\neq 0$: Քանի որ $r_m(x)$ անընդհատ է $[a;b]$ - ում, ապա՝ $\exists[a_1;b_1]\subset[a;b]$, $\forall x\in[a_1;b_1]$: $r_m(x)\neq 0$: Դիտարկենք (4.3) – ը (այն ընդունել է հետևյալ տեսքը՝ $r_m(x)y^{(n-m)}+\dots+r_n(x)=0$) $[a_1;b_1]$ միջակայքում և բաժանենք նրա երկու կողմը $r_m(x)$ - ի վրա, կստանանք՝

$$y^{(n-m)}+s_{m+1}(x)y^{(n-m-1)}+\ldots+s_n(x)=0\left(x\in[a_1;b_1]\right), \qquad (4.4)$$

որտեղ՝ $s_k(x)\equiv\dfrac{r_k(x)}{r_m(x)}\in C[a_1;b_1]$ $(k=m+1,\ldots,n)$: Քանի որ $\forall x\in[a;b]$: $W(x)\neq 0$, ապա՝ $\forall x\in[a_1;b_1]$: $W(x)\neq 0$: Ուրեմն $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ n հատ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a_1;b_1]$ - ում և բավարարում են n - ից ցածր կարգ ունեցող անընդհատ գործակիցներով (4.4) հավասարմանը: Ստացանք հակասություն: ■

Թեորեմ 4.2 (գոյությունը): Դիցուք $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ $\left(y_k\in C^n[a;b]\right)$ գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում և նրանց Վրոնսկիի $W(x)$ որոշիչը $[a;b]$ միջակայքի ոչ մի կետում զրո չէ: Այդ դեպքում n կարգի գծային, համասեռ, անընդհատ գործակիցներով (ավագ անդամի գործակիցը հավասար մեկի) դիֆերենցիալ հավասարումը, որի համար նշված ֆունկցիաները կազմում են լուծումների ֆունդամենտալ համակարգ ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots\ldots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \ldots\ldots & y_n'(x) & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix}=0: \qquad (4.5)$$

Այստեղ նշված որոշիչը պետք է բացել ըստ վերջին սյան, ընդ որում $y^{(n)}(x)$ - ի հանրահաշվական լրացումը հենց Վրոնսկիի որոշիչն է, ուստի, $y^{(n)}(x)$ գործակիցը հավասար է մեկի: Եթե (4.5) – ի մեջ տեղադրենք $y(x)$- ի փոխարեն $y_1(x)$ - ը, ապա այդ որոշիչի առաջին և վերջին սյուները կհամընկնեն, ուստի այն կհավասարվի նույնաբար զրոյի: Նույն կերպ համոզվում ենք, որ այդ հավասարմանը բավարարում են նաև $y_2(x),\ldots,y_n(x)$ ֆունկցիաները: ■

5. ԼԻՈՒՎԻԼ-ՕՍՏՐՈԳՐԱԴՍԿՈՒ ԲԱՆԱՁԵՎԸ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է X միջակայքում դիֆերենցելի ֆունկցիաներից կազմված որոշիչ՝

$$A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}:$$

Լեմմա 5.1: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ, ճիշտ է որոշիչի ածանցման հետևյալ կանոնը՝

$$A'(x)=\begin{vmatrix} a'_{11}(x)\ldots a'_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a'_{21}(x)\ldots a'_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}+\ldots+$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n1}(x)\ldots a'_{nn}(x) \end{vmatrix}: \qquad (5.1)$$

Ապացուցում: Ըստ մատրիցի որոշիչի սահմանման՝

$$A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x)\ldots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x)\ldots a_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(x)\ldots a_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}, \qquad (5.2)$$

որտեղ գումարը տարածվում է ըստ բոլոր հնարավոր $i_1\ldots i_n$ տեղափոխությունների, իսկ $\varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ գործակիցները հավասար են մեկի, երբ կարգախախտումների (ինվերսիաների) թիվը զույգ է և մինուս մեկի, երբ կարգախախտումների թիվը կենտ է: Ըստ արտադրյալի ածանցման կանոնի ստանում ենք՝

$$A'(x)=\sum_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}a'_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}+$$

$$+\sum_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}a_{1i_1}\cdot a'_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a_{ni_n}+\ldots+\sum_{i_1\ldots i_n}\varepsilon_{i_1\ldots i_n}a_{1i_1}\cdot a_{2i_2}\cdot\ldots\cdot a'_{ni_n}:$$

Նորից օգտվելով (5.2) որոշիչը բացելու կանոնից, ստանում ենք (5.1) – ը: ■

Թեորեմ 5.1: Դիցուք տրված են՝ $y_1(x),\ldots,y_n(x)\left(y_k\in C^n[a;b],\ k=1,\ldots,n\right)$ ֆունկցիաներ, որոնք հանդիսանում են

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0\ \left(p_k\in C[a;b]\right)\qquad(5.3)$$

հավասարման լուծումներ և $W(x)$ - ը նրանց Վրոնսկիի որոշիչն է: Ճշմարիտ է հետևյալ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևը՝

$$W(x)=ce^{-\int p_1(x)dx},\qquad(5.4)$$

որտեղ c - ն հաստատուն է:

Ապացուցում: Ածանցենք Վրոնսկիի որոշիչը, կիրառելով լեմմա 5.1 – ը, կստանանք՝

$$W'(x)\equiv\begin{vmatrix}y_1'(x) & y_n'(x)\\ y_1'(x) & y_n'(x)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ y_1^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}y_1(x)\ \ldots\ldots & y_n(x)\\ y_1''(x) & y_n''(x)\\ y_1''(x) & y_n''(x)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ y_1^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+\ldots+\begin{vmatrix}y_1(x) & y_n(x)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ y_1^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x)\\ y_1^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}+$$

$$
+\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}:
$$

Ստացված որոշիչները, բացի վերջինը զրո են, քանի որ ունեն կրկնվող տողեր: Վերջին որոշիչի մեջ (5.3) - ից տեղադրելով $y_k^{(n)}(x)$ - ը և վերածելով այն գումարի, կստանանք՝

$$
W'(x) \equiv -p_1(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots\dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} -
$$

$$
-p_2(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \end{vmatrix} - \dots - p_n(x)\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(x) & & y_n(x) \end{vmatrix}:
$$

Ստացված որոշիչների մեջ առաջինը Վրոնսկիի որոշիչն է, իսկ մյուսները զրո են, քանի որ նրանց մեջ կան կրկնվող տողեր: Այսպիսով, ստացանք՝ $W'(x) = -p_1(x)W(x)$: Ինտեգրելով այս հավասարումը ստանում ենք (5.4) – ը: ■

Դիտողություն 5.1: Պարզ է, որ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու (5.4) բանաձևը կարելի է նաև ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$
W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt} \quad \left(x_0 \in [a;b]\right): \tag{5.5}
$$

Հետևանք 5.1: Եթե Վրոնսկիի որոշիչը $[a;b]$ հատվածի որևէ կետում զրո չէ, ապա այն ոչ մի կետում զրո չէ:

Եթե 2 -րդ կարգի հավասարման համար հաջողվում է գտնել ոչ զրոյական $y_1(x)$ մասնավոր լուծում, ապա մյուս, առաջինի հետ գծորեն անկախ լուծումը հաջողվում է գտնել Լիուվիլ - Օստրոգրադսկու բանաձևի միջոցով: Իրոք, օգտվելով (5.4) - ից և վերցնելով $c = 1$, կստանանք՝

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix} = e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \frac{y'(x)y_1(x) - y_1'(x)y(x)}{(y_1(x))^2} =$$

$$= \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{-\int p_1(x)dx} \Rightarrow \left(\frac{y(x)}{y_1(x)} \right)' = \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{-\int p_1(x)dx}$$

$$\Rightarrow y(x) = y_1(x) \int \frac{1}{(y_1(x))^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx : \qquad (5.6)$$

Օրինակ 5.1: Գտնել $x^2 lnx \cdot y'' - xy' + y = 0$ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Ակնհայտ է, որ հավասարումը ունի $y_1(x) \equiv x$ մասնավոր լուծումը: Հավասարումը բաժանելով $x^2 lnx$ - ի վրա ($p_1(x)$ ճիշտ գտնելու նպատակով), կստանանք, որ

$$p_1(x) = -\frac{1}{xlnx} \quad (x > 1):$$

(5.6) – ից ստանում ենք՝

$$y(x) = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{xlnx}} dx = -x \int lnx d\frac{1}{x} = -lnx + x \int \frac{dx}{x^2} = -lnx - 1 :$$

Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0 = c_1 x + c_2 (lnx + 1):$$

Նկատենք, որ Լիուվիլ – Օստրոգրադսկու բանաձևի օգնությամբ կարելի է գտնել նաև երրորդ կարգի գծային հավասարման համար լուծումների ֆունդամենտալ համակարգը, նախապես գտնելով երկու հատ գծորեն անկախ լուծումներ:

6. ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ: ՀԱՄԱՍԵՌ ԵՎ ՈՉ ՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԸ, ՔՎԱԶԻԲԱԶՄԱՆԴԱՄԻ ԴԵՊՔԸ:

Գծային դիֆերենցիալ հավասարման համար լուծումների ֆունդամենտալ համակարգի գոյությունը ապացուցված է, բայց այն կառուցելը, ընդհանրապես ասած, դժվար խնդիր է: Հաստատուն գործակիցներով գծային հավասարման համար այդ խնդիրը լուծվում է: Այս դեպքում L գծային օպերատորը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x), \qquad (6.1)$$

որտեղ a_k գործակիցները իրական հաստատուններ են: Դիտարկենք համասեռ

$$L[y](x) = 0 \qquad (6.2)$$

հավասարումը, որի լուծումը որոնենք՝ $y = e^{\lambda x}$ տեսքով: Տեղադրելով (6.2) – ի մեջ, կստանանք՝

$$l(\lambda) = 0, \qquad (6.3)$$

որտեղ $l(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$, այն կոչվում է բնութագրիչ բազմանդամ, իսկ (6.3) հավասարումը՝ բնութագրիչ հավասարում: Քննարկենք դեպքեր.

1. բնութագրիչ հավասարումը ունի n հատ իրարից տարբեր $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ իրական արմատներ: Այդ դեպքում ունենք n հատ $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ գծորեն անկախ լուծումներ (տես օրինակ 3.2): Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}:$$

2. արմատների մեջ կան բազմապատիկները:

Սահմանում 6.1: Կասենք, որ բնութագրիչ հավասարման համար λ_0 -ն s - պատիկ արմատ է, եթե՝ $l(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s l_1(\lambda)$, որտեղ $l_1(\lambda)$ բազմանդամը չի բաժանվում $\lambda - \lambda_0$ - ի վրա $(l_1(\lambda_0) \neq 0)$: Հաշվի առնելով արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը հեշտ է ստանալ, որ՝

$$l(\lambda_0)=l'(\lambda_0)=\ldots=l^{(s-1)}(\lambda_0)=0, l^{(s)}(\lambda_0)\neq 0: \tag{6.4}$$

Թեորեմ 6.1: Դիցուք λ_0 - ն բնութագրիչ հավասարման s - պատիկ արմատ է: Այդ դեպքում $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda_0 x}$ ֆունկցիաները $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումներ են:

Ապացուցում: Ունենք նույնություն՝ $L\left[e^{\mu x}\right](x)\equiv l(\mu)e^{\mu x}$: Ստացված նույնության երկու կողմը ածանցենք ըստ μ անընդհատ արգումենտի k անգամ, կստանանք՝

$$L\left[x^k e^{\mu x}\right](x)\equiv\left(l(\mu)e^{\mu x}\right)^{(k)}\equiv\sum_{j=0}^{k}C_k^j l^{(j)}(\mu)x^{k-j}e^{\mu x}:$$

Տեղադրելով այս նույնության մեջ $\mu=\lambda_0$ և հաշվի առնելով (6.4) - ը, կստանանք՝ $L\left[x^k e^{\mu x}\right](x)\equiv 0$, երբ $k\leq s-1$: ■

Թեորեմ 6.2: Դիցուք (6.3) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝ λ_1 (s_1 - պատիկ), λ_2 (s_2 - պատիկ),..., λ_m (s_m - պատիկ) $\left(\sum_{k=1}^{m}s_k=n\right)$: Այդ դեպքում $L[y](x)=0$ հավասարման լուծումներն են

$$\begin{array}{l} e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}; \\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{s_2-1}e^{\lambda_2 x}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{\lambda_m x}, xe^{\lambda_m x}, \ldots, x^{s_m-1}e^{\lambda_m x}: \end{array},$$

որոնք գծորեն անկախ են $\mathbb{R}$ ում:

Ապացուցում: Կազմենք այդ լուծումների գծային կոմբինացիան և դիտարկենք հետևյալ նույնությունը՝

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x}+\ldots+P_m(x)e^{\lambda_m x}\equiv 0: \tag{6.5}$$

Ենթադրենք հակառակը՝ օրինակ $P_m(x)$ - ը նույնաբար զրո չէ, և նրա կարգը $0\leq ordP_m\leq s_m-1$: Բաժանենք (6.5) – ը $e^{\lambda_1 x}$ - ի վրա և ածանցենք $P_1(x)$ բազմանդամի կարգից մեկով ավելի անգամ, որը կբերի

$P_1(x)$ - ի վերացմանը: Կիրառելով արտադրյալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը հեշտ է նկատել, որ մնացած բազմանդամների կարգը չի փոխվի: Կստանանք՝ $\overline{P}_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+...+\overline{P}_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}\equiv 0$:

Այս պրոցեսը շարունակելով մինչև վերջին գումարելիին հասնելը, կստանանք՝ $Q_m(x)e^{(s_m-s_{m-1})x}=0$, որտեղ $Q_m(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է, ինչ $P_m(x)$ - ը: Ստացանք հակասություն: ■

3. Կոմպլեքս արմատների դեպքը: Հաշվի առնելով, որ բնութագրիչ հավասարման գործակիցները իրական են, կստանանք, որ եթե որևէ կոմպլեքս $\lambda=\alpha+i\beta$ թիվ հանդիսանում է այդ հավասարման լուծում, ապա նրա համալուծը՝ $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$, նույնպես լուծում է: Իրոք, ունենք $l(\alpha+i\beta)=0\Rightarrow\overline{l(\alpha+i\beta)}=0\Rightarrow l(\overline{\alpha+ib})=0\Rightarrow\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ նույնպես լինում է բնութագրիչ հավասարման արմատ: Այդ՝ $\lambda=\alpha+i\beta$ արմատին համապատասխանում է $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(cos\alpha x+isin\alpha x)$ լուծումը, որը իր հերթին առաջացնում է $e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x$ իրական արժեքանի լուծումներ (տես լեմմա1.1): Իսկ $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$ արմատին համապատասխան նոր, գծորեն անկախ իրական արժեքանի լուծումներ չեն առաջանում:

Հետագա շարադրանքը պարզ լինելու համար քննարկենք $n=3$ դեպքը: Դիցուք բնութագրիչ հավասարումը ունի մեկ հատ $\lambda_1=\mu$ իրական և երկու հատ էլ կոմպլեքս՝ $\lambda_{2,3}=\alpha\pm i\beta$ արմատներ: Այսպիսով ունենք հետևյալ իրական արժեքանի լուծումներ՝

$e^{\mu x}, e^{\alpha x}cos\beta x, e^{\alpha x}sin\beta x$: Ցույց տանք որ նրանք գծորեն անկախ են: Ենթադրենք ունենք ՝ $c_1e^{\mu x}+c_2e^{\alpha x}cos\beta x+c_3e^{\alpha x}sin\beta x\equiv 0$ նույնությունը: Օգվելով Էյլերի բանաձևերից՝

$$cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\quad sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i},\text{ կստանանք՝}$$

$$c_1e^{\mu x}+c_2e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+c_3\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}\equiv 0:$$

Կամ՝

$$c_1 e^{\mu x} + \frac{c_2 - ic_3}{2} e^{\lambda_2 x} + \frac{c_2 + ic_3}{2} e^{\lambda_3 x} \equiv 0 \Rightarrow$$

$$c_1 = \frac{c_2 - ic_3}{2} = \frac{c_2 + ic_3}{2} = 0$$ (տես օրինակ 3.2):

Այստեղից, ստանում ենք՝ $c_1 = c_2 = c_3 = 0$: Նույն կերպ կարելի է դատել ընդհանուր դեպքում:

Ոչ համասեռ հավասարման մասնավոր լուծումը քվազիբազմանդամի դեպքում

Քվազիբազմանդամ է կոչվում հետևյալ տեսքի ֆունկցիան՝ $f(x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$, որտեղ $P(x)$ - ը բազմանդամ է, μ - ն՝ կոմպլեքս հաստատուն: Այսպիսով ունենք հետևյալ տեսքի հավասարում՝

$$L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x} \tag{6.6}$$

Գտնենք այս հավասարման մասնավոր լուծման տեսքը, որտեղ՝

$$L[y](x) \equiv y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}y'(x) + a_n y(x):$$

Այս օպերատորի բնութագրիչ բազմանդամն է՝

$$l(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n:$$

Ներմուծենք ածանցման օպերատորներ՝

$$D^k y(x) \equiv y^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \quad l(D)y(x) \equiv$$

$$\equiv D^n y(x) + a_1 D^{n-1} y(x) + \ldots + a_{n-1} Dy(x) + a_n y(x):$$

Այս նշանակումներով (6.6) հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$l(D)y(x) = P(x)e^{\mu \cdot x}: \tag{6.7}$$

Այս հավասարման աջ մասը կոչվում է քվազիբազմանդամ այն պատճառով, որ այն, փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է նոր գծային հավասարման, որի աջ մասը բազմանդամ է: Ճշմարիտ է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 6.3 (շեղման մասին): Եթե $V \in C^n(\mathbf{R})$, ապա՝

$$l(D)e^{\mu \cdot x}V(x) \equiv e^{\mu \cdot x} l(D + \mu)V(x), \tag{6.8}$$

որտեղ՝ $l(D+\mu)V(x)\equiv$

$$\equiv(D+\mu)^n V(x)+a_1(D+\mu)^{n-1}V(x)+\ldots+a_nV(x):$$

Ապացուցում: Պարզ է, որ՝ $De^{\mu\cdot x}V(x)\equiv\left(e^{\mu\cdot x}V(x)\right)'\equiv$

$$\equiv\mu e^{\mu\cdot x}V(x)+e^{\mu\cdot x}V'(x)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)V(x),$$

$$D^2e^{\mu\cdot x}V(x)\equiv\left(e^{\mu\cdot x}\left(V'(x)+\mu V(x)\right)\right)'\equiv$$

$$\equiv e^{\mu\cdot x}\left(\mu^2V(x)+\mu V'(x)+\mu V'(x)+V''(x)\right)\equiv$$

$$\equiv e^{\mu\cdot x}\left(V''(x)+2\mu V'(x)+\mu^2V(x)\right)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)^2V(x):$$

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից հեշտ է ցույց տալ, որ՝ $D^ke^{\mu\cdot x}V(x)\equiv e^{\mu\cdot x}(D+\mu)^kV(x)$ $(k=1,\ldots,n)$: Մնում է բազմապատկել ստացվածը a_{n-k} հաստատուն գործակիցներով $(k=1,\ldots,n)$ և իրար գումարել: ■

Դիտողություն 6.3: Թեորեմից հետևում է, որ $y(x)\equiv e^{\mu\cdot x}V(x)$ փոփոխականի փոխարինումը բերում է (6.7) հավասարումը հետևյալ տեսքի՝

$$l(D+\mu)V(x)=\tilde{P}(x): \tag{6.9}$$

Պարզ է, որ (6.9) – ը նույնպես հաստատուն գործակիցներով գծային դիֆերենցիալ հավասարում է, որի բնութագրիչ հավասարումն է՝

$$l(\lambda+\mu)=0: \tag{6.10}$$

Այժմ վերադառնանք (6.6) հավասարման մասնավոր լուծում որոնելու խնդրին: Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ $\mu=0$, այսինքն (6.6.) – ը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_ny(x)=P(x), \tag{6.11}$$

և $\lambda=0$ չի հանդիսանում

$$l(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0 \tag{6.12}$$

բնութագրիչ հավասարման արմատ, ուրեմն՝ $a_n \neq 0$: Դիցուք՝ $P(x) \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ $(b_0 \neq 0)$: (6.11) – ի լուծումը որոնենք նույն կարգի բազմանդամի տեսքով՝ $y_1(x) \equiv Q(x)$, որտեղ՝ $Q(x) \equiv c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m$: Հավասարեցնելով իրար ձախ և աջ մասի միևնույն աստիճանի գործակիցները, կստանանք՝

$$x^m \left| \, a_nc_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = \frac{b_0}{a_n} \right.$$

$$x^{m-1} \left| \, a_nc_1 + a_{n-1}mc_0 = b_1 \Rightarrow c_1 = \frac{b_1 - ma_{n-1}c_0}{a_n}, \right.$$

....:

Այսպիսով, ինդուկտիվ եղանակով որոշվում են $y_1(x)$ - ի բոլոր անհայտ c_k $(k=0,1,\ldots,m)$ գործակիցները:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu=0$ և $\lambda=0$ - ն հանդիսանում է (6.12) հավասարման s պատիկ արմատ, այսինքն՝ $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_{n-s+1} = 0$, $a_{n-s} \neq 0$: Այս դեպքում (6.11) հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-s}y^{(s)} = P(x): \qquad (6.13)$$

Անցնենք նոր

$$z(x) \equiv y^{(s)}(x) \qquad (6.14)$$

փոփոխականի: Այդ դեպքում (6.13) հավասարումը կձևափոխվի հետևյալ տեսքի՝

$$z^{(n-s)} + a_1z^{(n-s-1)} + \ldots + a_{n-s}z = P(x) \quad (a_{n-s} \neq 0):$$

Համաձայն նախորդի,

$$z_1(x) = Q(x),$$

որտեղ $Q(x) \equiv c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ - ը: Մնում է s անգամ ինտեգրել (6.14) – ը: Կստանանք մասնավոր $y_1(x)$ լուծումը (ինտեգրման հաստատունները գրել հարկավոր չէ, քանի որ նրանք կմասնակցեն համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծման մեջ):

$$y_1^{(s-1)}(x) \equiv \frac{c_0}{m+1}x^{m+1} + \frac{c_1}{m}x^m + \ldots + c_m x \equiv xQ_1(x), \ldots,$$

$$y_1(x) \equiv x^s Q_s(x),$$

որտեղ $Q_k(x)$ $(k = 1, \ldots, s)$ - ը նույն կարգի բազմանդամներ են ինչ $P(x)$ - ը:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu \neq 0$ և այն (μ -ն) չի հանդիսանում (6.12) բնութագրիչ հավասարման արմատ՝ $l(\mu) \neq 0$: Լուծումը որոնք $y = e^{\mu x}V(x)$ $\left(V \in C^n(\mathbb{R})\right)$ տեսքով: Հաշվի առնելով շեղման մասին թեորեմը, հանգում ենք (6.9) հավասարմանը՝ $l(D+\mu)V(x) = P(x)$, որի բնութագրիչ հավասարումն է՝ $l(\lambda+\mu) = 0$ (տես (6.10) - ը): Քանի որ $l(\mu) \neq 0$, ապա $\lambda = 0$ թիվը (6.10) հավասարման լուծում չէ: Ուրեմն, համաձայն նախորդի $l(D+\mu)V(x) = P(x)$ հավասարման մասնավոր լուծումը ունի $V_1(x) = Q(x)$ տեսքը, որտեղ $Q(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ -ը: Այսպիսով, այս դեպքում $L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $y_1(x) = Q(x)e^{\mu \cdot x}$:

Ի վերջո, դիտարկենք այն դեպքը, երբ $\mu \neq 0$ և μ - ն հանդիսանում է (6.10) բնութագրիչ հավասարման s պատիկ արմատ: Դա նշանակում է, որ $\lambda = 0$ թիվը $l(\lambda+\mu) = 0$ նոր բնութագրիչ հավասարման s պատիկ արմատ է: Ուրեմն, համաձայն արդեն ապացուցածի $l(D+\mu)V(x) = P(x)$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $V_1(x) = x^s Q(x)$, որտեղ $Q(x)$ - ը նույն կարգի բազմանդամ է ինչ $P(x)$ - ը: Հետևաբար, $L[y](x) = P(x)e^{\mu \cdot x}$ հավասարման մասնավոր լուծումը կլինի՝ $y_1(x) = x^s Q(x)e^{\mu \cdot x}$:

Այժմ ուսումնասիրենք հաստատուն գործակիցներին բերվող հետևյալ հավասարումները:

7. ԷՅԼԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (7.1)$$

տեսքի հավասարումը կոչվում է Էյլերի հավասարում, որտեղ a_k - ը հաստատուններ են: Անցնենք նոր անկախ փոփոխականի

$$x = e^t, t > 0 \ \left(x = -e^t, t < 0\right) \Rightarrow t = ln|x|:$$

Անցնելով ածանցյալներից ըստ x –ի ածանցյալներին ըստ t –ի, կստանանք՝

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \left(ln|x|\right)'_x = y'_t \frac{1}{x},$$

$$y''_{xx} = \left(y'_t \frac{1}{x}\right)'_x = y''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} - y'_t \cdot \frac{1}{x^2}, \ldots:$$

Այսպիսով, (7.1) – ը վերածվում է հաստատուն գործակիցներով հավասարման: Դա նշանակում է, որ (7.1) – ին համապատասխան համասեռ հավասարման լուծումը պետք է որոնել

$$y = e^{\lambda t} = x^\lambda \ (x > 0)$$

տեսքով: Երբ (7.1) ոչ համասեռ հավասարման մեջ անցնելով $x = e^t, t > 0$ աջ մասում ունենում ենք քվազիբազմանդամ, մասնավոր լուծման տեսքը ընտրելուց հետո անցնում ենք նորից հին փոփոխականի:

Օրինակ 7.1: Գտնել $x^3 y'' - 2xy = 6lnx$ հավասարման ընդհանուր լուծումը: Նախ այն բերենք Էյլերի հավասարման, բաժանելով x - ի վրա $x^2 y'' - 2y = 6\frac{lnx}{x}$: Համասեռի լուծումը որոնենք $y = x^\lambda$ տեսքով, կստանանք՝

$$\left(\lambda(\lambda - 1) - 2\right)x^\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2:$$

Ուրեմն, համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝ $y_0 = \frac{c_1}{x} + c_2 x^2$: Ոչ համասեռի մասնավոր լուծումը հարկավոր է որոնել հետևյալ տեսքի՝ $y_1 = \left(at^2 + bt\right)e^{-t} = \left(aln^2 x + blnx\right)x^{-1}$: Երկու անգամ ածանցելով և տեղադրելով հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$y_1'(x)=\left(b+(2a-b)lnx-aln^2x\right)x^{-2},$$
$$y_1''(x)=\frac{2a-3b+(2b-6a)lnx+2aln^2x}{x^3}:$$
$$\frac{2a-3b+(2b-6a)lnx+2aln^2x}{x}-$$
$$-\frac{2blnx+2aln^2x}{x}=\frac{6lnx}{x}:$$

Հաշվի առնելով, որ $1,\ lnx$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, կստանանք՝ $2a-3b=0$ և $-6a=6\Rightarrow a=-1, b=-\frac{2}{3}$: Այսպիսով, հավասարման ընդհանուր լուծումն է՝

$$y(x)=\frac{c_1}{x}+c_2x^2-\frac{3ln^2x+2lnx}{3x}:$$

1. ԱՌԱՋԻՆ ԿԱՐԳԻ ԳԾԱՅԻՆ, ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ

Նախ դիտարկենք երկու անհայտ ֆունկցիաներով նորմալ համակարգի դեպքը՝

$$\begin{cases}x'=a_{11}x+a_{12}y+f_1(t)\\ y'=a_{21}x+a_{22}y+f_2(t)\end{cases},\qquad (8.1)$$

որտեղ a_{ik} - ը հաստատուններ են, իսկ f_i - ը՝ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ: Համարելով, որ $x(t),\ y(t)$ (8.1) – ի լուծումներն են, ածանցենք առաջին նույնությունը և օգտվենք առաջին և երկրորդ նույնություններից, կստանանք երկրորդ կարգի, գծային, հաստատուն գործակիցներով հավասարում:

Օրինակ 8.1: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases}x'=4x+y-e^{2t}\\ y'=y-2x\end{cases}$$

Տարժվենք վերը նշվածի պես, կստանանք՝

$$x'' = 4x' + y' - 2e^{2t} = 4x' + y - 2x - 2e^{2t} = 5x' - 6x - e^{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'' - 5x' + 6x = -e^{2t}:$$

Նախ լուծենք համասեռ հավասարումը, լուծումը որոնելով $x = e^{\lambda t}$ տեսքով, կստանանք՝ $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$: Ուրեմն, համասեռի ընդհանուր լուծումն է՝ $x_0 = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$, իսկ ոչ համասեռինը պետք է որոնել $x_1 = ate^{2t}$ տեսքով: Պարզ հաշվարկը ցույց է տալիս, որ $a = 1$: Այսպիսով՝ $x = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + te^{2t}$: Ստացվածը ածանցելով և տեղադրելով առաջինի մեջ, կունենանք՝
$y = 2(1 - c_1 - t)e^{2t} - c_2e^{3t}$:

Այժմ անցնենք երեք անհայտով նորմալ, համասեռ համակարգին՝

$$\begin{cases} x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \qquad (8.2)$$

որտեղ a_{ik} - ը հաստատուններ են: Այստեղ նույնպես կարելի է կիրառել արտաքսման մեթոդը, բայց այն բարդ է: Այստեղ ավելի հարմար է մատրիցային մեթոդը, որը մեծապես կհեշտի սկալյար դեպքի վրա: Ներմուծենք մատրից սյունակ (վեկտոր)՝

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \text{ որի ածանցյալը կլինի՝ } \overrightarrow{X}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

և եթե ներմուծենք մատրից՝ $A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$, ապա (8.2) համակարգը կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\overrightarrow{X}'(t) = A\overrightarrow{X}(t): \qquad (8.3)$$

Լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$\vec{X}=\vec{B}e^{\lambda t} \Rightarrow \vec{X}'=\lambda\vec{B}e^{\lambda t}=\lambda E\vec{B}e^{\lambda t}$ ($\vec{B}$ - ն հաստատուն վեկտոր է, իսկ E - ն միավոր մատրից): Տեղադրելով (8.3) – ի մեջ, և կրճատելով $e^{\lambda t}$ - ի վրա, կստանանք՝

$$\left(A-\lambda E\right)\vec{B}=0: \tag{8.4}$$

Քանի որ մեզ հետաքրքրում է $\vec{X}\neq 0$ լուծումը (մեզ հարկավոր են երեք հատ գծորեն անկախ լուծումներ), ապա առաջանում է սեփական արժեքների և սեփական վեկտորների պրոբլեմը: Այն λ - ն, որի դեպքում (8.4) ունի ոչ զրոյական լուծում կոչվում է սեփական արժեք, իսկ համապատասխան ոչ զրոյական վեկտորը՝ սեփական վեկտոր: Պարզ է, որ համասեռ (8.4) հավասարումը կունենա ոչ զրոյական լուծում, եթե՝

$$det\left(A-\lambda E\right)=0: \tag{8.5}$$

Այս հավասարումը կոչվում է **բնութագրիչ հավասարում**: Դիտարկենք տարբեր դեպքերը բնութագրող օրինակներ:

Օրինակ 8.1: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x'=2x-y+z \\ y'=x+2y-z \\ z'=x-y+2z \end{cases}$$

Նկատենք, որ A մատրիցը տվյալ դեպքում կլինի՝

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}:$$

Դժվար չէ տեսնել, որ տվյալ դեպքում (8.5) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են (սեփական արժեքներ)՝ $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$: Ցույց - քանչյուր սեփական արժեքին համապատասխան (8.4) հավասարումը կլինի՝

$$\lambda_1=1, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=0 \ \left(\vec{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow \begin{cases} b_1-b_2+b_3=0 \\ b_1+b_2-b_3=0 \\ b_1-b_2+b_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1=0, b_2=b_3=1:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$:

$$\lambda_2 = 2, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_2 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = b_2 = b_3 = 1:$$

Այսպիսով՝ $\overrightarrow{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$:

$$\lambda_3 = 3, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 - b_2 - b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = 0 \\ b_1 = b_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{X}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}:$$

Որոնելի ընդհանուր լուծումը կլինի ստացված երեք հատ գծորեն անկախ լուծումների գծային կոմբինացիան՝

$$\overrightarrow{X} = c_1\overrightarrow{X}_1 + c_2\overrightarrow{X}_2 + c_3\overrightarrow{X}_3:$$

Անցնելով համասարրության ըստ կոորդինատների, կստանանք՝

$$\begin{cases} x = c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{cases}$$

Օրինակ 8.2: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$: Հեշտ է տեսնել, որ տվյալ դեպ-

թում (8.5) բնութագրիչ հավասարման արմատներն են՝ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$: Յուրաքանչյուր սեփական արժեքին համապատասխան (8.4) հավասարումը կլինի՝

$$\lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 - b_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 - 2b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 2 \Rightarrow \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t :$$

$$\lambda_2 = -i, \begin{bmatrix} 2+i & -1 & 2 \\ 1 & i & 2 \\ -2 & 1 & i-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2+i)b_1 - b_2 + 2b_3 = 0 \\ b_1 + ib_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 + (i-1)b_3 = 0 \end{cases}$$

Գումարելով առաջին և երրորդ հավասարումները կստանանք հետևյալ համարժեք համակարգը՝

$$\begin{cases} ib_1 + (1+i)b_3 = 0 \\ b_1 + ib_2 + 2b_3 = 0 \\ -2b_1 + b_2 + (i-1)b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = (i-1)b_3 \\ b_2 = (i-1)b_3 \\ 0b_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = i-1 \\ b_2 = i-1 \\ b_3 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{X} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-it} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 1 \end{bmatrix} (\cos t - i\sin t) = \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t - \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t + \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} :$$

Այսպիսով, ունենք՝

$$\overrightarrow{X}_2 = \begin{bmatrix} sint - cost \\ sint - cost \\ cost \end{bmatrix}, \overrightarrow{X}_3 = \begin{bmatrix} sint + cost \\ sint + cost \\ -sint \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{X} = c_1\overrightarrow{X}_1 + c_2\overrightarrow{X}_2 + c_3\overrightarrow{X}_3 :$$

Անցնելով հավասարության ըստ կոորդինատների, կստանանք՝

$$x = c_2\left(sint - cost\right) + c_3\left(sint + cost\right),$$

$$y = 2c_1e^t + c_2\left(sint - cost\right) + c_3\left(sint + cost\right),$$

$$z = c_1e^t + c_2cost - c_3sint :$$

Օրինակ 8.3: Գտնել տրված համակարգի ընդհանուր լուծումը՝

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \Rightarrow A = \\ z' = x + z \end{cases} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} :$$

Տվյալ հավասարմանը համապատասխան (8.5) բնութագրիչ հավասարումը ընդունում է $(\lambda - 2)^3 = 0$ տեսքը, այսինքն $\lambda = 2$ - ը բնութագրիչ հավասարման եռապատիկ արմատ է: Ելնելով սկալյար դեպքի անալոգից, $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}$ հավասարման լուծումը որոնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{B}e^{2t} + \overrightarrow{D}te^{2t} + \overrightarrow{F}t^2e^{2t} = E\overrightarrow{B}e^{2t} + E\overrightarrow{D}te^{2t} + E\overrightarrow{F}t^2e^{2t} :$$

Որտեղից՝ $\overrightarrow{X}' = \left(2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D} + 2t\left(\overrightarrow{D} + \overrightarrow{F}\right) + 2t^2\overrightarrow{F}\right)e^{2t}$: Տեղադրելով այս բոլորը $\overrightarrow{X}' = A\overrightarrow{X}$ հավասարման մեջ և հավասարեցնելով իրար t նույն աստիճանի գործակիցները, կստանանք հետևյալ համակարգը՝

$$\begin{cases} (A - 2E)\overrightarrow{F} = 0 \\ (A - 2E)\overrightarrow{D} = 2\overrightarrow{F} : \\ (A - 2E)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{D} \end{cases}$$

Սկսենք առաջինից՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2f_1 - f_2 = 0 \\ 3f_1 - f_2 - f_3 = 0 \\ f_1 - f_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_2 = 2f_1 \\ f_3 = f_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 2f_1 \\ f_1 \end{bmatrix}:$$

Անցնենք երկրորդին՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2f_1 \\ 4f_1 \\ 2f_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2d_1 - d_2 = 2f_1 \\ 3d_1 - d_2 - d_3 = 4f_1 \\ d_1 - d_3 = 2f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = d_3 + 2f_1 \\ d_2 = 2d_3 + 2f_1 \end{cases}:$$

Անցնելով երրորդին, կստանանք՝

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2b_1 - b_2 = d_3 + 2f_1 \\ 3b_1 - b_2 - b_3 = 2d_3 + 2f_1 \\ b_1 - b_3 = d_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 = 2b_1 - d_3 - 2f_1, b_3 = b_1 - d_3:$$

Կատարելով վերանշանակումներ՝ $b_1 = c_1$, $d_3 = c_2$, $2f_1 = c_3$, կստանանք՝ $b_2 = 2c_1 - c_2 - c_3, b_3 = c_1 - c_2, d_1 = c_2 + c_3, d_2 = 2c_2 + c_3$, $f_2 = 2c_3, f_3 = c_3$: Այսպիսով՝

$$\vec{X} = \vec{B}e^{2t} + \vec{D}te^{2t} + \vec{F}t^2e^{2t} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 2c_1 - c_2 - c_3 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} e^{2t} +$$

$$+t\begin{bmatrix} c_2 + c_3 \\ 2c_2 + c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} e^{2t} + 2t^2 \begin{bmatrix} c_3 \\ 2c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} e^{2t}:$$

Այստեղից, վերջնականապես ստանում ենք՝

$$x = c_1e^{2t} + (c_2 + c_3)te^{2t} + 2c_3t^2e^{2t},$$

$$y = (2c_1 - c_2 - c_3)e^{2t} + (2c_2 + c_3)te^{2t} + 4c_3t^2e^{2t},$$

$$z = (c_1 - c_2)e^{2t} + c_2te^{2t} + 2c_3t^2e^{2t}:$$

VI. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

1. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարում է կոչվում հետևյալ հավասարումը՝

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x):$$

Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումն է՝

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt + f(x), \qquad (1.1)$$

որտեղ $K(x,t)$ տրված կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիան կոչվում է կորիզ, $K \in C(D)$ $(D=[a;b]\times[a;b])$: Տրված է նաև $f(x)$ ֆունկցիան $(f \in C[a;b])$, λ- ն կոմպլեքս հաստատուն է: Որոնելի ֆունկցիան $\varphi(x)$- ն է $(\varphi \in C[a;b])$:

Ներմուծենք ինտեգրալ օպերատոր՝

$$(\mathrm{K}f)(x) = \int_a^b K(x,t)f(t)\,dt \quad (f \in C[a;b]):$$

Այդ նշանակումով (1.1) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x)+f(x) \qquad (1.2)$$

2. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ "ՓՈՔՐ" ԿՈՐԻԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ:

Կառուցենք հաջորդականություն՝

$$\varphi_n(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_{n-1})(x)+f(x),\ n=1,2,\ldots,(\varphi_0(x)\equiv f(x)),$$

կամ որ նույնն է ինչ՝

$$\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt+f(x),\ n=1,2,\ldots : \qquad (2.1)$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$\left(\mathrm{K}^0 f\right)(x) \equiv f(x), \left(\mathrm{K}^1 f\right)(x) \equiv (\mathrm{K}f)(x), \ldots,$$
$$\left(\mathrm{K}^p f\right)(x) \equiv \left(\mathrm{K}\left(\mathrm{K}^{p-1} f\right)\right)(x):$$

Պարզ է, որ այսպես կառուցված օպերատորները նույնպես անընդհատ կորիզներով ինտեգրալ օպերատորներ են:

$$\left(\mathrm{K}^2 f\right)(x) \equiv (\mathrm{K}(\mathrm{K}f))(x) \equiv \int_a^b K(x,\tau)(\mathrm{K}f)(\tau)\,d\tau \equiv$$
$$\equiv \int_a^b K(x,\tau)\,d\tau \int_a^b K(\tau,t) f(t)\,dt \equiv$$
$$\equiv \int_a^b f(t)\,dt \int_a^b K(x,\tau) K(\tau,t)\,d\tau \equiv \int_a^b K_2(x,t) f(t)\,dt,$$

որտեղ՝ $K_2(x,t) \equiv \int_a^b K(x,\tau) K(\tau,t)\,d\tau$: Պարզ է, որ՝ $K_2 \in C(D)$:

Ինդուկտիվ կերպ՝

$$K_p(x,t) \equiv \int_a^b K(x,\tau) K_{p-1}(\tau,t)\,d\tau,\ K_p \in C(D),$$
$$p = 2,3,\ldots\ \left(K_1(x,t) \equiv K(x,t) \in C(D)\right): \qquad (2.2)$$

$K_p(x,t)$ կորիզները կոչվում են հաջորդական կորիզներ:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցենք, որ $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը իրենից ներկայացնում է

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \left(\mathrm{K}^n f\right)(x) \qquad (2.3)$$

Նեյմանի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականություն՝

$$\varphi_n(x) \equiv \sum_{j=0}^{n} \lambda^j \left(\mathrm{K}^j f\right)(x),\ n = 0,1,2,\ldots : \qquad (2.4)$$

Իրոք՝ $\varphi_0(x) \equiv \lambda^0 (\mathrm{K}^0 f)(x) \equiv f(x)$: Դիցուք (2.4) – ը ճիշտ է n - ի համար, ապացուցենք,որ ճիշտ է նաև $n+1$ - ի համար, իրոք՝

$$\varphi_{n+1}(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_n)(x)+f(x)\equiv\lambda\sum_{j=0}^{n}\lambda^j\left(\mathrm{K}\left(\mathrm{K}^j f\right)\right)(x)+$$

$$+f(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\lambda^{j+1}\left(\mathrm{K}^{j+1}f\right)(x)+f(x)\equiv\sum_{j=1}^{n+1}\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)+$$

$$+f(x)\equiv\sum_{j=0}^{n+1}\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x):$$

Այժմ գնահատենք Նեյմանի (2.3) շարքի անդամները, պարզելու համար, թե երբ է այն զուգամետ:

Նախապես ներմուծենք նշանակումներ՝ $\max\limits_{[a;b]}|f(x)|=\|f\|$ (f-ի նորմ), $\max\limits_{(D)}|K(x,t)|=M>0$ ($M=0$ դեպքը հետաքրքիր չէ, քանի որ այդ դեպքում ինտեգրալ հավասարումը վերածվում է հանրահաշվականի):

Այսպիսով, ունենք՝

$$\left|\left(\mathrm{K}^0 f\right)(x)\right|\equiv|f(x)|\le\|f\|,\ \left|(\mathrm{K}f)(x)\right|\equiv$$

$$\equiv\left|\int_a^b K(x,t)f(t)dt\right|\le\int_a^b|K(x,t)||f(t)|dt\le\|f\|M(b-a),$$

$$\left|\left(\mathrm{K}^2 f\right)(x)\right|\le\int_a^b|K(x,t)|\left|(\mathrm{K}f)(t)\right|dt\le\|f\|M^2(b-a)^2:$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)\right|\le\|f\|\left(M(b-a)\right)^j:$$

Ուրեմն՝

$$\left|\lambda^j\left(\mathrm{K}^j f\right)(x)\right|\le\|f\|\alpha^j\ \left(\alpha=|\lambda|M(b-a)\right): \tag{2.5}$$

Ենթադրենք որ՝ $\alpha<1$, այսինքն՝

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}: \tag{2.6}$$

Այդ դեպքում $\|f\|\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n$ թվային շարքը զուգամետ է և, ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի, (2.3) Նեյմանի շարքը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$ հատվածում ([7], [9]): Այսինքն (2.3) շարքի մասնակի գումարների $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ – որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ (2.3) շարքի գումարն է՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(K^n f\right)(x), \qquad (2.7)$$

ընդ որում $\varphi\in C[a;b]$, քանի որ՝ $K^n f\in C[a;b]$, $n=0,1,2,\dots$ ([6],[9]):

Թեորեմ 1.1 (գոյության և միակության թեորեմ Ֆրեդհոլմի հավասարման համար "փոքր" կորիզի դեպքում): Եթե $K\in C(D)$, $(f\in C[a;b])$ և λ կոմպլեքս հաստատունը բավարարում է (2.6) պայմանին, ապա (1.2) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում և այն միակն է $C[a;b]$ դասում:

Ապացուցում: Ցույց տանք, որ $\varphi_n(x)$ հաջորդականության սահման $\varphi(x)$ - ը հանդիսանում է (1.1) ինտեգրալ հավասարման լուծում: Դրա համար հարկավոր է (2.1) – ում անցնել սահմանի և ցույց տալ որ կարելի է անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ, այսինքն՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt=\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt: \qquad (2.8)$$

Այն, որ $\varphi_n(x)$ - ը հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ - ին նշանակում է՝

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n\ge N(\varepsilon),\forall x\in[a;b]\ :\ \left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}:$$

Հետևաբար՝

$$\left|\int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}dt-\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt\right|\le$$

$$\le\int_a^b |K(x,t)||\varphi_{n-1}-\varphi(t)|dt\le M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\int_a^b dt=\varepsilon$$

$(n\ge N(\varepsilon)+1)\Rightarrow$ (2.8)։ Այսպիսով, լուծման գոյությունը ապացուցված է: Անցնենք միակության ապացուցմանը: Դիցուք (1.1) հավասարումը $C[a;b]$ դասում ունի երկու՝ $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ լուծումներ և, դիցուք՝ $z(x)\equiv\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$։ Պարզ է, որ $z(x)$ - ը բավարարում է հետևյալ համասեռ ինտեգրալ հավասարմանը՝ $z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)$։ Որտեղից հետևում է՝

$$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)=\lambda^2(\mathrm{K}^2z)(x)=...=\lambda^n(\mathrm{K}^nz)(x),\ n=1,2,...:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (2.6) – ը, կստանանք՝

$$|z(x)|\le\|z\|\alpha^n\Rightarrow\|z\|\le\|z\|\alpha^n:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$ և հաշվի առնելով այն, որ $0<\alpha<1$, կստանանք՝ $\|z\|\le 0\Rightarrow\|z\|=0$, որն էլ նշանակում է, որ $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$:■

3. ՎՈԼՏԵՐԱՅԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Դիցուք Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարման $K(x,t)$ կորիզը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ $K(x,t)=0, x<t\le b$։ Նշանակենք Δ-ով հետևյալ եռանկյունին $\Delta=\{(x,t);a\le x\le b,a\le t\le x\}$։ Այդ դեպքում Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt+f(x), \tag{3.1}$$

որն էլ անվանում են Վոլտերայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում: Այն օպերատորային տեսքով կգրվի հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x)+f(x), \tag{3.2}$$

որտեղ K ինտեգրալ օպերատորը որոշվում է հետևյալ կերպ՝

$$(\mathrm{K}f)(x)=\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt\ \ (f\in C[a;b]) \tag{3.3}$$

Գոյության և միակության թեորեմ Վոլտերայի հավասարման համար: Դիցուք $K\in C(\Delta)$ և $f\in C[a;b]$, այդ դեպքում $C[a;b]$ դասում (3.1) հավասարումն ունի լուծում և այն միակն է:

Ապացուցում: Նորից կիրառենք հաջորդական մոտարկումների մեթոդը և կառուցենք հետևյալ հաջորդականությունը՝

$$\varphi_n(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi_{n-1})(x)+f(x),\ n=1,2,\dots(\varphi_0(x)\equiv f(x)): \tag{3.4}$$

Ինչպես և նախորդ դեպքում $\varphi_n(x)$ - ը իրենից ներկայացնում է

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(\mathrm{K}^n f)(x)$$

Նեյմանի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

$$\varphi_n(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}\lambda^j(\mathrm{K}^j f)(x),\ n=0,1,2,\dots:$$

Սակայն այս դեպքում շարքի անդամները թույլ են տալիս հետևյալ գնահատականները՝

$$\left|(\mathrm{K}^0 f)(x)\right|\equiv|f(x)|\le\|f\|,\ \left|(\mathrm{K}f)(x)\right|\equiv\left|\int_a^x K(x,t)f(t)\,dt\right|\le$$

$$\le\int_a^x|K(x,t)||f(t)|\,dt\le\|f\|M\int_a^x dt=\|f\|M(x-a),$$

$$\left|(\mathrm{K}^2 f)(x)\right|\le\int_a^x|K(x,t)||(\mathrm{K}f)(t)|\,dt\le\|f\|M^2\int_a^x(t-a)\,d(t-a)=$$

$$=\|f\|M^2\frac{(t-a)^2}{2}\Bigg|_a^x=\|f\|M^2\frac{(x-a)^2}{2}:$$

$$\left|\left(\mathrm{K}^3 f\right)(x)\right|\le\int_a^x|K(x,t)|\left|\left(\mathrm{K}^2 f\right)(t)\right|dt\le\|f\|M^3\int_a^x\frac{(t-a)^2}{2}d(t-a)=$$

$$=\|f\|M^3\frac{(x-a)^3}{2\cdot 3}=\|f\|M^3\frac{(x-a)^3}{3!}\quad:$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով հեշտ է ապացուցել, որ՝

$$\left|\left(\mathrm{K}^n f\right)(x)\right|\le\|f\|\frac{\left(M(x-a)\right)^n}{n!}\Rightarrow\left|\lambda^n\left(\mathrm{K}^n f\right)(x)\right|\le$$

$$\le\|f\|\frac{\alpha^n}{n!},\ \alpha=|\lambda|M(b-a): \tag{3.5}$$

Քանի որ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ $\left(a_n=\frac{\alpha^n}{n!}\right)$ շարքը զուգամետ է (օգտվենք Դ՝ Ալամբերի ([7],[9]) հայտանիշից՝ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!\alpha^{n+1}}{(n+1)!\alpha^n}=\frac{\alpha}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0<1$), ապա $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\mathrm{K}^n f\right)(x)$ Նեյմանի շարքը բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է $[a;b]$ հատվածում: Այսինքն շարքի մասնակի գումարների $\varphi_n(x)$ հաջորդականությունը $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է ինչ – որ $\varphi(x)$ ֆունկցիայի, որն էլ Նեյմանի շարքի գումարն է: Մնում է (3.4) – ում անցնենք սահմանի, երբ $n\to\infty$ (այն, որ կարելի անցնել սահմանի ինտեգրալի նշանի տակ հիմնավորվում է ինչպես նախորդ թեորեմի ապացույցում): Այժմ ապացուցենք միակությունը: Դիցուք (3.2) հավասարումը $C[a;b]$ դասում ունի երկու՝ $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ լուծումներ և, դիցուք՝ $z(x)\equiv\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$: Պարզ է, որ $z(x)$ - ը բավարարում է հետևյալ համասեռ ինտեգրալ հավասարմանը՝

$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)$: Որտեղից հետևում է՝

$z(x)=\lambda(\mathrm{K}z)(x)=\lambda^2(\mathrm{K}^2z)(x)=...=\lambda^n(\mathrm{K}^nz)(x),\ n=1,2,...$:

Այստեղից, հաշվի առնելով (3.5) – ը, կստանանք՝

$$|z(x)|\le\|z\|\frac{\alpha^n}{n!}\Rightarrow\|z\|\le\|z\|\frac{\alpha^n}{n!}\underset{n\to\infty}{\to}0:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $n\to\infty$, կստանանք՝ $\|z\|\le 0\Rightarrow\|z\|=0$:

Որն էլ նշանակում է, որ $\varphi_1(x)\equiv\varphi_2(x)$: ■

Դիտողություն: Նկատենք, որ այս թեորեմի ապացուցման պրոցեսում կարիք չեղավ պահանջելու կորիզի "փոքր" լինելը:

4. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ ՎԵՐԱՍԵՐՎԱԾ ԿՈՐԻԶԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Նորից վերադառնանք Ֆրեդհոլմի (3.1) ինտեգրալ հավասարմանը, որն ուսումնասիրել էինք "փոքր" կորիզի դեպքում: Այժմ դիտարկենք վերասերված կորիզի դեպքը, երբ այն ներկայացվում է հետևյալ կերպ՝

$$K(x,t)\equiv\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\cdot q_j(t)\quad\left(p_j,q_j\in C[a;b],j=1,2,...,n\right): \tag{4.1}$$

Որպես վերասերված կորիզի կարևոր օրինակ է հանդես գալիս երկու փոփոխականի բազմանդամը, այսինքն՝ երբ $p_j(x)$ և $q_j(t)$ ֆունկցիաները բազմանդամներ են:

Մենք կենթադրենք, որ $p_j(x)$ $(j=1,2,...,n)$ $(q_j(t)$ $(j=1,2,...,n))$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ հատվածում: Հակառակ դեպքում, այդ ֆունկցիաների քանակը քչացնելու և վերանշանակելու հաշվին կարելի է հանգել գծորեն անկախ ֆունկցիաների: Վերասերված կորիզի դեպքում (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt+f(x): \tag{4.2}$$

Ներմուծենք նշանակումներ՝

$$c_j = \int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt = (\bar{q}_j,\varphi), \tag{4.3}$$

(երկու φ, $\psi \in C[a;b]$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է (ելնելով դիսկրետ անալոգից) հետևյալ կերպ՝

$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx$ ($\bar{\psi}$ - ն ψ - ի կոմպլեքս համալուծն է)):

Ասում են, որ φ - ն ուղղահայաց է ψ - ին, եթե

$$(\varphi,\psi) = \int_a^b \varphi(x)\overline{\psi}(x)dx = 0:$$

Այսպիսով, (4.2) – ը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\varphi(x) = \lambda\sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x) + f(x): \tag{4.4}$$

Բազմապատկենք (4.4) – ի երկու կողմը $q_k(x)$ - ով և ինտեգրենք, կստանանք՝

$$c_k = \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j + a_k\ , \tag{4.5}$$

որտեղ

$$a_{kj} = \int_a^b p_j(x)q_k(x)dx,\ k,j = \{1,2,...,n\}, \tag{4.6}$$

$$a_k = \int_a^b q_k(x)f(x)dx = (\bar{q}_k,f)\ \ (k = 1,2,...n): \tag{4.7}$$

Ներմուծենք մատրիցներ՝

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix},\ \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{bmatrix},\ A = \|a_{kj}\|_{k,j=1}^{n}:$$

Այդ նշանակումներով (4.5) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{c} = \lambda A\vec{c} + \vec{a}: \tag{4.8}$$

Այսպիսով, եթե $\varphi(x)$ - ը հանդիսանում է (4.1) ինտեգրալ հավասարման լուծում, ապա (4.3) բանաձևով որոշվող c_j - ը բավարարում են (4.5) համակարգին:

Հակառակը՝ եթե c_j - երը բավարարում են (4.5) համակարգին, ապա (4.4) – ից որոշվող $\varphi(x)$ ֆունկցիան հանդիսանում է (4.2) ինտեգրալ հավասարման լուծում, իրոք՝

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\int_a^b q_j(t)\varphi(t)dt-f(x)\equiv$$

$$\equiv\lambda\sum_{j=1}^{n}p_j(x)(c_j-\lambda\sum_{m=1}^{n}a_{jm}c_m-a_j)\equiv 0,$$

քանի որ $\forall j: c_j-\lambda\sum_{m=1}^{n}a_{jm}c_m-a_j=0$:

Ստացվածը նշանակում է, որ (4.2) և (4.5) խնդիրները իրար համարժեք են, այսինքն, օրինակ, եթե (4.5) – ը ունի լուծում և այն միակն է, ապա նույնը կարելի է պնդել (4.2) – ի մասին:

Պարզվում է, որ (1.1) հավասարման հետ մեկտեղ կարևոր է այսպես կոչված նրան **համալուծ հավասարումը**

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\left(\mathrm{K}^*\psi\right)(x)+g(x), \tag{4.9}$$

որտեղ $g\in C[a;b]$, K^*-ը ինտեգրալ օպերատոր է $K^*(x,t)=\bar{K}(t,x)$ կորիզով: Վերասերված կորիզի դեպքում՝ $K^*(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)\bar{p}_j(t)$:

Այս դեպքում (4.9) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}d_j\bar{q}_j(x)+g(x), \tag{4.10}$$

որտեղ՝

$$d_j = \int_a^b \bar{p}_j(t)\psi(t)dt = (p_j, \psi): \qquad (4.11)$$

Բազմապատկենք (4.11) - ի երկու կողմը $\bar{p}_k(x)$ - ով և ինտեգրենք, կստանանք՝

$$d_k = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{*} d_j + b_k, \qquad (4.12)$$

որտեղ՝

$$a_{kj}^{*} = \int_a^b \bar{q}_j(x)\bar{p}_k(x)dx = \bar{a}_{jk}, j,k \in \{1,2,...,n\}, \qquad (4.13)$$

$$b_k = \int_a^b \bar{p}_k(x)g(x)dx = (p_k, g),\ k = 1,2,...,n: \qquad (4.14)$$

Ներմուծենք մատրիցներ՝

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}, A^{*} = \left\| a_{kj}^{*} \right\|_{k,j=1}^{n} = \bar{A}^{T} = \left\| \bar{a}_{jk} \right\|_{j,k=1}^{n}:$$

Այդ նշանակումներով (4.12) – ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\vec{d} = \bar{\lambda} A^{*} + \vec{b}: \qquad (4.15)$$

Ինչպես և նախորդում հեշտ է ապացուցել, որ (4.9) հավասարումը համարժեք է (4.15) – ին, որտեղ $\psi(x)$ ֆունկցիան որոշվում է $\vec{d}$ - ի միջոցով (4.10) բանաձևով:

Նկատենք, որ (4.8), (4.15) մատրիցային հավասարումները կարելի ներկայացնել ավելի հարմար, հետևյալ կերպ՝

$$(E - \lambda A)\vec{c} = \vec{a}, \qquad (4.16)$$

$$(E - \bar{\lambda} A^{*})\vec{d} = \vec{b}, \qquad (4.17)$$

որտեղ՝ E - ն միավոր մատրից է:

Նշանակենք՝ $D(\lambda)=det(E-\lambda A)$: Պարզ է, որ՝ $D(\lambda)\neq 0$ $(D(0)=1)$:

Քանի որ մատրիցի և նրա տրանսֆորմացված մատրիցի որոշիչները նույնն են և բացի այդ, եթե մատրիցի որոշիչը զրո չէ, զրո չէ նաև համալուծ մատրիցի որոշիչը, ապա՝ $D(\lambda)\neq 0 \Leftrightarrow \det\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)\neq 0$: Պարզ է նաև, որ, եթե $E-\lambda A$ մատրիցի ռանգը՝ $r=rang(E-\lambda A)$, ապա՝ $rang\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)=r$: Վերը նշված պայմանների առկայությամբ ճշմարիտ են հետևյալ Ֆրեդհոլմի թեորեմները վերասերված կորիզի դեպքում:

Թեորեմ 1: Եթե $D(\lambda)\neq 0$, ապա (1.1) ինտեգրալային հավասարումը և նրան համալուծ (4.9) հավասարումը միարժեքորեն լուծելի են կամայական f,g ազատ անդամների դեպքում:

Ապացույց: Քանի որ $D(\lambda)\neq 0$, ապա ըստ Կրամերի կանոնի (4.16) և (4.17) համակարգերը ունեն լուծում և այն էլ միակն է կամայական աջ մասերի դեպքում: Հետևաբար նույնը կարելի է պնդել նրանց համարժեք (1.1) և (4.9) ինտեգրալային հավասարումների մասին: ■

Դիտարկենք (1.1) և (4.9) ինտեգրալային հավասարումներին համապատասխան համասեռ հավասարումները ($f(x)\equiv g(x)\equiv 0$)

$$\varphi(x)=\lambda(\mathrm{K}\varphi)(x) \tag{1.1`}$$

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\left(\mathrm{K}^{*}\psi\right)(x) \tag{4.9`}$$

Թեորեմ 2: Եթե $D(\lambda)=0$, ապա (1.1`) և (4.9`) հավասարումները ունեն նույն քանակով $m=n-r$ գծորեն անկախ լուծումներ:

Ապացույց: Երբ $D(\lambda)=0$, ապա $\left(E-\bar{\lambda}A^{*}\right)\vec{d}=0$ համա-կարգը ունի m հատ գծորեն անկախ $\vec{d}^{s}, s=1,2,...,m$ լուծումներ: Նույնը կարելի է պնդել նաև $(E-\lambda A)\vec{c}=0$ համակարգի մասին: Նշված պնդումը ճիշտ է նաև նրանց համապատասխան համարժեք (1.1`) և (4.9`) հավասարումների մասին: ■

Հաջորդ թեորեմը հենվում է հանրահաշվից հայտնի (տես օրինակ [11]) փաստի վրա: Որպեսզի (4.16) համակարգը տվյալ $\vec{a}$ ազատ մասի դեպքում ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\vec{a}$ վեկտորը լինի ուղղահայաց $\vec{d}^s$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին՝

$0=\left(\vec{a},\vec{d}^s\right)=\sum_{j=1}^{n}a_jd_j^s$, $s=1,\dots,m$: $\vec{d}^s$ վեկտորները առաջացնում են (4.9`) – ին համապատասխան լուծումներ՝

$\psi_s(x)=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)d_j^s$, $s=1,\dots,m$ (տես (4.10)):

Թեորեմ 3: Եթե $D(\lambda)=0$, ապա որպեսզի (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար որ $f(x)$ - ը լինի ուղղահայաց $\psi_s(x)=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)d_j^s$, $s=1,\dots,m$ լուծումներից յուրաքանչյուրին:

Ապացույցում: Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ $D(\lambda)=0$:

Նախ ցույց տանք որ $\psi_s(x)$ լուծումները գծորեն անկախ են: Իրոք, դիցուք՝

$$\sum_{s=1}^{m}C_s\psi_s(x)=\bar{\lambda}\sum_{s=1}^{m}C_s\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)\vec{d}^s\equiv 0:$$

Այսինքն՝ $\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x)\sum_{s=1}^{m}C_sd_j^s\equiv 0$: Քանի որ $q_j(x)$ $(j=1,\dots,n)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են, ապա ստանում ենք՝

$$\forall j\in\{1,\dots,n\}\ :\ \sum_{s=1}^{m}C_sd_j^s=0\Rightarrow\sum_{s=1}^{m}C_s\vec{d}^s=0\Rightarrow C_s=0,\ (s=1,\dots,m):$$

Այժմ ցույց տանք, որ f - ի ուղղահայացությունը $\psi_s(x)$ լուծումներից յուրաքանչյուրին համարժեք է նրան, որ $\vec{a}$ -ն ուղղահայաց է $\vec{d}^s$ վեկտորներից յուրաքանչյուրին: Իրոք՝

$$\left(f,\psi_s\right)=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\left(f,\bar{q}_j\right)d_j^s=\bar{\lambda}\sum_{j=1}^{n}a_jd_j^s=\bar{\lambda}\left(\vec{a},\vec{d}^s\right),\ s=1,\dots,m\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(f,\psi_s\right)=0\Leftrightarrow\left(\vec{a},\vec{d}^s\right)=0\ \left(s=1,2,\dots,m\right):\blacksquare$$

5. ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆ ԿՈՐԻԶՆԵՐ, ՌԵԶՈԼՎԵՆՏ

Մենք արդեն գիտենք, որ "փոքր" կորիզի (տես (2.5)) դեպքում (1.1) հավասարման լուծումը տրվում է Նեյմանի շարքով, հաջորդական կորիզների միջոցով (տես (2.3)), որը ձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\left(\mathrm{K}^{n}f\right)(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)\Big)f(t)dt:$$

Հեշտ է համոզվել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)$ շարքը նույնպես բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է (2.6) պայմանի առկայությամբ: Նշված շարքի գումարը անվանում են **ռեզոլվենտ** կորիզ և նշանակում՝ $R(x,t;\lambda)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_{n}(x,t)$: Համապատասխան ինտեգրալ օպերատորը կոչվում է **ռեզոլվենտ օպերատոր**՝ $(\mathrm{R}f)(x)\equiv\int_{a}^{b}R(x,t;\lambda)f(t)dt$:

Նկատենք, որ (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կարելի է ներկայացնել օպերատորային տեսքով՝ $(I-\lambda\mathrm{K})(\varphi)(x)=f(x)$, որտեղ I - ն միավոր օպերատոր է: Այսպիսով ապացուցվել է, որ (2.6) պայմանի առկայությամբ ("փոքր կորիզի դեպքը") $I-\lambda\mathrm{K}$ օրերատորը հակադարձելի է (այսինքն, φ և f ընդհատ ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն)

$$\varphi(x)=(I-\lambda\mathrm{K})^{-1}f(x)=(I+\lambda\mathrm{R})f(x):$$

Այսինքն՝ $(I-\lambda\mathrm{K})^{-1}=I+\lambda\mathrm{R}$:

6. ՖՐԵԴՀՈԼՄԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԸ ԱԼԸՆԴՀԱՏ ԿՈՐԻԶԻ (ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ) ԴԵՊՔՈՒՄ

Դիտարկենք ընդհանուր դեպքը՝ $K(x,t)$ կորիզը կամայական անընդհատ ֆունկցիա է ($K\in C(D)$): Այդ դեպքում, մաթ. անալիզից հայտնի է (Վայերշտրասի թեորեմ [6]), որ

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists p_j, q_j \in C[a;b] \ (j=1,...,n)$, $p_j(x)$ և $q_j(t)$ ֆունկցիաները գծորեն անկախ են $[a;b]$ - ում և՝

$$K(x,t)-P(x,t)\equiv Q(x,t),$$

որտեղ $P(x,t)\equiv\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\cdot q_j(t)$ վերասերված կորիզ է, իսկ $Q(x,t)$ անընդհատ կորիզը այնպիսին է, որ $\forall(x,t)\in(D)$: $|Q(x,t)|<\varepsilon$

Ընդ որում, $p_j(x), q_j(t)$ ֆունկցիաները կարող են լինել բազմանդամներ: ε դրական թիվը ընտրենք այնպես, որ՝

$|\lambda|\max\limits_{(D)}|Q(x,t)|(b-a)<1, |\lambda|\varepsilon(b-a)<1$, այսինքն՝ $\varepsilon<\dfrac{1}{|\lambda|(b-a)}$:

Այսպիսով (1.1) ինտեգրալ հավասարումը կարելի ՝ ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b P(x,t)\varphi(t)dt-\lambda\int_a^b Q(x,t)\varphi(t)dt=f(x), \tag{6.1}$$

կամ օպերատորային տեսքով՝

$$(I-\lambda\mathrm{Q})\varphi(x)=\lambda\mathrm{P}\varphi(x)+f(x): \tag{6.2}$$

Ներմուծելով նշանակում՝ $(I-\lambda\mathrm{Q})\varphi(x)\equiv\phi(x)$ և հաշվի առնելով, որ այստեղից $\varphi(x)$- ը միարժեքորեն արտահայտվում է $\phi(x)$ - ով՝ $\phi(x)=(I-\lambda\mathrm{Q})^{-1}\varphi(x)=(I+\lambda\mathrm{R})\varphi(x)$, կստանանք՝

$$\phi(x)=\lambda\mathrm{P}(I+\lambda\mathrm{R})\phi(x)+f(x),$$

կամ՝

$$\phi(x)=\lambda\mathrm{T}\phi(x)+f(x), \quad \mathrm{T=P+\lambda PR} \tag{6.3}$$

Հեշտ է նկատել, որ PR օպերատորին համապատասխան ինտեգրալ կորիզը վերասերված է, այսինքն T օպերատորին համապատասխանում է վերասերված կորիզ:

Այսպիսով (1.1) խնդիրը բերվեց համարժեք վերասերված կորիզով (6.3) ինտեգրալ հավասարմանը:

Այժմ ձևափոխենք (1.1) – ին համալուծ (4.9) ինտեգրալ հավասարումը, որը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ՝

$\left(I-\bar{\lambda}\mathrm{P}\right)\psi(x)=\bar{\lambda}\mathrm{Q}\psi(x)+g(x)$, այսինքն՝

$$\psi(x)=\bar{\lambda}\mathrm{T}^{*}\psi(x)+G(x), \tag{6.4}$$

որտեղ՝

$$\mathrm{T}^{*}=\mathrm{P}^{*}+\bar{\lambda}\mathrm{R}^{*}\mathrm{Q}^{*},\ G(x)=g(x)+\bar{\lambda}\mathrm{R}^{*}g(x),$$

Այսպիսով (1.1) – ը համարժեք է (6.3) – ին: *Ուստի ճշմարիտ է* **Ֆրեդհոլմի ալտերնատիվը**՝

1. Եթե (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ($K\in C(D)$) ունի լուծում ցանկացած ազատ $f\in C[a;b]$ մասերի դեպքում, ապա՝ նրա համալուծ (6.4) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում կամայական ազատ $g\in C[a;b]$ դեպքում, ընդ որում այդ լուծումները միակն են (**Ֆրեդհոլմի առաջին թեորեմ**):

2. Եթե (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ($K\in C(D)$) ունի լուծում ոչ բոլոր ազատ $f\in C[a;b]$ մասերի դեպքում, ապա (1.1`) և (4.9`) համասեռ ինտեգրալ հավասարումները ունեն միևնույն վերջավոր քանակությամբ լուծումներ (**Ֆրեդհոլմի երկրորդ թեորեմ**);

Որպեսզի տվյալ ազատ $f\in C[a;b]$ մասի դեպքում (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունենա լուծում անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $f(x)$ - ը լինի օրթոգոնալ համալուծ համասեռ (4.9`) հավասարման լուծումներից յուրաքանչյուրին (**Ֆրեդհոլմի երրորդ թեորեմ**):

Ապացուցում: Երբ $\lambda=0$, ապա ակընհայտ է, որ Ֆրեդհոլմի ալտերնատիվը տեղի ունի: Համարենք, որ $\lambda\neq 0$ և ընտրենք $\varepsilon<\dfrac{1}{|\lambda|(b-a)}$: Ենթադրենք, որ (1.1) ինտեգրալ հավասարումը ունի լուծում կամայական $f\in C[a;b]$ համար, այդ դեպքում (1.1) – ին համարժեք (6.3) վերասերված ինտեգրալ հավասարումը նույնպես լուծելի է $C[a;b]$ դասում կամայական $f\in C[a;b]$ - ի համար: Այստեղից, կիրառելով Ֆրեդհոլմի թեորեմ1 – ը վերասերված կորիզի դեպքում, ստանում ենք, որ $D(\lambda)\neq 0$: Այդ դեպքում ըստ Ֆրեդհոլմի թեորեմ 1 – ի, ստանում ենք, որ կամայական $f, G \in C[a;b]$ համար (1.1) և (6.4) ինտեգրալ հավասարումները միարժեքորեն լուծելի են $C[a;b]$ դասում: Բայց, քանի որ g և G ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն, ապա (1.1) և համարժեք (6.4) հավասարումները լուծելի են յուրաքանչյուր f և g ազատ մասերի դեպքում: Ֆրեդհոլմի առաջին թեորեմը ապացուցված է: ■

Եթե (1.1) ինտեգրալային հավասարումը ոչ բոլոր f - ի դեպքում է լուծելի $C[a;b]$ դասում, ապա նրան համարժեք վերասերված կորիզով (6.3) հավասարումը նույնպես լուծելի չէ ցանկացած f - ի դեպքում: Իսկ դա նշանակում է, որ $D(\lambda)=0$: Որեմն, ըստ Ֆրեդհոլմի թ. 2 – ի (1.1') և $\psi(x)=\bar{\lambda}T^{*}\psi(x)$ հավասարումները ունեն նույն վերջավոր քանակությամբ գծորեն անկախ լուծումներ: Քանի որ φ և ϕ ֆունկցիաների միջև կա փոխմիարժեք համապատասխանություն, ապա նույնը կարելի է պնդել (1.1') և (4.9') հավասարումների համար: Ֆրեդհոլմի երկրորդ թեորեմը ապացուցված է: ■

Ըստ Ֆրեդհոլմի թեորեմ 3 – ի, վերասերված կորիզների համար երբ $D(\lambda)=0$, որպեսզի (1.1) հավասարումը ունենա լուծում $C[a;b]$ դասում տվյալ f - ի դեպքում անհրաժեշտ է և բավարար, որ f -ը լինի օրթոգոնալ համալուծ համասեռ ինտեգրալ (4.9') հավասարման բոլոր լուծումներին: Քանի որ համարժեք վերասերված կորիզով ինտեգրալ հավասարման համար ոչ f - ըն է փոխվել ոչ էլ համասեռ համալուծ հավասարման համար g - ն, ստացվածը ճիշտ է նաև ընդհանուր դեպքում: Ֆրեդհոլմի երրորդ թեորեմը նույնպես ապացուցված է: ■

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников, Дифференциальные уравнения, М., Наука, 1979.
2. П.И. Лизоркин, Курс дифференциальных и интегральных уравнений, М. Наука, 1981.
3. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационнное исчисление., М., Наука, 1969.
4. Հ.Գ. Ղազարյան,Ա.Հ. Հովհաննիսյան, Տ.Ն. Հարությունյան, Գ.Ա. Կարապետյան, Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումներ, Երևան-2002.
5. В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М., Наука, 1976.
6. А.В. Бицадзе, Уравнения математической физики, М., Наука, 1976.
7. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления., М., Физ-мат., лит., Т2, 2003,Т3.,2005.
8. Ստեպանով Սովորական դիֆֆերենցիալ հավասարումների դասընթաց:
9. Ա.Գ. Ղալումյան, Ա.Ս.Սարգսյան, Մաթեմատիկական անալիզ, երրորդ մաս, ԵՊՀ – հրատ., 2008.
10. Ա.Ղ. Թունիեվ, Յու.Մ. Մովսիսյան, Գծային հանրահաշվի և գծային ծրագրավորման մեթոդներ, ԵՊՀ – ի հրատ. 2002.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ա.Գ. ՂԱԼՈՒՄՅԱՆ, Ա.Վ. ՑՈՒՑՈՒԼՅԱՆ, ԱՐԾՐ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՈՎՈՐԱԿԱՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՎ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

(Դասախոսություններ)

Տեխ. խմբագիր՝ Վ.Զ. Բղոյան
Համակարգչային ձևավորող՝ Լ.Բ. Մելիքյան

Ստորագրված է տպագրության 22.06.2011 թ.:
Չափսը՝ 60x84 $^{1}/_{16}$: Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 5 մամուլ,
տպագր. 6.25 մամուլ= 5.8 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: