

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս.Գ. Շահինյան, Ա.Գ. Մաթևոսյան, Թ.Ա. Սիմոնյան

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ
ԿՈՒՐՍԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ
ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ

2016

ՀՏԴ 531(072)
ԳՄԴ 22.21
Շ 184

*Հրապարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը*

Խմբագիր՝ ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր,
պրոֆեսոր Վ. Ռ. Բարսեղյան

Շ 184

Տեսական մեխանիկա: Կուրսային աշխատանքների կատարման մեթոդական ցուցումներ/ Ս. Գ. Շահինյան, Ա. Գ. Մաթևոսյան, Թ. Ա. Սիմոնյան: -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2016, 100 էջ:

Մեթոդական ձեռնարկում ընդգրկված են տեսական մեխանիկայի կետի դինամիկա, համակարգի դինամիկա, պինդ մարմնի դինամիկա և վերլուծական մեխանիկա բաժիններից կուրսային աշխատանքների կատարման համար ուսանողներին տրվող խնդիրների վերաբերյալ ցուցումներ և բերված են նմանատիպ խնդիրների լուծումներ:

Նախատեսված է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում «Տեսական մեխանիկա» առարկայից կուրսային աշխատանքներ կատարելիս ուսանողներին մեթոդական օժանդակություն ցույց տալու համար: Կարող է օգտակար լինել բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական ու տեխնիկական ֆակուլտետների ուսանողներին և տեսական մեխանիկայից ինքնուրույն աշխատանքներ կատարել ցանկացողներին:

ՀՏԴ 531(072)
ԳՄԴ 22.21

ISBN 978-5-8084-2091-5

© ԵՊՀ հրատ., 2016
© Հեղ. խումբ, 2016

ԱՌԱՋԱԲԱՆ

Համալսարանական ծրագրերում «Տեսական մեխանիկա» դասընթացի յուրացման համար պահանջվում է ոչ միայն տեսական նյութի խոր ուսումնասիրություն, այլ նաև խնդիրների հետազոտման և լուծումների ճիշտ վերլուծման հմտություն:

ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում «Մեխանիկա» մասնագիտությամբ սովորող ուսանողների համար նախատեսված է կուրսային աշխատանք «Տեսական մեխանիկա» առարկայից: Հեղինակների երկար տարիների աշխատանքային փորձը ցույց է տվել, որ կուրսային աշխատանքի կատարման ընթացքում առանձնակի կարեւորություն ունի հայերենով համապատասխան գրականության անհրաժեշտությունը:

Մայրենի լեզվով ներկայացվող այս ձեռնարկը մեթոդական ուղեցույց է 2006 և 2013 թվականներին Երևանի պետական համալսարանի հրատարակչության կողմից տպագրված «Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու»-ներում ընդգրկված խնդիրների լուծման համար: Նրանում ընդգրկված են կետի դինամիկային, համակարգի դինամիկային և վերլուծական մեխանիկային նվիրված և կուրսային աշխատանքների համար նախատեսված խնդիրների մեծ մասի լուծման վերաբերյալ ցուցումներ: Բերված են տարբեր տիպի խնդիրների լուծումներ, որոնք կնպաստեն ուսանողների ստացած տեսական գիտելիքներն օգտագործելու գործնական աշխատանքներ ինքնուրույն կատարելու և խնդիրները մոդելավորելու և լուծելու ունակությունների զարգացման համար:

«Կետի դինամիկա» բաժնում բերված են կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների, դինամիկայի հիմնական թեորեմների և կետի տատանողական շարժման վերաբերյալ տարբեր տիպի խնդիրների լուծումներ: «Համակարգի դինամիկա» բաժնում տրված են համակարգի կինետիկ էներգիային, համակարգի դինամիկայի հիմնական թեորեմներին նվիրված տարբեր դրվածքներով խնդիրների լուծման ժա-

մանակ կատարվող հիմնական քայլերը, ինչպես նաև բազմաթիվ տիպային խնդիրների լուծումներ: «Վերլուծական մեխանիկա» բաժինն ընդգրկում է հնարավոր տեղափոխությունների սկզբունքին, դինամիկայի ընդհանուր հավասարմանը, Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումներին նվիրված տիպային խնդիրների լուծումներ:

Կուրսային աշխատանք կատարելիս ուսանողները կարող են օգտվել նաև գրականության ցանկում բերված հայտնի ժողովածուներից:

Ճեռնարկը նախատեսված է ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետում «Տեսական մեխանիկա» առարկայից կուրսային աշխատանքներ կատարելիս ուսանողներին մեթոդական օժանդակություն ցույց տալու համար: Կարող է օգտակար լինել բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական ու տեխնիկական ֆակուլտետների ուսանողներին և տեսական մեխանիկայից ինքնուրույն աշխատանքներ կատարել ցանկացողներին:

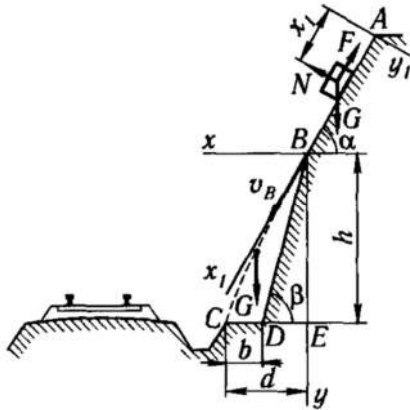
Հեղինակները հայտնում են իրենց շնորհակալությունը ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Վ. Ռ. Բարսեղյանին, ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ Ս. Հ. Զիլավյանին ձեռնարկի նախնական տարբերակը կարդալու, կատարած դիտողությունների և օգտակար առաջարկությունների համար, ինչպես նաև բոլոր այն գործընկերներին ովքեր նպաստել են ձեռնարկի հրատարակմանը:

1. ԿԵՏԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

§ 1.1 Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները

Այս պարագրաֆում տրվում է կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներին վերաբերվող խնդիրների լուծման եղանակ: Այն ներկայացված է ընդհանուր տիպի խնդրի լուծման օրինակով:

Օրինակ 1.1: Երկաթուղային ճանապարհներ կառուցելիս ժայռերի փորվածքներում թեքությունների քարաթափվածքից առուների պաշտպանման համար տեղադրվում է DC ելուստը: Հաշվի առնելով թեքության բարձրագույն A կետից քարի շարժման հնարավորությունը և ընդունելով նրա սկզբնական արագությունը՝ $v_0 = 0$, որոշել ելուստի փոքրագույն b լայնությունը և քարի՝ ելուստի վրա ընկնելու v_C արագությունը: Թեքության AB հատվածով, որը հորիզոնի հետ կազմում է α անկյուն և ունի l երկարություն, քարը շարժվում է τ վ: BD



Նկ. 1.1.1

թեք տեղամասը հորիզոնի հետ կազմում է β ($\beta > \alpha$) անկյուն: AB հատվածի վրա քարի սահքի շփման f գործակիցը համարել հաստատուն, իսկ օդի դիմադրությունն արհամարհել: Տրված է՝ $v_A = 0$, $\alpha = 60^\circ$, $l = 4$ մ, $\tau = 1$ վ, $f \neq 0$, $h = 5$ մ, $\beta = 75^\circ$:

Լուծում: Դիտարկենք քարի շարժումը AB հատվածում: Ընտրենք $x_1 y_1$ կոորդինատական համակարգը, որի սկզբնակետը համընկնում է A կետի հետ (նկ. 1.1.1): x_1 առանցքն ուղղենք AB -ով, իսկ y_1 -ը՝ նրան ուղղահայաց: Ընդունելով քարը որպես նյութական կետ, ցույց տանք նրա վրա ազդող ուժերը՝ $\vec{G}$ կշիռը, $\vec{N}$ նորմալ հակազդումը և սահքի շփման $\vec{F}$ ուժը (նկ. 1.1.1): Օգտվելով դինամիկայի հիմնական օրենքից, կազմենք քարի՝ որպես նյութական կետի, շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը AB տեղամասում՝

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix_1},$$

որտեղ $\sum F_{ix_1}$ - ը քարի վրա ազդող ուժերի պրոյեկցիաների գումարն է x_1 առանցքի վրա: Տեղադրենք դրանք հավասարման մեջ, կստանանք

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F:$$

Այստեղ $F = fN$, $N = G \cos \alpha$: Այսպիսով,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

կամ

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha:$$

Ինտեգրելով ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը երկու անգամ, կստանանք՝

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = \left[\frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \right] t^2 + C_1 t + C_2 :$$

C_1 և C_2 ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար օգտվենք խնդրի սկզբնական պայմաններից՝ $t = 0$ դեպքում $x_{10} = 0$ և $\dot{x}_{10} = 0$:
Կստանանք՝

$$\dot{x}_{10} = C_1, \quad x_{10} = C_2 :$$

Հետևաբար՝ $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$: Այդ դեպքում՝

$$\dot{x}_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t ,$$

$$x_1 = \left[\frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \right] t^2 :$$

τ պահի համար, երբ քարը պոկվում է AB տեղամասը, կունենանք՝

$$\dot{x}_1 = v_B, \quad x_1 = l ,$$

այսինքն

$$v_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau ,$$

$$l = \left[\frac{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{2} \right] \tau^2 :$$

Հետևաբար՝

$$v_B = \frac{2l}{\tau} = 2 \cdot \frac{4}{1} = 8 \text{ մ/վ} :$$

Դիտարկենք քարի շարժումը B կետից մինչև C կետը: Ընտրենք xy կոորդինատական համակարգը, որի սկզբնակետը համընկնում է B կետի հետ: x առանցքն ուղղենք դեպի ձախ, իսկ y -ը՝ նրան ուղղահայաց: Կազմենք քարի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները BC տեղամասի համար՝

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = G:$$

Այս տեղամասում խնդրի սկզբնական պայմաններն են՝ $t = 0$ դեպքում

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0, \\ \dot{x}_0 &= v_B \cos \alpha, & \dot{y}_0 &= v_B \sin \alpha: \end{aligned}$$

Երկու անգամ ինտեգրենք ստացված դիֆերենցիալ հավասարումները, կստանանք

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C_3, & \dot{y} &= gt + C_4, \\ x &= C_3t + C_5, & y &= \frac{gt^2}{2} + C_4t + C_6: \end{aligned}$$

$t = 0$ դեպքում կունենանք

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= C_3, & \dot{y}_0 &= C_4, \\ x_0 &= C_5, & y_0 &= C_6: \end{aligned}$$

Այստեղից կգտնենք՝

$$\begin{aligned} C_3 &= v_B \cos \alpha, & C_4 &= v_B \sin \alpha, \\ C_5 &= 0, & C_6 &= 0: \end{aligned}$$

Քարի արագության պրոյեկցիաների համար կստանանք

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha \quad (1.1.1)$$

հավասարումները, իսկ քարի շարժման հավասարումները կլինեն՝

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \quad y = \frac{gt^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t:$$

Շարժման հավասարումներից արտաքսելով t ժամանակը, կգրտենք քարի հետագծի հավասարումը: Որոշելով t -ն առաջին հավասարումից և տեղադրելով նրա արժեքը երկրորդ հավասարման մեջ, կըստանանք պարաբոլայի հավասարում.

$$y = \frac{gx^2}{(2v_B^2 \cos^2 \alpha)} + xtg\alpha:$$

CD ելուստին ընկնելու պահին $y = h$, $x = d$:

Որոշելով d -ն հետագծի հավասարումից, կստանանք՝

$$d_1 = 2,11 \text{ մ}, \quad d_2 = -7,75 \text{ մ}:$$

Քանի որ քարի շարժման հետագիծը պարաբոլայի ճյուղ է նրա կետերի դրական աբսցիսներով, ապա $d_1 = 2,11$ մ:

Ելուստի փոքրագույն լայնությունը կլինի՝

$$b = d - ED = d - \frac{h}{tg 75^\circ}, \quad \text{կամ} \quad b = 0,77 \text{ մ}:$$

Օգտվելով քարի շարժման $x = v_B \cos \alpha \cdot t$ հավասարումից, կգտնենք B կետից մինչև C կետը քարի շարժման T ժամանակը՝

$$T = 0,53 \text{ վ}:$$

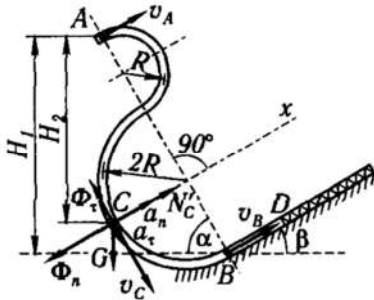
Քարի արագությունը CD ելուստին ընկնելու պահին գտնենք, օգտվելով արագության՝ $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ բանաձևից: Հաշվի առնելով (1.1.1)-ը ժամանակի $t = T = 0,53$ վ պահի համար կստանանք՝

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gt + v_B \sin \alpha)^2} \text{ կամ } v_C = 12,8 \text{ մ/վ:}$$

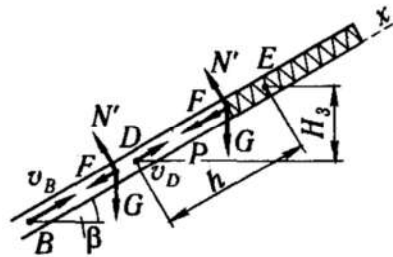
§ 1.2 Դինամիկայի հիմնական թեորեմների կիրառությունը նյութական կետի շարժման հետազոտման համար

Այս պարագրաֆում դիտարկվում է [15]-ում ընդգրկված և դինամիկայի հիմնական թեորեմների կիրառությամբ նյութական կետի շարժման հետազոտմանը վերաբերվող խնդիրների լուծման ընդհանուր մոտեցում: Այն ներկայացնենք տիպային խնդրի լուծման օրինակով:

Օրինակ 1.2: $m = 0,5$ կգ զանգվածով գնդիկը շարժվում է ուղղաձիգ հարթության մեջ գտնվող A կետից $v_A = 0,8$ մ/վ սկզբնական



Նկ. 1.2.1



Նկ. 1.2.2

արագությամբ: Խողովակն ունի երկու տարբեր՝ R և $2R$ շառավիղներով կիսաշրջանագծերի տեսք ունեցող կոր տեղամասեր, որոնց կենտրոնները միացնող գիծը հորիզոնի հետ կազմում է $\alpha = 60^\circ$ անկյուն:

խողովակի BD տեղամասը, որը գնդիկն անցնում է $\tau = 0,1$ վ ժամանակում, հորիզոնի հետ կազմում է $\beta = 30^\circ$ անկյուն: Գտնել գնդիկի արագությունը B , C և D դիրքերում, գնդիկի N_C ճնշումը խողովակի պատին C դիրքում, ինչպես նաև զսպանակի h առավելագույն սեղմումը, եթե $R = 0,2$ մ, գնդիկի և խողովակի պատի միջև սահքի շրջման գործակիցը՝ $f = 0,1$ է, զսպանակի սկզբնական դեֆորմացիան՝ $h_0 = 0$, զսպանակի կոշտության գործակիցը՝ $c = 10$ Ն/սմ $= 1000$ Ն/մ (նկ.1.2.1): Գնդիկը համարել նյութական կետ, իսկ հետագծի կոր հատվածներում շփումն անտեսել:

Լուծում: B և C կետերում գնդիկի արագությունը որոշելու համար օգտվենք նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից: Հետագծի AC և CB տեղամասում գնդիկը շարժվում է G ծանրության ուժի ազդեցության տակ (շփման ուժերը կորագիծ հատվածներում հաշվի չենք առնում), հետևաբար, AB տեղամասի համար կունենանք

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_i = GH_1 = mgAB \sin \alpha = 6mgR \sin \alpha$$

կամ

$$v_B^2 - v_A^2 = 12gR \sin \alpha, \quad v_B = 4,59 \text{ մ/վ},$$

իսկ BC տեղամասի համար՝

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha),$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha),$$

որտեղից՝

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2\sin\alpha + \cos\alpha)}, \quad v_C = 4,26 \text{ մ/վ:}$$

Որոշենք գնդիկի ճնշումը խողովակի պատին C դիրքում: Համաձայն նյութական կետի համար Դալամբերի սկզբունքի, կետի վրա կիրառված ակտիվ, պասիվ և իներցիոն ուժերի երկրաչափական գումարը հավասար է զրոյի՝

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0:$$

Նյութական կետի վրա ազդող իներցիոն ուժը կարելի է վերլուծել նորմալ և շոշափող բաղադրիչների՝

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_r:$$

x առանցքի վրա $\vec{G}$, $\vec{N}'_C$ և $\vec{\Phi}$ ուժերի պրոյեկցիաների գումարը պետք է լինի զրո (նկ. 1.2.1), հետևաբար

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0:$$

Այստեղից

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R}$$

կամ

$$N'_C = 25,2 \text{ Ն:}$$

$\vec{N}'_C$ հակազդման մեծությունը կարելի է որոշել նաև՝ օգտվելով շարժման բնական հավասարումներից,

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ:$$

Այստեղից

$$N'_C = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R} :$$

Գնդիկի փնտրվող N_C ճնշումը խողովակի պատին թվային արժեքով հավասար է գտնված $\vec{N}'_C$ հակազդմանը և ուղղված է նրան հակառակ:

BD տեղամասում՝ կիրառելով նյութական կետի շարժման քանակի փոփոխման թեորեմը, գտնենք գնդիկի արագությունը նրա D դիրքում (նկ. 1.2.2): Կունենանք

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix} ,$$

որտեղ $\sum S_{ix}$ -ը BD տեղամասում գնդիկի վրա ազդող ուժերի իմպուլսների գումարն է t ժամանակամիջոցում: Այս տեղամասում կետի վրա կիրառված են $\vec{G}$ ծանրության ուժը, խողովակի պատի $\vec{N}'$ հակազդումը և $\vec{F}$ շփման ուժը, ընդ որում՝

$$F = fN' = fG \cos \beta :$$

Քանի որ

$$v_{Dx} = v_D , \quad v_{Bx} = v_B ,$$

$$\sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t ,$$

ապա

$$mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t :$$

Հետևաբար՝

$$v_D = 4,01 \text{ մ/վ:}$$

Ձսպանակի առավելագույն h սեղմման չափը որոշելու համար օգտվենք DE հատվածում նյութական կետի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից՝

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_D^2}{2} = \sum A_i = -\frac{ch^2}{2} - GH_3 - Fh :$$

Հաշվի առնելով, որ $v_E = 0$ և $H_3 = h \sin \beta$, կստանանք

$$\frac{ch^2}{2} + G(\sin \beta + f \cos \beta)h - \frac{mv_D^2}{2} = 0$$

կամ

$$h^2 + \frac{2Gh(\sin \beta + f \cos \beta)}{c} - \frac{mv_D^2}{c} = 0 :$$

Լուծելով ստացված քառակուսի հավասարումը h -ի նկատմամբ, կստանանք՝

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ մ} :$$

Ակնհայտ է, որ որպես փնտրվող մեծություն պետք է ընդունել քառակուսի հավասարման դրական արմատը՝

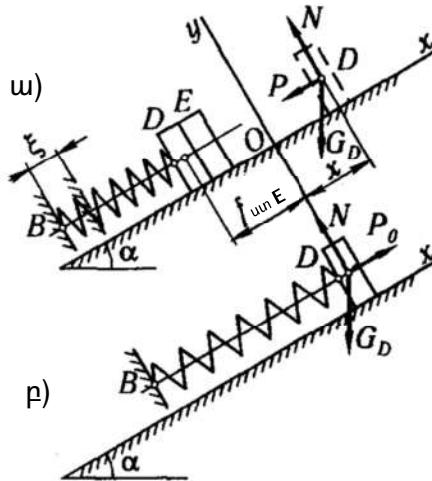
$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ մ} :$$

§ 1.3 Կերի տաքանոդական շարժում

Այս պարագրաֆում տրվում է [15]-ում ընդգրկված և կետի տաքանոդական շարժմանը վերաբերվող խնդիրների լուծման մեթոդ: Ներկայացնենք այն տիպային խնդրի օրինակով:

Օրինակ 1.3: $m_D = 2$ կգ և $m_E = 3$ կգ զանգվածներով D և E բեռները, հենվելով $c = 600$ Ն/մ կոշտության գործակցով զսպանակին, գտնվում են հորիզոնի նկատմամբ $\alpha = 30^\circ$ անկյուն կազմող թեք ողորկ հարթության վրա: Ժամանակի ինչ-որ պահի ($t = 0$) E բեռը հեռացնում են, միաժամանակ B զսպանակի ստորին ծայրը սկսում է շարժվել թեք հարթությունով $\xi = 0,02 \sin 10t$ օրենքով: Գտնել D բեռի շարժման հավասարումը:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներից: Որպես կոորդինատական համակարգի սկզբնակետ ընտրենք D բեռի ստատիկական հավասարակշռության դիրքը, որը համապատասխանում է զսպանակի ստատիկ դեֆոր-



Նկ. 1.3.1

մացիային այն պայմանի դեպքում, երբ B կետն ընդունում է իր միջին դիրքը ($\xi = 0$):

x առանցքն ուղղենք թեք հարթության երկայնքով դեպի վեր (E բեռը հեռացնելուց հետո D բեռի շարժման կողմը): Այդ դեպքում D բեռի շարժումը որոշվում է հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումով՝

$$m_D \ddot{x} = \sum F_{ix},$$

որտեղ $\sum F_{ix}$ -ը D բեռի վրա ազդող ուժերի x առանցքի վրա պրոյեկցիաների գումարն է (նկ. 1.3.1 ա): D բեռի վրա ազդում են նրա $\vec{G}_D$ կշիռը, թեք հարթության $\vec{N}$ նորմալ հակազդումը, զսպանակի առաձգականության $\vec{P}$ ուժը:

Այսպիսով՝

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - P:$$

Այստեղ

$$P = c(x - f_{\text{ստ } D} - \xi),$$

որտեղ $f_{\text{ստ } D}$ -ն զսպանակի ստատիկ դեֆորմացիան է D բեռի ազդեցության տակ, ξ -ն՝ $\xi = d \sin pt$ օրենքով շարժվող զսպանակի ստորին ծայրին ամրացված կետի տեղափոխությունն է ($d = 0,02$ մ, $p = 10$ ռադ/վ):

Զսպանակի $f_{\text{ստ } D}$ ստատիկ դեֆորմացիան կգտնենք թեք հարթության վրա D բեռի հավասարակշռության վիճակին համապատասխանող հավասարումից (նկ. 1.3.1 ք)։

$$\sum F_{ix} = 0$$

կամ

$$-G_D \sin \alpha + P_0 = 0,$$

այսինքն

$$-G_D \sin \alpha + cf_{\text{ստ } D} = 0,$$

որտեղից

$$f_{\text{ստ } D} = \frac{G_D \sin \alpha}{c}:$$

D բեռի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կլինի՝

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - c(x - f_{\text{ստ } D} - \xi)$$

կամ, ձևափոխությունից հետո՝

$$m_D \ddot{x} + cx = cd \sin pt: \quad (1.3.1)$$

Բաժանելով հավասարման բոլոր անդամները m_D -ի և ներմուծելով հետևյալ նշանակումները՝

$$\frac{c}{m_D} = k^2, \quad \frac{cd}{m_D} = h,$$

(1.3.1) դիֆերենցիալ հավասարումը կրերվի հետևյալ տեսքի՝

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt,$$

որը հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի գծային անհամասեռ դիֆերենցիալ հավասարում է: Այս անհամասեռ հավասարման լուծումը հավասար է համապատասխան համասեռ հավասարման x_1 ընդհանուր լուծման և տվյալ անհամասեռ հավասարման x_2 մասնավոր լուծման գումարին՝

$$x = x_1 + x_2:$$

Համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի

$$x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$$

տեսքը: Որպես անհամասեռ հավասարման մասնավոր լուծում վերցնենք՝

$$x_2 = \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin pt:$$

Ուրեմն (1.3.1) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{h}{(k^2 - p^2)} \sin pt:$$

C_1 և C_2 ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար հաշվենք x -ի ածանցյալն ըստ t -ի՝

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{hp}{(k^2 - p^2)} \cos pt$$

և օգտվենք խնդրի սկզբնական պայմաններից:

Դիտարկվող շարժումը սկսվում է այն պահին ($t = 0$), երբ զրու-
պանակի դեֆորմացիան ստատիկ է D և E բեռների ազդեցության
տակ: Ընտրված հաշվարկի համակարգի դեպքում D բեռի սկզբնա-
կան կոորդինատը հավասար է $x_0 = f_{\text{ստ } E}$, ընդ որում՝ $f_{\text{ստ } E} =$
 $= \frac{G_E \sin \alpha}{c}$ -ն զսպանակի ստատիկ դեֆորմացիան է E բեռի ազդե-
ցության տակ:

Այսպիսով՝ $t = 0$ դեպքում կունենանք

$$x_0 = -f_{\text{ստ } E}, \quad \dot{x}_0 = 0:$$

Կազմենք $x = x(t)$ և $\dot{x} = \dot{x}(t)$ հավասարումները $t = 0$ դեպ-
քում, կստանանք

$$x_0 = C_1, \quad \dot{x}_0 = C_2 k + \frac{hp}{(k^2 - p^2)},$$

որտեղից

$$C_1 = -f_{\text{ստ } E}, \quad C_2 = -\frac{hp}{k(k^2 - p^2)}:$$

D բեռի շարժման հավասարումը կգրվի

$$x = -f_{\text{ստ } E} \cos kt - \frac{hp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt$$

տեսքով: Մնում է գտնել հավասարման մեջ մասնակցող մեծություննե-
րի թվային արժեքները՝

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 100}{2}} = 17,3 \text{ վ}^{-1},$$

$$f_{\text{սն } E} = \frac{G_E \sin \alpha}{c} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{6 \cdot 100} = 0,0245 \text{ ս} = 2,45 \text{ սս},$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{cd}{m_D(k^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0,02}{2(300 - 100)} = 0,03 \text{ ս} = 3 \text{ սս},$$

$$\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = \frac{0,03 \cdot 10}{17,3} = 0,0173 \text{ ս} = 1,73 \text{ սս}:$$

Հետևաբար, D բեռի շարժման հավասարումը կլինի՝

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (սս)}:$$

2. ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱ

§ 2.1 Չանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը

Այս պարագրաֆում տրվում է համակարգի զանգվածների կենտրոնի շարժման վերաբերյալ թեորեմի կիրառմամբ լուծվող խընդիրների համար ընդհանուր դրվածք, առաջարկվում է դրանց լուծման համար կատարվող անհրաժեշտ քայլերի հաջորդականություն:

Խնդրի դրվածքը: Իրար հետ կապ ունեցող n մարմիններից բաղկացած սարքը տեղադրված է հորիզոնական հարթության վրա գտնվող պրիզմայի վրա: Պրիզմայի և հարթության միջև շփումը բացակայում է: Մարմիններից մեկը տեղափոխվում է պրիզմայի նկատմամբ: Ո՞ր կողմ և ի՞նչ հեռավորության վրա կտեղափոխվի պրիզման:

Լուծման պլան: Խնդիրը լուծելու համար օգտագործում ենք զանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը: Ընտրում ենք կոորդինատական համակարգ: Առանցքներից մեկը, օրինակ՝ x առանցքը, տանում ենք արտաքին ուժերի ազդման գծին ուղղահայաց: Այդ դեպքում զանգվածների կենտրոնի շարժման հավասարման պրոյեկցիան x առանցքի վրա կլինի

$$m\ddot{x}_c = 0, \quad (2.1.1)$$

որտեղ x_c -ն համակարգի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատն է,

$m = \sum_{i=1}^n m_i$ - ն՝ ամբողջ համակարգի զանգվածը: Երկու անգամ ինտեգ-

րելով (2.1.1)-ը և հաշվի առնելով, որ սկզբնական պահին զանգվածների կենտրոնի արագությունը եղել է հավասար զրոյի, ստանում ենք

$$mx_c = const : \quad (2.1.2)$$

Համակարգի զանգվածների կենտրոնի կոորդինատը հաշվում ենք հետևյալ բանաձևով՝

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i : \quad (2.1.3)$$

Հաշվի առնելով (2.1.3)-ը՝ (2.1.2)-ը գրում ենք համակարգի սկզբնական դիրքի համար և մարմիններից մեկի տեղաշարժից հետո, ստանում ենք բանաձև, որը կապ է հաստատում համակարգի մարմինների բացարձակ տեղաշարժերի միջև՝

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = 0 : \quad (2.1.4)$$

1) Յուրաքանչյուր մարմնի բացարձակ տեղափոխությունը ներկայացնում ենք որպես երկու տեղափոխությունների գումար, որոնցից մեկը՝ այդ մարմնի հարաբերական տեղափոխությունն է, որն արտահայտված է մարմիններից մեկի տրված հարաբերական տեղափոխությունով, իսկ մյուսը՝ անհայտ փոխադրական Δ տեղափոխությունը, որը հավասար է այն մարմնի բացարձակ տեղափոխությանը, որի նկատմամբ տրվել էր հարաբերական տեղափոխությունը:

2) Տեղադրելով բացարձակ տեղափոխությունները (2.1.4)-ի մեջ, ստանում ենք հավասարում Δ տեղափոխության նկատմամբ, որի լուծումը տալիս է խնդրի պատասխանը:

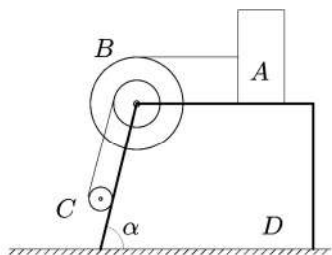
Օրինակ 2.1: 50 կգ զանգվածով A բեռից, 80 կգ զանգվածով B գլանից (մեծ շառավիղը՝ $R = 30$ սմ, փոքրը՝ $r = 10$ սմ) և 120 կգ զանգվածով $R_C = \frac{r}{2}$ շառավղով C ճախարակից բաղկացած սար-

քը տեղադրված է հորիզոնական հարթության վրա գտնվող 210 կգ զանգվածով D պրիզմայի վրա: Պրիզմայի և հարթության միջև շփումը բացակայում է: A բեռը պրիզմայի մակերևույթի երկայնքով ստանում է $S = 1,2$ մ տեղափոխություն դեպի ձախ, $\alpha = 75^\circ$ (նկ. 2.1.1): Որտե՞ղ և ի՞նչ հեռավորության վրա կտեղափոխվի պրիզման:

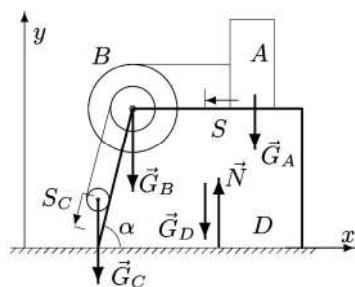
Լուծում: Ընտրենք կոորդինատական համակարգ (նկ. 2.1.2): Համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի (G_A , G_B , G_C , G_D ծանրության ուժերի, հենարանի N հակազդման) պրոյեկցիաները հորիզոնական x առանցքի վրա հավասար են զրոյի, իսկ, ըստ պայմանի, D պրիզմայի և հենարանի միջև շփումը բացակայում է:

1. A , B և C մարմինների բացարձակ տեղափոխությունը ներկայացնենք որպես երկու տեղափոխությունների գումար, որոնցից մեկը A բեռի S հարաբերական տեղափոխությունից կախված հարաբերական տեղափոխություն է, իսկ մյուսը՝ անհայտ փոխադրական Δ_D տեղափոխությունը, որը հավասար է պրիզմայի բացարձակ տեղափոխմանը, որի նկատմամբ տրվել էր A բեռի S տեղափոխությունը:

Համակարգի մարմինների զանգվածների կենտրոնների կոոր-



Նկ. 2.1.1



Նկ. 2.1.2

դինատների բացարձակ տեղափոխությունները նշանակենք Δ_A , Δ_B ,

Δ_C, Δ_D : x առանցքի ուղղությունը որոշում է տեղափոխությունների նշանները. դեպի ձախ՝ բացասական, դեպի աջ՝ դրական: Ենթադրում ենք, որ պրիզման կտեղափոխվի աջ: C ճախարակի կենտրոնի տեղափոխությունը պրիզմայի նկատմամբ և A բեռի տեղափոխությունը կապված են այնպես, ինչպես նրանց արագությունները:

C ճախարակը կատարում է հարթ շարժում: Նրա կենտրոնի բացարձակ տեղափոխման պրոյեկցիան x առանցքի վրա հավասար է $\Delta_D - S_C \cos \alpha$, որտեղ S_C -ն ճախարակի կենտրոնի տեղափոխությունն է պրիզմայի թեք մակերևույթի երկայնքով: Արտահայտենք S_C -ն S -ով: Դրա համար կապ ստեղծենք A բեռի և C ճախարակի զանգվածների կենտրոնի արագությունների միջև: Ճախարակի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը գտնվում է պրիզմայի շոշափման կետում, հետևաբար, նրա զանգվածների կենտրոնի արագությունը պրիզմայի նկատմամբ երկու անգամ փոքր է սկավառակի վրա փաթաթվող թելի արագությունից: A բեռի արագությունն արտահայտենք գլանի անկյունային արագությունով՝

$$v_C = 0,5\omega_B r, \quad v_A = \omega_B R: \quad (2.1.5)$$

Արտաքսելով այստեղից ω_B -ն, կստանանք արագությունների կապը՝

$$v_C = 0,5v_A \frac{r}{R}:$$

Ինտեգրելով ստացված առնչությունը զրոյական սկզբնական պայմանների դեպքում, կստանանք փնտրվող կապը՝

$$S_C = 0.5S \frac{r}{R}:$$

Այնուհետև կգտնենք բոլոր մարմինների բացարձակ տեղափոխությունների արտահայտությունը՝ արտահայտած Δ_D -ով և S -ով.

$$\Delta_A = \Delta_D - S, \quad \Delta_B = \Delta_D,$$

$$\Delta_C = \Delta_D - 0.5S \frac{r}{R \cos \alpha} \quad (2.1.6)$$

2. Տեղադրելով բացարձակ տեղափոխությունները (2.1.4)-ի մեջ, կստանանք

$$m_A \Delta_A + m_B \Delta_B + m_C \Delta_C + m_D \Delta_D = 0$$

հավասարումը կամ՝ հաշվի առնելով (2.1.6)-ը, կստանանք

$$m_A(\Delta_D - S) + m_B \Delta_D + m_C \left(\Delta_D - 0.5S \frac{r}{R \cos \alpha} \right) + m_D \Delta_D = 0:$$

Լուծելով այս հավասարումը Δ_D -ի նկատմամբ, կունենանք

$$\Delta_D = \frac{m_A S + m_C 0.5S \frac{r}{R \cos \alpha}}{m_A + m_B + m_C + m_D} = 14,39:$$

D պրիզման կտեղափոխվի դեպի աջ 14,39 սմ-ով:

§ 2.2 Համակարգի կինետիկ էներգիա

Այս պարագրաֆում տրվում է մեկ ազատության աստիճան ունեցող մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիան հաշվելու վերաբերյալ խնդիրների լուծման եղանակ: Ձևակերպված է ընդհանուր խնդրի դրվածքը և առաջարկված է լուծման համար կատարվող անհրաժեշտ քայլերի հաջորդականությունը:

խնդրի դրվածքը: Մեկ ազատության աստիճան ունեցող մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիան արտահայտել համակարգի մարմիններից մեկի անկյունային արագությունով կամ նրա որևէ կետի գծային արագությունով:

Լուծման պլան: Այսպիսի դրվածքով խնդիրները լուծելու համար նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Համակարգի մարմինների անկյունային արագություններն ու նրանց զանգվածների կենտրոնների գծային արագություններն արտահայտում ենք համակարգի մարմիններից մեկի համար տրված արագությունով:

2) Հաշվում ենք համակարգի առանձին մարմինների կինետիկ էներգիաները: Համընթաց շարժում կատարող մարմնի համար կինետիկ էներգիան որոշվում է

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (2.2.1)$$

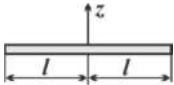
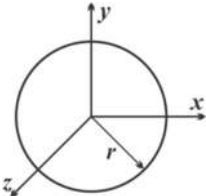
բանաձևով, որտեղ m -ը մարմնի զանգվածն է, v -ն՝ նրա որևէ կետի արագությունը: Հիշեցնենք, որ համընթաց շարժման դեպքում մարմնի բոլոր կետերի արագությունները հավասար են, իսկ անկյունային արագությունը հավասար է զրոյի:

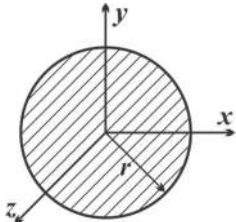
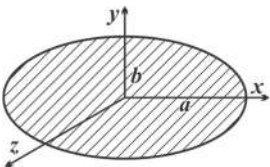
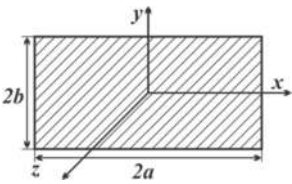
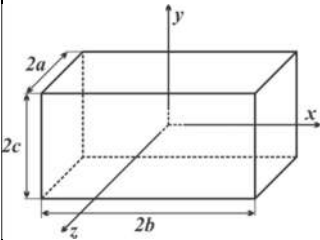
ω անկյունային արագությունով պտտական շարժում կատարող մարմնի կինետիկ էներգիան որոշվում է

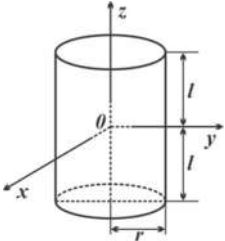
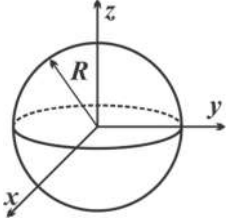
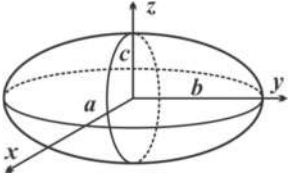
$$T = \frac{J\omega^2}{2} \quad (2.2.2)$$

բանաձևով, որտեղ J -ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է պտտման առանցքի նկատմամբ: Հիշենք, որ $J = \frac{mR^2}{2}$ -ը R շառավղով համասեռ սկավառակի իներցիայի մոմենտն է զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ, a երկարությամբ համասեռ ձողի իներցիայի մոմենտը միջնակետի նկատմամբ՝ $J = \frac{ma^2}{12}$, իսկ որևէ ծայրի նկատմամբ՝ $J = \frac{ma^2}{3}$ (որոշ մարմինների իներցիայի մոմենտների արժեքներ տրված են աղյուսակում):

Աղյուսակ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՊԱՐԶ ՀԱՄԱՍԵՌ ՊԻՆԴ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԻՆԵՐՑԻԱՅԻ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐ			
1	Բարակ ուղղաձիգ ձող		$J_{yy} = 0,$ $J_{xx} = J_{zz} = \frac{M}{3}l^2,$
2	Օղակ (նյութական շրջանագիծ)		$J_{xx} = J_{yy} = 0,$ $J_{zz} = \frac{M}{2}r^2,$

3	Բարակ շրջանային սկավառակ		$J_{xx} = J_{yy} = \frac{M}{4} r^2,$ $J_{zz} = \frac{M}{2} r^2,$
4	Էլիպս		$J_{xx} = \frac{M}{4} b^2,$ $J_{yy} = \frac{M}{4} a^2,$ $J_{zz} = \frac{M}{2} (a^2 + b^2)$
5	Բարակ ուղղանկյուն թիթեղ		$J_{xx} = \frac{M}{3} b^2,$ $J_{yy} = \frac{M}{3} a^2,$ $J_{zz} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2),$
6	Ուղղանկյուն զուգահեռանիստ		$J_{xx} = \frac{M}{3} (b^2 + c^2),$ $J_{yy} = \frac{M}{3} (a^2 + c^2),$ $J_{zz} = \frac{M}{3} (a^2 + b^2),$

7	Շրջանային գլան		$J_{xx} = J_{yy} =$ $= M\left(\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right),$ $J_{zz} = \frac{M}{2}r^2,$
8	Գունդ		$J_{xx} = J_{yy} =$ $= J_{zz} = \frac{2}{5}MR^2$
9	Էլիպսոիդ		$J_{xx} = \frac{M}{5}(b^2 + c^2),$ $J_{yy} = \frac{M}{5}(a^2 + c^2),$ $J_{zz} = \frac{M}{5}(a^2 + b^2),$

Մարմնի իներցիայի մոմենտները զուգահեռ առանցքների նկատմամբ կապված են $J = J_c + h^2 m$ առնչությամբ (Հյուգենսի առաջին թեորեմ), որտեղ J_c -ն իներցիայի մոմենտն է զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ, h -ը առանցքների միջև եղած

հեռավորությունն է: Եթե հայտնի է m զանգվածով մարմնի i իներցիայի շառավիղը, ապա նրա իներցիայի մոմենտը հավասար է՝ $J = mi^2$:

Հարթ զուգահեռական շարժում կատարող մարմնի կինետիկ էներգիան հավասար է՝

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}, \quad (2.2.3)$$

որտեղ v_c -ն մարմնի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_c -ն մարմնի իներցիայի մոմենտն է նրա զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ: Մասնավոր դեպքում, անշարժ հարթության վրայով առանց սահքի գլորվող համասեռ սկավառակի կինետիկ էներգիան կլինի.

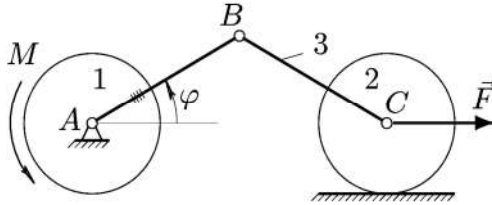
$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2 \left(\frac{v_c}{R} \right)^2}{4} = \frac{3mv_c^2}{4}: \quad (2.2.4)$$

3) Համակարգի կինետիկ էներգիան հաշվում ենք որպես առանձին մարմինների կինետիկ էներգիաների գումար՝

$$T = \sum_{k=1}^n T_k:$$

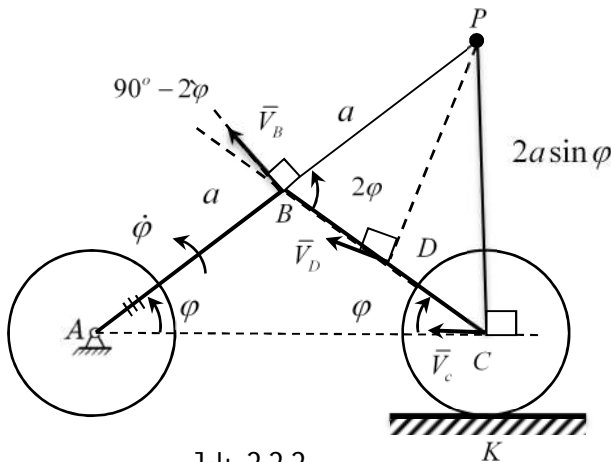
Օրինակ 2.2: Նկ. 2.2.1-ում պատկերված մեկ ազատության աստիճան ունեցող մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիան արտահայտել ϕ անկյունային արագությունով: Համակարգը բաղկացած է ABC երկօղակով ամրացված R շառավղով 1 և 2 համասեռ սկավառակներից: AB անկշիռ ձողը կոշտ միացված է 1 սկավառակին: 1 և 2 սկավառակների զանգվածները համապատասխանաբար

հավասար են m_1 և m_2 -ի, BC համասեռ ձողի զանգվածը m_3 է ($AB = BC = a$): 2 սկավառակը գլորվում է առանց սահքի և դիմադրության:



Նկ. 2.2.1

Լուծում: 1) Խնդրի լուծումը կատարենք վերը նշված քայլերով: BC ձողի անկյունային արագությունը, նրա զանգվածների D կենտրոնի գծային արագությունը, 2 սկավառակի անկյունային արագությունը և նրա զանգվածների կենտրոնի գծային արագությունն արտահայտենք AB ձողի տրված $\dot{\varphi}$ արագությունով: Դրա համար օգտվենք



Նկ. 2.2.2

հարթ պատկերի կետերի արագությունները գտնելու եղանակներից:

AB ձողը պտտվում է A կետով անցնող առանցքի շուրջը $\dot{\varphi}$ արագությունով, հետևաբար նրա B ծայրի գծային արագությունը կլինի՝ $v_B = AB \cdot \dot{\varphi} = a \cdot \dot{\varphi}$ (պատկերի կետերի արագությունների ուղղությունները պատկերված են նկ. 2.2.2-ում): BC ձողի C կետի գծային արագությունը որոշենք $v_B \cdot \cos(90^\circ - 2\varphi) = v_C \cdot \cos \varphi$ բանաձևից: Կունենանք՝ $v_C = 2v_B \cdot \sin \varphi = 2a \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi$: Այդ դեպքում՝

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_B}{AB} = \dot{\varphi},$$

որտեղ P –ն BC ձողի արագությունների ակնթարթային կենտրոնն է: BC ձողի զանգվածների D կենտրոնի գծային արագությունը կլինի՝ $v_D = PD \cdot \omega_{BC} = PD \cdot \dot{\varphi}$: PBC հավասարասրուն եռանկյունուց կունենանք.

$$PD = \frac{1}{2}a\sqrt{1+8\sin^2 \varphi}, \text{ հետևաբար, } v_D = \frac{1}{2}a\dot{\varphi}\sqrt{1+8\sin^2 \varphi} :$$

Մնում է որոշել 2 սկավառակի անկյունային արագությունը: 2 սկավառակի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը K կետն է, հետևա-

$$\text{բար, } \omega_2 = \frac{v_C}{CK} = \frac{v_C}{R} :$$

2) Հաշվենք համակարգի մարմինների կինետիկ էներգիաները: m_1 զանգվածով և զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի

նկատմամբ $J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}$ իներցիայի մոմենտ ունեցող 1 սկավառակի

կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\phi}^2}{2} = \frac{\dot{\phi}^2 R^2 m_1}{4}:$$

Անշարժ հարթության վրայով առանց սահքի գլորվող հոծ համասեռ 2 սկավառակի կինետիկ էներգիան կլինի.

$$T_2 = \frac{3m_2 v_C^2}{4} = 3m_2 \dot{\phi}^2 a^2 \sin^2 \varphi:$$

BC ծողի (որի զանգվածների կենտրոնը գտնվում է D կետում) հարթ շարժման կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_3 = \frac{m_3 v_D^2}{2} + \frac{J_{BC} \omega_{BC}^2}{2} = m_3 \dot{\phi}^2 a^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right):$$

3) Համակարգի կինետիկ էներգիան հաշվենք որպես առանձին մարմինների կինետիկ էներգիաների գումար՝

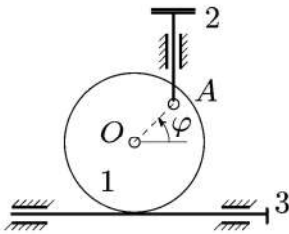
$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \dot{\phi}^2 \left(a^2 (3m_2 + m_3) \sin^2 \varphi + \frac{m_1 R^2}{4} + \frac{m_3 a^2}{6} \right):$$

Օրինակ 2.3: m_1 զանգվածով և R շառավղով 1 համասեռ սկավառակը A կետում հողակապով միացված է m_2 զանգվածով ուղղահայաց շարժվող 2 մխոցակորին: Սկավառակն առանց սահքի գլորվում է m_3 զանգվածով 3 հորիզոնական մխոցակորի վրայով,

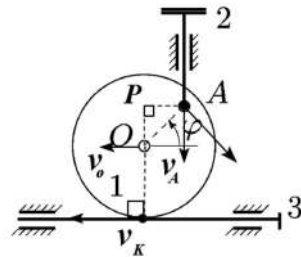
$OA = a$, $m_1 = m_2 = m_3 = m$ (նկ. 2.2.3): Նկարագրված մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիան արտահայտել $\dot{\phi}$ անկյունային արագությունով:

Լուծում: 2 և 3 մխոցակորները կատարում են ուղղագիծ շարժում, իսկ սկավառակը՝ հարթ զուգահեռական: Ունենալով

սկավառակին պատկանող A և K կետերի արագությունների ուղղությունները կարող ենք գտնել նրա արագությունների ակնթարթային P կենտրոնի դիրքը (նկ. 2.2.4): Նախ A կետի շարժումը դիտարկենք որպես բարդ շարժում, այդ դեպքում O կետի շուրջ պտտվելիս A կետի v_A' հարաբերական արագությունը կլինի $\dot{\varphi}a$, իսկ բացարձակ արագությունը կլինի $v_A = \dot{\varphi}a \cos \varphi$: Մյուս կողմից՝ A կետը պտտվում է P կետի շուրջ $v_A = \omega_1 PA = \omega_1 a \cos \varphi$ արագությամբ: Որտեղից էլ հետևում է, որ $\omega_1 = \dot{\varphi}$: Այսինքն կստանանք, որ $v_o = PO\omega_1 = \dot{\varphi}a \sin \varphi$



Նկ. 2.2.3



Նկ. 2.2.4

, իսկ $v_k = PK\omega_1 = \dot{\varphi}(R + a \sin \varphi)$:

Հաշվենք համակարգի մարմինների կինետիկ էներգիաները: m_1 զանգվածով և զանգվածների կենտրոնով անցնող առանցքի նկատմամբ $J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}$ իներցիայի մոմենտ ունեցող 1 սկավառակի կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_1 = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_1 v_o^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2 m_1}{4} + \frac{\dot{\varphi}^2 a^2 m_1 \sin^2 \varphi}{2} :$$

2 մխոցակոթի կինետիկ էներգիան կլինի

$$T_2 = \frac{m_2 v_A^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 \dot{\phi}^2 a^2 \cos^2 \varphi,$$

իսկ 3 միացակորթինը՝

$$T_3 = \frac{m_3 v_K^2}{2} = \frac{m_3 \dot{\phi}^2 (R + a \sin \varphi)^2}{2}:$$

Համակարգի կինետիկ էներգիան հաշվենք որպես առանձին մարմինների կինետիկ էներգիաների գումար: Վերջնականապես կունենանք.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 0,5 \dot{\phi}^2 m \left(0,5 R^2 + a^2 + (R + a \sin \varphi)^2 \right):$$

§ 2.3 Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը

Այս պարագրաֆում տրվում է համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմի կիրառմամբ լուծվող խնդիրների համար ընդհանուր դրվածքներ: Առաջարկվում է լուծման համար կատարվող անհրաժեշտ քայլերի պլան: Դիտարկվում է խնդիրների երկու տիպ իրենց համապատասխան օրինակներով:

I խնդրի դրվածքը: Մեխանիկական համակարգը դադարի վիճակից շարժման մեջ է դրվում արտաքին ուժերի ազդեցությամբ: Որոշակի ժամանակահատվածում համակարգի մարմիններից մեկը տեղափոխվում է տրված հեռավորությամբ: Որոշել համակարգի մարմինների ձեռք բերած արագությունները (գծային կամ անկյունային):

Լուծման պլան: Խնդիրը լուծելու համար նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Համակարգի կինետիկ էներգիան արտահայտում ենք այն մարմնի արագությունով, որի տեղափոխությունը տրված է:

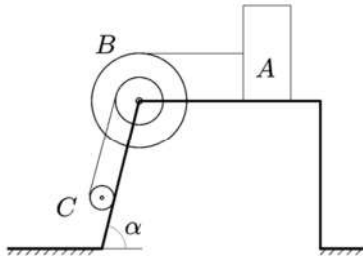
2) Հաշվում ենք համակարգի վրա կիրառված ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը տրված տեղափոխության վրա: S_* -ով արտահայտում ենք ուժերի կիրառման կետերի տեղափոխությունները և այն մարմինների պտտման անկյունները, որոնց վրա կիրառված են մոմենտները:

3) Օգտվելով կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից՝

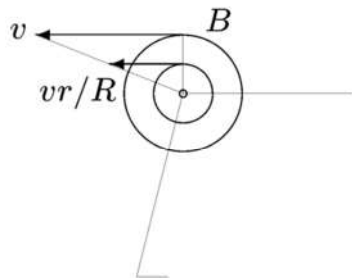
$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^e + \sum_j A_j^i, \quad (2.3.1)$$

որտեղ $\sum_j A_j^e$ -ն արտաքին, իսկ $\sum_j A_j^i$ -ն՝ ներքին ուժերի կատարած աշխատանքն է, որոշում ենք ν_* արագությունը, հետևաբար նաև պահանջվող գծային կամ անկյունային արագությունը:

Օրինակ 2.3: A բեռից, B աստիճանավոր թմբկազլանից և R_C շառավղով C գլանից կազմված սարքը տեղադրված է անշարժ պրիզմայի վրա (նկ. 2.3.1): Ծանրության ուժերի ազդեցության տակ սարքը դադարի վիճակից սկսում է շարժումը: Տրված են $m_A = 50$ կգ, $m_B = 80$ կգ, $m_C = 120$ կգ զանգվածները, $\alpha = 75^\circ$ անկյունը, աստիճանավոր թմբկազլանի $i = 15$ սմ իներցիայի շառավիղը, գլանի և թեք հարթության միջև $\delta = 2$ մմ գլորման շփման գործակիցը, բեռի և հորիզոնական հարթության միջև $f = 0,1$ շփման գործակիցը: B թմբկազլանի առանցքների վրա շփում չկա: Թմբկազլանը բեռի և ճախարակի հետ միացնող թելերը զուգահեռ են այն հարթություններին, որոնցով տեղափոխվում են այդ մարմինները: Ինչպիսի՞ արագություն կգարգացնի A բեռը՝ տեղափոխվելով $S_A = 1,2$ մ հեռավորության վրա:



Նկ. 2.3.1



Նկ. 2.3.2

Լուծում: Օգտվենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման (2.3.1) թեորեմից: Չձգվող թելերով միացված պինդ մարմիններից բաղկացած դիտարկվող համակարգի համար ներքին ուժերի կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի՝ $\sum_j A_j^i = 0$: Սկզբնական դիրքում սարքի բոլոր տարրերը գտնվել են դադարի վիճակում, նրանց բոլորի արագությունները հավասար են եղել զրոյի, հետևաբար, $T_0 = 0$: Հորիզոնական հարթությունով S_A հեռավորությամբ տեղափոխվելուց

հետո համակարգի ձեռք բերած T_1 կինետիկ էներգիան կախված կլինի փնտրվող v_A արագությունից:

1) Համակարգի կինետիկ էներգիան, որը բաղկացած է երեք գումարելիներից, արտահայտենք $v = v_A$ արագությունով: A բեռը շարժվում է համընթաց, հետևաբար, նրա կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_A = \frac{m_A v^2}{2}: B \text{ թմբկազևանը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը,}$$

հետևաբար՝ $T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2}$: Թմբկազևանի իներցիայի մոմենտը պտըտ-

ման առանցքի նկատմամբ հաշվենք տրված իներցիայի շառավղով՝ $J_B = i^2 m_B$: ω_B անկյունային արագությունն անհրաժեշտ է արտահայտել փնտրվող v արագությունով: Թմբկազևանի արտաքին եզրաշերտի գծային արագությունը համընկնում է բեռի v արագության հետ, քանի որ եզրաշերտը անձգելի թելով կապված է բեռի հետ: Թմբկազևանի անկյունային արագության համար գրենք հետևյալ բանաձևը՝

$$\omega_B = \frac{v}{R}: \text{Արտահայտենք } T_B \text{-ն } v \text{ արագությամբ}$$

$$T_B = \frac{m_B i^2 v^2}{2R^2}:$$

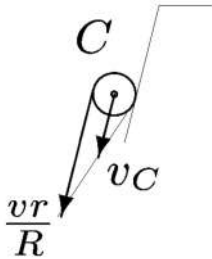
C զվանը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում, հետևաբար՝

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

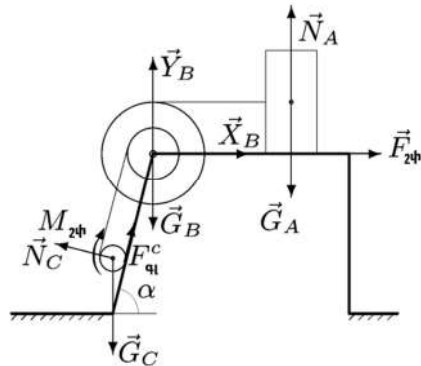
որտեղ v_C -ն զվանի զանգվածների կենտրոնի արագությունն է, J_C -ն՝ զվանի իներցիայի մոմենտը կենտրոնական առանցքի նկատմամբ՝

$$J_C = \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{m_C (r/2)^2}{2} = \frac{m_C (r)^2}{8}:$$

v_C -ն և ω_C -ն արտահայտենք v -ով: Թմբկագլանի ներքին եզրաշերտի կետերն ունեն $r\omega_B = \frac{vr}{R}$ արագություն (նկ. 2.3.2):



Նկ. 2.3.3



Նկ. 2.3.4

C գլանը պտտվում է առանց սահքի, ուստի պրիզմայի հետ նրա շփման կետը կլինի այդ մարմնի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (նկ. 2.3.3), հետևաբար՝

$$\omega_C = \frac{vr}{2R_C R} = \frac{v}{R}, \quad (2.3.2)$$

$$v_C = \omega_C R_C = \frac{v}{R} \frac{r}{2}: \quad (2.3.3)$$

Արդյունքում կգտնենք C գլանի կինետիկ էներգիան՝

$$T_C = \frac{m_C r^2 v^2}{8R^2} + \frac{m_C r^2}{8} \frac{v^2}{2R^2} = \frac{3}{16} m_C v^2 \frac{r^2}{R^2} :$$

Երեք մարմիններից կազմված համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_1 = T_A + T_B + T_C = \frac{v^2}{2} \mu , \quad (2.3.4)$$

որտեղ $\mu = m_A + \frac{m_B i^2}{R^2} + \frac{3}{8} \frac{m_C r^2}{R^2}$ -ն համակարգի բերված զանգվածն է:

2) Գտնենք համակարգի վրա ազդող արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Պատկերենք համակարգի վրա ազդող ուժերը (նկ. 2.3.4): Հենարանների $\vec{N}_A$, $\vec{N}_C$ հակազդումները և $\vec{G}_A$ կշիռը աշխատանք չեն կատարում, քանի որ դրանք ուղղահայաց են իրենց կիրառման կետերի տեղափոխություններին: B առանցքի $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ հակազդումները և $\vec{G}_B$ կշիռը կիրառված են B անշարժ կետում, հետևաբար, դրանց կատարած աշխատանքը նույնպես հավասար է զրոյի: Նմանապես, C գլանի շփման կետում կիրառված գլորման շփման ուժի կատարած աշխատանքը ևս հավասար է զրոյի: Մնացած ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$\sum_{j=1}^3 A_j = -F_{2\phi} S_A + G_C S_C \sin \alpha - M_{2\phi} \varphi_C ,$$

որտեղ S_C -ն և φ_C -ն, համապատասխանաբար, C գլանի ծանրության կենտրոնի տեղափոխությունը և պտտման անկյունն են: Գտնենք A բեռի սահքի շփման ուժը և C գլանի գլորման շփման մոմենտը: Ունենք $F_{2\phi} = N_A f$, $M_{2\phi} = N_C \delta$, որտեղ N_A -ն և N_C -ն համապատասխան նորմալ հակազդումներն են: A բեռի վրա ազդող բոլոր ու-

Ժերի պրոյեկցիան մակերևույթի նորմալի վրա հավասար է զրոյի: Այստեղից՝ $N_A = G_A$: Նույն ձևով ստանում ենք՝ $N_C = G_C \cos \alpha$, քանի որ C գլանի վրա ազդող բոլոր ուժերի պրոյեկցիաների գումարը պրիզմայի կողմնային մակերևույթի նորմալի վրա հավասար է զրոյի: Արդյունքում ստանում ենք՝

$$F_{2\psi} = G_A f = m_A g f, \quad M_{2\psi} = N_C \delta = m_C g \delta \cos \alpha:$$

Քանի որ $v_C = \dot{S}_C$, $v = \dot{S}_A$, $\omega_C = \dot{\varphi}_C$, ապա, ինտեգրելով (2.3.2)-ը և (2.3.3)-ը զրոյական սկզբնական պայմանների դեպքում՝ կստանանք

$$S_C = \frac{S_A r}{(2R)}, \quad \varphi_C = \frac{S_A}{R}:$$

Համակարգի վրա ազդող ուժերի կատարած գումարային աշխատանքն արտահայտենք S_A -ով՝

$$\sum_{j=1}^3 A_j = -m_A g f S_A + m_C g \sin \alpha \frac{S_A r}{2R} - m_C g \delta \cos \alpha \frac{S_A}{R}, \quad (2.3.5)$$

3) Մնում է համակարգի (2.3.4) կինետիկ էներգիան հավասարեցնենք ուժերի կատարած աշխատանքների (2.3.5) գումարին՝

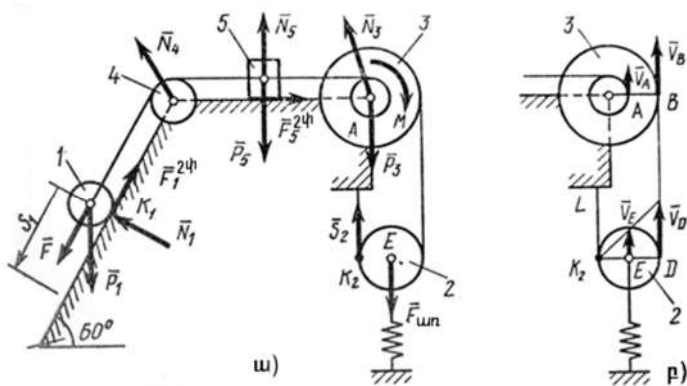
$$\frac{v^2}{2} \mu = g S_A \left(-m_A f + m_C \sin \alpha \frac{r}{2R} - m_C \cos \alpha \frac{\delta}{R} \right):$$

Այստեղից կստանանք՝ $v = 2,10$ մ/վ:

Օրինակ 2.4: Մեխանիկական համակարգը կազմված է 1 հոծ համասեռ գլանային գլիդինից, 2 շարժական ճախարակից, $R_3 = 0,3$ մ և $r_3 = 0,1$ մ շառավիղներով և պտտման առանցքի նկատմամբ $\rho_3 = 0,2$ մ

իններցիայի շառավղով 3 աստիճանավոր փոկանիվից, 4 ճախարակից և 5 բեռից: Բեռի և հարթության միջև շփման գործակիցը՝ $f = 0,1$ է: Համակարգի մարմինները միմյանց հետ միացված են 3 փոկանիվի վրա փաթաթված թելերով: 2 ճախարակի E կենտրոնին միացված է $c = 240$ ն/մ կոշտության գործակցով զսպանակ, որի սկզբնական դեֆորմացիան հավասար է զրոյի (նկ. 2.3.5 ա): Համակարգը դադարի վիճակից շարժման մեջ է դրվում $F = f(s) = 20(3 + 2s)$ Ն ուժի ազդեցության տակ, որը կախված է նրա կիրառման կետի s տեղափոխությունից: 3 փոկանիվի վրա շարժման ժամանակ ազդում է դիմադրության ուժերի $M = 0,6$ Ն·մ հաստատուն մոմենտը: Որոշել 3 փոկանիվի ω_3 անկյունային արագությունը ժամանակի այն պահին, երբ s տեղափոխությունը դառնում է հավասար $s_1 = 0,2$ մ, ընդունելով $m_1 = 8$ կգ, $m_2 = 0$ կգ, $m_3 = 4$ կգ, $m_4 = 0$ կգ, $m_5 = 10$ կգ:

Լուծում: 1) Դիտարկենք թելերով միացված ու ոչ զրոյական զանգված ունեցող 1,3,5 և 2,4 անկշիռ մարմիններից բաղկացած անփոփոխ մեխանիկական համակարգի շարժումը: Պատկերենք համա-



Նկ. 2.3.5

կարգի վրա ազդող արտաքին ուժերը՝ $\vec{F}$, $\vec{F}_{\text{տ}}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$, $\vec{P}_5$ ակտիվ ուժերը, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$, $\vec{N}_5$ հակազդումները, թելի $\vec{S}_2$ լարումը, $\vec{F}_1^{2\psi}$, $\vec{F}_5^{2\psi}$ շփման ուժերը և M մոմենտը:

3 փոկանիվի ω_3 անկյունային արագությունը որոշելու համար օգտվենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմից՝

$$T - T_0 = \sum A_k^e : \quad (2.3.5)$$

2) Որոշենք T_0 -ն և T -ն: Քանի որ սկզբնական պահին համակարգը գտնվել է դադարի վիճակում, ապա $T_0 = 0$: T մեծությունը հավասար է համակարգի բոլոր մարմինների կինետիկ էներգիաների գումարին՝

$$T = T_1 + T_3 + T_5 : \quad (2.3.6)$$

Հաշվի առնելով, որ 1 մարմինը կատարում է հարթ զուգահեռական շարժում, 5 մարմինը՝ համընթաց, իսկ 3 մարմինը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, կստանանք՝

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{C_1}^2 + \frac{1}{2} I_{C_1} \omega_1^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2, \quad T_5 = \frac{1}{2} m_5 v_5^2 : \quad (2.3.7)$$

Այստեղ առկա բոլոր արագությունները կարելի է արտահայտել փնտրվող ω_3 -ով: Դրա համար նախապես նշենք, որ $v_{C_1} = v_5 = v_A$, որտեղ A -ն 3 փոկանիվի r_3 շառավղով շրջանակի կամայական կետ է, և որ K_1 -ը՝ 1 գլոխի արագությունների ակնթարթային կենտրոնն է, որի շառավիղը նշանակենք r_1 : Այդ դեպքում՝

$$v_{C_1} = v_5 = \omega_3 r_3, \quad \omega_1 = \frac{v_{C_1}}{K_1 C_1} = \frac{v_{C_1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1} : \quad (2.3.8)$$

Բացի դա, (2.3.7)-ի մեջ մասնակցող իներցիայի մոմենտներն ունեն

$$I_{C_1} = 0,5 m_1 r_1^2 \quad \text{և} \quad I_3 = m_3 \rho_3^2 \quad (2.3.9)$$

արժեքները: Տեղադրելով (2.3.8) և (2.3.9) մեծությունները (2.3.7)-ի մեջ, այնուհետև օգտվելով (2.3.6)-ից, վերջնականապես կստանանք՝

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 : \quad (2.3.10)$$

3) Այժմ գտնենք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը համապատասխան տեղափոխությունների վրա, որը համակարգը կունենա, երբ 1 գլոնի կենտրոնն անցնի s_1 ճանապարհի: Նշանակենք s_5 -ով՝ 5 բեռի տեղափոխությունը ($s_5 = s_1$), φ_3 -ով՝ 3 փոկանիվի պտտման անկյունը, λ_0 -ով և λ_1 -ով՝ համապատասխանաբար զսպանակի սկզբնական և վերջնական երկարացումները: Կստանանք՝

$$A(\vec{F}) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s) ds = 20(3s_1 + s_1^2),$$

$$A(\vec{P}_1) = P_1 s_1 \sin 60^\circ,$$

$$A(\vec{F}_5^{2\text{փ}}) = -F_5^{2\text{փ}} s_5 = -f P_5 s_1,$$

$$A(M) = -M \varphi_3,$$

$$A(\vec{F}_{\text{սն}}) = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2):$$

Մնացած ուժերի կատարած աշխատանքը հավասար է զրոյի, քանի որ $\vec{N}_1$, $\vec{F}_1^{2\text{փ}}$ և $\vec{S}_2$ ուժերի կիրառման K_1 և K_2 կետերը արագությունների ակնթարթային կենտրոններն են, $\vec{P}_3$, $\vec{N}_3$ և $\vec{P}_4$ ուժերի կիրառման կետերն անշարժ են, իսկ $\vec{N}$ հակազդումն ուղղահայաց է բեռի տեղափոխմանը:

Համաձայն խնդրի պայմանների՝ $\lambda_0 = 0$: Այդ դեպքում $\lambda_1 = s_E$, որտեղ s_E -ն՝ E կետի (զսպանակի ծայրի) տեղափոխությունն է: s_E և φ_3 մեծությունները ևս պետք է արտահայտել տրված s_1 տեղափոխու-

թյունով, դրա համար հաշվի առնենք, որ կախվածությունը տեղափոխությունների միջև այնպիսին է, ինչպես համապատասխան արագու-

թյունների միջև: Այդ դեպքում, քանի որ $\omega_3 = \frac{v_A}{r_3} = \frac{v_{C_1}}{r_3}$, ապա

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}:$$

Այնուհետև, նկ. 2.3.5 բ)-ից երևում է, որ $v_D = v_B = \omega_3 R_3$, իսկ քանի որ K_2 կետը 2 ճախարակի համար (այն գլորվում է թելի $K_2 L$ հատվածով) արագությունների ակնթարթային կենտրոն է, ուրեմն

$$v_E = 0,5v_D = 0,5\omega_3 R_3: \text{ Հետևաբար, } \lambda_1 = s_E = 0,5\varphi_3 R_3 = 0,5s_1 \frac{R_3}{r_3}: \varphi_3$$

-ի և λ_1 -ի ստացված արժեքների դեպքում ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը կլինի՝

$$\sum A_k^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \cdot \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2: (2.3.11)$$

Տեղադրելով (2.3.10)-ը և (2.3.11)-ը (2.3.5)-ի մեջ և հաշվի առնելով, որ $T_0 = 0$, կստանանք՝

$$\left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2 = \quad (2.3.12)$$

$$= 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^\circ - fP_5 s_1 - M \frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8} \cdot \frac{R_3^2}{r_3^2} s_1^2:$$

Տեղադրելով տրված մեծությունների թվային արժեքները, (2.3.12)-ից կստանանք փնտրվող ω_3 անկյունային արագությունը

$$\omega_3 = 8,1 \text{ ռադ/վ:}$$

II խնդրի դրվածքը: Մեխանիկական համակարգը դադարի վիճակից սկսում է շարժումը ծանրության ուժերի ազդեցության տակ: A մարմնի սահքի շփումը և առանց սահքի գլորվող D մարմնի հակազդումը հաշվի են առնվում: Մյուս դիմադրության ուժերը և անձգելի թելերի զանգվածներն արհամարհվում են: Պահանջվում է որոշել A մարմնի արագությունը և արագացումը այն պահին, երբ այդ մարմինն անցնում է $S_A = S$ ճանապարհ: A, B, D, E մարմինների զանգվածներն են՝ m_A, m_B, m_D, m_E ; B, D, E մարմինների մեծ և փոքր շրջանագծերի շառավիղներն են՝ $R_B, r_B, R_D, r_D, R_E, r_E$, զանգվածների կենտրոններով անցնող հորիզոնական առանցքների նկատմամբ B, D, E մարմինների իներցիայի շառավիղներն են՝ ρ_B, ρ_D, ρ_E , հարթության և հորիզոնի կազմած անկյունը՝ α , A մարմնի սահքի շփման գործակիցը՝ f , D մարմնի գլորման շփման գործակիցը՝ k : Ճախարակները և գլանիվը համարել հոծ համասեռ գլաններ: Թելերի թեք հատվածները զուգահեռ են համապատասխան թեք հարթություններին (նկ. 2.3.6):

Լուծման պլան: Այս տիպի խնդիրները լուծելիս նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Ընտրում ենք S_A տեղափոխության և v_A արագության ուղղությունները և որոշում ենք մյուս մարմինների տեղափոխություններն ու արագությունները՝ կախված S_A -ից և v_A -ից:

2) Հաշվում ենք համակարգի կինետիկ էներգիան:

3) Հաշվում ենք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Եթե այդ գումարը ստացվում է բացասական, ապա փոխում ենք S_A -ի և v_A -ի ուղղությունները և վերադառնում ենք 1 կետին: Եթե աշխատանքների գումարը նորից է ստացվում բացասական, ապա համակարգը ծանրության ուժերի ազ-

դեցության տակ դադարի վիճակից շարժում չի կարող սկսել և $v_A = 0$, հետևաբար նաև $a_A = 0$: Նշենք, որ S_A տեղափոխության և v_A արագության ուղղությունները փոխելիս ուժային սխեմայում հարկավոր է փոխել միայն դիմադրության ուժերի ուղղությունները:

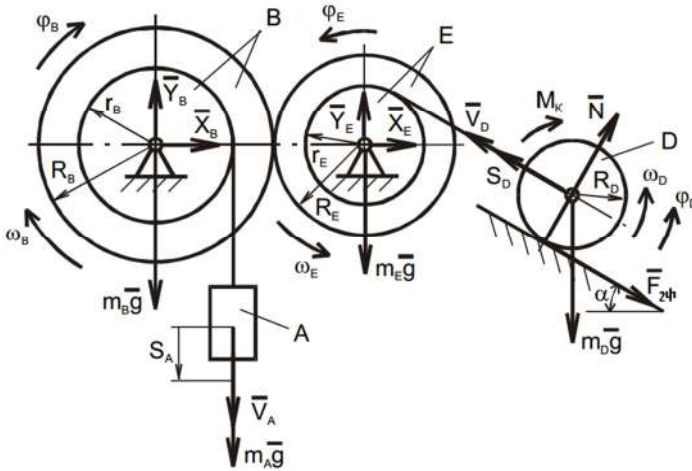
4) Գրում ենք համակարգի կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը:

5) Ստացված առնչությունից որոշում ենք A մարմնի արագությունը և արագացումը:

Օրինակ 2.5: Մեխանիկական համակարգը ծանրության ուժերի ազդեցության տակ դադարի վիճակից սկսում է շարժումը: Պահանջվում է որոշել A մարմնի արագությունը և արագացումը այն պահին, երբ այդ մարմինը անցնում է $S_A = S = 1$ մ ճանապարհ: A , B , D , E մարմինների զանգվածներն են՝ $m_A = 3m$, $m_B = 0,5m$, $m_D = 4m$, $m_E = 0,5m$, B , D , E մարմինների մեծ և փոքր շրջանագծերի շառավիղներն են՝ $R_B = 20$ սմ, $r_B = 0,5R_B$, $R_D = 10$ սմ, $R_E = 20$ սմ, $r_E = 0,5R_E$, զանգվածների կենտրոններով անցնող հորիզոնական առանցքների նկատմամբ B , D , E մարմինների իներցիայի շառավիղներն են՝ $\rho_B = 20$ սմ, $\rho_E = 10$ սմ, հարթության և հորիզոնի կազմած անկյունը՝ $\alpha = 30^\circ$, D մարմնի գլորման շփման գործակիցը՝ $k = 0,25$ սմ: Մյուս դիմադրության ուժերը և չձգվող թելերի զանգվածներն արհամարհվում են: Ճախսարակները և գլանիվը համարել հոծ համասեռ գլաններ: Թելի թեք հատվածը զուգահեռ է թեք հարթությանը: Ընդունել $m = 10$ կգ, $g = 10$ մ/վ² (նկ. 2.3.6):

Լուծում: Ըստ խնդրի պայմանի՝ ժամանակի սկզբնական $t_0 = 0$ պահին համակարգը գտնվել է դադարի վիճակում, հետևաբար,

$T_0 = 0$: Ենթադրենք ժամանակի t_1 պահին A մարմինն անցել է S_A ճանապարհի և ձեռք է բերել v_A արագություն:



Նկ. 2.3.6

Պատկերենք խնդրի ուժային սխեման (նկ. 2.3.6)

1. Հաշվենք B , E , D մարմինների անկյունային արագությունները և D մարմնի զանգվածների կենտրոնի v_D արագությունը՝ կախված v_A -ից,

$$\omega_B = \frac{v_A}{r_B}, \quad \omega_E = \omega_B \frac{R_B}{R_E} = v_A \frac{R_B}{r_B R_E},$$

$$v_D = \omega_E r_E = v_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad \omega_D = \frac{v_D}{R_D} = v_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}:$$

2. Հաշվենք B , E , D մարմինների տեղափոխությունները՝ կախված S_A -ից,

$$\varphi_B = \frac{S_A}{r_B}, \quad \varphi_E = S_A \frac{R_B}{r_B R_E}, \quad S_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E}, \quad \varphi_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D}:$$

3. Հաշվենք համակարգի կինետիկ էներգիան ժամանակի t պահի համար՝

$$T_1 = T_A + T_B + T_E + T_D :$$

Ունենք

$$T_A = \frac{m_A v_A^2}{2}, T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2} = \frac{I_B v_A^2}{2 r_B^2}, T_E = \frac{I_E \omega_E^2}{2} = \frac{I_E v_A^2}{2} \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2,$$

$$T_D = \frac{m_D v_D^2}{2} + \frac{I_D \omega_D^2}{2} = \frac{m_D v_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + \frac{I_D v_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 :$$

Հետևաբար

$$T = \frac{v_A^2}{2} \left(m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 \right) =$$

$$= \frac{v_A^2}{2} \cdot \bar{M},$$

որտեղ

$$\bar{M} = m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 = 75 \text{ կգ} :$$

4. Հաշվենք համակարգի վրա ազդող բոլոր արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարը: Աշխատանք կատարում են միայն A և D մարմինների ծանրության ուժերը և D մարմնի զլորման հակազդման ուժերի M_k մոմենտը՝

$$M_k = N \cdot k = m_D g \cos \alpha \cdot k :$$

$$\sum_k A(\vec{F}_k^e) = m_A g S_A - m_D g \sin \alpha \cdot S_D - m_D g \cos \alpha \cdot k \cdot \varphi_D =$$

$$= g \left(m_A S_A - m_D \sin \alpha \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos \alpha \cdot k \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = S_A \cdot B ,$$

որտեղ

$$B = g \left(m_A - m_D \sin \alpha \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos \alpha \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = 91,4 \text{ կգ} \cdot \text{մ/վ}^2:$$

Այսպիսով, աշխատանքների գումարը դրական է, ուրեմն S_A տեղափոխության և v_A արագության ուղղությունները ճիշտ է ընտրված:

Այժմ գրենք կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը անփոփոխ մեխանիկական համակարգի համար՝

$$T - T_0 = \sum_k A(F_k^e):$$

Տեղադրենք համակարգի կինետիկ էներգիայի և արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքների գումարի արտահայտությունները, կունենանք.

$$\frac{v_A^2}{2} \cdot A - 0 = S_A \cdot B , \quad (2.3.13)$$

որտեղից
$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot S_A \cdot B}{A}} :$$

Տեղադրելով թվային արժեքները՝ կստանանք

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \cdot 91,4 \cdot S_A}{75}} \approx 1,56 \text{ մ/վ}:$$

Որոշենք A մարմնի արագացումը: Դրա համար կազմենք (2.3.13) առնչության աջ և ձախ մասերի ածանցյալներն ըստ ժամանակի և հաշվի առնենք, որ $S_A = S_A(t)$, $\frac{dS_A}{dt} = v_A$, $\frac{dv_A}{dt} = a_A$: Կստանանք

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_A^2}{2} \cdot A \right) = \frac{d}{dt} (S_A \cdot B)$$

կամ

$$\frac{A}{2} \cdot 2v_A \cdot \frac{dv_A}{dt} = B \cdot \frac{dS_A}{dt},$$

որտեղից՝

$$A \cdot v_A a_A = B \cdot v_A:$$

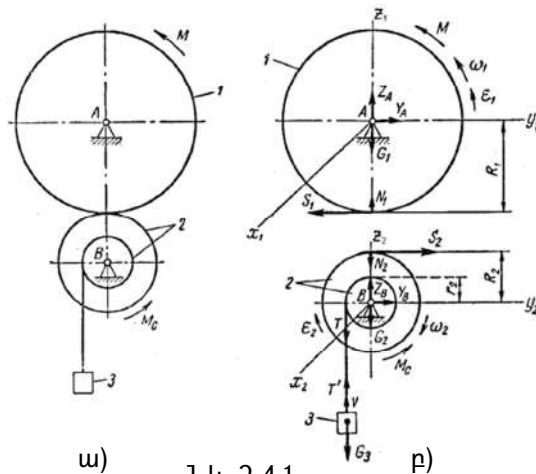
Վերջնականապես, կստանանք

$$a_A = \frac{B}{A} \approx \frac{91,4}{75} \approx 1,21 \text{ մ/վ}^2:$$

§ 2.4 Պինդ մարմնի պտտական և համընթաց շարժումներ

Պինդ մարմնի պտտական և համընթաց շարժումներին վերաբերվող խնդիրների լուծման եղանակը ներկայացնենք մեկ խնդրի լուծման օրինակով:

Օրինակ 2.6: Սարքի 1 օղակի վրա, որի անկյունային արագությունը $\omega_{10} = 2$ ռադ/վ է, ժամանակի որևէ ($t = 0$) պահից սկսում է ազդել $M = 4200 + 200t$ Ն·մ մոմենտով ուժազույգ (շարժող մոմենտ): Սարքի 1 և 2 օղակների զանգվածները համապատասխանաբար հավասար են $m_1 = 100$ կգ և $m_2 = 150$ կգ, իսկ բարձրացվող 3 բեռի զանգվածը՝ $m_3 = 400$ կգ: Տանող 2 օղակի պտույտին դիմադրող ուժերի մոմենտը հավասար է $M_C = 2000$ Ն·մ: 1 և 2 օղակների մեծ ու փոքր շրջանագծերի շառավիղներն են՝ $R_1 = 60$ սմ, $R_2 = 40$ սմ, $r_2 = 20$ սմ: Գտնել սարքի 2 օղակի պտտական շարժման $\varphi_2 = \varphi_2(t)$



Նկ. 2.4.1

հավասարումը: Որոշել թելի լարումը ժամանակի $t = 1$ վ պահին, ինչպես նաև 1 և 2 օղակների շոշափման կետում S շրջանագծային լարումը, եթե 1 և 2 օղակների իներցիայի շառավիղներն են $\rho_1 = 20\sqrt{2}$ սմ, $\rho_2 = 30$ սմ (նկ. 2.4.1 ա):

Լուծում: Սարքի 1 օղակի վրա ազդում են նրա $\vec{G}_1$ ծանրության ուժը, M շարժիչ մոմենտը, A առանցքակալի հակազդման $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$ բաղադրիչները, $\vec{S}_1$ շրջանագծային լարումը և 2 օղակի $\vec{N}_1$ նորմալ հակազդումը (նկ. 2.4.1 բ):

Սարքի 2 օղակի վրա կիրառված են նրա $\vec{G}_2$ ծանրության ուժը, հակազդման ուժերի M_C մոմենտը, B առանցքակալի հակազդման $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ բաղադրիչները, 3 բեռին միացված թելի $\vec{T}$ լարումը, $\vec{S}_2$ շրջանագծային լարումը և 1 օղակի $\vec{N}_2$ նորմալ հակազդումը:

3 բեռի վրա ազդում են $\vec{G}_3$ ծանրության ուժը և թելի $\vec{T}'$ լարումը:

$$\text{Ակնհայտ է, որ } \vec{S}_2 = -\vec{S}_1, \vec{N}_1 = -\vec{N}_2, \vec{T}' = -\vec{T}:$$

Կազմենք x_1 անշարժ առանցքի շուրջը 1 օղակի պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M_1^e:$$

1 օղակի վրա ազդող արտաքին ուժերի M_1^e գլխավոր մոմենտը x_1 առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$M_1^e = M - S_1 R_1:$$

Քանի որ M մոմենտով է շարժման մեջ դրվում համակարգը և որոշվում ω_1 -ի ուղղությունը, այդ պատճառով այն դրական է, իսկ $\vec{S}_1$ լա-

րումով առաջացած մոմենտը ուղղված է ω_1 -ին հակառակ, խոչընդոտում է 1 օղակի պտույտին և, հետևաբար, այն բացասական է:

1 օղակի պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կընդունի

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = M - S_1 R_1 \quad (2.4.1)$$

տեսքը: Արտահայտենք 1 օղակի $\ddot{\varphi}_1$ անկյունային արագացումը 2 օղակի $\ddot{\varphi}_2$ անկյունային արագացումով: Քանի որ

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{R_2}{R_1},$$

ապա

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1}:$$

Այդ դեպքում (2.4.1) հավասարումը կգրվի՝

$$I_1 \ddot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1} = M - S_1 R_1: \quad (2.4.2)$$

x_2 առանցքի շուրջը 2 օղակի (որից կախված է 3 բեռը) պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը կազմելու համար օգտվենք կինետիկ մոմենտի փոփոխման թեորեմից՝

$$\frac{dK_2}{dt} = M_2^e: \quad (2.4.3)$$

2-3 համակարգի կինետիկ մոմենտը x_2 առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$K_2 = I_2 \omega_2 + m_3 v r_2,$$

որտեղ $I_2\omega_2$ -ը x_2 անշարժ առանցքի շուրջը ω_2 անկյունային արագությունով պտտվող 2 օղակի կինետիկ մոմենտն է, m_3vr_2 -ը՝ v արագությունով համընթաց շարժվող 3 բեռի շարժման քանակի մոմենտն է:

Քանի որ $v = \omega_2 r_2$, ապա

$$K_2 = (I_2 + m_3 r_2^2) \omega_2 = I_{\text{բոլ.2}} \dot{\phi}_2,$$

որտեղ $I_{\text{բոլ.2}} = I_2 + m_3 r_2^2$ -ն՝ x_2 առանցքի նկատմամբ 2-3 համակարգի բերված իներցիայի մոմենտն է:

2-3 համակարգին կիրառված արտաքին ուժերի M_2^e գլխավոր մոմենտը (նկ. 2.4.1) x_2 առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$M_2^e = S_2 R_2 - G_3 R_2 - M_C:$$

$\vec{S}_2$ լարումից առաջացած մոմենտով որոշվում է ω_2 -ի ուղղությունը, շարժման մեջ է դրվում 2-3 համակարգը, այդ պատճառով այն դրական է, իսկ $\vec{G}_3$ բեռի ծանրության ուժը և դիմադրության ուժերի M_C մոմենտը ուղղված են ω_2 -ին հակառակ, խոչընդոտում են շարժմանը և, հետևաբար, բացասական են:

Այսպիսով, (2.4.3) հավասարումից կունենանք՝

$$\frac{d}{dt}(I_{\text{բոլ.2}} \dot{\phi}_2) = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C$$

և կստանանք 2 օղակի պտտական շարժման հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումը՝

$$I_{\text{բրվ.2}} \ddot{\phi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C : \quad (2.4.4)$$

(2.4.2) և (2.4.4) հավասարումների ստացված համակարգում անհայտ են $S_1 = S_2 = S$ լարումները և $\ddot{\phi}_2$ անկյունային արագացումը: S -ն արտաքսելու համար այդ համակարգի հավասարումներից առաջինը բազմապատկենք R_2 -ով, երկրորդը՝ R_1 -ով և գումարենք: Կստանանք՝

$$\left(I_1 \frac{R_2^2}{R_1} + I_{\text{բրվ.2}} R_1\right) \ddot{\phi}_2 = M R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1$$

կամ

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{M R_1 R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_{\text{բրվ.2}} R_1^2} \quad (2.4.5)$$

(2.4.5) արտահայտությամբ որոշվում է սարքի 2 օղակի անկյունային արագացումն ընդհանուր տեսքով: Հաշվի առնելով տրված թվային տվյալները, կգտնենք՝

$$I_1 = m_1 \rho_1^2 = 100(0,2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ կգ} \cdot \text{մ}^2 ,$$

$$I_{\text{բրվ.2}} = I_2 + m_3 r_2^2 = m_2 \rho_2^2 + m_3 r_2^2 = 150 \cdot 0,3^2 + 400 \cdot 0,2^2 = 29,5 \text{ կգ} \cdot \text{մ}^2 :$$

Տեղադրենք դրանք (2.4.5)-ի մեջ, կունենանք

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_2 &= \frac{(4200 + 200t)0,6 \cdot 0,4 - (400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000) \cdot 0,6^2}{8 \cdot 0,4^2 + 29,5 \cdot 0,6^2} = \\ &= 4,034t + 0,4597 \text{ ռադ/վ:} \end{aligned}$$

Ինտեգրելով ստացված հավասարումը երկու անգամ, կստանանք՝

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + C_1,$$

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + C_1t + C_2:$$

Ինտեգրման հաստատունները որոշելու համար օգտվենք խընդ-
րի սկզբնական պայմաններից՝

$$t = 0, \quad \varphi = 0 \text{ դեպքում } \dot{\varphi}_2(0) = \omega_2(0) = \omega_1(0) \cdot \frac{R_1}{R_2} = 2 \cdot \frac{60}{40} = 3 \text{ ռադ/վ:}$$

$$\text{Հետևաբար, } \dot{\varphi}_2(0) = C_1, \quad \varphi_2(0) = C_2,$$

$$\text{այսինքն } C_1 = 3 \text{ ռադ/վ, } C_2 = 0:$$

Ուրեմն 2 օղակի անկյունային արագությունը կորոշվի

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + 3 \text{ ռադ/վ}$$

հավասարումով, իսկ 2 օղակի պտտական շարժման փնտրվող հավա-
սարումը կլինի՝

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + 3t \text{ ռադ:}$$

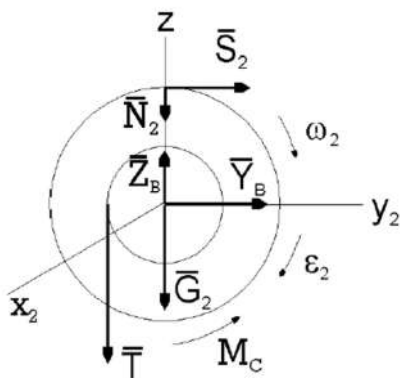
Շրջանագծային S լարումը կարող ենք որոշել (2.4.4) հավասարումից՝

$$S = S_2 = \frac{I_{P2} \ddot{\varphi}_2 + G_3 r_2 + M_C}{R_2}$$

$t_1 = 1$ վ դեպքում կունենանք՝

$$S = \frac{29,5(4,034 \cdot 1 + 0,4597) + 400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000}{0,4} = 7295 \text{ Ն:}$$

Թեկի T լարումը որոշելու համար կազմենք 2 օղակի պտտա-



Նկ. 2.4.2

կան շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը

$$I_2 \ddot{\phi}_2 = S_2 R_2 - T r_2 - M_C,$$

տեսքով (նկ. 2.4.2), որտեղից

$$T = \frac{S_2 R_2 - M_C - I_2 \ddot{\phi}_2}{r_2}:$$

Հետևաբար, $t_1 = 1$ վ դեպքում T լարումը կլինի՝

$$T = \frac{7295 \cdot 0,4 - 2000 - 13,5(4,0334 \cdot 1 + 0,4597)}{0,2} = 4285 \text{ Ն:}$$

§ 2.5 Համակարգի հարթ շարժում

Այս պարագրաֆում տրվում է հարթ շարժում կատարող մարմիններից կազմված համակարգի շարժման վերաբերյալ խնդիրների լուծման եղանակ:

Խնդրի դրվածքը: Մեկ ազատության աստիճան ունեցող մեխանիկական համակարգը կազմված է հարթ շարժում կատարող մարմիններից: Կազմել համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները և ինտեգրել դրանք:

Լուծման պլան: Այսպիսի դրվածքով խնդիրները լուծելու համար նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1. Համակարգը մտովի տրոհում ենք առանձին մարմինների: Կապերը փոխարինում ենք իրենց հակազդումներով:

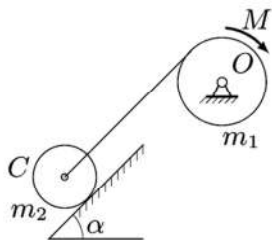
2. Յուրաքանչյուր մարմնի համար ընտրում ենք կոորդինատական համակարգ, որի նկատմամբ գրում ենք մարմնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:

3. Գրում ենք առանձին մարմինների արագությունների և անկյունային արագությունների միջև կինեմատիկական առնչությունները: Դիֆերենցում ենք այդ առնչությունները և գտնում համապատասխան արագացումների կապը:

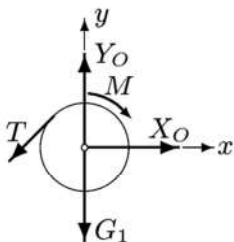
4. Ձևափոխում ենք և, անհրաժեշտության դեպքում, ինտեգրում մարմինների շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը և կինեմատիկական առնչությունները:

Օրինակ 2.7: Ուլրանի r_1 շառավիղ և m_1 զանգված ունեցող թմբկազլանին կիրառված է M հաստատուն պտտող մոմենտ: Թըմբկազլանի վրա փաթաթված ճոպանի ծայրին ամրակցված է m_2 զանգվածով C անիվը: Անիվն առանց սահքի գլորվում է դեպի վեր հորիզո-

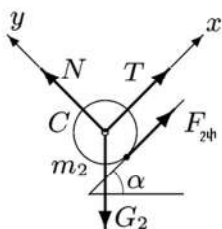
նի նկատմամբ α անկյան տակ դասավորված թեք հարթությամբ (նկ. 2.5.1): Ինչպիսի՞ անկյունային արագություն ձեռք կբերի թմբկազևանը՝ կատարելով n պտույտ: Թմբկազևանը և անիվը ընդունել համասեռ կլոր գլաններ: Ճոպանի զանգվածն ու շփումն անտեսել:



Նկ. 2.5.1



Նկ. 2.5.2



Նկ. 2.5.3

Լուծում: 1) Տրոհենք համակարգը երկու առանձին մարմինների (նկ. 2.5.2, նկ. 2.5.3): Կապերը փոխարինենք իրենց հակազդումներով: Ճոպանի ազդեցությունը փոխարինենք իր T լարման ուժով, որը կիրառված է և՛ թմբկազևանին, և՛ անիվին փոխհակադարձ ուղղություններով: O առանցքի, որի շուրջը պտտվում է ոլորանի թմբկազևանը, ազդեցությունը փոխարինենք X_0 , Y_0 հակազդումներով: Առանց սահքի գլորվող C անիվի վրա կիրառված է կցորդման $F_{կց}$ ուժը: Այն պայմանականորեն ուղղենք դեպի վեր (իրական ուղղությունը հայտնի կդառնա խնդրի լուծման արդյունքում): Պատկերենք նաև արտաքին ուժերը՝ $G_1 = m_1 g$ և $G_2 = m_2 g$:

2) Գրենք m_1 զանգվածով թմբկազևանի պտտական շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները ընտրված կոորդինատական համակարգում: Օգտվելով հարթ զուգահեռական շարժում կատարող պինդ մարմնի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգից՝ կունենանք

$$0 = X_0 - T \cos \alpha ,$$

$$0 = Y_0 - G_1 - T \sin \alpha , \quad (2.5.1)$$

$$J_1 \ddot{\phi}_1 = -M + Tr_1 :$$

Թմբկագլանի զանգվածների կենտրոնն անշարժ է, հետևաբար, շարժման առաջին երկու հավասարումներն ունեն ստատիկայի հավասարումների տեսք:

Դիտարկենք m_2 զանգվածով C անիվի շարժումը (նկ. 2.5.3): Անիվի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$m_2 \ddot{x}_2 = T + F_{\text{լգ}} - G_2 \sin \alpha ,$$

$$0 = N - G_2 \cos \alpha , \quad (2.5.2)$$

$$J_2 \ddot{\phi}_2 = F_{\text{լգ}} R :$$

Երկրորդ հավասարման մեջ $\ddot{y}_2 = 0$, որովհետև այդ ուղղությամբ շարժում չկա:

3) Համակարգի կինեմատիկական կապերն են՝

$$-\dot{\phi}_1 r_1 = \dot{x}_2 ,$$

$$-\dot{\phi}_2 R = \dot{x}_2 : \quad (2.5.3)$$

Բացասական նշանն առաջանում է, քանի որ անիվի և թմբկագլանի պտտման (ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ) անկյունների դրական ուղղությունները համապատասխանում են անիվի առանցքի արագության բացասական պրոյեկցիային: Դիֆերենցելով (2.5.3)-ը՝ կստանանք առնչություններ արագացումների համար

$$-\ddot{\phi}_1 r_1 = \ddot{x}_2 ,$$

$$-\ddot{\phi}_2 R = \ddot{x}_2 : \quad (2.5.4)$$

4) (2.5.1), (2.5.2), (2.5.4) ութ հատ հավասարումներից բաղկացած համակարգը պարունակում է ութ անհայտ՝ $\ddot{x}_2$, $\ddot{\phi}_1$, $\ddot{\phi}_2$, T , $F_{\text{լգ}}$, N , X_0 , Y_0 և տրոհվում է երկու մասի: Առաջին հինգ անհայտների համար կարելի է առանձնացնել հինգ հավասարումների համակարգ: Հաշվի առնելով, որ հոծ համասեռ գլանների իներցիայի մոմենտներն ունեն

$$J_1 = m_1 \frac{r_1^2}{2}, \quad J_2 = m_2 \frac{R^2}{2},$$

տեսքը, կստանանք՝

$$m_2 \ddot{x}_2 = T + F_{\text{լգ}} - m_2 g \sin \alpha ,$$

$$m_2 \frac{R \ddot{\phi}_2}{2} = F_{\text{լգ}} ,$$

$$m_1 r_1 \ddot{\phi}_1 = -\frac{M}{r_1} + T , \quad (2.5.5)$$

$$-\ddot{\phi}_1 r_1 = \ddot{x}_2 ,$$

$$-\ddot{\phi}_2 R = \ddot{x}_2 :$$

Արտաքսելով $F_{\text{լգ}}$, T , $\ddot{\phi}_2$ և $\ddot{x}_2$ անհայտները, կգտնենք՝

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{2(m_2 g r_1 \sin \alpha - M)}{r_1^2 (m_1 + 3m_2)} : \quad (2.5.6)$$

(2.5.6)-ի աջ մասը կախված է ժամանակից: Նշանակենք այն $-A$ -ով: Կստանանք $\ddot{\varphi}_1 = -A$, $A > 0$: Ինտեգրենք (2.5.6)-ը՝ հաշվի առնելով, որ սկզբնական ($t = 0$) պահին թմբկազևանը գտնվել է դադարի վիճակում ($\dot{\varphi}_1 = 0$) և պտտման անկյունը հաշվել ենք զրոյից $\varphi_1 = 0$: Կստանանք՝

$$\dot{\varphi}_1 = -At, \quad \varphi_1 = -\frac{At^2}{2}:$$

Դիցուք, ժամանակի $t = t^*$ պահին թմբկազևանը ժամսլաքի ուղղությամբ արդեն կատարել է n պտույտ և պտտվել է $-2\pi n$ բացասական անկյունով: Այդ դեպքում թմբկազևանը ձեռք կբերի այն ω անկյունային արագությունը, որը խնդրում պահանջվում էր որոշել: Ակնհայտ է, որ

$$\omega = -At_*, \quad 2\pi n = \frac{At_*^2}{2}:$$

Արտաքսելով անհայտ t_* ժամանակը, կստանանք՝

$$t_* = 2\sqrt{\frac{\pi n}{A}}, \quad \omega = -2\sqrt{A\pi n} = -\frac{2}{r_1} \sqrt{2\pi n \frac{M - m_2 g r_1 \sin \alpha}{m_1 + 3m_2}}:$$

Բացասական նշանը ցույց է տալիս, որ թմբկազևանի պտույտը ուղղված է ժամսլաքի ուղղությամբ: ω -ի արմատատակ արտահայտությունից հետևում է, որ այդ լուծումն ունի սահմանափակում՝

$$M \geq m_2 g r_1 \sin \alpha:$$

§ 2.6 Դինամիկայի ընդհանուր հավասարումը մեկ կամ երկու ազատության աստիճան ունեցող համակարգերի համար

Այս պարագրաֆում տրվում է դինամիկայի ընդհանուր հավասարման օգտագործմամբ խնդիրների լուծման եղանակ մեկ կամ երկու ազատության աստիճան ունեցող համակարգերի համար:

Խնդրի դրվածքը: Իդեալական (կամ ոչ իդեալական) ստացիոնար կապերով մեխանիկական համակարգն ունի մեկ կամ երկու ազատության աստիճան: Համակարգի վրա կիրառված են հայտնի ակտիվ ուժեր: Գտնել համակարգի մարմինների արագացումները:

Լուծման պլան: Այս տիպի խնդիրներ լուծելիս կարելի է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Ընտրում ենք մեկ կամ երկու ընդհանրացված կոորդինատ: Որպես ընդհանրացված կոորդինատներ կարելի է ընտրել համակարգի կետերի տեղափոխությունները կամ մարմինների պտտման անկյունները, որոնք միաթեք որոշում են համակարգի դիրքը:

2) Մարմինների զանգվածների կենտրոնների արագացումները և անկյունային արագացումները արտահայտում ենք ընտրված ընդհանրացված կոորդինատների երկրորդ կարգի ածանցյալներով (ընդհանրացված արագացումներով):

3) Համակարգի վրա կիրառում ենք ակտիվ և իներցիոն ուժեր: Իներցիոն ուժի վեկտորը հաշվում ենք

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}$$

բանաձևով, որտեղ $\vec{w}$ -ն մարմնի զանգվածների կենտրոնի արագացումն է: Իներցիոն ուժերի մոմենտի վեկտորը գտնում ենք

$$\vec{M}^{\Phi} = -J\vec{\varepsilon}$$

բանաձևով, որտեղ $\vec{\varepsilon}$ -ը անկյունային արագացումն է: Իդեալական կապերի հակազդումները չենք նշում:

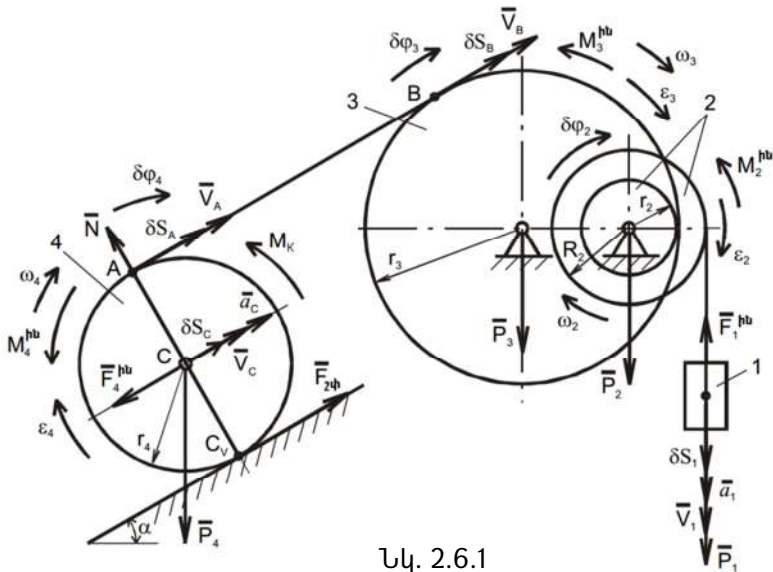
4) Ընդհանրացված կոորդինատին կամ կոորդինատներից մեկին տալիս ենք փոքր աճ (վարիացիա), ֆիքսելով երկրորդ կոորդինատը: Կազմում ենք դինամիկայի առաջին ընդհանուր հավասարումը, որն այդ աճի վրա բոլոր ուժերի տարրական աշխատանքների գումարի զրո լինելն է: Նույն ձևով, երկու ազատության աստիճան ունեցող համակարգի դեպքում, կազմում ենք նաև երկրորդ հավասարումը, ընդ որում՝ փոքր աճ տալիս ենք մյուս ընդհանրացված կոորդինատին ևս:

5) Լուծում ենք մեկ կամ երկու անհայտ ընդհանրացված արագացումներով մեկ կամ երկու հանրահաշվական գծային հավասարումները:

Օրինակ 2.8: $P_1 = 3$ կՆ կշռով 1 բեռից, $P_2 = 2$ կՆ և $P_3 = 2$ կՆ կշիռներով 2 և 3 ճախարակներից և $P_4 = 2$ կՆ կշռով 4 հոծ գլանիվից կազմված մեխանիկական համակարգը շարժվում է ծանրության ուժերի ազդեցության տակ: 2 ճախարակի իներցիայի շառավիղը՝ $\rho_2 = 0,3$ մ է: 3 ճախարակը համարել սնամեջ գլան: 4 գլանիվը առանց սահքի շարժվում է հորիզոնի նկատմամբ $\alpha = 30^\circ$ անկյան տակ թեքված ռելսի վրայով: Գլորման շփման գործակիցը՝ $k = 0,3$ սմ է: Շփումը առանցքներում արհամարհել, անկշիռ անձգելի թելերի սահքը բացակայում է: Դինամիկայի ընդհանուր հավասարման միջոցով որոշել գլանիվի առանցքի արագացումը, եթե $R_2 = 0,4$ մ, $r_2 = 0,2$ մ, $r_4 = 0,5$ մ:

Լուծում: 1) Ընտրենք $\vec{a}_C$ վեկտորի ուղղությունը և պատկերենք ակտիվ ուժերը, ոչ իդեալական կապի հակազդումները ռելսի և գլանիվի շփման կետում, մարմինների գծային և անկյունային արագա-

ցումները, իներցիոն ուժերի գլխավոր վեկտորները և գլխավոր մոմենտները (նկ. 2.6.1):



Նկ. 2.6.1

2) Քանի որ համակարգն ունի մեկ ազատության աստիճան, ապա, ընտրելով C կետի հնարավոր δS_C տեղափոխությունը, v_C արագությունը և a_C արագացումը, արտահայտենք խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ մնացած բոլոր տեղափոխությունները, արագությունները ու արագացումները δS_C -ով, v_C -ով և a_C -ով: Կինեմատիկայի խնդրի լուծումը պատկերենք հետևյալ աղյուսակով՝

Արագացում	Արագություն	Հնարավոր տեղափոխություն
$\varepsilon_4 = \frac{a_C}{r_4}$	$\omega_4 = \frac{v_C}{r_4}$	$\delta\varphi_4 = \frac{\delta S_C}{r_4}$

$\varepsilon_3 = \frac{2a_C}{r_3}$	$\omega_3 = \frac{v_B}{r_3} = \frac{2v_C}{r_3}$	$\delta\varphi_3 = \frac{2\delta S_C}{r_3}$
$\varepsilon_2 = \frac{2a_C}{r_2}$	$\omega_2 = \frac{r_3}{r_2}\omega_3 = \frac{2v_C}{r_2}$	$\delta\varphi_2 = \frac{2\delta S_C}{r_2}$
$a_1 = \frac{2a_C R_2}{r_2}$	$v_1 = R_2\omega_2 = \frac{2v_C R_2}{r_2}$	$\delta S_1 = \frac{2\delta S_C R_2}{r_2}$

Հաշվենք բոլոր իներցիոն ուժերի և իներցիոն ուժերի մոմենտների բացարձակ արժեքները՝

$$F_1^{\text{հ}} = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \frac{2a_C R_2}{r_2}, \quad F_2^{\text{հ}} = F_3^{\text{հ}} = 0, \quad F_4^{\text{հ}} = \frac{P_4}{g} a_C,$$

$$M_1^{\text{հ}} = 0, \quad M_2^{\text{հ}} = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \varepsilon_2 = \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \frac{2a_C}{r_2},$$

$$M_3^{\text{հ}} = \frac{P_3}{g} r_3^2 \varepsilon_2 = \frac{P_3}{g} r_2^2 \frac{2a_C}{r_3}, \quad M_4^{\text{հ}} = \frac{P_4 r_4^2}{2g} \varepsilon_4 = \frac{P_4 r_4^2}{2g} \cdot \frac{a_C}{r_4} :$$

Գլորման շփման մոմենտը կլինի

$$M_K = k \cdot N = k \cdot P_4 \cos \alpha :$$

Գրենք դինամիկայի ընդհանուր հավասարումն այս դեպքում՝

$$P_1 \delta S_1 - F_1^{\text{հ}} \delta S_1 - M_2^{\text{հ}} \delta \varphi_2 - M_3^{\text{հ}} \delta \varphi_3 - P_4 \sin \alpha \cdot \delta S_C - \\ - F_4^{\text{հ}} \delta S_C - M_4^{\text{հ}} \delta \varphi_4 - M_K \delta \varphi_4 = 0 :$$

Տեղադրենք իներցիոն ուժերի և մոմենտների արժեքները՝ արտահայտած a_C -ով և գծային ու անկյունային տեղափոխությունները՝ արտահայտած δS_C -ով: Դուրս բերենք δS_C -ն բոլոր գումարելիներից, կստանանք՝

$$\delta S_C \left[P_1 \frac{2R_2}{r_2} - \frac{P_1}{g} \cdot \frac{2a_C R_2}{r_2} \cdot \frac{2R_2}{r_2} - \frac{P_2}{g} \rho_2^2 \frac{2a_C}{r_2} \cdot \frac{2}{r_2} - \frac{P_3}{g} r_3^2 a_C \frac{2}{r_3} - \right. \\ \left. - P_4 \sin \alpha - \frac{P_4}{g} a_C - \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_4 a_C}{r_4} - P_4 \cos \alpha \cdot \frac{k}{r_4} \right] = 0:$$

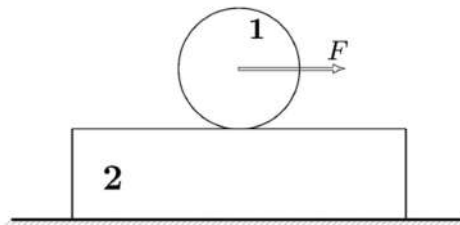
Քանի որ $\delta S_C \neq 0$, ապա զրոյի է հավասար փակագծի ներսի արտահայտությունը: Այստեղից կստանանք

$$a_C = \frac{2P_1 \frac{R_2}{r_2} - P_4 \left(\sin \alpha - \frac{k}{r_4} \cos \alpha \right) g}{4 \left(P_1 \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + P_2 \left(\frac{\rho_2}{r_2} \right)^2 + P_3 + \frac{3}{2} P_4 \right)}:$$

Տեղադրելով թվային արժեքները, կստանանք՝

$$a_C = \frac{2 \cdot 3 \frac{0,4}{0,2} - 2 \left(\sin 30^\circ - \frac{0,03}{0,5} \cos 30^\circ \right) 10}{4 \left(3 \left(\frac{0,4}{0,2} \right)^2 + \left(\frac{0,3}{0,2} \right) + 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 \right)} = 0,015 \text{ մ/վ}^2$$

Օրինակ 2.9: Իդեալական ստացիոնար կապերով մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան և կազմված է գլանից ու չորսուից: m_1 զանգվածով համասեռ գլանի առանցքին կիրառված է հորիզոնական F ուժ: Գլանի առանց սահքի գլորվում է m_2 զանգվածով չորսուի վրայով: Չորսուի և հորիզոնական հարթակի միջև շփումը բացակայում է (նկ. 2.6.2): Գտնել գլանի զանգվածների կենտրոնի արագացումը: Գլորման շփումն արհամարհել:

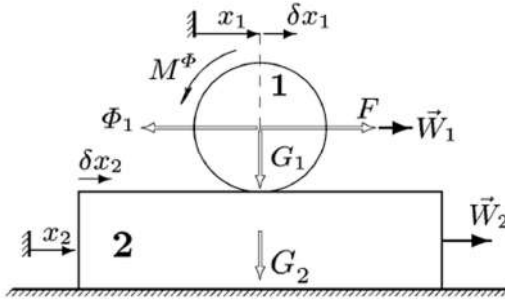


Նկ. 2.6.2

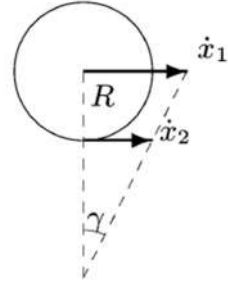
Լուծում: 1) Ընտրենք երկու անկախ փոփոխականներ, որոնք միարժեք նկարագրեն համակարգի դիրքը: Դիցուք x_1 փոփոխականը ցույց է տալիս գլանի կենտրոնի դիրքը անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, իսկ x_2 -ը՝ չորսուի դիրքը նույն անշարժ համակարգի նկատմամբ: Ուղղենք x_1 և x_2 առանցքները շարժման կողմը, այսինքն՝ դեպի աջ (նկ. 2.6.3):

2) Մարմինների զանգվածների կենտրոնների արագացումները և անկյունային արագացումները արտահայտենք ընդհանրացված արագացումներով: Գլանի կենտրոնի արագացումը կլինի՝ $w_1 = \ddot{x}_1$, չորսուի արագացումը՝ $w_2 = \ddot{x}_2$: Որպեսզի գլանի ε անկյունային արագացումն արտահայտենք չորսուի և գլանի կենտրոնների արագացումներով, գտնենք գլանի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը (նկ. 2.6.4): Կստանանք՝

$$\omega_z = -tg\gamma = -\frac{(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{R}:$$



Նկ. 2.6.3



Նկ. 2.6.4

Դիֆերենցելով ω_z -ն ըստ ժամանակի, կգտնենք

$$\varepsilon_z = -\frac{(w_1 - w_2)}{R}:$$

3) Համակարգի վրա պատկերենք $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ ակտիվ և $\vec{\Phi}_1$, $\vec{\Phi}_2$ իներցիոն ուժերը, որոնց պրոյեկցիաներն x առանցքի վրա հաշվում ենք $\Phi_{1x} = -m_1 w_1$, $\Phi_{2x} = -m_2 w_2$ բանաձևերով, որտեղ $w_1 = \ddot{x}_1$, $w_2 = \ddot{x}_2$: Գլանի իներցիայի մոմենտը զանգվածների կենտրոնի նկատմամբ, համաձայն իներցիայի մոմենտների աղյուսակի (էջ 26), կլինի՝ $J = m_1 \frac{R^2}{2}$: Գլանի վրա կիրառենք իներցիոն ուժերի մոմենտը:

Պրոյեկտելով նկարին ուղղահայաց z առանցքի վրա, կստանանք՝

$$M_z^\Phi = -J\varepsilon_z = m_1 \frac{R(w_1 - w_2)}{2}:$$

4) Համակարգի x_1 ընդհանրացված կոորդինատին տալիս ենք δx_1 փոքր աճ, ֆիքսելով x_2 կոորդինատը՝ $\delta x_2 = 0$ (չորսուն անշարժ է,

գլանը պտտվում է ժամսլաքի ուղղությամբ $\delta\varphi_z = -\frac{\delta x_1}{R}$ անկյունով):

Կազմենք դինամիկայի առաջին ընդհանրացված հավասարումը որպես ուժերի վեկտորների և տեղափոխումների վեկտորների սկալյար արտադրյալների գումար՝

$$F\delta x_1 + \Phi_{1x}\delta x_1 + M_z^\Phi \delta\varphi_z = 0$$

կամ

$$F\delta x_1 - m_1 w_1 \delta x_1 - J \frac{w_1 - w_2}{R} \frac{\delta x_1}{R} = 0,$$

որտեղից՝

$$F - m_1 w_1 - \frac{m_1}{2}(w_1 - w_2) = 0 : \quad (2.6.1)$$

Երկրորդ հավասարումը ստանում ենք նույն ձևով, ենթադրելով, որ $\delta x_2 \neq 0$, $\delta x_1 = 0$: Անշարժ առանցք ունենալով՝ գլանը թեքվում է ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ $\frac{\delta x_2}{R}$ անկյունով: Կստանանք

$$M_z^\Phi \frac{\delta x_2}{R} + \Phi_{2x} \delta x_2 = 0$$

հավասարումը կամ

$$J \frac{w_1 - w_2}{R} \frac{\delta x_2}{R} - m_2 w_2 \delta x_2 = 0,$$

որտեղից՝

$$\frac{m_1}{2}(w_1 - w_2) - m_2 w_2 = 0 \quad (2.6.2)$$

կամ

$$w_1 = \left(1 + 2 \frac{m_2}{m_1}\right) w_2 = 0:$$

5) Լուծենք (2.6.1), (2.6.2) երկու գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը արագացումների նկատմամբ: Կստանանք գլանի զանգվածների կենտրոնի w_1 արագացումը և չորսուի w_2 արագացումը՝

$$w_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad w_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}:$$

Երբ չորսուն անկշիռ է, այսինքն $m_2 = 0$, ապա w_1 -ի արտահայտությունից հետևում է, որ $w_1 = \frac{F}{m_1}$: Այսպիսի արագացում ունի m_1 զանգ-

վածով մարմինը F ուժի ազդեցության տակ համընթաց շարժման դեպքում: Այսպիսով, հարթության վրայով առանց շփման սահող անկշիռ չորսուն գլանի համար իդեալական յուղման դեր է կատարում, որի արդյունքում գլանը չի պտտվում, այլ շարժվում է համընթաց: Իսկ եթե չորսուի զանգվածը ձգտեցնենք անսահմանության, ապա կստացվի անշարժ հարթության վրայով առանց սահքի համասեռ գլանի գլորման արագացումը՝

$$w_1 = \frac{2F}{3m_1}:$$

§ 2.7 Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումները

Այս պարագրաֆում տրվում է Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումների օգտագործմամբ մեխանիկական համակարգերի վերաբերյալ տարբեր դրվածքներով խնդիրների լուծման եղանակ:

1 խնդրի դրվածքը: Երկու ազատության աստիճան ունեցող իդեալական, ստացիոնար կապերով կոնսերվատիվ մեխանիկական համակարգը շարժվում է հայտնի ուժերի ազդեցության տակ: Որոշել համակարգի մարմինների արագացումները՝ օգտվելով կոնսերվատիվ համակարգերի համար Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումներից:

Լուծման պլան: Եթե համակարգի վրա ազդող բոլոր ուժերը պոտենցիալ են, ապա այդպիսի համակարգը կոչվում է կոնսերվատիվ: Այդ դեպքում ընդհանրացված ուժերն ու պոտենցիալ էներգիան կապված են

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i},$$

դիֆերենցիալ առնչություններով, որտեղ q_i -ը ընդհանրացված կոորդինատներն են: Այս դրվածքով խնդիրները լուծելու համար նպատակահարմար է կատարել հետևյալ հաջորդական քայլերը.

- 1) Ընտրում ենք երկու անկախ կոորդինատ:
- 2) Հաշվում ենք համակարգի T կինետիկ էներգիան՝ արտահայտված $v_1 = \dot{x}_1$ և $v_2 = \dot{x}_2$ ընդհանրացված արագություններով:
- 3) Հաշվում ենք համակարգի Π պոտենցիալ էներգիան:
- 4) Որոշում ենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = T - \Pi :$$

5) Գտնում ենք $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ և $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2$) մասնակի ածանցյալները

և գրում ենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումների համակարգը

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \quad (2.7.1)$$

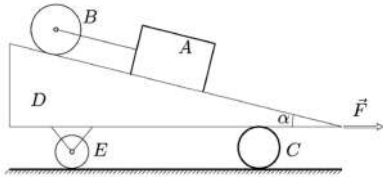
տեսքով:

6) Լուծում ենք գծային հանրահաշվական հավասարումների (2.7.1) համակարգը երկու անհայտ $w_1 = \ddot{x}_1$ և $w_2 = \ddot{x}_2$ ընդհանրացված արագացումների նկատմամբ:

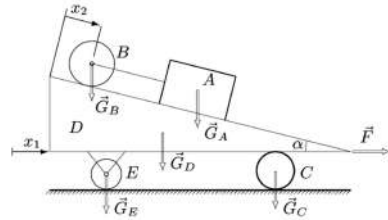
Օրինակ 2.10: Իդեալական ստացիոնար կապերով կոնսերվատիվ մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան և կազմված է հինգ մարմիններից: $m_A = 10$ կգ զանգվածով A բեռը և $m_B = 20$ կգ զանգվածով B համասեռ գլանը հողակապորեն միացված են կոշտ անկշիռ ձողով: $m_D = 40$ կգ զանգվածով D պրիզման հենվում է սնամեջ C գլանի (խողովակի) և E անիվի (համասեռ գլանի) վրա: Անիվի առանցքը միացված է պրիզմայի հետ (նկ. 2.7.1): Օգտվելով կոնսերվատիվ համակարգերի համար Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումներից՝ որոշել այն արագացումը, որը պրիզմային հաղորդում է նրա վրա կիրառված $F = 100$ Ն հորիզոնական ուժը: Գլորման և սահքի շփումներն արհամարհել: Գլորումը տեղի է ունենում առանց սահքի: Խողովակի զանգվածը՝ $m_C = 10$ կգ է, անիվինը՝ $m_E = 5$ կգ, $\alpha = 15^\circ$: Պրիզմայի ստորին մակերևույթը ամբողջ շարժման ընթացքում մնում է զուգահեռ հորիզոնական հիմքին:

Լուծում: 1) Ընտրենք համակարգի շարժումը միարժեք նկարագրող երկու անկախ փոփոխականներ: Դիցուք x_1 փոփոխականը

ցույց է տալիս D պրիզմայի դիրքը անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, իսկ x_2 -ը՝ B գլանի առանցքի դիրքը պրիզմայի նկատմամբ (նկ. 2.7.2):



Նկ. 2.7.1



Նկ. 2.7.2

2) Արտահայտենք համակարգի կինետիկ էներգիան $\dot{x}_1 = v_1$ և $\dot{x}_2 = v_2$ ընդհանրացված արագություններով: Ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = T_A + T_B + T_C + T_D + T_E :$$

Գրենք v_2 հարաբերական և v_1 փոխադրական արագություններ ունեցող A բեռի համընթաց շարժման կինետիկ էներգիան՝

$$T_A = m_A \frac{(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2}{2} :$$

B գլանի հարթ շարժման կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_B = m_B \frac{(v_1 + v_2 \cos \alpha)^2 + (v_2 \sin \alpha)^2}{2} + \frac{J_B \omega_B^2}{2} :$$

ω_B անկյունային արագությունը կախված է հարաբերական շարժման

$\omega_B = \frac{v_2}{R_B}$ արագությունից: B համասեռ գլանի իներցիայի մոմենտն

իր առանցքի նկատմամբ կլինի՝

$$J_B = m_B \frac{R_B^2}{2},$$

իսկ C խողովակի հարթ շարժման կինետիկ էներգիան՝

$$T_C = m_C \frac{(v_1/2)^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}:$$

Այստեղ $\omega_C = \frac{v_1}{2R_C}$ -ն խողովակի անկյունային արագությունն է, $\frac{v_1}{2}$ -ը՝

նրա զանգվածների կենտրոնի արագությունը, $J_C = m_C R_C^2$ -ն՝ խողովակի իներցիայի մոմենտն է իր առանցքի նկատմամբ: Պրիզմայի համընթաց շարժման կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_D = m_D \frac{v_1^2}{2}:$$

E անիվի, որի զանգվածների կենտրոնի արագությունը v_1 է, հարթ շարժման կինետիկ էներգիան կունենա հետևյալ տեսքը՝

$$T_E = \frac{3v_1^2 m_E}{4}:$$

Ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = \frac{m_A + m_B + m_C/2 + m_D + 3m_E/2}{2} v_1^2 + \\ + (m_A + m_B) v_1 v_2 \cos \alpha + \frac{m_A + 3m_B/2}{2} v_2^2:$$

3) Համակարգի պոտենցիալ էներգիայի համար կունենանք՝

$$\Pi = -x_1 F - x_2 (m_A + m_B) g \sin \alpha:$$

4) Որոշենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$L = T - \Pi = \frac{m_A + m_B + m_C/2 + m_D + 3m_E/2}{2} v_1^2 +$$

$$+ (m_A + m_B) v_1 v_2 \cos \alpha + \frac{m_A + 3m_B/2}{2} v_2^2 +$$

$$+ x_1 F + x_2 (m_A + m_B) g \sin \alpha :$$

5) Գտնենք $\frac{\partial L}{\partial v_i}$ և $\frac{\partial L}{\partial x_i}$ ($i=1,2$) մասնակի ածանցյալները և գրենք Լագրանժի (2.7.1) հավասարումները՝

$$w_1 \left(m_A + m_B + \frac{m_C}{2} + m_D + \frac{3m_E}{2} \right) + w_2 (m_A + m_B) \cos \alpha = F,$$

$$w_1 (m_A + m_B) \cos \alpha + w_2 \left(m_A + \frac{3m_B}{2} \right) = (m_A + m_B) \sin \alpha : \quad (2.7.2)$$

6) Լուծենք ստացված երկու հատ գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգը w_1 և w_2 երկու անհայտ արագացումների նկատմամբ և տեղադրենք թվային արժեքները: Կունենանք՝

$$w_1 = 0,627 \text{ մ/վ}^2, \quad w_2 = 1,45 \text{ մ/վ}^2:$$

Դիփորդություն. (2.7.2) հավասարումների աջ մասերում գրված են x_1 և x_2 կոորդինատներին համապատասխանող ընդհանրացված ուժերը: Դրանք կարելի է գտնել՝ հաշվելով ակտիվ ուժերի հզորությունները համապատասխան հնարավոր արագությունների դեպքում,

$$Q_j = \frac{N_j}{\dot{x}_j}, \quad (j=1,2),$$

որտեղ N_1 -ը ուժերի հզորությունն է $\dot{x}_2 = 0$ դեպքում, իսկ N_2 -ը՝ $\dot{x}_1 = 0$ դեպքում: Հզորությունը հաշվում ենք՝ գումարելով $\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ սկալյար արտադրյալները $(N = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i)$: Այստեղ $\vec{F}_i$ -երը ուժերն են, $\vec{v}_i$ -երը՝ նրանց կիրառման կետերի արագությունները: Այս դեպքում ավելի լավ կլինի արագությունները հաշվել անալիտիկորեն, իսկ սկալյար արտադրյալները՝ կոորդինատական տեսքով:

II խնդրի դրվածքը: Իդեալական ստացիոնար կապերով (ոչ կոնսերվատիվ) մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան: Գտնել համակարգի մարմինների արագացումները:

Լուծման պլան: Նման դրվածքով խնդիրները լուծելու համար կատարում ենք հետևյալ հաջորդական քայլերը.

1) Ընտրում ենք երկու ընդհանրացված կոորդինատ: Որպես ընդհանրացված կոորդինատներ հարմար է ընտրել համակարգի դիրքը նկարագրող կետերի անկյունային կամ գծային տեղափոխությունները:

2) Հաշվում ենք համակարգի կինետիկ էներգիան:

3) Հաշվում ենք ընդհանրացված ուժերը: Դրա համար համակարգի ընդհանրացված կոորդինատներից մեկին տալիս ենք δq_1 փոքր աճ՝ ֆիքսելով երկրորդ կոորդինատը ($\delta q_2 = 0$): Որոշում ենք այդ աճի վրա էլեմենտար աշխատանքների δA_1 գումարը: Ընդհանրացված ուժը որոշում ենք $Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta q_1}$ բանաձևով: Նույն ձևով գտնում ենք նաև մյուս ընդհանրացված ուժը:

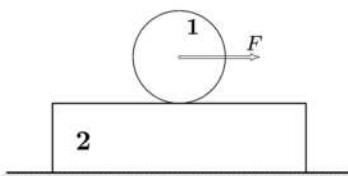
4) Գրում ենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումների համակարգը՝

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

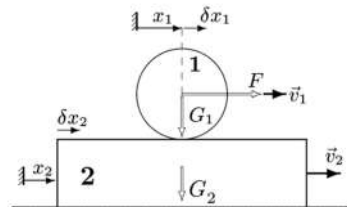
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2: \quad (2.7.3)$$

5) Լուծում ենք երկու անհայտ $\ddot{q}_1$ և $\ddot{q}_2$ ընդհանրացված արագացումների նկատմամբ երկու հանրահաշվական գծային հավասարումների (2.7.3) համակարգը:

Օրինակ 2.11(2.9): Իդեալական ստացիոնար կապերով մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան և կազմված է գլանից ու չորսուից: m_1 զանգվածով համասեռ գլանի առանցքին կիրառված է հորիզոնական F ուժ: Գլանն առանց սահքի գլորվում է m_2 զանգվածով չորսուի վրայով: Չորսուի և հորիզոնական հարթակի միջև



Նկ. 2.7.3



Նկ. 2.7.4

շփումը բացակայում է (Նկ. 2.7.3): Գտնել գլանի զանգվածների կենտրոնի արագացումը: Գլորման շփումն արհամարհել:

Լուծում: Այս անգամ խնդիրը լուծենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումների օգնությամբ:

1) Ընտրենք համակարգի դիրքը միարժեք որոշող երկու անկախ փոփոխականներ՝ $q_1 = x_1$ և $q_2 = x_2$: Դիցուք x_1 -ը ցույց է տալիս գլանի կենտրոնի դիրքը անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, իսկ x_2 -ը՝ չորսուի դիրքը նույն անշարժ համակարգի նկատմամբ: x_1 և x_2 առանցքներն ուղղենք շարժման կողմը, այսինքն՝ դեպի աջ (նկ. 2.7.4):

2) Արտահայտենք համակարգի կինետիկ էներգիան $\dot{x}_1 = v_1$ և $\dot{x}_2 = v_2$ ընդհանրացված արագություններով: Ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան ներկայացնենք գլանի և չորսուի կինետիկ էներգիաների գումարի տեսքով՝ $T = T_1 + T_2$:

Գտնենք հարթ շարժում կատարող գլանի կինետիկ էներգիան՝

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2} : \quad (2.7.4)$$

ω_1 անկյունային արագությունը կախված է գլանի կենտրոնի և շփման կետի արագությունների տարբերությունից: Քանի որ գլանը առանց սահքի գլորվում է չորսուի վրայով, ապա շփման կետի արագությունը հավասար է չորսուի v_2 արագությանը՝

$$\omega_1 = \frac{(v_1 - v_2)}{R} :$$

(2.7.4)-ի մեջ տեղադրենք համասեռ գլանի՝ իր առանցքի նկատմամբ

$J = \frac{m_1 R^2}{2}$ իներցիայի մոմենտի արժեքը: Արդյունքում կստանանք գլանի կինետիկ էներգիան՝

$$T_1 = \frac{m_1}{4} (2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2):$$

Չորսուի կինետիկ էներգիան հավասար է՝

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2}:$$

Ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = \frac{m_1}{4} (2v_1^2 + (v_1 - v_2)^2) + \frac{m_2 v_2^2}{2}:$$

3) Q_1 ընդհանրացված ուժը հաշվենք $Q_1 = \frac{\delta A_1}{\delta x_1}$ բանաձևով,

որտեղ δA_1 -ը δx_1 տեղափոխության վրա բոլոր ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքների գումարն է: x_1 ընդհանրացված կոորդինատի աճի վրա δA_1 էլեմենտար աշխատանքը հաշվելու ժամանակ մյուս ընդհանրացված կոորդինատը ֆիքսվում է, այսինքն $\delta x_2 = 0$: Ակնհայտ է, որ բացի F ուժից ոչ մի ուրիշ ուժ աշխատանք չի կատարում, հետևաբար, $\delta A_1 = F \delta x_1$ և $Q_1 = F$: Նույն ձևով՝ $Q_2 = 0$:

4) Գրենք Լագրանժի (2.7.3) հավասարումները և հաշվենք նրա մեջ մտնող ածանցյալները՝

$$\frac{\partial T}{\partial v_1} = m_1 v_1 + \frac{m_1}{2} (v_1 - v_2), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_1} \right) = \frac{3m_1}{2} w_1 - \frac{m_1}{2} w_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial v_2} = m_2 v_2 + \frac{m_1}{2} (v_2 - v_1), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v_2} \right) = -\frac{m_1}{2} w_1 + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) w_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0,$$

որտեղ $w_1 = \dot{v}_1$, $w_2 = \dot{v}_2$: Արդյունքում՝ Լագրանժի II սեռի հավասարումները կլինեն

$$\begin{aligned} 3w_1m_1 - w_2m_1 &= 2F, \\ -w_1m_1 + w_2(m_1 + 2m_2) &= 0: \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

5) Լուծենք (2.7.5) հավասարումների համակարգը w_1 , և w_2 արագացումների նկատմամբ, կստանանք

$$w_1 = F \frac{m_1 + 2m_2}{m_1(m_1 + 3m_2)}, \quad w_2 = \frac{F}{m_1 + 3m_2}:$$

Օրինակ 2.12: Իդեալական ստացիոնար կապերով մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան և մի սարք է, որը կազմված է A բեռից և համասեռ B ու C ճախարակներից: C ճախարակն ուղղահայաց ընկնում է ներքև և շարժում է հաղորդում B ճախարակին ու A բեռին, որոնց հետ այն կապված է անձգելի թելով: Թելը քանդվում է C ճախարակի վրայից: Տրված են մարմինների m_A , m_B , m_C զանգվածները (նկ. 2.7.5): Գտնել A բեռի արագացումը:

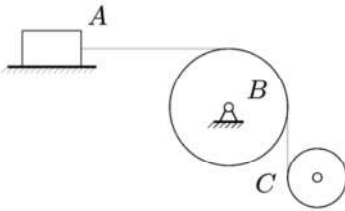
Լուծում: 1) Ընտրենք համակարգի դիրքը միարժեք որոշող երկու անկախ փոփոխականներ՝ $q_1 = x$ և $q_2 = \varphi$ (նկ. 2.7.6): x փոփոխականը ցույց է տալիս բեռի դիրքը անշարժ կոորդինատական համակարգի նկատմամբ, իսկ φ -ն՝ C ճախարակի պտույտը:

2) Արտահայտենք համակարգի կինետիկ էներգիան $\dot{x}$ և $\dot{\varphi}$ ընդհանրացված արագություններով: Ամբողջ համակարգի կինետիկ

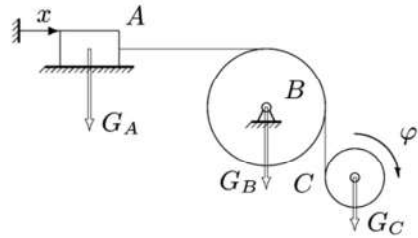
Էներգիան ներկայացնենք բեռի և ճախարակների կինետիկ էներգիաների գումարի տեսքով՝ $T = T_A + T_B + T_C$:

Գտնենք համընթաց շարժում կատարող բեռի կինետիկ էներգիան՝

$$T_A = \frac{m_A \dot{x}^2}{2}:$$



Նկ. 2.7.5



Նկ. 2.7.6

Պտտվող ճախարակի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T_B = \frac{J_B \omega_B^2}{2} = \frac{m_B R_B^2 (\dot{x} / R_B)^2}{2 \cdot 2} = \frac{m_B \dot{x}^2}{4}:$$

Գտնենք հարթ շարժում կատարող C ճախարակի կինետիկ էներգիան՝

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2}:$$

C ճախարակի անկյունային արագությունն է՝ $\omega_C = \dot{\varphi}$: Զանգվածների կենտրոնի արագությունը $\dot{x}$ փոխադրական և $R_C \dot{\varphi}$ հարաբերական արագությունների գումարն է, հետևաբար

$$T_C = \frac{m_C(\dot{x} + R_C\dot{\phi})^2}{2} + \frac{m_C R_C^2 \dot{\phi}^2}{4} :$$

Ամբողջ համակարգի կինետիկ էներգիան կլինի՝

$$T = \frac{\dot{x}^2}{2} \left(m_A + \frac{m_B}{2} + m_C \right) + \dot{x}\dot{\phi}m_C R_C + \frac{3}{4}\dot{\phi}^2 m_C R_C^2 :$$

3) Q_x ընդհանրացված ուժը հաշվենք $Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x}$ բանաձևով,

որտեղ δA_x -ը՝ δx տեղափոխության վրա բոլոր ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքն է: Ֆիքսենք C ճախարակի պտտման անկյունը՝ $\delta\varphi = 0$: Երբ A բեռը հորիզոնական ուղղությամբ տեղափոխվում է δx հեռավորությամբ, B ճախարակը պտտվում է որևէ անկյունով, իսկ C ճախարակը համընթաց տեղափոխվում է ներքև նույն δx հեռավորությամբ: Այդ տեղափոխության վրա աշխատանք է կատարում միայն $m_C g$ ուժը, հետևաբար, $\delta A_x = m_C g \delta x$ և $Q_x = m_C g$: Նույն ձևով, եթե աճ հաղորդենք C ճախարակի պտտման անկյանը, ֆիքսելով բեռի տեղափոխումը ($\delta x = 0$), կստանանք՝ $Q_\varphi = m_C g R_C$:

4) Գրենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումների (2.7.3) համակարգը և հաշվենք նրա մեջ մտնող ածանցյալները՝

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x}(m_A + 0,5m_B + m_C) + \dot{\phi}R_C m_C ,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x}(m_A + 0,5m_B + m_C) + \ddot{\phi}R_C m_C ,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \dot{x}R_C m_C + 1,5\dot{\phi}R_C^2 m_C ,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \ddot{x} R_C m_C + 1,5 \ddot{\phi} R_C^2 m_C,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0:$$

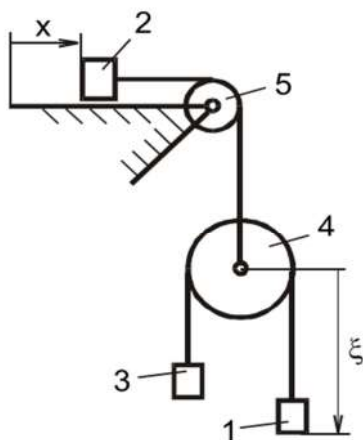
Արդյունքում կստանանք՝

$$\begin{aligned} (m_A + 0,5m_B + m_C) \ddot{x} + R_C m_C \ddot{\phi} &= m_C g, \\ m_C \ddot{x} + 1,5 m_C \ddot{\phi} R_C &= m_C g \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

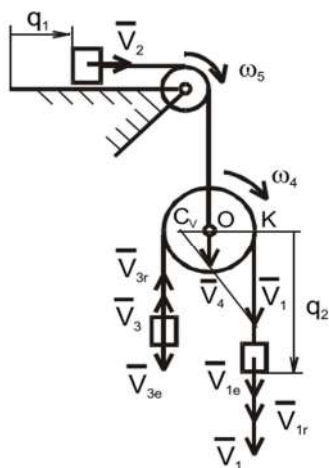
5) Լուծենք (2.7.6) հավասարումների համակարգը, կունենանք

$$\ddot{x} = \frac{2m_C g}{6m_A + 3m_B + 2m_C}, \quad \ddot{\phi} = \frac{2(2m_A + m_B)g}{R_C(6m_A + 3m_B + 2m_C)}:$$

Օրինակ 2.13: m_1, m_2, m_3 զանգվածներ ունեցող 1,2,3 մարմիններ-



Նկ.2.7.7



Նկ.2.7.8

րից, m_4 զանգվածով 4 շարժական և m_5 զանգվածով 5 անշարժ ճախարակներից կազմված մեխանիկական համակարգը շարժվում է ծանրության ուժերի ազդեցության տակ (նկ.2.7.7): 2 մարմնի և հարթության մեջ սահքի շփման գործակիցը հավասար է f -ի: Գտնել մեխանիկական համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը: Դիմադրության ուժերն առանցքակալներում հաշվի չառնել: 4 և 5 ճախարակները համարել հոծ համասեռ գլաններ:

Լուծում: Խնդիրը լուծելու համար օգտվենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումից: Քանի որ մեխանիկական համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան, ապա կստանանք երկու դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases} : \quad (2.7.7)$$

1) Գտնենք մեխանիկական համակարգի կինետիկ էներգիան: 1, 2 և 3 մարմինները շարժվում են համընթաց, 5 ճախարակը պտտվում է անշարժ առանցքի շուրջը, իսկ 4 շարժական ճախարակը գտնվում է հարթ զուգահեռական շարժման մեջ: Պատկերենք համակարգի մարմինների արագությունների վեկտորները (նկ. 2.7.8) և գրենք կինետիկ էներգիայի արտահայտությունը՝

$$T = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_5 \omega_5^2}{2} + \frac{m_4 v_4^2}{2} + \frac{I_4 \omega_4^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} :$$

Արտահայտենք մարմինների արագությունները ընդհանրացված կոորդինատներով՝

$$v_2 = \dot{q}_1, \quad \omega_5 = \frac{v_2}{r_5} = \frac{\dot{q}_1}{r_5}, \quad v_4 = v_2 = \dot{q}_1 :$$

1 մարմինը գտնվում է բարդ շարժման մեջ, հետևաբար,

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_{1r} + \vec{v}_{1e} :$$

1 մարմնի փոխադրական շարժումը համընթաց շարժում է v_4 արագությամբ, իսկ հարաբերական շարժման արագությունը $\dot{q}_2$ է: Հաշվի առնելով վեկտորների ուղղությունները, կստանանք՝

$$v_1 = v_{1r} + v_{1e} = \dot{q}_2 + \dot{q}_1 :$$

Նույն ձևով ստանում ենք 3 մարմնի արագությունը (այն նույնպես գտնվում է բարդ շարժման մեջ, սակայն հարաբերական և փոխադրական արագությունների վեկտորներն ուղղված են հակառակ կողմեր)՝

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_{3r} + \vec{v}_{3e} ,$$

$$v_3 = v_{3r} - v_{3e} = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 :$$

Գտնենք 4 շարժական ճախարակի ω_4 անկյունային արագությունը: Քանի որ 1, 2 և 4 մարմինների փոխադրական շարժումը նույնն է (համընթաց շարժում v_4 արագությամբ), ապա ω_4 անկյունային արագությունը կախված է միայն 4 ճախարակի հարաբերական շարժումից, այսինքն՝

$$\omega_4 = \frac{v_{1r}}{r_4} = \frac{\dot{q}_2}{r_4} :$$

Եթե դա ակնհայտ չի երևում, ապա կարելի է գտնել 4 ճախարակի արագությունների ակնթարթային կենտրոնը և հաշվել նրա անկյունային արագությունը հետևյալ կերպ՝

$$\omega_4 = \frac{v_1}{KC_v} = \frac{v_4}{OC_v} = \frac{v_1 - v_4}{KC_v - OC_v} = \frac{v_1 - v_4}{r_4} = \frac{\dot{q}_2 + \dot{q}_1 - \dot{q}_1}{r_4} = \frac{\dot{q}_2}{r_4} :$$

Տեղադրենք արագությունների արտահայտությունները, ինչպես նաև 4 և 5 ճախարակների

$$I_4 = \frac{m_4 r_4^2}{2} , \quad I_5 = \frac{m_5 r_5^2}{2}$$

իներցիայի մոմենտների արտահայտությունները համակարգի կինետիկ էներգիայի արտահայտության մեջ, կստանանք՝

$$T = \frac{m_2 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_5 r_5^2 \dot{q}_1^2}{4r_5^2} + \frac{m_4 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2 \dot{q}_2^2}{4r_4^2} + \frac{m_3 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2}{2} + \frac{m_1 (\dot{q}_2 + \dot{q}_1)^2}{2}$$

Բացենք փակագծերը և խմբավորենք գումարելիներն ըստ $\dot{q}_1^2$, $\dot{q}_2^2$ և $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ մեծությունների, կունենանք

$$T = \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2} \right) \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \left(m_1 + m_3 + \frac{m_5}{2} \right) \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 +$$

$$+ (m_1 - m_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 = A \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + B \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 + C \dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (2.7.8)$$

որտեղ

$$A = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2}, \quad B = m_1 + m_3 + \frac{m_5}{2},$$

$$C = m_1 - m_3: \quad (2.7.9)$$

2) Հաշվենք համապատասխան ածանցյալները, օգտվելով կինետիկ էներգիայի (2.7.8) արտահայտությունից՝

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = A \frac{1}{2} 2 \dot{q}_1 + C \dot{q}_2 = A \dot{q}_1 + C \dot{q}_2,$$

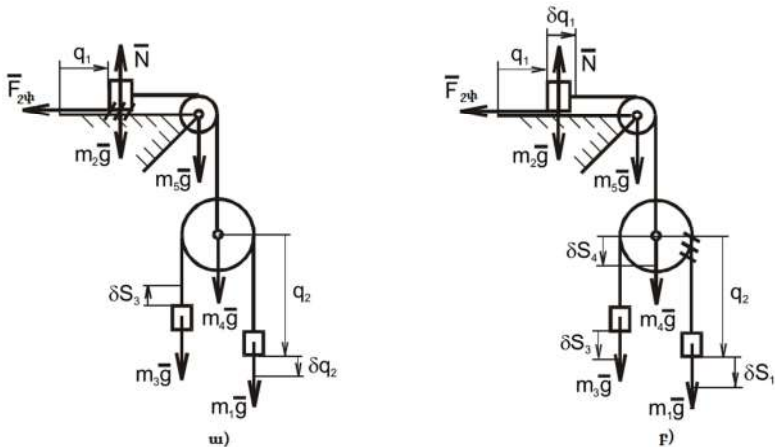
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = B \frac{1}{2} 2 \dot{q}_2 + C \dot{q}_1 = B \dot{q}_2 + C \dot{q}_1,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = A\ddot{q}_1 + C\ddot{q}_2, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = B\ddot{q}_2 + C\ddot{q}_1, \quad (2.7.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0: \quad (2.7.11)$$

3) Գտնենք ընդհանրացված ուժերը: Դրա համար պատկերենք համակարգի մարմինների վրա ազդող ակտիվ ուժերը (նկ. 2.7.9): Այդ ուժերն են՝ $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, $m_5\vec{g}$ ծանրության ուժերը, ինչպես նաև ոչ իդեալական կապի, այսինքն հարթության, որի վրայով շարժվում է 2 մարմինը, հակազդումները՝ $\vec{F}_{2\psi}$ և $\vec{N}$:

ա) Ֆիքսենք q_1 կոորդինատը (այսինքն համարենք, որ 2 մարմինն անշարժ է հենման հարթության նկատմամբ), համակարգին հաղորդենք հնարավոր տեղափոխություն (նկ. 2.7.9ա) և այդ տեղափո-



Նկ. 2.7.9

խության վրա գրենք ակտիվ ուժերի կատարած տարրական աշխատանքների գումարը՝

$$\sum_k \delta A_k^a = m_1 g \cdot \delta q_2 - m_3 g \cdot \delta S_3 = (m_1 - m_3) g \cdot \delta q_2 ,$$

քանի որ $\delta S_3 = \delta q_2$: Այստեղից գտնենք Q_2 ընդհանրացված ուժը՝

$$Q_2 = (m_1 - m_3) g : \quad (2.7.12)$$

բ) Ֆիքսենք q_2 կոորդինատը (կհամարենք, որ 1 մարմինը 4 ճախարակի նկատմամբ անշարժ է), համակարգին հաղորդենք հնարավոր տեղափոխություն (նկ. 2.7.9բ) և այդ տեղափոխության վրա գրենք ակտիվ ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքների գումարը՝

$$\begin{aligned} \sum_k \delta A_k^a &= - F_{2\Phi} \cdot \delta q_1 + m_4 g \cdot \delta S_4 + m_1 g \cdot \delta S_1 + m_3 g \cdot \delta S_3 = \\ &= (- f m_2 + m_4 + m_1 + m_3) g \cdot \delta q_1 , \end{aligned}$$

քանի որ $\delta S_4 = \delta S_1 = \delta S_3 = \delta q_1$, $F_{2\Phi} = fN = f m_2 g$: Այստեղից գրենք Q_1 ընդհանրացված ուժը՝

$$Q_1 = (m_1 - f m_2 + m_3 + m_4) g : \quad (2.7.13)$$

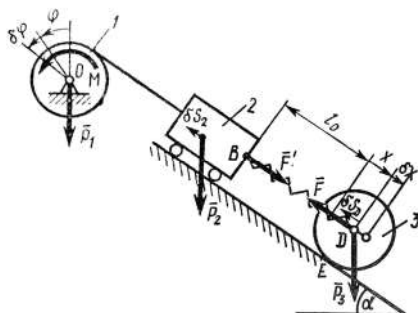
4) Գրենք համակարգի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները: Դրա համար տեղադրենք (2.7.10)-ը, (2.7.11)-ը, (2.7.12)-ը և (2.7.13)-ը (2.7.7) հավասարման մեջ՝

$$\begin{cases} A\ddot{q}_1 + C\ddot{q}_2 = (m_1 - f m_2 + m_3 + m_4) g : \\ B\ddot{q}_2 + C\ddot{q}_1 = (m_1 - m_3) g \end{cases} : \quad (2.7.14)$$

Տեղադրելով A , B և C հաստատունների (2.7.9) արտահայտությունները (2.7.14)-ի մեջ, կստանանք այն ինչ պահանջվում էր՝ շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները:

$$\begin{cases} \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \frac{m_5}{2} \right) \ddot{q}_1 + (m_1 - m_3) \ddot{q}_2 = (m_1 - fm_2 + m_3 + m_4)g \\ \left(m_1 + m_3 + \frac{m_4}{2} \right) \ddot{q}_2 + (m_1 - m_3) \ddot{q}_1 = (m_1 - m_3)g \end{cases}$$

Օրինակ 2.14: Մեխանիկական համակարգը կազմված է R շառավղով 1 թմբկազևանից, որին կիրառված է $M = 4\pi R$ մոմենտով ուժագույգ, $\alpha = 30^\circ$ թեքության անկյուն ունեցող թեք հարթությամբ շարժվող 2 սայլակից և 3 գլդոնից (թմբկազևանը և գլդոնը հոծ համա-



Նկ. 2.7.10

սեռ գլաններ են) (Նկ. 2.7.10): Մարմինների կշիռները համապատասխանաբար հավասար են՝ $P_1 = 2P$, $P_2 = 4P$, $P_3 = 2P$: Սայլակի անիվների կշիռն արհամարհել: Սայլակը միացված է թմբկազևանին նրա վրա փաթաթված թելով, իսկ գլդոնին՝ c կոշտության գործակցով BD զսպանակով: Համակարգը սկսում է շարժումը դադարի վիճակից: Չսպանակն այդ պահին դեֆորմացված չէ: Համակարգի համար կազմել Լագրանժի հավասարումները և գտնել x ընդհանրացված կոորդինատի փոփոխման օրենքը, այսինքն $x = f(t)$ -ն (կամ գլդոնի D կենտրոնի տեղափոխությունը 2 սայլակի նկատմամբ): Որոշել նաև շարժման ընթացքում կատարվող տատանումների հաճախությունը և պարբերությունը:

Լուծում: 1) Խնդրի լուծման համար օգտվենք Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումներից: Դիտարկվող համակարգն ունի երկու ազատության աստիճան: Որպես ընդհանրացված կոորդինատներ ընտրենք թմբկագլանի պտտման φ անկյունը և զսպանակի x երկարացումը ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$): Այդ դեպքում Լագրանժի հավասարումները կգրվեն՝

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_2 \end{cases} \quad (2.7.15)$$

2) Որոշենք համակարգի T կինետիկ էներգիան, որը հավասար է բոլոր մարմինների կինետիկ էներգիաների գումարին՝

$$T = T_1 + T_2 + T_3 : \quad (2.7.16)$$

Քանի որ թմբկագլանը պտտվում է O առանցքի շուրջը, սայլակը շարժվում է համընթաց, իսկ գլդոնը՝ հարթ զուգահեռական, ապա

$$T_1 = \frac{1}{2} I_0 \omega_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_2}{g} v_2^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_3}{g} v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \omega_3^2, \quad (2.7.17)$$

որտեղ $I_0 = \left(\frac{P_1}{2g} \right) R^2$, $I_D = \left(\frac{P_3}{2g} \right) R_3^2$, R_3 -ը 3 գլդոնի շառավիղն է:

Այստեղ մասնակցող բոլոր արագությունները պետք է արտահայտել $\dot{\varphi}$ և $\dot{x}$ ընդհանրացված արագություններով: Ակնհայտ է, որ $\omega_1 = \dot{\varphi}$, $v_2 = R\omega_1 = R\dot{\varphi}$: v_D -ն որոշելու համար դիտարկենք գլդոնի

բարդ շարժումը: Հաշվի առնելով, որ x -ը որոշում է D կետի դիրքը սայլակի նկատմամբ, կստանանք՝

$$\vec{v}_D = \vec{v}_D^h + \vec{v}_D^\phi,$$

որտեղ $\vec{v}_D^h = \dot{x}$, $\vec{v}_D^\phi = v_2 = R\dot{\phi}$: Այդ դեպքում, հաշվի առնելով, որ ϕ -ի և x -ի աճման հետ $\vec{v}_D^h$ և $\vec{v}_D^\phi$ արագություններն ուղղված են տարբեր կողմեր և որ E կետը գլդոնի համար արագությունների ակնթարթային կենտրոն է, կստանանք՝

$$v_D = \dot{x} - R\dot{\phi}, \quad \omega_3 = \frac{v_D}{ED} = \frac{\dot{x} - R\dot{\phi}}{R_3}:$$

Տեղադրելով գտնված արագությունների և I_0 -ի, I_D -ի բոլոր արժեքները (2.7.16) արտահայտության մեջ և հաշվի առնելով, որ $P_1 = P_3 = 2P$, իսկ $P_2 = 4P$, (2.7.16)-ից վերջնականապես կունենանք՝

$$T = \frac{P}{g} \left(4R^2\dot{\phi}^2 - 3R\dot{\phi}\dot{x} + \frac{3}{2}\dot{x}^2 \right): \quad (2.7.18)$$

Այստեղից՝

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{P}{g} (8R^2\dot{\phi} - 3R\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= \frac{P}{g} (-3R\dot{\phi} + 3\dot{x}), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0: \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

3) Այժմ որոշենք Q_1 և Q_2 ընդհանրացված ուժերը: Պատկերենք համակարգի վրա ազդող ակտիվ ուժերը՝ $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, $\vec{P}_3$ ծանրու-

թյան ուժերը, $\vec{F}$ և $\vec{F}'$ առաձգական ուժերը, որտեղ $F' = F = cx$ և M մոմենտով ուժազույգը:

ա) Q_1 -ը որոշելու համար համակարգին հաղորդենք հնարավոր տեղափոխություն, որի դեպքում φ կորոդինատը ստանում է $\delta\varphi > 0$ աճ, իսկ x -ը չի փոփոխվում, այսինքն $\delta x = 0$ (զսպանակը այդ տեղափոխման դեպքում չի փոխում իր երկարությունը): Այդ դեպքում սայլակը և գլղոնի D կենտրոնը ստանում են միևնույն տեղափոխություններ՝ $\delta s_2 = \delta s_D = R\delta\varphi$ և ազդող ուժերի կատարած էլեմենտար աշխատանքը կլինի՝

$$\delta A_1 = M\delta\phi - P_2 \sin 30^\circ \cdot \delta s_2 - P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta s_D - F\delta s_2 + F\delta s_D:$$

Այստեղ փոխարինելով բոլոր մեծությունները իրենց արժեքներով, արդյունքում կգտնենք՝

$$\delta A_1 = (M - 0,5P_2R - 0,5P_3R)\delta\varphi = PR\delta\varphi: \quad (2.7.20)$$

բ) Q_2 -ը որոշելու համար համակարգին հաղորդենք հնարավոր տեղափոխություն, որի դեպքում x կորոդինատը ստանում է $\delta x > 0$ աճ, իսկ φ -ն չի փոփոխվում, այսինքն $\delta\varphi = 0$ (թմբկազլանը չի թեքվում և սայլակը չի տեղափոխվում): Այդ դեպքում էլեմենտար աշխատանք կատարում են միայն $\vec{P}_3$ և $\vec{F}$ ուժերը: Հաշվի առնելով, որ $P_3 = 2P$, կստանանք՝

$$\delta A_2 = P_3 \sin 30^\circ \cdot \delta x - F\delta x = (P - cx)\delta x: \quad (2.7.21)$$

(2.7.20), (2.7.21) հավասարություններում $\delta\varphi$ -ի և δx -ի գործակիցները կլինեն փնտրվող ընդհանրացված ուժերը, հետևաբար,

$$Q_1 = PR, \quad Q_2 = (P - cx): \quad (2.7.22)$$

Տեղադրելով (2.7.19) և (2.7.22) մեծությունները (2.7.15) հավասարումների մեջ, կստանանք համակարգի շարժման հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումները՝

$$\begin{aligned} \frac{P}{g}(8R^2\ddot{\varphi} - 3R\ddot{x}) &= PR, \\ \frac{P}{g}(-3R\ddot{\varphi} + 3\ddot{x}) &= P - cx: \end{aligned} \quad (2.7.23)$$

4. $x = f(t)$ օրենքը որոշելու համար (2.7.23)-ից արտաքսենք $\ddot{\varphi}$ -ը: Կստանանք

$$\ddot{x} + k^2x = a \quad (2.7.24)$$

տեսքի դիֆերենցիալ հավասարում, որտեղ

$$k^2 = \frac{8}{15} \cdot \frac{cg}{P}, \quad a = \frac{11}{15}g:$$

Ինչպես հայտնի է, (2.7.24) հավասարման ընդհանուր լուծումն ունի $x = x_1 + x_2$ տեսքը, որտեղ x_1 -ը $\ddot{x} + k^2x = 0$ համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումն է, այսինքն՝ $x_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$, իսկ x_2 -ը՝ (2.7.24) հավասարման մասնավոր լուծումը: x_2 լուծումը կփրկենք $x_2 = A = \text{const}$ տեսքով: Տեղադրելով x_2 -ի արժեքը (2.7.24) հավասարման մեջ, կստանանք $A = \frac{a}{k^2}$: Այսպիսով, (2.7.24) հավասարման ընդհանուր լուծումը կլինի՝

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{a}{k^2}, \quad (2.7.25)$$

որտեղ C_1 -ը և C_2 -ը ինտեգրման հաստատուններն են: Դրանց որոշման համար հաշվենք x –ի ածանցյալն ըստ ժամանակի՝

$$\dot{x} = C_1 k \cos kt - C_2 k \sin kt: \quad (2.7.26)$$

Համաձայն նախնական պայմանների, $t = 0$ դեպքում $x = 0$, $\dot{x} = 0$ (շարժումը սկսվում է դադարի վիճակից և զսպանակն այդ պահին դեֆորմացված է): Տեղադրելով այս մեծությունները (2.7.25) և (2.7.26)

հավասարումների մեջ, կգտնենք, որ $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{a}{k^2}$:

Վերջնականապես փնտրվող $x = f(t)$ օրենքը կստանանք հետևյալ տեսքով՝

$$x = \frac{a}{k^2}(1 - \cos kt), \quad (2.7.27)$$

որտեղ a և k^2 արժեքները տրվում են (2.7.24)-ի երկու հավասարություններով: Այսպիսով, գլոնի D կենտրոնը սայլակի նկատմամբ կատարում է տատանումներ, ընդ որում, տատանման օրենքը նկարագրվում է (2.7.27) ֆունկցիաներով: Այդ տատանումների շրջանային k հաճախականությունը և τ պարբերությունը կլինեն՝

$$k = \sqrt{\frac{8cg}{15P}}, \quad \tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{15P}{8cg}}: \quad (2.7.28)$$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М.** Руководство к решению задач по теоретической механике (6-е издание). М.: Высшая школа, 1968.
2. **Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С.** Теоретическая механика в примерах и задачах. Том 1, Том 2, Том 3. М.: Наука, 1966,1967,1973.
3. **Березкин Е.Н.** Решение задач по теоретической механике, часть 1, часть 2.. М.: Изд. МГУ, 1973,1974.
4. **Блохина А.И., Норицына Г.И., Петров В.К.** Расчетно-графические работы по динамике: Методические указания по курсу "Теоретическая механика". М. МАМИ, 2003.
5. **Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И.** Сборник задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1987.
6. **Бухгольц Н.Н.** Основной курс теоретической механики. Том 1, Том 2: Кинематика, статика, динамика материальной точки. Динамика системы материальных точек. М.: Наука, 1965,1966.
7. **Гантмахер Ф.Р.** Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966.
8. **Колесников К.С.** и др. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1983.
9. **Кепе О.Э.,Виба Я.А.,Грапис О.П.** и др. Сборник коротких задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1989
10. **Курсанов М.Н.** Учебник. Теоретическая механика. М.: Физматлит, 2002.
11. **Мисюрев М.А.** Методика решения задач по теоретической механике. М.: Высшая школа, 1963.
12. **Романовский В.А., Сурков В.К., Недосекова.Т.С.** Теоретическая и аналитическая механика. Методические указания по выполнению курсовой работы. Санкт-Петербург, 2010.
13. **Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.** Сборник задач по аналитической механике. М.: Физматлит, 2002
14. **Томилов Е.Д.** Теоретическая механика. Часть 1, часть 2. Курс лекций. Томск, изд. ТГУ, 1966,1970.

15. **Բարսեղյան Վ. Ռ, Շահինյան Ս. Գ., Մաթևոսյան Ա. Գ., Մինասյան Դ. Մ.:** Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու: Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2006:
16. **Բարսեղյան Վ. Ռ, Շահինյան Ս. Գ., Մաթևոսյան Ա. Գ., Սիմոնյան Թ. Ա.:** Տեսական մեխանիկայի խնդիրների ժողովածու կուրսային աշխատանքների համար: Երևան, ԵՊՀ հրատարակչություն, 2013:
17. **Մանուկյան Մ. Մ., Սարգսյան Վ. Ս., Գաբրիելյան Մ. Ս.:** Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց: Պրակ 1,2 և 3: Երևան, 1972, 1974:
18. **Մանուկյան Մ. Մ., Սարգսյան Վ. Ս., Գաբրիելյան Մ. Ս., Մինասյան Մ. Ս.:** Տեսական մեխանիկայի խնդիրների լուծման ուղեցույց: Պրակ 4: Երևան, 2001:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԱՌԱՋԱԲԱՆ.....	3
1. Կետի դինամիկա.....	5
1.1 Կետի շարժման դիֆերենցիալ հավասարումները.....	5
1.2 Դինամիկայի հիմնական թեորեմների կիրառությունը նյութական կետի շարժման հետազոտման համար.....	10
1.3 Կետի տարանոդական շարժում.....	14
2. Համակարգի դինամիկա	20
2.1 Ձանգվածների կենտրոնի շարժման թեորեմը.....	20
2.2 Համակարգի կինետիկ էներգիա.....	25
2.3 Կինետիկ էներգիայի փոփոխման թեորեմը	35
2.4 Պինդ մարմնի պտտական և համընթաց շարժումներ.....	51
2.5 Համակարգի հարթ շարժում.....	58
2.6 Դինամիկայի ընդհանուր հավասարումը մեկ կամ երկու ազատության աստիճան ունեցող համակարգերի համար.....	63
2.7 Լագրանժի երկրորդ սեռի հավասարումները	72
ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ.....	96

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ս.Գ. Շահինյան, Ա.Գ. Մաթևոսյան, Թ.Ա. Սիմոնյան

ՏԵՍԱԿԱՆ ՄԵԽԱՆԻԿԱ
ԿՈՒՐՍԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ
ՄԵԹՈԴԱԿԱՆ ՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

Համակարգչային ձևավորումը՝ Դ. Մինասյանի, Կ. Չալաբյանի
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի
Սրբագրումը՝ Լ. Հովհաննիսյանի

Տպագրված է «Արման Ասմանգուլյան» ԱԶ-ում:
ք. Երևան, Հր. Ներսիսյան 1/125

Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. մամուլը՝ 6,25:
Տպաքանակը՝ 100 օրինակ:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1