ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գ. Գ. Գևորգյան Լ. Հ. Գալստյան Ա. Կ. Թասլաքյան
Գ. Վ. Միքայելյան Կ. Ա. Նավասարդյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

Երկրորդ մաս

Չորրորդ լրամշակված
հրատարակություն

Երևան
ԵՊՀ հրատարակչություն
2014

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից
որպես բուհերի ուսումնական ձեռնարկ

ՀՏԴ 517(076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7
Մ 151

Մ 151 Մաթեմատիկական անալիզի խնդրագիրք/ Գ. Գ. Գևորգյան , Լ. Հ. Գալստյան, Ա. Կ. Թասլաքյան, Գ. Վ. Միքայելյան, Կ. Ա. Նավասարդյան.- 4-րդ լրամշ. հրատ. -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2014. Մաս 2.- 265 էջ:

Ուսումնական ձեռնարկը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական և բնագիտական ֆակուլտետների համար:

ՀՏԴ 517(076.1)
ԳՄԴ 22.161 ց7

ISBN 978-5-8084-1834-9

Գլուխ 10

Թվային շարքեր և անվերջ արտադրյալներ

Տրված a_n $(n \in N)$ թվային հաջորդականության համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ սիմվոլը կոչվում է *թվային շարք*: $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n \in N$, գումարը կոչվում է շարքի n-րդ *մասնակի գումար:* Եթե A_n հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա շարքն անվանում են զուգամետ, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$-ը շարքի գումար և գրում՝ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$: Հակառակ դեպքում շարքն անվանում են տարամետ:

Շ ա ր ք ի զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ա ն ա ն հ ր ա ժ ե շ տ պ ա յ մ ա ն ը : Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

Կ ո շ ի ի զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ա ն ս կ զ բ ու ն ք ը : Որպեսզի $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա n_0 բնական թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $n \ge n_0$ և p բնական թվերի համար տեղի ունենա $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ անհավասարությունը:

Եթե $a_n \ge 0$, ապա շարքը կոչվում է *դրական*: Եթե դրական շարքը զուգամետ է (տարամետ է), ապա գրում են $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty\right)$:

Դրական շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար նրա մասնակի գումարների հաջորդականության սահմանափակությունը:

Բ ա ղ դ ա տ մ ա ն հ ա յ տ ա ն ի շ ն ե ր : 1) Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) դրական շարքերի համար ի վերջո տեղի ունի $a_n \le b_n$ անհավասարությունը, ապա (B) շարքի զուգամիտությունից բխում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

2) Եթե $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$, $0 < c < \infty$, ապա (A) և (B) շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ:

3) Եթե ի վերջո $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, ապա (B) շարքի զուգամիտությունից բխում է (A) շարքի զուգամիտությունը:

Դ՝ Ա լ ա մ բ ե ր ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե $a_n > 0$ և $D_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$, երբ $n \ge n_0$, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ եթե $D_n \ge 1$, երբ $n \ge n_0$, ապա շարքը տարամետ է։

Կ ո շ ի ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե $a_n \ge 0$ և $C_n = \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, երբ $n \ge n_0$, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ եթե $C_n \ge 1$, երբ $n \ge n_0$, ապա շարքը տարամետ է։

Կ ո շ ի ի ի ն տ ե գ ր ա լ ա յ ի ն հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե f -ը $[1,+\infty)$-ի վրա ոչ բացասական և չաճող ֆունկցիա է, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ շարքը և $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ։

Շ ա ր ք ի բ ա ց ա ր ձ ա կ և պ ա յ մ ա ն ա կ ա ն զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ու ն ը ։ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը կոչվում է *բացարձակ զուգամետ*, եթե զուգամետ է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ շարքը։ Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ -ը զուգամետ է, բայց բացարձակ զուգամետ չէ, ապա այն կոչվում է *պայմանական* զուգամետ։

X բազմության փոխմիարժեք արտապատկերումը X -ի վրա կոչվում է X բազմության տեղափոխություն։ Տրված է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը։ Բնական թվերի բազմության ցանկացած $\sigma : N \to N$ տեղափոխության համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ -ը կոչվում է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ -ի *տեղափոխված շարք*։

Դ ի ր ի խ լ ե ի թ ե ո ր ե մ ը ։ Բացարձակ զուգամետ շարքի ցանկացած տեղափոխված շարք զուգամետ է և ունի նույն գումարը։

Ռ ի մ ա ն ի թ ե ո ր ե մ ը ։ Պայմանական զուգամետ շարքի անդամները կարելի է տեղափոխել այնպես, որ ստացված շարքի գումարը լինի հավասար նախապես տրված կամայական թվի (կամ $\pm\infty$ -ի)։

Լ ա յ բ ն ի ց ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե $b_n \ge 0$ հաջորդականությունն ի վերջո չաճող է և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ նշանափոխ շարքը զուգամետ է։

Ա բ ե լ ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ b_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ շարքը զուգամետ է։

Դ ի ր ի խ լ ե ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը ։ Եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի A_n մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է, իսկ b_n հաջորդականությունն ի վերջո մոնոտոն է և $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ շարքը զուգամետ է:

Թ վ ա բ ա ն ա կ ա ն գ ո ր ծ ո ղ ու թ յ ու ն ն ե ր : Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են, ապա ցանկացած λ, μ թվերի համար զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ շարքը, ընդ որում՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, :$$

Տրված $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերի *արտադրյալը* (ըստ Կոշիի) սահմանվում է որպես $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարք, որտեղ $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \ \ (n \in N)$,

Թեորեմ: Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը, ինչպես նաև $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ արտադրյալ շարքը, զուգամետ են, ապա $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$:

Մ ե ր տ ե ն ս ի թ ե ո ր ե մ ը : Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ զուգամետ շարքերից առնվազն մեկը բացարձակ զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ արտադրյալ շարքը, ընդ որում՝ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$:

Ա ն վ ե ր ջ ա ր տ ա դ ր յ ա լ : Տրված $p_n \ \ (p_n \neq 0, n \in N)$ թվային հաջորդականության համար $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ սիմվոլը կոչվում է անվերջ արտադրյալ: Այն կոչվում է *զուգամետ*, եթե գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k$ վերջավոր, զրոյից տարբեր սահմանը: Հակառակ դեպքում անվերջ արտադրյալը համարվում է տարամետ: Եթե $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} p_k = 0$ ($\pm\infty$), ապա ասում են, որ անվերջ արտադրյալը տարամիտում է զրոյի ($\pm\infty$ -ի) և գրում՝ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0$ ($\pm\infty$):

Եթե $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ -ը զուգամետ է, ապա $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$:

$\prod_{k=1}^{\infty} p_k$, $p_k > 0$ անվերջ արտադրյալի զուգամիտությունը համարժեք է $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ շարքի զուգամիտությանը:

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ անվերջ արտադրյալը կոչվում է *բացարձակ* զուգամետ, եթե զուգամետ է $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ անվերջ արտադրյալը:

Ա

Հաշվել շարքի գումարը (2414-2418).

2414. $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (|q|<1)$: **2415.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$: **2416.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$:

2417. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$: **2418.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$:

2419. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի անդամները ներկայացված են $a_n = b_{n+1} - b_n$ տեսքով և գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ վերջավոր սահմանը, ապա շարքը զուգամետ է, ընդ որում՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$:

Հաշվել շարքի գումարը (2420-2425).

2420. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$: **2421.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$:

2422. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$: **2423.** $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$:

2424. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$: **2425.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$:

Ստուգել, որ հետևյալ շարքերում բացակայում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը (2426-2429).

2426. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$:

2427. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3}\sin\frac{1}{n^2+2}$:

2428. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}01}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{3}$:

2429. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$:

2430. Ստուգել, որ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի, բայց շարքը տարամետ է.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$; գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

Ելնելով Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2431-2438).

2431. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ $\left(|a_n|\le 10\right)$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{2^n}$:

2432. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$:

2433. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x^n}{n(n+1)}$:

2434. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$:

2435. Զուգամե՞տ է արդյոք $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը, եթե ցանկացած $p\in N$ թվի համար

$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}\right)=0$:

2436. Ապացուցել, որ

ա) եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև նրա ցանկացած k-րդ մնացորդը՝ $\sum_{n=k}^{\infty}a_n$ $(k\in N)$;

բ) եթե շարքի որևէ մնացորդ զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև շարքը:

2437. Ապացուցել, որ եթե շարքը զուգամետ է, ապա նրա k-րդ մնացորդը ձգտում է զրոյի, երբ $k\to\infty$:

2438. Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ և $S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}a_k$ հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը:

Կիրառելով բաղդատման հայտանիշները՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2439-2456).

2439. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$:

Ցուցում: Օգտվել $\frac{1}{n^{\alpha}}<\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$ $(\alpha>1, n>1)$ անհավասարությունից:

2440. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10n+1}$:

2441. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$:

2442. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$:

2443. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^4 2n}{(n+1)(n+2)}$:

2444. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n!}{n\sqrt{n}}$:

2445. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$:

2446. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$:

2447. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}\,n}\right)$:

2448. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2n+1}{n^3+5n+3}$:

2449. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$, $\left(n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0, n\in N\right)$:

2450. $\sum_{n=1}^{\infty}tg\frac{n+2}{n^2+3}$:

2451. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$:

2452. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)\sin\frac{\pi}{n}$:

2453. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n-1}$:

2454. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$:

2455. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-\sqrt{n}}$:

2456. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$:

2457. Դիցուք՝ $a_n\geq 0$, $b_n>0$ $(n\in N)$: Ապացուցել, որ

ա) եթե $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ շարքը զուգամետ է և $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n}<+\infty$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) եթե $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը տարամետ է և $\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} > 0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

2458. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$ սահմանը, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

2459. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ շարքերը զուգամետ են, ապա զուգամետ են նաև $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ շարքերը:

2460. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$ և $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^3$ դրական շարքերը զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ շարքը:

2461. Ապացուցել Դ'Ալամբերի հայտանիշի սահմանային տարբերակը. դիցուք՝ $a_n > 0$ $(n \in N)$ և $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$: Եթե

ա) $q < 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) $q > 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

Բերել օրինակներ, այնպիսիք, որ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը ա) զուգամետ է, բ) տարամետ է:

2462. Ապացուցել Կոշիի հայտանիշի սահմանային տարբերակը. դիցուք՝ $a_n \geq 0$ $(n \in N)$ և $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = q$: Եթե

ա) $q < 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) $q > 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը տարամետ է:

Բերել շարքերի օրինակներ, այնպիսիք, որ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը ա) զուգամետ է, բ) տարամետ է:

Օգտվելով Դ'Ալամբերի կամ Կոշիի հայտանիշներից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2463-2474).

2463. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(n+1)!}$:

2464. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$:

2465. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$:

2466. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$:

2467. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$:

2468. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$:

2469. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$:

2470. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$:

2471. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$:

2472. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$:

2473. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}$:

2474. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$:

Կիրառելով Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2475-2478).

2475. ա) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad(\alpha\in R)$; բ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$:

2476. ա) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2 e^{-n^3}$; բ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+5}$:

2477. ա) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$; բ) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$:

2478. ա) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{\alpha}}$; բ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln n}{n^2}$:

***

Ապացուցել շարքի բացարձակ զուգամիտությունը (2479-2482).

2479. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)}{n\sqrt[3]{n+2}}$:

2480. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln^2 n}{2^n}$:

2481. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-\sqrt{n}} \sin n!$:

2482. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$:

Լայբնիցի հայտանիշի օգնությամբ ապացուցել շարքի զուգամիտությունը (2483-2486).

2483. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$:

2484. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$:

2485. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt[4]{n+1}(n+2)}$:

2486. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$:

2487. Ապացուցել, որ բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է: Կառուցել $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ զուգամետ շարք, այնպիսին, որ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ շարքը լինի տարամետ:

2488. Կառուցել $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ զուգամետ շարք, այնպիսին, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ շարքը լինի տարամետ:

2489. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ շարքը զուգամետ է: Ցույց տալ, որ ցանկացած $r>1$ թվի համար $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r$ շարքը նույնպես զուգամետ է: Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Բերել համապատասխան օրինակ:

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիտությունը (2490-2493).

2490. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$:

2491. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2 e^n}{3^n+1}$:

2492. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+10}$:

2493. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$ $(\alpha \in R)$:

2494. Ի՞նչ կարելի է ասել $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ շարքի զուգամիտության մասին, եթե

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը զուգամետ են;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը՝ տարամետ;

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը տարամետ են:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

2494.1. Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2+4}$;

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2n}{\sqrt{n^5+3}}$;

դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \sin \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

ե) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$;

զ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$;

է) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$;

ը) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{\left(3n^2+2n+1\right)^{\frac{n+3}{2}}}$;

թ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{n}$;

ժ) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \sin \frac{1}{n}$;

ժա) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$;

ժբ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$:

***

2495. Ապացուցել, որ եթե $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ արտադրյալը զուգամետ է, ապա $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$:

2496. Ապացուցել, որ եթե $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ արտադրյալը զուգամետ է և $Q_n = \prod_{m=n+1}^{\infty} p_m$, ապա $\lim_{n\to\infty} Q_n = 1$:

2497. Ապացուցել, որ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ $(p_n > 0)$ անվերջ արտադրյալի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ շարքի զուգամիտությունը: Ցույց տալ նաև, որ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n\right)$:

2498. Ապացուցել, որ $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = 0 \quad (p_n > 0)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\infty$:

2499. Ապացուցել, որ եթե $p_n = 1 + \alpha_n$ և α_n-երը միևնույն նշանի են, ապա $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$-ի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ շարքի զուգամիտությունը:

2500. Ապացուցել, որ եթե $-1 < \alpha_n < 0$ և $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ շարքը տարամետ է, ապա $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) = 0$:

2501. Ստուգել, որ

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots$$

շարքը տարամետ է, սակայն

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

անվերջ արտադրյալը զուգամետ է:

Ապացուցել հավասարությունը (2502-2509).

2502. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$:

2503. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$:

2504. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$:

2505. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2$:

2506. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right) = \frac{1}{1 - x} \quad (|x| < 1)$:

2507. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$:

2508. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$:

2509. $\prod_{n=1}^{\infty} ch\frac{x}{2^n} = \frac{shx}{x}$:

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի զուգամիտությունը (2510-2519).

2510. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

2511. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$:

2512. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$:

2513. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$:

2514. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$:

2515. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$:

2516. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$:

2517. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$:

2518. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$:

2519. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)$:

Բ

Հաշվել շարքի գումարը (2520-2523).

2520. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$:

2521. $\sum_{n=1}^{\infty}nq^n \quad \left(|q|<1\right)$:

2522. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)} \quad \left(k\in N\right)$:

2523. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{2^n}$:

2524. Դիցուք b_n-ը զրոյից տարբեր անդամներով և $d\neq 0$ տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է: Ապացուցել, որ ցանկացած $m\in N$ թվի համար

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_nb_{n+1}\cdots b_{n+m}}=\frac{1}{mdb_1b_2\cdots b_m}:$$

2525. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ դրական, նվազող անդամներով շարքը զուգամետ է, ապա $\lim_{n\to\infty}na_n=0$:

2526. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ $\left(a_n\geq 0\right)$ շարքը զուգամետ է, ընդ որում՝ a_n-ը նվազող է: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ շարքը զուգամետ է:

2527. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \ge 0)$ շարքերը զուգամետ են, ապա զուգամետ են նաև $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ և $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$ շարքերը:

2528. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (b_n \ge 0)$ շարքերը տարամետ են: Ի՞նչ կարելի է ասել ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$ շարքերի զուգամիտության մասին:

2529. Դիցուք՝ $a_n \le c_n \le b_n \ (n \in N)$: Ի՞նչ կարելի է ասել $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքի զուգամիտության մասին, եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը ա) զուգամետ են; բ) տարամետ են:

2530. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ շարքի համար $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, ապա շարքը զուգամետ է, իսկ եթե $\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, ապա շարքը տարամետ է: (Դ՛Ալամբերի հայտանիշ):

Կառուցել $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ դրական զուգամետ շարք, այնպիսին, որ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$:

2531. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \ge 0)$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = p$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = q$: Ապացուցել, որ եթե $pq < 1$, ապա շարքը զուգամետ է:

2532. Դիցուք՝ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \ (a_n \ge 0)$: Ապացուցել, որ

ա) եթե $q < 1$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) եթե $q > 1$, ապա շարքը տարամետ է

(Կոշիի հայտանիշ):

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2533-2534).

2533. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$: **2534.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$:

2535. Ապացուցել, որ Կոշիի հայտանիշն ավելի ուժեղ է քան Դ՚Ալամբերի հայտանիշը. ցանկացած $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ շարքի համար

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}:$$

Կառուցել շարք, այնպիսին, որ $\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, բայց $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$:

2536. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ $(a_n>0)$ շարքը տարամետ է: Ապացուցել Կումերի հայտանիշը. եթե $b_n>0$ $(n\in N)$ և

ա) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left(a_n\frac{b_n}{b_{n+1}}-a_{n+1}\right)>0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(a_n\frac{b_n}{b_{n+1}}-a_{n+1}\right)<0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ շարքը տարամետ է:

2537. Ապացուցել

ա) Ռաաբեի հայտանիշը. եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$, ապա $p>1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $p<1$ դեպքում՝ տարամետ;

բ) Բերտրանի հայտանիշը. եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ շարքի համար $\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\ln n=q$, ապա $q>1$ դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ $q<1$ դեպքում՝ տարամետ:

2538. Համեմատել Դ՚Ալամբերի, Ռաաբեի և Բերտրանի հայտանիշները: Բերել շարքերի օրինակներ, որոնց զուգամիտությունը

ա) հնարավոր է հետազոտել Ռաաբեի հայտանիշի միջոցով և հնարավոր չէ՝ Դ՚Ալամբերի հայտանիշի միջոցով;

բ) հնարավոր է հետազոտել Բերտրանի հայտանիշի միջոցով և հնարավոր չէ՝ Ռաաբեի հայտանիշի միջոցով:

2539. Ապացուցել, որ եթե a_n $(a_n > 0)$ հաջորդականության համար

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty),$$

ապա ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար $a_n = o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $(n \to \infty)$: Ընդ որում, եթե $p > 0$, ապա a_n-ն ի վերջո մոնոտոն է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

2540. Դիցուք $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է և $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + b_n$ $(n \in N)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $c \neq 0$ թիվ, այնպիսին, որ $a_n \sim \frac{c}{n^p}$, երբ $n \to \infty$:

2541. Դիցուք $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ շարքի անդամների համար ճշմարիտ է

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + b_n, \ n \in N,$$

ներկայացումը, ընդ որում $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է: Ապացուցել Գաուսի հայտանիշը. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը

ա) զուգամետ է, երբ $\lambda > 1$ կամ $\lambda = 1$ և $\mu > 1$;

բ) տարամետ է, երբ $\lambda < 1$ կամ $\lambda = 1$ և $\mu \le 1$:

Օգտվելով Ռաաբեի կամ Գաուսի հայտանիշներից՝ հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2542-2549).

2542. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2 - \sqrt{a}\right)\left(2 - \sqrt[3]{a}\right)\cdots\left(2 - \sqrt[n]{a}\right)$ $(a > 0)$:

2543. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$:

2544. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p \frac{1}{n^q}$:

2545. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ $(q > 0)$:

2546. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \frac{1}{n^q}$:

2547. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}\right]^{\alpha}$ $(p>0, q>0)$:

2548. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$:

2549. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$ (հիպերերկրաչափական շարք):

2550. Տրված է $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ դրական անդամներով շարքը: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունեն $\varepsilon>0$ և $n_0\in N$ թվեր, այնպիսիք, որ

ա) $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq 1+\varepsilon$, $n\geq n_0$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leq 1$ $n\geq n_0$, ապա շարքը տարամետ է:

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2551-2552).

2551. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$:

2552. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$:

2553. Դիցուք a_n-ը ոչ բացասական անդամներով ի վերջո նվազող հաջորդականություն է: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ (Կոշիի թեորեմ):

2554. Դիցուք $a_n\downarrow 0$ և $p_m=\max\{n: a_n>2^{-m}\}$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ և $\sum_{n=0}^{\infty}p_n 2^{-n}$ շարքերը միաժամանակ զուգամետ են կամ միաժամանակ տարամետ (Լոբաչևսկու հայտանիշ):

2555. Դիցուք $f:[1;+\infty)\to(0;+\infty)$ ֆունկցիան չաճող է, իսկ $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ ինտեգրալը՝ զուգամետ: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ շարքի $R_m=\sum_{n=m+1}^{\infty}f(n)$ մնացորդի համար ճշմարիտ են հետևյալ գնահատականները.

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)dx \le R_m \le f(m+1) + \int_{m+1}^{\infty} f(x)dx :$$

2556. Ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$; բ) $\frac{\pi}{2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{\pi+1}{2}$:

2557. Դիցուք $f:[1;+\infty)\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է և սահմանափակ: Ապացուցել, որ $a_n = \int_1^n f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} f(k)$ հաջորդականությունը զուգամետ է:

Ապացուցել ասիմպտոտիկ բանաձևը (2558-2561).

2558. $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$,

որտեղ $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$, իսկ C-ն Էյլերի հաստատունն է:

2559. $1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$:

2560. $\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ $(\alpha>1)$:

2561. $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}$ $(0<\theta_n<1)$:

2562. Դիցուք $f:[1;+\infty)\to(0;+\infty)$ և $\varphi:[1;+\infty)\to(0;+\infty)$ ֆունկցիաներից առաջինը նվազող է, իսկ երկրորդը՝ աճող: Դիցուք նաև φ-ն անընդհատ դիֆերենցելի է, $\varphi(x)>x$ և գոյություն ունի

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(\varphi(x))\varphi'(x)}{f(x)} = \lambda$$

վերջավոր սահմանը: Ապացուցել, որ երբ $\lambda<1$, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ շարքը զուգամետ է, իսկ երբ $\lambda>1$՝ տարամետ:

2563. Նախորդ խնդրում ձևակերպված հայտանիշից ստանալ Դ՛Ալամբերի հայտանիշը:

2564. Ապացուցել, որ մոնոտոն և դրական անդամներով $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, երբ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}<\frac{1}{2}$ և տարամետ է, երբ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}>\frac{1}{2}$:

2565. Ցանկացած a_n և b_n հաջորդականությունների համար ապացուցել Հյոլդերի և Մինկովսկու անհավասարությունները.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

որտեղ $1<p<+\infty$ և $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

Ցույց տալ, որ եթե անհավասարության ձախ կողմում շարքը տարամետ է, ապա աջ կողմում գրված շարքերից առնվազն մեկը նույնպես տարամետ է:

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2566-2584).

2566. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$:

2567. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$:

2568. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$:

2569. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$:

2570. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$:

2571. $\sum_{n=1}^{\infty}a^{-\left(b\ln n+c\ln^2 n\right)}$ $(a>0)$:

2572. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$:

2573. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}$:

2574. $\sum_{n=3}^{\infty}\ln\left(\frac{ch\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$:

2575. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$:

2576. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$:

2577. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)$ $(a,b,c>0)$:

2578. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$:

2579. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$ $(\alpha>0)$:

2580. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}\quad(a,b>0)$:

2581. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$:

2582. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$:

2583. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$:

2584. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$:

Հետազոտել տրված a_n ընդհանուր անդամն ունեցող շարքի զուգամիտությունը (2585-2590).

2585. $a_n=\int_n^{n+2}e^{-\sqrt{x}}dx$:

2586. $a_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+x^4}}dx$:

2587. $a_n=\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin x|}{x}dx$:

2588. $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$:

2589. $a_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$:

2590. $a_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^{\alpha}}$:

2591. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ խմբավորված շարքը, $\alpha_n=\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1}a_k\quad(1=p_1<p_2<\cdots)$, նույնպես զուգամետ է և ունի նույն գումարը: Հակադարձ պնդումը ճշմարիտ չէ: Բերել օրինակ:

2592. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը դրական է և $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ խմբավորած շարքը զուգամետ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը նույնպես զուգամետ է:

2593. Ապացուցել, որ եթե

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ խմբավորած շարքը, $\alpha_n=\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1}a_k\quad(1=p_1<p_2<\cdots)$, զուգամետ է,

3) $\sup\limits_n (p_{n+1} - p_n) < +\infty$,

ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է:

2594. Դիցուք շարքը խմբավորված է այնպես, որ յուրաքանչյուր խմբում ընդգրկված անդամները միևնույն նշանի են: Ապացուցել, որ խմբավորված շարքի զուգամիտությունից հետևում է ելակետային շարքի զուգամիտությունը:

2595. Ապացուցել, որ պայմանական զուգամետ շարքը կարելի է խմբավորել այնպես, որ ստացված շարքը լինի բացարձակ զուգամետ:

2596. Դիցուք բնական թվերի բազմության $\sigma(n)$ տեղափոխությունն այնպիսին է, որ $\sup\limits_n |n - \sigma(n)| < \infty$: Ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ զուգամետ է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ շարքը: Ընդսմին՝ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

2597. Դիցուք՝ $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, իսկ σ-ն բնական թվերի բազմության հետևյալ տեղափոխությունն է. $\sigma(2^n) = 2^{n+1}$ $(n \in N)$ և σ-ն $N \setminus \{2^p : p \in N\}$ բազմության վրա մնոտոն է: Ստուգել, որ $\sup\limits_n |n - \sigma(n)| = +\infty$, սակայն $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ շարքը զուգամետ է:

2598. Դիցուք $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է և $\sigma : N \to N$ տեղափոխությունը բավարարում է $\lim\limits_{n\to\infty} \left(|n - \sigma(n)| \sup\limits_{k \ge n} |a_{\sigma(k)}| \right) = 0$ պայմանին: Ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ շարքը զուգամետ է և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$:

Գտնել շարքի գումարը (2599-2601).

2599. $1 - \dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{4} - \dfrac{7}{8} + \cdots$:

2600. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32} + \cdots$:

2601. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \cdots$:

Ցուցում: Օգտվել Էյլերի բանաձևից (տես խնդիր 2558):

2602. Հայտնի է, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$:Գտնել տեղափոխված շարքի գումարը.

ա) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots;$ բ) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots:$

2603. Ստուգել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ զուգամետ շարքի անդամների տեղափոխությունից ստացված $1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$ շարքը տարամետ է:

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2604-2607).

2604. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{10} n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}:$

2605. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+k^2}\right):$

2606. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}:$

2607. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}:$

2608. Դիցուք $b_n>0$ և $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ շարքը զուգամետ է:

2609. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է և $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ շարքը զուգամետ է:

2610. Դիրիխլեի հայտանիշից ստանալ Աբելի հայտանիշը:

2611. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $(a_n>0)$ շարքի համար

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty),$$

որտեղ $p>0$, ապա շարքը զուգամետ է:

2612. Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ շարքը բացարձակ զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ բացարձակ զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը:

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիտությունը (2613-2624).

2613. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$:

2614. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$:

2615. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[n+(-1)^n\right]^p}$:

2616. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}\right]^p}$:

2617. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{n^p+\sin\frac{\pi n}{4}}$:

2618. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{10}}{2^n}$:

2619. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}\quad(0<x<\pi)$:

2620. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sin 2n)\ln^2 n}{n^\alpha}$:

2621. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$:

2622. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$:

2623. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$:

2624. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$:

2625. Դիցուք $R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$, որտեղ $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ և $b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q\neq 0$, երբ $x\geq 1$: Հետազոտել $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n R(n)$ շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիտությունը:

Հետազոտել շարքի բացարձակ և պայմանական զուգամիտությունը (2626-2629).

2626. $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$:

2627. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$:

2628. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$:

2629. $\frac{1}{1^p}-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$:

2630. Դիցուք՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ ։ Ապացուցել, որ գոյություն ունի $q_n \uparrow +\infty$ հաջորդականություն,այնպիսին, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n < +\infty$ ։

2631. Դիցուք՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ ։ Ապացուցել, որ գոյություն ունի $q_n \downarrow 0$ հաջորդականություն, որի համար $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n = +\infty$ ։

Ստուգել հավասարությունը (2632-2634).

2632. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1$ ։ **2633.** $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n \quad (|q| < 1)$ ։

2634. ա) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!}\right) = 1$ ։ բ) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2a)^n}{n!}$ ։

2635. Օրինակով համոզվել, որ Մերտենսի թեորեմում շարքերից մեկի բացարձակ զուգամիտությունն էական է:

Ցուցում: Դիտարկել $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ զուգամետ շարքի քառակուսին:

2636. Ստուգել, որ

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ և } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

տարամետ շարքերի արտադրյալը զուգամետ շարք է:

2637. Ապացուցել, որ եթե դրական անդամներով երկու շարքերից մեկը զուգամետ է, իսկ մյուսը՝ տարամետ, ապա դրանց արտադրյալը տարամետ է:

2638. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքի համար գոյություն ունեն t_n զուգամետ հաջորդականություն ($\lim_{n\to\infty} t_n = T$) և $k \in N$ թիվ, այնպիսիք, որ $a_n = t_n - t_{n+k}$ ։ Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_k - kT \text{ ։}$$

2639. Դիցուք $c_1, c_2, ..., c_k \in R$, $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 0$, $\lim_{n\to\infty} t_n = T$ և $a_n = c_1 t_n + \cdots + c_k t_{n+k-1}$ $(n \in N)$։Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c_1 t_1 + (c_1 + c_2) t_2 + \cdots + (c_1 + \cdots + c_{k-1}) t_{k-1} + (c_2 + 2c_3 + \cdots + (k-1) c_k) T :$$

Գտնել շարքի գումարը (2640-2642).

2640. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{3}{\sqrt{n+1}} - \frac{4}{\sqrt{n+2}} \right)$: **2641.** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln n} - \frac{2}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} \right)$:

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin\frac{\pi}{n} - 2(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1} + (n+2)\sin\frac{\pi}{n+2} \right)$:

2643. Դիցուք ցանկացած $x \in [0;1)$ թվի համար $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը զուգամետ է: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքի գումար Աբելի իմաստով և գրում` $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S$:

Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, ապա $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} S$ (Աբելի թեորեմ):

Կառուցել տարամետ շարք, որն Աբելի իմաստով ունի վերջավոր գումար:

2644. Տրված է $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքը և $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$ $(n \in N)$: Եթե գոյություն ունի $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքի գումար Չեզարոյի իմաստով և գրում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C)}{=} \sigma$: Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sigma$, ապա $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C)}{=} \sigma$:

Կառուցել տարամետ շարք, որը Չեզարոյի իմաստով ունի վերջավոր գումար:

***

Ապացուցել հավասարությունը (2645-2646).

2645. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$: **2646.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$:

Ցուցում: Օգտվել Վալիսի բանաձևից (տես խնդիր 2156):

2647. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ և $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ անվերջ արտադրյալները զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև հետևյալ անվերջ արտադրյալը.

ա) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n+q_n}{2}$; բ) $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$; գ) $\prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n$; դ) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$:

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի զուգամիտությունը (2648-2651).

2648. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$: **2649.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$:

2650. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^q}$, $|x|\le 1$: **2651.** $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$:

2652. Ապացուցել, որ եթե $a_n\neq -1$ և $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ շարքերը զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ անվերջ արտադրյալը:

2653. Դիցուք՝

$$a_n=\begin{cases}-\frac{1}{\sqrt{k}}, n=2k-1,\\ \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, n=2k:\end{cases}$$

Ստուգել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ շարքերը տարամետ են, սակայն $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ անվերջ արտադրյալը զուգամետ է:

2654. Ապացուցել, որ եթե $a_n\neq -1$ և $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ շարքը՝ տարամետ, ապա $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=0$:

2655. Ապացուցել, որ

ա) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (p_n > 0)$ անվերջ արտադրյալը բացարձակ զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ բացարձակ զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ շարքը:

բ) բացարձակ զուգամետ արտադրյալը զուգամետ է:

Բերել անվերջ արտադրյալի օրինակ, որը զուգամետ է, բայց ոչ բացարձակ (պայմանական զուգամետ է):

Հետազոտել անվերջ արտադրյալի բացարձակ և պայմանական զուգամիտությունը (2656-2659).

2656. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$:

2657. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right]$:

2658. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}\right]$:

2659. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$:

2660. Դիցուք՝ $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$: Ապացուցել, որ $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ և $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$ անվերջ արտադրյալները զուգամետ են այն և միայն այն դեպքում, երբ զուգամետ է $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ շարքը:

2661. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \left(|\alpha_n| < \frac{\pi}{4}\right)$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա $\prod_{n=1}^{\infty} tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ անվերջ արտադրյալը զուգամետ է:

2662. Ապացուցել Էյլերի բանաձևը.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^n\right)=\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)} \quad (|q|<1):$$

2663. Ցույց տալ, որ $x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ հաջորդականությունն ունի $a \neq 0$ սահման և այդտեղից ստանալ Ստիրլինգի բանաձևը.

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\left(1+o(1)\right),\ n \to \infty:$$

Ցուցում: $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_1\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$: a -ն գտնելու համար օգտվել Վալիսի բանաձևից:

2664. Հաշվել սահմանը՝

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; գ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$:

Գ.

Հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2665-2668).

2665. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)}{n^2}$, $\nu(n)$-ը n թվի թվանշանների քանակն է:

2666. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$, λ_n -երը $tgx=x$ հավասարման հաջորդական դրական արմատներն են:

2667. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}$, $a_1=\sin x$, $a_{n+1}=\sin a_n$ $\left(n\in N,\sin x>0\right)$:

2668. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{\alpha}$, $a_1=arctgx$, $a_{n+1}=arctga_n$ $\left(n\in N,x>0\right)$:

2669. Դիցուք a_n հաջորդականությունը նվազող է, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ և $b_n=a_n-$ $-2a_{n+1}+a_{n+2}\geq 0$: Ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n=a_1$:

2670. Ապացուցել Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշների հետևյալ ընդհանրացումները.

ա) եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n-b_{n+1}\right|$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքերը զուգամետ են, ապա զուգամետ է նաև $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ շարքը;

բ) եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|b_n-b_{n+1}\right|$ շարքը զուգամետ է, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ շարքը զուգամետ է:

2671-2675 խնդիրներում a_n-ը դրական, նվազող հաջորդականություն է, իսկ $\varphi : N \to N$ ֆունկցիան աճող է և $\varphi(n) > n$:

2671. Ապացուցել անհավասարությունները.

ա) $$\sum_{k=1}^{\varphi(n)-1} a_k < \sum_{k=1}^{\varphi(1)-1} a_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{\varphi(k)}[\varphi(k+1) - \varphi(k)];$$

բ) $$\sum_{k=\varphi(1)+1}^{\varphi(n)} a_k > \sum_{k=2}^{n} a_{\varphi(k)}[\varphi(k) - \varphi(k-1)]:$$

2672. Ապացուցել, որ եթե կամայական $n \in N$ թվի համար

$$\frac{a_{\varphi(n)}[\varphi(n+1) - \varphi(n)]}{a_n} \le q < 1,$$

ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, իսկ եթե

$$\frac{a_{\varphi(n)}[\varphi(n) - \varphi(n-1)]}{a_n} \ge 1, \; n > 1,$$

ապա շարքը տարամետ է:

2673. Նախորդ խնդրում բերված հայտանիշը ձևակերպել սահմանային տարբերակով: Ցույց տալ, որ շարքի գումարի համար ճշմարիտ է

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \frac{1}{1-q} \sum_{n=1}^{\varphi(1)-1} a_n$$

գնահատականը:

2674. Տեղադրելով $\varphi(n) = n+1$՝ նախորդ խնդրի հայտանիշից ստանալ Դ՚Ալամբերի հայտանիշը: Տեղադրելով $\varphi(n) = n+2$, $\varphi(n) = 2n$, $\varphi(n) = n^2$, $\varphi(n) = 2^n$, $\varphi(n) = n!$, $\varphi(n) = 2^{2^n}$, ստանալ զուգամիտության նոր հայտանիշներ:

2675. Օգտվելով 2671 խնդրում բերված անհավասարություններից՝ ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ կամ տարամետ է $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n a_{p^n}$ ($p \in N$, $p > 1$) շարքերի հետ միաժամանակ:

2676. Դիցուք՝ $f \in C^1(R_+)$ և $\int_0^{\infty} |f'(x)| dx < +\infty$: Ապացուցել, որ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ զուգամետ է $\int_0^{\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը:

2677. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \geq 0)$ շարքը տարամետ է: Հետևու՞մ է արդյոք այդտեղից, որ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքը զուգամետ է, եթե

ա) $b_n = \dfrac{a_n}{1+na_n}$; բ) $b_n = \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$; գ) $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n^2}$; դ) $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$:

2678. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$ շարքը տարամետ է և $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{A_n^{\alpha}}$ շարքը զուգամետ է, երբ $\alpha > 1$, տարամետ է, երբ $\alpha \leq 1$:

2679. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0)$ շարքը զուգամետ է և $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_{n-1}^{\alpha}}$ շարքը $0 < \alpha < 1$ դեպքում զուգամետ է, իսկ $\alpha \geq 1$ դեպքում՝ տարամետ: Օրինակով համոզվել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{R_n^{\alpha}}$ շարքի համար նույնատիպ պնդումը ճշմարիտ չէ:

2680. Դիցուք a_n-ը դրական և աճող հաջորդականություն է: Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ a_n-ը սահմանափակ է:

2681. Դիցուք a_n դրական հաջորդականությունը չնվազող է, $a_n \leq n$ և $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$: Ապացուցել, որ կամայական $\alpha > 1$ թվի համար $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a_n}{A_n}\right)^{\alpha}$ շարքը զուգամետ է:

2682. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ դրական և նվազող անդամներով շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ շարքը:

2683. Դիցուք՝ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ և $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n - a_{n-1}| < +\infty$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$:

2684. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ շարքը զուգամետ է և $na_n \downarrow 0$, ապա $\lim_{n\to\infty} na_n \ln n = 0$:

2685. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ դրական, չաճող անդամներով շարքը տարամետ է, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ շարքը, որտեղ $\varepsilon_n = \pm 1$, զուգամետ: Ապացուցել, որ

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} \le 0 \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n}:$$

2686. Տրված է՝ a_n-ը դրական, չաճող հաջորդականություն է և $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ շարքը, որտեղ $\varepsilon_n = \pm 1$, զուգամետ է: Ապացուցել, որ $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) a_n = 0$:

2687. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը պայմանական զուգամետ է: Ապացուցել, որ ցանկացած x թվի համար $\varepsilon_n = \pm 1$ հաջորդականությունը կարելի է ընտրել այնպես, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ շարքը լինի զուգամետ և ունենա x գումար:

2688. Տրված է՝ a_n և b_n հաջորդականությունները մոնոտոն են, $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$ և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ շարքերը տարամետ են:

Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$ շարքը տարամետ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

Ցույց տալ, որ խնդրի պայմաններում ցանկացած a_n հաջորդականության համար $\sum_{n=1}^{\infty} \min\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\}$ շարքը տարամետ է:

2689. Դիցուք՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $q_n \uparrow +\infty$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{q_n} = +\infty:$$

2690. Կառուցել a_n հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքը լինի զուգամետ, իսկ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ շարքը՝ տարամետ:

2691. Դիցուք՝ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ և $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, որտեղ $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 A_1^{-1} + a_2 A_2^{-1} + \cdots + a_n A_n^{-1}}{\ln A_n} = 1:$$

2692. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, ապա $\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 0$:

2693. Ապացուցել Կառլեմանի անհավասարությունը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le e \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n > 0):$$

2694. Ապացուցել, որ ցանկացած a_n դրական հաջորդականության համար ճշմարիտ է անհավասարությունը.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a_n^2 + a_{n+1}^2 + \cdots}{n}} :$$

2695. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty$, ապա հետևյալ շարքերից յուրաքանչյուրը զուգամետ է:

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}$;

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_n}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}$:

2696. Դիցուք a_n-ը դրական,աճող հաջորդականություն է և $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n} < +\infty$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n} < +\infty$:

2697. Կասենք, որ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքն ունի (L) հատկությունը, եթե $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(a_n)$:

ա) Ապացուցել, որ եթե $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$, ապա շարքն ունի (L) հատկությունը: Օրինակով համոզվել, որ հակադարձ պնդումը ճշմարիտ չէ:

բ) Ապացուցել, որ (L) հատկություն ունեցող ցանկացած շարքի և ցանկացած $q \in (0;1)$ թվի համար գոյություն ունեն m_0 և n_0 բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$\frac{a_{n+m_0}}{a_n} < q \text{, երբ } n \geq n_0 :$$

գ) Ապացուցել, որ եթե $a_n \neq 0 \ (n \in N)$, a_n-ը մոնոտոն ձգտում է զրոյի և $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ շարքն ունի (L) հատկությունը, ապա $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = O\left(\frac{1}{a_n}\right)$:

2698. Դիցուք՝ $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}^2 \ (n \in Z_+)$: Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա $a_n = 0 \ (n \in Z_+)$:

2699. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքից հեռացվեն այն անդամները, որոնց հայտարարների տասնորդական ներկայացման մեջ պարունակվում է 9 թվանշանը, ապա ստացված շարքը կլինի զուգամետ:

2700. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ շարքի անդամները տեղափոխվեն այնպես, որ p հաջորդական դրական անդամների խմբին հաջորդի q հաջորդական բացասական անդամների խումբ, ապա ստացված շարքի գումարը կլինի՝ $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$:

2701. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ հարմոնիկ շարքի անդամների նշանները փոխվեն այնպես, որ p դրական անդամներին հաջորդի q բացասական անդամ, ապա ստացված շարքը կլինի զուգամետ միայն $p = q$ դեպքում:

2702. Ապացուցել, որ կամայական $\alpha > 0$ թվի համար

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} < 1 :$$

2703. Ապացուցել, որ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \quad և \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

զուգամետ շարքերի արտադրյալը զուգամետ է, այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha+\beta>1$:

2704. Դիցուք a_n-ը դրական, չնվազող հաջորդականություն է և $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$:

$$\tau=\inf\left\{p>0:\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}<+\infty\right\}$$

թիվը կոչվում է a_n հաջորդականության զուգամիտության ցուցիչ: Եթե կամայական $p>0$ թվի համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^p}$ շարքը տարամետ է, ապա ընդունում են $\tau=+\infty$: Ապացուցել, որ $\tau=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln a_n}$:

2705. Եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ շարքի համար գոյություն ունի A թիվ, այնպիսին, որ

$$A-(a_0+a_1+\cdots+a_n)=\theta_n a_{n+1} \quad (0<\theta_n<1, n\in N),$$

ապա կասենք, որ շարքը փաթաթում է A-ն: Ապացուցել, որ եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ շարքը նշանափոխ է և գոյություն ունի A թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած n-ի համար $A-(a_0+a_1+\cdots+a_n)$ տարբերությունն ունի a_{n+1} անդամի նշանը, ապա շարքը փաթաթում է A-ն:

2705.1. Դիցուք $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ շարքի համար գոյություն ունի A թիվ, այնպիսին, որ $\left|A-(a_0+a_1+\cdots+a_n)\right|<\left|a_{n+1}\right|$: Ապացուցել, որ եթե $|a_n|$ հաջորդականությունը նվազող է, ապա a_n-ը նշանափոխ է և $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ շարքը փաթաթում է A-ն:

Տրված է հետևյալ անվերջ աղյուսակը՝

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots$

$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots$

. . . .

$a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots$

. . . . :

Նշանակենք $A_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ ։ Կասենք, որ $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ կրկնակի շարքը զուգամետ է (ըստ Պրինգսհեյմի) և ունի A գումար, եթե $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in N \; \left(m, n \geq n_0 \Rightarrow \left|A_{mn} - A\right| < \varepsilon\right)$։

2706. Ապացուցել, որ եթե $a_{mn} \geq 0$, ապա $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ կրկնակի շարքի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար $\{A_{mn} : m, n \in N\}$ բազմության սահմանափակությունը:

2707. Կառուցել $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ զուգամետ կրկնակի շարք, որի համար $\{a_{mn} : m, n \in N\}$ բազմությունը սահմանափակ չէ:

2708. Դիցուք՝ $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = A$: Ապացուցել, որ եթե

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S_m$ և $\sum_{m=1}^{\infty} S_m = S$, ապա $A = S$;

բ) $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = S'_n$ և $\sum_{n=1}^{\infty} S'_n = S'$, ապա $A = S'$:

2709. Դիցուք $\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ կրկնակի շարքի համար $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = S_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = S'_n$ և $\sum_{m=1}^{\infty} S_m = S$: Ապացուցել, որ

ա) $\sum_{m=1}^{\infty} r_m^{(k)} = R_k$ շարքը, որտեղ $r_m^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_{mn}$, զուգամետ է;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} S'_n = S''$ շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\lim_{k\to\infty} R_k = R$ վերջավոր սահմանը;

գ) $S'' = S$ հավասարությունը ճշմարիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $R = 0$:

2710. Տրված է a_n հաջորդականությունը: Նշանակենք՝

$\Delta^0 a_n = a_n$,

$\Delta^1 a_n = a_n - a_{n+1}$,

. . . . ,

$$\Delta^{k+1}a_n = \Delta\left(\Delta^k a_n\right) = \Delta^k a_n - \Delta^k a_{n+1} \quad (n = 0,1,2,\ldots):$$

Ապացուցել հավասարությունը.

$$\Delta^k a_n = a_n - C_k^1 a_{n+1} + C_k^2 a_{n+2} - \cdots + (-1)^k a_{n+k}:$$

2711. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}$ շարքը կոչվում է $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ շարքի Էյլերի ձևափոխություն: Ապացուցել, որ եթե Էյլերի ձևափոխությունը զուգամետ է, ապա

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta^k a_n}{2^k} = 0 \quad (n = 0,1,2,\ldots):$$

2712. Ապացուցել, որ եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ շարքը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև նրա Էյլերի ձևափոխությունը (տես նախորդ խնդիրը), ընդ որում՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k a_0}{2^{k+1}}:$$

Ապացուցել հավասարությունը (2713-2714).

2713. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}:$ **2714.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!}:$

2715. Ապացուցել, որ եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} A$ (տես խնդիր 2643) և $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \to \infty)$, ապա $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ (Տաուբերի թեորեմ):

2716. Ապացուցել, որ եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} A$ և

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0,$$

ապա $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$:

2717. Ապացուցել, որ եթե $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(C)}{=} \sigma$ (տես խնդիր 2644), ապա

ա) $a_n = o(n)$ $(n \to \infty)$; բ) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \overset{(A)}{=} \sigma$:

2718. Բերել Աբելի իմաստով զուգամետ շարքի օրինակ, որը Չեզարոյի իմաստով զուգամետ չէ:

2719. Ռիմանի ձետա-ֆունկցիայի՝ $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ -ի, համար ստանալ

$$\zeta(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}$$

ներկայացումը, որտեղ p_n -ը պարզ թվերի հաջորդականությունն է:

2720. Ապացուցել, որ $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ անվերջ արտադրյալը և $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ շարքը տարամետ են, որտեղ p_n - ը պարզ թվերի հաջորդականությունն է:

2721. Դիցուք a_n հաջորդականությունը բավարարում է $0<a_n<a_{n+1}+a_n^2$ $(n\in N)$ պայմանին: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ շարքը տարամետ է:

Գլուխ 11

Ֆունկցիոնալ հաջորդականություններ և շարքեր

Ս ա հ մ ա ն ու մ ։ $f_1, f_2, ..., f_n, ...$ -ը կոչվում է *ֆունկցիոնալ հաջորդականություն*, եթե նրա բոլոր անդամները միևնույն $X \subset R$ բազմության վրա տրված ֆունկցիաներ են։ X բազմության այն կետերի ենթաբազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար $f_n(x)$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է, կոչվում է f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականության *զուգամիտության տիրույթ*։ Եթե $E \subset X$ բազմության ցանկացած կետում գոյություն ունի վերջավոր սահման՝ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, ապա այն կոչվում է f_n հաջորդականության *սահման* E -ի վրա։ Ասում են նաև, որ f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը իր զուգամիտության տիրույթում ձգտում է f ֆունկցիային *կետորեն*, կամ *կետ առ կետ* և գրում՝ $f_n \to f$ ։

Համանմանորեն, տրված $u_n : X \to R$ $(n \in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության համար $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(x \in X)$ շարքն անվանում են *ֆունկցիոնալ շարք*, $U_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ մասնակի գումարների հաջորդականության զուգամիտության տիրույթը՝ ֆունկցիոնալ շարքի *զուգամիտության տիրույթ*, իսկ այդ տիրույթում $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ բանաձևով որոշված ֆունկցիան՝ ֆունկցիոնալ շարքի *գումար*։

Հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ու ն ։ Կասենք, որ f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը A բազմության վրա զուգամիտում է f ֆունկցիային հավասարաչափ և կգրենք՝ $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(x \in A)$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in N \, \forall n \in N \, \forall x \in A \left(n \ge n_0 \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon\right)։$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը կանվանենք A բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ, եթե A -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը։

Հ ա վ ա ս ա ր ա չ ա փ զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ա ն հ ա յ տ ա ն ի շ ն ե ր ։ Կոշիի սկզբունքը։

(U) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը A բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in N \, \forall m, n \in N \, \forall x \in A \left(m > n \ge n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| < \varepsilon \right)։$$

Վայերշտրասի հայտանիշը: Եթե գոյություն ունի $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ զուգամետ շարք, այնպիսին, որ

$$\left|u_n(x)\right| \le c_n \ (n \in N, x \in A),$$

ապա (U)-ն A բազմության վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է: Այս պայմաններում $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքն անվանում են (U) շարքի *զուգամետ մաժորանտ*:

Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը A բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, եթե

Ա) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը A-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ $v_n(x)$ հաջորդականությունը յուրաքանչյուր $x \in A$ կետում մոնոտոն է և A-ի վրա՝ հավասարաչափ սահմանափակ $\left(\exists M \in R\ \forall n \in N\ \forall x \in A \left(\left|v_n(x)\right| \le M\right)\right)$;

Դ) $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ հաջորդականությունը A բազմության վրա հավասարաչափ սահմանափակ է, իսկ $v_n(x)$-ը յուրաքանչյուր $x \in A$ կետում մոնոտոն է և A-ի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է զրոյի:

Շ ա ր ք ի գ ու մ ա ր ի ֆ ու ն կ ց ի ո ն ա լ հ ա տ կ ու թ յ ու ն ն ե ր ը : Գումարի անընդհատությունը: Դիցուք (U) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքի անդամները $x_0 \in A$ կետում անընդհատ են: Եթե շարքը A բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա նրա գումարը x_0 կետում անընդհատ է:

Դինիի թեորեմը: Դիցուք (U) շարքի անդամները $[a;b]$ հատվածում անընդհատ են և ոչ բացասական: Եթե շարքի գումարը $[a;b]$-ում նույնպես անընդհատ է, ապա շարքը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Թեորեմ անդամ առ անդամ սահմանային անցման վերաբերյալ: Դիցուք (U) շարքը A բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է և a-ն A-ի կուտակման կետ է: Եթե ցանկացած n բնական թվի համար գոյություն ունի $c_n = \lim_{x \to a} u_n(x)$ վերջավոր սահմանը, ապա

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ շարքը զուգամետ է;

բ) a կետում գոյություն ունի (U) շարքի գումարի վերջավոր սահման, ընդ որում՝

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x):$$

Թեորեմ անդամ առ անդամ ինտեգրման վերաբերյալ: Եթե (U) շարքի անդամներն $[a;b]$ հատվածում Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի են և շարքը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա շարքի գումարն այդ հատվածում նույնպես ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx:$$

Թեորեմ անդամ առ անդամ դիֆերենցման վերաբերյալ: Դիցուք (U) շարքի անդամները $[a;b]$ հատվածում դիֆերենցելի են: Եթե շարքը որևէ կետում զուգամետ է, իսկ (U') $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ ֆունկցիոնալ շարքն $[a;b]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա (U) շարքը նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է, շարքի գումարը $[a;b]$-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x):$$

Աստիճանային շարքեր: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots$ տեսքի ֆունկցիոնալ շարքը, որտեղ $a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots$ թվերը հաստատուն գործակիցներ են, իսկ x_0-ն տրված թիվ է, կոչվում է *աստիճանային շարք*:

Աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը x_0-R և x_0+R ծայրակետերով բաց, փակ, կիսաբաց, վերջավոր կամ անվերջ $(R=+\infty)$ միջակայք է, որտեղ R-ը, որն անվանում են շարքի *զուգամիտության շառավիղ*, կարելի է հաշվել Կոշի-Ադամարի բանաձևով՝

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho},\text{ երբ } 0<\rho=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<+\infty,\\ +\infty,\text{ երբ } \rho=0,\\ 0,\text{ երբ } \rho=+\infty,\end{cases},$$

կամ՝

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

բանաձևով, եթե աջ կողմում սահմանը գոյություն ունի:

Դիցուք $R\neq 0$:

Թեորեմ: Ցանկացած $0<r<R$ թվի համար աստիճանային շարքը $[x_0-r;x_0+r]$ հատվածի վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է:

Հետևանք: Աստիճանային շարքի գումարը $(x_0-R;x_0+R)$ միջակայքում (զուգամիտության միջակայքում) անընդհատ ֆունկցիա է:

Թեորեմ: Եթե աստիճանային շարքը զուգամիտության միջակայքի x_0+R ծայրակետում զուգամետ է, ապա $[x_0;x_0+R]$ հատվածի վրա այն հավասարաչափ զուգամետ է:

Հետևանք (Աբելի թեորեմը): Եթե աստիճանային շարքը զուգամետ է զուգամիտության միջակայքի ծայրակետում, ապա նրա գումարը այդ ծայրակետում անընդհատ է:

Թեորեմ: Աստիճանային շարքի գումարը իր զուգամիտության միջակայքի բոլոր կետերում անվերջ դիֆերենցելի է, իսկ միջակայքում ընկած ցանկացած հատվածի վրա՝ ինտեգրելի: Ընդսմին, թե՛ դիֆերենցումը և թե՛ ինտեգրումը կարելի է կատարել անդամ առ անդամ.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-x_0)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}:$$

Ավելացնենք, որ աջ կողմում գրված աստիճանային շարքերի զուգամիտության շառավիղները համընկնում են ելակետային շարքի զուգամիտության շառավղին:

Թ ե յ լ ո ր ի շ ա ր ք : Դիցուք $f: X \to R$ ֆունկցիան X բազմության x_0 ներքին կետում անվերջ դիֆերենցելի է:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots$$

աստիճանային շարքն անվանում են x_0 կետում f ֆունկցիայի *Թեյլորի շարք*: Շարքի $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ գործակիցներն անվանում են *Թեյլորի գործակիցներ*:

Սահմանում: $f:(a;b)\to R$ ֆունկցիան $x_0\in(a;b)$ կետում կոչվում է *անալիտիկ*, եթե գոյություն ունի x_0-ի $U_{x_0}\subset(a;b)$ շրջակայք, որում f-ը վերլուծվում է զուգամետ աստիճանային շարքի.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad \left(x\in U_{x_0}\right):$$

Որպեսզի f-ը x_0-ում լինի անալիտիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ f-ը x_0-ում լինի անվերջ դիֆերենցելի և, բացի այդ, գոյություն ունենա x_0-ի U_{x_0} շրջակայք, այնպիսին, որ x_0 կետում f ֆունկցիայի համար գրված Թեյլորի շարքը զուգամիտի $f(x)$-ին:

Թեորեմ: Եթե f ֆունկցիան x_0 կետում անալիտիկ է, ապա նրա վերլուծման արդյունքում ստացվող աստիճանային շարքը ոչ այլ ինչ է, եթե ոչ x_0 կետում այդ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը:

Ֆ ու ր ի ե ի շ ա ր ք ե ր : Պայմանավորվենք գրել $f\in\Re_p[a;b]$ $(p=1,2)$, եթե f^p և $|f|^p$ ֆունկցիաները $[a;b]$-ում Ռիմանի կամ անիսկական իմաստով ինտեգրելի են:

Սահմանում: $f,g\in\Re_2[a;b]$ ֆունկցիաները կոչվում են օրթոգոնալ, եթե

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0:$$

Ֆունկցիաների $\varphi_n\in\Re_2[a;b]$ $(n\in Z_+)$ հաջորդականությունը կոչվում է օրթոնորմավորված համակարգ, եթե

$$\int_a^b\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\delta_{m,n}=\begin{cases}0, m\neq n,\\ 1, m=n \ (m,n\in Z_+):\end{cases}$$

Տրված $f\in\Re_1[a;b]$ ֆունկցիայի համար

$$c_n=\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n\in Z_+)$$

թվերը կոչվում են *Ֆուրիեի գործակիցներ*: Այդ գործակիցներով գրված $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքն անվանում են f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի շարք* ըստ φ_n օրթոնորմավորված համակարգի և գրում.

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x):$$

Բ ե ս ե լ ի ա ն հ ա վ ա ս ա ր ո ւ թ յ ո ւ ն ը : Ցանկացած $f \in \Re_2[a;b]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների համար ճշմարիտ է

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

անհավասարությունը:

Ե ռ ա ն կ յ ո ւ ն ա չ ա փ ա կ ա ն շ ա ր ք ե ր : Եռանկյունաչափական համակարգը՝

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots$$

$[-\pi;\pi]$ հատվածում օրթոնորմավորված համակարգի դասական օրինակ է:

Ցանկացած $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots;\ \beta_1,\beta_2,\ldots$ գործակիցներով գրված

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

շարքը կոչվում է *եռանկյունաչափական շարք*:

Տրված $f \in \Re_1[-\pi;\pi]$ ֆունկցիայի համար

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx \quad (n \in Z_+, m \in N)$$

թվերը, չնայած ընդհանուր սահմանումից աննշան շեղմանը, նույնպես անվանում են f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ: Այս դեպքում f-ի Ֆուրիեի շարքն ընդունում է

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

տեսքը: Նշանակենք

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1} \qquad (n \in Z_+):$$

Ճշմարիտ են հետևյալ ներկայացումները.

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt, \qquad \sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Phi_n(x-t)dt,$$

որտեղ

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u} \quad (n \in N),$$

$$\Phi_n(u)=\frac{D_0(u)+\cdots+D_n(u)}{n+1}=\frac{1}{2n}\left[\frac{\sin\frac{n+1}{2}u}{\sin\frac{1}{2}u}\right]^2 \qquad (n\in N)$$

ֆունկցիաները կոչվում են համապատասխանաբար Դիրիխլեի և Ֆեյերի կորիզներ: Այս ներկայացումները հնարավորություն են տալիս հետազոտելու Ֆուրիեի շարքի վարքը և, զուգամիտության դեպքում, հաշվելու շարքի գումարը:

Ռ ի մ ա ն ի լ ո կ ա լ ի զ ա ց ի ա յ ի ս կ զ բ ու ն ք ը : Ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի վարքը տրված x_0 կետում բացառապես կախված է x_0 -ի շրջակայքում ֆունկցիայի արժեքներից: Այլ կերպ՝ եթե f և g ֆունկցիաները x_0 կետի շրջակայքում համընկնում են, ապա f -ի և g -ի Ֆուրիեի շարքերը այդ կետում կա՛մ միաժամանակ տարամետ են, կա՛մ ունեն միևնույն գումարը:

Ֆ ու ր ի ե ի շ ա ր ք ի զ ու գ ա մ ի տ ու թ յ ա ն հ ա յ տ ա ն ի շ ն ե ր : $f:R\to R$ 2π -պարբերական ֆունկցիան կանվանենք *կտոր առ կտոր դիֆերենցելի*, եթե գոյություն ունի $[-\pi;\pi]$ հատվածի $P=(x_0,\ \ldots,x_n)$ տրոհում, այնպիսին, որ տրոհման Δ_i հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում f -ը դիֆերենցելի է, տրոհման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ և, բացի այդ, գոյություն ունեն

$$\lim_{\Delta x\to\pm 0}\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i\pm 0)}{\Delta x} \qquad (i=0,1,\ldots,n)$$

վերջավոր սահմանները:

$f:R\to R$ 2π -պարբերական ֆունկցիան կանվանենք *կտոր առ կտոր մոնոտոն*, եթե գոյություն ունի $[-\pi;\pi]$ հատվածի տրոհում, այնպիսին, որ տրոհման հատվածներից յուրաքանչյուրի ներսում f -ը մոնոտոն է, իսկ տրոհման կետերում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ:

Լիպշիցի հայտանիշը: Կտոր առ կտոր դիֆերենցելի f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ցանկացած x_0 կետում զուգամետ է և ունի $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ գումար: Մասնավորապես, եթե f -ը x_0 կետում անընդհատ է, ապա շարքը զուգամիտում է $f(x_0)$ -ին:

Դիրիխլեի հայտանիշը: Կտոր առ կտոր մոնոտոն f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը ցանկացած x_0 կետում զուգամետ է և ունի $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$ գումար:

Ֆեյերի թեորեմը: Դիցուք $f\in C[-\pi;\pi]$ և $f(-\pi)=f(\pi)$: f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը Չեզարոյի իմաստով $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$-ին. $\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x)$ $(x\in[-\pi;\pi])$:

Տրված $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ և $\beta_1,\ldots,\beta_m$ $\left(\alpha_m^2+\beta_m^2\neq 0\right)$ գործակիցներով գրված $T(x)=\alpha_0+$ $+\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$ տեսքի ֆունկցիան անվանում են m -րդ կարգի եռանկյունաչափական բազմանդամ:

Վայերշտրասի առաջին թեորեմը: Ցանկացած $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականություն, որն $[a;b]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f -ին:

Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը: Ցանկացած $f \in C[-\pi;\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, ֆունկցիայի համար գոյություն ունի եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականություն, որը $[-\pi;\pi]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f -ին:

Ե ռ ա ն կ յ ու ն ա չ ա փ ա կ ա ն հ ա մ ա կ ա ր գ ի լ ր ի վ ու թ յ ու ն ը և փ ա կ ու - թ յ ու ն ը :

Սահմանում: $[a;b]$ հատվածի վրա տրված ֆունկցիաների φ_n օրթոգոնալ համակարգը $\mathrm{M} \subset \Re_2[a,b]$ դասում կոչվում է *լրիվ*, եթե գոյություն չունի այդ դասին պատկանող նույնաբար զրոյից տարբեր ֆունկցիա, որն օրթոգոնալ է φ_n համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին:

Սահմանում: φ_n օրթոնորմավորված համակարգը $\Re_2[a;b]$ դասի որևէ ենթաբազմության վրա կոչվում է *փակ*, եթե այդ ենթաբազմությանը պատկանող ցանկացած f ֆունկցիայի համար Բեսելի անհավասարությունը վերածվում է հավասարության.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b f^2(x)dx \quad \text{(Պարսևալի հավասարություն):}$$

Թեորեմ: Եռանկյունաչափական համակարգը $C[-\pi;\pi]$ դասում լրիվ է, իսկ $\Re_2[-\pi;\pi]$-ում՝ փակ:

Վերջին փաստի կապակցությամբ ասում են նաև, որ $\Re_2[-\pi;\pi]$ դասին պատկանող ցանկացած f ֆունկցիայի համար ճշմարիտ է Պարսևալի հավասարությունը.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right):$$

Ա

Գտնել ֆունկցիոնալ հաջորդականության զուգամիտության տիրույթը և հաշվել սահմանը (2722-2730).

2722. ա) $f_n(x)=x^n$; բ) $f_n(x)=\sin^n x$; գ) $f_n(x)=\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^n$:

2723. ա) $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{n+1}$; բ) $f_n(x)=\dfrac{2n^2x^4}{n^2+3n\sin^2 nx}$:

2724. ա) $f_n(x)=(x+1)arctgx^n$; բ) $f_n(x)=narctg(nx^2)$:

2725. $f_n(x)=\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n$; **2726.** $f_n(x)=(-1)^n e^{-n\sin x}$:

2727. ա) $f_n(x)=\dfrac{[nx]}{n}$; բ) $f_n(x)=\dfrac{[nx]}{nx}$:

2728. ա) $f_n(x)=\dfrac{\ln(nx)}{[nx^2]+1}$; բ) $f_n(x)=\dfrac{\sin(n\sqrt{x})}{\ln(n+1)}$:

2729. ա) $f_n(x)=\sqrt[n]{x^{2n}+n^{2x}}$; բ) $f_n(x)=\sqrt[n]{e^{-nx}+n^{10}}$ ։

2730. ա) $f_n(x)=n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$; բ) $f_n(x)=n\left(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{2n}}\right)$ ։

Գտնել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը: Պարզել, այդ տիրույթի որ կետերում է շարքը բացարձակ զուգամետ (2731-2740).

2731. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$; գ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{x^n}$ ։

2732. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^n}{n}$; գ) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}$ ։

2733. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ ։

2734. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}nxe^{-nx}$ ։

2735. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n tg\,\frac{x}{2^n}$ ։

2736. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}\sin nx$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}e^{-n^2\sin x}$ ։

2737. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi x}{n}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi nx}{n\ln^2(n+1)}$ ։

2738. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\ln^n\left(x^2+2\right)$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+4}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^n$ ։

2739. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{\sqrt[3]{n}}$ ։

2740. ա) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n$ ։

Ստուգել, որ նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է (2741-2748).

2741. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$, $0\le x<+\infty$ ։ **2742.** $f_n(x)=\sin^n x$, $0\le x\le\frac{2\pi}{5}$ ։

2743. $f_n(x)=\frac{\sin\left(n!x^3\right)}{\sqrt[n]{n!}}$, $-\infty<x<+\infty$ ։

2744. $f_n(x)=e^{-n(x^2+1)}$, $-\infty<x<+\infty$ ։

2745. $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{x+n}$, $1\le x\le 100$ ։ 2746. $f_n(x)=n^{\frac{3}{4}}xe^{-\sqrt{nx}}$, $0\le x<+\infty$ ։

2747. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$, $-\infty<x<+\infty$ ։

2748. $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$, $-\infty<x<+\infty$ ։

2749. Ապացուցել, որ $f_n(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0 \text{ ։}$$

2750. Ապացուցել, որ եթե $f_n(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային կետորեն, բայց ոչ հավասարաչափ, ապա գոյություն ունեն՝ $\varepsilon_0>0$ թիվ, X բազմության կետերի x_k հաջորդականություն և f_n հաջորդականության f_{n_k} ենթահաջորդականություն, այնպիսիք, որ $\left|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)\right|\ge\varepsilon_0$, $k=1,2,\ldots$ ։

Հետազոտել նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունը (2751-2756).

2751. $f_n(x)=x^n$, ա) $0\le x\le 0{,}9$; բ) $0\le x<1$ ։

2752. $f_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, $0\le x\le 1$ ։

2753. $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}$, ա) $0\le x\le 100$; բ) $0\le x<+\infty$ ։

2754. $f_n(x)=arctg\dfrac{n}{x}$, ա) $0<x\le 100$; բ) $0<x<+\infty$ ։

2755. $f_n(x)=\cos\dfrac{\pi x^n}{2}$, ա) $0\le x\le 0{,}9$; բ) $0\le x\le 1$ ։

2756. $f_n(x)=arctg\left(e^{\frac{x}{n}}\right)$, ա) $0\le x\le a<+\infty$; բ) $0\le x<+\infty$ ։

2757. Տրված է $f: X \to R$ ֆունկցիան: Ստուգել, որ $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ ($n \in N$, $[a]$-ն a-ի ամբողջ մասն է) հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային:

2758. Տրված ֆունկցիոնալ շարքի համար կառուցել զուգամետ մաժորանտ և համոզվել, որ շարքը նշված բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x}{1+n^4x^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right)^n$, $-\infty < x < +\infty$;

ե) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n\ln^2(n+1)}$, $-1 \le x \le 1$;

զ) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sin^{2n} x$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$;

է) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{-nx^2}$, $|x| \ge \delta > 0$:

2759. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքն այդ բազմության վրա նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է: Ստուգել, որ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ շարքը $[0;1]$ հատվածի վրա թե՛ բացարձակ և թե՛ հավասարաչափ զուգամետ է, սակայն $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ շարքը նույն այդ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ չէ:

2760. Ապացուցել, որ եթե զուգամետ ֆունկցիոնալ շարքի ընդհանուր անդամը ոչ հավասարաչափ է ձգտում զրոյի, ապա շարքի զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ:

Հետազոտել նշված բազմության վրա շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը (2761-2768).

2761. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, $|x| \le 1$: բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 \le x < +\infty$:

2762. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ա) $0 \le x \le a < +\infty$; բ) $0 \le x < +\infty$:

2763. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, ա) $|x| \le a < +\infty$; բ) $-\infty < x < +\infty$:

2764. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\ln\left(1+\frac{x^2}{n^n}\right)$, ա) $|x| \le a < +\infty$; բ) $-\infty < x < +\infty$:

2765. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ntgx}$, ա) $0 < \varepsilon \le x < \frac{\pi}{2}$; բ) $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

2766. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n^2}{x}}$, $0 < x < +\infty$:

2767. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{1}{2^n}$, $-2 < x < 2$:

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x-1}{x^n}$, $1 \le x < +\infty$:

***

Հետազոտել տրված միջակայքում շարքի գումարի անընդհատությունը (2769-2772).

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $|x| < 1$:

2770. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$, ա) $0 \le x < 1$; բ) $0 \le x \le 1$:

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}$, $-\infty < x < +\infty$:

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$, $x \ge 0$:

2773. Ցույց տալ, որ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ֆունկցիան թվային առանցքի վրա անընդհատ դիֆերենցելի է:

2774. Ստուգել, որ Ռիմանի ձետա-ֆունկցիան՝ $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$-ը, $(1;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ է: Համոզվել նաև, որ այդ միջակայքում $\zeta(x)$-ն անվերջ դիֆերենցելի է:

2775. Ստուգել, որ թվային առանցքի վրա ամենուրեք խզվող ֆունկցիաների $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi(x)$ $(n \in N)$ հաջորդականությունը, որտեղ $\chi(x)$-ը Դիրիխլեի ֆունկցիան է, առանցքի վրա հավասարաչափ զուգամետ է և ունի ամենուրեք անընդհատ սահման:

Գտնել սահմանը (2776-2778).

2776. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$: **2777.** $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$:

2778. $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$:

Գտնել շարքի գումարի սահմանը՝ նախապես նկատելով, որ անդամ առ անդամ սահմանային անցումն անթույլատրելի է (2779-2780).

2779. $\lim\limits_{x\to -1+0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$: **2780.** $\lim\limits_{x\to 1+0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$:

2781. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման և դիֆերենցման վերաբերյալ թեորեմները ձևակերպել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար:

2782. Ստուգել, որ $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածում զուգամիտում է ինտեգրելի ֆունկցիայի, սակայն

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx :$$

2783. Համոզվել, որ $f_n(x)=nx(1-x)^n$ հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածում ոչ հավասարաչափ է զուգամիտում, բայց, այնուամենայնիվ, ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը թույլատրելի է.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx :$$

2784. Թույլատրելի՞ է արդյոք ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը հետևյալ օրինակներում.

ա) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx$; բ) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx}dx$:

Գտնել սահմանը (2785-2788).

2785. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}dx$: **2786.** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}e^{-n(1+x^2)}dx$:

2787. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2}\frac{nx+\ln(n^2+x^2)}{n+x}dx$: **2788.** $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}e^{-n\sin x}dx$:

Հաշվել ինտեգրալը՝ նախապես համոզվելով, որ շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը թույլատրելի է (2789-2790).

2789. $\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} \right) dx$:

2790. $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n} \right) dx$:

2791. Ստուգել, որ $f_n(x) = \frac{1}{n} arctg x^n$ հաջորդականությունը թվային առանցքի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, սակայն՝

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right)'_{x=1} \neq \lim_{n \to \infty} f_n'(1):$$

Պարզել թե անդամ առ անդամ դիֆերենցման մասին թեորեմի որ պայմանն է այստեղ բացակայում:

2792. Օրինակով համոզվել, որ ֆունկցիոնալ շարքի անդամ առ անդամ դիֆերենցման վերաբերյալ թեորեմում ելակետային շարքի առնվազն մեկ կետում զուգամիտելու պայմանը էական է. կառուցել $\sum u_n(x)$ շարք, այնպիսին, որ $\sum u_n'(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ $\sum u_n(x)$-ը ոչ մի կետում զուգամետ չէ:

2793. Գտնել շարքի զուգամիտության տիրույթը և կատարելով անդամ առ անդամ դիֆերենցում կամ ինտեգրում՝ հաշվել շարքի գումարը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$; դ) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^{n-1}$:

***

Հաշվել աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը և, հետազոտելով շարքի վարքը զուգամիտության միջակայքի ծայրակետերում, գտնել շարքի զուգամիտության տիրույթը (2794-2800).

2794. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; գ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$; դ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$:

2795. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$:

2796. ա) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$:

2797. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$:

2798. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n + 2^n} (x-3)^n$:

2799. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > b > 0)$:

2800. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n} \right) x^n \quad (a > b > 0)$:

Գտնել ընդհանրացված աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը (2801-2804).

2801. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$:

2802. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$:

2803. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$:

2804. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}tg^n x$:

2805. Հիմնական տարրական ֆունկցիաների համար ստանալ Թեյլորի հետևյալ վերլուծությունները.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots \qquad (|x|<+\infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad (|x|<+\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots \qquad (|x|<+\infty);$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots \qquad (-1<x\le 1);$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots \qquad (|x|<1),$$

որտեղ $\binom{\alpha}{0}=1,\ \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n\in N)$:

Վերլուծել ֆունկցիան $x_0=0$ կետում Թեյլորի շարքի և նշել զուգամիտության տիրույթը (2806-2821).

2806. shx :

2807. chx :

2808. $\sin^2 x$:

2809. $\cos^2 x$:

2810. $x\sin x-\cos x$:

2811. e^{-x^2} :

2812. x^2e^x :

2813. $\frac{x^{10}}{1-x}$:

2814. $\frac{1}{(1-x)^2}$:

2815. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$:

2816. $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$:

2817. $\sqrt[3]{8-x^3}$:

2818. $\ln(10+x)$:

2819. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$:

2820. $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$:

2821. $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$:

Ցուցում: Վերջին երկուսում ռացիոնալ ֆունկցիան նախապես վերլուծել պարզ կոտորակների:

Նախնական ֆունկցիան ներկայացնել աստիճանային շարքի գումարի տեսքով և նշել զուգամիտության տիրույթը (2822-2827).

2822. $\int\limits_0^x t^4 e^{-t^2} dt$:

2823. $\int\limits_0^x \dfrac{e^t-1}{t} dt$:

2824. $\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t} dt$:

2825. $\int\limits_0^x \sqrt{1+t^6}\, dt$:

2826. $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$:

2827. $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{1-t^9}$:

Վերլուծել ընդինտեգրալ ֆունկցիան աստիճանային շարքի և գտնել ինտեգրալի մոտավոր արժեքը՝ վերցնելով վերլուծության միայն երեք անդամ: Գնահատել սխալանքը (2828-2831).

2828. $\int\limits_0^1 \dfrac{1-\cos x}{x} dx$:

2829. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} x e^{x^3} dx$:

2830. $\int\limits_{0,1}^1 \dfrac{shx}{x} dx$:

2831. $\int\limits_0^1 x^{10} \sin x dx$:

***

2832. Վերլուծել $f(x)=\sin^4 x$ ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի:

2833. Ո՞րն է $T_m(x)=\sum\limits_{n=0}^{m}(\alpha_n \cos nx+\beta_n \sin nx)$ եռանկյունաչափական բազմանդամի Ֆուրիեի շարքը:

2834. Վերլուծել $f(x)=\operatorname{sgn} x \quad (-\pi \le x \le \pi)$ ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի և ստուգելով շարքի զուգամիտությունը՝ հաշվել Լայբնիցի շարքի գումարը. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$:

Վերլուծել $f(x)$ $(-\pi \le x \le \pi)$ ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի և հետազոտել շարքի զուգամիտությունը (2835-2844).

2835. $f(x)=x$:

2836. $f(x)=|x|$:

2837. $f(x)=\pi^2-x^2$:

2838. $f(x)=x^3$:

2839. $f(x)=\sin px$, $p \notin Z$:

2840. $f(x)=shpx$:

2841. $f(x)=x\sin x$:

2842. $f(x)=x\cos x$:

2843. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$:

2844. $f(x)=|\sin x|$:

2845. Ստուգել, որ

ա) եռանկյունաչափական համակարգը ցանկացած $[a;a+2\pi]$ հատվածում օրթոգոնալ է;

բ) $[-l;l]$ հատվածում

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \dots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \dots$$

համակարգն օրթոգոնալ է:

$f \in \Re_1[-l;l]$ ֆունկցիայի համար $\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi x}{l}+\beta_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ շարքը, որտեղ

$$\alpha_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ \ (n\in Z_+),\ \ \beta_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \ \ (n\in N)$$

կոչվում է Ֆուրիեի ընդհանրացված եռանկյունաչափական շարք:

Վերլուծել ֆունկցիան Ֆուրիեի ընդհանրացված եռանկյունաչափական շարքի (2846-2849).

2846. $f(x)=x\cos x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$:

2847. $f(x)=x+2a$, $x\in(-a;a)$:

2848. $f(x)=e^x$, $x\in(-1;1)$:

2849. $f(x)=|\cos x|$:

Բ

Գտնել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության և բացարձակ զուգամիտության տիրույթները (2850-2860).

2850. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$:

2851. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$:

2852. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$:

2853. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+x^{n+1}}$:

2854. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(n+x)}{n}\right)^n$:

2855. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$:

2856. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$:

2857. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+x)^p}$, $x>-1$:

2858. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-\sqrt{x})\cdots(2-\sqrt[n]{x})$:

2859. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}[x(1-x)]^n$:

2860. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot\sin^n x}{n^2}$:

Հետազոտել նշված բազմության վրա ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունը (2861-2872).

2861. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $0\le x\le 1$:

2862. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$, $0<x<+\infty$:

2863. ա) $f_n(x)=arctgnx$; բ) $f_n(x)=x\cdot arctgnx$, $0<x<+\infty$:

2864. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$, ա) $x\le 10$; բ) $-\infty<x<+\infty$:

2865. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$, $0<x<1$:

2866. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, ա) $a\le x\le b$; բ) $-\infty<x<+\infty$:

2867. $f_n(x)=\ln\left(1+\frac{\cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}\right)$, $-\infty<x<+\infty$:

2868. $f_n(x)=\sin\left(e^{-nx}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ա) $0<\varepsilon\le x<+\infty$; բ) $0\le x<+\infty$:

2869. $f_n(x)=\ln\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ա) $|x|\ge\varepsilon>0$; բ) $|x|>0$:

2870. $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^4}\cdot\sin\frac{x^2}{\sqrt{n}}$, $-\infty<x<+\infty$:

2871. $f_n(x)=\sqrt{n}\cdot\sin\frac{x}{\sqrt{n}}$, ա) $0\le x\le\pi$; բ) $\pi\le x<+\infty$:

2872. $f_n(x) = \arcsin\dfrac{x^n}{1+x^n}$, ա) $0 \le x \le a < 1$; բ) $0 \le x < 1$:

2873. Դիցուք՝ $f \in C^1[a;b]$ և $f_n(x) = n\left[f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right]$, $n \in N$:Ապացուցել, որ ցանկացած $[\alpha;\beta]$ հատվածի վրա, որտեղ $a < \alpha < \beta < b$, $f_n(x) \rightrightarrows f'(x)$:

2874. Դիցուք՝ $f \in C(R)$ և $f_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{n}f\left(x+\dfrac{i}{n}\right)$: Ապացուցել, որ ցանկացած X սահմանափակ բազմության վրա $f_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է: Գտնել նրա սահմանը:

Կիրառելով Վայերշտրասի հայտանիշը՝ ապացուցել տրված բազմության վրա շարքի բացարձակ և հավասարաչափ զուգամիտությունը (2875-2879).

2875. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{\sqrt{n!}}\left(x^n + x^{-n}\right)$, $\dfrac{1}{2} \le |x| \le 2$:

2876. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)$, $0 \le x \le a < +\infty$:

2877. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\dfrac{2x}{x^2+n^3}$, $|x| < +\infty$:

2878. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\pi nx \sin\frac{x}{n}}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+n^2}}$, $|x| < +\infty$:

2879. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^6x^2}\sin nx$, $|x| < +\infty$:

2880. Դիցուք՝

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, \ 0 \le x \le 2^{-(n+1)}, \\ \dfrac{1}{n}\sin^2\left(2^{n+1}\pi x\right), \ 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}, \\ 0, \ 2^{-n} \le x \le 1, \end{cases}$$

Ստուգել, որ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ շարքը $[0;1]$ հատվածի վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է, սակայն չունի զուգամետ մաժորանտ:

2881. Ապացուցել, որ եթե $u_n(x)$ $(n \in N)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $[a;b]$ հատվածի վրա մոնոտոն է, $\sum|u_n(a)|$ և $\sum|u_n(b)|$ շարքերը զուգամետ են, ապա $\sum u_n(x)$ շարքը $[a;b]$ հատվածի վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է:

Օգտվելով Աբելի կամ Դիրիխլեի հայտանիշից՝ ապացուցել շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը (2882-2887).

2882. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$, $0<\varepsilon\le x\le 2\pi-\varepsilon$:

2883. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ $(p>0)$, $2\pi+\delta\le x\le 4\pi-\delta$ $(0<\delta<\pi)$:

2884. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2n}x\cdot\sin nx}{\sqrt[3]{n}}$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5\pi}{4}$:

2885. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$, $-\infty<x<+\infty$:

2886. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\ln(1+nx^2)}{n^2x^2}$, $x\ne 0$:

2887. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{-\frac{x}{n}}}{\sqrt{n}}$, $x\ge -100$:

Հետազոտել շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը (2888-2895).

2888. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-x}$, $0<x<+\infty$:

2889. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$, $0<x<+\infty$:

2890. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$, $0\le x\le 2\pi$:

2891. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$:

2892. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$, $0\le x<+\infty$:

2893. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$, $|x|\le 4$:

2894. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$, ա) $0\le x<\varepsilon$; բ) $\varepsilon\le x<+\infty$:

2895. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n arctg\frac{x}{n!}$, ա) $|x|\le a<+\infty$; բ) $|x|<+\infty$:

2896. Ցույց տալ, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ շարքը թվային առանցքի վրա հավասարաչափ է զուգամետ, իսկ բացարձակ արժեքներից կազմված $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ շարքը՝ ոչ հավասարաչափ:

2897. Ստուգել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2+n}{n^2}$ շարքը ցանկացած սահմանափակ բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, սակայն ոչ մի կետում բացարձակ զուգամետ չէ:

2898. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ թվային շարքը զուգամետ է, ապա Դիրիխլեի համապատասխան շարքը՝ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$-ը, $[0;+\infty)$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

2899. Դիցուք $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ թվային շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ապացուցել, որ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nx}$ շարքը $[\varepsilon;+\infty)$ միջակայքի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

2900. Ապացուցել, որ եթե a_n $(n\in N)$ թվային հաջորդականությունը մոնոտոն ձգտում է զրոյի, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ և $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ ֆունկցիոնալ շարքերը $2\pi k$ $(k\in Z)$ տեսքի թվերը չպարունակող ցանկացած կոմպակտի (փակ և սահմանափակ բազմության) վրա հավասարաչափ զուգամետ են:

2901. Դիցուք $a_n\to\infty$ թվային հաջորդականությունն այնպիսին է, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ շարքը բացարձակ զուգամետ է: Ցույց տալ, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$ ֆունկցիոնալ շարքը a_n $(n\in N)$ կետերը չպարունակող ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

***

Հետազոտել զուգամիտության տիրույթում շարքի գումարի անընդհատությունը (2902-2905).

2902. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{|x|+\sqrt{n}}$: **2903.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ln(1+nx)$:

2904. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-e^{-x}\right)^n}{\sqrt{n}}$: **2905.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln(n+1)}$:

2906. Օգտվելով շարքի գումարի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմից՝ համոզվել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{2n}-x^{2n+2}\right)$ շարքը $[-1;1]$ հատվածի վրա ոչ հավասարաչափ է զուգամետ:

2907. Դիցուք $u_n:(0;1)\to R$ $(n\in N)$ ֆունկցիաները անընդհատ են և ոչ բացասական: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ շարքը $(0;1)$ միջակայքում զուգամետ է և ունի անընդհատ գումար, ապա շարքը $(0;1)$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Բերել համապատասխան օրինակ և պարզել, թե Դինիի թեորեմի որ պայմանն է այստեղ բացակայում:

2908. Ստուգել, որ խնդիր 2906-ում բերված շարքի անդամները $[-1;1]$ հատվածում անընդհատ են և ոչ բացասական և նկատելով շարքի ոչ հավասարաչափ զուգամիտությունը, համոզվել, որ Դինիի թեորեմում շարքի գումարի անընդհատության պայմանն էական է:

2909. Կառուցել $[0;+\infty)$ միջակայքում անընդհատ և ոչ բացասական անդամներով շարք, որի գումարը $[0;+\infty)$-ում նույնպես անընդհատ է, սակայն շարքը հավասարաչափ զուգամետ չէ:

2910. Ապացուցել Դինիի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. դիցուք K-ն կոմպակտ է, իսկ $u_n:K\to R$ $(n\in N)$ ֆունկցիաներն անընդհատ են և ոչ բացասական: Եթե $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ շարքը K-ի վրա զուգամետ է և ունի անընդհատ գումար, ապա այն K-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

2911. Ձևակերպել Դինիի թեորեմը ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար:

2912. Դիցուք $f_n:[a;b]\to R$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականության անդամներից յուրաքանչյուրը $[a;b]$ հատվածի վրա մոնոտոն է (բայց ոչ անպայման անընդհատ): Ապացուցել, որ եթե $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x\in[a;b])$ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա $f_n \rightrightarrows f$:

2913. Դիցուք $u_n \in C[a;b]$ $(n\in N)$ և ցանկացած $[\alpha;\beta]\subset(a;b)$ հատվածի վրա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ եթե $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ շարքերը զուգամետ են, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$-ը $[a;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

2914. Ապացուցել, որ եթե $f_n \in \Re[a;b]$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա

$$F_n(x)=\int\limits_a^x f_n(t)dt \quad (a\le x\le b)$$

հաջորդականությունը $[a;b]$-ի վրա նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է:

2915. Կառուցել $f_n \in \Re[0;1]$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\forall x\in[0;1]$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\right)$, սակայն $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=-\infty$:

2916. Ստուգել, որ հետևյալ հաջորդականություններից յուրաքանչյուրը կազմված է $[a;b]$ հատվածում ինտեգրելի ֆունկցիաներից, սակայն դրանց սահմանը $[a;b]$-ում ինտեգրելի չէ.

ա) $f_n(x)=\begin{cases}1, \text{ երբ } x\in Q_n, \\ 0, \text{ երբ } x\in R\setminus Q_n,\end{cases}$

որտեղ $Q_n=\left\{\dfrac{p}{q}: p\in Z, q\in N, q\le n\right\}$;

բ) $f_n(x)=\sqrt[n]{R(x)}$,

որտեղ $R(x)$-ը Ռիմանի ֆունկցիան է;

գ) $f_n(x)=R(n!x)$:

2917. Տրված է $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ $(n\in N, \alpha\in R)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը: Ընտրել α պարամետրի արժեքներն այնպես, որ ճշմարիտ լինի

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

հավասարությունը:

2918. Կարելի՞ է արդյոք հետևյալ շարքը $[0;1]$ հատվածում անդամ առ անդամ ինտեգրել.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right):$$

2919. Կարելի՞ է արդյոք $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{x}{n^2}$ շարքն անդամ առ անդամ դիֆերենցել:

2920. Դիցուք f -ը թվային առանցքի վրա անվերջ դիֆերենցելի է և ամենուրեք $\left|f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)\right|<\frac{1}{n^2}$ $\left(n\in N, f^{(0)}=f\right)$: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=c\cdot e^x$, որտեղ $c=const$:

2921. Ապացուցել նախորդ խնդրում ձևակերպված պնդման հետևյալ ուժեղացումը. եթե f -ը թվային առանցքի վրա անվերջ դիֆերենցելի է և $f^{(n)}(x)$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային՝ ցանկացած $(a;b)$ վերջավոր միջակայքի վրա հավասարաչափ, ապա $\varphi(x)=c\cdot e^x$, որտեղ $c=const$:

2922. Դիցուք $u_n\in C[a;b]$, $|u_n(x)|\le c_n$, $(n\in N, x\in[a;b])$ և $\sum_{n=1}^{\infty} c_n<+\infty$: Ապացուցել, որ

ա) $f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n(x))$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;b]$ հատվածում;

բ) եթե $u_n\in C^1[a;b]$ $(n\in N)$ և $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)}$ շարքը $[a;b]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա f ֆունկցիան դիֆերենցելի է և

$$f'(x)=f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n'(x)}{1+u_n(x)}:$$

***

2923. Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}=\frac{1}{2}\ln 2$;

բ) $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}}=\frac{1}{2}\ln 2$:

2924. Վերլուծել $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1+x^2}$ և $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ֆունկցիաները Թեյլորի շարքի և անդամ առ անդամ ինտեգրելով` ստանալ համապատասխանաբար $\ln(1+x)$, $arctgx$ և $\arcsin x$ ֆունկցիաների վերլուծությունները: Հետազոտել ստացված շարքերը զուգամիտության միջակայքի ծայրակետերում և Աբելի թեորեմի կիրառմամբ ապացուցել հետևյալ հավասարությունները.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$;

գ) $\frac{\pi}{2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2\mathrm{n})!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$:

Գտնել աստիճանային շարքի զուգամիտության տիրույթը (2925-2934).

2925. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$:

2926. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$:

2927. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$:

2928. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$:

2929. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$:

2930. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2x^n$:

2931. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$:

2932. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n(x-1)^n$:

2933. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot x^{n^2}$:

2934. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot x^{n!}$:

2935. Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ և $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ աստիճանային շարքերի զուգամիտության շառավիղները R_a և R_b դրական թվերն են և $R=\min\{R_a;R_b\}$: Ապացուցել, որ $(-R;R)$ միջակայքում ճշմարիտ են

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

և

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

հավասարությունները, որտեղ $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$:

2936. Անմիջականորեն ապացուցել, որ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ֆունկցիան բավարարում է $f(x)f(y) = f(x+y)$ ֆունկցիոնալ հավասարմանը:

Վերլուծել f ֆունկցիան $x_0 = 0$ կետի շրջակայքում աստիճանային շարքի (2937-2942).

2937. $f(x) = (1+x)e^{-x}$:

2938. $f(x) = (1-x)^2 ch\sqrt{x}$:

2939. $f(x) = (1+x^2)arctgx$:

2940. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$:

2941. $f(x) = \ln^2(1-x)$:

2942. $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$:

2943. Դիցուք $l = \varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ և $L = \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ աստիճանային շարքի զուգամիտության R շառավղի համար ճշմարիտ են $l \le R \le L$ անհավասարությունները: Կառուցել շարքի օրինակ, որի համար ստացված անհավասարությունները խիստ են:

2944. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^n$ սիմվոլը կոչվում է Լորանի շարք: Այն համարվում է զուգամետ միայն այն դեպքում, երբ $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ և $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքերը միաժամանակ զուգամետ են: Ապացուցել, որ եթե Լորանի շարքը, զուգամետ է $x = x_1$ և $x = x_2$ $(|x_1| < |x_2|)$ կետերում, ապա այն զուգամետ է $|x_1| < |x| < |x_2|$ անհավասարություններով որոշվող տիրույթի բոլոր կետերում:

2945. Գտնել $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$ Լորանի շարքի զուգամիտության տիրույթը և հաշվել նրա գումարը:

2946. Ապացուցել, որ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ ֆունկցիան $R \setminus Z$ բազմության վրա անընդհատ է և 1-պարբերական:

***

Վերլուծել ֆունկցիան Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի (2947-2952).

2947. $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;\pi],\\ \sin x, & x\in(\pi;2\pi]:\end{cases}$

2948. $f(x)=\begin{cases}a, & x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ b, & x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]:\end{cases}$

2949. $f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in[0;2\pi]:$

2950. $f(x)=x-[x]:$

2951. $f(x)=\arcsin(\sin x):$

2952. $f(x)=\arcsin(\cos x):$

2953. $f(x)=\cos px\quad (p\notin Z)$ ֆունկցիան $[-\pi;\pi]$ հատվածում վերլուծել Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի: Օգտվելով ստացված վերլուծությունից՝ ապացուցել, որ

ա) $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x-\pi n}+\frac{1}{x+\pi n}\right);$

բ) $ctgx=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-\pi n}+\frac{1}{x+\pi n}\right):$

2954. Տրված է՝ $f\in\Re_1[-\pi;\pi]$ ֆունկցիան զույգ է: Ապացուցել, որ f-ի Ֆուրիեի շարքը կազմված է միայն կոսինուսներից. $f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, ընդ որում $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx\ \ (n\in Z_+):$

Ձևակերպել և ապացուցել նույնատիպ պնդում կենտ ֆունկցիայի համար:

2955. Կառուցել $f(x)=x\ \ (x\in[0;\pi])$ ֆունկցիայի շարունակությունը $[-\pi;\pi]$ հատվածում և վերլուծել այն Ֆուրիեի շարքի ըստ կոսինուսների:

2956. $f(x)=x\sin x\ \ (x\in[0;\pi])$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի ըստ սինուսների:

2957. $f(x)=x^2$ ֆունկցիան վերլուծել Ֆուրիեի շարքի

ա) ըստ կոսինուսների $[-\pi;\pi]$ հատվածում;

բ) ըստ սինուսների $[0;\pi]$ հատվածում;

գ) $[0;2\pi]$ հատվածում:

Օգտվելով այդ վերլուծություններից՝ հաշվել հետևյալ շարքերի գումարները.

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,;\qquad S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\,;\qquad S_3=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\,:$$

2958. Հաշվել շարքի գումարը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$:

2959. Դիցուք՝ $f\in\Re_1[-\pi;\pi]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $x\in[-\pi;0]$ կետում

ա) $f(x+\pi)=f(x)$, ապա $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0\ (n\in N)$;

բ) $f(x+\pi)=-f(x)$, ապա $a_{2n}=b_{2n}=0\ (n\in N)$:

2960. Դիցուք՝ $f\in\Re_1[0;\pi]$ և ամենուրեք $f(\pi-x)=f(x)$: Ապացուցել, որ f ֆունկցիայի

ա) ըստ կոսինուսների վերլուծության մեջ $a_{2n-1}=0\ (n\in N)$;

բ) ըստ սինուսների վերլուծության մեջ $b_{2n}=0\ (n\in N)$:

2961. Տրված է՝ $f\in\Re_1\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: Ինչպե՞ս պետք է շարունակել ֆունկցիան $[-\pi;\pi]$ միջակայքում, որպեսզի նրա Ֆուրիեի շարքն ունենա հետևյալ տեսքը.

ա) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(2n-1)x$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sin(2n-1)x$:

2962. Դիցուք՝ $f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: Ստանալ f ֆունկցիայի վերլուծությունն

ա) ըստ $\{\cos(2n-1)x\}_{n\in N}$ համակարգի;

բ) ըստ $\{\sin(2n-1)x\}_{n\in N}$ համակարգի:

2963. Դիցուք՝

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\quad g\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx):$$

Ինչպիսի՞ կապ կա a_n, b_n և α_n, β_n գործակիցների միջև, եթե

ա) $f(-x)=g(x)$; բ) $f(-x)=-g(x)$:

2964. Ապացուցել, որ եթե $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ եռանկյունաչափական շարքը $[-\pi;\pi]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է և ունի $f(x)$ գումար, ապա այն $f(x)$-ի Ֆուրիեի շարքն է:

2965. Ապացուցել, որ եթե եռանկյունաչափական շարքն ունի մասնակի գումարների $s_{n_k}(x)$ ենթահաջորդականություն, որը $[-\pi;\pi]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, ապա այն f-ի Ֆուրիեի շարքն է:

2966. Դիցուք $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi;\pi]$: Ապացուցել, որ եթե որևէ $\delta > 0$ և S թվերի համար

$$\int_0^\delta \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2S|}{t}dt \quad (x \in [-\pi;\pi])$$

ինտեգրալը զուգամետ է, ապա f-ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը x կետում զուգամիտում է S-ին (Դինիի հայտանիշ):

2967. Ասում են, որ f ֆունկցիան U բազմության վրա բավարարում է α ցուցիչով Լիպշիցի պայմանին և գրում՝ $f \in Lip^\alpha(U)$, եթե գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $x_1, x_2 \in U$ կետերի համար ճշմարիտ է $|f(x_1)-f(x_2)| \le M|x_1 - x_2|^\alpha$ անհավասարությունը:

Դիցուք՝ $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi;\pi]$, U-ն $x_0 \in [-\pi;\pi]$ կետի որևէ շրջակայք է և $f \in Lip^\alpha(U)$: Ապացուցել, որ f-ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը x_0 կետում զուգամիտում է $f(x_0)$-ին:

2968. Դիցուք՝ $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi;\pi]$ և $x_0 \in (-\pi;\pi)$ կետի շրջակայքում f-ն ունի սահմանափակ ածանցյալ: Ապացուցել, որ f-ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքը x_0 կետում զուգամիտում է $f(x_0)$-ին:

2969. Ապացուցել, որ զրոյի շրջակայքից դուրս Ֆեյերի կորիզների $\Phi_n(t)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է զրոյի. ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\delta \le |t| \le \pi} \Phi_n(t) = 0 :$$

2970. Դիցուք՝ $f \in \mathfrak{R}_1[-\pi;\pi]$ և $x \in (-\pi;\pi)$ կետում գոյություն ունեն $f(x \pm 0)$ վերջավոր միակողմանի սահմանները: Ապացուցել, որ f-ի $\sigma_n(x)$ Ֆեյերի գումարները ձգտում են $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ թվին:

2971. Դիցուք՝ $f \in C^1[-\pi;\pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ և

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx):$$

Ապացուցել, որ

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx):$$

f ֆունկցիայի համար գրել Պարսևալի հավասարությունը և հաշվել տրված c_n $(n \in N)$ անդամներով շարքի գումարը (2972-2973).

2972. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $c_n = \dfrac{1}{n^2}$:

2973. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \beta, \\ 0, & \beta \le |x| \le \pi; \end{cases}$ ա) $c_n = \dfrac{\sin^2 n\beta}{n^2}$; բ) $c_n = \dfrac{\cos^2 n\beta}{n^2}$:

2974. Տրված $f, g \in \Re_2[a;b]$ ֆունկցիաների համար

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx} \text{ -ը}$$

կոչվում է այդ ֆունկցիաների *միջին քառակուսային շեղում*:

Դիցուք $\varphi_n \in \Re_2[a;b]$ $(n \in Z_+)$ համակարգն $[a;b]$-ի վրա օրթոնորմավորված է: Դիտարկենք $\Gamma_n = \{\gamma_0\varphi_0 + \cdots + \gamma_n\varphi_n : \gamma_i \in R, i = 0,\ldots,n\}$ բազմանդամների բազմությունը: Ապացուցել Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարների հետևյալ էքստրեմալ հատկությունը. տրված $f \in \Re_2[a;b]$ ֆունկցիայի և Γ_n բազմության ցանկացած բազմանդամի միջին քառակուսային շեղումը կլինի նվազագույն այն և միայն այն դեպքում, երբ $\gamma_0,\ldots,\gamma_n$ գործակիցները f-ի Ֆուրիեի գործակիցներն են ըստ φ_n $(n \in Z_+)$ համակարգի:

Եռանկյունաչափական համակարգի դեպքում ցանկացած $f \in \Re_2[-\pi;\pi]$ ֆունկցիայի համար ստանալ Բեսելի նույնությունը.

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - s_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2 + b_k^2\right)\right],$$

որտեղ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx):$$

2975. Դիցուք՝ $f, g \in \Re_2[-\pi;\pi]$, $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ և $g(x) \sim \dfrac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$: Ապացուցել Պարսևալի ընդհանրացված հավասարությունը.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nA_n + b_nB_n):$$

Գ

Գտնել ֆունկցիոնալ շարքի զուգամիտության տիրույթը (2976-2977).

2976. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2^n x):$ **2977.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sin n}\right)^n:$

2978. Դիցուք $f: R_+ \to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, իսկ $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ -ը՝ զուգամետ: Ապացուցել, որ

$$\lim_{h\to+0} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)dx:$$

Օգտվելով ստացված հավասարությունից՝ հաշվել սահմանը.

$$\lim_{t\to1-0}(1-t)\left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots\right):$$

Գտնել սահմանը (2979-2980).

2979. $\lim_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}:$ **2980.** $\lim_{x\to1-0}(1-x)^{p+1}\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n \quad (p\in Z_+):$

Ապացուցել հավասարությունը (2981-2982).

2981. ա) $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n};$ բ) $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}:$

2982. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin x dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}:$

2983. Դիցուք $\varphi_1 \in C[0;A]$ ֆունկցիան դրական է և

$$\varphi_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{\varphi_n(t)}dt \quad (n\in N):$$

Ապացուցել, որ φ_n հաջորդականությունը $[0;A]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $\varphi(x) = x^2$ ֆունկցիային:

2984. Դիցուք $f_n: X \to R$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա կետորեն զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային: Ապացուցել սահմանի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. եթե f_n ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է $x_0 \in X$ կետում և , բացի այդ, ցանկացած $\varepsilon > 0$ և $m \in N$ թվերի համար գոյություն ունի $n > m$ բնական թիվ, այնպիսին, որ X բազմության վրա ամենուրեք $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$, ապա f -ը x_0 կետում անընդհատ է:

Ստուգել, որ $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ $(n \in N)$ հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածի վրա զուգամիտում է անընդհատ ֆունկցիայի, սակայն խնդրում նշված զուգամիտության պայմանին այն չի բավարարում:

2985. Ասում են, որ $f_n : [a;b] \to R$ $(n \in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $[a;b]$ հատվածի վրա *քվազիհավասարաչափ* զուգամիտում է f ֆունկցիային, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ և $m \in N$ թվերի համար գոյություն ունեն $[a;b]$ հատվածը ծածկող $(a_1;b_1),\ldots,$ $(a_k;b_k)$ միջակայքերի վերջավոր ընտանիք և այդ միջակայքերին համապատասխան m -ը գերազանցող n_1 , $\ldots, n_k$ բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$\left|f(x) - f_{n_i}(x)\right| < \varepsilon \quad \left(x \in [a;b] \cap (a_i;b_i), i = 1,\ldots,k\right):$$

Ապացուցել Արցելայի հետևյալ թեորեմը. որպեսզի $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականության սահմանն այդ հատվածի վրա լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ հաջորդականությունը զուգամիտի քվազիհավասարաչափ:

2986. Դիցուք $f_n \in \Re[a;b]$ $(n \in N)$ հաջորդականությունը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ սահմանափակ է.

$$\exists M > 0\ \forall x \in [a;b]\ \forall n \in N\ \left(\left|f_n(x)\right| \le M\right):$$

Ապացուցել, որ

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad (n \in N)$$

ֆունկցիոնալ հաջորդականությունից կարելի է ընտրել $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

2987. $f_n : [a;b] \to R$ հաջորդականությունը կոչվում է $[a;b]$-ի վրա հավասարաստիճան անընդհատ, եթե

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall n \in N\ \forall x_1, x_2 \in [a;b]\ \left(\left|x_1 - x_2\right| < \delta \Rightarrow \left|f_n(x_1) - f_n(x_2)\right| < \varepsilon\right):$$

Ապացուցել, որ եթե $f_n \in C[a;b]$ $(n \in N)$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա այն նաև հավասարաչափ սահմանափակ է և հավասարաստիճան անընդհատ:

2988. Ապացուցել Արցելայի հետևյալ թեորեմը. եթե $f_n:[a;b]\to R \quad (n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ սահմանափակ է և հավասարաստիճան անընդհատ, ապա այն ունի $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

2989. Դիցուք φ-ն 1-պարբերական ֆունկցիա է, ընդ որում՝ $\varphi(x)=|x|$, երբ $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$: Ապացուցել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n}$ շարքի գումարը թվային առանցքի վրա ամենուրեք անընդհատ է, սակայն ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ (Վան դեր Վարդեն):

2990. Ստուգել, որ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2^{n^2}x\right)}{a^{n^2}}$ շարքի գումարը թվային առանցքի վրա

ա) անընդհատ է, երբ $a>1$;

բ) դիֆերենցելի է, երբ $a>2$;

գ) ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ, երբ $a\in(1;2)$:

2991. Կառուցել R-ի վրա անընդհատ ֆունկցիա, որը ոչ մի կետում Շվարցի ածանցյալ չունի (տես խնդիր 1573):

2992. Տրված է՝ $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ շարքն $(a;b)$ վերջավոր միջակայքում զուգամետ է, ընդ որում՝ շարքի անդամներն այդ միջակայքում դիֆերենցելի են: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի C թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $m\in N$ թվի համար $\left|\sum_{n=1}^{m}u_n'(x)\right|\le C$, ապա $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ շարքն $(a;b)$-ում հավասարաչափ զուգամետ է:

2993. Ապացուցել, որ եթե $f:R_+\to R$ ֆունկցիան ցանկացած $x\in R_+$ թվի համար բավարարում է $\sum_{n=1}^{\infty}|f(nx)|<+\infty$ և $\sum_{n=1}^{\infty}f(nx)=0$ պայմաններին, ապա $f(x)\equiv 0$:

2994. Դիցուք $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ շարքի գործակիցները որոշ համարից սկսած պարբերաբար կրկնվում են. $a_{n+p}=a_n$, $n\ge n_0$: Ապացուցել, որ շարքի գումարը ռացիոնալ ֆունկցիա է: Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը:

2995. Ապացուցել, որ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի գումարը ռացիոնալ ֆունկցիա է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $n_0 \in N$ և $c_1, c_2, ..., c_p$ թվեր, այնպիսիք, որ ցանկացած $n \geq n_0$ թվի համար $c_1 a_{n+1} + c_2 a_{n+2} + \cdots + c_p a_{n+p} = 0$:

2996. Դիցուք՝ $a_n \geq 0$ $\left(n \in Z_+\right)$ և $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$: Ապացուցել, որ եթե $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ և $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, ապա $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի զուգամիտության շառավիղը հավասար է 1-ի:

2997. $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + q^n x\right)$ $\left(|q| < 1\right)$ ֆունկցիան $x = 0$ կետի շրջակայքում վերլուծել աստիճանային շարքի:

Ցուցում: Օգտվել $f(x) = (1 + qx) f(qx)$ նույնությունից:

2998. Դիցուք $f \in C^{\infty}(a;b)$ և գոյություն ունի M թիվ այնպիսին, որ $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M^n$ $\left(x \in (a;b), n \in N\right)$: Ապացուցել, որ $(a;b)$ միջակայքի բոլոր կետերում f-ն անալիտիկ է:

2999. Տրված է $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ թվային հաջորդականությունը: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ $|a_n| \leq \frac{M^n}{n!}$ $\left(n \in N\right)$, ապա $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ֆունկցիան ողջ թվային առանցքի վրա անալիտիկ է:

3000. Դիցուք՝ $f \in C^{\infty}[-1;1]$ և $f^{(n)}(x) \geq 0$ $\left(-1 \leq x \leq 1, n \in Z_+\right)$: Ապացուցել, որ $(-1;1)$ միջակայքում f-ն անալիտիկ է:

3001. Ապացուցել, որ եթե ոչ ավելի քան m-րդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամների հաջորդականությունն $(a;b)$ միջակայքի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, ապա f-ը նույնպես ոչ ավելի քան m-րդ կարգի հանրահաշվական բազմանդամ է:

3002. Ապացուցել Աբելի թեորեմի հետևյալ շրջումը. եթե $a_n \geq 0$ $\left(n \in Z_+\right)$ և գոյություն ունի $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$ վերջավոր սահմանը, ապա $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$: Օրինակով համոզվել, որ $a_n \geq 0$ պայմանն այստեղ էական է:

3003. Ապացուցել, որ եթե $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի զուգամիտության շառավիղը 1 է և $s_n = a_0 + a_1 + \; + \cdots + a_n \to +\infty \; (-\infty)$, ապա $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = +\infty \; (-\infty)$:

3004. Դիցուք $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ և $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ աստիճանային շարքերը, որոնցում $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in Z_+)$, $[0;1)$ միջակայքում զուգամետ են, իսկ $x = 1$ կետում՝ տարամետ: Ապացուցել, որ եթե $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$, ապա $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1-0)$:

3005. Ստանալ նախորդ խնդրի հետևյալ ընդհանրացումը. դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ շարքերը $[0;1)$ միջակայքում զուգամետ են, $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geq 0$, $t_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n \geq 0$ $(n \in Z_+)$, ընդ որում՝ $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = +\infty$: Այդ դեպքում, եթե $s_n \sim t_n$ $(n \to \infty)$, ապա $f(x) \sim g(x)$ $(x \to 1-0)$:

3006. Ապացուցել Հարդի-Լիթլվուդի հետևյալ թեորեմը. դիցուք $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի գործակիցները ոչ բացասական են, ընդ որում՝ շարքը $[0;1)$ միջակայքում զուգամետ է: Եթե $f(x) \sim \dfrac{1}{1-x}$ $(x \to 1-0)$, ապա $a_0 + a_1 + \cdots + a_n \sim n$ $(n \to \infty)$:

3007. $K_n \in \Re[-a;a]$ $(n \in N)$ ֆունկցիաների հաջորդականությունը կանվանենք *մոտարկման միավոր*, եթե այն բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին.

1) $K_n(t) \geq 0$, $t \in [-a;a]$, $n \in N$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_{-a}^{a} K_n(t)dt = 1$;

3) ցանկացած $0 < \delta < a$ թվի համար $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\delta \leq |t| \leq a} K_n(t) = 0$:

Դիցուք՝ $f \in C(R)$: Ապացուցել, որ

$$f_n(x) = \int_{-a}^{a} f(x+t) K_n(t) dt \quad (n \in N)$$

ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային:

3008. Ստուգել, որ $K_n(t)=\frac{1}{\pi}\Phi_n(t)$ հաջորդականությունը, որտեղ $\Phi_n(t)$-ն Ֆեյերի կորիզն է, մոտարկման միավոր է $[-\pi;\pi]$-ում և այդտեղից ստանալ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի ապացույցը:

3009. Դիցուք $f\in\Re_1[-\pi;\pi]$ ֆունկցիան 2π-պարբերական է և

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx):$$

ա) $f(r;x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ $(0<r<1)$ ֆունկցիայի համար ստանալ

$$f(r;x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$$

ներկայացումը:

բ) Ստուգել, որ $K_r(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$ ֆունկցիան՝ Պուասոնի կորիզը, $[-\pi;\pi]$ միջակայքում հանդիսանում է մոտարկման միավոր և ապացուցել, որ ցանկացած $f\in C(R)$ 2π-պարբերական ֆունկցիայի համար $f(r;x)\rightrightarrows f(x)$, երբ $r\to 1-0$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists r_0\in(0;1)\ \forall x\in[-\pi;\pi]\ \left(r_0<r<1\Rightarrow\left|f(r;x)-f(x)\right|<\varepsilon\right):$$

3010. Տրված է՝ $\varphi\in C[0;1]$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$: Ընտրել c_n $(n\in N)$ գործակիցներն այնպես, որ $K_n(t)=c_n\left(1-t^2\right)^n$ հաջորդականությունը $[-1;1]$ հատվածում լինի մոտարկման միավոր և համոզվել, որ հանրահաշվական բազմանդամների $P_n(x)=\int_0^1\varphi(t)K_n(x-t)dt$ հաջորդականությունը $[0;1]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային: Այդտեղից ստանալ Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացույցը:

Ցուցում: Դիտարկել $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\in[0;1],\\ 0, x\in R\setminus[0;1]\end{cases}$ ֆունկցիան և օգտվել 3007 խնդրից:

3011. Դիցուք՝ $f\in C[0;1]$: Ապացուցել, որ Բեռնշտեյնի բազմանդամների հաջորդականությունը՝

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (n\in Z_+),$$

$[0;1]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային (Վայերշտրասի առաջին թեորեմի մեկ այլ ապացույց):

Ցուցում: Օգտվել $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx(1-x)$ նույնությունից և ցույց տալ, որ $1=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ նույնության մեջ աջ կողմում այն գումարելիների գումարը, որոնց համարները բավարարում են $|k-nx|>n^{3/4}$ անհավասարությանը, փոքր է $\frac{1}{4}n^{-\frac{1}{2}}$-ից:

3012. Դիցուք $f\in C[a;b]$ ֆունկցիայի բոլոր մոմենտները զրո են.

$$\int_a^b x^n f(x)dx=0 \quad (n\in Z_+):$$

Ապացուցել, որ $f=0$:

3013. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re[a;b]$ ֆունկցիայի բոլոր մոմենտները զրո են և f-ն անընդհատ է $\xi\in[a;b]$ կետում, ապա $f(\xi)=0$:

3014. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[0;2\pi]$ ֆունկցիայի բոլոր եռանկյունաչափական մոմենտները զրո են՝

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx=\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx=0 \quad (n\in Z_+),$$

ապա $f=0$ (եռանկյունաչափական համակարգի լրիվություն):

3015. Դիցուք՝ $f\in C(R_+)$ և k_n-ը $(n\in Z_+)$ դրական տարբերությամբ թվաբանական պրոգրեսիա է: Ապացուցել, որ եթե

$$I(n)=\int_0^{\infty} e^{-k_n x} f(x)dx$$

ինտեգրալը $n=0$ արժեքի դեպքում զուգամետ է և ցանկացած $n\in N$ թվի համար $I(n)=0$, ապա $f=0$:

3016. Դիցուք՝ $f\in C[-1;1]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $k\in Z_+$ թվի համար

ա) $\int_{-1}^{1} x^{2k} f(x)dx=0$, ապա f-ը կենտ ֆունկցիա է;

բ) $\int_{-1}^{1} x^{2k+1} f(x)dx = 0$,ապա f -ը զույգ ֆունկցիա է:

Ձևակերպել և ապացուցել նույնպիսի պնդում ֆունկցիայի եռանկյունաչափական մոմենտների վերաբերյալ:

3017. $f(x) = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ ֆունկցիան $(-\pi;\pi)$ միջակայքում վերլուծել Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի: Այդտեղից անմիջականորեն ստանալ նաև $g(x) = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ ֆունկցիայի վերլուծությունը $(0;2\pi)$ միջակայքում:

3018. Տրված են $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ և $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ եռանկյունաչափական շարքերը, որոնցում $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$: Ստուգել, որ ցանկացած $K \subset R \setminus \{2\pi k : k \in Z\}$ կոմպակտի վրա շարքերից յուրաքանչյուրը հավասարաչափ զուգամետ է: Ապացուցել, որ եթե $h(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $\left(g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\right)$ ֆունկցիան $[-\pi;\pi]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի է (Ռիմանի կամ անիսկական իմաստով), ապա գրված շարքը ներկայացնում է այդ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

3019. Ապացուցել, որ եթե նախորդ խնդրի պայմաններում $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ շարքը ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ շարքը) զուգամետ է, ապա h -ը (g -ն) բացարձակ ինտեգրելի է և հետևաբար գրված եռանկյունաչափական շարքը ներկայացնում է իր իսկ գումարի Ֆուրիեի շարք:

3020. Ցույց տալ, որ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ շարքը չի հանդիսանում որևէ $f \in \Re_2[-\pi;\pi]$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք:

3021. Տրված է $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ եռանկյունաչափական շարքը, որում $b_n \downarrow 0$: Ապացուցել, որ շարքը ցանկացած հատվածի վրա կլինի հավասարաչափ զուգամետ այն և միայն այն դեպքում, երբ $n \cdot b_n \to 0$:

Գլուխ 12

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ, Ստիլտեսի ինտեգրալ

Վ ե ր ջ ա վ ո ր վ ա ր ի ա ց ի ա յ ի ֆ ու ն կ ց ի ա ն ե ր ։ Տրված $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիայի և $[a;b]$ հատվածի ցանկացած $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ տրոհման համար (տես գլուխ 8) կազմենք $\sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x_{k+1})-f(x_k)\right|$ գումարը։ Բոլոր տրոհումներին համապատասխանող այդպիսի գումարների ճշգրիտ վերին եզրը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի *լրիվ վարիացիա* և նշանակվում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$։ Եթե $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<+\infty$, ապա f-ն անվանում են *վերջավոր (սահմանափակ) վարիացիայի ֆունկցիա*։

$f:[a;\omega)\to R$ $(\omega\le+\infty)$ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան սահմանվում է $\overset{\omega}{\underset{a}{V}}(f)=\lim\limits_{b\to\omega}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ բանաձևով։ Համանմանորեն սահմանվում են f ֆունկցիայի լրիվ վարիացիաները $(\omega;b]$ և $(\omega_1;\omega_2)$ միջակայքերում։

X միջակայքում վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $BV(X)$։

$BV[a;b]$ դ ա ս ի կ ա ռ ու ց վ ա ծ ք ը ։ Ցանկացած $f,g\in BV[a;b]$ ֆունկցիաների համար՝

ա) $\alpha f+\beta g\in BV[a;b]$ $(\alpha,\beta\in R)$, ընդ որում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f+\beta g)\le|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+|\beta|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$;

բ) $|f|\in BV[a;b]$, ընդ որում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$;

գ) $fg\in BV[a;b]$, ընդ որում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg)\le\sup\limits_{a\le x\le b}|g(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\sup\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$;

դ) եթե ամենուրեք $|g(x)|\ge\delta>0$, ապա $\frac{1}{g}\in BV[a;b]$, ընդ որում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{g}\right)\le\frac{1}{\delta^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$։

Եթե $f\in BV[a;b]$ և $a<c<b$, ապա $[a;c]$ և $[c;b]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում f-ը վերջավոր վարիացիայի է, ընդ որում՝ $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$։

Թեորեմ։ Եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա այն վերջավոր վարիացիայի է, ընդ որում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=|f(b)-f(a)|$։

Թեորեմ։ Որպեսզի ֆունկցիան տրված միջակայքում լինի վերջավոր վարիացիայի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի որպես երկու աճող (չնվազող) և սահմանափակ ֆունկցիաների տարբերություն:

Ո՛ւ ղ ղ ե լ ի   կ ո ր ե ր : Դիցուք L կորը տրված է $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ պարամետրական հավասարումներով: L-ը կոչվում է *անընդհատ կոր*, եթե φ և ψ ֆունկցիաներն անընդհատ են: $[\alpha;\beta]$ հատվածի ցանկացած $(t_0,t_1,...,t_n)$ տրոհման համար $(\varphi(t_k),\psi(t_k))$ $(k=0,...,n)$ գագաթները հաջորդաբար միացնող բեկյալը կոչվում է L կորին *ներգծած բեկյալ*: Եթե բոլոր այդպիսի բեկյալների երկարությունների ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր թիվ է, ապա այն ընդունում են որպես L կորի երկարություն, իսկ կորն անվանում են ուղղելի:

Ժորդանի թեորեմը: Որպեսզի L անընդհատ կորը լինի ուղղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ φ և ψ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $[\alpha;\beta]$ հատվածում ունենա վերջավոր վարիացիա:

Ս տ ի լ տ ե ս ի   ի ն տ ե գ ր ա լ : Տրված են $f:[a;b]\to R$ և $\sigma:[a;b]\to R$ ֆունկցիաները: $[a;b]$ հատվածի ցանկացած $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ տրոհման (տես գլուխ 8) և ցանկացած $\xi_i\in\Delta_i=[x_i;x_{i+1}]$ $(i=0,1,...,n-1)$ կետերի համար կազմենք

$$S_\sigma(f;P,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta\sigma(x_i)$$

գումարը, որտեղ $\Delta\sigma(x_i)=\sigma(x_{i+1})-\sigma(x_i)$:

Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda(P)\to0}S_\sigma(f;P,\xi)$ վերջավոր սահմանը ($\lambda(P)$-ն P տրոհման տրամագիծն է), ապա այն անվանում են $[a;b]$ հատվածում f ֆունկցիայի *Ստիլտեսի* (*Ռիման-Ստիլտեսի*) *ինտեգրալ ըստ* σ *-ի* և նշանակում՝

$$\lim_{\lambda(P)\to0}S_\sigma(f;P,\xi)=\int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

Այս դեպքում f-ն անվանում են *ըստ* σ *-ի ինտեգրելի*:

Ըստ σ-ի $[a;b]$ հատվածում ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\Re_\sigma[a;b]$:

Թեորեմ: Եթե $f\in C[a;b]$ և $\sigma\in BV[a;b]$, ապա $f\in\Re_\sigma[a;b]$:

Մասերով ինտեգրում: Եթե f և g ֆունկցիաներից մեկն $[a;b]$ հատվածում ինտեգրելի է ըստ մյուսի, ապա ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x):$$

Ստիլտեսի և Ռիմանի ինտեգրալների կապը: Դիցուք $f\in\Re[a;b]$, $\varphi\in\Re_1[a;b]$ և

$$\sigma(x)=C+\int_a^x\varphi(t)dt\quad(C\in R,a\le x\le b):$$

Այս պայմաններում f-ն ինտեգրելի է ըստ σ-ի և

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x)=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx:$$

Միջին արժեքի թեորեմը: Դիցուք $f \in \Re_\sigma[a;b]$ և ամենուրեք $m \le f(x) \le M$: Եթե σ-ն $[a;b]$-ում չնվազող է, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = \mu[\sigma(b)-\sigma(a)]:$$

Թեորեմ Ստիլտեսի ինտեգրալում սահմանային անցման վերաբերյալ: 1. Դիցուք $f_n \in C[a;b]$ $(n \in N)$ և $f_n \rightrightarrows f$: Յանկացած $\sigma \in BV[a;b]$ ֆունկցիայի համար

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)d\sigma(x) = \int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

2. Դիցուք $f \in C[a;b]$, իսկ $\sigma_n \in BV[a;b]$ $(n \in N)$ ֆունկցիաների վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով և $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n(x) = \sigma(x)$ $(a \le x \le b)$: Այս պայմաններում $\sigma \in BV[a;b]$, ընդ որում՝

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

Ա

3022. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի վրա մոնոտոն է, ապա այն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է և $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b)-f(a)|$:

3023. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին (գոյություն ունի K հաստատուն, այնպիսին, որ կամայական $x, y \in [a;b]$ թվերի համար՝ $|f(x)-f(y)| \le K|x-y|$), ապա այն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է:

3024. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ ածանցյալ, ապա $f \in BV[a;b]$:

3025. Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանափակ է:

3026. Ապացուցել, որ

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի չէ:

Ցուցում: Դիտարկել $[0;1]$ հատվածի $0 < \dfrac{1}{2n} < \dfrac{1}{2n-1} < \cdots < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} < 1$ տրոհումների հաջորդականությունը:

3027. Դիցուք՝ $f, g \in BV[a;b]$: Ապացուցել, որ $f+g, \alpha f \in BV[a;b]$ $(\alpha \in R)$ և

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(g),\quad \overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f)=|\alpha|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f):$$

Ցույց տալ, որ եթե g -ն հաստատուն է, ապա $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$:

3028. Դիցուք` $f,g\in BV[a;b]$: Ապացուցել, որ $f\cdot g\in BV[a;b]$ և

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f\cdot g)\le\sup_{x\in[a;b]}|f(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)+\sup_{x\in[a;b]}|g(x)|\overset{b}{\underset{a}{V}}(f):$$

3029. Ապացուցել, որ եթե g -ն $[a;b]$ հատվածի վրա վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է և ամենուրեք $g(x)\ge\delta>0$, ապա $\frac{1}{g}$ -ն $[a;b]$-ի վրա նույնպես վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, ընդ որում` $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{g}\right)\le\frac{1}{\delta^2}\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$:

3030. Ապացուցել, որ եթե $f\in BV[a;b]$, ապա $|f|\in BV[a;b]$ և $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$:

Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Բերել համապատասխան օրինակ: Կառուցել $f\in BV[a;b]$ ֆունկցիա, որի համար գրված անհավասարությունը խիստ է:

3031. Գտնել

$$f(x)=\begin{cases}0,\ x=0,\\ 1-x,\ 0<x<1,\\ 5,\ x=1\end{cases}$$

ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան $[0;1]$ հատվածի վրա:

3032. Գտնել

$$f(x)=\begin{cases}x-1,\ x<1,\\ 10,\ x=1,\\ x^2,\ x>1\end{cases}$$

ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան $[0;2]$ հատվածի վրա:

3033. Գտնել

$$f(x)=\begin{cases}x^2,\ 0\le x<1,\\ 5,\ x=1,\\ x+3,\ 1<x\le 2\end{cases}$$

ֆունկցիայի լրիվ վարիացիան $[0;1]$, $[1;2]$ և $[0;2]$ հատվածների վրա: Համոզվել, որ

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)+\overset{2}{\underset{1}{V}}(f):$$

3034. Դիցուք f ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի վրա վերջավոր վարիացիայի է և $a<c<b$: Ապացուցել, որ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f):$$

3035. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան $[a;c]$ և $[c;b]$ հատվածներից յուրաքանչյուրի վրա ունի վերջավոր լրիվ վարիացիա: Ապացուցել, որ $f\in BV[a;b]$ և որ

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f):$$

3036. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածը կարելի է բաժանել վերջավոր թվով հատվածների, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա f ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա f-ն $[a;b]$-ի վրա վերջավոր վարիացիայի է:

3037. Ապացուցել, որ եթե $f\in BV[a;\omega)$, ապա $g(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$-ն $[a;\omega)$-ի վրա չնվազող և սահմանափակ ֆունկցիա է:

3038. Ապացուցել, որ $f\in BV[a;b]$ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $[a;b]$-ի վրա աճող (չնվազող) F ֆունկցիա, այնպիսին, որ կամայական $a\le x_1<x_2\le b$ թվերի համար ճշմարիտ է

$$|f(x_2)-f(x_1)|\le F(x_2)-F(x_1)$$

անհավասարությունը:

3039. Ապացուցել, որ $f\in BV[a;b]$ այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը ներկայացվում է $[a;b]$-ի վրա չնվազող ֆունկցիաների տարբերության տեսքով:

3040. Օգտվելով նախորդ խնդրից՝ ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ են:

3041. Ապացուցել, որ եթե $f\in BV[a;+\infty)$, ապա

$$\overset{+\infty}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{+\infty}{\underset{b}{V}}(f)\quad (a<b):$$

3042. Ապացուցել, որ եթե f ֆունկցիան R-ի վրա վերջավոր վարիացիայի է, ապա

$$\lim_{a\to-\infty}\overset{a}{\underset{-\infty}{V}}(f)=\lim_{a\to+\infty}\overset{+\infty}{\underset{a}{V}}(f)=0:$$

3043. Ապացուցել, որ

$$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

կորն ուղղելի է:

3044. Ապացուցել, որ

$$y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

կորն ուղղելի չէ:

***

3045. Ստուգել, որ ցանկացած c հաստատունի համար

$$\int_a^b c\,d\sigma(x)=c(\sigma(b)-\sigma(a)):$$

3046. Ապացուցել, որ եթե $f,g\in\Re_\sigma[a;b]$, ապա $f\pm g\in\Re_\sigma[a;b]$ և

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]d\sigma(x)=\int_a^b f(x)d\sigma(x)\pm\int_a^b g(x)d\sigma(x):$$

3047. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re_\sigma[a;b]$, ապա կամայական α,β թվերի համար $\alpha f\in\Re_{\beta\sigma}[a;b]$ և

$$\int_a^b\alpha f(x)d[\beta\sigma(x)]=\alpha\beta\int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

3048. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re_\sigma[a;b]$ և $f\in\Re_\tau[a;b]$, ապա $f\in\Re_{\sigma+\tau}[a;b]$ և

$$\int_a^b f(x)d[\sigma(x)+\tau(x)]=\int_a^b f(x)d\sigma(x)+\int_a^b f(x)d\tau(x):$$

3049. Դիցուք՝ $\sigma\in BV[a;b]$ և $f\in\Re_\sigma[a;b]$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Ապացուցել, որ

$$\left|\int_a^b f(x)d\sigma(x)\right|\le M\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}(\sigma),$$

որտեղ $M=\sup\limits_{x\in[a;b]}|f(x)|$:

3050. Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\int_a^b fd\sigma$ ինտեգրալը, ապա ցանկացած $c \in (a;b)$ թվի համար գոյություն ունեն $\int_a^c fd\sigma$ և $\int_c^b fd\sigma$ ինտեգրալները, ընդ որում՝

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = \int_a^c f(x)d\sigma(x) + \int_c^b f(x)d\sigma(x):$$

3051. Ստուգել, որ եթե

$$f(x) = \begin{cases} 0, -1 \le x \le 0, \\ 1, 0 < x \le 1 \end{cases} \quad \text{և} \quad g(x) = \begin{cases} 0, -1 \le x < 0, \\ 1, 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

ապա

$$\int_{-1}^{0} f(x)dg(x) = \int_0^1 f(x)dg(x) = 0,$$

իսկ $\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$-ը գոյություն չունի:

3052. Ապացուցել, որ եթե $f \in \Re_g[a;b]$, ապա $g \in \Re_f[a;b]$, ընդ որում ճշմարիտ է մասերով ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int_a^b g(x)df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)dg(x):$$

3053. Ապացուցել, որ եթե $f \in C[a;b]$, իսկ $\sigma(x)$-ն $[a;b]$-ի վրա ունի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի ածանցյալ, ապա $f \in \Re_\sigma[a;b]$, ընդ որում

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = \int_a^b f(x)\sigma'(x)dx:$$

3054. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ $\Re_\sigma[a;b]$ դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանափակ է: Բերել համապատասխան օրինակ:

3055. Դիցուք σ-ն աճող է $[a;b]$ հատվածի վրա: Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ $\Re_\sigma[a;b]$ դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանափակ է:

3056. Դիցուք՝ $\sigma \in C^1[a;b]$ և $\sigma'(x) \ne 0$ $(x \in [a;b])$: Ապացուցել, որ $\Re_\sigma[a;b]$ դասի ցանկացած ֆունկցիա սահմանափակ է:

3057. Դիցուք $f:[a;b] \to R$ ֆունկցիան $x = c \in [a;b)$ կետում անընդհատ է և

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1, x > 0: \end{cases}$$

Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x-c)=f(c):$$

3058. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$, իսկ g-ն $(a;c_1)$, $(c_1;c_2)$, … , (c_n,b) միջակայքերից յուրաքանչյուրի վրա, որտեղ $a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$, հաստատուն է: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)]:$$

Հաշվել ինտեգրալը (3059-3062).

3059. $\int_{-1}^{1} x^2 d\,\mathrm{sgn}\,x:$

3060. $\int_0^2 xd[x]:$

3061. $\int_{-1}^{3} xdg(x)$, որտեղ $g(x)=\begin{cases}0, x=-1,\\ 1, -1<x<2,\\ -1, 2\le x\le 3:\end{cases}$

3062. $\int_0^2 x^2dg(x)$, որտեղ $g(x)=\begin{cases}-1,\ 0\le x<0{,}5,\\ 0,\ 0{,}5\le x\le 1{,}5,\\ -2,\ 1{,}5<x\le 2:\end{cases}$

Բ

E բազմությունը կոչվում է հաշվելի, եթե գոյություն ունի փոխմիարժեք ֆունկցիա, որը E-ն արտապատկերում է բնական թվերի N բազմության վրա:

3063. Ապացուցել, որ Z_+ և Z_- բազմություններից յուրաքանչյուրը հաշվելի է:

3064. Ցույց տալ, որ բնական զույգ թվերի և կենտ թվերի բազմությունները հաշվելի են:

3065. Ապացուցել, որ

ա) հաշվելի բազմության ցանկացած ենթաբազմություն վերջավոր է կամ հաշվելի;

բ) վերջավոր և հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է;

գ) երկու հաշվելի բազմությունների միավորումը հաշվելի է;

դ) ամբողջ թվերի Z բազմությունը հաշվելի է:

3066. Ապացուցել, որ ցանկացած անվերջ բազմություն պարունակում է հաշվելի ենթաբազմություն:

3067. Ստուգել, որ $J(p,q)=\dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}+p$, $p,q\in Z_+$, ֆունկցիան $Z_+\times Z_+$ բազմությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է Z_+-ի վրա:

3068. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու հաշվելի բազմությունների դեկարտյան արտադրյալը հաշվելի է:

3069. Ապացուցել, որ վերջավոր կամ հաշվելի բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորումը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3070. Ցույց տալ, որ ռացիոնալ թվերի բազմությունը հաշվելի է:

3071. Ապացուցել, որ թվային առանցքի վրա զույգ առ զույգ չհատվող բաց միջակայքերի ցանկացած ընտանիք վերջավոր է կամ հաշվելի:

3072. Ապացուցել, որ $[0;1]$ հատվածը հաշվելի չէ:

3073. Դիցուք f ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի վրա չնվազող է և $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(a;b)$: Ապացուցել

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{n}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\le f(b)-f(a)$$

անհավասարությունը:

3074. Ապացուցել, որ $[a;b]$ հատվածի վրա չնվազող f ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի: Ցույց տալ, որ եթե $x_1,x_2,\ldots\in(a;b)$ կետերը f-ի խզման կետերն են, ապա

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(b)-f(b-0)]\le f(b)-f(a)$$

3075. Դիցուք f ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածի վրա աճող է:

$$s(x)=[f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+$$

$$+[f(x)-f(x-0)],\ \text{երբ}\ a<x\le b\ \text{և}\ s(a)=0$$

ֆունկցիան կոչվում է f-ի թռիչքների ֆունկցիա:

Ապացուցել, որ $f(x)-s(x)$ ֆունկցիան $[a;b]$-ի վրա չնվազող է և անընդհատ:

3076. Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3077. Դիցուք՝ $f\in BV[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ է x_0 կետում, ապա այդ կետում անընդհատ է նաև $v(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ ֆունկցիան:

3078. Ապացուցել, որ վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիան կարելի ներկայացնել երկու ֆունկցիաների տարբերության տեսքով, որոնցից յուրաքանչյուրն անընդհատ է և չնվազող:

3079. Դիցուք՝ $f \in C[a;b] \cap BV[a;b]$: $[a;b]$ հատվածի $P = (x_0,...,x_n)$ տրոհման համար նշանակենք

$$V(f;P) = \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|, \quad \Omega(f;P) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k ,$$

որտեղ ω_k-ն f-ի տատանումն է $[x_k;x_{k+1}]$-ի վրա: Ապացուցել, որ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} V(f;P) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \Omega(f;P) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

որտեղ $\lambda(P)$-ն P տրոհման տրամագիծն է:

3080. Դիցուք f-ն $[a;b]$-ում դիֆերենցելի ֆունկցիա է և $f' \in \Re_1[a;b]$: Ապացուցել, որ $f \in BV[a;b]$, ընդ որում՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(x)| dx :$$

3080.1. Դիցուք $\varphi \in \Re_1[a;b]$ և $f(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$: Ապացուցել, որ $f \in BV[a;b]$ և $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)| dt$:

3081. Դիցուք՝ $f \in C^1[0;1]$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\int_0^1 |f(x)| dx \le \max\left\{\left|\int_0^1 f(x)dx\right|, \int_0^1 |f'(x)| dx\right\} :$$

3082. Դիցուք F-ն $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Ապացուցել, որ եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները սահմանափակված են միևնույն թվով (F ընտանիքը հավասարաչափ սահմանափակ է), ապա ցանկացած $E \subset [a;b]$ հաշվելի բազմության համար F ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների f_n հաջորդականություն, որը E-ի յուրաքանչյուր կետում զուգամետ է:

3083. Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածի վրա չնվազող ֆունկցիաների $F = \{f\}$ անվերջ ընտանիքը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա նրանից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների f_n հաջորդականություն, որն $[a;b]$-ի վրա զուգամիտում է չնվազող ֆունկցիայի:

3084. Դիցուք F-ն $[a;b]$ հատվածի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները և նրանց լրիվ վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով՝

$$\left|f(x)\right| \le K\,,\ \ \mathop{V}_a^b(f) \le K \quad (f \in F),$$

ապա F ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների f_n հաջորդականություն, որն $[a;b]$-ի վրա զուգամիտում է վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի (Հելլիի ընտրության սկզբունք):

3085. Ապացուցել, որ $f \in BV(R)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ներկայացվում է երկու չնվազող և սահմանափակ ֆունկցիաների տարբերությամբ:

3086. Ապացուցել, որ եթե $f \in BV(R)$, ապա գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ վերջավոր սահմանները:

3087. Դիցուք F-ն R-ի վրա որոշված ֆունկցիաների անվերջ ընտանիք է: Եթե ընտանիքի բոլոր ֆունկցիաները և նրանց լրիվ վարիացիաները սահմանափակված են միևնույն թվով՝

$$\left|f(x)\right| \le K\,,\ \ \mathop{V}_{-\infty}^{+\infty}(f) \le K \quad (f \in F),$$

ապա F ընտանիքից կարելի է ընտրել ֆունկցիաների f_n հաջորդականություն, որը R-ի վրա զուգամիտում է վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի:

3088. Ապացուցել, որ եթե $f \in BV[0;1]$, ապա $F(x) = f(ax+b)$ $(a>0)$ ֆունկցիան $\left[-\dfrac{b}{a};\dfrac{1-b}{a}\right]$ հատվածի վրա վերջավոր վարիացիայի է և $\mathop{V}_{-\frac{b}{a}}^{\frac{1-b}{a}}(F) = \mathop{V}_0^1(f)$:

3089. Դիցուք՝ $f \in BV[a;b]$ և $\mathop{V}_a^b(f) = f(b) - f(a)$: Ապացուցել, որ f-ը չնվազող ֆունկցիա է:

Ֆունկցիան ներկայացնել երկու չնվազող ֆունկցիաների տարբերության տեսքով (3090-3092).

3090. $\cos^2 x\,,\ 0 \le x \le \pi$:

3091. $\sin x\,,\ 0 \le x \le 2\pi$:

3092. $$f(x) = \begin{cases} -x^2, 0 \le x < 1; \\ 0, x = 1; \\ 1, 1 < x \le 2: \end{cases}$$

***

3093. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ $\sigma:[a;b]\to R$ -ը՝ չնվազող: $[a;b]$ հատվածի $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ տրոհման համար

$$s=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(\sigma(x_{k+1})-\sigma(x_k)),\ \ S=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(\sigma(x_{k+1})-\sigma(x_k))$$

գումարները, որտեղ $m_k=\inf\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in[x_k;x_{k+1}]} f(x)$, կոչվում են Դարբու-Ստիլտեսի համապատասխանաբար ստորին և վերին գումարներ:

Ապացուցել, որ $f\in\Re_\sigma[a;b]$ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}(S-s)=0,$$

որտեղ $\lambda(P)$-ն P տրոհման տրամագիծն է:

3094. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re[a;b]$, $\varphi\in\Re_1[a;b]$ և $g(x)=\int_a^x\varphi(t)dt$ $(a\le x\le b)$, ապա $f\in\Re_g[a;b]$ և

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx:$$

3095. Դիցուք՝ $u,v\in\Re_1[a;b]$ և

$$U(x)=U(a)+\int_a^x u(t)dt\,,\ \ V(x)=V(a)+\int_a^x v(t)dt\quad (a\le x\le b):$$

Ապացուցել մասերով ինտեգրման բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը՝

$$\int_a^b U(x)v(x)dx=U(x)V(x)\Big|_a^b-\int_a^b V(x)u(x)dx:$$

3096. Դիցուք՝ $f\in C[a;b]$ և g -ն $[a;b]$-ի վրա ամենուրեք, բացի գուցե վերջավոր թվով կետերից, ունի վերջավոր $g'(x)$ ածանցյալ, որն $[a;b]$-ի վրա ինտեգրելի է:

Ապացուցել, որ եթե $c_1,c_2,\cdots,c_n$ կետերը $(a;b)$-ում g -ի խզման կետերն են, ապա $f\in\Re_g[a;b]$ և

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^b f(x)g'(x)dx+f(a)[g(a+0)-g(a)]+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(c_k)[g(c_k+0)-g(c_k-0)]+f(b)[g(b)-g(b-0)]:$$

Հաշվել ինտեգրալը (3097-3101).

3097. ա) $\int_{-2}^{2} x d\sigma(x)$; բ) $\int_{-2}^{2} x^2 d\sigma(x)$; գ) $\int_{-2}^{2} (x^3+1) d\sigma(x)$,

$$\sigma(x)=\begin{cases} x+2, -2\le x\le -1; \\ 2, -1<x<0; \\ x^2+3, 0\le x\le 2: \end{cases}$$

3098. $\int_{0}^{\pi} \sin x d\sigma(x)$, $\sigma(x)=\begin{cases} x, 0\le x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 2, x=\pi, x=\dfrac{\pi}{2}; \\ x-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi: \end{cases}$

3099. $\int_{-\pi}^{\pi} (x+2) d\left(e^x \operatorname{sgn}\sin x\right)$: **3100.** $\int_{0}^{\pi} (x-1) d\left[(\cos x)\operatorname{sgn} x\right]$:

3101. $\int_{0}^{3} x d([x]-x)$:

3102. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ σ ֆունկցիան՝ c կետում $(a<c<b)$ անընդհատ, ապա $\int_a^c f(x)d\sigma(x)$ և $\int_c^b f(x)d\sigma(x)$ ինտեգրալների գոյությունից հետևում է $\int_a^b f(x)d\sigma(x)$ ինտեգրալի գոյությունը, ընդ որում

$$\int_{a}^{b} f(x)d\sigma(x)=\int_{a}^{c} f(x)d\sigma(x)+\int_{c}^{b} f(x)d\sigma(x):$$

3103. Ապացուցել, որ եթե $f:[a;b]\to R$ և $\sigma:[a;b]\to R$ ֆունկցիաները c $(a<c<b)$ կետում խզվում են, ապա f -ն ըստ σ -ի ինտեգրելի չէ:

3104. Ապացուցել, որ եթե σ -ն $[a;b]$ հատվածի վրա չնվազող ֆունկցիա է և $f, g\in \Re_\sigma[a;b]$, ապա

$$\left(\int_{a}^{b} f(x)g(x)d\sigma(x)\right)^2 \le \int_{a}^{b} f^2(x)d\sigma(x)\cdot\int_{a}^{b} g^2(x)d\sigma(x):$$

3105. Ապացուցել, որ եթե $\sigma \in BV[a;b]$, $f, g \in \Re_{\sigma}[a;b]$ և գոյություն ունի $c > 0$ թիվ այնպիսին, որ $|g(x)| \geq c \quad (a \leq x \leq b)$, ապա $\dfrac{f}{g} \in \Re_{\sigma}[a;b]$:

3106. Ապացուցել միջին արժեքի առաջին թեորեմը. եթե f -ն $[a;b]$ հատվածի վրա անընդհատ է, իսկ σ -ն՝ աճող, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = f(\xi)[\sigma(b) - \sigma(a)]:$$

3107. Ապացուցել միջին արժեքի երկրորդ թեորեմը. եթե $f, \sigma \in C[a;b]$, f -ը մոնոտոն է, իսկ σ -ն՝ վերջավոր վարիացիայի, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a;b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = f(a)[\sigma(\xi) - \sigma(a)] + f(b)[\sigma(b) - \sigma(\xi)]:$$

3108. Դիցուք՝ $f, \varphi \in C[a;b]$ և $[a;b]$ հատվածի վրա φ -ն աճող է: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi^{-1}(y)\right)dy :$$

3109. Դիցուք՝ $\sigma \in BV[a;b]$ և $f_n \in C[a;b] \quad (n \in N)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)d\sigma(x) = \int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

3110. Դիցուք՝ $f \in C[a;b]$, $\sigma_n(x) \to \sigma(x) \quad (x \in [a;b])$ և $\sup\limits_n \overset{b}{\underset{a}{V}}(\sigma_n) < +\infty$:

Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x)d\sigma(x) \quad \text{(Հելլիի թեորեմ):}$$

3111. Դիցուք $f_n \in C[a;b]$, $\sigma_n \in BV[a;b] \quad (n \in N)$: Ապացուցել, որ եթե $f_n \rightrightarrows f$, $\sigma_n(x) \to \sigma(x) \quad (x \in [a;b])$ և $\sup\limits_n \overset{b}{\underset{a}{V}}(\sigma_n) < +\infty$, ապա

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)d\sigma_n(x) = \int_a^b f(x)d\sigma(x):$$

3112. Դիցուք R_+ -ի վրա տրված ֆունկցիաների σ_n հաջորդականությունը բավարարում է

$$\sup_n \overset{+\infty}{\underset{0}{V}}(\sigma_n) < +\infty\,,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = \sigma(x)\quad (x\in R_+)$$

պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե f -ն R_+ -ի վրա անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է և $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)d\sigma_n(x) = \int_0^{+\infty} f(x)d\sigma(x):$$

Օրինակով համոզվել, որ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ պայմանն էական է:

3113. Ապացուցել, որ եթե φ և ψ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն $[\alpha;\beta]$ հատվածի վրա ունի սահմանափակ ածանցյալ, ապա $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ կորն ուղղելի է:

3114. Ստուգել, որ ա) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$; բ) $x=\cos 2t$, $y=\sin 2t$, $0\le t\le 2\pi$; գ) $x=\cos\left(2\pi t\sin\frac{1}{t}\right)$, $y=\sin\left(2\pi t\sin\frac{1}{t}\right)$, $0<t\le 2\pi$, $x(0)=1$, $y(0)=0$ կորերից յուրաքանչյուրը դեկարտյան հարթության վրա ներկայացնում է կետերի միևնույն $\{(x(t),y(t)):0\le t\le 2\pi\}$ բազմությունը, սակայն դրանցից առաջին երկուսն ուղղելի են և ունեն համապատասխանաբար 2π և 4π երկարություն, իսկ երրորդն ուղղելի չէ:

Գ

3115. Դիցուք $(a;b)$ միջակայքի վրա տրված f ֆունկցիայի համար այդ միջակայքի յուրաքանչյուր կետ լոկալ մինիմումի կետ է: Ապացուցել, որ f -ի արժեքների բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3116. Դիցուք $f:[a;b]\to R$ ֆունկցիան $(a;b)$ միջակայքի յուրաքանչյուր կետում ունի միակողմանի սահմաններ: Ապացուցել, որ f -ի խզման կետերի բազմությունը վերջավոր է կամ հաշվելի:

3117. Կամայական $E\subset R$ հաշվելի բազմության համար կառուցել աճող ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը համընկնում է E -ին:

3118. Դիցուք՝ $f\in BV[0;1]$, $\varphi\in C[\alpha;\beta]$ ֆունկցիան աճող է, ընդ որում՝ $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=1$: Ապացուցել, որ $F(x)=f(\varphi(x))$ ֆունկցիան $[\alpha;\beta]$-ի վրա վերջավոր վարիացիայի է և $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(F)=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)$:

3119. Ճշմարիտ է՞ արդյոք, որ

ա) վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականության սահմանը վերջավոր վարիացիայի է;

բ) եթե վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հավասարաչափ զուգամետ g_n հաջորդականության g սահմանը վերջավոր վարիացիայի է, ապա $\lim\limits_{n\to\infty}V(g_n)=V(g)$:

Բերել համապատասխան օրինակներ:

3120. Ապացուցել, որ եթե $f\in C[a;b]$ և $|f|\in BV[a;b]$, ապա $f\in BV[a;b]$ և $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)$ (տես խնդիր 3030):

3121. Դիցուք՝ $f\in BV[a;b]$: Հավասարումների $f(x)-f(a)=p_0(x)-q_0(x)$ և $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=p_0(x)+q_0(x)$ համակարգից որոշվող p_0 և q_0 ֆունկցիաները կոչվում են f ֆունկցիայի համապատասխանաբար դրական և բացասական վարիացիայի ֆունկցիաներ: Ստուգել, որ p_0-ն և q_0-ն չնվազող ֆունկցիաներ են, ընդ որում՝ $p_0(a)=q_0(a)=0$: Ապացուցել այդ ֆունկցիաների հետևյալ էքստրեմալ հատկությունը. եթե p-ն և q-ն $[a;b]$-ում չնվազող ֆունկցիաներ են և $f=p-q$, ապա

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(p)\ge\overset{b}{\underset{a}{V}}(p_0),\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(q)\ge\overset{b}{\underset{a}{V}}(q_0):$$

3122. Դիցուք՝ $g\in\Re[a;b]$, $g^+(t)=\max\{g(t),0\}$, $g^-(t)=-\min\{g(t),0\}$ և $f(x)=\int_a^x g(t)dt$: Ապացուցել, որ $f\in BV[a;b]$ և որ հետևյալ ֆունկցիաները f ֆունկցիայի համապատասխանաբար լրիվ, դրական և բացասական վարիացիայի ֆունկցիաներն են.

$$\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=\int_a^x|g(t)|dt,\ p_0(x)=\int_a^x g^+(t)dt,\ q_0(x)=\int_a^x g^-(t)dt:$$

3123. Ապացուցել, որ $E\subset[a;b]$ բազմության

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, x\in E;\\ 0, x\in[a;b]\setminus E\end{cases}$$

բնութագրիչ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է այն և միայն այն դեպքում, երբ E -ն ունի վերջավոր թվով եզրային կետեր:

3124. Կառուցել անընդհատ և վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա, որը ոչ մի $\alpha>0$ թվի համար չի բավարարում Լիպշիցի α պայմանին (տես խնդիր 2967):

3125. Կառուցել $Lip_\alpha[a;b]$ $(0<\alpha<1)$ դասին պատկանող ֆունկցիա, որի լրիվ վարիացիան վերջավոր չէ (տես խնդիր 2967):

3126. α -ի և β -ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $f(x)=x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}$ ֆունկցիան $(0;1]$ միջակայքում կունենա վերջավոր վարիացիա:

3127. Դիցուք՝ $f\in BV[a;b]$ և $x_0\in(a;b)$: Գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայման, որի դեպքում x_0 կետում f -ի արժեքը փոխելով հնարավոր լինի f -ի վարիացիան փոքրացնել:

3128. Դիցուք՝ $f_n\in BV[a;b]$ և ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, այնպիսին, որ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n-f_m)<\varepsilon$, երբ $m,n\ge n_0$:

ա) Ապացուցել, որ գոյություն ունի $f\in BV[a;b]$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\lim_{n\to\infty}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n-f)=0:$$

բ) Համոզվել, որ f -ը միակը չէ:

գ) Ապացուցել, որ ցանկացած այդպիսի երկու ֆունկցիա իրարից տարբերվում են հաստատուն գումարելիով:

դ) Ապացուցել, որ եթե f_n հաջորդականությունն $[a;b]$ հատվածի առնվազն մեկ կետում զուգամետ է, ապա f_n-ը $[a;b]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

3129. Դիցուք R_+ -ի վրա որոշված ֆունկցիաների σ_n հաջորդականությունը բավարարում է

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_n\overset{+\infty}{\underset{a}{V}}(\sigma_n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=\sigma(x)\quad (x\in R_+)$$

պայմաններին: Ապացուցել, որ եթե f -ն R_+ -ի վրա անընդհատ և սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(x)d\sigma_n(x)=\int_0^\infty f(x)d\sigma(x):$$

3130. Դիցուք` $\sigma\in BV[a;b]$ և $f\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ $\int_a^x f(t)d\sigma(t)$ ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է $[a;b]$-ում և $\sigma$-ի անընդհատության կետերում` անընդհատ:

3131. Դիցուք` $f,g\in C[a;b]$, $\sigma\in BV[a;b]$ և $\tau(x)=\int_a^x f(x)d\sigma(x)$: Ապացուցել, որ

$$\int_a^b g(x)d\tau(x)=\int_a^b f(x)g(x)d\sigma(x):$$

3132. Դիցուք $\sigma\in BV[a;b]$ և $\nu(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(\sigma)$: Ապացուցել, որ ցանկացած սահմանափակ ֆունկցիայի համար հետևյալ երեք պնդումները համարժեք են.

1. $f\in\Re_\sigma[a;b]$;
2. $\lim\limits_{\lambda(P)\to0}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)|\sigma(x_i)-\sigma(x_{i-1})|=0$;
3. $\lim\limits_{\lambda(P)\to0}\sum\limits_{i=1}^n\omega_i(f)(\nu(x_i)-\nu(x_{i-1}))=0$;

որտեղ $\lambda(P)$-ն $P=(x_0,x_1,...,x_n)$ տրոհման տրամագիծն է, իսկ $\omega_i(f)$-ն f-ի տատանումն է $[x_{i-1};x_i]$ հատվածի վրա:

3133. Դիցուք`$\sigma\in BV[a;b]$ և $\nu(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(\sigma)$:Ապացուցել, որ $\Re_\sigma[a;b]=\Re_\nu[a;b]$:

3134. Դիցուք $\sigma\in BV[a;b]$ և $f,g\in\Re_\sigma[a;b]$: Ապացուցել, որ $|f|,f\cdot g,\max\{f,g\}\in\Re_\sigma[a;b]$:

3135. Դիցուք`

$$\tau(x)=\begin{cases}1, x>0,\\0, x\le0,\end{cases}$$

x_n-ը $(a;b)$ միջակայքի իրարից տարբեր կետերի հաջորդականություն է, $\sum_{n=1}^\infty|c_n|<+\infty$ և $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^\infty c_n\tau(x-x_n)$ $(a\le x\le b)$: Ապացուցել, որ

ա) σ-ն x_n-երից տարբեր ցանկացած կետում անընդհատ է;

բ) $\sigma \in BV[a;b]$;

գ) ցանկացած $f \in C[a;b]$ ֆունկցիայի համար

$$\int_a^b f(x)d\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(x_n):$$

3136. Դիցուք՝ $f \in C[a;b] \cap \Re_\sigma[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե σ-ի արժեքը փոխվի $(a;b)$-ի որևէ կետում, ապա $\int_a^b f(x)d\sigma(x)$ ինտեգրալի արժեքը չի փոխվի: Կփոխվի՞ արդյոք ինտեգրալը, եթե σ-ի արժեքը փոխվի $[a;b]$-ի ծայրակետերում:

3137. Ապացուցել, որ եթե $f \in BV[0;2\pi]$, ապա

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx\right| \le \frac{1}{n}\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) \quad (n \in N):$$

3138. Ապացուցել, որ եթե $f \in BV[0;2\pi]$, ապա

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| \le \frac{2}{n}\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) \quad (n \in N),$$

իսկ եթե նաև $f(0) = f(2\pi)$, ապա

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\right| \le \frac{1}{n}\overset{2\pi}{\underset{0}{V}}(f) \quad (n \in N):$$

3139. Ապացուցել, որ եթե $0 < h < \pi$ և $f \in BV[0;h]$, ապա

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{\sin px}{\sin x}dx = \frac{\pi}{2}f(+0):$$

3140. Դիցուք՝ $f \in BV[-\pi;\pi]$: Ապացուցել, որ f-ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է:

3141. Ապացուցել, որ եթե $f \in BV[-\pi;\pi]$, ապա f-ի Ֆուրիեի շարքն x կետում զուգամիտում է $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ թվին (Ժորդանի հայտանիշ):

3142. Դիցուք՝ $f \in \Re_1[-\pi;\pi]$ և $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$-ը f-ի Ֆուրիեի եռանկյունաչափական շարքն է:

ա) Ստուգել, որ $F(x)=\int\limits_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]dt$ ֆունկցիան $[-\pi;\pi]$ հատվածում անընդհատ և վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, ընդ որում՝ $F(-\pi)=F(\pi)$:

բ) Ապացուցել, որ F-ը $[-\pi;\pi]$-ում վերլուծվում է հավասարաչափ զուգամետ Ֆուրիեի շարքի. $F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$:

գ) F և f ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցների միջև ստանալ $\frac{A_0}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$, $A_n=-\frac{b_n}{n}$, $B_n=\frac{a_n}{n}$ $(n\in N)$ կապը:

դ) Համոզվել, որ անկախ f-ի Ֆուրիեի շարքի զուգամիտությունից, ճշմարիտ է անդամ առ անդամ ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt:$$

ե) Բերել թվային առանցքի վրա զուգամետ եռանկյունաչափական շարքի օրինակ, որը $\Re_1[-\pi;\pi]$ դասի ոչ մի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը չէ:

3143. Դիցուք՝ $\sigma\in BV[0;1]$ և $f\in C[0;2]$: Ապացուցել, որ

$$F(x)=\int\limits_0^1 f(x+t)d\sigma(t)$$

ֆունկցիան $[0;1]$-ի վրա անընդհատ է:

3144. Կմնա՞ արդյոք նախորդ խնդրի պնդումը ճշմարիտ, եթե անընդհատության փոխարեն պահանջենք, որ f-ը լինի սահմանափակ $[0;2]$-ի վրա և

$$\int\limits_0^1 f(x+t)d\sigma(t)$$

ինտեգրալը գոյություն ունենա յուրաքանչյուր $x\in[0;1]$ թվի համար:

Գլուխ 13

Շատ փոփոխականի ֆունկցիաներ Ֆունկցիայի անընդհատությունը

R^m տարածության տոպոլոգիան: Իրական թվերից կազմված բոլոր $\mathbf{x}=\left(x^1,x^2,\dots,x^m\right)$ կարգավորված m-յակների (վեկտորների) բազմությունը՝ R^m-ը, m-չափանի վեկտորական տարածություն է, որում գծային առնչությունները սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$\left(x^1,\dots,x^m\right)+\left(y^1,\dots,y^m\right)=\left(x^1+y^1,\dots,x^m+y^m\right),$$

$$\alpha\left(x^1,\dots,x^m\right)=\left(\alpha x^1,\dots,\alpha x^m\right)\quad(\alpha\in R):$$

Տրված $\mathbf{x}=\left(x^1,x^2,\dots,x^m\right)$ վեկտորի համար x^i-ն $(1\le i\le m)$ կոչվում է i-րդ կոորդինատ:

Վեկտորի *նորմը* R^m-ում սահմանվում է $|\mathbf{x}|=\sqrt{\left(x^1\right)^2+\cdots+\left(x^m\right)^2}$ բանաձևով: Ցանկացած $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^m$ վեկտորների համար $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|_m=\sqrt{\left(x^1-y^1\right)^2+\cdots+\left(x^m-y^m\right)^2}$-ն կոչվում է այդ վեկտորների *հեռավորություն*:

Տրված $\mathbf{a}\in R^m$ վեկտորի (կետի) և $\varepsilon>0$ թվի համար

$$B(\mathbf{a};\varepsilon)=\left\{\mathbf{x}\in R^m:|\mathbf{x}-\mathbf{a}|<\varepsilon\right\}$$

բազմությունը կոչվում է $\mathbf{a}$ կենտրոնով և ε *շառավղով բաց գունդ* (m-չափանի), որն անվանում են $\mathbf{a}$ կետի ε-*շրջակայք*: Օգտագործելով շրջակայքի գաղափարը՝ R^m-ում մտցվում են բաց, փակ բազմությունների, բազմության արտաքին, եզրային, կուտակման և մեկուսացված կետերի հասկացությունները, որոնց սահմանումներն այստեղ ոչնչով չեն տարբերվում գլուխ 1-ում թվային բազմությունների համար տրված նույնանուն հասկացությունների սահմանումներից: Մասնավորապես, բաց բազմությունների Σ համակարգը (ընտանիքը) կոչվում է $K\subset R^m$ բազմության բաց ծածկույթ, եթե $\bigcup\Sigma\supset K$: K-ն կոչվում է *կոմպակտ*, եթե K-ի ցանկացած բաց ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

R^m-ում բաց բազմությունների պարզագույն օրինակներ են բաց գունդը և m-չափանի բաց զուգահեռանիստը՝

$$I_{(\mathbf{a};\mathbf{b})}=\left\{\left(x^1,\dots,x^m\right):a^i<x^i<b^i,\,i=1,\dots,m\right\}\quad\left(-\infty<a^i<b^i<+\infty,\,i=1,\dots,m\right):$$

Փակ, ինչպես նաև կոմպակտ բազմությունների օրինակներ են փակ գունդը՝

$$\overline{B}(\mathbf{a};r)=\left\{\mathbf{x}\in R^m:|\mathbf{x}-\mathbf{a}|\le r\right\},$$

սֆերան՝

$$S(\mathbf{a};r)=\left\{\mathbf{x}\in R^m:|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=r\right\}$$

և փակ զուգահեռանիստը՝

$$I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}=\left\{\left(x^1,\dots,x^m\right):a^i\le x^i\le b^i,\,i=1,\dots,m\right\}:$$

Ցանկացած բաց բազմություն, որը պարունակում է $\mathbf{x}_0$-ն, կանվանենք $\mathbf{x}_0$-ի շրջակայք: Երբեմն $\mathbf{x}_0$-ն որպես ներքին կետ պարունակող փակ բազմությունը կանվանենք $\mathbf{x}_0$-ի փակ շրջակայք:

Տրված $X \subset R^m$ բազմության համար $diam(X) = \sup\limits_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$-ը կոչվում է *տրամագիծ*: Բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե նրա տրամագիծը վերջավոր է:

Ֆ ու ն կ ց ի ա յ ի ս ա հ մ ա ն ը : Տրված $X \subset R^m$ և Y բազմությունների համար $F : X \to Y$ ֆունկցիան կանվանենք շատ փոփոխականի (m փոփոխականի) ֆունկցիա և հաճախ կգրենք՝ $y = F(\mathbf{x}) = F(x^1, ..., x^m)$, $\mathbf{x} = (x^1, ..., x^m) \in X$: Այն դեպքում, երբ $Y \subset R$ $(n = 1)$, F-ը կանվանենք m փոփոխականի *իրականարժեք* ֆունկցիա: Երբեմն $\mathbf{x}$ արգումենտի i-րդ կոորդինատը կանվանենք ֆունկցիայի i-րդ կամ x^i փոփոխական:

Տրված $F : X \to Y$ $(X \subset R^m, Y \subset R^n)$ և $G : Y \to Z$ $(Z \subset R^p)$ ֆունկցիաների համադրումը (կոմպոզիցիան)՝ $G \circ F : X \to Z$ բարդ ֆունկցիան, սահմանվում է $z = G(F(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in X$, բանաձևով:

$\pi^i : R^n \to R$ ֆունկցիան (պրոյեկտող արտապատկերումը) սահմանվում է $\pi^i(\mathbf{y}) = y^i$, $\mathbf{y} = (y^1, ..., y^n) \in R^n$, բանաձևով: Տրված $F : X \to R^n$ ֆունկցիայի համար $f_i = \pi^i \circ F$ ֆունկցիան կոչվում է i-րդ *կոորդինատային ֆունկցիա*:

Դիցուք $X \subset R^m$ և $\mathbf{a}$-ն X բազմության կուտակման կետ է:

Սահմանում: $\mathbf{b} \in R^n$ վեկտորը կոչվում է $F : X \to Y$ ֆունկցիայի սահման $\mathbf{a}$ կետում և նշանակվում՝ $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} F(\mathbf{x})$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{x} \in X \ \left(0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}|_m < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|_n < \varepsilon\right):$$

Ցանկացած $\overline{B}(\mathbf{0}; r)$ ($\mathbf{0}$-ն զրոյական վեկտորն է՝ $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$) փակ գնդի լրացումը ընդունվում է որպես ∞-ի շրջակայք: ∞-ը համարվում է X բազմության կուտակման կետ, եթե նրա ցանկացած շրջակայք պարունակում է կետեր X-ից: Այս պայմաններում $\mathbf{b} \in R^n$ վեկտորը կոչվում է $F : X \to R^n$ ֆունկցիայի սահման անվերջում և նշանակվում՝ $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \infty} F(\mathbf{x})$, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta > 0 \ \forall \mathbf{x} \in X \ \left(|\mathbf{x}| > \Delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon\right):$$

Համանմանորեն սահմանվում են ֆունկցիայի անվերջ սահմանը $\mathbf{a} \in R^m$ կետում՝ $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \infty$ և անվերջում՝ $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \infty} F(\mathbf{x}) = \infty$: Ընդսմին՝ անվերջ սահման ունեցող ֆունկցիան կոչվում է *անվերջ մեծ*, իսկ $\mathbf{0}$ (զրո) սահման ունեցող ֆունկցիան՝ *անվերջ փոքր*: Եթե տրված $F : X \to R^n$ և $G : X \to R^p$ ֆունկցիաների համար $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \dfrac{|F(\mathbf{x})|}{|G(\mathbf{x})|} = 0$, ապա գրում են՝ $F(\mathbf{x}) = o(G(\mathbf{x}))$ կամ $F(\mathbf{x}) = o(|G(\mathbf{x})|)$, $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$:

Սահմանում: Տրված $f : X \to R$ $(X \subset R^2)$ ֆունկցիայի և $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$ կետի համար

$$\lim_{x^1 \to a^1} \lim_{x^2 \to a^2} f\left(x^1, x^2\right) \quad \text{և} \quad \lim_{x^2 \to a^2} \lim_{x^1 \to a^1} f\left(x^1, x^2\right)$$

սահմանները կոչվում են *հաջորդական սահմաններ*: Հաջորդական սահմանի գաղափարը հեշտությամբ ընդհանրացվում է ցանկացած $F : X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի համար: Նկատենք, որ տվյալ կետում ֆունկցիայի վերջավոր սահմանի գոյությունը չի ապահովում այդ կետում հաջորդական սահմանների գոյությունը:

Թեորեմ: Եթե $f : X \to R$ $\left(X \subset R^2\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{a} = \left(a^1, a^2\right)$ կետում ունի սահման և, բացի այդ, ցանկացած x^2-ի, $x^2 \neq a^2$, համար գոյություն ունի $\lim_{x^1 \to a^1} f\left(x^1, x^2\right)$ վերջավոր սահմանը, ապա գոյություն ունի նաև $\lim_{x^2 \to a^2} \lim_{x^1 \to a^1} f\left(x^1, x^2\right)$ հաջորդական սահմանը, ընդ որում՝

$$\lim_{x^2 \to a^2} \lim_{x^1 \to a^1} f\left(x^1, x^2\right) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) :$$

Դիցուք $\mathbf{x}_n$-ը R^m տարածության վեկտորների հաջորդականություն է:

Սահմանում: $\mathbf{a} \in R^m$ վեկտորը կոչվում է $\mathbf{x}_n$ հաջորդականության սահման (վերջավոր սահման) և նշանակվում՝ $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n$, եթե $\lim_{n \to \infty} \left|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\right| = 0$: Այն դեպքում, երբ $\left|\mathbf{x}_n\right| \to +\infty$, $\mathbf{x}_n$-ն անվանում են անվերջ մեծ և գրում՝ $\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \infty$:

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը R^m-ում: Որպեսզի $\mathbf{x}_n \in R^m$ $(n \in N)$ հաջորդականությունը լինի զուգամետ (ունենա վերջավոր սահման), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathbf{x}_n$-ը լինի ֆունդամենտալ.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall k, n \in N \ \left(k > n \geq n_0 \Rightarrow \left|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_n\right| < \varepsilon\right):$$

Ֆունկցիայի անընդհատությունը: $F : X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in X$ կետում կոչվում է *անընդհատ*, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{x} \in X \ \left(\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right| < \delta \Rightarrow \left|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0)\right| < \varepsilon\right):$$

Եթե F-ն $\mathbf{x}_0$-ում անընդհատ չէ, ապա այն այդ կետում անվանում են *խզվող*, իսկ $\mathbf{x}_0$-ն կանվանենք *խզման կետ*:

Անընդհատ ֆունկցիայի լոկալ հատկությունները: Եթե $F : X \to R^n$ ֆունկցիան անընդհատ է $\mathbf{x}_0$ կետում, ապա այն այդ կետում սահմանափակ է. գոյություն ունի $\mathbf{x}_0$-ի շրջակայք, որում F-ի ընդունած արժեքների բազմությունը սահմանափակ է:

Եթե $f : X \to R$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0$ կետում անընդհատ է և $f(\mathbf{x}_0) > 0$, ապա գոյություն ունի $\mathbf{x}_0$-ի շրջակայք, որում f-ի ընդունած արժեքները դրական են:

Եթե $F : X \to R^n$ և $G : X \to R^n$ ֆունկցիաները անընդհատ են $\mathbf{x}_0$ կետում, ապա $\alpha F + \beta G$ $(\alpha, \beta \in R)$ ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է $\mathbf{x}_0$-ում: Եթե F և G ֆունկցիաները իրականարժեք են և $\mathbf{x}_0$-ում անընդհատ, ապա նրանց թե՛ արտադրյալը, թե՛ քանորդը, եթե վերջինիս հայտարարը զրո չի դառնում, անընդհատ են $\mathbf{x}_0$-ում:

Եթե $F: X \to Y$ $\left(X \subset R^m, Y \subset R^n\right)$ ֆունկցիան անընդհատ է $\mathbf{x}_0$ կետում, իսկ $G: Y \to R^p$ ֆունկցիան՝ $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$ կետում, ապա $G \circ F: X \to R^p$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է $\mathbf{x}_0$ -ում:

Ֆունկցիան, որն անընդհատ է իր որոշման տիրույթի յուրաքանչյուր կետում, կանվանենք *անընդհատ ֆունկցիա*: $F: X \to Y$ անընդհատ ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $C(X,Y)$: Այն դեպքում, երբ $Y \subset R$, $C(X,Y)$-ի փոխարեն համապատասխանաբար կօգտագործենք նաև $C(X)$ նշանակումը:

Հավասարաչափ անընդհատություն: $F: X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան կոչվում է X բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ, եթե

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X\ \left(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \delta \Rightarrow |F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon\right)$:

$E \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե գոյություն չունեն B_1, B_2 բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ $B_i \cap E \neq \varnothing$, $i = 1,2$, $E \subset B_1 \cup B_2$ և $B_1 \cap B_2 = \varnothing$: Բաց և կապակցված բազմությունը կանվանենք *տիրույթ*:

Դիցուք X -ն R տարածության վերջավոր կամ անվերջ միջակայք է: $\Gamma \in C\left(X; R^m\right)$ ֆունկցիան՝ X միջակայքի անընդհատ արտապատկերումը R^m -ի մեջ, կոչվում է *անընդհատ կոր* կամ *ճանապարհ* R^m -ում: Եթե $X = [\alpha; \beta]$, ապա կասենք, որ Γ ճանապարհը միացնում է R^m տարածության $A = \Gamma(\alpha)$ և $B = \Gamma(\beta)$ կետերը: Այն դեպքում, երբ Γ -ի բոլոր արժեքները պատկանում են $E \subset R^m$ բազմությանը, պայմանավորվենք ասել, որ Γ ճանապարհը ընկած է E -ում:

$E \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *գծորեն կապակցված*, եթե ցանկացած $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ կետերի համար գոյություն ունի E -ում ընկած և այդ կետերը միացնող ճանապարհ:

Անընդհատ ֆունկցիաների գլոբալ հատկությունները: Դիցուք $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է: Եթե $F \in C\left(K; R^n\right)$, ապա

ա) F -ը հավասարաչափ անընդհատ է;

բ) $F(K)$-ն կոմպակտ է R^n -ում:

Եթե $F \in C\left(E; R^n\right)$ և $E \subset R^m$ բազմությունը կապակցված է, ապա $F(E)$-ն R^n -ում նույնպես կապակցված է:

Ա

3145. Ապացուցել R^m -ում վեկտորի նորմի հետևյալ հատկությունները.

ա) $|\mathbf{x}| \geq 0$, $|\mathbf{x}| = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

բ) $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{x}|$, $\alpha \in R$;

գ) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$ (եռանկյան անհավասարություն), ընդ որում հավասարություն կարող է լինել այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{x}$ և $\mathbf{y}$ վեկտորները համուղղված են՝ $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ $\left(\lambda \in R_+\right)$:

3146. Ցույց տալ, որ գունդը և զուգահեռանիստը R^m-ում սահմանափակ բազմություններ են:

3147. Ապացուցել, որ $X \subset R^m$ բազմությունը սահմանափակ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի

ա) X-ը պարունակող m-չափանի գունդ;

բ) X-ը պարունակող m-չափանի զուգահեռանիստ;

գ) $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $\mathbf{x} \in X$ վեկտորի համար $|\mathbf{x}| \le M$:

3148. Տրված $\mathbf{x} = (x^1,\ldots,x^m)$, $\mathbf{y} = (y^1,\ldots,y^m)$ վեկտորների *սկալյար* կամ *ներքին արտադրյալը* սահմանվում է

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{m} x^i \cdot y^i$$

բանաձևով: Ապացուցել սկալյար արտադրյալի հետևյալ հատկությունները.

ա) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ (համաչափություն);

բ) $\langle \alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y} \rangle + \beta\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \rangle$

$\langle \mathbf{x}, \alpha\mathbf{y_1} + \beta\mathbf{y_2} \rangle = \alpha\langle \mathbf{x}, \mathbf{y_1} \rangle + \beta\langle \mathbf{x}, \mathbf{y_2} \rangle$ (երկգծայնություն);

գ) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \ge 0$, ընդ որում $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (դրական որոշյալություն);

դ) $|\mathbf{x}|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$;

ե) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \dfrac{|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4}$ (բևեռացման նույնություն);

զ) $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \le |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ (Շվարցի անհավասարություն):

3149. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ վեկտորները կոչվում են *օրթոգոնալ* (ուղղահայաց), եթե $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$: Ապացուցել, որ եթե $\mathbf{x}$ և $\mathbf{y}$ վեկտորներն ուղղահայաց են, ապա $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2$: Ճշմարի՞տ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Խնդրում գրված հավասարությունը մեկնաբանել երկրաչափորեն:

3150. Դիցուք $\mathbf{e}_i \in R^m$ վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են, բացառությամբ i-րդի, որը հավասար է 1-ի: Ստուգել, որ $\{\mathbf{e}_i : i = 1,\ldots,m\}$ համակարգը կազմված է զույգ առ զույգ օրթոգոնալ վեկտորներից:

3151. Ապացուցել, որ $\mathbf{a} \in R^m$ վեկտորն օրթոգոնալ է R^m տարածության բոլոր վեկտորներին այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{a} = \mathbf{0}$:

3152. Ստուգել, որ ցանկացած $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^m$ վեկտորների համար

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2\left(|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2\right):$$

Մեկնաբանել գրված նույնությունը երկրաչափորեն:

3153. Ցանկացած $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^m$ վեկտորների համար ապացուցել անհավասարությունը.

ա) $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$;

բ) $\big||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}|\big|\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$;

գ) $\max\limits_{1\le i\le m}\left|x^i\right|\le|\mathbf{x}|\le\sqrt{m}\max\limits_{1\le i\le m}\left|x^i\right|$:

3154. Ապացուցել, որ վեկտորների $\mathbf{x}_n=\left(x_n^1,\dots,x_n^m\right)$ $(n\in N)$ հաջորդականությունը զուգամիտում է $\mathbf{a}=\left(a^1,\dots,a^m\right)$ վեկտորին այն և միայն այն դեպքում, երբ այն զուգամիտում է ըստ բոլոր կոորդինատների. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^i=a^i$, $i=1,\dots,m$:

Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\infty$, ապա ցանկացած $i=1,\dots,m$ ինդեքսի համար $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^i=\infty$:

3155. Ապացուցել, որ եթե $\mathbf{x}_n$ $(n\in N)$ հաջորդականությունը զուգամետ է, ապա այն սահմանափակ է. $\exists M>0\ \forall n\in N\ \left(|\mathbf{x}_n|\le M\right)$:

3156. Ապացուցել, որ R^m-ում ցանկացած սահմանափակ հաջորդականություն ունի զուգամետ ենթահաջորդականություն:

3157. Դիցուք $\mathbf{x}_n$-ը և $\mathbf{y}_n$-ը R^m-ում զուգամետ հաջորդականություններ են: Ապացուցել, որ ցանկացած $\alpha,\beta\in R$ թվերի համար $\alpha\mathbf{x}_n+\beta\mathbf{y}_n$ և $\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n\rangle$ հաջորդականությունները զուգամետ են, ընդ որում՝

$$\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\mathbf{x}_n+\beta\mathbf{y}_n\right)=\alpha\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n+\beta\lim_{n\to\infty}\mathbf{y}_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n\rangle=\left\langle\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n,\lim_{n\to\infty}\mathbf{y}_n\right\rangle:$$

***

3158. Գտնել ֆունկցիայի որոշման տիրույթը.

ա) $u=x+\sqrt{y}$;

բ) $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

գ) $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$;

դ) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

ե) $u=\sqrt{\left(x^2+y^2-1\right)\left(4-x^2-y^2\right)}$;

զ) $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

է) $u=\ln(-x-y)$;

ը) $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$;

թ) $u=\ln(xyz)$;

ժ) $u=\ln\left(-1-x^2-y^2+z^2\right)$:

$z(x,y)=c$ հավասարումով որոշվող կորերը կոչվում են $z=z(x,y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծեր:

3159. Նկարագրել ֆունկցիայի մակարդակի գծերը.

ա) $z=x+y$

բ) $z=x^2+y^2$;

գ) $z=x^2-y^2$;

դ) $z=(x+y)^2$;

ե) $z=\dfrac{x}{y}$;

զ) $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$;

է) $z=\sqrt{xy}$;

ը) $z=\dfrac{y-x^2}{x^2}$:

$u(x,y,z)=c$ հավասարումով որոշվող մակերևույթները կոչվում են $u=u(x,y,z)$ ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթներ:

3160. Նկարագրել ֆունկցիայի մակարդակի մակերևույթները.

ա) $u=x+y+z$;

բ) $u=x^2+y^2+z^2$;

գ) $u=x^2+y^2-z^2$;

դ) $u=\dfrac{x+y+z}{x-y+z}$:

3161. Տրված է $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}F(\mathbf{x})=\mathbf{b}=\left(b^1,\dots,b^n\right)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}f^i(\mathbf{x})=b^i$, $i=1,\dots,n$, որտեղ $f^i=\pi^i\circ F$-ն F-ի i-րդ կոորդինատային ֆունկցիան է:

Գտնել տրված $f(x,y)$ երկու փոփոխականի իրականարժեք ֆունկցիայի սահմանը նշված $(a;b)$ կետում (3162-3164).

3162. ա) $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(x+e^y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(a;b)=(1;0)$:

բ) $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{x}$, $x\neq 0$, $(a;b)=(0;1)$:

3163. ա) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$; $(a;b)=(0;0)$;

բ) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{|x|}$; $(a;b)=(0;0)$:

3164. ա) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$, $(a;b)=\infty$;

բ) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$; $(a;b)=\infty$:

գ) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$, $x,y>0$; $(a;b)=\infty$;

դ) $f(x,y)=(x+y)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$; $(a;b)=\infty$:

ե) $f(x,y)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$, $|y|\le 1$; $(a;b)=\infty$:

Գտնել $(a;b)$ կետում $f(x,y)$ ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները (3165-3169).

3165. ա) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$; $a=\infty$, $b=\infty$:

բ) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$; $a=\infty$, $b=\infty$:

3166. ա) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}$; $(a;b)=(0;0)$;

բ) $f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^2+y^2}$; $(a;b)=(0;0)$:

3167. ա) $f(x,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $(a;b)=(0;0)$;

բ) $f(x,y)=\dfrac{\sin 3x-tg\,2y}{6x+3y}$; $(a;b)=(0;0)$:

3168. ա) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}$; $a=0$, $b=+\infty$;

բ) $f(x,y)=\dfrac{y^x}{1+y^x}$, $x>0$; $a=0$, $b=+\infty$:

3169. $f(x,y)=\log_x(x+y)$, $(a;b)=(1;0)$:

3170. Ստուգել, որ $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները $(0;0)$ կետում գոյություն ունեն՝

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1, \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

սակայն $f(x,y)$-ը $(0;0)$ կետում սահման չունի:

3171. Ստուգել, որ $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները $(0;0)$ կետում գոյություն ունեն և իրար հավասար են, սակայն f-ն այդ կետում սահման չունի:

3172. Ցույց տալ, որ $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ ֆունկցիայի հաջորդական սահմանները $(0;0)$ կետում գոյություն չունեն, սակայն $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y)=0$:

3173. Տրված է $f(x,y)=x^2e^{y-x^2}$ ֆունկցիան: Ցանկացած α անկյան համար գտնել ֆունկցիայի սահմանը, երբ $(x;y)$ կետը ձգտում է անվերջի $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$ $(t\geq 0)$ ճառագայթով. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$:

Կարելի՞ է արդյոք ∞-ում ֆունկցիան համարել անվերջ փոքր:

3174. Տրված է $f(x,y,z)=\dfrac{x^2y-y^2z}{x^4+y^2+z^2}$ ֆունկցիան: Ստուգել, որ $(x;y;z)$ կետը ցանկացած $x=at$, $y=bt$, $z=ct$ $(t>0, a^2+b^2+c^2>0)$ ճառագայթով $(0;0;0)$ կետին ձգտելիս ֆունկցիան ձգտում է զրոյի: Կարելի՞ է արդյոք f-ը $(0;0;0)$ կետում համարել անվերջ փոքր:

3175. Դիցուք $\mathbf{x}_0$ կետում $F: X\to R^m$ ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ $G: X\to R^m$-ը՝ անվերջ փոքր: Ապացուցել, որ $\langle F,G\rangle$ սկալյար արտադրյալը $\mathbf{x}_0$ կետում անվերջ փոքր է:

***

3176. Ապացուցել, որ ցանկացած $i=1,\dots,m$ ինդեքսի համար $\pi^i: R^m\to R$ պրոյեկտող արտապատկերումն ամենուրեք անընդհատ է:

3177. Ցույց տալ, որ $F: X \to R^n$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in X$ կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ կետում նրա կոորդինատային ֆունկցիա-ներից յուրաքանչյուրն անընդհատ է:

3178. Դիցուք $\varphi: R \to R$ ֆունկցիան $x_0 \in R$ կետում անընդհատ է: Ապացուցել, որ $f: R^2 \to R$ ֆունկցիան, որը որոշվում է $f(x,y) = \varphi(x)$, $(x;y) \in R^2$, բանաձևով, ցանկացած y-ի համար $(x_0;y)$ կետում անընդհատ է:

Ցուցում: Նկատել, որ $f = \varphi \circ \pi^1$:

3179. Դիցուք $f: X \to R$ և $g: Y \to R$ ֆունկցիաները համապատասխանաբար $x_0 \in X$ և $y_0 \in Y$ կետերում անընդհատ են: Ապացուցել, որ $X \times Y$ բազմության վրա որոշված $f(x)+g(y)$ և $f(x)g(y)$ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը, իսկ եթե $g(y) \neq 0$, ապա նաև $\dfrac{f(x)}{g(y)}$ ֆունկցիան, $(x_0;y_0)$ կետում անընդհատ է:

3180. Ստուգել, որ

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան y փոփոխականի ցանկացած ֆիքսած արժեքի դեպքում որպես միայն x փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է, x-ի ցանկացած ֆիքսած արժեքի դեպքում ըստ y-ի նույնպես անընդհատ է, սակայն որպես երկու փոփոխականի ֆունկցիա այն $(0;0)$ կետում անընդհատ չէ:

3181. Ապացուցել, որ եթե $f: R^2 \to R$ ֆունկցիան $(x_0;y_0)$ կետում անընդհատ է, ապա $h(x) = f(x,y_0)$ և $g(y) = f(x_0,y)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար x_0-ում և y_0-ում անընդհատ է:

Հետազոտել $f(x,y)$ ֆունկցիայի անընդհատությունը, անընդհատությունն ըստ x-ի և ըստ y-ի (3182-3191).

3182. $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$: **3183.** $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$:

3184. $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0)=0$:

3185. $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$:

3186. $f(x,y) = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}$, $f(0,y) = f(x,0) = 0$:

3187. $f(x,y) = \frac{\ln(1+|xy|)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$, $f(0,0) = 0$:

3188. $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$:

3189. $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2)$:

3190. ա) $f(x,y) = [x] + [y]$; բ) $f(x,y) = [x+y]$:

3191. $f(x,y) = \begin{cases} 1, (x;y) \in Q^2, \\ 0, (x;y) \in R^2 \setminus Q^2 : \end{cases}$

3192. Ստուգել, որ $u = ax + by + c$ գծային ֆունկցիան R^2-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3193. Ապացուցել, որ R^m տարածության յուրաքանչյուր վեկտորին այդ վեկտորի նորմը համապատասխանեցնող ֆունկցիան՝ $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$-ը, R^m-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3194. Ստուգել, որ $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ ֆունկցիան R^m-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

3195. Դիցուք՝ $f(x,y) = xy$, $(x;y) \in R^2$: Համոզվել, որ ցանկացած $y_0 \in R$ $(x_0 \in R)$ թվի համար $h(x) = f(x, y_0)$ $(g(y) = f(x_0, y))$ ֆունկցիան R-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է, սակայն $f(x,y)$-ը R^2-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ:

Բ

3196. Ցույց տալ, որ R^m-ում բաց գունդը և բաց զուգահեռանիստը բաց բազմություններ են, իսկ փակ գունդը և փակ զուգահեռանիստը՝ փակ բազմություններ:

3197. Ապացուցել, որ R^m-ում բաց բազմությունների ցանկացած ընտանիքի միավորումը բաց բազմություն է, իսկ փակ բազմությունների ցանկացած ընտանիքի հատումը՝ փակ:

3198. Ապացուցել, որ R^m-ում բաց բազմությունների ցանկացած վերջավոր ընտանիքի հատումը բաց բազմություն է, իսկ փակ բազմությունների վերջավոր ընտանիքի միավորումը՝ փակ:

Կառուցել R^m-ում բաց (փակ) բազմությունների ընտանիք, որի հատումը (միավորումը) բաց (փակ) բազմություն չէ:

3199. Դիցուք՝ $X \subset R^m$: Ապացուցել, որ X բազմության ա) ներքին կետերի բազմությունը՝ $\operatorname{int} X$ -ը, բաց բազմություն է;

բ) եզրային կետերի բազմությունը՝ ∂X -ը, փակ բազմություն է;

գ) կուտակման կետերի բազմությունը՝ X' -ը, փակ բազմություն է:

3200. Դիցուք՝ $X \subset R^m$ և Φ -ն X -ը պարունակող փակ բազմությունների ընտանիքն է: Ապացուցել, որ $\overline{X} = \bigcap \Phi$, որտեղ $\overline{X} = X \bigcup X'$ -ը X բազմության փակումն է:

3201. Ապացուցել, որ եթե $G \subset R^m$ բազմությունը բաց է, իսկ $F \subset R^m$ -ը՝ փակ, ապա $G \setminus F$ -ը բաց բազմություն է, իսկ $F \setminus G$ -ն՝ փակ:

3202. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ բազմությունը թե՛ բաց է, թե՛ փակ, ապա $A = R^m$ կամ $A = \varnothing$: Այստեղից ստանալ, որ R^m -ը կապակցված է:

3203. Ստուգել, որ ցանկացած $B(\mathbf{a}, r)$ m չափանի գնդի համար $\partial B(\mathbf{a}, r) = \partial \overline{B}(\mathbf{a}, r) = S(\mathbf{a}, r)$:

3204. Ապացուցել, որ R^m -ում

ա) ցանկացած փակ զուգահեռանիստ կոմպակտ է;

բ) կոմպակտ բազմության ցանկացած փակ ենթաբազմություն կոմպակտ է;

գ) կոմպակտ բազմությունը փակ է և սահմանափակ;

դ) բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն փակ է և սահմանափակ:

3205. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ բազմությունը ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, ապա $\pi^i(A)$ $(i = 1, \ldots, m)$ պրոյեկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է:

Օրինակով համոզվել, որ նույնպիսի պնդումը փակ բազմության համար ճշմարիտ չէ:

3206. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ բազմության $\pi^i(A)$ $(i = 1, \ldots, m)$ պրոյեկցիաները R -ում սահմանափակ են, ապա A -ն սահմանափակ է:

Ճշմարի՞տ է արդյոք նույպիսի պնդումը ա) բաց, բ) փակ, գ) կոմպակտ բազմությունների համար: Բերել համապատասխան օրինակներ:

3207. Տրված A և B բազմությունների $A \times B$ դեկարտյան արտադրյալը սահմանվում է որպես բոլոր $(a; b)$ կարգավորված զույգերի բազմություն, որոնցում $a \in A$, $b \in B$:

$R^m \times R^n$ դեկարտյան արտադրյալում գծային առնչությունները սահմանվում են

$$(\mathbf{x}_1; \mathbf{y}_1) + (\mathbf{x}_2; \mathbf{y}_2) = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2; \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2),$$

$$\alpha(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = (\alpha \mathbf{x}; \alpha \mathbf{y})$$

բանաձևերով, իսկ նորմը՝

$$\left|(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|=\sqrt{|\mathbf{x}|_m^2+|\mathbf{y}|_n^2}$$

բանաձևով ($\mathbf{x},\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in R^m$, $\mathbf{y},\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\in R^n$, $\alpha\in R$):

ա) Ստուգել, որ $R^m\times R^n$ -ը $m+n$ -չափանի գծային նորմավորված տարածություն է, որում նորմը բավարարում է խնդիր 3145-ում ձևակերպված երեք պայմաններին:

բ) Ելնելով նորմի սահմանումից՝ $R^m\times R^n$ -ում ներմուծել կետի շրջակայքի գաղափարը և, այնուհետև, սահմանել տոպոլոգիական բոլոր հիմնական հասկացությունները (բաց, փակ, կոմպակտ, կապակցված բազմություններ, եզրային, կուտակման կետեր և այլն):

3208. Տրված $D\subset R^m\times R^n$ բազմության պրոյեկցիաները համապատասխանաբար R^m -ի և R^n -ի վրա սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$D_{R^m}=\left\{\mathbf{x}\in R^m:\exists\mathbf{y}\in R^n\left[(\mathbf{x};\mathbf{y})\in D\right]\right\},$$

$$D_{R^n}=\left\{\mathbf{y}\in R^n:\exists\mathbf{x}\in R^m\left[(\mathbf{x};\mathbf{y})\in D\right]\right\}:$$

Ապացուցել, որ եթե D -ն $R^m\times R^n$ -ում ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է, ապա D_{R^m} և D_{R^n} պրոյեկցիաներից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար R^m -ում և R^n -ում ա) սահմանափակ է, բ) բաց է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է:

Կառուցել R^2 -ում ոչ կապակցված բազմություն, որի պրոյեկցիաները Ox և Oy առանցքների վրա կապակցված են:

3209. Դիցուք՝ $A\subset R^m$, $B\subset R^n$, ընդ որում՝ $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$: Ապացուցել, որ $A\times B$ բազմությունը $R^m\times R^n$ -ում ա) բաց է, բ) փակ է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ A և B բազմություններից յուրաքանչյուրը համապատասխանաբար R^m -ում և R^n -ում ա) բաց է, բ) փակ է, գ) կոմպակտ է, դ) կապակցված է:

3210. Ապացուցել, որ գծորեն կապակցված բազմությունը կապակցված է:

3211. Դիցուք՝ $E=\{0\}\times[-1;1]$, $F=\left\{(x;y):y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$: Ստուգել, որ $E\bigcup F$ բազմությունը կապակցված է, բայց գծորեն կապակցված չէ:

3212. Ստուգել, որ գունդը և զուգահեռանիստը R^m -ում կապակցված բազմություններ են:

3213. Ցույց տալ, որ $S(\mathbf{a},r)$ սֆերան R^m -ում կապակցված է, իսկ $R^m\setminus S(\mathbf{a},r)$ բազմությունը՝ ոչ:

3214. Ապացուցել, որ եթե A և B բազմությունները R^m-ում կապակցված են և $A\bigcap B\neq\varnothing$, ապա $A\bigcup B$-ն նույնպես կապակցված է:

3215. Դիցուք $\mathbf{x}_0$-ն $X\subset R^m$ բազմության ներքին կետ է, իսկ $\mathbf{x}_1$-ը՝ արտաքին: Ապացուցել, որ R^m-ում $\mathbf{x}_0$ և $\mathbf{x}_1$ կետերը միացնող ցանկացած ճանապարհ անցնում է X բազմության եզրային կետով:

3216. Դիցուք $\overline{B}(\mathbf{a}_n,r_n)$-ը $(n\in N)$ R^m-ում ներդրված փակ գնդերի հաջորդականություն է.

$$\overline{B}(\mathbf{a}_1,r_1)\supset\overline{B}(\mathbf{a}_2,r_2)\supset\cdots\supset\overline{B}(\mathbf{a}_n,r_n)\supset\cdots:$$

Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}(\mathbf{a}_n,r_n)\neq\varnothing$;

բ) եթե $r_n\to 0$ $(n\to\infty)$, ապա $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}(\mathbf{a}_n,r_n)$-ը կազմված է միայն մեկ կետից:

3217. Դիցուք R^m-ում կոմպակտ բազմություններից կազմված K_n $(n\in N)$ հաջորդականությունն այնպիսին է, որ ցանկացած $n\in N$ թվի համար $\bigcap\limits_{i=1}^{n}K_i\neq\varnothing$:

Ապացուցել, որ

ա) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i\neq\varnothing$;

բ) եթե $diam\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}K_i\right)\to 0$ $(n\to\infty)$, ապա $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i$-ն կազմված է միայն մեկ կետից:

3218. Տրված $A\subset R^m$ ($A\neq\varnothing$) բազմության և $\mathbf{x}\in R^m$ կետի համար

$$\rho_A(\mathbf{x})=\inf_{\mathbf{a}\in A}|\mathbf{x}-\mathbf{a}|$$

թիվը կոչվում է $\mathbf{x}$ *կետի հեռավորություն* A-ից:

Ապացուցել, որ $\rho_A(\mathbf{x})=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{x}\in\overline{A}$:

3219. Տրված $A,B\subset R^m$ ոչ դատարկ բազմությունների համար

$$\rho(A,B)=\inf\left\{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|:\mathbf{a}\in A,\mathbf{b}\in B\right\}$$

թիվը կոչվում է A և B *բազմությունների հեռավորություն*:

Ապացուցել, որ եթե A-ն կոմպակտ է, իսկ B-ն՝ փակ, ապա $\rho(A,B)=0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $A\bigcap B\neq\varnothing$:

Կառուցել A և B փակ բազմություններ, այնպիսիք, որ $A\bigcap B=\varnothing$, $\rho(A,B)=0$:

3220. Ապացուցել, որ ցանկացած $A\subset R^m$ ոչ դատարկ բազմության և $\alpha>0$ թվի համար $F=\left\{\mathbf{x}\in R^m:\rho_A(\mathbf{x})\leq\alpha\right\}$ բազմությունն A-ն պարունակող փակ բազմություն է, իսկ $G=\left\{\mathbf{x}\in R^m:\rho_A(\mathbf{x})<\alpha\right\}$ բազմությունը՝ բաց:

3221. Դիցուք $U\subset R^m$ բազմությունը բաց է, իսկ $C\subset U$ բազմությունը՝ կոմպակտ: Ապացուցել, որ գոյություն ունի $D\subset U$ կոմպակտ բազմություն, որի համար C բազմության բոլոր կետերը ներքին կետեր են:

***

Տրված $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի և $A\subset X$ բազմության համար $\mathbf{b}\in R^n$ վեկտորը կոչվում է $\mathbf{a}\in A'$ կետում F ֆունկցիայի *մասնակի սահման* ըստ A բազմության և նշանակվում՝ $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a},\mathbf{x}\in A}F(\mathbf{x})$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\mathbf{x}\in A\ \left(0<|\mathbf{x}-\mathbf{a}|<\delta\Rightarrow|F(\mathbf{x})-\mathbf{b}|<\varepsilon\right):$$

Գտնել $(0;0)$ կետում $f(x,y)$ ֆունկցիայի մասնակի սահմանն ըստ նշված A բազմության (3222-3223).

3222. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, ա) $A=\{(x;x):x\in R\}$;

բ) $A=\{(x;-x):x\in R\}$:

3223. $f(x,y)=e^{\frac{2x}{\sqrt{x^2+y}}}$, ա) $A=\{(x;x):x>0\}$; բ) $A=\left\{\left(x;3x^2\right):x<0\right\}$:

3224. Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան $(0;0)$ կետի շրջակայքում ամենուրեք, բացի $(0;0)$ կետից, անընդհատ է: Ապացուցել, որ եթե տրված $k_1\neq k_2$ թվերի համար գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to0}f(x,k_1x)=b_1$, $\lim\limits_{x\to0}f(x,k_2x)=b_2$ սահմանները և $b_1<b_2$, ապա ցանկացած $b_1<b<b_2$ թվի համար գոյություն ունի $(x_n;y_n)$ անվերջ փոքր հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=b$:

3225. Տրված է $F:G\to R^p$ $\left(G\subset R^m\times R^n\right)$ ֆունկցիան: Կասենք, որ F-ը G-ում անընդհատ է ըստ $\mathbf{x}$-ի՝ $\mathbf{y}$-ի նկատմամբ հավասարաչափ, եթե

$$\forall\mathbf{x}_0\in G_{R^m}\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(\mathbf{x};\mathbf{y})\in G\ \left(|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\delta\Rightarrow|F(\mathbf{x},\mathbf{y})-F(\mathbf{x}_0,\mathbf{y})|<\varepsilon\right):$$

Ապացուցել, որ եթե F-ը G տիրույթում անընդհատ է ըստ $\mathbf{x}$-ի՝ $\mathbf{y}$-ի նկատմամբ հավասարաչափ և յուրաքանչյուր $\mathbf{x}$-ի համար անընդհատ է ըստ $\mathbf{y}$-ի, ապա այն G-ում անընդհատ է:

3226. Ապացուցել, որ եթե $F: G \to R^p$ $\left(G \subset R^m \times R^n\right)$ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $\mathbf{y}$-ի համար անընդհատ է ըստ $\mathbf{x}$-ի, իսկ ըստ $\mathbf{y}$-ի բավարարում է Լիպշիցի պայմանին՝

$$\left|F(\mathbf{x},\mathbf{y}_1)-F(\mathbf{x},\mathbf{y}_2)\right|_p \le L\cdot\left|\mathbf{y}_1-\mathbf{y}_2\right|_n \quad (L=const),$$

ապա $F \in C\left(G;R^p\right)$:

3227. Ապացուցել Յունգի թեորեմը. եթե $f: G \to R$ (G-ն R^2-ում տիրույթ է) ֆունկցիան անընդհատ է թե՛ ըստ x-ի, թե՛ ըստ y-ի և, բացի այդ, յուրաքանչյուր y-ի համար ըստ x-ի մոնոտոն է, ապա $f \in C(G)$:

3228. Դիցուք՝ $f \in C([a;b]\times[c;d])$: Ապացուցել, որ եթե $\varphi_n:[a;b]\to[c;d]$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $\Phi_n(x)=f(x,\varphi_n(x))$ $(x\in[a;b])$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է, ընդ որում՝

$$\lim_{n\to\infty} f(x,\varphi_n(x)) = f(x,\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)) \quad (x\in[a;b]):$$

3229. Տրված $F: G \to R^p$ $\left(G \subset R^m \times R^n\right)$ ֆունկցիայի համար

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) \text{ և } \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}}\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

սահմանները կոչվում են F ֆունկցիայի հաջորդական (ընդհանրացված հաջորդական) սահմաններ $(\mathbf{a};\mathbf{b})\in R^m\times R^n$ կետում:

Ապացուցել, որ եթե F-ն $(\mathbf{a};\mathbf{b})$-ում ունի սահման և ցանկացած $\mathbf{x}$-ի համար գոյություն ունի $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ վերջավոր սահմանը, ապա գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ հաջորդական սահմանը, ընդ որում՝

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{b}} F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lim_{(\mathbf{x};\mathbf{y})\to(\mathbf{a};\mathbf{b})} F(\mathbf{x},\mathbf{y}):$$

3230. Ապացուցել, որ R^m-ում վեկտորների գումարման և վեկտորը թվով բազմապատկման գործողություններն անընդհատ են: Հետազոտել դրանց հավասարաչափ անընդհատությունը:

Ցուցում: Դիտարկել այդ գործողությունները որպես համապատասխանաբար $S: R^m\times R^m \to R^m$ և $P: R\times R^m \to R^m$ ֆունկցիաներ:

3231. Ստուգել, որ սկալյար արտադրյալ կազմելու գործողությունը՝ $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ $\left((\mathbf{x};\mathbf{y})\in R^m\times R^m\right)$, ցանկացած կոմպակտի վրա հավասարաչափ անընդհատ է, բայց $R^m\times R^m$-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ չէ: Ցույց տալ նաև, որ յուրաքանչյուր $\mathbf{x}$-ի ($\mathbf{y}$-ի) համար այն ըստ $\mathbf{y}$-ի ($\mathbf{x}$-ի) R^m-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3232. Ապացուցել, որ ցանկացած $E\subset R^m$ բազմության համար $\rho_E(\mathbf{x})$ $\left(\mathbf{x}\in R^m\right)$ ֆունկցիան (տես խնդիր 3218) R^m-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3233. Դիցուք A-ն և B-ն R^m տարածության ոչ դատարկ, չհատվող, փակ բազմություններ են: Ստուգել, որ

$$f(\mathbf{x})=\frac{\rho_A(\mathbf{x})}{\rho_A(\mathbf{x})+\rho_B(\mathbf{x})}\quad\left(\mathbf{x}\in R^m\right)$$

ֆունկցիան ամենուրեք անընդհատ է: Համոզվել նաև, որ

ա) $f\left(R^m\right)=[0;1]$;

բ) $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$;

գ) $E=f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right)\right)$ և $G=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2};1\right]\right)$ բազմությունները բաց են, չհատվող, և որ $A\subset E$, $B\subset G$:

3234. Դիցուք՝ $F,G\in C\left(X,R^n\right)$ $\left(X\subset R^m\right)$ և E-ն X-ում ամենուրեք խիտ բազմություն է. $E\subset X\subset\overline{E}$: Ապացուցել, որ եթե $F(\mathbf{x})=G(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in E)$, ապա $F=G$: Այլ կերպ՝ անընդհատ ֆունկցիան միարժեքորեն վերականգնվում է ամենուրեք խիտ բազմության վրա իր ընդունած արժեքներով:

3235. Ապացուցել, որ $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի վրա դրված հետևյալ պայմանը համարժեք է X-ի վրա F-ի հավասարաչափ անընդհատությանը.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall E\subset X\ \left(diamE<\delta\Rightarrow diamF(E)<\varepsilon\right):$$

3236. Դիցուք E-ն R^m-ում ամենուրեք խիտ բազմություն է և $f:E\to R$ ֆունկցիան E-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է: Ապացուցել, որ գոյություն ունի f-ի անընդհատ շարունակություն ամբողջ R^m-ի վրա, այն էլ միայն մեկը:

3237. Տրված $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի տատանումն $\mathbf{x}_0\in X$ կետում սահմանվում է

$$\Omega_F(\mathbf{x}_0)=\lim_{\delta\to 0}diam\{F(\mathbf{x}):\mathbf{x}\in X\cap B(\mathbf{x}_0,\delta)\}$$

բանաձևով: Ապացուցել, որ F-ն $\mathbf{x}_0$-ում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\Omega_F\left(\mathbf{x}_0\right)=0$ (անընդհատություն ըստ Բեռի):

3238. Ապացուցել, որ $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0\in X$ կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ X բազմության կետերից կազմված ցանկացած $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}_0$ հաջորդականության համար $F\left(\mathbf{x}_n\right)\to F\left(\mathbf{x}_0\right)$ (անընդհատություն ըստ Հայնեի):

3239. Ապացուցել, որ $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0\in X$ կետում անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $F\left(\mathbf{x}_0\right)$ կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի $\mathbf{x}_0$ կետի U շրջակայք, այնպիսին, որ $F\left(U\bigcap X\right)\subset V$:

3240. Ապացուցել, որ $F\in C\left(X;R^n\right)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $G\subset R^n$ բաց բազմության համար գոյություն ունի $E\subset R^m$ բաց բազմություն, այնպիսին, որ $F^{-1}\left(G\right)=E\bigcap X$:

3241. Ապացուցել, որ $f:R^m\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած a թվի համար

ա) $\left\{\mathbf{x}\in R^m : f\left(\mathbf{x}\right)<a\right\}$ և $\left\{\mathbf{x}\in R^m : f\left(\mathbf{x}\right)>a\right\}$ բազմությունները բաց են;

բ) $\left\{\mathbf{x}\in R^m : f\left(\mathbf{x}\right)\le a\right\}$ և $\left\{\mathbf{x}\in R^m : f\left(\mathbf{x}\right)\ge a\right\}$ բազմությունները փակ են:

3242. Ապացուցել, որ եթե $X\subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $f\in C\left(X\right)$, ապա f-ն ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

3243. Դիցուք $X\subset R^m$ բազմությունը գծորեն կապակցված է և $f\in C\left(X,R^n\right)$: Ապացուցել, որ $f\left(X\right)$-ը գծորեն կապակցված է:

3244. Ապացուցել, որ եթե $X\subset R^m$ բազմությունը կապակցված է, $f\in C\left(X\right)$ և $\mathbf{a},\mathbf{b}\in X$ կետերի համար $f\left(\mathbf{a}\right)f\left(\mathbf{b}\right)<0$, ապա գոյություն ունի այնպիսի $\mathbf{c}\in X$ կետ, որ $f\left(\mathbf{c}\right)=0$:

3245. Դիցուք $X\subset R^m$ բազմությունն այնպիսին է, որ ցանկացած $F\in C\left(X;R^n\right)$ ֆունկցիա X-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է: Ապացուցել, որ X-ը կոմպակտ է, եթե այն

ա) սահմանափակ է;

բ) զուրկ է մեկուսացված կետերից:

Գ

3246. Ապացուցել, որ ցանկացած $G \subset R^m$ բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես գնդերից (զուգահեռանիստերից) կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում:

3247. Ապացուցել, որ R^m տարածության մեջ ցանկացած բաց բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես կոմպակտ բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում:

3248. Պայմանավորվենք գրել $\mathbf{a} \in Q^m$, եթե $\mathbf{a} \in R^m$ վեկտորի բոլոր կոորդինատները ռացիոնալ թվեր են:

Ապացուցել, որ R^m-ում գնդերի $\{B(\mathbf{a}, r) : \mathbf{a} \in Q^m, r \in Q\}$ և զուգահեռանիստերի $\{I_{(\mathbf{a};\mathbf{b})} : \mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q^m\}$ ընտանիքներից յուրաքանչյուրը հաշվելի է:

3249. Ապացուցել, որ R^m տարածությունը սեպարաբել է. R^m-ում գոյություն ունի հաշվելի ամենուրեք խիտ բազմություն:

3250. Ապացուցել, որ $A \subset R^m$ բազմության ցանկացած անվերջ բաց ծածկույթից կարելի է անջատել հաշվելի ենթածածկույթ:

3251. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ բազմությունը ծածկող բաց բազմությունների ցանկացած հաշվելի ընտանիք պարունակում է A-ն ծածկող վերջավոր ենթաընտանիք, ապա A-ն կոմպակտ է:

3252. Ապացուցել, որ $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ նրա ցանկացած Σ անվերջ բաց ծածկույթից կարելի է անջատել իսկական (Σ-ից տարբեր) ենթածածկույթ:

3253. Ապացուցել, որ $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ վեկտորների ցանկացած $\{\mathbf{x}_n : n \in N\} \subset K$ հաջորդականություն ունի K-ին պատկանող մասնակի սահման:

3254. Դիցուք $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և բաց բազմությունների $\Sigma = \{\sigma\}$ ընտանիքը ծածկում է K-ն: Ապացուցել, որ

$$\exists r > 0 \ \forall \mathbf{a} \in K \ \exists \sigma \in \Sigma \ \left(B(\mathbf{a}; r) \subset \sigma\right):$$

3255. Դիցուք $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $E \subset R^n$: Ապացուցել, որ եթե G-ն $R^m \times R^n$-ում $K \times E$ բազմությունը պարունակող բաց բազմություն է, ապա գոյություն ունեն $G_1 \supset K$ բաց բազմություն R^m-ում և $G_2 \supset E$ բաց բազմություն R^n-ում, այնպիսիք, որ $G_1 \times G_2 \subset G$:

3256. Դիցուք K-ն R^m-ում կոմպակտ է և $E \subset R^n$: Ցույց տալ, որ ցանկացած $A \subset K \times E$ փակ բազմության պրոյեկցիան R^n-ի վրա փակ է:

3257. Ապացուցել, որ եթե $K \subset R^m$ բազմությունը այնպիսին է, որ ցանկացած $A \subset K \times R^n$ փակ բազմության պրոյեկցիան R^n-ի վրա փակ է, ապա K-ն R^m-ում կոմպակտ է:

3258. Ապացուցել, որ կապակցված բազմության փակումը կապակցված է:

3259. Դիցուք $A \subset R^m$ բազմությունը կապակցված է: Ստուգել, որ եթե $A \subset \subset B \subset \overline{A}$, ապա B-ն կապակցված է:

3260. Ցույց տալ, որ եթե $A, B \subset R^m$ բազմությունները կապակցված են և $\overline{A} \bigcap B \neq \varnothing$, ապա $A \bigcup B$-ն կապակցված է:

3261. Ապացուցել, որ եթե կապակցված բազմություններից կազմված ընտանիքը ունի ոչ դատարկ հատում, ապա այդ ընտանիքի միավորումը կապակցված է:

3262. Ապացուցել, որ $G \subset R^m$ բաց բազմությունը կապակցված է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն գծորեն կապակցված է:

3263. Ապացուցել, որ R^m-ում $(m \geq 2)$ ցանկացած M հաշվելի բազմության լրացումը՝ $R^m \setminus M$-ը, գծորեն կապակցված է:

3264. Տրված $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^m$ կետերի համար $\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} : 0 \leq t \leq 1\}$ բազմությունը կոչվում է $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ ծայրակետերով *հատված*: Ցանկացած $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$ վեկտորների համար $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ ծայրակետերով հատվածների միավորումը կոչվում է $\mathbf{a}$ և $\mathbf{b}$ կետերը միացնող *բեկյալ*:

Ապացուցել, որ եթե $G \subset R^m$ բազմությունը կապակցված է և բաց (տիրույթ է), ապա ցանկացած $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ կետերի համար գոյություն ունի ամբողջապես G-ում ընկած, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ծայրակետերը միացնող բեկյալ:

3265. Դիցուք՝ $A, B \subset R^m$: A և B բազմությունների հանրահաշվական գումարը՝ $A + B$-ն, սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$A + B = \{\mathbf{a} + \mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}:$$

Ապացուցել, որ

ա) եթե A և B բազմություններից մեկը բաց է, ապա $A + B$-ն բաց է;

բ) եթե A-ն փակ է, իսկ B-ն՝ կոմպակտ, ապա $A + B$-ն փակ է:

Դիցուք X-ը իրական թվերի դաշտի վրա տրված գծային տարածություն է: $p : X \to R$ ֆունկցիան կոչվում է X-ում սահմանված *նորմ*, եթե ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ վեկտորների և $\alpha \in R$ թվի համար կատարվում են հետևյալ երեք պայմանները.

1. $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $p(\mathbf{x}) = 0$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2. $p(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| p(\mathbf{x})$;
3. $p(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$:

X տարածությունը նրանում սահմանված p նորմով կոչվում է նորմավորված տարածություն և նշանակվում՝ (X, p): Եթե խոսք է լինում R^m նորմավորված տարածության մասին և R^m-ի կողքին հատուկ նշված չէ p նորմը, ապա ենթադրվում է, որ $p(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|_m$ $\left(\mathbf{x} \in R^m\right)$: Հաճախ այդ նորմն անվանում են R^m-ում ստանդարտ կամ էվկլիդյան նորմ, իսկ R^m-ն այդ նորմով՝ էվկլիդյան տարածություն:

3266. Ապացուցել, որ R^m-ում սահմանված ցանկացած p նորմի համար գոյություն ունեն α և β դրական հաստատուններ, այնպիսիք, որ

$$\alpha|\mathbf{x}|_m \leq p(\mathbf{x}) \leq \beta|\mathbf{x}|_m \quad \left(\mathbf{x} \in R_m\right):$$

3267. Դիցուք p-ն R^m-ում նորմ է (ստանդարտ նորմից տարբեր): $\mathbf{a} \in \left(R^m, p\right)$ կետի ε-շրջակայքը սահմանենք

$$B^*(\mathbf{a}, \varepsilon) = \left\{\mathbf{x} \in R^m : p(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < \varepsilon\right\}$$

բանաձևով: Տրված $A \subset R^m$ բազմության $\mathbf{a}$ կետն անվանենք այդ բազմության *-ներքին կետ, եթե գոյություն ունի $\varepsilon > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B^*(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset A$: Այնուհետև, A բազմությունն անվանենք *-բաց բազմություն, եթե այդ բազմության բոլոր կետերը *-ներքին կետեր են:

Ապացուցել, որ p-ն համարժեք է R^m-ում ստանդարտ նորմին՝ հետևյալ առումով.

$A \subset R^m$ բազմությունն *-բաց է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն R^m-ում բաց է:

3268. Դիցուք $[0;1] \times [0;1]$ քառակուսու վրա որոշված $f(x, y)$ իրականարժեք ֆունկցիան թե՛ ըստ x-ի, թե՛ ըստ y-ի անընդհատ է: Ապացուցել, որ ցանկացած x-ի համար գոյություն ունի y, այնպիսին, որ f-ն $(x; y)$ կետում անընդհատ է:

3269. $f : R^m \to R^m$ ֆունկցիան կոչվում է սեղմող արտապատկերում, եթե գոյություն ունի $\alpha \in (0;1)$ թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ վեկտորների համար

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \alpha|\mathbf{x} - \mathbf{y}|:$$

Ապացուցել, որ եթե f-ը սեղմող արտապատկերում է, ապա այն ունի անշարժ կետ $\left(f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0\right)$, այն էլ միայն մեկը:

Օրինակով համոզվել, որ եթե գրված անհավասարությունը փոխարինենք $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ անհավասարությունով, ապա անշարժ կետ կարող է գոյություն չունենալ:

3270. Դիցուք $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է: Ապացուցել, որ եթե $f: K \to K$ ֆունկցիան ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ կետերի համար բավարարում է $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ անհավասարությանը, ապա f -ն ունի անշարժ կետ և այն էլ միայն մեկը:

3271. Դիցուք K -ն R^m -ում կոմպակտ է, $f \in C(K, K)$ և ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ կետերի համար

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \max\{|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}|, |f(\mathbf{y}) - \mathbf{y}|\}:$$

Ապացուցել, որ f -ն ունի անշարժ կետ:

3272. $f: X \to X$ $(X \subset R^m)$ ֆունկցիան կոչվում է իզոմետրիա, եթե ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ վեկտորների համար $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$:

Ապացուցել, որ եթե $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $f: K \to K$ ֆունկցիան ցանկացած $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ վեկտորների համար բավարարում է $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ անհավասարությանը, ապա f -ն իզոմետրիա է:

Օրինակով համոզվել, որ խնդրի պայմաններում K բազմության կոմպակտությունն էական է:

3273. Դիցուք՝ $f \in C(R^m, R^n)$: Ապացուցել, որ R^m -ում ամենուրեք խիտ ցանկացած բազմության պատկերը $f(R^m)$-ում ամենուրեք խիտ է:

3274. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $f: R^m \to R^n$ ֆունկցիան R^m -ում ամենուրեք խիտ ցանկացած բազմություն արտապատկերում է R^n -ում ամենուրեք խիտ բազմության վրա, ապա f -ն անընդհատ է:

$E \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է F_σ տիպի բազմություն, եթե այն կարելի է ներկայացնել որպես փակ բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի միավորում: F_σ տիպի բազմության լրացումը R^m -ում կոչվում է G_δ տիպի բազմություն:

3275. Ապացուցել, որ

ա) ցանկացած փակ բազմություն F_σ տիպի բազմություն է;

բ) ցանկացած բաց բազմություն F_σ տիպի բազմություն է;

գ) ցանկացած հաշվելի բազմություն F_σ տիպի բազմություն է;

դ) F_σ տիպի բազմություններից կազմված ցանկացած հաշվելի ընտանիքի միավորումը F_σ տիպի բազմություն է:

3276. Ապացուցել, որ ցանկացած G_δ տիպի բազմություն կարելի է ներկայացնել որպես բաց բազմություններից կազմված հաշվելի ընտանիքի հատում:

3277. Ցույց տալ, որ ցանկացած $F: R^m \to R^n$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը F_σ տիպի բազմություն է (հետևաբար անընդհատության կետերի բազմությունը G_δ տիպի է):

3278. Ապացուցել, որ F_σ տիպի ցանկացած $E \subset R^m$ բազմության համար գոյություն ունի $f: R^m \to R$ ֆունկցիա, որի խզման կետերի բազմությունը E-ն է:

3279. Դիցուք U-ն R^m-ում բաց գունդ է, $f_n \in C(\overline{U})$ $(n \in N)$ և ցանկացած $\mathbf{x} \in \overline{U}$ վեկտորի համար $f_n(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x})$ $(n \to \infty)$: Ապացուցել, որ ցանկացած $F \subset U$ փակ բազմության համար գոյություն ունի $\mathbf{x}_0 \in F$, այնպիսին, որ

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0, \mathbf{x} \in F} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0):$$

3280. Ապացուցել, որ եթե $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $f \in C(K, R^n)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է, ապա f^{-1} ֆունկցիան $f(K) \subset R^n$ բազմության վրա անընդհատ է:

Օրինակով համոզվել, որ K-ի կոմպակտությունն այստեղ էական է:

3281. Ցույց տալ, որ $C(R^m, R)$ $(m \geq 2)$ դասի ոչ մի ֆունկցիա փոխմիարժեք չէ:

Գլուխ 14

Շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցումը Անբացահայտ ֆունկցիաներ

Ֆ ու ն կ ց ի ա յ ի ա ծ ա ն ց յ ա լ ը : Մասնակի ածանցյալներ: Տրված $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի և $\mathbf{x}_0 = \left(x_0^1, \ldots, x_0^m\right) \in \operatorname{int} X$ կետի (X բազմության ներքին կետի) համար

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{f\left(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x_0^i + h^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^m\right) - f\left(x_0^1, \ldots, x_0^i, \ldots, x_0^m\right)}{h^i}$$

սահմանը կոչվում է $\left(x_0^1, \ldots, x_0^m\right)$ կետում f ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ ըստ x^i -ի և նշանակվում՝ $\frac{\partial f}{\partial x^i}\left(\mathbf{x}_0\right)$, $\partial_i f\left(\mathbf{x}_0\right)$, $f'_{x^i}\left(\mathbf{x}_0\right)$ կամ $f'_i\left(\mathbf{x}_0\right)$:

Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ: Եթե $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետի շրջակայքում ունի $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ մասնակի ածանցյալ, ապա վերջինս իրենից ներկայացնում է $\mathbf{x}$ փոփոխականի ֆունկցիա: Այդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ x^j -ի կոչվում է f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ ըստ x^i, x^j փոփոխականների և նշանակվում՝

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \partial_{ji} f = f''_{x_j x_i} = f''_{ji} :$$

Երբ $j \neq i$, $\partial_{ji} f$ -ն անվանում են f ֆունկցիայի երկրորդ կարգի խառն ածանցյալ: Համանմանորեն սահմանվում են f ֆունկցիայի ավելի բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները:

Թեորեմ խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ: Եթե $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի $\partial_{ij} f$ և $\partial_{ji} f$ $(i \neq j)$ խառն ածանցյալները $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետի որևէ շրջակայքում գոյություն ունեն և $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ են, ապա $\partial_{ij} f\left(\mathbf{x}_0\right) = \partial_{ji} f\left(\mathbf{x}_0\right)$:

$X \subset R^m$ բաց բազմության վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիաների դասը, որոնց ընդհուպ մինչև p -րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն X -ի վրա ամենուրեք գոյություն ունեն և անընդհատ են, նշանակվում է $C^p(X)$: Ընդհանուր դեպքում $C^p\left(X, R^n\right)$-ով նշանակվում է այն $F: X \to R^n$ ֆունկցիաների դասը, որոնց կոորդինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը պատկանում է $C^p(X)$ դասին:

Դիցուք՝ $f \in C^p(G)$ $\left(G \subset R^m\right)$ և $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ ծայրակետերով հատվածն ամբողջապես ընկած է G տիրույթում: Այս պայմաններում $\varphi(t)=f(\mathbf{x}+t\mathbf{h})$ $(0 \le t \le 1)$ ֆունկցիան p անգամ դիֆերենցելի է, ընդ որում ցանկացած $k \le p$ բնական թվի համար՝

$$\varphi^{(k)}(t)=\sum_{i_1,\dots,i_k} \partial_{i_1\cdots i_k} f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}) h^{i_1}\cdots h^{i_k} ,$$

որտեղ գումարը տարածվում է $1,\dots,m$ թվերից կազմված բոլոր $(i_1,\dots,i_k)$ կարգավորված խմբերի վրա: Այս հավասարությունը սիմվոլիկ գրում են հետևյալ կերպ.

$$\varphi^{(k)}(t)=\left(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m\right)^k f(\mathbf{x}+t\mathbf{h}):$$

Թեյլորի բանաձևը: Եթե X-ն R^m-ում տիրույթ է, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ ծայրակետերով հատվածն ընկած է X-ում և $f \in C^p(X)$, ապա ճշմարիտ է Թեյլորի լոկալ բանաձևի հետևյալ ընդհանրացումը.

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})=f(\mathbf{x})+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}\left(h^1\partial_1+\dots+h^m\partial_m\right)^k f(\mathbf{x})+o\left(|\mathbf{h}|^p\right), \text{ երբ } \mathbf{h}\to\mathbf{0}:$$

Ածանցյալ տրված ուղղությամբ: Դիցուք՝ $X \subset R^m$, $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$: Տրված $f: X \to R$ ֆունկցիայի և $\mathbf{v} \in R^m$ վեկտորի համար

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}=\lim_{t\to+0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

սահմանը կոչվում է $\mathbf{x}_0$ կետում f ֆունկցիայի *ածանցյալ ըստ* $\mathbf{v}$ *վեկտորի*: Երբ $\mathbf{v}$-ն միավոր վեկտոր է՝ $|\mathbf{v}|=1$, ածանցյալն ըստ $\mathbf{v}$-ի հաճախ անվանում են *ածանցյալ* $\mathbf{v}$ *վեկտորի ուղղությամբ*:

Եթե f-ի մասնակի ածանցյալները $\mathbf{x}_0$-ի շրջակայքում գոյություն ունեն և $\mathbf{x}_0$-ում անընդհատ են, ապա

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}}=\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1}v^1+\dots+\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^m}v^m, \quad \mathbf{v}=\left(v^1,\dots,v^m\right):$$

Գծային արտապատկերումներ : Դիցուք E-ն և F-ը գծային տարածություններ են: $L: E \to F$ ֆունկցիան կոչվում է գծային արտապատկերում, եթե ցանկացած $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$ վեկտորների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար

$$L(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_1 L(\mathbf{x}_1)+\alpha_2 L(\mathbf{x}_2):$$

$L: E \to F$ գծային արտապատկերումների բազմությունը նշանակվում է $\mathrm{L}(E,F)$-ով: Այն գծային տարածություն է. ցանկացած $L_1, L_2 \in \mathrm{L}(E,F)$ արտապատկերումների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար $\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2 \in \mathrm{L}(E,F)$:

Եթե $\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m\}$-ը և $\{\mathbf{y}_1,\dots,\mathbf{y}_n\}$-ը համապատասխանաբար E-ում և F-ում բազիսներ են, ապա $L \in \mathrm{L}(E,F)$ արտապատկերմանը համապատասխանեցվում է $n \times m$ կարգի $[L]=\lfloor a_{ij}\rfloor$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ մատրից, որի տարրերը որոշվում են հետևյալ ներկայացումներից.

$$L(\mathbf{x}_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathbf{y}_j, \quad i=1,\dots,m:$$

Վեկտորների $\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_p\}\subset R^p$ համակարգը, որում յուրաքանչյուր $\mathbf{e}_i$ վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են, բացառությամբ i-րդի, որը 1 է, կոչվում է R^p-ում *ստանդարտ բազիս*:

Պայմանավորվենք $L\in \mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$ արտապատկերմանը վերը սահմանված կանոնով մատրից համապատասխանեցնելիս հենվել R^m-ում և R^n-ում ստանդարտ բազիսների վրա: Այս կերպ $\mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$ գծային տարածության և $n\times m$ կարգի մատրիցների բազմության միջև կստեղծվի փոխմիարժեք համապատասխանություն: Այդ համապատասխանությունը գծային է այն առումով, որ ցանկացած $L_1,L_2\in \mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$ արտապատկերումների և $\alpha_1,\alpha_2\in R$ թվերի համար $[\alpha_1L_1+\alpha_2L_2]=\alpha_1[L_1]+\alpha_2[L_2]$: Ավելացնենք նաև, որ եթե $L\in \mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$, $K\in \mathrm{L}\left(R^n,R^p\right)$, ապա $K\circ L\in \mathrm{L}\left(R^m,R^p\right)$, ընդ որում՝ $[K\circ L]=[K]\cdot[L]$:

Ցանկացած $L:R^m\to R^n$ գծային արտապատկերում անընդհատ է. $\mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)\subset$ $\subset C\left(R^m,R^n\right)$: Ավելին, $|L|=\sup\limits_{|\mathbf{x}|_m=1}\dfrac{|L(\mathbf{x})|_n}{|\mathbf{x}|_m}$-ը վերջավոր է, ընդ որում՝ ցանկացած $\mathbf{x}\in R^m$ վեկտորի համար $|L(\mathbf{x})|\le|L|\cdot|\mathbf{x}|$: $|L|$-ը կոչվում է L գծային արտապատկերման օպերատորային նորմ: Այս նորմով $\mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$ գծային տարածությունը նորմավորված տարածություն է:

Սահմանում: $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0\in X\bigcap X'$ կետում կոչվում է *դիֆերենցելի*, եթե գոյություն ունի $L:R^m\to R^n$ գծային արտապատկերում, այնպիսին, որ

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{|F(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-F(\mathbf{x}_0)-L(\mathbf{h})|_n}{|\mathbf{h}|_m}=0:$$

L-ը կոչվում է $\mathbf{x}_0$ կետում F ֆունկցիայի *ածանցյալ*, *դիֆերենցիալ* կամ *շոշափող արտապատկերում* և նշանակվում՝ $F'(\mathbf{x}_0)$ կամ $dF(\mathbf{x}_0)$:

Որպեսզի F-ն $\mathbf{x}_0$ կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f^i=\pi^i\circ F$ $(i=1,...,n)$ կոորդինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը $\mathbf{x}_0$-ում լինի դիֆերենցելի:

Եթե F-ն $\mathbf{x}_0$ կետում դիֆերենցելի է, ապա այն այդ կետում անընդհատ է:

Դիֆերենցելիության անհրաժեշտ պայմանը: Եթե $f:X\to R$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0\in \operatorname{int}X$ կետում դիֆերենցելի է, ապա այն այդ կետում ըստ $x^1,...,x^m$ փոփոխականներից յուրաքանչյուրի ունի մասնակի ածանցյալ, ընդ որում ցանկացած $\mathbf{h}=\left(h^1,...,h^m\right)$ վեկտորի համար

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})=\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0)h^1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0)h^m:$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ գործ ունենք $F:X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի հետ, նկատի ունենալով $L:R^m\to R^n$ գծային արտապատկերումը $n\times m$ կարգի մատրիցի հետ նույնացնելու մեր պայմանավորվածությունը, կարող ենք գրել

$$(dF)(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (df^1)(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ \vdots \\ (df^n)(\mathbf{h}) \end{bmatrix},$$

որտեղ f^i -ն $(i = 1,\ldots,n)$ F -ի i -րդ կոորդինատային ֆունկցիան է $\left(F = \left(f^1,\ldots,f^n\right)\right)$:

Տրված $F : X \times Y \to R^p$ $\left(X \subset R^m, Y \subset R^n\right)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի համար ընդունված են նաև հետևյալ նշանակումները.

$dF = \left(F'_{\mathbf{x}}, F'_{\mathbf{y}}\right)$, որտեղ

$$F'_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^p}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^p}{\partial x^m} \end{bmatrix}, \quad F'_{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^p}{\partial y^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^p}{\partial y^n} \end{bmatrix}:$$

Դիֆերենցելիության բավարար պայմանը: Եթե $f : X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի առաջին կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետի շրջակայքում և $\mathbf{x}_0$ -ում անընդհատ են, ապա f -ն $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է:

Դիֆերենցման կանոնները: Եթե $F : X \to R^n$ և $G : X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիաները $\mathbf{x}_0 \in X$ կետում դիֆերենցելի են, ապա ցանկացած $\alpha, \beta \in R$ թվերի համար $\alpha F + \beta G$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0$ -ում նույնպես դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(\alpha F + \beta G)'(\mathbf{x}_0) = \alpha F'(\mathbf{x}_0) + \beta G'(\mathbf{x}_0):$$

Եթե $f : X \to R$ և $g : X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիաները $\mathbf{x}_0 \in X$ կետում դիֆերենցելի են, ապա $f \cdot g$ -ն, իսկ եթե $g(\mathbf{x}) \neq 0$ $(\mathbf{x} \in X)$, ապա նաև $\dfrac{f}{g}$ -ն, $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(f \cdot g)'(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0) f'(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0) g'(\mathbf{x}_0),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0) f'(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0) g'(\mathbf{x}_0)}{g^2(\mathbf{x}_0)}:$$

Եթե $F : X \to Y$ $\left(X \subset R^m, Y \subset R^n\right)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $\mathbf{x}_0 \in X$ կետում, իսկ $G : Y \to R^p$ ֆունկցիան՝ $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$ կետում, ապա $G \circ F$ կոմպոզիցիան $\mathbf{x}_0$ -ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$(G \circ F)'(\mathbf{x}_0) = G'(\mathbf{y}_0) \circ F'(\mathbf{x}_0),$$

կամ, մատրիցային տեսքով,

$$\left[(G \circ F)'(\mathbf{x}_0)\right] = \left[G'(\mathbf{y}_0)\right] \cdot \left[F'(\mathbf{x}_0)\right]:$$

Այս վերջին կանոնը հնարավորություն է տալիս ստանալու բարդ (իրականարժեք) ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները հաշվելու բանաձևեր: Օրինակ, եթե $w = f(x, y, z)$ և $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$, ապա

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v}:$$

Երկգծային և բազմագծային ֆունկցիաներ: Նշանակենք $\left(R^m\right)^2 = R^m \times R^m$, $\left(R^m\right)^k = R^m \times \left(R^m\right)^{k-1}$, $k = 3,4,...$: $\left(R^m\right)^k$-ն, փաստորեն, R^m տարածության k վեկտորներից կազմված $\left(\mathbf{v}^1, ..., \mathbf{v}^k\right)$ կարգավորված շարվածքների բազմությունն է:

$T : \left(R^m\right)^k \to R^n$ ֆունկցիան կոչվում է *բազմագծային* (k *-գծային*, $k = 2$ դեպքում՝ *երկգծային*) ֆունկցիա, եթե ցանկացած i ինդեքսի, $\mathbf{v}_1^i, \mathbf{v}_2^i \in R^m$ վեկտորների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար

$$T\left(..., \alpha_1 \mathbf{v}_1^i + \alpha_2 \mathbf{v}_2^i, ...\right) = \alpha_1 T\left(..., \mathbf{v}_1^i, ...\right) + \alpha_2 T\left(..., \mathbf{v}_2^i, ...\right):$$

Որպեսզի $T : \left(R^m\right)^k \to R^n$ ֆունկցիան լինի բազմագծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կոորդինատային ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը լինի բազմագծային:

Դիցուք վեկտորների $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}$ համակարգն R^m-ի ստանդարտ բազիսն է և տրված է $t : \left(R^m\right)^2 \to R$ երկգծային ֆունկցիան: Նշանակելով $a_{ij} = t\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)$ $(i, j = 1, ..., m)$, երկգծային ֆունկցիայի համար ստանում ենք հետևյալ ներկայացումը.

$$t(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} v^i w^j, \quad \mathbf{v} = \left(v^1, ..., v^m\right), \ \mathbf{w} = \left(w^1, ..., w^m\right):$$

Յուրաքանչյուր $t(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ երկգծային ֆունկցիայի համապատասխանեցվում է $\tau(\mathbf{v}) = t(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ $\left(\mathbf{v} \in R^m\right)$ ֆունկցիան, որը կոչվում է *քառակուսային ձև*: $\tau(\mathbf{v})$ քառակուսային ձևը կոչվում է *դրական որոշյալ*, եթե ցանկացած $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ վեկտորի համար $\tau(\mathbf{v}) > 0$: Համաձայն Սիլվեստրի թեորեմի, որպեսզի

$$\tau(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} v^i v^j$$

քառակուսային ձևը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{m}$ մատրիցի բոլոր գլխավոր մինորները լինեն դրական. $\det\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{p} > 0$, $p = 1, ..., m$:

Բարձր կարգի ածանցյալներ: Դիցուք $F : X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետի U շրջակայքում դիֆերենցելի է:

$F' : U \to \mathrm{L}\left(R^m, R^n\right)$ ֆունկցիայի ածանցյալն $\mathbf{x}_0$ կետում, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է F ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ կամ երկրորդ դիֆերենցիալ և նշանակվում՝ $F''(\mathbf{x}_0)$, $d^2 F(\mathbf{x}_0)$: Նկատենք, որ $F''(\mathbf{x}_0)$-ն $R^m \to \mathrm{L}\left(R^m, R^n\right)$ գծային արտապատկերում է.

$F''(\mathbf{x}_0)\in \mathrm{L}\left(R^m,\mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)\right)$: Ցանկացած $\mathbf{v}\in R^m$ վեկտորի համար $F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})\in \mathrm{L}\left(R^m,R^n\right)$: Եթե $\mathbf{w}\in R^m$, ապա $[F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})](\mathbf{w})\in R^n$: Հաշվի առնելով $[F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v})](\mathbf{w})$ արտահայտության գծայնությունը թե՛ ըստ $\mathbf{v}$-ի և թե՛ ըստ $\mathbf{w}$-ի, $F''(\mathbf{x}_0)$-ն կարող ենք նույնացնել $F''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v},\mathbf{w})$ երկգծային ֆունկցիայի հետ, որի արժեքները ընկած են R^n-ում:

Եթե $F: X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0\in \operatorname{int} X$ կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա նրա երկրորդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն, ընդ որում ցանկացած $\mathbf{v}=\left(v^1,\dots,v^m\right)$ և $\mathbf{w}=\left(w^1,\dots,w^m\right)$ վեկտորների համար`

$$\left(\pi^s\circ F''(\mathbf{x}_0)\right)(\mathbf{v},\mathbf{w})=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f^s(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i\partial x^j}v^i w^j\ ,\quad s=1,\dots,m\,,$$

որտեղ π^s-ը R^n-ում s-րդ պրոյեկտող արտապատկերումն է:

$F: X\to R^n$ $\left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի երրորդ և ավելի բարձր կարգի ածանցյալները $\mathbf{x}_0\in \operatorname{int} X$ կետում սահմանվում են $F^{(k)}(\mathbf{x}_0)=\left(F^{(k-1)}\right)'(\mathbf{x}_0)$ $(k=3,4,\dots)$ ինդուկտիվ սխեմայով: Նկատենք միայն, որ $\mathbf{x}_0$ կետում k-րդ կարգի ածանցյալը` $F^{(k)}(\mathbf{x}_0)$-ն, նույնացվում է որոշակի k-գծային ֆունկցիայի հետ, որը $\left(R^m\right)^k$-ն արտապատկերում է R^n-ի մեջ: Եթե F-ն $\mathbf{x}_0$ կետում k անգամ դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունեն F-ի ընդհուպ մինչև k-րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները (կոորդինատային ֆունկցիաների մասնակի ածանցյալները), ընդ որում`

$$d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)=\sum_{i_1,\dots,i_k}\frac{\partial^k f^s(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}v_1^{i_1}\cdots v_k^{i_k}\ ,$$

որտեղ գումարը տարածվում է $1,\dots,m$ թվերից կազմված բոլոր $(i_1,\dots,i_k)$ կարգավորված խմբերի վրա, $\mathbf{v}_p=\left(v_p^1,\dots,v_p^m\right)$, $p=1,\dots,k$:

Նկատենք, որ երբ $\mathbf{v}_1=\cdots=\mathbf{v}_p=\left(v^1,\dots,v^m\right)$, ապա $d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v},\dots,\mathbf{v})$-ն, որը կոչվում է k-ձև, կարելի է սիմվոլիկ ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$d^k f^s(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v},\dots,\mathbf{v})=\left(v^1\partial_1+\cdots+v^m\partial_m\right)^k f^s(\mathbf{x}_0):$$

Ա ն բ ա ց ա հ ա յ տ ֆ ու ն կ ց ի ա ն ե ր : Տրված է $F: G\to R^n$ $\left(G\subset R^m\times R^n\right)$ ֆունկցիան: Կասենք, որ $A\subset G_{R^m}$ բազմության վրա որոշված $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ ֆունկցիան բավարարում է $F(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ հավասարմանը, եթե A-ի վրա ամենուրեք $F(\mathbf{x},f(\mathbf{x}))=\mathbf{0}$: Եթե տվյալ դասին պատկանող և նշված հավասարմանը բավարարող f ֆունկցիան միակն է, ապա այն անվանում են այդ հավասարումից որոշվող *անբացահայտ ֆունկցիա*:

Թեորեմ անբացահայտ ֆունկցիայի վերաբերյալ: Եթե $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in R^m\times R^n$ կետի U շրջակայքում որոշված $F: U\to R^n$ ֆունկցիայի համար տեղի ունեն հետևյալ երեք պայմանները`

1. $F\in C^p\left(U,R^n\right)$, $p\ge 1$;
2. $F(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=\mathbf{0}$;

3. $\det F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0$,

ապա գոյություն ունեն $\mathbf{x}_0$ և $\mathbf{y}_0$ կետերի համապատասխանաբար $U_{\mathbf{x}_0}$ և $U_{\mathbf{y}_0}$ շրջակայքեր և $f \in C^p\left(U_{\mathbf{x}_0}, U_{\mathbf{y}_0}\right)$ ֆունկցիա, այնպիսիք, որ ցանկացած $(\mathbf{x};\mathbf{y}) \in U_{\mathbf{x}_0} \times U_{\mathbf{y}_0}$ կետի համար $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$: Ընդսմին, f ֆունկցիայի ածանցյալը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$[f'(\mathbf{x})] = -\left[F'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\right]^{-1} \cdot \left[F'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\right]:$$

$F : R^m \to R^n$ ֆունկցիայի $F'(\mathbf{x}_0)$ ածանցյալի մատրիցը, ստանդարտ բազիսում, կոչվում է *Յակոբիի մատրից*, իսկ երբ $m = n$ այդ մատրիցի որոշիչը՝ $\det F'(\mathbf{x}_0)$-ն, կոչվում է F արտապատկերման *յակոբիան*: Երբեմն $F = (f_1, \ldots, f_n)$ արտապատկերման յակոբիանը նշանակում են $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}$:

Թ ե ո ր ե մ հ ա կ ա դ ա ր ձ ա ր տ ա պ ա տ կ ե ր մ ա ն վ ե ր ա բ ե ր յ ա լ : $f : U \to V$ արտապատկերումը, որտեղ U -ն և V -ն R^n -ում բաց բազմություններ են, կոչվում է C^p -*դիֆեոմորֆիզմ*, եթե

1. f -ն U -ն փոխմիարժեք արտապատկերում է V -ի վրա;
2. $f \in C^p(U,V)$, $f^{-1} \in C^p(V,U)$:

Երբ $p = 0$ (f -ն ու f^{-1} -ն անընդհատ են), f -ը կոչվում է *հոմեոմորֆիզմ*, իսկ $p = 1$ դեպքում՝ *դիֆեոմորֆիզմ*:

Թեորեմ: Դիցուք G -ն R^n -ում բաց բազմություն է, $f \in C^p\left(G, R^n\right)$ $(p \geq 1)$ և $\mathbf{x}_0 \in G$: Եթե $\mathbf{x}_0$ կետում f արտապատկերման յակոբիանը՝ $\det f'(\mathbf{x}_0)$-ն , զրո չէ, ապա գոյություն ունեն $\mathbf{x}_0$ կետի $U_{\mathbf{x}_0} \subset G$ և $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ կետի $V_{\mathbf{y}_0} \subset f(G)$ շրջակայքեր, այնպիսիք, որ $f : U_{\mathbf{x}_0} \to V_{\mathbf{y}_0}$ արտապատկերումը C^p -դիֆեոմորֆիզմ է: Ընդ որում, եթե $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}_0}$ և $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, ապա

$$\left(f^{-1}\right)'(\mathbf{y}) = [f'(\mathbf{x})]^{-1} :$$

Ա ծ ա ն ց յ ա լ ի կ ի ր ա ռ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ը : Կորի շոշափող: $\Gamma : [\alpha;\beta] \to R^3$ կորը կոչվում է *ողորկ*, եթե $\Gamma \in C^1\left([\alpha;\beta], R^3\right)$ և ամենուրեք $\Gamma'(t) \neq \mathbf{0}$: Դիցուք $\mathbf{x}_0 = \left(x_0^1, x_0^2, x_0^3\right) = \Gamma(t_0)$, $t_0 \in [\alpha;\beta]$: Եթե $\Gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$, ապա $\mathbf{x}_0$ կետում կորի շոշափողը որոշվում է

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \tau \Gamma'(t_0) \quad (-\infty < \tau < +\infty)$$

հավասարումով: Նշանակելով $\Gamma'(t_0) = (m,n,p)$ և բերված հավասարումից արտաքսելով τ պարամետրը՝ շոշափողի հավասարումը կարելի է բերել կանոնական տեսքի.

$$\frac{x^1 - x_0^1}{m} = \frac{x^2 - x_0^2}{n} = \frac{x^3 - x_0^3}{p} :$$

Մակերևույթի շոշափող հարթություն և մակերևույթի նորմալ: Դիցուք G -ն R^2 -ում տիրույթ է և $S \in C\left(G, R^3\right)$: S արտապատկերման արժեքների բազմությունը R^3 -ում կանվանենք *մակերևույթ*: Եթե $S\in C^1\left(G,R^3\right)$ և ամենուրեք $rang\left[S'(u,v)\right]=2$, ապա մակերևույթը կանվանենք *ողորկ*: Եռաչափ էվկլիդյան տարածության կետերը ներկայացնելով $(x;y;z)$ կոորդինատներով՝ մակերևույթի համար ստանում ենք $x=\xi(u,v),\ \ y=\eta(u,v),\ \ z=\zeta(u,v),\ \ (u;v)\in G$, հավասարումները, որոնք կոչվում են մակերևույթի պարամետրական հավասարումներ:

Եթե $S(G)$ մակերևույթը ողորկ է և S արտապատկերման ածանցյալը տրված $(u_0,v_0)\in G$ կետում ունի մաքսիմալ ռանգ՝ $rang\left[S'(u_0,v_0)\right]=2$, ապա $(x_0;y_0;z_0)=S(u_0,v_0)$ կետում մակերևույթի շոշափող հարթությունը տրվում է

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

հավասարումով, որում՝

$$A=\det\begin{bmatrix}\eta'_u & \eta'_v\\ \zeta'_u & \zeta'_v\end{bmatrix},\ \ B=\det\begin{bmatrix}\zeta'_u & \zeta'_v\\ \xi'_u & \xi'_v\end{bmatrix},\ \ C=\det\begin{bmatrix}\xi'_u & \xi'_v\\ \eta'_u & \eta'_v\end{bmatrix}:$$

Շոշափող հարթությանը ուղղահայաց $\mathbf{n}=(A;B;C)$ վեկտորը կոչվում է տրված $(x_0;y_0;z_0)$ կետում $S(G)$ մակերևույթի *նորմալ*: Նորմալին համուղղված միավոր երկարությամբ վեկտորի կոորդինատները կոչվում են նորմալի *ուղղորդ կոսինուսներ*.

$$(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)=\pm\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),$$

որտեղ α,β,γ -ն նորմալի համապատասխանաբար Ox, Oy, Oz առանցքների հետ կազմած անկյուններն են:

Եթե մակերևույթը տրված է $F(x,y,z)=0$ հավասարումով և այդ մակերևույթին պատկանող $(x_0;y_0;z_0)$ կետում գոյություն ունեն F'_x, F'_y, F'_z մասնակի ածանցյալները, որոնք միաժամանակ զրո չեն, ապա $(x_0;y_0;z_0)$ կետում շոշափող հարթության հավասարումը հետևյալն է.

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0:$$

Էքստրեմումներ: Տրված $f:X\to R\ \ \left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի համար $\mathbf{x}_0\in\operatorname{int}X$ կետը կոչվում է լոկալ մինիմումի (մաքսիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի $\mathbf{x}_0$ -ի $U_{\mathbf{x}_0}\subset X$ շրջակայք, որում ամենուրեք $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x}_0)$): Մինիմումի և մաքսիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր:

Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը: Եթե $f:X\to R\ \ \left(X\subset R^m\right)$ ֆունկցիայի համար $\mathbf{x}_0\in\operatorname{int}X$ կետը լոկալ էքստրեմումի կետ է և $\mathbf{x}_0$ -ում f -ն ըստ բոլոր փոփոխականների ունի մասնակի ածանցյալներ, ապա

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(\mathbf{x}_0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x^m}(\mathbf{x}_0)=0:$$

Եթե $\mathbf{x}_0\in X$ կետում f ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները զրո են, ապա $\mathbf{x}_0$ -ն կոչվում է կրիտիկական կետ:

Էքստրեմումի բավարար պայմանը: Դիցուք՝ $f\in C^2(X)$, և $\mathbf{x}_0\in\operatorname{int}X$ կետը f -ի համար կրիտիկական կետ է: Եթե

$$\tau(\mathbf{h})=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i\partial x^j}h^ih^j$$

քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա $\mathbf{x}_0$ -ն լոկալ մինիմումի կետ է, իսկ եթե դրական որոշյալ է $-\tau(\mathbf{h})$ ձևը, ապա $\mathbf{x}_0$ -ն լոկալ մաքսիմումի կետ է: Եթե $\tau(\mathbf{h})$ -ը տարբեր $\mathbf{h}$ -երի համար ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա $\mathbf{x}_0$ -ն էքստրեմումի կետ չէ:

Պայմանական (հարաբերական) էքստրեմումներ: Տրված են $f: X \to R$ $\left(X \subset R^{m+n}\right)$ ֆունկցիան և հավասարումների (կապի հավասարումների) հետևյալ համակարգը.

$$\Phi_i\left(x^1,\ldots,x^m,x^{m+1},\ldots,x^{m+n}\right)=0\ ,\quad i=1,\ldots,n\ :$$

Ասում են, որ կապի հավասարումներին բավարարող $\mathbf{x}_0=\left(x_0^1,\ldots,x_0^{m+n}\right)\in \operatorname{int} X$ կետն f ֆունկցիայի հարաբերական մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է, եթե $\mathbf{x}_0$ կետի որևէ շրջակայքի բոլոր այն $\mathbf{x}$ կետերի համար, որոնք բավարարում են կապի հավասարումներին, ճշմարիտ է $f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}_0)$ $\left(f(\mathbf{x})\le f(\mathbf{x}_0)\right)$ անհավասարությունը:

Դիցուք՝ $\Phi_i \in C^1(X)$, $i=1,\ldots,n$: Եթե $\det\left[\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x^{m+j}}\right]_{i,j=1}^n \ne 0$, ապա, համաձայն անբացահայտ ֆունկցիայի մասին թեորեմի, $\mathbf{x}_0$ կետի ինչ-որ շրջակայքում կապի հավասարումներից $x^{m+1},\ldots,x^{m+n}$ անհայտները որոշվում են որպես $x^1,\ldots,x^m$ անհայտներից կախված անբացահայտ ֆունկցիաներ.

$$x^{m+j}=\varphi^j\left(x^1,\ldots,x^m\right),\quad j=1,\ldots,n\ :$$

Արդյունքում, $\mathbf{x}_0$ կետում $f\left(x^1,\ldots,x^m,x^{m+1},\ldots,x^{m+n}\right)$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումի հետազոտումը հանգեցվում է $\left(x_0^1,\ldots,x_0^m\right)$ կետում

$$g\left(x^1,\ldots,x^m\right)=f\left(x^1,\ldots,x^m,\varphi^1\left(x^1,\ldots,x^m\right),\ldots,\varphi^n\left(x^1,\ldots,x^m\right)\right)$$

բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումի հետազոտմանը:

Հաճախ, երբ $\varphi^1,\ldots,\varphi^n$ ֆունկցիաների բացահայտ տեսքը ստանալն անհնար է, f ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումները գտնելու համար կիրառվում է Լագրանժի անորոշ բազմապատկիչների մեթոդը, որի էությունը հետևյալն է. ներմուծելով նախապես անհայտ $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ բազմապատկիչներ՝ կազմում են Լագրանժի $F=f+\lambda_1\Phi_1+\cdots+\lambda_n\Phi_n$ օժանդակ ֆունկցիան: Եթե $f,\Phi_1,\ldots,\Phi_n \in C^1(X)$, ապա լուծելով $x^1,\ldots,x^{m+n},\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ անհայտներով $m+2n$ հավասարումների՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^i}=0, i=1,\ldots,m+n, \\ \Phi_i=0, i=1,\ldots,n, \end{cases}$$

համակարգը, գտնում են թե՛ $\lambda_1^0,\ldots,\lambda_n^0$ բազմապատկիչները, թե՛ $\mathbf{x}_0=\left(x_0^1,\ldots,x_0^{m+n}\right)$ կրիտիկական կետը: Եթե այդ կետում $F=f+\lambda_1^0\Phi_1+\cdots+\lambda_n^0\Phi_n$ օժանդակ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող $d^2F(h,h)$ քառակուսային ձևը $d\Phi_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})=0$ $(i=1,\ldots,n)$ հավասարումներին բավարարող $\mathbf{h}$ -երի համար դրական (բացասական) որոշյալ է, ապա $\mathbf{x}_0$ -ն f -ի համար հարաբերական մինիմումի (մաքսիմումի) կետ է:

Ա

3282. Ցույց տալ, որ

$$f'_x(x,b)=\frac{d}{dx}\left[f(x,b)\right]:$$

3283. Հաշվել $f'_x(x,y)$-ը և $f'_y(x,y)$-ը նշված կետում.

ա) $f(x,y)=(x-1)e^{xy-x-y+1}+(y^3-1)\sin\pi x$, $M(1;1)$;

բ) $f(x,y)=2(x^2-1)arctgy+y^4$, $M(1;1)$;

գ) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$, $M(0;0)$;

դ) $f(x,y)=|x|+|y|-|x+y|$, $M(0;0)$:

Գտնել մասնակի ածանցյալները (3284-3288).

3284. ա) $f(x,y)=x\sin(x+y)$; f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{xx};

բ) $f(x,y)=xy+\dfrac{x}{y}$; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};

գ) $f(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};

դ) $f(x,y)=tg\dfrac{x^2}{y}$; f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}:

3285. ա) $f(x,y)=x^y$; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};

բ) $f(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};

գ) $f(x,y)=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy};

դ) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}:

3286. ա) $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$; f'''_{xxx}, f'''_{xyy};

բ) $f(x,y)=\dfrac{\cos x^2}{y}$; f'''_{xxx}, f'''_{xxy}:

3287. ա) $f(x,y)=\ln(1+2x+3y)$; $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$;

բ) $f(x,y)=\ln(x+y^2)$; $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}$;

գ) $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$;

դ) $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}$:

3288. ա) $f(x,y)=(x-a)^n(y-b)^m$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^n \partial y^m}$;

բ) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$;

գ) $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{x+y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$;

դ) $f(x,y)=xyze^{x+y+z}$, $\dfrac{\partial^{m+n+k} f}{\partial x^m \partial y^n \partial z^k}$:

3289. Ճշմարի՞տ է արդյոք $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$ հավասարությունը, երբ

ա) $f(x,y)=(x+2)^{y+1}$;

բ) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x^2+1}{y-3}$;

գ) $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0, x^2+y^2=0; \end{cases}$

դ) $f(x,y)=\begin{cases} xy, |y|\leq |x|, \\ -xy, |y|>|x|: \end{cases}$

3290. Գոյություն ունի՞ արդյոք $f''_{xy}(0,0)$ մասնակի ածանցյալը, եթե

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0, \\ 0, x^2+y^2=0: \end{cases}$$

Գտնել u ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները (3291-3292).

3291. ա) $u=f(x^2+y^2+z^2)$;

բ) $u=f(x^2-y^2)$;

գ) $u = xy + f(x-y)$; դ) $u = f(xy)g(x-y)$:

3292. ա) $u = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$; բ) $u = f(x+y, x-y)$;

գ) $u = f(\sin x, \cos y)$; դ) $u = f(xy, x, y)$:

3293. Դիցուք՝ f-ը երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, $u = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: Ապացուցել, որ

$$\Delta u = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r),$$

որտեղ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$:

3294. Ստուգել, որ $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ֆունկցիան բավարարում է Լապլասի հավասարմանը (հարմոնիկ է). $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

3295. Ապացուցել, որ եթե $u = u(x, y)$ ֆունկցիան հարմոնիկ է, ապա $v = u(x+y, x-y)$ ֆունկցիան նույնպես հարմոնիկ է:

Դիցուք՝ f-ը և g-ն երկու անգամ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են: Ստուգել, որ u ֆունկցիան բավարարում է նշված հավասարմանը (3296-3299).

3296. $u = f(x-at) + g(x+at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

3297. $u = xf(x+y) + yg(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

3298. $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right) + xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$:

3299. $u = f(x + g(y))$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

3300. Դիցուք $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$-ը R^m-ում ստանդարտ բազիսն է: Ցույց տալ, որ եթե $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ $\left(X \subset R^m\right)$ կետում գոյություն ունեն $f : X \to R$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները, ապա

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^i}, \; i = 1, \ldots, m:$$

3301. Դիցուք $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները $x_0 \in \operatorname{int} X$ կետում անընդհատ են: Ստուգել, որ եթե $\mathbf{v} \in R^m$ վեկտորը ստանդարտ բազիսի վեկտորների (կոորդինատների առանցքների) հետ կազմում է համապատասխանաբար $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ անկյուններ՝

$$\alpha_i = \arccos \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_i \rangle}{|\mathbf{v}|}, \ i = 1, \ldots, m,$$

ապա $\dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{v}_0} = \dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^1} \cos \alpha_1 + \cdots + \dfrac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^m} \cos \alpha_m$, որտեղ $\mathbf{v}_0$-ն $\mathbf{v}$-ին համուղղված միավոր վեկտորն է:

3302. Գտնել $M(1;1)$ կետում Ox առանցքի դրական ուղղության հետ 60° անկյուն կազմող վեկտորի ուղղությամբ $z = x^2 - y^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

3303. Գտնել $M(1;1)$ կետում Ox առանցքի դրական ուղղության հետ α անկյուն կազմող վեկտորի ուղղությամբ $z = x^2 - xy + y^2$ ֆունկցիայի ածանցյալը: Ո՞ր ուղղությամբ այդ ածանցյալը՝

ա) կունենա ամենամեծ արժեք;

բ) կունենա ամենափոքր արժեք;

գ) կլինի հավասար 0-ի:

3304. Գտնել $M(1;1;1)$ կետում կոորդինատների Ox, Oy և Oz առանցքների հետ համապատասխանաբար α, β և γ անկյուններ կազմող վեկտորի ուղղությամբ $u = xyz$ ֆունկցիայի ածանցյալը:

***

3305. Ապացուցել, որ $f: R^2 \to R$ ֆունկցիան $(x_0; y_0)$ կետում դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունեն $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$ և $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ մասնակի ածանցյալները, ընդ որում՝

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

որտեղ $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

3306. Ապացուցել, որ եթե $f:R^m \to R^n$ ֆունկցիան բավարարում է $|f(\mathbf{x})| = o(|\mathbf{x}|)$ և $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ պայմաններին, ապա f-ը $\mathbf{0}$ կետում դիֆերենցելի է: Գտնել $f'(\mathbf{0})$-ն:

3307. Ցույց տալ, որ հետևյալ ֆունկցիաները $(0;0)$ կետում դիֆերենցելի չեն.

ա) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$; բ) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$:

3308. Հետազոտել $f:R^2 \to R$ ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունը $(0;0)$ կետում.

ա) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$; բ) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^4+y^4}$;

գ) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0: \end{cases}$ դ) $f(x,y) = \sqrt[3]{x}\sin y$:

3309. Գտնել դիֆերենցիալը և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը.

ա) $f(x,y) = x^m y^n$; բ) $f(x,y) = e^{xy}$;

գ) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$; դ) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

ե) $f(x,y,z) = xy + yz + zx$; զ) $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2}$:

3310. Գտնել $df(1;1;1)$-ը և $d^2 f(1;1;1)$-ը, եթե $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$:

3311. Ապացուցել, որ եթե $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ապա $d^2 f \geq 0$:

3312. Ստուգել, որ

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ երբ } xy = 0, \\ 1, \text{ երբ } xy \neq 0 \end{cases}$$

ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները $(0;0)$ կետում գոյություն ունեն, բայց f-ն այդ կետում անընդհատ չէ:

3313. Ստուգել, որ $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ ֆունկցիան $(0;0)$ կետում անընդհատ է, ունի $f'_x(0,0)$ և $f'_y(0,0)$ մասնակի ածանցյալներ, բայց $(0;0)$ կետում դիֆերենցելի չէ:

3314. Ստուգել, որ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$

ֆունկցիան $(0;0)$ կետի շրջակայքում անընդհատ է, ունի $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ սահմանափակ մասնակի ածանցյալներ, բայց $(0;0)$ կետում դիֆերենցելի չէ:

3315. Ստուգել, որ

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

ֆունկցիայի $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ մասնակի ածանցյալները $(0;0)$ կետում խզվող են, անսահմանափակ, սակայն, այնուամենայնիվ, f-ն այդ կետում դիֆերենցելի է:

3316. Ստուգել, որ

$$f(x,y)=x+y+\sqrt{|xy|}$$

ֆունկցիան $(0;0)$ կետում ցանկացած ուղղությամբ ունի ածանցյալ, սակայն այդ կետում դիֆերենցելի չէ:

Գտնել $f:R^2\to R$ ֆունկցիայի ածանցյալը (3317-3318).

3317. $f(x,y)=x+y$; **3318.** $f(x,y)=xy$:

Գտնել ֆունկցիայի ածանցյալը մատրիցային տեսքով (3319-3322).

3319. $f(x,y)=\sin(xy)$: **3320.** $f(x,y,z)=(x+y)^z$:

3321. $F(x,y,z)=\left(x^y;z\right)$: **3322.** $F(x,y)=(\cos(x\sin y);x)$:

Ներկայացնել M կետում ֆունկցիայի առաջին և երկրորդ կարգի դիֆերենցիալները որպես $\mathbf{h}\in R^m$ կամ $(\mathbf{h};\mathbf{l})\in R^m\times R^m$ փոփոխականներից կախված համապատասխանաբար գծային կամ երկգծային ֆունկցիա (3323-3328).

3323. $f(x,y)=x^2y^2$; $M(a;b)$:

3324. $f(x,y,z)=xy+yz+zx$; $M(a;b;c)$:

3325. $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$; $M(x_0;y_0)$:

3326. $f(x,y)=\cos\left(e^x y\right)$; $M(x;y)$:

3327. $f(x,y)=e^{xy}$; $M(x;y)$:

3328. $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$; $M(x_0;y_0;z_0)$:

Կազմել M կետում ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը (3329-3330).

3329. $f(x,y)=x\ln(xy)$; $M(1;1)$:

3330. $f(x,y,z)=\dfrac{yz}{x}$; $M(1;2;3)$:

Դիցուք f -ը երկու անգամ դիֆերենցելի է: Կազմել u ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը (3331-3340).

3331. $u=f(t),\ t=x+y$:

3332. $u=f(t),\ t=\dfrac{y}{x}$:

3333. $u=f(t),\ t=xyz$:

3334. $u=f(\xi,\eta),\ \xi=ax,\ \eta=by$:

3335. $u=f(\xi,\eta),\ \xi=x+y,\ \eta=x-y$:

3336. $u=f(\xi,\eta),\ \xi=xy,\ \eta=\dfrac{x}{y}$:

3337. $u=f(\xi,\eta,\zeta),\ \xi=xy,\ \eta=x-y,\ \zeta=x+y$:

3338. $u=f(\xi,\eta,\zeta),\ \xi=x^2,\ \eta=y^2,\ \zeta=z^2$:

3339. $u=f(2x,3y,4z)$:

3340. $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$:

 Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ $(\rho=\rho(\varphi))$, ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը $\Phi(\varphi,\rho,\rho'(\varphi))=0$ տեսքի (3341-3342).

3341. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$:

3342. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$:

Անցնելով u,v նոր անկախ փոփոխականների՝ ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը $\Phi(u,v,z,z'_u,z'_v)=0$ տեսքի (3343-3344).

3343. $\dfrac{\partial z}{\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$; $u=x+y$, $v=x-y$:

3344. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$; $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$:

Ներմուծելով u, v, $w=w(u,v)$ նոր փոփոխականներ, ձևափոխել դիֆերենցիալ հավասարումը (3345-3348).

3345. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$; $x=u+v$, $y=u-v$, $z=we^{v-u}$:

3346. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z$; $u=x^2+y^2$, $v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $w=\ln z-x-y$:

3347. $y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{x}$; $yu=x$, $v=x$, $w=xz-y$:

3348. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$:

Տրված M կետի շրջակայքում ֆունկցիան ներկայացնել Թեյլորի բանաձևով (3349-3351).

3349. $f(x,y)=(x-1)^2+(x+y)^2$, $M(0;0)$:

3350. $f(x,y)=x-2y+x^2-3xy+4y^2$, $M(1;2)$:

3351. $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $M(1;1;1)$:

***

Գտնել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը (3352-3367).

3352. ա) $z=x^2+(y-1)^2$; բ) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$:

3353. ա) $z=x^2-(y-1)^2$; բ) $z=(x-y+1)^2$:

3354. ա) $z=x^3+y^3-3xy$; բ) $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$:

3355. ա) $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2$; բ) $z=x^2y^3(6-x-y)$:

3356. ա) $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $(x>0,y>0)$;

բ) $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,b>0)$:

3357. ա) $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$;

բ) $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$:

3358. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$:

3359. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$:

3360. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$: **3361.** $z=xy\ln(x^2+y^2)$:

3362. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$: **3363.** $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$:

3364. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$:

3365. $u = xyz(4a - x - y - z)$:

3366. Ստուգել, որ $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ ֆունկցիան ունի անվերջ թվով մաքսիմումներ և չունի մինիմում:

3367. Ստուգել, որ $z = (y - x^2)(y - 2x^2)$ ֆունկցիան $(0;0)$ կետում ցանկացած $x = t\sin\alpha$, $y = t\cos\alpha$ ուղիղով ունի մինիմում, սակայն այդ կետը էքստրեմումի կետ չէ:

3368. Կազմել տրված M կետում կորի շոշափողի հավասարումը.

ա) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$; $M\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2}\right)$;

բ) $y = x$, $z = x^2$; $M(1;1;1)$:

Կազմել մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումը և գտնել նորմալի ուղղորդ կոսինուսները (3369-3372).

3369. $z = xy$, $M(2;1;2)$:

3370. $z = x^2 + y^2$, $M(1;1;2)$:

3371. $z = \sin\frac{x}{y}$, $M(\pi;1;0)$:

3372. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $M(x_0; y_0; z_0)$:

Բ

3373. Դիցուք՝ $L \in \mathrm{L}(R^m, R^n)$: Ապացուցել, որ գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ ցանկացած $\mathbf{x} \in R^m$ վեկտորի համար

$$|L(\mathbf{x})| \le M|\mathbf{x}|:$$

Այստեղից հետևեցնել, որ ցանկացած $L \in \mathrm{L}(R^m, R^n)$ գծային արտապատկերում R^m-ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3374. Ապացուցել, որ ցանկացած $L : R^m \to R^n$ գծային արտապատկերում դիֆերենցելի է, ընդ որում ամենուրեք՝ $L'(\mathbf{x}) = L$:

Մասնավորապես, $\pi^i : R^m \to R$ $(i = 1,\dots,m)$ պրոյեկտող արտապատկերման համար $d\pi^i = \pi^i$:

3375. Դիցուք $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետում դիֆերենցելի է: Ցույց տալ, որ

$$df\left(\mathbf{x}_0\right) = \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial x^m} dx^m = \left\langle f'\left(\mathbf{x}_0\right), d\mathbf{x}\right\rangle,$$

որտեղ նշանակված է՝ $dx^i = d\pi^i$ $\left(i = 1, \ldots, m\right)$, $d\mathbf{x} = \left(dx^1, \ldots, dx^m\right)$:

3376. Ստուգել, որ $f: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիայի դիֆերենցիալի տեսքը կմնա անփոփոխ, եթե $\mathbf{x}$-ը դառնա մեկ այլ, $\mathbf{t}$ փոփոխականի ֆունկցիա. $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{t}) = \left(\varphi^1(\mathbf{t}), \ldots, \varphi^m(\mathbf{t})\right)$, $\varphi^i(\mathbf{t}) \in C^1\left(R^p\right)$, $i = 1, \ldots, m$: Այլ կերպ՝ ցույց տալ, որ

$$d\left(f \circ \Phi\right) = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m,$$

որտեղ $dx^i = \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^1} dt^1 + \cdots + \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t^p} dt^p$, $i = 1, \ldots, m$:

3377. Ապացուցել, որ $F: X \to R^n$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետում դիֆերենցելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $L \in \mathrm{L}\left(R^m, R^n\right)$ գծային արտապատկերում, այնպիսին, որ

$$F\left(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}\right) = F\left(\mathbf{x}_0\right) + L(\mathbf{h}) + o(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}:$$

3378. Ապացուցել, որ տրված կետում դիֆերենցելի ֆունկցիան այդ կետում անընդհատ է:

3379. Ցույց տալ, որ դիֆերենցելի ֆունկցիայի ածանցյալը միակն է:

3380. Ապացուցել, որ եթե $F: X \to R$ $\left(X \subset R^m\right)$ ֆունկցիան $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} X$ կետում դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած $\mathbf{v} \in R^m$ վեկտորի համար

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial \mathbf{v}} = f'\left(\mathbf{x}_0\right)(\mathbf{v}):$$

3381. Դիցուք $f: X \to R$ ֆունկցիան $X \subset R^m$ բաց բազմության վրա բավարարում է Լիպշիցի պայմանին և $\mathbf{x}_0 \in X$: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $L \in \mathrm{L}\left(R^m, R\right)$ գծային արտապատկերում այնպիսին, որ ցանկացած $\mathbf{v} \in R^m$ վեկտորի համար

$$\frac{\partial f\left(\mathbf{x}_0\right)}{\partial \mathbf{v}} = L(\mathbf{v}),$$

ապա f-ն $\mathbf{x}_0$-ում դիֆերենցելի է, ընդ որում՝ $f'\left(\mathbf{x}_0\right) = L$:

3382. Դիցուք R^m-ում $p_1(\mathbf{x})$, $p_2(\mathbf{x})$, $p_3(\mathbf{x})$ ֆունկցիաները հետևյալ կերպ սահմանված նորմերն են.

$$p_1(\mathbf{x})=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2}\ ,$$

$$p_2(\mathbf{x})=|x^1|+\cdots+|x^m|\,,$$

$$p_3(\mathbf{x})=\max_{1\le i\le m}|x^i|\,:$$

Դրանցից յուրաքանչյուրի համար գտնել այն կետերի բազմությունը, որոնցում համապատասխան նորմը դիֆերենցելի է:

3383. Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան $(x_0;y_0)$ կետի շրջակայքում ունի $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ և $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ մասնակի ածանցյալներ: Ապացուցել խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ թեորեմի հետևյալ ուժեղացումը. եթե $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$-ը $(x_0;y_0)$ կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ մասնակի ածանցյալը, ընդ որում՝

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\,:$$

3384. Դիցուք G-ն R^m-ում տիրույթ է և $f\in C^p(G)$: Ապացուցել խառն ածանցյալների հավասարության վերաբերյալ թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. $\partial_{i_1\ldots i_p}f(\mathbf{x})$ խառն ածանցյալի արժեքը $i_1,\ldots,i_p$ ինդեքսների ցանկացած տեղափոխության արդյունքում մնում է անփոփոխ:

3385. $t:(R^m)^k\to R$ բազմագծային ֆունկցիան կոչվում է *սիմետրիկ*, եթե վեկտորների ցանկացած $(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^k)\in(R^m)^k$ շարվածքի և ցանկացած i,j ինդեքսների համար

$$t(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^i,\ldots,\mathbf{v}^j,\ldots,\mathbf{v}^k)=t(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^j,\ldots,\mathbf{v}^i,\ldots,\mathbf{v}^k):$$

Ապացուցել, որ եթե $f\in C^k(X)$ $(X\subset R^m, k\ge 2)$, ապա ցանկացած $\mathbf{x}_0\in X$ կետում $(d^k f(\mathbf{x}_0))(\mathbf{v}^1,\ldots,\mathbf{v}^k)$ բազմագծային ֆունկցիան սիմետրիկ է:

3386. Դիցուք X-ը R^m-ում բաց բազմություն է: Ապացուցել, որ $f\in C^1(X)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը X-ի վրա անընդհատ դիֆերենցելի է:

3387. Ապացուցել, որ գծային արտապատկերման երկրորդ ածանցյալը զրո է:

3388. Դիցուք $T: R^m \times R^m \to R^n$ ֆունկցիան երկգծային է: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{(\mathbf{h},\mathbf{k})\to 0} \dfrac{|T(\mathbf{h},\mathbf{k})|}{|(\mathbf{h},\mathbf{k})|} = 0$;

բ) $T'(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{x},\mathbf{y}) = T(\mathbf{a},\mathbf{y}) + T(\mathbf{x},\mathbf{b})$;

գ) եթե $p(x,y) = xy$, ապա $p'(a,b)(x,y) = bx + ay$:

3389. Դիցուք D-ն R^m-ում տիրույթ է: $f: D \to R$ ֆունկցիան կոչվում է n-րդ աստիճանի համասեռ, եթե

$$\forall \mathbf{x} \in D \;\; \forall \lambda \in R \;\; \left(\lambda \mathbf{x} \in D \Rightarrow f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^n f(\mathbf{x})\right):$$

Ստուգել, որ հետևյալ ֆունկցիաները համասեռ են և գտնել դրանց համասեռության աստիճանը.

ա) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$; բ) $f(x,y,z,t) = \dfrac{xy + zt}{xyz + yzt}$:

3390. Ապացուցել, որ $f \in C^1(D)$ ֆունկցիան n-րդ աստիճանի համասեռ է այն և միայն այն դեպքում, երբ բավարարում է Էյլերի նույնությանը.

$$x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(x^1,\ldots,x^m\right) + \cdots + x^m \frac{\partial f}{\partial x^m}\left(x^1,\ldots,x^m\right) = nf\left(x^1,\ldots,x^m\right):$$

3391. Ապացուցել, որ եթե $f \in C^1(D)$ ֆունկցիան n-րդ աստիճանի համասեռ է, ապա նրա առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները $n-1$-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիաներ են:

3392. Ապացուցել, որ եթե $f \in C^p\left(R^m\right)$ ֆունկցիան n-րդ աստիճանի համասեռ է, ապա R^m-ի վրա ամենուրեք

$$\left(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right)^p f\left(x^1,\ldots,x^m\right) = p!\,C_n^p f\left(x^1,\ldots,x^m\right):$$

3393. Դիցուք G-ն R^m-ում տիրույթ է, իսկ f-ը՝ G-ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա: Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թեորեմը. եթե $\mathbf{x}$ և $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ ծայրակետերով հատվածն ընկած է G-ում, f-ն այդ հատվածի կետերում անընդհատ է, իսկ հատվածի ներսում՝ $\{(1-t)\mathbf{x} + t(\mathbf{x}+\mathbf{h}) : 0 < t < 1\}$ բազմության վրա, դիֆերենցելի, ապա գոյություն ունի այդ հատվածին պատկանող ξ կետ, այնպիսին, որ

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f'(\xi)(\mathbf{h}):$$

3394. Ապացուցել, որ եթե $F: G \to R^n$ ֆունկցիան $G \subset R^m$ տիրույթում դիֆերենցելի է և ամենուրեք $F'(\mathbf{x}) = \mathbf{\theta}$, որտեղ $\mathbf{\theta}$-ն R^m-ից R^n նույնաբար զրո արտապատկերումն է, ապա F-ը G-ի վրա հաստատուն է: Ցույց տալ նաև հակառակը. եթե $F: G \to R^n$ ֆունկցիան հաստատուն է, ապա G-ի վրա ամենուրեք $F'(\mathbf{x}) = \mathbf{\theta}$:

***

3395. Համոզվել, որ $y = y(x)$ $(x \in R)$ ֆունկցիան բավարարում է $y^2 - y = 0$ հավասարմանը այն և միայն այն դեպքում, երբ $y(x)$-ը որևէ $M \subset R$ բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան է:

3396. Տրված է $x^2 + y^2 = 1$ հավասարումը:

ա) Համոզվել, որ գոյություն ունեն այդ հավասարմանը բավարարող անվերջ թվով $y = y(x)$ $(-1 \le x \le 1)$ ֆունկցիաներ:

բ) Պարզել, թե այդ ֆունկցիաներից որո՞նք են անընդհատ:

գ) Ցույց տալ, որ գոյություն ունի միայն մեկ $y = y(x)$ $(-1 \le x \le 1)$ անընդհատ ֆունկցիա, որը նաև բավարարում է $y(0) = -1$ պայմանին:

դ) Ցույց տալ, որ $y(1) = 0$ պայմանին բավարարող անընդհատ ֆունկցիաները երկուսն են:

3397. Տրված է $x^4 = y^2$ հավասարումը: Համոզվել, որ գոյություն ունեն այդ հավասարմանը բավարարող անվերջ թվով $y = y(x)$ $(x \in R)$ ֆունկցիաներ: Պարզել, թե այդ ֆունկցիաների դասում

ա) քանի՞սն են դիֆերենցելի;

բ) $y(0) = 0$ պայմանին բավարարող քանի՞ դիֆերենցելի ֆունկցիա կա;

գ) $y(1) = 1$ պայմանին բավարարող քանի՞ դիֆերենցելի ֆունկցիա կա:

դ) Համոզվել, որ $(1;1)$ կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում տրված հավասարմանը բավարարող դիֆերենցելի ֆունկցիան միակն է:

Գտնել տրված հավասարմանը բավարարող $y = y(x)$ դիֆերենցելի ֆունկցիայի y' և y'' ածանցյալները (3398-3401).

3398. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$: **3399.** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\dfrac{y}{x}$:

3400. $y - \varepsilon \sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$: **3401.** $x^y = y^x$ $(x \ne y)$:

3402. Գտնել $y'(1)$-ը, եթե $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 y + y^3$ և $y(1) = 1$:

3403. Գտնել $y'(0)$-ն, $y''(0)$-ն, $y'''(0)$-ն, եթե $y \sin x + x^2 + y^3 = 1$:

Գտնել $z = z(x, y)$ անբացահայտ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները (3404-3407).

3404. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

3405. $arctg\frac{z}{x} = x + y + z$; $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

3406. $x + y + z = \ln(xyz)$ $(x > 0, y > 0, z > 0)$; $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

3407. $x^y + y^z = 3$; $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

3408. Մեկնաբանել և հիմնավորել հետևյալ պնդումը.

եթե $f(x, y, z) = 0$, ապա $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$:

3409. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը, եթե $F\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$:

3410. Գտնել $\frac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\frac{\partial z}{\partial y}$-ը, եթե $F(xz, yz) = 0$:

3411. Գտնել տրված հավասարումից որոշվող $z = z(x, y)$ ֆունկցիայի երկրորդ դիֆերենցիալին համապատասխանող քառակուսային ձևը.

ա) $F(x + z, y + z) = 0$;   բ) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$:

3412. Դիցուք $z = z(x, y)$-ը $z^3 - xz + y = 0$ հավասարումից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան է, որը բավարարում է $z(3, -2) = 2$ պայմանին: Գտնել $d^2 z(3, -2)$-ին համապատասխանող քառակուսային ձևը:

Գտնել $z(1, -2) = 1$ պայմանին բավարարող $z = z(x, y)$ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները $(1, -2)$ կետում (3413-3414).

3413. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$:   **3414.** $3xyz + x^2 z^2 = 5(x + y)$:

Գտնել տրված հավասարումների համակարգից որոշվող $x(z)$ և $y(z)$ ֆունկցիաների առաջին և երկրորդ կարգի ածանցյալները (3415-3416).

3415. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1: \end{cases}$ **3416.** $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 1, \\ x + xy + y + z = 1: \end{cases}$

3417. Ստուգել, որ

$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \dfrac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

հավասարումների համակարգից որոշվում են $u = u(x, y)$ և $v = v(x, y)$ դիֆե-րենցելի ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ $u(1,2) = 0$ և $v(1,2) = 0$: Գտնել $du(1,2)$-ը և $dv(1,2)$-ը:

3418. Գտնել du-ն և dv-ն, եթե

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ \dfrac{\sin u}{\sin v} = \dfrac{x}{y}: \end{cases}$$

3419. Դիցուք $F = \left(f^1, f^2\right) \in C^1\left(R^2, R^2\right)$ արտապատկերումը բավարարում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններին.

$$\frac{\partial f^1}{\partial x} = \frac{\partial f^2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f^1}{\partial y} = -\frac{\partial f^2}{\partial x}:$$

Ստուգել, որ F արտապատկերման յակոբիանը $\mathbf{x}_0$ կետում զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ $F'(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\theta}$:

Ցույց տալ, որ եթե $F'(\mathbf{x}_0) \neq \boldsymbol{\theta}$, ապա $\mathbf{x}_0$-ի շրջակայքում F-ը հակա-դարձելի է, ընդ որում՝ F^{-1} ֆունկցիան նույնպես բավարարում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններին:

3420. Դիցուք $z = z(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ հավասարումների համակարգից: Գտնել $\dfrac{\partial z}{\partial x}$-ը և $\dfrac{\partial z}{\partial y}$-ը:

3421. Դիցուք մակերևույթը տրված է $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ պա-րամետրական հավասարումներով: Գտնել այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի շրջակայքում մակերևույթը կարելի է ներկայացնել որպես $z = f(x, y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

3422. Տրված է $(x; y) = \left(X(u, v); Y(u, v)\right)$ արտապատկերումը: Գտնել $(u; v) = \left(U(x, y); V(x, y)\right)$ հակադարձ արտապատկերման յակոբիանը:

3423. Դիցուք՝ $u = f(z)$, որտեղ $z = z(x, y)$-ը $z = x + y\varphi(z)$ հավասարումից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան է: Ապացուցել Լագրանժի բանաձևը՝

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}:$$

3424. Տեղադրելով $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$, ձևափոխել

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ \Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

արտահայտությունները:

3425. Դիցուք $y=y(x)$ $(x\in R)$ ֆունկցիան որոշված է $x=ky+\varphi(y)$ հավասարումից, որտեղ $k\neq 0$, իսկ φ-ն ω-պարբերական, դիֆերենցելի ֆունկցիա է, այնպիսին, որ $|\varphi'(x)|<|k|$: Ապացուցել, որ $y=\dfrac{x}{k}+\psi(x)$, որտեղ ψ-ն $|k|\omega$-պարբերական ֆունկցիա է:

$(0;0)$ կետի շրջակայքում ֆունկցիան ներկայացնել Թեյլորի բանաձևով (3426-3433).

3426. $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$:

3427. $f(x,y)=\ln(1+x+y)$:

3428. $f(x,y)=e^x\sin y$:

3429. $f(x,y)=e^x\cos y$:

3430. $f(x,y)=\sin x shy$:

3431. $f(x,y)=\cos x chy$:

3432. $f(x,y)=\sin\left(x^2+y^2\right)$:

3433. $f(x,y)=\ln(1+x)\ln(1+y)$:

3434. Գրել $f(x,y)=e^{x+y}$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը $(1;-1)$ կետի շրջակայքում:

3435. Գրել $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը $(1;1)$ կետի շրջակայքում:

3436. Դիցուք՝ $z=z(x,y)$-ը $z^3-2xz+y=0$ հավասարումից որոշվող անբացահայտ ֆունկցիան է, որը բավարարում է $z(1,1)=1$ պայմանին: Գրել z ֆունկցիայի $(1;1)$ կետի շրջակայքում Թեյլորի երկրորդ կարգի բազմանդամը:

Հետազոտել ֆունկցիայի լոկալ էքստրեմումի կետերը (3437-3439).

3437. $z=x+y+4\sin x\sin y$:

3438. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $(a>0)$:

3439. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$ $(x,y,z\in[0;\pi])$:

Գտնել տրված հավասարումից որոշվող $z=z(x,y)$ անբացահայտ ֆունկցիայի էքստրեմալ արժեքները (3440-3442).

3440. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$:

3441. $5z^2+4zy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$:

3442. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$:

Գտնել ֆունկցիայի պայմանական էքստրեմումի կետերը (3443-3455).

3443. $z=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$, $x^2+y^2=1$: 3444. $z=x^2+y^2$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$:

3445. $z=x^2+12xy+2y^2$, $4x^2+y^2=25$:

3446. $z=\cos^2 x+\cos^2 y$, $x-y=\dfrac{\pi}{4}$:

3447. $u=2x+y-z+1$, $x^2+y^2+2z^2=22$:

3448. $u=x^m y^n z^p$, $x+y+z=a$ $(m>0, n>0, p>0, a>0)$:

3449. $u=x^2+y^2+z^2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $(a>b>c>0)$:

3450. $u=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$:

3451. $u=xy+yz$, $x^2+y^2=2$, $y+z=2$ $(x>0, y>0, z>0)$:

3452. $u=\sin x\sin y\sin z$, $x+y+z=\dfrac{\pi}{2}$ $(x>0, y>0, z>0)$:

3453. $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$, $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_k>0, k=1,\ldots,n)$:

3454. $u=x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p$ $(p>1)$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0)$:

3455. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $x_k>0$, $k=1,\ldots,n$, $x_1+x_2+\cdots+x_n=a$ $(a>0,$ $\alpha_k>1, k=1,\ldots,n)$:

Գտնել ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքները (3456-3459).

3456. $z=x-2y-3$; $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$:

3457. $z=x^2+y^2-12x+16y$; $x^2+y^2\le 25$:

3458. $z=x^2-xy+y^2$; $|x|+|y|\le 1$:

3459. $u=x^2+2y^2+3z^2$; $x^2+y^2+z^2\le 100$:

3460. Ապացուցել, որ եթե $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$, որտեղ $x_k > 0$, $k = 1,\dots,n$, ապա $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$: Որպես հետևանք ստանալ թվաբանական և երկրաչափական միջինների վերաբերյալ անհավասարությունը:

3461. Ապացուցել անհավասարությունը՝

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0):$$

3462. Ապացուցել Հյոլդերի անհավասարությունը՝

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(a_i \geq 0, x_i \geq 0, i = 1,\dots,n; p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right):$$

3463. Տրված a դրական թիվը վերլուծել n գումարելիների այնպես, որ նրանց քառակուսիների գումարը լինի փոքրագույնը:

3464. Տրված a դրական թիվը վերլուծել n դրական արտադրիչների այնպես, որպեսզի նրանց խորանարդների գումարը լինի փոքրագույնը:

3465. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ սֆերայի վրա գտնել կետ, որի հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տրված $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1,\dots,n)$ կետերից լինի փոքրագույնը:

3466. Գտնել տրված $2p$ պարագծով ուղղանկյուն, որն իր կողմերից մեկի շուրջը պտտելիս առաջացնում է մեծագույն ծավալի գլան:

3467. Գտնել $y = x^2$ պարաբոլի և $x - y - 2 = 0$ ուղղի հեռավորությունը:

3468. Գտնել $M_0(x_0, y_0, z_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax + By + Cz + D = 0$ հարթությունից:

3469. Գտնել $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ և $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ ուղիղների հեռավորությունը:

Գ.

$G \subset R^m$ բազմությունը կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե ցանկացած $\mathbf{x}_1 \in G$, $\mathbf{x}_2 \in G$ կետերի համար $\mathbf{x}_1$ և $\mathbf{x}_2$ ծայրակետերով հատվածը՝ $[\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2] = \{(1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2 : 0 \leq \lambda \leq 1\}$-ը, ամբողջապես ընկած է G-ում:

Դիցուք $G \subset R^m$ բազմությունն ուռուցիկ է: $f : G \to R$ ֆունկցիան կոչվում է *ուռուցիկ ֆունկցիա*, եթե ցանկացած $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G$ կետերի և $\lambda \in (0;1)$ թվի համար

$$f((1-\lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{x}_2) \leq (1-\lambda) f(\mathbf{x}_1) + \lambda f(\mathbf{x}_2):$$

Եթե բոլոր $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ կետերի համար գրված անհավասարությունը խիստ է, ապա f -ն անվանում են *խիստ ուռուցիկ*:

$P : R^m \to R$ ֆունկցիան կոչվում է k -րդ կարգի համասեռ բազմանդամ, եթե գոյություն ունի $T : \left(R^m\right)^k \to R$ բազմագծային ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$P(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x},\ldots,\mathbf{x})$:

3470. Դիցուք՝ $f \in C^1(G)$, որտեղ G -ն R^m -ում ուռուցիկ տիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե $f'_{x^i}(\mathbf{x}) = 0$, ապա f -ն x^i -ից կախված չէ:

Հետևյալ օրինակով համոզվել, որ G տիրույթի ուռուցիկությունն այստեղ էական է.

$$G = R^2 \setminus \{(x;0) : x \geq 0\},$$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3, (x;y) \in \left(R_-^c\right)^2, \\ 0, (x;y) \in G \setminus \left(R_-^c\right)^2 : \end{cases}$$

3471. Տրված է $f : G \to R$ ֆունկցիան, որտեղ G -ն R^2 -ում տիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած y -ի համար $f(x,y)$ -ն անընդհատ է ըստ x -ի և ամենուրեք գոյություն ունի $f'_y(x,y)$ սահմանափակ ածանցյալ, ապա f -ը G -ում անընդհատ է:

3472. Դիցուք G -ն R^m -ում ուռուցիկ տիրույթ է և $f \in C^1(G)$: Ապացուցել, որ եթե $f'_{x^i}(\mathbf{x})$ $(i = 1,\ldots,m)$ մասնակի ածանցյալները G -ում սահմանափակ են, ապա f -ը G -ի վրա հավասարաչափ անընդհատ է:

3473. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $F : X \to R^n$ $\left(X \subset R^n, n \geq 2\right)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և ամենուրեք $\det F'(\mathbf{x}) \neq 0$, ապա F -ը փոխմիարժեք է: Բերել համապատասխան օրինակ:

3474. Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ եթե $F : X \to R^n$ $\left(X \subset R^n\right)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, փոխմիարժեք և F^{-1}-ն անընդհատ է, ապա F^{-1}-ը դիֆերենցելի է: Բերել համապատասխան օրինակ:

3475. Դիցուք X -ն R^n -ում բաց բազմություն է, իսկ $F : X \to R^n$ ֆունկցիան փոխմիարժեք է և դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե $\det F'(\mathbf{x}) \neq 0$ $(\mathbf{x} \in X)$, ապա $F : X \to F(X)$ արտապատկերումը դիֆեոմորֆիզմ է:

3476. Դիցուք G -ն և D -ն համապատասխանաբար R^m -ում և R^n -ում ոչ դատարկ, բաց բազմություններ են: Ապացուցել, որ եթե $F : G \to D$ ֆունկցիան դիֆեոմորֆիզմ է, ապա $m = n$:

3477. Դիցուք G-ն R^m-ում ուռուցիկ տիրույթ է: Ապացուցել միջին արժեքի թեորեմի հետևյալ տարբերակը. եթե $F:G\to R^n$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$ կետերի համար

$$\left|F(\mathbf{a})-F(\mathbf{b})\right|\le\left|\mathbf{a}-\mathbf{b}\right|\sup_{\mathbf{x}\in G}\left|F'(\mathbf{x})\right|:$$

Այստեղից հետևեցնել, որ եթե F-ն ունի սահմանափակ ածանցյալ, ապա այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին.

$$\exists k\in R\ \forall\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in G\ \left(\left|F(\mathbf{x}_1)-F(\mathbf{x}_2)\right|\le k\left|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right|\right):$$

3478. Տրված $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_k\in R^m$ կետերը միացնող $l=[\mathbf{x}_0;\mathbf{x}_1]\cup\cdots\cup[\mathbf{x}_{k-1};\mathbf{x}_k]$ բեկյալի երկարությունը սահմանվում է որպես $|l|=\sum_{i=0}^{k-1}\left|\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i\right|$ գումար:

Դիցուք G-ն R^m-ում տիրույթ է, $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$, իսկ $\Lambda_G(\mathbf{a},\mathbf{b})$-ն G-ում ընկած և $\mathbf{a},\mathbf{b}$ կետերը միացնող բոլոր բեկյալների բազմությունն է: Նշանակենք

$$d_G(\mathbf{a},\mathbf{b})=\inf\left\{|l|:l\in\Lambda_G(\mathbf{a},\mathbf{b})\right\}:$$

Ապացուցել միջին արժեքի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. եթե $F:G\to R^n$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ապա ցանկացած $\mathbf{a},\mathbf{b}\in G$ կետերի համար

$$\left|F(\mathbf{a})-F(\mathbf{b})\right|\le d_G(\mathbf{a},\mathbf{b})\sup_{\mathbf{x}\in G}\left|F'(\mathbf{x})\right|:$$

3479. Դիցուք $\overline{B}(\mathbf{v},r)$-ը R^m-ում փակ գունդ է: Ապացուցել Ռոլի թեորեմի հետևյալ ընդհանրացումը. եթե $F\in C\left(\overline{B}(\mathbf{v},r),R\right)$ ֆունկցիան գնդի եզրի վրա ամենուրեք զրո է, իսկ ներսում՝ դիֆերենցելի, ապա գոյություն ունի $\boldsymbol{\xi}\in B(\mathbf{v},r)$ կետ, այնպիսին, որ $F'(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\theta}$: Ճշմարիտ է արդյո±ք խնդրի պնդումը, եթե $F\in C\left(\overline{B}(\mathbf{v},r),R^n\right)$, $n>1$: Բերել համապատասխան օրինակ:

3480. Դիցուք G-ն R^m-ում տիրույթ է, իսկ $F:G\to R^n$-ը՝ դիֆերենցելի ֆունկցիա: Ապացուցել, որ եթե $F':G\to \mathsf{L}\left(R^m,R^n\right)$ արտապատկերումը հաստատուն է, ապա F-ը հաստատուն ֆունկցիայի և գծային արտապատկերման գումար է:

3481. Դիցուք I-ն R^m-ում բաց զուգահեռանիստ է և $f\in C^1(I)$, $f(\mathbf{0})=0$: Ապացուցել Ադամարի լեմման. գոյություն ունեն $g_1,\ldots,g_m\in C(I)$ ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$f\left(x^1,\ldots,x^n\right)=\sum_{i=1}^m x^i g_i\left(x^1,\ldots,x^n\right),$$

ընդ որում՝

$$g_i(\mathbf{0})=\frac{\partial f(\mathbf{0})}{\partial x^i}, \quad i=1,...,m:$$

3482. Տրված է $A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ մատրիցը: Ապացուցել Ադամարի անհավասարությունը.

$$(\det A)^2 \le \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right):$$

3483. Գտնել $S(\mathbf{0},1)\subset R^n$ միավոր սֆերայի վրա $\tau(\mathbf{x})=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j$ $\left(a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,...,n\right)$ սիմետրիկ քառակուսային ձևի էքստրեմալ արժեքները:

3484. (Հյուգենսի խնդիր) Տրված a և b դրական թվերի միջև $x_1,...,x_n$ թվերը դասավորել այնպես, որ

$$\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

արտահայտության արժեքը լինի մեծագույնը:

3485. Դիցուք X-ը R^m-ում ուռուցիկ բազմություն է: Ապացուցել, որ $f\in C^1(X)$ ֆունկցիան ուռուցիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}\in X$ կետերի համար

$$f(\mathbf{x})\ge f(\mathbf{x}_0)+f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0):$$

3486. Տրված է՝ $f\in C^2\left(R^m\right)$ և

$$\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i\partial x^j}h^i h^j, \quad \mathbf{x}\in R^m,\ \mathbf{h}=\left(h^1,...,h^m\right)\in R^m:$$

Ապացուցել, որ $X\subset R^m$ ուռուցիկ բազմության վրա f-ը կլինի խիստ ուռուցիկ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\mathbf{x}\in X$ կետում $\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{h})$ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է:

3487. Դիցուք X-ը R^m-ում բաց, ուռուցիկ բազմություն է, իսկ $f:X\to R$ ֆունկցիան ուռուցիկ է և դիֆերենցելի: Ապացուցել, որ եթե $\mathbf{x}_0\in X$ կետը f-ի համար կրիտիկական կետ է, ապա f-ն այդ կետում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը:

3488. Ապացուցել, որ ցանկացած k-րդ կարգի համասեռ բազմանդամ k-րդ աստիճանի համասեռ ֆունկցիա է. $P(\lambda\mathbf{x})=\lambda^k P(\mathbf{x})$:

3489. Ցանկացած $P:R^m \to R$ k-րդ կարգի համասեռ բազմանդամի համար կառուցել $S:\left(R^m\right)^k \to R$ սիմետրիկ բազմագծային ֆունկցիա (տես խնդիր 3385), այնպիսին, որ $P(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x},\ldots,\mathbf{x})$:

3490. Ապացուցել, որ եթե P-ն k-րդ կարգի համասեռ բազմանդամ է, ապա նրա աճը՝ $\Delta_{\mathbf{h}}P(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - P(\mathbf{x})$-ը, ըստ $\mathbf{x}$-ի $k-1$-րդ կարգի համասեռ բազմանդամ է: Ցույց տալ նաև, որ արգումենտի ցանկացած $\mathbf{h}^1,\ldots,\mathbf{h}^k \in R^m$ աճերի համար

$$\Delta_{\mathbf{h}^1}\left(\Delta_{\mathbf{h}^2}\left(\cdots\left(\Delta_{\mathbf{h}^k}P(\mathbf{x})\right)\cdots\right)\right) = k\,!S\left(\mathbf{h}^1,\ldots,\mathbf{h}^k\right)$$

(տես նախորդ խնդիրը) և այդտեղից ստանալ, որ նախորդ խնդրում P բազմանդամին համապատասխանող S բազմագծային ֆունկցիան միակն է:

Գլուխ 15

Պարամետրից կախված ինտեգրալներ

Դիցուք $f:(a;b)\times Y\to R$ ֆունկցիան y փոփոխականի (պարամետրի) յուրաքանչյուր արժեքի համար $(a;b)$ վերջավոր կամ անվերջ միջակայքում ըստ x -ի ինտեգրելի է: Այդ դեպքում

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx\,,\quad y\in Y\,,$$

ֆունկցիան կոչվում է *պարամետրից կախված ինտեգրալ*:

Պայմանավորվենք y -ի (x -ի) ցանկացած ֆիքսած արժեքի համար միայն x -ից (y -ից) կախված $f(x,y)$ ֆունկցիան նշանակել $f(\bullet,y)$ $\left(f(x,\bullet)\right)$:

Եթե պարամետրի ցանկացած $y\in Y$ արժեքի համար $f(\bullet,y)\in\Re[a;b]$, ապա $I(y)$-ը կոչվում է *պարամետրից կախված Ռիմանի ինտեգրալ:* Իսկ եթե պարամետրի որոշ արժեքների դեպքում $f(\bullet,y)$-ն ինտեգրելի է միայն անիսկական իմաստով, ապա $I(y)$-ը կոչվում է *պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ:*

Դիցուք $X,Y\subset R$ և y_0-ն Y բազմության կուտակման կետ է: Կասենք, որ $f:X\times Y\to R$ ֆունկցիան y-ը y_0-ի ձգտելիս $A\subset X$ բազմության վրա հավասարաչափ ձգտում է $\varphi:A\to R$ ֆունկցիային և կգրենք՝ $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to y_0$, $x\in A$, եթե

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in A\ \left(0<|y-y_0|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon\right):$$

Համանմանորեն սահմանվում է հավասարաչափ զուգամիտությունը՝ y-ը անվերջի ձգտելիս:

Պ ա ր ա մ ե տ ր ի ց կ ա խ վ ա ծ Ռ ի մ ա ն ի ի ն տ ե գ ր ա լ ի ֆ ու ն կ ց ի ո ն ա լ հ ա տ կ ու թ յ ու ն ն ե ր ը : Սահմանային անցում: Դիցուք $f:[a;b]\times Y\to R$ ֆունկցիան y փոփոխականի ցանկացած արժեքի դեպքում $[a;b]$ հատվածում ըստ x -ի Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է: Եթե $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to y_0$, $x\in[a;b]$, ապա φ -ն $[a;b]$-ում ինտեգրելի է, ընդ որում ճշմարիտ է սահմանային անցման հետևյալ կանոնը.

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx:$$

Անընդհատություն: Դիցուք P -ն $[a;b]\times[c;d]$ ուղղանկյունն է: Եթե $f\in C(P)$, ապա $I(y)$-ը $[c;d]$ հատվածի վրա անընդհատ է:

Դիֆերենցում: Եթե $f\in C(P)$ և գոյություն ունի P -ի վրա անընդհատ f'_y մասնակի ածանցյալ, ապա $I(y)$-ը $[c;d]$-ի վրա անընդհատ դիֆերենցելի է, ընդ որում $I'(y)$-ը կարելի է հաշվել *Լայբնիցի կանոնով*՝

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx:$$

Ընդհանուր դեպքում, երբ ինտեգրման սահմանները y -ից կախված դիֆերենցելի ֆունկ-ցիաներ են՝ $\alpha(y)$, $\beta(y)$, ընդ որում՝ $a \le \alpha(y), \beta(y) \le b$, կիրառվում է ածանցման հետևյալ կանոնը.

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx :$$

Ինտեգրում: Եթե $f \in C(P)$, ապա $I(y)$ -ը $[c;d]$ հատվածի վրա ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\int_c^d I(y)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx :$$

Ընդունված է նշանակել՝ $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$:

Պ ա ր ա մ ե տ ր ի ց կ ա խ վ ա ծ ա ն ի ս կ ա կ ա ն ի ն տ ե գ ր ա լ ն ե ր : Ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Դիցուք $f:[a;\omega)\times Y \to R$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ պարամետրի ցանկացած $y \in Y$ արժեքի դեպքում

$$I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$$

ինտեգրալը զուգամետ է:

Սահմանում: Պարամետրից կախված $I(y)$ անիսկական ինտեգրալը կոչվում է Y բազ-մության վրա *հավասարաչափ զուգամետ*, եթե

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b_0 \in [a;\omega)\ \forall b \in [b_0;\omega)\ \forall y \in Y\ \left(\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^\omega f(x,y)dx\right| < \varepsilon\right) :$$

Նկատենք, որ այս սահմանումը, ինչպես նաև ստորև շարադրվող բոլոր փաստերն ու պնդումները, աննշան փոփոխություններով կարող են ձևակերպվել մեկից ավելի եզակիություններ ունեցող անիսկական ինտեգրալների համար:

Հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ: Կոշիի սկզբունքը: Որպեսզի $I(y)$ անիսկական ինտեգրալը Y բազմության վրա լինի հավասարաչափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը.

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b \in [a;\omega)\ \forall b_1, b_2 \in [b;\omega)\ \forall y \in Y\ \left(\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\right) :$$

Վայերշտրասի հայտանիշը: Դիցուք ցանկացած $b \in [a;\omega)$ թվի և պարամետրի ցանկա-ցած $y \in Y$ արժեքի համար $f:[a;\omega)\times Y \to R$ ֆունկցիան $[a;b]$ հատվածում ըստ x -ի ինտե-գրելի է: Եթե $g:[a;\omega)\to R$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $[a;\omega)\times Y$ բազմության վրա ամենուրեք $|f(x,y)| \le g(x)$ և $\int_a^\omega g(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ -ը Y -ի վրա բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է: Այս պայմաններում g -ն անվանում են $f(x,y)$-ի *ինտեգրելի մաժորանտ*:

Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները: Դիցուք $f(x,y)$ և $g(x,y)$ ֆունկցիաները պարամետ-րի յուրաքանչյուր $y \in Y$ արժեքի դեպքում ցանկացած $[a;b] \subset [a;\omega)$ հատվածում ըստ x -ի ինտեգրելի են: Պայմանների հետևյալ (A_1, A_2) և (D_1, D_2) զույգերից յուրաքանչյուրը բավարար է, որպեսզի $\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$ -ը Y -ի վրա լինի հավասարաչափ զուգամետ.

A_1) $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ -ը Y -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է,

A_2) պարամետրի ցանկացած $y \in Y$ արժեքի դեպքում $g(\bullet, y)$ -ը $[a;\omega)$ -ի վրա մոնոտոն է և գոյություն ունի $M \in R$ թիվ, այնպիսին, որ ամենուրեք $|g(x,y)| \le M$;

D_1) գոյություն ունի $M \in R$ հաստատուն, այնպիսին, որ ցանկացած $b \in [a;\omega)$ թվի և պարամետրի բոլոր արժեքների համար

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)dx\right| \le M ,$$

D_2) պարամետրի ցանկացած $y \in Y$ արժեքի դեպքում $g(\bullet, y)$ -ը $[a;\omega)$ -ի վրա մոնոտոն է և, բացի այդ, $g(x,y) \rightrightarrows 0$, $x \to \omega$, $y \in Y$:

Պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի ֆունկցիոնալ հատկությունները: Սահմանային անցում: Դիցուք $f:[a;\omega)\times Y \to R$ $(Y \subset R)$ ֆունկցիան պարամետրի յուրաքանչյուր $y \in Y$ արժեքի համար $[a;\omega)$ միջակայքում ըստ x -ի ինտեգրելի է, իսկ y_0 -ն Y բազմության կուտակման կետ է:

Եթե ցանկացած $b \in [a;\omega)$ թվի համար $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \to y_0$, $x \in [a;b]$ և $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ -ը Y -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $\varphi(x)$-ն $[a;\omega)$ -ի վրա ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega}\lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega}\varphi(x)dx :$$

Անընդհատություն: Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան $[a;\omega)\times[c;d]$ բազմության վրա անընդհատ է ըստ y -ի, իսկ $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ -ը $[c;d]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)dx$ ֆունկցիան $[c;d]$ հատվածի վրա անընդհատ է:

Դիֆերենցում: Դիցուք $f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[a;\omega)\times[c;d]$ բազմության վրա և գոյություն ունի այդ բազմության վրա անընդհատ $f'_y(x,y)$ մասնակի ածանցյալ: Եթե $\int_a^{\omega} f'_y(x,y)dx$ -ը $[c;d]$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ -ը զուգամետ է y պարամետրի առնվազն մեկ արժեքի համար, ապա վերջինս $[c;d]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ըստ պարամետրի՝ դիֆերենցելի, ընդ որում ճշմարիտ է ինտեգրալի ածանցման Լայբնիցի կանոնը.

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx :$$

Ինտեգրում: 1) Եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան $[a;\omega)\times[c;d]$ բազմության վրա անընդհատ է, իսկ $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)dx$ -ը՝ $[c;d]$ -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ, ապա $I(y)$ -ը $[c;d]$ -ի վրա ինտեգրելի է, ընդ որում՝

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)dy \, :$$

2) Եթե $f(x,y)$-ը $[a;\omega_1)\times[c;\omega_2)$ բազմության վրա անընդհատ է, $\int_a^{\omega_1} f(x,y)dx$, $\int_c^{\omega_2} f(x,y)dy$ ինտեգրալներից առաջինը ցանկացած $[a;b]\subset[a;\omega_1)$, իսկ երկրորդը՝ ցանկացած $[c;d]\subset[c;\omega_2)$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է և, բացի այդ, գոյություն ունի

$$\int_a^{\omega_1} dx\int_c^{\omega_2}|f(x,y)|dy\,,\quad \int_c^{\omega_2} dy\int_a^{\omega_1}|f(x,y)|dx$$

ինտեգրալներից առնվազն մեկը, ապա ճշմարիտ է ըստ պարամետրի ինտեգրման հետևյալ բանաձևը.

$$\int_c^{\omega_2} dy\int_a^{\omega_1} f(x,y)dx=\int_a^{\omega_1} dx\int_c^{\omega_2} f(x,y)dy \, :$$

Ա

Ստուգել, որ սահմանային անցումն ինտեգրալի նշանի տակ թույլատրելի է և հաշվել սահմանը (3491-3494).

3491. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1\sqrt{1+\alpha^2x^2}\,dx$:

3492. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^1\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$:

3493. $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int_0^1 xe^{\alpha x}dx$:

3494. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$:

Ապացուցել պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը R-ում (3495-3496).

3495. $I(y)=\int_0^1\sin^2 x^2y\,dx$:

3496. $I(y)=\int_{-1}^{10}\frac{x^2}{1+x^2+y^2x^4}dx$:

Համոզվել, որ ինտեգրալն ըստ պարամետրի անընդհատ է և հաշվել սահմանը (3497-3498).

3497. $\lim\limits_{\alpha\to 1}\int_0^\pi x\cos\alpha x\,dx$:

3498. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_\alpha^{\alpha+1}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$:

3499. Ստուգել, որ $f(x)=\int_0^1\operatorname{sgn}(x-y)dy$ ֆունկցիան անընդհատ է R-ում:

3500. Դիցուք $f\in C[0;1]$ ֆունկցիան դրական է: Ապացուցել, որ

$$I(y)=\int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

ֆունկցիան $y=0$ կետում խզվող է:

3501. Ճշմարի՞տ է արդյոք

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 \lim_{y\to 0} f(x,y)dx$$

հավասարությունը, երբ

ա) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}}$: բ) $f(x,y)=\frac{2xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$:

3502. Հավասա՞ր են արդյոք

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx \quad \text{և} \quad \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$$

ինտեգրալները, երբ

ա) $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; բ) $f(x,y)=\frac{x-y}{(x+y)^3}$:

Գտնել պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցյալը (3503-3508).

3503. $I(y)=\int_0^1 \sin xydx$: **3504.** $I(y)=\int_1^2 \frac{e^{yx^2}}{x}dx$:

3505. $I(y)=\int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x}dx$: **3506.** $I(y)=\int_y^{2y} \frac{\sin yx}{x}dx$:

3507. $I(y)=\int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x}dx$: **3508.** $I(y)=\int_{e^{-y}}^{e^{y}} \ln\left(1+y^2x^2\right)\frac{dx}{x}$:

3509. Դիցուք՝ $I(y)=\int_0^1 \ln\left(x^2+y^2\right)dx$: Կարելի՞ է արդյոք $I'(0)$-ն հաշվել Լայբնիցի կանոնով:

***

3510. Տրված է $f:[a;\omega)\times Y\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^\omega |f(x,y)|dx$ ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա $\int_a^\omega f(x,y)dx$-ը Y-ի վրա նույնպես հավասարաչափ զուգամետ է:

Օգտվելով Կոշիի սկզբունքից՝ ապացուցել նշված բազմության վրա պարամետրից կախված ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը (3511-3513).

3511. ա) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in [1+\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon > 0$; բ) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (-\infty;1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$:

3512. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$, $\alpha \in [1;+\infty)$:

3513. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$, $\alpha \in [1+\varepsilon;+\infty)$, $\varepsilon > 0$:

3514. Դիցուք $f:[a;\omega)\times Y \to R$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ ինտեգրալը Y բազմության վրա զուգամետ է, բայց ոչ հավասարաչափ: Ապացուցել, որ գոյություն ունեն $\varepsilon_0 > 0$ թիվ և c_k, d_k, y_k հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ $c_k \to \omega$, $d_k \to \omega$, $y_k \in Y$ և $\left|\int_{c_k}^{d_k} f(x,y_k)dx\right| > \varepsilon_0$:

Ապացուցել, որ պարամետրից կախված ինտեգրալը նշված բազմության վրա ոչ հավասարաչափ է զուգամետ (3515-3519).

3515. ա) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (-\infty;1)$: բ) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in (1;+\infty)$:

3516. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$, $\alpha \in (0;+\infty)$:

3517. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, $\alpha \in [0;1]$:

3518. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$, $\alpha \in R_+$:

3519. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2} dx$, $\alpha \in [1;+\infty)$:

Օգտվելով Վայերշտրասի հայտանիշից՝ ապացուցել պարամետրից կախված ինտեգրալի նշված բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտությունը (3520-3525).

3520. $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-2x} dx$, $\alpha \in [0;1]$:

3521. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^2 x \sin x}{(x-1)^\alpha} dx$, $\alpha \in [2;+\infty)$:

3522. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$, $\alpha \in R$:

3523. $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$, $\alpha \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$:

3524. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha}\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $\alpha \in [-1{,}5;0]$: **3525.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(x^2+1)}$, $\alpha \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$:

Ապացուցել պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը (3526-3528).

3526. $f(y)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)arctgyx}{x^2}dx$, $y \in [-1;1]$:

3527. $f(y)=\int\limits_0^1 \frac{x^y \cos xy}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $y \in R_+$:

3528. $f(y)=\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^y}$, $y \in (2;+\infty)$:

3529. Ցույց տալ, որ $f(y)=\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+y)^2}dx$ $(y \in R)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է:

***

Էյլերյան ինտեգրալներ: Պարամետրից կախված հետևյալ ինտեգրալները կոչվում են էյլերյան ինտեգրալներ (ֆունկցիաներ).

$B(x,y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$, $x,y>0$ (բետա-ֆունկցիա);

$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$, $x>0$ (գամմա-ֆունկցիա):

Ճշմարիտ են հետևյալ բանաձևերը.

1. $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$;
2. $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$, $0<x<1$ (լրացման բանաձև);
3. $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$:

3530. Ստուգել, որ ցանկացած m,n բնական և p,q դրական թվերի համար ճշմարիտ է հավասարությունը.

ա) $B(p,q)=B(q,p)$; բ) $\Gamma(n+1)=n!$; գ) $B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$;

դ) $\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p)$;

ե) $B(1/2;1/2)=\pi$; զ) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$;

է) $B(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1) \quad (q>1)$:

3531. Ապացուցել $\Gamma(x)=\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad (x\to 0)$ ասիմպտոտիկ բանաձևը:

3532. Ապացուցել, որ Γ ֆունկցիան $(0;+\infty)$ -ում անվերջ դիֆերենցելի է և հաշվել $\Gamma^{(n)}(x)$-ը $(n\in N)$: Համոզվել, որ Γ-ն $(0;+\infty)$ -ում ուռուցիկ է:

3533. Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ B ֆունկցիայի համար ստանալ հետևյալ ներկայացումները.

ա) $B(p,q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$; բ) $B(p,q)=\displaystyle\int_0^{1}\frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$:

գ) $B(p,q)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}}dx$:

Արտահայտել տրված ինտեգրալները էյլերյան ֆունկցիաներով (3534-3537).

3534. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x dx \quad (\min\{p,q\}>-1)$:

3535. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} tg^{\alpha} x dx \quad (|\alpha|<1)$:

3536. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx \quad (n>0)$:

3537. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^m e^{-x^n}dx \quad \left(\frac{m+1}{n}>0\right)$:

Հաշվել ինտեգրալը (3538-3544).

3538. $\displaystyle\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$:

3539. $\displaystyle\int_0^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$:

3540. $\displaystyle\int_1^{2}\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}dx$:

3541. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$:

3542. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$:

3543. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$:

3544. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\,dx \quad (n \in N)$:

Բ

3545. Հաշվել սահմանը. $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}d\varphi$:

3546. Դիցուք՝ $f \in C[a;b]$ և $a < c < d < b$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{y\to0}\frac{1}{y}\int\limits_c^d \big(f(t+y)-f(t)\big)dt = f(d)-f(c):$$

3547. Տրված է $f:[a;b]\times Y \to R$ ֆունկցիան, $g \in \Re_1(a;b)$ և $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \to y_0$, $x \in [a;b]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած y-ի համար $f(\bullet, y) \in \Re[a;b]$, ապա

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f(x,y)g(x)dx = \int\limits_a^b \varphi(x)g(x)dx :$$

3548. Տրված է՝ $I=[a;b]\times[c;d]$, $f \in C(I)$, $g \in \Re_1(a;b)$, $F(y)= =\int_a^b f(x,y)g(x)dx$: Ապացուցել, որ

ա) $F \in C[c;d]$;

բ) եթե $f'_y \in C(I)$, ապա $F \in C^1[c;d]$ և $F'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)g(x)dx$;

գ) $\int_c^d F(y)dy = \int_a^b g(x)dx\int_c^d f(x,y)dy$:

3549. Օգտվելով $\dfrac{arctgx}{x}=\int_0^1\dfrac{dy}{1+x^2y^2}$ բանաձևից՝ հաշվել հետևյալ ինտե-գրալը. $\int_0^1\dfrac{arctgx}{x\sqrt{1-x^2}}dx$:

3550. Ընդհինտեգրալ ֆունկցիան ներկայացնելով որպես պարամետրից կախ-ված ինտեգրալ և կատարելով ինտեգրալի նշանի տակ ինտեգրում՝ հաշվել ինտեգրալը $(0 < a < b)$.

ա) $\int\limits_0^1\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$; բ) $\int\limits_0^1\left(\sin\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$; գ) $\int\limits_0^1\left(\cos\ln\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}dx$:

3551. Տրված է՝ $f \in C(R)$ և $F(x)=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x+t)dt \quad (a>0)$: Ապացուցել, որ $F \in C^1(R)$: Գտնել $F'(x)$-ը:

3552. Դիցուք $f: R \to R$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է և $F(y)= =\int_0^y (x+y)f(x)dx$: Գտնել $F''(y)$-ը:

3553. Տրված է՝ $f \in C[a;b]$ և $F(y)=\int_a^b f(x)|x-y|dx$: Գտնել $F''(y)$-ը:

3554. Դիցուք՝ $f \in C(R)$ և $F(t)=\frac{1}{h^2}\int_0^h dy\int_0^h f(x+y+t)dx \quad (h>0)$: Գտնել $F''(t)$-ն:

3555. Դիցուք՝ $f \in C[a;b]$ և $F(x)=\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad (n \in N)$: Գտնել $F^{(n)}(x)$-ը:

3556. Տրված է՝ $\varphi \in C^1[0;a]$ և $I(t)=\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{\sqrt{t-x}}$: Ապացուցել, որ

$$I'(t)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{t}}+\int_0^t \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{t-x}}dx, \quad t \in (0;a):$$

Ցուցում: Տեղադրել $x=ty$:

3557. Դիցուք՝ $f \in C[0;a]$, $\xi \in [0;a]$ և $(x-\xi)^2+y^2+z^2 \neq 0$: Ապացուցել, որ

$$u(x,y,z)=\int_0^a \frac{f(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

ֆունկցիան հարմոնիկ է.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0:$$

3558. Տրված են

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \quad F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k \in (0;1),$$

համապատասխանաբար առաջին և երկրորդ սեռի էլիպտիկ ինտեգրալները: Ապացուցել, որ

ա) $E'(k)=\frac{E(k)-F(k)}{k}$; բ) $F'(k)=\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}$;

գ) $E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0$; դ) $\int_0^k tF(t)dt=E(k)-(1-k^2)F(k)$;

ե) $\int_0^k tE(t)dt=\frac{1}{3}\left((1+k^2)E(k)-(1-k^2)F(k)\right)$:

3559. Ապացուցել, որ $n\in Z_+$ ինդեքսով Բեսելի ֆունկցիան՝

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi \text{ -ն,}$$

բավարարում է $x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0$ հավասարմանը:

3560. Ստուգել, որ 0 և 1 ինդեքսներով Բեսելի ֆունկցիաները (տես նախորդ խնդիրը) բավարարում են $\int_0^x xJ_0(x)dx=xJ_1(x)$ հավասարմանը:

3561. Ապացուցել, որ

ա) $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)dy \quad (n\in N)$;

բ) $\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right|\le\frac{1}{n+1}$:

Օգտվելով ըստ պարամետրի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնից՝ հաշվել ինտեգրալը (3562-3565).

3562. $\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2 x)dx \quad (y>1)$: **3563.** $\int_0^{\pi}\ln(1-2y\cos x+y^2)dx \quad (|y|<1)$:

3564. $\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos y}\ln\frac{1+x\cos y}{1-x\cos y}dy \quad (|x|<1)$: **3565.** $\int_0^{\pi/2}\frac{arctg(xtgy)}{tgy}dy$:

***

3566. Ապացուցել, որ $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ ինտեգրալը

ա) ցանկացած $[\varepsilon;b]$ $(\varepsilon>0)$ հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է;

բ) $[0;b]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ չէ:

3567. Ստուգել, որ $\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx$ ինտեգրալը $(0;1)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է, սակայն չունի ինտեգրելի մաժորանտ:

Օգտվելով Աբելի կամ Դիրիխլեի հայտանիշից՝ ապացուցել ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը (3568-3571).

3568. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, $\alpha \in [\varepsilon;+\infty)$ $(\varepsilon > 0)$:

3569. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$, $\alpha \in R_+$:

3570. $\int\limits_0^{+\infty} \cos(\alpha x^2) dx$, $\alpha \in [1;+\infty)$:

3571. $\int\limits_0^{+\infty} \sin 2x \sin \frac{\alpha}{x} dx$, $\alpha \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$:

3572. Դիցուք $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx \quad \text{և} \quad \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f(x)dx$$

ինտեգրալները R_+ -ում հավասարաչափ զուգամետ են:

3573. Դիցուք ցանկացած b դրական թվի համար $f \in \Re[0;b]$ և գոյություն ունի α_0 թիվ, այնպիսին, որ

$$F(b) = \int\limits_0^{b} e^{-\alpha_0 x} f(x)dx$$

ֆունկցիան $[0;+\infty)$-ում սահմանափակ է: Ապացուցել, որ $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx$ ինտեգրալը ցանկացած $\delta > 0$ թվի համար $(\alpha_0 + \delta;+\infty)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է:

3574. Դիցուք ցանկացած b դրական թվի համար $f \in \Re[0;b]$ և $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է: Ապացուցել, որ $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x)dx$ ինտեգրալը $[\alpha_0;+\infty)$-ում հավասարաչափ զուգամետ է:

3575. Տրված է՝ $f \in C(R_+)$ և $\int_0^{\infty} t^{\lambda} f(t)dt$ ինտեգրալը պարամետրի $\lambda = \alpha$ և $\lambda = \beta$ $(\alpha < \beta)$ արժեքների համար զուգամետ է: Ապացուցել, որ այն $[\alpha;\beta]$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Հետազոտել նշված բազմության վրա պարամետրից կախված ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը (3576-3581).

3576. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx$, $\alpha \in R_+$:

3577. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1 + x^p} dx$, $p \in R_+$:

3578. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$ ա) $\alpha\in[A;B]$; բ) $\alpha\in R$ ։

3579. $\int\limits_0^1 x^{p-1}\ln^2\frac{1}{x}dx$ ա) $p\in(1;+\infty)$; բ) $p\in(0;+\infty)$ ։

3580. $\int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^\alpha}dx$, $\alpha\in(0;2)$ ։ **3581.** $\int\limits_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx$, $\alpha\in[0;1]$ ։

3582. Բերել $f:[a;\omega)\times Y\to R$ ֆունկցիայի օրինակ, այնպիսին որ $\int_a^\omega f(x,y)dx$ -ը Y -ի վրա հավասարաչափ է զուգամիտում, իսկ $\int_a^\omega |f(x,y)|dx$ -ը՝ ոչ հավասարաչափ։

3583. Դիցուք $f:R_+\to R$ ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ։ Ապացուցել, որ

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\alpha|f(x)}{x^2+\alpha^2}dx=f(0)\text{։}$$

3584. Դիցուք՝ $F\in\Re_1[a;\omega)$ և $f:[a;\omega)\times Y\to R$ ֆունկցիան ցանկացած y -ի համար բավարարում է $|f(x,y)|\le F(x)$ անհավասարությանը։ Ապացուցել, որ եթե ցանկացած $[a;b]\subset[a;\omega)$ հատվածի համար $f(\bullet,y)\in\Re[a;b]$ և $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, երբ $y\to y_0$, $x\in[a;b]$, ապա

$$\lim_{y\to y_0}\int\limits_a^\omega f(x,y)dx=\int\limits_a^\omega \varphi(x)dx\text{։}$$

3585. Օգտվելով $e^{-x^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ հավասարությունից՝ հաշվել Էյլեր-Պուասոնի ինտեգրալը. $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ ։

3586. Հաշվել $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha+1}$ սահմանը։

3587. Դիցուք՝ $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ ։ Ապացուցել, որ F -ն անընդհատ է։

3588. Ցույց տալ, որ $F(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin\frac{\alpha}{x}}{x^\alpha}dx$ ֆունկցիան $(0;1)$ միջակայքում անընդհատ է։

3589. Գտնել $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x}dx$ ֆունկցիայի խզման կետերը:

Հետազոտել պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը (3590-3591).

3590. $F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx$, $\alpha\in(0;2)$:

3591. $F(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}dx$, $\alpha\in(0;1)$:

3592. Տրված է $f:X\times Y\to R$ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to y_0$, $x\in X$ այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $y_n\in Y\setminus\{y_0\}$, $y_n\to y_0$, հաջորդականության համար $g_n(x)=f(x,y_n)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է $\varphi(x)$-ին:

3593. Դիցուք $f:[a;b]\times[c,\omega)\to R$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y)\in C[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած x-ի համար $f(x,\bullet)$-ը մոնոտոն ձգտում է $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիային, երբ $y\to\omega$, ապա $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to\omega$, $x\in[a;b]$ (Դինիի թեորեմ):

3594. Տրված է $f:[a;\omega_1]\times[c;\omega_2)\to R_+$ ֆունկցիան: Դիցուք ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y)\in C[a;\omega_1)$ և յուրաքանչյուր ֆիքսած $x\in[a;\omega_1)$-ի համար $f(x,\bullet)$-ն աճելով ձգտում է $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիային, երբ $y\to\omega_2$: Ապացուցել, որ եթե $\int_a^{\omega_1}\varphi(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև $\int_a^{\omega_1}f(x,y)dx$ ինտեգրալը և

$$\lim_{y\to\omega_2}\int\limits_a^{\omega_1}f(x,y)dx=\int\limits_a^{\omega_1}\varphi(x)dx:$$

3595. Դիցուք՝ $f\in C([a;\omega)\times[c;d],R_+)$: Ապացուցել, որ եթե

$$I(y)=\int\limits_a^{\omega}f(x,y)dx$$

ինտեգրալն անընդհատ է, ապա

ա) այն հավասարաչափ է զուգամետ;

բ) $\int\limits_c^d I(y)dy = \int\limits_a^\omega dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$ ։

3596. Դիցուք $f \in C([a;\omega_1)\times[b;\omega_2), R_+)$ ֆունկցիայի համար

$$I(y) = \int\limits_a^{\omega_1} f(x,y)dx \quad \text{և} \quad J(x) = \int\limits_b^{\omega_2} f(x,y)dy$$

ինտեգրալները անընդհատ են համապատասխանաբար $[b;\omega_2)$-ում և $[a;\omega_1)$-ում։ Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի $\int_a^{\omega_1} dx \int_b^{\omega_2} f(x,y)dy$ ինտեգրալը, ապա

$$\int\limits_b^{\omega_2} dy \int\limits_a^{\omega_1} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega_1} dx \int\limits_b^{\omega_2} f(x,y)dy \text{ ։}$$

3597. Օգտվելով $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2+a} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $(a>0)$ հավասարությունից և կիրառելով ըստ պարամետրի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնը՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} \quad (n \in N)\text{։}$$

3598. Օգտվելով $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}dy$ հավասարությունից՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (a,b>0)\text{։}$$

3599. Դիցուք՝ $f \in C(R_+)$ և ցանկացած $A>0$ թվի համար $\int_A^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}dx$ ինտեգրալը զուգամետ է։ Ապացուցել Ֆրուլանիի բանաձևը.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a} \quad (a,b>0)\text{։}$$

3600. Հաշվել ինտեգրալը.

ա) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx \quad (a,b>0)$;

բ) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}dx \quad (a,b>0)$;

գ) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{arctgax-arctgbx}{x}dx \quad (a,b>0)$:

Կիրառելով ըստ պարամետրի դիֆերենցման Լայբնիցի կանոնը՝ հաշվել ինտեգրալը $(\alpha,\beta>0)$ (3601-3605).

3601. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$:

3602. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$:

3603. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\cos\lambda x dx$:

3604. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\alpha^2x^2\right)}{x^2\left(x^2+\beta^2\right)}dx$:

3605. ա) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{arctg\alpha x}{x\left(1+x^2\right)}dx$;

բ) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{x}{tgx}dx$:

3606. Ապացուցել, որ Դիրիխլեի ինտեգրալը՝

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx \text{ -ը,}$$

$R\setminus\{0\}$-ում դիֆերենցելի է, սակայն $I'(\alpha)$-ն չի կարելի հաշվել Լայբնիցի կանոնով:

3607. Կատարելով ըստ պարամետրի դիֆերենցում՝ հաշվել ինտեգրալը.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x}dx \quad (\beta>0):$$

3608. Ստուգել, որ նախորդ խնդրում ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցումը թույլատրելի է և Դիրիխլեի ինտեգրալի համար ստանալ հետևյալ բանաձևը.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha :$$

Հաշվել ինտեգրալը (3609-3614).

3609. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$:

3610. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}dx$:

3611. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}dx$:

3612. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}dx$:

3613. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}dx$:

3614. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3dx$:

3615. Օգտվելով

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy$$

հավասարությունից և հիմնավորելով ինտեգրալի նշանի տակ ըստ պարամետրի ինտեգրման հնարավորությունը՝ հաշվել Էյլեր-Պուասոնի ինտեգրալը (տես խնդիր 3584):

Հաշվել ինտեգրալը (3616-3621).

3616. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}dx \quad (a>0)$:

3617. $\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx$:

3618. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx \quad (\alpha,\beta>0)$:

3619. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx dx \quad (a>0)$:

3620. $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx dx \quad (a>0)$:

3621. $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}\cos 2bx dx \quad (n\in N)$:

3622. Հաշվել Լապլասի ինտեգրալը.

$$L(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx:$$

Ցուցում: Օգտվել $L''(\alpha)=\left(L'(\alpha)+\frac{\pi}{2}\right)'$ նույնությունից և 3608 խնդրից:

Հաշվել ինտեգրալը (3623-3626).

3623. $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$:

3624. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}dx$:

3625. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}dx$:

3626. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos px}{ax^2+2bx+c}dx \quad (a>0, ac-b^2>0)$:

3627. Օգտվելով $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-xy^2}dy$ հավասարությունից՝ հաշվել Ֆրենելի ինտեգրալները.

ա) $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$:

բ) $\int_0^{+\infty}\cos x^2dx$:

Հաշվել ինտեգրալը (3628-3629).

3628. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(ax^2 + 2bx + c\right)dx \quad \left(a \neq 0\right)$: **3629.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cos 2axdx$:

3630. Տրված $f : R_+ \to R$ ֆունկցիայի համար

$$F\left(p\right) = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f\left(t\right)dt \quad \left(p > 0\right)$$

ֆունկցիան կոչվում է Լապլասի ձևափոխություն:

Գտնել f -ի Լապլասի ձևափոխությունը, երբ

ա) $f\left(t\right) = t^n \quad \left(n \in N\right)$; բ) $f\left(t\right) = \sqrt{t}$;

գ) $f\left(t\right) = \cos t$; դ) $f\left(t\right) = \dfrac{1 - e^{-t}}{t}$:

3631. Դիցուք՝ $H_n\left(x\right) = \left(-1\right)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}$, $n \in N$ (Հերմիտի բազմանդամներն են): Ապացուցել, որ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m\left(x\right)H_n\left(x\right)e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, \text{ երբ } m \neq n; \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, \text{ երբ } m = n: \end{cases}$$

3632. Դիցուք՝ $f \in \Re_1\left(R\right)$ և անընդհատ է: Ապացուցել, որ

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(\xi\right) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi , \; x \in R , \; t > 0$$

ֆունկցիան բավարարում է $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ջերմահաղորդականության հավասարմանը և $u\left(x,+0\right) = f\left(x\right)$ սկզբնական պայմանին:

***

3633. Ապացուցել, որ $\Gamma\left(x\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\left(-1\right)^n}{n!\left(n + x\right)} + \int\limits_{1}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \left(x > 0\right)$:

Արտահայտել էյլերյան ինտեգրալներով (3634-3643).

3634. $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{x^{p-1}}{1 + x^q} dx \quad \left(0 < p < q\right)$:

3635. $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n}\,dx \quad (0<|k|<1, n>0)$:

3636. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\,dx \quad (a,b,n>0)$:

3637. $\int\limits_a^{b} \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}\,dx \quad (0<a<b, c>0)$:

3638. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{(1-x^p)^{1/q}} \quad (p>0)$:

3639. $\int\limits_0^{1} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^p dx$:

3640. $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax}\ln x dx \quad (a>0)$:

3641. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\,dx \quad (0<p<1)$:

3642. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\ln^2 x}{1+x}\,dx \quad (0<p<1)$:

3643. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{1+x^3}\,dx$:

Ապացուցել հավասարությունը (3644-3646).

3644. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\sqrt{2\pi}}$:

3645. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int\limits_0^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$:

3646. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4}dx \int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-x^4}dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$:

Օգտվելով $\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-xt}dt \quad (x>0)$ հավասարությունից՝ հաշվել ինտեգրալը (3647-3648).

3647. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^p}\,dx \quad (0<p<1)$:

3648. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^p}\,dx \quad (0<p<2)$:

Հաշվել ինտեգրալը (3649-3653).

3649. $\int\limits_0^{1} \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx \quad (0<p<1)$:

Ցուցում: Ինտեգրալը ներկայացնել որպես $\lim\limits_{\lambda\to 0}(B(p,\lambda)-B(1-p,\lambda))$ սահման:

3650. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)dx$:

3651. $\int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(x)dx \quad (a>0)$:

3652. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\sin \pi x dx$:

3653. $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2\pi n x dx \quad (n\in N)$:

3654. Դիցուք՝ $\lambda>0$, $x>0$ և $|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$: Ապացուցել Էյլերի բանաձևերը.

ա) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)dt=\dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x$;

բ) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)dt=\dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$:

Գ

3655. Հաշվել սահմանը. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 nx}dx$:

3656. Գտնել բոլոր այն $f\in C^{\infty}(R)$ ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$f(x)+\int\limits_0^x (x-y)f(y)dy=1$$

ինտեգրալ հավասարմանը:

3657. Դիցուք $f_n\in\Re[a;b]$ $(n\in N)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է: Ապացուցել, որ եթե $[a;b]$ հատվածի բոլոր կետերում $f_n(x)\to\varphi(x)$ և $\varphi\in\Re[a;b]$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b\varphi(x)dx :$$

3658. Դիցուք՝ $f_n, F\in\Re_1(a;b)$ և $|f_n|\le|F|$ $(n\in N)$: Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$-ի վրա կետորեն $f_n(x)\to\varphi(x)$ և $\varphi\in\Re_1(a;b)$, ապա

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b\varphi(x)dx :$$

3659. Տրված է $f:(a;b)\times Y\to R$ ֆունկցիան և ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y)\in\Re_1(a;b)$: Դիցուք՝ $F\in\Re_1(a;b)$ և $|f(x,y)|\le|F(x)|$, $(x,y)\in(a;b)\times Y$: Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$-ի բոլոր կետերում $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$ և $\varphi\in\Re_1(a;b)$, ապա

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\varphi(x)dx:$$

3660. Դիցուք՝ $F\in\Re_1(a;b)$ և $f:(a;b)\times Y\to R$ ֆունկցիայի համար $|f(x,y)|\le|F(x)|$, $(x;y)\in(a;b)\times Y$: Ապացուցել, որ եթե $(a;b)$-ի վրա ամենուրեք գոյություն ունի $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ վերջավոր սահմանը և ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y)\in\Re_1(a;b)$, ապա գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx$ վերջավոր սահմանը:

3661. Դիցուք $f:(a;b)\times(c;d)\to R$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y), f'_y(\bullet,y)\in\Re_1(a;b)$: Ապացուցել, որ եթե $F\in\Re_1(a;b)$ և $|f'_y(x,y)|\le F(x)$, $(x;y)\in(a;b)\times(c;d)$, ապա $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ընդ որում՝

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x,y)dx:$$

3662. Տրված է $f:[a;b]\times[c;d]\to R$ ֆունկցիան: Դիցուք ցանկացած x-ի համար $f(x,\bullet)\in\Re[c;d]$ և ցանկացած y-ի համար $f(\bullet,y)\in\Re[a;b]$: Ապացուցել, որ եթե f-ը սահմանափակ է, ապա

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy:$$

3663. Դիցուք՝ $f\in\Re_1(R)$: Ապացուցել, որ ցանկացած $A>0$ թվի համար

$$\int_0^A dx\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos xu\,du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin Au}{u}du:$$

3664. Դիցուք՝ $f\in\Re_1(a;+\infty)$: Ապացուցել, որ

ա) $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(t)\sin pt\,dt=0$; բ) $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(t)\cos pt\,dt=0$:

3665. Դիցուք՝ $f \in \Re_1(R)$ և $x_0, S \in R$: Ապացուցել, որ եթե որևէ $h > 0$ թվի համար $\int_0^h \frac{|f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S|}{t}dt$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos((u-x_0)x)du = S$$

(Դինիի հայտանիշ):

3666. Դիցուք $f \in \Re_1(R)$ ֆունկցիան $x_0 \in R$ կետում ունի վերջավոր ածանցյալ: Ապացուցել, որ f -ն x_0 կետում ներկայացվում է Ֆուրիեի ինտեգրալով՝

$$f(x_0) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda)\cos\lambda x_0 + b(\lambda)\sin\lambda x_0)d\lambda,$$

որտեղ $a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos\lambda u du$, $b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin\lambda u du$:

3667. Ապացուցել Լեժանդրի բանաձևը.

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a),\ a > 0:$$

3668. Դիցուք՝ $\Phi \in C^1(0;+\infty)$, ցանկացած $a \in (0;+\infty)$ թվի համար $\Phi(a) \neq 0$, $\Phi(a+1) = a\Phi(a)$ և $\Phi(a)\Phi\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Phi(2a)$: Ապացուցել, որ $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$:

3669. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական a -ի համար

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{a+k}:$$

3670. Ցույց տալ, որ $\ln\Gamma(x)$ ֆունկցիան $(0;+\infty)$-ում ուռուցիկ է:

3671. Դիցուք $\Phi:(0;+\infty) \to R$ ֆունկցիայի համար $\Phi(a+1) = a\Phi(a)$, $\Phi(1) = 1$ և $\ln\Phi$ -ն ուռուցիկ է: Ապացուցել, որ $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$:

3672. Ապացուցել, որ ցանկացած դրական x -ի համար $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} > \ln x$:

3673. Ապացուցել, որ

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)\quad(\alpha > 1),\quad \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{e^x+1}dx = \Gamma(\alpha)\zeta^*(\alpha)\quad(\alpha > 0),$$

որտեղ $\zeta(\alpha)$-ն Ռիմանի ձետա-ֆունկցիան է՝ $\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\zeta^{*}(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ ։

Այստեղից ստանալ, որ $\lim\limits_{\alpha\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}=\frac{1}{2}$ ։

3674. Ապացուցել, որ ցանկացած a -ի համար ճշմարիտ է

$$\Gamma(x+a)=x^{a}\Gamma(x)(1+o(1)),\ x\to+\infty$$

ասիմպտոտիկ բանաձևը:

3675. Օգտվելով նախորդ խնդրից և $n!$-ի համար Ստիրլինգի հայտնի բանաձևից (տես խնդիր 2663)՝ ապացուցել Ստիրլինգի բանաձևը գամմա ֆունկցիայի համար.

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}(1+o(1)),\ x\to+\infty :$$

Գլուխ 16

Շատ փոփոխականի ֆունկցիաների ինտեգրումը

Զուգահեռանիստի ծավալը: R^n տարածության մեջ տրված $\mathbf{a}=\left(a^1,\ldots,a^n\right)$ և $\mathbf{b}=\left(b^1,\ldots,b^n\right)$ $\left(a^i<b^i, i=1,\ldots,n\right)$ վեկտորների համար

$$I=I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}=\left\{\left(x^1,\ldots,x^n\right): a^i\le x^i\le b^i, i=1,\ldots,n\right\}=\left[a^1;b^1\right]\times\cdots\times\left[a^n;b^n\right]$$

n-չափանի փակ զուգահեռանիստի, ինչպես նաև $I_{(\mathbf{a};\mathbf{b})}=\operatorname{int} I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$ բաց զուգահեռանիստի, *ծավալը* սահմանվում է

$$v(I)=v\left(I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}\right)=v\left(I_{(\mathbf{a};\mathbf{b})}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b^i-a^i\right)$$

բանաձևով: Երբեմն զուգահեռանիստի ծավալի փոխարեն օգտագործում են *չափ* տերմինը, ընդ որում, երբ $n=1$ կամ $n=2$ $v(I)$-ն անվանում են համապատասխանաբար $I=\left[a^1;b^1\right]$ միջակայքի երկարություն կամ $I=\left[a^1;b^1\right]\times\left[a^2;b^2\right]$ ուղղանկյան մակերես:

Եթե $I, I_1,\ldots,I_s$ զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ $I=\bigcup_{k=1}^{s} I_k$, ապա $v(I)\le\sum_{k=1}^{s} v\left(I_k\right)$: Իսկ եթե նաև $I_1,\ldots,I_s$ զուգահեռանիստերը զույգ առ զույգ չունեն ընդհանուր ներքին կետեր, ապա

$$v(I)=\sum_{k=1}^{s} v\left(I_k\right) \quad \text{(ծավալի ադիտիվություն):}$$

Յանկացած $t\ge 0$ թվի համար

$$v\left(I_{[t\mathbf{a};t\mathbf{b}]}\right)=t^n v\left(I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}\right) \quad \text{(ծավալի համասեռություն):}$$

Զուգահեռանիստի տրոհումը: Տրված է

$$I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}=\left[a^1;b^1\right]\times\cdots\times\left[a^n;b^n\right]$$

զուգահեռանիստը: Դիցուք $P_i=\left(x_0^i,\ldots,x_{m_i}^i\right)$-ն $(i=1,\ldots,n)$ $\left[a^i;b^i\right]$ հատվածի տրոհում է (տես գլուխ 8): $P_1,\ldots,P_n$ տրոհումներով ծնվում է $I_1,I_2,\ldots,I_s$ $\left(s=m_1\cdot\cdots\cdot m_n\right)$ զույգ առ զույգ ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող «մանր» զուգահեռանիստերի ընտանիք, որոնցից յուրաքանչյուրը ներկայացնում է տրոհման միջակայքերի

$$\left[x_{k_1}^1;x_{k_1+1}^1\right]\times\cdots\times\left[x_{k_n}^n;x_{k_n+1}^n\right],\quad 0\le k_i\le m_i-1\quad (i=1,\ldots,n)$$

դեկարտյան արտադրյալ:

Տրված $P_1,\ldots,P_n$ տրոհումներից ծնված $I_1,I_2,\ldots,I_s$ զուգահեռանիստերի (տրոհման զուգահեռանիստերի) ընտանիքը, իսկ երբեմն նաև $P=\left(P_1,\ldots,P_n\right)$ շարվածքը, անվանում են $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$ զուգահեռանիստի *տրոհում*: $\lambda(P)=\max\limits_{1\le k\le s} diam\left(I_k\right)$-ն կոչվում է P *տրոհման տրամագիծ*:

Ի ն տ ե գ ր ա լ ա յ ի ն գ ու մ ա ր ն ե ր : Ռ ի մ ա ն ի բ ա զ մ ա կ ի ի ն տ ե գ ր ա լ : Տրված է $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]} \subset R^n$ զուգահեռանիստի վրա որոշված f իրականարժեք ֆունկցիան: Դիցուք P-ն $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$-ի տրոհում է: Տրոհման $I_1,...,I_s$ զուգահեռանիստերից յուրաքանչյուրում ընտրելով մեկական $\xi_1,...,\xi_s$ կետ՝ կազմում են

$$\sigma_f(P,\xi)=\sum_{k=1}^{s} f(\xi_k)v(I_k)$$

գումարը, որն անվանում են f ֆունկցիայի համար $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$-ի P տրոհմանը և $\xi_1,...,\xi_s$ կետերին համապատասխանող *ինտեգրալային գումար*:

Սահմանում: $\Im$ թիվը կոչվում է $f: I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]} \to R$ ֆունկցիայի *ինտեգրալ* (*Ռիմանի ինտեգրալ*), եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$-ի ցանկացած P տրոհման և դրան համապատասխան ξ_i կետերի ցանկացած ընտրության դեպքում՝

$$\lambda(P) < \delta \;\Rightarrow\; \left|\sigma_f(P,\xi) - \Im\right| < \varepsilon :$$

Եթե սահմանման մեջ հիշատակված $\Im$ թիվը գոյություն ունի, f-ն անվանում են Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի և գրում՝

$$\Im = \int_I f = \int_{I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} :$$

Հաճախ, երբ $n \ge 2$, ընդգծելու համար, որ ինտեգրալը սահմանված է բազմաչափ տիրույթում, $\Im$-ն անվանում են *բազմակի* (*կրկնակի, եռակի* և այլն) *ինտեգրալ* և օգտագործում հետևյալ ծավալուն նշանակումը.

$$\Im = \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}} f\left(x^1,...,x^n\right)dx^1\cdots dx^n :$$

Դ ա ր բ ու ի գ ու մ ա ր ն ե ր : Ինտեգրելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը: Եթե $f: I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]} \to R$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա այն սահմանափակ է: Դիցուք P-ն $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$ զուգահեռանիստի տրոհում է: Նշանակենք

$$m_k = \inf_{\mathbf{x}\in I_k} f(\mathbf{x}),\;\; M_k = \sup_{\mathbf{x}\in I_k} f(\mathbf{x}),\;\; \Omega_k = M_k - m_k,\;\; k = 1,...,s,$$

որտեղ $\{I_1,...,I_s\}$-ը տրոհման զուգահեռանիստերի ընտանիքն է:

Հետևյալ գումարները կոչվում են Դարբուի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին գումարներ*.

$$L_f(P)=\sum_{k=1}^{s} m_k v(I_k),\;\; U_f(P)=\sum_{k=1}^{s} M_k v(I_k) :$$

Թեորեմ: $f: I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]} \to R$ սահմանափակ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի այնպիսի P տրահում, որի համար

$$\sum_{k=1}^{s} \Omega_k v(I_k) = U_f(P) - L_f(P) < \varepsilon :$$

Եթե f-ը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունեն

$$\sup_P L_f(P) = L\int_{I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad \text{և} \quad \inf_P U_f(P) = U\int_{I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

վերջավոր ճշգրիտ եզրերը, որոնք կոչվում են f ֆունկցիայի համապատասխանաբար *ստորին* և *վերին ինտեգրալներ*: Դրանց հավասարությունն անհրաժեշտ և բավարար է, որպեսզի f-ն $I_{[\mathbf{a};\mathbf{b}]}$-ի վրա լինի ինտեգրելի:

Զ ր ո չ ա փ ի և զ ր ո ծ ա վ ա լ ի բ ա զ մ ու թ յ ու ն ն ե ր : $A \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է *զրո չափի* բազմություն, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի n-չափանի զուգահեռանիստերի I_k $(k \in N)$ հաջորդականություն (հաշվելի ընտանիք), այնպիսին, որ

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{և} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < \varepsilon :$$

$A \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է *զրո ծավալի* բազմություն, եթե ցանկացած $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի n-չափանի զուգահեռանիստերի վերջավոր ընտանիք՝ $I_1,\dots,I_m$, այնպիսին, որ

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k \quad \text{և} \quad \sum_{k=1}^{m} v(I_k) < \varepsilon :$$

Եթե A-ն զրո չափի է, ապա կգրենք $\mu(A) = 0$, իսկ եթե զրո ծավալի՝ $v(A) = 0$: Ցանկացած զրո ծավալի բազմություն նաև զրո չափի է:

Եթե $f : X \to R$ $\left(X \subset R^n\right)$ ֆունկցիան $X \setminus X_0$ $(X_0 \subset X)$ բազմության յուրաքանչյուր կետում բավարարում է որոշակի պայմանի և $\mu(X_0) = 0$, ապա ասում են, որ f-ը նշված պայմանին բավարարում է X բազմության վրա *համարյա ամենուրեք*:

Լ ե բ ե գ ի հ ա յ տ ա ն ի շ ը : Որպեսզի $f : I \to R$ ֆունկցիան Ռիմանի իմաստով լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ f-ը I-ի վրա լինի սահմանափակ և համարյա ամենուրեք անընդհատ:

Ի ն տ ե գ ր ա լ ց ա ն կ ա ց ա ծ բ ա զ մ ու թ յ ա մ բ : Դիցուք I-ն R^n-ում զուգահեռանիստ է, $D \subset I$ և f-ը D-ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: Կառուցենք $f^* : I \to R$ ֆունկցիան հետևյալ բանաձևով

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in I \setminus D : \end{cases}$$

Սահմանում: f^* ֆունկցիայի ինտեգրալը, եթե այն գոյություն ունի, կոչվում է f ֆունկցիայի *ինտեգրալ D բազմությամբ* (D-ով տարածված) և նշանակվում՝

$$\int_I f^* = \int_D f = \int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} :$$

Այս պայմաններում f-ը կոչվում է D բազմության վրա ինտեգրելի: Նկատենք, որ f ֆունկցիայի ինտեգրալի արժեքը կախված չէ D-ն պարունակող I զուգահեռանիստի ընտրությունից:

D բազմության վրա ինտեգրելի իրականարժեք ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\Re(D)$-ով:

Ժ ո ր դ ա ն ի ի մ ա ս տ ո վ չ ա փ ե լ ի բ ա զ մ ո ւ թ յ ո ւ ն ն ե ր ։ $D \subset R^n$ սահմանափակ բազմությունը կոչվում է Ժորդանի իմաստով չափելի ($n=2$ և $n=3$ դեպքում՝ համապատասխանաբար քառակուսելի և խորանարդելի), եթե $\mu(\partial D)=0$ ։ D բազմության Ժորդանի չափը՝ ծավալը, սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$v(D)=\int_I \chi_D(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

որտեղ I -ն D -ն պարունակող զուգահեռանիստ է, իսկ χ_D -ն՝ D բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան.

$$\chi_D(\mathbf{x})=\begin{cases}1, \mathbf{x}\in D,\\ 0, \mathbf{x}\in R^n \setminus D :\end{cases}$$

Նկատենք, որ χ_D -ի ինտեգրելիությունը բխում է $\mu(\partial D)=0$ պայմանից։

$\Re(D)$ դ ա ս ի կ ա ռ ո ւ ց վ ա ծ ք ը ։ Դիցուք $D \subset R^n$ բազմությունը Ժորդանի իմաստով չափելի է։ Ցանկացած $f,g \in \Re(D)$ ֆունկցիաների համար

ա) $\alpha f+\beta g \in \Re(D)$ $(\alpha,\beta \in R)$, ընդ որում՝

$$\int_D(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_D f+\beta\int_D g \ ;$$

բ) $f\cdot g \in \Re(D)$;

գ) $|f| \in \Re(D)$, ընդ որում՝ $\left|\int_D f\right| \le \int_D |f|$ ։

Ինտեգրալի ադիտիվությունը։ Եթե D_1 և D_2 բազմությունները R^n -ում Ժորդանի իմաստով չափելի են, ապա $D_1 \bigcup D_2$ և $D_1 \bigcap D_2$ բազմությունները նույնպես չափելի են։ Եթե $f \in \Re(D_1 \bigcup D_2)$, ապա D_1, D_2 և $D_1 \bigcap D_2$ բազմություններից յուրաքանչյուրի վրա f -ը Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի է։ Եթե հայտնի է նաև, որ $\mu(D_1 \bigcap D_2)=0$, ապա

$$\int_{D_1 \bigcup D_2} f = \int_{D_1} f+\int_{D_2} f \ :$$

Ինտեգրալի մոնոտոնությունը։ Եթե $f,g\in\Re(D)$ և $f \ge g$, ապա $\int_D f \ge \int_D g$ ։

Միջին արժեքի թեորեմը։ Եթե $f\in\Re(D)$, $m=\inf\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$, $M=\sup\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$, ապա գոյություն ունի $\mu\in[m;M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_D f=\mu\cdot v(D) :$$

Եթե նաև D չափելի բազմությունը գծորեն կապակցված է և $f\in C(D)$, ապա գոյություն ունի $\boldsymbol{\xi}\in D$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}=f(\boldsymbol{\xi})\cdot v(D) :$$

Ի ն տ ե գ ր ա լ ի բ ե ր ու մ ը հ ա ջ ո ր դ ա կ ա ն ի ն տ ե գ ր ա լ ն ե ր ի ։ Դիցուք I_m -ը և I_n -ը համապատասխանաբար R^m -ում և R^n -ում զուգահեռանիստեր են և $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ -ը $I_m \times I_n \subset$

$\subset R^{m+n}$ զուգահեռանիստի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա է: Այս դեպքում ընդունված է f ֆունկցիայի ինտեգրալը նշանակել $\int\limits_{I_m \times I_n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$:

Ֆուբինիի թեորեմը: Եթե $f \in \Re(I_m \times I_n)$ և ցանկացած $\mathbf{x}$ -ի համար գոյություն ունի

$$\Im(\mathbf{x}) = \int\limits_{I_n} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

ինտեգրալը, ապա այն ըստ $\mathbf{x}$ փոփոխականի I_m -ի վրա ինտեգրելի է, ընդ որում

$$\int\limits_{I_m \times I_n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \int\limits_{I_m} \Im(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int\limits_{I_m} \left\{ \int\limits_{I_n} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} d\mathbf{x} :$$

Աջ կողմում գրվածը կոչվում է *հաջորդական ինտեգրալ* և նշանակվում՝ $\int\limits_{I_m} d\mathbf{x} \int\limits_{I_n} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\mathbf{y}$:

Հետևանք 1: Դիցուք $I = [a^1;b^1] \times \cdots \times [a^n;b^n]$ և $f \in \Re(I)$: Այդ դեպքում

$$\int\limits_I f = \int\limits_{a^n}^{b^n} dx^n \int\limits_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \cdots \int\limits_{a^1}^{b^1} f(x^1,...,x^n) dx^1 ,$$

եթե աջ կողմում գրված հաջորդական ինտեգրալը գոյություն ունի:

Հետևանք 2: Դիցուք G -ն R^{n-1} -ում չափելի բազմություն է, $\varphi_1,\varphi_2 \in C(\overline{G})$, $\varphi_1 \le \varphi_2$ և $D = \left\{(\mathbf{x}, y) \in R^n : \mathbf{x} \in G, \varphi_1(\mathbf{x}) \le y \le \varphi_2(\mathbf{x})\right\}$: Այդ դեպքում D -ն R^n -ում չափելի բազմություն է և եթե $f \in \Re(D)$, ապա

$$\int\limits_D f(\mathbf{x}, y) d\mathbf{x} dy = \int\limits_G d\mathbf{x} \int\limits_{\varphi_1(\mathbf{x})}^{\varphi_2(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y) dy :$$

Փ ո փ ո խ ա կ ա ն ի փ ո խ ա ր ի ն ու մ ը բ ա զ մ ա կ ի ի ն տ ե գ ր ա լ ու մ : Դիցուք $D_{\mathbf{t}}$ -ն և $D_{\mathbf{x}}$ -ը R^n -ում բաց, սահմանափակ բազմություններ են, φ -ն $D_{\mathbf{t}}$ -ն $D_{\mathbf{x}}$ -ի վրա արտապատկերող դիֆեոմորֆիզմ է, $E_{\mathbf{t}}$ -ն և $E_{\mathbf{x}}$ -ը համապատասխանաբար $D_{\mathbf{t}}$ -ի և $D_{\mathbf{x}}$ -ի ենթաբազմություններ են, այնպիսիք, որ $\overline{E_{\mathbf{t}}} \subset D_{\mathbf{t}}$, $\overline{E_{\mathbf{x}}} \subset D_{\mathbf{x}}$ և $E_{\mathbf{x}} = \varphi(E_{\mathbf{t}})$: Այս պայմաններում, եթե $f \in \Re(E_{\mathbf{x}})$, ապա $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \Re(E_{\mathbf{t}})$, ընդ որում՝

$$\int\limits_{E_{\mathbf{x}}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int\limits_{E_{\mathbf{t}}} (f \circ \varphi)(\mathbf{t}) \left| \det \varphi'(\mathbf{t}) \right| d\mathbf{t} :$$

Ի ն տ ե գ ր ա լ ի կ ի ր ա ռ ու թ յ ու ն ն ե ր ը : Գլանակերպի ծավալը: Դիցուք D -ն R^2 -ում սահմանափակ բազմություն է, $\varphi(x,y)$ -ը և $\psi(x,y)$ -ը D -ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիաներ են, ընդ որում՝ $\varphi \le \psi$: Եթե D -ն R^2 -ում քառակուսելի է և $\varphi,\psi \in \Re(D)$, ապա

$$G = \left\{(x;y;z) \in R^3 : (x;y) \in D, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\right\}$$

գլանակերպն R^3 -ում խորանարդելի է, ընդ որում՝

$$v(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_D [\psi(x,y) - \varphi(x,y)] dxdy :$$

Մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք G-ն R^2-ում բաց, սահմանափակ բազմություն է և $f \in C^1(G)$: Եթե D-ն քառակուսելի է և $\overline{D} \subset G$, ապա $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, մակերևույթի մակերեսը որոշվում է

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$$

բանաձևով:

Եթե մակերևույթը տրված է $x = \xi(u,v)$, $y = \eta(u,v)$, $z = \zeta(u,v)$ $(u,v) \in D$ պարամետրական հավասարումներով, որտեղ D-ն R^2-ում քառակուսելի տիրույթ է և $\xi, \eta, \zeta \in C^1(D)$, ապա մակերևույթի մակերեսը արտահայտվում է

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

բանաձևով, որում $E = \xi_u'^2 + \eta_u'^2 + \zeta_u'^2$, $G = \xi_v'^2 + \eta_v'^2 + \zeta_v'^2$, $F = \xi_u'\xi_v' + \eta_u'\eta_v' + \zeta_u'\zeta_v'$:

Ա

3676. Դիցուք

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ երբ } 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ 1, \text{ երբ } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 : \end{cases}$$

Համոզվել, որ f-ն ինտեգրելի է $[0;1] \times [0;1]$ քառակուսու վրա և որ

$$\iint_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} f(x,y)\, dxdy = \frac{1}{2} :$$

3677. Դիցուք I-ն R^m-ում զուգահեռանիստ է, f-ը՝ I-ի վրա որոշված իրականարժեք ֆունկցիա, իսկ P-ն՝ I-ի տրոհում: Ապացուցել, որ f-ն I-ի վրա ինտեգրելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ինտեգրելի է P տրոհմանը պատկանող յուրաքանչյուր I_k $(k = 1, \ldots, s)$ զուգահեռանիստի վրա, ընդ որում՝

$$\int\limits_I f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{I_k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} :$$

3678. Դիցուք՝ $f(x,y) = \chi(x) \cdot R(y)$, որտեղ χ-ն Դիրիխլեի ֆունկցիան է, իսկ R-ը՝ Ռիմանի: Ցույց տալ, որ f-ն ինտեգրելի է $I = [0;1] \times [0;1]$ քառակուսու վրա և որ

$$\iint\limits_I f(x,y)\, dxdy = 0 :$$

3679. Հարմար ձևով կազմելով ինտեգրալային գումարները, հաշվել

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1}} xydxdy\text{-ը},$$

դիտարկելով այն որպես այդ գումարների սահման:

3680. $D=\{(x;y):1\le x\le 2, 1\le y\le 3\}$ տիրույթը $x=1+\frac{i}{n}$, $y=1+\frac{2j}{n}$ $(i,j=1,...,n)$ ուղիղներով տրոհել ուղղանկյունների և կազմել $f(x,y)=x^2+y^2$ ֆունկցիայի Դարբուի գումարները: Հաշվել գումարների սահմանը, երբ $n\to\infty$:

3681. Դիցուք $f,g:A\to R$ $(A\subset R^n)$ ֆունկցիաներն ինտեգրելի են և $f(\mathbf{x})\le g(\mathbf{x})$ $(\mathbf{x}\in A)$: Ապացուցել, որ $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\le\int_A g(\mathbf{x})d\mathbf{x}$:

3682. Ապացուցել, որ եթե $f:A\to R$ $(A\subset R^n)$ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա $|f|$-ը նույնպես ինտեգրելի է և $\left|\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right|\le\int_A|f(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$:

3683. Ապացուցել հավասարությունը.

$$\iint\limits_D X(x)Y(y)dxdy=\int\limits_a^A X(x)dx\cdot\int\limits_b^B Y(y)dy,$$

որտեղ $D=[a;A]\times[b:B]$, $X\in\Re[a;A]$, $Y\in\Re[b:B]$:

Տրված D բազմությամբ $\iint_D f(x,y)dxdy$ կրկնակի ինտեգրալը բերել հաջորդական ինտեգրալի (3684-3688).

3684. D-ն $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ գագաթներով եռանկյունն է:

3685. D-ն $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ գագաթներով սեղանն է:

3686. D-ն $y=x^2$, $y=1$ եզրերով պարաբոլական սեգմենտն է:

3687. D-ն $x^2+y^2\le 1$ շրջանն է:

3688. D-ն $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=1$, $x>0$ գծերով սահմանափակված պատկերն է:

Հաշվել ինտեգրալը (3689-3694).

3689. $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy$, $D=[0;\pi]\times[0;\pi/2]$:

3690. $\iint\limits_D x^2 ye^{xy} dxdy$, $D=[0;1]\times[0;2]$:

3691. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, $D=\left\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2\right\}$:

3692. $\iint\limits_D xy^2 dxdy$, $D=\left\{(x,y): 0\le x\le 1, x^3\le y\le x^2\right\}$:

3693. $\iint\limits_D \left(x^2+yx\right)dxdy$, $D=\left\{(x,y): y^2\le x\le y\right\}$:

3694. $\iint\limits_D r^2\sin^2\varphi drd\varphi$, $D=\left\{(r,\varphi): 0\le r\le a, 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$:

3695. Հաշվել

$$I=\int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy$$

ինտեգրալը, եթե $f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$:

3696. Ապացուցել Դիրիխլեի բանաձևը.

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x,y)dy=\int_0^a dy\int_y^a f(x,y)dx,\quad a>0:$$

Փոխել ինտեգրման կարգը (3697-3705).

3697. $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$:

3698. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$:

3699. $\int_0^2 dx\int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$:

3700. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$:

3701. $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$:

3702. $\int_0^{48} dy\int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)dx$:

3703. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$:

3704. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$:

3705. $\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$:

Հաշվել ինտեգրալը (3706-3709).

3706. $\iint_D xy^2 dxdy$, D-ն $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$ $(p>0)$ կորերով սահմանափակված տիրույթն է:

3707. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, D-ն $y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a$ $(a>0)$ ուղիղներով սահմանափակված զուգահեռագիծն է:

3708. $\iint_D \dfrac{x^2}{y^2+1}dxdy$, D-ն $y=x$, $y=0$, $xy=1$, $x=2$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է:

3709. $\iint_D (x^2+2y^2-xy)dxdy$, $D=\{(x;y): |x|+|y|\le a\}$:

Տրված D բազմությամբ $\iint_D f(x,y)dxdy$ կրկնակի ինտեգրալում անցնել $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ բևեռային կոորդինատների և բերել այն հաջորդական ինտեգրալի (3710-3713).

3710. D-ն $x^2+y^2\le a^2$ շրջանն է:

3711. D-ն $x^2+y^2\le ax$ $(a>0)$ շրջանն է:

3712. D-ն $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ եռանկյունն է:

3713. $D=\{(x,y): x^2+y^2\le 4x, y\ge x\}$ շրջանային սեգմենտն է:

Անցնելով $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել ինտեգրալը (3714-3716).

3714. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

3715. $\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

3716. $\iint_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D-ն սահմանափակված է $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսով:

Գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3717-3724).

3717. $x=0$, $y=0$, $x+y=1$:

3718. $y=x$, $y=5x$, $x=1$:

3719. $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$:

3720. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

3721. $2y = x^2$, $x = y$:

3722. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$:

3723. $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$:

3724. $4y = x^2 - 4x$, $x - y - 3 = 0$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3725-3728).

3725. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$:

3726. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$:

3727. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$:

3728. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ գտնել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3729-3732).

3729. $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$:

3730. $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$ $(x > 0, y > 0)$:

3731. $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$ $(0 < p < q, 0 < r < s)$:

3732. $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$, $d = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$:

Գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3733-3737).

3733. $x - y + z = 6$, $x + y = 2$, $x = y$, $y = 0$, $z = 0$:

3734. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$:

3735. $z = a + x$, $z = -a - x$, $x^2 + y^2 = a^2$:

3736. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$:

3737. $x^2 + y^2 = R^2$, $x^2 + z^2 = R^2$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3738-3741).

3738. $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = a^2$:

3739. $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$ $(x > 0, y > 0)$:

3740. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$:

3741. $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$ $(a > 0)$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3742-3745).

3742. $z^2 = xy$, $x + y = a$, $x + y = b$ $(0 < a < b)$:

3743. $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$, $z = 0$:

3744. $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$:

3745. $z^2 = xy$, $xy = 1$, $xy = 4$, $y^2 = x$, $y^2 = 3x$, $z = 0$:

***

Հաշվել հաջորդական ինտեգրալը (3746-3747).

3746. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^a dz$:

3747. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2\right) dz$:

Հաշվել եռակի ինտեգրալը (3748-3751).

3748. $\iiint\limits_V xy^2 z^3 dxdydz$, V-ն սահմանափակված է $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ մակերևույթներով:

3749. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, $V = \left\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right\}$:

3750. $\iiint\limits_V zdxdydz$, V-ն $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ էլիպսոիդով սահմանափակված մարմնի վերին կեսն է. $z \ge 0$:

3751. $\iiint\limits_V xdxdydz$, V-ն $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = h$, $x + z = a$ հարթություններով սահմանափակված պրիզման է:

φ, r, h գլանային կոորդինատները տրվում են $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = h$ արտապատկերմամբ, որի յակոբիանը հետևյալն է. $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = r$:

Ընդհանրացված φ, ψ, r սֆերիկ կոորդինատները տրվում են $x = ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi$, $y = br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi$, $z = cr\sin^{\beta}\psi$ արտապատկերմամբ (a-ն, b-ն, c-ն, α-ն և β-ն հաստատուններ են) $r \ge 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, որի յակոբիանը հետևյալն է.

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha\beta abcr^2 \cos^{\alpha-1}\varphi \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{2\beta-1}\psi \sin^{\beta-1}\psi:$$

Անցնելով սֆերիկ կոորդինատների՝ հաշվել ինտեգրալը (3752-3754).

3752. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, V-ն $x^2 + y^2 + z^2 = z$ մակերևույթով սահմանափակված մարմինն է:

3753. $\iiint\limits_V \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$, V -ն սահմանափակված է $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=a^2xy$ մակերևույթով և $z=0$ հարթությամբ:

3754. $\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, V -ն $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ էլիպսոիդն է:

Եռակի ինտեգրալի միջոցով գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3755-3758).

3755. $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x$, $y=x^2$:

3756. $z=x+y$, $z=xy$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$:

3757. $z=x^2+y^2$, $z^2=xy$:

3758. $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$:

Անցնելով սֆերիկ կամ գլանային կոորդինատների՝ գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3759-3762).

3759. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2\le z^2$: **3760.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$:

3761. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=axyz$ $(a>0)$:

3762. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$ $(0<a<b)$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3763-3766).

3763. $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=R^2$, եթե

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\ne 0:$$

3764. $x+y+z=a$, $x+y+z=2a$, $x+y=z$, $x+y=2z$, $y=x$, $y=3x$:

3765. $x^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$, $x^2-y^2-z^2=0$ $(x>0)$, $0<a<b$:

3766. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}$:

Բ

3767. Ապացուցել, որ եթե $a_i < b_i$, $i = 1,...,m$, ապա $[a_1;b_1]\times\cdots\times[a_m;b_m]$ բազմությունը զրո ծավալի չէ:

3768. Ապացուցել, որ եթե բազմությունն ունի ներքին կետ, ապա այն զրո չափի չէ:

3769. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ բազմությունը Ժորդանի իմաստով չափելի է և $\operatorname{int} A = \varnothing$, ապա $v(A) = 0$:

3770. Ապացուցել, որ եթե $A_i \subset R^m$, $i = 1,2,...$, բազմություններից յուրաքանչյուրն ունի զրո չափ, ապա $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ -ն նույնպես ունի զրո չափ:

3771. Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^m$ կոմպակտ բազմությունն ունի զրո չափ, ապա այն ունի զրո ծավալ:

3772. ա) Ապացուցել, որ անսահմանափակ բազմությունը չի կարող ունենալ զրո ծավալ:

բ) Բերել զրո չափի փակ բազմության օրինակ, որը չունի զրո ծավալ:

3773. ա) Ցույց տալ, որ եթե $v(A) = 0$, ապա $v(\partial A) = 0$;

բ) Բերել զրո չափի բազմության օրինակ, որի եզրային կետերի բազմությունը զրո չափի չէ:

3774. Կառուցել բաց և սահմանափակ բազմություն, որը Ժորդանի իմաստով չափելի չէ:

Ցուցում: Դիտարկել $A = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i;b_i)$ բազմությունը, որտեղ $(a_i;b_i)$-երն ընտրված են այնպես, որ A-ն պարունակում է $(0;1)$-ին պատկանող բոլոր ռացիոնալ թվերը և $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) < 1$:

3775. Դիցուք C-ն սահմանափակ, զրո չափի բազմություն է, իսկ χ_C-ն՝ C-ի բնութագրիչ ֆունկցիան: Ապացուցել, որ եթե $A \subset R^n$ բազմության համար $\int_A \chi_C(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ -ը գոյություն ունի, ապա այն հավասար է զրոյի:

3776. Դիցուք $f \in \Re[a;b]$ ֆունկցիան ոչ բացասական է: Ապացուցել, որ $A_f = \{(x;y): 0 \le y \le f(x)\}$ սեղանակերպը քառակուսելի է, ընդ որում նրա մակերեսը հավասար է $\int_a^b f(x)dx$ -ի:

3777. Ապացուցել, որ եթե $f: A \to R$ $(A \subset R^m)$ ինտեգրելի ֆունկցիան ոչ բացասական է և $\int_A f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$, ապա $\{\mathbf{x} \in A: f(\mathbf{x}) \ne 0\}$ բազմությունն ունի զրո չափ:

3778. Դիցուք $D\subset R^n$ բազմությունը Ժորդանի իմաստով չափելի է և $f,g\in\Re(D)$: Ապացուցել, որ եթե f և g ֆունկցիաները D-ի վրա համարյա ամենուրեք հավասար են, ապա $\int_D f=\int_D g$:

3779. Ճշմարի՞տ է արդյոք, որ եթե $f\in\Re(D)$ և $g:D\to R$ ֆունկցիան D-ի վրա համարյա ամենուրեք հավասար է f-ին, ապա $g\in\Re(D)$: Բերել համապատասխան օրինակ:

3780. Ապացուցել, որ եթե $f\in\Re(D)$ և $g:D\to R$ սահմանափակ ֆունկցիան f-ից տարբերվում է միայն զրո ծավալի բազմության վրա, ապա $g\in\Re(D)$:

3781. Ապացուցել, որ A փակ զուգահեռանիստի մեջ ընկած C բազմությունը չափելի է ըստ Ժորդանի այն և միայն այն դեպքում, երբ ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի A զուգահեռանիստի այնպիսի P տրոհում, որ

$$\sum_{S\in P^1}v(S)-\sum_{S\in P^2}v(S)<\varepsilon ,$$

որտեղ P^1-ը բաղկացած է P-ին պատկանող և C-ի հետ հատվող զուգահեռանիստերից, իսկ P^2-ը՝ C-ի մեջ պարունակվողներից:

3782. Ցույց տալ, որ եթե A-ն չափելի է ըստ Ժորդանի, ապա ցանկացած $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $C\subset A$ կոմպակտ բազմություն, այնպիսին որ $\int_A \chi_{A\setminus C}(\mathbf{x})d\mathbf{x}<\varepsilon$:

3783. Դիցուք $f,g\in C[a,b]$: Ապացուցել անհավասարությունը.

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx :$$

Ցուցում: $\int_a^b dx\int_a^b\left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2dy\ge 0$:

3784. Պարզել ինտեգրալի նշանը.

ա) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$; բ) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ -1\le y\le 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$:

3785. Դիցուք

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, \text{ երբ } 0<x<y<1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, \text{ երբ } 0<y<x<1,\\ 0, [0;1]^2 -\text{ ու մնացած կետերում :}\end{cases}$$

Ապացուցել, որ

ա) գոյություն ունեն $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ և $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ հաջորդական ինտեգրալները, բայց իրար հավասար չեն;

բ) f -ը $[0;1]^2$ -ու վրա ինտեգրելի չէ:

Հաջորդական ինտեգրալներում փոխել ինտեգրման կարգը (3786-3789).

3786. $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy$, $a>0$:

3787. $\int\limits_0^{2\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy$:

3788. $\int\limits_0^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)dy$:

3789. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_2^{4} dx \int\limits_{5-\sqrt{25-x^2}}^{2} f(x,y)dy$:

Կատարել $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ փոփոխականի փոխարինում և փոխել ինտեգրման կարգը (3790-3793).

3790. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{1} f(x,y)dy$:

3791. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$:

3792. $\int\limits_0^{2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{3}x} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$:

3793. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ կրկնակի ինտեգրալը բերել մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտեգրալի (3794-3797).

3794. $\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, $D = \left\{(x;y): |x| \le 1, |y| \le |x|\right\}$:

3795. $\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$, $D = \left\{(x;y): x^2+y^2 \le x\right\}$:

3796. $\iint\limits_D f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)dxdy$, $D = \left\{(x;y): \sqrt{|x|} \le y \le 1\right\}$:

3797. $\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy$, $D = \left\{(x;y): 0 \le x \le 1, \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$:

Անցնելով բևեռային կոորդինատների՝ հաշվել ինտեգրալը (3798-3801).

3798. $\iint\limits_D |xy|dxdy$, $D=\left\{(x,y): a^2 \le x^2+y^2 \le 4a^2\right\}$:

3799. $\iint\limits_D (ax+by)dxdy$, $D=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le R^2, x-y \le 0\right\}$:

3800. $\iint\limits_D \operatorname{sgn} y dxdy$, $D=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 1, y-kx>0\right\}$:

3801. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy$, $D=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le ax, a>0\right\}$:

3802. $S=\{(x,y): a \le x \le a+h, b \le y \le b+h\}$ $(a,b>0)$ քառակուսին $u=\frac{y^2}{x}$, $v=\sqrt{xy}$ ֆունկցիաներով ձևափոխվում է S' պատկերի: Գտնել

ա) S' և S պատկերների մակերեսների հարաբերությունը;

բ) S' և S պատկերների մակերեսների հարաբերության սահմանը, երբ $h \to 0$:

Կատարելով փոփոխականի նշված փոխարինումը՝ կրկնակի ինտեգրալը բերել հաջորդական ինտեգրալի (3803-3805).

3803. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, D-ն սահմանափակված է $x=2y$, $y=2x$, $x+2y=2$, $2x+y=4$ գծերով; $u=\frac{y}{x}$, $v=\frac{y}{2-x}$:

3804. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $D=\left\{(x;y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$; $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$:

3805. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, D-ն $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ $(a>0)$, $x=0$, $y=0$ գծերով սահմանափակված տիրույթն է; $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$:

Կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝ կրկնակի ինտեգրալը բերել մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտեգրալի (3806-3808).

3806. $\iint\limits_D f(x-y)dxdy$, $D=\{(x;y): 0 \le x \le a, 0 \le y \le a-x\}$:

3807. $\iint\limits_{x^2+y^2 \le 1} f(ax+by+c)dxdy$ $\left(a^2+b^2 \ne 0\right)$:

3808. $\iint\limits_D f(xy)dxdy$, D-ն սահմանափակված է $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ $(x>0, y>0)$ գծերով:

Հաշվել ինտեգրալը (3809-3814).

3809. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi \\ 0\le y\le\pi}} |\cos(x+y)|dxdy$:

3810. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy$:

3811. $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1 \\ 0\le y\le 2}} \sqrt{|y-x^2|}dxdy$:

3812. $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 1 \\ x>0, y>0}} |x^2+y^2-4xy|dxdy$:

3813. $\iint\limits_D |xy|dxdy$, $D=\left\{(x;y):(x^2+y^2)^2\le x^2-y^2, x\ge 0\right\}$:

3814. $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D=\left\{(x;y):\frac{3}{2}ay\le x^2\le a^2-y^2\right\}$, $a>0$:

Հաշվել խզվող ֆունկցիայի ինտեգրալը (3815-3816).

3815. $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)dxdy$:

3816. $\iint\limits_{x^2\le y\le 4} \sqrt{[y-x^2]}dxdy$:

3817. Ապացուցել, որ եթե $m,n\in N$ թվերից առնվազն մեկը կենտ է, ապա

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} x^m y^n dxdy = 0:$$

Ընդհանրացված (φ, r) բևեռային կոորդինատները տրվում են $x=ar\cos^\alpha\varphi$, $y=br\sin^\alpha\varphi$ $(r\ge 0)$ արտապատկերմամբ (a -ն, b -ն, α -ն հաստատուններ են), որի յակոբիանը հետևյալն է. $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$:

Հաշվել տրված գծերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3818-3831).

3818. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0, q>0)$:

3819. $2x^2+2y^2=2x+1$, $x^2+y^2\ge 1$:

3820. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x+y=a$:

3821. $y^2=a^2-2ax$, $y^2=b^2-2bx$, $y^2=m^2+2mx$, $y^2=n^2+2nx$, $0<a<b$, $0<m<n$:

3822. $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$ $(x\ge 0, y\ge 0)$: **3823.** $x^4+y^4=2a^2xy$:

3824. $x^3+y^3=axy$:

3825. $\left(x^2+y^2\right)^2=a\left(x^3+y^3\right)$:

3826. $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)$:

3827. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12}=\frac{xy}{c^2}$:

3828. $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}\right)^6=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$:

3829. $\left(x^2+y^2-ax\right)^2\geq a^2\left(x^2+y^2\right)$, $x^2+y^2\leq\sqrt{3}ay$:

3830. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{4x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0, b>0)$:

3831. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=4$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $\frac{8x}{a}=\frac{y}{b}$ $(x>0, y>0)$:

Գտնել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3832-3842).

3832. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$:

3833. $x^2+y^2=\alpha z^2$, $x^2+y^2=ax$, $z>0$:

3834. $x^2+y^2=cz$, $x^4+y^4=a^2\left(x^2+y^2\right)$, $z=0$:

3835. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2>a|x|$:

3836. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$:

3837. $x^2z^2+a^2y^2=c^2x^2$, $0<x<a$:

3838. $z(x+y)=ax+by$, $z=0$, $1<x^2+y^2<4$, $x>0$, $y>0$, $z>0$:

3839. $z^2=2xy$, $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$:

3840. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}$, $y>0$, $z>0$:

3841. $z=x^2y$, $y^2=a^2-2ax$, $y^2=m^2+2mx$, $y=0$, $z=0$:

3842. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$:

Հաշվել մակերեսը (3843-3852).

3843. $x^2+y^2+z^2=a^2$ սֆերայի այն կտորների, որոնք ընկած են $x^2+y^2=\pm ax$ գլանններից դուրս:

3844. $x^2+y^2=\pm ax$ գլանային մակերևույթների այն կտորների, որոնք ընկած են $x^2+y^2+z^2=a^2$ սֆերայի ներսում:

3845. $az=xy$ պարաբոլոիդի այն կտորի, որն ընկած է $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2xy$ գլանում:

3846. $x^2+y^2=z^2$ կոնի այն մասի, որն ընկած է $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$, $z\geq 0$, գլանում:

3847. $z\left(x^2+y^2\right)=x+y$ մակերևույթի այն կտորի, որի կետերը բավարարում են $1\leq x^2+y^2\leq 4$, $x>0$, $y>0$ անհավասարումներին:

3848. $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z$ մակերևույթի այն կտորի, որն ընկած է $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=$ $=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ գլանի մեջ:

3849. $\left(x^2+y^2\right)^{3/2}+z=1$ մակերևույթի այն կտորը, որը կտրված է $z=0$ հարթությունով:

3850. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\dfrac{2z}{c}=1$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$) մակերևույթի:

3851. $\dfrac{x^2}{a}-\dfrac{y^2}{b}=2z$ մակերևույթի այն կտորի, որն ընկած $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(z\geq 0)$ գլանում:

3852. $(x+y)^2+2z^2=2a^2$ մակերևույթի այն կտորի, որի կետերը բավարարում են $x>0$, $y>0$, $z>0$ անհավասարումներին:

***

Հաշվել ինտեգրալը (3853-3856).

3853. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, V-ն սահմանափակված է $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ հարթություններով:

3854. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, V-ն սահմանափակված է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1$ էլիպսոիդով:

3855. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, V-ն սահմանափակված է $x^2+y^2=z^2$, $z=1$ մակերևույթներով:

3856. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V-ն ընկած է $x>0$, $y>0$, $z>0$ օկտանտում և սահմանափակված է $z=\frac{x^2+y^2}{m}$, $z=\frac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b, 0<\alpha<\beta, 0<m<n)$ մակերևույթներով:

Հաշվել $F'(t)$-ն (3857-3858)

3857. $F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le 1} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$:

3858. ա) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, $f\in C(R)$;

բ) $F(t)=\iiint\limits_{V_t} f(xyz)dxdydz$, $V_t=[0;t]^3$, $f\in C^1(R)$:

3859. Հաշվել ինտեգրալը

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^m y^n z^p dxdydz,\ m,n,p\in Z_+ :$$

3860. Տեղադրելով $x+y+z=\xi$, $y+z=\xi\eta$ և $z=\xi\eta\zeta$՝ հաշվել Դիրիխլեի ինտեգրալը.

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz,\ p>0,\ q>0,\ r>0,\ s>0,$$

V-ն սահմանափակված է $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ հարթություններով:

Տարբեր հաջորդականությամբ փոխել ինտեգրման կարգը (3861-3863).

3861. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x,y,z)dz$:

3862. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$:

3863. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$:

Հաջորդական ինտեգրալը փոխարինել մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի ինտեգրալով (3864-3865).

3864. $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta)d\zeta$:

3865. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z)dz$:

$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ ինտեգրալում անցնել սֆերիկ կոորդինատների և ներկայացնել հաջորդական ինտեգրալներով (3866-3868).

3866. $V = \left\{(x,y,z): a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4a^2, y \ge 0\right\}$:

3867. $V = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le az, x^2 + y^2 \le z^2\right\}$:

3868. $V = \left\{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \le 2az, x^2 + y^2 \ge z^2\right\}$:

3869. Դիցուք $V \subset [a;b] \times R^2$ մարմինը խորանարդելի է, իսկ յուրաքանչյուր $x \in [a;b]$ թվի համար նրա $V_x = \{(y;z):(x;y;z) \in V\}$ հատույթը՝ քառակուսելի: Ապացուցել, որ V-ի ծավալը հավասար է $\int_a^b S(x)dx$-ի, որտեղ $S(x)$-ը V_x-ի մակերեսն է:

3870. (Կավալերիի սկզբունքը) Դիցուք A և B մարմինները R^3-ում խորանարդելի են, իսկ յուրաքանչյուր x-ի համար $A_x = \{(y;z):(x;y;z) \in A\}$, $B_x = \{(y;z):(x;y;z) \in B\}$ հատույթները R^2-ում՝ քառակուսելի: Ապացուցել, որ եթե ցանկացած x-ի համար A_x և B_x հատույթներն ունեն միևնույն մակերեսը, ապա A և B մարմինների ծավալները հավասար են:

Հաշվել տրված մակերևույթով սահմանափակված մարմնի ծավալը (3871-3883).

3871. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$:

3872. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$:

3873. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2y^2z^2$:

3874. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3xyz$:

3875. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3(x^3 + y^3 + z^3)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$:

3876. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2=\dfrac{a^6}{x^2+y^2}$: **3877.** $\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=a^3(x-y)$:

3878. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z^4}{c^4}=1$:

3879. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^4=\dfrac{xyz}{abc}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$:

3880. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}+\sqrt[3]{\dfrac{y}{b}}+\sqrt[3]{\dfrac{z}{c}}=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$:

3881. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1$:

3882. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{p}-\dfrac{y}{q}$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, $p>0$, $q>0$:

3883. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{p}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $p>0$:

***

Ծանրության կենտրոնի կոորդինատները: D հարթ պատկերի ծանրության կենտրոնի x_0, y_0 կոորդինատները հաշվում են

$$x_0=\frac{1}{M}\iint\limits_D \rho x\,dxdy,\quad y_0=\frac{1}{M}\iint\limits_D \rho y\,dxdy$$

բանաձևերով, որտեղ $\rho=\rho(x,y)$-ը D պատկերի խտությունն է $(x;y)$ կետում, իսկ $M=\iint_D \rho\,dxdy$ -ը՝ զանգվածը:

V մարմնի x_0, y_0, z_0 ծանրության կենտրոնի կոորդինատները հաշվում են

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\,dxdydz,\quad y_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\,dxdydz,\quad z_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\,dxdydz$$

բանաձևերով, որտեղ $\rho=\rho(x,y,z)$-ը V մարմնի խտությունն է $(x;y;z)$ կետում, իսկ $M=\iiint_V \rho\,dxdydz$ -ը՝ զանգվածը:

Իներցիայի մոմենտներ: D հարթ պատկերի իներցիայի մոմենտները կոորդինատների առանցքների նկատմամբ հաշվում են

$$I_x=\iint\limits_D \rho y^2\,dxdy,\quad I_y=\iint\limits_D \rho x^2\,dxdy$$

բանաձևերով:

V մարմնի իներցիայի մոմենտները կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ հաշվում են

$$I_{xy} = \iiint\limits_V \rho z^2 dxdydz\,,\ I_{yz} = \iiint\limits_V \rho x^2 dxdydz\,,\ I_{zx} = \iiint\limits_V \rho y^2 dxdydz$$

բանաձևերով:

Ox, Oy, Oz առանցքների նկատմամբ իներցիայի մոմենտները հաշվում են

$I_x = I_{xy} + I_{xz}\,,\ I_y = I_{yx} + I_{yz}\,,\ I_z = I_{zx} + I_{zy}$

բանաձևերով:

3884-3903 խնդիրներում ընդունել $\rho = 1$:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված համասեռ հարթակի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (3884-3889).

3884. $ay = x^2\,,\ x + y = 2a\ \ (a > 0)$: **3885.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\,,\ x = 0\,,\ y = 0$:

3886. $x^4 + y^4 = x^2 y$: **3887.** $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}$:

3888. $x^3 + y^3 = 3axy$:

3889. $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy\ \ (x > 0, y > 0)$:

3890. Հաշվել 2φ կենտրոնական անկյունով և a շառավղով սեգմենտի իներցիայի մոմենտը համաչափության առանցքի նկատմամբ:

3891. Հաշվել $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ էլիպսի իներցիայի մոմենտները կոորդինատների առանցքների նկատմամբ:

3892. Հաշվել $a_1 x + b_1 y = \pm h_1$, $a_2 x + b_2 y = \pm h_2$ զուգահեռագծի իներցիայի մոմենտը Ox առանցքի նկատմամբ:

3893. Հաշվել $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ կորով սահմանափակված պատկերի իներցիայի մոմենտը Ox առանցքի նկատմամբ և այն համեմատել $|x + y| + |x - y| = 2$ գծով սահմանափակված պատկերի Ox առանցքի նկատմամբ իներցիայի մոմենտի հետ:

Հաշվել տրված մակերևույթներով սահմանափակված համասեռ մարմնի ծանրության կենտրոնի կոորդինատները (3894-3898).

3894. $h^2\left(x^2 + y^2\right) = a^2 z^2\,,\ 0 < z < h$:

3895. $\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = axyz\,,\ x > 0\,,\ y > 0\,,\ z > 0$:

3896. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}\,,\ x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ z \ge 0\ \ (a > 0, b > 0, c > 0)$:

3897. $\frac{x^n}{a^n}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$:

3898. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm 1$, $z=0$:

Հաշվել տրված մակերևույթներով սահմանափակված համասեռ մարմնի իներցիայի մոմենտները (3899-3903).

3899. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}$, կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ:

3900. $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(n>0, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ կոորդինատական հարթությունների նկատմամբ:

3901. $x^2+y^2+z^2=2$, $x^2+y^2=z^2$ $(z>0)$ Oz առանցքի նկատմամբ:

3902. $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^5 z$, Oz առանցքի նկատմամբ:

3903. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{h^2}$, $z=h$, Ox առանցքի նկատմամբ:

Գ

3904. Ապացուցել, որ եթե $f\in C\left(R^2\right)$, ապա

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi,\eta)d\eta$$

ֆունկցիան բավարարում է $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f$ հավասարմանը:

3905. Դիցուք $z=f(x,y)$ ֆունկցիայի մակարդակի գծերը՝ $f(x,y)=const$ հավասարումով որոշվող կորերը, պարզ, փակ կորեր են, իսկ $G(a,b)$ տիրույթը սահմանափակված է $f(x,y)=a$ և $f(x,y)=b$ կորերով: Ապացուցել, որ

$$\iint\limits_{G(a,b)} f(x,y)dxdy=\int_a^b tS'(t)dt,$$

որտեղ $S(t)$-ն $f(x,y)=a$ և $f(x,y)=t$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսն է:

3906. Հաշվել $\dfrac{x^2}{ch^2u_i}+\dfrac{y^2}{sh^2u_i}=c^2$ էլիպսներով և $\dfrac{x^2}{\cos^2 v_i}-\dfrac{y^2}{\sin^2 v_i}=c^2$ $(i=1,2)$ հիպերբոլներով սահմանափակված պատկերի մակերեսը $(0<u_1<u_2,$ $0<v_1<v_2, x>0, y>0)$:

3907. Հաշվել $\dfrac{x^2}{\lambda}+\dfrac{y^2}{\lambda-c^2}=1$ $\left(\lambda=\dfrac{c^2}{3},\dfrac{2c^2}{3},\dfrac{4c^2}{3},\dfrac{5c^2}{3}, x>0, y>0\right)$ կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

3908. Հաշվել $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\le a^2$ մարմինը $x+y+z=0$ հարթությունով հատելիս առաջացած հատույթի մակերեսը:

3909. Դիցուք $D_p=[-p;p]^2$, իսկ K_p-ն և C_p-ն՝ D_p-ին համապատասխանաբար ներգծած և արտագծած շրջանները:

$$\iint_{K_p} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\le\iint_{D_p} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\le\iint_{C_p} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

անհավասարություններում անցնելով սահմանի, երբ $p\to+\infty$, ստանալ Էյլեր-Պուասոնի ինտեգրալի արժեքը (տես խնդիր 3585):

3910. Հաշվել $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$ մակերևույթը $z=1-2(x+y)$ հարթությունով հատելիս ստացվող սահմանափակ կտորի մակերեսը:

3911. Հաշվել $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi$, $y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi$, $z=a\sin\psi$ $(0<a\le b)$ տորի այն կտորի մակերեսը, որը սահմանափակված է $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ միջօրեականով և $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$ զուգահեռականներով: Գտնել տորի մակերեսը:

Անիսկական ինտեգրալ: Դիցուք $G\subset R^n$ անսահմանափակ բազմությունն այնպիսին է, որ ցանկացած $B_r=B(\mathbf{0},r)$ գնդի համար $G\cap B_r$ բազմությունը չափելի է: Տրված $f:G\to R$ ֆունկցիան կանվանենք G բազմության վրա *անիսկական իմաստով ինտեգրելի*, եթե ցանկացած r-ի համար $f\in\Re(G\cap B_r)$ և

$$\sup_{0<r<+\infty}\int_{G\cap B_r}|f|<+\infty:$$

Այս պայմաններում

$$\int_G f=\lim_{r\to+\infty}\int_{G\cap B_r}f$$

սահմանը կոչվում է f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ G բազմությամբ*:

Համանմանորեն սահմանվում է f ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալն այն դեպքում, երբ f-ը $\overline{G}$ բազմության որևէ կետի շրջակայքում անսահմանափակ է:

3912. Ապացուցել, որ եթե f -ն անիսկական իմաստով ինտեգրելի է $G \subset R^n$ անսահմանափակ բազմության վրա, ապա

ա) $\lim\limits_{r \to +\infty} \int\limits_{G \cap B_r} f = \int\limits_G f$

սահմանը գոյություն ունի;

բ) չափելի բազմություններից կազմված ցանկացած $D_k \supset B_k$ հաջորդականության համար գոյություն ունի $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{G \cap D_k} f$ սահմանը և այն հավասար է f -ի ինտեգրալին G բազմությամբ:

Հետազոտել անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (3913-3915).

3913. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{\left(1+|x|^p\right)\left(1+|y|^q\right)}$: **3914.** $\iint\limits_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p>0, q>0)$:

3915. $\iint\limits_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^p} dxdy, \quad 0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M, \ \varphi \in C(R)$:

3916. Ցույց տալ, որ

$$\iint\limits_{x \geq 1,\, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} dxdy$$

ինտեգրալը տարամետ է, չնայած

$$\int\limits_1^{\infty} dx \int\limits_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)} dy \quad \text{և} \quad \int\limits_1^{\infty} dy \int\limits_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)} dx$$

հաջորդական ինտեգրալները զուգամետ են:

Հետազոտել անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի զուգամիտությունը (3917-3919).

3917. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}, \quad D = \left\{(x;y) : |y| \leq x^2,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$:

3918. $\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{\left(x^2+xy+y^2\right)^p} dxdy \quad 0 < m \leq |\varphi(x,y)| \leq M, \ \varphi \in C\left(R^2\right)$:

3919. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}, \quad D = \left\{(x;y) : |\mathrm{x}| + |y| \leq 1\right\} \quad (p>0, q>0)$:

Հետազոտել եռակի ինտեգրալի զուգամիտությունը (3920-3922).

3920. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\ge 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^p} dxdydz$, $0 < m \le |\varphi(x,y)| \le M$, $\varphi \in C\left(R^3\right)$:

3921. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\ge 1} \frac{dxdydz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r} \quad (p>0, q>0, r>0)$:

3922. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{|x+y-z|^p}$, $V = \{(x;y;z): |x|\le 1, |y|\le 1, |z|\le 1\}$:

3923. Դիցուք՝ $u \in C(R)$, տարբեր է նույնաբար զրոյից և $\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|dx < +\infty$: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} u(x)u(y)dxdy > 0 :$$

3924. Դիցուք $K \in C([a;b]\times[a;b])$ և

$$K_n(x,y) = \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\cdots K(t_n,y)dt_1\cdots dt_n :$$

Ապացուցել, որ

$$K_{n+m+1}(x,y) = \int\limits_a^b K_n(x,t)K_m(t,y)dt :$$

3925. Դիցուք $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ ֆունկցիան անընդհատ է $0 \le x_i \le x \quad (i=1,\ldots,n)$ տիրույթում: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \cdots \int\limits_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int\limits_0^x dx_n \int\limits_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int\limits_{x_2}^x f dx_1 \quad (n \ge 2):$$

3926. Դիցուք f-ն անընդհատ է: Ապացուցել, որ

$$\int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \cdots \int\limits_0^{t_{n-1}} f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n)dt_n = \frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right)^n :$$

3927. Հաշվել $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i=1,\ldots,n)$ հիպերհարթություններով սահմանափակված n-չափանի զուգահեռանիստի ծավալը, եթե

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \ne 0 :$$

3928. Ապացուցել, որ R^n -ում ցանկացած գունդ չափելի է: Գտնել r շառավղով n-չափանի գնդի ծավալը:

3929. Հաշվել

$$\frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}=1 \quad (a_i>0),\ \ x_i=0,\quad i=1,\ldots,n\ ,$$

հիպերհարթություններով սահմանափակված n-չափանի բուրգի ծավալը:

3930. Հաշվել

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}\ ,\ \ x_n=a_n$$

մակերևույթներով սահմանափակված n-չափանի կոնի ծավալը:

3931. Հաշվել $\frac{|x|^m}{a^m}+\frac{|y|^n}{b^n}+\frac{|z|^p}{c^p}=1 \quad (m,n,p,a,b,c>0)$ մակերևույթով սահմանափակված մարմնի ծավալը:

Հաշվել ինտեգրալը (3932-3935).

3932. $\int\limits_{D_n} d\mathbf{x}\ ,\ \ D_n=\{(x_1,\ldots,x_n): x_1+\cdots+x_n\le a,\, x_i\ge 0,\, i=1,\ldots,n\}$:

3933. $\int\cdots\int\limits_{D_n} \sqrt{x_1+\cdots+x_n}\,dx_1\cdots dx_n\ ,$

$D_n=\{(x_1,\ldots,x_n): x_1+\cdots+x_n\le 1,\, x_i\ge 0,\, i=1,\ldots,n\}$:

3934. $\int\cdots\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2} \sqrt{x_1^2+\cdots x_n^2}\,dx_1\cdots dx_n$:

3935. $\int\cdots\int\limits_{x_1^2+\cdots x_n^2\le 1} \frac{dx_1\cdots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2}}$:

Ապացուցել հավասարությունը (3936-3939).

3936. $\int\limits_0^x dx_1\int\limits_0^{x_1} dx_2\cdots\int\limits_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n=\int\limits_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}du\ ,\ f\in C[0;x]$:

3937. $\int\limits_0^x x_1dx_1\int\limits_0^{x_1} x_2dx_2\cdots\int\limits_0^{x_n} f(x_{n+1})dx_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int\limits_0^x (x^2-u^2)^n f(u)du\ ,\ f\in C[0;x]$:

3938. $\int\cdots\int\limits_{x_i\ge 0,\sum_{i=1}^n x_i\le 1} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1\cdots dx_n=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)},\ p_i>0\ ,\ i=1,\ldots,n$

(Դիրիխլեի բանաձև):

3939. $$\underset{x_i\ge 0,\sum_{i=1}^n x_i\le 1}{\int\cdots\int} f(x_1+\cdots+x_n)x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}dx_1\cdots dx_n =$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_0^1 f(u)u^{p_1+\cdots+p_n-1}du\,,\quad p_i>0\,,\ i=1,...,n\,,\ f\in C[0;1]$$

(Լիուվիլի բանաձև):

Ցուցում: Կիրառել մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը:

3940. Ապացուցել հավասարությունը. $\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy=\int_0^1 x^x dx$:

3941. Դիցուք՝ $I_n=[0;1]^n$: Հաշվել ինտեգրալը.

$$\int_{I_n}\min_{1\le i\le n}\{\pi^i(\mathbf{x})\}d\mathbf{x}\text{ -ը,}$$

π^i -ն R^n -ում i -րդ պրոյեկտող արտապատկերումն է:

3942. Հաշվել սահմանը.

$$\lim_{n\to\infty}\int_I \max_{1\le i\le n}\{\pi^i(\mathbf{x})\}d\mathbf{x}\,,\ I_n=[0;1]^n :$$

3943. Տրված է $f\in C([0;1])$ և $I_n=[0;1]^n$: Ապացուցել հավասարությունը.

ա) $$\lim_{n\to\infty}\int_{I_n} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \pi^i(\mathbf{x})\right)d\mathbf{x}=f\left(\frac{1}{2}\right);$$

բ) $$\lim_{n\to\infty}\int_{I_n} f\left[\left(\prod_{i=1}^n \pi^i(\mathbf{x})\right)^{\frac{1}{n}}\right]d\mathbf{x}=f\left(\frac{1}{e}\right):$$

3944. Դիցուք՝ $f\in C(R,R_+)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ և

$$\Im_n(r)=\underset{\sum_{i=1}^n x_i^2\le r^2}{\int\cdots\int} f(x_1)\cdots f(x_n)dx_1\cdots dx_n :$$

Հաշվել $\lim_{n\to\infty}\Im_n(r)$ -ը:

3945. Դիցուք $A\subset R^n$ բազմությունը Ժորդանի իմաստով չափելի է և $f\in\Re(A)$, $f\ge 0$: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_D f^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}} = \inf_{\substack{E\subset A \\ v(E)=0}} \sup_{\mathbf{x}\in A\setminus E} f(\mathbf{x}):$$

3946. Ապացուցել Սարդի հետևյալ թեորեմը. եթե G-ն R^3-ում տիրույթ է, $\varphi \in C^1(G, R^3)$ և $B = \{t \in G : \det \varphi'(t) = 0\}$, ապա $\varphi(B)$-ն R^3-ում զրո չափի բազմություն է: Այդտեղից հետևեցնել, որ եռակի ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման վերաբերյալ թեորեմում $\det \varphi'(t) \neq 0$ (φ-ն դիֆեոմորֆիզմ էր) պայմանն էական չէ:

Գլուխ 17

Կորագիծ և մակերևութային ինտեգրալներ Վեկտորական անալիզի տարրերը

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալ: $\Gamma:[\alpha;\beta]\to R^n$ անընդհատ կորը (ճանապարհը) կոչվում է *պարզ կոր*, եթե Γ արտապատկերումը փոխմիարժեք է: Հաճախ Γ արտապատկերման արժեքների բազմությունն անվանում են Γ կորի *կրիչ*: Եթե $[\alpha;\beta]$ հատվածի բոլոր $P=(t_0,\ldots,t_p)$ տրոհումներին համապատասխանող

$$\ell(\Gamma;P)=\sum_{i=1}^{p-1}\left|\Gamma(t_{i+1})-\Gamma(t_i)\right|_n$$

գումարների բազմությունը սահմանափակ է, ապա Γ-ն կոչվում է ուղղելի կոր, իսկ $\ell(\Gamma)=\sup\limits_P \ell(\Gamma;P)$-ն՝ Γ կորի *երկարություն*:

Եթե Γ-ն ուղղելի կոր է, ապա ցանկացած $[\alpha_1;\beta_1]\subset[\alpha;\beta]$ միջակայքի համար $\Gamma:[\alpha_1;\beta_1]\to R^n$ կորը՝ Γ կորի *աղեղը*, նույնպես ուղղելի է:

Դիցուք $\Gamma:[\alpha;\beta]\to R^n$-ը պարզ, ուղղելի կոր է, X-ը Γ-ի կրիչն է, իսկ f-ը՝ X-ի վրա (Γ կորի երկայնքով) որոշված իրականարժեք ֆունկցիա: Կատարելով $[\alpha;\beta]$ հատվածի $P=(t_0,\ldots,t_p)$ տրոհում և տրոհման $[t_i;t_{i+1}]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում ընտրելով մեկական τ_i կետ՝ կազմում են

$$\sigma_f(\Gamma;P,\tau)=\sum_{i=0}^{p-1}f(\Gamma(\tau_i))\Delta s_i$$

ինտեգրալային գումարը, որում Δs_i-ն $\Gamma:[t_i;t_{i+1}]\to R^n$ աղեղի երկարությունն է:

Դիցուք $\lambda(P)$-ն P տրոհման տրամագիծն է:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$I=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma_f(\Gamma;P,\tau)$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է Γ կորով f ֆունկցիայի *կորագիծ ինտեգրալ* (առաջին տիպի) և նշանակվում՝

$$I=\int_\Gamma f ds=\int_\Gamma f(\mathbf{x})ds=\int_\Gamma f\left(x^1,\ldots,x^n\right)ds:$$

Առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալի բերումը Ռիմանի ինտեգրալի: Եթե $\Gamma= =(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\in C^1\left([\alpha;\beta],R^n\right)$ և $\Gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ (Γ կորը ողորկ է), իսկ f-ը Γ-ի երկայնքով որոշված անընդհատ իրականարժեք ֆունկցիա է, ապա Γ կորով f ֆունկցիայի կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$\int_\Gamma f(\mathbf{x})ds = \int_\alpha^\beta f(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t))\sqrt{\gamma_1'^2(t)+\cdots+\gamma_n'^2(t)}dt :$$

Նկատենք, որ եթե $\Gamma_1 : [\alpha_1;\beta_1] \to R^n$ և $\Gamma_2 : [\alpha_2;\beta_2] \to R^n$ պարզ ողորկ կորերն ունեն միևնույն կրիչը, ապա

$$\int_{\Gamma_1} f(\mathbf{x})ds = \int_{\Gamma_2} f(\mathbf{x})ds :$$

Եթե $\Gamma : [0;\ell] \to R^n$ ուղղելի կորն այնպիսին է, որ պարամետրի ցանկացած $0 \le s \le \ell$ արժեքի համար $\Gamma : [0;s] \to R^n$ աղեղի երկարությունը հավասար է s-ի, ապա s-ն անվանում են կորի բնական պարամետր: Այս դեպքում՝

$$\int_\Gamma f(\mathbf{x})ds = \int_0^\ell f(\Gamma(s))ds :$$

Ե ր կ ր ո ր դ տ ի պ ի կ ո ր ա գ ի ծ ի ն տ ե գ ր ա լ : Տրված են $\Gamma : [\alpha;\beta] \to R^n$ կորը և այդ կորի երկայնքով որոշված f իրականարժեք ֆունկցիան: $[\alpha;\beta]$ հատվածի $P = (t_0,...,t_p)$ տրոհ-մանը համապատասխան ընտրելով $\tau_i \in [t_i;t_{i+1}]$ կետեր՝ կազմում են

$$S_f^k(\Gamma;P,\tau) = \sum_{i=0}^{p-1} f(\Gamma(\tau_i))\Delta x_i^k$$

ինտեգրալային գումարը, որում $\Delta x_i^k = (\pi^k \circ \Gamma)(t_{i+1}) - (\pi^k \circ \Gamma)(t_i)$, π^k-ն R^n-ում k-րդ պրոյեկ-տող արտապատկերումն է:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$I^k = \lim_{\lambda(P)\to 0} S_f^k(\Gamma;P,\tau)$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են Γ կորով f ֆունկցիայի *կորագիծ ինտեգրալ* (երկ-րորդ տիպի) և նշանակում՝

$$I^k = \int_\Gamma f dx^k = \int_\Gamma f(\mathbf{x})dx^k = \int_\Gamma f(x^1,...,x^n)dx^k :$$

Եթե Γ կորի երկայնքով տրված են n ֆունկցիաներ, ապա ֆիզիկական խնդիրներում հաճախ հանդիպող

$$I^1 + \cdots + I^n = \int_\Gamma f_1(\mathbf{x})dx^1 + \cdots + \int_\Gamma f_n(\mathbf{x})dx^n$$

գումարը նշանակում են

$$\int_\Gamma f_1(\mathbf{x})dx^1 + \cdots + f_n(\mathbf{x})dx^n :$$

Երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալի բերումը Ռիմանի ինտեգրալի: Եթե $\gamma_i = \pi^i \circ \Gamma \in C^1[\alpha;\beta]$, L-ը Γ կորի կրիչն է և $f \in C(L)$, ապա $\int_\Gamma f(\mathbf{x})dx^i$-ն գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$\int_\Gamma f(\mathbf{x})dx^i = \int_\alpha^\beta f(\Gamma(t))\gamma_i'(t)dt :$$

Ընդհանուր տեսքով, եթե $\Gamma \in C^1\left(\left[\alpha;\beta\right],R^n\right)$, $f_i \in C(L)$ $(i=1,...,n)$, ապա

$$\int\limits_{\Gamma}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x^1,...,x^n\right)dx^i = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_i\left(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t)\right)\gamma_i'(t)dt :$$

Դիցուք $\Gamma_1 : \left[\alpha_1;\beta_1\right] \to R^n$ և $\Gamma_2 : \left[\alpha_2;\beta_2\right] \to R^n$ պարզ ողորկ կորերն ունեն միևնույն L կրիչը և $f \in C(L)$: Եթե

ա) $\Gamma_1(\alpha_1) = \Gamma_2(\alpha_2)$ և $\Gamma_1(\beta_1) = \Gamma_2(\beta_2)$, ապա $\int\limits_{\Gamma_1} f(\mathbf{x})dx^i = \int\limits_{\Gamma_2} f(\mathbf{x})dx^i$;

բ) $\Gamma_1(\alpha_1) = \Gamma_2(\beta_2)$ և $\Gamma_1(\beta_1) = \Gamma_2(\alpha_2)$, ապա $\int\limits_{\Gamma_1} f(\mathbf{x})dx^i = -\int\limits_{\Gamma_2} f(\mathbf{x})dx^i$:

Այս հավասարությունները, ինչպես նաև նույնատիպ հավասարությունը առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալի համար, հիմք են տալիս համարելու, որ պարզ կորերի դեպքում կորագիծ ինտեգրալները սահմանված են ոչ այնքան Γ կորով, որքան Γ-ի կրիչով: Միայն թե, նկատի ունենալով բ) կետում գրված հավասարությունը, ասում են, որ երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը, ի տարբերություն առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալի, փոխում է իր նշանը, երբ կորի կրիչի վրա ընտրված ուղղությունը փոխվում է հակադիր ուղղությամբ:

Ա ռ ա ջ ի ն և ե ր կ ր ո ր դ տ ի պ ի կ ո ր ա գ ի ծ ի ն տ ե գ ր ա լ ն ե ր ի կ ա պ ը : Տրված Γ ողորկ կորի և նրա երկայնքով որոշված $f_1,...,f_n$ անընդհատ ֆունկցիաների համար

$$\int\limits_{\Gamma} f_1 dx^1 + \cdots + f_n dx^n = \int\limits_{\Gamma}\left(f_1\cos\alpha_1 + \cdots + f_n\cos\alpha_n\right)ds,$$

որտեղ $\cos\alpha_1$-ը,..., $\cos\alpha_n$-ը յուրաքանչյուր կետում կորի աղեղի երկարության աճման ուղղությամբ տարված շոշափողի ուղղորդ կոսինուսներն են:

Ի ն տ ե գ ր ա լ փ ա կ կ ո ր ո վ : Հ ա ր թ ո ւ թ յ ա ն կ ո ղ մ ն ո ր ո շ ո ւ մ ը : R^2 տարածության ստանդարտ բազիսի վեկտորներն ընդունված է նշանակել՝ $\mathbf{i} = (1;0)$ և $\mathbf{j} = (0;1)$, իսկ R^3-ինը՝ $\mathbf{i} = (1;0;0)$, $\mathbf{j} = (0;1;0)$ և $\mathbf{k} = (0;0;1)$: R^2 տարածությունը դեկարտյան հարթության հետ նույնացնելիս $(\mathbf{i},\mathbf{j})$ կարգավորված համակարգը (ինչպես նաև հարթության դիտարկվող երեսը) համարում են աջ կողմնորոշված, եթե $\mathbf{i}$ վեկտորը ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ 90°-ով պտտելիս համընկնում է $\mathbf{j}$ վեկտորին: Այս դեպքում հարթության հակառակ երեսը համարվում է ձախ կողմնորոշված: Եռաչափ էվկլիդյան տարածության մեջ $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ համակարգը համարվում է աջ կողմնորոշված, եթե այն կառուցված է համաձայն անալիտիկ երկրաչափության մեջ հայտնի «խցանահանի կանոնի»:

Պայմանավորվենք այսուհետև R^2 և R^3 տարածությունները համարել աջ կողմնորոշված:

Եթե Γ կորի կրիչն ընկած է R^2-ում, ապա Γ-ն անվանում են *հարթ* կոր, իսկ եթե R^3-ում՝ *տարածական կոր*:

$\Gamma : \left[\alpha;\beta\right] \to R^n$ անընդհատ կորը կոչվում է փակ կոր, եթե $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\beta)$: Γ փակ կորը կոչվում է պարզ կոր, եթե $\Gamma : \left[\alpha;\beta\right) \to R^n$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է:

Ժորդանի թեորեմը: Յանկացած Γ հարթ, պարզ, փակ կորով դեկարտյան հարթությունը բաժանվում է երկու չհատվող տիրույթների, որոնցից յուրաքանչյուրի եզրը Γ-ի կրիչն է: Ընդորում, տիրույթներից մեկն անսահմանափակ է և կոչվում է արտաքին տիրույթ, իսկ մյուսը կոչվում է Γ կորով կամ Γ կորի կրիչով սահմանափակված տիրույթ:

Դիցուք G -ն R^2 -ում Γ կորով սահմանափակված տիրույթ է: Եթե տիրույթի եզրով (Γ -ի կրիչով) որոշակի ուղղությամբ շարժվելիս շարժման յուրաքանչյուր պահին դիտորդի բավականաչափ փոքր շրջակայքում տիրույթի կետերը գտնվում են նրանից ձախ, ապա շարժման այդ ուղղությունը համարում են *դրական* ուղղություն: Ուռուցիկ տիրույթի համար եզրով շարժման դրական ուղղությունը ուղղակի համընկնում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությանը:

Եթե Γ հարթ, պարզ, ողորկ կորի կրիչը L -ն է և $f \in C(L)$, ապա հաճախ $\int_{\Gamma} f(\mathbf{x})ds$ գրելու փոխարեն գրում են $\int_L f(\mathbf{x})ds$: Ինչ վերաբերում է նույն կորով f ֆունկցիայի երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալին, ապա նրա արժեքը, ինչպես նշվեց, կարող է փոխել իր նշանը՝ կախված կրիչի վրա ընտրված ուղղությունից: Եթե $\Gamma:[\alpha;\beta]\to R^2$ պարզ, ողորկ կորը փակ է և $t\in[\alpha;\beta]$ պարամետրի աճմանը զուգընթաց $\Gamma(t)$ կետը կրիչի վրայով շարժվում է դրական ուղղությամբ, ապա այդ դեպքում գրում են՝

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x})dx^i = \int_{L} f(\mathbf{x})dx^i :$$

Կորագիծ ինտեգրալի անկախությունը ճանապարհից: Դիցուք G -ն R^2 -ում տիրույթ է, $P(x,y)$ -ը և $Q(x,y)$ -ը՝ G -ում որոշված անընդհատ ֆունկցիաներ:

Թեորեմ: Որպեսզի կամայականորեն տրված $A,B\in G$ կետերի համար A -ն B -ին միացնող (A -ից B ուղղված) և G -ում ընկած ցանկացած L ճանապարհով

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

ինտեգրալն ունենա միևնույն արժեքը, կախված միայն A -ից և B -ից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենա G -ում դիֆերենցելի $\Phi(x,y)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ ամենուրեք՝

$$d\Phi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy :$$

Այս պայմաններում ասում են, որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը ներկայացնում է լրիվ դիֆերենցիալ, որի նախնականը Φ -ն է: G տիրույթում ընկած ցանկացած փակ կորով այդ արտահայտության ինտեգրալը հավասար է զրոյի: Եթե $A,B\in G$ և L -ը A -ն B -ին միացնող և G -ում ընկած ճանապարհ է, ապա գրում են

$$\int_L Pdx+Qdy = \int_{AB} Pdx+Qdy = \int_A^B Pdx+Qdy :$$

Նկատենք, որ

$$\int_A^B Pdx+Qdy = -\int_B^A Pdx+Qdy :$$

Եթե Φ -ն $Pdx+Qdy$ արտահայտության նախնականն է, ապա ցանկացած $A,B\in G$ կետերի համար

$$\int_A^B Pdx+Qdy = \Phi(B)-\Phi(A) = \Phi(x,y)\Big|_A^B :$$

Համանմանորեն, եթե G -ն R^3 -ում տիրույթ է, $P,Q,R\in C(G)$, A -ն և B -ն G տիրույթի կամայական կետեր են, ապա A -ն B -ին միացնող և G -ում ընկած ցանկացած ճանապարհով

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

ինտեգրալը կունենա միևնույն արժեքը (կախված միայն A -ից և B -ից) այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\Phi(x,y,z)$ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ G -ում ամենուրեք

$$d\Phi(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz :$$

Այս դեպքում էլ, ցանկացած $A, B \in G$ կետերի համար

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \Phi(B) - \Phi(A) :$$

Գ ր ի ն ի բ ա ն ա ձ և ը : $\Gamma : [\alpha; \beta] \to R^2$ անընդհատ կորը կանվանենք կտոր առ կտոր ողորկ կոր, եթե գոյություն ունի $[\alpha; \beta]$ հատվածի տրոհում, որի յուրաքանչյուր միջակայքին համապատասխանող կորի աղեղը ողորկ է:

Դիցուք G -ն R^2 -ում Γ կտոր առ կտոր ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է, L -ը Γ -ի կրիչն է և $P, Q \in C^1(\overline{G})$:

Ճշմարիտ է Գրինի հետևյալ բանաձևը.

$$\int_L Pdx + Qdy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy :$$

$G \subset R^2$ տիրույթը կոչվում է *միակապ*, եթե G -ում ընկած ցանկացած փակ կորով սահմանափակված տիրույթն ամբողջապես պարունակվում է G -ում:

Հետևանք: Որպեսզի G միակապ տիրույթում $Pdx + Qdy$ արտահայտությունը լինի լրիվ դիֆերենցիալ, անհրաժեշտ է և բավարար հետևյալ պայմանը. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $(x,y) \in G$:

Գրինի բանաձևում հաջորդաբար տեղադրելով $P(x,y) = 0$ և $Q(x,y) = x$, $P(x,y) = -y$ և $Q(x,y) = 0$, $P(x,y) = -\dfrac{y}{2}$ և $Q(x,y) = \dfrac{x}{2}$, G տիրույթի S մակերեսի համար ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$S = \int_L xdy = -\int_L ydx = \frac{1}{2} \int_L -ydx + xdy :$$

Մ ա կ ե ր և ու թ ա յ ի ն ի ն տ ե գ ր ա լ ն ե ր : Ա ռ ա ջ ի ն տ ի պ ի մ ա կ ե ր և ու թ ա յ ի ն ի ն տ ե գ ր ա լ : Դիցուք R^3 -ում S պարզ, ողորկ մակերևույթը տրված է

$$x = \xi(u,v), \ y = \eta(u,v), \ z = \zeta(u,v), \quad (u,v) \in \overline{D},$$

պարամետրական հավասարումներով, որտեղ D -ն R^2 -ում քառակուսելի տիրույթ է, ξ, η, ζ ֆունկցիաները $\overline{D}$ -ում անընդհատ դիֆերենցելի են և ամենուրեք՝

$$rang \begin{bmatrix} \xi'_u & \eta'_u & \zeta'_u \\ \xi'_v & \eta'_v & \zeta'_v \end{bmatrix} = 2 :$$

Տրված է $f : S \to R$ իրականարժեք ֆունկցիան:

Տրոհելով D -ն $D_1, D_2, ..., D_n$ զույգ առ զույգ ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող քառակուսելի տիրույթների և կամայականորեն ընտրելով $(u_i; v_i) \in D_i$ $(i = 1, ..., n)$ կետերը՝ կազմում ենք

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi\left(u_i, v_i\right), \eta\left(u_i, v_i\right), \zeta\left(u_i, v_i\right)\right)\Delta S_i$$

ինտեգրալային գումարը, որում ΔS_i-ն տրոհման D_i պատառին համապատասխանող S մակերևույթի կտորի մակերեսն է:

Դիցուք $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} diam D_i$:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի σ ինտեգրալային գումարի սահմանը, երբ $\lambda \to 0$, ապա այն անվանում են S մակերևույթով f ֆունկցիայի մակերևութային ինտեգրալ (առաջին տիպի) և նշանակում՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint\limits_S f(x, y, z)dS :$$

Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալի բերումը Ռիմանի կրկնակի ինտեգրալի: Եթե $f \in C(S)$, ապա S մակերևույթով f ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը գոյություն ունի, ընդ որում՝

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f\left(\xi(u, v), \eta(u, v), \zeta(u, v)\right)\sqrt{EG - F^2}\,dudv,$$

որտեղ

$$E = \xi_u'^2 + \eta_u'^2 + \zeta_u'^2, \quad G = \xi_v'^2 + \eta_v'^2 + \zeta_v'^2, \quad F = \xi_u'\xi_v' + \eta_u'\eta_v' + \zeta_u'\zeta_v' :$$

Մասնավորապես, եթե S մակերևույթը $z = z(x, y)$, $(x; y) \in D$, ֆունկցիայի գրաֆիկն է, ապա

$$\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f\left(x, y, z(x, y)\right)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy :$$

Ե ր կ ր ո ր դ տ ի պ ի մ ա կ ե ր և ու թ ա յ ի ն ի ն տ ե գ ր ա լ : Մակերևույթի կողմնորոշում: S պարզ մակերևույթի այն կետերի բազմությունը, որոնք համապատասխանում են D տիրույթի եզրային կետերին, կանվանենք մակերևույթի եզրագիծ կամ մակերևույթը սահմանափակող կոնտուր:

Եթե մակերևույթի յուրաքանչյուր կետում միավոր նորմալի ուղղորդ կոսինուսների համար գլուխ 14-ում բերված բանաձևում վերցված է պլյուս նշանը, ապա ասում են, որ ընտրված է մակերևույթի որոշակի երես: Մակերևույթի հակառակ երեսը որոշվում է այդ բանաձևում մինուս նշանի ընտրությամբ: Մակերևույթը կոչվում է երկերես, եթե նրա վրա ընկած և եզրագիծը չհատող ցանկացած փակ կորով միավոր նորմալը անընդհատ տեղաշարժելիս այն ամեն անգամ վերադառնում է իր ելակետային դիրքին (նորմալի ուղղորդ կոսինուսները նշանը չեն փոխում):

R^3 տարածության աջ կողմնորոշման պայմաններում S մակերևույթի դիտարկվող երեսը համարվում է $M \in S$ կետում աջ կողմնորոշված, եթե M կետի բավականաչափ փոքր շրջակայքում մակերևույթի կտորի վրա ընկած փակ կորով դիտարկվող երեսին համապատասխանող $\mathbf{n}(M)$ նորմալի շուրջը ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությունը ընդունվում է որպես դրական ուղղություն: Մակերևույթը համարվում է աջ կողմնորոշված, եթե այն իր յուրաքանչյուր կետում աջ կողմնորոշված է:

$S \in C\left(G, R^3\right)$ մակերևույթը կոչվում է կտոր առ կտոր ողորկ, եթե $G \subset R^2$ տիրույթը կարելի է կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհել վերջավոր թվով զույգ առ զույգ ընդհանուր ներքին կետեր չունեցող պատառների, որոնցից յուրաքանչյուրին համապատասխանող մակերևույթի կտորը ողորկ է: Եթե այդ կտորներից յուրաքանչյուրը կողմնորոշված է, ապա այդ կողմնորոշումը համարվում է համաձայնեցված, եթե ցանկացած երկու կից կտորներից մեկի վրա նրանց ընդհանուր եզրով դրական ուղղությամբ շարժումը հակադիր է մյուսի վրա նույն այդ եզրով դրական ուղղությամբ շարժմանը: Այս դեպքում ամբողջ S մակերևույթը համարվում է կողմնորոշված:

Եթե մակերևույթը ներկայացնում է $z = z(x, y)$ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի գրաֆիկ, ապա բնական է խոսել մակերևույթի վերին և ստորին երեսների մասին: Յուրաքանչյուր կետում վերին երեսին համապատասխանող մակերևույթի նորմալը Oz առանցքի հետ կազմում է սուր անկյուն, իսկ ստորին երեսինը՝ բութ անկյուն: Նույնքան բնական է $V \subset R^3$ տիրույթը (մարմինը) սահմանափակող փակ ողորկ մակերևույթի երեսներն անվանել ներքին և արտաքին երեսներ: Այդ երեսներին տարված նորմալները կանվանենք համապատասխանաբար ներքին և արտաքին նորմալներ:

Դիցուք S-ը երկերես, կողմնորոշված, կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթ է, իսկ f-ը՝ S-ի կետերում որոշված իրականարժեք ֆունկցիա:

Ընտրելով մակերևույթի որոշակի երեսը՝ մակերևույթը կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհելով զույգ առ զույգ այդ կորերի կետերից զատ այլ ընդհանուր կետեր չունեցող $S_1, \ldots, S_n$ կտորների և դրանցից յուրաքանչյուրի վրա կամայականորեն վերցնելով մեկական (x_i, y_i, z_i) կետ՝ կազմում են

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta P_i$$

ինտեգրալային գումարը, որում ΔP_i-ն S_i կտորի xOy հարթության վրա P_i պրոյեկցիայի մակերեսն է պլյուս նշանով, եթե S_i-ի վրա փակ կորով դրական ուղղությամբ շարժվելիս կետի պրոյեկցիան շարժվում է P_i-ի վրա դրական ուղղությամբ և մինուս նշանով, եթե պրոյեկցիան շարժվում է հակադիր ուղղությամբ: Եթե f-ը սահմանափակ ֆունկցիա է, ապա մակերևույթի ողորկությունը հնարավորություն է տալիս ինտեգրալային գումարները կազմելիս գործնականում արհամարհել տրոհման այն S_i կտորները, որոնց դիրքը տարածության մեջ (S_i-ն P_i-ի վրա փոխմիարժեք չի պրոյեկտվում) թույլ չի տալիս ΔP_i-ի նշանի հարցում վերը նշված կանոնով կողմնորոշվել:

Դիցուք $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} diam S_i$:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի σ_z-ի սահմանը, երբ $\lambda \to 0$, ապա այն անվանում են S մակերևույթի ընտրված երեսով f ֆունկցիայի մակերևութային ինտեգրալ (երկրորդ տիպի) և նշանակում՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_z = \iint\limits_{(S)} f(x, y, z) dxdy :$$

Եթե մակերևույթի տրոհման պատառները պրոյեկտվում են yOz (zOx) հարթության վրա, ապա նույն սկզբունքով կազմված σ_x (σ_y) ինտեգրալային գումարների սահմանը, եթե այն գոյություն ունի, նույնպես անվանում են երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ և նշանակում նույն ձևով, միայն թե $dxdy$-ի փոխարեն գրում են $dydz$ $(dzdx)$: Եթե տրված են S մակերևույթի կետերում որոշված P, Q, R իրականարժեք ֆունկցիաներ, ապա դրանցից յուրաքանչյուրի համապատասխանաբար ըստ $dydz$-ի, ըստ $dzdx$-ի և ըստ $dxdy$-ի ինտեգրալների գումարը, եթե երեքն էլ տարածված են S մակերևույթի միևնույն երեսով, նշանակում են՝

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy :$$

Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալի բերումը Ռիմանի կրկնակի ինտեգրալի: Դիցուք G-ն R^2-ում քառակուսելի տիրույթ է: Եթե կտոր առ կտոր ողորկ S երկերես մակերևույթը տրված է

$$x=\xi(u,v),\ y=\eta(u,v),\ z=z(u,v),\ (u;v)\in G,$$

պարամետրական հավասարումներով և $P,Q,R\in C(S)$, ապա

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\pm\iint\limits_{G}(PA+QB+RC)dudv,$$

որտեղ A,B,C գործակիցները որոշվում են գլուխ 14-ում բերված բանաձևերով: Եթե G տիրույթում ընկած փակ կորով դրական ուղղությամբ շարժվելիս S մակերևույթի ընտրված երեսի վրա համապատասխան կետը շարժվում է դրական ուղղությամբ, ապա աջ կողմում պետք է վերցնել պլյուս նշանը: Հակառակ դեպքում վերցվում է մինուս նշանը:

Առաջին և երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալների կապը: Եթե $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն և $\cos\gamma$-ն S մակերևույթի ընտրված երեսի նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են, ապա

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS:$$

Ստոքսի բանաձևը: Դիցուք S-ն L կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուրով սահմանափակված կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթ է, ընդ որում L-ի վրա դրական ուղղությունը համապատասխանում է S մակերևույթի վրա ընտրված երեսի կողմնորոշմանը: Եթե P,Q,R ֆունկցիաները S մակերևույթի կետերը պարունակող տիրույթում անընդհատ դիֆերենցելի են, ապա ճշմարիտ է Ստոքսի հետևյալ բանաձևը.

$$\int\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy:$$

Հետևանք: Դիցուք I-ն R^3-ում զուգահեռանիստ է և $P,Q,R\in C(I)$: Որպեսզի $Pdx+$ $+Qdy+Rdz$ արտահայտությունը լինի լրիվ դիֆերենցիալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ I-ում ամենուրեք ճշմարիտ լինեն

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

հավասարությունները:

Գաուս–Օստրոգրադսկու բանաձևը: Դիցուք $V\subset R^3$ մարմինը սահմանափակված է S կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթով և P,Q,R ֆունկցիաները $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ ֆունկցիաների հետ միասին $\overline{V}$ բազմության վրա անընդհատ են: Այս պայմաններում ճշմարիտ է Գաուս-Օստրոգրադսկու հետևյալ բանաձևը.

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint\limits_{(S)} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

ընդ որում աջ կողմի ինտեգրալը տարածված է S փակ մակերևույթի արտաքին երեսով:

Վեկտորական անալիզի տարրերը: Սկալյար և վեկտորական դաշտեր: Մաթեմատիկական ֆիզիկայի և մեխանիկայի բազմաթիվ խնդիրներում $G\subset R^3$ տիրույթում որոշված ֆունկցիաները տիրույթի յուրաքանչյուր կետին համապատասխանեցնում են կա՛մ որոշակի սկալյար մեծություն (ծավալ, զանգված, ջերմաստիճան և այլն), կա՛մ վեկտորական մեծություն (ուժ, արագություն, արագացում և այլն): Այդ կապակցությամբ G տիրույթում որոշված $u(\mathbf{r}) = u(x, y, z)$, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, իրականարժեք ֆունկցիան անվանում են *սկալյար դաշտ*, իսկ $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ ֆունկցիան՝ *վեկտորական դաշտ*: Ենթադրվում է, որ u և $\mathbf{a}$ ֆունկցիաները G -ում ամենուրեք անընդհատ դիֆերենցելի են:

Եթե $u(x, y, z)$ սկալյար դաշտի առաջին կարգի մասնակի ածանցյալները ոչ մի կետում միաժամանակ զրո չեն, ապա $u(x, y, z) = c$ հավասարումով որոշվող մակերևույթն անվանում են u դաշտի մակարդակի մակերևույթ:

Գրադիենտ: u սկալյար դաշտի համար

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

վեկտորը կոչվում է *գրադիենտ*: Հետևելով Համիլտոնին՝ մտցնում են $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$ սիմվոլիկ վեկտորը (անվանում են *նաբլա*), որի միջոցով u դաշտի գրադիենտը ներկայացվում է

$$\operatorname{grad} u = \nabla u$$

տեսքով: Ցանկացած $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ միավոր վեկտորի համար՝

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \langle \operatorname{grad} u, \mathbf{n} \rangle :$$

Այստեղից հետևում է, որ տրված կետում u ֆունկցիայի ածանցյալը $\mathbf{n}$ -ի ուղղությամբ կլինի մաքսիմալ, եթե $\mathbf{n}$ -ը համուղղված է այդ կետում դաշտի գրադիենտին, ընդ որում՝

$$\max_{\mathbf{n}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} :$$

Նկատենք նաև, որ տրված կետում u դաշտի գրադիենտը համագիծ է այդ կետով անցնող $u(x, y, z) = c$ մակարդակի մակերևույթի նորմալին:

Վեկտորական դաշտի դիվերգենցիան և ռոտորը: Պայմանավորվենք $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը նշանակել $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: Տրված $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ վեկտորական դաշտի ցանկացած կետում

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

սկալյար մեծությունը կոչվում է $\mathbf{a}$ դաշտի *դիվերգենցիա*, իսկ

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla, \mathbf{a}] = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

վեկտորական մեծությունը՝ դաշտի ռոտոր:

Վեկտորի հոսքը մակերևույթով: Դիցուք $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ $G \subset R^3$ տիրույթում տրված վեկտորական դաշտ է և S ողորկ երկերես մակերևույթը ընկած է G -ում: S մակերևույթով նրա որոշակի երեսին համապատասխանող $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ միավոր նորմալի ուղղությամբ $\mathbf{a}$ վեկտորի *հոսքը* սահմանվում է

$$\iint_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS$$

բանաձևով: Օգտագործելով նաև դիվերգենցիայի սահմանումը՝ Գաուս-Օստրոգրադսկու բանաձևին կարելի է տալ հետևյալ վեկտորական տեսքը.

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{a}\,dxdydz = \iint_S \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS ,$$

որտեղ S-ը V մարմինը սահմանափակող փակ, ողորկ մակերևույթ է, իսկ $\mathbf{n}$-ը՝ S-ի արտաքին նորմալը:

Վեկտորի շրջապտույտը: $G \subset R^3$ տիրույթում տրված $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ վեկտորական դաշտի համար $L \subset G$ կորով

$$\int_L \mathbf{a}d\mathbf{r} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

ինտեգրալը (դաշտի աշխատանքը) կոչվում է $\mathbf{a}$ վեկտորի *գծային ինտեգրալ*: Եթե L-ը փակ կոնտուր է, ապա գծային ինտեգրալն անվանում են $\mathbf{a}$ վեկտորի L կոնտուրով *շրջապտույտ*:

Ստոքսի բանաձևը վեկտորական տեսքով հետևյալն է.

$$\int_L \mathbf{a}d\mathbf{r} = \iint_S \langle \operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle dS ,$$

որտեղ L-ը $S \subset G$ մակերևույթի եզրագիծն է, իսկ $\mathbf{n}$-ը՝ S-ի այն երեսի միավոր նորմալը, որի կողմնորոշմամբ L կոնտուրով ինտեգրումը կատարվում է դրական ուղղությամբ:

Պոտենցիալ դաշտ: $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ վեկտորական դաշտը կոչվում է պոտենցիալ դաշտ, եթե գոյություն ունի $u(\mathbf{r})$ սկալյար դաշտ, այնպիսին, որ ամենուրեք

$$\operatorname{grad} u = \mathbf{a} :$$

Այս դեպքում u-ն անվանում են $\mathbf{a}$ դաշտի *պոտենցիալ*: Պոտենցիալ դաշտում $\mathbf{a}$ վեկտորի շրջապտույտը ցանկացած փակ կոնտուրով հավասար է զրոյի:

Զուգահեռանիստի վրա տրված $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտը կլինի պոտենցիալ դաշտ այն և միայն այն դեպքում, երբ ամենուրեք $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$:

Սոլենոիդային դաշտ: $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտը կոչվում է սոլենոիդային, եթե գոյություն ունի մեկ այլ, $\mathbf{b}$ վեկտորական դաշտ, որի ռոտորը $\mathbf{a}$-ն է. $\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{b}$: Որպեսզի $\mathbf{a}$-ն լինի սոլենոիդային դաշտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ տիրույթում ամենուրեք տեղի ունենա $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ պայմանը:

Ա

Հաշվել առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը (3947-3958).

3947. $\int_\Gamma xds$, Γ-ն $(0;0)$ և $(1;1)$ կետերը միացնող հատվածն է:

3948. $\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Γ-ն $(0;0)$ և $(1;2)$ կետերը միացնող հատվածն է:

3949. $\int_\Gamma (x + y)ds$, Γ-ն $(0;0)$, $(1;0)$ և $(0;1)$ գագաթներով եռանկյան եզրն է:

3950. $\int\limits_{\Gamma} xyds$, Γ-ն $|x|+|y|=1$ քառակուսին է:

3951. $\int\limits_{\Gamma} xyds$, Γ-ն էլիպսի աղեղն է. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$:

3952. $\int\limits_{\Gamma} x^2ds$, Γ-ն $x^2+y^2=a^2$, $(y\ge 0)$ կիսաշրջանագիծն է:

3953. $\int\limits_{\Gamma} y^2ds$, Γ-ն $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ կորն է:

3954. $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2\right)ds$, Γ-ն $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ կորն է:

3955. $\int\limits_{\Gamma}(x+z)ds$, Γ-ն $x=t$, $y=\sqrt{\frac{3}{2}}t^2$, $z=t^3$ $(0\le t\le 1)$ կորն է:

3956. $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, Γ-ն $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ $(0\le t\le 2\pi)$ կորն է:

3957. $\int\limits_{\Gamma} zds$, Γ-ն $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le t_0)$ կորն է:

3958. $\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$, Γ-ն հետևյալ շրջանագծի աղեղն է. $x=t$, $y=t$, $z=\sqrt{1-2t^2}$, $\left(0\le t\le\frac{1}{2}\right)$:

Գտնել կորի երկարությունը (3959-3962).

3959. $y^2=x^3$, $0\le x\le 5$:

3960. $y=1-\ln\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{4}$:

3961. $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $0\le t\le\sqrt{2}$:

3962. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, $0<t<+\infty$:

Հաշվել երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը (3963-3974).

3963. $\int\limits_{\Gamma} xydx$, Γ-ն սինուսոիդի աղեղն է. $y=\sin x$, $0\le x\le\pi$:

3964. $\int\limits_{\Gamma}\left(x-\frac{1}{y}\right)dy$, Γ-ն պարաբոլի աղեղն է. $y=x^2$, $1\le x\le 2$:

3965. $\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx$, Γ-ն $y = x^3$, $0 \le x \le 2$, կորն է:

3966. $\int\limits_{\Gamma} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, Γ-ն $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$, կորն է:

3967. $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, Γ-ն $y = 1 - |x - 1|$, $0 \le x \le 2$, կորն է:

3968. $\int\limits_{\Gamma} ydx - xdy$, Γ-ն $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, էլիպսն է:

3969. $\int\limits_{\Gamma} (2a - y)dx + xdy$, Γ-ն $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, ցիկլոիդի կամարն է:

3970. $\int\limits_{\Gamma} \left(y^2 - z^2\right)dx + 2yzdy - x^2dz$, Γ-ն $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, կորն է:

3971. $\int\limits_{\Gamma} ydx + zdy + xdz$, Γ-ն $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$, կորն է:

3972. $\int\limits_{L} \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, L-ը $x^2 + y^2 = a^2$ շրջանագիծն է:

3973. $\int\limits_{L} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, L-ը $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$ գագաթներով քառակուսու եզրն է:

3974. $\int\limits_{L} xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, L-ը $A(1;1;1)$ կետը $B(2;3;4)$ կետին միացնող հատվածն է:

Համոզվել, որ ընդինտեգրալ արտահայտությունը ներկայացնում է լրիվ դիֆերենցիալ և հաշվել կորագիծ ինտեգրալը (3975-3985).

3975. $\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$:

3976. $\int\limits_{(0;1)}^{(3;-4)} xdx + ydy$:

3977. $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x + y)dx + (x - y)dy$:

3978. $\int\limits_{(1;-1)}^{(1;1)} (x - y)(dx - dy)$:

3979. $\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$, φ -ն և ψ -ն անընդհատ ֆունկցիաներ են:

3980. $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$:

3981. $\int\limits_{(2;1)}^{(1;2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$, $x = 0$ ուղիղը չհատող կորով:

3982. $\int\limits_{(1;0)}^{(6;8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(0;0)$ կետով չանցնող պարզ կորով:

3983. $\int\limits_{(0;-1)}^{(1;0)} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$, $y = x$ ուղիղը չհատող կորով:

3984. $\int\limits_{(1;1;1)}^{(2;3;-4)} xdx + y^2dy - z^3dz$:

3985. $\int\limits_{(1;2;3)}^{(6;1;1)} yzdx + xzdy + xydz$:

Գտնել նախնականը (3986-3991).

3986. $du = \left(x^2 + y^2\right)dx + 2xydy$:

3987. $du = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$:

3988. $du = \frac{\left(x^2 + 2xy + 5y^2\right)dx + \left(x^2 - 2xy + y^2\right)dy}{(x+y)^3}$:

3989. $du = e^x\left[e^y(x - y + 2) + y\right]dx + e^x\left[e^y(x - y) + 1\right]dy$:

3990. $du = \left(x^2 - 2yz\right)dx + \left(y^2 - 2xz\right)dy + \left(z^2 - 2xy\right)dz$:

3991. $du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz$:

Գրինի բանաձևի միջոցով հաշվել կորագիծ ինտեգրալը (3992-3996).

3992. $\int\limits_L (x+y)^2dx - \left(x^2 + y^2\right)dy$, L -ը $(1;1)$, $(3;2)$ և $(3;5)$ գագաթներով եռանկյան եզրն է:

3993. $\int\limits_L xy^2dy - x^2ydx$, L -ը $x^2 + y^2 = a^2$ շրջանագիծն է:

3994. $\int\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$, L-ը $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսն է:

3995. $\int\limits_L e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, L-ը $0<x<\pi$, $0<y<\sin x$ տիրույթի եզրն է:

3996. $\int\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$, L-ը $x^2+y^2=R^2$ շրջանագիծն է:

Կորագիծ ինտեգրալի միջոցով հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (3997-4003).

3997. $y^2=1-x$, $x=1$, $y=1$: **3998.** $y=2x^2$, $x-y+1=0$:

3999. $x=t^2$, $y=t^3$, $x=1$:

4000. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$:

4001. $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$:

4002. $(x+y)^2=ax$, $y=0$:

4003. $x^2+y^2=4$, $x^2=2-y$ (պատկերը պարունակում է $(0;0)$ կետը):

***

Հաշվել առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը (4004-4009).

4004. $\iint\limits_P (x+y+z)dS$, P-ն

ա) $x+2y+4z=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ մակերևույթն է;

բ) $x^2+y^2+z^2=1$, $z\ge 0$ մակերևույթն է:

4005. $\iint\limits_P (x^2+y^2)dS$, P-ն

ա) $x^2+y^2+z^2=R^2$ սֆերան է:

բ) $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$ կոնի լրիվ մակերևույթն է:

4006. $\iint\limits_P \dfrac{dS}{(1+x+y)^2}$, P-ն $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ քառանիստի մակերևույթն է:

4007. $\iint\limits_P |xy|zdS$, P-ն $z=x^2+y^2$ պարաբոլոիդի այն կտորն է, որի կետերը բավարարում են $z\le 1$ անհավասարությանը:

4008. $\iint\limits_P \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, P-ն $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = v$; $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le H$ մակերևույթն է:

4009. $\iint\limits_P z^2 dS$, P-ն $x = r\cos\varphi\sin\alpha$, $y = r\sin\varphi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$; $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ մակերևույթն է ($\alpha \in (0;\pi/2)$, $\alpha = const$):

Բ

4010. Դիցուք L-ը բևեռային կոորդինատների համակարգում $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$ հավասարումով տրված ողորկ կոր է: Ապացուցել, որ եթե $f(x,y)$ ֆունկցիան անընդհատ է L-ի վրա, ապա

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi :$$

Հաշվել առաջին տիպի կորագիծ ինտեգրալը (4011-4013).

4011. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, L-ը $x^2+y^2 = ax$ շրջանագիծն է:

4012. $\int\limits_L |y|ds$, L-ը $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ լեմնիսկատն է:

4013. $\int\limits_L x^2 ds$, L-ը $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x+y+z=0$ շրջանագիծն է:

Հաշվել երկրորդ տիպի կորագիծ ինտեգրալը (4014-4015).

4014. $\int\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, L-ը $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $y\cos\alpha = x\sin\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ շրջանագիծն է, որի ուղղությունը $(1;0;0)$ կետից նայելիս, համընկնում է ժամացույցի սլաքի պտտման հակառակ ուղղությանը:

4015. $\int\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$, L-ը Վիվիանիի կորն է. $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2 = ax$ $(z \ge 0, a > 0)$, որի ուղղությունը $(2a;0;0)$ կետից նայելիս, հակադիր է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությանը:

4016. Ապացուցել, որ եթե f-ն անընդհատ ֆունկցիա է, իսկ L-ը՝ կտոր առ կտոր ողորկ, փակ կոր, ապա

$$\int_L f\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)=0:$$

4017. Ապացուցել

$$\left|\int_L Pdx+Qdy\right|\le lM$$

անհավասարությունը, որտեղ l-ը L-ի երկարությունն է, իսկ M-ը՝ L կորի վրա $\sqrt{P^2+Q^2}$ ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը:

4018. Ապացուցել, որ

$$\lim_{R\to\infty}\int_{x^2+y^2=R^2}\frac{ydx-xdy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}=0:$$

4019. Դիցուք՝

$$I_1=\int_{AB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy\,,\quad I_2=\int_{ApB}(x+y)^2dx-(x-y)^2dy\,,$$

որտեղ AB-ն $A(1;1)$ կետը $B(2;6)$ կետին միացնող հատվածն է, իսկ ApB-ն՝ A-ն B-ին միացնող և $(0;0)$ կետով անցնող, ուղղաձիգ առանցքով պարաբոլի աղեղը: Գտնել (I_1-I_2)-ը:

4020. Հաշվել

$$\int_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

կորագիծ ինտեգրալը, որտեղ L-ը պարզ, փակ, $(0;0)$ կետով չանցնող կոր է:

Հաշվել տրված կորերով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (4021-4029).

4021. $x^3+y^3=3axy\quad(a>0)$ (Դեկարտի տերև):

Ցուցում: Տեղադրել $y=tx$:

4022. $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ (լեմնիսկատ):

Ցուցում: Տեղադրել $y=xtg\varphi$:

4023. $x^3+y^3=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$:

4024. $(x+y)^{n+m+1}=ax^ny^m\quad(x>0,y>0,a>0,n>0,m>0)$:

4025. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=1$, $x=0$, $y=0$ $(a>0,b>0,n>0)$:

Ցուցում: Տեղադրել $x=ar\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y=br\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$:

4026. $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0, b>0, n>1)$:

4027. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$ $(a>0, b>0, c>0, n>0)$ կորի հանգույցով:

4028. $x=r\left((n+1)\cos\frac{t}{n}-\cos\frac{n+1}{n}t\right)$, $y=r\left((n+1)\sin\frac{t}{n}-\sin\frac{n+1}{n}t\right)$, $n\in N$, $t\in[0;2\pi n]$ (էպիցիկլոիդ):

4029. $x=r\left((n-1)\cos\frac{t}{n}+\cos\frac{n-1}{n}t\right)$, $y=r\left((1-n)\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{n-1}{n}t\right)$, $n\geq 2$, $n\in N$, $t\in[0;2\pi n]$ (հիպոցիկլոիդ):

4030. Գտնել $x^2+y^2=ax$ գլանային մակերևույթի այն մասի մակերեսը, որը կտրված է $x^2+y^2+z^2=a^2$ սֆերայով:

4031. Ապացուցել, որ վերին կիսահարթությունում գտնվող L պարզ, փակ կորը Ox առանցքի շուրջը պտտելիս առաջացած մարմնի ծավալը հաշվվում է

$$V=-\pi\int_L y^2dx$$

բանաձևով:

***

4032. Դիցուք՝

$$I_k=\iint_{P_k}\left(x^2+y^2+z^2\right)dS,\quad k=1,2,$$

որտեղ P_1-ը $x^2+y^2+z^2=a^2$ սֆերան է, իսկ P_2-ը՝ այդ սֆերային ներգծած $|x|+|y|+|z|=a$ ութանիստի մակերևույթը: Գտնել (I_1-I_2)-ը:

4033. Հաշվել $\iint_P zdS$ ինտեգրալը, որտեղ P-ն $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ գլանային մակերևույթի այն մասն է, որը կտրված է $z=\sqrt{x^2+y^2}$ կոնական մակերևույթով:

4034. Հաշվել $\iint_P(xy+yz+zx)dS$ ինտեգրալը, որտեղ P-ն $z=\sqrt{x^2+y^2}$ մակերևույթի այն մասն է, որը կտրված է $x^2+y^2=2ax$ գլանային մակերևույթով:

4035. Ապացուցել Պուասոնի բանաձևը.

$$\iint\limits_{P} f(ax+by+cz)dS = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)du ,$$

P -ն $x^2+y^2+z^2=1$ սֆերան է:

Հաշվել երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը (4036-4040).

4036. $\iint\limits_{(P)} zdxdy$, P -ն $z^2=x^2+y^2$, $0<z\le H$ մակերևույթի ստորին երեսն է:

4037. ա) $\iint\limits_{(P)} z^2dxdy$; բ) $\iint\limits_{(P)} zdxdy$,

P -ն $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y\ge 0$ կիսասֆերայի արտաքին երեսն է:

4038. $\iint\limits_{(P)} (xdydz+ydzdx+zdxdy)$, P -ն $x^2+y^2+z^2=R^2$, սֆերայի արտաքին երեսն է:

4039. $\iint\limits_{(P)} (f(x)dydz+g(y)dzdx+h(z)dxdy)$, f -ը, g -ն և h -ը անընդհատ ֆունկցիաներ են, P -ն $0\le x\le a$, $0\le y\le b$, $0\le z\le c$ զուգահեռանիստի մակերևույթի արտաքին երեսն է:

4040. $\iint\limits_{(P)} \left(x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy\right)$, P -ն $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ սֆերայի արտաքին երեսն է:

4041. Դիցուք $V\subset R^3$ գլանակերպը սահմանափակված է $z=\Phi(x,y)$, $z=\varphi(x,y)$, $(x;y)\in D$, ֆունկցիաների գրաֆիկներով, ընդ որում ամենուրեք՝ $\varphi(x,y)\le\Phi(x,y)$: Ապացուցել գլանակերպի ծավալի համար հետևյալ բանաձևը.

$$V=\iint\limits_{(S)} zdxdy ,$$

որտեղ S -ը գլանակերպը սահմանափակող մակերևույթի արտաքին երեսն է:

***

Ստոքսի բանաձևի միջոցով հաշվել ինտեգրալը (4042-4047).

4042. $\int\limits_{L} ydx+zdy+xdz$, L -ը $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ շրջանագիծն է, որի ուղղությունը, $(1;0;0)$ կետից նայելիս, հակադիր է ժամացույցի սլաքի շարժման ուղղությանը:

4043. $\int\limits_L \left(y^2 - z^2\right)dx + \left(z^2 - x^2\right)dy + \left(x^2 - y^2\right)dz$, L-ը $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x + y + z = 2$ կորն է, որով ինտեգրումը կատարվում է, $(0;0;0)$ կետից նայելիս, ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ:

4044. $\int\limits_L \left(x^2 - yz\right)dx + \left(y^2 - xz\right)dy + \left(z^2 - xy\right)dz$, L-ը $A(a;0;0)$ կետը $B(a;0;h)$ կետին միացնող $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = \dfrac{h}{2\pi}\varphi$ պտուտակագիծն է:

Ցուցում: Կորը լրացնել BA հատվածով:

4045. $\int\limits_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, L-ը $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$ $(0 \le t \le \pi)$ էլիպսն է:

4046. $\int\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, L-ը $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ $(a > 0, h > 0)$ էլիպսն է, որի ուղղությունը, $(0;0;0)$ կետից նայելիս, համընկնում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությանը:

4047. $\int\limits_L \left(y^2 + z^2\right)dx + \left(x^2 + z^2\right)dy + \left(x^2 + y^2\right)dz$, որտեղ L-ը $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 \le 2rx$, $z > 0$ $(0 < r < R)$ մակերևույթի վերին երեսի եզրն է, շրջանցման դրական ուղղությամբ:

$***$

Օստրոգրադսկու բանաձևի միջոցով հաշվել մակերևույթային ինտեգրալը (4048-4050).

4048. $\iint\limits_{(P)} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, P-ն $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$ խորանարդի եզրի արտաքին երեսն է:

4049. $\iint\limits_{(P)} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, P-ն

ա) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ սֆերայի արտաքին երեսն է;

բ) $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$ կոնի կողմնային մակերևույթի արտաքին երեսն է:

4050. $\iint\limits_{(P)} (x-y+z)dydz + (y-z+x)dzdx + (z-x+y)dxdy$, P-ն $|x-y+z| +$
$+|y-z+x| + |z-x+y| = 1$ մակերևույթի արտաքին երեսն է:

4051. P ողորկ մակերևույթով սահմանափակված մարմնի V ծավալի համար ապացուցել հետևյալ բանաձևը.

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{(P)} xdydz + ydzdx + zdxdy = \frac{1}{3}\iint\limits_{P} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)dS,$$

որտեղ $\cos\alpha$-ն, $\cos\beta$-ն և $\cos\gamma$-ն P-ի արտաքին նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են, ընդ որում ձախ կողմում ինտեգրումը կատարվում է P մակերևույթի արտաքին երեսով:

4052. Ապացուցել, որ $z^2 = x^2 + y^2$ կոնական մակերևույթով և $Ax + By +$ $+ Cz + D = 0$ հարթությունով սահմանափակված կոնի ծավալը հավասար է $\frac{SH}{3}$-ի, որտեղ S-ը կոնի հիմքի մակերեսն է, իսկ H-ը՝ բարձրությունը:

Հաշվել տրված մակերևույթներով սահմանափակված մարմնի ծավալը (4053-4055).

4053. $z = \pm c$ և $\begin{cases} x = a\cos u\cos v + b\sin u\sin v, \\ y = a\cos u\sin v - b\sin u\cos v, \\ z = c\sin u: \end{cases}$

4054. $x = 0$, $z = 0$, $\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = -u + a\cos v, \end{cases}$ $u \ge 0$ $(a > 0)$:

4055. $\begin{cases} x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z = a\sin\psi, \end{cases}$ $(0 < a \le b)$:

***

4056. Գտնել $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ դաշտի գրադիենտը. ա) $O(0;0;0)$ կետում; բ) $A(2;0;1)$ կետում: Ո՞ր կետում է գրադիենտը հավասար զրոյի:

4057. R^3 տարածության ո՞ր կետում է $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ դաշտի գրադիենտը՝

ա) ուղղահայաց Oz առանցքին;

բ) զուգահեռ Oz առանցքին;

գ) հավասար զրոյի:

4058. Տրված է $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ $(a, b, c \in R)$ սկալյար դաշտը: Ո՞ր կետերում է ճշմարիտ $|\mathrm{grad}\, u| = 1$ հավասարությունը:

4059. Գտնել $A(1;2;2)$ և $B(-3;1;0)$ կետերում $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ դաշտի գրադիենտների կազմած անկյունը:

4060. Դիցուք $f : R^2 \to R$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է: Ապացուցել, որ ցանկացած u և v սկալյար դաշտերի համար

$$\mathrm{grad}\, f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \mathrm{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v} \mathrm{grad}\, v:$$

4061. Դիցուք u-ն սկալյար դաշտ է: Ցույց տալ, որ

ա) $\mathrm{grad}\, u(M)$-ը զուգահեռ է $M \in R^3$ կետով անցնող $u(x, y, z) = u(M)$ մակարդակի մակերևույթի նորմալին;

բ) $\mathbf{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ վեկտորի ուղղությամբ u դաշտի ածանցյալը հավասար է $\langle \mathrm{grad}\, u, \mathbf{e} \rangle$-ի;

գ) $\mathbf{e}$-ի ուղղությամբ u դաշտի ածանցյալը կլինի մեծագույնը այն և միայն այն դեպքում, երբ $\mathbf{e}$-ն համուղղված է $\mathrm{grad}\, u$-ին:

4062. Գտնել $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $(a, b, c \in R)$ սկալյար դաշտի ածանցյալը $M(x; y; z)$ կետում, $\mathbf{r} = OM$ շառավիղ-վեկտորի ուղղությամբ: Ի՞նչ պայմանի դեպքում այդ ածանցյալը հավասար կլինի գրադիենտի մեծությանը:

4063. Դիցուք՝ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ և $u = \frac{1}{r}$: Գտնել u դաշտի ածանցյալը $\mathbf{l} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ միավոր վեկտորի ուղղությամբ:

4064. Դիցուք $u = u(x, y, z)$-ը և $v = v(x, y, z)$-ը սկալյար դաշտեր են: Գտնել u դաշտի ածանցյալը $\mathrm{grad}\, v$-ի ուղղությամբ:

4065. Դիցուք $f : R \to R$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, $\mathbf{r}$-ը $(x; y; z) \in R^3$ կետի շառավիղ-վեկտորն է և $r = |\mathbf{r}|$: Ապացուցել, որ $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$:

4066. Դիցուք $f:R\to R^3$ և $g:R\to R^3$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են, $\mathbf{r}$-ը $(x;y;z)\in R^3$ կետի շառավիղ-վեկտորն է, $r=|\mathbf{r}|$: Ապացուցել, որ

ա) $\nabla\langle f(r),\mathbf{r}\rangle = f(r)+\langle f'(r),\mathbf{r}\rangle\dfrac{\mathbf{r}}{r}$;

բ) $\nabla\langle f(r),g(r)\rangle = \left(\langle f'(r),g(r)\rangle+\langle f(r),g'(r)\rangle\right)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$:

4067. Դիցուք D-ն R^3-ում ուռուցիկ տիրույթ է, իսկ u-ն՝ D-ի վրա սկալյար դաշտ: Ապացուցել, որ եթե $|\mathrm{grad}\,u|\le M$, ապա ցանկացած $A,B\in D$ կետերի համար

$$|u(A)-u(B)|\le M|A-B|:$$

4068. Դիցուք $\mathbf{a}$-ն և $\mathbf{b}$-ն վեկտորական դաշտեր են, u-ն սկալյար դաշտ է, $\mathbf{c}\in R^3$ և $\lambda,\mu\in R$: Ապացուցել, որ

ա) $\mathrm{div}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\mu\,\mathrm{div}\,\mathbf{b}$;

բ) $\mathrm{div}(u\mathbf{c})=\langle\mathbf{c},\mathrm{grad}\,u\rangle$;

գ) $\mathrm{div}(u\mathbf{a})=u\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}+\langle\mathbf{a};\mathrm{grad}\,u\rangle$;

դ) $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u=\Delta u$ (Δ-ն Լապլասի օպերատորն է):

4069. Գտնել տրված A կետում $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտի դիվերգենցիան.

ա) $\mathbf{a}=x\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$, $A(1;0;3)$;

բ) $\mathbf{a}=\dfrac{-x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $A(3;4;5)$:

4070. Դիցուք $\mathbf{a}$-ն $\Omega\subset R^3$ տիրույթում վեկտորական դաշտ է և $M\in\Omega$: Ապացուցել, որ

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a}(M)=\lim_{d\to 0}\frac{1}{v(D)}\iint_{\partial D}\langle\mathbf{a},\mathbf{n}\rangle dS,$$

որտեղ D-ն Ω-ում տիրույթ է և $\overline{D}\subset\Omega$, $M\in D$, ∂D-ն՝ D-ի եզրը, փակ ողորկ մակերևույթ է, $d=diamD$, $v(D)$-ն D-ի ծավալն է, $\mathbf{n}$-ը՝ ∂D-ի արտաքին միավոր նորմալը:

4071. Ապացուցել, որ վեկտորական դաշտի դիվերգենցիան կախված չէ դեկարտյան կոորդինատական համակարգի ընտրությունից:

4072. Դիցուք $\mathbf{a}$-ն և $\mathbf{b}$-ն վեկտորական դաշտեր են, u-ն՝ սկալյար դաշտ, $\mathbf{c}\in R^3$ և $\mu,\lambda\in R$: Ապացուցել, որ ա) $\operatorname{rot}(\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b})=\mu\operatorname{rot}\mathbf{a}+\lambda\operatorname{rot}\mathbf{b}$;

բ) $\operatorname{rot}(u\mathbf{c})=[\operatorname{grad}u,\mathbf{c}]$;

գ) $\operatorname{rot}(u\mathbf{a})=u\operatorname{rot}\mathbf{a}+[\operatorname{grad}u,\mathbf{a}]$;

դ) $\operatorname{rot}[\mathbf{c},\mathbf{a}]=\mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{a}-\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\mathbf{a}$, որտեղ $\langle\mathbf{c},\nabla\rangle\mathbf{a}=c^1\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+c^2\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+c^3\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}$;

ե) $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}+\langle\mathbf{b},\nabla\rangle\mathbf{a}-\langle\mathbf{a},\nabla\rangle\mathbf{b}$;

զ) $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\langle\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a}\rangle-\langle\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b}\rangle$:

4073. Հաշվել $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M_0)$-ն, երբ

ա) $\mathbf{a}=xyz\mathbf{i}+(2x+3y-z)\mathbf{j}+(x^2+z^2)\mathbf{k}$, $M_0(1;3;2)$;

բ) $\mathbf{a}=\dfrac{y}{z}\mathbf{i}+\dfrac{z}{x}\mathbf{j}+\dfrac{x}{y}\mathbf{k}$, $M_0(1;2;-2)$:

4074. Դիցուք $\mathbf{a}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+(y^2+z^2)\mathbf{j}+(z^2+x^2)\mathbf{k}$: Հաշվել $\operatorname{rot}\mathbf{a}(1;2;3)$ և $\operatorname{rot}\mathbf{b}(1;1;-1)$ վեկտորների կազմած անկյունը:

4075. Դիցուք u-ն և v-ն սկալյար դաշտեր են: Ապացուցել, որ

ա) $\operatorname{div}[\nabla u,\nabla v]=0$;

բ) $\mathbf{a}=u\operatorname{grad}v$ և $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ վեկտորները փոխուղղահայաց են:

4076. Դիցուք u-ն սկալյար դաշտ է, իսկ $\mathbf{a}$-ն` վեկտորական: Ստուգել, որ

ա) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\mathbf{0}$; բ) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$:

Հաշվել $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտի հոսքը S մակերևույթով` արտաքին նորմալի ուղղությամբ (4077-4079).

4077. $\mathbf{a}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, S-ը $x^2+y^2\le p^2$, $0\le z\le q$ գլանի

ա) կողմնային մակերևույթն է; բ) լրիվ մակերևույթն է:

4078. $\mathbf{a}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, $S=\{(x;y;z): x^2+y^2+z^2=1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$:

4079. $\mathbf{a}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$, S-ը $x^2+y^2+z^2=x$ հավասարումով տրված սֆերան է:

4080. Դիցուք $\mathbf{a}$-ն վեկտորական դաշտ է Ω տիրույթում, G-ն Ω-ում տիրույթ է, որի եզրը` ∂G-ն, ողորկ մակերևույթ է և $\partial G\subset\Omega$: Ապացուցել, որ $\operatorname{rot}\mathbf{a}$-ի հոսքը ∂G մակերևույթով արտաքին նորմալի ուղղությամբ հավասար է զրոյի:

Գտնել L կորով $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտի աշխատանքը ($\mathbf{a}$-ի գծային ինտեգրալը) (4081-4083).

4081. $\mathbf{a}=\dfrac{1}{y}\mathbf{i}+\dfrac{1}{z}\mathbf{j}+\dfrac{1}{x}\mathbf{k}$, L-ը $M(1;1;1)$ կետը $N(2;4;8)$ կետին միացնող հատվածն է:

4082. $\mathbf{a}=e^{y-z}\mathbf{i}+e^{z-x}\mathbf{j}+e^{x-y}\mathbf{k}$, L-ը $O(0;0;0)$ կետը $M(1;3;5)$ կետին միացնող հատվածն է:

4083. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$, L-ը $A(\alpha;0;0)$ կետը $B(\alpha;0;2\pi\beta)$ կետին միացնող.

ա) $x=\alpha\cos t$, $y=\alpha\sin t$, $z=\beta t$ կորն է;

բ) հատվածն է:

Հանդիսանու՞մ է արդյոք $\mathbf{a}$-ն պոտենցիալ դաշտ:

Գտնել տրված L կորով $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտի շրջապտույտը (պտույտը, $(0;0;0)$ կետից նայելիս, կատարվում է ժամացույցի սլաքի շարժմանը հակառակ ուղղությամբ) (4084-4085).

4084. $\mathbf{a}=z^2\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$, $L=\left\{(x;y;z): x^2+y^2+z^2=1, x+y+z=1\right\}$:

4085. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, $L=\left\{(x;y;z): x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2=z^2, z\ge 0\right\}$:

4086. Գտնել $\mathbf{a}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ վեկտորական դաշտի շրջապտույտը $z=0$ հարթության մեջ գտնվող կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ, փակ L կորով, որով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը S է:

Համոզվել, որ $\mathbf{a}$-ն պոտենցիալ դաշտ է և գտնել նրա պոտենցիալը (4087-4088).

4087. $\mathbf{a}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$:

4088. $\mathbf{a}=(y+z)\mathbf{i}+(z+x)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$:

Ստուգել սոլենոիդայի՞ն է արդյոք $\mathbf{a}$ դաշտը (4089-4091).

4089. $\mathbf{a}=x^2yz\mathbf{i}+xy^2z\mathbf{j}-xyz^2\mathbf{k}$:

4090. $\mathbf{a}=xy\mathbf{k}$:

4091. $\mathbf{a}=\dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}+xy\mathbf{k}$:

4092. Դիցուք $G\subset R^3$ միակապ տիրույթում $\mathbf{a}$ վեկտորական դաշտը բավարարում է $\operatorname{rot}\mathbf{a}=\mathbf{0}$ և $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$ պայմաններին: Ապացուցել, որ $\mathbf{a}$-ն պոտենցիալ դաշտ է և որ նրա պոտենցիալը G-ում հարմոնիկ ֆունկցիա է:

$\mathbf{a}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$, $0<x^2+y^2<1$ դաշտի օրինակով համոզվել, որ տիրույթի միակապությունն այստեղ էական է:

Գ

4093. Դիցուք՝ $\varphi\in C^1(R)$ և AmB-ն $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ կետերը միացնող ողորկ կոր է, որը չի հատվում AB հատվածի հետ: Հաշվել

$$\int\limits_{AmB}\left[\varphi(y)e^x-my\right]dx+\left[\varphi'(y)e^x-m\right]dy$$

կորագիծ ինտեգրալը, եթե AmB կորով և AB հատվածով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը S է:
4094. Հաշվել
$$I=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{XdY-YdX}{X^2+Y^2}$$
ինտեգրալը, եթե $X=ax+by$, $Y=cx+dy$ $(ad-bc\neq 0)$ և L պարզ, փակ կորով սահմանափակված տիրույթը պարունակում է $(0;0)$ կետը:
4095. Հաշվել նախորդ խնդրում առաջադրված L կորով I ինտեգրալը, եթե $X=\varphi(x,y)$, $Y=\psi(x,y)$, ընդ որում՝ $\varphi(x,y)=0$ և $\psi(x,y)=0$ կորերը L-ի ներսում ունեն հատման $(x_i;y_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ պարզ կետեր:
4096. Ապացուցել, որ եթե L-ը փակ կոր է, իսկ $\mathbf{v}$-ն՝ ցանկացած վեկտոր, ապա
$$\int_L \langle \mathbf{v},\mathbf{n}\rangle ds=0,$$
որտեղ $\mathbf{n}$-ը L-ի արտաքին միավոր նորմալն է:
4097. Դիցուք L պարզ, փակ կորով սահմանափակված տիրույթի մակերեսը P է: Հաշվել
$$\int_L \left[x\langle \mathbf{n},\mathbf{i}\rangle+y\langle \mathbf{n},\mathbf{j}\rangle\right]ds \text{ -ը},$$
որտեղ $\mathbf{n}$-ը L-ի արտաքին միավոր նորմալն է:
4098. Հաշվել
$$U(x,y)=\int_L \ln\frac{1}{r}ds \quad \left(r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\right)$$
ինտեգրալը, եթե L-ը $\xi^2+\eta^2=R^2$ շրջանագիծն է:
4099. Հաշվել Գաուսի կորագիծ ինտեգրալը՝
$$u(x,y)=\int_L \frac{\langle \mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{|\mathbf{r}|^2}ds \text{ -ը},$$
որտեղ $\mathbf{r}$-ը $A(x;y)$ կետը L պարզ, փակ, ողորկ կորի $(\xi;\eta)$ փոփոխական կետին միացնող վեկտորն է, իսկ $\mathbf{n}$-ը՝ $(\xi;\eta)$ կետում L-ի արտաքին միավոր նորմալը:
4100. Ապացուցել, որ u-ն $D\subset R^2$ տիրույթում հարմոնիկ է այն և միայն այն դեպքում, երբ D-ում ընկած ցանկացած L ողորկ, փակ կորի համար
$$\int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}ds=0,$$

որտեղ $\mathbf{n}$ -ը L -ի յուրաքանչյուր կետում արտաքին միավոր նորմալն է:

4101. Դիցուք D-ն R^2-ում L ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է, G տիրույթը պարունակում է $\overline{D}$-ն և $u \in C^2(G)$: Ապացուցել

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy = -\iint_D u\Delta u dxdy + \int_L u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds$$

բանաձևը, որտեղ Δ -ն Լապլասի օպերատորն է, իսկ $\mathbf{n}$ -ը՝ L -ի արտաքին միավոր նորմալը:

4102. Դիցուք D-ն R^2-ում L ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է: Ապացուցել, որ $G \supset \overline{D}$ տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիան D-ում միարժեքորեն վերականգնվում է L-ի վրա ընդունած իր արժեքներով:

4103. Ապացուցել Գրինի երկրորդ բանաձևը.

$$\iint_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdy = \int_L \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

որտեղ D-ն R^2-ում L ողորկ կորով սահմանափակված տիրույթ է, u-ն և v-ն $\overline{D}$-ն պարունակող տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են, իսկ $\mathbf{n}$ -ը L կորի արտաքին միավոր նորմալն է:

4104. Դիցուք D-ն R^2-ում L կորով սահմանափակված տիրույթ է, իսկ u-ն՝ $G \supset \overline{D}$ տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա: Գրինի երկրորդ բանաձևի միջոցով u ֆունկցիայի համար ստանալ

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \ln r \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) ds$$

ներկայացումը, որտեղ $\mathbf{n}$ -ը L-ի արտաքին միավոր նորմալն է, իսկ r -ը՝ $(x;y)$ կետի և L կորի $(\xi;\eta)$ փոփոխական կետի հեռավորությունը:

4105. Դիցուք $u(x,y)$-ը G տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա է: Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թեորեմը. ցանկացած $B((x_0;y_0);R) \subset G$ շրջանի համար

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B} u(x,y) ds :$$

4106. Դիցուք D-ն R^2-ում սահմանափակ տիրույթ է: Ապացուցել, որ $G \supset \overline{D}$ տիրույթի վրա հարմոնիկ և նույնաբար հաստատունից տարբեր ֆունկցիան D-ի կետերում չի կարող ընդունել մեծագույն կամ փոքրագույն արժեքներ:

4107. Հաշվել
$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x,y,z)ds$$
մակերևույթային ինտեգրալը, որտեղ
$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, \text{ երբ } x^2+y^2+z^2\le 1,\\ 0, \text{ երբ } x^2+y^2+z^2>1:\end{cases}$$
4108. Հաշվել
$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t^2} f(x,y,z)ds$$
մակերևույթային ինտեգրալը, որտեղ
$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, \text{ երբ } z\ge\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, \text{ երբ } z<\sqrt{x^2+y^2}:\end{cases}$$
4109. Հաշվել
$$F(x,y,z,t)=\iint\limits_{P} f(\xi,\eta,\zeta)ds$$
մակերևույթային ինտեգրալը, որտեղ P-ն $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$ սֆերան է,
$$f(\xi,\eta,\zeta)=\begin{cases}1, \text{ երբ } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2,\\ 0, \text{ երբ } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\ge a^2,\end{cases}$$
և $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0$:

4110. Ապացուցել, որ եթե P-ն պարզ, փակ մակերևույթ է, $\mathbf{e}$-ն՝ ցանկացած հաստատուն վեկտոր, իսկ $\mathbf{n}$-ը P-ի արտաքին միավոր նորմալը, ապա
$$\iint\limits_{P}\langle\mathbf{n},\mathbf{e}\rangle dS=0,$$
որտեղ $\mathbf{n}$-ը արտաքին նորմալի միավոր վեկտորն է:

4111. Ապացուցել բանաձևը.
$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z,t)dxdydz\right\}=$$
$$=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x,y,z,t)dS+\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2}\frac{\partial f}{\partial t}dxdydz\quad (t>0):$$

4112. Դիցուք P-ն V մարմինը սահմանափակող փակ, ողորկ մակերևույթ է, $\mathbf{n}$-ը՝ $(\xi;\eta;\zeta)$ կետում P-ի արտաքին միավոր նորմալը, $\mathbf{r}$-ը՝ $(x;y;z)$ կետը $(\xi;\eta;\zeta)$ կետին միացնող վեկտորը: Ապացուցել բանաձևը.

$$\iiint\limits_V \frac{1}{r}d\xi d\eta d\zeta = \frac{1}{2}\iint\limits_P \frac{\langle \mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{|\mathbf{r}|}dS$$

4113. Հաշվել Գաուսի մակերևութային ինտեգրալը.

$$\iint\limits_P \frac{\langle \mathbf{r},\mathbf{n}\rangle}{|\mathbf{r}|^3}dS \text{ -ը,}$$

որտեղ P-ն պարզ, փակ, ողորկ մակերևույթ է, $\mathbf{n}$-ը՝ $(\xi;\eta;\zeta)$ կետում P-ի արտաքին միավոր նորմալը, $\mathbf{r}$-ը՝ $(x;y;z)$ կետը $(\xi;\eta;\zeta)$ կետին միացնող վեկտորը: Դիտարկել երկու դեպք. P-ով սահմանափակված տիրույթը

ա) պարունակում է $(x;y;z)$ կետը;

բ) չի պարունակում $(x;y;z)$ կետը:

4114. Դիցուք P ողորկ մակերևույթը V սահմանափակ մարմնի եզրն է, G տիրույթը պարունակում է $\overline{V}$-ն և $u \in C^2(G)$: Ապացուցել, որ

ա) $$\iint\limits_P \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \iiint\limits_V \Delta u dxdydz;$$

բ) $$\iint\limits_P u\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}dS = \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz + \iiint\limits_V u\Delta u dxdydz$$

բանաձևերը, որտեղ Δ-ն Լապլասի օպերատորն է, $\mathbf{n}$-ը՝ P-ի արտաքին միավոր նորմալը:

4115. Ապացուցել Գրինի երկրորդ բանաձևը.

$$\iiint\limits_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dxdydz = \iint\limits_P \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

որտեղ P-ն $V \subset R^3$ տիրույթի ողորկ եզրն է, $\mathbf{n}$-ը՝ P-ի արտաքին միավոր նորմալը, իսկ u-ն և v-ն $G \supset \overline{V}$ տիրույթում երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

4116. Դիցուք V-ն ողորկ սահմանափակված տիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե u-ն $G \supset \overline{V}$ տիրույթում հարմոնիկ է, ապա ճշմարիտ են հետևյալ բանաձևերը.

ա) $\iint\limits_{\partial V} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS = 0$;

բ) $\iiint\limits_{V} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dxdydz = \iint\limits_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS$,

որտեղ $\mathbf{n}$ -ը ∂V -ի արտաքին միավոր նորմալն է:

Օգտվելով բ) բանաձևից, ապացուցել, որ հարմոնիկ ֆունկցիան միարժեք վերականգնվում է տիրույթի եզրի վրա ընդունած իր արժեքներով:

4117. Դիցուք V -ն R^3 -ում փակ, ողորկ մակերևույթով սահմանափակված տիրույթ է: Ապացուցել, որ եթե u -ն $G \supset \overline{V}$ տիրույթում հարմոնիկ է, ապա

$$u(x,y,z) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial V} \left[u \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{1}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] dS,$$

որտեղ $\mathbf{r}$ -ը V -ի $(x;y;z)$ կետը P -ի $(\xi;\eta;\zeta)$ փոփոխական կետին միացնող վեկտորն է, $\mathbf{n}$ -ը՝ $(\xi;\eta;\zeta)$ կետում ∂V -ի արտաքին նորմալը:

4118. Դիցուք u -ն $G \subset R^3$ տիրույթում հարմոնիկ ֆունկցիա է և $\overline{B}(\mathbf{a}_0 r) \subset G$: Ապացուցել միջին արժեքի հետևյալ թեորեմը.

$$u(\mathbf{a}_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{\partial B} u(x,y,z) dS,$$

4119. Դիցուք V -ն R^3 -ում տիրույթ է: Ապացուցել, որ V -ում հարմոնիկ և հաստատունից տարբեր ֆունկցիան V -ի կետերում չի կարող ունենալ մեծագույն կամ փոքրագույն արժեք (մաքսիմումի սկզբունք):

Պատասխաններ

Գլուխ 10

2414. $\frac{1}{1-q}$: **2415.** $-\frac{1}{3}$: **2416.** $\frac{3}{2}$: **2417.** 1: **2418.** $\frac{1}{3}$: **2420.** $1-\sqrt{2}$: **2421.** $\frac{1}{4}$: **2422.** $\frac{\sin 2}{2}$: **2423.** $\ln\frac{1}{2}$: **2424.** 1: **2425.** 1: **2431.** ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: **2432.** ա) Տարամետ է; բ) տարամետ է: **2433.** ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: **2434.** ա) Տարամետ է; բ) տարամետ է: **2435.** Ոչ: **2439.** Զուգամետ է, երբ $\alpha>1$; տարամետ է, երբ $\alpha\le 1$: **2440.** Տարամետ է: **2441.** Զուգամետ է: **2442.** Տարամետ է: **2443.** Զուգամետ է: **2444.** Զուգամետ է: **2445.** Տարամետ է: **2446.** Զուգամետ է: **2447.** Զուգամետ է: **2448.** Զուգամետ է: **2449.** Զուգամետ է, երբ $q>p+1$; տարամետ է, երբ $q\le p+1$: **2450.** Տարամետ է: **2451.** Տարամետ է: **2452.** Զուգամետ է: **2453.** Տարամետ է: **2454.** Տարամետ է: **2455.** Զուգամետ է: **2456.** ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: **2463.** Զուգամետ է: **2464.** Զուգամետ է: **2465.** Զուգամետ է: **2466.** Զուգամետ է: **2467.** Զուգամետ է: **2468.** Զուգամետ է: **2469.** Զուգամետ է: **2470.** Զուգամետ է: **2471.** Զուգամետ է: **2472.** Զուգամետ է: **2473.** Զուգամետ է: **2474.** Զուգամետ է: **2475.** ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha>1$;տարամետ է, երբ $\alpha\le 1$; բ) տարամետ է: **2476.** ա) Զուգամետ է; բ) զուգամետ է: **2477.** ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha>1$; տարամետ է, երբ $\alpha\le 1$; բ) տարամետ է: **2478.** ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha>1$; տարամետ է, երբ $\alpha\le 1$; բ) զուգամետ է: **2489.** Ոչ: **2490.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p>1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0<p\le 1$: **2491.** Բացարձակ զուգամետ է: **2492.** Պայմանական զուգամետ է: **2493.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $\alpha>1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $\alpha\le 1$: **2494.** ա) Զուգամետ է; բ) տարամետ է; գ) կարող է լինել և զուգամետ, և՝ տարամետ: **2494.1.** ա) Զուգամետ է, երբ $\alpha>0{,}5$; տարամետ է, երբ $\alpha\le 0{,}5$; բ) զուգամետ է; գ) զուգամետ է; դ) զուգամետ է; ե) տարամետ է; զ) զուգամետ է; է) զուգամետ է; ը) զուգամետ է; թ) զուգամետ է; ժ) զուգամետ է; ժա) տարամետ է; ժբ) զուգամետ է: **2510.** Տարամիտում է զրոյի: **2511.** Տարամետ է: **2512.** Տարամիտում է զրոյի: **2513.** Զուգամետ է: **2514.** Տարամիտում է զրոյի: **2515.** Զուգամետ է, երբ $p>1$: **2516.** Զուգամետ է: **2517.** Զուգամետ է: **2518.** Զուգամետ է: **2519.** Զուգամետ է, երբ $|x|<1$: **2520.** 3 : **2521.** $\frac{q}{(1-q)^2}$: **2522.** $\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$: **2523.** $-\frac{2}{7}$: **2528.** ա) Կարող է և զուգամիտել, և ՝ տարամիտել; բ) տարամետ է: **2529.** ա) Զուգամետ է; բ) կարող է լինել ինչպես զուգամետ, այնպես էլ տարամետ:**2533.** Զուգամետ է: **2534.** Զուգամետ է: **2542.** Զուգամետ է, երբ $a > e$: **2543.** Զուգամետ է, երբ $p > 1{,}5$: **2544.** Զուգամետ է, երբ $\frac{p}{2} + q > 1$:**2545.** Զուգամետ է, երբ $p + q > 1$: **2546.** Զուգամետ է, երբ $q > p$: **2547.** Զուգամետ է, երբ $\alpha(q - p) > 1$: **2548.** Զուգամետ է: **2549.** Զուգամետ է, երբ $\gamma > \alpha + \beta$: **2551.** Զուգամետ է: **2552.** Տարամետ է: **2566.** Զուգամետ է, երբ $a = \frac{1}{2}$: **2567.** Զուգամետ է: **2568.** Զուգամետ է, երբ $\alpha > 2$: **2569.** Զուգամետ է: **2570.** Զուգամետ է, երբ $c = 0, \frac{a}{d} < -1$: **2571.** Զուգամետ է, երբ $a^b > e$ և $c = 0$ կամ $a^c > 1$: **2572.** Տարամետ է: **2573.** Տարամետ է: **2574.** Զուգամետ է: **2575.** Տարամետ է: **2576.** Զուգամետ է: **2577.** Զուգամետ է, երբ $a = \sqrt{bc}$: **2578.** Զուգամետ է, երբ $\alpha < -1$: **2579.** Զուգամետ է, երբ $\alpha > \frac{1}{2}$: **2580.** Զուգամետ է, երբ $a + b > 1$: **2581.** Զուգամետ է: **2582.** Զուգամետ է, երբ $p > 1$ կամ $p = 1$, $q > 1$: **2583.** Զուգամետ է: **2584.** Տարամետ է: **2585.** Զուգամետ է: **2586.** Զուգամետ է: **2587.** Տարամետ է: **2588.** Զուգամետ է: **2589.** Զուգամետ է: **2590.** Զուգամետ է, երբ $\alpha > 2$: **2599.** $\frac{2}{9}$: **2600.** $\frac{10}{7}$: **2601.** $\ln 2$: **2602.** ա) $\frac{3}{2}\ln 2$; բ) $\frac{1}{2}\ln 2$: **2604.** Զուգամետ է: **2605.** Զուգամետ է: **2606.** Զուգամետ է: **2607.** Զուգամետ է: **2608.** Ոչ: **2609.** Ոչ: **2613.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $\frac{1}{2} < p \le 1$: **2614.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $|x - \pi k| < \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$; պայմանական զուգամետ է, երբ $x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}$: **2615.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < p \le 1$: **2616.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 2$; պայմանական զուգամետ է, երբ $1 < p \le 2$: **2617.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $\frac{1}{2} < p \le 1$: **2618.** Բացարձակ զուգամետ է: **2619.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $\alpha > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < \alpha \le 1$: **2620.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $\alpha > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < \alpha \le 1$: **2621.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 2$; պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < p \le 2$: **2622.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $\frac{1}{2} < p \leq 1$: **2623.** Տարամետ է: **2624.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $\alpha \geq 0$, պայմանական զուգամետ է, երբ $-1 < \alpha < 0$: **2625.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $q > p+1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $p < q \leq p+1$: **2626.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$, $q > 1$, պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < p = q \leq 1$: **2627.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $p = 1$: **2628.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $p = 1$: **2629.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$, $q > 1$, պայմանական զուգամետ է, երբ $0 < p = q \leq 1$: **2640.** $1 + 2\sqrt{2}$: **2641.** $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}$: **2642.** -2: **2647.** ա) Ոչ; բ) այո; գ) այո; դ) այո: **2648.** Զուգամետ է: **2649.** Զուգամետ է, երբ $|x| < 2$: **2650.** Զուգամետ է, երբ $|x| < 1$; երբ $x = 1$, զուգամետ է, եթե $p > 1$, $q > \frac{1}{2}$; երբ $x = -1$, զուգամետ է, եթե $p > \frac{1}{2}$, $q > \frac{1}{2}$: **2651.** Զուգամետ է, երբ $x \neq \pi k$, $k \in Z$: **2656.** Պայմանական զուգամետ է: **2657.** Բացարձակ զուգամետ է, երբ $p > 1$; պայմանական զուգամետ է, երբ $\frac{1}{2} < p \leq 1$: **2658.** Տարամետ է: **2659.** Տարամետ է: **2664.** ա) 1; բ) $e/2$; գ) 1: **2665.** Զուգամետ է: **2666.** Զուգամետ է: **2667.** Զուգամետ է, երբ $\alpha > 2$: **2668.** Զուգամետ է, երբ $\alpha > 2$: **2677.** ա) Ոչ; բ) այո; գ) ոչ; դ) ոչ: **2688.** Ոչ:

Գլուխ 11

2722. ա) $f(x) = 0$, $x \in (-1;1)$, $f(1) = 1$; բ) $f(x) = 0$, $x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in Z\right\}$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = 1$, $k \in Z$; գ) $f(x) = 0$, $x \in R \setminus \{\pm 1\}$, $f(1) = 1$: **2723.** ա) $f(x) = x^2$; բ) $f(x) = 2x^4$: **2724.** ա) $f(x) = 0$, $x \in [-1;1)$, $f(x) = \frac{\pi}{2}(x+1)$, $x \in (1,+\infty)$, $f(1) = \frac{\pi}{2}$; բ) $f(0) = 0$: **2725.** $f(x) = e^{-x^2}$: **2726.** $f(x) = 0$, $x \in$ $\in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$: **2727.** ա) $f(x) = x$; բ) $f(x) = 1$, $x \neq 0$: **2728.** ա) $f(x) = 0$, $x \in (0;+\infty)$; բ) $f(x) = 0$, $x \in R_+$: **2729.** ա) $f(x) = 1$, $x \in [-1;1]$,

$f(x)=x^2$, $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; բ) $f(x)=1$, $x\in R_+$, $f(x)=e^{-x}$, $x\in(-\infty;0)$: **2730.**ա) $f(x)=\ln x$; բ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{2}$, $x>0$, $f(0)=0$: **2731.**ա) Բացարձակ զուգամետ է $(-1;1)$-ում; բ) բացարձակ զուգամետ է $R\setminus[-1;1]$-ում; գ) բացարձակ զուգամետ է $R\setminus[-1;1]$-ում: **2732.** ա) Բացարձակ զուգամետ է $\left(\dfrac{1}{e};e\right)$-ում; բ) զուգամետ է $\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$-ում, բացարձակ զուգամետ է $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\setminus\{0\}$-ում; գ) բա-ցարձակ զուգամետ է $(-\infty;0)$-ում: **2733.** ա) Բացարձակ զուգամետ է, երբ $|x|>1$; բ) բացարձակ զուգամետ է $R\setminus\{\pm1\}$-ում: **2734.** ա) Բացարձակ զուգամետ է $(0;+\infty)$-ում; բ) բացարձակ զուգամետ է R_+-ում: **2735.** ա) Բացարձակ զուգամետ է R-ում; բ) բացարձակ զուգամետ է $(-2;2)$-ում: **2736.** ա) Բացարձակ զուգամետ է $R_+\cup\{\pi k : k\in Z_-\}$; բ) զուգամետ է $\bigcup\limits_{k\in Z}[2\pi k,\pi+2\pi k]$-ում, բացարձակ զուգամետ է $\bigcup\limits_{k\in Z}(2\pi k,\pi+2\pi k)$-ում: **2737.** ա) Բացարձակ զուգամետ է R-ում; բ) բացարձակ զուգամետ է R-ում: **2738.** ա) Բացարձակ զուգամետ է $\left(-\sqrt{e-2};\sqrt{e-2}\right)$-ում; բ) զուգամետ է $(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$-ում, բացարձակ զուգամետ է $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$-ում: **2739.** ա) Պայմանական զուգամետ է R-ում; բ) պայմանական զուգամետ է $R\setminus\{\pi k\}$-ում, $k\in Z$: **2740.** ա) Բացարձակ զուգամետ է $(-0{,}5;3{,}5)$-ում; բ) զուգամետ է $R\setminus\{1\}$-ում, բացարձակ զուգամետ է $R\setminus\{\pm1\}$-ում: **2751.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2752.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2753.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2754.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2755.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2756.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2761.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) Հավասարաչափ զուգամետ է: **2762.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2763.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2764.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2765.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2766.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2767.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2768.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2769.** Անընդհատ է: **2770.** ա) Անընդհատ է; բ) խզվող է $x=1$ կետում: **2771.** Խզվող է $x=0$ կետում: **2772.** Անընդհատ է: **2776.** $\ln\sqrt{2}$: **2777.** 1: **2778.** 1: **2779.** $0{,}5$: **2780.** $0{,}5$: **2784.** ա) Ոչ; բ) այո: **2785.** 0: **2786.** 0: **2787.** 2: **2788.** 0:

2789. $\dfrac{e}{e^2-1}$: **2790.** 1: **2793.** ա) $-\ln(1-x)$, $x\in[-1;1)$; բ) $(x-1)^{-2}$, $x\in(-1;1)$; գ) $2xarctgx-\ln\left(1+x^2\right)$, $x\in[-1;1]$; դ) $2(1-x)^{-3}$, $x\in(-1;1)$: **2794.** ա) $R=1$, $(-1;1)$; բ) $R=1$, $[-1;1)$; գ) $R=1$, $(-1;1]$; դ) $R=1$; $[-1;1]$: **2795.** ա) $R=\dfrac{1}{2}$, $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; բ) $R=3$; $(-3;3)$: **2796.** ա) $R=0$, $\{0\}$; բ) $R=\infty$, $(-\infty;+\infty)$: **2797.** $R=\dfrac{1}{3}$, $\left[-\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$: **2798.** $R=3$, $(0;6)$: **2799.** $R=a$, $(-a;a)$: **2800.** $R=\dfrac{1}{a}$, $\left[-\dfrac{1}{a};\dfrac{1}{a}\right)$: **2801.** $[0;+\infty)$: **2802.** $(-\infty;-0{,}5)\cup(0{,}5;+\infty)$: **2803.** $(-1;+\infty)$: **2804.** $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\dfrac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$: **2806.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, $x\in R$: **2807.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$: **2808.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$: **2809.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in R$: **2810.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in R$: **2811.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $x\in R$: **2812.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-2)!}$, $x\in R$: **2813.** $\sum\limits_{n=10}^{\infty}x^n$, $x\in(-1;1)$: **2814.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, $x\in(-1;1)$: **2815.** $x+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2n-3)!!}{(n-1)!}x^n$, $x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$: **2816.** $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}x^{3n}$, $x\in(-1;1)$: **2817.** $2-\dfrac{x^3}{12}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{n!\cdot3^n\cdot2^{3n-1}}x^{3n}$, $x\in(-2;2)$: **2818.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n\cdot10^n}+$ $+\ln10$, $x\in(-10;10]$: **2819.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x\in(-1;1)$: **2820.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-(-2)^n}{3}x^n$, $x\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$: **2821.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1-(-1)^n}{4}x^n$, $x\in(-1;1)$: **2822.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+5}}{(2n+5)n!}$, $x\in R$: **2823.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot n!}$, $x\in R$: **2824.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$, $x\in R$: **2825.**

$x+\frac{x^7}{14}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\cdot 2^n(6n+1)}x^{6n+1}$, $x\in[-1;1]$: **2826.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(4n+1)2^n n!}x^{4n+1}$, $x\in[-1;1]$: **2827.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{9n+1}}{9n+1}$, $x\in(-1;1)$: **2828.** $0{,}2398$, 10^{-4}-ի ճշտությամբ: **2829.** $0{,}0314462$, 10^{-7}-ի ճշտությամբ: **2830.** $0{,}957$, 10^{-3}-ի ճշտությամբ: **2831.** $0{,}079$, 10^{-3}-ի ճշտությամբ: **2832.** $\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}$: **2833.** $T_m(x)$: **2834.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(2n-1)x$; $\frac{\pi}{4}$: **2835.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\sin nx}{n}$: **2836.** $\frac{\pi}{2}-$ $-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$: **2837.** $\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$: **2838.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$: **2839.** $\frac{2\sin\pi p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-p^2}$ **2840.** $\frac{2sh\pi p}{\pi}\times$ $\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+p^2}\sin nx$: **2841.** $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$: **2842.** $-\frac{\sin x}{2}+$ $+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$: **2843.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$: **2844.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$: **2846.** $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$: **2847.** $2a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2a}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{a}$: **2848.** $2sh1\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos\pi nx-\pi n\sin\pi nx}{(\pi n)^2+1}\right)$: **2849.** $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$: **2850.** Զուգամետ է R_+-ում; բացարձակ զուգամետ է $(0;+\infty)$-ում: **2851.** Զուգամետ է $R\setminus\{1\}$-ում; բացարձակ զուգամետ է $R\setminus\{\pm1\}$-ում: **2852.** Բացարձակ զուգամետ է $(-1;1)$-ում: **2853.** Զուգամետ է $[-1;1)$-ում, բացարձակ զուգամետ է $(-1;1)$-ում: **2854.** Բացարձակ զուգամետ է $(-1;1)$-ում: **2855.** Բացարձակ զուգամետ է $(1;+\infty)$-ում: **2856.** Բացարձակ զուգամետ է $R\setminus\{-1\}$-ում: **2857.** $p>1$ դեպքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ $0<p\le1$ դեպքում պայմանական զուգամետ է: **2858.** Բացարձակ զուգամետ է $\{2\}\cup(e;+\infty)$-ում: **2859.** Բացար-

ծակ զուգամետ է $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{6};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\frac{\sqrt{17}+3}{6}\right)$-ում: **2860.** Բացարձակ զուգամետ է $\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right]$-ում: **2861.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2862.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2863.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ չէ; բ) հավասարաչափ զուգամետ է: **2864.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2865.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2866.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2867.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2868.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2869.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2870.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2871.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2872.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2874.** $\int_x^{x+1} f(t)dt$: **2888.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2889.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2890.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2891.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2892.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2893.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **2894.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ չէ; բ) հավասարաչափ զուգամետ է: **2895.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **2902.** Անընդհատ է: **2903.** Անընդհատ է: **2904.** Անընդհատ է: **2905.** Անընդհատ է: **2907.** Ոչ: **2913.** Ոչ: **2917.** $\alpha<2$: **2918.** Այո: **2919.** Այո: **2924.** $\ln(x+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; $arctgx=$ $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$: **2925.** $(-4;4)$: **2926.** $(-2;2]$: **2927.** $\left(-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$: **2928.** $(-1;1)$: **2929.** $[-1;1)$: **2930.** $[-1;1)$: **2931.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$: **2932.** $(0;2]$: **2933.** $(-1;1)$: **2934.** $(-1;1)$: **2937.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n$: **2938.** $1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right)x^n$: **2939.** $x+$ $+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$: **2940.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$: **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{2}{n+1}x^{n+1}$: **2942.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}$: **2945.** $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup$

$\bigcup\left(\frac{1}{2};2\right)$; $\frac{2x}{(2-x)^2}-\frac{2x}{(2x-1)^2}$: **2947.** $-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}\cos 2nx$:

2948. $\frac{a+b}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a-b)\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi n}\cos nx$: **2949.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$: **2950.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$: **2951.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$: **2952.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$: **2953.** $\left(\frac{1}{2p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{p\cos nx}{n^2-p^2}\right)\frac{2\sin\pi p}{\pi}$: **2955.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$: **2956.** $\frac{\pi}{2}\sin x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16n}{\pi(4n^2-1)^2}\sin 2nx$: **2957.** ա) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx$; բ) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}$; գ) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$: $S_1=\frac{\pi^2}{6}$, $S_2=\frac{\pi^2}{12}$; $S_3=\frac{\pi^2}{8}$: **2958.** ա) 1; բ) $\frac{\pi^2}{3}-3$: **2961.** ա) $f(-x)=f(x)$, $f(\pi-x)=-f(x)$; բ) $f(-x)=-f(x)$, $f(\pi-x)=f(x)$: **2962.** ա) $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{(2n-1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\right)\cos(2n-1)x$; բ) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$: **2963.** ա) $a_n=\alpha_n$, $b_n=-\beta_n$; բ) $a_n=-\alpha_n$, $b_n=\beta_n$: **2972.** $\frac{\pi^2}{6}$: **2973.** ա) $\frac{\beta(\pi-\beta)}{2}$; բ) $\frac{\pi^2-3\pi\beta+3\beta^2}{6}$: **2976.** $\left\{\frac{\pi k}{2^m}: m\in Z_+, k\in Z\right\}$: **2977.** $\{0\}$: **2978.** $\ln 2$: **2979.** $0{,}5$: **2980.** $p!$: **2994.** Ոչ:

2997. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}$: **3017.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$:

Գլուխ 12

3030. Ոչ: **3031.** 7 : **3032.** 23 : **3033.** $5;2;7$: **3049.** Ոչ: **3050.** Ոչ: **3059.** 0 : **3060.** 3 : **3061.** -5 : **3062.** $-17/4$: **3090.** Օրինակ. $\cos^2 x = p(x) - q(x)$, որտեղ $p(x) = \sin^2 x$, երբ $0 \le x \le \pi/2$, $1 + \cos^2 x$, երբ $\pi/2 < x \le \pi$; $q(x) = -\cos 2x$, երբ $0 \le x \le \pi/2$, 1, երբ $\pi/2 < x \le \pi$: **3091.** Օրինակ. $\sin x = p(x) - q(x)$, որտեղ $p(x) = \sin x$, երբ $0 \le x \le \pi/2$, $2 - \sin x$, երբ $\pi/2 < x \le 3\pi/2$, $4 + \sin x$, երբ $3\pi/2 < x \le 2\pi$; $q(x) = 0$, երբ $0 \le x \le \pi/2$, $2 - 2\sin x$, երբ $\pi/2 < x \le 3\pi/2$, 4, երբ $3\pi/2 < x \le 2\pi$: **3092.** Օրինակ. $f(x) = p(x) - q(x)$, որտեղ $p(x) = x^2$, երբ $0 \le x < 1$, 2, երբ $x = 1$, 3, երբ $1 < x \le 2$; $q(x) = 2x^2$, երբ $0 \le x < 1$, 2, երբ $1 \le x \le 2$: **3097.** ա) $17/6$; բ) $34/3$; գ) $301/20$: **3098.** $2 - \pi/2$: **3099.** $2 - e^{\pi} - e^{-\pi}$: **3100.** $1 - \pi$: **3101.** $3/2$: **3119.** ա) Ոչ; բ) ոչ: **3126.** $\alpha > \beta$ կամ $\alpha = \beta \le 0$: **3127.** $f(x_0)$-ն պետք է չգտնվի $f(x_0 - 0)$ և $f(x_0 + 0)$ թվերի միջև: **3136.** $\sigma(a)$-ն և $\sigma(b)$-ն համապատասխանաբար A-ով և B-ով փոխարինելիս ինտեգրալի արժեքը կփոխվի $f(b)[B - \sigma(b)] - f(a)[A - \sigma(a)]$-ով: **3144.** Ոչ:

Գլուխ 13

3149. Այո: **3154.** Ոչ: **3158.** ա) $y \ge 0$ կիսահարթությունը; բ) $|x| \le 1$; $|y| \ge 1$; գ) $x^2 + y^2 \le 1$ շրջանը; դ) $x^2 + y^2 \le 1$ շրջանի արտաքին մասը; ե) $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ օղակը; զ) $x \le x^2 + y^2 < 2x$ լուսնյակը; է) $x + y < 0$ կիսահարթությունը; ը) $|y| \le |x|$ $(x \ne 0)$ անկյունները; թ) տարածության չորս օկտանտները; ժ) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ երկխոռոչ հիպերբոլոիդի ներքին մասը: **3159.** ա) Զուգահեռ ուղիղներ; բ) միակենտրոն շրջանագծեր; գ) երբ $z = 0$, $y = \pm x$ ուղիղները, երբ $z \ne 0$ հիպերբոլների ընտանիք; դ) զուգահեռ ուղիղներ; ե) $(0;0)$ գագաթով ուղիղների փունջ, առանց Ox առանցքի; զ) էլիպսների ընտանիք; է) առաջին և երրորդ քառորդներում ընկած հիպերբոլների ընտանիք; ը) Երբ $z \ne -1$, պարաբոլների ընտանիք; երբ $z = -1$, Ox առանցքն առանց սկզբնակետի: **3160.** ա) Զուգահեռ հարթությունների ընտանիք; բ) միակենտրոն գնդային մակերևույթների ընտանիք; գ) երկխոռոչ հիպերբոլոիդների ընտանիք, երբ $u < 0$; միախոռոչ հիպերբոլոիդների ընտանիք, երբ $u > 0$; կոն, երբ $u = 0$;

դ) հարթությունների ընտանիք, առանց $x-y+z=0$ հարթության կետերի: **3162.** ա) $\ln 2$; բ) 1: **3163.** ա) 1; բ) 1: **3164.** ա) 0; բ) 0; գ) 0; դ) 0; ե) e: **3165.** ա) $1;\ 0$; բ) $1;\ 0$: **3166.** ա) $1/3;\ 1/2$; բ) $1/2;\ -1/2$: **3167.** ա) $-1;\ 1$; բ) $-2/3;\ 1/2$: **3168.** ա) $1;\ 0$; բ) $1/2;\ 1$: **3169.** $\infty;\ 1$: **3173.** 0: Ոչ: **3174.** Ոչ: **3182.** Անընդհատ է: **3183.** $(0;0)$ կետում ըստ x-ի անընդհատ է, ըստ y-ի՝ խզվող: **3184.** Անընդհատ է: **3185.** Անընդհատ է: **3186.** Խզվող է $(R\setminus\{0\})\times\{0\}$ և $\{0\}\times(R\setminus\{0\})$ բազմությունների վրա: $(R\setminus\{0\})\times\{0\}$ բազմության կետերում ըստ x-ի անընդհատ է, ըստ y-ի՝ խզվող; $\{0\}\times(R\setminus\{0\})$ բազմության կետերում ըստ y-ի անընդհատ է, ըստ x-ի՝ խզվող: **3187.** Անընդհատ է: **3188.** Խզվող է $R\times\{0\}$ և $\{0\}\times R$ բազմությունների վրա: $(R\setminus\{0\})\times\{0\}$-ի $(\{0\}\times(R\setminus\{0\})-ի)$ կետերում ըստ x-ի (y-ի) անընդհատ է, ըստ y-ի (x-ի)՝ խզվող; $(0;0)$ կետում և՛ ըստ x-ի և՛ ըստ y-ի անընդհատ է: **3189.** $y=\pm x$ գծերի կետերում և՛ ըստ x-ի և ըստ y-ի խզվող է: **3190.** ա) Խզվող է $(R\times Z)\cup(Z\times R)$ բազմության վրա: $(R\setminus Z)\times Z$ $(Z\times(R\setminus Z))$ բազմության կետերում ըստ x-ի (y-ի) անընդհատ է, ըստ y-ի (x-ի)՝ խզվող: $Z\times Z$-ի կետերում և՛ ըստ x-ի և ըստ y-ի խզվող է: բ) Խզվող է և ըստ x-ի և ըստ y-ի $\{(x;y): x+y\in Z\}$ բազմության կետերում: **3191.** Ամենուրեք խզվող է: $R\times I$ $(I\times R)$ բազմության կետերում ըստ x-ի (y-ի) անընդհատ է: **3206.** ա), բ), գ) Ոչ: **3222.** ա) 1; բ) -1: **3223.** ա) 1; բ) e^{-1}: **3230.** Հավասարաչափ անընդհատ են: **3274.** Ոչ:

Գլուխ 14

3283. ա) $f'_x(1,1)=1$, $f'_y(1,1)=0$; բ) $f'_x(1,1)=\pi$, $f'_y(1,1)=4$; գ) $f'_x(0,0)= = f'_y(0,0)=0$; դ) $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$ **3284.** ա) $f'_x=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $f'_y=x\cos(x+y)$, $f''_{xy}=\cos(x+y)-x\sin(x+y)$, $f''_{xx}=2\cos(x+y)- -x\sin(x+y)$; բ) $f'_x=y+\dfrac{1}{y}$, $f'_y=x-\dfrac{x}{y^2}$, $f''_{xx}=0$, $f''_{xy}=1-\dfrac{1}{y^2}$, $f''_{yy}=\dfrac{2x}{y^3}$; գ) $f'_x=\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $f'_y=-\dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$, $f''_{xx}=-\dfrac{3xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$, $f''_{xy}=$

$=\dfrac{y\left(2x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$, $f''_{yy}=-\dfrac{x\left(x^2-2y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$; դ) $f'_x=\dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}$, $f'_y=-\dfrac{x^2}{y^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}$,

$f''_{xx}=\dfrac{2}{y}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}+\dfrac{8x^2}{y^2}\cdot\dfrac{tg\dfrac{x^2}{y}}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}$, $\quad f''_{xy}=-\dfrac{2x}{y^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}-\dfrac{4x^2}{y^3}\cdot\dfrac{tg\dfrac{x^2}{y}}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}$,

$f''_{yy}=\dfrac{2x^2}{y^3}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}+\dfrac{2x^4}{y^4}\cdot\dfrac{tg\dfrac{x^2}{y}}{\cos^2\dfrac{x^2}{y}}$: **3285.** ա) $f''_{xx}=y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xy}=$

$=(1+y\ln x)x^{y-1}$, $f''_{yy}=x^y\ln^2 x$; բ) $f''_{xx}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{xy}=-\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,

$f''_{yy}=-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; գ) $f''_{xx}=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$, $f''_{xy}=0$, $f''_{yy}=-\dfrac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}$ $(xy\neq 1)$; դ)

$f''_{xx}=-\dfrac{2x|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{xy}=\dfrac{\left(x^2-y^2\right)\operatorname{sgn} y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $f''_{yy}=\dfrac{2x|y|}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ $(y\neq 0)$: **3286.** ա)

$f'''_{xxx}=-\dfrac{1}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}$, $\quad f'''_{xyy}=-\dfrac{x^2}{y^5}\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{4x}{y^4}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{2}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}$; բ)

$f'''_{xxx}=-\dfrac{4x}{y}\left(3\cos x^2-2x^2\sin x^2\right)$, $\quad f'''_{xxy}=\dfrac{2\sin x^2+4x^2\cos x^2}{y^2}$: **3287.** ա)

$-\dfrac{216}{(1+2x+3y)^4}$; բ) $\dfrac{24y\left(x-y^2\right)}{\left(x+y^2\right)^4}$; գ) $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}=8xyze^{x^2+y^2+z^2}$,

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=\left(4y+8x^2y\right)e^{x^2+y^2+z^2}$; դ) $-\dfrac{x^{\frac{y}{z}}}{z^4}\ln^2 x(y\ln x+2z)$: **3288.** ա) $m!n!$; բ)

$\dfrac{2(-1)^m(m+n-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$; $\quad e^{x+y}\left[x^2+y^2+2(mx+ny)+m(m-1)+n(n-1)\right]$;

դ) $(x+m)(y+n)(z+k)e^{x+y+z}$: **3289.** ա) Այո; բ) այո; գ) ոչ; դ) ոչ: **3290.** Ոչ: **3291.**

ա) $u'_x = 2xf'\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u'_y = 2yf'\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u'_z = 2zf'\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{xx} = 2f'\left(x^2+y^2+z^2\right)+4x^2 f''\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{xy} = 4xyf''\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{yy} = 2f'\left(x^2+y^2+z^2\right)+4y^2 f''\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{zz} = 2f'\left(x^2+y^2+z^2\right)+$ $+4z^2 f''\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{xz} = 4xzf''\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $u''_{yz} = 4yzf''\left(x^2+y^2+z^2\right)$; բ) $u'_x = 2xf'\left(x^2-y^2\right)$, $u'_y = -2yf'\left(x^2-y^2\right)$, $u''_{xx} = 2f'\left(x^2-y^2\right)+$ $+4x^2 f''\left(x^2-y^2\right)$, $u''_{xy} = -4xyf''\left(x^2-y^2\right)$, $u''_{yy} = -2f'\left(x^2-y^2\right)+$ $+4y^2 f''\left(x^2-y^2\right)$; գ) $u'_x = y+f'(x-y)$, $u'_y = x-f'(x-y)$, $u''_{xx} = f''(x-y)$, $u''_{xy} = 1-f''(x-y)$, $u''_{yy} = f''(x-y)$; դ) $u'_x = yf'(xy)g(x-y)+$ $+f(xy)g'(x-y)$, $u'_y = xf'(xy)g(x-y)-f(xy)g'(x-y)$, $u''_{xx} =$ $= y^2 f''(xy)g(x-y)+2yf'(xy)g'(x-y)+f(xy)g''(x-y)$, $u''_{xy} =$ $= f'(xy)g(x-y)+xyf''(xy)g(x-y)+(x-y)f'(xy)g'(x-y)-f(xy)g''(x-y)$ $u''_{yy} = x^2 f''(xy)g(x-y)-2xf'(xy)g'(x-y)+f(xy)g''(x-y)$: **3292.** ա) $u'_x = f'_1\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$, $u'_y = -\frac{x}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$, $u''_{xx} = f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+$ $+\frac{2}{y}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y^2}f_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)$, $u''_{xy} = -\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)-$ $-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$, $u''_{yy} = \frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)$: բ) $u'_x = f'_1(x+y,x-y)+$ $+f'_2(x+y,x-y)$, $u'_y = f'_1(x+y,x-y)-f'_2(x+y,x-y)$, $u''_{xx} =$ $= f''_{11}(x+y,x-y)+2f''_{12}(x+y,x-y)+f''_{22}(x+y,x-y)$, $u''_{xy} =$ $= f''_{11}(x+y,x-y)-f''_{22}(x+y,x-y)$, $u''_{yy} = f''_{11}(x+y,x-y)-$ $-2f''_{12}(x+y,x-y)+f''_{22}(x+y,x-y)$; գ) $u'_x = \cos x f'_1(\sin x,\cos y)$, $u'_y =$ $= -\sin y f'_2(\sin x,\cos y)$, $u''_{xx} = -\sin x f'_1(\sin x,\cos y)+\cos^2 x f''_{11}(\sin x,\cos y)$, $u''_{xy} = -\cos x\sin y f''_{12}(\sin x,\cos y)$, $u''_{yy} = -\cos y f'_2(\sin x,\cos y)+$ $+\sin^2 y f''_{22}(\sin x,\cos y)$; դ) $u'_x = yf'_1(xy,x,y)+f'_2(xy,x,y)$, $u'_y = xf'_1(xy,x,y)+$ $+f'_3(xy,x,y)$, $u''_{xx} = y^2 f''_{11}(xy,x,y)+2yf''_{12}(xy,x,y)+f''_{22}(xy,x,y)$,

$u''_{xy} = f'_1(xy,x,y) + y\left(xf''_{11}(xy,x,y) + f''_{13}(xy,x,y)\right) + xf''_{21}(xy,x,y) + f''_{23}(xy,x,y)$, $u''_{yy} = x^2 f''_{11}(xy,x,y) + 2xf''_{13}(xy,x,y) + f''_{33}(xy,x,y)$: **3302.** $1-\sqrt{3}$: **3303.** $\cos\alpha + \sin\alpha$; ա) $\alpha = \pi/4$; բ) $\alpha = 5\pi/4$; գ) $\alpha = 3\pi/4$ և $\alpha = 7\pi/4$: **3304.** $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$: **3306.** $f'(\mathbf{0})$-ն $n\times m$ կարգի զրոական մատրից է: **3308.** ա) Դիֆերենցելի չէ; բ) դիֆերենցելի է; գ) դիֆերենցելի է; դ) դիֆերենցելի է: **3309.** ա) $df = x^{m-1}y^{n-1}(mydx + nxdy)$, $d^2f = x^{m-2}y^{n-2}\left[m(m-1)y^2dx^2 + \right.$ $\left. + 2mnxydxdy + n(n-1)x^2dy^2\right]$; բ) $df = e^{xy}(ydx + xdy)$, $d^2f =$ $= e^{xy}\left(y^2dx^2 + 2(1+xy)dxdy + x^2dy^2\right)$; գ) $df = \dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2f = \dfrac{(ydx - xdy)^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$; դ) $df = \dfrac{xdx + ydy}{x^2+y^2}$, $d^2f = \dfrac{\left(y^2-x^2\right)\left(dx^2-dy^2\right) - 4xydxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; ե) $df = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, $d^2f = 2(dxdy + dydz + dzdx)$; զ) $df = \dfrac{\left(x^2+y^2\right)dz - 2z(xdx+ydy)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $d^2f = \dfrac{2z\left(3x^2-y^2\right)dx^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} +$ $+ \dfrac{2z\left(8xydxdy + \left(3y^2-x^2\right)dy^2\right) - 4\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)dz}{\left(x^2+y^2\right)^3}$: **3310.** $df(1;1;1) = dx - dy$, $d^2f(1;1;1) = -2(dx-dy)(dy+dz)$: **3317.** $f'(a,b) = f$: **3318.** $f'(a,b)(x,y) = bx + ay$: **3319.** $[y\cos xy, x\cos xy]$: **3320.** $\left[z(x+y)^{z-1}, z(x+y)^{z-1}, (x+y)^z\ln(x+y)\right]$: **3321.** $\begin{bmatrix} yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: **3322.** $\begin{bmatrix} -\sin y\sin(x\sin y) & -x\cos y\sin(x\sin y) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$: **3323.** $df(a,b)(\mathbf{h}) = 2ab^2h_1 +$ $+ 2a^2bh_2$, $d^2f(a,b)(\mathbf{h},\mathbf{l}) = 2b^2h_1l_1 + 4abh_1l_2 + 4abh_2l_1 + 2a^2h_2l_2$: **3324.** $df(a,b,c)(\mathbf{h}) = (b+c)h_1 + (a+c)h_2 + (a+b)h_3$, $d^2f(a,b,c)(\mathbf{h},\mathbf{l}) = h_1l_2 + h_1l_3 +$ $+ h_2l_1 + h_2l_3 + h_3l_1 + h_3l_2$: **3325.** $df(x_0,y_0)(\mathbf{h}) = \dfrac{1}{y_0}h_1 - \dfrac{x_0}{y_0^2}h_2$, $d^2f(x_0,y_0)(\mathbf{h},\mathbf{l}) = -\dfrac{1}{y_0^2}h_1l_2 - \dfrac{1}{y_0^2}h_2l_1 + \dfrac{2x_0}{y_0^3}h_2l_2$: **3326.** $df(x,y)(\mathbf{h}) =$

$= -ye^x \sin(e^x y)h_1 - e^x \sin(e^x y)h_2,$
$d^2 f(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{l}) = -[\cos(e^x y)e^{2x} y^2 + \sin(e^x y)e^x y]h_1 l_1$
$-[\cos(e^x y)e^{2x} y + \sin(e^x y)e^x](h_1 l_2 + h_2 l_1) - \cos(e^x y)e^{2x} h_2 l_2$: **3327.**
$df(x,y)(\mathbf{h}) = ye^{xy} h_1 + xe^{xy} h_2$; $d^2 f(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{l}) = y^2 e^{xy} h_1 l_1 + x^2 e^{xy} h_2 l_2 +$
$+(e^{xy} + xye^{xy})(h_1 l_2 + h_2 l_1)$: **3328.** $df(x_0,y_0,z_0)(\mathbf{h}) = \dfrac{-2x_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} h_1 -$

$-\dfrac{2y_0 z_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} h_2 + \dfrac{1}{x_0^2 + y_0^2} h_3$, $d^2 f(x_0, y_0 z_0)(\mathbf{h},\mathbf{l}) =$

$$= \frac{2z_0\left[(3x_0^2 - y_0)^2 h_1 l_1 + 4x_0 y_0 h_1 l_2 + 4x_0 y_0 h_2 l_1 + (3y_0^2 - x_0^2)h_2 l_2\right]}{(x_0^2 + y_0^2)^3} -$$

$-2\dfrac{x_0 h_1 l_3 + x_0 h_3 l_1 + y_0 h_2 l_3 + y_0 h_3 l_2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$: **3329.** $d^2 f(1,1)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = h_1^2 + 2h_1 h_2 - h_2^2$:

3330. $d^2 f(1,2,3)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 12h_1^2 - 6h_1 h_2 - 4h_1 h_3 + 2h_2 h_3$: **3331.** $d^2 u(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h}) =$
$= f''(x+y)(h_1 + h_2)^2$: **3332.** $d^2 u(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = f''(t)\dfrac{(xh_2 - yh_1)^2}{x^4} - 2f'(t)\cdot$
$\cdot\dfrac{h_1(xh_2 - yh_1)}{x^3}$: **3333.** $d^2 u(x,y,z)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = f''(t)[y^2 z^2 h_1^2 + x^2 z^2 h_2^2 + x^2 y^2 h_3^2] +$
$+2(f'(t) + f''(t)xyz)(zh_1 h_2 + yh_1 h_3 + xh_2 h_3)$: **3334.** $d^2 u(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h}) =$
$= a^2 f_{11}'' h_1^2 + 2abf_{12}'' h_1 h_2 + b^2 f_{22}'' h_2^2$: **3335.** $d^2 u(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = f_{11}''(h_1 + h_2)^2 +$
$+2f_{12}''(h_1^2 - h_2^2) + f_{22}''(h_1 - h_2)^2$: **3336.** $d^2 u(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = f_{11}''(yh_1 + xh_2)^2 +$
$+2f_{12}''\dfrac{y^2 h_1^2 - x^2 h_2^2}{y^2} + f_{22}''\dfrac{(yh_1 - xh_2)^2}{y^4} + 2f_1' h_1 h_2 - 2f_2'\dfrac{(yh_1 - xh_2)h_2}{y^3}$: **3337.**
$d^2 u(x,y,z)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = (f_{11}'' y^2 + 2f_{12}'' y + 2f_{13}'' y + f_{22}'' + 2f_{23}'' + f_{33}'')h_1^2 + 2(f_{11}'' xy +$
$+(x-y)f_{12}'' + (x+y)f_{13}'' - f_{22}'' + f_1' + f_{33}'')h_1 h_2 + (f_{11}'' x^2 + 2f_{13}'' x - 2f_{12}'' x + f_{22}'' -$
$-2f_{23}'' + f_{33}'')h_2^2$: **3338.** $d^2 u(x,y,z)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = (2f_1' + 4f_{11}'' x^2)h_1^2 + (2f_2' + 4f_{22}'' y^2)\times$
$\times h_2^2 + (2f_3' + 4f_{33}'' z^2)h_3^2 + 8f_{12}'' xyh_1 h_2 + 8f_{13}'' xzh_1 h_3 + 8f_{23}'' yzh_2 h_3$: **3339.**
$d^2 u(x,y,z)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 4f_{11}'' h_1^2 + 9f_{22}'' h_2^2 + 16f_{33}'' h_3^2 + 12f_{12}'' h_1 h_2 + 16f_{13}'' h_1 h_3 +$

$+24f''_{23}h_2h_3$: **3340.** $d^2u(x,y,z)(\mathbf{h},\mathbf{h})=f''_{11}(h_1+h_2+h_3)^2+4f''_{12}(h_1+h_2+h_3)\cdot$ $\cdot(xh_1+yh_2+zh_3)+4f''_{22}(xh_1+yh_2+zh_3)^2+2f'_2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)$: **3341.** $\rho'(\varphi)=$ $=\rho$: **3342.** $[\rho'(\varphi)]^2=\dfrac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}\rho^2$: **3343.** $z'_v=0$: **3344.** $uz'_u=z$: **3345.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+$ $+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=2w$: **3346.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$: **3347.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$: **3348.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$: **3349.** $1-2x+$ $+2x^2+2xy+y^2$: **3350.** $8-3(x-1)+11(y-2)+(x-1)^2-3(x-1)(y-2)+$ $+4(y-2)^2$: **3351.** $3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(y-1)(z-1)-$ $-(z-1)(x-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$: **3352.** ա) $(0;1)$-ը մինիմումի կետ է; բ) $(1;0)$-ն մինիմումի կետ է: **3353.** ա) Էքստրեմումի կետ չունի; բ) $x-y+1=0$ ուղղի կետերը մինիմումի կետեր են: **3354.** ա) $(1;1)$-ը մինիմումի կետ է; բ) $(1;1)$-ը և $(-1;-1)$-ը մինիմումի կետեր են: **3355.** ա) $(0;0)$-ն մաքսիմումի կետ է, $(1/2;\pm1)$-ը և $(-1/2;\pm1)$-ը մինիմումի կետեր են; բ) $(2;3)$-ը մաքսիմումի կետ է, $\{(0;y): y\in(0;6)\}$-ի կետերը մինիմումի կետեր են, $\{(0;y): y\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)\}$-ի կետերը մաքսիմումի կետեր են: **3356.** ա) $(5;2)$-ը մինիմումի կետ է; բ) $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}};\mp\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$-ը մինիմումի կետ է, $\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}};\pm\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$-ը մաքսիմումի կետ է: **3357.** ա) $\left(-\dfrac{1}{26};-\dfrac{3}{26}\right)$-ը մինիմումի կետ է, $(1;3)$-ը մաքսիմումի կետ է; բ) $(0;0)$-ն մինիմումի կետ է, $x^2+y^2=1$ շրջանագծի կետերը մաքսիմումի կետեր են: **3358.** $(1;2)$-ը մինիմումի կետ է: **3359.** $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{6}\right)$-ը մաքսիմումի կետ է: **3360.** $(0;0)$-ն մաքսիմումի կետ է: **3361.** $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$-ն մինիմումի կետ է, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2e}};\mp\dfrac{1}{\sqrt{2e}}\right)$-ն մաքսիմումի կետ է: **3362.** $(-1;-2;3)$-ը մինիմումի կետ է: **3363.** $(24;-144;1)$-ը մինիմումի կետ է: **3364.** $(1/2;1;1)$-ը մինիմումի կետ է: **3365.** $(a;a;a)$-ն մաքսիմումի կետ է: **3368.** ա) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$,

$y=\dfrac{b}{2}$; բ) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$: **3369.** $z=x+2y-2$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt6};-\dfrac{2}{\sqrt6};\dfrac{1}{\sqrt6}\right)$: **3370.** $z=2x+2y-2$; $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$: **3371.** $z=-x+\pi y$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi^2+2}};\dfrac{-\pi}{\sqrt{\pi^2+2}};\dfrac{1}{\sqrt{\pi^2+2}}\right)$: **3372.** $xx_0+yy_0+zz_0=1$; $\left(\dfrac{x_0}{c};\dfrac{y_0}{c};\dfrac{z_0}{c}\right)$, որտեղ $c=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$: **3382.** $R^m\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\{(x^1,\dots,x^m):x^i\neq 0\}$, $\{(x^1,\dots,x^m):|x^i|\neq|x^j|, i\neq j\}$: **3389.** ա) 2; բ) -1: **3396.** բ) $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$: **3397.** ա) չորս; բ) չորս; գ) երկու: **3398.** $y'=-\dfrac{x+y}{x-y}$, $y''=\dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$: **3399.** $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$, $y''=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$: **3400.** $y'=\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$, $y''=-\dfrac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$: **3401.** $y'=\dfrac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$, $y''=y^2\big[y(1-\ln x)^2-2(x-y)\cdot$ $\cdot(1-\ln x)(1-\ln y)-x(1-\ln y)^2\big]\left(x^4(1-\ln y)\right)^{-3}$: **3402.** -1: **3403.** $y'(0)=-1/3$, $y''(0)=-2/3$, $y'''(0)=-7/27$: **3404.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{xy}{z^3}$: **3405.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{x^2-z^2-z+2xz+\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x-x^2+z^2+2zx\right)}{\left(x-x^2-z^2\right)^2}$: **3406.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{x-1}{1-z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{z\left((z-1)^2+(y-1)^2\right)}{y^2(1-z)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{z}{xy}\cdot\dfrac{(x-1)(y-1)}{(1-z)^3}$: **3407.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yx^{y-1}}{y^z\ln y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^y\ln x+zy^{z-1}}{y^z\ln y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}\big(1-\ln y-x^y y^{1-z}\ln x\cdot$ $\cdot\ln y-y\ln x\ln y\big)y^{-z}\ln^{-2}y$: **3409.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2zF_2'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'+2yF_2'}{F_1'+2zF_2'}$: **3410.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-zF_1'}{xF_1'+yF_2'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-zF_2'}{xF_1'+yF_2'}$: **3411.** ա) $d^2z(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h})=$

$-\dfrac{(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}''}{(F_1'+F_2')^3}(h_1-h_2)^2$; p) $d^2z(x,y)(\mathbf{h},\mathbf{h})=(yh_1-xh_2)^2\cdot$ $\cdot\dfrac{(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}''}{(xF_1'+yF_2')^3}$: **3412.** $d^2z(3,-2)(\mathbf{h},\mathbf{h})=-\dfrac{2}{243}\left(2h_1^2-5h_1h_2+\right.$ $\left.+2h_2^2\right)$: **3413.** $z''_{xx}=-0{,}4$; $z''_{xy}=-0{,}2$; $z''_{yy}=-3{,}152$: **3414.** $z''_{xx}=\dfrac{169}{32}$; $z''_{xy}=-\dfrac{1}{8}$; $z''_{yy}=-\dfrac{5}{8}$: **3415.** $x'=\dfrac{y-z}{x-y}$, $y'=\dfrac{z-x}{x-y}$, $y''=-x''=(x-y)^{-3}\cdot$ $\cdot\left((y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\right)$:**3416.** $y'=-x'=(y-x)^{-1}$, $y''=-x''=2(x-y)^{-3}$: **3417.** $du(1{,}2)=-\dfrac{1}{3}dy$, $dv(1{,}2)=-dx+\dfrac{1}{3}dy$: **3418.** $du(x,y)=$ $=\dfrac{(\sin v+x\cos v)dx-(\sin u-x\cos v)dy}{x\cos v+y\cos u}$,

$dv(x,y)=\dfrac{-(\sin v-y\cos u)dx+(\sin u+y\cos u)dy}{x\cos v+y\cos u}$: **3420.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\chi_1'\psi_2'-\chi_2'\psi_1'}{\varphi_1'\psi_2'-\varphi_2'\psi_1'}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\chi_2'\varphi_1'-\chi_1'\varphi_2'}{\varphi_1'\psi_2'-\varphi_2'\psi_1'}$: **3421.** $\{(u,v):u\neq v\}$: **3422.** $\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial Y}{\partial v}-\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial Y}{\partial u}\right)^{-1}$: **3424.** $\Delta u=\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right]$, $\Delta_1u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+$ $+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$: **3426.** $\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{n=0}^{k}x^ny^{k-n}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3427.** $\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x+y)^n+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$:**3428.** $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{n=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}(-1)^n\dfrac{x^{k-2n-1}y^{2n+1}}{(2n+1)!(k-2n-1)!}+$ $+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3429.** $\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{n=0}^{[k/2]}(-1)^n\dfrac{x^{k-2n}y^{2n}}{(2n)!(k-2n)!}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3430.** $\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{n=0}^{k}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}y^{2k-2n+1}}{(2n+1)!(2k-2n+1)!}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{m+1}\right)$: **3431.** $\sum\limits_{k=0}^{m}\sum\limits_{n=0}^{k}(-1)^n\cdot$

$\cdot\dfrac{x^{2n}y^{2k-2n}}{(2n)!(2k-2n)!}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^m\right)$: **3432.** $\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}+$ $+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{2m+2}\right)$: **3433.** $\sum_{k=2}^{m}\sum_{n=1}^{k-1}(-1)^k\dfrac{x^n y^{k-n}}{n(k-n)}+o\left(\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3434.** $\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=0}^{k}\dfrac{(x-1)^n(y+1)^{k-n}}{n!(k-n)!}+o\left(\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3435.** $1+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\cdot$ $\cdot\left((y-1)^n-(y-1)^{n-1}(x-1)\right)+o\left(\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)^{\frac{m}{2}}\right)$: **3436.** $z=1+(2(x-1)-$ $-(y-1))-\left(8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2\right)$: **3437.** $A_{mn}\left((-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+\right.$ $\left.(m+n)\dfrac{\pi}{2};(-1)^{m+1}\dfrac{\pi}{12}+(m-n)\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(m,n\in Z)$ կետերը կրիտիկական կետեր են; երբ $m+n$-ը զույգ է A_{mn}-ը էքստրեմումի կետ չէ, երբ m-ը զույգ է, n-ը՝ կենտ A_{mn}-ը մինիմումի կետ է; երբ n-ը զույգ է և m-ը կենտ A_{mn}-ը մաքսիմումի կետ է: **3438.** $\left(\dfrac{a}{7};\dfrac{a}{7};\dfrac{a}{7}\right)$-ը մաքսիմումի կետ է; $\{(x;0;z): xz(a-x-3z)>0\}$ բազմության կետերը մինիմումի կետեր են, $\{(x;0;z): xz(a-x-3z)<0\}$ բազմության կետերը մաքսիմումի կետեր են: **3439.** $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$-ը մաքսիմումի կետ է; $(0;0;0)$-ն և $(\pi;\pi;\pi)$-ն մինիմումի կետեր են: **3440.** $z^1_{\min}=1$, $(0;-2)$ կետում; $z^2_{\max}=-8/7$, $(0;16/7)$ կետում: **3441.** $z^1_{\max}=0$, $(1;1)$ կետում; $z^2_{\min}=-4$, $(1;9)$ կետում: **3442.** $(1;-1)$ կետում $z^1_{\min}=-2$, $z^2_{\max}=6$: **3443.** $\left(\dfrac{-b\,\mathrm{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}};\dfrac{-a\,\mathrm{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$-ն մինիմումի կետ է; $\left(\dfrac{b\,\mathrm{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}};\dfrac{a\,\mathrm{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$-ն մաքսիմումի կետ է: **3444.** $\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2};\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$-ն մինիմումի կետ է: **3445.** $(2;-3)$-ը և $(-2;3)$-ը մինիմումի կետեր են; $(3/2;4)$-ը և $(-3/2;-4)$-ը մաքսիմումի կետեր են: **3446.** $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2};-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right)$-ը $(k\in Z)$ մաքսիմումի կետ է, երբ k-ն զույգ է, մինիմումի կետ է, երբ k-ն կենտ է: **3447.** $(-4;-2;1)$-ը մինիմումի կետ է; $(4;2;-1)$-ը մաքսիմումի կետ է: **3448.** $(x_0;y_0;z_0)$-ն մաքսիմումի կետ է, որտեղ $\frac{x_0}{m}=\frac{y_0}{n}=\frac{z_0}{p}=\frac{a}{m+n+p}$: **3449.** $(\pm a;0;0)$-ն մաքսիմումի կետ է; $(0;0;\pm c)$-ն մինիմումի կետ է: **3450.** $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$-ը, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$-ը և $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$-ը մինիմումի կետեր են, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$-ը, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$-ը և $\left(\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$-ը մաքսիմումի կետեր են: **3451.** $(1;1;1)$-ը մաքսիմումի կետ է: **3452.** $\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$-ը մաքսիմումի կետ է: **3453.** $(x_1^0;\ldots;x_n^0)$-ն մինիմումի կետ է, որտեղ $x_i^0=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}\right)^{-1}$: **3454.** $\left(\frac{a}{n};\ldots;\frac{a}{n}\right)\in R^n$ կետը մինիմումի կետ է: **3455.** $(x_1^0;\ldots;x_n^0)$-ն մաքսիմումի կետ է, որտեղ $\frac{x_1^0}{\alpha_1}=\cdots=\frac{x_n^0}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$: **3456.** $z_{\max}=-2$; $z_{\min}=-5$: **3457.** $z_{\max}=125$; $z_{\min}=-75$: **3458.** $z_{\max}=1$; $z_{\min}=0$: **3459.** $u_{\min}=0$; $u_{\max}=300$: **3463.** Գումարելիները հավասար են $\frac{a}{n}$-ի: 3464. Արտադրիչները հավասար են $a^{\frac{1}{n}}$-ի: 3465. $x=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}x_k$, $y=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}y_k$, $z=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}z_k$, որտեղ $N=\left(\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2+\right.$ $\left.+\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$: **3466.** Ուղղանկյան կողմերն են $\frac{p}{3}$ և $\frac{2p}{3}$: **3467.**

$\frac{7\sqrt{2}}{8}$: 3468. $\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$: **3469.** $d=\pm\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$,

որտեղ $\Delta=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2}$: **3473.** Ոչ: **3474.** Ոչ: **3479.** Ոչ:

3483. $\tau_{\max}=\max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$, $\tau_{\min}=\min\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$, որտեղ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ թվերը

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

հավասարման արմատներն են: **3484.** $a,x_1,\ldots,x_n,b$ թվերը պետք է կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$ հայտարարով:

Գլուխ 15

3491. 1: **3492.** 1: **3493.** 1: **3494.** $\ln\frac{2e}{e+1}$: **3497.** -2: **3498.** $\frac{\pi}{4}$: **3501.** ա) Ոչ; բ) ոչ: **3502.** ա) Ոչ; բ) ոչ: **3503.** $\frac{y\sin y+\cos y-1}{y^2}$: **3504.** $\frac{e^{4y}-e^{y}}{2y}$: **3505.** $\frac{2\ln(1+y^2)}{y}$: **3506.** $\frac{2\sin 2y^2-2\sin y^2}{y}$: **3507.** $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin(b+y)y-\left(\frac{1}{y}+\right.$ $\left.+\frac{1}{a+y}\right)\sin(a+y)y$: **3508.** $\left(1+\frac{1}{y}\right)\ln\left(1+y^2e^{2y}\right)+\left(1-\frac{1}{y}\right)\ln\left(1+y^2e^{-2y}\right)$: **3509.** Ոչ: **3510.** Ոչ: **3532.** $\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\ln t)^n e^{-t}dt$: **3534.** $\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right)$: **3535.** $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$: **3536.** $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$: **3537.** $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$: **3538.**

$\frac{\pi a^4}{16}$: **3539.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$: **3540.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$: **3541.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$: **3542.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$: **3543.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: **3544.** $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$: **3545.** 0: **3549.** $\frac{\pi}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$: **3550.** ա) $\ln\frac{b+1}{a+1}$; բ) $arctg(b+1)-arctg(a+1)$; գ) $\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2b+2}$: **3551.** $\frac{1}{2a}\left(f(x+a)-f(x-a)\right)$: **3552.** $3f(y)+2yf'(y)$: **3553.** $2f(y)$, երբ $y\in(a;b)$; 0, երբ $y\notin[a;b]$: **3554.** $\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}$: **3555.** $(n-1)!\,f(x)$: **3562.** $\pi\ln\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{2}$: **3563.** 0: **3564.** $2\pi\arcsin x$: **3565.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\ln\left(1+|x|\right)$: **3576.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **3577.** Հավասարաչափ զուգամետ է: **3578.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **3579.** ա) Հավասարաչափ զուգամետ է; բ) հավասարաչափ զուգամետ չէ: **3580.** Հավասարաչափ զուգամետ չէ: **3581.** Հավասարաչափ զուգամետ է:**3585.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: **3586.** 1: **3589.** $\alpha=\pm1$: **3590.** Անընդհատ է: **3591.** Անընդհատ է: **3597.** $\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}$: **3598.** $\ln\frac{b}{a}$: **3600.** ա) $\ln\frac{b}{a}$; բ) 0; գ) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$: **3601.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$: **3602.** $2\ln\frac{(2\alpha)^\alpha(2\beta)^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$: **3603.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\lambda^2}{\alpha^2+\lambda^2}$: **3604.** $\frac{\pi}{\beta^3}\left(\alpha\beta-\ln(1+\alpha\beta)\right)$: **3605.** ա) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$; բ) $\frac{\pi}{2}\ln 2$: **3602.** $arctg\frac{\alpha}{\beta}$: **3609.** $\frac{\pi}{4}$: **3610.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$: **3611.** $\frac{\pi}{2}|\alpha|$: **3612.** $\frac{\pi}{4}$: **3613.** $\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}(\alpha+\beta)+\operatorname{sgn}(\alpha-\beta)\right)$: **3614.** $\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha$: **3615.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$: **3616.** $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}$: **3617.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$: **3618.** $\sqrt{\pi}\left(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}\right)$: **3619.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$: **3620.** $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$: **3621.** $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\left(e^{-b^2}\right)^{(2n)}$:**3622.** $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$: **3623.** $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$: **3624.**

$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2}\right)$: 3625. $\frac{\pi}{4}\left(1+|\alpha|\right)e^{-|\alpha|}$: 3626. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{bp}{a}e^{-\frac{|p|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$: 3627. ա,բ) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$: 3628. $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a\right)$: 3629. $\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)$: 3630. ա) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; բ) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$; գ) $\frac{p}{p^2+1}$; դ) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$: 3634. $\frac{\pi}{q\sin\frac{\pi p}{q}}$: 3635. $\frac{2^{n-1}}{\left(1-k^2\right)^{\frac{n}{2}}}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$: 3636. $\frac{1}{n}a^{\frac{m+1}{n}-p}b^{-\frac{m+1}{n}}B\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)$: 3637. $B(m+1,n+1)\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}$: 3638. $\frac{1}{p}B\left(\frac{1}{p},1-\frac{1}{q}\right)$: 3639. $\Gamma(p+1)$: 3640. $\frac{d}{dp}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right)$ 3641. $-\frac{\pi^2\cos\pi p}{\sin^2\pi p}$: 3642. $\pi^3\frac{1+\cos^2\pi p}{\sin^3\pi p}$: 3643. $\frac{2\pi^2}{27}$: 3647. $\frac{\pi|a|^{p-1}}{2\Gamma(p)\cos\frac{\pi p}{2}}$ $(a\neq 0)$: 3648. $\frac{\pi a^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin\frac{\pi p}{2}}$, երբ $a\neq 0$; 0, երբ $a=0$: 3649. $\pi \operatorname{ctg} \pi p$: 3650. $\ln\sqrt{2\pi}$: 3651. $\ln\sqrt{2\pi}+a(\ln a-1)$: 3652. $\frac{1}{\pi}\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)$: 3653. $\frac{1}{4n}$: 3655. $\sqrt{2}$: 3656. $\cos x$:

Գլուխ 16

3679. $\frac{1}{4}$: 3680. $\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$: 3684. $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$: 3685. $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$: 3686. $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$: 3687. $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=$

$= \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$: **3688.** $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{2x^2} f(x,y)dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy =$

$= \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$: **3689.** $\pi - 2$: **3690.** 2 : **3691.** $\frac{7}{20}$: **3692.** $\frac{1}{88}$: **3693.** $\frac{13}{168}$:

3694. $\frac{\pi a^3}{3}$: **3695.** $F(A,B) - F(A,b) - F(a,B) + F(a,b)$: **3697.** $\int_{0}^{2} dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx +$

$+ \int_{2}^{4} dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$: **3698.** $\int_{0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$: **3699.** $\int_{0}^{4} dy \int_{0}^{y/2} f(x,y)dx +$

$+ \int_{4}^{6} dy \int_{0}^{6-y} f(x,y)dx$: **3700.** $\int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$: **3701.** $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$: **3702.**

$\int_{0}^{4} dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)dy$: **3703.** $\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{2-y} f(x,y)dx$: **3704.** $\int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$: **3705.**

$\int_{0}^{1} dy \int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$: **3706.** $\frac{p^5}{21}$: **3707.** $14a^4$: **3708.** $\frac{8}{3} arctg \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \ln \frac{4}{5}$: **3709.**

a^4 : **3710.** $\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{a} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$: **3711.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$:

3712. $\int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$: **3713.** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{4\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr$:

3714. $\frac{2\pi a^3}{3}$: **3715.** $-6\pi^2$: **3716.** $\frac{2}{3}\pi ab$: **3717.** $\frac{1}{2}$: **3718.** 2 : **3719.**

$\left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2$: **3720.** πab : **3721.** $\frac{2}{3}$: **3722.** $\frac{16}{3}$: **3723.** πa^2 : **3724.** $\frac{8}{3}$: **3725.**

$\frac{5}{8}\pi a^2$: **3726.** $\frac{3}{4}\pi$: **3727.** $2a^2$: **3728.** a^2 : **3729.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$:**3730.** $\frac{a^2}{2}\ln 2$:

3731. $\frac{4}{3}(q-p)(s-r)$: 3732. $\frac{\pi}{|d|}$: 3733. $\frac{16}{3}$: 3734. $\frac{abc}{6}$: 3735. $2\pi a^3$: 3736. $\frac{88}{105}$: 3737. $\frac{16}{3}R^3$: 3738. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$: 3739. $\frac{\pi}{8}$: 3740. $\frac{45}{32}\pi$: 3741. $\frac{\pi a^3}{8}$: 3742. $\frac{\pi\left(b^3-a^3\right)}{12}$: 3743. $\frac{9}{2}a^4$: 3744. $\frac{3}{4}$: 3745. $\frac{14}{9}\ln 3$: 3746. $\frac{\pi a}{2}$: 3747. $\frac{4}{15}\pi R^5$: 3748. $\frac{1}{364}$: 3749. $\frac{1}{48}$: 3750. $\frac{\pi abc^2}{4}$: 3751. $\frac{a^3 h}{6}$: 3752. $\frac{\pi}{10}$: 3753. $\frac{a^4}{144}$: 3754. $\frac{\pi^2 abc}{4}$: 3755. $\frac{3}{35}$: 3756. $\frac{7}{24}$: 3757. $\frac{\pi}{96}$: 3758. $\frac{32}{3}\pi$: 3759. πa^3: 3760. $\frac{4}{3}\pi abc$: 3761. $\frac{a^3}{360}$: 3762. $\frac{\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)\left(b^3-a^3\right)$: 3763. $\frac{4\pi R^3}{3|\Delta|}$: 3764. $\frac{49}{864}a^3$: 3765. $\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$: 3766. $\frac{4}{3}\pi a^3$: 3784. ա) Բացասական; բ) դրական: 3786. $\int_0^a dy\left\{\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx\right\}+\int_a^{2a} dy\int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y)dx$:

3787. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)dx$: 3788. $\int_0^{a/2} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx+$

$+\int_{a/2}^{a} dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$: 3789. $\int_0^2 dy\int_y^{\sqrt{10y-y^2}} f(x,y)dx$: 3790.

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr+\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr=$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{\pi/2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)d\varphi:$$ 3791.

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}}^{1} rf\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)dr = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} rdr \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{2}r}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi :$$ **3792.**

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{2/\cos\varphi} rf(r)dr = \frac{\pi}{12}\int_0^{2\sqrt{2}} rf(r)dr + \int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr :$$ **3793.**

$$\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)dr = \int_0^1 rdr \int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi +$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} rdr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f\left(r\cos\varphi, r\sin\varphi\right)d\varphi :$$ **3794.** $$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)dr +$$

$$+\pi\int_0^1 rf(r)dr :$$ **3795.** $$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(tg\varphi)\cos^2\varphi d\varphi :$$ **3796.** $$-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\cos 2\varphi}{\sin^4\varphi} f\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)d\varphi :$$

3797. $$\frac{\pi}{6}\int_0^{2/\sqrt{3}} rf\left(r^2\right)dr + \int_{2/\sqrt{3}}^{2}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{1}{r}\right)rf\left(r^2\right)dr :$$ **3798.** $\frac{15}{2}a^4 :$ **3799.**

$\frac{\sqrt{2}}{3}(b-a)R^3 :$ **3800.** $arcctg|k| :$ **3801.** $\frac{\pi a^2}{16} :$ **3802.** ա)

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+h}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{b+h}\right)};$$ բ) $\frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} :$ **3803.**

$$4\int_{1/2}^{2} udu\int_{1/2}^{2} f\left(\frac{2v}{u+v},\frac{2uv}{u+v}\right)\frac{v}{(u+v)^3}dv :$$ **3804.** $$ab\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi} f\left(ar\cos\varphi, br\sin\varphi\right)d\varphi :$$

3805. $$4\int_0^{\pi/2}\sin^3 v\cos^3 v dv\int_0^a uf\left(u\cos^4 v, u\sin^4 v\right)du :$$ **3806.** $$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(a-|u|\right)f(u)du :$$

3807. $$2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2} f\left(\sqrt{a^2+b^2}u+c\right)du :$$ **3808.** $$\ln 2\int_1^2 f(u)du :$$ **3809.** $2\pi :$ **3810.**

$\frac{9\pi}{16}$: **3811.** $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{3}$: **3812.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{24}$: **3813.** $\frac{1}{24}$: **3814.** $\frac{(2\sqrt{3}-9)a^2}{6}$: **3815.** $\frac{4}{3}\pi+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$: **3816.** $\frac{4}{3}\left(4-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}\right)$: **3818.** $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}$: **3819.** $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{24}$: **3820.** $\frac{a^2}{3}$:**3821.** $\frac{1}{3}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{m}\right)\left(a+b+m+n+\sqrt{ab}+\sqrt{mn}\right)$: **3822.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$: **3823.** $\frac{\pi a^2}{2}$: **3824.** $\frac{a^2}{6}$: **3825.** $\frac{5\pi}{16}a^2$: **3826.** $\frac{3}{4}\pi a^2$: **3827.** $\frac{ab\sqrt{ab}}{30c}$: **3828.** $\frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$: **3829.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$: **3830.** $\frac{65}{108}ab$: **3831.** $\frac{189}{16}\left(arctg\frac{1}{3}+\frac{12}{25}\right)ab$: **3832.** $\frac{17}{12}-2\ln 2$: **3833.** $\frac{4}{9}\frac{a^3}{\sqrt{\alpha}}$: **3834.** $\frac{3\pi a^4}{2\sqrt{2c}}$: **3835.** $\frac{16}{9}a^3$: **3836.** $\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{40}{9}-\frac{32}{9}\sqrt{3}\right)a^3$: **3837.** $\frac{\pi ac^2}{2}$: **3838.** $\frac{3}{4}\pi(a+b)$: **3839.** $\frac{\pi}{12}\left(\frac{ab}{c}\right)^3$: **3840.** $\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right)abc$: **3841.** $\frac{am}{192}(a+m)\left(3a^2-5am+3m^2\right)$: **3842.** $\frac{abc}{9}$: **3843.** $8a^2$: **3844.** $8a^2$: **3845.** $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$: **3846.** $2\sqrt{2}$: **3847.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[3-\sqrt{\frac{3}{2}}+\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)\right]$: **3848.** $\frac{ab}{9}(20-3\pi)$: **3849.** $\frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{10}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right)$: **3850.** $\frac{1}{3}abc\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left[\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{c^3}\right]$: **3851.** $\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)ab\,arctg\sqrt{\frac{a}{b}}$: **3852.** $2a^2$: **3853.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$: **3854.** $\frac{4}{5}\pi abc$: **3855.** $\frac{\pi}{6}$: **3856.** $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left(b^8-a^8\right)\left[\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$: **3857.** $F'(t)=2\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le 1}\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$ **3858.** ш) $F'(t)=4\pi t^2 f\left(t^2\right)$; ҏ) $F'(t)=$

$=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_{V_t} xyzf'(xyz)dxdydz\right]$: **3859.** 0, երբ m, n և p թվերից որևէ մեկը կենտ է; $\frac{(m-1)!!(n-1)!!(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}\cdot\frac{4\pi}{m+n+p+3}$, երբ m, n և p թվերը զույգ են:

3860. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}\cdot\Gamma(s+1)$:

3861. $\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^x dz\int\limits_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int\limits_x^1 dz\int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\}=$

$=\int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^z dy\int\limits_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int\limits_z^1 dy\int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}$:

3862. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{|x|}^1 dz\int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)dy=\int\limits_0^1 dz\int\limits_{-z}^{z} dy\int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)dx$: **3863.**

$\int\limits_0^1 dx\left\{\int\limits_0^{x^2} dz\int\limits_0^1 f(x,y,z)dy+\int\limits_{x^2}^{x^2+1} dz\int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,y,z)dy\right\}=\int\limits_0^1 dz\left\{\int\limits_0^{\sqrt{z}} dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)dx+\right.$

$\left.+\int\limits_{\sqrt{z}}^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)dx\right\}+\int\limits_1^2 dz\int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} dy\int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x,y,z)dx$: **3864.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\xi)^2 f(\xi)d\xi$:

3865. $\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(2-z^2\right)f(z)dz+\frac{1}{2}\int\limits_1^2(2-z)^2 f(z)dz$:

3866. $\int\limits_a^{2a} r^2dr\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)d\theta$:

3867. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{a\cos\theta} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2dr$:

3868. $\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_{0}^{a\cos\theta} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 dr$: 3871. $\frac{\pi^2 a^3}{4}$:

3872. $\frac{\pi a^3}{60}$: 3873. $\frac{32}{315}a^3$: 3874. $\frac{a^3}{6}$: 3875. $\frac{\pi a^3}{8}$: 3876. $\frac{2}{3}\pi^2 a^3$: 3877. $\frac{2}{3}\pi a^3$:

3878. $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$: 3879. $\frac{abc}{554400}$: 3880. $\frac{abc}{1680}$: 3881. $\frac{4\pi}{35}abc$: 3882. $\frac{abc}{60}\cdot\frac{pq}{aq+bp}\left(\frac{a}{p}\right)^4$: 3883. $\frac{abc}{60}\cdot\frac{p(5c+4p)}{(c+p)^2}$: 3884. $x_0 = -\frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{8a}{5}$: 3885. $x_0 = y_0 = \frac{a}{5}$: 3886. $x_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}$, $y_0 = \frac{1}{4}$: 3887. $x_0 = \frac{3\pi a}{64}$, $y_0 = \frac{3\pi b}{64}$: 3888. $x_0 = y_0 = \frac{4\pi a}{9\sqrt{3}}$: 3889. $x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}$: 3890. $\frac{1}{8}a^4(2\varphi - \sin 2\varphi) - \frac{1}{6}a^4\cos\varphi\sin^3\varphi$: 3891. $I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$, $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$: 3892. $\frac{4h_1h_2\left(a_1^2h_2^2 + a_2^2h_1^2\right)}{|a_1b_2 - a_2b_1|^3}$:

3893. $\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$; $\frac{4}{3}$: 3894. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = \frac{3}{4}h$: 3895. $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{9\pi a}{448}$:

3896. $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{9\pi}{448}$: 3897. $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c} = \frac{3}{4}\frac{\Gamma(2/n)\Gamma(3/n)}{\Gamma(1/n)\Gamma(4/n)}$: 3898. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = \frac{7}{30}c$: 3899. $\frac{I_{yz}}{a^3bc} = \frac{I_{zx}}{ab^3c} = \frac{I_{xy}}{abc^3} = \frac{15\pi^2}{256\sqrt{2}}$: 3900. $\frac{I_{yz}}{a^3bc} = \frac{I_{zx}}{ab^3c} = \frac{I_{xy}}{abc^3} = \frac{1}{5n^2}\frac{\Gamma^2(1/n)\Gamma(3/n)}{\Gamma(5/n)}$: 3901. $I_z = \frac{4\pi}{15}\left(4\sqrt{2} - 5\right)$:

3902. $I_z = \frac{\pi a^5}{5}$: 3903. $I_x = \frac{\pi abh}{20}\left(b^2 + 4h^2\right)$: 3906. $\frac{c^2}{4}[(v_1 - v_2)(sh2u_2 - sh2u_1) - (u_2 - u_1)(\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]$: 3907. $\frac{c^2}{6}\left(\sqrt{10} - 2\right)\arcsin\frac{1}{3}$: 3908. $\frac{2}{3}\pi a^2$: 3910. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$: 3911. $a(\varphi_2 - \varphi_1)[b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)]$; $4\pi^2 ab$: 3913. Զուգամետ է, երբ $p > 1$ և $q > 1$: 3914. Զուգամետ է, երբ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$: 3915.

Զուգամետ է, երբ $p > \frac{1}{2}$: **3917.** Զուգամետ է: **3918.** Զուգամետ է, երբ $p < 1$:

3919. Զուգամետ է, երբ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$: **3920.** Զուգամետ է, երբ $p > \frac{3}{2}$: **3921.** Զուգամետ է, երբ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$: **3922.** Զուգամետ է, երբ $p < 1$: **3927.** $\frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}$: **3928.** $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+n/2)} r^n$: **3929.** $\frac{a_1 \cdots a_n}{n!}$: **3930.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} a_1 \cdots a_n}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$: **3931.** $\frac{8abc}{mn+mp+np} \cdot \frac{\Gamma(1/m)\Gamma(1/n)\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/m+1/n+1/p)}$: **3932.** $\frac{a^n}{n!}$: **3933.** $\frac{2}{(n-1)!(2n+1)}$: **3934.** $2^n \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} \pi^{\frac{n-1}{2}}$, երբ n-ը կենտ է, $2^n \frac{R^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!} \pi^{\frac{n}{2}}$, երբ n-ը զույգ է: **3935.** $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$: **3941.** $\frac{1}{n+1}$: **3942.** 1: **3944.** 0:

Գլուխ 17

3947. $\sqrt{2}/2$: **3948.** $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$: **3949.** $1+\sqrt{2}$: **3950.** 0: **3951.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$: **3952.** $\frac{\pi a^3}{2}$: **3953.** $\frac{256}{15}a^3$: **3954.** $2\pi^2 a^3(1+2\pi^2)$: **3955.** 2: **3956.** $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2 b^2)\sqrt{a^2+b^2}$: **3957.** $\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right]$: **3958.** $\sqrt{2}-1$: **3959.** $\frac{670}{27}$: **3960.** $\ln(\sqrt{2}+1)$: **3961.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$: **3962.** $\sqrt{3}$: **3963.** π: **3964.** $\frac{14}{3} - \ln 4$: **3965.** 8: **3966.** $-\frac{8}{15}$: **3967.** $\frac{4}{3}$: **3968.** $-2\pi ab$: **3969.** $-2\pi a^2$: **3970.**

$\frac{1}{35}$: **3971.** $-\pi a^2$: **3972.** -2π: **3973.** 0: **3974.** 13: **3975.** 8: **3976.** 12: **3977.** 4: **3978.** -2: **3979.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)dy$: **3980.** 62: **3981.** $-1{,}5$: **3982.** 9: **3983.** 1: **3984.** $-53\frac{7}{12}$: **3985.** 0: **3986.** $x^3/3+xy^2+C$: **3987.** $u=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{3x-y}{2y\sqrt{2}}+C$: **3988.** $u=-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\ln|x+y|+C$: **3989.** $e^{x+y}(x-y+1)+ye^x+C$: **3990.** $\frac{1}{3}\left(x^3+y^3+z^3\right)-2xyz+C$: **3991.** $x-\frac{x}{y}+$ $+\frac{xy}{z}+C$: **3992.** -44: **3993.** $\frac{\pi a^4}{2}$: **3994.** $-2\pi ab$: **3995.** $-\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$: **3996.** 0: **3997.** $1/3$: **3998.** $1{,}125$: **3999.** $0{,}8$: **4000.** πab: **4001.** $0{,}375\pi ab$: **4002.** $a^2/6$: **4003.** $3\sqrt{3}+4\pi/3$: **4004.** ա) $\frac{7\sqrt{21}}{3}$; բ) π: **4005.** ա) $\frac{8}{3}\pi R^4$; բ) $\frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$: **4006.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\left(\sqrt{3}-1\right)\ln 2$: **4007.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$: **4008.** $2\pi a\ln\frac{H+\sqrt{a^2+H^2}}{a}$: **4009.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha$: **4011.** $2a^2$: **4012.** $2a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$: **4013.** $\frac{2}{3}\pi a^3$: **4014.** $2\pi\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$: **4015.** $-\frac{\pi a^3}{4}$: **4019.** 2: **4020.** 2π, երբ $(0;0)$-ն պատկանում է L-ով սահմանափակված տիրույթին և 0, երբ $(0;0)$-ն չի պատկանում այդ տիրույթին: **4021.** $1{,}5a^2$: **4022.** a^2: **4023.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$: **4024.** $\frac{a^2}{2}B(2m+1,2n+1)$, որտեղ B-ն Էյլերի բետտա ֆունկցիան է: **4025.** $\frac{ab\Gamma^2(1/n)}{2n\Gamma(2/n)}$, որտեղ Γ-ն Էյլերի գամմա ֆունկցիան է: **4026.** $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{(n-1)\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}\right]$: **4027.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$: **4028.** $\pi r^2(n+1)(n+2)$: **4029.** $\pi r^2(n-1)(n-2)$: **4030.** $4a^2$:

4032. $\left(4\pi - 2\sqrt{3}\right)a^4$: **4033.** $\dfrac{7\pi\sqrt{2}a^3}{2}$: **4034.** $\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$: **4036.** $-\dfrac{2}{3}\pi H^3$: **4037.** ա) 0 ; բ) $\dfrac{2\pi}{3}R^3$: **4038.** $4\pi R^3$: **4039.** $abc\left[\dfrac{f(a)-f(0)}{a}+\dfrac{g(b)-g(0)}{b}+\right.$ $\left.+\dfrac{h(c)-h(0)}{c}\right]$: **4040.** $\dfrac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$: **4042.** $-\pi a^2\sqrt{3}$: **4043.** $\dfrac{40\sqrt{3}}{9}\pi$: **4044.** $\dfrac{h^3}{3}$: **4045.** 0 : **4046.** $2\pi a(a+h)$: **4047.** $2\pi Rr^2$: **4048.** $3a^4$: **4049.** ա) $2{,}4\pi a^5$; բ) $-\pi/10$: **4050.** 1 : **4053.** $\dfrac{4\pi}{3}\left(a^2+\dfrac{b^2}{2}\right)|c|$: **4054.** $\dfrac{2}{9}a^3$: **4055.** $2\pi^2a^2b$: **4056.** ա) $(3;-2;-6)$; բ) $(7;0;0)$; $\mathrm{grad}\,u=\mathbf{0}$ $(-2;1;1)$ կետում: **4057.** ա) $z^2=xy$; բ) $x=y=0$ և $x=y=z$; գ) $x=y=z$: **4058.** $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$: **4059.** $\arccos\left(-\dfrac{8}{9}\right)$: **4062.** $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}=\dfrac{2u}{r}$, որտեղ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{r}}=|\mathrm{grad}\,u|$, երբ $a=b=c$: **4063.** $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}=-\dfrac{\cos\varphi}{r^2}$, որտեղ φ -ն $\mathbf{l}$ -ի և $(x;y;z)$ կետի շառավիղ վեկտորի կազմած անկյունն է: **4064.** $\dfrac{\langle \mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,v\rangle}{|\mathrm{grad}\,v|}$: **4069.** ա) 28 ; բ) $18/125$: **4073.** ա) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$; բ) $-1{,}25\mathbf{i}-\mathbf{j}+2{,}5\mathbf{k}$: **4074.** $\pi/2$: **4077.** ա) 0 ; բ) 0 : **4078.** $3\pi/8$: **4079.** $\pi/5$: **4081.** $188/21$: **4082.** $0{,}75\left(3+e^4-12e^{-2}\right)$: **4083.** ա) $-\pi\alpha^2$; բ) $2\pi\alpha\beta$; ոչ: **4084.** $-\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$: **4085.** 4π : **4086.** $2S$: **4087.** $xy+e^z+C$: **4088.** $xy+yz+xz+C$: **4089.** Ոչ: **4090.** Այո: **4091.** Այո: **4093.** $\pm mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-$ $-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\dfrac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$: **4094.** $\mathrm{sgn}(ad-bc)$: **4095.** $I=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}\left.\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right|_{(x_i;y_i)}$: **4097.** $2P$: **4098.** $U=-2\pi R\ln R$, երբ $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\le R$; $U=-2\pi R\ln\rho$, երբ $\rho>R$: **4099.** $u=2\pi$, երբ A -ն L -ի ներսում է; $u=\pi$, երբ A -ն L -ի վրա է; $u=0$, երբ A -ն L -ից դուրս է: **4107.**

$F(t)=\dfrac{\pi}{18}\left(3-t^2\right)^2$, երբ $|t|\le\sqrt{3}$; $F(t)=0$, երբ $|t|>\sqrt{3}$: **4108.** $F(t)=$ $=\dfrac{\pi\left(8-5\sqrt{2}\right)}{6}t^4$: **4109.** 0, երբ $t\le r-a$; $\dfrac{\pi t}{r}\left[a^2-(r-t)^2\right]$, երբ $r-a<t<$ $<r+a$; 0, երբ $t>r+a$ $(t\ge 0)$: **4113.** ա) 4π; բ) 0:

Գրականություն

1. Б.П. Демидович // Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва “Наука”, 1977.
2. Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин // Сборник задач по высшей математике. Москва “Гостехиздат”, 1957, т.т. 1-3.
3. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин // Сборник задач по математическому анализу. Москва “Наука”, 1984, т.т. 1-3.
4. И.В. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий // Задачи и упражнения по математическому анализу. Москва, Изд. МГУ, 1988.
5. Г. Полиа, Г. Сеге // Задачи и теоремы из анализа. Москва “Наука”, 1978, т.т. 1-2.
6. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед // Контрпримеры в анализе. Москва “Мир”, 1967.
7. В.А. Садовничий, А.С. Подколзин // Задачи стунденческих олимпиад по математике. Москва “Наука”, 1978.
8. М. Спивак // Математический анализ на многообразиях. Москва “Мир”, 1968.
9. А.Е. Аветисян, Г.А. Тоноян // Числовые ряды и последовательности. Ереван, Изд. ЕГУ, 1978.
10. А.Е. Аветисян, С.А. Акопян, Г.А. Тоноян // Функция, непрерывность, производная. Ереван, Изд. ЕГУ, 1981.
11. А.Е. Аветисян, С.А. Акопян, Г.А. Тоноян // Интеграл. Ереван, Изд. ЕГУ, 1984.
12. Ու. Ռուդին // Մաթեմատիկական անալիզի հիմունքները. Երևան “Լույս”, 1975.
13. Գ.Ա. Տոնոյան // Ուսանողական մաթեմատիկական մրցույթներ. Երևան, ԵՊՀ, 1978.
14. Լ.Հ. Գալստյան // Տասներկու խնդիր մաթեմատիկական անալիզից. Երևան, ԵՊՀ, 1990.

Բ ո վ ա ն դ ա կ ու թ յ ու ն

Գ. Գ. Գևորգյան Լ. Հ. Գալստյան Ա. Կ. Թալալյան
Գ. Վ. Միքայելյան Կ. Ա. Նավասարդյան

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶԻ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ

Երկրորդ մաս

Չորրորդ լրամշակված հրատարակություն

Համակարգչային ձևավորումը՝ **Կ. Չալաբյանի**
Կազմի ձևավորումը՝ **Ա. Պատվականյանի**
Տեխ. խմբագիր՝ **Լ. Հովհաննիսյան**

Չափսը՝ 60x84 1/16: Տպ. մամուլ 16,75:
Տպագրությունը՝ օֆսեթ:
Տպաքանակը՝ 300 օրինակ:

ԵՊՀ հրատարակչություն
Ալեք Մանուկյան 1