

#### Аннотация

М В Грошева, Г Б Ефимов, В А Самсонов. История использования аналитических вычислений в задачах механики. ИГМ им М В Келдыша РАН. 2005. 87 стр. Библиография более 500 названий.

Работа посвящена истории развития Символьных Аналитических преобразований или Вычислений на ЭВМ и Систем для Аналитических Вычислений (САВ) в нашей стране (другой термин - Компьютерная Алгебра). Рассматриваются основные этапы создания и использования отечественных САВ: смена ведущих коллективов и САВ, важнейшие конференции и семинары. Обращается внимание на опыт использования САВ в обучении и образовании. Предлагается классификация типов САВ и классов решаемых с их помощью задач, объясняющая многообразие отечественных САВ. Дается способ комплексного описания их возможностей и свойств. Разнообразие применений САВ, особенно в задачах механики, показывается на базе цикла вычислительного эксперимента. Дано описание большого числа работ по использованию САВ в разнообразных задачах механики. Пути развития символьных вычислений в нашей стране демонстрируются на примере старейшего вычислительного центра - ИГМ им М В Келдыша. Работы последних лет отражены лишь в виде отдельных примеров, основное внимание уделяется истории применения САВ, тем более, что сейчас об их использовании часто и не упоминают - как об известном и всем доступном средстве.

Работа продолжает обзор по САВ и применению их в механике, который был выполнен по заказу ВИНТИ в 1992 году (серия "Итоги науки и техники", "Общая механика", том 8) но не вышел в свет. В настоящей работе он дополнен новыми сведениями, в том числе двумя статьями. Обзор базируется на материалах по приложениям САВ, собиравшихся в Информационном банке данных «Символьные преобразования на ЭВМ в задачах механики» М В Грошевой (Институт механики МГУ, тел. 9395478, e-mail - [grosheva@nmmech.msu.su](mailto:grosheva@nmmech.msu.su)).

Библиография содержит более 500 публикаций.

Работа поддержана РФФИ, гранты N 04-01-00346 и NШ 2003 2003 1.

Ключевые слова: аналитические вычисления, компьютерная алгебра, механика, динамика системы тел, теория управления, история.

#### REZUME

M V Grosheva, G B Efimov, V A Samsonov. The History of Symbolic Manipulation and it's Applications in Mechanics. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science. Moscow, 2005. The bibliography includes more then 500 units.

The paper is devoted to the history of development of computer symbolic algebraic manipulations (SAM) and analytical computational systems (computer algebra) in Russia. The main stages of elaboration and applications of soviet SAM are considered, the leaders of each stage are mentioned, the main conferences and seminars are listed. The attention is paid to the experience of SAM usage in the areas of learning and education. The classification of problems to be solved and systems for their solution is done. This classification explains the variety of Russian SAM and gives the way to describe and compare

their features and possibilities. To demonstrate the variety of SAM applications, especially in mechanics, a cycle of computational experiment is presented. Numerous investigations on SAM usage in mechanics are considered. The oldest computational center, KIAM, was used as an example to demonstrate the way of SAM development in Soviet Union. The attention is paid, to the most part, to the early history, the last works are presented as some examples.

Key word, symbolical algebraic manipulations, computer algebra, mechanics, multies-bodies dynamics, programming, control theory, history

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Аннотация                                                                                  |    |
| Содержание                                                                                 | 3  |
| Введение                                                                                   | 4  |
| Глава 1 История использования систем для аналитических вычислений и САВ в задачах механики | 6  |
| 1 1 Работы периода 60-70-х годов                                                           | 6  |
| 1 2 Начало массового использования САВ                                                     | 9  |
| 1 3 Некоторые тенденции конца 1980 - начала 1990 годов                                     | 14 |
| 1 4 Использование САВ в обучении и образовании                                             | 16 |
| Глава 2 Системы аналитических вычислений и их свойства                                     | 20 |
| 2 1 Использование САВ в цикле исследования                                                 | 20 |
| 2 2 Классы задач, использующих символьные преобразования и типы САВ                        | 25 |
| 2 3 Описание САВ и их свойств                                                              | 29 |
| 2 4 Описание проблемно специализированных САВ                                              | 32 |
| 2 5 Краткие сведения о некоторых отечественных САВ                                         | 35 |
| Глава 3 САВ и общая механика                                                               | 36 |
| 3 1 Алгоритмы теоретической механики                                                       | 38 |
| 3 2 Исследование линеаризованных уравнений                                                 | 40 |
| 3 3 Нелинейные системы                                                                     | 42 |
| 3 4 Задачи теории оптимального управления                                                  | 44 |
| 3 5 Управление роботами и другими техническими объектами                                   | 46 |
| 3 6 Задачи управляемости, искусственного интеллекта                                        | 49 |
| 3 7 Небесная механика                                                                      | 50 |
| 3 8 Моделирование, проектирование, планирование эксперимента                               | 52 |
| 3 9 САВ и задачи механики сплошных сред                                                    | 54 |
| Глава 4 Символьные вычисления в Институте прикладной математики имени М В Келдыша          | 57 |
| Литература                                                                                 | 63 |

Рецензент доктор физ.-мат наук В Д Иртегов (Иркутский ВЦ СО РАН)  
 Редактор кандидат физ.-мат наук Е Ю Зуева

## ВВЕДЕНИЕ

Двадцать лет назад состоялась Всесоюзная конференция по САВ в Горьком, которая подвела итоги достижениям символьных преобразований в нашей стране и оформила это научное направление. Готовя нашу работу в 1992 году, мы снова ощутили импульс от этого яркого события. Еще десять лет спустя, в сильно изменившемся мире, мы вновь обращаемся к истории, чтобы сохранить память о трудах энтузиастов символьных преобразований.

Механика с самого начала находилась среди лидеров в применении систем аналитических вычислений (САВ) – по громоздкости задач первостепенной важности (например, динамики спутников в 60-е годы), по готовности математических методов, по специалистам, способным создавать, развивать и использовать САВ. Обзору этапов развития и использования САВ при решении задач механики посвящена настоящая работа (см. также обзоры В.А. Брумберг [1974], В.П. Гердт, О.В. Тарасов, Д.В. Ширков [1980], Информатор-83, Я.А. Ван Хьюльзен, Ж. Кальме [1986], М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов [1988, 1998], Н.Н. Васильев, В.Ф. Еднерал [1994]).

Применение аналитических выкладок в механике сталкивалось с большим разнообразием задач, используемых выражений и методов. Требования САВ к машинным ресурсам очень велики и долго, особенно в отечественной практике, были на пределе возможностей. Приходилось постоянно искать компромисс между общностью символьных выражений и преобразований и эффективностью САВ. Это привело к возникновению многочисленных САВ различного назначения, универсальных и специализированных, большая часть которых была разработана пользователями-прикладниками.

Развитие аналитических вычислений за рубежом в меньшей мере было подвержено указанным трудностям – благодаря быстрому росту возможностей компьютеров и более целенаправленному развитию символьных вычислений. Этапы этого пути неплохо отражены в литературе. Отечественные разработки опубликованы весьма неравномерно, многие из них труднодоступны и нередко отражены лишь в материалах конференций, семинаров и совещаний. Наше внимание было обращено, в первую очередь, на отечественные работы. История их развития и использования освещается в нашей работе.

Использование современных универсальных САВ сейчас общепринято, однако остается область применения для специализированных систем в таких областях, как небесная механика или динамика систем многих связанных тел. Поэтому ряд отечественных САВ, преуспевших, как правило, в пакетах в рамках известных САВ, продолжают свое существование.

Опыт применения САВ в механических задачах и арсенал реализованных методов также важны, и заслуживают упоминания работы не только рекордные. Важная роль конференций и семинаров вынуждает к их частому упоминанию и ссылкам на сборники трудов или тезисов. Для информации об этих научных мероприятиях и простоты ссылки вводим обозначения наиболее часто цитируемых конференций и сборников материалов.

Харьков-72 – Вычислительная математика и вычислительная техника. Всес. семинар. Харьков, 1979. – Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1972, № 3, 152 с.

Дубна-80, Дубна-83, Дубна-85 – Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Материалы междунар. совещ. Дубна, 1979, 1983, 1985. – Дубна: ОИЯИ, 1980, 187 с., 1983, 260 с., 1985, 420 с.

Информатор-83 – Системы аналитических вычислений на ЭВМ (Аналитические пакеты прикладных программ) М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов, В.А. Брумберг.

- И О Бабаев, Н Н Васильев, Т В Иванова, В И Скрипниченко, С.В Тарасевич, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, Г А Долгов, А В Кузьмин, Р В Кульветене, Г П Кульветис, М.В.Почтаренко, М А Чубаров Материалы семинара ИМеханики МГУ, 1981 - Информатор ИПМ АН СССР, 1983, N 1, 85 с
- Вильнюс-84 - Теория и практика автоматизированных систем аналитических преобразований Тез респ совещ Вильнюс, 1984 - Вильнюс ИПК СНХ Лит ССР, 1984, 93 с
- Горький-84 - Системы для аналитических преобразований в механике Тез докл Всес конф Горький, 1984 - Горький ГГУ, 1984, 147 с
- Аналитические ППП-88 - Пакеты прикладных программ Аналитические преобразования -М., Наука, 1988, 156 с
- Ленинград-88 - Методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел Материалы Всес рабочего совещ Л . 1988 - Препр Ленингр фил Ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 16, 32 с
- Киев-88 - Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике деформируемого твердого тела Докл Всес совещ Киев, 1988 - КГУ Киев, 1990, (168с ) Деп УкрНИИТИ 17 04 90, №732, - Ук90
- Ленинград-89 I,II - Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики-89 Секция I Небесная механика Тез докл Всес совещ Л , 1989 - Ин-т теор астроном АН СССР, 1989, 87 с Секция II Теория и практика компьютерного конструирования моделей механики многозвенных технических систем Материалы Всес совещ Л . 1989 - Препр Ленингр фил Ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 32, 83 с
- Вильнюс-90 - Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно-исследовательских работ Всес конф Вильнюс, 1990 - Вильнюс ИПК СНХ Лит ССР, 1990, 94 с
- Ленинград-90 - Алгоритмы и программы небесной механики Всес совещ Л 1990 - Л , Ин-т теор астроном АН СССР, 1990, 80 с
- Дубна-90 - Computer Algebra in Physical Research Int Conf Computer Algebra Phys. Res , Dubna, USSR, 1990 Memorial Volume for N N Gourovin - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong - World Scientific, 1991, 453 p С6 аннот , Дубна, ОИЯИ, 1990, 96 с
- Севастополь-91 - Применение ЭВМ для решения задач механики Тез научно техн конф Севастополь, 1991 - Киев общ "Знание" Украины, 1991, 55 с
- С-Петербург-91,-92,-95 - Компьютерные методы небесной механики Тез докл Всес совещ. с международным участием С-Пб, 1991 - Инст теор астроном АН СССР, 1991, 101 с, - ИТА РАН, 1992, 95 с, 1995, 208 с
- Киев-93 - International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (IS-SAC'93) July 6-8, 1993, Kiev, Ukraine Abstracts, 1993, 321 p + International Workshop "Computer Algebra Application" July 9, 1993, Kiev, Ukraine Extended Abstracts, S-Petersburg, 1993, 55 p
- S-Petersburg-93, -94 - International Congress on Computer Systems and Applied Mathematics (CSAM'93) 19-23 July, 1993 Abstr., 1993, 278 p Section: "Computer Algebra Applications" International Conference on Interval and Computer-Algebraic Methods in Science and Engineering (INTERVAL'94) 7-10 March, 1994, Abstracts, 1994, 266 p
- Переславль Залесский -94, -95 - International Workshop "New Computer Technologies in Control Systems", Pereslavl-Zalesky 11-15 July, 1994, Abstracts, 1994, 99 p 13-19 August, 1995, Abstracts, 81 p

Bucharest-95 – International Conference "Symbolic Calculations and Their Application in Fundamental Researches". Bucharest, 5-11 September, 1995. Abstracts, ITA RAS, St Petersburg. 1995. 48 p

Инфосфера-95 - Международная конференция "Эволюция инфосферы" ("Информатика-95"), Москва, 21-23 ноября 1995

Москва. Институт механики МГУ - 1978, 1981, 1986-1990 гг. – Всесоюзные совещания по использованию САВ в задачах механики

Минск-97 – Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях Междунар конфер 1997 – Тезисы Белорусск ГУ Минск 1997

Prague-98 – 4-th Intern IMACS conference on Applications of Computer Algebra - IMACS ACA'98. Prague, Aug 9-11, 1998 – The History of Computer Algebra Applications Session Theses of Report - Moscow. 1998 38 p

Минск-99 – Компьютерная алгебра в фундаментальных и прикладных исследованиях и образовании 2 Междунар конф сент 1999, Тез. Минск 1999, 108 с

St-Petersburg-2000 – 6 Intern IMACS confer on Applications of Computer Algebra - IMACS ACA' 2000, St-Petersburg, July-2000 – Theses St-Petersburg. 2000,

Dubna-2001 – Computer Algebra and it's Application to Physics - CAAP-2001 Dubna, JINR 2001

Тула-2005 – Современные технологии в преподавании курса теоретической механики Сб труд междунар научно-методич конфер Тула ТГУ, 2005, 158 с

Приводимая библиография не является исчерпывающей. Ссылки приводятся по фамилиям и году публикации, иногда лишь по фамилии, имея в виду работы его и соавторов (и группируя их). Авторы благодарны В.С. Штаркману, Ю.С. Фишману, Андр.В. Климову, З.Ф. Бочковой, С.В. Бирюкову за обсуждение и советы.

## Глава 1 История развития и использования символьных преобразований и САВ в задачах механики

История развития САВ, их применения в задачах механики содержит немало поучительного. На разных этапах ведущими оказывались те или иные тенденции, сменялся состав лидирующих САВ, центры их развития, группы исследователей, тематика задач. Поэтому представляет интерес осветить историю развития аналитических вычислений, прежде всего отечественную.

Развитие и применение символьных или аналитических преобразований (вычислений, выкладок) на ЭВМ в нашей стране прошло через несколько этапов. Энтузиазм первых попыток и достижений в 1960-е годы сменился долгим периодом незаметной работы немногочисленных групп. Новый интерес к символьным аналитическим вычислениям в конце 1970-х - начале 1980-х годов сильно расширил число пользователей САВ, сделал этот вид "математического", программного обеспечения массовым среди исследователей-механиков.

Современный этап функционирования САВ определяется появлением персональных компьютеров (ПК), быстрым ростом их возможностей. Использование имеющихся на них современных САВ стало распространенным, рядовым явлением. Наша задача – вспомнить этапы развития отечественных работ по символьным преобразованиям, трудности и достижения их вот уже более чем сорокалетней истории.

### 1.1 Работы периода 1960-70-х годов

Идеи и первые попытки выполнения символьных или аналитических выкладок на ЭВМ относятся к далеким уже временам. Они исходили из общих идей кибернетики – воспроизведения способностей и действий человека. Опирались эти

первые попытки на достигнутую в "ручных" методах алгоритмизацию громоздких преобразований формул в задачах физики, механики, алгебры, анализа. Автоматизация преобразований формул в некоторых из этих задач уже тогда была актуальной, ибо возможность дальнейшего продвижения упиралась в громоздкость преобразований, превосходящую возможности рядового исследователя. С тех пор САВ и аналитические преобразования прошли немалый путь. Развитие их шло через преодоление внутренних противоречий и трудностей – приходилось находить равновесие между эффективностью и общностью, поскольку машинные ресурсы были недостаточны. А так как символьные преобразования не попадали в главное русло информатики, выявление и преодоление этих трудностей было замедленно.

К первым шагам символьных преобразований (см. также гл.4) относятся работы Л.В. Канторовича [1957] об описании символьных выражений в машине и действиях с ними, работы его учеников Е.Т. Петровой и Т.Н. Смирновой ([1962], полиномиальная САВ для задач теории упругости). Ранние работы по САВ в Сибири см. М.М. Бежанова, В.Л. Катков, И.В. Поттосин [1972], A. Miola, I. Pottosin [1981]. В А.Шурыгин и Н.Н. Яненко [1961] использовали САВ в механике сплошных сред. Д.Е. Охочимский [1964], В.А. Брумберг [1963], Н.Г. Полозова и В.А. Шор [1963] решали задачи небесной механики. Задачам теории упругости были посвящены работы В.А. Кабулова [1963] и В.А. Толока [1964] в Ташкенте. Степенные полиномы применялись Д.Е. Охочимским при построении асимптотических разложений для полета космического аппарата. Для разложения решения в ряды Пуассона (кратные ряды Фурье с коэффициентами – степенными полиномами) В.А. Брумберг использовались численно-символьные вычисления тригонометрических полиномов: представлялись символьно, а их коэффициенты вычислялись при заданных значениях параметров – "сворачивались" в число. Такое ограничение символьных преобразований диктовалось громоздкостью рядов Пуассона и ограниченностью машинных ресурсов. Зато облегчалась вариация разложений коэффициентов рядов Фурье, не ограничиваясь лишь степенными полиномами, реализуя различные представления классической небесной механики.

На основе первых успехов и внимания к области искусственного интеллекта, САВ получили новый импульс. К концу 60-х - 70-м годам относится начало работы нескольких активных групп исследователей, был создан ряд САВ, универсальных и полиномиальных (которые в тот период можно было считать универсальными). Трудности сочетания общности и эффективности, недостаточность машинных ресурсов (М-20, БЭСМ-4, БЭСМ-6) затяннули завершение некоторых из них. Одни из этих проектов сосредотачивались на символьных вычислениях и алгоритмах, в других стремились сочетать численные и символьные методы. В Новосибирске и Томске, Харькове и Горьком, Москве и Ленинграде разрабатывались системы для действий со степенными и тригонометрическими полиномами или более общими выражениями (см. Харьков-72). В школе С.С. Лаврова был создан транслятор с языка Лисп и САВ на нем (С.А. Абрамов [1973], В.В. Тумасов [1971]). В Ф. Турчиним [1968] создан язык Рефал, в том числе для символьных преобразований (см. Харьков-72, также в главе 4).

Одним из путей разрешения противоречия общности и эффективности была аппаратная реализация САВ – языка и системы АНАЛИТИК, созданной большим коллективом под руководством В.М. Глушкова [1971] на малой машине МИР-2 (см. также Ю.С. Фишман [1974]). Это была первая в мире ЭВМ для аналитических вычислений, совместно с численными. В классе малых машин находились и ее преемники, на которых продолжался АНАЛИТИК (МИР-3, СМ-1410, ЕС-2680). МИР-2 доказал успешность такого подхода. Были выпущены многие десятки ма-

шин с возможностью работы в численном режиме и с символьными выражениями общего вида АНАЛИТИК обладал большим интеллектом, выполнял весьма общие преобразования – предвосхищая для САВ некоторые вояния гораздо более поздних времен Распространенность АНАЛИТИКА и его возможности поставили его лидером среди САВ на большой период времени. Возникли активные пользователи, в том числе механики, объединенные в ассоциацию пользователей МИРА Научный обмен по символьным вычислениям происходил на школах и семинарах Института кибернетики АН УССР, позже также на научных конференциях НИВЦ АН в Пуццо Однако аппаратная реализация оказалась своеобразной “ловушкой” для АНАЛИТИКА малые ресурсы МИРА, сложность модификаций и исправления ошибок, трудности с выпуском следующих машин, ничтожность их серий – все это привело АНАЛИТИК к уменьшению популярности и распространения Позже была создана программная реализация АНАЛИТИК (версии -89,-91 и -93,-2000), он продолжает развиваться и использоваться (Б А Бублик, В П Клименко, Ю С Фишман [1987], В П Клименко, С Б Погребысский и др [1989], С.-Леттербург -91 и др , В П Клименко, А А Морозов, Ю С Фишман и др [1995])

Многие из первых САВ создавались для решения механических задач или использовались при их решении Так, Дифференциальный Процессор, система КИ-НО (для исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений, М М Бежанова, В Л Катков, И В Поттосин [1972] и В Л Катков, Н И Костюкова [1969]), система АВТО-АНАЛИТИК (Е А Арайс и др [1973]) использовались в задачах механики сплошных сред Системы ИТА АН СССР (под руководством В А Брумберга, см [1974] и др) – для решения в рядах задач небесной механики, АЛГЕБРА-О М А Чубарова (см также А С Алексеев, Г А Долгов и др) для автоматизации вывода уравнений движения сложных систем механики и исследования их устойчивости Система АНАЛИТИК применялась киевскими механиками и физиками в задачах с малым параметром, при исследовании нелинейных колебаний методом осреднения (Ю А Митропольский, А А Молчанов [1981]) В Институте прикладной математики АН СССР проводилось построение решений в виде рядов (степенных и тригонометрических) в задачах космодинамики (Г Б Ефимов [1970]), нормализация систем дифференциальных уравнений (А П Маркеевым [1970] и А.Г Сохольским - А П Мархеев, А Г Сокольский [1975])

Подведением определенных итогов в разработке САВ была конференция в Харькове в 1972 г. в Институте физики низких температур АН УССР (Харьков-72) (см Е А Арайс, И Р Аксельрод, М М Бежанова, И В Поттосин, Н А Калинина, В Ф Турчин, И Б Щенков, М А Чубаров и др) На ней были представлены многие САВ (в основном универсального типа) из Киева, Харькова, Томска, Новосибирска, Горького, Ленинграда, Москвы Круг обсуждения в основном касался системных и общих вопросов разработки САВ, прикладные САВ представлены были слабо

Достижения прикладных исследований по САВ попадали слереа на соответствующие конференции работы астрономов из ИТА и парижского Бюро долгот (В А Брумберг, J Kovalevsky) были представлены на Конференции по небесной механике (Москва, Гос астрономический инст им Штернберга МГУ, 1967) Результатом лекций на школе-семинаре в Томском университете стала книга В А Брумберга [1974] Автоматический вывод уравнений движения для систем многих связанных тел был представлен на 3-й Четаевской конференции по устойчивости движения и механике (Иркутск, 1972), Всесоюзном совещании по робототехнике (Владимир, 1978), 2-й Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механике (Казань, 1978) и других

История и достижения аналитических вычислений за рубежом неплохо освещены в доступных обзорах Назовем, например, обзоры и книги В П Гердт, О В

Тарасов, Д В Ширков [1980], Н Н Васильев, В Ф Еднерал [1994], В А Брумберг [1974, 1990], M S Davis [1968], J A. van Hulzen, J Calmet [1983], B F Caviness [1968], A G Aklitis [1989]. К 1968 г относятся первые конференции по символьным преобразованиям, симпозиум ACM в Вашингтоне и рабочая конференция IFIP в Пизе (см B F. Caviness [1986]). В этот период началось оформление аналитических вычислений в самостоятельное научное направление.

Специальный colloquium по САВ в небесной механике в рамках Конгресса Астрономического союза в Праге (IAU, 1967), был определенным признанием достижений в этой области. В обзорном докладе M S Davis'a [1968] упоминалось 40 систем для нечисленных вычислений — от языков (включая лисп) до САВ. Сравнивались различные САВ, — например, по виду печати результата. Упомянуты замечательные результаты САВ повторение на компьютере классической теории движения Луны Ch. Delaunai (D Walton [1968]), причем была обнаружена ошибка. Отмечена первая известная автору попытка символьного дифференцирования для вывода уравнений движения спутника (1954 г.) M S Davis и J Kovalevsky [1968] давали обзоры работ по построению механических и небесно-механических решений в рядах, сравнивали программы для рядов Пуассона. Этим же задачам были посвящены и другие доклады colloquiuma. Признанием роли небесной механики в развитии САВ можно считать использование в известных обзорах (например, D Walton и J P Fitch [1972]) задачи-теста из небесной механики: построение эллиптического кеплеровского движения двух тел в виде разложения по степеням эксцентриситета и некоторого параметра.

В 1971 г в Американской ассоциации программистов ACM создается группа по символьным преобразованиям — SIGSAM (Special Interesting Groups for Symbolic and Algebraic Manipulations). В 1968 г на базе прежних разработок формируется большой проект САВ MACSYMA (в Массачусетском Технологическом институте в рамках НИР "Человек и Машина" — см, например, R Pavele [1986], J Moses [1974]). MACSYMA и конференции ее пользователей служили собирателем и катализатором работ по машинной аналитике — теоретических, прикладных и алгоритмических. Проводятся специальные конференции SIGSAM, издается SIGSAM Bulletin ACM, вопросам символьных преобразований отводится место на программистских и прикладных конференциях и в журналах.

Одной из ключевых проблем развития САВ, которую приходилось решать в начальный период — конфликт между общностью и эффективностью. Специфика САВ такова, что "критическая масса", при достижении которой их развитие и использование идет активно, — велика по сравнению с другими областями (численными методами, даже трансляторами). Кроме ядра, языка аналитических преобразований, нужно реализовать общематематические и проблемные алгоритмы, многие из которых очень специфичны (см гл 2). Велики требования и по объему машинных ресурсов и по количеству вложенного труда и интеллекта. При недостаточности предоставляемых ресурсов или "трудо-" и "умо-" затратах ниже критической массы — САВ развивались замедленно, причем в отечественных исследованиях это особенно сказывалось из-за медленного роста машинных ресурсов и разобщенности небольших групп разработчиков. Трудности эти объясняют феномен одновременного создания и существования большого числа отечественных САВ, каждая из которых по-своему сочетала противоречивые требования, с учетом особенностей ситуации и сферы приложения.

## 1.2. Начало массового использования САВ.

В конце 1970-х годов наступило время широкого использования САВ, их признания как научного направления. Аналитические вычисления регулярно обсуж-

даются на конференциях. Важным событием стало первое Совещание по Аналитическим вычислениям на ЭВМ в Дубне, в ОИЯИ в 1979 году (*Дубна-80*), где собрались разработчики и пользователи многих САВ. Происходило широкое обсуждение, причем на фоне развития САВ в мире. Так, на ней Э.Д.Крупников организовал выставку оттисков зарубежных работ по САВ. Благодаря содействию А.П.Ершова и С.С.Лаврова небольшие секции по САВ были созданы на программистских конференциях Методы трансляции (Новосибирск, 1981) и Диалог Человек-ЭВМ (Протвино, 1983). Они позволяли увидеть состояние и задачи САВ на общем фоне современных проблем программирования и разработки методов обеспечения Тематика САВ (общего, механического и небесно-механического профиля) постоянно присутствовала на ежегодных школах по пакетам прикладных программ (ППП) Иркутского ВЦ СО АН СССР в конце 1970-х и 80-х гг., материалы по САВ публиковались в трудах этих школ (серия "Пакеты прикладных программ", Новосибирск, например, М.В.Почтаренко [1978, 1985], М.А.Новиков [1984] и др.).

Большим общесоюзным форумом по новому научному направлению явилась Всесоюзная конференция Системы для аналитических преобразований в механике (*Горький, 1984*). На ней подводились итоги двадцатилетнего пути и определялись направления дальнейшего движения. Название конференции отражало ту роль, которую играли механические приложения и САВ механического профиля в развитии аналитических преобразований на ЭВМ в нашей стране. Доклады были распределены по трем секциям: системы, приложения и алгоритмы (по 27, 64 и 17 докладов). Для большей информативности тезисов и докладов (учитывая новизну тематики и многообразие вопросов – от постановки задачи до эффективности счета) предлагалось их строить по определенной анкете. Это облегчило оценку и сравнение достоинств САВ и полученных результатов, возможность их использования в других системах. Конференция *Горький-84* дала достаточно полное представление об имевшихся на тот момент САВ, их состоянии и о разнообразии приложений, составу групп разработчиков систем и прикладников. Материалы конференции характеризуют развитие САВ за целый период их существования, служат своеобразным справочником отечественных работ и результатов по САВ и их применениям.

В конференции приняли участие многие известные ученые – механики, физики и программисты. Назовем некоторые из пленарных докладов – А.А.Самарский и М.Ю.Шашков [1984], Н.Н.Яненко с учениками [1985] (посвященным вычислительным методам механики сплошных сред), В.М.Матросов, С.Н.Васильев и др. [1984] о выводе теорем в методе векторных функций Ляпунова, Н.Н.Говорун с сотрудниками [1984] об отечественных и, главным образом, зарубежных САВ, используемых в Дубне, в ОИЯИ. В докладе В.П.Гердта, О.В.Тарасова, Д.В.Ширкова [1980] рассказывалось о достижениях в физике, Д.М.Климова и др. [1985] – о задачах теоретической механики, А.В.Сергеевского и М.А.Чубарова [1984] – об особенностях применения САВ в проектировании.

На секции, посвященной системам, были представлены основные отечественные САВ, ведущие и достаточно развитые вместе с небольшими разработками вспомогательного характера. Универсальные САВ АНАЛИТИК (Киев), АВТО-АНАЛИТИК (Томск), АУМ (Новосибирск), АЛЬКОР (Москва), СИРИУС (Харьков), САВАГ (Ленинград), SANTRA (Москва) и другие. Из проблемно специализированных САВ назовем небесно-механические САВ ИТА АН СССР (УПП, GRATOS, SASM, СПРИНТ и другие), большое число САВ для вывода уравнений движения в задачах механики, отдельные САВ и специальные пакеты в развитых системах. Представлены были работы по адаптации и развитию в наших условиях зарубежных САВ, прежде всего Reduce (в Дубне – В.П.Гердт, В.А.Ростовцев, Р.Н.Фе-

дорова и др., в МГУ – А.П. Крюков, В.Я. Родионов, в Перми – М.Ю. Дроздов, В.И. Пумпов, и в других центрах – см. Дубна-83, -85). Обсуждались методические вопросы – использование САВ инженерами (А.С. Гульбиняс [1984]) или психологический анализ диалога с САВ. Вопросы повышения эффективности работы САВ затрагивались в докладах алгоритмической секции.

Широко были представлены приложения, среди которых механические доминировали 45%, из них 29% по общей механике. Картина распределения докладов по научным специальностям, см. табл. 1, дает представление о приложениях в механике. Внимание к конференции видно по реферированию в РЖ Математика и Механика (например, всех 12 докладов по теории упругости – РЖ Мех 1985.1В6, 162, 249-251 и др.). Применения САВ в физике и математике полнее можно представить по материалам конференций в Дубне (Дубна-80, -83, -85, -90).

Секция алгоритмов впервые оформилась в Горьком. Популярность этого важного направления в аналитических вычислениях указывает на определенную стадию в развитии САВ. На ранней стадии внимание привлекают работы по созданию систем и их приложениям. Затем интерес к системам и традиционным приложениям ослабевает, а вопросы специфических символьных алгоритмов приобретают все большую популярность. Динамика соотношения числа докладов (системы, приложения и алгоритмы) показана Н.А. Калининой и А.Л. Семеновым [1984] для четырех отечественных и четырех зарубежных конференций 1979-1983 гг. для первых – 50, 30 и 20 %, для вторых – 20, 15 и 65%. Наши подсчеты (М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов [1988]) дают: Дубна-85 – 36, 36 и 28%, отечественные конференции 1984-1985 г. – 30, 50 и 20%, Европейская конференция EVROCAL-85 27, 28, 45%, (Горький-84 см. выше). Подсчеты показывают запаздывание отечественных исследований по символьным алгоритмам и САВ.

Т а б л и ц а 1  
Распределение докладов в "Горьком-84" по САВ, темам (и языкам)

| САВ тип<br>название<br>обл. примен. | Универсальные |           |          |     | Специализированные |                | Всего |
|-------------------------------------|---------------|-----------|----------|-----|--------------------|----------------|-------|
|                                     | Аналитик      | Алгебра-0 | и Сириус | др. | развитые           | менее развитые |       |
| физика                              | 3             | 1         | -        | 4   | 2                  | 2              | 12    |
| математика                          | -             | -         | -        | 1   | 1                  | 2              | 4     |
| механика                            | 2             | 5         | -        | 3   | 4                  | 7              | 21    |
| м. спл. сред.                       | 6             | 4         | 6        | 3   | 10                 | 8              | 39    |
| общая мех.                          | -             | -         | -        | -   | 2                  | 2              | 4     |
| вибр. ур. дв.                       | 2             | 2         | 1        | 1   | -                  | 2              | 8     |
| колебания                           | -             | -         | 4        | -   | 2                  | -              | 6     |
| устойчив.                           | -             | -         | -        | 1   | 4                  | -              | 5     |
| неб. механ.                         | -             | -         | -        | -   | -                  | -              | -     |
| всего                               | 13            | 10        | 6        | 11  | 17                 | 19             | 76    |
| языки создания САВ                  |               |           |          |     |                    |                |       |
| фортран                             | -             | -         | 5        | -   | 3                  | 10             | 18    |
| алгол, PL1                          | -             | -         | -        | 5   | 3                  | 4              | 12    |
| рефал, лисп                         | 13            | -         | -        | 3   | 4                  | 1              | 21    |
| другие                              | -             | 10        | 1        | 3   | 7                  | 4              | 25    |

В таблице 1 приводятся также данные использования САВ универсальных и специализированных, написанных на языках разного уровня – по данным Горький-84. Как правило, универсальные САВ писались на языках высокого уровня (лисп, Рефал, АНАЛИТИК), а специализированные – на языках низкого уровня.

(фортран, алгол, PL/I), казалось бы не приспособленных для разработки САВ и среди зарубежных САВ имело место подобное разделение при том, что многие ведущие универсальные системы использовали лисл, специализированные системы использовали фортран (в более позднее время – ласкаль). Так, САВ для небесной механики, для работы с рядами Пуассона используют фортран, в том числе системы A.Rom [1970] или R.A.Broucke [1980] в Техасе, одном из центров развития САВ Reduce. Среди САВ для моделирования в механике многих связанных тел также большинство использует фортран (W.Schiehlen [1990]). Дело в том, что для универсальных САВ важна общность символьных выражений и их преобразований, для чего удобнее языки высокого уровня. Для специализированных САВ важнее эффективность, а типы выражений и их преобразования достаточно узкие, четко определенные. Это позволяет пользоваться языками, привычными для прикладников, которые и создавали специализированные САВ.

Своеобразным дополнением к конференции Горький-84 была республиканская конференция Вильнюс-84. Она хронологически предшествовала горьковской и в большей степени была сосредоточена на задачах механики и САВ для них. Среди механических приложений – символьный расчет различных матриц жесткости для метода конечных элементов, дополняющий численные пакеты по этому методу (А.С.Гульбинас, Г.П.Кульветис, Р.В.Белявичус, Р.А.Бараускас – все [1984]). Много докладов было по теоретической механике. Усилиями А.С.Гульбинаса впервые была организована демонстрация работы САВ на БЗСМ-6 и ЕС.

В 1979 г. было положено начало семинарам по механическим приложениям САВ в Институте механики МГУ. Семинар 1980 г. собрал уже многих прикладников – разработчиков САВ и их пользователей. Для большей информативности докладов была разработана схема описания САВ (город, авторы, характеристики САВ, приложения). Часть САВ докладывались по литературным данным. Материалы семинара были изданы в виде препринта ИПМ им. М.В.Келдыша (*Информатор-83*), схема описания развилась в способ комплексного описания САВ (см. ниже, гл. 2 и М.В.Грошева [1985, 1988]). После конференций в Горьком, Вильнюсе и Всесоюзной школы Клязьма-87 семинары в Институте механики МГУ продолжались регулярно, объединяясь в первые годы с семинаром по компьютерной алгебре на механико-математическом факультете МГУ. Темой 1986 г. были алгебраические методы и САВ в механике, в 1987 г. – методы теории групп, в следующие годы – теория управления, экспертные системы, САВ в образовании.

Всесоюзная школа "Системы аналитических вычислений в механике" Клязьма-87 под Москвой собрала очень много специалистов по системам, алгоритмам и приложениям. Тезисы конференции, к сожалению, не были изданы, даже в виде делонизированного издания. На лекциях широко было проведено ознакомление с ведущими САВ, отечественными и зарубежными, с методами механики и алгоритмами, реализованными на САВ. Ряд этих материалов были изданы (В.С.Берман, Д.М.Климов, В.М.Руденко, О.М.Городецкий и др. – все [1987]).

Важную научную и организующую роль играли конференции (Совещания) по аналитическим вычислениям в Дубне, в ОИЯИ, под руководством Н.Н.Говоруна. Дубна-80 была первой большой конференцией после Харькова-72 и снова собрала вместе специалистов по САВ. Правильная периодичность этих конференций, высокий уровень, публикация трудов, участие зарубежных ученых – все это придавало конференциям в Дубне статус ведущих среди многих научных мероприятий. Правда, число участников обычно бывало ограниченным, а механика не была среди центральных тем. Конференции эти отличались постановкой актуальных вопросов (с помощью заказных докладов), знакомили с передовой зарубежной техникой и САВ, которые в значительной степени поступали к нам через

ОИЯИ. Так, на Дубне-83 появилась система Reduce, в Дубне началось ее освоение. В ОИЯИ проводилась адаптация Reduce на отечественные машины. Многие механики осваивали эту систему как практиканты в ОИЯИ и получали ее там.

Оперативным центром координации разработок по САВ, знакомства с отечественными и мировыми достижениями в течение десятилетия был Всесоюзный семинар под руководством Д. В. Ширкова на физическом факультете МГУ (секретари – В. Я. Родионов и А. П. Крюков). В последнее десятилетие этот семинар продолжает свою работу на ВМК МГУ под руководством С. А. Абрамова.

В Дубне на конференциях стараниями ученых из ОИЯИ, благодаря международному статусу Института и большим международным контактам, проводилось включение отечественных исследований по САВ в международную научную жизнь. Иностранные ученые приглашались на конференции в Дубну, сотрудники ОИЯИ активно проникали на заграничные и прокладывали дорогу другим. Конференция Дубна-85 уже имела вполне международный характер благодаря присутствию многих зарубежных ученых, включая широко известных (В. F. Sevlless, W. Lassner, B. Buchberger и другие). Конференция Дубна-90 (памяти Н. Н. Говоруна) была в полном смысле международной и по составу участников (более 50 зарубежных участников, сделавших треть докладов), и по участию известных ученых. Прикладные работы, в том числе и по механике, были представлены достаточно широко. В то же время, советские исследователи и доклады все чаще попадали на международные конференции (включая конгрессы EVROCAL'85 в Линце в 1985 г., ISSAC в Лейпциге в 1989 г. и в Бонне в 1991 г.). Международный семинар (Новосибирск-Иркутск, 1990) кроме систем и алгоритмов был посвящен применениям САВ в математике и вычислительных методах механики сплошной среды.

В 1993 году Конгресс ISSAC'93 впервые прошел в нашей стране – в Киеве, Киев-93 (к сожалению, число участников было меньше обычного из-за трудностей наступившего времени). Усилиями А. А. Летичевского и А. Г. Сокольского было организовано рабочее заседание по отечественным САВ и прикладным разработкам, собравшее половину от общего числа докладов на симпозиуме ISSAC'93.

Символьные вычисления были представлены на конференциях ИТА (С-Петербург-91, -92, -95), в Переяславле-Залесском (Переяславль-Залесский-94, -95), на Семинарах в Институте проблем механики РАН (по задачам механики и управления – в 1992 г., по нелинейным задачам механики – в 1993 г.). Публикации на тему САВ и их применения стали появляться в ведущих журналах Программирование, Механика твердого тела, Техническая кибернетика и других, в Сборниках "Пакеты прикладных программ" (Наука, Москва и Новосибирск).

В последнее десятилетие наши специалисты по САВ активнее включились в международное общение ученых, стали широко участвовать в международных научных мероприятиях. Конгресс ISSAC'93 прошел в Киеве (Кiev-93), международными были конференции в С-Петербурге Saint-Petersburg-93, -94. Прикладники включились в работу конференций IMACS-ACA (Ассоциации по математике и вычислениям в моделировании – Применения Компьютерной Алгебры). На конференции в Праге IMACS ACA-98, Prague-98, ряд секций (сессий, общим числом 18) были организованы российскими учеными, в том числе по механике, механике и динамические системы (В. Еднерал, Н. Н. Васильев), История САВ (Г. Б. Ефимов, М. В. Грошева [1998]), Физика высоких энергий (В. Ф. Еднерал, O. Perret-Gallix), Интегрирование и симметрии в ОДУ (В. П. Гердт, F. Schwarz), Алгебра и геометрия (А. А. А. В. Михалевы, G. F. Pilz), Биология, Экология и Медицина (В. Ф. Еднерал, Н. И. Гурич, Н. К. Зайцев), к механике относилась также секция Управления и робототехники. Исключительно активной и многочисленной была секция Образования и обучения – 4 заседания, 27 докладов (в два-три раза больше, чем на других сек-

циях – напр., А. В. Банщиков, Л. А. Бурлакова [1998]. В ней участвовало большое число чешских преподавателей, в том числе из колледжей. Материалы некоторых секций (этого и других годов) публиковались (С. А. Гутник, А. Д. Брюно [1998]).

В 2000 году конференция IMACS ACA прошла в Петербурге, в Шуваловском дворце на Фонтанке. Во главе организаторов был Н. Н. Васильев. Число участников было скромнее, чем в Праге, но общение – очень активное. Приятно было увидеть многих старых знакомых после большого перерыва, узнать о продолжающейся работе по САВ. Секция Образования и тут была среди наиболее популярных и активных.

Восстановлением старой традиции явилось Собрание в Дубне в 2001 году – DUBNA-2001, собравшее большое число участников из многих стран. Рядовое большое участие молодежи – студентов МГУ, физфака и мехмата и местного филиала МГУ в Дубне. Большая часть их многочисленных докладов относилась к физике и методу Гребнера. Механика также была представлена неплохо. В Дубне стали регулярно проводить в конце мая заключительное заседание семинара по САВ в МГУ – в виде однодневного семинара.

### 1.3. Некоторые тенденции конца 1980-х – начала 1990-х годов

Большие конференции по САВ, начиная с Дубны-85, во многом следовали принципу современных международных конференций – не них отдавалось предпочтение сообщениям о системах, реализации алгоритмов и математических методов. Из приложений преимущество получали новые нестандартные приложения. Механические приложения нередко попадали в разряд привычных, ограниченных в представительстве. Например, на европейской конференции EVROCAL'85 в Линце в 1985 г. доля прикладных работ была невелика по сравнению с алгоритмическими, аналогично и на других подобных конференциях (см. выше). Среди приложений получали преимущество новые – логика, теория чисел, химия (см. в трудах EVROCAL'85, например, R. Pavelle [1986]). Возрос интерес к САВ в связи с логическими направлениями в программировании – доказательствами теорем, верификацией программ и т.п. Этим темам в Линце были отведены специальные секции. Перехлестается с этой тенденцией и направленность большого собрания Рабочей группы по САВ (в рамках сотрудничества Академий наук стран СЭВ) в 1990 г. в Киеве, где вопросы логического программирования были широко представлены (также Ю. В. Капитонова, С. В. Коляда [1985]). Кроме специальных разработок последнего времени, логика присутствовала и в некоторых старых САВ (например, АНАЛИТИК, В. А. Эльтеков [1988], В. М. Матросов, С. В. Васильев и др. [1984], см. также Вильнюс-90, Н. Н. Васильев [1985], Дубна-90).

Прикладные работы сосредотачивались и наиболее полно представлялись на конференциях по специальностям, уже не разделяясь на работы с использованием САВ или без них. Этапами освоения специализированных и универсальных САВ в качестве регулярного, обычного метода обеспечения научных исследований стали Всесоюзные совещания по компьютерным методам в классической и небесной механике Ленинград-88, -89 (1, II), -90 и С-Петербург-91, посвященные двум старейшим областям применения САВ – небесной механике и моделированию сложных механических систем (включая вывод уравнений движения). К ним примыкали Всесоюзная конференция Вильнюс-90 и конференция Севастополь-91 (организованная механиками из Пермского университета). Механика деформируемого твердого тела было посвящено Всесоюзное Собрание в Киевском университете (Киев-88, см. гл. 3). САВ постепенно становятся стандартным обеспечением, а символичные аналитические преобразования – привычным инструментом исследователя. На конференции Севастополь-91, например, соотно-

шение числа докладов следующее 23-12-5- 16 – по применению САВ, численных методов, общих вопросов САВ и прочих тем

Похожая ситуация видна и по материалам книги W Schiehlen'a [1990] о системах для моделирования динамики систем многих тел по материалам Семинара IUTAM(Мюнхен,1977) и Симпозиума IUTAM/TFToMM(Uдине,1985) Описание включает характеристику круга решаемых задач, методики исследования и программной реализации систем Вместе объединены САВ и системы полностью численные Из общего числа 20 систем половина не имеет САВ-компоненты Из первых десяти (по числу пользователей) символьную компоненту имеют 6, но лишь две являются собственно САВ, причем стоят в конце списка лидеров Близкие принципы описания возможностей пакетов (для задач механики – без разделения численных пакетов и САВ) использовались И И Карловым и др [1990]

Совещания *Ленинград-88,-89-91* (механика систем многих тел) были примечательны тщательным анализом и сравнением представленных методик моделирования динамики сложных механических систем Проанализированы были также особенности САВ и численных программных комплексов, эффективность вычислений, ограничения на вид исследуемых механических систем В *Вильнюсе-90* это обсуждение было продолжено На этой конференции были секции механики систем многих тел, механики деформируемого тела, математической физики, систем и алгоритмов и образования (выделенная впервые)

Приложения в небесной механике обсуждались на совещаниях *Ленинград-89* (секция 1), *-90* и *С-Пetersburg-91, -95* Сюда же можно отнести секцию САВ на Всесоюзной школе-семинаре небесно-механического профиля "Динамика механических систем" (Томск, 1969) Все конференции последних лет сопровождалась демонстрацией работы САВ, математических и прикладных пакетов в них

Среди тенденций этого периода одна из важных – интеграция символьных, численных и графических возможностей ЭВМ (*Дубна-90, Вильнюс-90, С-Петербург-91,-95, P S Wang [1990], E Engeler, R Mader[1986]*) Системы по-разному соотносят компоненты этого объединения, придают различное значение степени и способам их взаимодействия У САВ Mathematica, наиболее передовой в области сервиса и удачливой на рынке, особое внимание обращено именно на упрощение интерфейса различных типов вычислений, возможность свободного пользования любым из них – как это делает человек вручную Еще одно веяние этого времени – «интеллект» программных систем, САВ могут быть тут полезны

Наиболее распространенным в этот период время системам и их алгоритмам посвящены обзоры Н Н Васильева, В Ф Еднера [1994] (сравнение САВ Reduce, Maple и других), С А Абрамова, Е В Зимы и В А Ростовцева [1992] (по развитию алгоритмов) Интересен проводившийся В П Гердтом анализ материалов международных конференций (*С-Петербург-91*) Назовем два любопытных факта Оказывается, специализированные лисп-машины, с которыми связывали определенные планы в развитии САВ, не оправдали ожиданий, так как рост ресурсов обычных машин и совершенствование алгоритмов обеспечили необходимую эффективность САВ (см о рефал-машине в гл 4) Второе – вновь возрастающий интерес именно к приложениям САВ в технологии и механике, вопреки (и в дополнение) недостаточному вниманию к этой тематике на других конференциях

В конце этого периода произошло много важных изменений Сменилось поколение вычислительных машин, сошли со сцены многие САВ и даже языки их реализации Некоторые САВ воссоздавались на ПК, или как пакеты на базе известных универсальных систем, получивших распространение (Reduce, Maple, Mathematica, Macsyma и др) Работы по развитию и использованию САВ продолжались Об этом свидетельствуют конференции хотя бы только 1995 года, на

которых были представлены САВ *Переспаль-95*, *С Петербург-95*, *Bucharest-95*, *Hamburg-95* (EUROMATH 343). На Международной конференции *Инфосфера-95* в числе пленарных был доклад Д. В. Ширкова Компьютерная алгебра и ее применение в промышленности, прошел круглый стол Аналитика и символьные преобразования. Развивались на новой базе известные пакеты (см. А. В. Банщиков, Л. А. Бурлакова, Т. В. Иванов и др.), продолжалась реализация новых алгоритмов (см. А. Г. Сокольский, Н. Н. Васильев, В. Ф. Еднерел, С. А. Абрамов, В. А. Ростовцев и др.). Большой цикл работ по спецификациям реализовался группой О. И. Маричева, В. С. Адамчика в САВ *Mathematica*. Применение САВ в механике становится рядовым явлением (И. И. Карпов [1990], EUROMATH-343). Продолжается интеграция символьных, численных и графических средств. Причем в последние годы отмечается тенденция к интеграции различных САВ, включению их возможностей в большие численные системы (В. П. Дьяконов [1999]). Все шире используют САВ в учебных программах, в том числе по механическим специальностям (см. Тула-2005).

#### 1.4. Использование САВ в обучении и образовании

Роль упомянутых выше семинаров и конференций, конечно, не сводилась к научной или организационной стороне дела. Не менее важна была и популяризация новых средств и возможностей вычислительной техники. Шаг на пути от пропаганды к конкретному обучению был сделан на Всесоюзной школе *Клязьма-87*. Д. М. Климовым была организована серия лекций по современным универсальным САВ (*Reduce, muMath, Maple*). Пропаганде САВ служили и его доклады – на съезде по теоретической и прикладной механике и др. (Д. М. Климов [1984, 1986]). Книгу Д. М. Климова и В. М. Руденко [1989] можно рассматривать в качестве учебного пособия по САВ *Reduce*, и также, по применению САВ и *Reduce* в механике.

Вопрос о роли САВ в образовании, – как компоненты информационной революции, связанной с компьютеризацией, – содержится в материалах секции по САВ на Международном конгрессе по математическому образованию (Аделаида, Австралия, 1984, см. В. F. Caviness [1988] и объединенный номер *SIGSAM Bulletin* 18-19, 1984, N 4, 1985, N 1). Автоматизированные системы обучения (АСО) уже тогда были достаточно развиты, отмечалось, что САВ в области образования должны занимать особое место – благодаря "интеллектуальности", большому объему информации, конструктивному способу получения ответа и привычной математической форме представления. Ведущие САВ, поэтому, можно рассматривать как базы знаний по математическим методам и алгоритмам – уникальные по объему и удобству представления. Алгоритмическое богатство САВ, пакетный характер оформления и обращения к алгоритмам позволяют интенсифицировать обучение с их помощью (В. Buchberger [1984], E. Engeler, R. Mader [1986]). Таковы были позиции по использованию САВ в образовании – почти двадцать лет назад.

Естественно различать три вида обучения с помощью САВ: подготовку специалистов в области аналитических вычислений, обучение работе с САВ широкого круга пользователей и применение САВ в образовании математического (механического) профиля. Первое направление реализовалось в специальных курсах и в рамках создания и развития САВ, универсальных и специализированных, при реализации алгоритмов на САВ, путем привлечения к работе студентов и аспирантов. Второе направление характеризуется широким знакомством студентов и специалистов с САВ как одним из современных инструментов исследования. Третье направление – использование САВ в качестве вспомогательного средства интенсификации образования. Успехи на этих направлениях к 1990-му году были неодинаковы. По первому, пожалуй, – наибольшие, так как через разработку и усовершенствование различных САВ прошло немало молодых специалистов.

Массовое знакомство с работой на САВ происходило уже тогда во многих центрах, с помощью литературы с ними знакомились и самостоятельно. Однако использование САВ в отечественном образовании имело место лишь в немногих случаях – из-за трудностей с вычислительной техникой в ВУЗах.

Применение САВ в образовании требовало выполнения многих условий – изобилия техники (принципиальным шагом стало распространение ПК) или специальных САВ – упрощенных по сервису, уменьшенных по объему. Тогда процесс освоения САВ и использования их в обучении мог идти легко. Например, в Дзлаварском университете появление ПК и специальной САВ *muMATH* обучающего профиля (предшественницы *Openve*, *D R Stoutemyer* [1986]) резко увеличило число пользователей-студентов: при 100 работавших на *Macsyma* и 200 на *Reduce* число пользователей *muMATH* достигло 500 (*B F Savless* [1986]). Другой пример – САВ *Mathematica*, удобство общения с которой привлекли к ней тысячи пользователей, среди них студентов и школьников. Облегчает обучение и интеграция символьных, численных и графических возможностей на ЭВМ (*R Wang* [1986], *E Engeler* и *R Mader* [1986]). Примеры – САВ *Mathematica* и *Maple* с высоким уровнем интеграции всех машинных возможностей (сейчас это есть всюду).

Вклад в подготовку отечественных специалистов в области САВ дали активные коллективы и их семинары по машинной аналитике в вузах Новосибирска, Томска, Москвы, Ленинграда, Киева, Харькова, Перми, Иркутска, Горького и др. (например, см. *В В Маланин*, *А Б Бячков*, *М Ю Дроздов*, и др., *А.Г. Свешников* и *В.А. Эльтеков*, и другие, также табл. 3 в гл. 2). Во многих ВУЗах читались специальные курсы по САВ, принципам их создания и применению, нашедшие свое отражение в методических материалах и изданиях. Ограничимся несколькими примерами. Одним из них может служить читавшийся много лет курс по САВ в университете Нижнего Новгорода (*А Н Безденежных*, *Я К Любимцев*, *Р Г Струнин*, *М А Чубаров* [1992]). Курс *М А Чубарова* содержал основы создания САВ, построения символьных алгоритмов и смежные вопросы. На его основе САВ использовались в курсах по механике, функциональному анализу, в практикумах и студенческих работах.

Давно и интенсивно использовалась в обучении система АНАЛИТИК, в том числе в преподавании математических дисциплин. *Б А Бублик* [1978] разработал методики преподавания высшей математики, используя САВ, – так, для контрольной работы готовились задачи и решения в буквенном виде, с параметрами, задание значений которых давало нужное число вариантов. В Киевском университете обучение АНАЛИТИКУ объединялось с вычислительными и механическими дисциплинами (*В И Савченко*, обсуждение – *Клязьма-87*, *Вильнюс-90*). Выказывалось предложение применять САВ для облегчения и интенсификации лекций (демонстрации громоздких выкладок) в механических курсах (*В И Савченко*, *В Я Шевченко* [1990]). Развитием этого опыта была идея разработки САВ специально для обучения на лекциях. Применялся АНАЛИТИК для обучения и в других вузах (например, *Г А Матросова* [1990], *Ю Б Подчуфаров* [1987]).

В конце 1980-х годов ведущее место для задач обучения занимала система *Reduce* (благодаря сервису и богатству алгоритмов). Достаточно сказать, что большинство руководств по этой системе на русском языке были выпущены в вузах (*В Ф Еднерал*, *А П Крюков*, *А Я Родионов* [1983], *М Б Захс* [1983], *Н И Гурин*, *А Г Скоморохов* [1989]) на основе опыта обучения работе с *Reduce*. *В И Демченко* и др. [1983] использовали *Reduce* для учета тождественных преобразований при проверке ответа, что являлось узким местом для АСО в математике, позже перешли на *FORMAC*, как более эффективный. Активная группа механиков использовала *Reduce* для обучения в Пермском университете (*М Ю Дроздов*, *В.В.*

Маланин, В М Микрюков [1990]) В Московском авиационном институте Reduce использовался при обучении механике А П Маркеев, С В Медведев, А Г Соколовский [1985], В Г Вверетенников, И И Карлов, А П Маркеев, С В Медведев и др [1990] Опыт подобного рода имелся во многих местах – от Вильнюса до Владивостока – см *Вильнюс-90, С-Петербург-91, А С Клоков [1986]*

Использование САВ и символьных вычислений в образовании стали со временем все более многочисленны и разнообразны. Трудно перечислить даже ветеранов САВ, работавших в эти годы в области обучения в то же время все новые работники и группы включались в это бурно развивающееся направление. В В Маланин [1996] в докладе о достоинствах САВ с позиций обучения механике уже на конференции *Клязьма-87* (и не других) ставил вопрос об обязательности овладения техникой САВ студентами механиками. Это было реализовано на мех-мате университета в Перми в конце 1980-х. Сейчас САВ используется там в курсах Теоретическая механика, Системы аналитических вычислений, спецкурсах Идентификация динамических систем, Численно-аналитические методы исследования нелинейных систем, Системы аналитических вычислений в механике, Пакет Mathematica и вариационные неравенства (В В Маланин, И Е Полосков [2001]) Признанием важности постановки вопросов образования с помощью САВ было создание секции на конференции *Вильнюс-90* хотя докладов было немного (Ю К Демьянович, А Н Новоселова – [1990])

Велась работа и с помощью специализированных САВ механического профиля (например, Н В Емельянов [1983], Э Е Пейсах, А Б Кикин [1987], данные табл 3 гл 2) Эти САВ, как правило использовались не для преподавания математических дисциплин, а в курсах по механическим специальностям, на них выполнялись курсовые работы. Возможности компьютера в преподавании механики хорошо демонстрирует, например, САВ Д Ю Погорелова [1993] Используя эту систему, студенты Брянского железнодорожного института осваивали теорию и автоматизацию построения уравнений движения механических систем со многими степенями свободы, их декомпозицию, моделирование динамики сложных объектов. Все этапы работы иллюстрируются изображениями в реальном времени, выводом графиков. Большинство САВ для моделирования сложных механических систем использовались в преподавании (см табл 3 гл 2), – в развитии этих САВ студентами, в механических спецкурсах по динамике систем тел, теории гироскопов, навигации, теории машин, устойчивости. Перенос многих из этих САВ на ПК в начале 90-х годов дал новый импульс применению их в обучении благодаря большим возможностям ПК, их сервису и доступности.

Заметим, что автоматизация сложных алгоритмов механики с помощью САВ, создание серии пакетов, охватывающих значительную часть цикла исследования механической модели, – ставит серьезные методические вопросы. С одной стороны, тонкие механические методы становятся доступнее для широкого круга инженеров и механиков. С другой – возникает определенная опасность девальвации механиков нового поколения, привыкающих во всем полагаться на машину, не умеющих ее контролировать, а подчас и плохо понимающих логику исследования. Поэтому усилия по автоматизации современных методов механики (в том числе символьных) должны идти рука об руку с методической работой по изложению этих методов и выработке методики обучения "компьютерной механике", "компьютерной физике" и т.п. (С В Бирюков [1999], А И Кобрин [2005])

Персональные компьютеры существенно повысили возможности автоматизации образования. Возросло количество разнообразных компьютерных учебных материалов (см., выше и, например, Соединения в Туле 1991 и 2005 г. по компьютерным методам обучения в теоретической механике – Тула-2005). К сожалению, роль САВ в этом процессе оставалась скромной, не соответствующая их воз-

возможностям. Не всегда были готовы к использованию САВ и учебные программы. Так, проф. Л. И. Штейнвольф в *Вильнюсе-90* отмечал устарелую ориентацию ряда программ по сопоставу на графоаналитические методы. Международный компьютерный форум в С.-Петербурге CSAM'93 (*St-Petersb.-93*) уделил образованию серьезное внимание – одну из секций (см. В. В. Маланин и др. [1995]), хотя число докладов по САВ было скромным. Одним из центров обобщения опыта компьютеризации образования стал семинар в Московском энергетическом институте по обучающим системам (хотя, как правило, без САВ). Новые возможности – дистанционное обучение, использование удаленных мощных компьютеров, обмен информацией и т.д. – обсуждались на секции Интернет в образовании на Международной конференции *Инфосфера-95*, отмечалось также перспективность САВ.

Массовый переход на ПК, быстрый рост их ресурсов и возможностей, доступность ведущих САВ на них – по новому поставили вопросы о роли САВ в образовании. Благодаря этим факторам сейчас студенты и даже школьники овладевают САВ быстрее и легче, чем старшее поколение, активно пользуются САВ. Использование ведущих САВ с их богатыми возможностями, соединением символьных алгоритмов с численными и графическими средствами компьютера стало общедоступным. Бурно развивается обучение через Интернет (Г. А. Курганская [2001], *Тула-2005*). Появились многочисленные новые коллективы использования и развития САВ, например, в Смоленске, Минске, Бресте, Туле и других городах. Активность секций образования на нескольких последних конференциях по САВ отмечена выше, в разделе 1.2 (см. *Минск-97, -99, Prague-98, St-Petersburg-2000* и др.). Работы по системам САВ и участие в этом молодежи развиваются в основном в области реализации алгоритмов. На конференции *Dubna-2001*, например, было большое число студенческих докладов (по методу базиса Гребнера и физике), особенно из числа студентов физ-фака МГУ и его местного филиала и учеников Е. В. Панкратьева с мех-мата МГУ.

В последние годы публикуется большое число материалов и руководств по применению САВ разного рода – руководств по отдельным системам, пособия по применению их в учебных курсах и т.д. Приведем лишь отдельные примеры руководств по ведущим САВ, например, В. П. Дьяконов [1993], Г. В. Прохоров и др. [1998], Е. М. Воробьев [1999], О. В. Зимина [2003], методических материалов – С. В. Бирюков [1995], А. И. Кобрин [2005], решебников – Ю. И. Рыжиков [2000], О. В. Любанова [1999], А. И. Кириллов [2000], М. Н. Кирсанов [2002], в том числе по механике – М. Н. Кирсанов [2001]. Интернет дает новые возможности (см. *Тула-2005*), в том числе участия в интернет-семинарах и журналах по САВ, по применению их в образовании (С. В. Бирюков [1995], также Интернет-журнал *Denve News Letter* и др.). Интеграция возможностей САВ и других средств имеет в виду теперь уже не только графику и численные пакеты – это стало обыденным, хотя и тут происходят интересные процессы (В. П. Дьяконов [1999]). Взаимодействие с САВ включает теперь средства работы с текстами (А. И. Кириллов [2000]) – работа с САВ из Word) или подготовки публикаций (В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулин [1997]).

Во время как использование САВ становится все привычнее, их роль в образовании привлекает все большее внимание, находится среди самых популярных разделов в сфере САВ. Приведем характерный пример. Многолетние труды иркутских механиков по динамике движения системы тел с помощью САВ (А. В. Банщиков, Л. А. Бурлакова и др., М. В. Почтаренко, М. А. Новиков) получили недавно отражения в области образования – как диссертация Т. Н. Тигоренко [2002], – в виде руководства и сборника задач по применению САВ.

## Глава 2 Системы Аналитических Вычислений и их свойства

Первоначальные шаги в области символьных преобразований на компьютере имели два взаимно дополняющих мотива. Одним был принцип, сформулированный Н Винером, что машину можно научить всему, доступному для человека. Второй шел от потребности практики, – математики, механики, физики – в автоматизации громоздких преобразований формул. В соответствии с побудительными мотивами, развитие САВ происходило двумя путями. С одной стороны создавались системы символьных преобразований или вычислений общего вида (универсальные), с другой – САВ для решения конкретных задач с выражениями и действиями достаточно узкого вида (специализированные). При остром дефиците машинных ресурсов и в отсутствии больших проектов, концентрирующих усилия, все это привело к появлению большого числа отечественных САВ различного рода. Описанию их и их свойств посвящена настоящая глава.

### 2.1 Использование САВ в цикле исследования

Аналитические вычисления широко применяются в механике. Ниже мы хотели бы показать всю широту их применения, не только и не столько в разнообразии задач – на это будет обращено внимание в гл. 3. Интересно разнообразие ролей, в которых выступают аналитические вычисления – при построении решений в рядах, использовании классических и новейших математических алгоритмов на САВ, в качестве отдельных “кирпичиков” исследования, таких, как специальные арифметики, построение уравнений движения, при построении методов численного интегрирования.

Представление об обширности и разнообразии приложений САВ в механике дадим на примере цикла математического эксперимента А.А. Самарского (В.Я. Карпов, Д.А. Карягин и А.А. Самарский [1978]), предложенного в связи с пакетами прикладных программ (ППП) в математической физике. Цикл этот состоит из следующих этапов:

1. Выбор физической модели и формирование математической модели как задачи механики или математической физики,
2. Выбор вычислительного алгоритма для решения задачи,
3. Создание программы для реализации алгоритма,
4. Проведение расчетов и обработка полученной информации,
5. Анализ результатов, сравнение с экспериментом. Если нужно, пересмотр физической модели и повторение цикла.

Возможны и промежуточные циклы, особенности алгоритма могут повлиять на математическую формулировку задачи, потребовать ее модификации, недостаточная точность расчета укажет на необходимость изменения алгоритма, отладка программы образует свои циклы и т.п. Кроме цикла вычислительного эксперимента возможны и другие, близкие циклы исследования, как циклы математической обработки результатов эксперимента или расчета свойств вещества (А.А. Самарский). Цикл вычислений в механике может отличаться от упомянутого, например, исследованием устойчивости движения.

Рассмотрим примеры применения САВ на всех указанных этапах вычислительного эксперимента (Г.Б. Ефимов [1983], М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов [1988]).

Этап первый Физическая или механическая формулировка задачи и вывод уравнений движения (или равновесия, состояния) во многих случаях составляет непростую задачу. Для сложных механических систем, таких как гироскопические системы, манипуляторы, роботы, спутниковые системы и т.п., уравнения движения очень громоздки, а их вывод требует большого труда. Велика вероятность

ошибок, и нередко чисто технические трудности становятся препятствием для рассмотрения более сложных и точных моделей явления. Интересно, что среди первых применений символьных вычислений было получение уравнений движения связи тел (см. M S Davis [1968], стр. 197). Обзоры литературы по автоматизации вывода уравнений движения – М В Почтаренко [1985], И Виттенбург [1980], И Р Белоусов [2002] – можно дополнить материалами конференций (*Горький-84, Дубна-85, Ленинград-88, -89-II, Вильнюс-90, W Schiehlen [1990]* и др.)

Символьные выкладки дают возможность автоматизировать вывод уравнений движения, проводить их линеаризацию, замыкание системы уравнений. Для целой группы САВ и ППП построение уравнений движения сложных систем является одной из главных задач, иногда даже основной. Они входят в символьно-численные программные системы с различным уровнем интеграции численных компонент и САВ, в составе САПР. Особенности и варианты таких систем обсуждаются ниже. Схема получения уравнений движения включает формирование потенциальной и кинетической энергии системы, их дифференцирование и преобразование получающихся уравнений. Для систем с большим числом степеней свободы более удобны и эффективны уравнения движения, отличные от классических уравнений Лагранжа, Гамильтона, Эйлера и т.п. (см. Ленинград-88, -89-II, А Б Бячков и др. [2002], Ю Г Мартыненко [1990], табл. 3). Объем промежуточных и конечных выражений заставляет иногда воздерживаться от полного раскрытия скобок и приведения всех подобных членов (например, в системе MMANG О М Городецкого [1988]). Универсальные САВ в этих задачах часто неэффективны, большинство САВ этого назначения – специализированные.

В других случаях выбор физической модели – дело менее формализованное и требует диалогового режима работы САВ, большого разнообразия символьных выражений и богатства алгоритмов. Пример последовательного получения уравнений движения в механике плазмы с замыканием системы уравнений уравнениями состояния, линеаризацией нелинейных уравнений, получением высших приближений и т.п. приводят A Berg, J L Kulr и C P F Kamey [1976], демонстрируя возможности САВ MACSYMA.

Методы теории групп в виде символьных алгоритмов дают возможность учитывать симметрию задачи для упрощения исходных уравнений или поиска свойств решений, интегрируемости (М М Бежанова, В Л Катков и И В Поттосин [1972], В Л Катков, М Д Попов [1984], F Schwarz [1982], В П Гердт, А Ю Жарков [1984], В В Корняк [1985, 2001], В Л Топунов [1975], Л М Берхович [1975], А В Бочаров [1989] и др. – *Горький-84, Дубна-85, Дубна-90, -2001*). Эти методы используются в механике сплошных сред, в физике, общей теории относительности.

На этапе втором, дискретизации и выбора алгоритма также имеются громоздкие операции. Так, методы Рунге и Галеркина хорошо реализуются в рамках символьных вычислений (С Я Герценштейн и др. [1984]), однако требуют символьного вычисления определенных интегралов. Успешно используются САВ в методе конечного элемента (А С Гульбинас [1984], Р А Бараускас [1984], А Л Пляхов [1998], *Вильнюс-84, Горький-84, Вильнюс-90*), при построении методов численного интегрирования высокого порядка (Ю А Федяев [1982]), при построении и исследовании разностных схем (М Ю Шашков, И Б Щенков [1983], А Н Валиуллин, В Г Ганжа и др. [1981], С И Мазурик и В П Шапеев [1986]). В задачах устойчивости (в том числе при анализе алгоритмов и вычислительных методов) необходимо вычислять характеристические полиномы, причем без потери точности.

В теории управления и оптимизации САВ облегчают получение уравнений сопряженной вектор-функции, уравнений в вариациях (нужные также в задачах коррекции, навигации, при решении краевой задачи). Современными методами ре-

шения кривой задачи ('продолжения по параметру', В Г Петухов [2004]) сильно расширяют возможности исследователя, но требуют построения большого числа уравнений вспомогательной системы. Для автоматизации этого процесса САВ могут быть полезны. Формально эти действия можно отнести к этапу организации вычислений, но по существу они примыкают к выводу уравнений движения. Получение громоздких уравнений движения или равновесия в механике сплошных сред на основе вариационного принципа может проводиться с помощью САВ.

Этап третий. При программировании САВ также могут быть применены, – например, для автоматизации формирования громоздких правых частей уравнений движения. При этом уменьшается вероятность внесения ошибок. Символьные выражения превращаются в фортрановые операторы (или аналогичные), при формировании программы может быть проведена оптимизация счета на различных уровнях (J A van Hutzel [1983]). Имеются программы оптимального построения процесса вычисления значений громоздких символьных выражений, рядов Пуассона (Н Н Васильев [1985]), программы анализа потери точности (Ю К Демьянович [1989]), анализа программ и проверки размерностей (В Л Катков [1990]).

Немалую пользу может дать возможность построения независимого (пусть громоздкого и неудобного) решения – как теста при отладке сложной задачи. Таким может быть решение в виде рядов (A Depitt и A R M Rom [1968]). Автоматизация вывода разностных схем (см выше) одновременно автоматизирует и часть программирования. При выводе уравнений движения с помощью САВ генерируются и программы счета правых частей для численного моделирования динамики механической системы. Современные САВ (например, MATCAD) позволяют строить систему уравнений при оптимизации, при выборе удобных переменных для сложных задач – в интерактивном режиме, с автоматическим переходом к моделированию и графическому представлению результатов. Использование САВ часто уже не упоминается (М С Константинов и др [2001]).

Отладка программ в некоторых случаях упрощается при совместном использовании символьных и численных вычислений – благодаря применению языков высокого уровня и сервиса, имеющегося в САВ. Об этом свидетельствует опыт применения САВ АНАЛИТИК на специализированных ЭВМ (на МИР-2 в качестве интеллектуального терминала к БЭСМ-6 и на ЕС-2680 в качестве диагностической компоненты в многопроцессорном комплексе). Отсутствие погрешностей округления, характерное для многих САВ (арифметики целых, рациональных или вещественных чисел бесконечной и заданной точности – А В Корлюков [1985], А В Кузьмин [1980], С Ю Войцеховский и Г С Теслер [1991], Н Н Глазунов [1985]) открывают новые возможности в алгоритмах счета, исследовании устойчивости, контроле интегралов движения и т.п. Используются САВ и для доказательства правильности программ – этому была посвящена специальная сессия на Конференции EVROCAL-85 в Линце.

Этап четвертый. Решение в формульном виде, аналитическое или приближенное, ценно тем, что дает не одну траекторию, а целое семейство, с явной зависимостью от параметров. САВ позволяют получать приближенные аналитические решения в громоздких задачах – D Barton [1966] за минуты счета повторил и продолжил работу Ch Delaunai, на которую тот потратил 20 лет. Аналитическое представление результатов облегчает проведение качественного анализа решения. Исследование устойчивости движения механических систем – 'коронная' задача многих САВ для механики (см ниже). В некоторых случаях представление результатов расчетов (даже полученных численно) в символьном виде целесообразно – Ф Ф Дедус [1990], П А Калинин [1990]. При расчете траекторий искусственных и естественных небесных тел громоздкие решения задач небесной

механики, полученные в виде рядов Пуассона (пригодные на больших интервалах времени), можно преобразовать в компактные представления полиномами Чебышева (см. Н.Н. Васильев [1980]), свои на каждом, сравнительно коротком временном интервале (A. Depriat, W. Poplarschek и A. Depriat-Bartolome [1976]). Так обычно поступают (и без использования САВ) при расчетах полетов космических аппаратов. Плодотворно сочетание символьных вычислений с численными и с машинной графикой 10-15 лет назад об этом специально говорили – P. S. Wang [1990], E. Engeler и R. Mader [1986]. Сейчас такой режим обычен и естественен.

Этап пятый. Символьное представление результата с явной зависимостью от параметров, характеризующих явление, может облегчить сравнение расчетов с экспериментом. К этому разделу можно условно отнести и выбор числа последовательных приближений в зависимости от требуемой точности расчетов (в методе теории возмущений, в рядах небесной механики, В.А. Брумберг [1974], A. Depriat и A. R. M. Rom [1986], Г.Б. Ефимова [1970]). Близко по идее и может быть отнесено к данному этапу – использование САВ при планировании эксперимента или в системах проектирования, когда аналитические выкладки облегчают перебор вариантов и варьирование параметров математической модели физического явления. САВ входят в такие системы в качестве одной из компонент (см. ниже, в 2.4).

Перечисленные примеры показывают разнообразие применения САВ на отдельных этапах вычислительного цикла. Обычно символьные вычисления используются на нескольких этапах сразу. Например, при построении решения задачи в виде рядов – в задачах небесной механики (ряды Пуассона, В.А. Брумберг [1974], J. Kovalevsky [1988]), общей механики (ряды Тейлора, A. R. LeScharck и P. Scolzo [1988], Л.Ф. Белоус и Е.Е. Королькова [1981]) или механики сплошной среды (Л.Н. Плетенова и М.Ю. Шашков [1983], в методах Рунге и Галеркина – С.Я. Герценштейн, Е.Б. Родичев и В.М. Шмидт [1984]). При этом аналитические вычисления охватывают второй, третий, четвертый этапы, а иногда и пятый, если стоит вопрос о точности решения и сравнении его с точностью наблюдения. В задаче представления нелинейных волн в плазме рядами (A. Bers и др. [1976]) в цикл, кроме этапов 2-4, включается и 1-й этап – построения физической модели.

В большинстве случаев в циклах исследования на компьютере символьные вычисления чередуются и комбинируются с численными методами. В начале развития САВ одни из систем стремились "хранить чистоту" символьных преобразований, другие (АНАЛИТИК, СИРИУС) – использовали комбинированные вычисления. По мере решения все более сложных задач доля смешанных вычислений увеличивалась. Взаимодействие и сочетание обоих режимов счета достигает в современных САВ высокого уровня интеграции, как и при работе человека (W. Schiehlen [1990], E. Engeler и R. Mader [1986], В.П. Дьяконов [1999]). Уровень такой интеграции (САВ, графики и численных вычислений) постоянно возрастал, сейчас в ПК он достаточно высок и воспринимается как естественный.

Возможны вариации цикла исследования. Так, при автоматизации построения управления программным движением манипулятора, САВ Р.А. Сабитова [1977] (также А.С. Земляков, Р.А. Сабитов, Е.И. Сомов [1977]) выполняла следующие этапы: вывод уравнений движения, построение управления определенного класса с учетом ограничений и требований к качеству переходного процесса, построение упрощенного управления с учетом возможностей ЭВМ, моделирование управляемого движения и проверку качества предложенного управления, формирование программы в командах управляющей ЭВМ. Последние этапы проводятся, очевидно, без помощи САВ. Последовательность этапов отличается от цикла А.А. Самарского формированием программы для управляющей ЭВМ (так сказать, этапом внедрения результатов вычислительного эксперимента). При исследова-

нии устойчивости механических систем цикл исследования проходит также несколько иначе и заканчивается изучением свойств механической модели

В последние годы САВ получают новые области применения. Так, расширение языка АНАЛИТИК-93, 2000 (В. П. Клименко, А. А. Морозов, Ю. С. Фишман и др. [1995]) и использование его для автоматизации описания структур, поиска решения сложных, громоздких задач охватывает (пусть частично) формализацию описания, выбор алгоритма, построение программы (программного обеспечения). Особенность такого применения САВ, как и других языков описания высокого уровня (например, рефала, см. гл. 4) – не только и не столько автоматизация преобразования формул, но согласование, стыковка большого числа структур, данных и отдельных фрагментов вычислений (В. П. Клименко, А. Л. Ляхов [2003])

Математические алгоритмы, имеющиеся в САВ, существенно обогащают возможности исследователя механика. Заметим, что даже алгоритмы раскрытия определителя высокого порядка или решения системы линейных уравнений в буквенном виде достаточно специфичны и сложны для непрофессионала. В то же время, оформленные в виде символического пакета, подобные алгоритмы предоставляют пользователю хорошие возможности. Пакеты для вычисления определенных и неопределенных интегралов широкого класса, интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений охватывают большую часть известных случаев (и большую часть соответствующих справочников). Так как в пакетах САВ заложены конструктивные алгоритмы, с их помощью находятся еще неизвестные случаи интегрируемости, а также могут проводить преобразования сведения к ним от иной исходной формы записи (к сожалению, эта важная возможность не всегда на уровне даже в современных системах). В отечественных системах такие сложные алгоритмы развивались медленно – назовем систему интегрирования АНАЛИТИКА, начиная с первых его версий – Ю. С. Фишман [1973]

Пакеты для работы со спецфункциями (интегралы от спецфункций, их преобразования, приведения от одних функций к другим) также расширяют возможности механика. Методы теории групп позволяют изучать наличие первых интегралов у сложных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Это дает важную информацию о механических явлениях, которую трудно получить без помощи САВ из-за громоздкости выкладок. Имеются методы и пакеты решения систем нелинейных уравнений, исследование их совместности, существуют пакеты для построения аппроксимаций, асимптотик различного вида, отыскания пределов и многие другие алгоритмы – из достаточно высоких и специфических разделов алгебры, теории дифференциальных уравнений, анализа и математической физики (например, Дубна-85, Дубна-90, А. А. Боголюбская, В. П. Гердт, О. В. Тарасов [1988], Л. М. Беркович [1975], Б. А. Попов [1984], R. Pavelle [1986], В. С. Адамчик, О. И. Маричев и др. [1992], А. В. Бочаров [1989], С. А. Абрамов [2001], А. В. Ниуханен [2003])

Использование специальных разделов математики (спецфункций, асимптотик, разложений, методов теории групп или теории дифференциальных уравнений) позволяет по иному строить и сам цикл исследования. Математические модели могут исследоваться на ЭВМ и качественными методами, и количественно с определением первых интегралов, симметрий, азатием квадратур – при помощи САВ. Вне САВ многие из этих разделов нелегко включить в арсенал вычислительных средств на ЭВМ. Недавний пример – получение интегралов А. С. Кулешовым [2002]

Разнообразие применений САВ в механике, их роли и функций в процессе исследования (при постоянном дефиците ресурсов ЭВМ и отсутствии развитых и доступных САВ) приводило к появлению многих САВ и символических пакетов. Это необходимо иметь в виду при их сравнении и оценке. Действительно, как сравни-

вать САВ для работы с рядами Пуассона (содержащих тысячи одночленов) с простенькой САВ дифференцирования в узком классе выражений (при автоматизации вывода уравнений движения) или модулем точной арифметики в составе численной программы. Но каждая из них имела свою область приложения, была связана с решением нужных задач – и была создана в ответ на потребность практики

## 2.2 Классы задач, использующих символьные преобразования, и типы САВ

Описание истоков имевшегося многообразия САВ и множества их начнем с разбиения задач, использующих САВ, на классы или типы задач, а также с различия режима исследования, в котором они решаются (М В Грошева, Г Б Ефимов [1988], Г Б Ефимов [1989]) Одна группа – это задачи "вычислительного" типа, при решении которых громоздкие вычисления проводятся автоматически, по регуляторному, заранее заданному и ясному алгоритму, без необходимости в помощи исследователя. Среди них можно выделить три класса задач "вычислительные", с большим объемом громоздких символьных преобразований, решающих большую часть задачи (несколько этапов цикла вычислений), задачи с символьным выполнением какого-то одного этапа цикла вычислений среди других этапов, выполняемых численно (назовем это "алгоритмом"); задачи с символьным выполнением какого-то одного действия, операции (назовем это "действием")

К первому классу можно отнести, например, построение решения в рядах Пуассона в небесной механике. Ко второму – задачи вывода уравнений движения при моделировании сложной механической системы, построение разностных схем или матриц жесткости в методе конечного элемента. К третьему классу – использование в численных программах символьного дифференцирования или специальной арифметики, реализованной в САВ (бесконечной, задаваемой точности, интервальной и других)

Другие задачи – "поискового" типа (и режима работы), требующие активного взаимодействия исследователя и ЭВМ, поскольку путь получения решения не вполне ясен заранее и отыскивается вместе с решением "Поисковые" задачи, как правило, требуют сочетания символьных и численных вычислений, достаточно гибкого – ведь не все этапы работы возможно предвидеть или удобно проводить в символьном виде, а результат часто требуется доводить до числа. Особый тип – задачи обучения с помощью САВ, с выделением обучения машинной аналитике и использованием САВ в математическом и техническом образовании. Еще одна группа задач поискового типа – разработка и реализация символьных алгоритмов общего или прикладного назначения, "алгоритмические" задачи

Подобно разнообразию типов задач, системы аналитических вычислений, большие и малые, разделим на группы. Принято различать САВ универсальные и специализированные. Продолжая классификацию, выделим их основные типы. Это разбиение полезно при осмыслении нами всего многообразия САВ. Современные распространенные САВ относятся к большим универсальным, другие типы САВ соответствуют их пакетам, подсистемам и т.п. Возможно, что в будущем потребуются классифицировать и эти современные САВ и их библиотеки пакетов

Универсальные системы отличаются общностью символьных данных, разнообразием выполняемых преобразований, богатством аналитических алгоритмов, развитым сервисом и численно-символьным интерфейсом. Накопление алгоритмов, общематематических и прикладных приводит САВ к новому качеству – назовем это "большой универсальной системой". Примером одной из первых таких системы является САВ MACSYMA. Объем вложенного в нее труда (к середине 1980-х, в рамках большого проекта по искусственному интеллекту "Человек и

Машина") весьма велик: порядка ста человеко-лет на саму систему и общематематические алгоритмы и втрое больше на прикладные подсистемы. Особенности подобной САВ: богатство возможностей, алгоритмических и "интеллектуальных", доступность в ведущих научных центрах, мощная информационная поддержка, целенаправленное развитие. Информации о возможностях MACSYMA было посвящено немало публикаций, — например, R Pavelle [1986], A Bers и др [1976], J. Moses [1974]. Представление об ее общих математических алгоритмах (R Pavelle): пределы, производные, упрощения, факторизация полиномов, бесконечные суммы, неопределенные интегралы, определенные интегралы, преобразование Лапласа, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды Тейлора и Пуассона, действия с векторами, матрицами и тензорами, решение систем нелинейных уравнений, выход на численный счет (генерация фортранных программ).

Среди приложений MACSYMA механические задачи занимали большое место — во вкшительном списке больших прикладных подсистем (R Pavelle [1986], М В Грошева, Г Б.Ефимов [1988]); механические составляют почти 40%

|                                   |                      |                                |
|-----------------------------------|----------------------|--------------------------------|
| акустика                          | теория управления    | теория оптимального управления |
| эконометрика                      | теория деформаций    | метод конечных элементов       |
| физика частиц                     | небесная механика    | подводные ударные волны        |
| термодинамика                     | механика жидкости    | расчет баллистической защиты   |
| методы генетики                   | робототехника        | алгебраическая геометрия       |
| расчет БИС                        | структурная механика | общая теория относительности   |
| теория антенн                     | механика полимеров   | ядерный магнитный резонанс     |
| физика плазмы                     | расчет пропеллеров   | расчет электронных микроскопов |
| метод максимального правдоподобия | динамика вертолетов  | интерференционное разрешение   |
|                                   | эмульсионная химия   | вычислительный анализ          |
|                                   | физика твердого тела | обработка эксперимента         |

MACSYMA — пример целенаправленного руководства развитием символьных преобразований. Список ее применений показывает роль механики в развитии САВ, обширность применения САВ в ней. Она во многом было прообразом современных САВ по объему сервиса, возможностей и алгоритмов.

Исторически большая универсальная САВ была лидером в аналитических вычислениях и ускорителем их развития. При работе в каждом из разделов аналитических вычислений (разработка систем, приложения, развитие алгоритмов) в подобной САВ есть, что выбрать и чем воспользоваться. Большинство новых разработок быстро в ней реализовались, находили применение, могли быть переданы в другие САВ или быть воспроизведены в них. Примеры демонстрации всех новинок по САВ можно увидеть в Трудах ежегодных конференций пользователей MACSYMA. Эта САВ развивалась в исследовательских центрах, как видно и из списка приложений, для нас она была совершенно недоступна. Закрытость и слабое распространение в университетах замедлили ее развитие впоследствии. Сейчас имеется ее усеоченная версия на ПК, конечно, без прикладных пакетов.

Среди отечественных систем больших универсальных САВ не было (из-за отсутствия программы развития и дефицита ресурсов), имевшиеся в разное время САВ-лидеры не достигали этого уровня. Были разработаны ряд универсальных САВ, с различными уровнями сервиса, алгоритмического наполнения, с разной степенью завершенности, — например, АНАЛИТИК, АУМ, АЛЬКОР, АВТОАНАЛИТИК, САВАГ, СИРИУС, SANTRA (см. ниже, 2.5 и М В Грошева [1985, 1988]). К универсальным относятся Reduce, MATHEMATICA (достигшие уровня "больших", J A van Hulzen и J Calmet [1983]). В последнее время уровня больших универсальных САВ достигли ведущие САВ на ПК (и выполняют ту же роль в развитии

аналитических вычислений – В П Дьяконов [1999]) Однако когда ПК только начинались, имели ограниченные ресурсы, предлагались пути сочетания большой универсальной САВ и САВ на ПК – научные станции как база с комплексным численно-символьно-графическим обеспечением, с символьной частью на базе MACSYMA, формирование «персональной» САВ-библиотеки на ПК из ее возможностей (В F Caviness [1986]) Сейчас такое сочетание может осуществляться с помощью Интернета.

Иной тип представляет малая универсальная САВ, располагающая относительно скромными ресурсами, с уменьшенным алгоритмическим арсеналом, но широко доступная (сейчас на ПК, раньше – на малых машинах) Одна из сфер ее применения – инженерные задачи, как это было подчеркнуто в названии первой в мире машины, имевшей аппаратно реализованную САВ – МИР-2 (Машина для Инженерных Расчетов – В М Глушков, и др [1971], Ю С Фишман и др. [1974], В П Клименко, Ю С Фишман и др [1961]) Специфика малой универсальной САВ – доступность, дружественный сервис для широкого круга пользователей, единство символьных и численных вычислений, эффективные алгоритмы в сочетании с разумными требованиями к ресурсам

САВ для обучения также можно отнести к универсальным, так как требования к ним близки Естественное использование для обучения универсальных САВ, в том числе малых Специфика обучения с помощью ЭВМ ставит особые вопросы о психофизиологических его аспектах, о роли и возможностях диалога, об излишнем доверии к работе машины и САВ, о проверке результатов, о накоплении и закреплении навыков при переходе от обычного обучения к компьютерному (С В Бирюков [1999]) Вопросы имеют общее значение, но при обучении встают особенно остро. Создаются и создавались специальные САВ и версии для обучения (В F Caviness [1966], В П Дьяконов [1999]) – например, miMATH (D R Stoutemyer [1986], приемница ее – Derive) Для обучения используются и проблемно специализированные САВ – по специальной научной дисциплине, разделу физики, механики или математики, для которого создана эта САВ (см выше 1.4, также *Вильнос-90* и табл 3 в 2.4)

Специализированные САВ ориентированы на решение узкого круга задач, поэтому у них часто уменьшены по сравнению с универсальными системами общность символьных выражений, разнообразие выполняемых преобразований и алгоритмов За счет специализации повышается эффективность работы, появляется возможность решать более трудные, громоздкие задачи Системы эти обычно проще устроены, возможны при более скромных ресурсах ЭВМ, многие из них создавались прикладниками для своих задач Выделим три типа специализированных САВ проблемно специализированные, алгоритмические подсистемы и алгоритмические модули или блоки

Разделение универсальных и специализированных САВ во многом условно Так, полиномиальные системы имеют обширную область применения и достаточно общий тип символьных выражений, J A van Hulzen и J Calm   [1983] предлагали считать их универсальными Но полиномы – частный вид математических выражений, в их преобразования составляют лишь часть символьных преобразований общего вида Поэтому, если лет 20-30 назад полиномиальные САВ воспринимались как универсальные, сейчас их правильнее считать специализированными – по виду допустимых выражений Именно так, в качестве подсистем они входят в состав многих универсальных САВ (АРАП А Л Семенова [1980] в составе АУМ Н А Калининой и И В Поттосина [1977] и т л) Ряд специализированных САВ по мере развития структуры и алгоритмов превратились в универсальные (напр , Reduce, АЛЬКОР) или приблизились к ним (ВИБРАН) – см табл 2

Проблемно специализированные САВ создаются для решения определенных прикладных задач. Есть системы для исследования устойчивости сложных механических систем, для моделирования их динамики (символьно-численные), для построения в рядах решений небесно механических задач, для задач общей теории относительности, квантовой электродинамики, для нахождения симметрий и интегралов систем дифференциальных уравнений, для задач алгебры, логики и т.д. (Горький-84, Дубна-85, Дубна-90, Аналитические ППТ-88, J. A. van Hulzen и J. Calmet [1986], H. I. Cohen, O. Lønlige, Y. Sunblad [1976], М. В. Грошева [1985, 1988] и др., также в гл. 3). Вид используемых символьных выражений и преобразований определяется назначением системы. Требования к сервису, диалогу, внешнему языку могут быть существенно ослаблены. Но может создаваться и специальный сервис, — например, диалоговый подсказчик для ввода данных о механической системе, исследуемой с помощью САВ (М. В. Почтаренко [1985]). От проблемно специализированных САВ требуется эффективность, совершенство методов и алгоритмов, численно-символьный интерфейс (который развивался в направлении интегрирования численных, символьных и графических возможностей — как мы видим в современных ПК).

Отдельные символьные алгоритмические подсистемы реализуют определенный алгоритм. Такие подсистемы могут быть частью САВ, универсальной или специализированной, но полезны и отдельно, в составе численного комплекса, когда символьные вычисления имеют преимущество перед численными на определенном этапе цикла вычислений. Она может включаться в другую САВ целиком (как в САВ АНФОР и СИРИУС). Особенно важны общематематические подсистемы (взятие интегралов от определенного класса выражений, работа со спецификациями, метод базиса Гребнера, полиномиальные подсистемы и т.п.) в силу широкой сферы их применения, трудности разработки и эффективной реализации алгоритмов.

Еще более частную задачу решают символьные блоки для выполнения символьного действия или элементарного алгоритма (символьного дифференцирования, специальной арифметики). Эффективность и алгоритмическое совершенство — главные требования к таким блокам. Автономность полезна для использования в составе численных программ, отдельно от САВ. В свое время автономное, в рамках численного счета, использование "САВ-алгоритмов" и "блоков" представлялось актуальным и активно обсуждалось. Сейчас многие вопросы решаются на ПК в рамках пакетов САВ или их сочетания с другими системами, в "калькуляторах" с присутствием САВ, как, например, в MathLab.

Имеется определенное соответствие типов САВ и классов задач — в одних случаях очевидная ("алгоритм" или "блок" среди задач и "подсистема" или "блок" у САВ), в других менее прямая. Так, специализированная САВ соответствует скорее задаче вычислительной, чем к поисковой, но не всегда. Описание типов САВ параллельно с классами решаемых задач позволяет яснее почувствовать специфику каждого из них, может быть полезной при анализе и прогнозе. В процессе развития конкретной САВ, использовании ее в различных ролях (универсальной, обучающей, библиотеки модулей-алгоритмов) наиболее важными, ведущими оказываются разные свойства и возможности. Например, Reduce, развиваясь из специализированной САВ, сохраняла (особенно в первых версиях) следы структуры, не вполне отвечающей ее роли универсальной системы, постепенно совершенствуясь. Анализ возможностей САВ АНАЛИТИК (обсужденное АНАЛИТИК-91 на школе в Жукине в 1991 г., также Союзстоль-91, Г. Б. Ефимов [1989]) с точки зрения функционирования и развития в различных ролях также показывал разнородность приоритетов. Простота и компактность важнее для ин-

женерной САВ или задач обучения, общность – для универсальной системы, автономность – для интересных алгоритмических модулей или блоков и т.п.

Другой подход для анализа дает "кибернетическая аналогия" – поиск соответствия между "способностями" САВ и интеллектуальной деятельностью человека (Г.Б.Ефимов, Е.Ю.Зуева [1991]). По аналогии с видами научной деятельности могут определяться перспективы применения САВ – наряду с автоматизацией громоздких алгоритмизуемых преобразований, – в обучении и математическом образовании, при создании математических справочников, при реализации алгоритмов

### 2.3. Описание САВ и их свойств

Задача классификации множества объектов некоторой области встает, когда их число и разнообразие велико, необходимо найти способ ориентироваться в этом многообразии, а также объяснить его внутренние закономерности. В программировании и вычислительных методах интерес к классификации связан с обилием и разнообразием матобеспечения, имеющегося в некоторых прикладных областях (Д.С.Сильвестров [1988], И.Е.Полосков [2004]). Благодаря классификации достигается стройное описание этого множества с его особенностями, достоинствами и недостатками, выясняются "белые пятна", выявляется возможность разделить "сферы влияния" между параллельно работающими коллективами, переходить от конкуренции к координации усилий. Раскрытие внутренних причин и закономерностей наблюдаемого многообразия указывает на пути его развития и эволюции.

Многогранность области аналитических преобразований, разнообразие возможных решений и имевшихся в определенный момент САВ ставили задачу их классификации и описания их свойств неоднократно. За время развития компьютерной аналитики и по мере того, как менялись основные ее проблемы и достижения, менялся и ракурс, под которым проводилось сравнение различных систем, и подход к их описанию. В первых обзорах по САВ (D.Barton и J.P.Fitch [1972], M.S.Davis [1968]) они характеризовались языком реализации, формой записи объектов, проводилось их сравнение по виду программ и представлению результатов на примере специальных тестовых задач (J.Moses [1971] (также J.A.van Hulzen, J.Calmel [1983]) интересовался внутренним устройством САВ (в чем ему виделась их суть и источник других их свойств), способом выполнения преобразований, структурой САВ, дифференциацией или единообразием в обработке выражений. В проблемных областях давалось описание САВ, их особенностей и достоинств с точки зрения определенного класса задач (J.Kovalovsky [1968], W.H.Jefferys [1971], M.B.Почтаренко [1985], R.A.D'Inverno [1975], H.I.Cohen, O.Lepigne, Y.Sunblad [1976], *Ленинград-88, -89-90*). Таким образом, классификация САВ проводилась под углом зрения системных, прикладных, сервисных их свойств, особенностей и возможностей – по отдельности.

Комплексный подход к описанию свойств САВ по образцу описания ППП (М.М.Бежанова [1980]), с выделением системной компоненты, проблемного наполнения и "организационной" или информационной поддержки был предложен М.В.Грошевой и Г.Б.Ефимовым [1983] (и *Информатор-83*). САВ описываются в этом случае комплексом свойств и характеристик, достаточно разносторонне (об алгоритмической оснащенности САВ – те же работы и М.В.Грошева [1985]). Такое описание могло дать потенциальному пользователю достаточное начальное представление, – чем можно воспользоваться среди имеющихся САВ.

Классификация типов САВ, параллельно с классами решаемых задач дана выше. Ниже, в таблице 2 (из работы М.В.Грошевой и Г.Б.Ефимова [1988]), дается пример комплексного описания по единой схеме ряда отечественных САВ, универ

Таблица 2. Характеристики некоторых САВ

| 1                              | 2                                | 3                                            | 4                                   | 5                               | 6                                         | 7                                            | 8                                                   | 9                                                |
|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Название<br>Тип<br>САВ         | Область<br>применен              | ЭВМ, язык<br>реализац<br>Вход/вых<br>из      | Основн<br>мат<br>объекты            | Кэф-<br>фиц                     | Распреде<br>памяти,<br>объем САВ          | Режимы<br>работы                             | Ввод/вывод<br>числ счет                             | Структура<br>САВ<br>документация                 |
| УПП<br>Спец-я                  | Небесн<br>механ                  | БЭСМ-6, ЕС<br>Эльбрус<br>Фортр<br>PS-Фортрен | Ряды<br>Пуассо-<br>сона<br>компл    | Цел<br>рац<br>вещ<br>2 точн     | Динам<br>Автом обмен<br>10030нМЛ<br>диагн | Ряд диап<br>арх. прогн<br>Пакег              | Мат вид<br>в 2 уров<br>формат, прогн<br>быстр счета | Библиограф.<br>модул, инстр<br>ФАП<br>публикации |
| GRFTOS<br>Спец-я               | Общ<br>Теор Отн                  | БЭСМ-8, ЕС<br>Эльбрус<br>Фортр PS-форт       | Тенз<br>индекс<br>лог выр           | Цел<br>рац                      | Динам<br>4030нМЛ                          | То же                                        | Мат вид в 3<br>уров, подст<br>прогр счета           | Система<br>инстр ФАП<br>публикации               |
| Автоана-<br>лизатор<br>Универс | Небесн<br>механ<br>проектир      | БЭСМ-8<br>Маш коды<br>Автоанал               | Анал<br>выраж<br>Полином            | Вещ<br>пр разр                  | Динам<br>Вирт обмен<br>6030нМЛ            | Ряд диап<br>диагност<br>памятний             | Мат вид<br>подстан<br>стык с ЧМО                    | Система<br>модули, инстр<br>публикации           |
| ВИБРАН<br>Спец-я               | Колеб<br>стр мех<br>Обучен       | ЕС, СМ<br>Фортр<br>Вибран                    | Полин<br>рац ф.<br>триг ряд, матр   | Вещ<br>пр разр                  | Стат динм<br>ЕС 130 KB<br>СМ 28 KB        | Диагн вад<br>диалог<br>пакегн граф<br>прогрм | Ф/вид 3ур<br>графор, подст<br>прогрм                | Система<br>мод. уч. поб<br>публикации            |
| АЛЬКОР<br>Универс              | Механ<br>упруг<br>диф ур         | БЭСМ-8, ЕС<br>СМ рефал<br>Алькор             | Полин<br>дрб. рац ф<br>матр пр разр | Рац. вещ<br>компл<br>пр разр    | Динам<br>МЛ сегм фрм<br>ЕС 240KB          | Динам вад<br>счета, диап<br>пакегн<br>прогрм | Фрт, ПЛ-1<br>вид,<br>уч поб инстр<br>публикации     | Система<br>модули, инстр<br>публикации           |
| Алгебра-О<br>Спец-я            | Устойч<br>радиосхемы<br>Физика   | ЕС<br>Фортр<br>из данных                     | Полин<br>ряды<br>матр               | Цел вещ<br>рац компл<br>2 точн  | Динам<br>10 тыс<br>форт опер              | Диагн<br>пакегн                              | Форт вид<br>вых на счет<br>числ м обсл              | Библиограф.<br>модул, инстр<br>публикации        |
| САВАГ<br>Спец-я                | Анализ<br>механ<br>Асимптот      | БЭСМ-6<br>Алгол-ГДР<br>Алг-ГДР               | Произв<br>выраж<br>матр             | Цел вещ<br>рац<br>пр разр       | Динам<br>200 зон<br>МЛ                    | Диагн<br>рад диап<br>памятн                  | Алг. вид<br>вых счет<br>и обратн                    | Библиограф.<br>модул, инстр<br>публикации        |
| MLR<br>Спец-я                  | Механ<br>устойч                  | БЭСМ-6<br>Алгол-ГДР<br>ЯПУ                   | Произв<br>выр<br>стрк симв          | Цел<br>вещ<br>пр разр           | Динам<br>арх форм<br>35 зон               | Динам<br>диап<br>пакегн                      | Алг. вид<br>подст                                   | Библиограф.<br>модул, инстр<br>публикации        |
| MMANG<br>Спец-я                | Общая<br>механ                   | ЕС<br>Рефал<br>из задан                      | Произв<br>выр<br>функц зад          | Цел<br>вещ<br>зад точн          | Динам<br>вн файл<br>300KB                 | Динам<br>диап<br>пакегн                      | Форт-вид<br>подст<br>прогрм                         | Система<br>ФАП<br>публикации                     |
| АУМ<br>Универс                 |                                  | БЭСМ-6 Эльбрус<br>ЯРМО, Автокод<br>АУМ       | Пр выр<br>правила<br>процдур        | Цел<br>рац<br>пр точн           | Стат. дин<br>23 тыс<br>ЯРМ-опер           | Динам<br>ред диап<br>арх фрм                 | Форт-вид<br>подст<br>прогрм                         | Система<br>мод инстр ФАП<br>публикации           |
| АРАП<br>Полином                | Хим<br>ЯРМО, Автокод<br>кинетики | БЭСМ-6 Эльбрус<br>ЯРМО, Автокод<br>вход из   | Полин<br>рац функц<br>пр точн       | Цел<br>рац<br>пр точн           | Динам<br>8030н                            | Динам<br>диап                                | Форт-вид<br>подст                                   | Система<br>модул. ФАП<br>публикации              |
| АНАЛИТИК<br>Универс            | Мех<br>обучен<br>идр             | МИР-2, СМ<br>Аппаратно<br>Аналитик           | Произв<br>выр<br>пр точн            | Цел<br>вещ рац<br>пр точн       | Динам<br>САВ 70<br>ОЗУ СМ 248KB           | Ряд диагн<br>диап                            | Мат вид<br>подст<br>вых оч ЧМО                      | Система ФАП<br>инстр. тех. оп<br>публикации      |
| СИРИУС 2<br>Универс            | Физика                           | ЕС<br>рефал, Спутн<br>Сириус                 | Полин<br>рац компл<br>пр выр        | Цел вещ<br>рац компл<br>пр разр | Динам<br>вирт<br>СУБД 200KB               | Ряд диагн<br>развитие                        | Мат. вид<br>1, 2 урн<br>вых оч ЧМО                  | Система<br>инстр шабл<br>публикации              |
| Reduce-2<br>универс            | Физика<br>механ<br>математ       | ЕС СМ<br>лисп R-лсп<br>Редюс                 | Пр выр<br>матр<br>вект              | Цел вещ<br>рац                  | Динам<br>вн файл<br>350KB                 | Ряд диагн<br>диап<br>пакегн                  | Мат вид<br>1, 2 урн<br>подст прогн                  | Система<br>инстр. пакет<br>публикации            |

ерсальных и специализированных. Характеристики их распределены по следующим группам: название и тип САВ, область применения, ЭВМ и язык (реализации и входной), арифметика коэффициентов (целая, рациональная и т.д.), распределение памяти (статическое или динамическое) и объем системы, режимы работы и сервис (редакторы, диагностики, архивы и т.п.), формат ввода/вывода и тип численного интерфейса (подстановка значений, формирование программ, выход на численное матобеспечение – ЧМО), структура САВ и тип документации (библиотека программ, модулей, система, пакет, в фонде алгоритмов и программ – ФАП и т.п.). Дополнительные данные по САВ см. разделах 2.4 и 2.5. Используемые сокращения – достаточно общепринятые.

Большинство отечественных САВ уступали возможностям современных зарубежных САВ, приходившим им на смену в конце 1980-х, особенно с появлением ПК (по сервису, алгоритмам, – см. J. A. van Hulzel и J. Calmet [1983], Дубна-90). Каковы эти САВ, пришедшие на смену нашим САВ прежних поколений. По данным В. П. Гердта (обзорный доклад на совещании С. Петербурга-91), к широко распространенным универсальным САВ на начало 1990-х можно было отнести (С. А. Абрамов, Е. Б. Зима, В. А. Ростовцев [1992], Н. Н. Васильев, В. Ф. Еднерал [1994], также ряд руководств, уже на русском языке, – см. например, В. П. Дьяконов [1993], О. В. Зимина [2003]).

Reduce (для физиков и инженеров),

MACSYMA (для инженеров и ученых),

Mathematica (для широкого круга пользователей, учащихся, инженеров),

Maple (для ученых, по богатству алгоритмов приближается к MACSYMA),

AXIOM (преемник Scratchpad-II, для математиков),

Derive (преемник muMATH, для учащихся).

Они развиваются и поддерживаются специальными группами и фирмами.

Среди этих САВ также существует своеобразное разделение "ролей" – одни рассчитаны, в первую очередь, на ученых, другие – на самого широкого пользователя. Соответственно различаются они по эффективности, наборам алгоритмов, сервису, удобству работы в том или ином режиме. Например, если основные полиномиальные алгоритмы в САВ Mathematica высокоэффективны, то новый алгоритм, написанный исследователем, может работать в сто раз медленнее, чем когда он реализован на других САВ. Интерфейс с любым матобеспечением в этой системе чрезвычайно прост, графика – великолепна (удобства для непрофессионала), но затруднено тестирование задачи и алгоритма, трассировка (важные в научных исследованиях). Некоторые САВ развивают абстрактные типы данных, средства для сложных конструкций (AXIOM, например), другие – в первую очередь, алгоритмические и научные пакеты (Maple, Reduce). MACSYMA не без труда выдерживает темпы конкуренции, но остается замечательным арсеналом алгоритмов, инженерных и научных пакетов программ. Derive специализировалась на группе карманных микроЭВМ и ПК, в том числе для учащихся. Универсальные САВ не сразу смогли заменить проблемно специализированные системы в таких областях, как моделирование в механике систем многих тел, небесной механике, физике, общей теории относительности и т.п. (см., например, W. Schiehlen [1990], W. H. Jefferys [1971], J. Calmet и J. A. van Hulzel [1983], В. П. Гердт, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков [1980], С. А. Притоманов [1992], В. А. Брумберг, С. В. Тарасевич, Н. Н. Васильев [1989]). Специализированные САВ еще довольно долго успешно развивались и конкурировали с универсальными – благодаря эффективности, проблемной направленности по алгоритмам и сервису. Лучшие из них имеют десятки и сотни пользователей. Возможна и кооперация среди САВ обоих типов, когда специализированная САВ создается как ППП на базе универ-

сальной Постепенно так и происходит Так, САВ-компонента системы для моделирования NEWEUL (W Schiehlen [1990]) была создана на базе Marie, САВ Пермского университета (М Ю Дроздов, В В Маланин [1984], А Б Бячков и др [1990]), Полимех-символ (В М Руденко [1987]) – на базе Reduce Заметим, что есть и "авторские" специализированные САВ или пакеты и алгоритмы, – с которыми работает только их автор – его личный "инструмент" При смене поколения машин он нередко воссоздается в качестве пакета в рамках другой, развитой САВ

## 2.4 Описание проблемно специализированных САВ

В задачах механики системы твердых тел использовался ряд проблемно-специализированных САВ и прикладных подсистем некоторых универсальных САВ Они выполняют вывод уравнений движения механической системы, их исследование, упрощение и анализ свойств, формирование численных программ для дальнейшего моделирования Определяющими для САВ этого типа является круг решаемых задач, совершенство и эффективность алгоритмов, специальный сервис, возможность решения особо громоздких задач Эти характеристики необходимо добавить при описании специализированных САВ в дополнение к описанию их подобно ППП Важно и четкое представление об особенностях методики исследования с помощью данной системы

На примере САВ для вывода уравнений движения удобно показать специфику описания свойств достаточно узкой группы проблемно специализированных САВ (М В Грошева, Г Б Ефимов [1988, 1993], Г Б Ефимов [1989] используя материалы рабочей группы и организованных с ее помощью совещаний и семинаров – Ленинград-88, Леминград-89-II и более ранних) Таких САВ было создано более десяти, сведения о них собраны в таблице 3, они создавались пользователями под классы конкретных задач Общая схема их описания дополняется детальными сведениями об алгоритмическом оснащении и особенностях решаемых задач Поскольку эти задачи и алгоритмы близки, описание должно выявлять различия, показывать достижения и особенности каждой САВ

Объекты исследуемых с их помощью задач включают возможное число степеней свободы, допустимость замкнутых контуров, связей, диссипативности, гидравлических, упругих, электромеханических и других компонент Вид получаемых уравнений и способы дальнейшего их исследования: линеаризация, нормализация, устойчивость и т.д. Алгоритмы математического решения систем линейных и нелинейных уравнений, нахождение наибольшего общего делителя (НОД) и факторизация полиномов, раскрытие определителей Вычислительные удобства: подсказки, диагностики, редакторы, архивы формул, решений Численно-символьный интерфейс: формирование фортранных программ, их оптимизация, стыковка с ППП, САПР, графикой и т.п. Описание информационных характеристик этих САВ – как в общем случае (см. выше) Описание САВ можно продолжить (по ЭВМ, программной среде и т.п.) Можно подробнее описать средства численного моделирования в описываемых системах – для исследования задачи после применения САВ Аналогично можно описывать и другие системы (без САВ) для автоматизации моделирования динамики сложных механических систем, достаточно многочисленных (см. например, И И Карпов [1990])

Похожее описание свойств систем и программных комплексов для моделирования динамики систем многих тел приведено в книге W Schiehlen'a [1990], по материалам Семинара IUTAM (Мюнхен, 1977) и Симпозиума IUTAM/IFToMM (Удине, 1985) Оно включает особенности решаемых задач, методики исследования и программных характеристик систем Вместе объединены САВ и системы полностью численные, из общего числа 20 систем половина не имеет САВ-компоненты

(из первых десяти по числу пользователей лишь две являются САВ). Есть коммерческие системы, во главе с известной системой ADAMS, есть и "авторские", пока не распространенные. Неблюдается разделение ролей - система ADAMS, например, почти не распространена в университетах. Почти все системы допускают замкнутые контуры и неголономности, 8 - упругие элементы. Все системы опробовались на двух тестах: движении семизвенного плоского механизма с одной степенью свободы и манипуляторе с пятью степенями свободы. Результат моделирования представлялся графически. Приложения весьма разнообразны: транспорт, авиация и спутники, роботы и манипуляторы, машиностроение, движение человека и спорт. Описание включает топологию механической системы (замкнутые цепи, например), свойства элементов (упругие и т.п.), координаты (инерционные и т.п.), вид уравнений движения, тип вычислений и метод исследования, язык реализации, тип ЭВМ и т.п. (Г.Б.Ефимов [1989]).

Т а б л и ц а 3  
Характеристики специализированных САВ для задач общей механики

| Группы свойств САВ \ свойства | 1     | 2   | 3    | 4    | 5      | 6  | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  |
|-------------------------------|-------|-----|------|------|--------|----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                               | вбвгд | ежз | иклм | нопр | стуф   | х  | цш  | щ   | fgh | lmp | pqr |
| 1 Автоаналитик                | +++   | +++ | ++   | ++   | +      | 10 | ++  | нод | +++ | ++  |     |
| 2 Алгебра 05                  | ++    | +++ | ++   | ++   |        |    |     | нод | +   | ++  | ++  |
| 3 АЛМАК                       | ++    | ++  | ++   | ++   | +++    | 10 | +   |     | ++  | ++  | ++  |
| 4 ВИБРАН                      | +     | ++  | ++   | ++   | ++     |    | ++  |     | ++  | ++  | +   |
| 5 ДИНАМИКА                    | +     | ++  | ++++ | +    | +      |    | ++  |     | +   | ++  | ++  |
| 6 КИДИМ                       | ++    | ++  | +++  | ++   | ++     | 99 | ++  |     | ++  | ++  | +   |
| 7 СПИН                        | +++   | +++ | +++  | ++   | +      | 20 | +++ |     |     | +   | +   |
| 8 Antra/Vektra                | +     | +   | ++   |      | *кинем | 10 | +++ |     |     |     |     |
| 9 MMANG                       | +++   | ++  | ++++ |      | ++     | 20 | +++ |     | ++  | ++  |     |
| 10 MMT-IV2                    | ++    | ++  | ++++ | +    | +      | 60 |     |     | +   | +++ |     |
| 11 SYMA                       | +++   | ++  | ++   | ++   | ++     | 15 | +++ |     |     | ++  |     |
| 12 - [Reduce]                 | ++++  | ++  | ++++ | ++   | ++     |    | +++ |     | +++ | ++  | ++  |
| 13 - [Reduce]                 | ++++  | ++  | ++   | +    | +      |    | +++ |     | +++ | ++  | ++  |

Обозначения: 1.а - редактор, б - диалог, в - пакетный режим, г - диагностика, д - архив,

2 е - числ. счет, ж - САПР, ППП, з - генерация программ

3 и - инстр. к публикации, л - Фонд Алг и Программ, м - использ. в образовании

4 н - упругие компон., о - эл. мех. компон., л - гидраул., р - замкн. контуры,

5 с - уравн. Лагранжа, т - Ньютона-Эйлера, у - вариационн. ф - матричные,

6 х - max. число степеней свободы

7 ц - реш. сист. лн. ур-ий, ч - сист. нелинейн. ур-ий, ш - раскрытие определителя,

8 щ - другие алгоритмы [НОД - наиб. общий делитель, поиск стац. реш.]

9 f - линеаризация, g - матричн. алгоритмы, h - интегрир. выраж.

10 l - осреднение, m - исследов. колебаний, n - исслед. динамич. характеристик

11 p - качеств. теория диффуз., q - управление, r - устойчивость

У многих из САВ есть новые версии. По материалам 1986-88 г. Г.Б.Ефимов [1989]

В таблице 3 описаны следующие САВ (название, город, организация, язык реализации, ЭВМ, объем САВ, литературу см. по фамилиям авторов)

1 АВТО-АНАЛИТИК, Томск, ТГУ, Автокод, БЗСМ-6, 60 зон. мл., Е.А.Арайс, Е.А.Арайс и Г.В.Сибиряков. Есть ПК-версия (Рига, см. Вильнюс-90). 2 АЛГЕБРА-05, Горький, ГГУ, Фортран, ЕС, 10 тыс. Фортран-операторов (ф/о), Г.А.Долгов, Д.Н.Макарычева, М.А.Чубаров. Другие САВ - УСТОЙЧИВОСТЬ, АНФОР, Г.А.Долгов.

М А Чубаров 3 АЛМАК, Тула, Политехн ин-т, АНАЛИТИК, СМ-1410, Ю Б Подчуфаров, А П Матвеев 4 ВИБРАН, Вильнюс, ВИСИ, Фортран, ЕС-130К, СМ-28К, ПК, Р П Кульветене и Г П Кульветис 5 ДИНАМИКА Иркутск, Иркутск ВЦ СО АН, Алгол-ГДР, БЭСМ-6 35 зон мл, Л А Бурлакова, В В Голиков и др Также - MLR (Алгол-ГДР), МЕХАНИК (PL-1), ЕС, М В Почтаренко, А В Банщиков, Л А Бурлакова и др 6 КИДИМ, Херьков, Политехн Инст, Алгол-68, ЕС, 1МБ, ПК, В Н Митин и Л И Штейнвольф 7 СПИН, Ленинград, ЛИАП, Фортран, ЕС, 700К, Р И Сольницев и И В Ковтун 8 ANTRA-ВЕКТРА, Ленинград, ЛИТЛП, Фортран, ЕС, 120К, А Б Кикин и 3 Е Пейсах 9 MMANG, Гродно, Гродн госун-т, Рефал, ЕС, 1МБ, О М Городецкнй 10 MMT-1/V2, Киев, Политехн ин-т, PL-1, ЕС, 350К, С Я Свиситунов и др 11 SYMA, Москва, НПО "Энергия", PL-1, ЕС 210 тыс ф/о, А В Яценко, Ленинград-88 12 Подсистема-Reduce, Пермь, Пермск госун-т, Лисп-Reduce, ЕС, 350К, А Б Бячков В А Иванов и др, М Ю Дроздов и В В Маленин, ПК 13 Полимех-символ системе на Reduce, Москва, ИПМех АН, Редьюс, ЕС и ПК, Д М Климов и В М Руденко

В описание не вошли САВ универсальный процессор Д Ю Погорелове (Инст инж железнодорожн трансп Бряньск), КАПСУЛА М Г Зотова, М М Востострякова и П В Киргизбаева (Москва, МИЭМ), система АММУСТ В А Коноллове, численная с элементами САВ САВАГ (В П Червонных), ряд других систем и версий (По САВ в табл 3, а также не вошедшим в нее системам см Горький-84, Информатор-83, Ленинград-88,89, Вильнюс-84,90, Севастополь-91 и по фамилиям авторов)

Подробное обсуждение САВ для исследования динамики системы тел, проводившееся на семинарах Ленинград-88, Ленинград-89-91 и конференции Вильнюс-90, показало полезность и дальнейшей дифференциации внутри этой группы - по сходным задачам и режимам работы. Назовем три подгруппы с достаточно выраженной спецификой (Г Б Ефимов [1989], М В Грошева, Г Б Ефимов [1993]). Первая подгруппа (звдвчи типа "проектирования") имеет дело с большим числом не очень сложных вариантов-моделей, среди которых необходимо произвести выбор, оптимизацию параметров САВ используется в первую очередь при формализации модели для облегчения общения пользователя с системой (узкий участок в этой задаче) Это этапы 1,2,3 в цикле А А Самарского, остальные этапы выполняются численно Во второй подгруппе (моделирование в громоздких и сложных случаях, в символьном виде выполняются этапы 1-4) в центре внимания оказывается эффективность счета - выбор вида уравнений движения, оптимизация представления данных и их преобразований, организация счета, контроль точности, правильности программы и вычислений Третья подгруппа - качественные исследования свойств уравнений и решений нормализация, линеаризация, осреднение, выделение стационарных решений, исследование устойчивости САВ используется на многих этапах Удобство сервиса и эффективность вычислений важны, но не обязательны, главное - богатство и совершенство алгоритмов, в том числе специальных, их реализация и развитие Каждая группа имеет ярких представителей, имеются и промежуточные случаи

К первой группе относим КИДИМ, КАПСУЛА (в задачах управления), система CompHER (З Э Боос, М Н Дубинин, В Ф Еднерал и др, ИЯФ МГУ, также см Вильнюс-90) Последняя система для моделирования и оптимизации физического эксперимента очень ярко демонстрирует достоинств САВ при формализации задачи, поэтому мы включили ее вместе с механическими САВ Представителем второй группы является АММУСТ (с САВ САВАГ), MMANG, АНФОР К третьей группе относим иркутские МЕХАНИК и ДИНАМИКА, систему Полимех-символ Института проблем механики АН, на которой отработывались механические алгоритмы (хотя элементы качественных исследований присутствуют во многих САВ)

Система УниверсальныйПроцессор Д Ю Погорелова первоначально можно было бы отнести к первой группе, но включающий ее современный комплекс программ соответствует группе второй. Приводим четко выраженных представителей указанных групп, другие САВ, как представляется, имеют промежуточный характер

| Группы | I       | II     | III            |
|--------|---------|--------|----------------|
|        | КАПСУЛА | АММУСТ | МЕХАНИК        |
|        | КИДИМ   | АНФОР  | ДИНАМИКА       |
|        | СотрНЕР | MMANG  | Полимех-Символ |

Диалог человека и САВ, поисковый режим работы используется в каждой подгруппе на ключевом этапе: в первой – для формализации и формирования моделей, во втором – для оптимизации и контроля вычислений, в третьей подгруппе – на трудных этапах качественного исследования, например, при отыскании стационарных решений или при построении функции Ляпунова. Менее ответственные этапы используют стандартные методы, "вычислительный" режим работы САВ и стандартные пакеты, в том числе численные.

Сравнивая предлагаемую схему классификации и описания свойств проблемно-специализированных САВ с общей схемой, видим, что ее специальная часть сильно увеличена (за счет характеристик задач и механических алгоритмов). Такая схема дает более полноценное представление о свойствах специализированных САВ. Свои схемы могут быть предложены и для других распространенных типов САВ (для САВ учебного типа, для определенных алгоритмов и обладающих ими САВ, например, метода базиса Гребнера – см. *Дубна-90, Вильнюс-90, Дубна-2001*).

## 2.5 Сводка сведений о некоторых отечественных САВ

В прошедшие годы было разработано большое число систем аналитических вычислений, специализированных и универсальных. Был накоплен опыт разработки и эксплуатации систем. Решено много интересных и полезных прикладных задач. Ниже собраны краткие сведения об ряде отечественных САВ (на момент 1988 года, подробнее – М В Грошев [1988,1992], где дана сводка возможностей и алгоритмов, типов решаемых задач). Для их описания был использован указанный выше набор характеристик. С тех пор произошла смена поколений ЭВМ и многое другое. Теперь все это – область истории, память о совершенных трудах, но такая информация о специалистах в области САВ, о разработанных алгоритмах и их применениях в различных областях механики. Приводим список наиболее ряда известных САВ. В него не включены некоторые системы, описанные в предыдущем разделе, в табл. 3, по некоторым упомянутым САВ нет полных данных. Литературу по ним см. на фамилии авторов.

АВТО-АНАЛИТИК - Томск, Е А Арайс, Б Ш Гельфман, В М Зюзьков, А В Шутенков, БЭСМ-6, машинные коды, язык Автоаналитик, IBM, PC, C,  
 АНАЛИЗ - Москва, Ю А Герасимов, А А Красилов, БЭСМ-6, Алгол-60  
 АНАЛИТИК-74, -79 - Киев, В М Глушков, С Б Погребинский, В П Клименко, Ю С Фишман и др., МИР-2, язык Аналитик-74, СМ-1410.  
 АНАЛИТИК-89, -91 - Киев, В П Клименко, С Б Погребинский, Ю С Фишман и др., программная реализация, язык АНАЛИТИК-89,91  
 АНАЛИТИК-93,2000 - Киев, В П Клименко, А А Морозов, Ю С Фишман, А Л Ляхов и др., программная реализация с новыми языковыми возможностями  
 АЛГЕБРА-05 - Горький, М А Чубаров, Г А Долгов и др., ЕС, Фортран  
 АЛЬКОР - Москва, Л В Проворов, ЕС, БЭСМ-6, СМ-4, IBM PC, Рефал  
 АРАП - Новосибирск, А Л Семенов, БЭСМ-6, ЯРМО, "Эльбрус" Автокод-Эльбрус

### "Эльбрус", Автокод-Эльбрус

- БОРА - Томск, Ю Б Шмидт, БЭСМ-6, машинные коды  
ВИБРАН - Вильнюс, Р В Кульветене, Г П Кульветис, ЕС, СМ, ПЭВМ, Фортран  
ВФЛ-1 - Иркутск, В М Матросов, С Н Васильев, В Г Каратуев, Е А Суменков,  
БЭСМ-6, "Эльбрус", Паскаль  
ДИНАМИКА - Иркутск, В Д Иртегов, Л А Бурлаков, М В Почтаренко, БЭСМ-6, Алг-ГДР  
ДИРАК - Новосибирск, А Г Грозин, "Одра", ЕС, "Электроника 100-25", Паскаль  
КЕНТАВР - Минск, В Л Катков, М Д Попов, БЭСМ-6, ЯРМО  
КИДИМ - Харьков, Л И Штейнвольф, В Н Митин, ЕС, Алгол-68  
МАРС - Томск, Е А Арайс, В М Дмитриев, В Ф Шадрин, А В Шутенков и др.,  
БЭСМ-6, ЕС, язык Автоаналитик, Фортран  
МЕХАНИК - Ирк. А В Банщикова, Л А Бурлакова, Г Н Иванова, С С Смирнов, ЕС, PL-1  
MLR - Иркутск, М В Почтаренко, БЭСМ-6, Алгол-ГДР  
MMANG - Гродно, О М Городецкий, ЕС, Рефал  
МОДЕЛЬ - Ташкент, В Бузурханов, М Музефаров, БЭСМ-6, Паскаль  
НОРМАЛИЗАЦИЯ - Иркутск, В Д Иртегов, М А Новиков, БЭСМ-6, Алгол-ГДР  
ПАС - Москва, Г Б Ефимов, БЭСМ-6, Фортран  
ПЛ-ОСИАЛ - Ташкент, Т Т Имомов, Б Курманбаева, ЕС, ПЛ/1  
ПЛЭНЕР-АНАЛИТИК - Москва, В А Злытеков, БЭСМ-6, язык Плэнер  
ПОЛИНАЛ - Москва, А Б Константинов, БЭСМ-6, Алгол-ГДР  
САВАГ - Ленинград, Ю К Демьянович, БЭСМ-6, Алгол-ГДР  
САНТ - Дмитровград, Ю В Марков, БЭСМ-6, Макро-ассемблер БЭМШ  
САНТРА - Москва, И Б Щенков, ЕС, Рефал  
СИРИУС-СПУТНИК - Харьков, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, ЕС, М-222, Спутник  
СИРИУС-2 1 - Харьков, И Р Аксельрод, Л Ф Белоус, ЕС, Спутник, Рефал  
СПРИНТ - Ленинград, Н Н Васильев, БЭСМ-6, Фортран  
СТР - Ленинград, Н Н Васильев, БЭСМ-6, "Эльбрус", Фортран  
SRM - Москва, В Л Топунов, И Г Резников, В И Стеллецкий, БЭСМ-6, ЕС, Рефал  
УПП - Ленинград, В А Брумберг, С В Тарасевич, Т В Иванова, Н Н Васильев,  
В И Скрипниченко, И О Бабаев, БЭСМ-6, ЕС, "Эльбрус", Фортран  
CATA - Вильнюс, В В Тумасонис, БЭСМ-6, ЕС, Лисл  
GRATOS - Ленинград, С В Тарасевич, БЭСМ-6, ЕС, "Эльбрус", Фортран  
SASM - Ленинград, А В Кузьмин, БЭСМ-6, Фортран, Автокод Мадлен  
SATURN - Москва, Д В Куликов, ЕС, Рефал  
- Чебоксары, Б В Алексеев, БЭСМ-6, Фортран, машинные коды  
- Ленинград, П И Бегун, Г А Водень и др., БЭСМ-6, Алгол-60, ЕС, Фортран  
- Новосибирск, В Г Ганжа, С И Мазурик, В П Шаповов, БЭСМ-6, ЕС, Рефал  
- Москва, Е В Панкратьев, Р Е Серов, С Г Хлебугин, СМ-4, Рефал  
- Ташкент, Т Фархадоев, Т Юлдашев, БЭСМ-6, Алгол-60  
Устойчивость-1 - Горький, Г А Долгое, Д Н Макарычева, М А Чубаров, ЕС, Фортран

### Глава 3 САВ в задачах общей механики и теории управления

В настоящей главе собраны сведения о задачах механики, при решении которых были использованы системы аналитических вычислений. Рассмотрены отдельные задачи или группы задач, решавшиеся с помощью САВ и созданные для этого системы. Выделены некоторые алгоритмы и методы, реализованные в символическом виде. Разбиение материала по темам носит условный характер, сходные вопросы могут оказаться в разных разделах, часть материала уже освещена в предыдущих главах. Как и раньше, в основном описаны работы прежних лет в последнее десятилетие применение САВ стало обыкновенным инст-

рументом исследования, о котором часто не считают необходимым упоминать

Можно отметить типичные ситуации, когда системы аналитических вычислений успешно применяются. Во-первых, в тех случаях, когда имеют место однородные математические объекты, повторяемость однотипных операций и громоздкость выражений. Подобное имеет место в задачах небесной механики и общей теории относительности: операции с длинными рядами и тензорами, подстановки ряда в ряд, отыскание решений в виде рядов. Другой случай - реализация с помощью САВ в символьном виде четко сформулированного алгоритма преобразований. Возможности, которые открывают перед исследователями САВ, стимулируют алгоритмизацию задач общей механики, механики сплошной среды и других областей исследования. В теоретической механике при выводе уравнений движения механической системы хорошо алгоритмизируется формализм Лагранжа, например, и соответствующие преобразования легко выполняют САВ. Еще один случай - формирование модели объекта и просмотр многочисленных ее вариантов. Это типичная задача, возникающая в исследовании механических моделей и оптимизации их параметров при проектировании. Решение ее в символьном виде позволяет легче и быстрее исследовать характеристики механизма. Рассмотренные случаи привлечения САВ в исследовании являются типичными, но в конкретных задачах они чаще встречаются в комбинированном виде.

Информация о системах САВ и решенных с их помощью задачах механики накапливалась постепенно в Информационном банке Института механики МГУ, М.В. Грошевой. В работах М.В. Грошевой [1985, 1988], М.В. Грошевой, Г.Б. Ефимова [1988, 1993], М.В. Грошевой, Г.Б. Ефимова и В.А. Самсонова [1992] приводились сводки данных по возможностям САВ, прежде всего механического профиля, по их алгоритмическому наполнению, типам и особенностям решаемых задач механики. Много материала содержится в тезисах и трудах конференций Информатор-83, Горький-84, Вильнюс-84, 90, Дубна-80, -83, 85, 90, 2001, Ленинград 88, 89, Севастополь-91. Обзоры по задачам разного рода упоминаются ниже и в соответствующих разделах.

Возможности САВ для задач общей механики были продемонстрированы в книге Д.М. Климов, В.М. Руденко [1989] и их обзорах. Ряд САВ и решаемые с их помощью задачи этого типа упомянуты выше, в разделе 2.4. В механике сплошных сред имелись обзоры А.А. Самарского, М.Ю. Шашкова [1984] для задач вычислительной математики, В.И. Савченко [1988] для механики твердого деформируемого тела. Вывод уравнений движения с помощью САВ освещен в обзорах М.В. Почтаренко [1985], И.Р. Белоусова [2002], в книгах Й. Витгенбурга [1980], М. Вужобратовича, обзоре W. Schiehl [1990] и др. Задачи теории управления, решавшиеся с применением САВ, описаны у М.В. Грошевой и др. [1998]. Многочисленные обзоры о применении САВ в различных задачах небесной механики упомянуты в разделе 3.7, также в книгах В.А. Брумберга. О задачах прикладной небесной механики (космодинамики) упомянуто в главе 4.

В статьях М.В. Грошевой [1988, 1992] были собраны данные о том, какие возможности имеются в каких системах. Приведены сводки алгоритмов математики и механики, реализованных в различных САВ, и, наоборот, в каких системах имеются те или иные алгоритмы. Указано также, в каких САВ реализован ряд наиболее часто встречающихся этапов моделирования и исследования механических систем: составление уравнений движения, методы исследования динамики сложных механических систем (критерии Сильвестра, Реуса-Ляпунова, нормализация уравнений, методы исследования устойчивости и др.), методы Цейлеля; Крылова-Боголюбова, групповые методы анализа и другие методы и алгоритмы.

Для применения САВ в задачах теоретической и прикладной механики характерно реализация в символьном виде таких операций, как составление функции кинетической энергии по геометрическому описанию системы, формирование сил в сложно организованных системах, составление уравнений движения, их преобразования, линеаризация, усреднение, декомпозиция и т.п., выделение стационарных движений, исследование устойчивости движения, построение решения системы дифференциальных уравнений и т.д. Обзоры приведены выше, о многих упоминаемых САВ сведения даны в разделах 2.3, 2.4, 2.5 главы 2.

Набор используемых алгоритмов механики, степень сложности входных и промежуточных аналитических выражений можно представить на примере работы пакетов программ сотрудников Иркутского ВЦ СО РАН (работы Л.А. Бурлаковой, В.Д. Иртегова, М.В. Почтаренко, А.В. Банщикова и др.). Авторы имели в виду качественное исследование движения механических систем с помощью первых интегралов. Поэтому для вывода дифференциальных уравнений движения использован лагранжев формализм, для случая голономных систем без избыточных координат. Для сил принято разбиение на потенциальные силы, определяемые силовой функцией, и диссипативные силы, характеризующиеся диссипативной функцией (функция Релея или обобщенная). Допустимый класс систем состоит из тел, связанных друг с другом сферическими, цилиндрическими, призматическими шарнирами, система кинематически разомкнута, голономна. Кинетическая энергия системы подсчитывается стандартно. Задаются векторы абсолютных скоростей точек крепления, матрицы связи систем координат отдельных тел, кинетическая энергия тел и силовая функция. Алгоритм их формирования хорошо формализован и свободно выполняется в символьном виде. Силовая функция в случае центрального ньютоновского поля может быть представлена с необходимой точностью в виде разложения по степеням отношений характерных размеров тел к расстоянию от точек крепления до центра притяжения.

Один из примеров дальнейшего использования построенной системы дифференциальных уравнений – это выделение "простейших" движений. Для консервативных механических систем реализовано получение интеграла энергии и циклических интегралов. Если система дифференциальных уравнений допускает  $m + 1$  первых интегралов  $V$ , то стационарным движениям по Раусу отвечают значения координат, которые доставляют экстремум некоторой функции  $K$ , являющейся линейной связкой этих интегралов. Проведено исследование для двух типов первых интегралов – циклических и квадратичных по фазовым переменным. Для консервативной механической системы с  $m$  циклическими координатами уравнения стационарных движений принимаются простой вид, откуда выделяются стационарные движения. При наличии квадратичных интегралов условия для нахождения стационарных движений представляют собой линейную алгебраическую систему, которая решается известными методами алгебры.

Достаточные условия устойчивости выделенных стационарных движений получаются по теореме Рауса-Ляпунова как условия знакоопределенности квадратичной формы – второй вариации интеграла  $K$  в окрестности исследуемого движения при постоянных значениях интегралов  $V$ . Для получения достаточных условий используется модифицированный критерий Сильвестра. Программа, поиска первых интегралов – выявляет их все исследованием производных от лагранжиана по обобщенным координатам. При обращении одной из них в нуль, соответствующий интеграл выводится на печать. Найденные интегралы позволяют составить систему уравнений для определения стационарных движений.

В качестве примеров были рассмотрены гироскоп в кардановом подвесе и некоторые другие технические устройства. Заметим, что для составления характеристического уравнения линеаризованной системы дифференциальных уравнений нет необходимости разрешать их относительно старших производных. Эти алгоритмы были реализованы в пакете ДИНАМИКА (М.В. Почтаренко). Реализация САВ на языке Алгол-ГДР с вычислительной ориентацией обеспечивало естественный переход к численному счету. В символьной моде пакета имелся развитый аппарат векторно-матричной алгебры.

Затем был создан пакет МЕХАНИК (см. А.В. Банщикова и др.), в котором в дополнение к возможностям предыдущего пакета был увеличен набор алгоритмов, повышена их эффективность и увеличена допустимая размерность. Большая по сравнению с БЭСМ-6 память ЕС ЭВМ позволила расширить класс изучаемых объектов, включать в рассмотрение механические системы как с абсолютно твердыми, так и с деформируемыми компонентами, наряду с уравнениями движения Лагранжа II рода формировать уравнения Эйлера-Лагранжа.

При моделировании деформируемых элементов принято, что в каждой точке тела смещение от недеформированного состояния может быть представлено вектором от обобщенных координат деформации и собственных форм колебаний или их функций. Учет деформации существенно усложняет вид кинетической энергии и силовой функции, повышает размерность исследуемой системы, однако для получения уравнений движения формализм Лагранжа работоспособен.

На практике часто используют уравнения Эйлера-Лагранжа, которые во многих случаях компактнее уравнений Лагранжа II рода. Вывод их также достаточно алгоритмичен. При этом кинетическая энергия описывается в квазискоростях, которые выражаются через обобщенные скорости. Правые части этих соотношений можно считать однородными линейными формами. При разработке алгоритмов обращения матриц учитывается ее блочная структура, имеющая место при стандартном выборе квазискоростей. Размерность каждого блока не более 4, что позволяет работать с матрицами достаточно высокой размерности. Для повышения ее и эффективности вычислений использовалась декомпозиция системы. Одна из последних версий пакета допускала:

- моделирование неголономных систем с помощью уравнений Эйлера-Лагранжа (в квазискоростях) с исключением реакций связей или уравнений Чаллыгина,
- построение для полученных дифференциальных уравнений движения в квазискоростях, инвариантных соотношений специального вида, из которых можно получать условия существования первых интегралов либо строить связи с целью получения функций Ляпунова с известной структурой производных,
- построение функций Ляпунова для исследования стационарных движений системы, когда нелинейные дифференциальные уравнения раскладываются в ряд в окрестности стационарного движения с удержанием членов нужного порядка малости до отклонения от невозмущенного движения.

Предложены алгоритмы получения дифференциальных соотношений, из которых могут быть сформированы функции Ляпунова для анализа устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения. В окрестности стационарных движений в пакете можно решить задачу о синтезе управления по заданной степени устойчивости, построить матрицу управляемости с проверкой критерия Калмана. Пакет продолжал развиваться уже на базе САВ Mathematica (А.В. Банщиков, Л.А. Бурлякова и В.Д. Иртегов [1989, 1998]). Используя его, Т.Н. Титоренко [2002] подготовила компьютерный задачник по методам качественного исследования динамики сложных механических систем и применению САВ.

Несколько иная последовательность исследования механических систем за-

ложена в САВ MMANG (О М Городецкий [1984] и др.) В ней реализованы следующие алгоритмы: формирование функции Лагранжа и обобщенных сил по геометрическим характеристикам системы, составление уравнений Лагранжа для механических систем со структурой "дерева", линеаризация уравнений в окрестности стационарных решений, исследование на асимптотическую устойчивость стационарных решений по методу Гурвица, построение приближенного решения дифференциальных уравнений в виде отрезков степенных рядов, осреднение уравнений, асимптотическое разделение "быстрых" и "медленных" движений для определенного типа систем. САВ позволяет пользователю активно вмешиваться в процесс решения задачи на любом этапе работы программы. В системе заложена арифметика чисел произвольной контролируемой точности. Пакет использовался для моделирования и анализа высокоточных гироскопических устройств.

З.Е. Филер и его ученики (В.В. Карабчевский, З.Е. Филер [1984]) создали комплекс программ для численно-символьного исследования ВИБРОТЕХНИКА (ЕС ЭВМ, языки фортран, ассемблер), предназначенный для анализа динамики электромеханических систем, вибромашин, устройств шахтного оборудования. С его помощью можно получать в символьном виде уравнения движения в форме Лагранжа, преобразовывать их к удобному для дальнейшего исследования виду, например для численного счета. Система может проводить дифференцирование в символьном виде любых сложных функций, формировать матрицу Якоби, используется при выводе критериев устойчивости систем большой размерности.

Система аналитических вычислений ВИБРАН, разработанная в Вильнюсском инженерно-строительном институте Р.В. Кульветене и Г.П. Кульветисом, по некоторым возможностям приближалась к универсальным системам. С ее помощью решен ряд практических задач, как ясно из названий работ. Программы системы можно разделить на четыре группы: составление уравнений движения на основе уравнений Лагранжа I и II рода, решения систем дифференциальных уравнений методами малого параметра и гармонического баланса, получение условий устойчивости периодических решений, вспомогательные математические операции - разложение в степенной ряд нелинейных функций нескольких переменных, генерирование квадратичных форм, работа с разреженными матрицами и др.

В Институте механики МГУ для решения ряда прикладных задач использовалась специализированная САВ ПАС, разработанная в ИПМ им. М.В. Келдыша (Информатор-83). С ее помощью формировалась кинетическая энергия по кинематическим параметрам и строились уравнения Лагранжа многозвенной шагающей механической системы (Г.Б. Ефимов, Н.С. Коникова [1977]). Построение в символьном виде уравнений движения механической системы и их исследование присутствует в рассмотренных выше задачах и в ряде работ, которые будут упомянуты ниже (также в разд. 2.4). На некоторых из них остановимся подробнее.

САВ используются в современных исследованиях по аналитической механике: поиску симметрий по З. Нёттер, интегрируемости (Д.А. Абраров [2000]), А.С. Кулешов [2002], развил классическую задачу о качении тела по шероховатой поверхности, исследованную С.А. Чаплыгиным, Л. Алпелем и Х.М. Муштари. Использовался эксперимент с помощью САВ Maple и алгоритм Дж. Ковальчика интегрирования дифференциального уравнения, причем были даны рекомендации разработчикам Maple позволяющие применять этот алгоритм в новых случаях. Удалось получить новые случаи интегрируемости и явный вид первых интегралов.

### 3.2 Исследование линеаризованных уравнений

Вопросы и алгоритмы исследования устойчивости, в связи с их громоздкостью являются основными при решении многих задач с использованием САВ. Часто

пакеты программ, ориентированные на изучение механических объектов и опирающиеся на САВ, включают в себя исследование линейного приближения динамических систем (см. раздел 2.4 и табл.3).

Например, в упомянутых выше пакетах ДИНАМИКА И МЕХАНИКА (А.В. Банщиков, Л.А. Бурлакова, В.Д. Иртегов, М.В. Почтаренко и др.) линеаризованные уравнения движения выводятся путем разложения характеристической функции (лэгранжиана) в окрестности заданного движения до второго порядка малости и последующего составления уравнений Лагранжа. Возможно получение дифференциальных уравнений первого приближения непосредственно из полных уравнений Лагранжа. Необходимые условия устойчивости выделенных стационарных движений выписываются и анализируются с помощью критерия Рауса-Гурвица.

Весьма глубоко методы линейной алгебры (в их адаптации для САВ) были продвинуты в работах сотрудников НИИ прикладной математики и кибернетики Горьковского университета (А.С. Алексеева, М.А. Чубаров, Г.А. Долгов и др.). Была разработана система АЛГЕБРА-0, над выполнение аналитических операций над алгебраическими многочленами, отрезками степенных рядов Тейлора и Лорана (18 операций), полиномиальными матрицами (21 операция). Возможно вычислять детерминанты полиномиальных матриц (согласно комбинаторному определению и видоизмененному методу Гаусса), решать системы линейных алгебраических уравнений с полиномиальными коэффициентами, находить обратную матрицу и т.п. (Г.А. Долгов, Д.Н. Махаричева и М.А. Чубаров [1982]). На основе этой системы был реализован ряд алгоритмов исследования устойчивости линеаризованных моделей и качества переходных процессов в них – пакет УСТОЙЧИВОСТЬ, который обеспечивал пользователю удобные формы работы.

Позже была создана система МАУС (Моделирование и Анализ Устойчивости), включившая в себя предыдущие и новые алгоритмы, повышение их эффективности, верификацию чисел высокой точности, более совершенные средства общения пользователя с пакетом (М.А. Чубаров, Г.А. Долгов и др. [1988]).

Пакет программ позволяет в символьном виде решать следующие задачи:

- разбиение пространства параметров линеаризованной модели на области, в которых характеристическое уравнение имеет одинаковое число корней в правой полуплоскости (D-разбиение),
- вычисление экстремальных точек области устойчивости,
- разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных, положительных или отрицательных корней,
- решение этих задач относительно единичного круга (проблема Шура-Кона),
- расчет областей с одинаковым запасом устойчивости,
- расчет амплитудно-частотных характеристик линеаризованной модели.

В последних версиях пакета была предусмотрена возможность исследования абсолютной устойчивости управляемых динамических систем, содержащих скалярную нелинейность, т.е. сведение задачи проверки выполнения частотных условий в особых случаях к проверке свойства неотрицательности полиномов. Проведено уточнение и обобщение с помощью теории последовательности полиномиальных остатков (ППО) критериев неотрицательности для полиномов, зависящих от параметров. Даже при линейном вхождении параметров в коэффициенты системы дифференциальных уравнений характеристический полином ее линейной части и частотные условия зависят от этих параметров, как правило, нелинейно. Это существенно усложняет задачу определения областей абсолютной устойчивости являющихся пересечением в пространстве параметров областей гурвицевости полинома  $P(s)$  и областей, где выполняются частотные условия. Обычно необходимые и достаточные условия неотрицательности полинома сво-

дятся к выяснению отсутствия у него положительных корней нечетной кратности

С целью получения критериев неотрицательности, не связанных с вычислением корней полинома, число его положительных кратных корней выражены через индексы Коши и коэффициенты элементов обобщенных ППО специального вида. Реализован разработанный авторами символьный алгоритм формирования условий абсолютной устойчивости для нелинейных систем и особых случаев. Он как правило, имеет преимущества перед другими алгоритмами, в том числе по быстродействию — за счет того, что алгоритм ППО хорошо согласуется со спецификой САВ (М.А. Чубаров [1974, 1988], А.С. Алексеев, М.А. Чубаров и др. [1978]). Система использовалась при исследовании многих конкретных объектов (см. Н.В. Иванова, Д.Н. Макарычева и др. [1978], В.И. Горюнов, Г.А. Долгов, Н.И. Лобшов [1984], Я.К. Любимцев, В.С. Метрихин [1984], А.Л. Кулахов, М.А. Пейсаль [1984] и др.

В Иркутском ВЦ СО АН СССР для анализа динамических свойств и устойчивости сложных систем использованы векторные функции Ляпунова. Теория метода основана на "теоремах сравнения" и "теоремах о динамических свойствах". Реализован метод в виде пакета ВФЛ-1 (В.М. Матросов, С.Н. Васильев и др.) и ориентирован на решение задач динамики и теории управления (см. также в 3.6).

### 3.3 Нелинейные системы

Некоторые из нелинейных методов механики были реализованы в САВ достаточно давно. В Киеве на языке АНАЛИТИК успешно использовали методы осреднения в задачах механики, а также физики и радиофизики — Ю.В. Благовещенский, Ю.С. Фишман [1970], Ю.А. Митропольский, А.А. Молчанов [1981]. Введением в ряд методов механики и их реализацию с помощью САВ, как и в использование Reduce для их решения может служить книга Д.М. Климова и В.М. Руденко [1989].

Один из наиболее ответственных и трудных этапов решения механической задачи — этап ее постановки. Выбор кинематической схемы и модели для силовых воздействий — не формализованные процедуры. Они требуют от исследователя не только интуиции, но и использования самых различных математических приемов. Для решения возникающих при этом вопросов необходимы САВ с широкими возможностями, универсальные и гибкие, желательным с возможностью диалогового режима работы. Описание взаимодействий в механической системе может требовать как решения промежуточных физических задач, так и последующего нелинейного преобразования этих решений к другой форме. При изучении гироскопических систем сложной конструкции удается переложить на ЭВМ еще один этап решения, а именно — формирование аналитических выражений для действующих в системе сил и моментов.

В качестве примера приведем задачу исследования движения ротора криогенного гироскопа, удерживаемого в магнитном поле двух круговых сверхпроводящих витков (В.Ф. Журавлев и В.М. Руденко [1983], Д.М. Климов, В.М. Руденко и др. [1985], Д.М. Климов, В.В. Леонов, В.М. Руденко [1984]). Форма сверхпроводящего ротора близка к сферической. Положения ротора задаются координатами центра масс и углами Эйлера-Крылова поворота вокруг центра масс. Силы и моменты, действующие на ротор, для каждого его положения определяются из уравнений электродинамики с граничным условием — равенством нулю нормальной составляющей магнитной индукции на поверхности сверхпроводника. При решении сделаны упрощающие допущения — задача магнитостатики решается при условии малости скорости движения ротора в сравнении со скоростью света и зазора по сравнению с радиусом ротора, т.е. ищется асимптотическое решение уравнений.

Движение центра масс ротора определяется малой несферичностью его фор-

мы Для построения уравнений движения ротора необходимо решать нелинейную систему уравнений; решение ищется методом последовательных приближений (в переменных, определенных в системе координат, связанных с главными осями инерции ротора), с любой заданной точностью по степеням малого параметра Правые части уравнений движения получаются на следующем шаге – интегрированием уравнений для сил и моментов с учетом найденных выражений для координат Далее применяется метод осреднения Учет несовпадения центра масс и центра сферы, дает конечные выражения для среднего значения уводящего момента Аналитические преобразования проводились на САВ Reduce

В пакете Полимах-символ, созданном на базе Reduce (В М Руденко), были реализованы достаточно общие асимптотические алгоритмы, которые позволяют исследовать нелинейные динамические системы (В Ф Журавлев [1983], Д М Климов и В М Руденко [1989], В В Леонов [1984]) С его помощью А Ф Брагазин, В В Леонов, В М Руденко и И П Шмыглевский [1992] проводили предварительный анализ уравнений движения низколетающего ИСЗ, подверженного действию различных возмущающих факторов – зональных гармоник поля тяготения Земли, сопротивления атмосферы и др Проводилось формирование уравнений движения ИСЗ, их осреднение (с помощью модифицированного алгоритма) до четвертого порядка по малому параметру, что возможно лишь с применением САВ Затем генерировались фортран-программы для расчета траекторий ИСЗ и прогноза его движения с высокой степенью точности

М В Грошева, В А Привалов и В А Самсонов [1984] с помощью САВ ПАС, а затем Reduce исследовали поведения тела сложной конфигурации в потоке среды формирования сил и моментов, действующих на систему, анализ стационарных режимов движения, в аналитическом виде получены угловые скорости собственного вращения и прецессии тела Рассматривалась задача определения угловой скорости авторотации и момента Магнуса, одной из наименее изученных характеристик аэродинамического взаимодействия тела с потоком Для тел "гладких" форм подобные эффекты связаны с вязкостью воздуха Для тел сложной конфигурации значителен вклад скоростного напора, влияние которого и исследовалось Используются такие модели взаимодействия потока и пластины, при которых оно сводится к одной равнодействующей силе, приложенной к пластине

Рассматривались три различные математические модели локального взаимодействия потока и лопасти, в частности, модель так называемого ударного взаимодействия, когда принимается, что действующая на пластину сила направлена по нормали к ее плоскости, зависит лишь от нормальной составляющей скорости центра давления пластины относительно потока При расчете силового воздействия потока на тело сложной конфигурации, содержащее несколько взаимодействующих с телом пластин, различным образом ориентированных по отношению к потоку, возникают громоздкие выражения, обусловленные многократным преобразованием координат Этот этап работы был осуществлен с помощью САВ Получено несколько компактных и вполне обобщимых формул, которые можно использовать для определения характеристик авторотирующих тел

Н М Глазунов [1987] исследовал с помощью Reduce медленное движение (скорость  $\ll$  скорости света) конечного числа точечных одноименно заряженных свободных электрических зарядов в магнитном поле идеально электропроводящего кольца, а также вопросы управления этим движением Разработаны программы на Reduce (в цилиндрической системе координат) для вычисления электрических сил, действующих на заряд, возмущенного движения, линейного приближения, магнитного потока через плоскость кольца от  $i$ -го заряда при заданном

потенциале магнитного поля заряда, силы Лоренца, действующей на  $i$ -ый заряд, вывод уравнений движения, исследование устойчивости и управляемости линейного приближения. Проведено исследование некоторых частных конфигураций.

Задачи исследования вероятностных процессов в нелинейных динамических системах (важные и трудные как теоретически, так и в практическом плане) исследуются методами САВ в Пермском университете в течение многих лет (В В Маланин, В И Луппов, М Ю Дроздов, В М Мижрюков, И Е Полосков). Одним из методов их изучения являются уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для плотности вероятности распределения фазового вектора динамической системы. Громоздкость ФПК-уравнений приводит к ряду трудностей при реализации – в том числе при применении САВ. Использование САВ связано с выводом и преобразованием уравнений, с построением решений в аналитическом виде, при генерировании численных программ, при использовании арифметик высокой точности. САВ Reduce, Mathematica и другие использовались для исследования нелинейных стохастических и управляемых процессов (систем со случайным входом, уравнений Ляпунова и Беллмана), для анализа поведения упругой колонны под действием случайной осевой нагрузки с применением метода Галеркина и в целом ряде других задач (В В Маланин и др [2001], И Е Полосков [2004] и др.)

Пакеты по методам и алгоритмам нормализации дифференциальных уравнений (для исследования устойчивости и т.п.) создавались А П Маркеевым [1970] и А Г Сокольским [1975, 1981] и др. в ИПМ им М В Келдыша, ИТА РАН и МАИ, С В Медведевым в МАИ [1984], М А Новиковым и В Д Иртеговым [1984] в Иркутском ВЦ СО РАН, В Ф Журавлевым и В М Руденко [1983] в ИПМех РАН, В Ф Еднералом [1985] и А Д Брюно [1998] в НИЯФ МГУ и ИПМ им М В Келдыша РАН.

### 3.4 Задачи теории оптимального управления

Задачи теории управления, особенно в случае большого числа степеней свободы, большой размерности имеют немало громоздких высчислений, где полезно применение САВ. Обзор ряда задач дан М В Грошевой и др. [1998]. Некоторые задачи оптимального управления в космодинамике освещены в главе 4.

Для одной из типовых задач оптимального управления – при выводе уравнений для сопряженных переменных управляемой системы и их преобразовании при замене координат, опираясь на свойства гамильтоновости системы уравнений согласно принципу максимума Понтрягина, – использование САВ обсуждается в работе Д.М. Климкова, Г.Б. Ефимова и др. [1985]. При исследовании устойчивости управляемого движения, его коррекции или для вычисления матрицы производных при решении краевой задачи полезны уравнения в вариациях для системы уравнений оптимального движения. Пример получения формул для преобразования уравнений оптимального движения точки с малой тягой в центральном поле – от прямоугольных к цилиндрическим координатам и обратно, а также уравнений в вариациях в цилиндрических координатах для решения двухточечной краевой задачи с помощью САВ ПАС. Полученные в символьном виде правые части уравнений сгенерированы в виде фортран-операторов и использованы для численного расчета (Г.Б. Ефимов, М.В. Грошева, А.Т. Абдрахманов [1984]).

САВ успешно применяются в настоящее время при выводе уравнений оптимального движения в достаточно сложных системах – как привычный инструмент, часто без специального упоминания об их использовании. М.С. Константинов и др. [2001] использовали MathCAD (САВ, входящая в него) при выводе уравнений оптимального движения в сложных случаях. Причем, во взаимодействии использовались графические, символьные и численные возможности. При решении краевой задачи, к которой сводится решение многих задач оптимального управ-

ления, новые возможности в смысле улучшения сходимости представляет метод "продолжения по параметру". Для его применения необходимо строить громоздкие вспомогательные системы уравнений, в чем весьма эффективным может быть использование САВ – например, система Maple В.Г. Петуховым [2004].

САВ успешно работают в задачах синтеза управления. В.А. Соболевым [1987] рассмотрена задача декомпозиции системы дифференциальных уравнений с несколькими малыми параметрами при производных. Строится замена переменных, приводящая исходную систему уравнений к "блочнотреугольному виду". Предлагаемое авторами расщепляющее преобразование эффективно строится в виде асимптотических разложений по степеням малых параметров. С вычислительной точки зрения оказывается достаточным алгебраических операций и дифференцирования, которые легко выполняются с помощью САВ. Рассмотрена задача о построении оптимального управления для линейной сингулярно возмущенной системы с квадратичным функционалом качества. Решение сводится к нахождению положительно определенного решения сингулярно возмущенного матричного дифференциального уравнения Риккати. Эта процедура реализована на ЭВМ в виде универсального комплекса программ на языке Reduce.

Одним из важных этапов проектирования систем управления является синтез алгоритмов обработки информации для проектируемой системы управления. Сочетание традиционных численных методов с символьными аналитическими преобразованиями на ЭВМ расширяет класс решаемых задач.

В.Л. Кистлеров и А.П. Серебровский [1986] и др. рассматривали случай, когда состояние объекта управления описывается нехотորой детерминированной или стохастической системой линейных по фазовым координатам и управлению разностных уравнений. Качество управления характеризуется квадратичным функционалом потерь. Коэффициенты уравнений и функционала потерь являются функциями одного или нескольких скалярных постоянных или медленно меняющихся во времени параметров. Например, коэффициенты математической модели движения водометного судна, при синтезе системы управления курсом или движением по заданной траектории, являются функциями скорости движения судна относительно воды. В таких случаях закон управления является линейным по значениям (или по оценкам - при стохастической модели объекта) отклонений текущих фазовых координат от заданных. Коэффициенты в законе управления определяются при решении соответствующего дискретного уравнения Риккати и являются функциями параметров, входящих в математическую модель.

САВ позволяет получить аналитические выражения, аппроксимирующие решение уравнения Риккати на заданных интервалах изменения параметров, и определить коэффициенты закона управления как функции этих параметров. Это особенно важно, когда нельзя пренебречь качеством управления переходным процессом в управляемой системе по сравнению с установившимся. Аналитические преобразования проводились, используя язык FLAC (В.Л. Кистлеров [1987]).

Синтез законов управления в ряде задач теории автоматического управления сводится к проблеме конструирования правых обратных систем (Ю. Котта [1986]). Алгоритмы их построения для нелинейной системы с дискретным временем реализован Ю. Котта и Р. Роомельди [1990] в виде рекуррентной процедуры, состоящей из алгебраических операций и дифференцирования, как пакет на Reduce. Программы тестировались на задаче управления манипулятором и других.

На примере синтеза оптимального управления в одной задаче математической физики (линейная стабилизация температурного поля в тонкой круглой пластинке) показано, как использование САВ Reduce позволяет повысить точность

решения краевой задачи методом штрафных функций (М. Г. Дмитриев [1990]).

Задачи управления в условиях случайных помех и других вероятностных факторов исследовались методом ФПК-уравнений В. В. Малвиничем [1995, 2001], В. И. Лумповым [1982] и Е. Полосковым [2004] и другими в Пермском университете.

### 3.5 Управление роботами и другими техническими объектами

В задачах управления роботами для вывода уравнений движения нередко применяются САВ (см. выше и обзоры М. В. Почтаренко, И. Р. Белоусова, книгу И. Виттенбурга [1980] и др.). Составление пакетов программ дело ответственное и неоднозначное (напр., W. Schiehlen [1990]). Оценка роли и характера САВ, используемых в пакете, зависит от типа задач, сложности объектов, на которые он ориентирован. Сравнения различных методов построения уравнений в символьном виде, их реализации и эффективности проводились на Всесоюзных семинарах в Санкт-Петербурге в 1988-1989 годах (*Ленинград-88, Ленинград-89* и). Часто при описании применения САВ задачи управления специально не выделяются, поскольку ее специфика приходится на численную компоненту программного комплекса. Нередко при описании формирования закона управления или уравнений движения объекта вообще не говорится об использовании САВ.

Для формирования управляющих сил, обеспечивающих плавность движения звеньев роботов-манипуляторов, необходимо вести расчет действующих в системе сил и моментов согласно дифференциальным уравнениям движения, причем достаточно быстро во избежание резонансных явлений. Кроме того, для управления роботами применяются микроЭВМ, что ограничивает возможность использования численных методов. Анализ и сравнение методов автоматизированного вывода уравнений движения в различной форме и их использования для задач робототехники (с помощью САВ или без них) дан И. Р. Белоусовым [2003].

В работах Р. А. Сабитова [1977], А. С. Землякова, Р. А. Сабитова и др. [1977], выполненных в 70-е годы, решалась задача построения управления программным движением систем при заданных ограничениях на фазовые векторы объекта и исполнительных органов. Предлагался цикл исследования и построения управления манипулятором. Разработаны методы синтеза управления программным движением, построения упрощенной управляющей функции, обеспечивающей требуемые показатели качества регулирования с учетом ограничения на фазовые переменные, проверки условий совместности задаваемого программного движения с уравнениями движения объекта и ограничениями до и после построения управляющей функции. Предложенные алгоритмы реализованы в виде пакета программ на ЕС ЭВМ, язык PL/1. Этот анализ задачи завершается автоматическим формированием программ численного счета для конкретной управляющей мини-ЭВМ, расположенной в цепи обратной связи манипулятора. Этот этап является новым, дополнительным в вычислительном цикле (см. гл. 2, 2.1).

Г. П. Кульветис [1988] на универсальной САВ muMath провел анализ алгоритмов вывода уравнений движения роботов-манипуляторов, управляемых в реальном времени. Алгоритмы Паула-Валкера (формализм Ньютона-Эйлера) и Ватерса-Холербаха (формализм Лагранжа) оказались непригодными – на muMath не хватило ресурсов ПС по времени и памяти. Прямой алгоритм Уиккера-Кона, использующий формализм Лагранжа, был реализован на САВ ВИБРАН и дал хорошие результаты. ВИБРАН (Г. П. Кульветис [1983]), использовавшийся при решении многих задач, и в этом случае имел преимущества перед muMath. С помощью символьно-численного интерфейса для полученных в символьном виде уравнений движения генерируется Фортрен-программа расчета управлений, удовлетворяющих требованиям управления роботом-манипулятором в реальном

времени. Работа комплекса программ проверена при испытаниях робота "Джильберто" с шестью степенями свободы (Миланский политехнический институт)

Одним из подходов к решению проблемы выбора конкретных структур и расчету параметров систем управления приводами манипуляторов, которые обеспечивают требуемую точность движения схвата робота по заданным траекториям и при этом имеют максимально простую реализацию, является создание экспертных систем (В Ф Филаретов, Ф И Корзун, П И Мимоход [1990]). В свою очередь эффективность их работы определяется эффективностью алгоритмов создания и исследования математических моделей манипуляторов на САВ. Отмечено, что универсальные САВ (Reduce, MACSYMA и др.) во многом избыточны и малоэффективны для задач проектирования и исследования манипуляторов. Авторы разработали специальный способ кодирования и обработки символьной информации, эффективный применительно к уравнениям динамики манипуляторов. Об экспертных системах см. также В Маланин, В Микрюков и др. [1993].

Л Д Акуленко, Л К Лилов, М Е Лорер, С А Михайлов [1989] рассмотрели вопросы планирования и оптимизации ориентационных движений кисти манипуляционного робота антропоморфного типа. Предполагалось, что схват трехзвенной кисти нагружен протяженным объектом с заданными массо-инерционными характеристиками. Исследована зависимость ориентационных движений кисти от геометрических, инерционных и электромеханических параметров системы. Традиционные аналитические и числовые методы анализа и построения управлений использовали динамические уравнения системы, полученные в символьном виде с помощью Reduce. Для объектов подобного типа исследования по динамике, управлению и оптимизации режимов ориентации немногочисленны.

Б А Бордюг [1989] рассмотрел вопросы использования методов компьютерной алгебры (САВ) при построении математических моделей шагающих аппаратов, управляемой механической системы с переменными связями, которая может содержать замкнутые кинематические цепи. Приведен алгоритм составления дифференциальных и конечно-разностных уравнений, описывающих движение шагающего аппарата при неизменных связях и процесс смены связей (опорных ног), соответственно. Построена математическая модель четырехногого шагающего аппарата (ноги весомые) с помощью специализированной САВ MMANG (О М Гордеевский [1984]). Анализ динамики движения проводился численно.

Вопросы компьютерного конструирования моделей сложных механизмов и машин, представляющих совокупность физически неоднородных подсистем (механических, гидравлических, управляющих, информационных), рассмотрены Е А Арайсом, В М Дмитриевым [1982], В М Дмитриевым, А В Шутенковым [1989]. Предложенный формализм и методика основаны на представлении механической системы в форме компонентной цепи. Построение моделей отдельных компонент в числовой и аналитической форме и примеры настройки на конкретные режимы оформлены в виде самостоятельных универсальных вычислительных блоков. Программы собраны в виде пакета MARC, использующего универсальную САВ АВТОАНАЛИТИК, языки Ассемблер и Фортран. Исследовались динамические характеристики роботов-манипуляторов, статические и динамические характеристики большегрузных экскаваторов, управляемых механических объектов.

Система автоматизированного моделирования адаптивных роботов (АР) MARC-АР, предназначенная для исследования и обоснования выбора проектных параметров подсистем АР (исполнительного механизма, системы управления, системы осязательства), условий окружающей среды, проверки стратегий управления и осязательства была создана В М Дмитриевым и Т Н Зайченко [1991].

Исследование динамики и управления колесными роботами в течение многих лет ведется в НИИ Механики МГУ совместно с ИПМ им М.В.Келдыша, Московским Энергетическим институтом (Е.А.Девянин, А.И.Кобрин, Ю.Г.Мартыненко, и др., также Тула-2005). В сборниках Научно-методических статей "Теоретическая механика" и "Мобильные роботы и мехатронные системы" Международных научно-технических фестивалей молодежи имени проф. Е.И.Девянина (М., МГУ), проводившихся под руководством его и академика Д.Е.Охоцимского, рассмотрены многие задачи движения роботов, а также информации и управления – как с использованием САВ, так и иными способами (И.Р.Белоусов [2002])

В работах Ю.Г.Мартыненко [2002] исследовались уравнения движения колесного трех и четырехколесного робота, исследование которых проще, чем одноколесных и двухколесных из-за статической неустойчивости последних. Для этой неголономной системы предложены уравнения движения Лагранжа с неопределенными множителями, при различном способе исключения которых получаются уравнения движения робота в форме уравнений Воронца, Чаплыгина или Аппеля. Громоздкость указанных уравнений для случая робота делает удобным применение матрично-векторной формы и использование САВ.

Процесс создания систем автоматического управления (САУ) характеризуется большим удельным весом динамических задач при выборе структуры, параметров и алгоритмов управления. Каждая из этих задач требует для своего решения одного или нескольких математических описаний (МО) функционирования САУ и его элементов. Разработка систем автоматизированного проектирования (САПР) САУ сопряжена с комплексной автоматизацией всех составляющих технологии проектирования САУ. Исходя из того, что МО являются основой САПР САУ, их построение также должно быть автоматизировано, что позволит существенно расширить сферу применения САПР в целом, сократить время проектирования новых образцов и обеспечит повышение их качества.

Комплексная автоматизированная технология построения МО САУ была реализована в системе автоматизированного построения МО АЛМАК (Ю.Б.Подчуфаров, А.П.Матвеев [1987]). В основе технологии лежит унифицированное МО, которое может быть построено для гидро-, тепло- и электромеханических САУ с использованием фундаментальных законов сохранения и уравнений состояния. Для описания структур подсистем САУ различной физической природы используется язык схем замещения. Разработана единая схема замещения, основанная на сходных правилах построения и форм записи. Система включает анализ получаемых МО разнообразными методами. Программное обеспечение системы АЛМАК составлено в основном на языке АНАЛИТИК-79, использует его развитый аппарат символьных преобразований математических и строковых выражений, и ориентировано для работы на вычислительном комплексе СМ1410.

В.А.Коноплев [1989,1992] развил оригинальный подход к формированию моделей сложных механических систем (кинематики, динамики и управления систем твердых и упругих тел) с использованием группы преобразований векторного пространства винтов (винтового исчисления). Центральное понятие метода – структурная матрица, которая содержит информацию о мгновенной конфигурации механической системы. С ее помощью получаются квазискорости звеньев и матрица Якоби уравнений связи. Алгоритмы позволяют независимо конструировать числовые и символьные формы моделей, обеспечивают экономичную по памяти и быстродействующую организацию вычислений и их подготовки, осуществлять декомпозицию уравнений. Специальная форма записи обеспечивает скорость вычислений для динамики весьма сложной системы, близкую у теоретиче-

ости оптимальной, позволяет организовать контроль и анализ правильности вычислений, решать сложные задачи динамики и управления в реальном времени. В ряде задач комплекс АММУС использовал САВ САВАГ (В.П. Червонных [1989]).

Метод применялся в различных задачах стабилизации и управления сложными техническими системами, в том числе с разомкнутыми кинематическими цепями (В.А. Коноплев и др. [1989]). Были рассмотрены вопросы управления судами космической службы, несущими массивные антенны, транспортными роботами, упругими колебаниями авиалайнера, системами технического зрения транспортных средств и др. Разработан экономичный алгоритм компьютерного конструирования и исследования уравнений движения многозвенного динамического стелса (В.А. Коноплев, С.В. Колгунова и др. [1989]), которые используются для решения обратной задачи динамики и синтеза управления. Сформированы уравнения динамики шагающего аппарата (И.А. Махаров, В.П. Червонных, Е.В. Пантелеев [1989]).

Сложные задачи моделирования механических систем весьма большой размерности (сотни степеней свободы – для задач динамики вагонов, тепловозов, якорных и других систем) решаются Д.Ю. Погореловым [1991, 1995, 1999] с учениками в Брянске с помощью комплекса программ Универсальный Механизм, содержащего специализированную САВ. Используется структурное представление объекта как дерева подсистем, уравнения движения формируются в символьном виде и затем численно моделируется динамика системы, с учетом ее структуры, возможности разбиения на блоки.

### 3.8 Задачи управляемости, наблюдаемости искусственного интеллекта

Работа по созданию на ЭВМ системы логического вывода и поиска решений задач математического моделирования, динамики и управления для сложных нелинейных систем – пакета ЭВРОЛОГ (В.М. Матросов, С.Н. Васильев, В.Г. Каратуев, Е.А. Суменков [1984], И.Н. Ворожцова, М.В. Почтаренко [1990], V.M. Matrosov, V.A. Rayevsky и др. [1994]) – ряд лет велась в Иркутском ВЦ РАН.

Метод векторных функций Лапунова (ВФЛ) является эффективным и строгим методом анализа динамических свойств сложных систем различной природы. Теоретический аппарат метода ВФЛ составляют так называемые теоремы сравнения и теоремы о динамических свойствах. Алгоритмизация и автоматизация вывода теорем с ВФЛ выполняется на основе принципа сравнения, в наиболее общей форме сформулированного как правило вывода теорем в исчислении предикатов. Его дальнейшим развитием является общий метод вывода теорем, основанный на решении логических уравнений.

Необходимые алгоритмы реализованы в пакете ВФЛ-1 (В.М. Матросов, С.Н. Васильев, В.Г. Каратуев, Е.А. Суменков [1984]). Пакет обеспечивает в диалоговом режиме выбор описания математической модели исследуемой системы, формализацию определений изучаемых динамических свойств, выбор описания системы сравнения и отношений связи, вывод лемм и теорем сравнения, а также теорем о динамических свойствах. При работе в пакете обрабатываются различные типы символьных данных и теоретико-множественных объектов. Эффективность разработанных алгоритмов превосходит эффективность универсальных алгоритмов, например, резолюционного типа, так как они практически исключают лербор в процессе вывода теорем. Потеря универсальности компенсируется массовостью рассматриваемых задач вывода теорем с ВФЛ и их аналогами, практической значимостью получаемых теорем и во многих случаях их новизной. Опыт использования пакета и результаты докладывались на конгрессе IAC'94.

Одной из подсистем ЭВРОЛОГА является САВ ДУМА (И.Н. Ворожцова, М.В. Почтаренко [1990]), позволяющая использовать методы компьютерной алгебры в

процессе решения задач динамики и управления. В нее включены пакеты, осуществляющие моделирование механических и управляемых систем, построение нелинейных и линеаризованных уравнений в окрестности частных решений, построение первых интегралов для некоторых классов ОДУ, получение необходимых и достаточных условий устойчивости. Символьные вычисления в ЭВРОЛОГ используются также для поддержки функционирования вычислительных пакетов.

При решении задач управления и наблюдения важную роль играют свойства управляемости, достижимости и наблюдаемости рассматриваемых динамических систем. Алгоритмы анализа подобных свойств присутствуют в ряде работ Е. Я. Сабитова [1977] и др., А. С. Землякова, Е. Я. Сабитова [1977] и др., И. С. Добрынина, И. И. Карпова и Ф. Л. Черноусько [1994], Ю. Котта [1992], Ю. Котта и Р. Роомельди [1987], А. В. Бяшикова, Л. А. Бурлаковой, В. Д. Иртегова [1989] и других, – как элементы общего комплекса исследования, причем были реализованы в основном методы, ориентированные на линейные управляемые системы.

С. С. Войтенко и Е. Я. Смирнов [1983] рассматривали нелинейные динамические системы наблюдения с управлением общего вида. Для проверки критериев управляемости и наблюдаемости проводится вычисление итерированных производных Ли от векторных полей и скалярных функций, описывающих поведение динамической системы, определяется ранг матриц управляемости и наблюдаемости. Реализованы конструктивные критерии достижимости и наблюдаемости и простые алгоритмы их проверки, в виде пакета программ на Reduce, позволяющим в диалоговом режиме анализировать свойства системы.

Различные классические методы определения орбит по угловым измерениям (Гаусса, Лапласа) и их современные модификации приводят к необходимости решения систем нелинейных алгебраических уравнений Лагранжа. Результаты вычислительного эксперимента показывают, что при определении орбит ИСЗ наблюдателем, находящемся на орбите спутника Земли, известные итерационные методы решения системы уравнений Лагранжа зачастую сходятся к посторонним корням. Предложен способ решения, основанный на сведении различных методов к решению уравнения Лагранжа в канонической форме, отысканию всех его положительных корней и отбраковке посторонних по определенным критериям. Такой подход позволяет проводить анализ точности получаемых параметров орбиты. Создана система критериев применимости методов определения орбит для случая наблюдения с орбиты ИСЗ. Использовалась САВ Reduce.

Интеллектуализация работы САВ, использование ее не только для громоздких преобразований формул, но и в языковом аспекте (подобно рефалу и другим) при автоматизации программирования и решения прикладных задач ведется в Киеве, в рамках развития языка АНАЛИТИК (В. П. Клименко, А. Л. Ляхов [2003]). Новые возможности используются для автоматизации описания сложных объектов, поиска решения, сопряжения, согласования большого числа элементов и фрагментов вычислений (подробнее ниже, в разделе 3.9).

Дополнительный материал по ряду задач и САВ см. в разделе 2.4 и трудах конференций (*Ленинград-88-89, Севастополь-91* и др.).

### 3.7 Небесная механика

Небесно-механические приложения аналитических вычислений были среди лидеров в применениях САВ. Этому способствовал яркий всплеск интереса к прикладной небесной механике в связи с запуском искусственных спутников Земли, необходимость решения новых, существенно более сложных задач при условии обеспечения высокой степени точности. Классические методы небесной механики также подготовили задачи и математический аппарат для применения

СAB были получены ярые результаты, служившие примером плодотворности аналитических вычислений на ЭВМ – D Vartop [1966], а позже A Depnt и A Rom [1968] на СAB повторили классическую теорию движения Луны Делоне (в рядах, которые строилась им 20 лет), причем была обнаружена ошибка в шестом приближении. Среди пионерских работ по СAB в нашей стране были и работы в области небесной механики – В А Брумберг [1963], В А Полозова и В А Шор [1963].

Небесно-механическим приложениям СAB и специализированным СAB было посвящено немало обзоров MS Davis [1968], J Kovalevsky [1968], J van Hulzen, J Calmet [1983, 1985], J Calmet, J van Hulzen [1983], В А Брумберг [1974, 1995], В А Брумберг, С В Тарасевич и Н Н Васильев [1989], Н В Емельянов [1980, 1983], В С Уральская и С Г Журавлев [1980], В И.Скрипниченко [1975], Информатор-83 и т.д. Обзор СAB для ОТО был дан R A D'Inverno [1975] и, позже, С А Притомановым [1992]. Ряд работ – в трудах конференций Ленинград-88, -89, С Петербурга-91, -92, -95 и в Томских сборниках «Астрономия и Геодезия». О некоторых работах говорилось выше, в разделах 1.1 и 1.3, поэтому описание может быть кратким. Решения задач и разработка систем СAB небесно механического профиля представлялись в списке литературы именами авторов. Некоторые задачи прикладной небесной механики (космодинамики) рассмотрены в главе 4.

Значительный потенциал универсальных и специализированных СAB для задач небесной механики был найден в Институте теоретической астрономии АН СССР (В А Брумберг, Н Н Васильев, И О Бабаев, А В Васильева, Л С Евдокимова, С В Тарасевич, Т В Иванова, А В Кузьмин, А Л Кутузов, А Г Сохольский, И И Шевченко и др., см. обзоры В А Брумберг [1974], В А Брумберг, С В Тарасевич, Н Н Васильев [1989]). Был разработан ряд систем на БЭСМ-6 (фортран), с помощью которых решались задачи по теории движения Луны, планет, спутников планет, искусственных спутников Земли. Эти системы могли быть использованы при решении других задач, в которых осуществляются операции с рядами Тейлора Пуассона с полиномами Чебышева, с полиномами и рациональными функциями. Имелись алгоритмы чебышевской аппроксимации, методы Цейделя, Крылова-Боголюбова, арифметика чисел произвольной точности, быстрое вычисление значений рядов, содержащих тысячи членов (обобщение метода Горнера).

В Томском университете на базе СAB Авто-Аналитик (Е А Арайс, Г В Сибиряков) была построена специализированная система БОРА (Ю Б Шмидт) для операций с рядами Пуассона. Строились аналитические решения ограниченной задачи трех тел до 11 порядка малого параметра, полуаналитическая теория движения ИСЗ, аналитическая теория движения спутников Юпитера, алгоритмы преобразования Ли (Т В Борогодицина, Т С Бороненко, Л А Московкина, Ю Б Шмидт).

В общей теории относительности для операций над тензорами в ИТА АН была создана СAB GRATOS (С В Тарасевич, В А Брумберг). Строились приближенные уравнения движения для релятивистской задачи N тел, определялись гравитационные возмущения, вызываемые системой макроскопически изолированных тел, и др. Ряд решений в ОТО был получен В А Хлебниковым в МГУ [1976].

Работы по методам вычисления орбит ИСЗ был выполнены Н В Емельяновым в ГАИШ Московского университета, используя СAB ИТА АН СССР и свои специализированные программные системы аналитических преобразований.

Вопросы нормализации и устойчивости в различных задачах исследовались А П Маркеевым, А Г Сохольским, С В Медведевым, А Д Брюно, В Ф Еднералом, О А Хрусталевым, В Д Иртеговым, М А Новиковым, И И Шевченко, С А Хованским.

В последние годы был решен ряд новых задач. Разработаны теории движения спутников с сильно эллиптическими орбитами (А Г Сохольский, А А Вахидов, Н Н Васильев [1995]), Т В Иванова [1997] с помощью новой версии УПП – PSP строи-

ла теорию движения Луны с учетом возмущения планет Е.А.Гребеников с учениками [2002] исследовали устойчивость стационарных решений в новых задачах – ограниченной задаче N тел В.В.Видякин [2004] с учениками применяли САВ для компактного построения силовой функции и ее производных а задачах о поступательно-вращательном движении N тел, в частности, планет

### 3.8 Моделирование и проектирование, планирование эксперимента

Один из типичных случаев применения САВ – это формирование модели объекта и просмотр многочисленных ее вариантов, анализа динамических свойств, – задача, часто возникающая при проектировании. Решение ее в символьном виде позволяет легче и быстрее исследовать характеристики механизма. Наряду с формализацией представления задачи, ее зависимости от конструктивных параметров, САВ используются на разных этапах моделирования, анализа свойств системы и т.п. Диалог у САВ делает ее удобным инструментом исследования.

В работе Д.Бестле, В.Шилена, П.Эберхарда [1993] предложена процедура автоматизированного проектирования транспортного средства с активно управляемой подвеской, включающая составление математической модели и расчет оптимальных параметров. Автоматическое составление уравнений движения на компьютере и анализ чувствительности позволяют сократить время, требуемое для проектирования таких систем. Существенного улучшения качества подвесок можно добиться только на пути их оптимизации с использованием достаточно полной модели. Исходя из геометрического описания отдельных тел и соединяющих их шарниров САВ NEWUCL (E. Kreuzer, G. Leister [1991]) формирует уравнения движений в символьном виде и строит соотношения для анализа чувствительности. Любой параметр, входящий в уравнения движения системы, может использоваться как варьируемая переменная. Частные производные по варьируемым переменным и фазовым координатам вычисляются при помощи пакета MAPLE. Уравнения движения и сопряженные уравнения интегрируются численно.

М.Вукобратович, Д.Стохича [1989] описывают пакет программ для моделирования гибкого производственного модуля (ГПМ), включающего не менее двух роботов, способных обслуживать до десяти станков с ЧПУ (числовым программным управлением) различных типов. Моделирование роботов в ГПМ можно проводить с использованием трех различных моделей: а) полной динамической модели робота, б) кинематической модели робота, в) простой модели робота в форме конечного автомата. Пакет для построения управления на всех уровнях позволяет выбирать закон управления и вычислять параметры управления. Чем сложнее модели и алгоритмы, тем лучше планирование, но за счет большего времени счета. Динамическая и кинематическая модели механической части робота формируются в символьно (M. K. Vukobratovic, N. M. Kirčanski [1984]).

М.Вукобратович, Н.Кирчанский, Т.Петрович [1992] рассмотрели вопросы создания нового класса высокомоментных исполнительных механизмов с системами управления, позволяющими компенсировать нелинейные динамические воздействия во время работы манипулятора. Увеличение механических возможностей робота влечет необходимость обеспечения в его системе управления высокой частоты вычислений и высокой частоты квантования. Предложена новая структура регулятора робота, основанная на использовании центрального компьютера и последовательно соединенных процессоров конвейерного типа. Разработан новый алгоритм планирования распределения вычислений.

Предлагаемый алгоритм управления для последовательных процессоров конвейерного типа основывается на символьных моделях робота, поскольку их вычислительная сложность достаточно мала. Планирование осуществляется в два

этапа. На первом этапе определяется группа операторов, которые могут быть вычислены параллельно. На втором этапе формируется таблица зависимости символов и данных и вводится квадратичный критерий, учитывающий как время вычислений, так и время обмена информацией. Минимизация этого критерия позволяет оптимизировать процесс планирования.

При реализации регулятора динамической компенсации в контурах прямой или обратной связи важно выбрать наиболее эффективный способ моделирования динамики, чтобы минимизировать вычислительные операции, выполняемые каждым процессором. Как известно, один из лучших методов моделирования основан на использовании символьных вычислений. Дано описание построения символьной модели с подстановкой конкретных численных значений по мере необходимости, изучается оптимальное сочетание символьных и численных преобразований. Учет индивидуальной структуры робота значительно уменьшает вычислительную сложность его символьной модели по сравнению с численной. Сравняется вычислительная сложность предложенного символьно-численного метода с чисто символьной и численной на примере робота Стэнфордская рука.

Широкую картину применения САВ в моделировании и проектировании сложных механических систем дают материалы Симпозиумов IUTAM 1977 г. в Мюнхене и 1986 г. в Удине, собранные в книге под редакцией W. Schiehlen [1990]. Значительная часть представленных в ней работ выполнялась в специальных ВЦ, на фирмах, в Технических университетах и была рассчитана на автоматизацию технического проектирования и расчетов. Область применения определяет совместное рассмотрение пакетов программ численных, символьных и смешанных. Теоретические направления, определившие разработку и распространение ведущих и старейших из систем проектирование автомобилей и транспорта, движения спутников, манипуляторов и роботов, в том числе в атомной энергетике.

Приведенные в книге 20 программных комплексов для автоматизации исследования механики систем многих тел различны по уровню, количеству пользователей, совершенству возможностей. Знаменитая ADAMS (численная с САВ компонентой, Appl Arbor, США) имела более 500 пользователей, свои конференции пользователей (Детройт, 1986, 4 и 5 Европейская, Марбург, ФРГ, 1987, 1988, Appl Arbor, 1988, Токио, 1989 и др.). Три следующие по числу пользователей имели их более 100. Одна из них, AUTOLEV, численно-символьная (D. A. Levinson, T. R. Kane [1990], Стенфордский университет, Калифорния). Среди авторов систем есть известные ученые, авторы оригинальных методик: D. Paul [1975] (также W. Schiehlen [1990]) (системы DYMAC для проектирования автомобилей, DYSPAM - для спутников, Пенсильвания, США), M. Vukobratovic с соавторами, Белград (SYM), L. Lilov и др., София (CAMS), J. Wittenburg с соавторами [1990], Карлсруэ, ФРГ (MESA VERDE), W. Schiehlen, E. Kreuzer и W. Schiehlen [1990, 1991] (NEWSEUL). Есть системы мало распространенные, недавно выполненные, есть символьные аналоги уже развитых численных систем (ROBOTRAN из системы AUTODYN, Лувен, Бельгия). Среди приведенных систем больше половины (и почти все САВ) - европейские, однако не все известные зарубежные САВ были охвачены - например, система K. Handel [1989] (Карл-Маркс-Штадте).

Почти все системы написаны на фортране, 6 имеют компоненты на паскале и си (и одновременно символьную компоненту). Спектр приложений большинства систем очень широкий: транспортные устройства (автомобили, вагоны), авиация и спутники, машины и механизмы, манипуляторы и роботы, движение человека и спорт. Почти все системы используются во всех перечисленных направлениях (ведь половина из них имеет более 20 пользователей). Во многих случаях исследование механической системы учитывало системы управления. Системы

тестировались на двух примерах движения плоского семиизменного механизма с замкнутым контуром и одной степенью свободы и манипулятора с пятью степенями свободы - с графическим представлением результатов моделирования

При проектировании решение задачи в символьном виде позволяет легче и быстрее проводить монтаж системы, варьировать ее компоновку и заменять отдельные узлы, изучать характеристики, исследовать устройства управления и поведение объекта, находящегося под их воздействием, устойчивость, переходные и колебательные процессы, и прочие. Автоматизация захватывает задачи проектирования машин и механизмов, включая этап составления уравнений движения изучаемых объектов, проектирование и исследование систем радиоэлектроники, создание проблемно-ориентированных языков САПР. Использовались специализированные и универсальные САВ (см. выше в разд. 1.3, 2.4 и в табл. 3, где дан материал и по конкретным работам). Доклад о применении САВ в системах САПР был сделан еще в Горьком-84 А. В. Сергеевским и М. А. Чубаровым.

В Ленинградском электротехническом институте разработана специализированная система СПИН для построения математических моделей гироскопических устройств (Р. И. Сольников [1985], Р. И. Сольников, И. В. Ковтун, А. С. Пресняк [1981]). Система уравнений Лагранжа II рода формируется по геометрическому описанию. Есть процедуры линеаризации уравнений, приведения к форме Коши, представления уравнений в матричном виде и т. д. Электрическая часть системы описывается передаточными функциями. Общение с системой осуществляется на специальном проблемно-ориентированном языке. С помощью пакета получены полные математические модели гировертикали на подвижном основании, трехосного гиросtabilизатора и некоторых других устройств. Пакет использовался в учебном процессе в курсе САПР электромеханических приборов.

В Киевском политехническом институте разработана специализированная система для автоматизированного составления уравнений движения системы твердых тел с упругими связями (М. М. Т-1/УТ, С. Я. Свицунов, И. В. Губарь, О. Н. Ковбаско [1984] и др.). Пакет обеспечивает решение двух основных задач: составление дифференциальных уравнений движения высокой степени приближения и исследование их численными методами, такими как интегрирование линейных и нелинейных систем уравнений, вычисление собственных значений и собственных векторов, усреднение. Составлялись и исследовались уравнения гиросtabilизатора, гиросtabilизированной платформы и др.

В САПР радиотехники САВ на малых компьютерах помогали создать «интеллектуальный терминал», позволяющий вести работу на привычном проблемном языке достаточно высокого уровня (А. А. Молчанов, И. Ф. Зинченко [1988]).

Систему планирования физического эксперимента Comp-NEP — его моделирования с целью оптимизации и повышения эффективности для задач ядерной физики разработали Э. Э. Боос, М. Н. Дубинин, В. Ф. Еднерал и др. [1989] в НИЯФ физфака МГУ. На ее примере ярко видны особенности этого класса задач и достоинства САВ при их решении на этапе формализации задачи, организации взаимодействия системы с пользователем (проблемно ориентированный диалог и сервис). Поэтому мы отмечаем эту систему среди САВ механического профиля.

Сведения о ряде разработок и задач см. также в 2.4, 2.5 и в материалах конференций Ленинград-88, 89, Вильнюс-90, Севастополь-91 и других.

### 3.9 САВ и задачи механики сплошных сред

В механике сплошных сред использование САВ началось с самых первых дней. Среди первых отечественных работ по САВ мы видим работы по теории упругости В. К. Кабулова [1963] и его ученика В. А. Толоха [1964] в Ташкенте. Поли-

номинальная система ПРОРАБ, созданная в Ленинграде Т Н Смирновой [1962], применялась в этой же области, одна из публикаций ее помещена в качестве приложения к известной книге С Г Михлина К пионерским работам по САВ относятся и первые труды Н Н Яненко (В А Шурьгин и Н Н Яненко [1961]) по дифференциальным формам для задач газодинамики, развитые впоследствии им с учениками (Е А Арайс, Н Н Яненко [1972], А Н Валлиулин, В П Шапеев и др., такие в гл 4) Имелись обзоры А А Самарского и М Ю Шашкова [1984] в задачах вычислительной математики, В И Савченко [1988] и др. в механике твердого тела

Применению САВ в механике твердого деформируемого тела, в области упругости и прочности способствует многое – важность разнообразных задач, громоздкость применяемых вычислений, развитие аналитических методов представления решений в форме рядов разного рода (многие из которых были развиты отечественными учеными, в частности, в научных школах Ленинграда, Москвы, Ростова на Дону) САВ применялись при автоматизации вывода громоздких уравнений и в методе конечного элемента (МКЭ) Построение решения с помощью аналитических разложений по системам функций в теории оболочек успешно использовались киевской школой В А Савченко в задачах с ребрами, угловыми точками и другими особенностями, когда плохо работают численные методы

Работы по САВ в механике твердого деформируемого тела были представлены на многих конференциях по САВ Не являясь специалистами в этой области и не отслеживая соответствующие работы, мы, чтобы дать некоторое представление о них, решили выбрать ряд ссылок из материалов нескольких конференций, где они были достаточно хорошо представлены Названия работ нередко характеризуют предмет и метод исследования Выбраны конференции и работы

- *Горький-84* В Б Анисимова, В П Савченко и др., Г Г Гордеев, А А Илюхин, Б П Довгий, Л В Мольченко, Ю И Ключев и др., В Е Крютченко, С Н Леора и др., В А Гордон и др., В П Годенко, В И Герман, В В Кобелев, Л В Проворов и др., В Н Мартыненко, М А Мартыненко, А М Чеповский; – все [1984]
- *Вильнюс-84* Р В Белявичус, Р А Бараускас и др., А С Гульбинас и др., А П Кульветис, Г П Кульветис – все [1984]
- *Киев-88* В И Савченко, В Б Анисимова, Ю Н Намиш, И В Алексеева, А Б Мовчан, А А Капшивый, Л Н Ломонос, Н Н Стоян, Е В Воскресенская, В И Демура, В Н Мартыненко и М А Мартыненко – все [1990]
- *Минск-97* А Н Спорыхин, О С Черненко, А О Ватуляян, А Н Соловьев, Ю В Позняк, А В Чигарев, С В Воробьев, О В Машкова – все [1987]

Надеемся, что такой способ даст некоторое представление о возможностях и практике использования САВ в этой важной области механики Примером применения САВ в одной из работ недавнего времени – уже привычного, без упоминания о САВ – может служить статья О Н Дмитриенко и Д Ю Погорелова [2003]

Еще одним современным примером служит цикл работ А Л Ляхова, использующего АНАЛИТИК в последних версиях (-93, -2000, В П Клименко, А А Морозов и др [1995]) Кроме традиционных применений САВ в громоздких преобразованиях формул, в них развивается “языковое” использование АНАЛИТИК (подобно рефалу и другим языкам, В П Клименко, А Л Ляхов [2003]) – для описания сложных объектов, автоматизации поиска решения, сопряжения, согласования большого числа элементов и фрагментов вычислений – в задачах упругости

Первая группа задач касается геометрического проектирования, когда объект задается набором фрагментов со своими описаниями, системами уравнений, данных, условиями сопряжения и т п Указанный подход и мат обеспечение позволяют генерировать описания, базу данных, аналитические выражения для

фрагментов объекта, их стыковку и собирание по исходным данным. Пример – программное обеспечение расчета геометрических центров деформации при прокате фасонных профилей (трамвайного рельса – 29 фрагментов описания объектов, 116 систем уравнений для построения решения). Другая задача – моделирование изгиба композитных брусков кусочно-однородной структуры. Сложность ее в вычислении двойных интегралов как функции параметров для подынтегральной функции с разрывами первого рода на границе заданного многоугольника. Моменты переключения вида функции при переходе границы определяется в процессе счета, что весьма трудоемко и встречается в различных приложениях. Формальное описание объекта и задачи, как текста позволяет проводить проверку корректности, сопряжения фрагментов, а также генерацию программ для численного счета (А. Л. Ляхов [1999]).

Третья группа задач – создание программного обеспечения для подготовки программ численного моделирования на базе МКЭ для пространственной задачи теории упругости с учетом внутренних включений. Использование системы фундаментальных решений (с применением САВ, и высокой точностью расчетов) затрудняется громоздкостью и трудоемкостью на подготовительном этапе (стыковка данных на границах включений). АНАЛИТИК-93 позволяет генерировать автоматически описание объекта, программ на Фортране MS, преобразование, анализ и контроль фортранных текстов, учет связей и зависимостей между ними, контроль и согласование, верификацию программ (А. Л. Ляхов [1998]).

К анализу и численным методам механики сплошных сред относятся исследования по дифференциальным формам Н. Н. Яненко и его учеников В. П. Шалеева, А. Н. Валлиупина, В. Г. Ганжи, Е. А. Арайса и других, а также В. Л. Топунова (см. эти фамилии и гл. 4). К групповому анализу, совместности и разрешимости уравнений механики сплошных относятся работы В. Л. Каткова, В. В. Корняка и В. И. Фушича, В. Л. Берковича, А. А. Бармина и других. Вычислительные аспекты рассмотрели А. А. Самарский, М. Ю. Шашков [1984]. Об автоматизации построения разностных схем см. у М. Ю. Шашкова, И. Б. Щенкова [1983], С. И. Мазурика, В. П. Шалеева [1984].

В других областях механики сплошных сред (гидро, аэромеханике и механике плазмы) построения решений в рядах не столь многочисленны, как в механике деформируемого тела. Приведем некоторые ссылки из числа старых работ А. Вегс, J. L. Килл и С. F. F. Каттеу [1976], Л. Н. Платонова и М. Ю. Шашков [1983], Б. А. Бублик и В. А. Щербина [1984], Я. М. Кавдан, И. Б. Щенков [1989], Д. Л. Шишков [1989], С. Я. Герценштейн, Е. Б. Родичев, В. М. Шмидт [1984].

В заключение отметим, что САВ использовались не только в механике. Их применение в математике, – как для задач математически, так и при реализации в различных методах и алгоритмах, – было затронуто выше, в разделе 2.1. О некоторых из математических САВ, алгоритмах и их применениях можно получить представление по названиям статей в списке литературы. Много материала имеется в трудах Дубнинских конференций. Вопросы обсуждения обсуждались в главе 1.

САВ использовались и при решении разнообразных задач физики. Известный обзор В. П. Гердта, О. В. Тарасова и Д. В. Ширкова [1980], привлекая широкое внимание к символическим преобразованиям, опирался на применения САВ в теоретической физике и физике высоких энергий. В нашей стране эти работы вошли в ОИЯИ в Дубне, в НИИ ЯФ МГУ, в ИЯФ СО АН в Новосибирске и других местах. Работы по физике см. Дубна-80, -83, -85, -90 -2001.

Число задач, для решения которых привлекаются САВ, велико и непрерывно растет. Многие из них, несомненно, останутся вне нашего поля зрения.

Институт прикладной математики Российской Академии наук был создан М В Келдышем в 1953 году для решения важнейших комплексных научных задач, первоначально – для расчетов в связи с созданием ядерного оружия. Затем это были задачи освоения космоса, кибернетика, ядерная физика и термоядерный синтез, программирование. Институт объединил специалистов различных областей – физиков, математиков, механиков, программистов и создателей вычислительных машин. Среди них – такие крупные ученые как А Н Тихонов, К И Бабенко, И М Гельфанд, И Б Зельдович, С П Курдюмов, А А Лялунов, О Б Луанов, А Н Мямлин, Д Е Охоцимский, А А Самарский, К А Семендяев, М Р Шура-Бура, Т М Энеев, В С Яблонский и многие другие. Соединение сложных задач и разнообразных математических методов с активным, пионерским использованием вычислительной техники, энтузиазмом развития ее – дали немало ярких идей. Мысли о символьных вычислениях возникли вскоре после создания ЭВМ, как желание научить их работать с формулами и облегчить громоздкий труд физика или механика. На примере старейшего вычислительного центра нашей страны (а также работ сотрудничавших коллективов) рассмотрены тенденции в развитии и применении Символьных Преобразований (Символьных Аналитических Вычислений – САВ, или Компьютерной Алгебры, как их называют сейчас), затреговант-ся исследования и в смежных областях символьных, не численных вычислений. Часть материала пересекается с изложением предыдущих глав.

1 Интересно проследить истоки работ по САВ в нашей стране. А П Ершов и М Р Шура-Бура [1976] в своем историческом обзоре упоминают только работы ленинградцев по САВ. Перечислим некоторые пионерские работы по САВ первой половины 1960-х годов.

Постановка задачи САВ впервые прозвучала в пленарном докладе А А Дородницына [1956] на Первой Всесоюзной конференции по программированию 1956 года. Построить на компьютере решение в виде двух аналитических асимптотик, соединенных в единое решение численно. Физический смысл задачи – исследование ядерного взрыва в атмосфере, которым тогда усиленно занимались, в том числе в ИПМ (тогда – засекреченном Отделении прикладной математики Математического института им В А Стеклова АН СССР), где А А Дородницын заведовал отделом до организации ВЦ АН СССР в 1954 году. Две асимптотки – вблизи центра взрыва и на удалении от него. Построение Д Е Охоцимского [1964] в точности соответствует этой постановке, только относится к динамике космического полета – состоит из двух асимптотик, объединяемых участком численного счета. На постановку А А Дородницына ссылается А А Столний [1962], ученик В М Глушкова, предположивший алгоритм дифференцирования функции (реализованный на МЭСМ, одной из первых ЭВМ) и построения аналитического решения на компьютере – вероятно, первая работа известной киевской школы по САВ (в которой был создан язык САВ АНАЛИТИК, реализованный аппаратно и, позже, программно, и разнообразные его приложения В М Глушков и др. [1971]).

Одновременно в Ленинградском отделении МИАН им В А Стеклова Л В Канторович с сотрудниками (также участвовавшие в атомном проекте) работали над задачами САВ. В докладах на Математическом съезде Л В Канторович [1957] предлагает идеи о представлении данных в САВ. Т Н Смирнова [1962] создает полиномиальную систему аналитических вычислений (САВ) «Полиномиальный Прораб», впоследствии использованную в задачах теории упругости В А Брум-

берг [1963], Н Г Полозова и В А Шор [1962] в Институте теоретической астрономии АН СССР начинают работы по САВ, широко развитые позже

Н Н Яненко в сборнике «Проблемы кибернетики» [1961] исследовал и реализовал на Стреле метод Картана анализа совместимости систем дифференциальных уравнений в частных производных. Н Н Яненко был первым ученым секретарем ИПМ, после работы в закрытом научном центре на Урале (где, вероятно, выполнена эта работа), он работал в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске, где активно развивал САВ. В Новосибирске собрались многие из пионеров САВ, включая Л В Канторовича, А П Ершов с сотрудниками много работали по САВ в ВЦ СО АН СССР в Новосибирске, обзор их ранних работ дан у М М Бежановой, В Л Каткова, И В Поттосина [1972] и А М Miolla, I V Pottošin [1981]. До 1961 года А П Ершова он работал в ВЦ АН СССР, но в обзоре с М Р Шурой-Бурой о САВ не упоминается.)

Работы по САВ выполнялись и в Ташкенте, В К Кабуловым [1963] и его учеником В А Толоком [1964] с приложением к различным задачам теории упругости.

2. Первой областью применения САВ в ОПМ-ИПМ была прикладная небесная механика. В ней имелся классический задел применения полиномиальных построений разного вида и целый ряд задач. Попытки автоматизировать эту работу относятся к началу 60-х годов. Выкладки с тригонометрическими и степенными рядами были проделаны З П Власовой и И Б Задыхайло еще на одном из первых советских компьютеров Стрела (не опубликовано). Д Е Охочимский [1964] (также на Стреле) построил универсальное решение для разгона космического аппарата с малой тягой. Две асимптотики монотонно изменяющегося решения строились в виде степенных формальных рядов вблизи сингулярных точек и соединялись в регулярной области численно. Г Б Ефимов [1970] развивал этот подход для простейших рядов Пуассона (тригонометрически-степенных) при построении с помощью САВ оптимальной траекторий разгона с малой тягой. Программировала обе задачи Т И Фролова.

С 1970 года А П Маркеев [1970] использовал САВ для нормализации гамильтоновых систем и анализа устойчивости периодических решений. Дальнейшие шаги в этом направлении были сделаны А П Маркеевым и А Г Сокольским [1975]. Созданная ими научная школа успешно развивалась затем в Московском авиационном институте и Институте теоретической астрономии (А Г Сокольский [1981, 1991]), где была также известная школа по САВ В А Брумберга. В трудные 1990-е годы в ИТА регулярно собирались конференции, где была представлена и тематика САВ. В МАИ работы по САВ развивались и в направлении компьютерного обучения – А П Маркеев и др [1985], В Г Веретенников и др [1990]. В А Сарычев и С А Гутник [1984] применяли САВ в задаче об устойчивости равновесия спутника. О работах по небесной механике школы А Д Брюно скажем ниже.

Большие, масштабные задачи, решавшиеся в ИПМ, а также дефицит машинных ресурсов с трудом позволяло использовать символичные преобразования и те примитивные САВ, которые тогда существовали. Вместо этого создавались алгоритмы, близкие САВ идейно, позволявшие решать нужные задачи иным путем. М Л Лидовым и его учениками, начиная с 60-х годов проводились эксперименты по САВ. З П Довженко [1963] создала и использовала полиномиальную САВ (на Алголе) для построения решения задачи Хилла. Л М Бакума создавала систему для рядов Пуассона. Дефицит ресурсов при общности подхода в разработке и применении САВ не позволил уйти дальше экспериментов. М Л Лидовым [1978] был предложен численно-аналитический метод, позволяющий избежать громоздких выкладок (требующих применения САВ). Для расчета эволюции спут-

никовых орбит при возмущениях различного рода аналитически строилась функция Гамильтона (часто с использованием осреднения). Ее дифференцирование, нужное для построения уравнений движения, преобразования координат (от точных к осредненным и обратно) и вычисления правых частей уравнений движения (на каждом шаге интегрирования), проводились численно, через разности. Этим методом был решен ряд задач динамики спутников (М.А. Вашковьяк [1983], диссертации А.А. Соловьева [1974] и Ю.Ф. Гордеевой [1973]).

Пример работ М.Л. Лидова демонстрирует причины ограниченного успеха САВ в ИПМ, разочарования в них. Первые системы САВ общего типа имели слабые возможности, низкую эффективность и плохое соединение с численными программами. САВ удавалось использовать либо для очень специальных, либо для методических задач. Серьезность решаемых в Институте задач, при постоянной нехватке машинных ресурсов создавало трудности с применением САВ, толкало на поиск нужного решения иными способами, как это сделал М.Л. Лидов. Становилось ясно, что алгоритмы и программы САВ являются самостоятельной областью и требуют специальной разработки. Среди механиков ИПМ попытку создать универсальную САВ на БЭСМ-6 предприняли Ю.А. Садов и Е.Ю. Скляренок [1972].

3 Интересной страницей в отечественной кибернетике является Рефал В.Ф. Турчина [1968, 1971], основанный на новом принципе программирования – ассоциативной обработке текстов на основе теории рекурсивных функций, без адресного управления программой. САВ оказалась среди потенциальных областей приложения нового языка – В.Ф. Турчин [1972]. Первая реализация языка носила скорее «научный», чем прикладной характер, язык оказался изолированным от «обычного» матобеспечения – численных пакетов, поддержки библиотек, распределения памяти и т.д. Потребовались дополнительные усилия многих людей, чтобы сделать дальнейшие модификации Рефала практически используемыми, в частности, для приложений САВ. С.Н. Флоренцев, С.А. Романенко, Анд.В. Климов и другие были авторами первых эффективных Рефал-компиляторов.

Первым применением Рефала в символических преобразованиях было решение А.П. Будником, В.Ф. Турчиным и др. [1970] задач ядерной физики. И.Б. Щенков [1984, 1989] разработал САВ общего назначения SANTRA и позже модифицировал ее. На ее основе им вместе с М.Ю. Шашковым [1983] была создана специальная прикладная система DISLAN для построения нестандартных разностных схем. М.Л. Лидов и Л.М. Бакум (как уже отмечалось) были среди первых пользователей Рефала в прикладной области. Аналогичные попытки в теории групп были предприняты Н.Х. Ибрагимовым и И.Б. Щенковым.

Группа энтузиастов Рефала и САВ объединялась вокруг ИПМ и работала в тесном контакте с Институтом. В.Л. Топунов [1975] со своими коллегами из МГПИ использовали САВ на Рефале в дифференциальной геометрии. Вместе с В.П. Шаповаловым и другими учениками Н.Н. Яненко в ИТПМ СО АН СССР в Новосибирске они реализовали метод внешних форм Картана и исследовали характеристики дифференциальных схем (А.Е. Арейс, В.П. Шапеев и др. [1982]) в развитие ранних работ Н.Н. Яненко [1962]. Л.В. Прохоров [1982] в ЦАГИ им Н.Е. Жуковского широко использовал САВ АЛЬКОР в инженерных приложениях. О.М. Городецкий и А.В. Корлюков (Гродно) [1984] создали САВ для моделирования динамики гироскопических систем (для Д.М. Климова, см. также его работы), А.В. Корлюков [1985] реализовал алгоритмы специальных арифметик. Л.В. Белоус [1984] в Харькове с помощью Рефала объединял несколько разных САВ в единую систему.

В ИПМ им. Келдыша под руководством А.Н. Мямлина, И.Б. Задыхайло и В.К. Смирнова изучались возможности повышения эффективности ЗВМ с помощью

Рефал-процессора (И Б Задыхайло, С С Камынин, Э З Любимский [1971], А Н Мямлин, И Б Задыхайло, В К Смирнов [1974]) Имелось в виду, что могут быть созданы специализированные блоки (или компьютеры в едином комплексе), эффективно решающие вычисления различного типа, – в том числе символьного, нечисленные, включая САВ (для которых перспективным являлся Рефал) Л К Эйсымонт [1977] проводил анализ эффективности Рефала и его аппаратной реализации, в том числе с точки зрения создания САВ Под руководством В К Смирнова на ЕС-2635 с микропрограммированием был создан Рефал-процессор ЕС-2702, работающий с машинами ряда ЕС (И Б Задыхайло, А Н Мямлин, В К Смирнов [1980], А Н Мямлин, В К Смирнов, С Л Головков [1980], история создания – В К Смирнов [2003]) На нем решались как задачи трансляции, так и задачи САВ (В К Смирнов, В Л Топунов, Д Л Шишков [1991])

Первоначально РЕФАЛ пленировался как мета-язык Действительно, он использовался в работе с языками программирования, для создания трансляторов, в широком круге текстовых задач, смежных с САВ в разной степени С П Бычков, А И Хорошилов, В А Фисун и др [1975] на базе Рефала реализовали языки моделирования Симула-1, ДИНАМО, были созданы комплекс для космических тренажеров ТРИКС, конвертор Алгол-Фортран для больших физических пакетов Создавались эмуляторы для ряда специальных компьютеров, например, Ю Ф Голубевым для бортового компьютера спутника Под руководством И Б Задыхайло и Л К Эйсымонта автоматизировалось масштабирование вычислений бортовой вычислительной машины для компенсации потери точности из-за вычислений на ней с фиксированной запятой А Н Андриянов и К Н Ефимкин и др [1990] в системе Норма автоматизировали программирование разностных схем

В свое время Н Н Яненко и другие считали, что наше отставание в компьютерной области из-за элементной базы может быть компенсировано за счет оригинальной архитектуры компьютера, совершенства математических алгоритмов и реализующих их пакетов программ На этом направлении под руководством К И Бабенко, А В Забродина, и И Б Задыхайло [1981] исследовалась возможность создания высокопроизводительного параллельного компьютера для прикладных задач, в том числе задач механики и газодинамики В недавнее время этот теоретический задел был использован при создании отечественных суперкомпьютеров (А В Забродин [2000]) Технология создания математического обеспечения, использующая Рефал, была успешно использована при создании программной среды для них (А О Лацис [2003])

4 Неудачи и трудности применения символьных преобразований (на раннем этапе) в задачах, характерных для ИМП, вызвали ощущение разочарования у ряда ведущих ученых в институте САВ оказались слишком сложными и трудоемкими при их создании и неудобными при использовании уже существующих Высокий уровень программирования пользователей позволял решать, казалось бы, все нужные вопросы и помимо САВ Но ведь так же с пренебрежением относились в свое время и к другим необходимым возможностям, – например, буквенному вводу-выводу, удобству общения с компьютером

В начале 1980-х годов САВ достигли определенных успехов Встал вопрос пропагандировать возможности и распространять опыт применения САВ, особенно в задачах механики, – например, демонстрируя их полезность на различных шагах схемы вычислительного эксперимента А А Самарского (А А Самарский, М Ю Шашков [1984], также Г Б Ефимов [1983], М В Грошева, Г Б Ефимов [1988]) Удалось использовать САВ для автоматизации построения разностных схем в областях нерегулярности (М Ю Шашков, И Б Щенков [1982]) Эта работа

привлекла внимание А.А. Самарского, одного из лидеров Института и отечественной вычислительной математики. С его помощью Институт стал одним из основных организаторов Всесоюзной конференции по применениям САВ в механике (Горький-1984), которая явилась демонстрацией достижений и подведением итогов работ по САВ в стране за двадцать лет.

Опыт работы математиков, прикладников и программистов давал основу для обобщений по САВ, объединения и четкого разделения различных точек зрения на них. Г.Б. Ефимовым, М.В. Грошевой, Е.Ю. Зуевой (*Информатор-83*, М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов [1983, 1989, 1991, 1998]), была предпринята работа по описанию САВ, классификации их и их свойств по образцу пакетов прикладных программ. Сводные таблицы характеристик ряда наиболее известных отечественных САВ оказались интересными как для пользователей, так и для разработчиков. Заказанный в 1990 году ВИНТИ обзор М.В. Грошевой, Г.Б. Ефимова, В.А. Самсонова [1992] по приложениям САВ в механике из-за трудностей издательства вышел лишь как Отчет ИПМ и Института Механики МГУ.

Еще одной областью применения САВ является динамика сложных механических систем – гироскопов, роботов и манипуляторов, космических систем (см. выше, также – Д.М. Климов, В.М. Руденко и др. [1984, 1989]). Здесь объектом применения САВ является формирование уравнений движения механической системы, их преобразования и анализ – поиск стационарных решений, определения устойчивости и т.д. (Г.Б. Ефимов и др. [1977], Д.Ю. Погорелов [1993], И.Р. Белоусов [2002]). В этой области САВ развивалась пользователями механиками, причем существующие САВ часто не могли быть использованы из-за проблем с машинными ресурсами или различия в специфике самих механических систем и алгоритмов их исследования. Каждый делал свою специализированную САВ с ограниченными возможностями, приспособленную к узкому классу задач и алгоритмов (таких САВ было создано более десятка, см. гл. 2). В некоторых случаях трудности использования САВ приводили к решению этих задач иными методами (И.Р. Белоусов [2002]). Встал вопрос о соотношении между целым рядом таких, казалось бы, подобных САВ, а также ими и САВ универсального типа, возникла задача классификации САВ, их свойств и возможностей (см. выше, глава 2) и по применению САВ в механике. Активно функционировала рабочая группа по САВ для сложных систем механики, организовывались конференции, семинары, публикации работ по САВ (например, *Информатор-83*, *Горький-84*, *Вильнюс-84* и *Вильнюс-90*, *Аналитические ППП-89*, *Ленинград-88* и *Ленинград-89*). Системы этого типа использовались в компьютерном и механическом образовании, например, учеником В.В. Белецкого Д.Ю. Погореловым [1993].

5. За долгие годы в ИПМ было выполнено немало исследований с использованием САВ. Работы по различным схемам развивались в Институте И.Б. Щекочевым, М.Ю. Шашковым и другими, в том числе в контакте с учениками Н.Н. Яненко в Новосибирске (А.Н. Валлилин, В.Г. Ганжа, В.П. Шалеев и др.), давно применявшими САВ в этой области. По гидро и газодинамике были сделаны также работы Я.М. Каждном, И.Б. Щенковым [1989], Л.Н. Платоновой и М.Ю. Шашковым [1983].

Не в ИПМ, но вблизи него, проводились исследования на известной САВ АНАЛИТИК (на языке того же названия), аппаратуре реализованной на оригинальном компьютере "МИР-2" (В.М. Глушков и др. [1974], В.П. Клименко, Ю.С. Фишман и другие, реализации на компьютерах СМ-4 и ЕС не получили широкого распространения). На нем В.А. Хлебников [1976], сотрудник отдела Я.Б. Зельдовича, еще студентом в МГУ решал громоздкие задачи общей теории относительности. Э.Э. Шноль в Пущино (где он и А.М. Молчанов, ветераны ИПМ, создали НИВЦ) поощ-

рля развитие САВ для задач применения математики в биологии например, Г П Крейцер [1975] на АНАЛИТИКЕ создал программы для анализа поведения решения системы дифференциальных уравнений Вопросы САВ обсуждались на ежегодных конференциях НИВЦ в Пушкино

В 1980-е годы ведущим центром по САВ стал ОИАИ в Дубне, где развивали и использовали в основном Лисл ориентированную САВ Редьюс Его использовали для математических и физических припожений, развития алгоритмов, консультировали по Редьюсу и распространяли его по стране Конференции в Дубне и Семинар на физ-факе МГУ были ведущими по САВ (Дубна-80,-83,-85,-90,-2001) Однако в ИПМ Редьюс не получил большого распространения из-за высоких требований к машинным ресурсам (при постоянном их дефиците), слабого интерфейса с численными вычислениями, отсутствия сопровождения и консультаций

Что касается разработки систем САВ в ИПМ, то в первое время создавались, как правило, узко специализированные системы для конкретных задач (Д Е Охотимский [1964], Г Б Ефимов [1970], А П Мөркеев [1970,1975]) Затем наступила пора САВ более общего типа (Е Ю Схляренко [1972]) Г Б Ефимов (Информатор-83, [1977,1984], разработал систему аналитических вычислений ПАС для работы с большим числом переменных, использованную в задачах двуногого шагания и управления На Рефале развивались и универсальные и специализированные системы (И Б Щенков [1984,1989], Л В Проворов [1982], М Ю Шашков [1983] и др) В последующий период использовались общеизвестные современные САВ с реализацией необходимых алгоритмов на их базе В системе Редьюс, например, работали Л Н Платонова и М Ю Шашков, С А Гутник и В А Сарычев, И Р Балуюсов [2002] и другие В последние годы САВ в составе больших пакетов программ на ПК (см С А Абрамов, Е Б Зима, В А Ростовцев [1992], Н Н Васильев, В Ф Еднерал [1994], В П Дьяконов [1993]) используется многими как необходимый и привычный инструмент (например, при выводе и преобразовании систем уравнений в задачах оптимизации, М С Константинов и др [2001], В Г Петухов [2004]), уже без специального упоминания

Среди работ последнего периода – укажем работы по многогранникам Ньютона и небесной механике, проводимые А Д Брюно (А Д Вупо [1994]) и его школой В Ф Еднерал реализовал алгоритмы нормализации гамильтоновых систем А Солеев и А Б Арансон [1994] исследовали многогранники Ньютона С Ю Садов [1995] и В П Варин (А Д Брюно, В П Варин [1995]) исследовали устойчивость движения в задачах небесной механики и периодические решения уравнений колебаний спутников А С Кулешов [2002] обобщил классическую работу Чаплыгина, применяя Мері-V, А В Ниуханен и И Б Щенков [2003] разработали систему преобразования для гипергеометрических рядов

За несколько последних лет выполнен ряд работ по истории развития и применения САВ и программных систем САВ М Grosheva, G Efimov [1998] (Prague-88), Г Б Ефимов, Е Ю Зуева, И Б Щенков [2001], В К Смирнов [2003] Секция по истории отечественных исследований по САВ была организована на конференции IMACS ACA'98 в Праге, Prague-98 К работам по истории, выполненным в Институте, относится и настоящий обзор

# ЛИТЕРАТУРА

- Абрамов С.А. [1973] PR - система для проведения действий над рациональными выражениями - В сб. Алгоритмы и алгоритмические языки (Москва), 1973, N 6, 88-112 - РЖ мат. 1974, 68963 Абрамов С.А. О суммировании рациональных функций - Ж вычисл. мат. и мат. физ. (ЖВМ и МФ), 1971, 11, N 4 1071-1075
- Абрамов С.А. [1980] Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений - Вестн. МГУ, Сер. 15 Вычисл. и киберн. 1989, N 3, 56-60 Абрамов С.А. Рациональные решения линейных дифференциальных и разностных уравнений с полиномиальными коэффициентами ЖВМ и МФ, 1989, 29, N 11, 1611-1620
- Абрамов С.А., Кашенко К.Ю. [1992] Неполная факторизация и НОД-технология. - Программирование 1992 N 5, 45-50 S. A. Abramov, M. Petrovsek. Minimal multiplicative and additive decompositions of Hypergeometric terms in one variable - Дубна-2001 17
- Абрамов С.А., Зима Е.В., Ростовец В.А. [1992] Компьютерная алгебра - Программирование 1992 N 5, 4-25
- Абросов Д.А. [2001] О симметриях гамильтоновых систем с 3/2 степенями свободы, порожденных полным набором интегралов. Задачи исслед. устойчивости и стабилизации. Ч. 2 ВЦ РАН 2000 3-28 Также Тез. 5 Межд. симпозиум по классич. и небесн. механике Вильнюс Лухи, авг. 2001 М. ВЦ РАН 2001 8-9
- Адамчик В.С., Килбас А.А., Лухко Ю.Ф., Маричев О.И. [1992] О вычислении дробных интегралов и производных в системе Reduce - ППП Программное обеспечение математического моделирования М., 1992, 24-36 V.S. Adamchik, Yu.F. Luchko, O.I. Marchev The Evolution of Integrals of Hypergeometric Functions - Дубна-90, 74
- Аксальрод И.Р., Белоус Л.Ф. [1973] Программирование на языке СИРИУС - Харьков-72, 68-120
- Акулинич Л.Д., Липов Л.К., Лорер М.Е., Михайлов С.А. [1989] Ориентация схвата нагруженного электромеханического манипулятора антропоморфного типа - Изв. АН РАН Техн. кибернетика 1989 N 4
- Алгоритмы и программы небесной механики Всес. совещ. Ленинград-1990 Тезисы - Препр. ин-та астроном. АН СССР Л., 1990, 80 с
- Алексеев А.С., Чубаров М.А. [1978] О численно-аналитическом построении областей абсолютной устойчивости - Дифференциальные и интегральные уравнения (Горький) 1978, N 2, 101-108 РЖ мат., 1979, 75274 Те же и Махарычева Д.Н. Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ. Теория устойчивости и ее прилож. Новосибир., 1979, 229-239 Те же и Шильман С.В. Алгоритмы аналитического исследования устойчивости динамических систем на ЦВМ 3 Всес. Четаяевской конф. по устойчивости движ. аналит. мех., упр. движением Иркутск, 1977, 30-31
- Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике. Материалы междунар. совещ. - Дубна-80, ОИЯИ, 1980, 187 с., - Дубна-83, ОИЯИ, 1983, 260 с., - Дубна-85, ОИЯИ, 1985, 420 с., - Дубна, ОИЯИ, 1990, 260 с
- Аналитические преобразования на ЭВМ в автоматизации научно-исследовательских работ Тез. докл. Всес. конф. - Вильнюс-90, 1990, 94 с
- Андрянов А.Н., Ефимкин К.Н., Забыхайло И.Б. 1990 Непроцедурный язык Норма и методы его реализации - Языки и параллельные ЭВМ Алгоритмы и алгоритмич. языки - М.: Наука 1990 3-37 Андрянов А.Н., Ефимкин К.Н., Забыхайло И.Б. Непроцедурный язык для решения задач математической физики // Программирование, 1991, N 2, 80-94 Andrianov A.N., Bazarov S.B., Bugayev A.B., Efimkin K.N. Solution of three-dimensional problems of gas dynamics on multiprocessor computers // Computational mathematics and modeling V 10, N 2, 1999, 140-150 Андрянов А.Н., Гусева Г.Н., Забыхайло И.Б. Применение языка Норма для расчета дозвукового течения вязкого газа // Математич. моделирование, т. 11, N 9, 1999 45-53
- Анисимова В.Б., Воскресенская Е.В., Демура В.И., Савченко В.И. [1984] Применение аналитических машинных методов в теории оболочек - Горький-1984, 63-64 Анисимова В.Б., Воскресенская Е.А., Демура В.И. Расчет цилиндрических оболочечных

- конструкций с использованием аналитического процессора - Киев КГУ, 1985, 4-31 (Деп. УкрНИИ НТИ 14.05.1985 N 1021 Ух-85Деп.)
- Анисимова В.Б. [1990] О возможности использования машинной аналитики в механике оболочек и пластин - Киев-88, 9-19
- Арайс Е.А. [1980] О решении задач численно-аналитического характера в системе АВТО-АНАЛИТИК - Дубна-80, 173-180
- Арайс Е.А. [1985] Система Авто-Аналитик - Программирование, 1985, N 1, 50-56
- Арайс Е.А., Яковлев Н.Е. Автоматизация аналитических вычислений в научных исследованиях - Новосибирск Наука, 1985, 222 с
- Арайс Е.А., Арайс Л.А., Юровецкий А.М. [1990] Автоматизация моделирования на основе численно-аналитических методов - Вильнюс-90 с 62
- Арайс Е.А., Дмитриев В.М. [1982] Моделирование неоднородных цепей и систем на ЭВМ - М Радио и связь, 1982, 180 с
- Арайс Е.А., Дмитриев В.М. Автоматизация моделирования многосвязных механических систем - М Машиностроение, 1987
- Арайс Е.А., Сибиряков Г.В. [1973] Авто-Аналитик - Новосибирск КГУ, 1973, 284 с
- Арайс Е.А. [1977] Символьный анализ радиоэлектронных цепей в системе Авто-Аналитик - Изв. вузов Радиоэлектроника, 1977, N 6, 111-113
- Арайс Е.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. [1974] Реализация метода внешних форм Картана на ЭВМ - Докл. АН СССР, 1974, 214, N 4, 737-738 - РЖ Мат., 1974, 6B1149
- Ганжа В.Г., Мелешко С.В., Мурзин Ф.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. Реализация на ЭВМ алгоритма исследования на совместность систем уравнений в частных производных // Доклады АН СССР, 1981, 261, №5, с 1044-1046, РЖ Мат., 1982, 4Б1206
- Бабеев И.О., Брумберг В.А., Васильев Н.Н., Иванов Т.В., Скрипничанко В.И., Тарасевич С.В. [1980] УПГ - универсальный пуассоновский процессор - Дубна-80, 80-91 - РЖ Астр., 1981 9 51 1030
- Бабенко К.И., Забродин А.В., Задыхайло И.Б. [1981] Некоторые вопросы анализа математических алгоритмов решения задач и архитектуры ЭВМ - Матер. семинара «Проблемы вычислительной математики» под рук. Г.И. Марчука. АН СССР, ОВМ, ВИНТИ. препринт №7, 1981
- Андрюанов А.Н., Бабенко К.И., Забродин А.В., Задыхайло И.Б., Котов Е.И., Мямлин А.Н., Поддерюгин Н.В., Поздняков Л.А. О структуре вычислителя для решения задач обтекания. Комплексный подход к программированию - Вычислит. процессы и системы. Под ред. Г.И. Марчука. вып. 2. М., Наука, 1985.
- Баншичков А.В., Бурлакова Л.А., Иванова Г.Н., Симонов С.А. [1984] Пакет символьных вычислений МЕХАНИК задачи и структура - Горький-84, 68-69 РЖ Мат., 1987, 12Г403
- Те же Пакет символьных вычислений МЕХАНИК задачи и структура - ППП. Итоги и применение. Новосибир., 1986, 96-105
- Те же и Иртегов В.Д. О разработке и использовании пакетов программ аналитических вычислений для задач механики - Дубна-85, 65-70
- Баншичков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д. [1989] Методы компьютерной алгебры в классической механике. Ленинград-89, 9. Те же и Иванова Г.Н. Использование ППП МЕХАНИК для моделирования и качественного исследования сложных систем - Ленинград-89, 7
- Баншичков А.В., Бурлакова Л.А. Об алгоритмах символьных вычислений при исследовании устойчивости // Программирование 1997 N3, 72-80
- Banishchikov A.V., Burlakova L.A., Ivanova G.N., Irtegov V.D., Novickov M.A., Titorenko T.N. [1998] Experience of Development and Usage of Packages of Symbolic Computations Intended for Investigation of Mechanical Systems // Prague-98 IMACS-ACA'98 <http://mailh.unn.edu/ACA/1998/proceedings.html> A.V. Banishchikov, L.A. Burlakova. Computer algebra and problems of motion stability // Там же - IMACS-ACA'98
- Бараускас Р.А., Кульветис Г.П., Рагульскис К.М. [1984] Расчет и проектирование вибродвигателей - Л. Машиностроение, 1984, 101 с
- Бараускас Р.А. Применение аналитических преобразований на ЭВМ для получения матриц конечных элементов пьезокерамических тел - Вильнюс-84, 81-83
- Bartyn A.A., Torunov V.L., Shishkov D.L. [1990] Group classification of of Nonlinear Differential Systems using Personal Computer - Дубна-90, 77
- Бегун П.И., Водень Г.А., Зобнин О.П. [1984] Система аналитических вычислений тонко-

- стенных упругих элементов - Горький-84, 95-96
- Бажанова М.М., Катков В.П., Поттосин И.В. [1972] Работа по аналитическим преобразованиям в ВЦ СО АН СССР - Харьков-72, 18-20 - РЖ Мат, 1973, 68646
- Бажанова М.М. [1980] Проектные спецификации ППП. Препр ВЦ СО АН № 225 Новосибирск, 1980 46 с. Также: Управл машины и системы. 1981 №4, 113-118
- Безденежных А.Н., Любимцев Р.Г., Стронгин Р.Г., Чубаров М.А. [1992] О преподавании компьютерной алгебры - Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение математического моделирования. М., Наука, 1992, 3-8
- Белоус Л.Ф. [1984] Связь системы АЛГЕБРА-0 с системой СИРИУС - Горький-84, 21-22
- Белоус Л.Ф., Карольков Е.Е. [1981] Разложение в ряд Тейлора с помощью ЭВМ - в сб. Вычисл. мат. и программирование в физ. исслед. Киев, 1981 3-11
- Белоусов И.Р. [2002] Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов. Препринт N 45 ИПМ им. М.В.Келдыша, 2002. Балобан И.Ю., Бородин Г.К., Сазонов В.В. Язык программирования правых частей уравнений движения сложных механических систем. Препр. N 62 ИПМ, 1998. Белоусов И.Р. Примененные методы символьных преобразований для формирования алгоритмов параллельных вычислений в задачах кинематики и динамики роботов. Отчет ИПМ № 5-19-93. 1993. Он же. Методы моделирования и дистанционного управления движением роботов - Докт. дисс. ИПМ, 2002
- Белявичус Р.В. [1984] Эффективный метод формирования матрицы жесткости гибридного изгибного элемента - Вильнюс-84, 5-7
- Беркович Л.М., Гердт В.П., Костова З.Т., Нечасевский М.Л. [1992] Приводные линейные дифференциальные уравнения второго порядка - ППП. Программное обеспечение математич. моделирования. М., 1992, 9-25. L.M.Berkovich, F.L.Berkovich. SOLDE A Reduce Package for solving of second order linear ordinary differential equations // Modern Group Analysis & Probl. of Math. Modelling, XI Russian Col., Proc., Samara 1993 21-37
- Берман В.С., Климов Д.М. [1987] Система muMATH - muSIMP для символьных вычислений на персональном компьютере - Препр. ИПРобот. мех. АН СССР, 1987, N 298, 31 с.
- Бестле Д., Шилле В., Эберхард П. [1993] Оптимизация транспортного средства с активно управляемыми подвесками - Изв. РАН Техн. кибернетика. 1993, N 1
- Бирюков С.В. [1995] Sergey V. Biryukov. Teaching Physics with DERIVE. International DERIVE Journal, 1995, v.2, N2, p.51-76
- Бирюков С.В. [1999] Derive в курсе компьютерной физики - Минск-99, 85-86
- Благовещенский Ю.В., Фишман Ю.С. [1970] Программа для решения уравнений нелинейной механики на ЦВМ с входным языком АНАЛИТИК - Кибернетика, 1970, N 3, 64-69. Фишман Ю.С., Благовещенский Ю.В., Щербов В.А. Программа для аналитического решения уравнений нелинейных колебаний на ЦВМ типа МИР с входным языком АНАЛИТИК - Кибернетика, 1971, N 4, 64-69. Фишман Ю.С., Щербов В.А., Тимошенко В.И. Программа решения уравнений нелинейной механики асимптотическими методами. Машины для инженер. расчетов. Сб. 6 и 7. Киев, 1973 26-32
- Боголюбская А.А., Гердт В.П., Тарасов О.В. [1988] О пакетном наполнении систем SCHO-ONCHIP и REDUCE. Аналитические ППП-88 83-90
- Босс Э.Э., Дубинин М.Н., Еднерал В.Ф. и др. [1989] E.Boos, M.Dubinin, V.Edneral, V.Lup, A.Kryukov, A.Pukhov, A.Rodionov, V.Savvin, D.Slavov, A.Taranov. CompHER - computer system for calculations of particle collision characteristics at High Energies. Система CompHER - компьютеризация расчетов характеристик сечений и распадов при высоких энергиях (от Лагранжиана до графиков сечений). Preprint 89-63/140. М. 1989. НИЯФ. МГУ. 16 р. Также E.Boos, M.Dubinin, V.Edneral et al. - Дубна-90, 25
- Бордюк Б.А. [1989] Методы компьютерной алгебры в задачах управления движением шагающих аппаратов - Ленинград-89. Бордюк Б.А. Компьютерное конструирование моделей динамики шагающих аппаратов - там же
- Борогодицина Т.В., Бородиненко Т.С., Быкова Л.Е., Черницова А.М. [1981] Численные и аналитические теории движения внешних спутников Юпитера. Прикл. неб. механ. и управл. движ. Науч. чтен. по космонавтике. М., 1980, 191-197. РЖ Астр., 1981, 12, 51-132
- Бородиненко Т.С. [1975] Алгоритмы для реализации в системе Авто-Аналитик метода усреднения уравнений возмущенного движения в кеплеровых элементах, основанного

- на преобразовании Ли. *Астрономия и геодезия* (Томск), 1975, N 5, 27-45. Она же. Применение метода преобразований Ли к решению задачи Делоне до третьего порядка. - *Астрономия и геодезия*, 1976, N 6, 18-25. Т.С. Бороненко, Ю.Б. Шмидт. Реализация в системе БОРА алгоритма преобразования Ли. - *Алгоритмы небесной механики Тез. Всес. совеща.* Рига, 1980, 30-33. (\*Горький-84, РЖ Мех, 1985, 1A18).
- Бороненко Т.С. [1980] Аналитическая теория движения шестого порядка внешнего спутника планеты. - *Астрономия и геодезия*, 1980, N 8, 97-101. - РЖ Астр., 1981, 9:51-77.
- Т.С. Бороненко, Л.А. Москвитина, В.А. Томаров, Ю.Б. Шмидт. Полуаналитическая методика расчета движения ИСЗ типа НАВСТАР в эйлеровых элементах. - *Астрономия и геодезия*, 1984, N 12, 66-70. - РЖ Астр., 1985, 12:51-75.
- Bocharov A.V., Bronstein M.L. [1989] Implementing two methods of Geometrical Theory of Differential Equations. An Experience in Algorithm and Software Design. / *Acta Applicandae Mathematicae* 1989, V 16, 143-166. Также A.V.Bocharov, Dubna-90, 20. A.V.Bocharov, D.L. Shishkov, Dubna-90, 37.
- Бравадин А.Ф., Леонов В.В., Руденко В.М., Шмыглевский И.П. [1992] Синтез алгоритмов расчета траекторий низкоорбитального ИСЗ. Программирование, 1992, №5, 81-87.
- Брумберг В.А. [1963] Ряды полиномов в задаче трех тел. - *Бюлл. ИТА АН СССР*, 1963, т. 9, № 4 (107), 234-256. Брумберг В.А. Представление координат планет тригонометрическими рядами. - *Труды ИТА АН СССР*, 1966, № 11, 3-88.
- Брумберг В.А. [1974] Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ. - *Томск ТГУ*, 1974, 114 с. Брумберг В.А. [1980] Аналитические алгоритмы небесной механики. - М.: Наука, 1980, 208 с.
- Brumberg V.A. [1995]. *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*. / Springer, 1995.
- Брумберг В.А., Ефодимова Л.С., Скрипиченко В.И. [1975] Квазипериодические промежуточные орбиты больших планет и резонансы нулевого порядка. - *Астрон. ж.*, 1975, 52, N 2, 420-431.
- Брумберг В.А., Исаков Т.В. [1982] Brumberg V.A., Ivanova T.V. New approach to determining planetary perturbations in lunar theory. - *Celest. Mech.*, 1982, 26, N 1, 77-81. В.А. Брумберг, Т.В. Исакова. Релятивистские эффекты в динамике системы Земля-Луна. - *Тр. ИТА АН СССР*, 1984, N 19, 5-16. - РЖ Астр., 1985, 7:51-66. Также. О решении в скользящей системе уравнений движения Луны в тригонометрической форме. - *Бюлл. ИТА АН СССР*, 1984, 15, N 8, 3-9. - РЖ Астр., 1985, 10:51-120.
- Брумберг В.А., Исаков Л.А. [1975] Кеплеровский процессор и разложение пертурбационной функции с помощью системы АМС. - *Алгоритмы небесной механики* (Ленинград), 1975, N 4, 28 с.
- Брумберг В.А., Тарасевич С.В., Васильев Н.Н. [1989] Brumberg V.A., Tarasovich S.V., Vasiliev N.N. Specialised celestial mechanics systems for symbolic manipulations. - *Celest. Mech.* 1989, 45, 149-162. - РЖ Мех., 1990, 2A78. + В том же N много статей по САВ в небесной механике. - РЖ Мех., 1990, 2A85, 86, 87, 109 и др.
- Bruno A.D., Edneral V.F., Stanly Steinberg [1998] Foreword // *Mathematics and Computers in Simulation* 1998, v 45, 409-411. Bruno A.D. 1998. *Normal Forms* // там же 413-427.
- Брюно А.Д., Варин В.П. [1995] Первая предельная задача для уравнений колебаний спутника. / Препринт №124 ИПМ им. Келдыша, 1995. Вторая предельная задача для уравнений колебаний спутника. / Препринт №128 ИПМ им. Келдыша, 1995. Alexander D.Bruno, Victor P.Vann. The limit problems for equation of oscillations of a satellite // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1997, v 67, 1-40.
- Бублик Б.А. [1978] ЭВМ МИР-2 как средство обучения курса высшей математики. Препр. Ин-т кибернетики АН УССР, 1978, 18 с.
- Бублик Б.А. [1984] Аналитическое моделирование задач на графах. - *Вильнюс-84*, 75-76.
- Бублик Б.А., Клименко В.П., Погореловский С.В., Фишман Ю.С. [1987] АНАЛИТИК. Численно-аналитическое решение задач на малых ЭВМ. Справочное пособие. - Киев. Наукова думка, 1987, 143 с.
- Бублик Б.А., Шербина В.А. [1984] Построение базисной системы функций трехмерной ячеечной задачи гидродинамики средствами АНАЛИТИКА-79. - *Горький-84*, 62-63.
- Будник А.П., Гай Е.В., Работнов Н.С., Попов С.В., Турчин В.Ф., Щенков И.Б. [1970] Ма-

- шенное выполнение аналитических выкладок в математической физике с использованием языка РЕФАЛ / Тех докл Симпозиума по вопросам обработки символической информации, ВЦ ГССР, Тбилиси, 1970. Щенков И.Б. Программы действий с дробно-рациональными функциями, написанные на языке РЕФАЛ / Там же. Будник А.П., Гай Е.В., Работное Н.С., Климов Анд.В., Турчин В.Ф., Щенков И.Б. Базисные волновые функции и матрицы операторов в коллективной модели ядра // Ядерная физика, т.14, в.2, 304-314, 1971. Виноградов В.Н., Гай Е.В., Полов С.В., Работное Н.С., Щенков И.Б. Построение физических базисов групп  $O(5)$  и  $SU(3)$  с автоматическим выполнением символических преобразований // Ядерная физика т.16, в.8, 1178-1187, 1972.
- Бурлакова Л.А. Иртегов В.Д., Почтаренко М.В. [1979] Применение ЭВМ для вывода и исследования дифференциальных уравнений движения механических систем в буквенном виде - Теория устойчивости и ее прилож. Новосибир. 1979, 247-255 - РЖ Мех, 1980, 4A15. Те же. Использование символических выкладок в некоторых задачах механики. Дубна-80, 137-142. Те же и Голиков В.В. Символические вычисления в пакете прикладных программ по устойчивости движения механических систем. Дубна-83 155-160.
- Бурлакова Л.А. Почтаренко М.В. [1986] Новые возможности в пакете символических вычислений для решения задач общей механики - ППП (Пакеты прикладных программ) Итоги и применение. Новосибирск, 1986, 105-112 - РЖ Мат. 1986, 12Г402.
- Бычков С.П. Хорошилов А.И. и др. [1975] Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН СССР, 1975. Бычков С.П., Зеленецкий С.Д., Фисун В.А., Хорошилов А.И. Язык СИМУЛА в мониторной системе ДУБНА для БЭСМ-6 / Препринт №118 ИПМ АН СССР, 1978.
- Бычков А.Б., Иванов В.Н., Суслонов В.М. [1990] Символическое построение уравнений динамики систем связанных твердых тел средствами языка аналитических вычислений Reduce - Вильнюс-90, 8-9. Vyachkov A.B. Suslonov V.M., Ivanov V.N. Software for the Multibody Dynamics Simulations in Studying of the Theoretical Mechanics. - S-Petersburg-93 (CSAM'93), 245-248. A.B.Vyachkov, V.M.Suslonov, Magg's Equations in Terms of Quasi-Coordinates // Regular & Chaotic Dynamics 2002, v.7, 289-290.
- Валуштин А.Н., Ганжа В.Г., Мурзин Ф.А., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. [1981] Применение символических преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем - Препр. Ин-т теор и прикл. мех. СО АН СССР, 1981, N 7, 10 с. Те же и Ильин В.П. вместо Мурзина - ДАН, 1984, 275, N 3, 528-532 - РЖ Мат., 1984, 7Г341.
- Ван Хольцэн Я.А., Кальме Ж. 1986 Применение компьютерной алгебры. В кн. Компьютерная алгебра. Символические и алгебраические вычисления. М., Мир, 1986, с.308-325, РЖ Мат. 1983 11В1174.
- Ватуляин А.О., Соловьев А.Н. [1997] Конечные элементы для электроупругих пластин Минск-97 80-81.
- Васильев Н.Н. [1980] Система СТР для операций над чебышевскими полиномами - Дубна-80, 186-187.
- Васильев Н.Н. [1985] Совместные вычисления разреженных полиномов и синтез вычисляющих программ - Дубна-85, 154-160.
- Васильев Н.Н., Едвард В.Ф. [1994] Компьютерная алгебра в физических и математических приложениях - Программирование, 1994, N 1, 70-82.
- Васильева А.В. [1975] Система АЛИТА проведения аналитических операций над рядами Пуассона на ЭВМ - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1975, N 7, 40 с.
- Вашковаяк М.А. [1983] О методе приближенного расчета стационарного ИСЗ // Космич. исслед., 1972, 10, N2, 147-158 - О численно-аналитическом методе расчета 12-часовых ИСЗ по почти круговым орбитам // Космич. исслед. 1983, 21, N6, 819-823. Вашковаяк М.А. Численно-аналитический метод исследования эволюции астероидных орбит // Космич. исслед. 23, N 3 335-346. Лидов М.Л., Вашковаяк М.А. О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел // Письма в Астрон. журн., 1994, 20, N 10, 781-795.
- Величенко В.В. [1984] Явные решения задач механики в системе аналитических преобразований на ЭВМ - Вильнюс-84, 12-13.
- Величко Т.И., Галин В.Я., Макушкин Ю.С., Тютерев Вл.Г. [1986] Аналитические вычис-

- ления на ЭВМ в молекулярной спектроскопии - Новосибирск: Наука, 1986, 189 с
- Веретенников В.Г., Карпов И.И., Маркеев А.П., Медведев С.В. [1990] Аналитические вычисления на ЭВМ в курсе теоретической механики - Вильнюс-90, 54
- Веретенников В.Г., Карпов И.И., Маркеев А.П., Медведев С.В., Пеньков В.И., Силицын В.А., Чеховская Г.Н. Теоретическая механика. Вывод и анализ уравнений движения на ЭВМ. Учебное пособие - М.: Высшая школа, 1990, 174 с
- Виттенбург И. [1980] Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980, 292 с
- Видякин В.В. [2004] О некоторых подходах к созданию теории поступательно-вращательного движения тел Солнечной системы. - Тез. 5 Межд. симпозиум по классич. и небесн. механике. Великие Луки, авг. 2004. М.: ВЦ РАН, 2004. 62
- Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение многих твердых тел. Архангельск, 1998. 200 с
- Водтенко С.С., Смирнов Е.Я. [1983] Теория оптимальной стабилизации. Учебное пособие - Л.: ЛГУ, 1983, 116 с
- Водтенко С.С., Сивков А.Н., Смирнов Е.Я. Применение средств компьютерной алгебры при решении задач предварительного определения орбит - Препр. Ин-та теор. астроном. АН СССР, 1989, 28-29
- Водяковский С.Ю., Теслер Г.С. [1991] Реализация точных вычислений в алгебрах рациональных и произвольной разрядности десятичных чисел в составе системы АНАЛИТИК-89 - Севастополь-91, 40-41
- Воробьев Е.М. 1999. Введение в систему "МАТ". М.: 284 с
- Воробьев С.В., Машкова О.В. [1977] Расчет динамических параметров слоистой конструкции на основе численных методов механики сплошных сред. Минск-97, 82-83
- Ворожцов А.И., Почтаренко М.В. [1990] Программное обеспечение символьных вычислений в задачах динамики и управления - Вильнюс-90
- Воскресенская Е.В. [1990] Расчет многосвязных конструкций с произвольными граничными условиями средствами языка АНАЛИТИК - Киев-88, 122-129
- Вукобратович М., Стожич Д. [1989] Программное обеспечение динамического подхода к управлению гибкими производственными модулями. Изв. АН СССР Техн. киберн. 1989, № 4
- Вукобратович М., Кирчанский Н., Петрович Т. Проектирование высокопроизводительных регуляторов роботов на базе процессоров конвейерного типа. Там же
- Вычислительная математика и вычислительная техника - Харьков-72. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1973, № 3, 5-77
- Гердт В.П., Жарков А.Ю. [1984] Методы исследования и решения дифференциальных уравнений средствами аналитических вычислений на ЭВМ - Горький-84, 16-19
- Гердт В.П., Жарков А.Ю., Швачка А.Б. [1984] FORMINT - программа исследования интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений - Горький-84, 115-116
- Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. [1980] Аналитические вычисления на ЭВМ в приложениях к физике и математике - Успехи физ. наук, 1980, 30, № 1, 113-147
- Герман В.И., Кобелев В.В. [1984] Автоматическое программирование вариационно-разностных схем расчета задач теории упругости и оболочек - Горький-84
- Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. [1984] О численной реализации метода Бубнова-Галеркина при исследовании двумерной и трехмерной конечноамплитудной конвективной неустойчивости - Горький-84, 64-68
- Глазунов Н.Н. [1985] Численно-аналитические вычисления и нестандартные арифметики. Дубна-85, 126-129
- Глазунов Н.Н. Интеграция систем компьютерной алгебры и интервалных вычислений. Программирование, 1992, №5, 51-57
- Глазунов Н.М. [1987] Численно-аналитический метод исследования на ЭВМ устойчивости линейных систем - Сложные системы управления. Киев, 1987, 10-14
- Глазунов Н.М. [1989] О некоторых приложениях формальных групп в теории динамических систем - Кибернетика, 1989, № 4, 118-120
- Глазунов Н.М. [1990] Гамильтоновы системы, алгебраические кривые и компьютерная алгебра - Вильнюс-90, 77
- Глушков В.М., Бондарчук В.Г., Гринченко Т.А., Дорожникова А.А., Клименко В.П., Летишевский А.А., Погребинский С.Б., Стожний А.А., Фишман Ю.С. [1971] АНАЛИТИК - алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований - Кибернетика, 1971, № 3, 102-134 - РЖ Мат. 1972, 18986
- Глушков В.М., Гринченко Т.А., Дорожникова А.А., Драч А.М., Капитанова Ю.В., Клименко В.П., Крес

- Л.К. Летичевский А.А., Погребинский С.Б., Царюк Н.П., Фишман Ю.С. АНАЛИТИК-74 - Кибернетика, 1978, N 5, 114-147 - РЖ Мат, 1979, 6В1017 + Препр N 12 Инст кибернетики АН УССР, АНАЛИТИК-79 - РЖ Мат, 1983, В1020
- Глушкова В.М., Молчанов И.Н., Клименко В.П., Фишман Ю.С. и др. [1976] Программное обеспечение ЭВМ МИР-1 и МИР-2 // Наукова думка, Киев, 1976 - 223 с
- Говарун Н.Н., Федорова Р.Н., Шириков В.П. [1984] Математическое обеспечение аналитических вычислений на ЭВМ - Горький-84, 15
- Говарухин В.Н., Цибулин В.Г. [1997] Введение в MAPLE. Математический пакет для всех. - М., Мир, 1997 - 208 с. Говарухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании Maple, MathLab, LaTeX, С-Пб 2001
- Годенко В.П. [1984] Применение УВК СМ-1410 для решения задач нестационарной дифракции плоских волн на жестких телах, расположенных вблизи границы Горький-84
- Гордеев Г.Г., Илюхин А.А. [1984] Построение решений механики гибких стержней средствами ЭВМ - Горький-84, 100-101
- Гордеева Ю.Ф. 1973 Учет влияния концентрированных масс в полуаналитическом методе расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты N 26-27 ИПМ АН СССР Лидов М.Л., Гордеева Ю.Ф. // Космич. исслед., 1974, 12, №4, 491
- Гордон В.А., Махеру В.В., Нишый М.Е. [1984] Применение САВ в задачах на собственные значения для неоднородных стержней Горький-84
- Городецкий О.М., Климов Д.М., Корлюков А.В. [1984] Реализация аналитических процедур теоретической механики на ЭВМ в системе MMANG - Препр. ИПробл. мех. АН СССР, 1984, N 233, 55 с. Городецкий О.М. Специализированная система MMANG для проведения аналитических выкладок в механике сложных систем твердых тел - Аналитические ППП-88, 115-128. Городецкий О.М., Климов Д.М., Корлюков А.В. Программирование компонент систем аналитических выкладок на Рефале - Препр. ИПробл. механики АН, 1987, N 295, 65 с.
- Горюнов В.И., Долгов Г.А., Лобашов Н.И. [1984] Использование системы аналитических преобразований АЛГЕБРА-0 для расчета эквивалентных параметров передаточной функции многомерной линейной модели - Горький-84, 69-70
- Гродецкий А.В., Гродецкий Н.В. [1992] Моделирование динамики механических систем символьно-численным методом на персональной ЭВМ - Изв. АН РАН Техн. кибернетика 1992 N 6
- Гребеников Е.А., Пал А. [1995] Grebenikov E.A., Pal A. General Formulation of Some Problems of Celestial Mechanics for Constructing Solutions Using Computers - Bucharest-95, 23. Гребеников Е.А., Масюков В.В. МБЛ - метод для точного представления решений нелинейных уравнений небесной механики - С.-Петербург-95 97-99.
- Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. [2002] Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М., 2002, 209 с. E.A. Grebenikov, E.V. Ikhsanov, N.I. Zemtsova. Linear Stability of Stationary Solutions of the Ring-Shaped Newton Ten-Body Problem, TUM, Proc. 6-th Internat. Workshop on Comp. Algebra in Scientific Comput., Passau, Germ. 2003, 178-186. E.A. Grebenikov, A.N. Prokopenya. Determination of the Boundaries between the Domains of Stability and Instability for the Hill's Equation, - Kiev, Nonlin. Oscillat., v.6 (1), 2003, 42-51
- Григорьев Д.Ю. [1985] Эффективные алгоритмы для символьного решения систем полиномиальных уравнений и неравенств - Дубна-85, 202-207
- Гринченко Т.А., Доробницкая А.А., Клименко В.П., Фишман Ю.С. [1972] Система аналитических преобразований для инженерных расчетов на ЭВМ МИР-2 Харьков-72 21-25
- Грошева М.В. [1985] Обеспечение символьных преобразований в прикладных исследованиях средствами ЭВМ - Дубна-85, 7-12. Грошева М.В., Климов Д.М. Опыт использования аналитических преобразований на ЭВМ в задачах механики - Препр. Ин-т пробл. мех. АН СССР 1987 N 296, 39 с.
- Грошева М.В. [1988] Применение и эксплуатационные возможности систем аналитических вычислений - Аналитические ППП-88, 30-38 + Ленинград-88 -РЖ Мех, 1990, 4А32. Грошева М.В. О применении символьного программирования на ЭВМ для решения некоторых задач механики - Тр. Ин-та мех. МГУ, 1989, 102-110
- Грошева М.В., Ефимов Г.Б. [1988] О системах аналитических вычислений на ЭВМ в за-

- дачах механики - Аналитические ППП-88, 5-30 Грошева М В, Ефимов Г.Б. Вопросы развития и использования САВ на ЭВМ - Препринт № 20 ИПМ АН СССР, № 5, 1988
- Грошева М В, Ефимов Г Б, Самсонов В А [1992] Использование символьных преобразований на ЭВМ в механике / Отчет ИПМ им М В Келдыша РАН и НИИ Механики МГУ, №5-4-92, -М., 1992, 140 с + Эволюция использования компьютеризированных аналитических вычислений в задачах механики / Препр ИМеханики МГУ, №16-95, 1995,44 с
- Grosheva M V, Efimov G B, [1993] On using symbolic manipulations in Mechanics - Kiev-93 11-14 Grosheva M.V., Efimov G.B., Samsonov V.A. On using symbolic manipulations in Mechanics - Computer Algebra Applications Intern Workshop ISSAC Gamburg, Germany, Oct 1995 Abstract S.-Peterburg 1995, 11-14 Efimov G B Grosheva M V On Using Computer Algebra in Mechanics / Computer Algebra in Scientific Computing Intern Conference, St Petersburg, April 20-24,1998 Extended abstracts St Petrsb 1998, 37-40
- Грошева М В Ефимов Г Б, Самсонов В А [1998] Символьные преобразования на ЭВМ в задачах управления Известия АН Теория и системы управления 1998, N 3, 80-91.
- Grosheva M V Efimov G B, (ed) [1998] The History of Computer Algebra Applications Prague-98 Session Theses of Report - Moscow, 1998 36 p
- Грошева М В, Ефимов Г Б, Брумберг В А и др Системы аналитических вычислений на ЭВМ Информатор-83 Информатор N 1 ИПМ АН СССР, 1983, РЖ Мат,1984, 11Г398
- Грошева М В, Привалов В А Самсонов В А [1984] Использование САВ при моделировании характеристик взаимодействия вращающегося тела с потоком Горький-84,70-71
- Грошева М В, Самсонов В А [1990] Информационный банк - символьные преобразования на ЭВМ в задачах механики. - Вильнюс-90, 92
- Гульбинас А С [1982] Машинный синтез динамического закона движения - Механика машин (Москва), 1982, N 59, 97-101
- Гульбинас А С [1984] САВ в исследованиях инженера-механика - Горький-84, 51-52
- Гульбинас А С, Богдвичус М А [1984] Автоматизация получения матриц конечных элементов в аналитическом виде в МКЭ - Вильнюс-84, 15-17 Гульбинас А С, Кубилене М, Куляветене Р В [1983] "Машинная аналитика" для автоматизации составления программ по методу конечных элементов. - Дубна-83, 70-73
- Гурий Н И, Скоморохов А Г [1989] Аналитические вычисления в системе REDUCE Справочное пособие - Минск: Наука и техника, 1989, 119 с
- Гутник С А [1984] Анализ положений равновесия спутника с использованием системы аналитических вычислений REDUCE - Горький-84, 103 Gutnik S A Symbolic numeric investigations for stability analysis of Lagrange systems Math & Comput in Simulation, 2001, v 57, 211-215
- Деякин Е А [1999] О движении колесных роботов - Доклады науч школы-конф Мобильные роботы и мехатронные системы - М МГУ, 1999 169-200
- Дедус Ф Ф [1990] Применение аналитических преобразований при обработке результатов экспериментальных исследований на ЭВМ - Вильнюс-90, 79-80
- Демченко В И Дурновцев Б Я, Федоров Р Н [1983] Использование аналитических вычислений при построении автоматизированной обучающей системы - Дубна-83
- Демченко В И Коробейников М Ю Анализатор формул для автоматизированной обучающей системы - Вильнюс-90, 54-55
- Демур В И [1990] Расчет шарнирно опертых цилиндрических оболочек произвольного профиля в аналитической постановке - Киев-88 130-136
- Демьянович Ю К [1981] О системе аналитических вычислений на Алголе в мониторной системе "Дубна" - Программирование, 1981, N 4, 57-67 - РЖ Мат, 1981, 12В1356
- Демьянович Ю К [1984] О новых возможностях и о применении системы аналитических вычислений на Алголе-ГДР - Горький-84, 71-73
- Демьянович Ю К [1989] Об уменьшении ошибок округления при автоматизированной генерации программ с помощью САВ - Ленинград-89, 31
- Демьянович Ю К [1990] Об использовании САВ в АОС Вычислительная математика - Вильнюс-90, 56-57
- Дмитриев М Г [1990] Применение метода штрафа для решения краевых задач на основе САВ - Информатика и системный анализ Ашхабад ФТИ АН ТССР, 1990

- Дмитриев В.М., Шутенков А.В. [1988] Численно-аналитическое моделирование сложных механических систем – Ленинград-1989 Дмитриев В.М. Шутенков А.В. Аналитическая обработка исходных данных и численное моделирование механических систем - Вильнюс-90 Дмитриев В.М. Забченко Т.Н. Система автоматизированного моделирования адаптивных роботов MAPC-AP. – Севастополь-91.
- Откаленико О.Н., Pogorelov D.Yu. [2003] Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation / Multibody System Dynamics, v 10, 17-43, 2003
- Добрынина И.С. Карлов И.И. Черноусько Ф.Л. [1994] Компьютерное моделирование управления движением системы связанных твердых тел - Изв. АН РАН Техн. кибернетика 1994 N 1, 167-180
- Довгий Б.П., Мольченко Л.В. [1984] Применение языка АНАЛИТИК для автоматизации подготовки краевых задач теории пластин и оболочек к численному решению на ЭВМ - Горький-84 104-105
- Долженко З.П. [1963] Получение на ЭВМ аналитического выражения общего решения системы аналитических уравнений в виде рядов / Диплом, рук. М.П. Лидов МГУ, 1963
- Долгов Г.А., Киселева Л.В., Махарычева Д.Н., Митина Т.А., Чубаров М.А. [1984] Автоматизированная система для выполнения аналитических преобразований при анализе устойчивости - Горький-84, 55-56 - РЖ Мех., 1985, 1А42 Долгов Г.А., Махарычева Д.Н., Чубаров М.А. Пахот АЛГЕБРА-0 для аналитических операций над алгебраическими многочленами и полиномиальными матрицами - Оптимизация и математическое обеспечение САПР Горький, 1982, 15-30 - РЖ Мат., 1983, 7В937
- Долгов Г.А., Чубаров М.А. [1990] АНФОР - расширение фортрана для аналитических вычислений Уч. пособ. Н.Новгород ННГУ, 1990, 72 с. +Программирование, 1994 N 1, 16-21
- Дорошницкий А.А. [1956] Решение математических и логических задач на быстродействующей ЭВМ - Воев. конф. Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения. Москва, март 1956 г. Пленарные Доклады. ВИНТИ, М. 1956
- Дроздов М.Ю., Маланин В.В. [1984] О формировании программ для исследования механических систем сложной структуры средствами САВ REDUCE-2 Горький-84, 73 М.Ю. Дроздов О некоторых дополнениях к САВ Reduce 3.0 Справ. описание Пермь 1988
- Дроздов М.Ю., Маланин В.В., Микрюков В.М. [1990] Об опыте преподавания САВ в Пермском университете - Вильнюс-90 57
- Дьяконов В.В., Бирюков С.В. Derive в России // Монитор-Аспект 1995 М., № 3 56-60, Derive User Groups Derive Newsletter International Derive Journal
- Дьяконов В.В. [1996] Справочник по применению системы Derive М., Наука 1996 Ожж. Справочник по системе символьной математики Derive М. 1998 Справочник по применению системы PC MathLAB М. 1993 Математическая система Maple V М. 1998
- Дьяконов В.П. Компьютерная математика: Теория и практика М. 2001, 1296 с.
- Дьяконов В.П. [1999] Интеграция – новый этап развития систем компьютерной алгебры Минск-99, 28-29 Дьяконов В.П., Перова Е.В., Петров И.В. Возможности САВ MuPAD в начальном и высшем образовании Минск-99, 91-92
- Евдокимова Л.С. [1977] Система POLY проведения аналитических операций над степенными рядами на ЭВМ - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1977, N 15, 40 с.
- Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я. [1983] Язык аналитический вычислений REDUCE Ч.1 - М. МГУ, 1983, 84 с., Ч.2 - 1986, 86 с.
- Еднерал В.Ф. [1985] Нормализующие преобразования для нелинейных систем ОДУ - Дубна-85, 219-224 Еднерал В.Ф., Хрусталев О.А. Пакет для приведения систем ОДУ к нормальной форме - Программирование 1992 №5, 73-80
- Емельянов Н.В. [1978] Возмущения 3 и 4 порядков относительно сжатия планеты в орбите спутника - Астрон. ж., 1979, 56 N 5, 1070-1078 - РЖ Астр., 1980, 251-127
- Емельянов Н.В., Салымов В.Н. [1983] Ряды для координат точек либрации в ограниченной задаче трех тел - Астрон. ж., 1983, 60, N 4 763-766
- Емельянов Н.В. [1980] Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ - Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. Исслед. космич. пространства. Движ. ИСЗ 1980, N 15, 44-81
- Емельянов Н.В. [1983] Методы составления алгоритмов и программ в задачах небесной механики - М. Наука, 1983, 128 с. - РЖ Астр., 1983 12 51 26

- Емельянов Н В [1984] Проблемы применения аналитической теории движения ИСЗ в задачах геодинамики и геодезии - Наблюдения ИСЗ (Прага), 1984, N 23, 399-411
- Ершов А П, Шура-Бура М Р. [1976] Становление программирования в СССР 4.1 Начальное развитие 4.2 Переход ко второму поколению языков и машин / Препринты N 12, 13 ВЦ СО АН СССР, Новосибирск Также Кибернетика, 1976, №6, 141-160
- Ефимов Г Б [1970] Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле - Космич исслед., 1970, 6, N 1, 26-45 - РЖ Мех, 1970, 7A28 Предельное решение в задаче об оптимальном разгоне аппарата с малой тягой в центральном поле / Изд. ИПМ АН СССР, - М., 1970, То же Диссертация
- Ефимов Г Б, Коникова Н С [1977] Автоматическое буквенное преобразования в задаче двугой ходьбы - Тез 2 Всес конф по оптимиз в механике Казань-78, КАИ, 1977 18 Грошева М В Ефимов Г Б Коникова Н С., Самсонов В А Автоматический символический вывод уравнений двугой ходьбы - Тез Всес совещ по робототехнич системам, Владимир, 1978 - М., 1978, 196
- Ефимов Г Б [1983] Аналитические выкладки в цикле вычислительного эксперимента - Дубна-83, 58-63
- Ефимов Г Б, Грошева М В [1983] Некоторые свойства систем аналитических вычислений как пакета прикладных программ - ППП Технология разработки Новосибирск, 1984, 174-182 Ефимов Г Б Исследование программных систем аналитических вычислений на ЭВМ / Отчет №О-221-87, ИПМ им М В Келдыша, 1987, 120 с
- Ефимов Г Б, Грошева М В, Абдрахманов А Т [1984] Об использовании полиномиальной САВ в задаче оптимального управления - Горький-84, 73-74
- Ефимов Г Б [1988] Системы аналитических вычислений и их классификация - Ленинград-89, 5-6 Также Ефимов Г Б - Киев-88, 27-40
- Ефимов Г Б, Зуева Е Ю. [1991] Кибернетическая аналогия и аналитические преобразования - С-Петербург-91, 63-64
- Ефимов Г Б., Зуева Е Ю., Щенков И Б [2001] Компьютерная алгебра в Институте прикладной математики им М В Келдыша // Математич моделир 2001, v 13, N 6, 11-18
- Ефимов Г В., Зуева Е Ю., Tshenkov I. B Computer Algebra in Keldysh institute of Applied Mathematics Computer Algebra and it's Application to Physics Dubna-2001, 58-68 Они же Препринт №27 ИПМ им М В Келдыша, 2003, 20 с Ефимов Г Б Из истории развития и применения Компьютерной Алгебры в Институте прикладной математики имени М В Келдыша...// Математ машины и системы Киев, 2003, №2, 96-105
- Журавлев В Ф [1983] Метод рядов Ли в проблеме разделения движений в нелинейной механике - Прикл мат и мех, 1983, 47, N 4, 559-565 Журавлев В Ф, Климов Д М Прикладные методы в теории колебаний М, Наука 1988 328 с
- Журавлев В Ф, Руденко В М [1983] К анализу силовых характеристик подвеса криогенного пироксфона - Изв АН СССР Мех тверд тела, 1983, N 1, 9-15
- Забродин А В [2000] Супер-ЭВМ МВС-100, МВС-1000 и опыт их использования при реализации задач механики и физики Математич моделирование, 2000, т 12, N 5, 61-66
- Фортов В Е, Салин Г И, Левин В К, Забродин А В, Шибанов А К Создание и применение системы высокопроизводительных вычислений на базе высокоскоростных сетевых технологий Информац технологии и вычислит системы, 2002, №1.
- Задыхайло И Б, Камынин С С, Любимский Э З [1971] Вопросы конструирования вычислительных машин из блоков повышенной квалификации Препринт ИПМ, 1971
- Задыхайло И Б, Мямлин А Н, Смирнов В К, Эйсымонт Л К [1974] Об эффективной аппаратной реализации языка для описания объектов на уровне понятий и символических преобразований - Искусств интеллект Итоги и перспект - М, МДНТИ, 1974, 157-165
- Задыхайло И Б, Котов Е И, Красовский А Г, Мямлин А Н, Смирнов В К О повышении эффективности символических преобразований - Препринт N15 ИПМ АН СССР, 1975 Те же и Гюздяков Л А вместо Красовского А Г Вычислительная система с внутренним языком повышенного уровня Препринт N41 ИПМ АН, 1975
- Закс М Б [1983] Аналитические преобразования на ЕС ЭВМ Саратов Саратов ГУ, 1983, 143 с Он же Аналитико-численные решения инженерных задач в САП ПЛ/1-ФОРМАК и РЕДЬЮС-2 на ЕС ЭВМ Дубна-1983, 256-260 Закс М Б, Ермаков В М АОС для

- курса математического анализа на ЭВМ ЕС - Деловые игры и методы активного обучения Челябинск, 1982, 71-72 Те же САП для целей обучения - Вильнюс-84, 26-27
- Заремба А Т, Зегжда С В [1989] Методы компьютерного конструирования моделей механизмов манипуляционных роботов - Ленинград-1989 Заремба А Т, Левин А Б Разработка методов компьютерного конструирования поверхностей синтеза оптимального управления многозвённых технических систем - Вильнюс-1990
- Земляков А С, Сабитов Р А, Соменов Е И [1977] Машинная оптимизация механических управляемых систем - Тез докл 2 Всес конф по оптимальному управлению в мех системах, Казань, 1978 Казань, 1977, с 142 (Также - Теор устойчивости и ее приложения Новосибир.: 1972, 264-271 - РЖ Мех, 1980, 9А70 )
- Зишма О В [2003] Печатные и электронные учебные издания в современном высшем образовании М МЭИ, 2003 336 с
- Золотарев В Н, Зоря А В, Славянов С Ю [1991] База знаний по специальным функциям - Компьютерные методы небесной механики С -Петербург-91, 67
- Золотов М Г, Востриков М М [1990] Аналитические вычисления в проектировании систем управления - Вильнюс-90, 65
- Зубрицкий Д А [1990] Реализация алгоритма аналитического конструирования управляющего устройства на ЭВМ - Вильнюс-90
- Иванова Н В, Махарычева Д Н, Метрихин В С, Пейсель М А, Чубаров М А [1978] Численно-аналитическая методика расчета автоколебаний типа шимми - В сб Математическое обеспечение САПР Горький, 1978, 98-110
- Иванова Т В [1979] Кеплеровский процессор и аналитический генератор функций небесной механики на основе системы УПП Алгоритмы неб мех механики, 1979, N 28, 48 с - РЖ Мех, 1985, 1А20 Иванова Т В Решение некоторых задач небесной механики с использованием универсального пуассоновского процессора - Горький-84, 105-106
- Иванова Т В Пуассоновский процессор PSP Препр ИТА N 64 1997 46 с Также in Dynamics, Ephemerides and Astrometry of Solar System Kluwer 1996 283
- Иванова Т В [1997] Построение промежуточной орбиты в тригонометрической теории движения Луны с учетом планетных возмущений / Новые теоретические результаты и практические задачи небесной механики Тездокл М, ГАИШ 1997 44
- Иртегов В Д, Новиков М А [1984] Нормализация автономных систем на ЭВМ - Вильнюс-1984 30-31
- Кабулов В К [1963] К выводу дифференциальных уравнений упругости и строительной механики на ЭВМ - Докл АН УзССР, 1963, N 9, 5-8 - РЖ Мех, 1964, 4В406 Кабулов В К Алгоритмизация в теории упругости и деформационной теории пластичности - Ташкент Фан, 1966, 394 с - РЖ Мех, 1967, 7В234 Кабулов В К, Толох В А [1971] Алгоритмическая система для решения на ЭВМ задач теории упругости и пластичности - В сб Вопросы вычисл и прикл математики Ташкент, 1971, 3-102
- Кабулов В К [1979] Алгоритмизация в механике сплошных сред Ташкент Фан, 1979, 304 с
- Каждан Я М, Щенков И Б 1989 Схлопывание сферической полости в среде, совершенно прозрачной для объемного излучения // Журнал прикл мех теор физики (ПМТФ) 1989, №1 (173), Наука, Новосибирск, с 41-49
- Калинина Н А [1972] Об иерархии в системах символьных действий Харьков-72 70
- Калинина Н А, Поттосин И В [1977] Архитектура универсальных систем аналитических преобразований: приспособляемость к классу задач и связь с системами программирования / Теория и практика системного программирования Новосибирск, 1977, 5-12 - РЖ мат, 1978, 11В1214 Калинина Н А Поттосин И В Проблематика разработки систем аналитических преобразований на ЭВМ - Дубна-80, 5-15
- Калинина Н А Поттосин И В, Семенов А Л [1984] Система аналитических вычислений АУМ-ЭП для МК ЭЛБРУС - Горький-84, 24-25
- Калинина Н А Семенов А Л [1984] О работах последних лет в области разработки САВ на ЭВМ - Вильнюс-84, 87-89 Калинина Н А, Семенов А Л О работах по аналитическим вычислениям на ЭВМ - Программирование, 1988, N 5, 77-88
- Калинченко Л А [1990] Библиотека быстрых преобразований многочленов на фортране - Вильнюс-90, 83

- Канторович Л В [1957] Об одной математической символике удобной при проведении вычислений на машине - Докл АН СССР, 1957, т 113, N 4, 738-739 Канторович Л В, Петрова Л Т О математической символике, удобной при вычислениях на машинах - Тр 3 Всес матем съезда Т 2 М, 1956 с 151 - РЖ Мат. 1957, 3592
- Капитанова Ю В [1985] Об аналитических преобразованиях Состояние и проблемы - Кибернетика, 1985, N 1, 82-92 - РЖ Мат, 1985, 8Г322 Капитанова Ю В, Колыда С В Система аналитических преобразований в алгебре логики: / Разработка ЭВМ нового поколения архитектура, программирование, интеллектуализация Новосиб, 1986, 110-117
- Капустина Т В [1999] Компьютерная система МАТЕМАТИКА 3.0 - М. 1999 240с
- Карачевский В В, Филер З Е [1984] Получение на ЭВМ уравнений движения электро-механических систем с помощью формализма Лагранжа-Мексвелла Горький-84, 75-76
- Карнаухов М А [1991] Численно-символьный интерфейс в системе MS-DOS С-76-91, 87
- Карпов В Я, Карягин Д А, Самарский А А [1978] Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики - ЖВМ и МФ, 18, N 2 458-467
- Карпов И И, Климов Д М, Маркеев А П [1989] Аналитический вывод на ЭВМ уравнений движения упругого тела в гравитационном поле Препр Ипробл мех РАН №411 1989
- Карпов И И, Колбасов А В [1991] Решение инженерных задач на персональном компьютере Препр ИПМех РАН № 492 1991 Карпов И И, Назаров Т Ю Программирование в системе MathCAD Препр ИПМех РАН № 437 1990 Шуров А И, Карпов И И и др Основы Maple. Применение в механике Препр ИПМех РАН, 1995
- Катков В Л [1990] Аналитические выкладки при разработке программы - Вильнюс-1990 66-67 (также Препринт N 23 (333), Ин-т математики АН БССР, Минск, 1988, 8с)
- Катков В Л, Костюкова Н И [1969] Процессор КИНО - В сб Динамика сплошных сред (Новосибирск), 1969, N 1, 48-60 - РЖ Мат. 1969, 12В551
- Катков В Л, Попов М Д [1984] Система автоматизированной обработки дифференциальных уравнений - Вильнюс-84 35-36
- Кашицкий А А, Ломонос Л Н, Стоян Н Н [1990] Использование языка АНАЛИТИК при решении первой основной задачи теории упругости для гетероболоидальной трещины на границе раздела материалов - Киев-88, 97-106
- Керов Л А, Кобыльских С А, Петров В П [1984] Автоматизация аналитических выкладок в задачах функционального моделирования механических преобразователей оптических приборов - Горький-84, 77
- Кикин А Б, Гейсах Э Е [1984] Система программ на языке Фортран IV для аналитических преобразований в задачах кинематики механизмов - Горький-84, 77-79
- Киргузова Л В [1990] Реализация численно-символьного интерфейса в системе Reduse для персональных ЭВМ - Вильнюс-90, 84-85
- Кириллов А И [2000] [www.academiaXXI.ru](http://www.academiaXXI.ru) А И Кириллов О В Зимица Решебник по высшей математике Maple M 2001
- Кирсанов М Н [2002] Решебник Теоретическая механика Под ред А И Кириллова М ФИЗМАТЛИТ, 2002
- Кистлеров В Л [1987] Принципы построения языка алгебраических вычислений FLAC - Препр Ин-т пробл упр АН СССР, 1987, 26
- Кистлеров В Л, Серебровский А П [1986] Использование языка алгебраических вычислений FLAC в диалоговых САПР систем управления - Диалог информац.-вычислит системы Иркутск, 1986, 111-113 Григорьев Ф Н, Кистлеров В Л, Кузнецов Н А Применение методов аналитических символьных вычислений на ЭВМ при автоматизации проектирования систем управления - Тез 10 Всес совещ по пробл управлен Т 2 Алма-Ата, 1986, 277-278
- Клименко В П, Погребинский С Б, Фишман Ю С [1981] Особенности проблемно-ориентированных комплексов на базе СМ-1410 / АСУ Проблемно-ориентированные комплексы Киев, 1981, 26-33, также Управл системы и машины, 1982, N 5, 9-11 Клименко В П., Погребинский С В, Фишман Ю С Развитие математического обеспечения МИР для решения математических и прикладных задач аналитическими методами - Дубна-83, 132-136 Клименко В П, Погребинский С Б, Фишман Ю С Диалоговая реализация численно-аналитических методов решения научных и прикладных про-

- грамм на ЭВМ СМ-1410 - Диалог Человек-ЭВМ Серпухов, 1984, 46-52
- Клименко В П, Фишман Ю С Бублик Б А, Горюхов В Д., Шевченко В Я [1989] АНАЛИТИК-89 Харьков, 1989 78 с Деп ВИНТИ 29 06 89, № 4305 -689 Бублик Б А., Фишман Ю С и др Алгоритмический язык АНАЛИТИК-89 Препр 90-1 ИКИ бим В М Глушкова АН УССР Киев, 1990 43 с Морозов А А, Клименко В П, Фишман Ю С Основные свойства алгоритмического языка АНАЛИТИК-91 Кибернетика, 1993, N 3, 117-127 Клименко В П Фишман Ю С Система программирования АНАЛИТИК-91 С-Петербург-91, 56
- Клименко В П, Морозов А А, Фишман Ю С, Бублик Б А, Горюхов В Д, Калина Е А [1995] АНАЛИТИК-93 // Кибернетика и сист анализ 1995, № 5 127-157 АНАЛИТИК-2000 А А Морозов, В П Клименко, Ю С Фишман А Л Ляхов, С В Кондратьев, Т Н Шваляк // Мат машины и системы 2001 №1-2 68-99
- Клименко В П, Ляхов А Л [2003] Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры / Мат машины и системы 2003, № 3-4, 103-123 В П Клименко, А Л Ляхов Ю С Фишман Основные тенденции развития языков систем компьютерной алгебры / Мат машины и системы 2002, №2 С 2
- Климов Д М [1986] Методы компьютерной алгебры в задачах механики - Аннот докл 6 Всес съезд по теор и прикл механике, Ташкент, 1986, 348-347 Климов Д М Методы компьютерной алгебры в нелинейных задачах механики - Тр Всес конф, "Нелинейные явления" Москва, 1989 - М, 1991, 67-74 - РЖ Мех 1991, 12 А 83
- Климов Д М, Ефимов Г Б, Руденко В М, Самонов В А [1985] Методы исследования сложных механических систем и вычислительная техника - Оптимизация и моделирование в САПР Горький. 1985, 3-33
- Климов Д М, Руденко В М, Леонов В В [1984] Использование ЭВМ для решения асимптотическими методами некоторых задач нелинейной механики и малнотостатики - Вильнюс-84, 78-79 Климов Д М, Леонов В В, Руденко В М Методы аналитических вычислений на ЭВМ в нелинейных задачах механики - Изв АН, МТТ, 1986, N 6, 24-29
- Климов Д М, Руденко В М [1989] Методы компьютерной алгебры в задачах механики - М. Наука, 1989, 214 с - РЖ Мех, 1990, 2А22
- Клюков А С [1988] Методические указания по применению систем аналитических вычислений для решения на ЕС ЭВМ задач по теоретической механике (каф теоретич и строительной мех Омского сельскохоз ин-та) - Омск, 1988, 31 с
- Клюев Ю И, Паллов В А, Проворов Л В, Семенов В Н [1984] Исследование неустановившихся колебаний упругих конструкций на основе преобразования Лалласа с применением системы аналитических вычислений АЛЬКОР - Горький-84, 106-107
- Колгунова С В, Коноплев В А [1989] Компьютерное конструирование моделей механики шестистепенного двадцатипятизвенного испытательного стенда-тренажера - Ленинград-89 Те же Компьютерное конструирование моделей механики шестистепенного двадцатипятизвенного испытательного стенда-тренажера - Ленинград-89
- Компьютерные методы небесной механики - Тез докл Всес съезд С-Петербург, 1991 С-Петербург-91, 101 с
- Кобрин А И и др. [2000] Имитационное моделирование задачи внешней баллистики тела сложной аэродинамической формы с высокими несущими свойствами Научно-методич сборн Теоретич механика М МГУ, 2000 в 23 167-192
- Кобрин А И [2005] Роль курса теоретической механики и новых образовательных технологий в подготовке специалистов в области мехатроники и робототехники Тула-2005 44-48
- Коноплев В А [1984] Исследования кинематики сложного движения тела с помощью матричных методов - Прикладная механика 1984, т 20, N 3, 130-131
- Коноплев В А [1989] Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твердых тел ПММ, 1989, 53, N 1, 24-31 Коноплев В А Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева Изв АН СССР МТТ 1989 N 6, 46-53 Коноплев В А, Колгунова С В, Зегжид С В, Тихомолов М Е, Улицев А Г Технология символьного конструирования агрегативных моделей механики систем тел Вильнюс-90
- Коноплев В А [1992] ППП АММУСТ Основы теории механического наполнения. ППП Программное обеспечение математ моделир М 1992, 85-95 Коноплев В А Aggrega-

- live Methods in Multibody Systems Mechanics. Prepr. IPME RAS (S.-Pb) N 78, 1992, 49 p
- Конюлева В.А. Агрегативная механика систем твердых тел – СПб Наука, 1996, 166 с
- Конюлева В.А., Заремба А.Т., Червоных В.П. [1989] Агрегативные методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел – Ленинград-89, 9-11
- Конюлева В.А., Колзунова С.В., Макаров И.А., Пилипенко А.А. [1988] Рекуррентная реализация агрегативного метода конструирования символьных моделей механики систем тел – Ленинград-89. Конюлева В.А., Фишков А.Л. Агрегативные методы компьютерного конструирования моделей добычных комплексов – Ленинград-89
- Константинов М.С., Федотов Г.Г. [2001] Проектирование траекторий полета к Меркурию с ЭРД. VIII Всероссийский съезд по теоретич. и прикл. мех. Тез. Екатеринбург, 2001, 351
- Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Orbital evolution of solar sail in problems of geocentric trajectories and lunar missions – Paper IAF 01 A6-07 Toulouse, France 2001
- Корняк В.В., Федорова Р.Н. [1985] Применение систем аналитических вычислений для определения симметрий Ли и Ли-Беклунда дифференциальных уравнений – Дубна-85, 248-261 – РЖ Мат., 1986, 11Б1102
- Корняк В.В., Фишчик В.И. Вычисление на ЭВМ нелокальных симметрий систем линейных уравнений математической физики. Дубна-85, 345-350. РЖ Мат. 1986 11А336
- W/Fushchich, V.V.Komyak Computer Algebra application for determining Lie & Lie-Backlund symmetries of differential equations. J. Symbolic Computation 1989 7, 611-619
- V.V.Komyak Extraction of "Minimal" cochain subcomplexes for computing cohomologies of Lie Algebras and Superalgebras / Dubna-2001
- Корлюков А.В. [1985] Арифметика произвольной точности с учетом ошибки округления в системе АВ. Программирование, 1985, №5, 32-37. Также – ППП. Опыт использования М., Наука, 1989 127-128
- Kotma Ю. [1986] Kotta U. Inversion of discrete-time linear- analytic systems - Proc. Acad. Sci. USSR Phys. Math., 1986, 36, N 4, 425-431
- Kotma Ю., Роомельду Р. Использование систем Reduce при линеаризации и расщеплении дискретных нелинейных систем – Динамика нелинейн. проц. управления М. ИПУ, 1987, 62 с
- Kotma Ю.Р., Роомельду Р. Применение системы Reduce для решения обратных задач механики. Вильнюс-90
- Kotma Ю.Р. [1992] Синтез нелинейных систем с заданными вход-выходными отображениями. Эффекты дискретизации – Изв. РАН Техн. кибернетика 1992 N 3
- Крейцер Г.П., Березовская Ф.С. [1975] Сложные особые точки системы двух дифференциальных уравнений – Избранные алгоритмы и программы для ЭВМ МИР-2. (Материалы математич. обеспечения ЭВМ) АН СССР, НИВЦ, Пушкино, 1975
- Крейцер Г.П. Простые особые точки системы двух дифференциальных уравнений Там же, 1978
- Крюков А.П., Родионов А.Я. [1984] Система динамической отладки для программ на языке REDUCE – Горький-84, 25-27
- Крюков А.П., Родионов А.Я. [1984] Проблемы контроля и модификации базы знаний системы аналитических вычислений REDUCE – Вильнюс-84, 79-81
- Крюченко В.Е. [1984] Аналитические преобразования в задаче о нестационарных колебаниях неоднородных вязкоупругих систем. Горький-84
- Кузьмин А.В. [1980] LRFOR – система операций над целыми и рациональными числами произвольной точности – Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1980, N 33, 32 с
- Кузьмин А.В. Операции с полиномами и рациональными функциями в системе SASM – Алгоритмы небесной механики, 1981, N 34, 40 с
- Кузьмин А.В. О возможностях использования системы SASM в механике – Горький-84, 35-37
- Кулаков А.Л., Лейсель М.А. [1984] О выборе параметров устойчивой против шимми опоры с помощью системы АЛГЕБРА-0 – Горький-84, 79-80 – РЖ Мех., 1985, 1В250
- Кулешов А.С. [2002] О первых интегралах уравнений движения твердого тела вращения на абсолютно шероховатой поверхности. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша N 68, 2002
- О первых интегралах уравнений движения симметричного гироската на абсолютно шероховатой плоскости. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша N 47, 2003
- Кульвектене Р.В. [1982] Исследование динамики и оптимизации двухступенчатых держателей магнитных головок с аэродинамической смазкой – Деп. Лит. НИИ НТИ, N 925-82 Вильнюс, 1982
- Кульвектене Р.В. Аналитическое исследование нелинейных колебательных механических систем на ЭВМ – Вильнюс-84, 43-45
- Кульвектене Р.В.,

- Кузьмечис Г П Программа получения уравнений в вариациях нелинейных колебательных систем в аналитическом виде - Вильнюс-84, 46-47
- Кузьмечис Г П [1983] ВИБРАН аналитические преобразования для проведения научно-технических расчетов на ЭВМ Дубна-83, 52-57 Кузьмечис Р В Кузьмечис Г П Аналитические вычисления на мини-ЭВМ Учебное пособие - Вильнюс 1989, 84 с
- Тахов - Диалоговое обеспечение языка ВИБРАН - РЖ мат. 1983, 12В1027
- Кузьмечис А П, Кузьмечис Г П [1979] Получение матрицы жесткости конечного элемента в форме сектора в аналитическом виде на ЭВМ - Деп в ЛитНИИНТИ, N 507-80 1979 Кузьмечис Г П Действия с разреженными матрицами при аналитических расчетах Вильнюс-84, 47-50
- Кузьмечис Г П 1989 Алгоритмы динамики манипуляторов и их компьютерная реализация - Ленинград-89, 12
- Курманбаев Б, Имамов Т Т [1984] Система ПЛ-ОСИЛ для выполнения аналитических преобразований в задачах механики деформируемого твердого тела Горький-84, 40
- Кутузов А Л [1977] Аналитические решения главной задачи теории движения ИСЗ на ЭВМ - Астрономия и геодезия (Томск), 1977, N 6, 26-31
- Латышев В Н, Михалев А В, Панкратьев Е В [1984] Компьютерная алгебра - Горький-84 121-123
- Ладис А О [2003] Как построить и использовать суперкомпьютер М. Бессепер 2003 Суперкомпьютер Руководство пользователя <http://www.jscc.ru/informat/1000MuserGuide.zip> Руководство программиста <http://www.jscc.ru/informat/1000MPfgGuide.zip>
- Леонов В В [1984] Использование системы аналитического программирования Reducе-2 для решения нелинейных уравнений методом разложения по малому параметру - Горький-84, 80-81 Леонов В В Синтез алгоритмов вычисления параметров ориентации при помощи символьных выкладок на ЭВМ Аналитические ППП-1988, 151-154
- Леора С Н, Назаров С А, Прокура А В [1984] Реализация на ЭВМ алгоритма построения уравнений теории тонких пластин - Горький-84 119
- Лидов М Л [1978] Полуаналитические методы расчета движения спутников / Труды ИТА АН СССР, - Л., 1978, № 17, 54-61 Лидов М Л, Ляхов В А, Соловьев А А Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны / Препринты № 89-70 ИПМ АН СССР, 1974 Также // Космич. исслед., 1975, 13, № 3, 303
- Летичевский А А [1995] О распараллеливании алгоритма Бухбергера - Кибернетика и системный анализ 1995 N 2, 52-62 - Также Кибернетика за 1971-1994 гг
- Лобанова О В [1999] Практикум по решению задач в математической системе Dеlve М, Финансы и статистика 540 с
- Лумов В И, Маланин В В [1982] Реализация итерационного метода решения ФПК-уравнений в системе аналитических вычислений Редьюс-2 Динамика управляем. динам. систем Иркутск, 1982, 158-163 Они же и Полосков И Е Применение САВ при исследовании стохастических механических систем - Горький-84, 81-82
- Любимцев Я К, Метрихин В С [1984] Исследование устойчивости движения тележек с выполнением аналитических преобразований на ЦВМ - Горький-84, 82-83 - РЖ Мех, 1985, 1А54
- Ляхов А Л [1998] Исследование методом граничных элементов напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты полностью погруженной в упругое основание Пробл. машиностр.-1998 -Т 1 № 3-4 89-96 А Л Ляхов Е А Калина, Л Б Даница Применение системы компьютерной алгебры АНАЛИТИК-93 для решения пространственных задач теории упругости Мат. машины и системы 1997 №1 37-44
- Ляхов А Л [1999] Вычисление методами компьютерной алгебры интегралов по плоской области с кусочно-гладкой границей Мат. машины и системы 1999 №1 53-61 А В Горик, А Л Ляхов Решение задач изгиба композитных брусьев кусочно-однородной структуры Проблемы оптим. проектирования сооружений Сб. докладов III-го Всероссийского семинара - Новосибирск НГАСУ, 2000 Т 1 59-69 Ю В Рождественский А Л Ляхов Аналитическое описание линии профиля калибров Изв. вузов Черная металлургия 1997 № 1 42-44 Там же 1998 № 7 40-43
- Макаров И А, Червоных В П, Пантелов Е В [1989] Компьютерное конструирование

- уравнений движения шагающих аппаратов на базе агрегативных моделей механики систем тел – Ленинград-89
- Маланин В В (Malanin V V) [1995] Опыт использования систем аналитических вычислений для решения задач механики в Пермском университете - Применение ЭВМ для решения задач механики Киев, 1995, 1 (также S-Petersburg-93 (CSAM'93), 257)
- Malanin V V, Mikryukov V M, Poloskov I E [1993] // Prototype of the Expert System on Stochastic Dynamics – S-Petersburg-93 (CSAM'93). 207-208 (также Переславль-95, 41-42).
- Маланин В.В., Полосков И.Е. [1993] // Malanin V V, Poloskov I E On Some Computer Algebra Applications to Random Systems Analysis – Киев-93 (ISSAC'93). 30-31
- Маланин В В, Полосков И Е [2001] Стochastic процессы в нелинейных динамических системах Аналитические и численные методы исследования Ижевск НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001 160 с
- Маркеев А П [1970] Исследование устойчивости движения в некоторых задачах механики - Препр ИПМ АН СССР, 1970, 163 с Также Точки либрации в небесной механике и космодинамике М, Наука 1978 480 с
- Маркеев А П, Медведев С В, Сокольский А Г [1985] Методы и алгоритмы нормализации дифференциальных уравнений Учебное пособие - М МАИ, 1985, 74 с
- Маркеев А П, Сокольский А Г [1975] Исследование периодических движений, близких Лагранжевым решениям ограниченной задачи трех тел / Препринт № 10 ИПМ АН СССР Они же Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем - Препр N 31 ИПМ АН, 1976 61 с - РЖ Мат, 1976, 8Б1097 Они же Метод исследования периодических движений Ляпунова в гамильтоновых системах и его реализация на ЭВМ - Тр ИТА АН 1978, N 17 62-68 Они же Буквенные выкладки на ЭВМ в задачах устойчивости механических систем - Горький-84 58 - РЖ Мех, 1985, 1А43
- Мартыненко В П, Мартыненко М А [1984,1990] Реализация систем аналитических преобразований в смешанных задачах теории упругости на языке АНАЛИТИК Киев-88, 117-121 Также Горький-84
- Мартыненко Ю Г. [2000] Матричная форма уравнений неголономной механики - Об научн-методич статей Теорет.механика М МГУ, 2000 в 23 9-21 Он же и М Ф Зацепин Применение матричных методов для составления уравнений Лагранжа и Эйлера-Лагранжа неголономных систем - Там же. 2004 в 25 86-101 Мартыненко Ю Г Построение теоретико-механических моделей кооперных роботов - Тула-2005, 91-98
- Матвеев А П [1987] Построение математических описаний функционирования электро-тепломеханических систем на основе метода цепей - В сб.: Моделирование и оптимизация систем автомат упр и их элементов Тула, 1987, 46-53
- Матросов В М, Васильев С Н, Каратуев В Г, Суменков Е А [1984] Вектор-функции Ляпунова и символьное программирование - Горький-84, 13-14 Матросов В М, Васильев С Н Каратуев В Г Суменков Е А Ядыкин С А Пакет прикладных программ вывода теорем метода векторных функций Ляпунова - ППП Методы и разработки Новосибирск, 1981, 119-131 - РЖ Мат, 1982 2Б1290
- Матросов В М Опарин Г А Почтаренко М В [1984] Пакет прикладных программ по динамическому анализу нелинейных и управляемых систем - Алгоритмы и программы. Информ бюлл (Москва, ВНИИЦ), 1984, N 1(58), 72-73
- Matrosov V M, Rayevsky V A, Reshetnev M F, Somov Ye.I. [1994] Dynamics of Fail-safe gyromoment attitude control systems of communication, navigation and land-survey satellites - In Internat Aerospace Congr August 15-19, 1994 Abstracts Moscow, Russia Anshakov G P., Antonov Yu G Butymn S A., Makarov V P., Matrosov V M., Somov Ye.I. Gyromoment attitude control systems dynamics of rapid manoeuvring remote sensing spacecrafts - Ibid
- Матросова Г А [1990] Использование аналитических преобразований в лабораторных работах по курсу "Математическое моделирование в САПР" - Вильнюс-90, 58-59
- Медведев С В [1984] Алгоритм нормализации негамильтоновых систем с помощью преобразований Ли - Горький-84, 120
- Методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел Материалы Всес рабочего совещания, Ленинград, 1988 Ленинград-88, - Препр Ленингр фил Ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 16 32 с

- Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики - 89 Секция I Небесная механика Тез докл Всес совещания, Ленинград, 1989 Ленинград-89 I, - Препр Ин-т теор астрономии АН СССР (Ленинград), 1989, 67 с
- Методы компьютерного конструирования моделей классической и небесной механики - 89 Секция II Теория и практика компьютерного конструирования моделей механики многозвенных технических систем Материалы Всес совещания, Ленинград, 1989, Ленинград-89 II, - Препр Ленингр фил ин-та машиновед АН СССР, 1989, N 32, 83 с
- Миронов С В, Дехтяренко В М [1984] Возможности системы Reduce-2 в теории построения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений - Горький-84, 83-84
- Митин В Н, Штеднвольф Л И [1984] Аналитическое исследование кинематики и динамики механизмов на ЭВМ - Горький-84, 84-85 Андреев Ю М, Митин В Н, Штеднвольф Л И Система аналитических вычислений в САПР машиностроительных конструкций - ППП Программное обеспечение математ. моделирования М, 1992, 71-77
- Митропольский Ю А, Молчанов А А [1981] Машинный анализ нелинейных резонансных цепей - Киев Наук думка, 1981, 238 с
- Моевич А Б [1990] К построению матриц упругой поляризации плоских областей - Киев-88, 88-97
- Молчанов А А, Зинченко И Ф [1984] Декомпозиция систем нелинейных дифференциальных уравнений с применением аналитических преобразований на ЭВМ - Горький-84, 58-59
- Молчанов А А, Зинченко И Ф [1986] Система автоматизированного проектирования устройств радиоэлектронного профиля - Изв вузов Радиоэлектроника, 1986, N 1, 60-64 Они же Системы аналитических преобразований в САПР на базе мини- и микро-ЭВМ / Аналитические пакеты-88 74-82 Они же и Н В Беркаль, С Л Мосейчук Применение аналитических преобразований в САПР изделий электронной техники - Киев-88, 160-168 Они же и Олефир А С Система ЭЛАН - повышение интеллектуального уровня САПР на основе аналитических вычислений Вильнюс-90, 70-71
- Москвичкина Л А [1975] Алгоритмы решения в системе Авто-Аналитик ограниченной задачи трех тел методом Хилла-Брауна - Астрономия и геодезия (Томск), 1975, N 5, 46-52
- Мямлин А Н, Задыхайло И Б., Смирнов В К [1980] Процессор для обработки текстовой информации Всесоюзн конфер Паралл программир и высокопроизводит системы Часть 1 Новосиб ВЦ СО АН СССР, 1980, с 54-63 Задыхайло И Б., Эдсмонд Л К Об алгоритмах и программных средствах реализации САВ - Горький-84, 23-24
- Myatlin A.N., Smitov V.K., Golovkov S.L. [1980] A Specialized Symbol Processor - Fifth Generation Architecture Ed by J.V.Woods New-Holland 1980 Мямлин А Н, Смирнов В К, Головкин С Л Специализированный процессор ЕС-2702 / В сб Разработка ЭВМ нового поколения Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1986, 39-47
- Намиш Ю Н, Алексеева И В [1990] Об использовании языка АНАЛИТИК и метода возмущения форм границы в краевых задачах для тел вращения. - Киев-88, 20-26
- Niukkanen A W, Shchelkov I B [2003] Operator factorization technique of formula derivation in the theory of simple and multiple hypergeometric functions of one and several variables Препр ИПМ им М В Келдыша N 81, 2003 A project of a globally universal interactive program of formula derivation based on operator factorization method Препринт N 82, 2003
- Новиков М А [1984] Нормализация автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на ЭВМ - ППП Технология разработки Новосиб, 1984, 147-155 - РЖ Мат, 1984, 12Г489
- Новоселова А Н [1990] Интеллектуализация программ спектрактиумов на ЭВМ Вильнюс-90, 59-60
- Охотимский Д Е [1964] Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения - Космич исслед 1964, 2, N 6, 817-842 - РЖ Мех, 1965, 11А29
- Павловский М А, Моросин О П, Саистунов С Я [1983] Методика автоматизированного составления дифференциальных уравнений движения системы твердых тел с упругими связями - В сб Механика пирокосмических систем (Киев), 1983, N 2, 77-80

- Палавицус Р.П., Рагульскис К.М. [1980] Построение периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ - Деп ЛитНИИНТИ, N 664-80 Каунас, 1980, 15 с
- Пейсах Э.Е., Кикин А.Б. [1987] Решение задач теоретической механики на ЭВМ Кинематика плоского движения твердого тела ~ Методические указания Ин-т текст и легкой промышл Л 1987, 32 с
- Пендихоза Н.В., Соболев В.А. [1990] Комплекс прграмм SLOWMAN для анализа разнотемповых систем - Вильнюс-90, 29-30
- Петухов В.Г. [2004] Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами Космич исслед 2004 42 №3, 260-279 V Petukhov, M Konstantinov Spacecraft Insertion into High working orbits using Light-Class Launcher and Electric Propulsion Proceedings of ISSFD-XVII, v 2, 314-327 Moscow 2003 T M Eneev, M S.Konstantinov, V G Petukhov et al Methodical Problems of Low-Thrust Trajectory Optimization Preprint of KIAM (ИПМ) N 110, Moscow 1996
- Платонова Л.Н., Шашков М.Ю. [1983] Применение системы REDUCE для построения аналитических решений уравнений "мелкой воды" - Препр ИПМ М В Келдыше АН СССР, 1983 N 134, 31 с РЖ Мат 1984 95884
- Погорелов Д.Ю. [1991] Численные методы моделирования динамики систем твердых тел, содержащих замкнутые кинематические цепи - Севастополь-91, 49-50 Pogorelov D Yu On Numencal Methods of Modeling Large Multibody Systems Mech and Mash Theory 1999 v 34 791-800 Также Переяславль-95, 57 Также Тез 5 Межд симпоз по классич и небесн механике Великие Луки, авг 2004 М ВЦ РАН 2004 161-163
- Погорелов Д.Ю. [1993] О кодировании символьных выражений при синтезе уравнений движения систем твердых тел // Изв. РАН Технич кибернет 1993 209-213 Также Abstracts of EUROMECH 343, Gamburg, 1995,21 Погорелов Д.Ю., Ефимов Г.Б. Решение некоторых модельных задач механики с использованием программного комплекса "Универсальный механизм" / Препринт №72 ИПМ им М.В. Келдыше, 1993, 24 с
- Погорелов Д.Ю. [1997] Some developments in computational techniques in modeling advanced mechanical systems / Sympos on Interaction betw Dyn & Control in Adv Mechan Systems Kluger Acad Publ Dordrecht, 1997, 313-320 D Yu Pogorelov Differential-algebraic equations in multibody system modeling Numerical Algorithms. V 19, 1988 183-194
- Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1984] Система автоматизированного построения и аналитических преобразований математических описаний гидро-, тепло-, электро-механических систем - Горький-84, 110-111 Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. АЛМАК - система автоматизированного построения и преобразования математических описаний автоматических комплексов - В сб.. Моделирование и оптимизация систем автомат упр и их элементов Тула 1987 147-154
- Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1987] Математические модели систем автоматического управления Автоматизация построения математических описаний систем автоматического управления Учебное пособие - Тула Тульск политехн ин-т, 1987, 80 с Подчуфаров Ю.Б., Матвеев А.П. [1987] Математическое моделирование САУ Автоматизация построения математических описаний САУ Учебное пособие Тула Тул-ПИ, 1987 Подчуфаров Ю.Б. Автоматизированные технологии проектирования управляемых систем и комплексов. Учебное пособие ~ Тула Тульский ГТУ, 1995, 124 с
- Позняк Ю.В. [1995] Аналитические преобразования на ЭВМ в математике и механике Учебн пособие по курсам Выч машины и программирование, САВ и их использование при решении научно технических задач, Основы вычислит эксперимента Бел-русск Гос ун-т Минск 1995 90 с
- Позняк Ю.В., Чигарев А.В. [1997] Автоматизация аналитических преобразований в механике деформируемого тела Минск-97 97-99 Ю.В.Позняк Методы компьютерной алгебры в трехмерной теории устойчивости прямоугольных пластин - Вестц Академі навуц Беларусі Сер фіз.-техн навук Минск 1996, № 3, 104-106
- Полозова Н.Г., Шор В.А. [1963] Применение ЭВМ к построению аналитических теорий движения планет и спутников - Проблемы движения искусственных спутников небесных тел М, 1963, 186

- Полосков И Е [1985] Применение САВ ФОРМАК для вероятностного исследования нелинейных механических систем. Дубна-85 289-294
- Полосков И Е [1999] Использование компьютерной алгебры для реализации алгоритмов оптимального управления // Пробл мех и управл. Нелин динам. системы. Перм. ГУ. Пермь, 1999. 146-158 Poloskov I E Compound program packages in random science training and technical modelling. - III Intern Math. Symp (IMS-99) The Mathematics J. 2001 V 8 N 2 Полосков И Е О колебаниях упругой колонны под действием случайной нагрузки // Пробл мех и управл.. Нелин динам. системы. Перм. ГУ. Пермь, 2003 107-116
- Полосков И Е [2004] Теория и численно-аналитические алгоритмы моделирования случайных режимов динамических систем. Докт. диссертация. Пермский ГУ. Пермь 2004 О вращении твердого тела под действием диссипативного и случайных моментов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2004 в 2 24-27
- Полов Б А., Опыр Н В., Антонюк Я П [1984] Результаты машинно-аналитического решения некоторых дифференциальных уравнений. - Горький-84, 87-88
- Почтаренко М В [1978] Построение первых интегралов в буквенном виде на ЭВМ. - Методы оптимизации в энергетике. Иркутск, 1978, 118-125 Он же Комплекс программ по анализу стационарных движений консервативных механических систем. - ППП. Методы и разработки. Новосибир., 1981, 82-92. - РЖ Мат., 1982, 261288 Почтаренко М В Организация вычислений в ППП по анализу стационарных движений механических систем. - ППП. Технология и разработки. Новосибир., 1982, 75-84. - РЖ Мат., 1982, 98917
- Почтаренко М В [1985] Применение систем аналитических вычислений в задачах механики. ППП. Функциональное наполнение. Новосибир., 1985, 3-11. - РЖ Мат., 1985, ВГ310
- Применение ЭВМ для решения задач механики. - Тез. докл. науч.-техн. конф. Севастополь, 1991. Севастополь-91. Киев, Знание 1991, 55 с
- Притомазов С А [1992] Применение систем аналитических вычислений в общей теории относительности и гравитации. - ППП. Программное обеспечение математического моделирования. М., 1992, 56-62
- Прозоров Л В., Семенов В Н., Шаловалов Л А [1984] Решение нелинейных задач механики тонкостенных упругих конструкций при сложных видах нагружения с помощью системы аналитических вычислений АЛЬКОР. - Горький-84, 94-95
- Прозоров Л В., Штаркман В. С. [1982] АЛЬКОР. система аналитических вычислений. Ч 1 Описание входного языка, Ч 2 Работа со степенными рядами. Новые возможности системы. - Препр. ИПМ АН СССР, 1982, N 61, 34 с. N 168, 24 с. РЖ Мат., 1982, 12 В1089. РЖ Мат., 1983, 58989
- Прозоров Л В., Медведев В А., Семенов В Н. Входной язык и возможности САВ АЛЬКОР / Методич. указания. М. МВТУ им. Баумана, 1985
- Прохорова Г В., Колбева В В., Желнов К И., Лебенева М А [1998] Математический пакет MAPLE V Release 4. Руководство пользователя. - Калуга, 1998. 200с
- Руденко В М [1987] Символьные вычисления на языке REDUCE для задач механики. - Препр. Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1987. N 287, 25 с. + (Руденко В М. Reduce в задаче. Горький-84. - РЖ Мех., 1985, 1А36.)
- Рыжиков Ю И [2000] Решение научно-технических задач на персональном компьютере СПб. Корона Принт, 2000, 272с
- Сабитов Р А [1977] Автоматизация построения произвольной вектор-функции системы, управляющей программным движением объекта. - Тез. докл. 2 Всес. конф. по оптимальному управлению в механических системах. Казань-1978. Казань, 1977, 32. Фатхуллин Э Ф., Сабитов Р А Автоматизация построения управления программным движением одного класса механических систем. - Исследование операций и аналитическое проектирование в технике. Казань, 1979, 38-41
- Савченко В И [1985] Комплекс программ для решения задач механики деформируемого твердого тела численно-аналитическими методами на ЭВМ. СМ-1410. - Программное обеспечение и применение малых ЭВМ. Киев, 1985. 40-44
- Савченко В П [1990] Об использовании САВ в механике твердого деформируемого тела. - Киев-88, 1-8. В И Савченко, В Б Андисимова, Е В Воскресенская, В И Демура. Использование машинных аналитических преобразований в механике оболочек. - Аналитические пакеты-88. 63-73

- Савченко В И, Шевченко В Я [1990] Возможность интенсификации обучения с помощью специального математического обеспечения - Вильнюс-1990, 60-61
- Садов С Ю [1998] Плотное размещение квазиоднородных многочленов и векторные разбиения / Препринт №37 ИПМ им Келдыша, 1998
- Самарский А А, Шашков М Ю [1984] Перспективы использования символьных преобразований в вычислительной математике - Горький-84, 3-8, также - Оптимизация и моделирование в САПР Горький, 1985, 33-41
- Сарычев В А, Гутник С А [1984] К вопросу о положениях равновесия спутника-гироста-та // Космич. исслед., 1984, 22, № 3 323-328 Они же Исследование положения равновесия спутника-гиростата - Препр. ИПМ АН СССР, 1990, № 84, 31 с Они же О равновесии спутника под влиянием гравитационных и статических воздействий // Космич. исслед. 1995, 32, №4-5 386-391
- Савишников А Г., Эльтеков В А [1985] Обучение символьным преобразованиям на основе системы ПЛЕНЭР-АНАЛИТИК - Дубна-85, 418-420
- Свиистунов С Я, Губарь И В, Ковбаско О Н [1984] Пакет прикладных программ для автоматизированного составления и исследования дифференциальных уравнений системы твердых тел с упругими связями - Горький-84, 89-90
- Сергиевский А В, Чубаров М А [1984] Опыт эксплуатации системы для аналитических преобразований - Горький-84, 8-12
- Семенов А Л [1980] Алгоритмы нахождения НОД полиномов реализация и анализ Дубна-80 104-115 Семенов А Л Полиномиальная система аналитических преобразований АРАП ППП Опыт использования - М 1989 107-114
- Сильвестров Д С [1988] Программное обеспечение прикладной статистики Обзор состояния, тенденции развития - М Финансы и статистика 1988 240 с
- Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике деформируемого твердого тела, Киев, 1988, Киев-88., Деп УкрНИИ НТИ, 1990
- Системы для аналитических преобразований в механике Тез докл Всес совещ. Горький, 1984 - Горький-84 Горький ГГУ, 1984, 147 с
- Скляренко (Зуева) Е Ю [1972] Система символьных вычислений для задач механики / Диплом, рук Садов Ю А Моск физико-технический ин-т - М 1972
- Скрипниченко В И [1975] Операции с буквенными разложениями на ЭВМ - Итоги науки и техн ВИНТИ Сер. Астрономия, 1975, № 11, 131 с
- Смирнов В К [2003]. Аппаратная реализация Рефапа в Институте прикладной математики им. М В Келдыша / Препринт № 99 ИПМ им. М В Келдыша, 2003
- Смирнов В К, Толунов В Л, Шишко Д Л [1991] Аналитические вычисления на процессоре ЕС-2702 / Препринт №62 ИПМ им. М В Келдыша, 1991
- Смирнова Т Н [1962] Полиномиальный прораб и проведение аналитических выкладок на ЭВМ Труды МИАН им В А Стеклова Работы по автоматич. программир. числ. методам и функциям анализу Изд. АН СССР М -Л 1962 Первовазванская Т Н Проведение аналитических выкладок на ЭВМ при решении некоторых типов дифференциальных уравнений Там же Смирнова Т Н Проведение на ЭВМ типа М-20 полиномиальных выкладок с помощью ПРОРАБА Наука Л, 1967 РЖ Мат, 1967 9В409, также в кн. Михли С Г Численная реализация вариационных методов - Л 1967, 379-428
- Соболев В А [1987] Интегральные многообразия, сингулярные возмущения и оптимальное управление - Укр мат ж. 1987, 39, № 1, 111-116
- Соловьев А А [1974] Полуаналитический метод расчета движения искусственных спутников с большим эксцентриситетом / Препринты № 86-87 ИПМ АН СССР Лидов М Л, Соловьев А А // Космич. исслед., 1978, 16, № В 806
- Соколовский А Г [1991] Современные проблемы компьютерной небесной механики - 7-й Всес. съезд по теор. и прикладн. механике, Москва-1991 Аянт докл. М, 1991, 323 - РЖ Мех, 1991, 12А125 Sokolsky A G On the Problems of Computerization of Celestial Mechanics - Киев-93 (ISSAC'93), 41-45
- Соколовский А Г, Выходов А А, Васильев Н Н [1995] // Sokolsky A G, Vakhodov A A., Vasiliev N N Development of a Motion Theory for Satellites with Large Eccentricities by Means of Computer Algebra - Bucharest-95, 39 (также С -Петербург-95, 65-67, 67-70)

- Сокольский А. Г., Хованский С. А. [1981] Программы нормализации гамильтоновых систем с тремя степенями свободы - МАИ Дел ВИНТИ 4 08, 1981 N 3882-81 40 с
- Сокольский А. Г., Шевченко И. И. Нелинейная нормализация автономных гамильтоновых систем на ЭВМ в аналитическом виде - Препр ИТА АН СССР 1990, N 8, 50 с
- Солеев А., Арансон А. Б. [1994] Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней / Препр №36 ИПМ им Келдыша РАН, 1994 Арансон А. Б. Вычисление многогранника Ньютона / Мат между конф и Чебышевские чтения, 1996 МГУ, т 1, 32-34
- Солоницева Р. И. [1985] Основы автоматизации проектирования гидроскопических систем. - М. Высшая школа, 1985, 240 с
- Солоницева Р. И., Ковтун И. В., Пресняк А. С. [1981] Вывод уравнений движения сложных электромеханических систем в аналитическом виде на ЦВМ Изв Ленингр электротех инст 1981, N 287, 24-29 Р. И. Солоницева, И. В. Ковтун Построение на ЦВМ в аналитическом виде математических моделей устройств систем управления Метод указания Л. ЛЭТИ, 1983. Р. И. Солоницева, И. В. Ковтун Построение уравнений движения гидроскопических устройств с помощью ПОЯ ПИОН-2. Горький-84 61-62 РЖ Мех, 1985, 1А35
- Спирякин А. Н., Черненко О. С. [1997] Метод возмущений в решении одной задачи геометрии Мнск-97 99-100
- Степанов А. А. [1962] Решение на ЦВМ одной задачи, связанной с дифференцированием функций - В сб.: Проблемы кибернетики 1962 Наука №7, 189-200
- Тарасевич С. В. [1979] УПП - универсальный микропроцессор - Алгоритмы небесной механики (Ленинград), 1979, N 27, 29 с
- Тарасевич С. В. [1980] Система аналитических операций для решения задач общей теории относительности GRATOS - Дубна-80, 116-121 Брумберг В. А., Тарасевич С. В. Применение системы GRATOS для определения возмущений сферически симметричной метрики - Дубна-83 149-154
- Теория и практика автоматизированных систем аналитических преобразований Тезисы совещ., Вильнюс, 1984 - Вильнюс ИТК СХК Лит ССР, 1984, 93 с
- Титоренко Т. Н. [2002] Комплекс программ для качественного исследования механических систем и электрических цепей. Автореф дисс ктн, Иркутск 2002 V. D. Itegov, T. N. Titorenko, Using the "Mathematics" in problems of mechanics // Mathem and Computings in Simulat 2001, v 57 227-237 Иртегов В. Д. Титоренко Т. Н. О моделировании и исследовании некоторых задач с помощью компьютерной алгебры // Программирование 1997 N1, 68-74
- Толок В. А. [1964] К выводу дифференциальных уравнений колебаний цилиндрических оболочек на ЭВМ - Докл АН УзССР, 1964 N 8, 9-10 - РЖ Мех, 1965 7В127 Толок В. А. Алгоритмизация расчета цилиндрических оболочек - Ташкент Фан 1969 121 с - РЖ Мех 1970, 5В141
- Тоом А. И., Долматов В. В. [1984] Исследование удовлетворенности пользователей систем аналитических вычислений REDUCE - Горький-84, 49-51
- Толунов В. Л. [1975] Установление полной интегрируемости систем внешних дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ Вычисл мат и мат физика (ВМИИФ), 1975, N 2, 149-157 Толунов В. Л. Определение совместности и вычисление произвола решения систем дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ Там же, 1975, N 9, 158-172
- Толунов В. Л. [1983] Применение ЭВМ к исследованию Пфаффовых систем Численные методы механики сплошной среды Т 14 (Новосибирск), 1983, N 3, 150-158 Резников И. Г. Толунов В. Л., Швачка А. Б. Машинное исследование дифференциальных уравнений методом внешних форм - Горький-84, 88-89 V. L. Tolunov Reducing systems of linear-differential equations to a passive form Acta Applic Mathmat 16 191-206 1989
- Тумасонис В. В. [1971] Система эквивалентных преобразований выражений - Ж вычисл мат и мат физ (ЖВМ и МФ), 1971, N 5, 1272-1281 - РЖ Мат, 1972, 1В1101 Также ЖВМ и МФ, 1972, N 2, 552-556 - РЖ Мат, 1972 7В597) Тумасонис В. В. Машинная алгебра и вопросы ее реализации - Вильнюс-84, 60-63
- Турчин В. Ф. [1968] Метаалгоритмический язык // Кибернетика, 4, с 45-54, РЖ Мат, 1971, 2В85 Алгоритмический язык рекурсивных функций (Рефал) - М., Изд-е ИПМ АН СССР Турчин В. Ф. Сердобольский В. И. Язык Рефал и его использование для преоб-

- разования алгебраических выражений // Кибернетика, 1969, №3, 58-62
- Турчин В Ф [1971] Программирование на языке Рефал / Препринты ИПМ АН СССР № 41, 1971, №43, 1971, №44, 1971, №48, 1971; №49, 1971, РЖ Мат. 1972, 18993-996
- Турчин В Ф [1972] Описание аналитических преобразований с помощью рекуррентных соотношений в рамках языка Рефал // Харьков-72 28
- Улицев А Г, Шишлов А В [1989] Агрегативная модель динамики колесного транспортного робота - Ленинград-89
- Уральская В С, Журавлев С Г [1980] Движение ИСЗ в гравитационном поле Земли Итоги науки и техн. ВИНТИ Сер Исследование космического пространства Движение ИСЗ 1980, N 15, 5-43
- Федяев Ю А [1982] Программа построения методов Рунге-Кутты высоких порядков - Астрономия и геодезия (Томск) 1982, N 10
- Филаретов В Ф, Корзун Ф И, Мимоход П И [1990] Использование аналитической компоненты в гибридной экспертной системе при проектировании и исследовании систем управления приводом манипуляционных механизмов - Вильямс-90
- Фурсанов М Н [2001] Решетки по теоретической механике Решения в системе Maple V M, 2001
- Фишман Ю С [1973] Программа интегрирования на ЭВМ МИР-2 Кибернетика 1973 № 3 40-46 Щербов В А, Фишман Ю С Система интегрирования на ЭВМ МИР-3 Тез 6-й Всесоюзн Школы-семинара Владивосток 1977 19-20 + Республ ФАП Киев 1980
- Фишман Ю С [1974] Символьное интегрирование Энциклопедия кибернетики Т 1 Киев 1974 383-384 Гринченко Т А Аналитик Там же, 115-116 В Л Клименко, Ю С Фишман Аналитические преобразования на вычислительных машинах Там же, 118-117
- Хлебников В А [1976] Гравитационное поле квазилинейных сосредоточенных систем с вращением в формализме Ньюмена-Пенроуза. // Изв вузов СССР Физика №3 113-117, 118-123 Он же и А Э Шелковенко О точных решениях уравнений Эйнштейна-Максвелла в формализме Ньюмена-Пенроуза // Там же, №7, 1976 140-142 148-150
- Человский А М [1984] Совместное использование аналитических и численных методов в задаче расчета колебаний упругих систем с сосредоточенными нелинейными элементами - Горький-84, 112
- Черонных В Л [1989] Использование систем САФРА и САВАГ для обмена символическими данными и для конструирования самомодифицирующихся программ. - ППП Опыт использования М 1989, 115-123 Черонных В Л, Коноплев В А Применение системы САВАГ и пакета АЛГСАФ для конструирования моделей механики технических систем матричным методом - Ленинград-89
- Чубаров М А [1974] Проблема Рауса-Гурвица и последовательности полиномиальных остатков - Динамика систем (Москва) 1974, N 2, 135-163 Чубаров М А О критериях неотрицательности полиномов и определении областей абсолютной устойчивости - Дифференци и интегральные уравнения Горький 1979, 149-157 Чубаров М А Алгоритмы аналитического решения задач линейной алгебры - Горький-84, 124-127
- Чубаров М А, Долгов Г А, Киселева Л В, Макарычева Д Н, Митина Т А [1988] Структура автоматизированной системы для исследования устойчивости линеаризованных моделей - Аналитические ППП-88 38-53
- Чубаров М А, Долгов Г А, Макарычева Д Н [1988] Решение систем линейных алгебраических уравнений в символьном виде - Методич указания Горький: ПУ, 1988 19 с Чубаров М А, Киселева Л В Проведение матричных алгебраических преобразований на ЭВМ - Методич указания Горький ПУ 1988, 21 с Чубаров М А, Марков А А Вычисление символьных детерминантов - Методич указания Там же 1988 21 с
- Шашков М Ю, Шенков И Б [1983] Использование символьных преобразований для построения разностных операторов Препр N 48, ИПМ АН СССР, 1983 23 с РЖ Мат 1983, 1051106 Система DISLAN для построения разностных операторов Препр № 23 ИПМ, 1985 РЖ Мат 1985 9Г910 Ефимов Г Б, Тишкин В Ф, Шашков М Ю, Шенков И Б Автоматизация программирования операторных разностных схем Препринт № 20 ИПМ 1982 Также - Дубна-83 74-84
- Шишлов Д Л [1984] Применение методов аналитического программирования к задачам

- нелинейных автоколебаний - Горький-1984, 113-114 Шишкова Д.П. Изучение разрывных решений в гидродинамике при наличии электромагнитных полей методами компьютерной алгебры - ППП Математическое моделирование М 1989 84-89
- Шурыгин В.А., Яненко Н.Н. [1961] О реализации на ЭВМ алгебраических дифференциальных алгоритмов - Проблемы кибернетики (Москва), 1961, N 6, 33-43 - РЖ Мат, 1962, 78332
- Щенков И.Б. [1984] Система аналитических преобразований SANTRA-BASIC Горький-84 47-49 И.Б. Щенков Система SANTRA Дубна-85 39-44
- Щенков И.Б. [1989] Система символично-аналитических преобразований SANTRA-2 Описание формальной части входного языка Препр №1 ИПМ им М.В. Келдыша 1989 Описание динамических функций Препр №7 ИПМ 1989 Описание функций обеспечивающих неалгебраические операции Препр №21 ИПМ, 1989 Операции над выражениями основных классов Препр №14 ИПМ, 1991 Операции над матрицами Препр №15 ИПМ, 1991 Оформление программы и средства отладки Препр №1 ИПМ, 1993
- Шуко С.Д. [1984] Аналитические преобразования на Фортране в применении к некоторым задачам качественной теории дифференциальных уравнений Горький-84, 93-94
- Зосымонт Л.К. [1977] О возможности параллельных схем реализации одного языка для описания задач переработки текстовой информации УС и М 1977, №2, 56-64 Зосымонт Л.К., Платонова Л.Н. Выбор и оценка базового языка символического процессора - Дубна-83, 19-33
- Зытеков В.А. [1988] Пакет программы Плэнер-Аналитик Аналитические ППП-88 147-151 Зытеков В.А. О логико-символьном интерфейсе - Вильнюс-90, 91
- Юркинс Э.П., Каволеллис А.-П.К. [1984] Автоматизация аналитических преобразований при определении радиальной жесткости упруго-центрбежной муфты - Вильнюс-84, 71-73
- Яненко Н.Н., Ганжа В.Г., Мазурик С.И., Шапеев В.П. [1985] Применение символических преобразований на ЭВМ для построения и анализа разностных схем - Оптимизация и моделирование в САПР Горький 1985, 41-57 Мазурик С.И., Шапеев В.П. Применение символических преобразований на ЭВМ для исследования аппроксимации и устойчивости разностных схем - ЖВМ и МФ 1986, т. 24, N 4 586-600
- Akkas A.G. [1989] Elements of computer algebra with applications - New York Wiley-Intersci Publ., 1989, 425 p
- Barton D. [1966] Lunar disturbing function, - Astron. J., 1966, 71, 438
- Barton D. [1967] A scheme for manipulative algebra on a computer / Comput. J., 1967, 9, 340
- Barton D., Fitch J.P. [1972] A review of algebraic manipulative programs and their application Comput. J. 1972, 15, N 4, 362-381
- Bers A., Kulp J.L., Karney C.F.F. [1976] Symbolic computation of nonlinear wave interactions on MACSYMA - Comput. Phys Commun., 1976, 12, 81-98
- Bordon L., Colagrossi A. [1981] An application of REDUCE to industrial mechanics - SIGSAM Bull., 1981, 15, N 2 8-12
- Broucke R.A. [1980] A Fortran system for manipulation of symbolic Poisson series with applications to celestial mechanics Techn. Rept. Univ. Texas, ISOM, 1980, TR-80-1, 150 p
- Broucke R.A. Fortran-Based Poisson Series Processor: and its Applications in Celestial Mechanics // Celest. Mech., 1989, v. 45, 255
- Brown W.S., Hearn A.C. [1979] Application of symbolic algebraic computation - Comput. Phys Commun., 1979, 17, N 1, 207-215.
- Buchberger B. [1984] CAMP a teaching project in symbolic computation at University of Linz - SIGSAM Bull., 1984, 18, N 4, 8-9
- Calmet J., van Huizen J.A. [1983] Computer algebra applications in Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation Wien, New York Springer-Verlag, 1983, 245-258
- Перевод Ван Хильзен Я.А., Канье Ж. Применения компьютерной алгебры - В сб. Компьютерная алгебра Символьные и алгебраические вычисления М. Мир, 1986, 308-325 - РЖ Мат, 1983, 1181174
- Calmet J., Tjandra I.A. [1990] On the design of an artificial intelligence environment for Computer algebra systems - In: Computer Algebra Phys. Res., Dubna, 1990, 17-18

- Cawness B F [1986] Computer algebra past and future - Lect Notes Comput Sci EVRO-CAL'85 1986, N 203, 1-18
- Chapront J, Mangenay-Gherysman L [1968] Applications of literal series to the main problem of the lunar theory - Astron J, 1968, 73, N 3, 214-216
- Cohen J. [1976] Symbolic and numerical computer analysis of the combined local and overall buckling of rectangular thin-walled columns - Comput Methods Appl Mech and Eng, 1976, 7, 17-38
- Cohen H J, Lorange O, Sunblad Y [1976] The use of algebraic computing in general relativity - Gen Rel Grav, 1976, 7, N 3, 269-286
- Computer Algebra in Physical Research int Conf Computer Algebra Phys Res, Dubna, USSR (1990). Memorial Volume for N N Govorun - Singapore, New Jersey, London, Hong Kong World Sci 1991 453 p C6 аннотация Дубна, ОИЯИ, 1990 96 с
- Davis M S [1968] Programming systems for analytical developments on computers - Astron J., 1968, 73, N 3, 195-202
- Depirt A, Hennard J, Rom A R M [1967] Trojan orbits II Birkhoff's normalization - Icarus, 1967, 6, 381-406
- Depirt A, Poplarchek W, Depirt-Barolome A [1976] Compression of ephemerides - Celest Mech 1976, 11, N 1, 53-58.
- Depirt A, Rom A [1968] Lindstedt's series on a computer./ Astron J, 1968, 73, N 3, 210-213
- D'Inverno R A [1975] Algebraic computing in general relativity - Gen Rel Grav, 1975, 6 N 6, 567-593
- Engeler E, Mader R. [1986] Scientific computation. The integration of symbolic, numeric and graphic computations - Lect Notes Comput. Sci. EVROCAL'85. 1986, N 203, 185-201.
- EUROMECH 343, Computer Symbolic Manipulation in Mechanics International Colloquium Technical University Hamburg-Harburg, Hamburg, Okt 9-13, 1995 Abstracts, 70 p
- Falman R [1984] My view of future of symbolic and algebraic computations - SIGSAM Bull., 1984, 18, N 2, 18-19
- Jefferys W H [1971] Automated algebraic manipulations in celestial mechanics - Commun ACM, 1971, 14, N 8, 538-541 - РЖ Мех, 1972, 9A68
- Hendel K [1989] Anwenderinformation zum Programmsystem DMKS-86 - Rep Inst Mech Acad Wissensch DDR Karl-Marx-Stadt, 1989, N 20, 104 p
- Herget P, Musen P [1959] The calculation of literal expansions - Astron J, 1959, 64, 11
- Hon G, Kozar Y [1975] Analytical theories of the motion artificial satellite - In Satellite Dyn Berlin 1975, 1-15
- Howard J C [1979] MACSYMA as an aid to simulation modelling./ MACSYMA 1979, 483-521
- Howard J.C [1980] Practical applications of symbolic computation - Guilford, Surrey England LPC Sci and Techn Press 1980
- Huizen J A van [1985] Program generation aspects of the symbolic-numeric interface - Дубна-85 104-113
- Huizen J A van, Calmet J [1983] Computer algebra system. - In Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation - Wien, N-Y Springer-Verlag, 1983, 221-243 Ван Хюльзен Я А, Калме Ж Системы компьютерной алгебры - В сб Компьютерная алгебра Символьные и алгебраические вычисления М, 1986, 277-307. - РЖ Мат, 1983, 4B1173
- Kane T R, Levinson D A [1985] Dynamics theory and applications - New York McGraw-Hill Book Company, 1985.
- Kircanski M, Vukobratovic M, Kircanski N., Temcenko A [1988] A new program package for the generation of efficient manipulator kinematic and dynamic equations in symbolic form - Robotica 1988, 6, 311-318
- Kovalevsky J [1968] Review of some methods of programming of literal developments in celestial mechanics - Astron J, 1968, 73, N 3, 203-229 Kovalevsky J [1973] Revue general des methodes automatiques de calcul de theones analytiques de satellites artificiels - Astronaut Res., Dordrecht-Boston 1973, 12-25
- Kreuzer E, Schienlen W [1990] NEWEUL- software for the generation of symbolical equations of motion - In: Multibody systems handbook Berlin Springer, 181-202 Kreuzer E., Leister G Programmsystem NEWEUL'90 User's Guide AN-24 Stuttgart University, Institute B of

Mechanics, 1991

- Lesser M [1995] The Analysis of Complex Nonlinear Mechanical Systems: A Computer Algebra Assisted Approach - World Scientific, Nonlinear Science, series A, Vol. 17, 340 pp
- LeSchack A.R., Sootzo P [1968] FORMAC language and its application to celestial mechanics - Astron. J., 1968, 73, N 3, 217-220
- Levinson D.A., Kane T.R. [1990] AUTOLEV - a new approach to multibody dynamics - In Multibody systems handbook. Berlin: Springer, 1990, (Schiehlen W.-1990), 81-102
- Lilov L., Bekjarov B. [1983] Accuracy of multibody systems with tree-like structure and arbitrary joints - Theor. and Appl. Mech. 1983, 14, N 1
- Lilov L., Bekjarov B. [1989] Accuracy of multibody systems - Mech. struct. and mach. 1989, 17, N 2
- Lilov L., B. Bekjarov B., Lorier M. [1990] CAMS - a graphical interactive system for computer simulation and design of multibody systems - In Multibody systems handbook - Berlin Springer (Schiehlen W.-1990), 61-80.
- Möla A.M., Poltosin I.V. [1981] A bibliography of soviet works in algebraic manipulations - SIGSAM Bull., 1981, 15, N 1, 5-7
- Moses J. [1971] Symbolic integration: the stormy decade/ Commun. ACM, 1971, 14, n 8, 548-560
- Moses J. [1971] Algebraic simplification: a guide for the perplexed./ Tam. me, 1971, 527-537
- Moses J. [1974] MACSYMA - The Fifth Year - SIGSAM Bull., 1974, 8, N 3, 105-110
- Pavelle R. [1986] MACSYMA: Capabilities and applications to problems in engineering and sciences - Lect. Notes Comput. Sci. EVROCAL'85, 1986, N 203, 19-32
- Paul B. [1975] Analytical dynamics of mechanisms - a computer-oriented overview. - Mechanisms and Machine Theory, 1975, 10, 481-507. Paul B. Kinematics and dynamics of planar machinery - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1979
- Rom A. [1970] Mechanized algebraic operations (MAO) / Celest. Mech., 1970, 1, N 3/4, 301-319
- Schiehlen W. (ed) [1990] Multibody systems handbook - Berlin Springer, 432
- Schaechter D.B., Levinson D.A. [1988] Interactive computerized symbolic dynamics for the dynamicalist - J. Astron. Sci., 1988, 36, N 4, 365-388
- Schwarz F. [1982] A REDUCE package for determining Lie symmetries of ordinary and partial differential equations - Comput. Phys. Commun., 1982, 27, N 5, 179-186
- Stoutemyer D.R. [1986] A preview of the next IBM-PC version of mu MATH - Lect. Notes Comput. Sci. EVROCAL'85, 1986, N 203, 33-44
- Vukobratovic M., Kircanski N. [1984] Real-time dynamics of manipulation robots. Ser. Scientific Fundamentals of Robotics. Vol. 4 Monograph B. Berlin Springer-Verlag, 1984
- Vukobratovic M., Kircanski N. [1984] Computer assisted Generation of robot dynamic models in analytical form - Acta appl. math., Int. J. Appl. Math. and Math. Appl., 1984, 2, N 2
- Vukobratovic M., Kircanski N., Timcenko A., Kircanski M. [1990] SYM - program package for computer-aided generation of optimal symbolic models of robot manipulators - In Multibody systems handbook. Berlin: Springer, 1990, (Schiehlen W.-1990), 37-57
- Vukobratovic M., Polkonjak V. [1979] Contribution to computer construction of active chain models via Lagrangian form - Trans. ASME J. Appl. Mech., 1979, 48, N 1
- Wang P.S. [1990] Advances in integrating symbolic, numeric and graphics computing. Dubna-90, 9
- Wang P., Rothschild L. [1973] Factoring multivariate polynomials over the integers - SIGSAM Bull., 1973, 20, 21-29
- Wittenburg J., Wolz U., Schmedt A. [1990] MESA VERDE - a general-purpose program package for symbolical dynamics simulations of multibody systems In Multibody systems handbook - Berlin Springer (Schiehlen W.-1990) 341-360
- Yun D.Y.Y. [1973] An algorithm for solving systems of polynomial equations - SIGSAM Bull., 1973, 27, 19-25

