

**А. С. Мищенко
Ю. П. Соловьев
А. Т. Фоменко**

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ**

Под общей редакцией
академика А. Т. Фоменко



Москва
Физматлит
2004

ББК 22.151
М 57
УДК 513

Рецензенты:

профессор *А. Н. Паршин*
профессор *И. Х. Сабитов*

МИЩЕНКО А. С., СОЛОВЬЕВ Ю. П., ФОМЕНКО А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., перераб. и доп.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2004.—412 с.—ISBN 5-94052-078-2.

Сборник состоит из двух частей. Часть первая содержит задачи по дифференциальной геометрии. Во вторую часть включены задачи по топологии. Подавляющее большинство вошедших в сборник задач снабжены либо подробными решениями и указаниями, либо ответами. Многие задачи иллюстрированы.

Для студентов математических специальностей университетов. Сборник может быть использован преподавателями вузов.

Ответственный редактор **Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ**



9 785940 520788

ISBN 5-94052-078-2

© Физматлит, 2004

© Коллектив авторов, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Предисловие ко второму изданию	7

Часть 1

§ 1. Системы координат	9
§ 2. Уравнения кривых и поверхностей	17
§ 3. Классические метрики на сфере и плоскости Лобачевского, их свойства	20
§ 4. Теория кривых	26
§ 5. Риманова метрика	37
§ 6. Вторая квадратичная форма, гауссова и средняя кривизны	45
§ 7. Многообразия	51
§ 8. Тензоры	62
§ 9. Векторные поля	66
§ 10. Связности и параллельный перенос	68
§ 11. Геодезические на двумерных поверхностях	74
§ 12. Тензор кривизны	80
§ 13. Дифференциальные формы и когомологии де Рама	84
§ 14. Топология	93
§ 15. Гомотопия, степень отображения и индекс векторного поля	100

Часть 2

§ 16. Системы координат (дополнительные задачи)	109
§ 17. Кривые и поверхности: уравнения и параметризации	110
§ 18. Теория кривых (дополнительные задачи)	122
§ 19. Риманова метрика (дополнительные задачи)	141
§ 20. Гауссова и средняя кривизны	150
§ 21. Параметризации известных двумерных поверхностей	157
§ 22. Поверхности в $\mathbb{R}^3$	162
§ 23. Топология двумерных поверхностей	165
§ 24. Линии на поверхностях	168
§ 25. Многообразия (дополнительные задачи)	176
§ 26. Тензорный анализ	183
§ 27. Геодезические на многообразиях	186
§ 28. Тензор кривизны	190
§ 29. Векторные поля	193
§ 30. Группы преобразований	198
§ 31. Дифференциальные формы	204
§ 32. Теория гомотопий	208
§ 33. Накрытия и расслоения	220
§ 34. Критические точки, степень отображения, теория Морса	226
§ 35. Простейшие вариационные задачи	233
§ 36. Общая топология	236

Ответы и решения	241
Список литературы	410

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии» предназначен для обеспечения учебного процесса по курсам дифференциальной геометрии и топологии на механико-математических специальностях университетов и педагогических вузов. «Сборник» призван максимально отразить существующие требования к курсам дифференциальной геометрии и топологии как со стороны новых программ, так и со стороны других курсов математики, физики, механики. Кроме того, издание «Сборника» сделает доступными для широкой математической общественности новые научно-методические разработки ведущих ученых в области дифференциальной геометрии, топологии, алгебры и механики.

«Сборник» может служить основой для практических занятий по курсам дифференциальной геометрии и топологии на математических и механических специальностях университетов и педагогических вузов как российских, так и стран СНГ — таких, как Белоруссия, Украина, Грузия, Казахстан, Туркменистан, Литва, — откуда в последние годы неоднократно поступали заявки на сборник задач такого рода.

Он может быть также использован для поддержки разнообразных специальных курсов по различным разделам современной геометрии и ее приложениям к механике и математической физике.

«Сборник» состоит из двух частей. Первая часть содержит задачи по стандартным разделам дифференциальной геометрии и топологии. Этот материал перекрывает необходимый минимум задач по стандартным курсам геометрии и топологии. Вторая часть содержит задачи, предназначенные для более глубокого усвоения современной геометрии и ее приложений.

В книге представлены следующие темы: теория кривых (включая эволюты и эвольвенты), теория поверхностей, системы координат, риманова геометрия, классические метрики (на сфере, плоскости Лобачевского и т. п.), топологические пространства, многообразия (включая элементы расслоенных пространств, фазовые и конфигурационные пространства), топология двумерных поверхностей, двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, группы и алгебры Ли (включая маломерные группы Ли, их параметризации, часто используемые в механике), векторные поля и тензоры, дифференциальные формы (включая интегрирование и теорию де Рама и т. п.), связности и параллельный пе-

ренос, геодезические, тензор кривизны, элементы алгебраической топологии (эйлерова характеристика, индекс векторного поля, индекс пересечения и т. п.), связности и группы Ли.

Книга также содержит как дополнительные задачи по темам, отраженным в первой части, так и задачи по некоторым новым темам, затрагивающие более глубокие вопросы дифференциальной геометрии и топологии. Среди новых тем, представленных во второй части, следует отметить компьютерную геометрию и топологию, кинематику и геометрию, геометрические конструкции (такие, как джеты, многообразия Штифеля и Грассмана и т. п.), производная Ли, задачи на упаковку, комбинаторная геометрия на плоскости и в пространстве, элементы гамильтоновой механики.

Настоящий сборник задач является естественным дополнением к учебнику А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии», переизданному в 2000 г. В значительной степени настоящий «Сборник» базируется на книге А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьева, А. Т. Фоменко «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии», вышедшей в Издательстве Московского университета в 1981 г. Здесь следует отметить, что по истечении многих лет, в 1998 г., электронная версия этого предыдущего задачника была создана А. А. Ошемковым. Затем в 1998–1999 гг. на механико-математическом факультете МГУ по инициативе кафедры дифференциальной геометрии и приложений был организован специальный научно-методический семинар по составлению нового «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии». Семинаром руководили профессора А. С. Мищенко и Ю. П. Соловьев и академик А. Т. Фоменко. В силу перечисленных обстоятельств в качестве авторов на обложке книги указаны именно эти три фамилии. Однако фактически в создании «Сборника» принимал участие большой коллектив известных ученых, выдающихся специалистов в области современной геометрии, топологии, алгебры, механики и приложений: академик РАН В. В. Козлов, проф. В. В. Федорчук, проф. А. В. Болсинов, проф. Э. Р. Розендорн, проф. В. В. Трофимов, проф. А. А. Борисенко (Харьков), проф. И. Х. Сабитов, проф. Е. В. Троицкий, проф. А. О. Иванов, проф. А. А. Тужилин, ст. н. с. Г. В. Носовский, н. с. А. И. Шафаревич, доцент А. А. Ошемков, м. н. с. Ф. Ю. Попеленский, асс. Е. А. Кудрявцева.

Самое активное участие в работе семинара, составлении задач и их решении принимали практически все студенты и аспиранты кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Всем им выражаем глубокую благодарность.

В области дифференциальной геометрии и топологии существует несколько сборников задач, учебников и учебных пособий.

Небольшой список наиболее известных изданий мы приводим в конце книги.

Следует заметить, что сборники задач по дифференциальной геометрии и топологии, изданные в последнее время, выходили малыми тиражами и поэтому практически недоступны. Книжки же, изданные ранее и более крупными тиражами, уже разошлись, стали редкостью. Кроме того, материал некоторых книг в значительной мере устарел и нуждается в обновлении. Это связано как с совершенствованием программ математических курсов, так и с тем, что со стороны других курсов, использующих или опирающихся на методы дифференциальной геометрии и топологии, значительно изменились и усилились требования к геометрическим курсам. Все это сделало издание «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии» особенно актуальным.

Мы собрали большой научно-методический материал, по большей части неизвестный широкой математической общественности. Неизвестный в силу нескольких причин, основными из которых являются следующие. Во-первых, многие задачи возникли во время собственных научных исследований участников упомянутого выше семинара. Во-вторых, некоторые задачи появились в результате дискуссий на заседаниях семинара. Наконец, достаточно большое количество задач было извлечено из старой математической литературы, уже давно ставшей библиографической редкостью и поэтому недоступной современным студентам и преподавателям.

Из собранного таким образом научно-методического материала и сформировался настоящий «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии».

Особо отметим абсолютно неоценимую роль Ф.Ю.Попеленского при подготовке к изданию настоящей книги. Объем выполненной им работы по упорядочиванию задач, по организации проверки их условий и решений, а также по набору текста и т.п. был настолько велик, что лишь благодаря его неутомимым усилиям эта книга, наконец, увидела свет.

*А. С. Мищенко
Ю. П. Соловьев
А. Т. Фоменко*

Москва, МГУ, май 2000 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Перед читателем лежит второе издание «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии». Первое его издание вышло в 2001 г. в издательстве «Физматлит». На протяжении последующих двух лет велась активная работа по улучшению задачника. Особо активное участие в этой работе приняли сотрудники кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Мы учли многочисленные пожелания как преподавателей, так и студентов, возникшие при использовании первого издания на занятиях. Были устранены замеченные опечатки и неточности, добавлены новые задачи. Особенно это коснулось первой части задачника, наиболее активно используемой на семинарских занятиях по обязательным курсам механико-математического факультета МГУ «Классическая дифференциальная геометрия» и «Дифференциальная геометрия и топология». Мы также изменили структуру некоторых параграфов и добавили новые, стремясь к более четкому распределению задач по темам. Кроме того, в целях повышения наглядности добавлено много новых рисунков.

Несмотря на то, что дифференциальная геометрия — наука зрелая, процесс улучшения задачника оказался «расходящимся». Чем больше мы углублялись в работу, тем больше находилось сравнительно элементарных и в то же время весьма полезных задач, которые просто «невозможно было не включить» в задачник. Мы сознательно прервали этот процесс, постаравшись добиться большой содержательности при разумном объеме. Кроме того, мы отдаем себе отчет в том, что отразить в одной книге все богатство и разнообразие современной геометрии практически невозможно. Тем не менее, нам представляется, что настоящее издание является не только самым современным, но и наиболее полным задачником по университетским курсам дифференциальной геометрии и топологии.

*А. Т. Фоменко
Ф. Ю. Попеленский*

Комментарий А.Т. Фоменко:

Хочу особо подчеркнуть важную роль Ф.Ю. Попеленского при подготовке настоящего издания. Он не только глубоко проанализировал большинство задач и их решений, обнаружил и исправил многие опечатки и неточности, но и предложил исключительно ценные и изящные новые серии задач.



Сфера Александра: топологическое вложение двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$, при котором образ сферы разделяет $\mathbb{R}^3$ на две открытые области. Одна из них — шар, а вторая — неодносвязна (рисунок А. Т. Фоменко)

Часть 1

§ 1. Системы координат

Рассмотрим область U пространства $\mathbb{R}^n$, в котором заданы декартовы координаты $(x^1, \dots, x^n)$. Предположим, что в другом экземпляре пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $(q^1, \dots, q^n)$ задана область V и установлено взаимно однозначное соответствие между точками областей U и V . В этом случае для задания точки области U мы можем использовать набор чисел $(q^1, \dots, q^n)$ — декартовы координаты соответствующей точки области V . Будем говорить, что $(q^1, \dots, q^n)$ являются *криволинейными координатами* в области U , если:

1) функции

$$x^i = x^i(q^1, \dots, q^n),$$

задающие взаимно однозначное соответствие между точками областей U и V , имеют непрерывные производные всех порядков в области V ;

2) якобиан $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right|$ отличен от 0 во всех точках области V .

Заметим, что в подавляющем большинстве случаев достаточно предполагать, что функции $x^i(q^1, \dots, q^n)$ имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Из определения криволинейных координат следует, что обратные функции $q^i(x^1, \dots, x^n)$ также имеют непрерывные производные всех порядков в области U , причем якобиан $J' = \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right|$ отличен от нуля (он равен J^{-1}).

Функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ удобно рассматривать одновременно для всех $i = 1, \dots, n$, используя для этого вектор-функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^n), \quad \text{где } \mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n).$$

В области U условия $q^i = \text{const}$ определяют n семейств *координатных гиперповерхностей*. Координатные гиперповерхности одного и того же семейства не пересекаются.

Любые $n - 1$ координатных гиперповерхностей, принадлежащих различным семействам, пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называются *координатными*. Будем также называть их *координатными линиями*.

Векторы $\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}$ имеют направления касательных к координатным линиям. В каждой точке области U эти векторы линейно независимы. Они определяют в окрестности некоторой точки $M(q^1, q^2, \dots, q^n)$ бесконечно малый вектор

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i.$$

Квадрат его длины, выраженный в криволинейных координатах, определяется из равенства

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i, \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j dq^j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq^i dq^j,$$

где $\langle, \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Величины $g_{ij} = g_{ji} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$ определяют метрику в криволинейной системе координат $(q^1, \dots, q^n)$.

Ортогональной криволинейной системой координат называется такая система координат, для которой

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ H_i^2, & i = j. \end{cases}$$

Величины $H_i > 0$ называются коэффициентами Ламе. Они равны модулям длин векторов $\mathbf{r}_i$:

$$H_i = |\mathbf{r}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x^n}{\partial q^i}\right)^2}.$$

Квадрат линейного элемента в ортогональных криволинейных координатах задается выражением

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + \dots + H_n^2 (dq^n)^2.$$

В задачах 1.1–1.5:

- установите формулы, выражающие криволинейные координаты точки плоскости $\mathbb{R}^2$ через декартовы и обратно;
- найдите координатные линии;
- подсчитайте определители

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

и выясните, в каких точках плоскости $\mathbb{R}^2$ нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и декартовыми координатами точки на плоскости для следующих криволинейных координат (u_1, u_2) .

1.1. Для обобщенной полярной системы координат, определяемой равенством $\frac{x_1}{a_1} + i\frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2}$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. При каких условиях эти координаты совпадают с обычными полярными?

1.2. Для эллиптической системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = \operatorname{ch}(u_1 + iu_2)$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$.

1.3. Для параболической системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2$, где $-\infty < u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 < \infty$.

1.4. Для биполярной системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = \operatorname{th} \left(\frac{u_1 + iu_2}{2} \right)$, где $-\infty < u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, без точек $(u_1 = 0, u_2 = \pi) = (x_1 = x_2 = \infty)$, $(u_1 = +\infty) = (x_1 = 1, x_2 = 0)$, $(u_1 = -\infty) = (x_1 = -1, x_2 = 0)$.

1.5. Для системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^3$, где $u_2 \geq 0$, $u_1 + u_2\sqrt{3} \geq 0$.

В задачах 1.6–1.12:

а) найдите координатные поверхности и координатные линии;

б) подсчитайте определители $\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$, $\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$ и установите, в ка-

ких точках пространства $\mathbb{R}^3$ нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для следующих криволинейных систем координат u_1, u_2, u_3 пространства $\mathbb{R}^3$;

в) являются ли эти системы координат ортогональными?

1.6. Для обобщенной цилиндрической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2, \quad x_3 = u_3,$$

где $u_1 \geq 0$, $0 < u_2 \leq 2\pi$, $-\infty < u_3 < \infty$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (см. рис. 1).

1.7. Для обобщенной сферической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = a_3 u_1 \cos u_2,$$

где $u_1 \geq 0$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $0 \leq u_3 < 2\pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ (см. рис. 2).

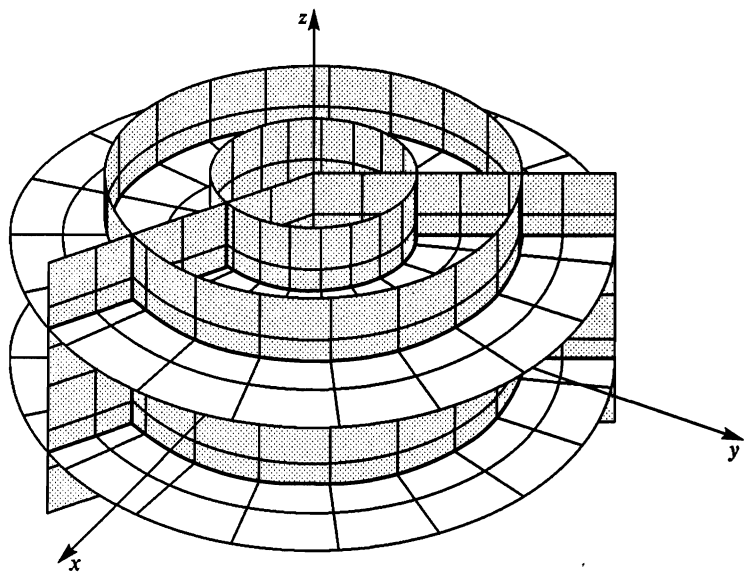


Рис. 1. Цилиндрическая система координат, $a_1 = a_2 = 1$

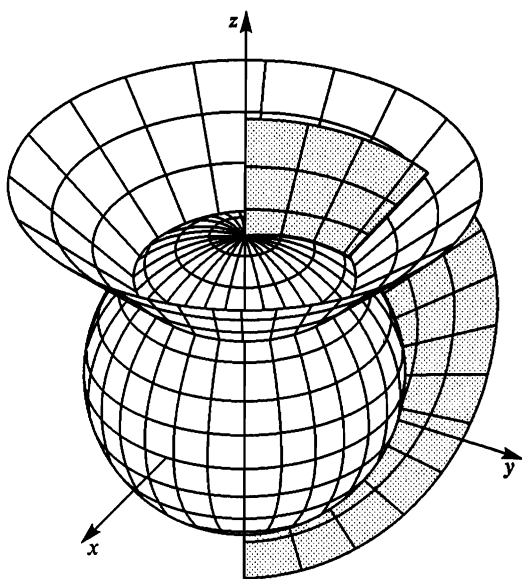


Рис. 2. Сферическая система координат, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

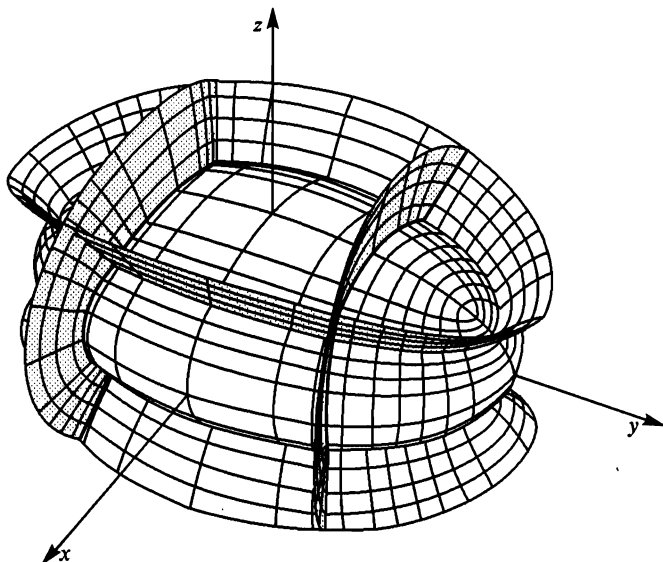


Рис. 3. Эллипсоидальная система координат

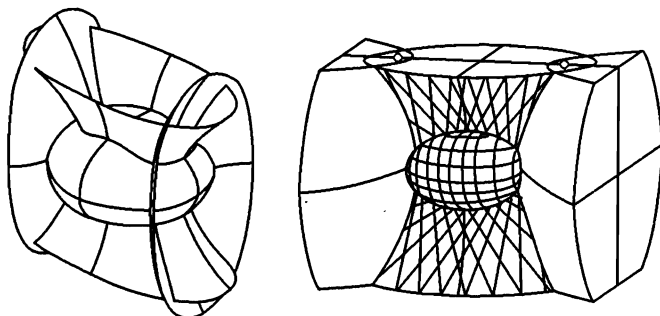


Рис. 4. Эллипсоидальная система координат

1.8. Для эллипсоидальной системы координат, определяемой равенствами

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)},$$

$$x_2^2 = \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)},$$

$$x_3^2 = \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},$$

где $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, $u_1 < a_3 < u_2 < a_2 < u_3 < a_1$ (см. рис. 3, 4).

1.9. Для параболической системы координат, определяемой равенствами $x_1 = u_1 u_2 \cos u_3$, $x_2 = u_1 u_2 \sin u_3$, $x_3 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 < \infty$, $-\pi < u_3 \leq \pi$.

1.10. Для системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемой равенствами $x_1 = \text{sh } u_1 \sin u_2 \cos u_3$, $x_2 = \text{sh } u_1 \times \sin u_2 \sin u_3$, $x_3 = \text{ch } u_1 \cos u_2$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 5).

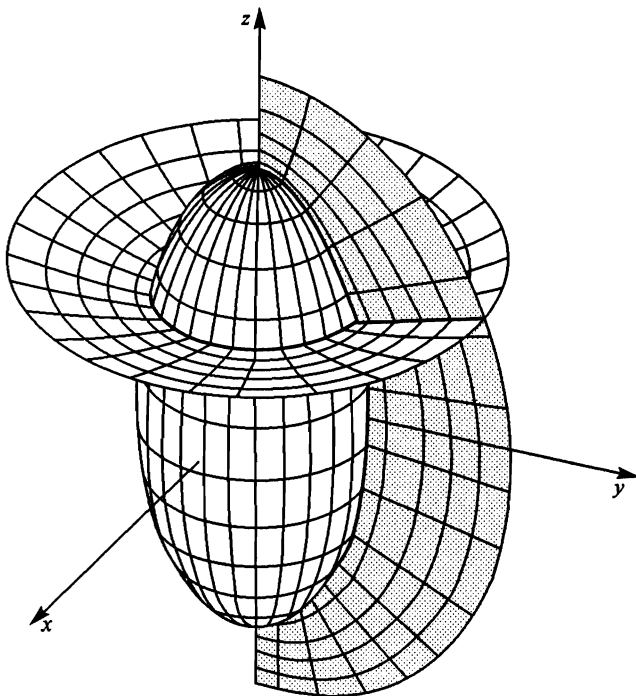


Рис. 5. Вырожденная эллипсоидальная система координат

1.11. Для системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемой равенствами $x_1 = \text{ch } u_1 \sin u_2 \cos u_3$, $x_2 = \text{ch } u_1 \times \sin u_2 \sin u_3$, $x_3 = \text{sh } u_1 \cos u_2$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 6).

1.12. Для системы тороидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{\text{sh } u_1 \cos u_3}{\text{ch } u_1 - \cos u_2}, \quad x_2 = \frac{\text{sh } u_1 \sin u_3}{\text{ch } u_1 - \cos u_2}, \quad x_3 = \frac{\sin u_2}{\text{ch } u_1 - \cos u_2},$$

где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 7).

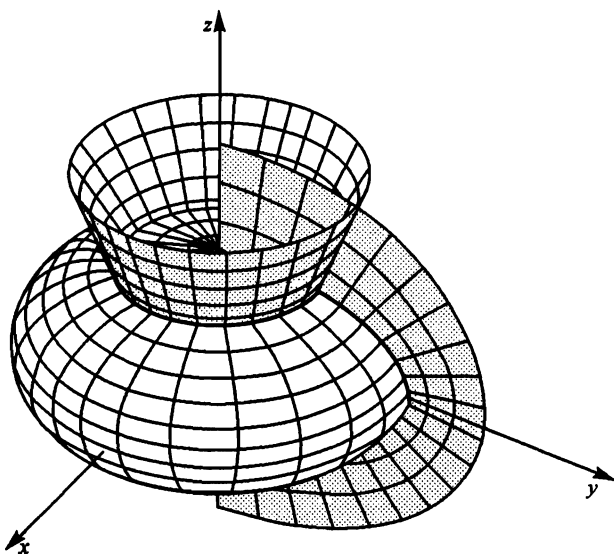


Рис. 6. Вырожденная эллипсоидальная система координат

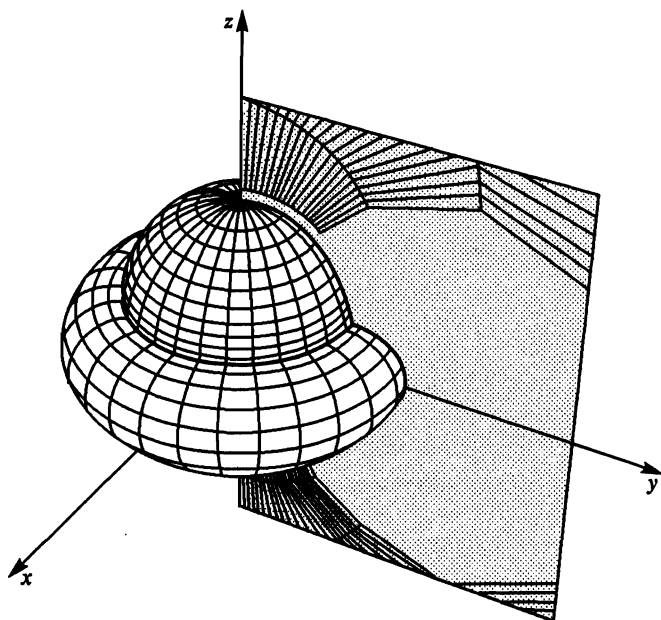


Рис. 7. Тороидальная система координат

1.13. Преобразовать выражение $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$ к новым координатам u, v , связанным с x, y соотношениями $u = x, v = x^2 + y^2$. Проверьте, действительно ли предложенная система u, v является криволинейной системой координат. Укажите ее область определения и область значений.

1.14. Преобразовать к полярным координатам $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$ выражения:

а) $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$; б) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}$; в) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$;
 г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа).

1.15. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым координатам u, v , где $u = y + ax, v = y - ax$. При каких a предложенная замена дает регулярную систему координат?

1.16. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + k^2 z = 0$ к новым координатам u, v , где $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), y = uv$.

1.17. Преобразовать к сферическим координатам r, θ, φ , связанным с x, y, z равенствами $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$, следующие выражения:

а) $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2$; б) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

1.18. Пусть $x = f(u, v), y = \varphi(u, v)$ — такая система координат, что $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}$. Докажите, что выполнено соотношение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right).$$

1.19. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ в цилиндрической системе координат r, φ, z такой, что $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$.

1.20. Покажите, что при переходе от декартовых координат x, y к полярным координатам ρ, φ условия Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ принимают вид $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

1.21. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = z^2$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

1.22. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = a \operatorname{ch} z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

1.23. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = e^z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

§ 2. Уравнения кривых и поверхностей

2.1. Точка M равномерно движется по прямой ON , равномерно вращающейся вокруг точки O . Составить уравнение траектории точки M (спираль Архимеда).

2.2. Прямая OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . Точка M движется по прямой OL со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Составить уравнение траектории, описываемой точкой M (логарифмическая спираль).

2.3. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки M , жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра. Кривая, полученная при $d = a$, называется *циклоидой*, при $d < a$ — *укороченной циклоидой*, при $d > a$ — *удлиненной циклоидой*.

2.4. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R , оставаясь вне ее. Составить уравнение траектории точки M катящейся окружности (*эпициклоида*).

2.5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R , оставаясь внутри ее. Составить уравнение траектории точки M катящейся окружности (*гипоциклоида*).

2.6. Найти кривую, задаваемую уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $c < t < d$, зная, что $\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{a}$, где $\lambda(t) > 0$ — непрерывная функция, $\mathbf{a}$ — постоянный ненулевой вектор.

2.7. Найти кривую, задаваемую уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $-\infty < t < \infty$, если $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}$ — постоянный ненулевой вектор.

2.8. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \times \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{r}'$ следующие величины: а) $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2$; б) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$.

2.9. Плоская кривая задана уравнением $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), t\varphi(t))$. При каком условии это уравнение определяет прямую линию или ее часть?

2.10. Найти функцию $r = r(\varphi)$, зная, что это уравнение в полярных координатах на плоскости определяет прямую линию.

2.11. а) Доказать, что материальная точка M под действием центральной силы $\mathbf{F} = F\mathbf{r}$ описывает траекторию, лежащую в некоторой фиксированной плоскости, проходящей через начало координат. Отметим, что функция F может зависеть как от длины вектора $\mathbf{r}$, так и от его направления.

б) Составить уравнение движения точки M в этой плоскости в полярных координатах.

в) Показать, что для центральной силы $\mathbf{F}$, задаваемой формулой

$$\mathbf{F} = -k \frac{m\mathbf{r}}{r^3},$$

движение точки M происходит по кривой второго порядка. Здесь m — масса материальной точки M , r — длина вектора $\mathbf{r}$, а $k > 0$.

2.12. Движение электрона в постоянном магнитном поле определяется дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \text{const.}$$

Доказать, что траектория электрона является винтовой линией.

2.13. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор.

2.14. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}),$$

где $\mathbf{e}$ — фиксированный вектор единичной длины.

2.15. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{r},$$

где число a и вектор $\mathbf{e}$ постоянны.

2.16. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2\mathbf{e} - \mathbf{r}\langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle,$$

где $\mathbf{e}$ — фиксированный вектор единичной длины.

2.17. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8, \quad y^2 = 2x?$$

2.18. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8x, \quad y^2 = \frac{x^3}{2-x}?$$

2.19. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 = 4y, \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}?$$

2.20. Найти натуральный параметр (или длину) следующих кривых:

а) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ — цепная линия;

б) $y = x^{3/2}$; в) $y = x^2$;

г) $y = \ln x$; д) $r = a(1 + \cos \varphi)$;

е) $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$;

ж) $\mathbf{r}(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$;

з) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{3}(2 \cos t + \cos 2t), \frac{a}{3}(2 \sin t + \sin 2t) \right)$;

и) $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$; к) $y = e^x$;

л) $\mathbf{r}(t) = \left(a \left(\ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \cos t \right), a \sin t \right)$.

2.21. Найти длину дуги кривой

$$x = -f'(\alpha) \sin \alpha - f''(\alpha) \cos \alpha,$$

$$y = f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha.$$

2.22. Вокруг оси Oz вращается окружность $x = a + b \cos v$, $z = b \sin v$ ($0 < b < a$). Составить уравнение поверхности вращения.

2.23. Прямая движется поступательно с постоянной скоростью, пересекая другую прямую под прямым углом, и одновременно равномерно вращается вокруг этой прямой. Составить уравнение поверхности, которую описывает движущаяся прямая. Эта поверхность называется *прямым геликоидом*.

2.24. Составить уравнение поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ вокруг оси Ox . Эта поверхность называется *катеноидом*.

2.25. Составить уравнение поверхности, образованной вращением трактрисы

$$\rho = \left(a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - a \sin t, a \cos t \right), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

вокруг ее асимптоты. Эта поверхность называется *псевдосферой*.

2.26. На круговом торе вращения, кроме параллелей и меридианов, являющихся плоскими окружностями, существует еще два семейства плоских окружностей, называемых *окружностями*

Виларсо. Они получаются пересечением тора его касательной плоскостью, касающейся тора в двух точках. Получить уравнения этих

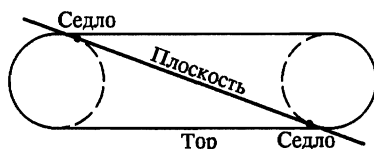


Рис. 8

окружностей, проверить, что все они имеют один и тот же радиус и пересекают все параллели тора под постоянным углом (см. рис. 8).

§ 3. Классические метрики на сфере и плоскости Лобачевского, их свойства

3.1. Вычислить метрики на стандартной единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ в следующих координатах:

- а) в декартовых координатах x, y ;
- б) в сферических координатах θ, φ ;
- в) в декартовых координатах u, v на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции из северного полюса сферы (см. рис. 9);

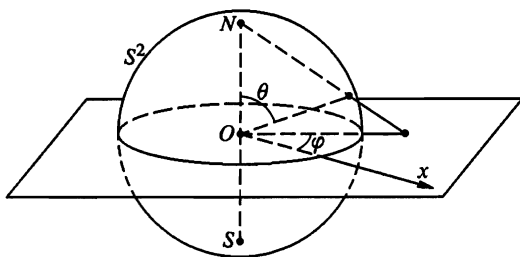


Рис. 9. Стереографическая проекция

г) в полярных координатах ρ, φ на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции (см. предыдущий пункт);

д) в комплексных координатах $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции.

3.2. Рассмотрим псевдоевклидово пространство с координатами t, x, y и со скалярным произведением $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$.

Вычислить метрику псевдосферы мнимого радиуса $-t^2 + x^2 + y^2 = -1$ в следующих координатах:

- а) в декартовых координатах x, y ;
- б) в координатах ρ, φ, χ , где ρ, φ, χ — псевдосферические координаты в нашем псевдоевклидовом пространстве;
- в) в декартовых координатах u, v на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы из ее южного полюса $(0, 0, -1)$ (см. рис. 10);

г) в полярных координатах r, φ на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы из ее южного полюса $(0, 0, -1)$;

д) в комплексных координатах $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы;

е) от комплексных координат предыдущего пункта перейти к новым комплексным координатам в верхней полуплоскости при помощи дробно-линейного преобразования, переводящего круг единичного радиуса в верхнюю полуплоскость;

ж) для предыдущих двух пунктов нарисовать образы обеих компонент связности псевдосферы при ее указанных проекциях на плоскость;

з) доказать, что длина ρ отрезка прямой, соединяющего точки с радиус-векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на верхней половине псевдосферы задается формулой $\text{ch } \rho = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, где скалярное произведение вычисляется в псевдоевклидовом пространстве;

и) доказать, что расстояние ρ от точки с радиус-вектором $\mathbf{a}$ на верхней половине псевдосферы до прямой, определяемой условием $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle = 0, |\mathbf{e}| = 1$, задается формулой $\text{sh } \rho = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle|$. Здесь скалярное произведение вычисляется в псевдоевклидовом пространстве.

3.3. В моделях метрики Лобачевского в единичном круге (модель Пуанкаре) и на верхней полуплоскости показать, что угол между пересекающимися кривыми равен углу между теми же кривыми в евклидовой метрике.

3.4. Доказать, что при стереографической проекции сферы S^2 на плоскость произвольная окружность переходит либо в прямую, либо в окружность.

3.5. Покажите что группа дробно-линейных преобразований, являющихся движениями метрики:

- а) задачи 3.1д — изоморфна $SU(2)/\{\pm E\}$;

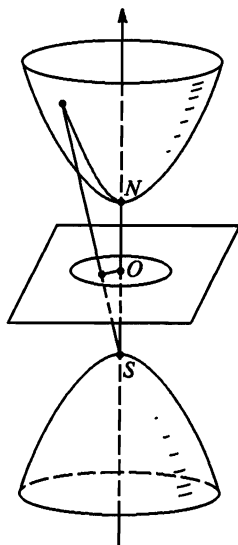


Рис. 10. Стереографическая проекция

б) задачи 3.2д — изоморфна $SU(1, 1)/\{\pm E\}$;

в) задачи 3.2е — изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm E\}$.

3.6. Показать, что группа дробно-линейных преобразований, являющихся движениями метрики плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости (см. задачу 3.2е) порождается преобразованиями $z \mapsto z + a$ и $z \mapsto -\frac{1}{z}$, где $a \in \mathbb{R}$.

3.7. Рассмотрим на плоскости Лобачевского произвольные прямые l_1 и l_2 с точками A_1, B_1 и A_2, B_2 на них соответственно, причем расстояние от A_1 до B_1 равно расстоянию от A_2 до B_2 . Показать, что существует движение, которое переводит:

а) l_1 в l_2 ;

б) l_1 в l_2 и A_1 в A_2 ;

в) l_1 в l_2 , A_1 в A_2 и B_1 в B_2 .

3.8. Найти дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости, являющееся движением плоскости Лобачевского, которое переводит:

а) прямую $x^2 + y^2 = 1$ в прямую $x = 0$;

б) прямую $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ и точку $(1, 2)$ в прямую $x = 3$ и точку $(3, 2)$.

3.9. Пусть точки плоскости Лобачевского $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ таковы, что $\rho(A_i, A_j) = \rho(B_i, B_j)$ для всех i и j . Показать, что существует единственное движение плоскости Лобачевского, которое переводит точку A_i в B_i , $i = 1, 2, 3$. Вывести отсюда, что группа всех движений плоскости Лобачевского порождается преобразованиями $z \mapsto z + a$, $z \mapsto -\frac{1}{z}$, $z \mapsto -\bar{z}$, где $a \in \mathbb{R}$.

3.10. а) Показать, что на плоскости Лобачевского существует единственная прямая, перпендикулярная данной и проходящая через данную точку.

б) Пользуясь предыдущим пунктом, определить симметрию относительно прямой на плоскости Лобачевского и показать, что это преобразование является движением.

в) Найти формулу для симметрии относительно прямой

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

г) Найти формулу для симметрии относительно прямой $x = 0$.

3.11. а) Показать, что движение, заданное как дробно-линейное преобразование, разлагается в композицию четного числа симметрий относительно прямой. Показать, что можно обойтись двумя симметриями.

б) Показать, что остальные движения, т.е. не представимые в виде дробно-линейного преобразования, разлагаются в композицию нечетного числа симметрий относительно прямой.

3.12. Доказать, что группа всех изометрий плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости состоит из преобразований вида:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1;$$

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1.$$

3.13. Доказать, что при произвольном дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, окружности и прямые переходят в окружности или прямые.

3.14. Доказать, что для любых попарно различных точек z_1, z_2, z_3 и попарно различных точек w_1, w_2, w_3 , принадлежащих расширенной комплексной плоскости, существует единственное дробно-линейное преобразование, отображающее z_i в w_i , $i = 1, 2, 3$.

3.15. Показать, что длина отрезка прямой, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки (см. рис. 11).

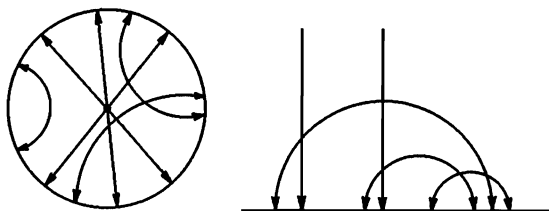


Рис. 11. Прямые на плоскости Лобачевского (модели в единичном круге и на верхней полуплоскости)

3.16. Доказать, что через любые две точки плоскости Лобачевского проходит единственная прямая (см. рис. 11).

3.17. Докажите, что в моделях метрики Лобачевского в единичном круге и на верхней полуплоскости окружности изображаются обычными окружностями.

3.18. Найдите длину окружности и площадь круга радиуса R на: а) плоскости Лобачевского; б) сфере радиуса 1. Сравните с формулами на плоскости.

3.19. а) Найти центр окружности в метрике Лобачевского на верхней полуплоскости, которая задается уравнением

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

б) Докажите, что при стереографической проекции сферы на плоскость окружности на сфере переходят в окружности или прямые.

в) Рассмотрим окружность $x^2 + (y-2)^2 = 1$, являющуюся образом некоторой окружности на сфере при стереографической проекции (см. выше). Возьмем центр этой сферической окружности, лежащий на сфере. Найти его образ на плоскости.

3.20. Найдите середину отрезка AB на плоскости, где $A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B = (0,9; 0,3)$, в следующих метриках:

- а) метрике плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости;
- б) метрике сферы (при стереографической проекции).

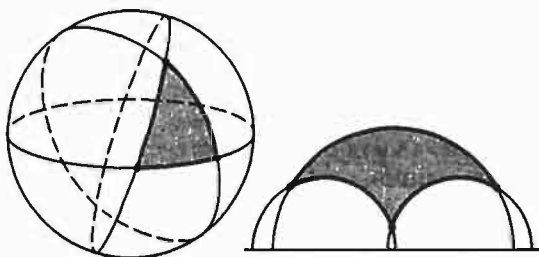


Рис. 12. Треугольники на плоскости Лобачевского и на сфере

3.21. Выразить площадь треугольника (см. рис. 12) через его углы: а) на сфере единичного радиуса; б) на плоскости Лобачевского.

3.22. Доказать для прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского формулы:

- а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$; б) $\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin \beta$;
- в) $\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos \beta$; г) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;
- д) $\cos \alpha = \operatorname{ch} a \sin \beta$; е) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$.

Здесь c — длина стороны, противолежащей прямому углу.

3.23. Рассмотрим на сфере радиуса 1 прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$. Доказать следующие соотношения:

- а) $\cos c = \cos a \cos b$; б) $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$;
- в) $\sin a = \sin c \sin \alpha$; г) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos \beta$;
- д) $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; е) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha$.

3.24. Докажите теоремы косинусов для треугольников на плоскости Лобачевского:

- а) $\sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a = \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma$;
- б) $\cos \alpha \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a$.

3.25. Докажите теоремы косинусов для треугольников на сфере единичного радиуса:

- а) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$;
 б) $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$.

3.26. Докажите теоремы синусов для:

- а) плоскости Лобачевского:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

где $Q = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$;

- б) сферы радиуса 1: $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.

3.27. При каких целых n существуют правильные многоугольники с углом $\frac{2\pi}{n}$: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского?

3.28. Докажите, что на комплексной плоскости точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только тогда, когда двойное отношение $w = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1}$ является вещественным числом.

3.29. Докажите, что на плоскости Лобачевского синус угла α в прямоугольном треугольнике равен отношению длины окружности радиуса, равного противолежащему катету, к длине окружности с радиусом, равным гипотенузе. То же самое для сферы.

3.30. Докажите, что в треугольнике с равными сторонами все углы: а) на плоскости Лобачевского меньше $\pi/3$; б) на сфере больше $\pi/3$.

3.31. Докажите следующие формулы для расстояния между точками A и B (см. рис. 13) в метрике плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости:

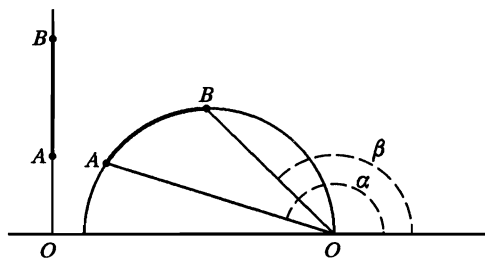


Рис. 13

а) если они имеют одинаковую абсциссу, то $\rho(A, B) = \left| \ln \frac{OB}{OA} \right|$,
 где O — точка пересечения соединяющей их прямой с абсолютом;

б) если они имеют разные абсциссы, то $\rho(A, B) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right|$, где O — точка пересечения абсолюта и прямой плоскости Лобачевского, проходящей через A и B , а α и β — углы между положительным направлением действительной оси и лучами OA и OB соответственно;

в) в общей ситуации: если z_1, z_2 произвольные точки верхней полуплоскости, то

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 + |(z_1 - \bar{z}_2)/(z_1 - z_2)|}{-1 + |(z_1 - \bar{z}_2)/(z_1 - z_2)|} \right),$$

или, что то же самое,

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 + |(z_1 - z_2)/(z_1 - \bar{z}_2)|}{1 - |(z_1 - z_2)/(z_1 - \bar{z}_2)|} \right).$$

3.32. Верно ли, что вокруг любого треугольника можно описать окружность: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского?

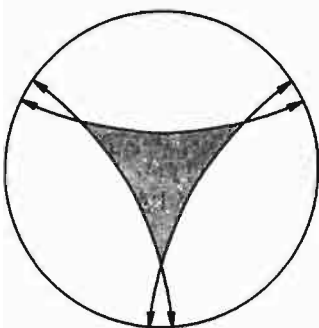


Рис.14. Правильный треугольник на плоскости Лобачевского

3.33. Покажите, что на плоскости Лобачевского через точку, лежащую внутри угла, не всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

3.34. Сравните сторону правильного шестиугольника с радиусом описанной около него окружности: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского.

3.35. Найдите площадь правильного треугольника со стороной a : а) на плоскости Лобачевского (см. рис. 14); б) на сфере.

3.36. Найдите площадь круга и длину окружности, задаваемой уравнением $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 1$, на:

- а) плоскости Лобачевского в ее модели на верхней полуплоскости;
- б) сфере в координатах стереографической проекции.

3.37. Выразить радиус описанной около треугольника окружности через его стороны и углы: а) на плоскости Лобачевского; б) на сфере.

§ 4. Теория кривых

Вообще говоря, мы будем считать, что кривизна плоской кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — натуральный параметр, определяется формулой $k = |\ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{v}}|$. Нормаль к кривой при этом задается формулой $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{v}}/|\dot{\mathbf{v}}|$.

Она не определена в точках, в которых $k = 0$. Более того, в точках перегиба поле нормалей разрывно, т. е. левый и правый пределы различны (см. рис. 15).

В некоторых задачах о глобальном поведении кривой удобнее пользоваться непрерывным полем нормалей. В таких случаях поле нормалей можно определить, поворачивая в каждой точке вектор скорости на угол

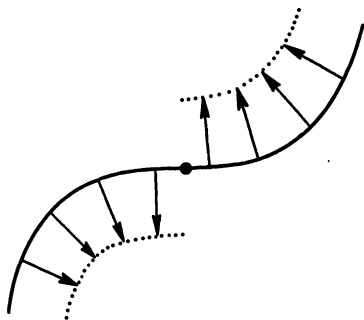


Рис. 15

$\pi/2$ в положительном направлении. В частности, в каждой точке кривой пара векторов $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ образует положительно ориентированный репер на плоскости. Формулы Френе остаются в силе, при этом кривизна k может менять знак.

4.1. Вычислить кривизну следующих кривых:

- а) $y = \sin x$ в вершине (синусоида);
- б) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ (цепная линия);
- в) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската);
- г) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида, см. рис. 16);
- д) $r = a\varphi$ (спираль Архимеда, см. рис. 17);
- е) $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (астроида, см. рис. 18);
- ж) $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (циклоида, см. рис. 19).

4.2. Вычислить для лемнискаты Бернулли, заданной в полярных координатах (r, φ) уравнением $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, интегралы

$$\int_{\gamma} k(s) ds \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} |k(s)| ds,$$

где s — длина дуги, а $k(s)$ — кривизна кривой. См. пояснение в начале параграфа.

4.3. Найти кривизну эллипса с полуосями a и b в его вершинах.

4.4. Найти кривизну кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

4.5. Кривые заданы своим дифференциальным уравнением $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$. Найти их кривизну.

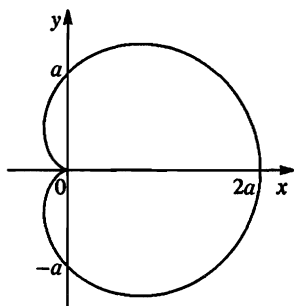


Рис. 16. Кардиоиды

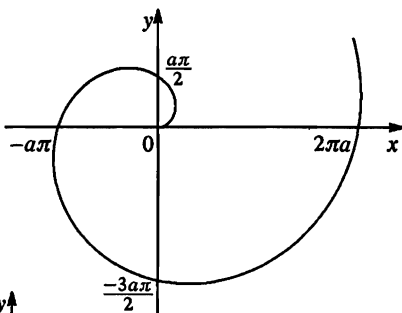


Рис. 17. Спираль Архимеда

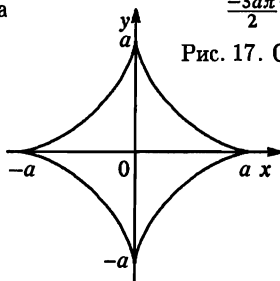


Рис. 18. Астроида

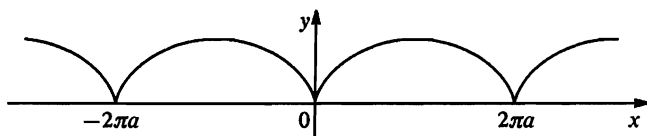


Рис. 19. Циклоида

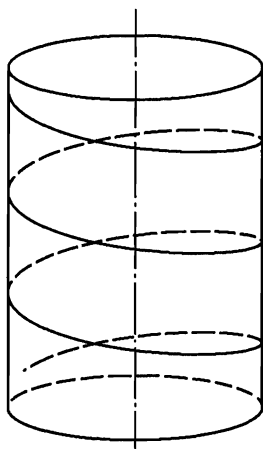


Рис. 20. Винтовая линия

4.6. Вывести формулу для кривизны плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$.

4.7. Заменить параметр t на винтовой линии (см. рис. 20)

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad b > 0,$$

на натуральный параметр s .

4.8. Заменить параметр t на кривой

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

на натуральный.

4.9. Заменить параметр t на кривой $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$ на натуральный.

4.10. Найти кривизну и кручение в произвольной точке следующих линий:

- а) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$; б) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$;
 в) $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$; г) $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$;
 д) $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

4.11. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1,$$

$$y^2 - 2x + z = 0,$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

4.12. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$x + \operatorname{sh} x = \sin y + y,$$

$$z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1,$$

в точке $M(0, 0, 0)$.

4.13. Вывести формулы для вычисления кривизны и кручения кривой, заданной уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$, и найти репер Френе этой кривой.

4.14. Дана кривая

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 - t, t^3).$$

Найти репер Френе. Вычислить кривизну и кручение этой кривой.

4.15. а) Доказать, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны.

б) Определить, при каком значении h винтовая линия $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$ имеет наибольшее кручение.

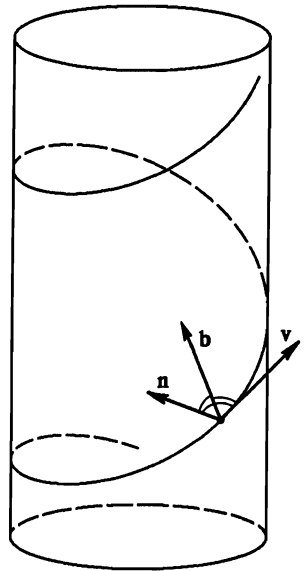


Рис. 21. Репер Френе винтовой линии

в) Найти репер Френе для винтовой линии (см. рис. 21)

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht).$$

г) Найти все кривые с постоянными кривизной k и кручением κ .

4.16. При каком условии центр кривизны винтовой линии лежит на том же цилиндре, что и сама линия?

4.17. Пусть γ — плоская кривая. Обозначим через S площадь области, ограниченной кривой γ и секущей, проведенной на расстоянии h от касательной в некоторой фиксированной точке $P \in \gamma$. Выразить $\lim_{h \rightarrow 0} (S^2/h^3)$ через кривизну кривой.

4.18. Доказать, что оператор $Y: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{x}$, действующий на векторах $\mathbb{R}^3$, записывается кососимметрической матрицей. Напомним, что $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ — векторное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Найти связь коэффициентов этой матрицы с координатами вектора $\mathbf{y}$. Показать, что для любой кососимметрической матрицы найдется вектор $\mathbf{y}$, что ее действие как линейного оператора в $\mathbb{R}^3$ представится в виде $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{x}$. Вектор $\mathbf{y}$ называется вектором Дарбу кососимметрической матрицы.

4.19. Пусть Y, Z — матрицы операторов векторного умножения на векторы $\mathbf{y}, \mathbf{z}$. Доказать, что матрица оператора векторного умножения на $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ равна $[Y, Z] = YZ - ZY$.

4.20. Пусть кривизна k регулярной пространственной кривой $\mathbf{r}(s)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Предположим, что на кривой есть гладкое векторное поле $\mathbf{n}^*(s)$ такое, что в тех точках, где $k \neq 0$, оно совпадает либо с $\mathbf{n}(s)$, либо с $-\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — главная нормаль кривой. Определим $\mathbf{b}^*(s)$ формулой $\mathbf{b}^* = \mathbf{v} \times \mathbf{n}^*$, а кривизну k и кручение κ из формул $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}^*$, $\dot{\mathbf{b}}^* = -\kappa\mathbf{n}^*$ (где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(s)$). Доказать, что тогда формулы Френе будут верны и в точках, где $k = 0$, но при этом кривизна пространственной кривой может оказаться знакопеременной.

Натуральным уравнением плоской кривой называют уравнение одного из следующих видов:

- 1) $k = k(s)$,
- 2) $F(k, s) = 0$,
- 3) $k = k(t)$, $s = s(t)$.

Если известно натуральное уравнение кривой, то параметризация кривой может быть задана в виде

$$x = \int \cos \alpha(s) ds, \quad y = \int \sin \alpha(s) ds,$$

$$\text{где } \alpha(s) = \int k(s) ds.$$

4.21. Составить натуральные уравнения кривых:

а) $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t;$

б) $y = x^{3/2};$

в) $y = x^2;$

г) $y = \ln x;$

д) $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right);$

е) $y = e^x;$

ж) $x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t;$

з) $r = a(1 + \cos \varphi);$

и) $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t);$

к) $r(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).$

4.22. Найти параметрические уравнения кривых, зная их натуральные уравнения (здесь $R = 1/k$):

а) $R = as;$ б) $\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1;$ в) $Rs = a^2;$

г) $R = a + \frac{s^2}{a};$ д) $R^2 = 2as.$

4.23. В каких случаях кривая имеет следующие параметрические уравнения: $x = s, \quad y = y(s), \quad z = z(s)$, где s — натуральный параметр?

4.24. Рассмотрим «перевернутую» выпуклостью вниз циклоиду

$$x(t) = R(t + \pi + \sin t), \quad y(t) = R - R \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Здесь точка $t = 0$ соответствует самой нижней точке циклоиды. Ускорение свободного падения обозначим через g . Поместим в циклоиду материальную точку массы m . Показать, что период колебаний материальной точки, движущейся по циклоиде без трения в поле силы тяжести, не зависит от ее начального положения. Написать дифференциальное уравнение для расстояния от материальной точки до нижней точки циклоиды.

4.25. Найти плоскую кривую, у которой касательная образует постоянный угол α с радиус-вектором кривой.

4.26. Пусть p — расстояние от начала радиус-векторов до касательной к кривой γ в точке M , а l — расстояние от точки O до точки M (см. рис. 22). Доказать, что

$$k = \left| \frac{dp}{l dl} \right|.$$

4.27. Пусть γ — гладкая регулярная замкнутая кривая. Доказать, что

$$\int_{\gamma} r dk + \int_{\gamma} \kappa b ds = 0.$$

4.28. Пусть плоская выпуклая дуга L_1 касается плоской строго выпуклой дуги L_2 , оставаясь по одну сторону от нее. Доказать, что в точке касания кривизна кривой L_1 не меньше, чем кривизна кривой L_2 .

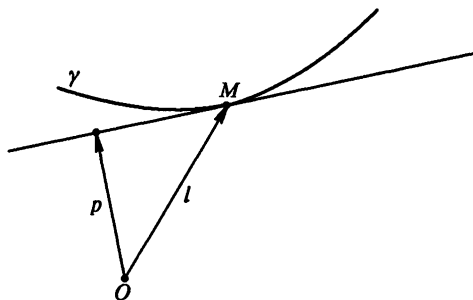


Рис. 22

4.29. В некоторой точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0)$ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеем: $k_0 = k(s_0) \neq 0$, $k'(s_0) \neq 0$. Рассмотрим уравнение соприкасающейся окружности $|\rho - \mathbf{r}_0 - R_0 \mathbf{n}_0| = R_0$ в этой точке исходной кривой, $R_0 = \frac{1}{k_0}$. Здесь ρ — радиус-вектор точки на соприкасающейся окружности. Доказать, что соприкасающаяся окружность пересекает данную кривую в окрестности указанной точки, т. е.

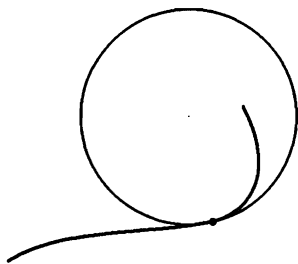


Рис. 23. Кривая и соприкасающаяся окружность

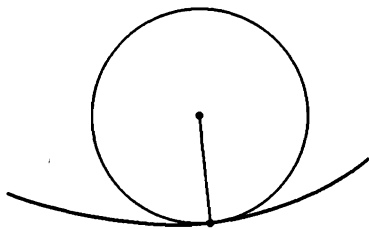


Рис. 24. Кривая и соприкасающаяся окружность

малая дуга кривой, соответствующая значениям параметра из интервала $(s_0 - \varepsilon, s_0)$, и малая дуга кривой, соответствующая значениям параметра из интервала $(s_0, s_0 + \varepsilon)$, лежат по разные стороны от соприкасающейся окружности (см. рис. 23).

Пояснение. Порядок касания кривой и ее соприкасающейся окружности равен 3. Наложённые на кривую условия гарантируют, что в данной точке порядок касания в точности равен 3, а не выше.

4.30. В некоторой точке кривой выполнены условия: $k_0 \neq 0$, $\dot{k}_0 = 0$, $\ddot{k}_0 \neq 0$. Доказать, что соприкасающаяся окружность кривой в этой точке не пересекает кривую в достаточно малой окрестности этой точки (см. рис. 24).

4.31. Пусть α — угол между постоянным вектором $\mathbf{a}$ и касательным вектором $\mathbf{v}$ к кривой (см. рис. 25). Составить параметрическое уравнение кривой, если известна зависимость:

- а) $R = f(\alpha)$, где R — радиус кривизны кривой; б) $\alpha = f(R)$;
 в) $s = f(\alpha)$, где s — дуга кривой; г) $\alpha = f(s)$.

4.32. Кривая, по которой сфера пересекается с круглым цилиндром в два раза меньшего радиуса, причем цилиндр проходит через центр сферы, называется кривой Вивiani (см. рис. 26).

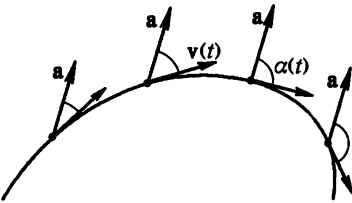


Рис. 25

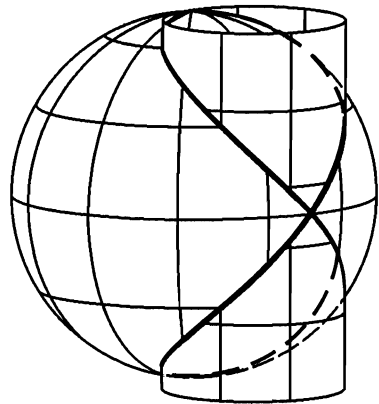


Рис. 26. Кривая Вивiani

Составить уравнение кривой Вивiani в неявной и параметрической форме. Найти уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, главной нормали и соприкасающейся плоскости. Найти также репер Френе, кривизну и кручение.

4.33. Доказать, что линия

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

является плоской.

4.34. Доказать, что если в некоторой точке M кривой C кривизна и кручение отличны от нуля, то части кривой, близкие к точке M , лежат по разные стороны от соприкасающейся плоскости.

4.35. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская на каждом участке бигекулярности (т. е. на участке, где $k \neq 0$ во всех точках).

4.36. Выразить $\frac{d}{ds}\mathbf{r}$, $\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}$, $\frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}$ через $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, k и κ .

4.37. Доказать, что $\left(\mathbf{v}, \mathbf{b}, \frac{d}{ds}\mathbf{b}\right) = \kappa$, где $(\cdot, \cdot, \cdot)$ обозначает смешанное произведение трех векторов.

4.38. Вычислить $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b}\right)$.

4.39. Доказать, что $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{v}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{v}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{v}\right) = k^5 \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k}\right)$.

4.40. Доказать, что если главные нормали кривой образуют постоянный угол с направлением вектора $\mathbf{e}$, то

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \kappa^2}{k(d/ds)(\kappa/k)} \right) + \kappa = 0,$$

и обратно, если выполнено последнее соотношение, то главные нормали кривой образуют постоянный угол с направлением некоторого вектора. Найти этот вектор.

4.41. Доказать, что если кривая бигекулярна (т. е. $k(s) \neq 0$ при всех s) и все нормальные плоскости кривой содержат вектор $\mathbf{e}$, то данная кривая плоская.

4.42. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой γ , не являющейся прямой линией, содержат один и тот же вектор, то кривая плоская (на любом связном участке бигекулярности кривой).

4.43. а) Доказать, что если кривая регулярна и $k = 0$, то это — прямая линия.

б) Доказать, что если $\mathbf{b} = \text{const}$, то кривая плоская. Напишите уравнение этой плоскости.

в) Доказать, что если $k \neq 0$ во всех точках кривой, то кривая плоская в том и только в том случае, когда κ обращается в нуль повсюду.

г) Привести пример неплоской кривой, у которой $\kappa \equiv 0$.

4.44. Доказать, что если соприкасающиеся плоскости кривой имеют один и тот же наклон (т. е. все они ортогональны некоторому фиксированному ненулевому вектору $\mathbf{e}$), то кривая плоская.

4.45. Для каких функций $f(t)$ кривые:

$$\text{а) } \mathbf{r}(t) = (e^t, 2e^{-t}, f(t)); \quad \text{б) } \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$$

будут плоскими?

4.46. Доказать, что кривые плоские и найти их плоскости:

а) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t} \right);$

б) $\mathbf{r}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1, a_2 t^2 + b_2 t + c_2, a_3 t^2 + b_3 t + c_3).$

4.47. Пусть $\bar{s}$ — длина касательного сферического образа кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (см. рис. 27):

$$\bar{s} = \int_0^s |\mathbf{v}'(\sigma)| d\sigma.$$

а) Доказать, что $\frac{d\bar{s}}{ds} = k.$

б) Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы касательный сферический образ был регулярной кривой.

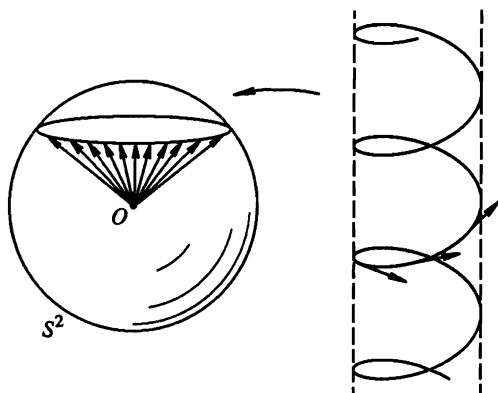


Рис. 27. Касательный сферический образ кривой

в) Доказать, что для замкнутой кривой выполняется неравенство $\int k ds \geq 2\pi.$

4.48. Пусть s^* — длина вдоль нормального (соответственно, бинормального) сферического образа кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$ Доказать, что

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2 + \kappa^2} \quad (\text{соответственно, } |\kappa|).$$

Сферическая кривая — это кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$ для которой существуют постоянный вектор $\mathbf{m}$ и действительное число R такие, что

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{m}, \mathbf{r}(t) - \mathbf{m}) = R^2.$$

4.49. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$, то $\mathbf{r}(s)$ — сферическая кривая тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dk/ds}{\kappa k^2} \right).$$

4.50. Пусть неплоская кривая γ имеет постоянную отличную от нуля кривизну и $\kappa \neq 0$. Рассмотрим γ^* — множество центров ее кривизны. Доказать, что кривизна γ^* также постоянна. Найти кручение γ^* .

Пусть $\mathbf{m}$ — постоянный вектор, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — некоторая кривая, $c(s) = |\mathbf{r}(s) - \mathbf{m}|^2$ и a — некоторое положительное число. Говорят, что кривая $\mathbf{r}(s)$ имеет в точке $s = s_0$ сферический контакт j -го порядка со сферой радиуса a с центром в точке $\mathbf{m}$, если

$$c(s_0) = a^2, \quad c'(s_0) = c''(s_0) = \dots = c^{(j)}(s_0) = 0, \quad c^{(j+1)}(s_0) \neq 0.$$

4.51. Если $k \neq 0$, выразить первые три производные функции $c(s)$ (определение см. выше) через $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, k , κ и их производные.

4.52. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$ и $\rho = 1/k$, $\sigma = 1/\kappa$. Предположим, что $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = a^2 = \text{const}$, $a > 0$. Доказать, что образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ лежит на сфере радиуса a .

4.53. Доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет сферический контакт второго или более высокого порядка в точке $s = s_0$ тогда и только тогда, когда $k(s_0) > 0$ и радиус-вектор центра сферы задается формулой

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) + \lambda \mathbf{b}(s_0),$$

где λ — произвольное число.

4.54. Пусть $k(s_0) \neq 0$, $\kappa(s_0) \neq 0$. Доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет сферический контакт третьего или более высокого порядка в точке $s = s_0$ тогда и только тогда, когда центр сферы задается формулой

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\kappa(s_0)} \mathbf{b}(s_0),$$

а ее радиус

$$R^* = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{(dk/ds)^2}{k^4 \kappa^2}}.$$

4.55. Доказать, что для любой замкнутой кривой на сфере существует точка, в которой кручение кривой равно 0.

4.56. Пусть гладкая регулярная кривая касается в точке M некоторой окружности Γ , центр которой расположен на том же нормальном к кривой луче, что и центр круга кривизны. Показать, что:

а) если кривая в окрестности точки M расположена вне (внутри) окружности Γ , то радиус кривизны кривой не меньше (не больше) радиуса R окружности Γ ;

б) если радиус кривизны кривой больше (меньше) R , то кривая в окрестности M лежит вне (внутри) Γ ;

в) если окружность Γ совпадает с окружностью кривизны и в точке M радиус кривизны кривой имеет локальный максимум (минимум), то кривая в окрестности M лежит внутри (вне) окружности Γ .

4.57. Пусть регулярная гладкая простая замкнутая кривая L на плоскости всюду имеет положительную кривизну. Доказать, что L является выпуклой в целом. Получить то же самое утверждение в предположении неотрицательности кривизны.

4.58. Может ли точка двигаться по регулярной кривой так, что величина скорости движения пропорциональна длине пройденного с начала движения пути?

§ 5. Риманова метрика

5.1. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

а) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (сфера, рис. 28);

б) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (эллипсоид, рис. 29);

в) $\mathbf{r}(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv)$ (конус, рис. 30);

г) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, cv)$ (цилиндр, рис. 31).

5.2. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей (здесь s — натуральный параметр на кривой $\rho(s)$):

а) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = \text{const}$ (цилиндрическая поверхность, рис. 32);

б) $\mathbf{r}(s, v) = v\rho(s)$ (коническая поверхность);

в) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{e}(s)$ ($|\mathbf{e}(s)| = 1$) (линейчатая поверхность, рис. 33);

г) $\mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + \mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi$ (каналовая поверхность, рис. 34);

д) $\mathbf{r}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$ (поверхность вращения);

е) $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$ (тор);

ж) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ (геликоид);

з) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{n}(s)$ (поверхность главных нормалей);

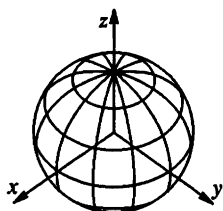


Рис. 28. Сфера

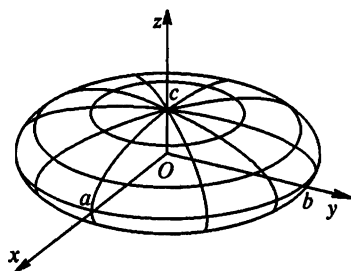


Рис. 29. Эллипсоид

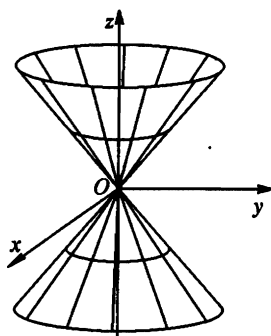


Рис. 30. Конус

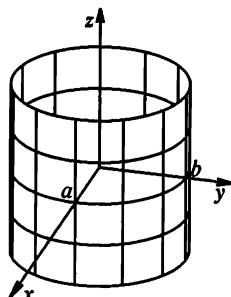


Рис. 31. Цилиндр

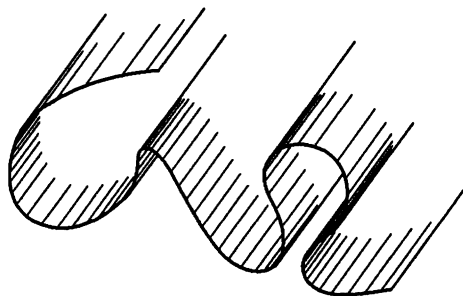


Рис. 32. Цилиндрическая поверхность

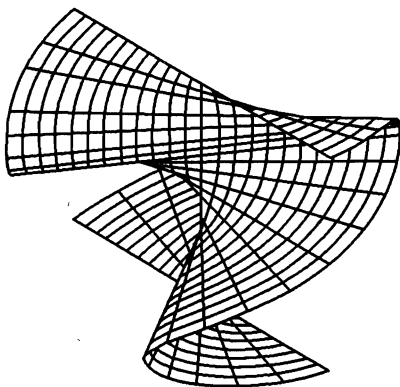


Рис. 33. Линейчатая поверхность

и) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \boldsymbol{\rho}(s) + \lambda \mathbf{b}(s)$ (поверхность бинормалей);

к) $\mathbf{r}(z, \varphi) = (a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos \varphi, a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin \varphi, z)$ (катеноид, рис. 35).

5.3. Найдите первую квадратичную форму поверхности (псевдосферы Бельтрами)

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где $u \neq \pi/2$, $a = \text{const}$ (см. рис. 36).

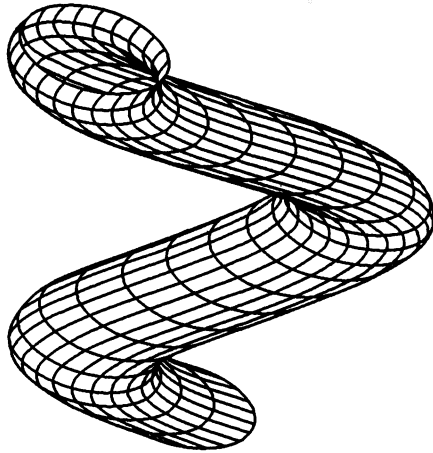


Рис. 34. Каналовая поверхность

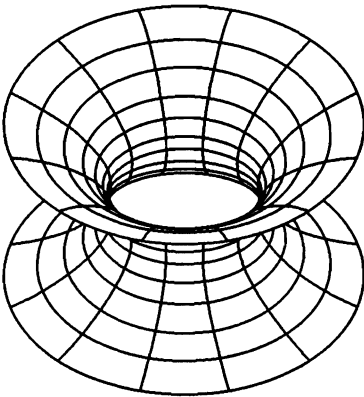


Рис. 35. Катеноид

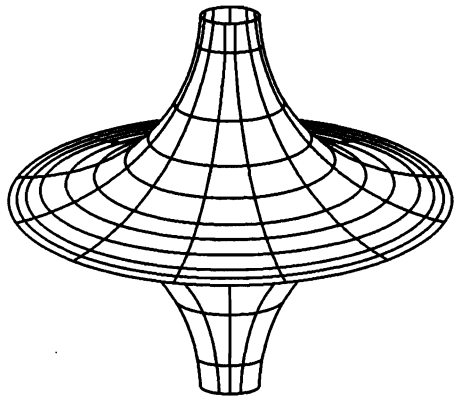


Рис. 36. Псевдосфера Бельтрами

5.4. Найдите угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

5.5. На плоскости с координатами (u, v) дана метрика $ds^2 = du^2 + 2dv^2$. Найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$.

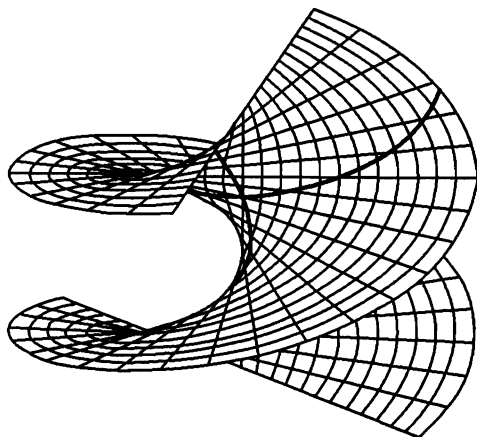


Рис. 37. Две линии на геликоиде

5.6. На поверхности $(u \cos v, u \sin v, av)$ найти угол между пересекающимися кривыми (см. рис. 37)

$$u + v = 0, \quad u - v = 0.$$

5.7. Найдите угол между линиями $v = 2u + 1$ и $v = -2u + 1$ на плоскости с координатами (u, v) , если метрика задается матрично-значной функцией

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.8. Проверьте, что на плоскости с координатами (u, v) матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + v^2 & -uv \\ -uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

задает метрику. Найдите длину кривой $u = v$.

5.9. Проверить, что матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & uv \\ uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

задает некоторую метрику в единичном круге на плоскости с координатами (u, v) :

а) в этой метрике найти длину кривой $-1 < u < 1, v = 0$;

б) в этой же метрике найти длину кривой S_α : $u^2 + v^2 = \alpha = \text{const.}$ Найти угол, под которым кривая $v = ku$ пересекает кривые S_α .

5.10. Проверить, что матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & -uv \\ -uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

на плоскости с координатами (u, v) задает некоторую метрику в единичном круге. В этой метрике найти длину кривой $-1 < u < 1$, $v = 0$.

5.11. Проверить, что на плоскости с координатами (x, y) матрично-значная функция

$$G = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2 + y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2 + y^2)^4 \end{pmatrix}$$

задает метрику. Вычислите длину кривой $x^2 + y^2 = \alpha$, где α — некоторое фиксированное число. Вычислить, под каким углом эти линии пересекаются с кривыми $y = kx$.

5.12. Найдите угол пересечения линий $u + 2v = 0$ и $4u - v = 0$ на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

5.13. На поверхности

$$x = u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right), \quad y = v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right), \quad z = 2uv$$

найти угол между координатными линиями.

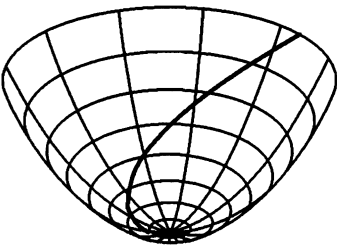


Рис. 38

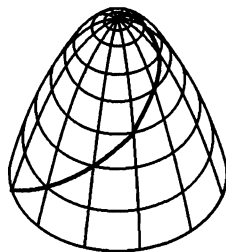


Рис. 39. Линии на параболоиде вращения

5.14. Найти уравнения кривых, которые делят пополам углы между координатными линиями параболоида вращения (см. рис. 38, 39)

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{1}{2}u^2.$$

5.15. Найти на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающие кривые $v = \text{const}$ под постоянным углом θ (см. рис. 40).

5.16. Найти кривые, пересекающие прямолинейные образующие гиперболического параболоида $xy = az$ под прямыми углами.

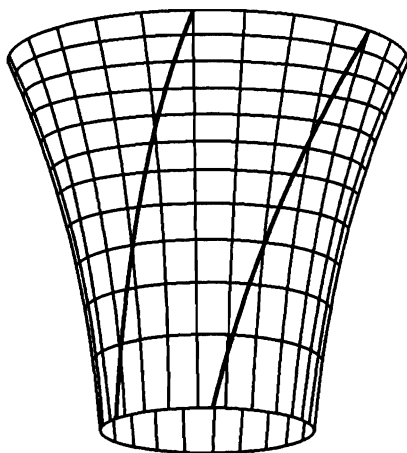


Рис. 40. Локсодромии

5.17. Кривая, расположенная на сфере и пересекающая все меридианы сферы под данным углом, называется локсодромией

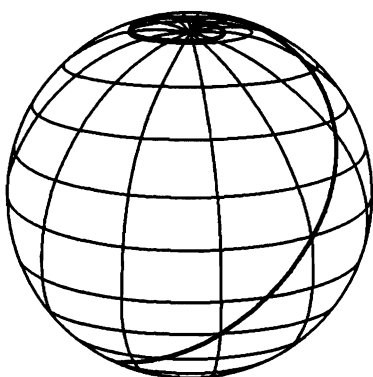


Рис. 41. Локсодромия на сфере

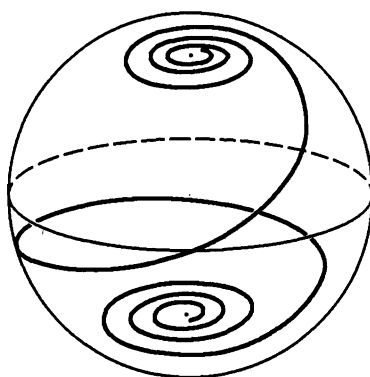


Рис. 42. Локсодромия на сфере

(см. рис. 41, 42). Составить уравнение локсодромии. Найти векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ репера Френе этой кривой в произвольной точке, вычислить ее кривизну и кручение.

5.18. Написать уравнение локсодромии в полярных координатах стереографической проекции сферы на плоскость.

5.19. Пусть первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2:$$

а) найти периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad v = 1;$$

б) найти углы этого криволинейного треугольника;

в) вычислить площадь треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

5.20. Дана поверхность $r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$. Найти:

а) площадь криволинейного треугольника $0 \leq u \leq \operatorname{sh} v$, $0 \leq v \leq v_0$ (см. рис. 43);

б) длины сторон этого треугольника;

в) углы этого треугольника.

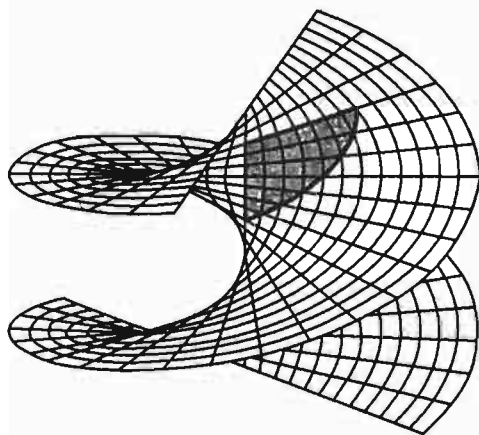


Рис. 43. Треугольник на геликоиде

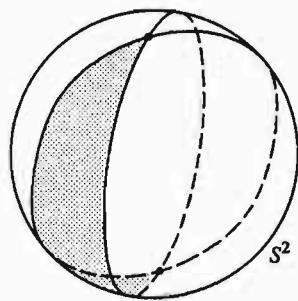


Рис. 44. Сферический двуугольник

5.21. Сферический двуугольник — это фигура, образованная двумя большими полуокружностями, имеющими общие концы (см. рис. 44). Вычислить площадь S сферического двуугольника с углом α при вершине.

5.22. Вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности, образован тор. Радиус окружности r , расстояние от прямой до центра окружности R , $R > r$. Найти площадь тора в индуцированной метрике.

5.23. Доказать, что отображение, являющееся конформным и сохраняющим площадь, является локальной изометрией.

5.24. Зафиксируем на плоскости некоторую точку. Найти все конформные преобразования плоскости, оставляющие эту точку на месте.

5.25. Написать общий вид конформного отображения сферы $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на себя с условием сохранения ориентации и неподвижности северного и южного полюсов.

5.26. Доказать, что деформация гиперболического параболоида, определяемая следующими формулами, сохраняет площадь:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{\sin t}{2}(u^2 - v^2) + uv \cos t. \end{cases}$$

5.27. Доказать, что поверхностью вращения, локально изометричной геликоиду

$$r(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av),$$

является катеноид.

Пояснение. На самом деле, верен более общий факт. А именно, после разрезания катеноида по меридиану полученная поверхность мо-

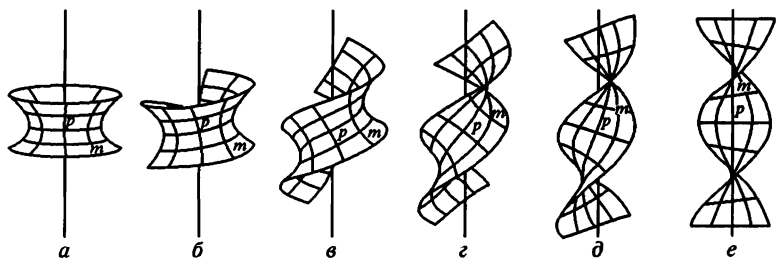


Рис. 45. Изгибание катеноида на часть геликоида

жет быть изогнута, как показано на рис. 45, так, что получится часть геликоида.

5.28. Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперboloид вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \sqrt{r^2 - 1},$$

если соответствие точек устанавливается уравнениями

$$\varphi = v + \arctg \rho, \quad r^2 = \rho^2 + 1.$$

5.29. Показать, что винтовая поверхность

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = a \left(\ln \frac{\rho}{a} + v \right)$$

локально изометрично отображается на поверхность вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = a\sqrt{2} \ln(r + \sqrt{r^2 - a^2}).$$

5.30. Показать, что всякая винтовая поверхность

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = F(u) + av$$

локально изометрично отображается на поверхность вращения так, что винтовые линии переходят в параллели.

5.31. а) Доказать, что любая изометрия $\mathbb{R}^n$ (даже локальная) задается линейным отображением $x \mapsto Ax + x_0$.

б) В условиях пункта а) доказать, что A — ортогональная матрица.

5.32. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости.

5.33. Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.

5.34. Существует ли изометрическое отображение области на прямом круговом цилиндре, заданной в виде $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$, на какую-либо область на выпуклой конической поверхности?

§ 6. Вторая квадратичная форма, гауссова и средняя кривизны

В этом параграфе средней кривизной называется сумма главных кривизн.

6.1. Вычислить вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

а) $r(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$ (сфера);

б) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)$ (эллипсоид вращения);

в) $r(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ (тор);

г) $r(u, v) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right)$ (катеноид);

д) $r(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right) \right)$;

е) $r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ (прямой геликоид);

ж) $xyz = a^3$.

6.2. Доказать, что при каждой параметризации плоскости ее вторая квадратичная форма равна нулю.

6.3. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй.

6.4. Дана поверхность вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

а) Найти вторую квадратичную форму.

б) Найти гауссову кривизну K в произвольной точке поверхности. Выяснить зависимость знака K от направления выпуклости меридиана.

в) Вычислить кривизну K в частном случае $\rho(u) = u$,

$$x(u) = \pm \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sqrt{a^2 - u^2} \right), \quad a > 0$$

(псевдосфера). Эта поверхность называется также поверхностью Бельтрами.

Доказать, что поверхность Бельтрами локально изометрична плоскости Лобачевского.

г) Найти среднюю кривизну H в произвольной точке поверхности вращения.

д) В частном случае $x(u) = u$ выбрать функцию $\rho = \rho(u)$ так, чтобы $H = 0$ на всей поверхности.

е) Найти главные кривизны поверхности вращения, не вычисляя ее вторую форму.

6.5. Доказать, что у поверхности, полученной вращением параболы вокруг ее директрисы, отношение главных кривизн постоянно.

6.6. Доказать, что если у поверхности тождественно равны нулю гауссова и средняя кривизны, то это поверхность является плоскостью или ее частью.

6.7. Дана кривая $\rho = \rho(s)$ с натуральным параметром s , кривизной $k = k(s) \neq 0$ и кручением $\kappa = \kappa(s) \neq 0$. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ — орт касательной к этой кривой. Для поверхности, образованной касательными к данной кривой, т. е.

$$\mathbf{r}(s, u) = \rho(s) + u\mathbf{v}(s), \quad u > 0,$$

найти кривизны K и H .

6.8. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

$$\text{а) } z = f(x, y); \quad \text{б) } x = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

6.9. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

6.10. Показать, что поверхность

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right)$$

является катеноидом. Найти ее вторую форму.

6.11. Найти главные радиусы кривизны поверхности $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$.

6.12. Найти главные радиусы кривизны поверхности

$$x = \cos v - u \sin v, \quad y = \sin v + u \cos v, \quad z = u + v.$$

6.13. Вычислить гауссову и среднюю кривизны винтовой поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v.$$

6.14. Вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \quad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \quad z = 3(u^2 - v^2).$$

6.15. Найти главные кривизны и главные направления:

а) геликоида $(u \cos v, u \sin v, kv)$;

б) катеноида $\left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u\right)$;

в) поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.

6.16. Для поверхности $(u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ найти главные кривизны в точке $P: (u, v) = (1, 1)$. Найти кривизну нормального сечения в точке P , касающегося кривой $u = v^2$.

6.17. Пусть поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана функцией $g(u, v)$. Рассмотрим выражение $dn^2 = \langle dn, dn \rangle$, где $n(u, v)$ — вектор единичной нормали к поверхности. Проверить, что это выражение является квадратичной формой относительно дифференциалов du, dv . Эта форма называется *третьей квадратичной формой поверхности*. Выразить ее через первую и вторую формы поверхности, а также через гауссову и среднюю кривизны.

6.18. Показать, что сферическое отображение минимальной поверхности является конформным, и обратно, если сферическое отображение некоторой гладкой регулярной поверхности является конформным, то эта поверхность либо минимальная, либо является сферой (частью сферы).

6.19. Доказать, что на линейчатой поверхности или всюду $K = 0$, или всюду $K < 0$. Кроме того, доказать, что на линейчатой поверхности $K = 0$ тогда и только тогда, когда поверхность — развертывающаяся.

6.20. Доказать, что на неразвертывающейся линейчатой поверхности кривизна поверхности при уходе точки в бесконечность вдоль любой образующей стремится к нулю.

6.21. Показать, что средняя кривизна геликоида (задача 6.1) равна нулю.

6.22. Пусть S — некоторая заданная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности S в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность

S^* , «параллельную» поверхности S (см. рис. 46). Если поверхность S задана в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то поверхность S^* задается в виде

$$\rho = \mathbf{r}(u, v) + a\mathbf{n}(u, v),$$

где $\mathbf{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали к S .

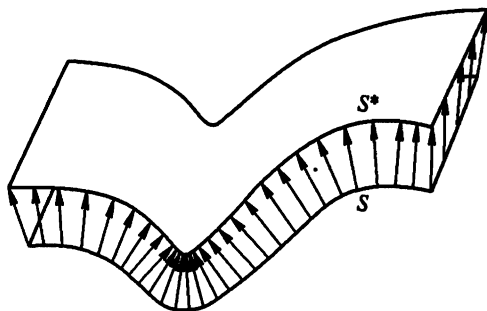


Рис. 46. Параллельные поверхности

Выразить коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S^* через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S . Доказать, что свойство параллельности двух поверхностей взаимно.

6.23. При каких длинах отрезков, отложенных по нормальям, поверхность, параллельная данной, будет регулярной?

6.24. Выразить гауссову кривизну K^* поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности.

6.25. Выразить среднюю кривизну H^* поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности.

6.26. а) Доказать, что у параллельных поверхностей гауссовы и средние кривизны связаны соотношением

$$\frac{H^2 - 4K}{K^2} = \frac{H^{*2} - 4K^*}{K^{*2}}.$$

б) Составить уравнение минимальной поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , если для поверхности S отношение $H/K = \text{const}$.

в) Дана поверхность постоянной средней кривизны H . На всех ее нормальных отложены отрезки длиной $1/H$. Доказать, что у построенной таким образом поверхности, «параллельной» данной, гауссова кривизна постоянна.

г) На всех нормальных поверхности постоянной положительной гауссовой кривизны K отложены отрезки длиной $1/\sqrt{K}$. Доказать,

что средняя кривизна построенной таким образом поверхности постоянна. Вычислить эту среднюю кривизну.

6.27. Доказать, что на параллельных поверхностях точки, соответствующие друг другу вдоль нормалей, одновременно являются или не являются омбилическими.

6.28. Доказать, что если замкнутая поверхность имеет неравную нулю постоянную среднюю кривизну и положительную гауссову кривизну, то она сфера.

6.29. Доказать, что $H^2 \geq 4K$. Когда достигается равенство?

6.30. Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные к некоторой точке поверхности. Доказать, что

$$H = \Pi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \Pi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2),$$

где $\Pi(\cdot, \cdot)$ — вторая квадратичная форма поверхности.

6.31. На поверхности $z = x^2$ найти кривизну нормального сечения в точке $(2, 2, 4)$ в направлении кривой $y = x^2/2$, $z = x^2$.

6.32. На поверхности $z = 2x^2 + 9y^2$ найти кривизну нормального сечения в начале координат в направлении вектора, составляющего с осью Ox угол $\pi/4$.

6.33. Предположим, что две поверхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ . Пусть k — кривизна γ , λ_i — нормальные кривизны γ в M_i и θ — угол между нормальными M_1 и M_2 . Доказать, что

$$k^2 \sin^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \theta.$$

6.34. Исходя из того, что эллипс можно спроектировать в окружность, с помощью теоремы Менье и формулы Эйлера найти кривизны эллипса в его вершинах.

6.35. Доказать, что кривизна кривой на поверхности положительной кривизны нигде не обращается в нуль.

6.36. Доказать, что для того чтобы точка на поверхности была сферической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $K \neq 0$, $4K = H^2$.

6.37. Определить тип точек тора, эллипсоида, гиперболоида, параболоида вращения.

6.38. Определить тип точек на поверхностях:

а) $z = a^2x^4 + b^2y^4$; б) $z = x^4 + y^4 + x^2y^2$; в) $y = x^4$.

6.39. Доказать, что если метрика поверхности $\mathbf{r}(u, v)$ в $\mathbb{R}^3$ записана в изотермических координатах, т.е. $ds^2 = \Lambda^2(du^2 + dv^2)$, то $\Delta \mathbf{r} = -H\Lambda^2 \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, а H — средняя кривизна.

6.40. Доказать, что если поверхность в $\mathbb{R}^3$ минимальна, то ее радиус вектор — гармоническая функция относительно конформных координат.

6.41. Доказать, что если гауссовы кривизны двух поверхностей постоянны и равны, то эти поверхности локально изометричны.

6.42. Показать, что существуют аналитически диффеоморфные аналитические поверхности, которые не изометричны, и тем не менее, их гауссовы кривизны в соответствующих точках равны. Другими словами, равенства гауссовых кривизн двух поверхностей в соответствующих точках недостаточно даже для их локальной изометричности.

6.43. Найти гладкую регулярную и связную поверхность вращения, переходящую в себя под действием центральной симметрии относительно начала координат, гауссова кривизна которой постоянна и равна $K = -1$.

В задачах 6.44, 6.45, 6.47 через $g_{ij} dx^i dx^j$ обозначается первая квадратичная форма поверхности, а через $b_{ij} dx^i dx^j$ — вторая квадратичная форма. Кроме того, (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}) . По индексу, появляющемуся сверху и снизу подразумевается суммирование.

6.44. Что представляет собой поверхность, для которой $g^{kl} b_{ik} = \delta_i^l$?

6.45. а) Показать, что коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности равны $b_{ik} b_{jl} g^{kl}$.

б) Доказать, что $g^{ij} \gamma_{ij} = H^2 - 2K$, где H — средняя, K — гауссова кривизна поверхности, а γ_{ij} — коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности.

6.46. Что представляют собой поверхности, на которых первая и третья квадратичная форма пропорциональны?

6.47. Доказать, что средняя кривизна поверхности определяется формулой $H = g^{ij} b_{ij}$.

6.48. Пусть $k_1, \dots, k_m$ — нормальные кривизны поверхности в направлениях, разбивающие плоскость на углы π/m . Доказать, что $k_1 + \dots + k_m = mH/2$.

6.49. Доказать, что если на гладкой регулярной поверхности есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является плоскостью или областью на ней.

6.50. Доказать, что если на гладкой регулярной поверхности есть два различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является поверхностью 2-го порядка.

6.51. а) Показать, что омбилическая точка, в которой гауссова кривизна равна нулю, обязательно является точкой уплощения.

б) Показать, что на поверхностях отрицательной кривизны нет омбилических точек.

6.52. Показать, что среднюю кривизну H поверхности можно рассматривать как интегральное среднее всех нормальных кри-

визн, т. е.

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ , отсчитываемом от одного из главных направлений.

§ 7. Многообразия

7.1. Доказать, что n -мерная сфера S^n , задаваемая в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, является гладким многообразием.

- а) Построить атлас карт.
- б) Построить атлас из минимального числа карт.
- в) Построить атлас из минимального числа карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.
- г) Построить минимальный атлас из карт, гомеоморфных диску, такой, что всевозможные непустые пересечения любого числа карт гомеоморфны диску.

7.2. Доказать, что 2-мерный тор T^2 , заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxz и не пересекающейся с осью Oz , является гладким многообразием.

- а) Построить атлас карт.
- б) Построить атлас из минимального числа карт.
- в) Построить атлас из минимального числа карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.
- г) Построить минимальный атлас из карт, гомеоморфных диску, такой, что всевозможные непустые пересечения любого числа карт гомеоморфны диску.

7.3. Доказать, что n -мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

7.4. Доказать, что n -мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

7.5. Доказать, что:

- а) график непрерывной функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ является гладким многообразием;
- б) график гладкой функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$.
- в) Привести пример непрерывной функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, график которой не является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$.

7.6. Ввести структуру гладкого многообразия на множестве всех прямых в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что полученное многообразие гомеоморфно листу Мёбиуса.

7.7. Установить диффеоморфизм S^2 и $\mathbb{C}P^1$.

7.8. Доказать, что формулы

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$x^k = \frac{y^k}{\sqrt{\varepsilon^2 + (y^1)^2 - \dots - (y^n)^2}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

задают взаимно обратные диффеоморфизмы $\mathbb{R}^n$ и шара радиуса ε с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$.

7.9. Показать, что стереографическая проекция сферы на касательную плоскость из полюса, противоположного точке касания, является диффеоморфизмом всюду, за исключением полюса проекции.

7.10. Доказать, что у композиции гладких отображений матрица Якоби является произведением матриц Якоби сомножителей.

7.11. Доказать, что ранг матрицы Якоби не зависит от выбора локальной системы координат.

7.12. Вычислить ранг матрицы Якоби отображения

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, 0).$$

7.13. Доказать, что из гладкости функции в некоторой карте следует ее гладкость в произвольной системе координат.

7.14. Пусть тор $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ образован вращением окружности вокруг оси (стандартное вложение). Доказать, что координаты x, y, z — гладкие функции на торе T^2 .

7.15. Пусть тор $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ стандартно вложен в $\mathbb{R}^3$, функция $f: T^2 \rightarrow S^2$ ставит в соответствие каждой точке $p \in T^2$ вектор единичной длины, нормальный к тору T^2 в точке p . Записать отображение f в координатах. Доказать, что f — гладкое отображение.

7.16. Доказать, что отображение $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, ставящее в соответствие точке p на сфере S^2 прямую, проходящую через начало координат и точку p , является гладким отображением. Записать отображение f в координатах.

7.17. Рассмотрим $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ с координатами (z, w) . Пусть поверхность M^2 является пересечением трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$ и конуса $|z| = |w|$.

а) Доказать, что M^2 диффеоморфна двумерному тору T^2 .

б) Доказать, что индуцированная на M^2 метрика локально евклидова.

в) Доказать, что каждая из частей трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$, выделяемая неравенствами $|z| \leq |w|$ или $|z| \geq |w|$, диффеоморфна полноторию, т. е. $S^1 \times D^2$.

7.18. Рассмотрим в $\mathbb{R}^5$ двумерную поверхность, задаваемую формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{xy}{\sqrt{3}}, & x_2 &= \frac{yz}{\sqrt{3}}, & x_3 &= \frac{xz}{\sqrt{3}}, \\ x_4 &= \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, & x_5 &= \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6}, \end{aligned}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Она называется *поверхностью Веронезе*. Доказать, что поверхность Веронезе является гладким вложением $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^5$.

7.19. Доказать, что группа $SO(2)$ диффеоморфна окружности. Какому многообразию диффеоморфна группа $O(2)$?

7.20. Доказать, что группа $SO(3)$ гомеоморфна проективному пространству $\mathbb{R}P^3$. Построить диффеоморфизм.

7.21. Доказать, что $SO(3)$ является гладким подмногообразием в пространстве $\mathbb{R}^9$ всех квадратных матриц третьего порядка.

7.22. Доказать, что $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \sum x_i^2 = 0, \sum |x_i|^2 = 2\}$ есть множество единичных касательных векторов к сфере единичного радиуса.

7.23. Доказать, что множество единичных касательных векторов к S^2 гомеоморфно $SO(3)$. Построить диффеоморфизм.

7.24. Рассмотрим в $SO(3)$ подмножество матриц $A = (a_{ij})$ таких, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} + 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказать, что это подмножество диффеоморфно $\mathbb{R}P^2$.

7.25. Доказать, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ задает в $\mathbb{C}P^2$ подмногообразие диффеоморфное S^2 .

7.26. Доказать, что группа $SU(2)$ диффеоморфна сфере S^3 .

7.27. Доказать, что группы $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ являются гладкими многообразиями.

7.28. Группу $O(n)$ можно рассматривать как подмножество $\mathbb{R}^{n^2}$. Доказать, что $O(n)$ лежит в сфере S^{n^2-1} радиуса $\sqrt{n}$.

7.29. Рассмотрим «комплексную окружность» $X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 + z_2^2 = 1\}$. Доказать, что пространство X гомеоморфно цилиндру без границы.

7.30. Найти касательное пространство к группе $SO(3)$ в точке

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.31. Найти координаты вектора $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, касающегося сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

- а) в сферических координатах;
- б) в координатах стереографической проекции.

7.32. Найти координаты произвольного вектора, касающегося большого круга единичной сферы, лежащего в плоскости

$$x + 2y - 3z = 0:$$

- а) в сферических координатах;
- б) в координатах стереографической проекции.

7.33. Для проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в аффинных картах найти координаты вектора скорости кривой $\mathbf{r}(t) = (\cos t : \sin t : t)$ при $t = \pi/4$.

7.34. Доказать, что объединение двух координатных осей в $\mathbb{R}^2$ не является многообразием.

7.35. Являются ли гладкими многообразиями следующие кривые на плоскости: а) треугольник; б) два треугольника, имеющие только одну общую точку — вершину?

7.36. Будут ли гладкими подмногообразиями граница квадрата и восьмерка в $\mathbb{R}^2$?

7.37. а) Доказать, что при $n \neq m$ пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не диффеоморфны.

б) Доказать, что гладкие многообразия разных размерностей не диффеоморфны.

7.38. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

7.39. Привести пример нехаусдорфова многообразия.

Две гладкие структуры (два гладких атласа) на многообразии называются согласованными, если каждая карта одного атласа согласована со всеми картами другого атласа, и наоборот.

7.40. Привести пример многообразия с двумя несогласованными гладкими структурами.

7.41. Доказать, что две гладкие структуры на многообразии согласованы тогда и только тогда, когда совпадают пространства гладких функций для этих гладких структур.

7.42. Рассмотрим на $\mathbb{R}^1$ следующие отображения $\varphi_k: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_k(x) = x^{2k-1}$, где k — целое положительное число. Доказать, что каждое φ_k задает карту на $\mathbb{R}^1$ с областью определения, совпадающей со всей прямой $\mathbb{R}^1$. Доказать, что эти карты попарно не согласованы. В частности, это означает, что атлас A_k , задаваемый картой φ_k , не согласован с атласом A_l при $l \neq k$. Казалось бы, отсюда следует, что на $\mathbb{R}^1$ существует бесконечное множество попарно неэквивалентных гладких структур. На самом деле это не так: доказать, что все многообразия $(\mathbb{R}^1, A_k)$ попарно диффеоморфны.

7.43. Доказать, что любое гладкое многообразие имеет такой атлас, что каждая карта гомеоморфна евклидовому пространству.

7.44. Показать, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно ввести такую структуру гладкого двумерного многообразия, что множество $y = x^2$ не будет гладким одномерным подмногообразием.

7.45. Доказать, что произведение гладких многообразий является гладким многообразием, причем проекции — гладкие регулярные отображения.

7.46. Доказать, что овеществление n -мерного комплексного многообразия является гладким вещественным ориентируемым многообразием размерности $2n$.

7.47. Доказать, что край гладкого многообразия M^n является гладким $(n-1)$ -мерным многообразием. При этом в качестве гладкого атласа края многообразия можно взять ограничения карт многообразия на его край. Показать, что край — ориентируемое многообразие, независимо от того, ориентируемо ли M^n .

7.48. Показать, что окружность, двумерная сфера, тор — ориентируемые многообразия.

7.49. Проверить, ориентируемы ли следующие многообразия: а) сфера S^n ; б) тор T^n .

7.50. Доказать, что лист Мёбиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна — неориентируемые многообразия.

7.51. Построить такое погружение листа Мёбиуса в трехмерное евклидово пространство, чтобы его граничная окружность была стандартно вложена в двумерную евклидову плоскость.

7.52. Доказать, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда оно не содержит в себе листа Мёбиуса.

7.53. Доказать, что лист Мёбиуса не гомеоморфен прямому произведению отрезка на окружность.

7.54. Доказать, что декартово произведение двух многообразий тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентируемы оба сомножителя.

7.55. Доказать теорему о существовании римановой метрики на любом гладком многообразии: а) с помощью разбиения единицы; б) с помощью теоремы Уитни.

7.56. Пусть $i: N \rightarrow M$ — погружение, а g — риманова метрика на M . Доказать, что i^*g — риманова метрика на N . Почему это неверно для произвольного гладкого отображения i ?

7.57. а) Доказать, что два кольца, склеенные, как показано на рис. 47, образуют поверхность, гомеоморфную тору с выброшенным маленьким диском.

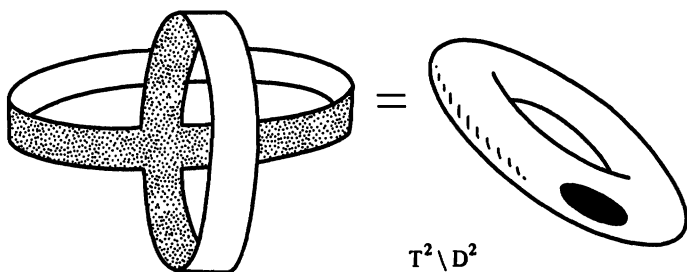


Рис. 47

б) Доказать, что поверхность, полученная склейкой двух листов Мёбиуса, как показано на рис. 48, гомеоморфна листу Мёбиуса с дыркой или, что то же самое, проективной плоскости с двумя дырками.

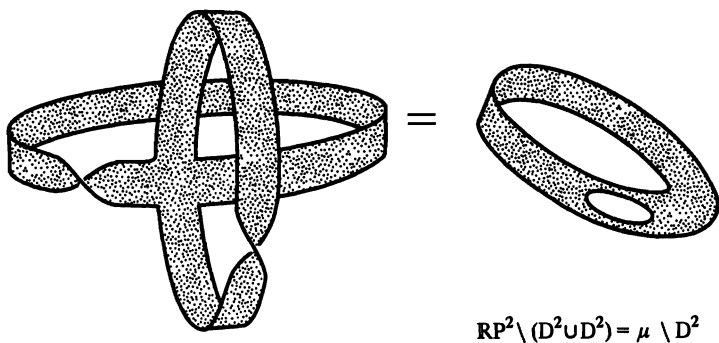


Рис. 48

в) Доказать, что поверхность, изображенная на рис. 49, гомеоморфна тору с дыркой.

г) Доказать, что поверхность, изображенная на рис. 50, гомеоморфна бутылке Клейна с дыркой.

д) Доказать, что поверхность, изображенная на рис. 51, гомеоморфна бутылке Клейна с дыркой.

е) Чему гомеоморфна поверхность, изображенная на рис. 52?

ж) Чему гомеоморфна поверхность, изображенная на рис. 53?

7.58. Доказать, что велосипедная камера с оторванным ниппелем (тор с дыркой) может быть вывернута наизнанку.

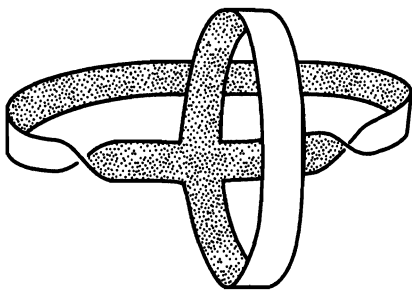


Рис. 49

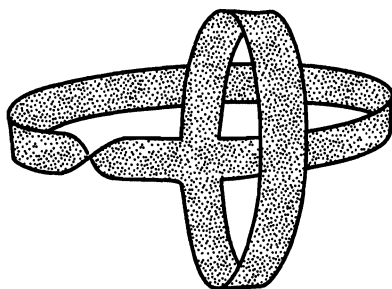


Рис. 50

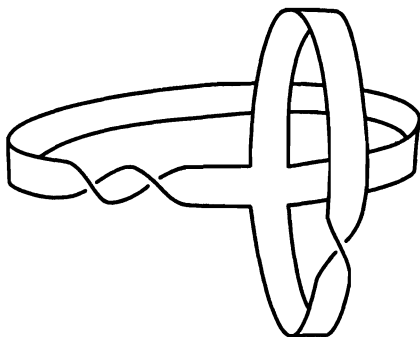


Рис. 51

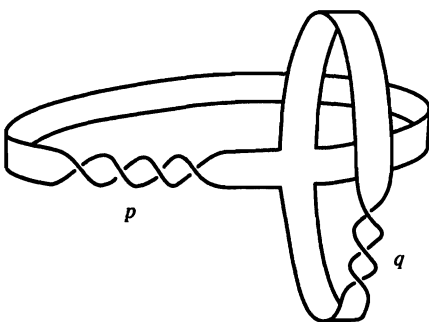


Рис. 52

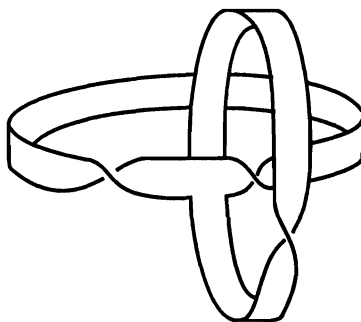


Рис. 53

7.59. Рассечь стандартный тор вращения в $\mathbb{R}^3$ двумя параллельными плоскостями так, чтобы часть тора, заключенная между

ними, была гомеоморфна поверхности с краем, показанной на рис. 54. Доказать, что эта поверхность гомеоморфна тору с двумя дырками.

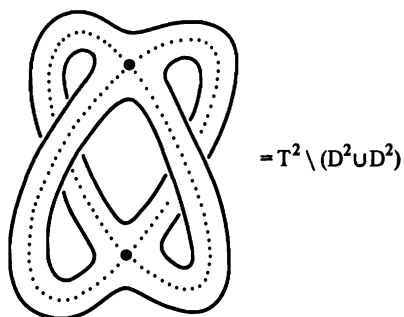


Рис. 54

7.60. Доказать, что поверхность, изображенная на рис. 55, гомеоморфна бутылке Клейна с двумя дырками.

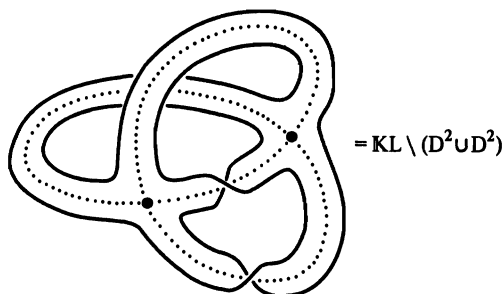


Рис. 55

7.61. Доказать, что плоскость с приклеенной к ней ручкой гомеоморфна двум кольцам, склеенным, как показано на рис. 56.

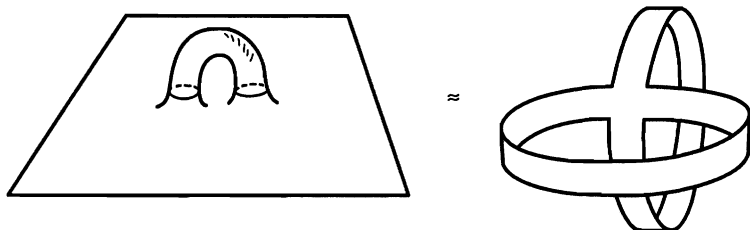


Рис. 56

7.62. Доказать, что две из трех поверхностей, изображенных на рис. 57, гомеоморфны проективной плоскости с тремя дырками, а оставшаяся — бутылке Клейна с двумя дырками.

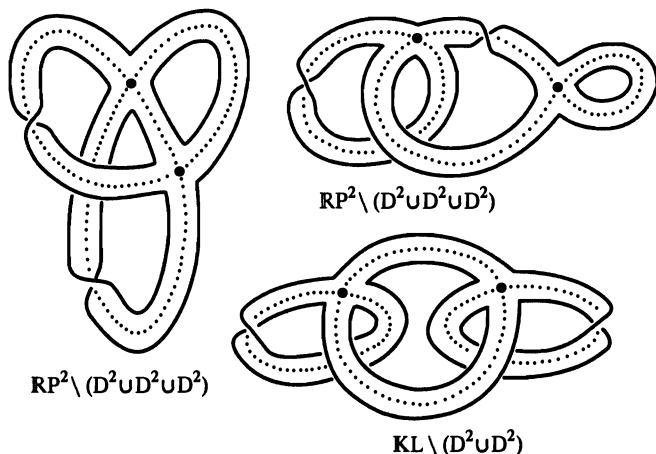


Рис. 57

7.63. Провести на торе такой разрез, чтобы получилась поверхность, изображенная на рис. 58.

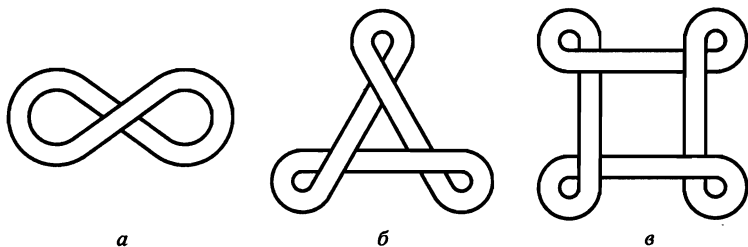


Рис. 58

7.64. Рассмотрим две поверхности в $\mathbb{R}^3$ с нарисованными на них кривыми, изображенные на рис. 59. Можно ли путем гладкой деформации поверхности в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений и разрывов (изотопией) перевести одну поверхность в другую так, чтобы кривая, нарисованная на одной поверхности, переходила в кривую, нарисованную на другой.

7.65. Рассмотрим две поверхности в $\mathbb{R}^3$ с нарисованными на них парами кривых, изображенные на рис. 60. Можно ли путем гладкой деформации поверхности в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений

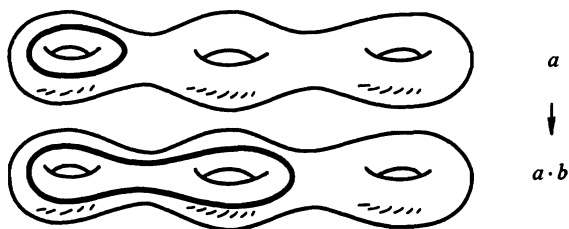


Рис. 59

и разрывов (изотопией) перевести одну поверхность в другую так, чтобы кривые, нарисованные на одной поверхности, переходили в кривые, нарисованные на другой.

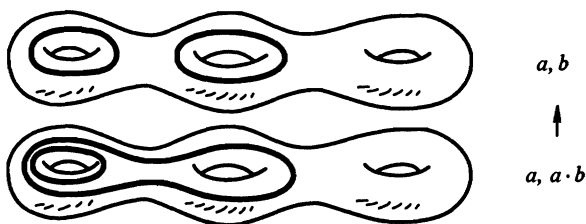


Рис. 60

7.66. Рассмотрим «топологического человека», т. е. сферу с двумя ручками.

а) Может ли топологический человек «расцепить» руки путем гладкой изотопии (см. рис. 61)?

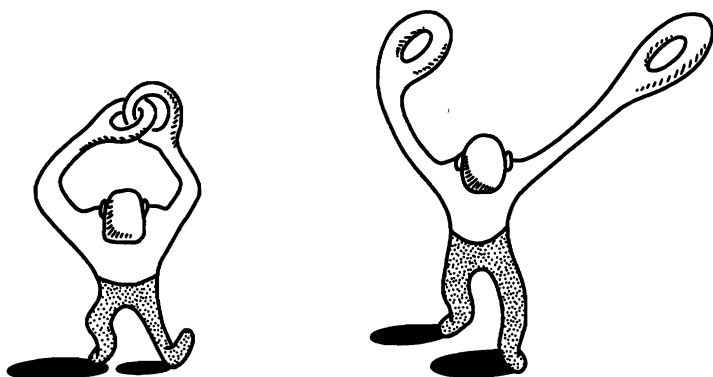


Рис. 61

б) Тот же вопрос при условии, что одна из рук зацеплена с окружностью (на руку надеты часы), рис. 62.

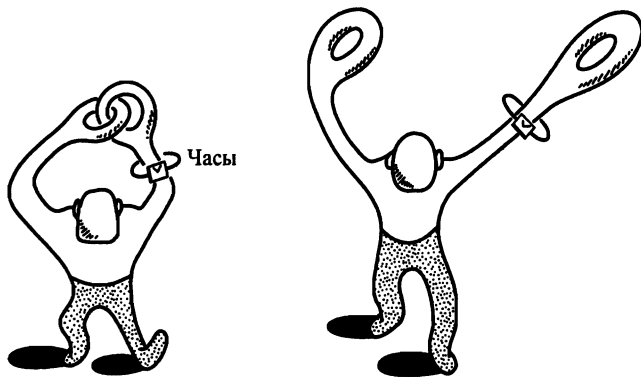


Рис. 62

7.67. Выяснить, является ли отображение прямой в плоскость с декартовыми координатами (x, y) вложением или погружением, если:

$$\text{а) } x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t+t^2}{1+t^2};$$

$$\text{б) } x(t) = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad y(t) = \frac{t^2+1}{t^2+2}.$$

7.68. Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x, y, z) множество, заданное уравнением:

$$\text{а) } x^2(z-1) + y^2z = 0;$$

$$\text{б) } z(x^2 + y^2)^n = y^{2n}.$$

7.69. Выяснить, является ли гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) множество, заданное уравнением:

$$\text{а) } x^4 + y^4 = 8xy^2;$$

$$\text{б) } x^6 + 18x^3y - y^3 = 0.$$

7.70. Рассмотрим на двумерной сфере S^2 координаты стереографической проекции (u, v) . Является ли замыкание $\bar{M}$ гладким подмногообразием в S^2 , если множество M задается уравнением:

$$\text{а) } y^2 - x^3 + 2x^2 - x = 0;$$

$$\text{б) } y^3 - x^3 + y - 2x = 0;$$

$$\text{в) } (x^2 - y^2)^2 - 2x = 0;$$

$$\text{г) } (x^2 - y^2)(x - y) + 1 = 0;$$

$$\text{д) } (2x + y)^2(x + y) - x = 0.$$

§ 8. Тензоры

8.1. Определить валентность следующих тензоров:

а) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$;

б) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ в точках, где градиент функции f равен нулю;

в) T_j^i — компоненты матрицы линейного оператора векторного пространства;

г) T_{ij} — компоненты матрицы билинейной формы на векторном пространстве.

8.2. Пусть

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Показать, что $\{\delta_j^i\}$ образует тензор валентности $(1, 1)$. Также показать, что набор чисел δ_{ij} , заданный в каждой системе координат формулой

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

не является тензором типа $(0, 2)$.

8.3. Пусть $\{\xi^{ij}\}$ — тензор валентности $(2, 0)$. Показать, что числа η_{ij} , удовлетворяющие условию $\xi^{ij}\eta_{jk} = \delta_k^i$, образуют тензор валентности $(0, 2)$.

8.4. Пусть матрица $(g_{ij}(x))$ — симметрическая невырожденная положительно определенная в некоторой системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$. Доказать, что все эти ее свойства сохраняются при любой регулярной замене координат.

8.5. Привести пример, показывающий, что операция перестановки верхнего и нижнего индексов не является тензорной.

8.6. Показать, что операция, которая тензору $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ставит в соответствие набор чисел $S_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p}$ по формуле

$$S_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} T_{j_2 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p},$$

не является тензорной.

8.7. Пусть V_n^m — пространство всех тензоров типа (m, n) . Показать, что если $f: V_n^m \rightarrow V_q^p$ — линейное отображение тензорных пространств, то компоненты отображения образуют тензор. Определить его валентность.

8.8. Определить размерность тензорного пространства V_n^m .

8.9. Показать, что любой тензор валентности $(2, 0)$ однозначно разлагается в сумму симметрического и кососимметрического слагаемых. Привести пример тензора валентности $(3, 0)$, для которого это не верно.

8.10. Доказать, что операторы альтернирования и симметрирования являются проекторами в пространстве тензоров. Доказать, что если $n > 2$, то сумма этих операторов не равна 1. Привести пример тензора (при $n > 2$), лежащего в ядрах операторов альтернирования и симметрирования.

8.11. Доказать, что операция перестановки индексов коммутрует с операциями альтернирования и симметрирования.

8.12. Доказать, что композиция операций альтернирования и симметрирования (в любом порядке) дает нулевой тензор для любого тензора типа $(0, k)$, где $k > 1$.

8.13. Пусть размерность пространства V равна n . Определить размерность пространства $\Lambda^k V$ кососимметрических тензоров.

8.14. Пусть размерность пространства V равна n . Определить размерность пространства $S^k V$ симметрических тензоров.

8.15. Описать все инвариантные тензоры рангов 0, 1, 2, 3, 4. Здесь тензор называется инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат.

8.16. Показать, что смешанное и векторное произведения в $\mathbb{R}^3$ задаются тензорами типа $(0, 3)$ и $(1, 2)$ соответственно. Выписать их компоненты в произвольном базисе. Показать, что компоненты этих тензоров связаны операцией опускания и поднимания индексов.

8.17. Выразить через коэффициенты характеристического многочлена оператора (c_j^i) величины $\det c$, c_i^i , $c_i^j c_j^i$, $c_i^j c_j^k c_k^i$ и т. д.

8.18. Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций.

8.19. Пусть дан набор величин $S^{i_1 \dots i_p}$. Доказать, что если при некотором фиксированном q набор величин

$$S^{i_1 \dots i_p} T_{i_1 \dots i_q}, \quad q < p,$$

является тензором при любом выборе тензора $T_{i_1 \dots i_q}$, то и $S^{i_1 \dots i_p}$ также тензор.

8.20. Если v_{ij} — тензор и в некоторой системе координат имеет место уравнение $av_{ij} + bv_{ji} = 0$ (a и b — числа), то это уравнение справедливо в любой другой системе координат. Кроме того, если $v_{ij} \neq 0$, то или $a = b$, или $a = -b$.

8.21. Пусть g_{ij} — метрический тензор. Доказать, что если тензоры $g_{ij} P_k^j$ и $g_{ij} Q_k^j$ симметричны, то после опускания верхнего индекса тензор $PQ + QP$ симметричен, а $PQ - QP$ антисимметричен.

8.22. Пусть f — гладкая функция на римановом многообразии M с метрикой g_{ij} . Доказать, что векторное поле $\mathbf{v} = \text{grad } f$, компоненты которого задаются равенством

$$v^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

перпендикулярно поверхностям уровня функции f .

8.23. Пусть A_j^i — тензорное поле типа $(1, 1)$ на многообразии M . Доказать, что формула

$$N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = A^2[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - A[A\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - A[\mathbf{X}, A\mathbf{Y}] + [A\mathbf{X}, A\mathbf{Y}],$$

где $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — векторные поля на M , определяет тензорное поле N_{jk}^i типа $(1, 2)$.

Если дан оператор $A: V \rightarrow V$, то определены операторы

$$\begin{aligned} A^{\otimes k} : V^{\otimes k} &\rightarrow V^{\otimes k}, \\ \Lambda^{\otimes k} A : \Lambda^{\otimes k} V &\rightarrow \Lambda^{\otimes k}, \\ S^{\otimes k} A : S^{\otimes k} V &\rightarrow S^{\otimes k}. \end{aligned}$$

8.24. Найти $\text{tr } \Lambda^q A$ через коэффициенты характеристического многочлена A в n -мерном пространстве V .

8.25. Выразить через след и определитель оператора A величины $\text{tr } A \otimes A$, $\text{tr } A^{\otimes k}$, $\det A \otimes A$.

8.26. Доказать, что для $\xi \in \Lambda^p(V)$, $\omega \in \Lambda^1(V)$ равенство $\xi \wedge \omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\xi = \omega \wedge \eta$ для некоторого $\eta \in \Lambda^{p-1}(V)$.

8.27. Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам и кососимметричен по второму и третьему, то он равен нулю.

8.28. Доказать, что если a_{ij} — симметрический, b^{ij} — кососимметрический тензоры, то $a_{ij}b^{ij} = 0$.

В следующих задачах векторы e_i образуют базис пространства V , а e^i — дуальный базис пространства V^* , т. е. $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

8.29. Найти значение тензора $e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 3e_3) \otimes e^2$ на паре $e^1 + e^2 + e^3$, $e_1 + 5e_2 + 4e_3$.

8.30. Найти значение тензора

$$\begin{aligned} &(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2) \otimes (e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)) - \\ &\quad - (e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)) \otimes (e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2) \end{aligned}$$

на наборе $e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2, e_2$.

8.31. Все координаты тензора T типа $(2, 3)$ в базисе (e_1, e_2, e_3) равны 1. Найти координату $\tilde{T}_{123}^{12}$ этого тензора в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.32. Найти координаты:

а) T_{21}^1 тензора $e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 + e_2 \otimes e^1 \otimes e^2$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

б) $\tilde{T}_{31}^{12}$ тензора $e_3 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e^3 \otimes e^3$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.33. Найти координаты тензоров:

а) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2)$;

б) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_1 + e_2) - (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + 2e_2)$.

8.34. Найти свертку тензоров:

а) $(e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^3 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4)$;

б) $e_1 \otimes (e^1 + e^2 + e^3 + 3e^4) + e_2 \otimes (e^1 + 2e^2 + 3e^3 + 4e^4) + 2e_3 \otimes (e^1 - e^2 - e^4)$.

8.35. Применить линейный оператор, заданный тензором $e_3 \otimes e^1$, к вектору $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

8.36. Тензор $(e_1 + e_2) \otimes (2e^1 - e^3)$ задает линейный оператор A . Какой тензор задает оператор A^2 ?

8.37. Скалярное произведение задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поднять и опустить индекс у тензоров:

а) $e_3 \otimes e^1 + e_4 \otimes e^2$;

б) $(e_3 + e_4) \otimes (e^1 + e^2) - e_3 \otimes (e^1 + e^3)$.

в) $T_j^i = \delta_{2i} + \delta_{4j}$.

§ 9. Векторные поля

9.1. Доказать эквивалентность трех определений касательного вектора в точке P к многообразию:

- а) тензор валентности $(1, 0)$;
- б) дифференцирование гладких функций в точке P ;
- в) класс соприкасающихся в точке P кривых.

9.2. Найти производную функции f в точке P по направлению вектора ξ :

- а) $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P = (1, 1, 1)$, $\xi = (2, 1, 0)$;
- б) $f = x^2y + xz^2 - 2$; $P = (1, 1, -1)$, $\xi = (1, -2, 4)$;
- в) $f = xe^y + ye^x - z^2$; $P = (3, 0, 2)$, $\xi = (1, 1, 1)$;
- г) $f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; $P = (1, 1)$, $\xi = (3, 4)$.

9.3. Найти производную функции $f = 1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, по направлению ее градиента.

9.4. Найти производную функции $f = yze^x$ по направлению ее градиента.

9.5. Пусть ∇ — векторный дифференциальный оператор в $\mathbb{R}^3$, компоненты которого равны $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Показать, что:

- а) $\text{grad } F = \nabla F$; б) $\text{div } \mathbf{X} = \langle \nabla, \mathbf{X} \rangle$; в) $\text{rot } \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X}$.

9.6. Доказать формулу

$$\text{div}(u\mathbf{X}) = u \cdot \text{div } \mathbf{X} + \langle \mathbf{X}, \text{grad } u \rangle,$$

где $\mathbf{X}$ — векторное поле, а u — функция в $\mathbb{R}^3$.

9.7. Доказать формулу

$$\text{rot}(u\mathbf{X}) = u \cdot \text{rot } \mathbf{X} - \mathbf{X} \times \text{grad } u.$$

9.8. Доказать, что вектор $\mathbf{X} = u \text{grad } v$ ортогонален к $\text{rot } \mathbf{X}$.

9.9. Показать, что:

- а) $\text{div}(\text{rot } \mathbf{X}) = 0$;

$$\text{б) } \text{rot rot } \mathbf{X} = \text{grad div } \mathbf{X} - \Delta \mathbf{X}, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

9.10. Пусть $\mathbf{X} = (x, y, z)$. Показать, что:

- а) $\text{div } \mathbf{X} = 3$; б) $\text{rot } \mathbf{X} = 0$; в) $\text{div} \left(\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3} \right) = 0$;
- г) $\text{rot} \left(\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3} \right) = 0$; д) $\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{X}|} = -\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3}$.

Найти такую функцию φ , что $\mathbf{X} = \text{grad } \varphi$.

9.11. Показать, что коммутатор векторных полей, рассматриваемых как операторы дифференцирования гладких функций, является векторным полем.

9.12. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ векторное поле V_A , которое в точке $x \in \mathbb{R}^n$ принимает значение Ax , где A — некоторая квадратная матрица порядка n . Такое векторное поле называется линейным. Доказать, что $[V_A, V_B] = -V_{[A, B]}$. Здесь $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц.

9.13. Пусть M — многообразие и N — его подмногообразие. Доказать, что для любых векторных полей X и Y на M выполняется равенство $[X, Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$. Здесь $X|_N$ означает векторное поле X , ограниченное на подмногообразии N .

9.14. Вычислить коммутатор двух векторных полей на S^3 ($x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$), одно из которых в точке $(x, y, z, w) \in S^3$ равно $(y, -x, w, -z)$, а другое — $(z, w, -x, -y)$.

9.15. Пусть φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая векторному полю ξ . Показать, что

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*(\eta) - \eta).$$

9.16. Пусть ξ, η — векторные поля, f, g — гладкие функции. Доказать формулу

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] - g\eta(f)\xi + f\xi(g)\eta.$$

9.17. Пусть ξ, η — векторные поля, φ_t, ψ_t — соответствующие им однопараметрические группы преобразований. Показать, что если $[\xi, \eta] = 0$, то преобразования φ_t коммутируют с преобразованиями ψ_t .

9.18. Построить интегральные траектории следующих векторных полей на плоскости:

$$\text{а) } \xi = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{б) } \xi = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{в) } \xi = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{г) } \xi = (x + y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{д) } \xi = (x - y) \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y};$$

$$\text{е) } \xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

9.19. Пусть ξ — постоянное векторное поле в угловых координатах двумерного тора T^2 . Выяснить, при каких условиях на координаты поля ξ интегральные траектории будут замкнутыми кривыми.

9.20. Обобщить предыдущую задачу на случай тора T^n . А именно, пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — постоянное векторное поле в угловых координатах на торе T^n . Доказать, что замыкание любой траектории гомеоморфно тору T^k , где k — число линейно независимых чисел $\xi^1, \dots, \xi^n$ над полем рациональных чисел.

9.21. Пусть векторное поле $\mathbf{Y}$ фиксировано. Можно ли задать такое тензорное поле A типа $(1, 1)$ (тензорное поле операторов), чтобы выполнялось равенство $A(\mathbf{X}) = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$ для всех векторных полей $\mathbf{X}$?

§ 10. Связности и параллельный перенос

10.1. Доказать следующие утверждения.

а) Если Γ_{ij}^k и γ_{ij}^k — коэффициенты некоторых связностей, то $\alpha\Gamma_{ij}^k + \beta\gamma_{ij}^k$ также являются коэффициентами некоторой связности. Здесь α и β — гладкие функции, причем $\alpha + \beta = 1$.

б) Если связности с коэффициентами Γ_{ij}^k и γ_{ij}^k имеют одинаковые геодезические, то те же геодезические имеет связность $\alpha\Gamma_{ij}^k + \beta\gamma_{ij}^k$; здесь α и β — гладкие функции, $\alpha + \beta = 1$.

в) Доказать, что разности коэффициентов $\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ двух связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ образуют тензор типа $(1, 2)$ и что любой тензор типа $(1, 2)$ можно представить в таком виде. Доказать, что если к коэффициентам связности прибавить тензор типа $(1, 2)$, то получатся коэффициенты связности.

10.2. Доказать, что тензорное поле δ_j^i символов Кронекера параллельно вдоль любой кривой для любой связности.

10.3. Показать, что ковариантная производная тензорного поля вдоль кривой зависит от значения коэффициентов связности и поля только на этой кривой. Иными словами, если тензорное поле задано только в точках кривой, то, тем не менее, можно вычислить ковариантную производную этого тензорного поля вдоль вектора скорости кривой.

10.4. Доказать, что при одновременном параллельном переносе нескольких тензоров вдоль данной кривой параллельно переносятся и тензоры, полученные из исходных операциями тензорной алгебры.

10.5. Пусть $f: M \rightarrow M'$ — изометрия римановых многообразий, $x' = f(x)$, $x \in M$, $x' \in M'$. Снабдим M и M' соответствующими римановыми связностями. Доказать, что дифференциал $df: TM \rightarrow TM'$ перестановочен с параллельными переносами τ и τ' на M и M' соответственно.

10.6. Снабдим риманово многообразие соответствующей симметричной римановой связностью. Доказать, что тогда операция ковариантного дифференцирования коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.

10.7. Дано векторное поле, векторы которого имеют одну и ту же длину. Пусть многообразие снабжено симметричной римановой связностью. Доказать, что ковариантная производная этого векторного поля в произвольном направлении ортогональна векторам поля.

10.8. Пусть N — гладкое подмногообразие в M , γ — гладкая кривая на N , ξ — векторное поле вдоль кривой γ , касательное к N . Доказать формулу

$$\tilde{\nabla}_\gamma \xi = \text{pr}(\nabla_\gamma \xi),$$

где ∇ , $\tilde{\nabla}$ — симметрические римановы связности на многообразиях M и N соответственно (на N рассматривается индуцированная метрика), pr — ортогональная проекция на касательное пространство к N .

10.9. Показать, что если два подмногообразия:

а) евклидова пространства;

б) произвольного риманова многообразия,

соприкасаются вдоль некоторой кривой γ , то результаты параллельного перенесения вектора вдоль этой кривой на одном подмногообразии и вдоль этой же кривой на другом подмногообразии совпадают (см. рис. 63).

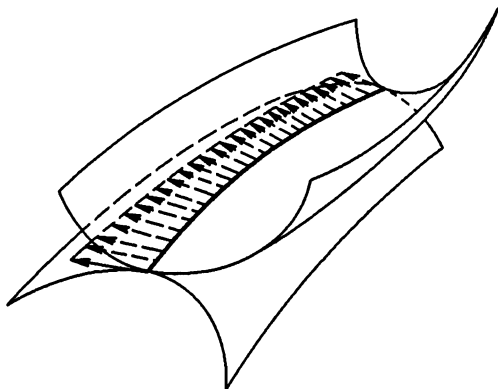


Рис. 63

10.10. Пусть дана поверхность с метрикой g_{ij} . Положим по определению $\nabla\varphi = g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi$, $\nabla(\varphi, \psi) = g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\psi$. Доказать, что угол θ между кривыми $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ на поверхности определяется равенством

$$\cos \theta = \frac{\nabla(\varphi, \psi)}{\sqrt{\nabla\varphi\nabla\psi}}.$$

10.11. Пусть дано многообразие M , снабженное связностью ∇ , и его подмногообразие N . Доказать эквивалентность следующих условий:

а) в результате перенесения по кривой, расположенной в N , касательного к N вектора, получается вектор, касающийся N ;

б) для любых векторных полей X и Y , касающихся N , $\nabla_X Y$ тоже касается N .

10.12. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики плоскости в полярных координатах.

10.13. Вычислить символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

10.14. Вычислить явно символы Кристоффеля на сфере, если метрика задана в виде:

$$\text{а) } ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2; \quad \text{б) } ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2};$$

$$\text{в) } ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 + r^2)^2}.$$

10.15. Вычислить явно символы Кристоффеля на плоскости Лобачевского, если метрика имеет вид:

$$\text{а) } ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}; \quad \text{б) } ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2};$$

$$\text{в) } ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 - r^2)^2}.$$

10.16. Вычислить явно символы Кристоффеля в сферической системе координат в $\mathbb{R}^3$.

10.17. Вычислить символы Кристоффеля на поверхности вращения в $\mathbb{R}^3$, заданной в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

10.18. Вычислить символы Кристоффеля псевдосферы Бельтрами, заданной в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right) \right).$$

10.19. Найти символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2.$$

10.20. Вычислить символы Кристоффеля на катеноиде

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right).$$

10.21. Вычислить символы Кристоффеля на геликоиде

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, hv).$$

10.22. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$ в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Зависит ли результат от вида кривой?

10.23. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в $\mathbb{R}^3$ в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от вида кривой.

10.24. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$:

а) вдоль кривой $\theta = \theta_0 = \text{const}$, т. е. вдоль параллели;

б) вдоль кривой $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, т. е. вдоль меридиана.

10.25. Выяснить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате перенесения вдоль параллели.

10.26. Рассмотрим сферу S^2 со стандартной метрикой. Пусть вектор $\mathbf{X}$ касается S^2 в точке P , а вектор $\mathbf{Y}$ — в точке Q , причем $\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\|$. Доказать, что существует такая гладкая регулярная кривая на сфере S^2 с концами в точках P и Q , что в результате параллельного переноса вектора $\mathbf{X}$ вдоль нее получается вектор $\mathbf{Y}$.

10.27. На поверхности вращения перенести касательный вектор вдоль параллели. Найти угол между начальным и конечным положением вектора.

10.28. а) Доказать, что при параллельном перенесении вдоль меридиана поверхности вращения вектора, касающегося параллели, результат перенесения будет параллелен исходному вектору в объемлющем евклидовом пространстве (см. рис. 64).

б) Перенести по поверхности вращения вектор, касательный к меридиану, вдоль этого меридиана.

10.29. Перенести параллельно по прямому геликоиду

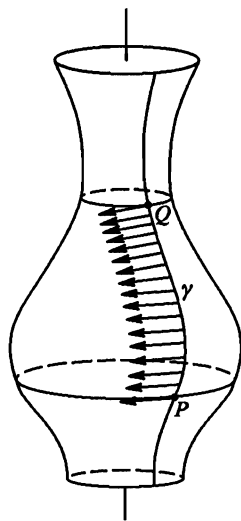


Рис. 64

$$(u \cos v, u \sin v, hv)$$

вектор, касательный к поверхности. Перенос осуществить вдоль витка винтовой линии

$$(a \cos v, a \sin v, hv), \quad a = \text{const}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Найти угол (в пространстве) между исходным и конечным вектором.

10.30. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости:

а) вдоль кривой $x = x_0 = \text{const}$;

б) вдоль кривой $y = y_0 = \text{const}$.

10.31. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор к сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ , если:

- а) γ — параллель;
- б) γ составлена из двух меридианов и части экватора, заключенного между ними;
- в) γ составлена из двух меридианов и части параллели, заключенной между ними.

10.32. Найти ковариантные производные вдоль координатных линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ следующих векторных полей, заданных в полярной системе координат:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\cos \varphi, -\frac{1}{r} \sin \varphi \right), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (r, 1).$$

Все вычисления выполнить в полярной системе координат.

10.33. На плоскости заданы полярные координаты (r, φ) . Перенести параллельно вектор $\mathbf{v}_0 = (v_0^1, v_0^2)$ вдоль кривой $r = 2$ из точки $\varphi = 0$ в точку $\varphi = \pi/2$. Все вычисления выполнить в полярной системе координат.

10.34. а) Написать и решить уравнения параллельного переноса вектора по кривой $\theta = \text{const}$ для метрики $ds^2 = d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2$.

б) Вычислить угол, на который повернется вектор при однократном перенесении вдоль кривой $\theta = \text{const}$ для метрики $ds^2 = d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2$.

10.35. Параллельно перенести вектор вдоль пространственной кривой по поверхности, составленной из:

- а) касательных к этой кривой;
- б) нормалей к этой кривой;
- в) бинормалей к этой кривой.

10.36. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к сфере единичного радиуса в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

10.37. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к плоскости Лобачевского в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

10.38. Найти все связности на окружности. Установить формулу для параллельного переноса для произвольной связности на окружности.

10.39. На плоскости с координатами u^1, u^2 найти аффинную связность, относительно которой векторные поля $\xi = (e^{u^1}, 1)$, $\eta = (0, e^{u^2})$ ковариантно постоянны.

10.40. Оператором Лапласа–Бельтрами на римановом многообразии называется оператор $\Delta f = \nabla^i \nabla_i f$, где ∇ — симметрическая

риманова связность, $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$. Найти явную формулу для этого оператора на поверхности вращения.

10.41. Рассмотрим риманово многообразие с соответствующей симметричной римановой связностью. Определим градиент функции f как векторное поле $\text{grad } f = g^{ij} \nabla_j f$, а дивергенцию $\text{div } \mathbf{v}$ векторного поля — как свертку ковариантной производной векторного поля $\mathbf{v}$ (она имеет валентность $(1, 1)$): $\text{div } \mathbf{v} = \nabla_i v^i$.

а) Доказать, что в евклидовом пространстве так определенные операции градиента и дивергенции совпадают с обычными.

б) Доказать, что на римановом многообразии оператор Лапласа $\text{div grad } f$ совпадает с оператором Лапласа–Бельтрами Δf .

10.42. Пусть на многообразии, снабженном аффинной связностью без кручения, заданы два ковариантно постоянных векторных поля. Доказать, что они коммутируют.

10.43. Доказать следующие равенства (здесь $g = \det \|g_{ij}\|$):

$$\text{а) } \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x^j} \ln g = \frac{\partial}{\partial x^j} \ln \sqrt{g};$$

$$\text{б) } \nabla_i T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} T^j);$$

$$\text{в) } \nabla_i T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} T^{ij}) + \Gamma_{kl}^j T^{kl};$$

$$\text{г) если } A^{ij} = -A^{ji}, \text{ то } \nabla_i A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^{ij}).$$

10.44. На плоскости даны два линейно независимых векторных поля с нулевым коммутатором. Доказать, что существует единственная связность, относительно которой эти два векторных поля ковариантно постоянны. Выяснить, является ли она симметрической. Привести контрпример для случая некоммутирующих векторных полей.

10.45. Найти в $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) область, в которой линейно независимы следующие векторные поля:

$$\text{а) } \mathbf{u} = (-y, x), \quad \mathbf{v} = (1, 0);$$

$$\text{б) } \mathbf{u} = (\cos x, \sin x), \quad \mathbf{v} = (-\sin x, \cos x);$$

$$\text{в) } \mathbf{u} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), \quad \mathbf{v} = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right), \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найти коэффициенты связности, относительно которой эти поля ковариантно постоянны.

10.46. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами x^1, x^2, x^3 . Найти область в $\mathbb{R}^3$, в которой линейно независимы векторные поля

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{w} = (0, x^1, 1).$$

Найти коэффициенты связности, относительно которой эти поля ковариантно постоянны.

§ 11. Геодезические на двумерных поверхностях

11.1. Доказать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ вполне характеризуется одним из следующих свойств:

а) в каждой точке линии, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к поверхности является главной нормалью кривой;

б) в каждой точке линии ее геодезическая кривизна равна нулю;

в) в каждой точке линии ее кривизна равна абсолютной величине нормальной кривизны в направлении касательной к этой кривой.

11.2. Пусть поверхность в $\mathbb{R}^3$ такова, что на ней лежит некоторая прямая линия. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.

11.3. Две поверхности в $\mathbb{R}^3$ касаются по линии l . Доказать, что если l — геодезическая линия на одной поверхности, то она должна быть геодезической и на другой поверхности.

11.4. Пусть две поверхности пересекаются трансверсально по линии l , причем линия l является геодезической на каждой из этих поверхностей. Доказать, что эта линия — прямая.

11.5. На поверхности в $\mathbb{R}^3$ находится материальная точка, которая может свободно двигаться по поверхности. Точка приведена в движение. Доказать, что точка будет двигаться по геодезической линии поверхности.

11.6. На поверхности в $\mathbb{R}^3$ лежит невесомая нить, причем эта нить не может оторваться от поверхности, но может по ней свободно скользить. Доказать, что если натянуть нить между двумя точками поверхности, то нить пройдет по геодезической. (На нить действуют только силы натяжения и реакции поверхности.)

11.7. Доказать, что геодезическая кривизна линии $u = u(s)$, $v = v(s)$ на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, лежащей в $\mathbb{R}^3$, может быть вычислена по формуле

$$k_g = \left| \left(\mathbf{m}, \frac{d}{ds} \mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \right) \right|,$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к поверхности.

11.8. а) Доказать, что дифференциальное уравнение геодезических линий $u = u(s)$, $v = v(s)$ поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, лежащей в $\mathbb{R}^3$, можно представить в виде $\left(\mathbf{m}, \frac{d}{ds} \mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \right) = 0$, где $\mathbf{m}$ — вектор нормали поверхности.

б) Вывести отсюда, что через каждую точку в каждом направлении на поверхности проходит ровно одна геодезическая.

11.9. Доказать, что при параллельном перенесении вектора вдоль геодезической на римановом многообразии угол между ним и касательным вектором геодезической остается постоянным.

11.10. Доказать, что геодезическими линиями плоскости являются прямые и только они.

11.11. Найти условия, при которых координатные линии будут геодезическими на двумерной поверхности M с координатами x^1 , x^2 и символами Кристоффеля Γ_{ij}^k .

11.12. Показать, что для любой связности ∇ существует связность $\tilde{\nabla}$ без кручения с теми же геодезическими.

11.13. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

11.14. Доказать, что параллель поверхности вращения будет геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

11.15. Найти геодезические линии двумерной сферы.

11.16. Найти геодезические линии цилиндрической поверхности в $\mathbb{R}^3$ (см. задачу 5.2а).

11.17. Доказать, что через каждую точку цилиндра (необязательно прямого кругового) проходит только одна замкнутая геодезическая.

11.18. Найти геодезические линии круглого конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

11.19. Найти геодезические линии произвольной конической поверхности в $\mathbb{R}^3$ (см. задачу 5.2б).

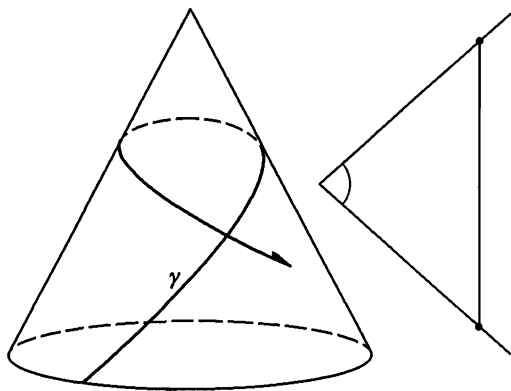


Рис. 65. Геодезическая на конусе

11.20. Доказать, что на бесконечном конусе (без границы) с углом развертки при вершине $\alpha < \pi$ единственной самопересекающейся геодезической, исходящей из данной точки образующей, будет та, которая пересекает эту образующую под углом $\frac{\pi - \alpha}{2}$ (см.

рис. 65). Найти угол, под которым эта геодезическая пересекает саму себя. Если же $\alpha \geq \pi$, то на таком конусе нет самопересекающихся геодезических.

11.21. Показать, что геодезические линии поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = v(du^2 + dv^2)$$

изображаются параболлами на плоскости с декартовыми координатами u, v .

11.22. Найти геодезические линии геликоида

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv).$$

11.23. Показать, что на поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$$

(поверхность Лиувилля) геодезические определяются уравнением

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) - a}} = 0,$$

где a — произвольная постоянная.

11.24. а) Привести метрику поверхности вращения

$$(\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$$

к виду, указанному в задаче 11.23.

б) Найти геодезические на поверхности вращения.

11.25. Доказать, что на поверхности с метрикой

$$ds^2 = (u^2 + \cos v + 2)(du^2 + dv^2)$$

линия $v = \pi$ является геодезической.

11.26. Показать, что на поверхности вращения

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi, x(t) \sin \varphi, z(t))$$

можно выбрать параметр $\tau(t)$ вдоль меридиана так, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $ds^2 = \rho(\tau)(d\varphi^2 + d\tau^2)$. Показать, что $\rho(\tau)$ — это расстояние от точки (τ, φ) на поверхности до оси вращения. Написать уравнение геодезической линии $(\tau(s), \varphi(s))$.

11.27. Теорема Клеро. Доказать, что радиус геодезической кривизны параллели поверхности вращения (величина обрат-

ная геодезической кривизне) равен отрезку касательной к меридиану, заключенному между точкой касания и осью поверхности (см. рис. 66).

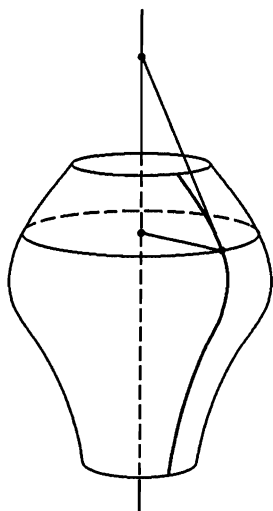


Рис. 66

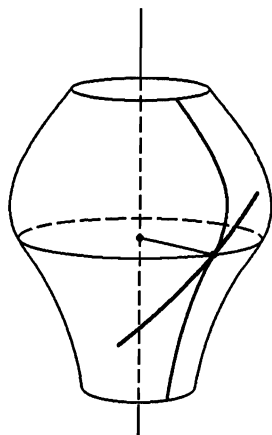


Рис. 67

11.28. (Другая формулировка теоремы Клеро.) Доказать, что на поверхности вращения вдоль каждой геодезической линии произведение радиуса параллели на синус угла между геодезической линией и меридианом постоянно (см. рис. 67).

11.29. Доказать, что если геодезическая на поверхности вращения пересекает все встречающиеся параллели под постоянным углом, то она является или меридианом, или параллелью, или же поверхность является прямым круговым цилиндром.

11.30. Доказать, что все геодезические на поверхности вращения

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2)$$

замкнуты. В цилиндрических координатах (r, φ, z) эту поверхность можно параметризовать так:

$$r = \frac{a}{4} \cos u, \quad z = a \left(\sin \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right), \quad \varphi = v.$$

11.31. Привести пример поверхности вращения, на которой существует замкнутая геодезическая, отличная от меридиана и параллели. Поверхность вращения должна быть отлична от сферы и поверхности из предыдущей задачи.

Заметим, что в действительности пример поверхности с замкнутой геодезической, отличной от параллели и меридиана не является чем-то исключительным: многие поверхности вращения обладают этим свойством.

11.32. Привести пример поверхности вращения, на которой нет замкнутых геодезических.

11.33. Является ли видимый контур эллипсоида геодезической на нем? Здесь считается, что «наблюдатель» находится в бесконечности, т. е. все лучи зрения параллельны между собой.

11.34. Рассмотрим на римановом многообразии пучок геодезических, исходящих из некоторой фиксированной точки O , т. е. в каждом направлении в точке O выпустим геодезическую. Отметим на каждой из них точку, удаленную от точки O вдоль этой геодезической на одно и то же расстояние R . Получившееся множество точек называется геодезической сферой радиуса R . Доказать, что геодезическая сфера ортогональна ко всем геодезическим радиусам, т. е. ко всем геодезическим указанного пучка.

11.35. Найти геодезическую кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, hv):$$

а) на геликоиде $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, hv)$;

б) на цилиндре $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a \cos v, a \sin v, u)$.

11.36. Вычислить геодезическую кривизну линии $u = \operatorname{sh} v$, $0 \leq v \leq v_0$, на геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v.$$

11.37. На поверхности с метрикой $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2$ найти геодезическую кривизну линии $v = \ln \operatorname{ch} u$.

11.38. Доказать, что если линии однопараметрического семейства линий на поверхности таковы, что длины дуг ортогональных траекторий между любыми двумя кривыми семейства равны между собой, то ортогональные траектории являются геодезическими.

11.39. Доказать, что кручение κ геодезической линии, проходящей в направлении вектора $du \cdot \mathbf{r}_u + dv \cdot \mathbf{r}_v$, находится по формуле

$$-\kappa = \frac{(LF - ME) du^2 + (LG - NE) du dv + (MG - NF) dv^2}{(EG - F^2)(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}.$$

11.40. Определить геодезическую кривизну параллелей и меридианов поверхности вращения

$$(f(u) \cos v, f(u) \sin v, u).$$

11.41. Найти геодезические кривизны координатных линий поверхности с метрикой $ds^2 = E du^2 + G dv^2$.

11.42. Пусть поверхность образована касательными к линии с кривизной $k(s)$. Отложим на касательных от точки касания в обе стороны отрезки длины l . Определить геодезическую кривизну линий, образованных концами этих отрезков на поверхности касательных (см. задачу 6.7).

11.43. Показать, что на любом компактном римановом многообразии любые две достаточно близкие точки можно соединить геодезической, причем имеется единственная геодезическая наименьшей длины.

11.44. Доказать, что гладкая кривая, совпадающая со связной компонентой множества неподвижных точек некоторой изометрии риманова многообразия, является геодезической.

11.45. а) Описать геодезические тора T^2 в плоской метрике.

б) Доказать, что торы, полученные склеиванием из прямоугольника с вершинами $\{(0,0), (2,0), (1,0), (2,1)\}$ и из параллелограмма с вершинами $\{(0,0), (2,0), (1,1), (3,1)\}$ не изометричны.

в) Рассмотрим параллелограммы единичной площади и с общим основанием. Выяснить, в каком случае торы, полученные склейкой из таких параллелограммов изометричны.

г) Описать все плоские метрики на торе T^2 .

11.46. Показать, что геодезическими на открытом круге с метрикой Лобачевского (модель Пуанкаре) являются диаметры круга и дуги окружностей, пересекающие границу круга под прямым углом.

11.47. Показать, что геодезические на верхней полуплоскости в метрике Лобачевского — это вертикальные полупрямые и дуги окружностей, перпендикулярные абсolute, т. е. оси абсцисс.

11.48. Найти римановы метрики вида

$$ds^2 = e^{2\lambda(u,v,w)}(du^2 + dv^2 + dw^2),$$

у которых кривые $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ — геодезические (при надлежащей параметризации этих кривых).

11.49. Привести пример:

а) метрики на евклидовой плоскости, не являющейся геодезически полной;

б) метрики в открытом круге, являющейся геодезически полной.

11.50. Пусть дана поверхность постоянной гауссовой кривизны. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к поверхности в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

11.51. а) Найти все замкнутые геодезические на бесконечном цилиндре с замкнутой направляющей.

б) Для двух данных точек найти соединяющую их кратчайшую.

в) В каком случае любая дуга геодезической на цилиндре является кратчайшей между своими концевыми точками?

11.52. Исследовать поведение кратчайших на конической поверхности в зависимости от значения полного угла при вершине конуса. Существуют ли кратчайшие, проходящие через вершину конуса?

11.53. Пусть замкнутая поверхность представляет собой прямой круговой конус с круговым основанием. Эта поверхность имеет особую линию — окружность, в которой склеены конус и его плоское основание. Описать кратчайшие, соединяющие две данные точки, в зависимости от расположения этих точек: обе они расположены на боковой поверхности конуса, обе на основании, одна на боковой поверхности, другая — на основании.

11.54. Описать кратчайшие на кубе и на тетраэдре, соединяющие две точки. Исследовать зависимость от расположения точек на поверхности.

Рассмотрим точку P на римановом многообразии M . Для вектора $v \in T_P M$ через $\gamma_v(t)$ обозначим геодезическую такую, что $\gamma_v(0) = P$ и $\gamma'_v(0) = v$. Определим *геодезическую экспоненту* формулой $\exp_P(v) = \gamma_v(1)$ для тех $v \in T_P M$, для которых определена точка $\gamma_v(1)$.

11.55. а) Доказать, что отображение $\exp_P$ задает диффеоморфизм некоторой окрестности V нуля пространства $T_P M$ и некоторой окрестности U точки P в M . Таким образом, $\exp_P$ определяет некоторую систему координат в окрестности $U \subset M$, которая называется *нормальной*.

б) Показать, что в нормальных координатах с центром в точке P матрица метрики является единичной, а символы Кристоффеля в точке P обращаются в 0.

в) Рассмотрим нормальные координаты на стандартной двумерной сфере. Как устроена максимальная область определения нормальной системы координат?

§ 12. Тензор кривизны

12.1. Вычислить тензор кривизны одномерного многообразия с произвольной метрикой.

12.2. Вычислить скалярную кривизну следующих римановых многообразий:

а) сфера S^2 радиуса R в $\mathbb{R}^3$;

б) тор T^2 , вложенный в $\mathbb{R}^3$ как поверхность вращения (см. задачу 6.1в);

в) тор T^2 вложенный в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2(z, w)$, задаваемый уравнениями $|z|^2 + |w|^2 = 1$ и $|z| = |w|$;

г) плоскость Лобачевского (см. задачи 3.2 и 3.3);

д) прямой круговой конус в $\mathbb{R}^3$;

- е) цилиндрическая поверхность в $\mathbb{R}^3$;
- ж) сфера S^n радиуса R в $\mathbb{R}^{n+1}$;
- з) поверхность Бельтрами (см. задачу 6.4в).

12.3. Доказать, что риманова метрика двумерного многообразия является локально евклидовой тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.

12.4. Вычислить тензор кривизны на сфере S^2 в сферических координатах.

12.5. Пусть $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Выразить в явном виде скалярную кривизну этой метрики через функцию $\lambda(x, y)$ и ее производные.

12.6. Пусть M — многообразие в $\mathbb{R}^n$ ($n > 2$). Пусть $x \in M$, а P — двумерное подпространство $T_x M$. Определим число $\sigma(P)$ формулой

$$\sigma(P) = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle,$$

где e_1, e_2 — ортонормальный базис плоскости P .

Число $\sigma(P)$ называется *секционной кривизной* поверхности M в направлении двумерной плоскости P , или, как еще говорят, в двумерном направлении P .

а) Доказать, что $\sigma(P)$ не зависит от выбора ортонормального базиса P .

б) Доказать, что если $n = 2$, то секционная кривизна $\sigma(P)$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности M^2 в точке x .

в) Пусть P — двумерное подпространство $T_x S$. Доказать формулу

$$\sigma(P) = R(V),$$

где $R(V)$ — гауссова кривизна двумерной поверхности V , образованной геодезическими, касательные векторы которых лежат в плоскости P .

12.7. Пусть S^n — n -мерная сфера $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ с индуцированной метрикой.

а) Показать, что тензор кривизны сферы S^n вычисляется по формуле

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

где X, Y, Z — векторы, касательные к сфере.

б) Показать, что секционная кривизна сферы S^n постоянна:

$$\sigma(P) = \frac{1}{r^2} \text{ для всех точек } x.$$

в) Показать, что метрика

$$ds^2 = \frac{4}{1 + K(y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} (dy_1^2 + \dots + dy_n^2)$$

имеет постоянную секционную кривизну.

12.8. а) Найти символы Кристоффеля для поверхности с метрикой $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$.

б) Найти гауссову кривизну поверхности с метрикой

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

12.9. Найти гауссову кривизну поверхности с метрикой

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2.$$

12.10. а) Доказать, что у двумерной поверхности тензор Риччи пропорционален метрическому. Найти коэффициент пропорциональности.

б) Доказать, что на трехмерном многообразии справедливо равенство

$$R_{lmnk} = g_{ln} R_{mk} - g_{lk} R_{mn} - g_{mn} R_{lk} + g_{mk} R_{ln} - \frac{1}{2} (g_{ln} g_{mk} - g_{lk} g_{mn}) R.$$

Здесь R_{lm} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна.

12.11. Доказать равенства:

$$\text{а) } \nabla^i \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) = 0;$$

$$\text{б) для двумерного многообразия } R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0.$$

12.12. Пусть ∇ — каноническая связность в $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой метрикой. Рассмотрим новую операцию

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \times \mathbf{Y}.$$

Доказать, что это — связность. Найти ее тензоры кручения и кривизны.

12.13. Пусть M — многообразие, снабженное связностью, а x — некоторая фиксированная точка M . Пусть $Q = \{-1 < u, v < 1\}$ — квадрат, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_x M$. Далее, пусть $f: Q \rightarrow M$ — такое гладкое отоображение, что $f(0, 0) = x$, $df(\partial/\partial u) = \mathbf{X}$, $df(\partial/\partial v) = \mathbf{Y}$. Для $|t| < 1$ рассмотрим параллельный перенос τ по пути $x \rightarrow f(t, 0) \rightarrow f(t, t) \rightarrow f(0, t) \rightarrow x$. Доказать, что

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\tau^{-1} \mathbf{Z} - \mathbf{Z}).$$

12.14. Найти компоненту R_{1212} тензора кривизны следующих метрик:

$$\text{а) } ds^2 = du^2 + u^2 dv^2; \quad \text{б) } ds^2 = du^2 - u^2 dv^2;$$

$$\text{в) } ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2), \quad a = \text{const}.$$

12.15. Риманово многообразие, в котором $R_{ij} = \lambda(x)g_{ij}$ называется пространством Эйнштейна. Доказать, что:

а) для пространства Эйнштейна выполняется равенство $\lambda(x) = R(x)/n$, где R — скалярная кривизна, а n — размерность многообразия;

б) любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

12.16. Доказать, что при $n > 2$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна.

12.17. Тензор Эйнштейна на римановом многообразии определяется формулой

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij}.$$

Доказать, что $\nabla_k G_i^k = 0$, где $G_i^k = g^{kl}G_{li}$.

12.18. Доказать, что связность на n -мерном многообразии, допускающая n ковариантно постоянных линейно независимых в каждой точке векторных полей, имеет нулевой тензор кривизны.

12.19. Пусть в каждой точке секционная кривизна риманова многообразия размерности $n > 2$ постоянна, т.е. не зависит от двумерного направления. Такие многообразия обычно называются пространствами *постоянной кривизны*. Показать, что в пространстве постоянной кривизны секционная кривизна K связана со скалярной соотношением $K = \frac{R}{n(n-1)}$.

12.20. Показать, что пространство постоянной кривизны является пространством Эйнштейна. С учетом задачи 12.16 получаем, что в пространстве постоянной кривизны при $n > 2$ скалярная кривизна постоянна, а секционная не зависит ни от точки, ни от двумерного направления.

12.21. Доказать, что в пространстве постоянной кривизны любой симметричный невырожденный ковариантно постоянный тензор типа $(0, 2)$ имеет вид $a_{ij} = \lambda g_{ij}$, $\lambda = \text{const}$.

12.22. Доказать, что на четырехмерном многообразии с метрикой

$$ds^2 = 2 du^1 du^4 + (u^4)^2 (du^2)^2 + 2 du^2 du^3$$

тензор кривизны ковариантно постоянен, а тензор Риччи нулевой.

12.23. Доказать, что если тензор кривизны риманова многообразия ковариантно постоянен и размерность многообразия больше 2, то пространство имеет постоянную кривизну.

12.24. Показать, что на двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ компоненты тензора кривизны представляются в виде

$$R_{ijkl} = K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где K — гауссова кривизна.

12.25. Доказать, что символы Кристоффеля в некоторой системе координат равны 0 тогда и только тогда, когда тензор кручения связности S_{ij}^k и тензор кривизны R_{ijk}^l тождественно равны нулю.

§ 13. Дифференциальные формы и когомологии де Рама

В этом параграфе внешним произведением векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$, $\dim V = n$, называется тензор

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{\sigma(p)},$$

где S_p — группа перестановок на p элементах, а $(-1)^\sigma$ — знак перестановки σ .

При таком определении значение внешней формы $\mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^n$ на наборе векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ равно объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Здесь $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ — базис сопряженного пространства V^* .

13.1. Доказать, что если векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$ линейно зависимы, то

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = 0$$

для любой формы $T \in \Lambda^p(V^*)$.

13.2. Доказать, что если формы $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in V^*$ линейно зависимы, то $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p = 0$.

13.3. а) Записать линейную форму $\omega = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$ в полярных координатах.

б) Записать форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2} dx \wedge dy$ в полярных координатах.

в) Записать форму $\omega = x dx + y dy + z dz$ в сферических координатах.

г) Записать форму

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

д) Форму предыдущего пункта записать в цилиндрических координатах.

е) Записать форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

13.4. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задано формулами

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 - x^2 x^3 x^4, & y^2 &= x^2 - x^1 x^3 x^4, \\ y^3 &= x^3 - x^1 x^2 x^4, & y^4 &= x^4 - x^1 x^2 x^3. \end{aligned}$$

Вычислить форму $\varphi^*\omega$, если:

- а) $\omega = y^1 dy^1 + y^2 dy^2 + y^3 dy^3 + y^4 dy^4$;
- б) $\omega = dy^1 \wedge dy^2 + dy^3 \wedge dy^4$;
- в) $\omega = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^4$.

13.5. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ задано формулой

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Вычислить $\varphi^*\omega$, если:

- а) $\omega = x dx + y dy$;
- б) $\omega = x dy - y dx$;
- в) $\omega = (x^2 - y^2) dy - 2xy dx$.

13.6. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ задано формулой

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$. Для формы

$$\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n$$

найти $\varphi^*\omega$ и доказать, что $d(\varphi^*\omega) = 0$.

13.7. Пусть $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. Найти $\varphi^*\omega$, если отображение φ

задается формулой:

- а) $\varphi: (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$;
- б) $\varphi: (x, y) \mapsto (\operatorname{ch} y \cos x, -\operatorname{sh} y \sin x)$;
- в) $\varphi: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

13.8. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$; $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Доказать, что

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det \|\varphi_i(\mathbf{v}_j)\|.$$

13.9. Доказать, что на ориентированном многообразии с римановой метрикой, заданной в локальных координатах $(x^1, \dots, x^n)$ набором функций g_{ij} , выражение вида $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ является дифференциальной формой, корректно определенной на всем многообразии. Эта форма называется *формой объема*.

13.10. Показать, что операцию внешнего дифференцирования дифференциальной формы можно представить как композицию операции ковариантного градиента и альтернирования для произвольной симметрической связности на многообразии.

13.11. Вычислить внешний дифференциал следующих дифференциальных форм:

а) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$;

б) $13x dx + y^2 dy + xyz dz$;

в) $(x + 2y^3) \left(dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dx \right)$;

г) $(x dx + y dy)/(x^2 + y^2)$;

д) $(y dx - x dy)/(x^2 + y^2)$;

е) $f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$;

ж) $f dg$, где f и g — гладкие функции;

з) $f(g(x^1, \dots, x^n)) dg(x^1, \dots, x^n)$.

13.12. Доказать формулу Картана

$$(dw)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}(w(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(w(\mathbf{X})) - w([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]),$$

где w — одномерная дифференциальная форма; $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — векторные поля. Как изменится формула, если определить внешнее произведение формулой

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \mathbf{v}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{\sigma(p)}?$$

13.13. Доказать следующие обобщения формулы из предыдущей задачи (они также называются формулами Картана).

а) Если ω — форма степени 2, то

$$d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{X}\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \mathbf{Y}\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Z}\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \\ - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) + \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}) - \omega([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}).$$

б) Если ω — форма степени p , то

$$d\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathbf{X}_i \omega(\mathbf{X}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_i, \dots, \mathbf{X}_{p+1}) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], \mathbf{X}_1, \dots, \hat{\mathbf{X}}_i, \dots, \hat{\mathbf{X}}_j, \dots, \mathbf{X}_{p+1}).$$

Пусть ω — дифференциальная p -форма. Обозначим через $i_{\mathbf{X}}\omega$, где $\mathbf{X}$ — векторное поле, дифференциальную $(p-1)$ -форму, значение которой на векторах $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}$ определяется формулой

$$i_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}).$$

Форма $i_{\mathbf{X}}\omega$ называется *внутренним произведением* формы ω и поля $\mathbf{X}$.

13.14. Пусть ω — p -форма, а $X_0, \dots, X_p$ — векторные поля. Доказать, что

$$(i_{X_0} d\omega)(X_1, \dots, X_p) + (di_{X_0}\omega)(X_1, \dots, X_p) = \\ = X_0\omega(X_1, \dots, X_p) - \sum_i \omega(X_1, \dots, [X_0, X_i], \dots, X_p).$$

13.15. Пусть X — векторное поле, а ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы. Доказать, что

$$i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_X\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge i_X\omega_2,$$

где r — степень формы ω_1 .

Пусть в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано скалярное произведение. Введем следующие две операции. Первая ставит в соответствие каждому вектору X такую линейную форму $\omega = V(X)$, что $\langle X, Y \rangle = V(X)(Y)$. Вторая операция каждой полилинейной кососимметрической форме ω степени p ставит в соответствие форму $*(\omega)$ степени $n - p$ следующим образом. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — ортонормированный базис линейных форм, $\omega = f\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$. Тогда $*(\omega) = (-1)^\sigma f\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-p}}$, где σ — четность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Эта операция обычно называется «операцией звездочка».

Заметим, что первая операция задает хорошо известный линейный изоморфизм между пространством V и пространством V^* . Вторая операция устанавливает изоморфизм между пространством внешних форм степени p и пространством внешних форм степени $n - p$.

13.16. Выписать в явном виде результат применения операции $*$ к дифференциальным k -формам ($k = 0, 1, 2, 3$), заданным в $\mathbb{R}^3$ с метрикой $ds^2 = \lambda_1 dx^2 + \lambda_2 dy^2 + \lambda_3 dz^2$, где λ_i — гладкие функции.

13.17. Доказать, что $*(iT) = (-1)^{k(n-k)}T$.

13.18. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ выполнены следующие формулы для векторных полей:

$$a) \operatorname{grad} F = V^{-1}(dF); \quad б) \operatorname{div} X = *d*V(X);$$

$$в) \operatorname{rot} X = V^{-1} * dV(X).$$

13.19. Рассмотрим $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой метрикой. Доказать, что значение 2-формы $V(X_1) \wedge V(X_2)$ на паре векторов Y_1 и Y_2 может быть вычислено по формуле

$$V(X_1) \wedge V(X_2)(Y_1, Y_2) = \det \|(X_i, Y_j)\|.$$

13.20. Показать, что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями общей формулы Стокса для дифференциальных форм.

13.21. Вывести формулу интегрирования по объему V , ограниченному замкнутой поверхностью Σ :

$$\text{а) } \iiint_V (\varphi \Delta \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)) dV = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma;$$

$$\text{б) } \iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Здесь $\partial/\partial \mathbf{n}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ .

13.22. Найти градиенты функций в сферических координатах:

а) $u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta$;

б) $u(r, \theta, \varphi) = 3r^2 \sin \theta + e^r \cos \varphi - r$;

в) $u(r, \theta, \varphi) = \cos \theta / r^2$.

13.23. Доказать, что

$$\text{div } \mathbf{v} = \partial_i v^i + v^i \partial_i \ln \sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} v^i).$$

13.24. Вычислить дивергенцию векторного поля на плоскости в: а) полярных координатах; б) эллиптических координатах; в) параболических координатах (см. задачи 1.1, 1.2, 1.3).

13.25. Вычислить дивергенцию векторного поля в трехмерном пространстве в: а) сферических координатах; б) цилиндрических координатах.

13.26. Найти закон преобразования форм связности

$$\omega_k^i = \Gamma_{jk}^i du^j$$

при переходе от одной карты к другой. Заметим, что формы связности, вообще говоря, не образуют глобально определенную дифференциальную форму.

13.27. Пусть на многообразии M задана связность. Тогда в каждой системе координат определена 1-форма $\gamma = \Gamma_{ki}^i dx^k$.

а) Доказать, что 2-форма $d\gamma$ корректно определена на всем многообразии, т.е. не зависит от выбора системы координат.

б) Доказать, что при замене координат с якобианом J к форме γ добавляется слагаемое $d(\ln J)$.

в) Доказать, что для римановой связности

$$\gamma = d \ln \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

13.28. Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой g_{ij} . Доказать, что ковариантная производная формы объема

$$\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

относительно римановой связности на M^n равна нулю.

13.29. Пусть $\mathbf{F}$ — векторное поле в 3-мерной области W с гладкой границей ∂W , $\mathbf{n}$ — единичный нормальный вектор к ∂W . Доказать, что

$$\int_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \int_{\partial W} \langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент площади на ∂W , а $\langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle$ — скалярное произведение.

13.30. В условиях предыдущей задачи доказать, что

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3),$$

где S — гладкая поверхность с гладкой границей ∂S и $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

13.31. Вывести из формулы Стокса теорему Коши о вычетах.

13.32. Пусть p и q — произвольные многочлены от переменных $z^1, \dots, z^n$; k, l — вещественные числа. Пусть существует такая дифференциальная форма ω , что $dp \wedge \omega = p dz$, $d\omega = l dz$, $dq \wedge \omega = q dz$. Доказать, что $d(p^{-k-l} q \omega) = 0$. Здесь $dz = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$.

13.33. Пусть $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная 2-форма на многообразии, a^{kl} — обратный тензор, т. е. $a^{kl} \omega_{li} = \delta_i^k$. Доказать, что два следующих условия эквивалентны:

- а) форма ω замкнута;
- б) операция

$$\{f, g\} = a^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^l},$$

заданная на пространстве гладких функций тензором a^{kl} , удовлетворяет тождеству Якоби.

13.34. Пусть $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ — линейно независимые векторные поля на n -мерном многообразии, $\omega^1, \dots, \omega^n$ — двойственные 1-формы, т. е. $\omega^i(\mathbf{X}_j) = \delta_j^i$. Доказать формулу

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j,$$

где гладкие функции c_{ij}^k определяются из соотношения $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c_{ij}^k \mathbf{X}_k$.

13.35. Доказать, что если на многообразии существует невырожденная форма максимального ранга, то многообразие ориентируемо.

13.36. Пусть $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная 2-форма на многообразии M . Доказать, что размерность многообразия M

четна и справедлива следующая формула:

$$\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n = \pm \frac{1}{n!} \sqrt{\det(\omega_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}.$$

Здесь $\dim M = 2n$.

13.37. Пусть на многообразии существует невырожденная 2-форма. Доказать, что многообразие ориентируемо.

13.38. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере. Являются ли гладкими на всей сфере следующие дифференциальные формы:

$$d\theta, \quad d\varphi, \quad \cos \theta d\theta, \quad \sin \theta d\theta, \quad \cos \theta d\varphi, \quad \sin \theta d\varphi, \quad d\theta \wedge d\varphi?$$

В каких случаях можно к этим формам применять формулу Стокса?

13.39. Пусть Ω — дифференциальная p -форма, ω — дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Показать, что Ω представляется в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

13.40. Пусть на многообразии M задана невырожденная 2-форма. Доказать, что на M существует тензорное поле J типа $(1, 1)$, удовлетворяющее условию $J^2 = -E$, т.е. $J_k^i J_m^k = -\delta_m^i$. Такое поле J называется *почти комплексной* структурой на M .

13.41. Показать, что ограничение формы

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{z^2}$$

на любой конус с центром в начале координат является замкнутой формой.

13.42. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v, y = u - v, z = uv$. Система координат u, v считается положительно ориентированной.

13.43. Записать внешнюю дифференциальную форму в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$\Omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в цилиндрических и сферических координатах. Показать, что интеграл от этой формы по гладкой поверхности, взаимно-однозначно и гладко проектирующейся из начала координат на единичную сферу, равен площади проекции.

13.44. Рассмотрим форму

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Вычислить $d\omega$ и $\int_{x^2+y^2=1} \omega$. Вывести отсюда, что форма ω замкнута, но не точна в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.45. Пусть

$$\omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Вычислить $d\omega$. Показать, что в полупространстве $z > 0$ существует такая 1-форма θ , что $d\theta = \omega$. Показать, что в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ не существует такой 1-формы θ , что $d\theta = \omega$.

13.46. Доказать, что ограничение замкнутой (точной) формы многообразия M на подмногообразие $N \subset M$ является замкнутой (точной) формой.

13.47. Доказать, что $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и $H^i(\mathbb{R}) = 0$ при $i \neq 0$.

13.48. Вычислить 0-мерные когомологии де Рама для произвольного гладкого многообразия.

13.49. Показать, что любая форма степени n на $\mathbb{R}^n$ точна.

13.50. Лемма Пуанкаре. Доказать, что

$$H^*(\mathbb{R}^{n+1}) = H^*(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство можно провести по следующей схеме. Пусть $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ задано формулой $i: x \mapsto (x, 0)$, а $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $p: (x, t) \mapsto x$. Так как $p \circ i = 1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $i^* \circ p^* = 1: H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n)$. Если показать, что $p^* \circ i^*: H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ также является тождественным, то отсюда будет следовать, что $p^*: H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ и $i^*: H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n)$ являются взаимно обратными изоморфизмами. Определим отображение $S: \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ следующим образом. Форма $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ однозначно представляется в виде суммы $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где форма ω_1 не содержит dt , а ω_2 — содержит. Форма ω_2 имеет вид $p^*\theta \cdot f(x, t) dt$, где $\theta \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$S(\omega) = p^*\theta \int_0^t f(x, t) dt.$$

а) Показать, что $(dS - Sd)\omega = (-1)^{p-1}\omega$, где p — степень формы ω .

б) Показать, что отображение

$$1 - p^* \circ i^*: \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$$

переводит замкнутые формы в точные. Вывести отсюда, что $p^* \circ i^*: H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ является тождественным отображением.

13.51. Пусть $f_t: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ — гладкое отображение, ω — дифференциальная форма на Y , $d\omega = 0$. Доказать, что

$$f_0^*(\omega) - f_1^*(\omega) = d\Omega$$

для подходящей формы Ω на X .

13.52. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ гомотопическая эквивалентность, т.е. существует такое отображение $g: Y \rightarrow X$, что $f \circ g \sim \text{id}_Y$ и $g \circ f \sim \text{id}_X$, то $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ — изоморфизм.

13.53. Доказать, что если многообразие X стягиваемо, то для любой замкнутой формы ω (т.е. $d\omega = 0$) разрешимо уравнение $d\Omega = \omega$.

13.54. Доказать, что n -мерные когомологии гладкого замкнутого n -мерного ориентируемого многообразия нетривиальны.

13.55. Пусть M — замкнутое компактное симплектическое многообразие, т.е. на нем существует невырожденная замкнутая 2-форма $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Доказать, что вторая группа когомологий многообразия M нетривиальна.

13.56. Пусть $M = M_1 \cup M_2$ — несвязная сумма двух многообразий одинаковой размерности. Доказать, что для всех p имеется разложение в прямую сумму $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

13.57. Пусть $M = M_1 \cup M_2$, где M_1 и M_2 — открытые подмногообразия, причем пересечение $M_1 \cap M_2$ диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$ при $p > 0$.

13.58. а) Доказать, что замкнутая форма ω на $M^n \times \mathbb{R}^m$ точна тогда и только тогда, когда для некоторой точки $t \in \mathbb{R}^m$ ограничение формы ω на $M^n \times \{t\}$ является точной формой.

б) Привести пример многообразия M^n и дифференциальной формы $\omega \in \Omega^p(M^n \times \mathbb{R}^m)$ такой, что для всех $t \in \mathbb{R}^m$ ограничение ω на $M^n \times \{t\}$ замкнуто, но сама форма ω незамкнута.

13.59. а) Показать, что форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \omega = 0$.

б) Показать, что форма $\omega \in \Omega^n(S^n)$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^n} \omega = 0$.

13.60. Доказать, что формула $\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$ задает изоморфизм $H^n(S^n) = \mathbb{R}$.

13.61. Вычислить когомологии S^n .

13.62. Вычислить когомологии:

а) тора T^2 ;

б) плоскости $\mathbb{R}^2$ без k точек;

в) бутылки Клейна;

г) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$;

д) пространства $\mathbb{R}^n$ без k точек.

13.63. Доказать, что на сфере S^n , где $n > 1$, не существует замкнутых 1-форм, ненулевых в каждой точке сферы.

13.64. Пусть M — замкнутое многообразие, на котором существует невырожденная замкнутая 2-форма. Доказать, что $\dim H^2(M) > 0$.

13.65. а) Пусть X_1, X_2, X_3 — попарно коммутирующие векторные поля на сфере S^3 . Доказать, что они не могут быть линейно независимыми во всех точках сферы.

б) Привести пример двух векторных полей на сфере S^3 , линейно независимых в каждой точке и коммутирующих друг с другом.

13.66. Теорема Брауэра.

а) Доказать, что не существует непрерывного отображения $\gamma: \overline{D}^n \rightarrow \partial \overline{D}^n = S^{n-1}$, неподвижного на точках сферы S^{n-1} . Для этого рассмотреть композицию γ и $i: S^{n-1} \rightarrow \overline{D}^n$ (вложение S^{n-1} на граничную сферу шара D^n) и отображение, которое оно индуцирует в когомологиях сферы. Здесь $\overline{D}^n$ — замкнутый шар.

б) Доказать, что у всякого непрерывного отображения шара $\overline{D}^n$ в себя обязательно существует неподвижная точка.

13.67. Рассмотрим сферу S^2 и экватор S^1 на ней. Доказать, что не существует непрерывного отображения $S^2 \rightarrow S^1$, неподвижного на S^1 .

13.68. а) Доказать, что не существует непрерывного отображения $f: S^2 \rightarrow S^1$ такого, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^2$.

б) Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение такое, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^2$. Доказать, что существует точка $x \in S^2$, в которой $f(x) = 0$.

13.69. Пусть M — ориентируемое многообразие с границей ∂M . Доказать, что не существует непрерывного отображения $M \rightarrow \partial M$, неподвижного на границе. Доказательство можно провести по аналогии с теоремой Брауэра.

§ 14. Топология

14.1. Доказать эквивалентность двух определений внутренности $\text{Int } Y$ подмножества Y топологического пространства X :

а) $\text{Int } Y$ — это совокупность всех внутренних точек пространства Y , т. е. таких точек, которые содержатся в Y вместе с некоторой своей окрестностью;

б) $\text{Int } Y$ — это наибольшее содержащееся в Y открытое множество, т. е. $\text{Int } Y = \bigcup U$.

$$U \in \tau(X), \\ U \subseteq Y$$

14.2. Доказать эквивалентность двух определений замыкания $\bar{Y}$ подмножества Y топологического пространства X :

а) $\bar{Y}$ — это совокупность всех точек прикосновения множества Y , т. е. таких точек, в любой окрестности которых есть точки из Y ;

б) $\bar{Y}$ — это наименьшее содержащее Y замкнутое множество, т. е.

$$\bar{Y} = \bigcap_{\substack{F - \text{замкнуто,} \\ F \supseteq Y}} F.$$

14.3. Доказать, что $\text{Int } Y$ — открытое, а $\bar{Y}$ — замкнутое множества.

14.4. Доказать, что:

а) Y открыто тогда и только тогда, когда $Y = \text{Int } Y$;

б) Y замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \bar{Y}$.

14.5. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Показать, что $\overline{A \cap B}$ может не совпадать с $\bar{A} \cap \bar{B}$.

14.6. Показать, что $\text{Int } (A \cup B)$ может не совпадать с $\text{Int } A \cup \text{Int } B$. Доказать, что $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.

14.7. Пусть $G \subset \mathbb{R}^1$ — открытое множество на прямой. Доказать, что G — объединение непересекающихся интервалов.

14.8. Доказать, что канторово множество на отрезке $[0, 1]$ замкнуто.

14.9. Пусть множество X состоит из трех точек. Описать все возможные топологии на нем. Сколько из них хаусдорфовых? Сколько связных? Сколько линейно связных?

14.10. Доказать, что в хаусдорфовом топологическом пространстве все одноточечные подмножества замкнуты.

14.11. Доказать, что топологическое произведение двух хаусдорфовых топологических пространств хаусдорфово.

14.12. Доказать, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ замкнута в $X \times X$.

14.13. Пусть X — бесконечное множество. Его конечные подмножества объявим замкнутыми. Проверить, что получилась нехаусдорфова топология.

14.14. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что каждое одноточечное множество замкнуто.

14.15. Доказать, что метрическое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

14.16. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми множествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0?

Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если существует вещественная постоянная $\lambda < 1$, такая, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

14.17. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства непрерывно.

14.18. Доказать, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя всегда имеет неподвижную точку, причем эта точка единственна.

14.19. Привести пример, показывающий, что от условия полноты метрического пространства в задаче 14.18 отказаться нельзя.

14.20. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f такая, что $K = f^{-1}(0)$.

14.21. Привести пример метрического пространства, в котором существуют два шара, причем шар большего радиуса строго содержится в шаре меньшего радиуса.

14.22. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие «расстояния»:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)),$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2))^{1/2},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать, что:

а) это метрики на $X \times Y$;

б) соответствующие им топологии на $X \times Y$ совпадают.

14.23. Доказать равносильность следующих определений непрерывности отображения топологических пространств $f: X \rightarrow Y$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда:

а) для любого открытого $U \subset Y$ прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ тоже открыт;

б) для любого замкнутого $F \subset Y$ прообраз $f^{-1}(F) \subset X$ тоже замкнут;

в) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U ее образа $f(x) \in Y$ существует окрестность V точки x такая, что $f(V) \subseteq U$;

г) график f , т.е. множество $\{(x, y) : f(x) = y\}$, замкнут в $X \times Y$ при условии, что Y — хаусдорфово.

14.24. Пусть $f: E \rightarrow F$, $E = A \cup B$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_A$ и $f|_B$ непрерывны. Если $A \neq \overline{A}$ то это, вообще говоря, неверно. Привести пример.

14.25. Доказать, что если $f_n: X \rightarrow Y$ — последовательность непрерывных отображений и f_n равномерно сходятся к f (здесь X и Y — метрические пространства), то f непрерывно.

14.26. Пусть отображение $f: X \rightarrow X$ непрерывно, а топологическое пространство X хаусдорфово. Доказать, что множество

$\{x \in X: x = f(x)\}$ неподвижных точек отображения f замкнуто. Привести пример, показывающий, что от требования хаусдорфовости отказаться нельзя.

14.27. Пусть топологическое пространство Y хаусдорфово, а отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ непрерывны. Доказать, что множество $\{x \in X: f(x) = g(x)\}$ замкнуто. Показать, что от требования хаусдорфовости отказаться нельзя.

14.28. Пусть A — всюду плотное подмножество в топологическом пространстве X , а Y — хаусдорфово. Пусть непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ таковы, что $f|_A = g|_A$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

14.29. Доказать, что всякое бесконечное замкнутое множество прямой является замыканием своего счетного подмножества.

14.30. Построить пример метрического пространства X , такого, что его некоторое подмножество $Y \subset X$ (указать Y) замкнуто и ограничено, но при этом не является компактом.

14.31. Пусть отображение $f: E \rightarrow F$ является непрерывным отображением «на» и пусть E компактно. Доказать, что F компактно.

14.32. Доказать, что куб I^n — компактное пространство.

14.33. Доказать, что n -мерная сфера ($n < \infty$) компактна. Верно ли это для $n = \infty$?

14.34. Пусть $X \subset Y$ и Y — компактное пространство. Доказать, что X — компактное пространство тогда и только тогда, когда X — замкнутое пространство.

14.35. Показать, что группа ортогональных матриц размера 3×3 — компактное топологическое пространство.

14.36. Доказать, что группа ортогональных преобразований n -мерного евклидова пространства — компактное топологическое пространство.

14.37. Выяснить компактны ли $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$.

14.38. Пусть X — компактное, Y — метрическое пространства, $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Доказать, что f — равномерно-непрерывное отображение.

14.39. Пусть A и B — связные подмножества некоторого топологического пространства, причем $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Доказать, что $A \cup B$ связно.

14.40. Доказать, что если E, F связны, то и $E \times F$ связно.

14.41. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение и его образ совпадает с Y . Доказать, что если X связно (линейно связно), то Y тоже связно (линейно связно).

14.42. Доказать, что:

а) интервалы $0 < x < 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x < 1$ связны и линейно связны;

б) если множество $A \subset \mathbb{R}^1$ связно, то A имеет вид: $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$, где a, b могут принимать значения $\pm\infty$.

14.43. Доказать, что куб I^n и сфера S^n связны.

14.44. Пусть X — метрическое компактное связное пространство. Можно ли две его точки соединить непрерывным путем?

14.45. Доказать, что $SO(n)$ — связное топологическое пространство; $O(n)$ состоит из двух компонент связности. Доказать, что $U(n)$, $SU(n)$ — связные топологические пространства.

14.46. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{C})$, рассматриваемая как подмножество в пространстве всех комплексных матриц размера $n \times n$, — открытое и связное подмножество.

14.47. Доказать, что группа $GL^+(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц размера $n \times n$ с положительным определителем — связное топологическое пространство.

14.48. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц размера $n \times n$ — топологическое пространство, состоящее из двух связных компонент.

14.49. Доказать, что замыкание связного подмножества топологического пространства связно.

14.50. Пусть A и B — подмножества топологического пространства X . Верно ли, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B тоже связны? Аналогичный вопрос про линейную связность.

14.51. Пусть A и B одновременно либо замкнутые, либо открытые подмножества топологического пространства X . Доказать, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B тоже связны.

14.52. а) Доказать, что с помощью операций замыкания и перехода к внутренности множества из данного подмножества топологического пространства можно получить не более семи различных подмножеств. Привести пример такого подмножества $\mathbb{R}$, из которого получаются в точности семь различных подмножеств.

б) Доказать, что с помощью операций замыкания и перехода к дополнению из данного подмножества топологического пространства можно получить не более 14 различных подмножеств.

14.53. Пусть Y — связное (линейно связное) подпространство X . Исследовать связность (линейную связность) внутренности $\text{Int } Y$ и границы $\partial Y = \overline{Y} \setminus \text{Int } Y$.

14.54. Доказать, что если X — связное компактное пространство, а $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывное отображение, то образом f является отрезок.

14.55. Пусть A — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Доказать равносильность условий:

а) A связно;

б) A линейно связно;

в) любые две точки A можно соединить ломаной, состоящей из конечного числа отрезков, целиком лежащей в A .

14.56. Доказать, что следующее множество A связно, но не является линейно связным.

а) A состоит из графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, и отрезка $\{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ (координаты декартовы);

б) A состоит из окружности $r = 1$ и спирали $r = e^{-1/\varphi}$, $\varphi > 0$.

14.57. Привести пример двух метрических пространств X и Y и отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ таких, что f и g взаимно однозначны и непрерывны, и тем не менее X и Y не гомеоморфны.

Напомним, что взаимная однозначность означает одновременную сюръективность и инъективность отображения.

14.58. Привести пример непрерывного биективного отображения двух гомеоморфных топологических пространств $f: X \rightarrow Y$, не являющегося гомеоморфизмом.

14.59. Доказать, что открытый диск $x^2 + y^2 < 1$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что интервал $0 < x < 1$ и открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ не гомеоморфны.

14.60. Доказать, что куб $\{|x_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ и шар $\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\}$ гомеоморфны. Доказать, что открытый куб и открытый шар диффеоморфны.

14.61. Доказать, что шар $\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\right\}$ и верхнее полушарие сферы $\left\{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1, x_{n+1} \geq 0\right\}$ гомеоморфны.

14.62. Доказать, что эллипсоид $\left\{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\right\}$ гомеоморфен сфере S^n .

14.63. Гомеоморфны ли отрезок $0 \leq x \leq 1$ и буква T ?

14.64. Доказать, что интервал $(-1, 1)$ гомеоморфен прямой $(-\infty, \infty)$. Доказать, что любые два интервала гомеоморфны.

14.65. Гомеоморфны ли шар и сфера?

14.66. Доказать следующие гомеоморфизмы:

а) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$;

б) $S^n \setminus S^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

14.67. Доказать гомеоморфность пространств

$$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^3 \setminus (\{y = z = 0\} \cup \{(1, 1, 1)\}).$$

14.68. Доказать, что:

а) пространства $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфны;

б) пространства $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.

14.69. Доказать, что ни для какого топологического пространства X его квадрат $X \times X$ не гомеоморфен $\mathbb{R}$.

14.70. Пусть $f: D^2 \rightarrow D^2$ — гомеоморфизм. Доказать, что тогда граничная сфера отображается на граничную сферу.

14.71. Доказать, что сфера S^2 не гомеоморфна никакому подпространству $\mathbb{R}^2$.

14.72. Определить топологический тип поверхности, полученной склейкой строк шестиугольника в соответствии со словом:

а) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$;

б) $abca^{-1}b^{-1}c$.

14.73. Рассмотрим шаровой слой, ограниченный двумя концентрическими сферами. Топологический червяк прогрыз ход в шаровом слое от одной граничной сферы до другой, который

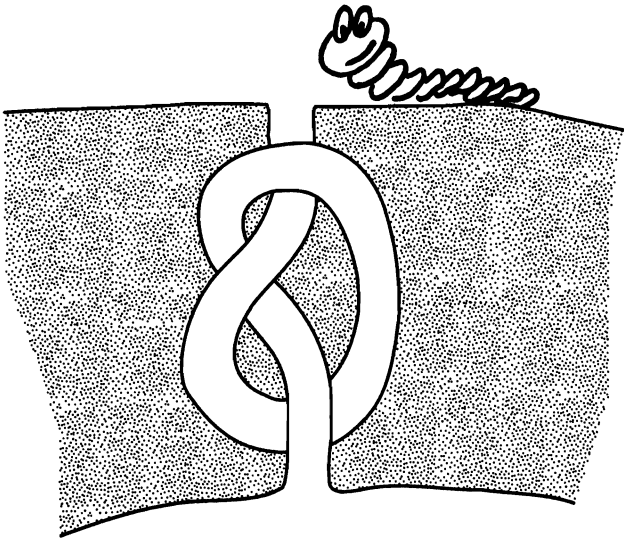


Рис. 68

заузлен так, как показано на рис. 68. Определить топологический тип поверхности, ограничивающей полученное пространственное тело.

14.74. Дать классификацию с точностью до гомеоморфизма букв русского алфавита.

§ 15. Гомотопия, степень отображения и индекс векторного поля

15.1. Доказать, что $f: X \rightarrow Y$ гомотопно отображению в точку, если:

а) $X = \mathbb{R}^n$; б) $Y = \mathbb{R}^n$.

15.2. Пусть f — отображение единичного отрезка $[0, 1]$ в себя, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказать, что существует гомотопия, неподвижная в концах отрезка и деформирующая отображение f к тождественному отображению.

15.3. Стягивается ли по себе в точку векторное пространство $\mathbb{R}^n$?

15.4. Пусть пространство X стягивается по себе в точку. Доказать, что любые два пути с одинаковыми концами гомотопны между собой (гомотопия неподвижна на концах).

15.5. Доказать, что на сфере S^n , $n > 1$, всякие два пути гомотопны (концы одинаковы, гомотопия неподвижна на концах).

15.6. Дать классификацию букв русского алфавита с точностью до гомотопической эквивалентности.

15.7. а) Доказать, что двумерное плоское кольцо гомотопически эквивалентно окружности.

б) Доказать, что лист Мёбиуса гомотопически эквивалентен окружности.

15.8. а) Доказать, что пространство $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, полученное выбрасыванием из плоскости некоторой точки, гомотопически эквивалентно окружности.

б) Доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, где $x_1, \dots, x_k$ — различные точки $\mathbb{R}^n$, гомотопически эквивалентно букету k сфер размерности $n - 1$.

Напомним определение *букета* связных пространств $X_1, \dots, X_k$. Выберем в каждом из них по одной точке $p_i \in X_i$. В несвязном объединении $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ отождествим все точки $p_1, \dots, p_k$ (и только их). Полученное пространство называется букетом пространств $X_1, \dots, X_k$ и обозначается $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_k$.

15.9. Доказать, что двумерный тор без точки гомотопически эквивалентен букету $S^1 \vee S^1$.

15.10. Выяснить, чему гомотопически эквивалентен n -мерный тор без точки.

15.11. Выяснить, чему гомотопически эквивалентно проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ без точки.

15.12. Выяснить, чему гомотопически эквивалентны следующие пространства (см. рис. 69):

а) тор, меридиан которого заклеен диском;

б) тор, параллель которого заклеена диском;

в) тор $(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, на котором траектория $(e^{2\pi it/p}, e^{2\pi it/q})$, где p и q — взаимно простые целые числа, заклеена диском;

- г) сфера, у которой экватор заклеен диском;
- д) сфера, у которой отождествлены две точки;
- е) сфера, у которой отождествлены p точек.

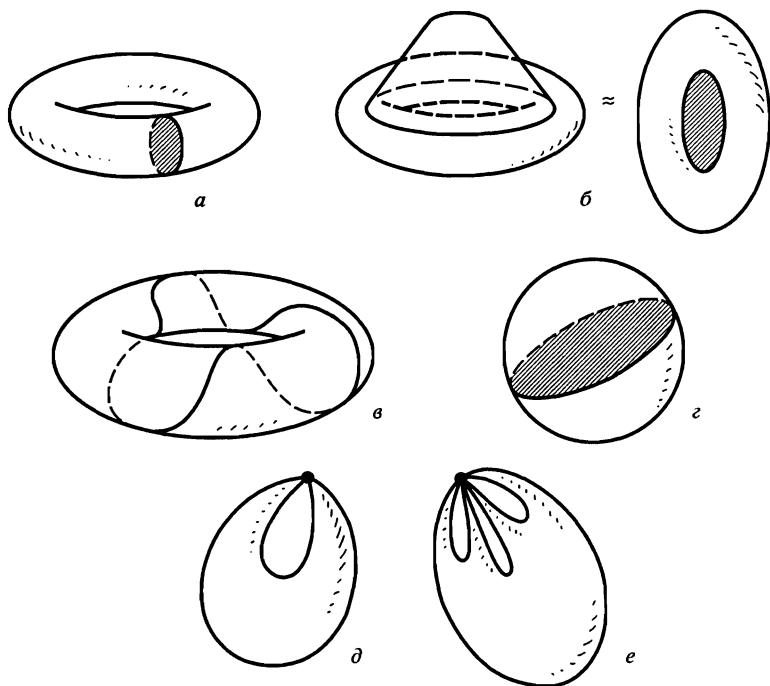


Рис. 69

15.13. Рассмотрим линейно связные достаточно хорошие пространства X и Y (например, многообразия). Выберем в каждом из них k попарно различных точек $x_1, \dots, x_k \in X$ и $y_1, \dots, y_k \in Y$. Отождествим точки x_i и y_i для $i = 1, \dots, k$. Доказать, что полученное пространство (см. рис. 70) гомотопически эквивалентно $X \vee Y \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$, где окружность S^1 встречается $k - 1$ раз.

15.14. Доказать следующие гомотопические эквивалентности:

- а) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \sim S^{n-k-1}$;
- б) $S^n \setminus S^k \sim S^{n-k-1}$;
- в) $\mathbb{R}^n \setminus S^1 \sim S^{n-k-1} \vee S^{n-1}$.

г) Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ попарно непересекающиеся аффинные подпространства $\Pi^{k_1}, \dots, \Pi^{k_j}$ размерностей $k_1, \dots, k_j$ соответственно. Букету каких сфер гомотопически эквивалентно пространство $\mathbb{R}^n \setminus (\Pi^{k_1} \cup \dots \cup \Pi^{k_j})$?

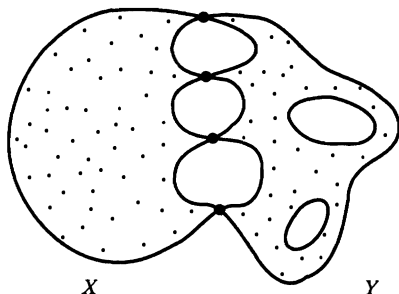


Рис. 70

д)* Рассмотрим в S^n набор попарно непересекающихся сфер $S^{k_1}, \dots, S^{k_j}$. Чему гомотопически эквивалентно пространство $S^n \setminus (S^{k_1} \cup \dots \cup S^{k_j})$?

15.15. Доказать, что любое векторное поле гомотопно нулевому.

15.16. Доказать, что на связном многообразии векторное поле с изолированными особыми точками гомотопно векторному полю с одной особой точкой в классе векторных полей с изолированными особенностями.

15.17. Доказать, что если при гомотопии векторного поля $\mathbf{v}$ (в классе полей с изолированными особенностями) две особые точки X_1 и X_2 слились в одну, то ее индекс равен сумме индексов $\text{ind}_{X_1} \mathbf{v} + \text{ind}_{X_2} \mathbf{v}$.

15.18. Изобразить на плоскости $\mathbb{R}^2$ качественную картину распределения интегральных траекторий потоков

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad Re } f(z), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad Im } f(z)$$

для перечисленных ниже комплексно-аналитических функций $f(z)$.

Найти особые точки потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Исследовать устойчивость особых точек.

Изобразить качественную картину поведения траекторий потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ на сфере S^2 (пополненная плоскость $\mathbb{R}^2$: $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup (\infty)$).

Изобразить процесс распада особенности $z = 0$ этих векторных полей при малом возмущении исходной функции $f(z)$, при котором получается функция $g(z)$, для которой все особые точки потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ невырождены:

а) $f(z) = z^n$ (n — целое число);

б) $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (функция Жуковского);

в) $f(z) = z + \frac{1}{z^2}$; г) $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$;

$$\text{д) } f(z) = \ln z; \quad \text{е) } f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b};$$

ж) $f(z) = z^4(2(7-5)^2 + 12z^6)$ (исследовать в окрестности точки $z = 0$);

$$\text{з) } f(z) = z^3(z-1)^{100}(z-2)^{900};$$

$$\text{и) } f(z) = 2z - \ln z;$$

к) $f(z) = 1 + z^4(z^4 - 4)^{44} \cdot (z^{44} - 44)^{444}$ (исследовать в окрестности точки $z = 0$);

$$\text{л) } f(z) = \frac{1}{100} \ln \left(\frac{z-2i}{z-4} \right)^3; \quad \text{м) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 1};$$

$$\text{н) } f(z) = \frac{2}{z} + 21 \ln(z^2); \quad \text{о) } f(z) = z^5 + 2 \ln z;$$

$$\text{п) } f(z) = 2 \ln(z-1)^2 - \frac{4}{3} \ln(z+10i)^3;$$

$$\text{р) } f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z-i)^3};$$

$$\text{с) } f(z) = \left(2 + \frac{5i}{2} \right) \ln \frac{4z-2}{64z+i};$$

$$\text{т) } f(z) = \left(1 - \frac{i}{2} \right)^4 \ln \left(\frac{18z-i}{10z+1} \right)^2.$$

15.19. Найти индекс особых точек векторных полей $\text{grad Re } f(z)$ и $\text{grad Im } f(z)$, где:

$$\text{а) } f(z) = z^n; \quad \text{б) } f(z) = z^{-n}; \quad \text{в) } f(z) = \ln z;$$

$$\text{г) } f(z) = z + \frac{1}{z}; \quad \text{д) } f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}.$$

15.20. Доказать, что на всяком связном компактном замкнутом многообразии существует гладкое векторное поле ровно с одной особой точкой. Найти индекс этой точки как особой точки векторного поля.

15.21. Пусть некомпактное многообразие M является открытой областью в некотором компактном замкнутом многообразии. Доказать, что на M существует векторное поле без особых точек.

15.22. Построить гладкое векторное поле ровно с двумя особенностями на следующих ориентированных поверхностях:

а) на сфере; б) на торе; в) на сфере с g ручками.

15.23. Построить гладкое векторное поле с одной особой точкой на следующих поверхностях: а) на сфере; б) на торе; в) на кренделе; г) на сфере с g ручками; д) на проективной плоскости; е) на бутылке Клейна; ж) на сфере с k листами Мёбиуса. Найти индексы этих особых точек.

15.24. Доказать, что индекс (вращение) векторного поля вдоль замкнутой кривой на плоскости не меняется при гомотопии кривой, не проходящей через особые точки векторного поля.

15.25. Доказать, что индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой равен нулю, если векторное поле не имеет особенностей внутри контура.

15.26. Показать, что индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой равен сумме индексов особых точек векторного поля внутри контура.

15.27. Доказать, что не существует гладкого векторного поля без особенностей:

а) на сфере S^2 ;

б) на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

15.28. Показать, что на бутылке Клейна существует гладкое векторное поле без особенностей. Доказать, что для любых двух гладких векторных полей на бутылке Клейна существует точка, в которой они линейно зависимы.

15.29. Найти степень векторного поля $\mathbf{X}$ на гиперповерхности Γ :

а) $\xi = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $A \in SO(2)$, и $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\xi = A_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, где $A_z(\varphi)$ — матрица поворота на угол φ вокруг оси Oz , и $\Gamma: \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

15.30. Найти степень векторного поля $\mathbf{X}$ на гиперповерхности Γ :

а) $\mathbf{X} = \left(x^2 + y^2 - 1, \frac{x^2}{4} + 4y^2 - 1 \right)$ и $\Gamma: 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 3 = 0$;

б) $\mathbf{X} = (2z^2 - y^2 - 4, 2x^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ и $\Gamma: x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;

в) $\mathbf{X} = (y^2 + 3z^2 - x^2 - 4, x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x^2 - y^2 + 2)$ и $\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

15.31. Доказать, что индексы двух векторных полей на произвольной 2-мерной замкнутой поверхности равны. Верно ли это утверждение для многообразия любой размерности?

15.32. Пусть $\mathbf{v}(x)$ — гладкое векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$; L — гладкий самопересекающийся контур на плоскости $\mathbb{R}^2$; j_L — индекс контура L в векторном поле $\mathbf{v}(x)$; j — число точек внутреннего касания поля $\mathbf{v}$ и контура L ; E — число точек внешнего

касания. Доказать, что если число всех точек касания поля и контура конечно, то $j_L \leq \frac{1}{2}(2 + J - E)$.

15.33. Рассмотрим на римановом многообразии M^n векторное поле $\mathbf{v} = \text{grad } f$, где f — гладкая функция. Пусть $x_0 \in M^n$ — изолированная особая точка поля $\mathbf{v}$, т.е. $\mathbf{v}(x_0) = 0$. Пусть гессиан функции f , т.е. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$, — невырожденная в точке x_0 матрица, причем ее индекс (число отрицательных собственных значений) равен λ . Доказать, что $\text{ind}_{x_0} \mathbf{v} = (-1)^\lambda$.

15.34. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая поверхность и $\zeta: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ — гауссово отображение. Пусть l — прямая, проходящая через начало координат и точку $x \in S^{n-1}$. Рассмотрим функцию высоты $f_l: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемую ортогональным проектированием M^{n-1} на l .

а) Доказать, что все критические точки f_l являются прообразами точек x и $-x$ при гауссовом отображении ζ .

б) Доказать, что гессиан функции f_l в этих критических точках совпадает с матрицей Якоби отображения ζ , вычисленной в тех же точках.

15.35. Пусть $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Найти особые точки и их индексы векторного поля, значение которого в точке $x \in \mathbb{R}^n$ равняется:

а) Ax ; б) $Ax + x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

15.36. Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^k$, $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Найти его степень.

15.37. а) Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$, где $f(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$, здесь S^2 — пополненная комплексная плоскость, т.е. $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Найти его степень.

б) Сделать то же самое для $f(z) = z^3 - 3z^2 - 9z + 27$.

в) Рассмотреть общий случай $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$.

15.38. а) Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$, заданного формулой $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z + 1}$. Найти его степень.

б) Сделать то же самое для $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 5}$.

в) Рассмотреть общий случай $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ для многочленов $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $Q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$ с комплексными коэффициентами.

15.39. а) Для отображения $SO(2) \rightarrow SO(2)$, заданного формулой $A \mapsto A^7$ найти критические точки и критические значения. Найти степень отображения.

б) Сделать то же самое для отображения $O(2) \rightarrow O(2)$, заданного той же формулой.

в) Отображение $SU(2) \rightarrow SU(2)$ задано формулой $A \mapsto A^3$. Найти его критические точки, критические значения и степень.

г) Отображение $SO(3) \rightarrow SO(3)$ задано формулой $A \mapsto A^3$. Найти его критические точки, критические значения и степень.

д) Решить задачи а)–г) для отображения $A \mapsto A^k$.

15.40. Пусть X , Y и Z — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия и $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — гладкие отображения. Доказать, что $\deg g \circ f = \deg g \cdot \deg f$.

15.41. Пусть M_1 , M_2 , N_1 , N_2 — ориентируемые замкнутые гладкие многообразия, причем $\dim M_1 = \dim N_1$, $\dim M_2 = \dim N_2$. Пусть $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ и $f_2: M_2 \rightarrow N_2$ — гладкие отображения. Доказать, что $\deg f_1 \times f_2 = \deg f_1 \cdot \deg f_2$, где $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$.

15.42. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, причем X и Y — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия одинаковой размерности. Тогда $\deg f = \pm 1$.

15.43. Доказать, что если $f: M \rightarrow N$ гомотопно отображению в точку, то у f обязательно есть критические точки. Здесь M и N — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия одинаковой размерности.

15.44. Доказать, что замкнутые ориентируемые многообразия разных размерностей не могут быть гомотопически эквивалентны.

15.45. а) Доказать, что замкнутое ориентируемое многообразие не стягивается.

б) Останется ли утверждение верным, если отбросить предположение об ориентируемости?

15.46. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — центральная симметрия.

а) Вычислить $\deg f$.

б) Доказать, что при нечетных n отображение f гомотопно тождественному.

15.47. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Пусть n — четное. Доказать, что найдется точка $x \in S^n$, для которой либо $x = f(x)$, либо $x = -f(x)$.

15.48. Пусть на сфере S^2 заданы две функции f и g такие, что $f(x) = -f(\tau x)$ и $g(x) = -g(\tau x)$, где τ — центральная симметрия. Доказать, что у f и g имеется общий нуль.

15.49. Пусть на S^2 заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что обязательно найдется точка $x \in S^2$ такая, что $f(x) = f(\tau x)$ и $g(x) = g(\tau x)$, где τ — симметрия сферы относительно ее центра.

15.50. Пусть f — непрерывное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ такое, что $f(x) \neq -x$ ни для каких $x \in S^n$. Доказать, что:

а) $\deg f = 1$;

б) если n — четное, то существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = x$.

15.51. Доказать, что отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, не имеющее неподвижных точек, гомотопнo центральной симметрии сферы $\tau: x \mapsto -x$.

15.52. Пусть отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет степень $2k+1$. Доказать, что существует пара диаметрально противоположных точек сферы, которые под действием f переходят в диаметрально противоположные точки, т.е. $f(-x) = -f(x)$.

15.53. Пусть $f: X \rightarrow S^n$, $g: X \rightarrow S^n$ — два непрерывных отображения. Доказать, что если для всех x точки $f(x)$ и $g(x)$ не являются диаметрально противоположными, то отображения f и g гомотопны.

15.54. Напомним, что многообразие $\mathbb{R}P^n$ при $n = 2k+1$ ориентируемо. Найти степень канонического отображения $f: S^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2k+1}$.

15.55. Доказать, что степень любого гладкого отображения S^{2k+1} в $\mathbb{R}P^{2k+1}$ четна.

15.56. Привести в явном виде пример отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ степени k .

15.57. Доказать, что на сфере S^{2k+1} не существует четного касательного векторного поля (т.е. такого, что $v(x) = v(-x)$) без особенностей.

15.58. а) Доказать, что не существует непрерывного отображения A векторного пространства $\mathbb{R}^3$ в себя такого, что вектора x и $A(x)$ ортогональны для всех $x \in \mathbb{R}^3$.

б) Тот же вопрос для $\mathbb{R}^4$.

15.59. Пусть M^2 — замкнутая вложенная поверхность в $\mathbb{R}^3$. Пусть $f: M^2 \rightarrow S^2$ — отображение нормалей (гауссово отображение). Пусть ω и ω' — формы площади сферы S^2 и поверхности M соответственно. Доказать, что $f^*(\omega) = K\omega'$, где K — гауссова кривизна поверхности M . Доказать также, что

$$2 \deg f = \int_M K \omega'$$

и равняется эйлеровой характеристике M .

15.60. а) Построить гладкое отображение степени 1 тора T^2 на сферу S^2 . Описать отображение геометрически для тора и сферы, стандартно вложенных в $\mathbb{R}^3$.

б) Построить гладкое отображение тора T^2 на сферу S^2 степени k .

в)* Выяснить, существует ли отображение степени 1 сферы S^2 на тор T^2 .

г)* Для каких g_1 и g_2 существует гладкое отображение M_{g_1} на M_{g_2} степени 1, где M_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g (сфера с g ручками)?

д)* Для каких g_1 и g_2 существует гладкое отображение M_{g_1} на M_{g_2} ненулевой степени?

15.61. Доказать, что два гладких отображения $S^1 \rightarrow S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.

15.62. Теорема Хопфа. Пусть M^n — замкнутое ориентированное многообразие. Доказать, что два отображения $M^n \rightarrow S^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.

15.63. Привести пример отображения степени 0, не гомотопного отображению в точку.

15.64. Пусть $P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ — полином степени n с комплексными коэффициентами. Он задает отображение сферы S^2 в себя, где в качестве S^2 рассматривается пополненная комплексная плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

а) Доказать, что формула

$$H_1(z, t) = z^n + (1 - t)(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n),$$

где $t \in [0, 1]$, задает гомотопию исходного отображения к отображению $z \mapsto z^n$.

б) Пусть $a_n \neq 0$. Рассмотрим отображение

$$H_2(z, t) = (1 - t)(z^n + \dots + a_{n-1}z) + a_n.$$

Оно является гомотопией исходного отображения к отображению $z \mapsto a_n$, которое, очевидно, имеет нулевую степень. Следовательно, многочлен $P_n(z)$ не имеет комплексных корней. Найти ошибку в рассуждениях.

Часть 2

§ 16. Системы координат (дополнительные задачи)

В задачах 16.1–16.4:

- а) найдите координатные поверхности и координатные линии;
- б) вычислите определители

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

и установите, в каких точках пространства $\mathbb{R}^3$ нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для перечисленных ниже криволинейных систем координат u_1, u_2, u_3 пространства $\mathbb{R}^3$;

- в) являются ли эти системы координат ортогональными?

16.1. Для биполярной системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{a \operatorname{sh} u_1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_2 = \frac{a \sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_3 = u_3,$$

где a — постоянный множитель.

16.2. Для бисферической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{c \sin u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1}, \quad x_2 = \frac{c \sin u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1}, \quad x_3 = \frac{c \operatorname{sh} u_2}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1},$$

где c — постоянный множитель, $0 \leq u_1 < u_2$, $-\infty < u_2 < \infty$, $-\pi < u_3 \leq \pi$.

16.3. Для системы вытянутых сфероидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = cu_1u_2, \quad x_2 = c\sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)} \cos u_3,$$

$$x_3 = c\sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)} \sin u_3,$$

где $|u_1| \geq 1$, $-1 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 < 2\pi$, c — постоянный множитель.

16.4. Для системы сплюснутых сфероидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = cu_1 u_2 \sin u_3, \quad x_2 = c\sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)}, \quad x_3 = cu_1 u_2 \cos u_3,$$

где $|u_1| \geq 1$, $-1 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 < 2\pi$.

16.5. Преобразовать выражение

$$y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - x \frac{\partial V}{\partial x} - y \frac{\partial V}{\partial y} + V$$

к полярным координатам r , φ , т.е. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

16.6. Преобразовать выражение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial V}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial V}{\partial y} + x^2 y^2 V = 0$$

к новым координатам u , v таким, что $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$. Найти область определения и область значения этой системы координат.

16.7. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = \ln \ln z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

16.8. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = \ln \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

16.9. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = z^3 - 3z^2 + 1$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

§ 17. Кривые и поверхности: уравнения и параметризации

Обычно в настоящем задачнике кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ мы называем гладкой, если существуют и непрерывны производные всех порядков вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Однако в некоторых задачах мы уточняем класс гладкости. Именно:

а) кривая называется *гладкой класса C^n* , если она допускает параметризацию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно;

б) кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется *аналитической*, если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ является вещественно-аналитической, т.е. допускает разложение в сходящийся степенной ряд.

17.1. а) Привести примеры нерегулярных кривых, допускающих аналитическую параметризацию.

б) Доказать, что кривая, допускающая аналитическую параметризацию, может иметь только такие точки излома, в которых вектор скорости скачком поворачивается на угол π .

в) Доказать, что если гладкая кривая не допускает аналитической параметризации, то в ее особых точках угол поворота вектора скорости может быть любым. Построить примеры.

17.2. Доказать, что если кривая определена аналитическим отображением окружности в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, то ее регулярность может нарушаться только в конечном числе точек.

17.3. Представить график функции $y = |x|$ как кривую следующего типа:

а) с C^n -гладкой параметризацией для любого натурального n , но не являющуюся C^{n+1} -гладкой;

б) с C^∞ -гладкой параметризацией;

в) показать, что для нее не существует аналитической параметризации.

17.4. Пусть плоская кривая задана отображением $x = t^k$, $y = t^n$, $k \leq n$, где k и n — натуральные числа, $t \in (-1, 1)$. Исследовать, при каких k и n кривая является:

а) регулярной, но неаналитической в любой регулярной параметризации;

б) регулярной аналитической;

в) нерегулярной в любой гладкой параметризации.

В пунктах а) и б) привести соответствующие регулярные параметризации. Во всех трех случаях нарисовать качественный вид кривых в окрестности начала координат.

17.5. Пусть пространственная кусочно-регулярная кривая состоит из двух плоских дуг. Какая возможна максимальная гладкость кривой в целом?

17.6. Найти регулярную аналитическую параметризацию лемнискаты Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

17.7. Можно ли продеформировать лемнискату в классе регулярных кривых в кривую без самопересечений?

17.8. Пусть γ — некоторая плоская кривая, M — точка кривой γ , xOy — заданная в плоскости кривой прямоугольная система координат. Обозначим через T и N точки пересечения касательной и нормали к этой кривой с осью Ox , и пусть P — проекция точки M на ось Ox (см. рис. 71).

а) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка PN постоянна и равна a .

б) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка PT постоянна и равна a .

в) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка MN постоянна и равна a .

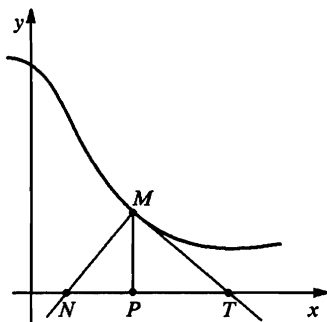


Рис. 71

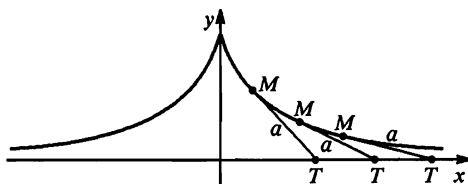


Рис. 72

17.9. Найти уравнение кривой γ с постоянной длиной касательной $MT = a$ (см. рис. 72). Такая кривая называется *трактрисой*.

17.10. Произвольный луч OE пересекает в точке D окружность

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

а в точке E — касательную к ней, проходящую через точку γ , диаметрально противоположную O . Через точки D и E проведены прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy , до пересечения в точке M . Составить уравнение кривой, образованной точками M (*локон Аньези*) (см. рис. 73). Нарисовать эту кривую.

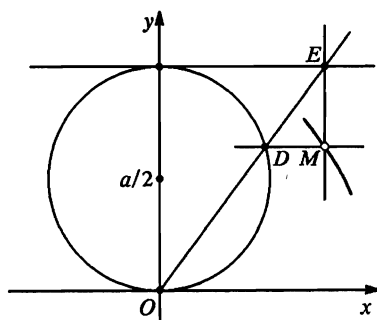


Рис. 73. Локон Аньези

17.11. Пусть γ — замкнутая гладкая кривая. Доказать, что для любого вектора $\mathbf{a}$ найдется точка $x \in \gamma$, в которой касательная к γ ортогональна $\mathbf{a}$.

17.12. Пусть две точки движутся в пространстве так, что расстояние между ними остается постоянным. Доказать, что проекции их скоростей на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой.

17.13. Доказать, что, если на некотором сегменте $[a, b]$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\mathbf{r}'$, причем вектор $\mathbf{r}$ параллелен $\mathbf{r}'$, и при этом $\mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, то годограф вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть отрезок прямой линии.

17.14. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана гладкая вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, причем производные $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ отличны от нуля при всех $t \in [a, b]$, и, кроме того, они коллинеарны, т. е. вектор $\mathbf{r}'$ параллелен $\mathbf{r}''$ при всех $t \in [a, b]$. Доказать, что годографом такой вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ является отрезок прямой линии.

17.15. Пусть по плоскости движется твердый стержень, причем его концы описывают кривые $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Найти уравнение неподвижной центроиды. *Неподвижной центроидой* называется множество точек пересечения прямых, проходящих через концы стержня перпендикулярно направлениям скоростей его концов.

17.16. Рассмотрим движение стержня, описанное в предыдущей задаче. *Подвижной центроидой* называется множество мгновенных центров вращения относительно движущегося стержня. Составить уравнение подвижной центроиды, если заданы законы движения концов стержня $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$.

17.17. Пусть движение плоскости (т. е. изометрия) задано движением по плоскости жесткого стержня. Доказать, что тогда линейная скорость $\mathbf{v}$ точки определяется соотношением $\mathbf{v} = \omega[\mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор рассматриваемой точки $M(R)$ относительно мгновенного центра вращения (см. задачи 17.15, 17.16), а $[\mathbf{r}]$ — вектор, полученный из $\mathbf{r}$ поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Выразить ω через $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, а также найти скорость $\mathbf{v}$ точки $M(R)$ (см. рис. 74).

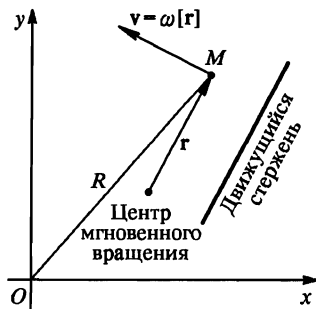


Рис. 74. Движение твердого стержня

17.18. Составить уравнения касательной и нормали к следующим кривым:

а) $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ (эллипс);

б) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$ (гипербола);

в) $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (астроида);

г) $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (циклоида);

д) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)$ в точке $t = 0$;

е) $\mathbf{r}(t) = (a\varphi \cos \varphi, a\varphi \sin \varphi)$ (спираль Архимеда).

17.19. Доказать, что длина отрезка касательной к астроиде

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

заключенного между осями координат, равна a (см. рис. 75).

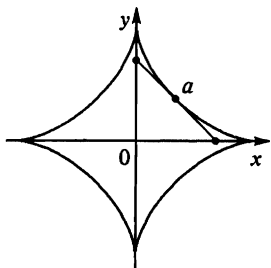


Рис. 75. Астроида

17.20. Доказать, что кардиоиды, заданные в полярных координатах уравнениями

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad r = a(1 - \cos \varphi),$$

ортогональны в точках пересечения, отличных от начала координат.

17.21. Найти огибающую семейства прямых, соединяющих концы пар сопряженных диаметров эллипса.

17.22. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от сторон прямого угла треугольник постоянной площади.

17.23. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от данной параболы сегменты данной площади.

17.24. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от сторон данного угла треугольник данного периметра.

17.25. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на параллельных хордах некоторой окружности.

17.26. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих общие главные оси и заданную сумму полуосей.

17.27. На плоскости расположено зеркало, имеющее форму окружности. На него падает пучок параллельных лучей. Найти огибающую отраженных лучей. Эта кривая называется *каустикой*.

17.28. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих заданную площадь и общие главные оси.

17.29. Найти огибающую семейства окружностей, имеющих центры на эллипсе и проходящих через один из его фокусов.

17.30. Найти огибающую семейства окружностей радиуса a с центрами на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.31. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена, непрерывна и дважды дифференцируема на сегменте $[a, b]$. Далее, пусть в каждой точке этого сегмента векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ неколлинеарны. Найти огибающую нормалей кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.32. Найти огибающую лучей, отраженных от окружности, если светящаяся точка находится на окружности.

17.33. Для кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16)$$

написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке, для которой $t = 2$.

17.34. Найти касательную прямую и нормальную плоскость в точке $A(3, -7, 2)$ кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^4 + t^2 + 1, 4t^3 + 5t + 2, t^4 - t^3).$$

17.35. Найти касательную прямую и нормальную плоскость в точке $A(2, 0, -2)$ кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t + 3, t^3 - 2t^2 + t, 2t^3 - 6t + 2).$$

17.36. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для кривой, заданной в $\mathbb{R}^3$ трансверсальным пересечением двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

17.37. Найти длину дуги винтовой линии

$$x = 3a \cos t, \quad y = 3a \sin t, \quad z = 4at$$

от точки пересечения с плоскостью xOy до произвольной точки $M(t)$.

17.38. Найти длину дуги одного витка между двумя точками пересечения с плоскостью xOy кривой

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}.$$

17.39. Найти длину дуги кривой

$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2$$

между плоскостями $y = a/3$ и $y = 9a$.

17.40. Найти длину замкнутой кривой

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t.$$

17.41. В каждой точке кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ задан касательный вектор $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) \neq 0$. Функция $\mathbf{r}(t)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$ на сегменте $[a, b]$. Функция $\mathbf{T}(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Доказать, что на данной кривой можно ввести такую параметризацию, при которой $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T}$.

Иными словами, всякое достаточно хорошее векторное поле, касательное к кривой, можно сделать полем ее скорости при подходящем выборе параметра вдоль кривой.

17.42. Найти необходимое и достаточное условие, при котором данное семейство прямых

$$\mathbf{r} = \rho(u) + \lambda \mathbf{e}(u) \quad (|\mathbf{e}| = 1)$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$ имеет огибающую. Найти эту огибающую.

17.43. Составить параметрическое уравнение цилиндра, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору $\mathbf{e}$.

17.44. Составить параметрическое уравнение конуса с вершиной в начале радиуса-вектора $\rho(t)$, для которого кривая $\rho = \rho(t)$ является направляющей.

17.45. Составить параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной кривой $\rho = \rho(t)$. Такая поверхность называется *развертывающейся* поверхностью.

17.46. Окружность радиуса a перемещается так, что ее центр движется по заданной кривой $\rho = \rho(s)$, а плоскость, в которой она расположена, является в каждый момент нормальной плоскостью к данной кривой. Здесь для простоты записи ответа параметр s на кривой взят натуральным. Составить параметрическое уравнение поверхности, описываемой окружностью.

17.47. Вокруг оси Oz вращается плоская кривая $x = \varphi(v)$, $z = \psi(v)$. Составить параметрические уравнения поверхности вращения. Рассмотреть частный случай, когда меридиан задан уравнением $x = f(z)$.

17.48. Составить уравнение поверхности, образованной главными нормальными винтовой линии.

17.49. Составить уравнение поверхности, образованной семейством главных нормалей данной кривой $\rho = \rho(s)$.

17.50. Прямая движется так, что точка M пересечения ее с окружностью движется по данной окружности, причем эта прямая остается в нормальной плоскости к окружности в соответствующей точке и поворачивается на угол, равный углу $\widehat{MOM}_0$, который прошла точка, двигаясь по окружности. Составить уравнение поверхности, описываемой движущейся прямой, считая, что начальным положением движущейся прямой была ось Ox , а окружность задана уравнениями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

17.51. Даны две кривые $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и $\rho = \rho(v)$. Составить уравнение поверхности, описываемой серединой отрезка, концы которого лежат на данных кривых. Такая поверхность называется *поверхностью переноса*.

17.52. Пусть даны: плоскость (направляющая плоскость), непараллельная ей прямая (направляющая прямая) и некоторая кривая (направляющая кривая). Через каждую точку направляющей кривой проведем прямую l , параллельную направляющей плоскости и пересекающую прямую. Рассмотрим поверхность, заметаемую прямой l при ее движении. Такая поверхность называется

коноидом (см. рис. 76). Составить уравнение коноида, если даны: направляющая плоскость yOz , направляющая прямая $y = 0$, $z = h$, и направляющая кривая $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ (эллипс).

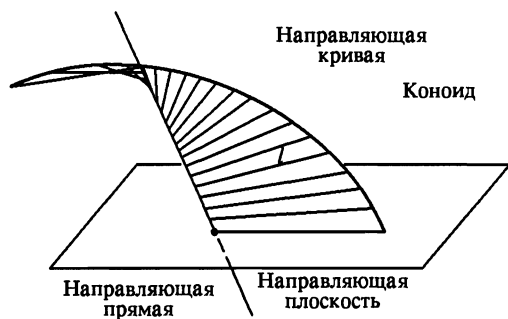


Рис. 76. Коноид

17.53. Составить уравнение коноида, для которого направляющие прямая, плоскость и кривая заданы соответственно уравнениями:

- а) $x = a, y = 0$; б) $z = 0$; в) $y^2 = 2pz, x = 0$.

17.54. **Цилиндрондом** называется поверхность, образованная прямыми, параллельными некоторой плоскости (см. рис. 77). Цилиндронд может быть задан двумя направляющими кривыми

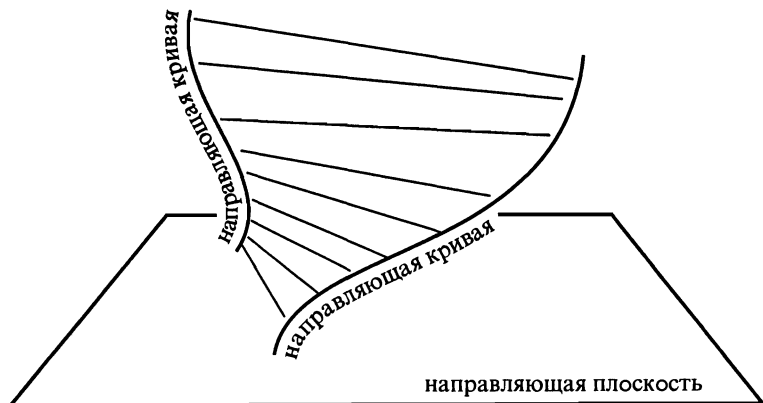


Рис. 77. Цилиндронд

(лежащими на нем) и направляющей плоскостью (которой параллельны образующие цилиндриона). Частным случаем цилиндриона

ида является коноид, описанный в задачах 17.52 и 17.53. Цилиндроида превращается в коноид, если одна из двух направляющих кривых является прямой линией. Составить уравнение цилиндроида, если его направляющими являются окружности $x^2 + z^2 - 2ax = 0$, $y = 0$ и $y^2 + z^2 - 2ay = 0$, $x = 0$, а направляющей плоскостью является плоскость xOy .

17.55. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана кривая $\rho = \rho(u)$ и в каждой ее точке задан вектор $\mathbf{a}(u)$. *Линейчатой* называется поверхность, задаваемая параметрическим уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = \rho(u) + v\mathbf{a}(u).$$

Прямые, проходящие через точки кривой $\rho(u)$ в направлении вектора $\mathbf{a}(u)$, называются *прямолинейными образующими* линейчатой поверхности. Отметим, что коноид и цилиндرويد являются линейчатыми поверхностями.

Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости $y - z = 0$ и пересекают параболы $y^2 = 2px$, $z = 0$ и $z^2 = -2px$, $y = 0$.

17.56. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой пересекают ось Oz , параллельны плоскости xOy и пересекают линию $xyz = a^3$, $x^2 + y^2 = b^2$.

17.57. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой пересекают прямую $\mathbf{r} = \mathbf{a} + u\mathbf{b}$, кривую $\rho = \rho(v)$ и перпендикулярны вектору $\mathbf{p}$.

17.58. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости xOy и пересекают два эллипса

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, & x &= a; \\ \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} &= 1, & x &= -a. \end{aligned}$$

17.59. Составить уравнение линейчатой поверхности, образованной прямыми, пересекающими кривую $\rho = (u, u^2, u^3)$, параллельными плоскости xOy и пересекающими ось Oz .

17.60. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными плоскости $x + y + z = 0$, пересекающими ось Oz и окружность $\rho = (b, a \cos u, a \sin u)$.

17.61. Составить параметрические уравнения поверхности, образованной прямыми, пересекающими окружность $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ и прямые $y = 1$, $z = 1$ и $x = 1$, $z = 0$.

17.62. Составить уравнение поверхности, образованной касательными к винтовой линии $\rho(v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$. Такая поверхность называется *развертывающимся геликоидом*.

17.63. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0, 0, -c)$ и направляющей — кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, лежащей в плоскости $z = 0$.

17.64. В плоскости π дана прямая AB и кривая $\rho = \rho(u)$. Кривая ρ равномерно перемещается в плоскости π так, что каждая ее точка движется параллельно AB . В то же время плоскость π равномерно вращается вокруг AB . Составить уравнение поверхности, описываемой кривой ρ . Эта поверхность называется *винтовой поверхностью*. Частным случаем винтовой поверхности является прямой геликоид. В этом случае $\rho = \rho(u)$ — прямая, ортогональная AB .

17.65. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ — кривая с отличной от нуля кривизной k . Через каждую ее точку проведена нормальная плоскость, и в этой плоскости построена окружность с центром на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и заданным радиусом a , причем $a > 0$, $ak < 1$. Эти окружности заматают в пространстве трубнообразную поверхность S . Такие поверхности называются *трубками* или *канальовыми поверхностями*.

а) Составить уравнение поверхности S .

б) Доказать, что любая нормаль поверхности S пересекает кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и перпендикулярна вектору скорости этой кривой.

17.66. Найти поверхность S , зная, что все ее нормали пересекаются в одной точке O .

17.67. Показать, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскости поверхности

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{a^3}{uv},$$

не зависит от выбора точки касания на поверхности.

17.68. Показать, что сумма квадратов длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной плоскостью поверхности

$$x = u^3 \sin^3 v, \quad y = u^3 \cos^3 v, \quad z = (a^2 - u^2)^{3/2},$$

постоянна.

17.69. Показать, что касательная плоскость к коноиду

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \sin 2v$$

пересекает коноид по эллипсу.

17.70. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z = xf(y/x)$, проходят через одну и ту же точку.

17.71. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к геликоиду

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, ku).$$

17.72. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$xyz = a^3.$$

17.73. Пусть поверхность образована касательными к кривой γ . Доказать, что эта поверхность во всех точках одной и той же касательной к кривой γ имеет одну и ту же касательную плоскость.

17.74. Пусть поверхность образована главными нормальными кривой γ . Составить уравнение касательной плоскости и нормали в произвольной точке этой поверхности.

17.75. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, образованной бинормальными кривой γ .

17.76. Доказать, что нормаль поверхности вращения совпадает с главной нормалью меридиана и пересекает ось вращения.

17.77. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают одну и ту же прямую, то поверхность будет поверхностью вращения.

17.78. Линейчатая поверхность (см. определение в задаче 17.55) называется *развертывающейся*, если во всех точках произвольной прямолинейной образующей касательная плоскость к поверхности одна и та же. Докажите, что линейчатая поверхность

$$\mathbf{r}(u, v) = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{a}(u)$$

является развертывающейся тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0.$$

17.79. Докажите, что любая развертывающаяся поверхность может быть разбита на следующие части: 1) часть плоскости; 2) часть цилиндра; 3) часть конуса; 4) часть фигуры, состоящей из касательных к некоторой неплоской линии. В последнем случае указанная линия называется ребром возврата.

17.80. Найти огибающую и ребро возврата семейства эллипсоидов

$$\alpha^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где α — параметр семейства.

17.81. Найти огибающую семейства сфер, построенных на хордах, параллельных большой оси эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

как на диаметрах.

17.82. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер, диаметрами которых служат хорды окружности

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 0,$$

проходящие через начало координат.

17.83. Две параболы расположены в перпендикулярных плоскостях и имеют общую вершину и общую касательную в вершине. Найти огибающую семейства плоскостей, касательных к обоим параболом.

17.84. Найти огибающую семейства сфер постоянного радиуса, центры которых расположены на данной кривой $\rho = \rho(s)$ (канальная поверхность).

17.85. Найти ребро возврата семейства сфер постоянного радиуса a , центры которых расположены на кривой $\rho = \rho(s)$.

17.86. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер радиуса a , центры которых расположены на окружности

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

17.87. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер, проходящих через начало координат, центры которых расположены на кривой

$$\mathbf{r}(u) = (u^3, u^2, u).$$

17.88. Найти огибающую семейства эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с заданной суммой полуосей

$$a + b + c = l.$$

17.89. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов длин которых равна a^2 .

17.90. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают от координатного угла тетраэдр постоянного объема a^3 .

17.91. Найти огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$x\alpha^2 + y\alpha + z = 0,$$

где α — параметр семейства.

17.92. Найти огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + z = \alpha C,$$

где α — параметр семейства.

17.93. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства соприкасающихся плоскостей данной кривой.

17.94. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства нормальных плоскостей данной кривой.

17.95. Найти характеристики, огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(u), \quad D = D(u), \quad |\mathbf{n}| = 1,$$

где u — параметр семейства.

17.96. Найти развертывающуюся поверхность, проходящую через две параболы:

$$y^2 = 4ax, \quad z = 0$$

и

$$x^2 = 4ay, \quad z = b.$$

17.97. Показать, что поверхность

$$x = \cos v - (u + v) \sin v, \quad y = \sin v + (u + v) \cos v, \quad z = u + 2v$$

является развертывающейся.

17.98. Показать, что поверхность

$$x = u^2 + \frac{v}{3}, \quad y = 2u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2u^2v}{3}$$

является развертывающейся.

17.99. Дан параболоид

$$x = 2au \cos v, \quad y = 2bu \sin v, \quad z = 2u^2(a \cos^2 v + b \sin^2 v),$$

где a и b — постоянные. Определить уравнение кривых на поверхности так, чтобы касательные плоскости к поверхности образовывали с плоскостью xOy постоянный угол вдоль кривой.

Показать, что характеристики этого семейства касательных плоскостей образуют постоянный угол с осью z . Найти ребро возврата огибающей.

17.100. Найти ребро возврата развертывающейся поверхности, которая касается поверхности $az = xy$ вдоль линии пересечения ее с цилиндром $x^2 = by$.

17.101. Показать, что развертывающаяся поверхность, проходящая через окружности $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ и $x^2 + z^2 = b^2, y = 0$, пересекает плоскость $x = 0$ по равносторонней гиперболе.

§ 18. Теория кривых (дополнительные задачи)

18.1. Вычислить кривизну кривых:

$$a) \begin{cases} x(t) = a(1+m) \cos mt - am \cos(1+m)t, \\ y(t) = a(1+m) \sin mt - am \sin(1+m)t \end{cases} \quad (\text{эпициклоида});$$

$$б) x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2 \quad (\text{конхоида});$$

18.2. Вычислить кривизну следующих кривых:

$$a) y = -\ln \cos x;$$

$$б) x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3 \quad \text{при } t = 1;$$

$$в) x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t) \quad \text{при } t = \pi/2;$$

$$г) x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

18.3. Найти кривизну следующих кривых, заданных в полярных координатах:

- а) $r = a\varphi$; б) $r = a\varphi^k$;
 в) $r = a^\varphi$ в точке $\varphi = 0$.

18.4. Найти кривизну следующих кривых:

- а) $y = \sin x$; б) $y = \operatorname{sh} x$;
 в) $y = \operatorname{ch} x$; г) $y = \operatorname{tg} x$;
 д) $y = \operatorname{th} x$; е) $y = \operatorname{cth} x$.

18.5. Определить кривизну кривой

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

18.6. Найти параметрическое уравнение кривой:

- а) $s^2 + 9R^2 = 16a^2$;
 б) $s^2 + R^2 = 16a^2$;
 в) $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s-a}$.

18.7. Доказать, что если координаты точек кривой удовлетворяют соотношению

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(x dx + y dy + z dz)^2} = 1,$$

то касательные к кривой также касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

18.8. Доказать, что касательные к кривой

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \frac{1}{2}(\sin t - \cos t), e^{-t} \right)$$

пересекают плоскость xOy по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

18.9. Пусть O — центр эллипса, A — конец одной полуоси ($OA = a$), B — конец другой полуоси ($OB = b$). Рассмотрим точку C такую, что $CAOB$ является прямоугольником. Перпендикуляр, опущенный из C на AB , продолжим до пересечения с AO в точке P и до пересечения с BO в точке Q . Доказать, что P — центр кривизны эллипса в вершине A , а Q — центр кривизны в B .

18.10. Написать уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $\mathbf{r}(u) = (u^2, u, u^3 - 20)$ в точке $A(9, 3, 7)$.

18.11. Показать, что кривая

$$\mathbf{r}(u) = (au + b, cu + d, u^2)$$

имеет во всех точках одну и ту же соприкасающуюся плоскость.

18.12. Составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали кривой

$$y^2 = x, \quad x^2 = z$$

в точке $(1, 1, 1)$.

18.13. В каждой точке кривой

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \quad z(t) = 4 \sin \frac{t}{2}$$

в положительном направлении главной нормали отложен отрезок, равный учетверенной кривизне кривой в этой точке. Найти уравнение соприкасающейся плоскости кривой, описанной концом отрезка.

18.14. Дана винтовая линия

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали.

18.15. Дана кривая

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 - t, t^3).$$

Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали в точке $t = 1$.

18.16. Доказать, что если:

а) все соприкасающиеся плоскости регулярной гладкой кривой параллельны между собой, то кривая плоская;

б) все соприкасающиеся плоскости регулярной гладкой кривой имеют общую точку, то кривая плоская;

в) все касательные к кривой перпендикулярны одному направлению, то кривая плоская;

г) все нормальные плоскости параллельны одному и тому же направлению, то кривая плоская.

18.17. Доказать, что в окрестности точки, где кручение кривой отлично от нуля, выполняются нижеследующие свойства. В обоих случаях определить, каковы при этом главные члены отклонения d кривой от этих плоскостей по сравнению с длиной дуги, отсчитываемой от рассматриваемой точки:

а) кривая пересекает свою соприкасающуюся плоскость, располагаясь по разные ее стороны;

б) кривая располагается по одну сторону от своей спрямляющей плоскости.

18.18. Вычислить радиусы кривизны и кручения кривой

$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2.$$

18.19. Дана кривая

$$\mathbf{r}(u) = (v \cos u, v \sin u, kv),$$

где $v = v(u)$. Доказать, что эта кривая расположена на конусе. Определить функцию $v(u)$ так, чтобы эта кривая пересекала образующие конуса под постоянным углом θ .

18.20. *Обобщенной винтовой линией или линией откоса* называется пространственная линия, касательные которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением. Доказать, что линия будет обобщенной винтовой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;

б) бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;

в) отношение кривизны к кручению постоянно.

г) все спрямляющие плоскости кривой параллельны некоторой прямой (напомним, что спрямляющая плоскость в данной точке кривой проходит через эту точку перпендикулярно главной нормали);

$$д) \left(\frac{d}{ds} \mathbf{v}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{v}, \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{v} \right) = 0; \quad е) \left(\frac{d}{ds} \mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{b} \right) = 0;$$

ж) вектор

$$\frac{\mathbf{v}/k + \mathbf{b}/\kappa}{\sqrt{1/k + 1/\kappa}} = \frac{\kappa \mathbf{v} + k \mathbf{b}}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}}$$

постоянный.

18.21. Доказать, что кривая

$$x = a \int \sin \alpha(t) dt, \quad y = a \int \cos \alpha(t) dt, \quad z = ht$$

является обобщенной винтовой линией.

18.22. Доказать, что кривая $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ является обобщенной винтовой линией. Найти вектор, с которым касательные к линии образуют постоянный угол.

18.23. При каких значениях параметров a , b и c кривая $\mathbf{r}(t) = (at, bt^2, ct^3)$ является обобщенной винтовой?

Пусть задана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — натуральный параметр. Кривая $\rho = \dot{\mathbf{r}}(s)$ лежит на сфере единичного радиуса с центром в начале координат и называется *касательным сферическим образом* кривой. Аналогично определяются нормальный и бинормальный сферические образы. Так, например, из определения ясно, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда ее касательный сферический образ является дугой окружности.

18.24. Доказать, что бинормальный сферический образ обобщенной винтовой линии является окружностью.

18.25. Найти касательный, нормальный и бинормальный сферический образы винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

18.26. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром.

а) Доказать, что касательный сферический образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ вырождается в точку тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — прямая линия.

б) Доказать, что бинормальный сферический образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ вырождается в точку тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — плоская кривая.

в) Доказать, что нормальный сферический образ кривой не может быть точкой.

18.27. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, причем $k\kappa \neq 0$. Доказать, что касательная к касательному сферическому образу параллельна касательной к бинормальному сферическому образу в точках, соответствующих одному и тому же значению параметра s .

18.28. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром. Доказать, что если касательный сферический образ этой кривой лежит в плоскости, проходящей через начало координат, то кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — плоская.

18.29. Показать, что при инверсии плоскости соприкасающаяся окружность к данной кривой переходит в соприкасающуюся окружность образа этой кривой. При этом предполагается, что центр инверсии не совпадает с точкой соприкосновения кривой с окружностью.

Напомним, что *сферическая кривая* — это кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, для которой существуют такой постоянный вектор $\mathbf{m}$ и такое постоянное вещественное число R , что $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{m}| = R$.

18.30. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — регулярная кривая, и пусть существует точка $\mathbf{a}$, лежащая во всех нормальных плоскостях кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Доказать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — сферическая кривая.

18.31. Доказать, что

$$\mathbf{r}(t) = (-\cos 2t, -2\cos t, \sin 2t)$$

— сферическая кривая.

Указание. Показать, что точка $(-1, 0, 0)$ лежит в каждой нормальной плоскости рассматриваемой кривой. См. задачу 18.30.

18.32. Используя результаты предыдущих задач, доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные вещественные числа A и B , что

$$k \left(A \cos \int_0^s \kappa ds + B \sin \int_0^s \kappa ds \right) \equiv 1.$$

18.33. Кривые γ и γ^* называются *кривыми Бертрана*, если между точками этих кривых можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором главные нормали (как аффинные прямые) в соответствующих точках кривых совпадают (см. рис. 78). Это означает, что отрезок, соединяющий соответствующие точки кривых, является отрезком главной нормали для обеих кривых.

Доказать следующие свойства кривых Бертрана γ и γ^* :

а) расстояние между соответствующими точками кривых постоянно;

б) кривизна и кручение каждой из кривых Бертрана связаны соотношением

$$ak + b\kappa = 1,$$

где a и b — некоторые постоянные числа. При этом числа a и b для каждой кривой — свои;

в) касательные к кривым γ и γ^* в соответствующих точках образуют постоянный угол.

18.34. а) Доказать, что две произвольные концентрические окружности в плоскости образуют пару кривых Бертрана.

б) Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos t} - t\sqrt{1-t^2}, 1-t^2, 0 \right), \\ \mathbf{r}_2(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos t} - t\sqrt{1-t^2} - t, 1-t^2 + t\sqrt{1-t^2}, 0 \right). \end{aligned}$$

Доказать, что $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$ образуют пару кривых Бертрана.

18.35. Показать, что если кривизна и кручение кривой γ связаны линейной зависимостью $ak + b\kappa = 1$, где a и b — числа, отличные от 0, то существует кривая γ^* такая, что кривые γ и γ^* образуют пару кривых Бертрана.

18.36. Доказать, что для кривой с постоянной кривизной обязательно найдется вторая кривая, вместе с которой они образуют пару кривых Бертрана.

18.37. Доказать, что кривая $\mathbf{r}(t)$ является кривой Бертрана тогда и только тогда, когда ее можно задать векторным уравнением

$$\mathbf{r}(t) = a \int \mathbf{e}(t) dt + c \int \mathbf{e}(t) \times \mathbf{e}'(t) dt,$$

где $\mathbf{e}(t)$ — вектор-функция такая, что $|\mathbf{e}(t)| = 1$ и $|\mathbf{e}'(t)| = 1$.

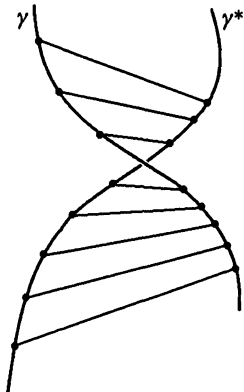


Рис. 78. Кривые Бертрана

18.38. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — регулярная гладкая кривая, причем $\kappa \neq 0$. Доказать, что $\mathbf{r}(t)$ является обычной винтовой линией тогда и только тогда, когда существуют по крайней мере две различные кривые, каждая из которых образует с $\mathbf{r}(t)$ пару кривых Бертрана.

18.39. Доказать, что если между точками двух различных кривых γ и γ^* установлено взаимно однозначное соответствие, при котором бинормали кривых в соответствующих точках совпадают (как аффинные прямые), то эти кривые плоские.

18.40. Пусть для гладкой кривой γ существует такая кривая γ^* , что главные нормали γ являются бинормальными к γ^* в соответствующих точках. Доказать, что кривизна и кручение кривой γ удовлетворяют соотношению $k = \lambda(k^2 + \kappa^2)$, где λ — некоторое постоянное число.

18.41. Пусть между точками кривых γ_1 и γ_2 можно установить такое соответствие, при котором касательные в соответствующих точках параллельны. Доказать, что отношения кручения к кривизне в соответствующих точках кривых равны по абсолютной величине. Также показать, что в соответствующих точках нормали (бинормали) параллельны.

18.42. Пусть между точками кривых γ_1 и γ_2 установлено такое соответствие, что в соответствующих точках касательные γ_1 параллельны бинормальным γ_2 . Доказать, что в соответствующих точках бинормали γ_1 параллельны касательным γ_2 и главные нормали обеих кривых параллельны между собой. Кроме того, показать, что их кривизны и абсолютные значения кручений обратно пропорциональны, т. е. $\frac{k_1}{k_2} = \frac{|\kappa_2|}{|\kappa_1|}$.

Овалом называется регулярная простая замкнутая плоская кривая с $k > 0$. *Вершина* регулярной плоской кривой — это точка, где кривизна k имеет относительный максимум или минимум.

Пусть $\mathbf{r}(s)$ — овал и P — точка на $\mathbf{r}(s)$. Тогда существует точка P' , где касательный вектор $\mathbf{v}$ к овалу противоположен касательному вектору в точке P , т. е. $\mathbf{v}(P') = -\mathbf{v}(P)$. Касательные в точках P и P' параллельны. Ясно, что такая точка P' единственна. Она называется *противоположной точкой* к точке P .

Шириной $w(s)$ овала в точке $P = \mathbf{r}(s)$ называется расстояние между касательными прямыми к овалу в противоположных точках в P и P' .

Говорят, что овал имеет *постоянную ширину*, если его ширина в точке P постоянна, т. е. не зависит от выбора P .

18.43. Доказать, что понятие вершины кривой не зависит от выбора параметризации.

18.44. Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — овал, доказать, что вектор $\mathbf{v}''$ параллелен вектору $\mathbf{v}$ по крайней мере в четырех точках.

18.45. Теорема о четырех вершинах. Доказать, что любой овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

18.46. Показать, что теорема о четырех вершинах (см. задачу 18.45) неверна, если опустить условие замкнутости.

18.47. Доказать, что если $\mathbf{r}(s)$ — овал постоянной ширины w , то его длина равна πw .

18.48. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — овал постоянной ширины. Доказать, что прямая, соединяющая пару противоположных точек P и P' овала, ортогональна к касательным в точках P и P' .

18.49. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — плоская кривая постоянной ширины. Показать, что сумма радиусов кривизны $1/k$ в противоположных точках является постоянной, не зависящей от выбора точек.

18.50. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — овал длины L , заданный в натуральном параметре. Обозначим через θ угол между горизонталью и касательным вектором $\mathbf{v}(s)$.

а) Доказать, что отображение $\theta: [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ является взаимно однозначным. Показать, что отображение $\mathbf{r} \circ \theta^{-1}$ является гладкой регулярной параметризацией овала.

б) Пусть $\rho(\theta)$ — параметризация овала такая, что $\mathbf{r}(s) = \rho(\theta(s))$ (см. предыдущий пункт). Доказать, что противоположная точка к $\mathbf{r}(s)$ есть $\mathbf{R}(s) = \rho(\theta(s) + \pi)$.

в) Доказать, что кривая $\mathbf{R}(s)$ регулярна.

18.51. Пусть $\rho(\theta)$ — овал, параметризованный углом θ , как в предыдущей задаче. Пусть $w(\theta)$ — ширина овала в точке $\rho(\theta)$. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} w d\theta = 2L,$$

где L — длина овала.

18.52. Пусть $\rho(\theta)$ — овал, параметризованный углом θ ; $k(\theta)$ и $w(\theta)$ соответственно его кривизна и ширина. Доказать, что

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{1}{k(\theta)} + \frac{1}{k(\theta + \pi)}.$$

18.53. Доказать, что кривизна кривой γ в точке M равна кривизне проекции γ на соприкасающуюся плоскость в точке M .

18.54. Выразить кривизну и кручение эвольвенты кривой через кривизну и кручение исходной кривой.

18.55. Доказать, что эвольвента линии откоса — плоская кривая. Определение линии откоса см. выше.

Подерой пространственной кривой по отношению к точке O называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к данной кривой.

18.56. Найти уравнение подеры линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

18.57. Найти подеру винтовой линии $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$ относительно начала координат. Доказать, что она лежит на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{h^2 z^2}{a^4} = 1.$$

18.58. Пусть кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет постоянную кривизну. Доказать, что соприкасающаяся сфера и окружность имеют один и тот же радиус.

18.59. Доказать, что радиус кривизны кривой на сфере радиуса R не может быть больше, чем R .

18.60. Доказать, что на сфере неплоская регулярная гладкая кривая не может иметь постоянную кривизну.

18.61. Найти общий вид кривизны сферической кривой с постоянным кручением.

18.62. Доказать, что кривая на сфере определяется заданием своей кривизны или кручения как функции длины дуги.

18.63. а) Доказать, что на сфере имеются кривые с постоянным ненулевым кручением.

б) Доказать, что на сфере нет замкнутой регулярной кривой со знакопостоянным кручением, отличным от 0.

в) Из предыдущих пунктов вытекает, что на сфере кривая с постоянным ненулевым кручением не может быть замкнутой. Вопрос — как «далеко» простирается сферическая кривая с постоянным кручением: обязательно ли она имеет конечную длину или же она бесконечной длины и обматывает сферу плотно?

18.64. Доказать, что если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в натуральном параметре s , то радиус-вектор центра соприкасающейся сферы задается формулой $\rho = \mathbf{r} + R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\kappa}\mathbf{b}$, а радиус соприкасающейся сферы равен

$$R_s = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\kappa^2}}.$$

18.65. Найти соприкасающуюся окружность кривой:

а) $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$ при $t = 0$;

б) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$ при $t = 1$.

18.66. Найти радиус соприкасающейся сферы кривой $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ в точке $t = 0$.

18.67. Найти радиус соприкасающейся сферы в произвольной точке следующих кривых:

а) $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$; б) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$;

в) $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

18.68. Доказать, что соприкасающаяся плоскость кривой пересекает соприкасающуюся сферу по соприкасающейся окружности в той же точке.

18.69. Найти геометрическое место центров соприкасающихся сфер винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht).$$

18.70. Доказать, что если радиус соприкасающейся сферы постоянен, то кривая либо лежит на сфере, либо имеет постоянную кривизну.

18.71. Пусть кривая γ_1 является геометрическим местом центров соприкасающихся сфер кривой γ_2 и наоборот. Доказать, что кривизны кривых γ_1 и γ_2 постоянны и равны, их соприкасающиеся плоскости взаимно перпендикулярны, а произведение кручений в соответствующих точках равно квадрату кривизны.

18.72. Доказать, что если в каждой своей точке кривая имеет со своей соприкасающейся плоскостью касание третьего порядка, то эта кривая плоская.

18.73. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, проходящие через данную точку плоской регулярной кривой γ . Показать, что среди них есть единственная, порядок касания которой с кривой γ равен 4. Определить тип и параметры этой кривой второго порядка через кривизну $k(s)$ кривой γ .

18.74. Из начала координат на плоскую кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ падает пучок лучей. Составить уравнение огибающей отраженных лучей (каустика).

18.75. Какой вид примет уравнение каустики плоской кривой относительно начала координат, если уравнение кривой задано в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в произвольном параметре?

18.76. На плоскую кривую, заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, падает пучок параллельных лучей, имеющих направление вектора $\mathbf{e}$ ($|\mathbf{e}| = 1$). Составить уравнение огибающей лучей, отраженных от данной кривой (каустика). Рассмотреть случаи, когда кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в произвольном параметре, а также, когда она задана уравнением $y = f(x)$.

18.77. Пусть $\mathbf{r}_1: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — сегмент кривой, параметризованной натуральным параметром, и $\mathbf{r}_2(s)$ — кривая

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + (a_0 - s)\mathbf{v}(s),$$

где $\mathbf{v}(s)$ — касательный вектор к $\mathbf{r}_1(s)$, $a_0 > a$ — некоторая константа. Показать, что единичная касательная к $\mathbf{r}_2(s)$ в каждой точке ортогональна к $\mathbf{v}(s)$.

Заметим, что кривая $\mathbf{r}_1$ является *эволютой* кривой $\mathbf{r}_2$, а кривая $\mathbf{r}_2$ является *эвольвентой* кривой $\mathbf{r}_1$.

18.78. Найти эволюты, эвольвенты и радиусы кривизны следующих кривых:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $x^2 - 2py = 0$;

г) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

д) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (в полярной системе координат);

е) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$;

ж) $r = \lambda \varphi$ (в полярной системе координат);

з) $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (в полярной системе координат);

и) $r^m = a^m \cos m\varphi$ (в полярной системе координат), где m — некоторая целая положительная постоянная;

к) $r = a \operatorname{ctg} \varphi$.

18.79. Найти эволюту логарифмической спирали $r = a^\varphi$. Доказать, что это — та же самая спираль, но повернутая вокруг начала координат на некоторый угол. Найти этот угол.

18.80. Расположенный на плоскости Oxy луч равномерно вращается в плоскости вокруг своей начальной точки O . Точка M на луче движется по лучу со скоростью, пропорциональной расстоянию OM . В этих условиях:

а) вывести уравнение траектории движения точки в полярных координатах с полюсом в O ;

б) показать, что на полученной кривой (называемой логарифмической спиралью Бернулли) касательные образуют с радиус-вектором кривой постоянный угол;

в) это свойство логарифмических спиралей является для них характеристическим;

г) спираль стремится к своему полюсу $r = 0$, имея конечную длину;

д) выписать натуральные уравнения логарифмической спирали;

е) радиус кривизны спирали пропорционален длине ее дуги, отсчитываемой от полюса, и это свойство тоже является характеристическим свойством логарифмических спиралей;

ж) эволюта данной логарифмической спирали конгруэнтна самой спирали;

з) указать значение параметра a , для которого эволюта спирали совпадает с ней самой, т. е. когда спираль является *огibaющей* своих нормалей;

и) каждая логарифмическая спираль является орбитой действия группы G линейных преобразований плоскости, которое состоит в преобразовании подобия с коэффициентом подобия $t > 0$

с последующим поворотом плоскости на угол $\alpha = \ln t$ (центр подобия и центр вращения — в общем полюсе спиралей);

к) для дуги спирали $r = e^\varphi$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, указать элемент группы G , который переводит ее в дугу этой же спирали, начинающуюся в точке с полярными координатами $\varphi = \pi + \varphi_1$, $r = e^{\pi + \varphi_1}$; будет ли образ дуги иметь такой же угловой разворот величиной $\varphi_2 - \varphi_1$, что и исходная дуга?

18.81. Найти особые точки эволюты эллипса. Сколько нормалей можно провести к эллипсу через произвольную точку плоскости?

18.82. Найти эвольвенту окружности.

18.83. Найти радиус кривизны кривой Штейнера

$$x = 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}, \quad y = 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}$$

в произвольной точке. Кривая Штейнера — это гипоциклоида, образованная в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса $3r$.

18.84. Доказать, что эволютой кривой Штейнера является кривая Штейнера, подобная исходной, причем коэффициент подобия равен 3. При этом эволюта повернута относительно исходной кривой на угол $\frac{\pi}{3}$.

18.85. Найти эволюту астроида. Доказать, что ее эволютой является астроида, подобная исходной с коэффициентом подобия, равным 2, и повернутая относительно исходной на угол $\frac{\pi}{2}$. Заметим, что астроида является гипоциклоидой, образованной в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса $4r$. Далее, свойства эволюты астроида, описанные в этой задаче, аналогичны свойствам эволюты кривой Штейнера (см. предыдущую задачу).

18.86. Исследовать эволюты гипоциклоид, образованных в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса R для различных отношений R/r (см. задачи 18.84 и 18.85).

18.87. Найти эволюту листа Декарта

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

18.88. Найти кривизну плоской кривой, у которой кривизна равна кривизне ее эволюты (в соответствующих точках).

18.89. По натуральному уравнению кривой $R = \varphi(s)$ составить натуральное уравнение эволюты.

18.90. Написать натуральное уравнение эвольвенты по натуральному уравнению кривой.

18.91. Доказать следующие утверждения:

- а) касательные к эволюте являются нормальными к исходной кривой;
- б) любая ортогональная кривая семейства касательных к кривой является эвольвентой исходной кривой;
- в) длина дуги эволюты равна абсолютному значению разности радиусов кривизны в соответствующих точках исходной кривой;
- г) радиус кривизны эволюты равен

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{ds},$$

где R — радиус кривизны самой кривой.

18.92. Пусть неплоская кривая имеет постоянную отличную от нуля кривизну, и пусть ее кручение отлично от нуля. Рассмотрим множество центров кривизн этой кривой. Полученную кривую обозначим γ^* . Доказать, что кривизна кривой γ^* постоянна. Найти кручение γ^* .

18.93. Пусть гладкая кривая C задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где функция $\mathbf{r}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть в некоторой точке M производные $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ некомпланарны. Доказать, что соприкасающаяся плоскость кривой C в точке M пересекает кривую C .

18.94. Пусть гладкая кривая C задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где функция $\mathbf{r}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть в некоторой точке $M(t)$ вектор $\mathbf{r}'$ не параллелен вектору $\mathbf{r}''$. Вычислить предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d}{|\Delta t|^3},$$

где d — расстояние от точки $M(t + \Delta t)$ до соприкасающейся плоскости кривой C в точке $M(t)$. Рассмотреть частный случай, когда кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в натуральном параметре.

18.95. Доказать, что кручение асимптотической линии на поверхности с $K < 0$ равно $\pm \sqrt{-K}$.

18.96. Пусть кривизна поверхности вращения строго отрицательна. Существуют ли на ней замкнутые асимптотические линии?

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in [0, a]$, — плоская кусочно-регулярная класса C^2 кривая, параметризованная натуральным параметром. Индексом (числом) вращения $i_{\mathbf{r}(s)}$ этой кривой называется число

$$i_{\mathbf{r}(s)} = \frac{\int_0^a k ds + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \theta_i}{2\pi},$$

где k — кривизна кривой, s_i ($0 \leq i \leq n-1$) — точки нерегулярности, $\mathbf{v}^-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \mathbf{v}(s)$, $\mathbf{v}^+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \mathbf{v}(s)$, $\Delta\theta_i$ — угол между векторами $\mathbf{v}^-(s_i)$ и $\mathbf{v}^+(s_i)$ (см. рис. 79).

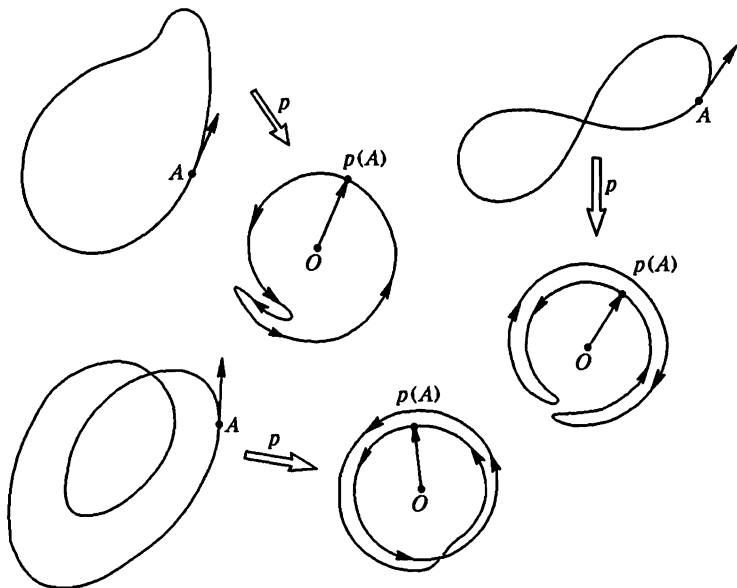


Рис. 79. Индекс вращения кривой

18.97. Вычислить индексы вращения кривых, заданных следующими уравнениями:

- а) $\mathbf{r}(t) = (a + \rho \cos t, \rho \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|a| < \rho$;
- б) $\mathbf{r}(t) = (a + \rho \cos t, \rho \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 < \rho < |a|$;
- в) $\mathbf{r}(t) = (\rho \cos 2t, -\rho \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\rho > 0$;
- г) $\mathbf{r}(t) = ((1/2) \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- д) $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, -\sin t)$, $0 \leq t \leq 6\pi$;
- е) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin^2 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18.98. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая кривая (не обязательно простая, т. е. допускаются самопересечения). Доказать, что

$$l^2 \geq 4\pi \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x) ds,$$

где функция $\omega(x)$ есть число вращений кривой γ вокруг точки $x \in \mathbb{R}^2$.

18.99. Доказать, что если $\mathbf{r}(s)$ — простая замкнутая регулярная плоская кривая, то касательный круговой образ $v: [0, L] \rightarrow S^1$ этой кривой является отображением «на».

18.100. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — регулярная замкнутая кривая, то ее касательный сферический образ не может лежать ни в какой открытой полусфере.

18.101. Доказать, что касательный сферический образ регулярной замкнутой кривой не может лежать ни в какой замкнутой полусфере, за исключением случая, когда он является большой окружностью, ограничивающей полусферу.

18.102. Пусть γ — гладкая замкнутая кривая на единичной сфере S^2 . Доказать, что она содержится в открытой полусфере, если:

а) длина l кривой γ строго меньше 2π ;

б) длина l кривой γ равна 2π , но кривая не является объединением двух больших полуокружностей.

Тотальным кручением регулярной пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ длины L , параметризованной натуральным параметром, называется

число $\int_0^L \kappa ds$. Заметим, что тотальные кривизна и кручение кривой

в $\mathbb{R}^3$, определенные выше для натурального параметра s вдоль кривой, можно вычислять в произвольном параметре $t = t(s)$. При этом соответствующее выражение, например, для кручения имеет вид

$$\int_a^b \kappa(t) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt,$$

где $a = t(0)$, $b = t(L)$.

18.103. Используя результаты задач 18.100–18.102, доказать следующее утверждение: тотальная кривизна замкнутой пространственной кривой γ не меньше 2π , причем она равна 2π тогда и только тогда, когда γ — плоская выпуклая кривая (теорема Фенхеля).

18.104. Пусть γ — пространственная замкнутая кривая. Предположим, что $0 \leq k \leq 1/R$ для некоторого вещественного числа $R > 0$. Доказать, что длина l кривой γ удовлетворяет неравенству $l \geq 2\pi R$.

18.105. Вычислить касательный сферический образ для эллипса

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Что можно сказать об этом образе с учетом теоремы Фенхеля?

Рассмотрим стандартную единичную двумерную сферу S^2 в $\mathbb{R}^3$. Множество ориентированных больших окружностей сферы находится во взаимно однозначном соответствии с точками самой сферы S^2 . Это соответствие устанавливается следующим образом. Каждой большой окружности нужно сопоставить конец единичной положительной нормали, которая перпендикулярна плоскости окружности и выходит из начала координат. При этом нормаль называется положительной, если именно вдоль нее перемещается правый штопор, вращаемый в направлении, указанном на большой окружности (см. рис. 80).

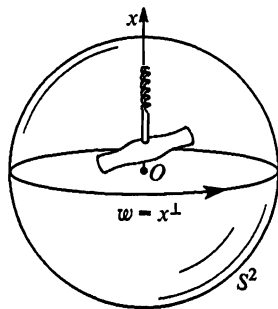


Рис. 80

Мерой множества ориентированных больших окружностей будем называть меру соответствующего множества точек S^2 .

Если $x \in S^2$, то через $w = x^\perp$ обозначается соответствующая точке x большая ориентированная окружность. Для регулярной кривой γ на сфере через $n_\gamma(x)$ обозначается число точек в $\gamma \cap x^\perp$ (которое может быть бесконечно). Заметим, что число $n_\gamma(x)$ не зависит от параметризации кривой γ .

18.106. Пусть γ — регулярная кривая длины l на сфере S^2 . Доказать, что мера множества ориентированных больших окружностей, которые пересекают γ (с учетом кратностей), равна $4l$.

Другими словами, $\int_{S^2} n_\gamma(w) d\sigma = 4l$ (формула Крофтона).

Замкнутая простая кривая γ в $\mathbb{R}^3$ называется *незаузеленной*, если существует взаимно-однозначная непрерывная функция $g: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (D^2 — единичный диск), которая отображает границу S^1 диска D^2 на образ кривой γ . В противном случае кривая называется *заузеленной*.

18.107. Доказать, что если γ — простая заузеленная регулярная кривая, то ее тотальная кривизна больше или равна 4π .

18.108. Используя формулу Крофтона, доказать, что для любой замкнутой пространственной регулярной кривой ее тотальная кривизна $\int_\gamma k(s) ds$ не меньше 2π (частный случай теоремы Фенхеля).

18.109. Пусть для замкнутой гладкой регулярной кривой γ сферическая индикатриса ее бинормалей не имеет самопересечений. Доказать, что тогда для ориентированной (см. задачу 4.20) кривизны k кривой γ выполняется неравенство

$$-2\pi < \int_0^l k(s) ds < 2\pi,$$

где l — длина L . Вывести отсюда, что кривизна кривой L обязана изменять свой знак.

18.110. Доказать, что для любого вещественного числа r существует такая замкнутая кривая γ , что ее тотальное кручение

$$\int_{\gamma} \kappa ds \text{ равно } r.$$

18.111. Доказать, что для замкнутой кривой γ , заданной в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и расположенной на сфере S^2 , ее тотальное кручение

$$\int_{\gamma} \kappa(s) ds \text{ равно нулю.}$$

18.112. Пусть M — такая поверхность в $\mathbb{R}^3$, что $\int_{\gamma} \kappa ds = 0$ для

всех замкнутых кривых γ , расположенных на M . Доказать, что M есть часть плоскости или сферы.

18.113. Доказать, что для любой замкнутой сферической кривой γ интеграл $\int_{\gamma} \frac{\kappa}{k} ds$ равен нулю.

18.114. Найти геодезическую кривизну линии $u = \text{const}$ на поверхности $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, av)$.

18.115. Найти геодезическую кривизну линии $ax + by + c = 0$ в верхней полуплоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

18.116. Доказать, что если каждая нормаль плоской замкнутой регулярной кривой делит ее на две равные части, то эта кривая — окружность.

18.117. Доказать следующее утверждение: периодическая с периодом S функция $k(s)$ является функцией кривизны некоторой плоской замкнутой кривой тогда и только тогда, когда выполняются следующие два равенства:

$$\int_0^S \cos \left(\int_0^s k(t) dt + C \right) ds = 0,$$

$$\int_0^S \sin \left(\int_0^s k(t) dt + C \right) ds = 0,$$

где C — некоторая константа.

Опорной функцией $h(t)$ плоской кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется расстояние от фиксированной точки O до переменной касательной к кривой в точке $\mathbf{r}(t)$.

18.118. Пусть дана плоская выпуклая кривая. Тогда в качестве параметра на кривой можно взять угол α , который составляет касательная в точке кривой с фиксированным направлением на плоскости. Доказать, что для радиуса кривизны этой кривой имеет место формула

$$R(\alpha) = h(\alpha) + h''(\alpha),$$

где $h(\alpha)$ — опорная функция кривой.

18.119. Доказать, что площадь области, ограниченной плоской выпуклой регулярной замкнутой кривой γ , равна $\frac{1}{2} \int_{\gamma} h(t) dt$, где

$h(t)$ — опорная функция данной кривой.

18.120. Пусть замкнутая плоская выпуклая регулярная кривая длины L ограничивает область площади S . Пусть R — радиус описанной окружности, а r — вписанной. Доказать следующие неравенства:

а) $L^2 - 4\pi S \geq 0$;

б) $L^2 - 4\pi S \geq \pi^2(R - r)^2$;

в) $L^2 - 4\pi S \geq S^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^2$;

г) $L^2 - 4\pi S \geq L^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2$;

д) $\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \leq r \leq R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}$,

причем равенства достигаются только в том случае, если кривая является окружностью.

18.121. Доказать, что овал, имеющий четыре вершины, пересекается с произвольной окружностью самое большее в четырех точках.

18.122. Доказать, что если овал пересекается с некоторой окружностью в $2n$ точках, то у него по меньшей мере $2n$ вершин.

18.123. Пусть γ — пространственная кривая постоянной кривизны, а кривая γ^* — множество ее центров кривизны. Доказать, что кривая γ^* имеет ту же кривизну, что и γ . Доказать, что кривая γ является множеством центров кривизны кривой γ^* .

18.124. Доказать, что соприкасающаяся сфера имеет постоянный радиус тогда и только тогда, когда кривая либо лежит на сфере, либо имеет постоянную кривизну.

18.125. Доказать, что пространственная кривая, заданная в следующем виде:

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\kappa} \int_0^s \left(\mathbf{b}(t) \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}(t) \right) dt,$$

имеет постоянное кручение κ . Здесь $\mathbf{b}(t)$ — произвольная кривая на единичной сфере, а κ — произвольное ненулевое вещественное число.

И обратно, любая пространственная кривая с постоянным отличным от нуля кручением κ может быть представлена в таком виде для подходящей кривой $\mathbf{b}(t)$.

18.126. Доказать, что всякая кривая непостоянной кривизны, для которой выполняется соотношение

$$\left(\frac{d(1/k)}{ds} \right)^2 = \kappa^2 \left(R^2 - \frac{1}{k^2} \right),$$

лежит на сфере радиуса R .

18.127. Доказать, что если кривая лежит на сфере, то ее кривизна и кручение удовлетворяют соотношению

$$\frac{\kappa}{k} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} \right) \right) = 0.$$

И обратно, если кривизна и кручение некоторой кривой удовлетворяют этому соотношению, что кривая лежит на сфере.

18.128. Если кривизна и кручение пространственной кривой не обращаются в нуль, то кривая сферическая тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa k^2} \frac{d}{ds} k \right).$$

Если положить $\rho = \frac{1}{k}$, $\sigma = \int \kappa ds$, то уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \rho}{d\sigma^2} + \rho = 0.$$

18.129. Показать, что для кривой общего положения, расположенной на сфере, соотношения предыдущих трех задач равносильны (см. также задачу 4.52).

18.130. Доказать, что для произвольного числа A существует бигулярная замкнутая кривая такая, что $\int_{\gamma} \kappa ds \geq A$. Напомним, что кривая называется бигулярной, если $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$ и $\ddot{\mathbf{r}} \neq 0$.

18.131. Если плоская кривая вместе с хордой, стягивающей ее концы, ограничивает выпуклую область, то при скручивании кривой, т. е. при замене ее на пространственную кривую с той же кривизной, длина хорды увеличивается.

18.132. Пусть γ — замкнутая регулярная гладкая кривая. Доказать, что множество направлений, по которым касательные прямые касаются кривой в точках с нулевой кривизной, имеет нулевую угловую меру. Доказать, что направлений, по которым касательные касаются кривой более чем в одной точке с ненулевой кривизной, может быть только конечное число.

18.133. Доказать теорему Якоби: если сферическая индикатриса главных нормалей замкнутой кривой не имеет самопересечений, то она делит сферу на две равновеликие части.

§ 19. Риманова метрика (дополнительные задачи)

19.1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике на плоскости Лобачевского перпендикуляр, опущенный из середины гипотенузы на один из катетов, меньше половины другого катета.

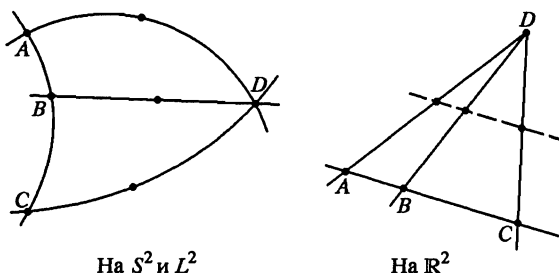


Рис. 81

19.2. Пусть три точки A, B, C принадлежат одной прямой, а точка D ей не принадлежит. Докажите, что середины отрезков DA, DB и DC не лежат на одной прямой:

а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского.

Напомним, что на евклидовой плоскости этот факт неверен (см. рис. 81).

19.3. Рассмотрим плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре на открытом круге радиуса 1 с метрикой

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Рассмотрим диаметр круга, задаваемый уравнением $v = 0$. Как известно, он является прямой плоскости Лобачевского. Найти эквидистанту этой прямой.

19.4. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площади треугольников, ограниченных прямыми:

- а) $x = -a$, $x = a$, $x^2 + y^2 = a^2$;
- б) $x = a$, $x = 2a$, $(x - a)^2 + y^2 = a^2$;
- в) $x = 0$, $x = a/2$, $x^2 + y^2 = 4a^2$;
- г) $x = 0$, $x = a/2$, $x^2 + y^2 = a^2$;
- д) $x = -a$, $x = a$, $x^2 + y^2 = 4a^2$;
- е) $x = -a$, $x = a$, $x^2 + y^2 = 2a^2$;
- ж) $x = a$, $x = b$, $(x - a)^2 + y^2 = 2b^2$.

19.5. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь треугольника с вершинами $(-2, 2)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$.

19.6. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = a/2$, $y = a$.

19.7. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $(0, a\sqrt{12})$, $(0, 2a)$, (a, a) , $(a, a\sqrt{3})$.

19.8. Какой области в круге с метрикой Лобачевского (модели Пуанкаре) изометрична псевдосфера Бельтрами с разрезом по меридиану? Какой области изометрично универсальное накрытие над псевдосферой Бельтрами (без разреза)?

Пояснение. После разрезания по меридиану псевдосфера Бельтрами оказывается изометрична области на плоскости Лобачевского, ограниченной так называемым *орциклом* (см. рис. 82).

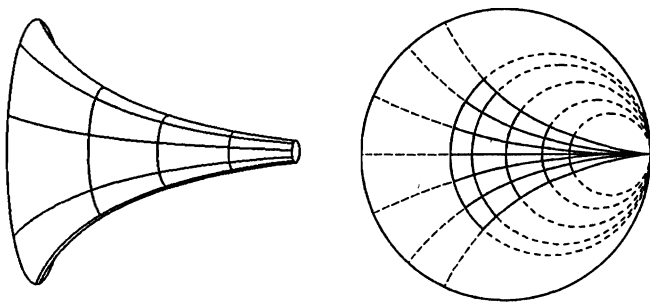


Рис. 82

19.9. Рассмотрим G — множество изометрий вида $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости, имеющих ровно одну заданную неподвижную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Найти орбиту произвольной точки плоскости Лобачевского под действием G .

19.10. Рассмотрим G — множество изометрий вида $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости, имеющих ровно две заданные неподвижные точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Найти орбиту произвольной точки плоскости Лобачевского под действием G .

19.11. Найти дробно-линейное преобразование $w = \frac{az+b}{cz+d}$, при котором:

а) верхняя полуплоскость отображается на себя, причем $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$;

б) верхняя полуплоскость отображается на единичный круг, причем $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$;

в) верхняя полуплоскость отображается на единичный круг, причем $w(-1) = 1$, $w(0) = i$, $w(1) = -1$;

г) единичный круг отображается на нижнюю полуплоскость, причем $w(1) = 1$, $w(i) = 0$, $w(-i) = -1$;

д) единичный круг отображается на верхнюю полуплоскость, причем $w(-1) = \infty$, $w(1) = 0$, $w(i) = 1$;

е) единичный круг отображается на себя, причем $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = \pi/2$.

19.12. Рассмотрим на плоскости Лобачевского треугольник ABC , около которого описана окружность, причем сторона AB является ее диаметром. Доказать, что в треугольнике ABC выполняется равенство $\angle C = \angle A + \angle B$.

19.13. Рассмотрим на плоскости Лобачевского треугольник со сторонами a , b и c . Пусть r — радиус вписанной окружности, l_a и m_a — соответственно биссектриса и медиана, проведенные к стороне a , противолежащий к ней угол — α . Доказать равенства:

$$\text{а) } \operatorname{th} l_a = \frac{2 \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos(\alpha/2)}{\operatorname{sh}(b+c)};$$

$$\text{б) } \operatorname{ch} m_a = \frac{\operatorname{ch}[(b+c)/2] \operatorname{ch}[(b-c)/2]}{\operatorname{ch}(a/2)};$$

$$\text{в) } \operatorname{th}^2 r = \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} p}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

19.14. Рассмотрим преобразование единичного круга с центром в начале координат, заданное формулой

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2+1}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2+1}} \right).$$

а) Доказать, что при этом единичный круг отображается в себя диффеоморфно.

б) Вычислить метрику, в которую переходит метрика плоскости Лобачевского при указанном преобразовании.

в) Найти символы Кристоффеля метрики пункта б).

г) Вычислить параллельный перенос вдоль хорд единичного круга в метрике пункта б).

д) Найти геодезические метрики пункта б).

19.15. В единичном круге $x^2 + y^2 < 1$ рассмотрим метрику с матрицей

$$\frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Показать, что преобразование

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

является движением этой метрики.

19.16. Доказать, что угол φ между окружностями на единичной сфере S^2 с центром в начале координат, заданными плоскостями $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$, $i = 1, 2$, вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d_2^2}}.$$

19.17. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей в $\mathbb{R}^3$:

а) $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \cos u, \frac{b}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \sin u, \frac{c}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \right)$ (однополостный гиперболоид);

б) $\mathbf{r}(u, v) = \left(a \frac{uv + 1}{v + u}, b \frac{v - u}{v + u}, c \frac{uv - 1}{v + u} \right)$ (однополостный гиперболоид);

в) $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \cos u, \frac{b}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \sin u, \frac{c}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right)$ (двуполостный гиперболоид);

г) $\mathbf{r}(u, v) = \left(v\sqrt{p} \cos u, v\sqrt{q} \sin u, \frac{v^2}{2} \right)$ (эллиптический параболоид);

д) $\mathbf{r}(u, v) = ((u + v)\sqrt{p}, (u - v)\sqrt{q}, 2uv)$ (гиперболический параболоид);

е) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v)$ (эллиптический цилиндр);

ж) $r(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \frac{b}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right), v \right)$ (гиперболический цилиндр).

В следующих задачах 19.18 и 19.19 доказать, что рассматриваемые поверхности являются поверхностями второго порядка (иногда их называют квадриками), и установить их тип.

19.18. Найдите первую квадратичную форму поверхности

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u, \quad a, c = \operatorname{const}.$$

19.19. Найдите первую квадратичную форму поверхности

$$x = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{ch} u, \quad a, c = \operatorname{const}.$$

19.20. Доказать, что при соответствующем выборе криволинейных координат на поверхности вращения ее первая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u) dv^2.$$

19.21. Привести первую квадратичную форму сферы, тора, катеноида и псевдосферы Бельтрами к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u) dv^2.$$

19.22. Система криволинейных координат на поверхности называется *изотермической* (иногда ее называют *конформной*), если первая квадратичная форма поверхности в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Найти изотермические координаты на псевдосфере Бельтрами.

19.23. Поверхностью *Лиувилля* называется поверхность, первая квадратичная форма которой может быть приведена к виду

$$ds^2 = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2).$$

Доказать, что поверхность, локально изометричная поверхности вращения, есть поверхность Лиувилля.

19.24. Доказать, что любую поверхность вращения можно локально конформно отобразить на плоскость.

19.25. Доказать, что метрика $ds^2 = dx^2 + f(x) dy^2$, $0 < f(x) < \infty$, приводится к виду

$$ds^2 = g(u, v)(du^2 + dv^2)$$

(изотермические координаты).

19.26. Для поверхности вращения

$$x = f(r) \cos \varphi, \quad y = f(r) \sin \varphi, \quad z = g(r),$$

где $u \in (a, b)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, найти изотермические координаты (u, v) , в которых $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ является функцией от r . В частности, найти для катеноида

$$x = \operatorname{ch} z \cos \varphi, \quad y = \operatorname{ch} z \sin \varphi, \quad z = z$$

представление его радиус-вектора в таких изотермических координатах.

19.27. На плоскости с координатами x, y задана матрично-значная функция $F(x, y)$. Проверить, что функция F определяет риманову метрику. Найти координаты, в которых метрика имеет вид $du^2 + G(u) dv^2$:

$$\text{а) } F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 & 4xy \\ 4xy & 1 + 2y^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 16x^2(x^2 + y^2)^2 & 16xy(x^2 + y^2)^2 \\ 16xy(x^2 + y^2)^2 & 1 + 16y^2(x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) в единичном круге } F(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } F(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2 + y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2 + y^2)^4 \end{pmatrix}.$$

19.28. Доказать, что на всякой вещественно-аналитической поверхности M^2 можно ввести локальные изотермические координаты.

19.29. Доказать, что любое конформное отображение сферы на плоскость является композицией некоторого движения сферы по себе и стереографической проекции сферы на эту плоскость (см. рис. 83).

19.30. Проекция Меркатора поверхности земного шара определяется следующим образом. На карте вводятся прямоугольные координаты (x, y) , такие что любой прямой на карте соответствует линия постоянного азимута (фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара (см. рис. 84).

а) Доказать, что в проекции Меркатора точке на поверхности земного шара со сферическими координатами (θ, φ) на карте соответствует точка с координатами $x = \varphi$, $y = \ln \operatorname{ctg} \theta/2$.

б) Записать метрику сферы в координатах x, y проекции Меркатора.

19.31. Найти метрику в двумерном пространстве скоростей в специальной теории относительности.

19.32. В предыдущей задаче произвести замену координат $v \rightarrow \operatorname{th} \chi$ (v — скорость движущейся точки).

19.33. Записать метрику предыдущей задачи в полярных координатах единичного круга.

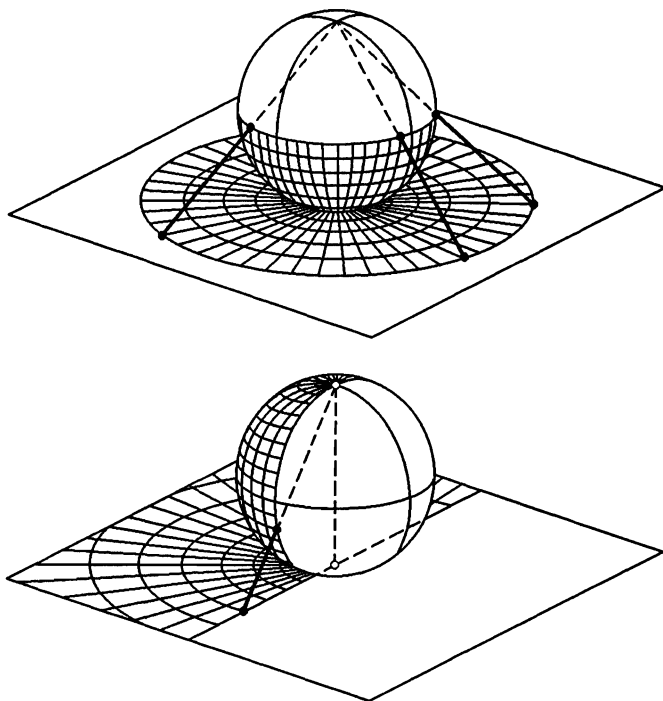


Рис. 83. Стереографическая проекция сферы на плоскости

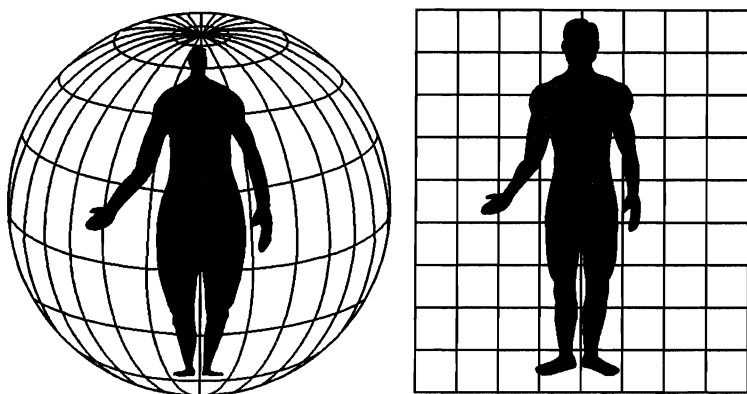


Рис. 84. Проекция Меркатора

19.34. Доказать, что в классе поверхностей 2-го порядка любая поверхность 2-го порядка ненулевой кривизны однозначно определена своей метрикой, даже локально. Говорят, что поверхность S определена однозначно своей метрикой, если любая изометричная ей поверхность получается из S движением с возможным добавлением зеркального отражения.

19.35. Пусть на плоскости заданы две изометричные области. Показать, что они конгруэнтны.

19.36. Доказать, что две изометричные области на сфере всегда могут быть получены одна из другой вращением пространства, т. е. они конгруэнтны.

19.37. Пусть на цилиндрической поверхности заданы две изометричные области. Будут ли они обязательно конгруэнтными в $\mathbb{R}^3$? Указать условия, при выполнении которых любые две изометричные области на цилиндрической поверхности являются конгруэнтными в $\mathbb{R}^3$.

19.38. Рассмотрим на псевдосфере Бельтрами всевозможные круги одного и того же внутреннего радиуса r . Выяснить, какие из этих кругов конгруэнтны в $\mathbb{R}^3$, а какие нет.

19.39. Изометричны ли метрики $ds^2 = \frac{a}{r^2}(dx^2 + dy^2)$ и $ds^2 = \frac{b}{r^2}(dx^2 + dy^2)$, $a \neq b$, $0 < r^2 = x^2 + y^2 < \infty$? Найти реализацию каждой из них в $\mathbb{R}^3$ на поверхности цилиндра.

19.40. Показать, что любая поверхность трехмерного пространства изгибается с «выходом» в четырехмерное пространство.

19.41. Доказать, что две полные цилиндрические поверхности, гомеоморфные кольцу, изометричны тогда и только тогда, когда их перпендикулярные образующим плоские сечения имеют одинаковую длину.

19.42. Построить изометрическое отображение области $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$ на цилиндре $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ на какую-либо изометричную область на поверхности прямого кругового конуса с известными параметрами.

19.43. Дать пример полной евклидовой метрики в открытом единичном круге.

19.44. Доказать, что компактная полная локально выпуклая поверхность является выпуклой в целом.

19.45. Доказать, что односвязное полное локально евклидовое двумерное многообразие изометрично в целом евклидовой плоскости со стандартной метрикой

$$dx^2 + dy^2.$$

19.46. Доказать, что в круге нельзя задать полную евклидову метрику в изотермическом виде.

19.47. В некоторой области изменения переменных (x, y) дана метрика

$$ds^2 = E(x) dx^2 + G(y) dy^2$$

с непрерывными коэффициентами $E(x) > 0$, $G(y) > 0$. Доказать, что:

- а) эта метрика является локально евклидовой;
- б) если эта метрика задана в замкнутой односвязной области, то ее можно непрерывно продолжить на внутренность выпуклой оболочки области;
- в) если эта метрика задана в многосвязной области, то ее можно непрерывно продолжить на область, ограниченную выпуклой оболочкой внешней границы области;
- г) эта метрика в целом является евклидовой, т.е. область ее задания в целом можно изометрически отобразить в евклидову плоскость со стандартной метрикой $du^2 + dv^2$.

При каких условиях на область и коэффициенты эта метрика является полной?

19.48. Дана метрика

$$ds^2 = \frac{1}{(1-r)^p} dr^2 + \frac{r^2}{(1-r)^q} d\varphi^2.$$

а) Считая r и φ полярными координатами на плоскости x, y , показать, что эта метрика является невырожденной во всем круге $D: x^2 + y^2 = r^2 < 1$.

б) Найти все геодезические линии, выходящие из начала координат, и определить значения p и q , при которых эта метрика является полной в круге D .

в) Убедиться, что эта метрика является локально евклидовой только при $p = 4$, $q = 2$ и найти при этих p и q ее изометрическое отображение на евклидову плоскость со стандартной метрикой.

19.49. Поверхности с радиус-вектором $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = hv + f(u)$ называются общими винтовыми поверхностями.

а) Проверить, что на участке, где v изменяется в некотором интервале длины 2π , сечения общей винтовой поверхности плоскостями, проходящими через ось Oz , состоят из кривых, каждая из которых конгруэнтна кривой $z = f(x)$, $y = 0$.

б) Убедиться, что при $h = 0$ общая винтовая поверхность превращается в поверхность вращения и что при $f(u) = \text{const}$ общая винтовая поверхность превращается в геликоид.

в) Доказать теорему Бюра: метрика общей винтовой поверхности изометрична метрике вида

$$ds^2 = dU^2 + G(U) d\varphi^2,$$

реализуемой на поверхности вращения, т.е. любая общая винтовая поверхность локально изометрична некоторой поверхности

вращения, и обратно, любая поверхность вращения в окрестности любой своей точки, кроме полюса, локально изометрична некоторой общей винтовой поверхности.

г) Теореме Бюра можно уточнить: общая винтовая поверхность локально допускает наложение на некоторую поверхность вращения, т. е. она непрерывно деформируется с сохранением метрики или, по-другому, изгибается на поверхность вращения.

д) Общая винтовая поверхность S допускает *изгибание скольжения по себе*, а именно, существует деформация $S \rightarrow S_t$, выражаемая через радиус-векторы по закону $S_t: \mathbf{r}(u, v; t) = \mathbf{r}(u, v + t)$, которая переводит точки поверхности S в другие точки той же поверхности с сохранением метрики. При этом расстояния между точками на S равны расстояниям между их образами на S_t . Покажите, что это изгибание является *тривиальным*, т. е. оно получается движением всей поверхности в пространстве как твердого тела.

19.50. Доказать, что если поверхность допускает изгибание скольжения по себе, то ее метрика изометрична метрике вращения.

19.51. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ представлен в параметрическом виде

$$x = uf(v) \cos v, \quad y = uf(v) \sin v, \quad z = g(u),$$

где

$$f(v) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}, \quad g(u) = c\sqrt{1 - u^2}.$$

Подобрать функцию $\psi(v)$ таким образом, чтобы деформация с параметром t

$$x = u\sqrt{f^2 - t^2} \cos \psi, \quad y = u\sqrt{f^2 - t^2} \sin \psi, \quad z = \int \sqrt{g'^2 + t} du$$

была изгибанием некоторой части эллипсоида. На какую часть эллипсоида распространяется эта деформация при малых t ?

§ 20. Гауссова и средняя кривизны

В задачах 20.1–20.4 требуется найти вторую квадратичную форму поверхностей.

20.1. а) $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u)$;

б) $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u)$.

20.2. $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$.

20.3. $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$.

20.4. $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, ku)$.

20.5. Показать, что главные кривизны прямого коноида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(v),$$

где $f(v)$ — произвольная гладкая функция с отличной от нуля производной, имеют разные знаки.

20.6. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности, образованной бинормальными данной кривой.

20.7. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности, образованной главными нормальными данной кривой.

20.8. Проверить, что для тора вращения интегральная гауссова кривизна равна нулю, а интегральная средняя кривизна отлична от нуля, т. е.

$$\iint K dS = 0, \quad \iint H dS \neq 0.$$

Заметим, что равенство $\iint K dS = 0$ выполняется для любого тора.

20.9. Найти линии кривизны на поверхности

$$x = \frac{a}{2}(u - v), \quad y = \frac{b}{2}(u + v), \quad z = \frac{uv}{2}.$$

20.10. Найти линии кривизны геликоида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

20.11. Доказать, что при локально изометричном наложении геликоида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

на катеноид

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \quad y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, \\ z = a \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right)$$

линии кривизны переходят в асимптотические линии.

20.12. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(s, u) = \boldsymbol{\rho}(s) + f(u)\mathbf{a} + g(u)(\mathbf{v}(s) \times \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{v}(s) = \dot{\boldsymbol{\rho}}(s)$, $|\mathbf{v}(s)| = 1$, $\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{a} \rangle = 0$, $|\mathbf{a}| = 1$, $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

20.13. Плоская кривая γ задана уравнением $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$, где s — натуральный параметр; $k = k(s)$ — ее кривизна, $0 < k < 1/a$; $\mathbf{n}$ — главная нормаль к γ , $\mathbf{b}$ — орт нормали к плоскости кривой γ . Поверхность S задана уравнением

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \boldsymbol{\rho}(s) + a\mathbf{n}(s) \cos \varphi + a\mathbf{b} \sin \varphi.$$

- а) Проверить, что поверхность S регулярна.
- б) Найти гауссову кривизну поверхности S .
- в) Найти среднюю кривизну поверхности S .
- г) Найти линии кривизны поверхности S .

20.14. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \boldsymbol{\rho}(s) + a\mathbf{n}(s) \cos \varphi + a\mathbf{b}(s) \sin \varphi,$$

здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ — орты главной нормали и бинормали кривой $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$, имеющей натуральный параметр s , кривизну $k(s) < 1/a$ и кручение $\kappa(s)$.

20.15. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right), v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right), 2uv \right).$$

20.16. Предположим, что первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Доказать, что

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right) \right\}.$$

20.17. Найти выражение для гауссовой кривизны поверхности, отнесенной к таким координатам, в которых первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

20.18. Найти гауссову кривизну поверхности, если ее первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = B(u, v)(du^2 + dv^2).$$

20.19. Найти кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2.$$

20.20. Доказать, что гауссова кривизна K двумерной поверхности выражается только через метрику, т.е. через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Отсюда следует, что гауссова кривизна не меняется при изометриях поверхности.

20.21. Можно ли подобрать λ , φ , ψ так, чтобы поверхность

$$\mathbf{r}(u, \theta) = (\varphi(u) \cos \lambda \theta, \varphi(u) \sin \lambda \theta, \psi(u))$$

имела гауссову кривизну 1?

- а) Найти пример, отличный от сферы.
- б) Описать все такие поверхности (см. задачу 6.4).

20.22. Можно ли подобрать λ, φ, ψ так, чтобы поверхность

$$r(u, \theta) = (\varphi(u) \cos \lambda \theta, \varphi(u) \sin \lambda \theta, \psi(u))$$

имела гауссову кривизну -1 ? Найти пример, отличный от псевдосферы.

20.23. Доказать, что любая поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны относится к одному из следующих трех типов:

- 1) катушка Миндинга (выглядит как китайские фонарики);
- 2) волчок Миндинга, т.е. поверхность с острием на оси вращения;
- 3) псевдосфера Бельтрами.

Графики образующих, соответствующих этим трем типам поверхностей, приведены на рис. 85, 86.

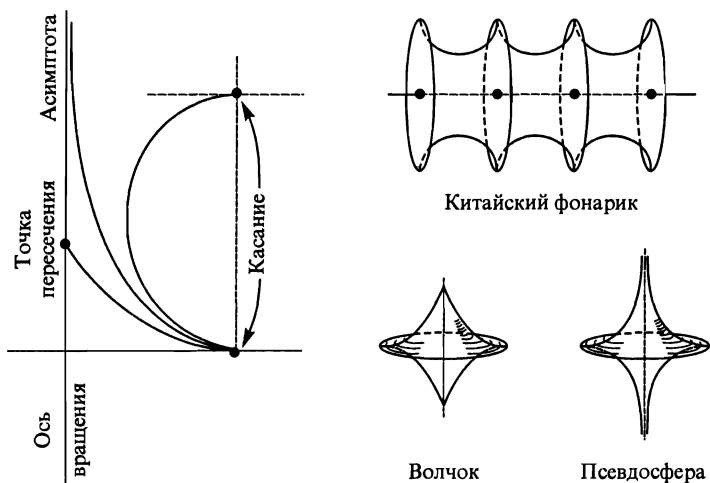


Рис. 85

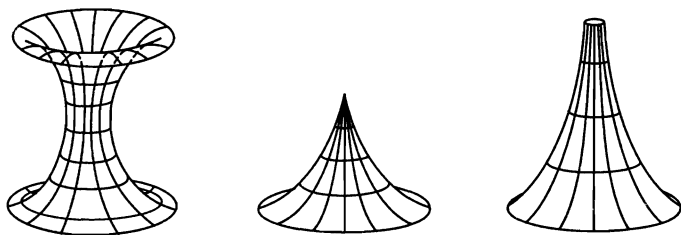


Рис. 86. Катушка Миндинга, волчок Миндинга, псевдосфера Бельтрами

20.24. Доказать, что каждая поверхность вращения (замкнутая или с краем по параллели) допускает изгибание в классе поверхностей вращения с отображением параллелей в параллели и с сохранением формы площади.

20.25. Доказать, что при проективном преобразовании пространства $\mathbb{R}^3$ сохраняется свойство точки поверхности быть эллиптической, параболической или точкой уплощения.

20.26. Доказать, что все точки любой поверхности 2-го порядка имеют один и тот же тип (эллиптический, гиперболический или параболический).

20.27. Пусть в изотермических координатах (u, v) поверхность задана в виде

$$x = \operatorname{Re} F_1(w), \quad y = \operatorname{Re} F_2(w), \quad z = \operatorname{Re} F_3(w),$$

где $F_k(w)$, $k = 1, 2, 3$, — аналитические функции комплексного аргумента $w = u + iv$. Такое представление называется *представлением Вейерштрасса*.

а) Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять эти функции, чтобы поверхность была минимальной?

б) Вычислить метрическую форму этой минимальной поверхности.

20.28. Пусть минимальная поверхность M , заданная представлением Вейерштрасса (см. задачу 20.27), подвергается деформации M_t вида

$$x = \operatorname{Re} (F_1(w)e^{it}), \quad y = \operatorname{Re} (F_2(w)e^{it}), \quad z = \operatorname{Re} (F_3(w)e^{it})$$

с параметром деформации t . Доказать справедливость следующих утверждений:

а) эта деформация является изгибанием поверхности M . В частности, все поверхности M_t изометричны друг другу;

б) изгибания происходят в классе минимальных поверхностей;

в) все поверхности M_t имеют параллельные нормали в соответствующих по изометрии точках.

20.29. Минимальные поверхности, определяемые формулами из задачи 20.28, называются *ассоциированными*. Показать, что изгибание минимальной поверхности в классе минимальных поверхностей происходит только в семействе ассоциированных минимальных поверхностей.

20.30. Рассмотрим поверхность M :

$$x = u - \frac{4}{3}u^3 + 4uv^2, \quad y = v - \frac{4}{3}v^3 + 4u^2v, \quad z = 2(u^2 - v^2)$$

и ее деформацию M_t :

$$\begin{aligned}x &= u - \left(\frac{4}{3}u^3 - 4uv^2\right) \cos 2t + \left(4u^2v - \frac{4}{3}v^3\right) \sin 2t, \\y &= v + \left(\frac{4}{3}u^3 - 4uv^2\right) \sin 2t + \left(4u^2v - \frac{4}{3}v^3\right) \cos 2t, \\z &= 2(u^2 - v^2) \cos t - 4uv \sin t.\end{aligned}$$

Доказать, что эта деформация является изгибанием и что исходная поверхность M и все ее деформации M_t являются минимальными поверхностями. При каком значении параметра поверхность M_t является зеркальным образом поверхности M_t ?

20.31. Пусть поверхность M такова, что существует ее непрерывное изгибание на ее центрально-симметрический образ M^* . В таких случаях говорят, что M *наложима* на M^* . Доказать, что M также наложима на свой зеркальный образ (отражение в плоскости).

20.32. Доказать, что минимальная поверхность наложима на свой зеркальный образ.

20.33. Доказать, что на поверхности постоянной кривизны окрестности двух любых точек имеют трехпараметрическое семейство изометрических отображений друг на друга. Отметим, что при этом центры этих окрестностей не обязаны переходить друг в друга.

20.34. Доказать, что не существует поверхности, на которой окрестности двух любых точек имели бы в точности двупараметрическое семейство изометрических отображений друг на друга (см. предыдущую задачу). Отметим, что поверхности, имеющие в точности однопараметрическое семейство изометрий, существуют. Ими являются поверхности вращения, не являющиеся поверхностями постоянной кривизны.

20.35. Доказать, что если две изометричные поверхности в соответствующих по изометрии точках имеют параллельные нормали, то их средние кривизны или равны, или отличаются знаком.

20.36. Доказать, что если две изометричные поверхности в соответствующих по изометрии точках имеют параллельные нормали и средняя кривизна хотя бы одной из них не равна нулю, то эти поверхности конгруэнтны. Если же обе поверхности минимальные, то они могут быть неконгруэнтными. Более того, любая минимальная поверхность допускает изгибание с сохранением направления нормалей в соответствующих по изометрии точках.

20.37. Пусть известно, что две метрики $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ и $d\sigma^2 = \gamma_{ij} d\xi^i d\xi^j$, $1 \leq i, j \leq n$, локально изометричны. Вывести систему уравнений, которым должна удовлетворять изометрия $f: (u) \rightarrow (\xi)$, где через (u) и (ξ) обозначены окрестности соответствующих точек в двух областях задания метрик. Рассмотреть

отдельно случай $n = 2$ и показать, что в этом случае нахождение искомого отображения может быть сведено к решению квазилинейной системы.

20.38. На плоскости переменных (u, v) задана метрика

$$ds^2 = e^{-2u^2}(du^2 + dv^2).$$

Убедиться, что эта метрика положительной кривизны, что она неполная и что она не может быть реализована ни на какой выпуклой поверхности в $\mathbb{R}^3$.

20.39. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{-Kr^2(A + \ln(1/r))^2},$$

где $r^2 = u^2 + v^2$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Является ли эта метрика в кольце $0 < r < e^A$ полной?

20.40. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{a^2 r^{2a-2}}{(1 - Ar^{2a})^2}(du^2 + dv^2),$$

где $r^2 = u^2 + v^2$ и $A = \frac{-K}{4}$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Пусть $a > 0$. Является ли тогда метрика пункта а) в кольце $0 < r < \left(\frac{1}{A}\right)^{1/2a}$ полной?

в) Рассмотрим две метрики из пункта а): одну при $a > 0$, другую при $a < 0$. Определить максимальные области существования обеих метрик и проверить, являются ли эти метрики изометричными в этих областях.

20.41. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{a^2}{(r\sqrt{-K}(A \sin(a \ln r) + B \cos(a \ln r)))^2}(du^2 + dv^2),$$

где $r^2 = u^2 + v^2$ и $A^2 + B^2 = 1$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Определить максимальные области существования метрики пункта а) и проверить, является ли она в этих областях полной.

20.42. Найти для метрик из предыдущих трех задач их изометрические погружения в $\mathbb{R}^3$ в виде поверхностей вращения вида $x = f(r) \cos n\varphi$, $y = f(r) \sin n\varphi$, $z = g(r)$, где $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$. Описать области погружения этих метрик в зависимости от значений целочисленного параметра n .

20.43. Рассмотрим семейство поверхностей вращения, полученных друг из друга параллельным переносом вдоль оси вращения.

Рассмотрим поверхность вращения M , имеющую ту же ось и пересекающую поверхности семейства под прямым углом. Доказать, что в точке пересечения поверхности семейства и поверхности M они имеют одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку гауссовы кривизны.

§ 21. Параметризации известных двумерных поверхностей

В этом параграфе требуется проверить, что указанные в задачах формулы задают параметризации вложений или погружений известных поверхностей.

21.1. Поверхность с особенностями, параметрически задаваемая в $\mathbb{R}^3$ следующими уравнениями:

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = ((1 + \cos 2\theta) \cos 2\varphi, (1 + \cos 2\theta) \sin 2\varphi, \sin 2\theta \sin \varphi),$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

является одной из моделей (см. рис. 87) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Описать особые точки этой поверхности.

Доказать, что сфера

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

двуместно накрывает эту поверхность. Найти соответствие между парами точек сферы и точками $\mathbb{R}P^2$ в терминах параметров θ, φ .

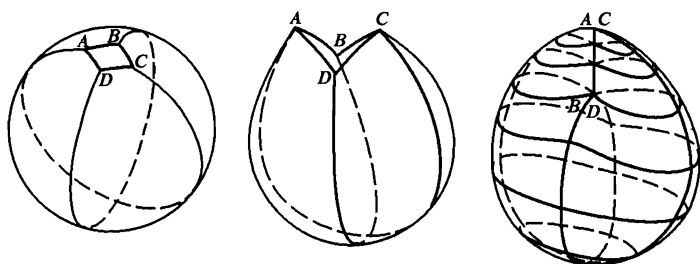


Рис. 87. Склейка проективной плоскости из квадрата

Отметим, что если от описанной модели проективной плоскости отрезать плоскостью небольшой диск, то оставшаяся часть является моделью листа Мёбиуса. Она называется *скрещенным колпаком* (см. рис. 88). Линия самопересечения колпака соответствует $\varphi = 0$. Точками пинча (см. рис. 89) являются $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ и $\theta = \pi/2$.

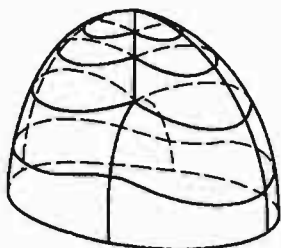


Рис. 88. Скрещенный колпак

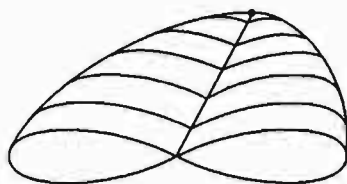


Рис. 89. Окрестность точки пинча

21.2. Напомним, что одной из моделей проективной плоскости является поверхность Боя в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 90, 91).

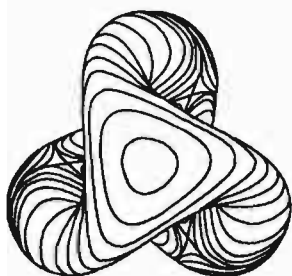
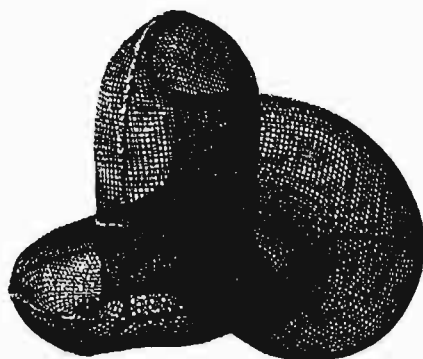
Рис. 90. Поверхность Боя — погружение проективной плоскости в $\mathbb{R}^3$ 

Рис. 91. «Прозрачная» поверхность Боя. Здесь хорошо видно, как устроено ее множество точек самопересечения

Параметризация Апері поверхности Боя:

$$r(\theta, \varphi) = A \begin{pmatrix} r_1 \cos 2\varphi \\ r_1 \sin 2\varphi \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} r_2 \cos \varphi \\ -r_2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{\cos^2 \theta}{1 - b \sin 3\varphi \sin 2\theta}, \quad B = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - b \sin 3\varphi \sin 2\theta}.$$

Здесь $r_1 = \sqrt{2}/3$, $r_2 = 2/3$. При $1/\sqrt{6} < b < 1$ точек пинча на поверхности нет.

Доказать, что стандартная сфера накрывает эту параметризованную поверхность двулистно.

Структура поверхности Боя показана на рис. 92, 93.

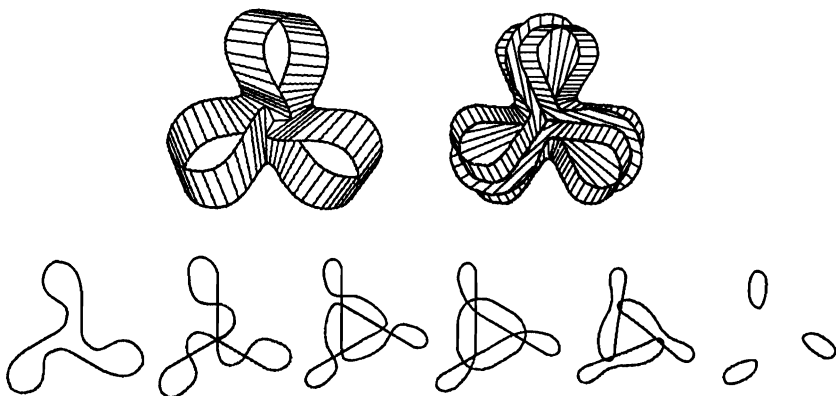


Рис. 92. Начало процесса построения поверхности Боя из листа Мёбиуса

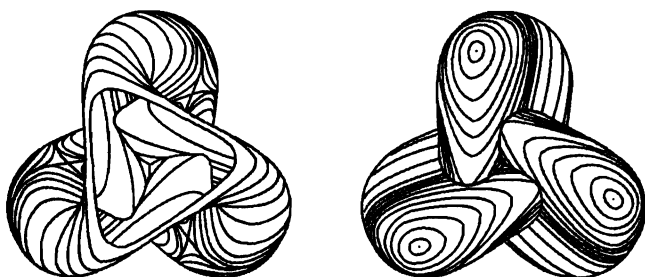


Рис. 93. Завершение процесса построения поверхности Боя из листа Мёбиуса

21.3. Пусть θ и φ — сферические координаты на S^2 (угол θ отсчитывается от горизонтальной плоскости). Доказать, что формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\theta, \varphi) &= (w, x, y, z), \\ w(\theta, \varphi) &= (\cos \theta)^2 \cos 2\varphi, \quad x(\theta, \varphi) = \sin 2\theta \cos \varphi, \\ y(\theta, \varphi) &= \sin 2\theta \sin \varphi, \quad z(\theta, \varphi) = (\cos \theta)^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

задают вложение проективной плоскости в $\mathbb{R}^4$.

21.4. Доказать, что следующие вектор-функции задают погружения бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$ (см. рис. 94).

а) $\mathbf{r}(u, v) = (R_x, R_y, R_z^2)$, где R_x, R_y, R_z — компоненты в декартовых координатах следующей вектор-функции:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}_0(u) + \rho(u)(\mathbf{e}_1(u) \cos v + \mathbf{e}_2 \sin v).$$

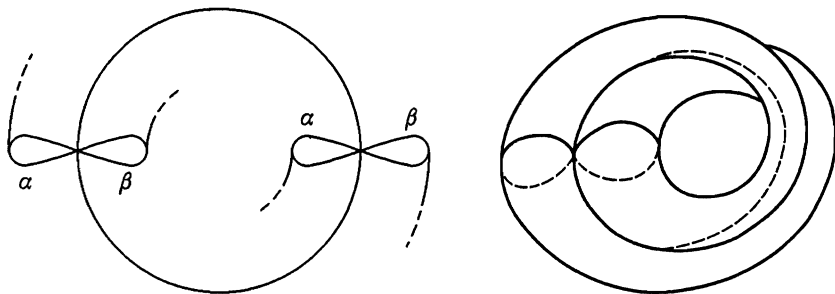


Рис. 94. Погружение бутылки Клейна

Здесь

$$\mathbf{R}_0(u) = \begin{pmatrix} a \sin 2u \\ 0 \\ b \cos u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1(u) = \begin{pmatrix} b \sin u \\ 0 \\ a \cos 2u \end{pmatrix} \frac{1}{|R'_0|}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы, ортогональные $\mathbf{R}'_0$,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \sin^{2n}(u - u_0).$$

Здесь, например, можно положить

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1, \quad \rho_0 = 0,1, \quad \rho_1 = 0,6, \quad u_0 = 0,3, \quad n = 4.$$

б) Еще одна параметризация, где a — вещественное число:

$$\mathbf{r}_a(u, v) = \begin{pmatrix} \left(a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \cos u \\ \left(a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \sin u \\ \sin \frac{u}{2} \sin v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v \end{pmatrix}.$$

21.5. Доказать, что следующая вектор-функция задает параметризацию листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = \left(\left(1 + t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \varphi, \left(1 + t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi, t \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Доказать, что для $t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ это отображение является вложением.

21.6. Зададим открытый лист Мёбиуса как косое (скрученное) произведение окружности на интервал. Окружность назовем осевой, а длину интервала — шириной листа Мёбиуса (см. рис. 95).

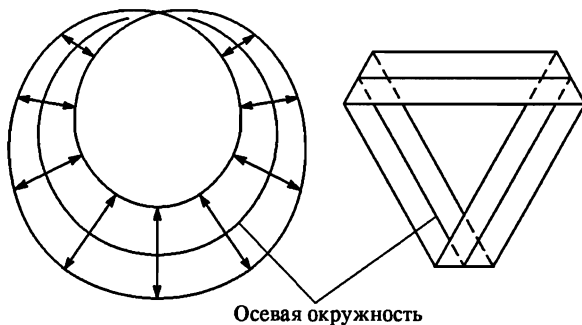


Рис. 95. Лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$

а) Доказать, что лист Мёбиуса бесконечной ширины с плоской метрикой в $\mathbb{R}^3$ не вкладывается.

б) Найти максимальное отношение длины осевой окружности к ширине листа Мёбиуса, при котором существует изометричное вложение плоского листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$.

21.7. Доказать, что следующая алгебраическая поверхность в $\mathbb{R}^3$ является скрещенным коллаком, т. е. моделью листа Мёбиуса:

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0,$$

где $k_1 \neq k_2$. Доказать, что эту поверхность можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}, & y &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}, \\ z &= \frac{1 + \sin \theta}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

а) При этом требуется доказать, что первое уравнение (алгебраическое) задает *поверхность*, т. е. указанная выше параметризация действительно задает множество *всех* решений этого уравнения.

б) Доказать, что указанные формулы задают гладкую регулярную параметризацию вне особых точек. Найти особые точки.

в) Проверить, что при этой параметризации квадрат $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ склеивается в лист Мёбиуса.

21.8. Доказать, что формулы $x = u^2 - v^2$, $y = uv$, $z = uw$, $t = vw$ задают регулярное погружение сферы $u^2 + v^2 + w^2 = 1$

в $\mathbb{R}^4$. Заметим, что при этом отображении противоположные точки сферы переходят в одну точку, поэтому возникает регулярное отображение $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^4$. Доказать, что при этом получается вложение проективной плоскости в $\mathbb{R}^4$.

§ 22. Поверхности в $\mathbb{R}^3$

22.1. Доказать, что если в некоторой точке поверхности в $\mathbb{R}^3$ гауссова кривизна $K > 0$, то поверхность локально лежит по одну сторону от касательной плоскости в этой точке.

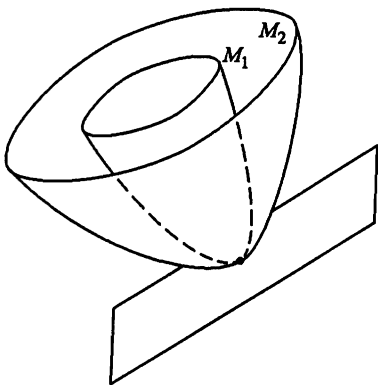


Рис. 96

22.2. Пусть две поверхности M_1 и M_2 касаются одной и той же плоскости в некоторой общей точке. При этом в некоторой окрестности этой точки обе поверхности находятся по одну сторону от плоскости, причем поверхность M_1 целиком лежит внутри поверхности M_2 (см. рис. 96). Доказать, что для гауссовых кривизн справедливо нестрогое неравенство $K_1 \geq K_2$. Этот факт является локальным.

22.3. Можно ли реализовать лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ в виде гладкой поверхности всюду положительной кривизны?

22.4. Можно ли вложить лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ в виде гладкой поверхности, однозначно проектирующейся на какую-либо плоскость?

22.5. а) Доказать, что неориентированную поверхность (замкнутую или с границей) нельзя погрузить в $\mathbb{R}^3$ так, чтобы в каждой ее точке либо гауссова кривизна K была строго положительна, либо гауссова кривизна K была нулевой, но средняя кривизна H отлична от нуля.

б) Построить вложение плоского листа Мёбиуса (т. е. с локально евклидовой метрикой) в $\mathbb{R}^3$. Объяснить, почему наличие такого вложения не противоречит предыдущему пункту.

22.6. Доказать, что замкнутая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ всегда имеет точку, в которой:

- а) гауссова кривизна не меньше 0;
- б) гауссова кривизна строго больше 0.

22.7. а) Доказать, что гладкая замкнутая поверхность отрицательной гауссовой кривизны не погружается в $\mathbb{R}^3$.

б) Доказать, что гладкая замкнутая поверхность неположительной гауссовой кривизны не погружается в $\mathbb{R}^3$.

в) Доказать, что плоский тор нельзя гладко и изометрично погрузить в $\mathbb{R}^3$.

22.8. а) Доказать, что на гладкой ориентированной погруженной в $\mathbb{R}^3$ поверхности рода не меньшего, чем 2, обязательно найдется точка, в которой гауссова кривизна K строго меньше 0.

б) Пусть тор (или бутылка Клейна) гладко погружен в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что тогда обязательно существует точка, в которой $K < 0$.

22.9. Доказать, что сферическое отображение минимальной поверхности в окрестности каждой точки, не являющейся точкой уплощения, конформно.

22.10. Доказать следующие утверждения:

а) на листе Мёбиуса существует метрика постоянной положительной кривизны. Это пример метрики, которая не погружается изометрично в $\mathbb{R}^3$ (см. задачу 22.3);

б) на листе Мёбиуса можно ввести метрику постоянной отрицательной кривизны.

22.11. Можно ли изометрично вложить в $\mathbb{R}^3$ лист Мёбиуса с метрикой постоянной отрицательной кривизны?

22.12. Можно ли реализовать лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$ как область на некоторой поверхности вращения?

22.13. Рассмотрим поверхность вращения относительно оси z и введем на ней действие группы $\mathbb{Z}/2$: $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Профакторизуем поверхность по этому действию. Получим новую поверхность с метрикой.

Рассмотреть пример однополостного гиперболоида вращения и полученную описанным образом фактор-поверхность изометрически реализовать в $\mathbb{R}^3$ как поверхность вращения.

22.14. Найти площадь сферического образа поверхности

$$r = r(u, v), \quad u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2,$$

с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

22.15. Найти площадь сферического образа эллиптического параболоида.

22.16. Найти образ гауссова отображения для:

а) однополостного гиперболоида;

б) двуполостного гиперболоида;

в) катеноида.

22.17. Найти сферический образ тора, реализованного в $\mathbb{R}^3$ стандартным образом как поверхность вращения.

22.18. Доказать, что площадь сферического образа одной полостии двуполостного гиперболоида меньше 2π .

22.19. Исследовать сферические образы следующих выпуклых поверхностей:

а) оваловид, т. е. гладкая замкнутая выпуклая поверхность. Доказать, что его сферический образ покрывает всю сферу и что, если оваловид строго выпуклый, то сферическое отображение взаимнооднозначно;

б) параболоид $z = x^2 + y^2$;

в) поверхность, полученная вращением вокруг оси Oz кривой $z = x^2$, $z \leq a$, гладко продолженной до бесконечности касательной. Показать, что за счет выбора $a > 0$ сферический образ такой поверхности может заполнять область на сфере с любой площадью $S < 2\pi$.

22.20. Построить пример полной поверхности строго положительной кривизны, сферический образ которой имеет площадь меньше 2π .

22.21. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы и параллели поверхности переходят в прямые линии плоскости.

22.22. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы переходят в прямые, проходящие через начало координат, а параллели — в окружности с центром в начале координат.

22.23. Вычислить интеграл $\iint_M |K| dS$, где K — гауссова

кривизна поверхности M , если M :

а) эллипсоид; б) эллиптический параболоид; в) тор.

22.24. На сфере вырезан прямоугольник P , ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами. Края, соответствующие меридианам, отождествлены по равенству длин склеиваемых отрезков, так что получается многообразие M , гомеоморфное кольцу. Проверить, что метрика на M является аналитической, и получить вложение M в $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения.

22.25. В условиях предыдущей задачи отождествление дуг меридианов проводится так, что топологически получается лист Мёбиуса. Показать, что полученная метрика постоянной положительной кривизны на листе Мёбиуса будет гладкой.

22.26. Найти все поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K = -1$. Они называются поверхностями Миндинга. Указать в единичном круге с метрикой Лобачевского (модель Пуанкаре) области, изометричные поверхностям Миндинга (после разреза по меридиану) и их универсальным накрывающим.

22.27. Найти все поверхности вращения постоянной средней кривизны.

§ 23. Топология двумерных поверхностей

В этом параграфе мы будем рассматривать разбиения поверхности на конечное число замкнутых многоугольников, которые пересекаются по общим ребрам и вершинам. Разбиение, в котором любые два многоугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по *одному* общему ребру, либо по *одной* общей вершине, называется *правильным*. Разбиение поверхности на треугольники будем называть *триангуляцией*. Далее в этом параграфе через V обозначается число вершин, через E — число ребер, а через F — число граней (многоугольников) разбиения поверхности. Число $V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* $\chi(M)$ поверхности M . Это число не зависит от выбора разбиения поверхности и, следовательно, является топологическим инвариантом поверхности.

23.1. Построить какие-нибудь триангуляции сферы, тора, проективной плоскости и найти эйлеровы характеристики этих поверхностей.

23.2. Из того факта, что эйлерова характеристика сферы $\chi(S^2) = 2$, вывести существование ровно 5 комбинаторно правильных многогранников (см. рис. 97). Напомним, что разбиение

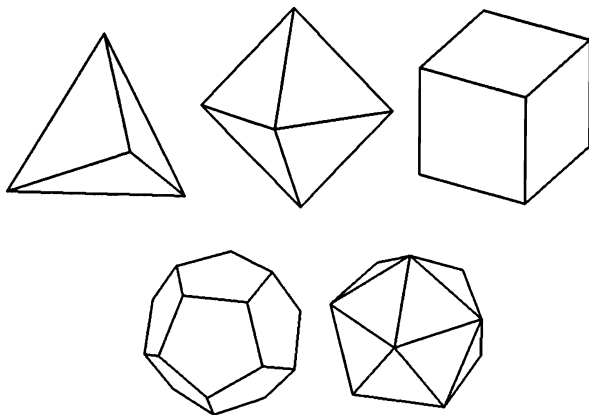


Рис. 97. Тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр

поверхности называется комбинаторно правильным, если у всех граней одинаковое число ребер и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

23.3. Доказать, что число вершин правильной триангуляции двумерной замкнутой поверхности удовлетворяет оценке

$$V \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}.$$

В частности, правильная триангуляция тора содержит не менее 7 вершин, а правильная триангуляция $\mathbb{R}P^2$ — не менее 6.

23.4. Привести пример правильной триангуляции:

а) тора с 7-ю вершинами;

б) проективной плоскости с 6-ю вершинами.

23.5. Доказать, что минимальное число треугольников правильной триангуляции тора равно 14. Построить пример такой минимальной триангуляции. Сравнить с примером из предыдущей задачи.

23.6. а) Выяснить, сколько существует правильных триангуляций тора с минимальным числом вершин. Сколько существует правильных триангуляций тора с наименьшим числом треугольников? Существуют ли правильные триангуляции тора, минимальные в одном смысле, но не минимальные в другом?

б) Ответить на все эти вопросы для проективной плоскости.

23.7. Доказать неравенство Хивуда

$$\text{col}(M) \leq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}$$

для всех замкнутых двумерных поверхностей за исключением сферы и бутылки Клейна. Здесь через $\text{col}(M)$ обозначено хроматическое число поверхности M , т.е. минимальное число красок, необходимое для раскраски разбиения поверхности таким образом, чтобы многоугольники с общим ребром имели разные цвета. Что можно сказать об этом неравенстве для бутылки Клейна и для сферы?

23.8. Доказать, что $\text{col}(M_g) = \text{col}(M_g^k)$, $\text{col}(N_\alpha) = \text{col}(N_\alpha^k)$. Здесь M_g — сфера с g ручками, N_α — сфера с α пленками Мёбиуса, M_g^k — сфера с g ручками, из которой выброшено k непересекающихся дисков, а N_α^k — сфера с α пленками Мёбиуса, из которой выброшено k непересекающихся дисков (см. рис. 98).

23.9. Привести пример карты на проективной плоскости, которая не допускает раскраски в 5 цветов.

23.10. Доказать, что операция связной суммы поверхностей не зависит от способа склейки граничных окружностей, т.е. от выбора их ориентации при склейке.

23.11. Доказать, что $T^2 \# \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$. Здесь через $X \# Y$ обозначена связная сумма поверхностей X и Y .

23.12. Разрезать бутылку Клейна на два листа Мёбиуса.

23.13. Разрезать крендель (сферу с двумя ручками) так, чтобы получился плоский связный восьмиугольник.

23.14. Разрезать сферу с тремя ручками так, чтобы получился плоский связный двенадцатиугольник, все вершины которого представляют одну точку поверхности.

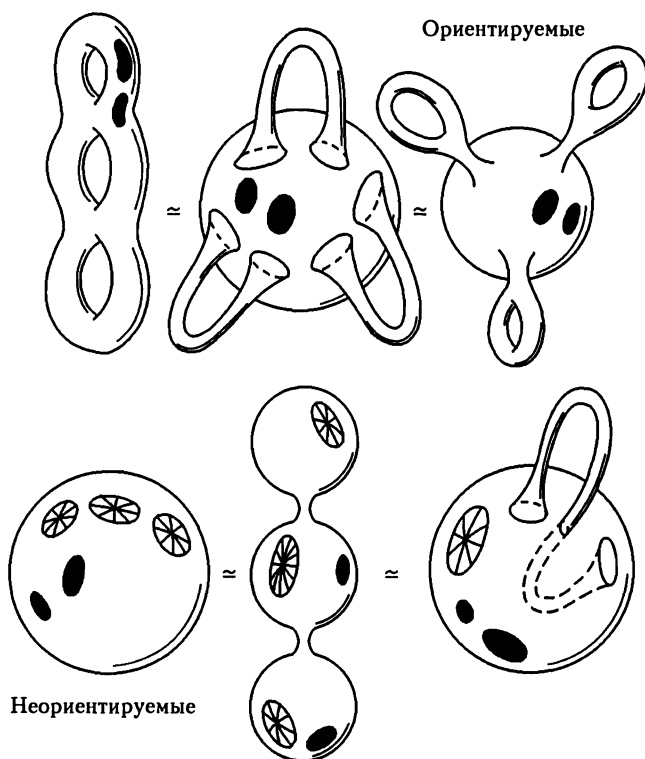


Рис. 98. Двумерные поверхности с краем

23.15. Доказать, что связная сумма $X \# Y$ поверхностей X и Y ориентируема тогда и только тогда, когда обе поверхности ориентируемы.

23.16. Доказать, что

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

23.17. Доказать, что

$$\chi(M_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_\alpha) = 2 - \alpha.$$

23.18. Доказать, что

$$\chi(S^2 \setminus kD^2) = 2 - k.$$

Здесь из сферы выброшено k непересекающихся дисков.

23.19. Если сфера разбита на n -угольники и в каждой вершине встречаются ровно k ребер, то

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$

Графом « n домиков и m колодцев» будем называть граф, у которого $n+m$ вершин разбиты на две непересекающиеся группы из n и m элементов соответственно, причем каждая вершина из одной группы соединена единственным ребром с каждой вершиной другой группы. Других ребер у графа нет.

23.20. Доказать, что на сфере (плоскости) нельзя разместить следующие графы так, чтобы любые два различных ребра пересекались самое большее по общей вершине:

а) граф «3 домика и 3 колодца»;

б) граф с пятью вершинами, у которого каждая пара различных вершин соединяется единственным ребром.

23.21. Доказать, что граф «3 домика и 3 колодца» можно без самопересечений разместить на проективной плоскости (листе Мёбиуса).

23.22. Доказать, что комбинаторно правильное разбиение тора состоит из треугольников, четырехугольников или шестиугольников (определение комбинаторно правильного разбиения см. в задаче 23.2).

23.23. Пусть замкнутая поверхность Q комбинаторно правильно разбита на шестиугольники, причем в каждой вершине сходятся четыре грани. Доказать, что если число вершин нечетно, то Q неориентируема.

23.24. Пусть на замкнутой поверхности проведены три линии p , q и r с общими концами и не имеющие попарно общих внутренних точек. Если разрез по одной из линий $p \cup q$, $q \cup r$ или $r \cup p$ оставляет поверхность Q связной, то таким же свойством обладает по крайней мере одна из двух оставшихся линий.

23.25. Показать, что если в замкнутой неориентируемой поверхности N_α вырезать дырку, то полученная поверхность может быть расположена в пространстве $\mathbb{R}^3$ без самопересечений.

23.26. Доказать, что граф «4 домика и 4 колодца» нельзя расположить на проективной плоскости без самопересечений, но можно расположить на торе.

23.27. Доказать, что если граф « m домиков и n колодцев» можно без самопересечений расположить на поверхности Q , то

$$\chi(Q) \leq m + n - \frac{mn}{2}.$$

§ 24. Линии на поверхностях

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ двумерную поверхность M^2 с параметризацией $g(u, v)$ и второй квадратичной формой $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$. Рассмотрим на M^2 два семейства линий. Эти семейства называются *сопряженными*, если в каждой точке P направление линий первого и второго семейства, проходящих через точку P , сопряжены друг другу относительно второй формы поверхности. Точнее, пусть в точке P линия пер-

вого семейства имеет направление (ξ_1, η_1) , а линия второго семейства — (ξ_2, η_2) . Тогда условие сопряженности можно записать в виде

$$L\xi_1\xi_2 + M(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + N\eta_1\eta_2 = 0.$$

Если линии одного семейства известны, то это условие дает дифференциальное уравнение линий сопряженного семейства.

Кривая $(u(t), v(t))$ на поверхности M^2 называется *асимптотической*, если в каждой точке вектор скорости кривой имеет асимптотическое направление относительно второй формы поверхности. Соответствующее дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = 0.$$

Асимптотическая линия определяется условием, что нормальная кривизна поверхности вдоль асимптотической кривой равна нулю.

Кривая $(u(t), v(t))$ называется *линией кривизны* поверхности M^2 , если в каждой ее точке вектор скорости имеет главное направление. В каждой точке поверхности, не являющейся омбилической, имеется два главных направления, они сопряжены и ортогональны. Если (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) — векторы, имеющие главные направления, то они удовлетворяют двум уравнениям:

$$\begin{aligned} E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2 &= 0, \\ L\xi_1\xi_2 + M(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + N\eta_1\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & -\xi_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

В частности, кривая $(u(t), v(t))$ является линией кривизны тогда и только тогда, когда она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} (u')^2 & -u'v' & (v')^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

24.1. Дана поверхность

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = 2uv$$

и семейство линий на ней $u^2 - cv^2 = c$. Найти дифференциальное уравнение сопряженного ему семейства.

24.2. Пусть σ — поверхность, l — прямая, $\{\gamma_1\}$ — семейство сечений поверхности плоскостями, проходящими через прямую линию l , а $\{\gamma_2\}$ — семейство линий, в которых конусы, имеющие вершины на l , касаются поверхности. Показать, что семейства $\{\gamma_1\}$ и $\{\gamma_2\}$ образуют сопряженную сеть.

24.3. На поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u^2 \sin v, \quad z = hv$$

задано семейство линий v . Найти сопряженное семейство.

24.4. Найти поверхности $z = f(x, y)$ с такой сопряженной сетью, которая проектируется в сеть координатных линий прямоугольной декартовой координатной системы на плоскости xOy .

24.5. Показать, что отображение двух поверхностей друг на друга, при котором каждая сопряженная сеть одной поверхности переходит в ортогональную сеть другой, переводит вторую квадратичную форму одной поверхности в форму, пропорциональную первой квадратичной форме первой поверхности.

24.6. Найти асимптотические линии однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

24.7. Найти асимптотические линии поверхности

$$z = f(x) - f(y)$$

и определить функцию f таким образом, чтобы линии одного асимптотического семейства были ортогональны асимптотическим линиям другого семейства.

24.8. Найти асимптотические линии поверхности $z = xy^3 - yx^3$, которые проходят через точку $(1, 2, 6)$.

24.9. Найти асимптотические линии катеноида.

24.10. Показать, что на прямом геликоиде одно семейство асимптотических линий состоит из прямых, а другое — из винтовых линий.

24.11. Доказать, что:

а) координатные линии $u = \text{const}$ являются асимптотическими тогда и только тогда, когда коэффициент N второй квадратичной формы равен 0;

б) для того чтобы координатная сеть состояла из асимптотических линий, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты L и N второй квадратичной формы были равны 0.

24.12. Доказать, что если поверхность минимальна, то асимптотические линии на ней ортогональны.

24.13. Доказать, что на плоскости любая линия является асимптотической, и наоборот, поверхность, на которой любая линия является асимптотической, является частью плоскости.

24.14. Доказать, что если асимптотическая линия на поверхности плоская, то она является или параболической, или прямой линией.

24.15. Найти асимптотические линии поверхности, которая составлена из точек, являющихся серединами хорд винтовой линии.

24.16. Пусть кривизна поверхности вращения строго меньше 0. Доказать, что на ней не существует замкнутых асимптотических линий.

24.17. Пусть поверхность образована главными нормальными линии γ . Доказать, что линия γ является асимптотической линией этой поверхности.

24.18. Доказать, что если асимптотические линии поверхности пересекаются под постоянным углом, то гауссова кривизна поверхности пропорциональна квадрату средней кривизны.

24.19. Найти асимптотические линии поверхности

$$(u \cos v, u \sin v, a \cos \lambda v),$$

где a и λ — постоянные.

24.20. Найти асимптотические линии поверхности

$$(3u + 3v, 3u^2 + 3v^2, 2u^3 + 2v^3).$$

24.21. Найти асимптотические линии поверхности $z = y \cos x$.

24.22. Параметризовать гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

так, чтобы координатные линии были асимптотическими.

24.23. Показать, что линии

$$\gamma_1(t) = (t, a, a^2 t) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = \left(t, \frac{b}{t^2}, \frac{b^2}{t^3}\right)$$

являются асимптотическими на поверхности $z = xy^2$.

24.24. Доказать, что если координатная сеть на поверхности асимптотическая, то имеют место равенства

$$\frac{\partial \ln |K|}{\partial u} = 2 \frac{FE_v - EG_u}{EG - F^2}, \quad \frac{\partial \ln |K|}{\partial v} = 2 \frac{FG_u - GE_v}{EG - F^2},$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

24.25. Доказать, что асимптотические линии на поверхности постоянной отрицательной кривизны образуют сеть Чебышева, и обратно, если асимптотическая сеть на поверхности чебышевская, то гауссова кривизна поверхности постоянна. Сеть называется *чебышевской*, если у любого четырехугольника, образованного линиями сети, длины противоположных сторон равны.

24.26. Теорема Бельтрами–Эннепера. Доказать, что если асимптотические линии различных семейств имеют в их общей точке отличные от нуля кривизны, то они имеют равные по модулю, но противоположные по знаку кручения. Кроме того, квадрат кручения асимптотической линии равен модулю гауссовой кривизны в этой точке.

24.27. Две поверхности пересекаются под прямым углом. Доказать, что если на одной поверхности линия пересечения является асимптотической, то она является геодезической на другой, и наоборот.

24.28. Найти линии кривизны прямого геликоида.

24.29. Найти линии кривизны на произвольной цилиндрической поверхности.

24.30. Найти линии кривизны на произвольной конической поверхности.

24.31. Доказать, что на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны. Наоборот, если на поверхности любая линия является линией кривизны, то такая поверхность является плоскостью или сферой (или их частью).

24.32. Теорема Лиувилля. Доказать, что при конформном отображении пространства на себя сфера (плоскость) переходит в сферу или плоскость.

24.33. Доказать, что если координатная сеть состоит из линий кривизны, то главные кривизны поверхности задаются формулами

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

24.34. Теорема Родрига. Доказать, что для того чтобы линия γ на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой выполнялось равенство

$$d\mathbf{m} = -k d\mathbf{r},$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к поверхности, а k — нормальная кривизна поверхности вдоль кривой γ .

24.35. Доказать, что:

а) если две поверхности пересекаются вдоль некоторой линии под постоянным углом и эта линия является линией кривизны на одной поверхности, то она является линией кривизны и на другой поверхности;

б) если две поверхности пересекаются по линии, являющейся линией кривизны на каждой из поверхностей, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

24.36. Теорема Дюпена. Даны три семейства поверхностей

$$f_1(x, y, z) = \text{const}, \quad f_2(x, y, z) = \text{const}, \quad f_3(x, y, z) = \text{const},$$

причем якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Пусть поверхности пересекаются попарно под прямым углом. Это — так называемая триортогональная система поверхностей.

Доказать, что линии пересечения поверхностей из различных семейств являются линиями кривизны на каждой поверхности.

24.37. Доказать, что каждую поверхность в $\mathbb{R}^3$ можно включить в триортогональное семейство поверхностей.

24.38. Пусть заданы два семейства поверхностей, пересекающихся ортогонально по кривым, являющимся для поверхностей обоих семейств линиями кривизны. Доказать, что существует третье семейство поверхностей, образующее с данными триортогональную систему поверхностей.

24.39. Поверхности M_1 и M_2 называются параллельными, если нормали одной поверхности, как аффинные прямые, являются нормальными другой поверхности. Точки поверхностей M_1 и M_2 , лежащие на общих нормалях, назовем соответствующими. Доказать, что при таком соответствии линии кривизны переходят в линии кривизны.

24.40. Доказать, что при конформном отображении пространства на себя линии кривизны исходной поверхности преобразуются в линии кривизны преобразованной поверхности.

24.41. Пусть γ — линия кривизны поверхности M , причем нормальная кривизна k_n линии γ постоянна и отлична от нуля. Доказать, что поверхность M касается по линии γ некоторой сферы радиуса $1/k_n$.

24.42. Доказать, что при локально изометрическом наложении геликоида на катеноид (см. задачу 5.27) его асимптотические линии переходят в линии кривизны, а линии кривизны — в асимптотические линии.

24.43. Доказать, что геодезическая линия на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда эта линия плоская.

24.44. Доказать, что если на поверхности все геодезические являются плоскими линиями, то поверхность или плоскость, или сфера.

24.45. а) Пусть области на двух поверхностях 2-го порядка склеены вдоль общей дуги границы так, что в целом получилась C^1 -гладкая поверхность. Показать, что тогда линия склеивания является плоской кривой. Всякие ли две поверхности 2-го порядка допускают такое склеивание?

б) Пусть области на двух поверхностях 2-го порядка S_1 и S_2 склеены вдоль общей дуги границы, образуя в целом C^2 -гладкую поверхность S . Тогда S_1 и S_2 как поверхности 2-го порядка совпадают. Другими словами, склеиваемые области являются смежными областями на одной и той же поверхности 2-го порядка, так что S на самом деле будет аналитической.

24.46. Если неразвертывающаяся линейчатая поверхность имеет гладкость класса C^n , $n \geq 2$, то на ней можно ввести асимптотическую параметризацию (когда образующие являются одним

из семейств координатных линий), в которой поверхность имеет гладкость класса C^{n-1} .

24.47. Пусть линейчатая поверхность является C^1 -гладкой в некоторой асимптотической параметризации. Показать, что на ней можно ввести C^1 -гладкую асимптотическую параметризацию, в которой направляющая линия ортогональна к пересекающим ее образующим.

24.48. Описать метрики поверхностей, на которых внутренние координаты u и v являются натуральными параметрами на координатных линиях.

24.49. Описать поверхности, на которых координаты в линиях кривизны одновременно являются натуральными параметрами линий кривизны.

24.50. Описать поверхности, на которых линии кривизны являются геодезическими.

24.51. Если на гладкой регулярной неразвертывающейся линейчатой поверхности M есть прямолинейный отрезок, пересекающий все образующие, то на M можно ввести внутренние координаты, в которых асимптотические линии можно найти в квадратурах.

24.52. Доказать, что неразвертывающаяся линейчатая гладкая регулярная поверхность не может иметь постоянную гауссову кривизну.

24.53. Показать, что среди линейчатых поверхностей минимальной поверхностью, кроме плоскости, является только прямой геликоид.

24.54. Показать, что линейчатые поверхности, за исключением плоскости и геликоида, не могут иметь постоянную среднюю кривизну.

24.55. Показать, что единственной минимальной поверхностью с постоянной гауссовой кривизной является плоскость.

24.56. Будем говорить, что поверхность в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, имеет *постоянную внешнюю геометрию*, если любые две ее точки имеют конгруэнтные в $\mathbb{R}^n$ окрестности.

а) Показать, что в $\mathbb{R}^3$ поверхностями с постоянной внешней геометрией являются только плоскость, сфера и прямой круговой цилиндр (или области на них).

б) Показать, что поверхность в $\mathbb{R}^4$

$$x_1 = R_1 \cos u, \quad x_2 = R_1 \sin u, \quad x_3 = R_2 \cos v, \quad x_4 = R_2 \sin v,$$

где $0 \leq u, v \leq 2\pi$, а R_1 и R_2 — постоянные числа, гомеоморфна тору, имеет нулевую гауссову кривизну и ее внешняя геометрия в $\mathbb{R}^4$ постоянна. Эта поверхность называется *обобщенным тором Клиффорда*. Ее можно задать еще одним способом. Отождествим $\mathbb{R}^4$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^2$ с координатами z, w .

Тогда тор Клиффорда получается как пересечение трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$ с конусом $|z| = |w|$. Отметим, что индуцированная метрика на торе Клиффорда является плоской.

в) Показать, что поверхность в $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{xy}{\sqrt{3}}, & x_2 &= \frac{yz}{\sqrt{3}}, & x_3 &= \frac{xz}{\sqrt{3}}, \\ x_4 &= \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, & x_5 &= \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6} \end{aligned}$$

с условием $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ является гомеоморфным вложением в $\mathbb{R}^5$ проективной плоскости, имеющим постоянную внешнюю геометрию. Эта поверхность называется *поверхностью Веронезе*.

24.57. Доказать, что если асимптотическая линия на поверхности одновременно является геодезической, то она будет прямой.

24.58. Доказать, что свойство линии на поверхности быть асимптотической инвариантно при проективных преобразованиях объемлющего пространства.

24.59. Доказать, что если поверхность содержит прямую линию, то эта линия будет асимптотической линией поверхности.

24.60. Доказать, что асимптотические линии поверхности составляют ортогональную сеть тогда и только тогда, когда поверхность минимальная.

24.61. Доказать, что если асимптотическая кривая на поверхности состоит из параболических точек, то эта кривая плоская и ее плоскость является касательной плоскостью к поверхности во всех точках кривой. Верно и обратное, — если плоскость плоской кривой на поверхности является касательной к поверхности во всех точках кривой, то эта кривая асимптотическая, состоящая из параболических точек.

24.62. Доказать, что если линия кривизны L является асимптотической, то гауссова кривизна поверхности вдоль L равна нулю и кривая L — плоская.

24.63. Показать, что на поверхности отрицательной кривизны бинормаль к асимптотической линии совпадает с нормалью к поверхности.

24.64. Доказать, что если при изгибании поверхности, отличной от линейчатой, все асимптотические линии одного семейства переходят снова в асимптотические линии, то поверхность остается конгруэнтной самой себе.

24.65. Доказать, что неразвертывающаяся линейчатая поверхность не допускает изометрических преобразований, при которых все асимптотические линии исходной поверхности переходят в асимптотические линии преобразованной поверхности.

24.66. Доказать, что если на поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$

являются асимптотическими линиями поверхности, то в этих координатах первая форма имеет вид $ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2$, где ω — угол между асимптотическими линиями.

24.67. Показать, что в условиях предыдущей задачи угол $\omega(u, v)$ удовлетворяет уравнению «sin-Гордона» $\omega''_{uv} = \sin \omega$.

24.68. Показать, что если на поверхности отрицательной кривизны изометрические координаты (u, v) являются одновременно асимптотическими, то поверхность является минимальной с условием $M = \text{const}$.

24.69. Доказать, что на односвязной поверхности отрицательной кривизны нет замкнутой асимптотической линии.

§ 25. Многообразия (дополнительные задачи)

Напомним, что многообразие называется *замкнутым*, если оно компактно и не имеет края.

25.1. Доказать, что группы $SL(n, \mathbb{R})$ и $SL(n, \mathbb{C})$ являются гладкими подмногообразиями в пространствах соответственно вещественных и комплексных квадратных матриц порядка n . Найти их размерности. Найти количество компонент связности этих матричных групп.

25.2. Доказать, что группа $SO(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех квадратных матриц порядка n . Найти размерность и число компонент связности этой группы.

25.3. Доказать, что группы $U(n)$, $SU(n)$ являются гладкими подмногообразиями в пространстве $\mathbb{C}^{n^2}$ комплексных квадратных матриц порядка n . Найти размерность и число компонент связности этих групп.

25.4. Показать, что отображение матриц $A \mapsto e^A$ является гладким гомеоморфизмом в окрестности нулевой матрицы в прообразе и окрестности единичной матрицы в образе. Показать, что обратное отображение задается соответствием $B \rightarrow \ln(B)$.

25.5. Доказать, что на каждой из групп, перечисленных в задачах 25.1–25.3, в качестве локальных систем координат в окрестности U_A матрицы A можно взять некоторые из декартовых координат матрицы $\ln(A^{-1}X)$. Показать, что в указанных координатах функции замены координат являются гладкими функциями класса C^∞ .

25.6. Показать, что проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ является фактор-пространством $S^n/\mathbb{Z}_2$ при некотором действии группы $\mathbb{Z}_2$ на сфере S^n . Найти это действие.

25.7. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ является фактор-пространством S^{2n+1}/S^1 при некотором действии группы S^1 на сфере S^{2n+1} . Найти это действие.

25.8. Построить в $\mathbb{R}^n$ гладкую (класса C^∞) функцию f , такую, что $f = 1$ на шаре радиуса 1, $f = 0$ вне шара радиуса 2 и $0 \leq f \leq 1$.

25.9. Пусть M — многообразие, $p \in U \subset M$ — окрестность точки p . Доказать, что существует такая гладкая функция f , что $0 \leq f \leq 1$, $f(p) = 1$ и $f(x) = 0$ на $M \setminus U$.

25.10. Пусть M — многообразие, $A = \bar{A}$ — замкнутое множество, $U \supset A$ — открытая область. Доказать, что существует такая гладкая функция f , что $0 \leq f \leq 1$, $f|_A = 1$ и $f|_{M \setminus U} = 0$.

25.11. (Слабый вариант теоремы Уитни.) Доказать, что компактное гладкое многообразие M^n вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ для подходящей размерности $N < \infty$.

25.12. Доказать, что гладкая функция на гладком компактном многообразии M может быть представлена как координата при некотором вложении $M \subset \mathbb{R}^N$.

25.13. Доказать, что произведение сфер вкладывается в $\mathbb{R}^N$ как подмногообразие коразмерности один.

25.14. Доказать, что если $\dim X < \dim Y$, а $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение, то образ отображения f не совпадает с Y .

25.15. а) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое многообразие погружается в $\mathbb{R}^3$.

б) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое ориентируемое многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^3$.

в) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое неориентируемое многообразие вкладывается в $\mathbb{R}^4$ и не вкладывается в $\mathbb{R}^3$.

25.16. Теорема Уитни. Доказать, что гладкое замкнутое многообразие M^n можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$.

Примечание. Воспользоваться задачей 25.11. После этого подобрать направление проектирования таким образом, чтобы избежать появления самопересечений и особых точек на проекции. См. рис. 99.

25.17. Привести пример погружения многообразия в $\mathbb{R}^n$, взаимно однозначного с образом, но не являющегося вложением.

25.18. Доказать, что для компактных многообразий вложение всегда является гомеоморфизмом на образ.

25.19. Привести пример такого вложения, что образ не является подмногообразием.

25.20. Пусть M — многообразие с границей ∂M . Доказать, что многообразие M можно так вложить в полупространство $(x_{N+1} \geq 0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, что ∂M лежит в подпространстве $(x_{N+1} = 0)$.

25.21. Пусть граница ∂M состоит из двух компонент связности $\partial M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Доказать, что многообразие M можно вложить в $\mathbb{R}^N \times [0, 1]$, причем M_1 лежит в $\mathbb{R}^N \times 0$, а M_2 лежит в $\mathbb{R}^N \times 1$.

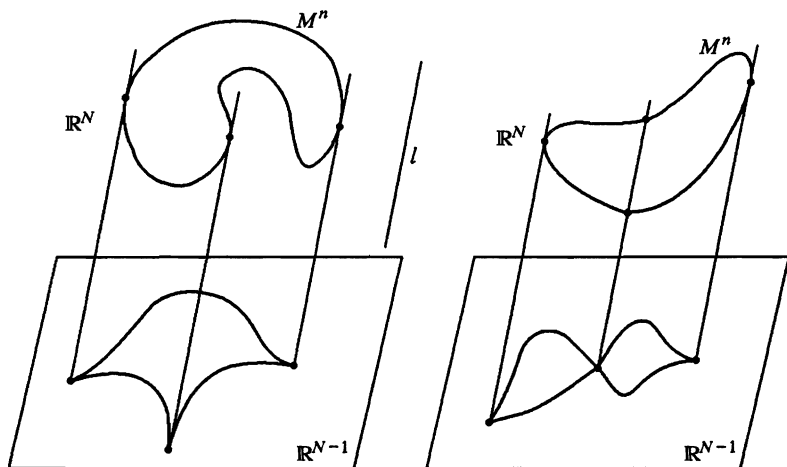


Рис. 99

25.22. Доказать, что некомпактное гладкое многообразие M^n (без края) можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ и погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$.

25.23. Рассмотрим половинку бутылки Клейна, изображенную на рис. 161 (см. ответы). Будем поднимать плоскость, содержащую край Γ этой поверхности, одновременно с этим деформируя Γ так, как показано на рис. 100. Полученную в результате плоскую

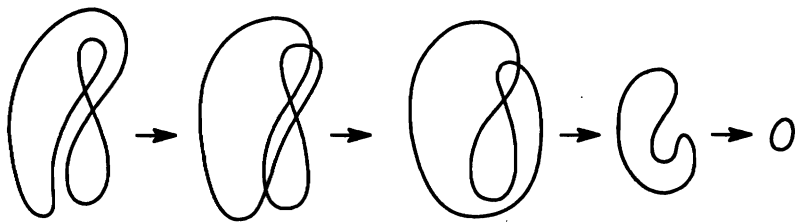


Рис. 100

окружность заклеим диском. Доказать, что получившаяся поверхность M (состоящая из исходной части бутылки Клейна, следа деформации Γ и диска) является погружением $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что M является поверхностью Боя (см. задачу 21.2).

25.24. Описать множество точек самопересечения построенного в предыдущей задаче погружения $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$. Указать кратности этих точек, т. е. указать, сколько листов поверхности пересекается в этой точке самопересечения поверхности.

25.25. Рассмотрим описанное в двух предыдущих задачах погружение $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $i(\mathbb{R}P^2)$ образ $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим в каждой точке $x \in i(\mathbb{R}P^2)$, не являющейся точкой самопересечения поверхности, отрезок длины 2ε , ортогональный $i(\mathbb{R}P^2)$ с центром в точке x , где ε — достаточно мало. Поскольку i — гладкое отображение, то полученный пучок ортогональных отрезков можно доопределить и в каждой точке самопересечения. При этом в каждой точке получится ровно столько отрезков, какова кратность точки. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ множество, состоящее из концов всех ортогональных отрезков. Доказать, что это — образ двумерной сферы при некотором гладком погружении в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, $M \subset Y$ — гладкое подмногообразие. *Отображение f называется трансверсальным вдоль подмногообразия M* , если для любой точки $x \in f^{-1}(M)$ касательное пространство $T_{f(x)}(Y)$ к многообразию Y есть сумма (вообще говоря, не прямая) касательного пространства $T_{f(x)}(M)$ к

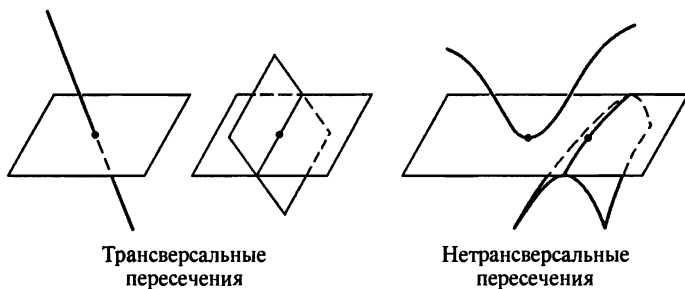


Рис. 101

многообразию M и образа $df(T_x(X))$ касательного пространства к многообразию X . Два подмногообразия M_1 и M_2 в многообразии X пересекаются трансверсально, если вложение одного из них является трансверсальным вдоль другого подмногообразия (см. рис. 101).

25.26. Пусть $f: X^n \rightarrow Y^n$ — гладкое отображение компактного замкнутого многообразия X в многообразие Y той же самой размерности n . Пусть y_0 — регулярное значение отображения f . Доказать, что $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек.

25.27. Доказать, что если $y \in Y$ — регулярная точка отображения $f: X \rightarrow Y$, то f — трансверсальное вдоль y отображение.

25.28. Доказать, что определение трансверсального пересечения не зависит от выбора порядка в паре M_1 и M_2 .

25.29. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ — трансверсальное отображение вдоль подмногообразия $M \subset Y$, то прообраз $f^{-1}(M)$ является подмногообразием в многообразии X . Вычислить размерность $f^{-1}(M)$.

25.30. Доказать, что любая простая замкнутая дуга с самопересечениями в $\mathbb{R}^2$ малым движением превращается в простую замкнутую дугу в $\mathbb{R}^3$ без самопересечений.

25.31. Выяснить, трансверсально ли пересекаются следующие подмногообразия:

- а) плоскость xy и ось z в $\mathbb{R}^3$;
- б) плоскость xy и плоскость, натянутая на векторы $(3, 2, 0)$ и $(0, 4, -1)$ в $\mathbb{R}^3$;
- в) подпространство $V \times \{0\}$ и диагональ в произведении $V \times V$;
- г) пространства симметрических и кососимметрических матриц в пространстве всех матриц.

25.32. Выяснить, для каких значений a поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a$ пересекаются трансверсально.

25.33. Показать, что множество $V_{n,k}$ всех ортонормированных систем из k векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ допускает структуру гладкого многообразия. Найти его размерность. Показать, что $V_{n,1} = S^{n-1}$, $V_{n,n} = O(n)$.

25.34. Показать, что множество $G_{n,k}$ всех k -мерных подпространств в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ допускает структуру гладкого многообразия. Найти его размерность. Показать, что $G_{n,1} = \mathbb{R}P^{n-1}$.

25.35. Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ — отображение, сопоставляющее точке $x \in S^n$ прямую, проходящую через точку x и начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$. Доказать, что f гладкое и что у него все точки регулярны.

25.36. Пусть $f: SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ сопоставляет каждой ортогональной матрице ее первый столбец. Доказать, что отображение f гладкое и что у него все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$.

25.37. Пусть $f: U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ сопоставляет каждой унитарной матрице ее первый столбец. Доказать, что отображение f гладкое и что у f все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$.

25.38. Пусть $f: V_{n,k} \rightarrow V_{n,s}$, $s \leq k$, — отображение, сопоставляющее ортонормированной системе из k векторов первые s ее векторов. Показать, что каждая точка является регулярной для отображения f . Показать, что прообраз $f^{-1}(y)$ гомеоморфен многообразию $V_{n-s,k-s}$.

25.39. Пусть $f: O(n) \rightarrow G_{n,k}$ — отображение, сопоставляющее каждой ортогональной матрице подпространство, порожденное первыми k столбцами. Показать, что у отображения f все точки регулярны. Показать, что прообраз $f^{-1}(y)$ гомеоморфен многообразию $O(n-k) \times O(k)$.

25.40. Пусть $f: X \times Y \rightarrow M$ — гладкое отображение, $m_0 \in M$ — регулярная точка. Рассмотрим семейство отображений $f_y: X \rightarrow$

→ M , $f_y(x) = f(x, y)$. Доказать, что точка m_0 регулярна для отображений f_y почти для всех значений параметра y , т.е. когда y пробегает открытое всюду плотное подмножество в Y .

25.41. Решить задачу 25.40 с заменой точки m_0 на подмногообразии $N \subset M$ и условия регулярности на условие трансверсальности отображений вдоль подмногообразия N .

25.42. Пусть поверхность M в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (например, $n = 3$), задана уравнением $f(x_1, \dots, x_n) = c$, где c является регулярным значением гладкой функции f . Доказать, что тогда M является ориентируемой поверхностью.

25.43. Проверить, ориентируемы ли следующие многообразия: а) группа $GL(n, \mathbb{R})$; б) группа $U(n)$; в) группа $SO(n)$.

25.44. Доказать, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо в точности для нечетных n .

25.45. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ ориентируемо.

25.46. Доказать, что произвольное комплексно-аналитическое многообразие ориентируемо.

25.47. Доказать, что пространство касательного расслоения многообразия является многообразием, причем всегда ориентируемым.

25.48. Доказать, что T^*M является многообразием. Ориентируемо ли оно?

25.49. Доказать, что объединение единичных сфер слоев касательного расслоения риманова n -мерного многообразия M является гладким многообразием размерности $(2n - 1)$. Доказать, что это многообразие расслаивается над M со слоем S^{n-1} .

25.50. Доказать, что плоское кольцо, бутылка Клейна и тор являются расслоенными пространствами.

25.51. Доказать, что расслоение над стягиваемой базой тривиально, т.е. является прямым произведением базы на слой.

25.52. Показать, что окружность, евклидово пространство и тор — параллелизуемые многообразия.

25.53. Доказать, что параллелизуемые многообразия ориентируемы. В частности, касательные расслоения проективной плоскости и бутылки Клейна нетривиальны.

25.54. Доказать, что если из двумерной замкнутой ориентированной поверхности выколоть точку, то полученное многообразие является параллелизуемым.

25.55. Доказать, что многообразие размерности n тогда и только тогда параллелизуемо, когда на нем имеется n линейно независимых гладких векторных полей.

25.56. Доказать, что многообразие, на котором определена структура группы Ли, параллелизуемо.

25.57. Доказать, что сфера S^2 не параллелизуема.

25.58. Привести пример гладкого отображения многообразий, при котором образ гладкой регулярной кривой перестает быть регулярным в некоторых точках.

25.59. Доказать, что линейно независимые векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ в точке $A \in M^n$, $k \leq n$, можно считать базисными векторами некоторой карты многообразия, т.е. существуют координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки A такие, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_A = \mathbf{a}_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

25.60. Доказать, что векторное поле $\mathbf{a}$ на многообразии, не обращающееся в нуль в точке A , является базисным для некоторой карты, содержащей точку A .

25.61. Рассмотрим векторные поля $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ на многообразии M^n , где $k \leq n$, линейно независимые в окрестности некоторой точки $A \in M^n$ и такие, что $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] = 0$ для всех i и j . Доказать, что в некоторой окрестности точки A можно задать координаты $(x^1, \dots, x^n)$ такие, что

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

25.62. Доказать, что ориентируемая 2-мерная поверхность имеет комплексную структуру.

25.63. Доказать, что многообразия $S^1 \times S^{2n-1}$, $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$ имеют комплексную структуру.

25.64. Доказать, что замкнутое нечетномерное риманово многообразие положительной кривизны ориентируемо.

25.65. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение замкнутых многообразий. Пусть f — наложение, причем все точки Y регулярны. Доказать, что для любой точки $y \in Y$ прообраз ее достаточно малой окрестности $U(y)$ гомеоморфен прямому произведению $U(y) \times f^{-1}(y)$, тем самым, f — расслоение. В частности, если Y — связное многообразие, то слои $f^{-1}(y)$ попарно диффеоморфны.

Функция $w = f(z^1, \dots, z^n)$, $z^k = x^k + iy^k$ называется *голоморфной*, если она непрерывно дифференцируема, а ее дифференциал является комплексной линейной формой в каждой точке $(z^1, \dots, z^n)$.

25.66. Показать, что если $f(z^1, \dots, z^n)$ — голоморфная функция, то

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x^k} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x^k} = -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y^k}.$$

25.67. Пусть $w^j = f^j(z^1, \dots, z^n)$ — голоморфная вектор-функция, отображающая $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Найти соотношение между вещественной матрицей Якоби этого отображения и его комплексной матрицей Якоби.

25.68. Доказать, что голоморфная вектор-функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ образует локальную систему координат тогда и только тогда, когда ее комплексный якобиан отличен от нуля.

25.69. Показать, что S^2 допускает комплексно-аналитическую структуру. Описать в явном виде простейший атлас карт.

25.70. Показать, что комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$ допускают комплексно-аналитическую структуру. Описать в явном виде простейший атлас карт.

§ 26. Тензорный анализ

26.1. Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства. Доказать изоморфизмы

$$\Lambda^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i(V_1) \otimes \Lambda^j(V_2),$$

$$S^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{i+j=k} S^i(V_1) \otimes S^j(V_2).$$

26.2. Доказать, что

$$T_{j_1}^{[i_1} \dots T_{j_p}^{i_p]} = T_{[j_1}^{[i_1} \dots T_{j_p]}^{i_p]} = T_{[j_1}^{i_1} \dots T_{j_p]}^{i_p]}.$$

26.3. Доказать, что если $v^{[i_1 i_2 i_3} v^{j_1 j_2] j_3} = 0$, то $v^{[i_1 i_2 i_3} v^{j_1] j_2 j_3} = 0$.

26.4. Верно ли, что если трехвалентный ковариантный тензор удовлетворяет условиям

$$T_{ijk} = T_{jik}, \quad T_{ijk} u^i u^j u^k = 0$$

при любом выборе контравариантного вектора u , то компоненты тензора удовлетворяют условию

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0.$$

26.5. Доказать, что если соотношение

$$u_{\alpha\beta}^{\gamma} v^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma} = 0$$

справедливо при любом выборе тензоров v^{α} , w_{α} , удовлетворяющих условию $v^{\alpha} w_{\alpha} = 0$, то

$$u_{(\alpha\beta)}^{\gamma} = s_{(\alpha} \delta_{\beta)}^{\gamma},$$

где s_{α} — некоторый тензор.

26.6. Доказать, что если размерность пространства V больше 2, то $\Lambda^2(\Lambda^2 V) \neq \Lambda^4 V$.

26.7. Доказать, что если $\text{tr } \Lambda^q A = 0$ для всех $q > 0$, то оператор A нильпотентен.

26.8. Пусть в пространстве V размерности n задан линейный оператор A . Если оператор $\Lambda^{n-1} A$ в пространстве $\Lambda^{n-1} V$ ненулевой, то он либо невырожден, либо имеет ранг 1.

26.9. Доказать, что если оператор A диагонализуем, то оператор $A^{\otimes k}$ также диагонализуем.

26.10. Доказать, что ранг тензора $A_{ij} = a_i b_j$ равен единице, а ранг тензора $a_i b_j + a_j b_i$ равен 2.

26.11. Какому условию должен удовлетворять тензор A_{ij} , чтобы он имел вид $A_{ij} = a_i b_j$?

26.12. Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам, то

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

26.13. Доказать, что если тензор T_{ijk} кососимметричен по первым двум индексам, то

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

26.14. Даны тензоры a_{ij} и b^{klm} . Построить из них путем одного умножения и свертывания тензоры первой, третьей и пятой валентностей. Сколько их будет?

26.15. Пусть тензор T_{ijkl} обладает свойствами

$$T_{hijk} + T_{hikj} = 0, \quad T_{hijk} + T_{hjki} + T_{hkij} = 0.$$

а) Доказать, что если $T_{hijk} - T_{hjki} = 0$, то $T_{hijk} = 0$.

б) Доказать, что если $T_{hijk} + T_{hjki} = 0$, то $T_{hijk} = 0$.

26.16. Показать, что если трехвалентный тензор T_{ij}^h удовлетворяет условиям

$$T_{ij}^h = T_{ji}^h, \quad T_{ij}^h u^i u^j = 0$$

для любого тензора (вектора) u^j , то тензор T_{ij}^h нулевой.

26.17. Показать, что если тензор $T_{i_1 \dots i_m}$ удовлетворяет условиям

$$T_{i_1 \dots i_m} u^{i_1} \dots u^{i_m} = 0$$

при любом выборе тензора (вектора) u^i , то $T_{(i_1 \dots i_m)} = 0$.

Пусть $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм областей евклидова пространства. Пусть тензорное поле T типа (p, q) на V имеет в координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ компоненты $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Ясно, что композиция $(x \circ \varphi)$

определяет криволинейные координаты на U . Определим тензорное поле φ^*T на U в этой системе координат следующей формулой:

$$(\varphi^*T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \circ \varphi.$$

Пусть X — гладкое векторное поле, а T — некоторое гладкое тензорное поле. Поле X определяет однопараметрическую группу φ_t (напомним, что φ_t определяется из дифференциального уравнения $\left. \frac{d}{dt} \varphi_t(P) \right|_{t=0} = X(P)$). Определим производную Ли тензорного поля T вдоль векторного поля X формулой

$$L_X T(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^* T)(P) - T(P)}{t}.$$

26.18. Доказать, что если тензорное поле T имеет тип $(0, 0)$, т. е. является гладкой функцией, то $\varphi^*T = T \circ \varphi$.

26.19. Доказать, что если тензорное поле T имеет тип $(1, 0)$, т. е. является векторным, то

$$(\varphi^*T)(P) = (d\varphi|_P)^{-1} T(\varphi(P)).$$

26.20. Доказать, что если тензорное поле ξ имеет тип $(0, 1)$, т. е. является ковекторным, то

$$(\varphi^*\xi)(P) = (d\varphi|_P)^* \xi(\varphi(P)).$$

Здесь $d\varphi|_P: T_P U \rightarrow T_{\varphi(P)} V$ — дифференциал отображения φ в точке $P \in U$, а $(d\varphi|_P)^*: T_{\varphi(P)}^* V \rightarrow T_P^* U$ — сопряженное отображение кокасательных пространств.

26.21. Показать, что операция $T \mapsto \varphi^*T$ сохраняет алгебраические операции с тензорными полями: сумму, умножение на функцию, тензорное произведение, свертку.

26.22. Пусть X и Y — векторные поля в области V , а $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм. Доказать, что $[\varphi^*X, \varphi^*Y] = \varphi^*[X, Y]$.

26.23. Доказать, что производная Ли — линейная операция.

26.24. Доказать, что если T и S — тензорные поля, а X — векторное поле, то

$$L_X(T \otimes S) = L_X T \otimes S + T \otimes L_X S.$$

26.25. Доказать, что производная Ли перестановочна со сверткой.

26.26. Доказать, что если X — векторное поле, а f — гладкая функция, то $L_X f = Xf$.

26.27. а) Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — локальные координаты в области U , а $\mathbf{X}$ — векторное поле с компонентами $(X^1, \dots, X^n)$ в координатах (x) . Доказать, что

$$(L_{\mathbf{X}} dx)^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k.$$

б) Доказать, что для ковектора $\xi = \xi_i dx^i$ имеет место формула

$$L_{\mathbf{X}} \xi = \left(X^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \xi_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

26.28. Доказать, что если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — векторные поля, то $L_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$.

26.29. Получить формулу для производной Ли тензорного поля типа (p, q) .

26.30. Доказать, что для дифференциальной формы ω и векторного поля $\mathbf{X}$ имеет место равенство $dL_{\mathbf{X}} \omega = L_{\mathbf{X}} d\omega$.

26.31. Доказать, что

$$L_{\mathbf{X}} \omega = i_{\mathbf{X}} d\omega + di_{\mathbf{X}} \omega,$$

где ω — дифференциальная форма, а $\mathbf{X}$ — векторное поле.

26.32. Для векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ доказать формулу:

$$\text{а) } [L_{\mathbf{X}}, i_{\mathbf{Y}}] = i_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}; \quad \text{б) } [L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}] = L_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}.$$

§ 27. Геодезические на многообразиях

27.1. Доказать, что геодезическое кручение линии $u = u(s)$, $v = v(s)$, расположенной на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, вычисляется по формуле

$$\kappa_g = (\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{m}}, \mathbf{m}),$$

где $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали поверхности.

27.2. Доказать следующее утверждение: для того чтобы линия на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке геодезическое кручение равнялось нулю.

27.3. Найти геодезические линии развертывающейся поверхности.

27.4. Доказать, что кручение геодезической линии, касающейся линии кривизны поверхности, равно нулю.

27.5. Доказать, что каждая плоская геодезическая линия, отличная от прямой, есть линия кривизны поверхности.

27.6. Доказать, что уравнения геодезических на многообразии M с метрикой (g_{ij}) можно записать в кокасательном расслоении T^*M в гамильтоновой форме:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

где $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ — стандартные координаты на кокасательном расслоении, $H(p, x) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_i p_j$. Кроме того, $p_i = g_{ij}\dot{x}^j$, где $\dot{x}^j$ — вектор скорости геодезической.

27.7. Рассмотрим поверхность с римановой метрикой. На ней имеются два типа кривых: окружности Дарбу и окружности Гаусса. *Окружностью Дарбу* называется линия на поверхности, имеющая постоянную геодезическую кривизну. *Окружностью Гаусса* (геодезической окружностью) называется множество точек, отстоящих от одной фиксированной точки на одно и то же расстояние, измеренное вдоль геодезических радиусов. Доказать, что множество окружностей Дарбу совпадает с множеством окружностей Гаусса тогда и только тогда, когда поверхность является поверхностью постоянной кривизны.

27.8. Доказать, что двумерная поверхность, на которой длина любой окружности Гаусса равна $2\pi R$, где R — радиус, отложенный вдоль геодезических, локально изометрична плоскости.

27.9. а) Доказать, что на компактном односвязном многообразии M^n всегда существует пара сопряженных точек.

б) Что будет, если M^n не односвязно?

в) Рассмотрим на многообразии пучок геодезических, исходящих из одной точки. На каждой ли из них найдется сопряженная точка?

27.10. Описать все поверхности вращения, на которых все геодезические замкнуты.

27.11. а) Доказать, что на линейчатой поверхности любой отрезок образующей является кратчайшей между его конечными точками.

б) Доказать более общий факт: на полной односвязной поверхности отрицательной кривизны дуга любой геодезической является кратчайшей между своими концевыми точками.

27.12. Дать пример двух неизометричных римановых многообразий с общими геодезическими. Многообразия считаются имеющими общие геодезические, если существует диффеоморфизм одного многообразия на другое, переводящий геодезические в геодезические.

27.13. Доказать, что все компактные замкнутые поверхности геодезически полные.

Следующие задачи посвящены матричным группам Ли. В дальнейшем, в одном из следующих параграфов, группы Ли будут рассматриваться в полной общности, т. е. как гладкие многообразия, снабженные структурой группы в гладкой категории.

В этом параграфе в целях упрощения изложения мы ограничимся рассмотрением лишь тех групп Ли, которые реализуются в виде тех или иных групп матриц. Такие группы Ли называются *матричными*. Рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{R})$ — группу невырожденных

матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами. Она является открытой областью в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех вещественных матриц размера $n \times n$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^{n^2}$ обычную евклидову метрику, заданную в следующем виде:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr } X \cdot Y^T,$$

где Y^T — транспонированная матрица. Эта метрика индуцирует на группе $GL(n, \mathbb{R})$ и на всех ее подгруппах риманову метрику. Такая метрика на матричной группе G называется *метрикой Киллинга*. Можно также рассматривать случай $GL(n, \mathbb{C})$, где риманова метрика задается формулой

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re tr } X \cdot \bar{Y}^T.$$

Однопараметрическими (одномерными) подгруппами матричной группы G являются в точности подгруппы вида $\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\}$, где X — произвольная матрица из касательного пространства к группе G в ее единице E .

Напомним, что касательное пространство L к матричной группе G в единице, снабженное билинейной кососимметрической операцией $[X, Y] = XY - YX$, является алгеброй Ли, в частности, выполняется тождество Якоби

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

Здесь XY — обычное произведение матриц. Операция $[X, Y]$ называется *коммутатором*. На алгебре Ли L матричной группы G определены линейные операторы Ad_g и ad_X , задаваемые формулами

$$\text{Ad}_g(X) = gXg^{-1}, \quad \text{ad}_X(Y) = [X, Y],$$

где $g \in G$, $X, Y \in L$.

Векторное поле V на группе G называется левинвариантным (правинвариантным), если оно переходит в себя при всех левых (правых) сдвигах группы. Такое поле однозначно определяется своим значением в единице группы, т.е. некоторым вектором X из алгебры Ли L . Такое поле обозначается L_X (соответственно R_X).

27.14. а) Доказать, что оператор ad_X является дифференцированием алгебры Ли L , т.е.

$$\text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)].$$

Показать, что эта формула эквивалентна тождеству Якоби.

б) Доказать, что определенная выше риманова метрика на произвольной подгруппе G группы $GL(n, \mathbb{R})$ является биинвариантной, т.е. правые и левые сдвиги на G являются ее изометриями.

в) Доказать аналогичное предыдущему пункту утверждение для подгрупп группы $GL(n, \mathbb{C})$.

г) Доказать, что для любого $X \in L$ оператор ad_X кососимметричен относительно метрики Киллинга:

$$\langle \text{ad}_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, \text{ad}_X(Z) \rangle.$$

д) Доказать, что для любого $g \in G$ оператор Ad_g сохраняет метрику Киллинга, т. е. $\langle \text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$.

27.15. Пусть G — матричная группа, L — ее алгебра Ли. Введем связность ∇ на группе G , полагая для левоинвариантных полей L_X, L_Y

$$\nabla_{L_X} L_Y = \frac{1}{2} L_{[X, Y]} = \frac{1}{2} [L_X, L_Y].$$

Отметим, что эта формула, как следует из пункта а) этой задачи, однозначно определяет связность не только на левоинвариантных, но и на произвольных векторных полях на группе G .

а) Показать, что приведенная выше формула однозначно определяет символы Кристоффеля Γ_{jk}^i .

б) Доказать, что эта связность на группе G симметрична и согласована с метрикой Киллинга.

в) Доказать, что геодезическими матричной группы G с описанной выше римановой метрикой, проходящими через единицу, являются все ее однопараметрические подгруппы и только они. Доказать, что все остальные геодезические на G получаются правыми (левыми) сдвигами однопараметрических подгрупп.

г) Доказать, что тензор кривизны R описанной в этой задаче связности на матричной группе G задается на левоинвариантных векторных полях L_X, L_Y и L_Z формулами

$$R(L_X, L_Y)L_Z = -\frac{1}{4}L_{[[X, Y], Z]},$$

$$\langle R(L_X, L_Y)L_Z, L_W \rangle = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, W] \rangle.$$

Отметим, что этих формул достаточно для задания тензора кривизны R на произвольных векторных полях на группе G .

д) Показать, что из указанных соотношений однозначно восстанавливаются компоненты тензора кривизны R_{jkl}^i .

27.16. Доказать, что экспоненциальное отображение $\exp: L \rightarrow G$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нулевой матрицы в алгебре Ли L на некоторую окрестность единичной матрицы в группе G .

27.17. а) Вывести для группы $SL(2, \mathbb{R})$ явную формулу для экспоненциального отображения.

б) Показать, что для группы $SL(2, \mathbb{R})$ экспоненциальное отображение не является отображением «на».

в) Исследовать случай группы $SL(2, \mathbb{C})$.

г) Доказать, что экспоненциальное отображение для связной компактной группы G всегда является отображением «на».

§ 28. Тензор кривизны

28.1. Вычислить скалярную кривизну группы $SO(n)$ с двусторонней инвариантной метрикой.

28.2. Пусть в n -мерном римановом пространстве выбраны линейно независимые векторные поля $X_1, \dots, X_n$. Пусть $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ и $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$. Выразить Γ_{ij}^k через g_{ij} и c_{ij}^k , если $\nabla_{X_j} X_i = \Gamma_{ij}^k X_k$.

28.3. Доказать, что тензор кривизны n -мерного многообразия имеет $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ алгебраически независимых компонент. Иными словами, у тензора кривизны общего вида нет других симметрий, кроме «известных».

28.4. При каком условии симметрическая связность ∇ является римановой, т. е. существует риманова метрика g_{ij} такая, что $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$?

28.5. а) Доказать, что на N -мерном многообразии набор величин

$$C_{lmnk} = R_{lmnk} - \frac{1}{N-2} (g_{ln} R_{mk} - g_{lk} R_{mn} - g_{mn} R_{lk} + g_{mk} R_{ln}) + \\ + \frac{R}{(N-1)(N-2)} (g_{ln} g_{mk} - g_{lk} g_{mn})$$

является тензором. Тензор C_{mlk}^n называется *тензором Вейля*.

б) Доказать, что он имеет те же алгебраические свойства, что и тензор кривизны, и, кроме того, удовлетворяет $\frac{N(N+1)}{2}$ условиям $C_{mlk}^l = 0$.

в) Доказать, что две римановы метрики с одинаковыми тензорами Вейля конформно эквивалентны.

28.6. а) Показать, что на n -мерном многообразии ($n \geq 3$) из метрического тензора g_{ij} и его тензора кривизны R_{ijkl} можно построить $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$ алгебраически независимых скаляров.

б) Показать, что для $n = 3$ такими величинами являются скалярная кривизна R , свертка $R_{ij} R^{ij}$ и $\frac{\det R_{ij}}{\det g_{ij}}$, где R_{ij} — тензор Риччи.

28.7. Доказать, что если тензор кривизны риманова многообразия тождественно равен 0, то результат параллельного перенесения вдоль кривой γ не зависит от гомотопии пути γ при условии, что концы пути неподвижны.

28.8. а) Если у риманова односвязного многообразия $R_{jkl}^i = 0$, то $TM^n = M^n \times \mathbb{R}^n$, где TM — касательное расслоение многообразия M . Иными словами, в этом случае касательное расслоение тривиально, а само многообразие параллелизуемо.

б) Выяснить, что происходит в неодносвязном случае.

28.9. Доказать, что любое направление в $T_x M$ в произвольной точке риманова многообразия M является главным направлением тензора Риччи в том и только в том случае, когда M является пространством Эйнштейна.

28.10. Показать, что следующие метрики имеют постоянную кривизну. Найти эту кривизну:

а) $ds^2 = du^2 + dv^2$;

б) $ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{a} dv^2$;

в) $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2$, $a = \operatorname{const} \neq 0$.

28.11. Доказать, что аффинная связность общего вида удовлетворяет тождеству Бьянки $\nabla_{[l} R_{km]j}^i = S_{[lk}^p R_{m]pj}^i$.

28.12. Пусть $\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i du^k$ — формы связности,

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{kmj}^i du^k \wedge du^m$$

— формы кривизны связности. Доказать, что выполняются структурные уравнения Картана

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

28.13. Показать, что формулу Бьянки можно записать в виде

$$d\Omega_j^i = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k.$$

28.14. Пусть фиксирована произвольная аффинная связность без кручения. Пусть в окрестности U некоторой точки O выбраны координаты $(x^1, \dots, x^n)$, причем координаты точки O равны $(x_0^1, \dots, x_0^n)$. Введем новые координаты $(x^1, \dots, x^n)$ в U , полагая

$$x^{k'} = (x^k - x_0^k) + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j).$$

Доказать, что в новой системе координат точка O имеет нулевые координаты и что символы Кристоффеля обращаются в точке O в нуль. Такая система координат называется *геодезической*.

28.15. Проверить, что в геодезической системе координат в точке O значения компонент тензора кривизны и его ковариант-

ных производных задаются формулами

$$R_{ij \cdot k}^h(O) = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h(O)}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^h(O)}{\partial x^k},$$

$$\nabla_l R_{ij \cdot k}^h = \frac{\partial^2 \Gamma_{ki}^h(O)}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ji}^h(O)}{\partial x^k \partial x^l}.$$

28.16. а) Учитывая предыдущую задачу, проверить справедливость формулы Бьянки

$$\nabla_m R_{ikl}^n + \nabla_l R_{imk}^n + \nabla_k R_{ilm}^n = 0.$$

б) Доказать для тензора Риччи R_m^l и скалярной кривизны R равенство

$$\nabla_l R_m^l = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_m}.$$

28.17. Пусть H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе некоторой криволинейной системы координат в $\mathbb{R}^3$. Доказать соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial s} q^1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} q^2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^3 \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} q^3 \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q^2 \partial q^3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3;$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial q^3 \partial q^1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1;$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial q^1 \partial q^2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2.$$

28.18. Доказать, что гладкие функции

$$H_1(q^1, q^2, q^3), \quad H_2(q^1, q^2, q^3), \quad H_3(q^1, q^2, q^3),$$

удовлетворяющие соотношениям предыдущей задачи, являются коэффициентами Ламе для некоторого преобразования

$$x_s = x_s(q^1, q^2, q^3), \quad s = 1, 2, 3.$$

28.19. Доказать, что фундаментальная группа полного риманова многообразия неположительной кривизны не содержит эле-

ментов конечного порядка. Доказать, что $\pi_1(M)$, где M — полное риманово многообразие строго отрицательной кривизны, обладает следующим свойством: если два элемента коммутируют (т. е. $ab = ba$, где $a, b \in \pi_1(M)$), то a и b принадлежат одной циклической подгруппе.

28.20. Доказать, что замкнутое ориентируемое риманово многообразие M^n строго положительной кривизны и четной размерности односвязно.

28.21. а) Доказать, что любое компактное замкнутое риманово многообразие постоянной положительной кривизны γ изометрично либо сфере S^n , либо $\mathbb{R}P^n$ (радиуса $1/\sqrt{\gamma}$).

б) Пусть M^n — компактное замкнутое односвязное полное риманово многообразие и пусть $C(l)$ — множество первых сопряженных точек для некоторой точки $l \in M^n$. Доказать, что если M^n — симметрическое пространство, то дополнение $M^n \setminus C(l)$ гомеоморфно открытому диску.

28.22. Доказать, что полное некомпактное риманово многообразие положительной кривизны и размерности m , где либо $m = 2$, либо $m \geq 5$, диффеоморфно $\mathbb{R}^m$.

28.23. Пусть x, y — две близкие точки на стандартной сфере S^2 и пусть функция $f(z)$ — площадь геодезического треугольника с вершинами в точках x, y, z .

а) Является ли функция $f(z)$ гармонической функцией на сфере S^2 ?

б) Исследовать случай n -мерной сферы (здесь $f(z)$ — объем геодезического симплекса, одна грань которого фиксирована, а z — свободная вершина).

в) Исследовать тот же самый вопрос на плоскости Лобачевского.

28.24. Доказать, что если M^n — полное односвязное риманово многообразие, такое, что n — нечетно и на M^n существует точка p , такая, что множество первых сопряженных с p точек регулярно и имеет постоянный порядок k , то $k = n - 1$ и M^n гомеоморфно сфере S^n (под порядком точки понимается ее кратность).

§ 29. Векторные поля

29.1. Найти производную функции $f = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $P = (1, 2)$ по направлению кривой $y^2 = 4x$.

29.2. Найти производную функции $f = \arctg(y/x)$ в точке $P = (2, -2)$ по направлению кривой $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

29.3. Найти производную функции f в точке P по направлению кривой γ :

а) $f = x^2 + y^2$, $P = (1, 2)$, $\gamma: x^2 + y^2 = 5$;

б) $f = 2xy + y^2$, $P = (\sqrt{2}, 1)$, $\gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

в) $f = x^2 - y^2$, $P = (5, 4)$, $\gamma: x^2 - y^2 = 9$;

г) $f = \ln(xy + yz + xz)$, $P = (0, 1, 1)$, $\gamma: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$;

д) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $P = (0, R, \frac{\pi a}{2})$, $\gamma: x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at$.

29.4. Найти производную функции $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $P = (x, y, z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

29.5. Найти производную функции $f = f(x, y, z)$ по направлению градиента функции g .

29.6. Пусть $\mathbf{v}(x, y, z)$ — поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси. Показать, что:

а) $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$;

б) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 2\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — вектор угловой скорости.

29.7. Пусть $\mathbf{X} = (x, y, z)$, $\mathbf{Y}$ — постоянное векторное поле. Показать, что $\operatorname{rot}(\mathbf{Y} \times \mathbf{X}) = 2\mathbf{Y}$.

29.8. Показать, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$.

29.9. Доказать формулу

$$\Delta(FG) = F\Delta G + G\Delta F + 2\langle \operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G \rangle.$$

29.10. Решить уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{X} = \mathbf{Y}$:

а) $\mathbf{Y} = (1, 1, 1)$; б) $\mathbf{Y} = (2y, 2z, 0)$;

в) $\mathbf{Y} = (0, 0, e^x - e^y)$; г) $\mathbf{Y} = (6y^2, 6z, 6x)$;

д) $\mathbf{Y} = (3y^2, -3x^2, -(y^2 + 2x))$;

е) $\mathbf{Y} = (0, 2 \cos xz, 0)$;

ж) $\mathbf{Y} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$;

з) $\mathbf{Y} = (ye^{x^2}, 2yz, -(2xyze^{x^2} + z^2))$.

29.11. Доказать, что каждому гладкому векторному полю на компактном многообразии соответствует однопараметрическая группа диффеоморфизмов φ_t , траектории которой касаются данного векторного поля.

29.12. Пусть V — линейное конечномерное пространство векторных полей, замкнутое относительно коммутатора, т.е. $[\xi, \eta] \in V$ при $\xi, \eta \in V$. Показать, что V является алгеброй Ли.

29.13. В предыдущей задаче показать, что соответствующая алгебре V односвязная группа Ли G действует на компактном многообразии, причем каждое поле $\xi \in V$ задает одномерную подгруппу в группе G , орбиты действия которой касаются векторного поля ξ .

29.14. Пусть P, Q — две произвольные точки в диске $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Найти такой диффеоморфизм φ пространства $\mathbb{R}^n$, чтобы $\varphi(P) = Q$, $\varphi(x) = x$, если $x \notin D^n$.

29.15. а) Построить на стандартной сфере S^3 три линейно независимых в каждой точке гладких векторных поля.

б) Найти в явном виде интегральные траектории полей, получающихся умножением радиус-вектора точки сферы на мнимые кватернионы i, j, k . Здесь сфера S^3 реализована как множество кватернионов единичной длины.

29.16. Доказать, что на многообразии каждой однопараметрической группе гладких гомеоморфизмов соответствует гладкое векторное поле скоростей траекторий точек.

29.17. Привести пример векторного поля на некомпактном многообразии, траектории которого не порождаются действием какой-либо однопараметрической группы преобразований.

29.18. а) Доказать, что для любых двух точек x_1 и x_2 открытого шара $\overset{\circ}{D}^n$ существует диффеоморфизм φ шара на себя, который меняет точки x_1 и x_2 , т. е. $\varphi(x_1) = x_2$ и $\varphi(x_2) = x_1$.

б) Доказать, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{D}^n$ существует однопараметрическая группа диффеоморфизмов φ_t такая, что φ_0 — тождественное отображение и $\varphi_1(x_1) = x_2$.

в) Пусть X — гладкое связное многообразие, x_0, x_1 — две произвольные точки. Найти такую однопараметрическую группу диффеоморфизмов φ_t , чтобы φ_0 было тождественным отображением и $\varphi_1(x_0) = x_1$. Показать, что без ограничения общности можно считать, что все преобразования φ_t тождественны вне некоторого компакта.

29.19. Пусть конечная группа G гладко действует на гладком многообразии X . Доказать, что если действие группы G свободно (т. е. каждая точка $x \in X$ остается на месте только при действии единицы группы G), то фактор-пространство X/G является многообразием.

29.20. Пусть $f(z)$ — комплексно-аналитическая функция одной переменной. Доказать, что особые точки (нули) векторных полей $\text{grad Re } f(z)$, $\text{grad Im } f(z)$ совпадают с нулями производной $f'(z)$.

29.21. Найти интегральные траектории потока $\mathbf{v}_1(x)$, ортогонального потоку $\mathbf{v}_2(x)$, где $\mathbf{v}_2(x) = \text{grad } f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x)$ — значение угла $\angle AxB$. Здесь A, B — фиксированные точки плоскости $\mathbb{R}^2$, x — переменная точка.

29.22. Доказать, что безвихревой поток $\mathbf{v} = (P, Q)$, где P, Q — компоненты потока на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, потенциален, т. е. $\mathbf{v} = \text{grad } f(x, y)$ для некоторой гладкой функции f . Что можно сказать о потенциале f , если поток еще и несжимаем, т. е. $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$?

29.23. Пусть векторное поле ξ удовлетворяет условию $\operatorname{div}(\xi) = 0$. Показать, что оператор сдвига вдоль интегральных траекторий унитарен.

29.24. Найти все гомотопические классы векторных полей без особенностей на торе T^2 . Гомотопия должна проходить в классе векторных полей без особых точек.

29.25. Доказать, что если векторное поле X на 2-мерном торе гомотопно в классе векторных полей без особых точек полю $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$, то оно имеет периодическую траекторию.

29.26. Найти наибольшее число линейно независимых касательных векторных полей на гладкой замкнутой поверхности M^2 .

29.27. Пусть m, n — числа вращений векторного поля на торе T^2 , $\lambda = (m, n)$. Доказать, что у этого поля существует λ периодических решений (замкнутых траекторий).

29.28. Теорема Пуанкаре–Бендиксона. Пусть в некоторой области на плоскости задано векторное поле. Зафиксируем в этой области некоторое компактное множество K , не содержащее особых точек векторного поля. Если в K существует точка такая, что интегральная траектория векторного поля, выходящая из этой точки, не покидает K , то в K обязательно существует периодическая траектория векторного поля.

29.29. Пусть точка P на плоскости является предельной для некоторой траектории векторного поля, т.е. она принадлежит замыканию этой траектории. Доказать, что траектория, проходящая через P , является предельной для исходной траектории.

29.30. Доказать, что множество векторных полей, обладающих только изолированными особенностями, линейно связно.

29.31. Доказать, что сумма индексов особенностей векторного поля на замкнутом многообразии не меняется при гладких деформациях.

29.32. Доказать, что множество всех интегральных траекторий векторного поля $v(x) = (x^1, -x^0, x^3, -x^2)$, где

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in S^3: (|x| = 1) \subset \mathbb{R}^4,$$

гомеоморфно сфере S^2 . Найти связь с расслоением Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. Как связно это векторное поле с кватернионами?

29.33. Положим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Показать, что функция f голоморфна тогда и только тогда, когда $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(f) \equiv 0$ для всех k (см. также задачу 25.66).

29.34. а) Доказать, что произвольное двумерное ориентированное многообразие после выбрасывания одной точки становится параллелизуемым.

б) Верно ли это утверждение для неориентируемых поверхностей?

в) Можно ли сделать неориентируемую поверхность (с краем или без) параллелизуемой, выбрасывая из нее точки и вложенные окружности?

29.35. а) Построить на замкнутой двумерной поверхности гладкую функцию ровно с тремя критическими точками.

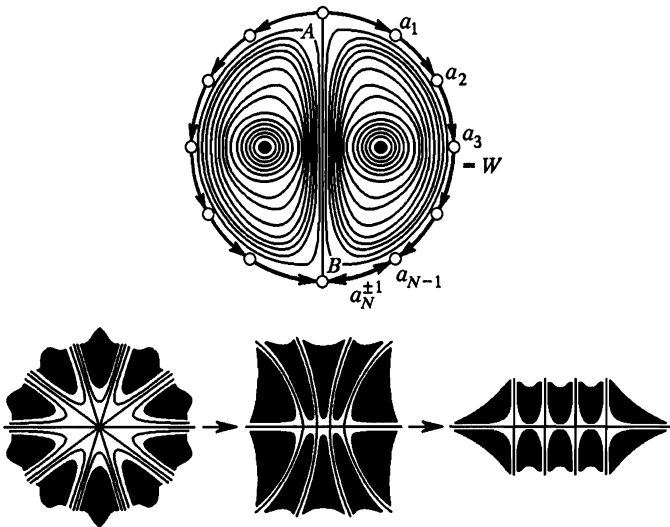


Рис. 102

б) Для какой поверхности такая функция может являться функцией Морса (это означает, что все ее критические точки невырождены) (см. рис. 102)?

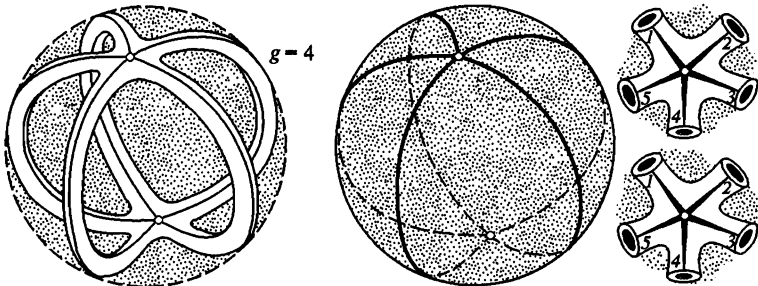


Рис. 103

29.36. а) Построить на замкнутой двумерной поверхности гладкую функцию ровно с четырьмя критическими точками.

б) Для какой поверхности такая функция может являться функцией Морса (это означает, что все ее критические точки невырождены) (см. рис. 103)?

§ 30. Группы преобразований

30.1 Пусть конечная группа G гладко действует на многообразии X и $x_0 \in X$ — неподвижная точка для действия любого элемента группы G . Доказать, что в окрестности точки x_0 найдется локальная система координат, в которой действие группы G линейно.

30.2. Обобщить предыдущую задачу на случай произвольной компактной группы Ли.

30.3. Доказать, что множество всех неподвижных точек действия конечной группы G на гладком многообразии является объединением гладких подмногообразий (вообще говоря, различных размерностей).

30.4. Пусть G — группа Ли. Показать, что действие группы G на себе с помощью левых (правых) сдвигов является гладким.

30.5. Пусть группа Ли G действует на себе с помощью внутренних автоморфизмов. Доказать, что множество неподвижных точек совпадает с центром группы G .

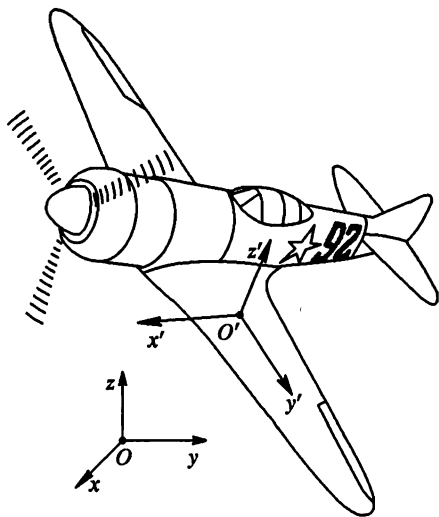


Рис. 104

30.6. Доказать, что группа изометрий евклидова пространства порождается ортогональными преобразованиями и параллельными переносами (см. рис. 104). На этом рисунке репер $Oxyz$ —

фиксированный, а репер $O'x'y'z'$, жестко связанный с самолетом, получается из репера $Oxyz$ с помощью изометрии евклидова пространства.

30.7. Доказать, что группа изометрий стандартной n -мерной сферы изоморфна группе ортогональных преобразований $(n+1)$ -мерного евклидова пространства.

30.8. Доказать, что группы Ли $Sp(1)$ и $SU(2)$ изоморфны. Доказать, что они диффеоморфны сфере S^3 . Установить связь с кватернионами.

30.9. а) В пространстве кватернионов $\mathbb{H}$ зададим линейное преобразование L_A формулой $L_A: x \mapsto Ax$, где $x, A \in \mathbb{H}$ и модуль A равен 1. Доказать, что множество всех линейных преобразований вида L_A образует группу, изоморфную $SU(2)$.

б) В пространстве кватернионов $\mathbb{H}$ рассмотрим линейные преобразования, заданные формулой $L_{A,B}: x \mapsto Ax B$, где $x, A, B \in \mathbb{H}$ и модули A и B равны 1. Доказать, что множество всех таких преобразований образует группу, изоморфную $SO(4)$.

в) Доказать, что $SO(4)$ изоморфна фактор-группе $S^3 \times S^3 / \mathbb{Z}_2$, где S^3 снабжена структурой группы $SU(2) \cong Sp(1)$.

г) Найти фундаментальную группу $SO(n)$ для любого n . Рассмотреть вначале случаи $n = 3$ и $n = 4$.

30.10. Обозначим через $A_z(\varphi)$, $A_y(\varphi)$, $A_x(\varphi)$ соответственно следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что это матрицы поворотов относительно соответствующих осей координат. Любую матрицу $A \in SO(3)$ можно представить в виде

$$A = A_i(\varphi)A_j(\theta)A_i(\psi)$$

трех вращений относительно двух осей координат. Здесь индексы i и j принимают значения в множестве $\{x, y, z\}$, причем $i \neq j$. Рисунок 105 соответствует представлению матрицы A в виде произведения $A_z(\varphi)A_x(\theta)A_z(\psi)$.

Углы φ, θ, ψ называются *углами Эйлера*.

а) Сколько различных вариантов имеется для выбора углов Эйлера?

б) Доказать, что углы Эйлера являются локальными регулярными координатами почти на всей группе $SO(3)$. Найти мно-

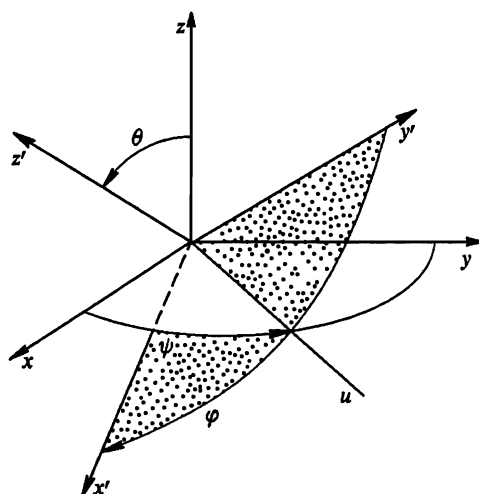


Рис. 105. Углы Эйлера, ось u является пересечением плоскостей Oxy и $Ox'y'$

жество матриц из $SO(3)$, для которых углы Эйлера не являются регулярными координатами.

в) Найти выражение для метрики Киллинга на $SO(3)$ в углах Эйлера.

г) Найти объем группы $SO(3)$.

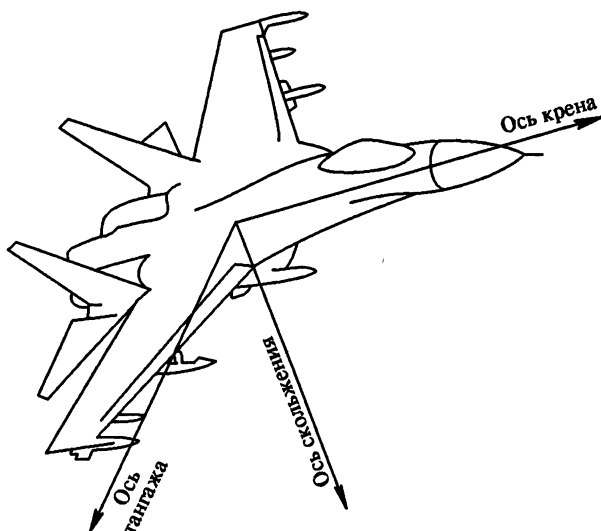


Рис. 106. Навигационные углы — углы поворотов относительно указанных осей

30.11. Не только углы Эйлера могут служить координатами на группе $SO(3)$. В самом деле, произвольная матрица $A \in SO(3)$ представляется в виде

$$A = A_i(\varphi)A_j(\theta)A_k(\psi),$$

где индексы i, j, k принимают различные значения в множестве $\{x, y, z\}$. В этом случае углы φ, θ и ψ называются *навигационными углами* (см. рис. 106).

а) Сколько различных вариантов имеется для выбора навигационных углов?

б) Доказать, что навигационные углы являются локальными регулярными координатами почти на всей группе $SO(3)$. Найти множество матриц из $SO(3)$, для которых навигационные углы не являются регулярными координатами.

в) Найти выражение для метрики Киллинга на $SO(3)$ в навигационных углах.

30.12. Доказать, что $O = \frac{1+A}{1-A}$ является ортогональным преобразованием $\mathbb{R}^3$. Найти его ось вращения, угол поворота и углы Эйлера, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

30.13. Найти ось вращения и угол поворота, если все углы Эйлера ортогонального преобразования равны:

а) $\pi/3$, б) $\pi/4$.

30.14. а) Доказать, что группы Ли $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ связны.

б) Доказать, что в группе $O(n)$ две связные компоненты.

в) Найти число связных компонент группы движений псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}_1^n$.

г) Доказать, что группа $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm E\}$ связна.

30.15. Реализуем группу $U(n)$ и ее алгебру Ли $\mathfrak{u}(n)$ подмножествами в евклидовом пространстве всех квадратных комплексных матриц размера $n \times n$ (естественное вложение унитарных и косозермитовых матриц в это пространство).

а) Доказать, что $U(n) \subset S^{2n^2-1}$, где сфера S^{2n^2-1} вложена стандартно в $\mathbb{R}^{2n^2} = \mathbb{C}^{n^2}$ и имеет радиус $\sqrt{n}$.

б) Доказать, что риманова метрика, индуцированная на группе $SU(n)$, рассматриваемой как подмногообразие в S^{2n^2-1} , совпадает с двусторонне инвариантной метрикой Киллинга на группе $SU(n)$.

в) Найти пересечение $U(n) \cap u(n)$ как подмногообразие в пространстве $\mathbb{C}^{n^2}$.

30.16. Сформулировать и решить аналогичные задачи для групп $O(n)$ и $Sp(n)$.

30.17. Доказать, что группа всех изометрий риманового многообразия является гладким многообразием, т.е. является группой Ли. Оценить сверху ее размерность через размерность риманова многообразия.

30.18. Перечислить все конечномерные группы Ли преобразований прямой $\mathbb{R}^1$.

30.19. Найти группу всех дробно-линейных преобразований, сохраняющих диск $|z| \leq 1$ в комплексной плоскости. Доказать, что эта группа изоморфна группе $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, а также группе всех преобразований, сохраняющих форму $dx^2 + dy^2 - dt^2$ в $\mathbb{R}^3(x, y, t)$. Установить связь с геометрией Лобачевского.

30.20. Доказать, что связная компонента единицы группы изометрий плоскости Лобачевского (в стандартной метрике постоянной кривизны) изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Найти полное число компонент в группе движений плоскости Лобачевского.

30.21. Доказать, что фазовое пространство системы, состоящей из одной материальной точки, скользящей по двумерной сфере с постоянной по модулю скоростью, диффеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

30.22. Материальный шар зажат между двумя параллельными плоскостями, касательными к нему. При движении плоскостей, сохраняющем параллельность плоскостей и расстояние между ними, шар вращается без скольжения в точках контакта. Рассмотрим все такие перемещения шара, индуцированные движением верхней плоскости, при которых нижняя точка контакта шара описывает замкнутую траекторию на нижней плоскости, т.е. точка контакта возвращается на прежнее место. Какая часть группы $SO(3)$ может быть получена такими вращениями шара (фиксируются повороты шара после возвращения в исходную точку)?

30.23. Найти фактор-группу G/G_0 , где G — группа движений плоскости Лобачевского со стандартной метрикой, G_0 — связная компонента единицы. Указать все конформные преобразования этой стандартной метрики.

30.24. Найти все дискретные подгруппы в группе G аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}^1$.

30.25. Доказать, что левоинвариантные векторные поля на группе Ли G находятся во взаимно-однозначном соответствии с векторами касательного пространства $T_e(G)$ в единице группы G .

30.26. Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных векторных полей на группе Ли G снова является левоинвариантным векторным полем, т. е. операция коммутирования превращает пространство $T_e(G)$ в алгебру Ли.

30.27. Пусть ξ — левоинвариантное векторное поле, φ_t — соответствующая ему однопараметрическая группа преобразований. Доказать, что φ_t является правым сдвигом при любом t , т. е. $\varphi_t(g) = gh_t$, где h_t — некоторый элемент группы G .

Пусть G — группа Ли, $x^1, \dots, x^n$ — локальная система координат в окрестности единицы (координаты которой будем считать нулевыми). Тогда операция умножения индуцирует векторнозначную функцию $q = q(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$. Разложение функции $q = q(x, y)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$q^i = \sum_{j,k} c_{jk}^i x^j y^k + \varepsilon_3^i,$$

где ε_3^i — величина третьего порядка малости относительно координат x^i, y^i . Билинейное выражение

$$\zeta^i = \sum_{j,k} c_{jk}^i \xi^j \eta^k$$

определяет некоторую операцию над касательными векторами в единице группы G . Эта операция обозначается $\zeta = [\xi, \eta]$, а ζ называется *коммутатором векторов ξ и η* . Таким образом, касательное пространство $T_e(G)$ превращается в алгебру, которая называется *алгеброй Ли группы Ли G* .

30.28. Показать, что в алгебре Ли L выполнены следующие свойства:

- а) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$;
- б) тождество Якоби

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0.$$

30.29. Проверить, что операция в алгебре Ли L переходит в коммутатор векторных полей на группе Ли G , если вектору ξ сопоставляется (право-) левоинвариантное векторное поле.

30.30. Пусть $x(t), y(t)$ — две кривые, проходящие через единицу группы G , причем $\xi = \frac{dx}{dt}(0)$, $\eta = \frac{dy}{dt}(0)$. Показать, что

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt} \left(x(\sqrt{t})y(\sqrt{t})x^{-1}(\sqrt{t})y^{-1}(\sqrt{t}) \right) \Big|_{t=0}.$$

30.31. Пусть $\gamma(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы Ли. Предположим, что γ пересекает сама себя. Показать, что существует такое число $L > 0$, что $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в частности, следует, что любая однопараметрическая подгруппа группы Ли, рассматриваемая как одномерная группа Ли, гомеоморфна либо прямой, либо окружности.

Примечание. Некомпактная однопараметрическая подгруппа может быть вложена в группу Ли довольно сложно, например, в виде так называемой иррациональной или плотной обмотки тора некоторой размерности.

30.32. Пусть G — компактная связная группа Ли. Показать, что каждая точка $x \in G$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе.

30.33. Пусть G — компактная группа, гладко действующая на многообразии M . Показать, что на M имеется такая риманова метрика, для которой G — группа изометрий.

30.34. Показать, что коммутативная связная группа Ли локально изоморфна конечномерному векторному пространству.

30.35. Показать, что компактная коммутативная связная группа Ли изоморфна тору.

30.36. Показать, что коммутативная связная группа Ли изоморфна произведению тора на векторное пространство.

30.37. Пусть группа Ли G — подгруппа в группе матриц $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2} = \text{End}(n, \mathbb{C})$. Показать, что в алгебре Ли L группы G , понимаемой как подпространство в $\text{End}(n, \mathbb{C})$, операция коммутирования совпадает с обычным коммутатором матриц, т. е. $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$, где $\xi, \eta \in L$.

30.38. Описать алгебры Ли следующих матричных групп Ли:

$$SL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), U(n), O(n), O(n, m), Sp(n).$$

30.39. Доказать, что конечная группа не может эффективно действовать на $\mathbb{R}^n$.

§ 31. Дифференциальные формы

31.1. Вычислить геодезическую кривизну k_g кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, расположенной на сфере радиуса R , и вывести отсюда следующую формулу для нахождения площади S области на сфере, ограниченной замкнутой линией L :

$$S = \left(2\pi \pm \oint_L \sqrt{k^2 - \frac{1}{R^2}} ds \right) R^2.$$

Здесь k — кривизна кривой. Обратим внимание, что при интегрировании следует учитывать знак геодезической кривизны $k_g = \sqrt{k^2 - \frac{1}{R^2}}$. А именно, если вектор геодезической кривизны направлен внутрь области, то берется знак «+»; в противном случае

берется знак «+». Впрочем, это правило автоматически учитывается формулой для геодезической кривизны $k_g = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{n})}{|\mathbf{r}'|^3}$ (см. задачу 11.7).

31.2. Найти $\int_M \omega$ в следующих случаях:

а) $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\omega = (2a - y) dx + x dy$, $M: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

в) $\omega = (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, $M: x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$;

г) $\omega = y dx + z dy + x dz$, $M: x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

д) $\omega = (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$, $M: x = a \sin^2 t$, $y = 2a \cos t \sin t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

е) $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, $M: x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$;

ж) $\omega = (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = Rx$;

з) $\omega = (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

и) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

к) $\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$, $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Поверхности ориентировать внешней нормалью. В пункте а) кривая ориентирована против часовой стрелки, в е) и ж) — против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Ox .

31.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$ для следующих замкнутых поверхностей Σ :

а) для $\varphi = z^2$, $\psi = x^2 + y^2 - z^2$, если Σ ограничивает область $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и $y \geq 0$;

б) для $\varphi = 2x^2$, $\psi = x^2 + z^2$, если Σ ограничивает область $x^2 + y^2 \leq 1$ и $0 \leq z \leq 1$;

в) для $\varphi = \psi = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}$, если Σ есть сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

г) для $\varphi = 1$, $\psi = e^x \sin y + e^y \sin x + z$, если Σ есть трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Здесь через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначена производная в направлении внешней нормали к поверхности.

31.4. Найти градиенты следующих функций в цилиндрических координатах:

а) $u = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi$;

б) $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - e^\rho$.

31.5. Найти $\operatorname{div} \mathbf{X}$ в цилиндрических координатах для следующих векторных полей:

а) $\mathbf{X} = (\rho, z \sin \varphi, e\varphi \cos z)$;

б) $\mathbf{X} = (\varphi \operatorname{arctg} \rho, 2, -z^2 e^z)$.

31.6. Найти дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{X} = \left(r^2, -2 \cos^2 \varphi, \frac{\varphi}{r^2 + 1} \right)$$

в сферических координатах.

31.7. Найти ротор следующих векторных полей в сферических координатах:

а) $\mathbf{X} = (2r + \alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \theta, r \cos \theta)$, $\alpha = \operatorname{const}$;

б) $\mathbf{X} = (r^2, 2 \cos \theta, -\varphi)$.

31.8. Проверить, что следующие векторные поля в сферических координатах (r, θ, φ) являются потенциальными:

а) $\mathbf{X} = (2 \cos \theta / r^3, \sin \theta / r^3, 0)$;

б) $\mathbf{X} = (f(r), 0, 0)$.

31.9. Найти потенциалы следующих векторных полей в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) :

а) $\mathbf{X} = \left(1, \frac{1}{\rho}, 1 \right)$; б) $\mathbf{X} = \left(\rho, \frac{\varphi}{\rho}, z \right)$; в) $\mathbf{X} = (\varphi z, z, \rho \varphi)$;

г) $\mathbf{X} = \left(e^\rho \sin \varphi, \frac{e^\rho \cos \varphi}{\rho}, 2z \right)$;

д) $\mathbf{X} = (\varphi \cos z, \cos z, -\rho \varphi \sin z)$.

31.10. Найти потенциалы следующих векторных полей в сферических координатах (r, θ, φ) :

а) $\mathbf{X} = (\theta, 1, 0)$; б) $\mathbf{X} = \left(2r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r} \sin \theta \right)$;

в) $\mathbf{X} = \left(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{\theta}{r}, \frac{\varphi}{\sin \theta} \right)$;

$$\text{г) } \mathbf{X} = (\cos \varphi \sin \theta, \cos \varphi \cos \theta, -\sin \varphi);$$

$$\text{д) } \mathbf{X} = \left(e^r \sin \theta, \frac{e^r \cos \theta}{r}, \frac{2\varphi}{(1 + \varphi^2)r \sin \theta} \right).$$

31.11. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\mathbf{X} = (r, 0, (R + r) \sin \theta)$$

в сферических координатах по окружности $\{r = R, \theta = \pi/2\}$.

31.12. Вычислить линейный интеграл векторного поля $\mathbf{X}$ вдоль линии L , заданной в цилиндрических координатах, если:

а) $\mathbf{X} = (z, \rho\varphi, \cos \varphi)$, L — отрезок прямой: $\{\rho = a, \varphi = 0, 0 \leq z \leq 1\}$;

б) $\mathbf{X} = (\rho, 2\rho\varphi, z)$, L — полуокружность: $\{\rho = 1, z = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$;

в) $\mathbf{X} = (e^\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, \rho)$, L — винтовая линия: $\{\rho = R, z = \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$;

г) $\mathbf{X} = (z, \rho z, \rho)$, L — окружность: $\{\rho = 1, z = 0\}$;

д) $\mathbf{X} = (\rho \sin \varphi, -\rho^2 z, \rho^2)$, L — окружность: $\{\rho = R, z = R\}$;

е) $\mathbf{X} = (z \cos \varphi, \rho, \varphi^2)$, L : $\{\rho = \sin \varphi, z = 1\}$.

31.13. Вычислить линейный интеграл векторного поля $\mathbf{X}$ вдоль линии L , заданного в сферических координатах, если:

а) $\mathbf{X} = (4r^3 \operatorname{tg} \varphi/2, \theta\varphi, \cos^2 \varphi)$, L : $\{\varphi = \pi/2, \theta = \pi/4, 0 \leq r \leq 1\}$;

б) $\mathbf{X} = (\sin^2 \theta, \sin \theta, r\varphi\theta)$, L : $\{\varphi = \pi/2, r = 1/\sin \theta, \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\}$;

в) $\mathbf{X} = (r\theta, 0, r \sin \theta)$, L : $\{r = 1, \theta = \pi/4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$;

г) $\mathbf{X} = (r \sin \theta, \theta e^\theta, 0)$, L : $\{r = \sin \varphi, \theta = \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$;

д) $\mathbf{X} = (0, 0, r\varphi\theta)$, L — контур, ограничивающий полудиск: $\{r \leq R, \varphi = \pi/4\}$;

е) $\mathbf{X} = (r, 0, (R + r) \sin \theta)$, L : $\{r = R, \theta = \pi/2\}$;

ж) $\mathbf{X} = (e^r \cos \theta, 2\theta \cos \varphi, \varphi)$, L : $\{r = 1, \theta = 0, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

31.14. Найти поток векторного поля $\mathbf{X}$ через поверхность S , заданного в цилиндрических координатах, если:

а) $\mathbf{X} = (\rho, -\cos \varphi, z)$, S ограничивает область $\{\rho \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$;

б) $\mathbf{X} = (\rho, \rho\varphi, -2z)$, S ограничивает область $\{\rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, -1 \leq z \leq 1\}$.

31.15. Найти поток векторного поля $\mathbf{X}$ через поверхность S , заданного в сферических координатах, если:

а) $\mathbf{X} = (1/r^2, 0, 0)$, S окружает начало координат;

б) $\mathbf{X} = (r, r \sin \theta, -3r\varphi \sin \theta)$, S ограничивает область $\{r \leq R, \theta \leq \pi/2\}$;

- в) $\mathbf{X} = (r^2, 0, R^2 \cos \varphi)$, $S: \{r = R\}$;
 г) $\mathbf{X} = (r, 0, 0)$, S ограничивает область $\{r \leq R, \theta \leq \pi/2\}$;
 д) $\mathbf{X} = (r^2, 0, R^2 r \sin \theta \cos \varphi)$, S ограничивает область $\{r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \theta \leq \pi/2\}$.

31.16. Доказать, что биинвариантные формы на группе Ли замкнуты.

§ 32. Теория гомотопий

32.1. Представить в виде клеточного комплекса:

- а) тор;
 б) бутылку Клейна;
 в) надстройку над клеточным комплексом K .

32.2. Доказать, что сфера S^∞ и шар D^∞ являются клеточными пространствами.

32.3. Доказать, что топология CW -комплекса является слабой среди топологий, в которых все характеристические отображения непрерывны.

32.4. Доказать, что на CW -комплексе функция непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна на каждом конечном подкомплексе.

32.5. Доказать, что тор с диском, натянутым на меридиан, гомотопически эквивалентен букету $S^1 \vee S^2$.

32.6. Доказать, что тор с диском, натянутым на меридиан и параллель, гомотопически-эквивалентны сфере S^2 .

32.7. Обобщить задачи 32.5 и 32.6 на случай произведения $S^k \times \times S^{n-k}$.

32.8. Доказать гомотопическую эквивалентность пространств:

$$(X \times S^n)/(X \vee S^n) = \Sigma^n X.$$

32.9. Доказать гомотопическую эквивалентность:

- а) $\Sigma(X \vee Y) \sim \Sigma X \vee \Sigma Y$;
 б) $\Sigma(X \wedge Y) \sim \Sigma(X \times Y)/(\Sigma X \vee \Sigma Y)$.

32.10. Пусть $P(X; A, B)$ — пространство путей с началом в A и концом в B . Пусть $A \subset B$. Доказать, что $P(X; A, B)$ содержит подпространство, гомеоморфное A .

32.11. Пусть $f: X \rightarrow \Sigma$ — непрерывное отображение симплициальных комплексов, $Y \subset X$ — подкомплекс, на котором отображение f симплициально. Доказать, что существует такое подразбиение комплекса X , тождественное на Y , что отображение f гомотопно некоторому симплициальному отображению q , причем гомотопия постоянна на Y .

32.12. Пусть X — симплициальный комплекс, S_x — звезда вершины $x \in X$. Доказать, что любые два симплекса звезды S_x пересекаются по некоторой грани.

32.13. Доказать, что симплициальное отображение симплициальных комплексов непрерывно.

32.14. Пусть X — симплициальный комплекс и $\varepsilon > 0$. Доказать, что существует такое подразбиение комплекса X , что диаметр каждого нового симплекса меньше ε .

32.15. Доказать, что одномерный клеточный комплекс есть пространство типа $K(\pi, 1)$, где π — свободная группа.

32.16. Доказать, что стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно точке.

32.17. Доказать, что любые два пространства типа $K(\pi, 1)$ слабо гомотопически эквивалентны.

32.18. Доказать:

а) $S^n \wedge S^k = S^{n+k}$;

б) S^n/S^k гомотопически эквивалентно $S^n \vee S^{k+1}$;

в) $S^n \setminus S^k$ гомотопически эквивалентно S^{n-k-1} ;

г) $S^n \setminus S^k$ диффеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

Здесь $S^k \subset S^n$ — стандартное вложение.

32.19. Доказать, что на CW -комплексе функция непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна на каждом конечном подкомплексе.

32.20. Доказать, что если произведение двух топологических пространств гомеоморфно надстройке над каким-нибудь топологическим пространством, то либо оба сомножителя стягиваемы, либо один из них сводится к точке.

32.21. Пусть пространство X стягивается к подпространству Y , причем гомотопия неподвижна (постоянна) на Y . Доказать, что любой путь в X с концами в Y гомотопен пути, полностью лежащему в Y (гомотопия неподвижна в концах).

32.22. Доказать, что всякий связный клеточный комплекс гомотопически эквивалентен клеточному комплексу с одной вершиной.

32.23. Доказать, что сферу S^{n-1} можно представить в виде объединения $(S^r \times D^{n-r}) \cup (D^{r+1} \times S^{n-r-1})$ с общей границей $S^r \times S^{n-r-1}$.

32.24. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартную сферу S^{n-1} и две вложенные в нее сферы

$$S^{r-1} = \{x_{r+1} = \dots = x_n = 0\}, \quad S^{n-r-1} = \{x_1 = \dots = x_r = 0\}.$$

Доказать, что любая пара точек $y \in S^{r-1}$, $x \in S^{n-r-1}$ соединяется большой дугой без общих точек вне этих сфер.

32.25. Найти топологический тип замкнутого однополостного гиперboloида $\Gamma = \{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ в проективном пространстве $\mathbb{RP}^3$.

32.26. Разрезать вложенный в $\mathbb{R}^3$ лист Мёбиуса по средней линии. Ориентируемо ли получившееся многообразие? Повторить

процесс разрезания несколько раз. Описать получившееся несвязное многообразие и найти индекс зацепления произвольных двух компонент связности (см. рис. 107).

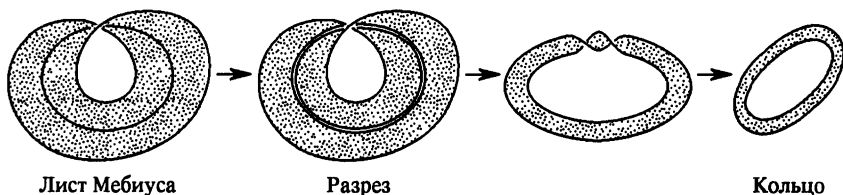


Рис. 107

32.27. Доказать, что пространство многочленов степени 3 без кратных корней гомотопически эквивалентно дополнению к трилистнику в сфере S^3 . Построить явную деформацию.

32.28. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ две зацепленные окружности S_1^1 и S_2^1 (см. рис. 108). Предъявить геометрическое доказательство соотношения $aba^{-1}b^{-1} = 1$ в группе $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B), x_0)$.

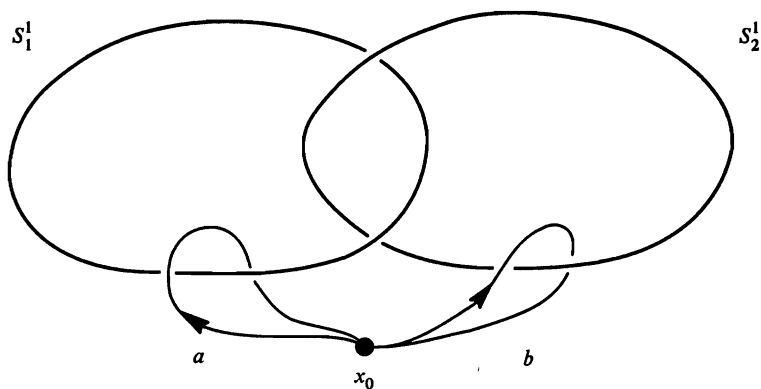


Рис. 108

32.29. Рассмотрим $\mathbb{R}P^2$ как сферу с отождествленными противоположными точками. Обозначим через a путь в $\mathbb{R}P^2$, который на сфере представляется дугой большого круга, соединяющей две диаметрально противоположные точки сферы. Предъявить геометрическое доказательство соотношения $a^2 = 1$ в группе $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$.

32.30. Рассмотрим множество точек $\mathbb{C}^n$ с попарно различными координатами. Показать, что полученное пространство имеет тип комплекса Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$.

32.31. Построить пример двух гомотопически не эквивалентных пространств X_1, X_2 и взаимно-однозначных непрерывных отображений $f: X_1 \rightarrow X_2, g: X_2 \rightarrow X_1$.

32.32. Обозначим через $\{X, Y\}$ множество всех непрерывных отображений из пространства X в пространство Y . Пусть $h: X \rightarrow X'$ — непрерывное отображение, и соответствие $\Phi: \{X', Y\} \rightarrow \{X, Y\}$ определяется формулой $\Phi(a) = ah$. Доказать, что соответствие Φ переводит гомотопные отображения в гомотопные.

32.33. Доказать, что имеет место гомотопическая эквивалентность

$$\Sigma(S^n \times S^m) \sim S^{n+1} \vee S^{m+1} \vee S^{n+m+1}.$$

32.34. Доказать, что бесконечномерная сфера S^∞ стягиваема по себе в точку.

32.35. Доказать, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей $\vee S^1$.

32.36. Пусть отображение $p: X \rightarrow Y$ удовлетворяет аксиоме о накрывающей гомотопии. Доказать, что прообразы точек гомотопически эквивалентны.

32.37. Пусть пространство X стягивается к своему линейно-связному подпространству A . Доказать, что пространство X линейно связно.

32.38. Фиксируем в пространстве X точки x_0 и x_1 . Пусть Y — пространство путей с началом в точке x_0 и проходящих через точку x_1 . Доказать, что пространство Y стягиваемо.

32.39. Доказать, что пространство всех путей $P(X; X, X)$ стягивается к $X \subset P(X; X, X)$ неподвижно на X .

32.40. Пусть задана последовательность пространств $X_n \subset X_{n+1}$, причем X_{n+1} стягивается к X_n неподвижно на X_n . Доказать, что пространство

$$X = \bigcup_n X_n$$

стягивается к X_0 неподвижно на X_0 .

32.41. Доказать, что всякое открытое n -мерное многообразие гомотопически эквивалентно $(n-1)$ -мерному комплексу.

32.42. Доказать, что если пространство X стягивается по себе к подпространству A неподвижно на A , то A гомотопически эквивалентно X .

32.43. Рассмотрим следующее пространство X (ясно, что оно является клеточным комплексом). Через M_2 обозначим обычный лист Мёбиуса с границей ∂M_2 , гомеоморфной окружности. «Тройной» лист Мёбиуса M_3 строится так: пусть T состоит из трех отрезков равной длины, расположенных в одной плоскости под равными углами. отождествим в произведении $T \times I$ подпространства $T \times 0$ и $T \times 1$, подкрутив их на угол $2\pi/3$. Граница полученного

пространства M_3 также гомеоморфна окружности. Пространство X получается из M_2 и M_3 отождествлением отрезков $I_1 \subset \partial M_2$ и $I_2 \subset \partial M_3$. Доказать, что ∂X является ретрактом (не деформационным) пространства X .

32.44. Вычислить множества $\pi(S^1 \times S^1, S^2)$ и $\pi(S^k \times S^{n-k}, S^n)$.

32.45. Для топологического пространства X обозначим через $\text{Cat}_1(X)$ (соответственно, $\text{Cat}_2(X)$) минимальное число замкнутых подпространств X_i таких, что $X = \bigcup_i X_i$ и вложения $X_i \subset X$

гомотопны постоянным отображениям (соответственно, X_i стягиваемы). Найти $\text{Cat}_1(\mathbb{R}P^n)$ и $\text{Cat}_2(\mathbb{R}P^n)$.

32.46. Вычислить $\text{Cat}_1(K)$ и $\text{Cat}_2(K)$ для сферы с тремя отождествленными точками.

32.47. Пусть M^2 — компактное замкнутое ориентированное 2-мерное многообразие рода h , т.е. M^2 — сфера S^2 с h ручками. Найти $\Sigma^2 M^2$ (двухкратная надстройка) с точностью до гомотопического типа.

32.48. Рассмотрим в $\mathbb{R}P^n$ какую-либо стандартную карту с неоднородными координатами $x_1, \dots, x_n$. Найти гомотопический тип следующих множеств:

- а) $\mathbb{R}P^n \setminus \check{S}^k$, где $\check{S}^k = \{x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1, x_{k+2} = \dots = x_n = 0\}$;
- б) $\mathbb{R}P^n \setminus \check{M}_q^k$, где $\check{M}_q^k = \{x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+q}^2 - 1 = 0, x_{k+q+1} = \dots = x_n = 0\}$;
- в) $\check{S}^k$; г) $\check{M}_q^k$.

32.49. Рассмотрим в открытом многообразии $\mathbb{R}^n \times S^{n-k}$ малый шар D^n и вклеим вместо него проективное пространство $\mathbb{R}P^n$, т.е. отождествим точки x и $-x$ на границе шара $S^{n-1} = \partial D^n$. Доказать, что полученное пространство гомотопически эквивалентно $\mathbb{R}P^{n-1} \vee S^{n-k}$.

32.50. Дано топологическое многообразие M^n , край которого есть топологическое многообразие P^{n-1} . Известно, что край P^{n-1} стягивается по многообразию M^n в точку.

а) Доказать, что многообразие стягивается в точку.

б) Доказать, что если многообразие P^{n-1} односвязно, то многообразие M^n гомеоморфно диску D^n (в предположении, что P^{n-1} стягивается по M^n в точку).

в) Построить пример такой пары (M^n, P^{n-1}) , что многообразие P^{n-1} стягивается по многообразию M^n в точку, но M^n не гомеоморфно диску D^n . В качестве следствия доказать, что $\pi_1(P^{n-1}) \neq 0$.

32.51. Найти гомотопический тип пространства $\mathbb{C}^n \setminus \Delta$, где $\Delta = \bigcup_{ij} \Delta_{ij}$, $\Delta_{ij} = \{x \in \mathbb{C}^n | x_i = x_j\}$.

32.52. Вычислить, сколько имеется отображений (с точностью до гомотопии):

- а) $\mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$; б) $\mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$; в) $\mathbb{R}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$;
 г) $\mathbb{C}P^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$; д) $\Sigma \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$; е) $\Sigma \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$;
 ж) $\Sigma \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$; з) $\Sigma \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n+1}$.

32.53. а) Пусть пространства X и Y связны. Доказать, что

$$\text{Cat}(\text{join}(X, Y)) = \min(\text{Cat}(X), \text{Cat}(Y)),$$

где символом Cat обозначена категория Люстерника–Шнирельмана (Cat_1 в обозначениях задачи 32.45).

б) Найти $\text{Cat}(S^1 \times S^2)$.

32.54. Пусть пространства X_i , $1 \leq i \leq N$, линейно-связны и $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$. Доказать, что

$$\text{Cat}(X_i) \leq \text{Cat}(X) \leq 1 + \sum_{i=1}^N (\text{Cat}(X_i) - 1).$$

32.55. а) Вычислить $\text{Cat}(\mathbb{R}P^n)$, $\text{Cat}(T^n)$, $\text{Cat}(S^m \times S^n)$.

б) Доказать, что если сфера S^n покрыта q замкнутыми множествами (не обязательно связными) $V_1, V_2, \dots, V_q$, где $q \leq n$, то всегда существует хотя бы одно множество V_i , такое, что оно содержит две диаметрально противоположные точки $-x$ и x сферы S^n .

32.56. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмногообразие в евклидовом пространстве (например, гладкое подмногообразие) и пусть $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартное вложение. Доказать, что имеет место следующая гомотопическая эквивалентность: $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M \simeq \Sigma(\mathbb{R}^n \setminus M)$.

32.57. Связь между категорией Люстерника–Шнирельмана и так называемой когомологической длиной комплекса (или многообразия). Пусть M^n — гладкое, компактное, связное, замкнутое многообразие. Рассмотрим кольцо $H^*(M^n, G)$, где $G = \mathbb{Z}$, если M^n ориентируемо, и $G = \mathbb{Z}_2$, если M^n неориентируемо. Обозначим через $l(M^n; G)$ наибольшее целое число, для которого существует последовательность элементов $x_1, x_2, \dots, x_l$ кольца $H^*(M^n; G)$ ($\deg x_a > 0$, $1 \leq a \leq l$), таких, что их произведение $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_l (M^n; G) \neq 0$ в кольце $H^*(M^n; G)$. Число $l(M^n; G)$ называется когомологической длиной многообразия M^n . Доказать, что

$$\text{Cat}(M^n) \geq l(M^n; G).$$

32.58. Доказать, что для любого линейно-связного топологического пространства X и любой его точки x_0 группа $\pi_1(\Omega X, x_0)$ — абелева.

32.59. Доказать, что всякое стягиваемое пространство односвязно.

32.60. Доказать, что группа $\pi_1(\bigvee_A S^1)$ — свободная группа с A образующими.

32.61. Доказать, что если Y_1 и Y_2 гомотопически эквивалентны, то имеют место изоморфизмы: $\pi_1(Y_1) \cong \pi_1(Y_2)$ и $\pi_k(Y_1) \cong \pi_k(Y_2)$, $k \geq 2$.

32.62. Доказать, что $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, где $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ — свободное произведение групп $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$.

32.63. Найти фундаментальную группу дополнения к узлу-трилистнику в $\mathbb{R}^3$ (а также в сфере S^3) и доказать, что трилистник «не развязывается», т. е. не существует гомеоморфизма евклидова пространства (или сферу) на себя, который переводил бы трилистник в стандартно вложенную незаузленную окружность, т. е. в тривиальный узел.

32.64. Найти фундаментальную группу дополнения к узлу Γ в $\mathbb{R}^3$, задаваемому так: окружность, изображающая узел, расположена на двумерном, стандартно вложенном торе $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, на котором она обходит p раз параллель тора и q раз его меридиан, причем числа p и q взаимно просты. (Узел-трилистник может быть представлен как такой узел Γ , где $p = 2$, $q = 3$.) Разберитесь, в чем роль условия взаимной простоты двух чисел: p и q .

32.65. Пусть $X = Y \bigcup_W Z$, где Y, Z, W — конечные CW -комплексы, $W = Y \cap Z$, W линейно-связно, через $X = Y \bigcup_W Z$ обозначен комплекс, получающийся при склейке Y и Z по общему подмножеству W . Вычислить группу $\pi_1(X)$, если группы $\pi_1(Y)$, $\pi_1(Z)$, $\pi_1(W)$ известны. Особо рассмотреть тот случай, когда W несвязно.

32.66. Задана произвольная группа G с конечным числом образующих и соотношений. Доказать, что существует конечный комплекс X , фундаментальная группа которого изоморфна G . Можно ли выбрать в качестве такого комплекса X конечномерное многообразие, например четырехмерное?

32.67. Вычислить группу $\pi_1(X)$, где X — букет трех окружностей.

32.68. Построить двумерный комплекс X , фундаментальная группа которого равнялась бы $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Для каких p в качестве такого комплекса можно выбрать двумерное гладкое замкнутое компактное многообразие?

32.69. Вычислить фундаментальную группу двумерной сферы с тремя ручками. Выяснить, коммутативна ли эта группа, и найти ее коммутант. Вычислить фундаментальную группу двумерного тора.

32.70. Пусть симплициальный комплекс X имеет N одномерных симплексов. Доказать, что его фундаментальная группа имеет не более чем N образующих.

32.71. Доказать, что $\pi_1(X) = \pi_1(X_2)$, где X — CW -комплекс, а X_2 — его двумерный остов, т.е. объединение всех клеток размерностей 1 и 2.

32.72. Найти $\pi_2(X)$, где $X = S^1 \vee S^2$. Будет ли эта группа конечнопорожденной?

32.73. Найти фундаментальную группу «восьмерки» (букета двух окружностей).

32.74. Пусть f — путь в X ; $a \in \pi_1(X, x_0)$, $f(0) = x_0$. Доказать, что существует путь g , такой, что $g(0) = x_0$, $g(1) = f(1)$, и $fg^{-1} \in a$.

32.75. Пусть X — линейно-связное пространство. Доказать, что группа $\pi_1(X, x)$ изоморфна группе $\pi_1(X, y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

32.76. Вычислить, $\pi_1(X)$ и $\pi_n(X)$, где X — букет $S^1 \vee S^n$.

32.77. Доказать, что если X — одномерный CW -комплекс, то $\pi_1(X)$ — свободная группа.

32.78. Доказать, что группа $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ не может быть фундаментальной группой никакого 3-мерного многообразия.

32.79. Вычислить $\pi_1(P_g)$, где P_g — 2-мерная компактная, замкнутая, ориентируемая поверхность рода g .

32.80. Вычислить $\pi_1(TP_g)$, где TP_g — многообразие линейных элементов поверхности рода g .

32.81. Вычислить фундаментальную группу «бутылки Клейна», построив накрывающее пространство с действием дискретной группы.

32.82. Пусть P — 2-мерная поверхность с непустым краем (открытая поверхность). Доказать, что $\pi_1(P)$ — свободная группа.

32.83. Доказать, что если X — CW -комплекс, то $\pi_1(X)$ — группа, образующие которой являются одномерными клетками, а полный набор соотношений определяется границами 2-мерных клеток.

32.84. Пусть G — непрерывный группоид с единицей. Доказать, что G гомотопически прост во всех размерностях и как следствие, что $\pi_1(G)$ — абелева группа.

32.85. Пусть X — непрерывный группоид с единицей, $G \subset \pi_1(X)$ — подгруппа. Доказать, что:

а) в $\hat{X}_G$ можно ввести умножение так, что $p_G: \hat{X}_G \rightarrow X$ (где p_G — проекция накрытия $\hat{X}_G$ на X) станет гомоморфизмом;

б) если X — группа, то $\hat{X}_G$ (накрытие по подгруппе G) — тоже группа. Разобрать пример $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$, $n > 2$.

32.86. Доказать, что имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_{k \text{ раз}}) \cong \underbrace{\pi_n(S^n) \oplus \dots \oplus \pi_n(S^n)}_{k \text{ раз}}.$$

32.87. Доказать, что группы $\pi_i(X)$ коммутативны при $i > 1$ для любого CW -комплекса X .

32.88. Показать на примере, что для группы $\pi_i(X, Y)$ неверна аксиома вырезания (которая выполняется для обычных теорий (ко)гомологий), т. е. существуют такие пары (X, Y) , что

$$\pi_i(X, Y) \neq \pi_i(X/Y).$$

32.89. Доказать, что для любого линейно-связного пространства Y и любой точки $x_0 \in Y$ имеет место изоморфизм $\pi_k(Y, x_0) \cong \pi_{k-1}(\Omega_{x_0} Y, w_{x_0})$, где w_{x_0} — постоянная петля в точке x_0 .

32.90. Доказать, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, $n > 1$, и $\pi_k(\mathbb{R}P^n) = \pi_k(S^n)$, $n \geq 1$, $k > 1$, где $\mathbb{R}P^n$ — вещественное проективное пространство.

32.91. Доказать следующие утверждения:

а) если A — стягиваемое подпространство в пространстве X (X и A — CW -комплексы) к точке $x_0 \in A$, то при $n \geq 1$ гомоморфизм $i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ тривиален и при $n \geq 3$ имеет место разложение

$$\pi_n(X, A, x_0) \cong \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_{n-1}(A, x_0);$$

б) если $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ — вложение, то имеет место точная последовательность $\pi_g(X \vee Y) \xrightarrow{i_*} \pi_g(X \times Y) \rightarrow 0$.

32.92. Доказать, что $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$; $\pi_2 = (\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$, $n > 0$; $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = \pi_k(S^{2n+1})$, $k \geq 2$.

32.93. Доказать, что если CW -комплекс X не имеет клеток размерностей от 1 до k включительно, то $\pi_i(X) = 0$ при $i \leq k$.

32.94. Пусть X, Y — CW -комплексы. Доказать, что

$$\pi_i(X \times Y) = \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y).$$

Вычислить действие $\pi_1(X \times Y)$ на $\pi_i(X \times Y)$. Построить универсальное накрытие над $X \times Y$.

32.95. Найти гомотопические группы $\pi_q(S^n)$, $0 \leq q \leq n$, и доказать, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, где S^n — сфера.

32.96. Доказать, что $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ при $i \geq 3$, и как следствие доказать, что $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

32.97. Доказать, что:

а) $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(SO(3)) = \pi_2(SO) = 0$, где $SO = \lim_{\rightarrow} SO(n)$;

б) $\pi_3(SO(4)) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(U) = \mathbb{Z}$, $\pi_2(U) = 0$, где $U = \varinjlim U(n)$ (вложения $U(n) \subset U(n+1)$ и $SO(n) \subset SO(n+1)$ стандартные);

в) $\pi_3(SO(5)) = \mathbb{Z}$.

32.98. Найти группы $\pi_g(S^1 \vee S^1)$, $g \geq 0$.

32.99. Вычислить группы $\pi_1(X)$, $\pi_n(X)$ и действие группы $\pi_1(X)$ на группе $\pi_n(X)$ в случаях:

а) $X = \mathbb{R}P^n$; б) $X = S^1 \vee S^n$;

в) $X = \partial B(\xi^{n+1})$, где $B(\xi^{n+1})$ — пространство нетривиального $O(n+1)$ расслоения дисков на S^1 .

32.100. Если отображение $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ для всех k устанавливает изоморфизм $\pi_k(X) \approx \pi_k(Y)$ и $\pi_k(A) \approx \pi_k(B)$, то оно устанавливает для всех k изоморфизмы $\pi_k(X, A) \approx \pi_k(X, B)$.

32.101. Вычислить группы $\pi_{n-k}(V_{n,k}^{\mathbb{R}})$, где $V_{n,k}^{\mathbb{R}}$ — вещественное многообразие Штифеля.

32.102. Доказать, что группы $\pi_k(S^n)$ с ростом k не могут стать тривиальными, начиная с некоторого номера k .

32.103. Доказать, что $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ и $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$ при $n \geq 3$.

32.104. Найти $\pi_3(S^2 \vee S^2)$, $\pi_3(S^1 \vee S^2)$, $\pi_3(S^2 \vee S^2 \vee S^2)$.

32.105. Вычислить первые относительные гомотопические группы пары $(\mathbb{C}P^2, S^2)$, где вложение $S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$ стандартно.

32.106. Доказать следующие утверждения:

а) если 3-мерное компактное замкнутое многообразие M^3 односвязно, то M гомотопически эквивалентно сфере (т.е. M^3 — гомотопическая сфера);

б) если M^n — гладкое, компактное, замкнутое многообразие, причем $\pi_i(M^n) = 0$ при $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, то M^n гомотопически эквивалентно сфере S^n .

32.107. Построить пример 3-мерного замкнутого компактного многообразия M^3 , такого, что M^3 — гомологическая сфера (т.е. имеет такие же целочисленные гомологии, что и S^3), однако $\pi_1(M^3) \neq 0$. Построить пример конечнопорожденной группы G , совпадающей со своим первым коммутантом.

32.108. Доказать, что множество гомотопических классов отображений $[S^n, X]$ изоморфно множеству классов сопряженных элементов группы $\pi^n(X, x_0)$ при действии $\pi_1(X, x_0)$ (X — связный комплекс).

32.109. Вычислить $\pi_2(\mathbb{R}^2, X)$, где $\mathbb{R}^2$ — плоскость, X — «восьмерка», вложенная в 2-мерную плоскость.

32.110. Вычислить $\pi_i(\mathbb{C}P^n)$ при $i \leq 2n+1$.

32.111. Пусть $\pi_n(X) = 0$, и пусть на X и Y действует без неподвижных точек конечная группа G . Доказать, что существует и единственно с точностью до гомотопии отображение $f: Y \rightarrow X$, перестановочное с действием группы G .

32.112. Доказать, что $[CP^2, S^2] = \pi_4(S^2)$, где $[X, Y]$ — множество гомотопических классов отображений X в Y .

32.113. Пусть (X, A) — пара топологических пространств, где X линейно-связно и $X \supset A$. Пусть Λ — множество путей в пространстве X , начинающихся в фиксированной точке x_0 и кончающихся в точках подпространства A . Доказать, что $\pi_g(X, A, a) = \pi_{g-1}(\Lambda, \lambda_a)$, где λ_a — произвольный путь из x_0 в $a \in A$.

32.114. Доказать, что следующие условия эквивалентны n -связности:

а) $\pi_0(S^q, X)$ состоит из одного элемента при $q \leq n$ (пунктированные отображения);

б) любое непрерывное отображение $S^q \rightarrow X$ продолжается до непрерывного отображения диска $D^{q+1} \rightarrow X$, $q \leq n$.

32.115. Доказать, что $\pi_0(X, \Omega\Omega Z)$ — абелева группа, где X, Z — топологические пространства, ΩZ — пространство петель пространства Z . Доказать, что ΩZ является H -пространством.

32.116. Пусть A — ретракт X . Доказать, что при $n \geq 1$ для любой точки $x_0 \in A$ гомоморфизм, индуцированный вложением

$$i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0),$$

является мономорфизмом и при $n \geq 2$ определяет следующее разложение в прямую сумму:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(A, x_0) \oplus \pi_n(X, A, x_0).$$

32.117. Доказать, что $\pi_0(\Sigma\Sigma Z, X)$ — абелева группа. Установить связь с $\pi_0(Z, \Omega\Omega X)$.

32.118. Пусть $TS^n \rightarrow S^n$ — стандартное касательное расслоение над сферой S^n . Вычислить гомоморфизм $\partial_*: \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1})$ в точной гомотопической последовательности ассоциированного расслоения.

32.119. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение ($f(x_0) = y_0$). Доказать, что индуцированное отображение $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ является гомоморфизмом групп.

32.120. Пусть $Y \rightarrow X$ — расслоение с фиксированными точками x_0, y_0 и слоем F , причем F_0 — слой над точкой x_0 и $y_0 \in F_0$. Доказать, что $\pi_n(Y, F_0; y_0) \cong \pi_n(X, x_0)$.

32.121. Пусть E, X — топологические пространства, X линейно-связно, $p: E \rightarrow X$ — непрерывное отображение, такое, что для любых точек $x \in X, y \in p^{-1}(x)$ имеет место изоморфизм

$$p_*: \pi_i(E, p^{-1}(x), y) \rightarrow \pi_i(X, x), \quad i \geq 0$$

(для $i = 0, 1$ имеет место изоморфизм множеств без дополнительной структуры групп). Доказать, что для любых точек x_1 и x_2 топологические пространства $p^{-1}(x_1)$ и $p^{-1}(x_2)$ слабо гомотопически эквивалентны.

32.122. Доказать точность последовательности для гомотопических групп пары (X, A) :

$$\dots \rightarrow \pi_i(A) \rightarrow \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(X, A) \rightarrow \pi_{i-1}(A) \rightarrow \dots$$

32.123. Доказать, что если X — гладкое компактное замкнутое подмногообразие коразмерности один в евклидовом пространстве, то X — ориентируемо.

32.124. Доказать, что если фундаментальная группа компактного замкнутого многообразия тривиальна, то многообразие ориентируемо. Доказать, что если многообразие X не ориентируемо, то в $\pi_1(X)$ имеется подгруппа индекса 2.

32.125. Доказать, что если X — неориентируемое пространство, то надстройка ΣX не является многообразием.

32.126. Доказать, что эйлерова характеристика $\chi(X)$ любого нечетномерного ориентируемого замкнутого многообразия тривиальна.

32.127. Привести примеры:

а) неориентируемого многообразия, вложенного двусторонне в некоторое другое многообразие (на единицу большей размерности);

б) ориентируемого многообразия, вложенного односторонне в некоторое другое многообразие.

32.128. Пусть X_1 и X_2 — два полнотория, $f: \partial X_1 \rightarrow \partial X_2$ — диффеоморфизм, $M_f^3 = X_1 \cup_f X_2$. Предъявить такие диффеоморфизмы f , для которых многообразие M_f^3 диффеоморфно:

а) S^3 ; б) $S^2 \times S^1$; в) $\mathbb{R}P^3$.

32.129. В терминах предыдущей задачи рассмотрим отображение $f_*: \pi_1(\partial X_1) \rightarrow \pi_1(\partial X_2)$, т. е. $f_*: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, индуцированное диффеоморфизмом полноторий X_1 и X_2 . Гомоморфизм f_* задается, очевидно, целочисленной матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Доказать, что эта матрица унимодулярна и вычислить фундаментальную группу многообразия M_f^3 в терминах матрицы f_* .

32.130. Пусть X^n — пространство полиномов $f_n(z)$ (от одной комплексной переменной) без кратных корней. Найти группы $\pi_k(X_n)$.

32.131. Доказать, что конечный CW -комплекс гомотопически эквивалентен многообразию с краем.

§ 33. Накрытия и расслоения

33.1. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — такое накрытие, что $f_*(\pi_1(X, x_0))$ — нормальный делитель группы $\pi_1(Y, y_0)$, $p(x_0) = y_0$. Доказать, что всякий элемент $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ порождает гомеоморфизм накрытия φ , т. е. $p\varphi(x) = p(x)$.

33.2. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, $p(x_0) = y_0$. Доказать, что $p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ является гомоморфизмом.

33.3. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, $p(x_0) = y_0$. Доказать, что индуцированное отображение $p_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ является мономорфизмом.

33.4. Пусть $p: Y \rightarrow X$ — накрытие, $\pi_1(Y) = 0$. Доказать, что каждый элемент $\alpha \in \pi_1(X)$ определяется гомеоморфизмом пространства Y на себя, $\alpha: Y \rightarrow Y$, таким что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ p \searrow & & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

коммутативна.

33.5. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — связное накрытие, $F = p^{-1}(y_0)$ — прообраз точки $y_0 \in Y$, $x_0 \in F$. Доказать, что между F и $\pi_1(Y, y_0)$ имеется взаимно-однозначное соответствие, если $\pi_1(X, x_0) = 0$.

33.6. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, $F: I^2 \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, где I^2 — квадрат, $f: I^1 \rightarrow X$ также непрерывно, причем $pf(t) = F(t, 0)$. Доказать, что существует и единственно непрерывное отображение $G: I^2 \rightarrow X$ такое, что $G(t, 0) = f(t)$ и $pG(t, s) = F(t, s)$.

33.7. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, f, g — пути на X , $f(0) = g(0)$. Пусть $pf(1) = pg(1)$, и пути pf и pg гомотопны. Доказать, что $f(1) = g(1)$.

33.8. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, f, g — пути на X , $f(0) = g(0)$. Обязательно ли $f(1) = g(1)$, если $pf(1) = pg(1)$?

33.9. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, f, g — пути на Y , $\bar{f}, \bar{g}$ — пути на X , такие, что $p\bar{f} = f$, $p\bar{g} = g$, $\bar{f}(0) = \bar{g}(0)$. Доказать, что если f и g гомотопны, то гомотопны $\bar{f}$ и $\bar{g}$.

33.10. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, f — путь в Y , x_0 — точка в X , такая, что $p(x_0) = f(0)$. Доказать, что существует единственный путь g в X , такой, что $pg = f$.

33.11. Доказать, что любое накрытие является расслоением в смысле Серра.

33.12. Доказать, что всякое 2-листное накрытие регулярно. Какой чисто алгебраический факт соответствует этому утверждению?

33.13. Построить 3-листное нерегулярное накрытие кренделя (сферы с двумя ручками).

33.14. Пусть M^2 — неориентируемое, компактное, гладкое, замкнутое многообразие. Доказать существование 2-листного накрытия $p: M_+^2 \rightarrow M^2$, где M_+^2 — ориентируемое многообразие, и предъявить M_+^2 в явном виде. Каким свойством обладает фундаментальная группа неориентируемого многообразия?

33.15. Построить накрытие $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ со слоем $\mathbb{Z}_2$ и доказать:

а) $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо при $n = 2k - 1$ и неориентируемо при $n = 2k$;

б) $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_i(\mathbb{R}P^n) = \pi_i(S^n)$ при $n > 1$, $i > 1$.

33.16. Доказать, что накрытие будет регулярно тогда и только тогда, когда либо все его пути, лежащие над одним и тем же путем в базисе, одновременно замкнуты, либо все одновременно не замкнуты.

33.17. Пусть $p: \hat{X} \rightarrow X$ — накрытие. Доказать, что всякий путь в X накрывается в $\hat{X}$ однозначно с точностью до выбора начала пути в прообразе и кратность проекции p одинакова во всех точках базы.

33.18. Построить все накрытия над окружностью и доказать, что $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_i(S^1) = 0$ при $i \geq 2$.

33.19. Построить регулярное накрытие $p: P_k \rightarrow P_2$ со слоем $\mathbb{Z}_{k-1}$, где $k > 2$, а P_k — сфера с k ручками.

33.20. Построить универсальное накрытие над $\bigvee_A S^1$ и доказать, что $\pi_i(\bigvee_A S^1) = 0$ при $i > 1$. Найти $\pi_1(\bigvee_A S^1)$.

33.21. Построить накрытие $\varphi: \hat{X} \rightarrow P_2$ (крендель), такое, что $\hat{X}$ стягивается к графу и как следствие доказать:

а) универсальное накрытие над P_2 стягиваемо, $P_2 \sim K(\pi, 1)$;

б) если M^2 — 2-мерное замкнутое многообразие и $\pi_1(M^2)$ — бесконечная группа, то $M^2 \sim K(\pi, 1)$ (гомотопически эквивалентно).

33.22. Установить связь между универсальными накрытиями над P_k (сферы с k ручками) и плоскостью Лобачевского.

33.23. Доказать, что все накрытия тора T^2 регулярны, и найти их. Постоить пример двух неэквивалентных, но гомеоморфных накрытий тора T^2 .

33.24. Может ли тор T^2 накрывать:

а) сферу; б) проективную плоскость?

33.25. Может ли проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ накрывать тор?

33.26. Пусть X — конечный комплекс. Найти связь между произвольной подгруппой $G \subset \pi_1(X)$, эйлеровой характеристикой $\chi(X)$ и $\chi(X_G)$, где $\hat{X}_G$ — накрытие, построенное по подгруппе $G \subset \pi_1(X)$.

33.27. Построить универсальное накрытие тора P_1 (сфера с ручкой) и бутылки Клейна N_2 (сфера с двумя пленками Мёбиуса); вычислить гомотопические группы P_1 и N_2 . Может ли тор P_1 2-листно и регулярно накрывать бутылку Клейна? Если да, то предъявить накрытие и вычислить в $\pi_1(N_2)$ образ $\pi_1(P_1)$ при мономорфизме накрытия.

33.28. Доказать, что если $\pi_1(M^n) = 0$ или $\pi_1(M^n)$ — простая или конечная группа порядка $p \neq 2$ (p — простое), то многообразие M^n ориентируемо.

33.29. Построить в явном виде семь гладких линейно независимых векторных полей на сфере S^7 . Использовать алгебру октав (чисел Грэвса–Кэли). Построить интегральные траектории этих векторных полей.

33.30. Доказать, что если в $\mathbb{R}^n$ заданы k линейных операторов $A_1, \dots, A_k$, таких, что $A_i^2 = -E$ и $A_i A_j + A_j A_i = 0$ (для всех i, j), то на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ можно задать k линейно-независимых векторных полей.

33.31. Если гомотопические группы базы и слоя расслоения имеют конечный ранг, то гомотопические группы пространства расслоения также имеют конечный ранг, причем ранг q -мерной группы пространства расслоения не превосходит суммы рангов q -мерных гомотопических групп базы и слоя.

33.32. Доказать, что универсальное накрывающее пространство над X является накрывающим для всякого другого накрывающего пространства.

33.33. Доказать, что стандартное расслоение $EX \xrightarrow{\Omega X} X$ (расслоение Серра), где X — многообразие, является локально-тривиальным расслоением.

33.34. Пусть расслоение $p: E \rightarrow B$ допускает секущую поверхность $\chi: B \rightarrow E$, причем $e_0 = \chi(b_0)$. Доказать, что при $n \geq 1$ отображение p_* — эпиморфизм, а при $n \geq 2$ определяет разложение в прямую сумму

$$\pi_n(E, e_0) = \pi_n(B, b_0) \oplus \pi_n(F, e_0).$$

33.35. Доказать, что если все гомотопические группы базы и слоя конечны, то гомотопические группы пространства расслоения также конечны и порядки не превышают произведения порядков гомотопических групп базы и слоя той же размерности.

33.36. Пусть EX — пространство всех путей на X , исходящих из фиксированной точки, а ΩX — пространство петель на X . Определим отображение $p: EX \rightarrow X$ как отображение, сопоставляющее пути его конечную точку. Доказать, что $p: EX \rightarrow X$ удовлетворяет аксиоме накрывающей гомотопии, т.е. является расслоением в смысле Серра, причем его слоем является Ω_X . Описанное расслоение иногда называют расслоением Серра.

33.37. Доказать, что если $p_{1,2}: \widehat{X}_{1,2} \rightarrow X$ — накрытия и $\text{Im}(p_1)_* = \text{Im}(p_2)_*$, то $(\widehat{X}_1, p_1, X)$ и $(\widehat{X}_2, p_2, X)$ послойно гомеоморфны. Здесь $\text{Im}(p_i)_* \subset \pi_1(X)$.

33.38. Доказать, что над всяким связным комплексом X существует накрытие $p: \widehat{X} \rightarrow X$, такое, что $\pi_1(\widehat{X}) = 0$. Такое накрытие называется универсальным.

33.39. Доказать, что множество векторных расслоений с линейно-связной структурной группой G над сферой S^n изоморфно $\pi_{n-1}(G)$.

33.40. Показать на примере, что не существует «точной гомологической последовательности расслоения».

33.41. Пусть $p: E \rightarrow B$ — локально-тривиальное расслоение со слоем F и базой B , причем F и B — конечные комплексы. Тогда $\chi(E) \leq \chi(B) \cdot \chi(F)$.

33.42. Материальная точка движется с постоянной по модулю скоростью: а) по тору T^n ; б) по сфере S^n . Найти фазовое пространство этой системы.

33.43. Пусть $p: E \rightarrow B$ — расслоение с линейно-связными базой B и слоем F . Пусть $\widetilde{\text{Cat}} = \text{Cat} - 1$ — приведенная категория Люстерника–Шнирельмана, т. е. $\widetilde{\text{Cat}}$ (точки) = 0. Доказать, что

$$\widetilde{\text{Cat}}(E) \leq \widetilde{\text{Cat}}_E(F) \cdot \widetilde{\text{Cat}}(B) + \widetilde{\text{Cat}}(B) + \text{Cat}_E(F),$$

где $\text{Cat}_E(F)$ — относительная категория слоя F по отношению к E .

33.44. Доказать, что если $p: X \rightarrow Y$ — расслоение в смысле Серра, то p — отображение «на».

33.45. Доказать, что если $p: X \rightarrow Y$ — расслоение в смысле Серра, то $p^{-1}(y_1)$ и $p^{-1}(y_2)$ гомотопически эквивалентны для любых $y_1, y_2 \in Y$.

33.46. Доказать, что многообразие линейных элементов многообразия M является расслоением с базой M .

33.47. Доказать, что любое локально-тривиальное расслоение (косое произведение) является расслоением в смысле Серра.

33.48. Доказать, что пространство путей EX с фиксированной начальной точкой пространства X является расслоением в смысле Серра с базой X .

33.49. Доказать, что прямое произведение топологических пространств $X \times Y$ с проекцией на один из сомножителей является расслоением в смысле Серра.

33.50. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — накрытие, $p(x_0) = y_0$, f, g — пути, такие, что $f(0) = g(0) = y_0$; $f(1) = g(1)$. Пусть $fg^{-1} \in p_*(\pi_1(X, x_0))$. Пусть $\widehat{f}, \widehat{g}$ — накрытия этих путей. Доказать, что $\widehat{f}(1) = \widehat{g}(1)$.

33.51. Представим тор T^2 в виде $T^2 = \{g\}$, где

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующие отношения эквивалентности R :

- а) $(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})R(-e^{i\varphi_1}, e^{-i\varphi_2})$;
- б) $(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})R(-e^{i\varphi_1}, -e^{-i\varphi_2})$;
- в) $(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2})R(e^{-i\varphi_1}, e^{-i\varphi_2})$.

Найти пространство $X = T^2/R$ и вычислить образ $f_*(\pi_1(T^2)) \subset \pi_1(X)$, где $f: T^2 \rightarrow X = T^2/X$ — проекция, связанная с отношением R . Является ли f накрытием?

33.52. Сколько существует расслоений вида:

- а) $T^3 \rightarrow S^1$, где T^3 — 3-мерный тор;
- б) $T^n \rightarrow S^1$, где T^n — n -мерный тор (расслоения рассматриваются с точностью до гомотопической эквивалентности)?

33.53. Пусть $C = A * B$ — свободное произведение произвольных групп A и B . Доказать, что для любой подгруппы $M \subset C$ выполнено равенство $M = A_1 * B_1 * F$, где $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, F — свободная группа. Дать топологическое доказательство, используя накрытия.

33.54. Пусть G — односвязная компактная группа Ли и $\sigma: G \rightarrow G$ — произвольный инволютивный автоморфизм (т.е. $\sigma^2 = 1$). Положим $H = \{g \in G | \sigma(g) = g\}$; $V = \{g \in G | \sigma(g) = g^{-1}\}$. Доказать, что $G = VHV$, т.е. любой элемент $g \in G$ допускает представление в виде

$$g = v h v, \quad v \in V, \quad h \in H.$$

Доказать, что $V \cong G/H$ (однородное пространство).

33.55. Известна следующая конструкция (Картана). Пусть $\sigma: G \rightarrow G$ — произвольный инволютивный автоморфизм компактной связной группы Ли. Положим

$$H = \{g \in G | \sigma(g) = g\}; \quad V = \{g \in G | \sigma(g) = g^{-1}\}.$$

Тогда $V \cong G/H$ и $V \subset G$ — вполне геодезическое подмногообразие, а потому V — симметрическое пространство. Подмногообразие V называется картановской моделью симметрического пространства G/H . Любое симметрическое пространство допускает (причем почти всегда однозначно определенную) картановскую модель.

а) Доказать, что проекция $p: G \rightarrow V$, определяемая формулой $p(g) = g\sigma(g^{-1})$, задает главное расслоение $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 0$.

б) Пусть V — картановская модель и пусть $\pi_1(V) = 0$, $e \in G$, $e \in V$, e — единица в G . Доказать, что если точка $x \in V$ сопряжена с e вдоль геодезической $\gamma(t) \subset V$ в группе G , то точка x сопряжена с e вдоль γ и в самом многообразии $V \subset G$.

33.56. Вычислить гомотопические группы $\pi_i(M_g)$, $i \geq 1$, 2-мерного многообразия M_g рода g .

33.57. Пусть M^2 — компактное замкнутое ориентированное 2-мерное многообразие рода g . Найти гомотопический тип $\Sigma^2 M^2$.

33.58. Пусть $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$ — стандартное вложение тора в евклидово пространство. Доказать, что не существует гомеоморфизма пары $(\mathbb{R}^3, S^1 \times S^1)$ на себя, ограничение которого на тор определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

33.59. Пусть π — фундаментальная группа 2-мерной поверхности, $f: \pi \rightarrow \pi$ — эпиморфизм. Доказать, что f является изоморфизмом.

33.60. Доказать тремя существенно различными способами, что на сфере S^2 не существует непрерывного векторного поля без особых точек (т. е. отличного от нуля в каждой точке).

33.61. Пусть $p: X \rightarrow Y$ — двулистное накрытие. Доказать, что тогда любой путь в Y накрывается в точности двумя путями.

33.62. Построить универсальное накрывающее пространство для ортогональной группы $SO(n)$.

33.63. Доказать, что любое двумерное замкнутое ориентированное гладкое многообразие рода $g \geq 2$ может быть локально изометрично накрыто плоскостью Лобачевского (снабженной стандартной метрикой постоянной отрицательной кривизны). Другими словами, доказать, что фундаментальная группа поверхности указанного вида может быть представлена как дискретная подгруппа в группе изометрий плоскости Лобачевского, действующая эффективно.

Отсюда, в частности, следует, что двумерное компактное замкнутое ориентируемое гладкое многообразие может быть снабжено римановой метрикой постоянной отрицательной кривизны.

33.64. Какие пространства могут накрывать бутылку Клейна?

33.65. Пусть S_g — сфера с g ручками. Какие S_h могут накрывать S_g ?

33.66. Доказать, что для любого компактного неориентируемого двумерного многообразия имеется ровно одно компактное двумерное ориентируемое многообразие, накрывающее его двулистно.

33.67. Доказать, что поверхность Бельтрами (поверхность постоянной отрицательной кривизны, стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3$) может быть бесконечно-листно и локально изометрично накрыта

некоторой областью, лежащей в плоскости Лобачевского. Найти эту область. Доказать, что она гомеоморфна двумерному диску. Найти соответствующую группу этого накрытия.

33.68. Может ли двумерный тор двулистно накрывать бутылку Клейна?

33.69. Вычислить группу перестановок листов римановой поверхности алгебраической функции $w = \sqrt[3]{z}$, возникающую при обходах вокруг точки ветвления этой функции (точки 0).

§ 34. Критические точки, степень отображения, теория Морса

34.1. Пусть $f, g: S^n \rightarrow S^n$ — симплициальные отображения. Доказать, что:

а) прообраз каждой внутренней точки симплекса старшей размерности состоит из одного и того же числа точек, взятых со знаком ориентации;

б) если f, g гомотопны, то числа точек прообраза, взятых с ориентацией, совпадают;

в) если числа точек прообраза с ориентациями совпадают, то отображения f и g гомотопны.

34.2. Доказать, что каждое непрерывное отображение замкнутого шара D^n в себя всегда имеет неподвижную точку.

34.3. Пусть $f: SU(n) \rightarrow SU(n)$ — гладкое отображение, $f(g) = g^k$. Найти $\deg f$.

34.4. Пусть $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ — гладкое погружение связного компактного ориентируемого замкнутого n -мерного ($n < p$) многообразия в $\mathbb{R}^p$. Пусть $v(f)$ — нормальный пучок этого погружения и $Sv(f)$ — ассоциированный пучок сфер, т.е. $Sv(f) = \partial v(f)$ — граница некоторой, достаточно малой трубчатой окрестности подмногообразия $f(M^n) \subset \mathbb{R}^p$. Пусть $T: Sv(f) \rightarrow S^{p-1}$ — обычное гауссово отображение (сферическое).

Найти степень $\deg T$ ($\dim Sv(f) = p - 1$), если известна эйлерова характеристика многообразия M^n . Зависит ли $\deg T$ от способа погружения M^n в $\mathbb{R}^3$? Что происходит, если M^n неориентируемо? Особо разобрать случай, когда $p = n + 1$.

34.5. Известно, что 2-мерное ориентируемое замкнутое компактное многообразие M^2 рода g можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Найти минимальное число седловых точек (вообще говоря, вырожденных) у функции $f(p) = z$, $p \in i(M^2)$, i — вложение, где f — функция высоты.

34.6. Доказать, что невырожденные критические точки гладкой функции на гладком многообразии изолированы.

34.7. Пусть $f(x)$ — функция на 2-мерной компактной ориентируемой поверхности рода g (сфера с g ручками), имеющая ко-

нечное число критических точек, причем все они невырождены. Доказать, что число минимумов минус число седел плюс число максимумов равно $2 - 2g$.

34.8. Пусть $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция на гладком многообразии. Доказать, что почти каждое значение функции f регулярно.

34.9. Доказать, что альтернированная сумма особых (критических) точек гладкой функции $f(x)$ (в предположении, что все ее особенности невырождены), заданной на гладком компактном многообразии, не зависит от функции (под альтернированной суммой точек понимается $\sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda m_\lambda$, где $n = \dim M$, λ — индекс критической точки, m_λ — число критических точек индекса λ).

34.10. Пусть $f(x)$ — комплексно-аналитическая функция одного переменного x . Доказать, что множество критических значений функции $S^2 \rightarrow S^2$ имеет меру нуль.

34.11. Пусть $M_c^n = \{x | f(x) = c\}$. Доказать, что если M_c^n не содержит критических точек функции f , то M_c^n — подмногообразие и $\text{codim } M_c^n = 1$ в M^n .

34.12. Доказать, что понятие невырожденной критической точки гладкой функции не зависит от выбора локальной карты, содержащей эту точку.

34.13. Показать, что для стандартного вложения тора $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ (поверхность вращения вокруг оси Oz) координата x , ортогональная оси вращения тора T^2 , имеет только невырожденные критические точки.

34.14. а) Построить на $\mathbb{R}P^n$ и CP^n функции, имеющие только невырожденные критические точки, причем так, чтобы во всех критических точках значения функций были различны.

б) Построить на $\mathbb{R}P^n$ и CP^n функции, для которых $f(x_\lambda) = \lambda = \text{ind}(x_\lambda)$, где x_λ — невырожденные критические точки индекса λ .

34.15. Пусть $F(x, y)$ — невырожденная билинейная форма на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гладкую функцию $f(x) = F(x, x)$, где $|x| = 1$, т.е. $f(x)$ — функция на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ — все собственные числа формы F (напомним, что все λ_i , $0 \leq i \leq n-1$, вещественны).

Доказать, что λ_i являются критическими значениями функции $f(x)$ на сфере S^{n-1} . Найти все критические точки функции $f(x)$. Доказать, что $\lambda_i = \inf_{S^i} \{\max_{x \in S^i} f(x)\}$, где S^i — стандартные i -мерные экваторы в сфере S^{n-1} .

34.16. Доказать, что если точка p является критической невырожденной точкой для гладкой функции $f(x)$ на гладком много-

образии, то тогда существует такая локальная система координат, в которой функция $f(x)$ в окрестности точки p представляется в виде квадратичной невырожденной формы.

34.17. Доказать, что если M_c — некритический уровень для функции $f(x)$ на многообразии M (т.е. гиперповерхность уровня $f(x) = c = \text{const}$, не содержащая критических точек для $f(x)$), то окрестность M_c диффеоморфна $M_c \times I$.

34.18. Если M_{c_1} и M_{c_2} — последовательные критические уровни, то промежуток между ними диффеоморфен $M_c \times I$, где $c_1 < c < c_2$.

34.19. Если между M_{c_1} и M_{c_2} нет критических уровней (т.е. гиперповерхностей уровня $f(x) = \text{const}$ с критическими точками) и M_{c_1} , M_{c_2} — также некритические, то они диффеоморфны.

34.20. а) Построить на произвольном компактном ориентируемом 2-мерном гладком многообразии M^2 гладкую функцию $f(x)$, имеющую одну точку минимума, одну точку максимума (невырожденные точки) и еще одну критическую точку, быть может, вырожденную. Найти связь между такой функцией и представлением M^2 в виде римановой поверхности некоторой многозначной аналитической функции. Выяснить ситуацию для случая неориентируемого 2-мерного многообразия M^2 (например, случай проективной плоскости $\mathbb{RP}^2$).

б) Построить на произвольном компактном многообразии M^2 гладкую функцию $f(x)$, имеющую: только невырожденные критические точки; ровно одну точку максимума, ровно одну точку минимума и s седловых точек (найти число s). Построить функцию так, что $f(x)$ принимает одно и то же значение во всех седловых точках. Изучить неориентируемый случай. Указать связь с задачей пункта а), построить слияние всех седловых точек в одну вырожденную критическую точку.

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. В основном нас будет интересовать случай, когда X — гладкое многообразие. Пусть f — непрерывная функция на X . Определим граф Рибо $\Gamma = \Gamma_f$ для функции f . Для этого введем на X следующее отношение эквивалентности. Точки x_1 и x_2 пространства X будем считать эквивалентными, если $f(x_1) = f(x_2)$ и x_1 и x_2 принадлежат одной компоненте связности множества $f^{-1}(c)$, где $c = f(x_1) = f(x_2)$. Соответствующее факторпространство X по этому отношению эквивалентности называется графом Рибо функции f . Легко видеть, что Γ является одномерным графом. При этом его концевые вершины (вершины кратности 1) отвечают локальным минимумам и максимумам функции f , а остальные вершины (кратности большей 1) отвечают «седловым» критическим значениям функции f . На рис. 109 показаны примеры графов Рибо для функций высоты (на рисунке — слева от поверхности) на торе и кренделе, стандартно вложенных в $\mathbb{R}^3$.

Пусть теперь f — гладкая функция на многообразии. Тогда ее граф Рибо можно снабдить дополнительной информацией о структуре критических уровней функции f . Покажем как это делается на примере функции Морса f на двумерной замкнутой поверхности M . Пусть $c \in \mathbb{R}$ —

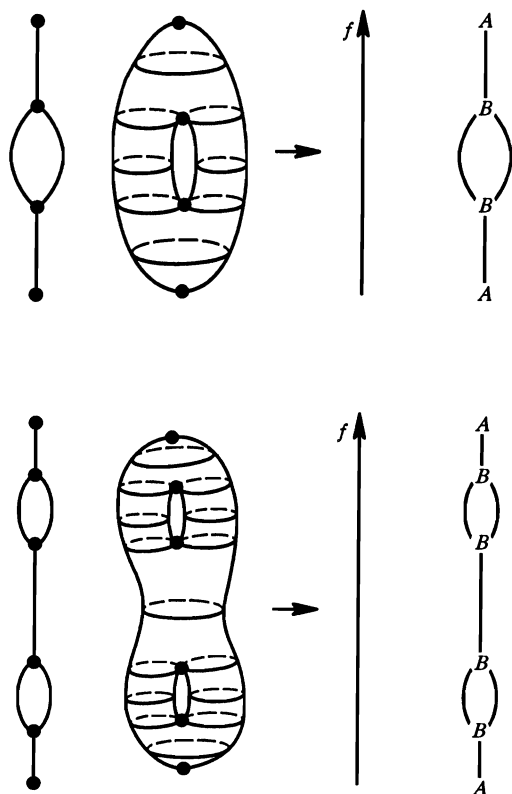


Рис. 109

произвольное критическое значение функции f . При этом $f^{-1}(c)$ может содержать несколько критических точек функции f . Рассмотрим прообраз $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$, где $\varepsilon > 0$ — такое число, что на отрезке $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ других критических значений, кроме c , нет.

Легко видеть, что $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ является двумерной поверхностью с краем. Край $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ является объединением окружностей. Назовем окружность *положительной*, если на ней f равняется $c + \varepsilon$, и *отрицательной*, если f равняется $c - \varepsilon$. Поверхность $f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ с такой дополнительной структурой на крае называется *атомом*.

Заменив в графе Рибо все вершины атомами, отвечающими критическим значениям функции f , получим граф, содержащий дополнительную информацию о критических точках функции. Такой граф называется *молекулой* (пример см. на рис. 109, справа от поверхности).

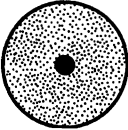
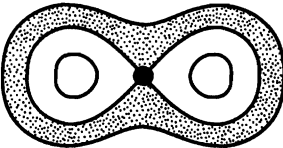
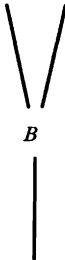
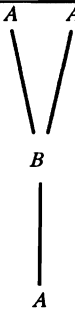
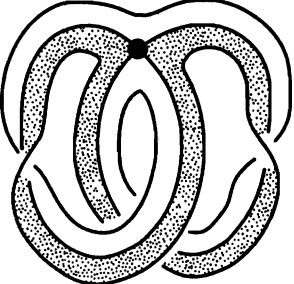
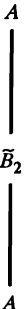
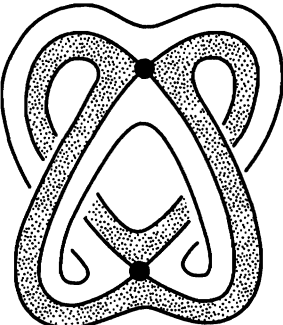
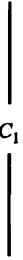
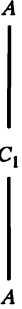
№				
1	Сложность 1 Ориентируемые 			Сфера
2				Сфера
$\tilde{1}$	 Неориентируемая			Проективная плоскость
1	Сложность 2 Ориентируемые 			Тор

Рис. 110

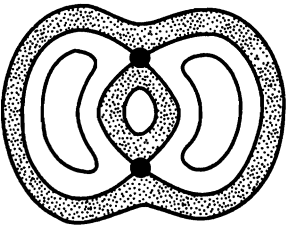
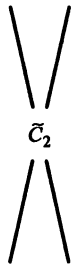
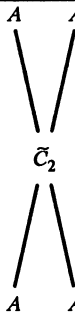
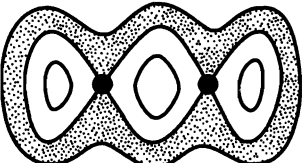
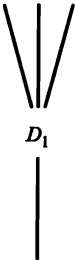
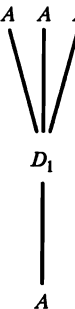
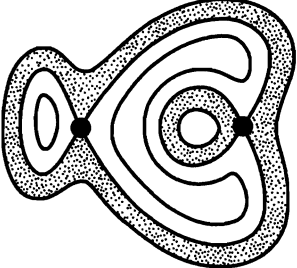
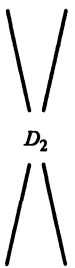
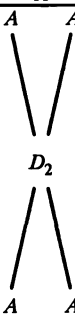
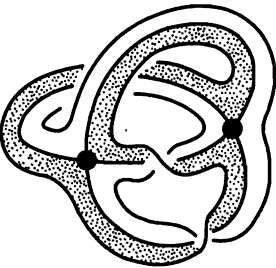
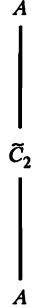
№				
2				Сфера
3				Сфера
4				Сфера
$\tilde{1}$	Неориентируемые 			Бутылка Клейна

Рис. 111

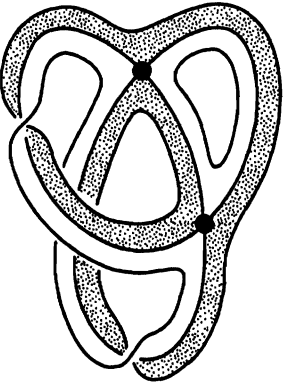
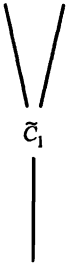
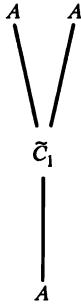
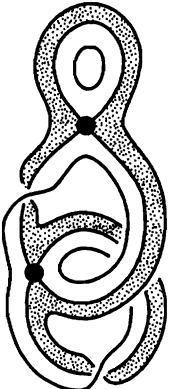
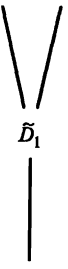
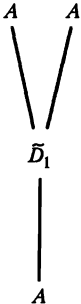
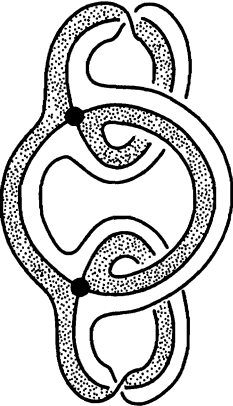
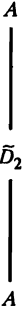
№				
$\tilde{2}$		 $\tilde{C}_1$	 $\tilde{C}_1$	Проективная плоскость
$\tilde{3}$		 $\tilde{D}_1$	 $\tilde{D}_1$	Проективная плоскость
$\tilde{4}$		 $\tilde{D}_2$	 $\tilde{D}_2$	Бутылка Клейна

Рис. 112

34.21. а) Построить на торе T^2 функцию Морса в точности с четырьмя критическими точками так, чтобы две седловые точки лежали на одном критическом уровне. Нарисовать линии уровня такой функции на квадрате, склейкой сторон которого получается тор. Нарисовать молекулу для такой функции.

б) Реализовать такую функцию как функцию высоты на торе при подходящем его вложении в $\mathbb{R}^3$.

34.22. Построить на бутылке Клейна функцию Морса с четырьмя критическими точками и четырьмя различными критическими значениями. Нарисовать ее линии уровня на квадрате, склейкой сторон которого получается бутылка Клейна. Нарисовать соответствующие атомы и молекулу.

34.23. Построить на бутылке Клейна функцию Морса с четырьмя критическими точками и тремя критическими значениями. Нарисовать ее линии уровня на квадрате, склейкой сторон которого получается бутылка Клейна. Нарисовать соответствующие атомы и молекулу.

34.24. Построить на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ функцию Морса с тремя критическими точками и тремя различными критическими значениями. Нарисовать линии уровня на квадрате, склейка сторон которого дает $\mathbb{R}P^2$. Нарисовать соответствующие атомы и молекулу.

34.25. Построить на сфере, торе, проективной плоскости и на бутылке Клейна функции Морса с указанными на рис. 110–112 атомами (окрестностями седловых критических уровней) и молекулами. Нарисовать их линии уровня на квадрате, склейкой сторон которого получается рассматриваемая поверхность.

§ 35. Простейшие вариационные задачи

35.1. Доказать, что экстремальными траекториями для функционала действия $E[\gamma] = \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$ на гладком римановом много-

образии M^n (где $\gamma(t)$ — гладкие траектории на M^n , $0 \leq t \leq 1$, $\dot{\gamma}(t)$ — вектор скорости $\gamma(t)$) являются геодезические.

35.2. Установить связь между экстремальными траекториями функционала длины $L[\gamma] = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt$ и функционала действия

$E[\gamma] = \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt$. Доказать, что любая экстремаль $\gamma_0(t)$ для $E[\gamma]$

является экстремалью для $L[\gamma]$. Доказать, что если $s_0(t)$ — экстремаль для $L[\gamma]$, то путем замены параметра $t = t(\tau)$ на $s_0(t)$ можно превратить эту траекторию в экстремаль для $E[\gamma]$.

35.3. Пусть

$$S(f) = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

— функционал, сопоставляющий каждой гладкой функции $z = f(x, y)$, определенной на ограниченной области $D = D(x, y) \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ (здесь x, y, z — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$), площадь графика функции $z = f(x, y)$. Доказать, что экстремальность функции f_0 относительно функционала S эквивалентна условию: $\bar{H} = 0$, где через H обозначена средняя кривизна графика $z = f_0(x, y)$, рассматриваемого как двумерное гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^3$.

35.4. Доказать утверждение, сформулированное в предыдущей задаче, для случая $(n-1)$ -мерных графиков $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ в $\mathbb{R}^n$.

35.5. Доказать, что функционалы действия $E[\gamma]$ и длины $L[\gamma]$ связаны соотношением: $(L[\gamma])^2 \leq E[\gamma]$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\gamma(t)$ — геодезическая.

35.6. Доказать, что функционал площади

$$S[r] = \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

(где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — радиус-вектор в $\mathbb{R}^3$, гладко зависящий от (u, v)) и функционал Дирихле

$$D[r] = \int_D \frac{E + G}{2} du dv$$

связаны соотношением $S[r] \leq D[r]$.

35.7. Радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$, задающий двумерную поверхность M^2 в трехмерном евклидовом пространстве, называется *гармоническим*, если $\mathbf{r}(u, v)$ является экстремалью функционала Дирихле $D[r] = \frac{1}{2} \int_D (E + G) du dv$. Доказать, что если средняя кривизна H поверхности M^2 , задаваемой некоторым радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, равна 0, то тогда в окрестности каждой точки на поверхности можно ввести такие локальные координаты (p, q) , в которых радиус-вектор $\mathbf{r}(p, q)$ станет гармоническим.

35.8. Построить пример такого гармонического радиус-вектора $r(u, v)$, чтобы описываемая им поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ не была минимальной (т. е. чтобы $H \neq 0$).

35.9. Неравенство Виртингера. Пусть H — эрмитова, симметричная, положительно определенная форма в $\mathbb{C}^n$, пусть $\alpha: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — овеествление $\mathbb{C}^n$, тогда

$$H \rightarrow H^R = \begin{pmatrix} S & A \\ -A & S \end{pmatrix},$$

где $H = S + iA$; S, A — вещественные матрицы; $S^\top = S$; $A^\top = -A$; $\overline{H}^\top = H$.

Форма S задает в $\mathbb{R}^{2n}$ евклидово скалярное произведение; форма A задает в $\mathbb{R}^{2n}$ внешнюю 2-форму $\omega^{(2)}$. Для простоты можно считать, что $\omega^{(2)} = \sum_{k=1}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k$. Рассмотрим форму

$$\Omega^{(2r)} = \frac{1}{r!} \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_r, \quad r \leq n.$$

а) Если $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ — произвольный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ относительно скалярного произведения $S = \operatorname{Re} H$, то

$$|\Omega^{(2r)}(\omega_1, \dots, \omega_{2r})| \leq 1 \quad \text{и} \quad |\Omega^{(2r)}(\omega_1, \dots, \omega_{2r})| = 1$$

тогда и только тогда, когда плоскость $L(\omega_1, \dots, \omega_{2r})$, порожденная векторами $\omega_1, \dots, \omega_{2r}$, является комплексным подпространством в $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$.

б) Пусть $W^r \subset \mathbb{C}^n$, $r < n$ (r — комплексная размерность) — комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$ (если W^r — алгебраическое подмногообразие, то допускаются особые точки на W^r). Пусть V^{2r} — вещественное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, такое, что $V \cup W = \partial Z^{2r+1}$, где Z^{2r+1} — вещественное $(2r+1)$ -мерное подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, имеющее своим краем $V \cup W$. Пусть $K = V \cap W$, тогда $\operatorname{vol}_{2r}(V \setminus K) \geq \operatorname{vol}_{2r}(W \setminus K)$.

З а м е ч а н и е. Это утверждение означает, что комплексные подмногообразия W в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ являются минимальными подмногообразиями, т. е. при любом «возмущении» V $2r$ -мерный объем (vol_{2r}) не уменьшается.

в) Доказать, что утверждение задачи б) остается справедливым, если заменить $\mathbb{C}^n$ на любое кэлерово многообразие, т. е. на комплексное многообразие, снабженное внешней 2-формой $\omega^{(2)}$, невырожденной и замкнутой.

35.10. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$ функции вида $F(x^1, \dots, x^n)$ и функционал $J[F] = \int_D |\text{grad } F| d\sigma^n$, где D — область определения функций F . Пусть F_0 — экстремаль функционала J . Доказать, что поверхности уровня $F_0(x^1, \dots, x^n) = \text{const}$, рассматриваемые как гиперповерхности в $\mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$, являются локально минимальными поверхностями.

35.11. Пусть $n(x, y)$ — показатель преломления плоского прозрачного изотропного, но неоднородного вещества, заполняющего 2-мерную плоскость. Траекториями световых лучей являются интегральные линии векторного поля $\text{grad } n(x, y)$. Доказать, что они являются геодезическими линиями метрики

$$ds^2 = n(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

§ 36. Общая топология

36.1. Пусть $M = X \times Y$, где X, Y — топологические пространства. Пусть множество из M открыто, если оно является произведением открытых множеств из X и Y или объединением таких множеств в любом числе. Доказать, что такая система удовлетворяет всем аксиомам, определяющим топологию на множестве M .

36.2. Доказать, что если пространства X и Y хаусдорфовы, а X , кроме того, еще и локально-компактно, то для любого пространства T пространства $H(X \times Y, T)$ и $H(Y, H(X, T))$ гомеоморфны, где $H(X, Y) = Y^X$.

36.3. Доказать, что существует гомеоморфизм канторова дисконтинуума на себя, переставляющий две заданные точки.

36.4. Пусть X — локально-линейно-связное метрическое пространство. Доказать, что если X — связно, то X — линейно-связно.

36.5. Пусть $A \cap B \neq \emptyset$, $X = A \cup B$. Доказать, что если A и B — связные пространства, то X — связное пространство.

36.6. Доказать, что хеммингова метрика в n -мерном кубе не вкладывается ни в какое $\mathbb{R}^n$, т. е. не существует такого вложения, что хеммингова метрика индуцирована стандартной евклидовой метрикой (куб рассматривается только как набор своих вершин, т. е. как дискретное множество, и тогда расстояние $p(a, b)$, где a и b — вершины куба, равно числу координат, в которых различаются две вершины).

36.7. Доказать, что группа унитарных матриц $U(n)$, рассматриваемая как топологическое пространство, гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times SU(n)$ (как топологических пространств).

36.8. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц размера $n \times n$ — топологическое пространство, состоящее из двух связных компонент.

36.9. Доказать, что любой конечный CW -комплекс можно вложить в конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ (достаточно большой размерности).

36.10. Если в качестве CW -комплекса взять компактное гладкое замкнутое многообразие M^n , то результат, сформулированный в предыдущей задаче, может быть уточнен.

а) Доказать, что M^n можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{2nk}$, где k — число открытых шаров D^n , образующих покрытие M^n .

б) Доказать, что M^n можно вложить в евклидово пространство $\mathbb{R}^{nk}$, где число k определено в пункте а).

36.11. Доказать, что всякий конечный симплициальный комплекс является подкомплексом симплекса достаточно большой размерности. В частности, он может быть вложен в евклидово пространство так, что вложение линейно на каждом симплексе.

36.12. Пусть $f: M^2 \rightarrow S^2$ — отображение класса C^2 замкнутого гладкого компактного многообразия M^2 на S^2 , причем f открыто (образ любого открытого множества открыт) и конечно-кратно (прообраз каждой точки $x \in S^2$ есть конечное число точек). Доказать, что M^2 — диффеоморфно сфере S^2 . Что можно сказать об аналогичном отображении $f: M^n \rightarrow S^n$?

Пусть X — топологическое пространство. Через $\text{exp } X$ обозначим множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X . Для открытых множеств $U_1, \dots, U_k \subset X$ положим

$$O\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{F \in \text{exp } X \mid F \subset \bigcup_{i=1}^k U_i, F \cap U_i \neq \emptyset \forall i\}.$$

36.13. Доказать, что множества вида $O\langle U_1, \dots, U_k \rangle$ образуют базу некоторой топологии. Эта топология называется *топологией Вьеториса*, а множество $\text{exp } X$, наделенное топологией Вьеториса, называется *гиперпространством* (замкнутых множеств) пространства X .

36.14. Пусть X есть T_1 -пространство. Доказать, что тождественное вложение $X \subset \text{exp } X$, переводящее точку x в множество $\{x\}$, является топологическим.

36.15. Пусть X есть T_1 -пространство. Тогда X регулярно в том и только том случае, когда $\text{exp } X$ хаусдорфово.

36.16. Доказать, что для T_1 -пространства X следующие условия эквивалентны: а) X нормально; б) $\text{exp } X$ вполне регулярно; в) $\text{exp } X$ регулярно.

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\text{exr}_n X$ множество всех непустых замкнутых подмножеств X , состоящих из не более чем n точек. Будем считать тождественное вложение $\text{exr}_n X \subset \text{exr} X$ топологическим, т. е. наделим $\text{exr}_n X$ топологией Вьеториса.

36.17. Доказать, что если X хаусдорфово, то $\text{exr}_n X$ замкнуто в $\text{exr} X$.

36.18. Доказать, что если X является T_1 -пространством и $\text{exr}_1 X$ замкнуто в $\text{exr}_2 X$, то X хаусдорфово.

Обозначим через $\pi_n: X^n \rightarrow \text{exr}_n X$ отображение, переводящее точку $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ в множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ ее координат (предполагается, что X является T_1 -пространством).

36.19. Доказать, что отображение π_n непрерывно. Более того, оно факторно, т. е. множество $V \subset \text{exr}_n X$ открыто тогда и только тогда, когда $\pi_n^{-1}(V)$ открыто.

Таким образом, гиперпространство $\text{exr}_n X$ получается из n -й степени пространства X посредством факторизации, определяемой следующим отношением эквивалентности: точка $(x_1, \dots, x_n)$ эквивалентна точке $(x'_1, \dots, x'_n)$ тогда и только тогда, когда множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ и $\{x'_1, \dots, x'_n\}$ совпадают.

Это является основанием того, что гиперпространство $\text{exr}_n X$ называется *гиперсимметрической n -й степенью* пространства X .

Наряду с только что описанным отношением эквивалентности на произведении X^n естественным образом возникают и другие симметрии. На X^n действует свободная группа S_n как группа перестановок координат. Более общим образом, пусть G — подгруппа группы S_n . Определим на X^n отношение эквивалентности $\sim_G$ следующим образом: $(x_1, \dots, x_n) \sim_G (x'_1, \dots, x'_n)$ тогда и только тогда, когда существует подстановка $\sigma \in G$, для которой $x_i = x'_{\sigma(i)}$.

Фактор-пространство X^n/G обозначается $SP_G^n X$ и называется *G -симметрической степенью* пространства X .

Если $G = \{e\}$, то $SP_G^n X = X^n$.

Если $G = S_n$, то $SP_G^n X$ обозначается через $SP^n X$ и называется *симметрической n -степенью* пространства X .

Естественную проекцию $X^n \rightarrow X^n/G$ будем обозначать через π_G^n . Если $G = S_n$, то $\pi_G^n = \pi^n$.

36.20. Доказать, что если $G' \subset G$, то существует единственное отображение $\pi_{G'}^n: SP_{G'}^n X \rightarrow SP_G^n X$, удовлетворяющее условию

$$\pi_{G'}^n \circ \pi_G^n = \pi_G^n.$$

36.21. Доказать, что отображение π_G^n открыто и замкнуто.

36.22. Доказать, что отображение $\pi_{G'}^n$ открыто и замкнуто.

Поскольку отношение гиперсимметричности сильнее отношения симметричности, существует единственное отображение

$$q_n: SP^n X \rightarrow \text{exp}_n X$$

такое, что $\pi_n = q_n \circ \pi^n$.

36.23. Доказать, что отображение q_n факторно.

Вернемся к гиперпространствам. *Компактом* будем называть бикompактное хаусдорфово пространство.

36.24. Доказать, что если X — компакт, то $\text{exp } X$ — также компакт.

36.25. Доказать, что если X — компакт, то $\text{exp}_n X$ — также компакт.

36.26. Доказать, что если X — компакт, то $SP_G^n X$ — компакт.

36.27. Доказать, что в определении топологии Вьеториса (в случае компактного X) в качестве базисных множеств можно брать множества вида $O \langle U_1, \dots, U_k \rangle$, где $U_1, \dots, U_k$ пробегает некоторую базу пространства X .

Через wX будем обозначать *вес* пространства X , т.е. наименьшую из мощностей баз пространства X .

36.28. Доказать, что если X — бесконечный компакт, то

$$wX = w \text{exp } X = w \text{exp}_n X = w SP_G^n X.$$

Пусть (X, ρ) — ограниченное метрическое пространство. Через ρ_n обозначим следующую функцию расстояния на $\text{exp } X$:

$$\rho_n(F_1, F_2) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid F_1 \subset O_\varepsilon F_2, F_2 \subset O_\varepsilon F_1 \},$$

где $O_\varepsilon A$ обозначает открытый ε -шар вокруг множества A .

36.29. Доказать, что функция ρ_n является метрикой на множестве $\text{exp } X$, совпадающей с метрикой ρ на $X = \text{exp}_1 X$.

Функция ρ_n называется *метрикой Хаусдорфа*, порожденной метрикой ρ .

36.30. Доказать, что метрика Хаусдорфа на $\text{exp}_n X$ порождает топологию Вьеториса.

36.31. Доказать, что если пространство X метризуемо, то $SP_G^n X$ также метризуемо.

36.32. Доказать, что если (X, ρ) — метрический компакт, то метрика Хаусдорфа на $\text{exp } X$ порождает топологию Вьеториса.

36.33. Доказать, что если X — метризуемый компакт, то $\text{exp } X$, $\text{exp}_n X$, $SP_G^n X$ также являются метризуемыми компактными.

Через H^n обозначим n -мерное замкнутое полупространство $\mathbb{R}^n$, т.е. $H^n = \{x \mid x_1 \geq 0\}$. Через $X(n)$ обозначим *циклическую n -степень* пространства X , т.е.

$$X(n) = SP_{z_n}^n X,$$

где $\mathbb{Z}_n$ — свободная циклическая подгруппа S_n с образующей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

В задачах 36.34–36.46 установить гомеоморфность топологических пространств:

$$36.34. \exp_2 I \approx I^2. \quad 36.35. \exp_2 H^1 \approx H^2.$$

$$36.36. \exp_2 \mathbb{R} \approx H^2.$$

$$36.37. \exp_2 S^1 \text{ гомеоморфно листу Мёбиуса.}$$

$$36.38. I(3) \approx I^3. \quad 36.39. SP^3(I) \approx I^3.$$

$$36.40. \exp_3 I \approx I^3. \quad 36.41. H^1(3) \approx H^3.$$

$$36.42. SP^3(H^1) \approx H^3. \quad 36.43. \exp_3 H^1 \approx H^3.$$

$$36.44. \mathbb{R}(3) \approx \mathbb{R}^3. \quad 36.45. SP^3(\mathbb{R}) \approx H^3.$$

$$36.46. \exp_3(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^3.$$

$$36.47. \text{Доказать, что пространство } \exp_3(S^1) \text{ односвязно.}$$

$$36.48. \text{Доказать, что пространство } SP^3(S^1) \text{ не односвязно.}$$

$$36.49. \text{Доказать, что пространство } S^1(3) \text{ не односвязно.}$$

В задачах 36.50–36.58 установить гомеоморфность топологических пространств:

$$36.50. S^1(3) \approx S^1 \times S^2. \quad 36.51. SP^3(S^1) \approx S^1 \times I^2.$$

$$36.52. \exp_3(S^1) \approx S^3. \quad 36.53. \exp_4 I \not\subset \mathbb{R}^4.$$

$$36.54. \exp_4 I \text{ не является топологическим многообразием.}$$

$$36.55. SP^n I \approx I^n, \quad n \geq 4.$$

$$36.56. SP^n H^1 \approx H^n, \quad n \geq 4. \quad 36.57. SP^n \mathbb{R} \approx H^n, \quad n \geq 4.$$

$$36.58. SP^n S^1 \approx \begin{cases} S^1 \bowtie I^{n-1}, & n \text{ — чётно} \\ S^1 \times I^{n-1}, & n \text{ — нечётно.} \end{cases}$$

Здесь через $S^1 \bowtie I^{n-1}$ обозначено единственное нетривиальное расслоение над S^1 со слоем I^{n-1} .

36.59. Доказать, что пространство $M(4)$ не является топологическим многообразием ни для какого топологического многообразия M .

36.60. Показать, что пространство $\exp_3 M^2$ не является топологическим многообразием.

В задачах 36.61–36.66 установить гомеоморфность топологических пространств:

$$36.61. SP^n I^2 \approx I^{2n}. \quad 36.62. SP^n H^2 \approx H^{2n}.$$

$$36.63. SP^n \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}^{2n}. \quad 36.64. SP^n S^2 \approx \mathbb{C}P^n.$$

$$36.65. SP^n(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \approx (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{2n-2}.$$

$$36.66. SP^n(S^1 \times I) \approx S^1 \times I^{2n-1}.$$

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Часть 1

1.1. а) $x_1 = a_1 u_1 \cos u_2$, $x_2 = a_2 u_1 \sin u_2$; б) см. рис. 113; в) $a_1 a_2 u_1$, $\frac{1}{a_1 a_2 u_1}$, взаимная однозначность нарушается в начале координат $x_1 = x_2 = 0$.

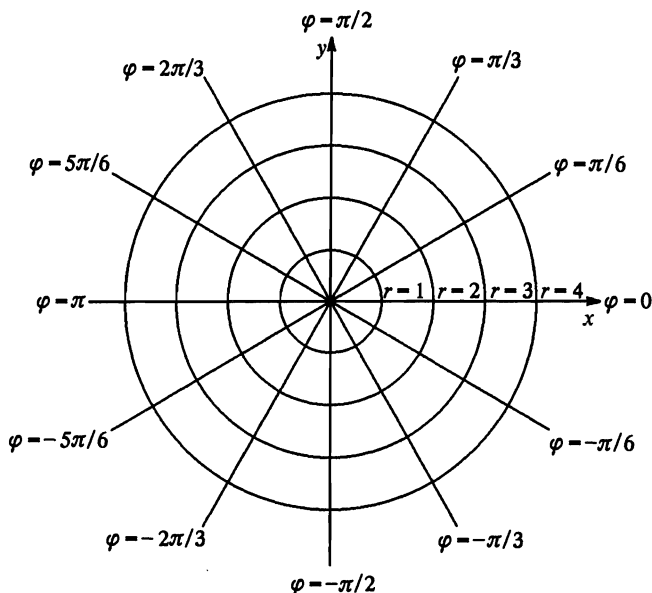


Рис. 113. Полярная система координат, $a_1 = a_2 = 1$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = r$, $u_2 = \varphi$

1.2. а) $x_1 = \cos u_2 \operatorname{ch} u_1$, $x_2 = \sin u_2 \operatorname{sh} u_1$; б) см. рис. 114; в) $\operatorname{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2$, $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2}$.

1.3. а) $x_1 = u_1^2 - u_2^2$, $x_2 = 2u_1 u_2$; б) см. рис. 115; в) $4(u_1^2 + u_2^2)$, $\frac{1}{4(u_1^2 + u_2^2)}$.

1.4. а) $x_1 = \frac{\operatorname{sh} u_1}{\cos u_2 + \operatorname{ch} u_1}$, $x_2 = \frac{\sin u_2}{\cos u_2 + \operatorname{ch} u_1}$; б) см. рис. 116;

в) $\frac{1}{(\cos u_2 + \operatorname{ch} u_1)^2}$, $(\cos u_2 + \operatorname{ch} u_1)^2$.

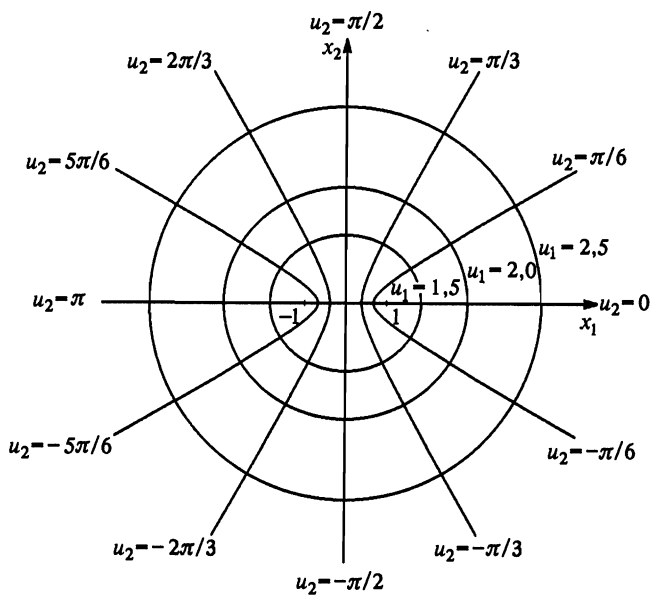


Рис. 114. Эллиптическая система координат

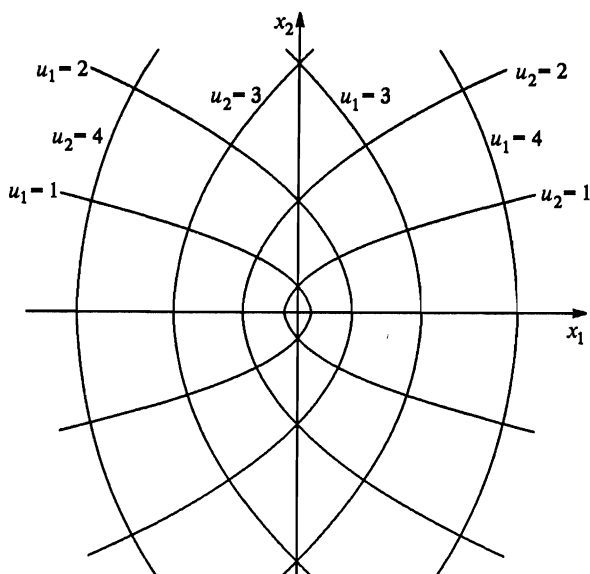


Рис. 115. Параболическая система координат

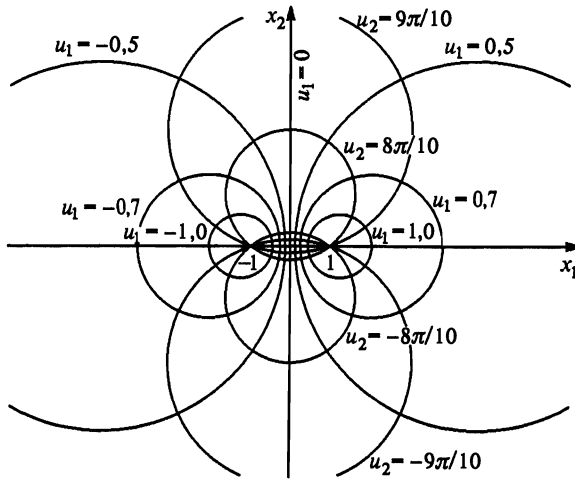


Рис. 116. Биполярная система координат

- 1.5. а) $x_1 = u_1^3 - 3u_1u_2^2$, $x_2 = 3u_1^2u_2 - u_2^3$; в) $9(u_1^2 + u_2^2)^2$, $\frac{1}{9(u_1^2 + u_2^2)^2}$.
- 1.6. б) $a_1a_2u_1$, $\frac{1}{a_1a_2u_1}$, взаимная однозначность нарушается при $x_1 = x_2 = 0$; в) нет, если $a_1 \neq a_2$, и да, если $a_1 = a_2$.
- 1.7. б) $a_1a_2a_3u_1^2 \sin u_2$, $\frac{1}{a_1a_2a_3u_1^2 \sin u_2}$, взаимная однозначность нарушается при $x_1 = x_2 = 0$; в) нет, если $a_1 \neq a_2$, и да, если $a_1 = a_2$.
- 1.8. б) $\frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_1)(u_2 - u_3)}{8\sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)}}$, $\frac{8\sqrt{-\prod_{i,j=1}^3 (a_i - u_j)}}{(u_1 - u_2)(u_3 - u_1)(u_2 - u_3)}$; в) да.
- 1.9. б) $u_1^3u_2 + u_2^3u_1$, $\frac{1}{u_1^3u_2 + u_2^3u_1}$, взаимная однозначность нарушается при $x_1 = x_2 = 0$; в) да.
- 1.10. б) $\text{sh } u_1 \sin u_2 (\text{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2)$, $\frac{1}{\text{sh } u_1 \sin u_2 (\text{sh}^2 u_1 + \sin^2 u_2)}$; в) да.
- 1.11. б) $\text{ch } u_1 \sin u_2 (\text{sh}^2 u_1 - \sin^2 u_2)$, $\frac{1}{\text{ch } u_1 \sin u_2 (\text{sh}^2 u_1 - \sin^2 u_2)}$; в) да.
- 1.12. б) $\frac{\text{sh } u_1}{(\text{ch } u_1 - \cos u_2)^3}$, $\frac{(\text{ch } u_1 - \cos u_2)^3}{\text{sh } u_1}$; в) да.
- 1.13. $\sqrt{v - u^2} \frac{\partial z}{\partial u}$. Область определения: $u > 0$; область значений: $v > u^2$.

1.14. а) $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$; б) $r \cos 2\varphi \frac{\partial u}{\partial r} - \sin 2\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}$; в) $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$;
 г) $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$.

1.15. $-4a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$, $a \neq 0$.

1.16. $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + (u^2 + v^2)k^2 z = 0$.

1.17. а) $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$;

б) $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$.

1.18.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

1.19. $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$.

1.20. У к а з а н и е. Воспользоваться формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

1.21. $\frac{1}{4(u^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right)$.

1.22. $\frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right)$.

1.23. $e^{-2u} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right)$.

2.1. $r = a\varphi$.

2.2. $r = r_0 e^{k\varphi}$, где $\varphi = \omega t$.

2.3. $x = at - d \sin t$, $y = a - d \cos t$.

2.4. $x = (R+r) \cos \frac{rt}{R} - r \cos \frac{(R+r)t}{R}$, $y = (R+r) \sin \frac{rt}{R} - r \sin \frac{(R+r)t}{R}$.

2.5. $x = (R - mR) \cos mt + mR \cos(t - mt)$,
 $y = (R - mR) \sin mt - mR \sin(t - mt)$, $m = r/R$. Ср. с задачей 2.4.

2.6. Уравнение искомой кривой

$$\mathbf{r}(t) = \mu(t)\mathbf{a} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b}$ — постоянный вектор, $\mu(t)$ — первообразная для функции $\lambda(t)$, $c < t < d$.

Геометрически возможны следующие случаи:

— прямая, коллинеарная $\mathbf{a}$, если $\int_c^d \lambda(t) dt$ расходится при $t = c$ и при $t = d$;

— луч, имеющий направление вектора $\mathbf{a}$, если $\int_c^d \lambda(t) dt$ сходится при $t = c$, но расходится при $t = d$;

— луч, имеющий направление вектора $-\mathbf{a}$, если $\int_c^d \lambda(t) dt$ расходится при $t = c$, но сходится при $t = d$;

— открытый отрезок, коллинеарный $\mathbf{a}$, если $\int_c^d \lambda(t) dt$ сходится.

2.7. Уравнение искомой кривой

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{a} + t\mathbf{b} + \mathbf{c},$$

где $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — произвольные постоянные векторы. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы, то это уравнение (при фиксированных $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$) задает параболу с осью, имеющей направление вектора $\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы, то получим дважды взятый луч, параллельный $\mathbf{a}$.

2.8. а) $|\mathbf{r}'|^2 |\mathbf{r}' \times \mathbf{a}|^2$; б) $-(\mathbf{r}', \mathbf{a}) |\mathbf{r}' \times \mathbf{a}|^2$.

2.9. $\mathbf{r}' = (\varphi', \varphi + t\varphi')$, $\mathbf{r}'' = (\varphi'', 2\varphi' + t\varphi'')$, $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = 2\varphi'^2 - \varphi\varphi''$. Данное уравнение определяет прямую тогда и только тогда, когда $2\varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0$. Решая это уравнение, находим $\varphi = \frac{a}{1+bt}$, где a и b — константы.

2.10. Будем через r обозначать длину вектора $\mathbf{r}$. Пусть вектор $\mathbf{e}$ определяется формулой $\mathbf{r} = r\mathbf{e}$. Тогда $\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = r'\mathbf{e} + r\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi}$. Так как $\mathbf{e} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, то $\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, т. е. $\frac{d\mathbf{e}}{d\varphi}$ получается из $\mathbf{e}$ поворотом на угол $\pi/2$. Обозначим вектор, получающийся из $\mathbf{e}$ поворотом на угол $\pi/2$, через $\mathbf{f}$. Следовательно, $\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = r'\mathbf{e} + r\mathbf{f}$. Далее,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\varphi^2} = r''\mathbf{e} + 2r'\mathbf{f} - r\mathbf{e} = (r'' - r)\mathbf{e} + 2r'\mathbf{f},$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{d\varphi^2} \right| = \begin{vmatrix} r' & r \\ r'' - r & 2r' \end{vmatrix} = 2r'^2 - rr'' + r^2 = 0.$$

Полагая $r' = \omega$, находим

$$r'' = \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dr} r' = \omega \frac{d\omega}{dr},$$

$$2\omega^2 - \omega r \frac{d\omega}{dr} + r^2 = 0, \quad \frac{2\omega^2}{r^2} - \frac{\omega}{r} \frac{d\omega}{dr} + 1 = 0.$$

Положим $\omega^2 = p$, $r^2 = q$, тогда $dp/dq = 2p/q + 1$. Решая это уравнение, найдем $p = aq^2 - q$ или $\omega^2 = ar^4 - r^2$, $r' = r\sqrt{ar^2 - 1}$. Производя в этом уравнении подстановку $1/r = \xi$, легко получаем

$$\frac{1}{r} = C_1 \sin(\varphi + C_2),$$

где C_1, C_2 — произвольные числа.

Случай прямой, проходящей через начало координат, оставляем на рассмотрение читателю.

2.11. а) Рассмотрим вектор $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$. Его производная равняется $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$. Согласно второму закону Ньютона, $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t)$, где m — масса материальной точки M . Отсюда

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = \mathbf{r}(t) \times \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

По условию $\mathbf{F} = F\mathbf{r}$ и, следовательно, $\frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)) = 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ — постоянный. Тем самым, движение материальной точки M происходит в неподвижной плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$;

$$\text{б) } u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -\frac{F}{mc^2}, \quad u = \frac{1}{r}, \quad c = \text{const};$$

в) обозначим постоянный вектор $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)$ через $\mathbf{a}$. Здесь через r обозначена длина вектора $\mathbf{r}$. Имеем

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{a} \times \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{a} \times \mathbf{r} = -\frac{k}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') \times \mathbf{r} = -k \frac{r\mathbf{r}' - r'\mathbf{r}}{r^2} = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right).$$

На всякий случай отметим, что $r' — это \frac{dr}{dt}$, а не $\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$.

Итак,

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{a} \times \mathbf{r}' + k \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r}' + k \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{b} = \text{const.}$$

Скалярно умножая обе части этого равенства на $\mathbf{r}$ и замечая, что $\langle \mathbf{a} \times \mathbf{r}', \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r}' \times \mathbf{r} \rangle = -|\mathbf{a}|^2$, имеем $-|\mathbf{a}|^2 + k|\mathbf{r}| = \langle \mathbf{b}, \mathbf{r} \rangle$. Напомним, что движение происходит в фиксированной плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{a}$ (так как из соотношения $\mathbf{r} \times \mathbf{r}' = \mathbf{a}$ следует $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle = 0$). Введем в этой плоскости полярную систему координат, совмещая ее начало координат с началом радиус-векторов и направляя полярную ось по вектору $\mathbf{b}$. Получим $-|\mathbf{a}|^2 + k|\mathbf{r}| = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{r}| \cos \varphi$, откуда $|\mathbf{r}| = |\mathbf{a}|^2 / (k - |\mathbf{b}| \cos \varphi)$ — кривая второго порядка. Отсюда, в частности, следует, что вектор $\mathbf{b}$ направлен по оси найденной кривой второго порядка.

2.12. Введем декартову прямоугольную систему координат, располагая ось Oz коллинеарно вектору $\mathbf{H}$. Тогда $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, и данное дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$x'' = ay', \quad y'' = -ax', \quad z'' = 0, \quad \text{где } a = |\mathbf{H}|.$$

Из соотношения $z'' = 0$ находим $z = C_1 t + C_2$; из соотношений $x'' = ay'$, $y'' = -ax'$ находим

$$x = C_3 \cos at + C_4 \sin at + C_5, \quad y = -C_3 \sin at + C_4 \cos at + C_6.$$

При $C_1 \neq 0$ это — семейство винтовых линий, оси которых коллинеарны вектору $\mathbf{H}$; при $C_1 = 0$ получаем семейство окружностей, лежащих в плоскостях, ортогональных вектору $\mathbf{H}$.

2.13. Окружности, центры которых расположены на прямой, проходящей через начало радиус-векторов коллинеарно вектору $\boldsymbol{\omega}$, а плоскости этих окружностей перпендикулярны к указанной прямой.

2.14. Прямые, по которым пересекаются плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{e}$, с плоскостями, проходящими через прямую, проведенную через начало координат коллинеарно вектору $\mathbf{e}$.

2.15. Введем декартову прямоугольную систему координат, располагая ось Oz коллинеарно вектору $\mathbf{e}$. Тогда $a\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{r} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + a\mathbf{e}$, и данное дифференциальное уравнение принимает следующий вид: $x' = -y$, $y' = x$, $z' = a$. Из соотношений $x' = -y$, $y' = x$ находим $x^2 + y^2 = C_1$ — семейство круглых цилиндров, оси которых совпадают с прямой, проходящей через начало радиус-векторов коллинеарно вектору $\mathbf{e}$. Далее:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{y}{a}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{x}{a},$$

откуда

$$\frac{x dy - y dx}{dz} = \frac{x^2 + y^2}{a}, \quad a \frac{x dy - y dx}{x^2} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dz,$$

$$\frac{a d(y/x)}{1 + y^2/x^2} = dz, \quad z + C_2 = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

— семейство прямых геликоидов, для которых осью является упомянутая выше ось цилиндров. Интегральные линии — винтовые. Наконец, $z = at + C_3$. Из полученных соотношений легко выразить x , y , z через t .

2.16. Окружности, касающиеся оси Oz (коллинеарной вектору $\mathbf{e}$) в начале координат.

2.17. $\operatorname{arctg} 3$.

2.18. $\pi/4$ и $\pi/2$.

2.19. $\operatorname{arctg} 3$.

2.20. а) $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a});$

б) $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{27} \left((4 + 9x)^{3/2} - 8 \right);$

в) $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2 - x + \sqrt{1 + 4x^2});$

г) $s = \int_1^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + x^2} + \ln \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1);$

д) $s = \int_0^\varphi \sqrt{r^2 + (dr/d\varphi)^2} d\varphi = 4a \sin \frac{\varphi}{2};$

$$\text{е) } s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right);$$

$$\text{ж) } s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \frac{at^2}{2};$$

$$\text{з) } s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \frac{8a}{3} \sin \frac{t}{2};$$

$$\text{и) } s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \frac{3a}{2} \sin^2 t;$$

$$\begin{aligned} \text{к) } s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + e^{2x}} + \\ + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} - 1); \end{aligned}$$

$$\text{л) } s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = a \ln(\sin t).$$

2.21. $f(\alpha) + f''(\alpha)$, если $f'(\alpha) + f'''(\alpha) > 0$.

2.22. $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$.

2.23. Пусть в начальный момент движущаяся прямая совпадает с осью Ox , вторая прямая, о которой говорится в условии, — с осью Oz . Тогда уравнение прямого геликоида имеет вид

$$\mathbf{r} = (v \cos u, v \sin u, ku).$$

Здесь v — расстояние от точки геликоида до его оси (ось Oz), u — долгота точки.

2.24. $\mathbf{r} = \left(v, a \cos u \operatorname{ch} \frac{v}{a}, a \sin u \operatorname{ch} \frac{v}{a} \right)$, где u — долгота, v — ориентированное расстояние от точки поверхности до горлового сечения катеноида.

2.25. $\mathbf{r} = \left(a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - a \sin t, a \cos t \cos u, a \cos t \sin u \right)$.

2.26. Пусть

$$x = (a + R \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + R \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta$$

— параметрическое представление тора. Здесь R — радиус меридиана, т.е. вращаемой окружности, $a > R$ — расстояние от центра меридиана до оси вращения, идущей вдоль Oz . Пары точек, в которых

кривизна тора отрицательна (в точках $K > 0$ касательная плоскость не пересекается с тором) и касательные плоскости совпадают, имеют внутренние координаты (φ_0, θ_0) и $(\varphi_0 + \pi, \pi + \theta_0)$ с $\cos \theta_0 = -R/a$. Для получения этих точек нужно воспользоваться тем, что эта касательная плоскость пересекает плоскость xOz по прямой, касающейся двух диаметрально противоположных меридианов тора. Далее прямыми вычислениями получаем, что касательная плоскость имеет уравнение $-R(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0) + \sqrt{a^2 - R^2}z = 0$, а пересечение этой плоскости с тором дает объединение двух пересекающихся кривых с уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{a^2 - R^2} \sin \theta \cos \varphi_0 \mp (a \cos \theta + R) \sin \varphi_0, \\y &= \sqrt{a^2 - R^2} \sin \theta \sin \varphi_0 \pm (a \cos \theta + R) \cos \varphi_0, \\z &= R \sin \theta.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить радиус окружности Виларсо (он равен a) и угол между этой окружностью и параллелью тора: $\arcsin(R/a)$.

3.1. а) Уравнение сферы единичного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

$$\begin{aligned}z &= \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \mathbf{r}(x, y) = (x, y, \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \\ \mathbf{r}'_x &= \left(1, 0, \frac{\mp x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right), \quad \mathbf{r}'_y = \left(0, 1, \frac{\mp y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда (при любом выборе знака координаты z)

$$\begin{aligned}g_{11} &= \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_x \rangle = 1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} = \frac{1 - y^2}{1 - x^2 - y^2}, \\ g_{12} &= g_{21} = \langle \mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y \rangle = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \\ g_{22} &= \langle \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_y \rangle = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - y^2}, \\ ds^2 &= \frac{(1 - y^2) dx^2 + 2xy dx dy + (1 - x^2) dy^2}{1 - x^2 - y^2}.\end{aligned}$$

б) Рассмотрим следующую параметризацию сферы:

$$x = \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \cos \theta.$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = (x(\theta, \varphi), y(\theta, \varphi), z(\theta, \varphi)),$$

$$\mathbf{r}'_{\theta} = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta),$$

$$\mathbf{r}'_{\varphi} = (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0),$$

$$g_{11} = \langle \mathbf{r}'_{\theta}, \mathbf{r}'_{\theta} \rangle = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \langle \mathbf{r}'_{\theta}, \mathbf{r}'_{\varphi} \rangle = 0, \quad g_{22} = \langle \mathbf{r}'_{\varphi}, \mathbf{r}'_{\varphi} \rangle = \sin^2 \theta,$$

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2;$$

$$\text{в) } ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}; \quad \text{р) } ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 + r^2)^2};$$

$$\text{д) } ds^2 = \frac{4 dw d\bar{w}}{(1 + w\bar{w})^2}.$$

$$\mathbf{3.2. а) } t^2 - x^2 - y^2 = 1, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2,$$

$$ds^2 = \frac{(y^2 + 1) dx^2 - 2xy dx dy + (x^2 + 1) dy^2}{1 + x^2 + y^2};$$

$$\text{б) } \mathbf{r} = (x, y, t), \quad t = \operatorname{ch} \chi, \quad x = \operatorname{sh} \chi \cos \varphi, \quad y = \operatorname{sh} \chi \sin \varphi, \quad ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2;$$

$$\text{в) } ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}; \quad \text{р) } ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 - r^2)^2};$$

$$\text{д) } ds^2 = \frac{4 dz d\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}; \quad \text{е) } ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{(\operatorname{Im} z)^2}.$$

3.3. Указание. Докажите более общее утверждение — о совпадении углов в метриках $ds^2 = dx^2 + dy^2$ и $dl^2 = G(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

3.18. а) Будем решать задачу в модели Пуанкаре. Воспользуемся результатами задачи 3.2г:

$$R = \int_0^r \sqrt{\frac{4}{(1 - \tau^2)^2}} d\tau = \int_0^r \frac{2}{1 - \tau^2} d\tau = \ln \left| \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \right| \Big|_0^r = \ln \frac{1 + r}{1 - r},$$

$$\text{откуда } r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1},$$

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{4r^2}{(1 - r^2)^2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1 - r^2} d\varphi = \\ &= 4\pi \frac{(e^R - 1)/(e^R + 1)}{1 - ((e^R - 1)/(e^R + 1))^2} = 2\pi \frac{e^{2R} - 1}{2e^R} = 2\pi \operatorname{sh} R, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{4\tau}{(1-\tau^2)^2} d\varphi d\tau = 4\pi \int_0^r \frac{dt}{(1-t)^2} = \\
 &= 4\pi \left(\frac{1}{1-t} \right) \Big|_0^r = 4\pi \frac{r^2}{1-r^2} = 4\pi \frac{(e^R - 1)^2}{4e^R} = 4\pi \operatorname{sh}^2 \frac{R}{2};
 \end{aligned}$$

$$\text{б) } l = 2\pi \sin R, \quad S = 4\pi \sin^2 \frac{R}{2}.$$

3.19. а) Выведем формулу расстояния для точек $(0, y_1)$, $(0, y_2)$:

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{d\tau}{\tau} = \ln |\tau| \Big|_{y_1}^{y_2} = \ln \frac{y_2}{y_1}, \\
 \ln \frac{3}{y} &= \ln \frac{y_1}{1}, \quad \frac{3}{y} = \frac{y_1}{1}, \quad y^2 = 3, \quad y = \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(0, \sqrt{3})$.

в) Используя соображения симметрии, заключаем, что прямая $x = 0$ пересекает нашу окружность по диаметру. Осталось найти середину этого диаметра:

$$\begin{aligned}
 \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{4}{(1+r^2)^2}} dr &= 2 \operatorname{arctg} r \Big|_{r_1}^{r_2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{r_2 - r_1}{1 + r_1 r_2}. \\
 2 \operatorname{arctg} \frac{3-r}{1+3r} &= 2 \operatorname{arctg} \frac{r-1}{1+r}, \\
 -r^2 + 3r - r + 3 &= 3r^2 - 3r + r - 1, \\
 4r^2 - 4r - 4 &= 0, \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Центр окружности имеет координаты $\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.20. а) Пусть $A = 0,5 + 0,5i$, $B = 0,9 + 0,3i$. Найдём дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости в единичный круг, которое A переводит в 0, а B — в точку вещественной оси. Нетрудно показать, что в качестве такого преобразования можно взять $\rho: z \mapsto \frac{(1+3i)z + (1-2i)}{(3-i)z - (1-2i)}$.

Тогда $\rho: A \mapsto 0$, $\rho: B \mapsto \frac{1}{2}$.

Расстояние в метрике Пуанкаре между 0 и $\frac{1}{2}$ равно $\ln 3$ (см. задачу 3.18). Тогда середина отрезка AB под действием дробно-линейного

преобразования ρ переходит в точку вида $c + 0i$, где $c > 0$. Расстояние от этой точки до 0 должно быть равно $\frac{1}{2} \ln 3$. Отсюда (см. задачу 3.18) получаем условие на c : $\ln \frac{1+c}{1-c} = \frac{1}{2} \ln 3$. Следовательно, $c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Сделав обратное дробно-линейное преобразование, получим, что серединой отрезка AB является точка $\rho^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + 0i \right) = \frac{3+\sqrt{3}i}{4}$.

3.21. Пусть углы треугольника равны α , β и γ :

а) $S_{\Delta} = -\pi + \alpha + \beta + \gamma$; б) $S_{\Delta} = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

3.27. а) При $n \geq 2$ (существует правильный n -угольник, который при $n = 2$ является окружностью); б) при $n \geq 2$ (существует правильный k -угольник при любом $k > \frac{2n}{n-2}$; при $n = 2$ — это окружность).

3.28. У к а з а н и е. Воспользоваться геометрическим критерием существования описанной окружности для четырехугольника и выражением для аргумента частного двух комплексных чисел.

3.29. У к а з а н и е. Воспользоваться формулой синусов и выражениями для длины окружности из задачи 3.18.

3.30. У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 3.21.

3.31. а) Пусть $y_1 = OA$, $y_2 = OB$. Тогда

$$\rho(A, B) = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1}{y^2}} dy = \ln |y| \Big|_{y_1}^{y_2} = \left| \ln \frac{OB}{OA} \right|;$$

б) пусть O и O_1 — точки пересечения вещественной оси с полуокружностью, проходящей через A и B и лежащей на вещественной оси как на диаметре, причем O_1 лежит левее O . Проведя инверсию I с центром в O и радиусом OO_1 , мы отобразим нашу окружность на вертикальную прямую, причем ординаты образов A и B при этом будут равны $OO_1 \cdot |\operatorname{tg} \alpha|$ и $|\operatorname{tg} \beta|$; далее воспользуемся результатом пункта а) и тем, что I — движение метрики плоскости Лобачевского;

в) переведем прямую, соединяющую точки A и B , в вертикальную прямую с помощью подходящего дробно-линейного преобразования из задачи 3.5.

3.32. а) Да, верно; б) нет, неверно. Рассмотрим в модели на верхней полуплоскости точки $1+i$, $-1+i$, $2i$. Тогда, с одной стороны, мы знаем, что в данной модели окружности в метрике Лобачевского совпадают с «обыч-

ными»; с другой стороны, окружность, проходящая через рассматриваемые три точки, имеет «точку касания» на абсолюте и, следовательно, не является окружностью в смысле метрики плоскости Лобачевского.

3.33. Например, можно рассмотреть в модели на верхней полуплоскости прямые $\operatorname{Re} z = 0$ и $z\bar{z} = 1$ и точку $5 + i$ вместе с пучком прямых, проходящих через нее.

3.34. а) Пусть a — сторона правильного шестиугольника, а R — радиус описанной около него окружности. Тогда по задаче 3.24

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}^2 R - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sh}^2 R,$$

$$2 \operatorname{ch} a = 2 \operatorname{ch}^2 R - \operatorname{sh}^2 R = 1 + \operatorname{ch}^2 R,$$

$$\operatorname{ch} a = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 R}{2} > \operatorname{ch} R \quad (R \neq 0), \quad a > R;$$

б) решение аналогично пункту а). Ответ: $a < R$.

3.35. а) По 3.246, косинус угла треугольника равен $\frac{\operatorname{ch} a}{\operatorname{ch} a + 1}$. По 3.216,

$$S_{\Delta} = \pi - 3 \arccos \frac{\operatorname{ch} a}{1 + \operatorname{ch} a};$$

б) решение аналогично. Ответ: $S_{\Delta} = -\pi + 3 \arccos \frac{\cos a}{\cos a + 1}$.

3.36. а) Ясно, что центр окружности лежит на прямой $x = -1$. Пусть он имеет координаты $(-1, 4+a)$. Так как расстояния от центра окружности до точек $(-1, 4)$ и $(-1, 6)$ должны быть равны, то получаем уравнение

$$\ln \frac{6}{4+a} = \ln \frac{4+a}{4}.$$

Решим его:

$$(4+a)^2 = 24, \quad a = 2\sqrt{6} - 4.$$

Таким образом, центр окружности имеет координаты $(-1, 2\sqrt{6})$. Отсюда легко найти радиус окружности в смысле метрики Лобачевского. Остается воспользоваться задачей 3.18а.

$$\text{Ответ: } S = 4\pi \operatorname{sh}^2 \left(\frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} \right) = \left(\frac{5}{\sqrt{6}} - 2 \right) \pi, \quad l = 2\pi \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{6}};$$

б) используя соображения симметрии, заключаем, что прямая $5x + y = 0$ пересекает нашу окружность по диаметру, длина которого равна расстоянию между точками $\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{26}}, 5 - \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$ и $\left(-1 - \frac{1}{\sqrt{26}}, 5 + \frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

в смысле метрики из задачи 3.1в, т.е. равна

$$\begin{aligned} \int_{-1-\frac{1}{\sqrt{26}}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{26}}} \sqrt{\frac{4(1^2+5^2)}{(1+x^2+25x^2)^2}} dx &= 2 \operatorname{arctg}(x\sqrt{26}) \Big|_{-1-\frac{1}{\sqrt{26}}}^{-1+\frac{1}{\sqrt{26}}} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{26} + 1 + \sqrt{26}}{1 - (1 + \sqrt{26})(1 - \sqrt{26})} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{13}. \end{aligned}$$

Итак, окружность имеет радиус $R = \operatorname{arctg} \frac{1}{13}$. По задаче 3.186, получаем

$$S = 4\pi \sin^2 \frac{R}{2} = 2\pi \left(1 - \frac{13}{\sqrt{170}}\right), \quad l = 2\pi \sin R = \frac{2\pi}{\sqrt{170}}.$$

4.1. В задачах а), б), е), ж) докажите и используйте формулу кривизны кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$:

$$k = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2 \ddot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) \dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^4} = \frac{|[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

В задачах в), г), д) докажите и используйте общую формулу для кривизны кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$:

$$k(\varphi) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

а) 1; б) $\frac{a}{y^2}$; в) $\frac{3r}{a^2}$; г) $\frac{3}{4a|\cos(\varphi/2)|}$; д) $\frac{2 + \varphi^2}{a(1 + \varphi^2)^{3/2}}$;

е) $\frac{1}{3a|\sin t \cos t|}$; ж) $\frac{1}{4a|\sin(t/2)|}$.

4.3. $\frac{a}{b^2}$ и $\frac{b}{a^2}$.

4.4. $k = \frac{|F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}|}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}.$

4.5. $k = \frac{|P(Q(\partial Q/\partial x) - P(\partial Q/\partial y)) + Q(P(\partial P/\partial y) - Q(\partial P/\partial x))|}{(P^2 + Q^2)^{3/2}}.$

4.6. $k(\varphi) = \frac{|2(r')^2 - r''r + r^2|}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}.$

4.7. $\mathbf{r}(s) = \left(a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$

$$4.8. \mathbf{r}(s) = \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\ln \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right), \sin \left(\ln \frac{s + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right), 1 \right).$$

$$4.9. \mathbf{r}(s) = \left(\sqrt{\frac{2+s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, \ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{2+s^2}{2}} \right) \right).$$

$$4.10. \text{ а) } k = \frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}, \quad \kappa = -\frac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}; \quad \text{б) } k = \frac{2t}{(1 + 2t^2)^2}, \quad \kappa = -\frac{2t}{(1 + 2t^2)^2};$$

$$\text{ в) } k = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}, \quad \kappa = -\frac{1}{3e^t}; \quad \text{г) } k = \kappa = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2};$$

$$\text{ д) } k = \frac{4}{25|\sin t \cos t|}, \quad \kappa = \frac{4}{25 \sin t \cos t}.$$

$$4.11. k = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \kappa = 1.$$

$$4.12. k = \frac{\sqrt{6}}{9}, \quad \kappa = -\frac{1}{2}.$$

$$4.13. k = \frac{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2}}{(1 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{y''z''' - y'''z''}{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2};$$

$$\mathbf{v} = \frac{(1, y', z')}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}, \quad \mathbf{b} = \frac{(y'z'' - y''z', -z'', y'')}{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (y'z'' - y''z')^2}},$$

$$\mathbf{n} = \frac{(-z'z'' - y'y'', y'' - z'(y'z'' - y''z'), z'' + y'(y'z'' - y''z'))}{\sqrt{(z'z'' + y'y'')^2 + (y'' - z'(y'z'' - y''z'))^2 + (z'' + y'(y'z'' - y''z'))^2}}.$$

$$4.14. \mathbf{v} = \frac{(2t, -1, 3t^2)}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}, \quad \mathbf{n} = \frac{(1 - 9t^4, 2t + 9t^3, 3t + 6t^3)}{\sqrt{(1 - 9t^4)^2 + (2t + 9t^3)^2 + (3t + 6t^3)^2}},$$

$$\mathbf{b} = \frac{(-3t, -3t^2, 1)}{\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}; \quad k = \frac{2(1 + 9t^2 + 9t^4)^{1/2}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \quad \kappa = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

$$4.15. \text{ а) } k = \frac{a}{a^2 + h^2}, \quad \kappa = \frac{h}{a^2 + h^2}; \quad \text{б) при } h = a;$$

$$\text{ в) } \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}(-a \sin t, a \cos t, h), \quad \mathbf{n} = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}(h \sin t, -h \cos t, a).$$

4.16. Если длина окружности цилиндра равна шагу винтовой линии.

4.18. Указание.

$$Y: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{x} = \begin{pmatrix} y^2 x^3 - y^3 x^2 \\ y^3 x^1 - y^1 x^3 \\ y^1 x^2 - y^2 x^1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -y^3 & y^2 \\ y^3 & 0 & -y^1 \\ -y^2 & y^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = Y \cdot \mathbf{x},$$

поэтому оператор Y представляется кососимметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -y^3 & y^2 \\ y^3 & 0 & -y^1 \\ -y^2 & y^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.19. Указание. Проверьте тождество Якоби:

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0.$$

Выведите отсюда, что

$$(\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} = \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) - \mathbf{z} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{x}).$$

4.21. а) $R^2 + 4s^2 - 6as = 0$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

$$\text{б) } (27s + 8)^2 = \left(4 + 9 \cdot \frac{36R^2}{(27s + 8)^2}\right)^3;$$

$$\text{в) } s = \frac{1}{4} \sqrt{\sqrt[3]{4R^2} - 1} + \sqrt[3]{2R} + \frac{1}{4} \ln \left(\sqrt{\sqrt[3]{4R^2} - 1} + \sqrt[3]{2R} \right);$$

г) параметрические натуральные уравнения:

$$s = \sqrt{1 + x^2} + \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}, \quad k = \frac{x}{(1 + x^2)^{3/2}};$$

$$\text{д) } R = a + s^2/a;$$

е) параметрические натуральные уравнения:

$$s = \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{e^x}, \quad k = \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^{3/2}};$$

$$\text{ж) } R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s/a}; \quad \text{з) } s^2 + 9R^2 = 16a^2 \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\text{и) } R^2 = 2as; \quad \text{к) } R^2 + s^2 - 8as = 0 \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi. \text{ Здесь } R = \frac{1}{k}.$$

4.22. а) $r = Ce^{a\varphi}$ — логарифмическая спираль, где r, φ — полярные координаты, $C = \frac{ae^{a \operatorname{arctg} a}}{\sqrt{a^2 + 1}}$;

$$\text{б) } x(t) = \frac{a}{2} \left(\frac{b}{a+b} \sin \frac{(a+b)t}{b} + \frac{b}{a-b} \sin \frac{(a-b)t}{b} \right),$$

$$y(t) = \frac{a}{2} \left(-\frac{b}{a+b} \cos \frac{(a+b)t}{b} - \frac{b}{a-b} \cos \frac{(a-b)t}{b} \right) \text{ при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } \mathbf{r}(s) = \left(\int_0^s \cos(s^2/2a^2) ds, \int_0^s \sin(s^2/2a^2) ds \right) \text{ — клотида};$$

$$\text{г) } x(t) = a \ln \left(\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right| \right), \quad y(t) = \frac{a}{\cos t} \text{ — цепная линия, } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{д) } \mathbf{r}(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)) \text{ — эвольвента окружности.}$$

4.23. $y(s) = \text{const}, z(s) = \text{const}$. У к а з а н и е. $\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2} = 1$.

4.25. $r = Ce^{\pm k\varphi}$, $k = \operatorname{ctg} \alpha$, $C = \text{const}$, r, φ — полярные координаты.

4.26. $p = |\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle|$. Предположим, что $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle > 0$; тогда $p = \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle$. Отсюда

$$\frac{dp}{ds} = \langle \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{n}} \rangle = -k \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = -k \langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle.$$

Заметим, что $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = l^2$. Отсюда $\langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle = l \dot{l}$. Таким образом,

$$\frac{dp}{ds} = -kl \frac{dl}{ds},$$

откуда и получается требуемое соотношение.

4.29. Уравнение соприкасающейся окружности запишем в виде $(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 - R_0 \mathbf{n}_0)^2 = R_0^2$. Отсюда $\langle \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2R_0 \langle \mathbf{n}_0, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}_0 \rangle = 0$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2R_0 \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle.$$

Имеем:

$$\varphi'(s) = 2 \langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v} \rangle - 2R_0 \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\varphi''(s) = 2 + 2k \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2R_0 k \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n} \rangle,$$

$$\varphi'''(s) = 2\dot{k} \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2k^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2R_0 \dot{k} \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n} \rangle + 2R_0 k^2 \langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} \rangle.$$

Таким образом,

$$\varphi'(s_0) = 0, \quad \varphi''(s_0) = 0, \quad \varphi'''(s_0) = -2R_0 \dot{k}(s_0) \neq 0$$

и, значит, $\varphi(s)$ меняет знак при переходе s через s_0 , что и доказывает утверждение.

4.30. См. решение задачи 4.29. Имеем:

$$\varphi'(s_0) = \varphi''(s_0) = \varphi'''(s_0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)}(s) = & 2\ddot{k}\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2k\dot{k}\langle \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 4k\dot{k}\langle \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - 2k^3\langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \rangle - \\ & - 2k^2 - 2R_0\ddot{k}\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n} \rangle + 2R_0k\dot{k}\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n} \rangle + 4R_0k\dot{k}\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{v} \rangle + 2R_0k^3\langle \mathbf{n}_0, \mathbf{n} \rangle, \end{aligned}$$

$$\varphi^{(4)}(s_0) = -2k_0^2 - 2R_0\ddot{k}_0 + 2k_0^2 = -2R_0\ddot{k}_0 \neq 0,$$

значит, степень точки кривой относительно соприкасающейся окружности не меняет знака при переходе s через s_0 .

4.31. Будем считать, что вектор $\mathbf{a}$ имеет единичную длину и $\mathbf{b}$ другой постоянный вектор, так что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют положительно ориентированный ортонормальный базис в плоскости. Пусть x, y — координаты точки относительно базиса $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. В пунктах а), б) предполагается, что $\frac{d\alpha}{ds} > 0$.

$$\text{а) } \frac{d\alpha}{ds} = k = \frac{1}{f(\alpha)}, \quad ds = f(\alpha) d\alpha,$$

$$x = \int f(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad y = \int f(\alpha) \sin \alpha d\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}, \quad f'(R) \frac{dR}{ds} = \frac{1}{R}, \quad ds = R f'(R) dR,$$

$$x = \int R f'(R) \cos(f(R)) dR, \quad y = \int R f'(R) \sin(f(R)) dR;$$

$$\text{в) } x = \int f'(\alpha) \cos \alpha d\alpha, \quad y = \int f'(\alpha) \sin \alpha d\alpha;$$

$$\text{г) } x = \int \cos(f(s)) ds, \quad y = \int \sin(f(s)) ds.$$

4.32. Выбирая соответствующим образом систему координат, запишем уравнения кривой Вивиани в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Для составления параметрических уравнений положим

$$x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos t, \quad y = \frac{a}{2} \sin t.$$

Тогда $\frac{a^2}{4}(1 + \cos t)^2 + \frac{a^2}{4}\sin^2 t + z^2 = a^2$. Отсюда $z = a \sin \frac{t}{2}$ (знак можно опустить, так как если к t прибавить 2π , то x и y не изменятся,

а z изменит знак). Итак:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t), \frac{a}{2} \sin t, a \sin \frac{t}{2} \right).$$

Касательная:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t) - \lambda \sin t, \frac{a}{2} \sin t + \lambda \cos t, a \sin \frac{t}{2} + \lambda \cos \frac{t}{2} \right).$$

Нормальная плоскость: $x \sin t - y \cos t - z \cos \frac{t}{2} = 0$.

Бинормаль:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t) + \lambda(2 + \cos t) \sin \frac{t}{2}, \right. \\ \left. \frac{a}{2} \sin t - \lambda(1 + \cos t) \cos \frac{t}{2}, a \sin \frac{t}{2} + 2\lambda \right).$$

Главная нормаль:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos t) - \lambda \left(2 \cos t + (1 + \cos t) \cos^2 \frac{t}{2} \right), \right. \\ \left. \frac{a}{2} \sin t - \frac{\lambda}{2}(6 + \cos t) \sin t, a \sin \frac{t}{2} - \lambda \sin \frac{t}{2} \right).$$

Соприкасающаяся плоскость:

$$x(2 + \cos t) \sin \frac{t}{2} - y(1 + \cos t) \cos \frac{t}{2} + 2z - \frac{a}{2}(5 + \cos t) \sin \frac{t}{2} = 0.$$

$$\mathbf{v} = \frac{(-\sin t, \cos t, \cos(t/2))}{\sqrt{1 + \cos^2(t/2)}},$$

$$\mathbf{n} = \frac{(-\cos^2 t - 6 \cos t - 1, -\sin t(6 + \cos t), -2 \sin(t/2))}{\sqrt{(\cos^2 t + 6 \cos t + 1)^2 + \sin^2 t(6 + \cos t)^2 + 4 \sin^2(t/2)}},$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{2}{13 + 3 \cos t}} \left((2 + \cos t) \sin \frac{t}{2} - (1 + \cos t) \cos \frac{t}{2}, 2 \right);$$

$$k = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{13 + 3 \cos t}{2(1 + \cos^2(t/2))}^3}, \quad \kappa = \frac{12 \cos(t/2)}{a(13 + 3 \cos t)}.$$

4.33. Параметризация уравнения кривой: $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2at}, \sqrt{2bt}, t^2)$. Значит, кривая лежит в плоскости $x\sqrt{b} - y\sqrt{a} = 0$.

4.34. Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = \langle \mathbf{b}(s_0), \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0) \rangle,$$

где $\mathbf{r}(s_0) = M$. Имеем:

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \langle \mathbf{b}(s_0), \mathbf{v}(s) \rangle, \quad \varphi''(s) = \langle \mathbf{b}(s_0), k(s)\mathbf{n}(s) \rangle, \\ \varphi'''(s) &= \langle \mathbf{b}(s_0), k'(s)\mathbf{n}(s) - k(s)(-k(s)\mathbf{v}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)) \rangle.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varphi(s_0) = \varphi'(s_0) = \varphi''(s_0) = 0, \quad \varphi'''(s_0) = -k(s_0)\kappa(s_0) \neq 0$$

и, значит, $\varphi(s)$ меняет знак при переходе s через s_0 , что и доказывает утверждение.

4.35. Пусть $k \neq 0$, т.е. кривая бигулярна. Пусть все соприкасающиеся плоскости проходят через точку $\mathbf{r}_0$. Имеем:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle = 0, \quad \langle -\kappa \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle = 0.$$

Если $\kappa \neq 0$, то

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle &= 0, \quad \langle -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle &= 0, \quad \langle k\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \langle k\mathbf{n}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \rangle = 1.\end{aligned}$$

Противоречие. Значит, $\kappa = 0$ — кривая плоская, см. задачу 4.43.

$$\mathbf{4.36.} \quad \frac{d}{ds}\mathbf{r} = \mathbf{v}, \quad \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r} = k\mathbf{n}, \quad \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r} = -k^2\mathbf{v} + k'\mathbf{n} + k\kappa\mathbf{b}.$$

4.37. $\dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n}$, откуда следует требуемое равенство.

$$\mathbf{4.38.} \quad \kappa^5 \frac{d}{ds} \left(\frac{k}{\kappa} \right).$$

4.39. См. ответ к задаче 4.36. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}' &= \mathbf{r}'' = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{v}'' = \mathbf{r}''' = -k^2\mathbf{v} + k'\mathbf{n} + k\kappa\mathbf{b}, \\ \mathbf{v}''' &= \mathbf{r}^{(4)} = -2kk'\mathbf{v} - k^3\mathbf{n} + k''\mathbf{n} + k'(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) + k'\kappa\mathbf{b} + k\kappa'\mathbf{b} - k\kappa^2\mathbf{n},\end{aligned}$$

откуда получаем искомый ответ.

4.40. $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = C$, $\langle \mathbf{e}, -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\kappa}{k} \langle \mathbf{e}, \mathbf{b} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle k =$
 $= \left(\frac{\kappa}{k} \right)' \langle \mathbf{e}, \mathbf{b} \rangle - \frac{\kappa^2}{k} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}, \mathbf{b} \rangle = C \frac{k^2 + \kappa^2}{k(\kappa/k)'}$. Дифференцируя еще раз, получаем требуемое соотношение. Отметим, что в силу приведенных выше соотношений можно считать, что

$$\mathbf{e} = \frac{\kappa}{k} \frac{k^2 + \kappa^2}{k(\kappa/k)'} \mathbf{v} + \mathbf{n} + \frac{k^2 + \kappa^2}{k(\kappa/k)'} \mathbf{b}.$$

Если выполнено соотношение $\left(\frac{k^2 + \kappa^2}{k(\kappa/k)'}\right)' + \kappa = 0$, то этот вектор постоянный. Этот постоянный вектор $\mathbf{e}$ образует с вектором $\mathbf{n}$ угол, косинус которого равен $1/|\mathbf{e}| = \text{const}$.

4.41. Пусть кривая бигулярна. Тогда $\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle = 0$, $k\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$, откуда $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Если $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$, то $\langle \mathbf{e}, -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b} \rangle = 0$, откуда $\kappa = 0$ (линия плоская).

4.42. Пусть кривая бигулярна. Тогда $\langle \mathbf{e}, \mathbf{b} \rangle = 0$, $\kappa\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$; откуда $\kappa = 0$. Так как если бы было $\kappa \neq 0$, то $\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}, -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b} \rangle = 0$, $k\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle = 0$, но $\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, значит, $k = 0$ — прямая линия.

4.43. а) $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{v} = \text{const}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}s$ — прямая линия;

б) $\langle \mathbf{r}, \mathbf{b} \rangle' = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{b} \rangle$ — плоская линия;

в) $\dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{b} = \text{const}$.

4.44. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle = \text{const}$, $\kappa\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Далее см. решение задачи 4.42.

4.45. а) $f(t) = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t} + C_3$;

б) $f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_3$.

4.47. а) $\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{v}}{ds} \right| = |k\mathbf{n}| = k$;

б) $k \neq 0$ — бигулярная кривая;

в) пусть $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(s) = \mathbf{v}(s)$ — касательный сферический образ замкнутой кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Тогда $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(s)$ — замкнутая кривая длины $\int |\mathbf{v}'(s)| ds = \int k ds$, лежащая на сфере единичного радиуса.

Способ I. Предположим, что $\int k ds < 2\pi$, т.е. кривая $\mathbf{v}$ имеет длину, меньшую длины большой окружности. Можно показать, что такая кривая $\mathbf{v}$ целиком лежит в некоторой полусфере. Значит, для подходящего ненулевого вектора $\mathbf{e}$ имеем $\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{e} \rangle > 0$. Так как кривая $\mathbf{r}(s)$ замкнута, то $\int \mathbf{v}(s) ds = \int \mathbf{r}'(s) ds = 0$, откуда $\int \langle \mathbf{v}(s), \mathbf{e} \rangle ds = 0$ — противоречие.

Способ II. Так как $\int \mathbf{v}(s) ds = 0$ и кривая $\mathbf{v}(s)$ компактна, точка O принадлежит выпуклой оболочке $\text{conv}(\mathbf{v})$ кривой $\mathbf{v}(s)$. Покажем, что $\int |\mathbf{v}'(s)| ds \geq 2\pi$ для любой замкнутой кусочно-регулярной кривой $\mathbf{v}(s)$, лежащей на сфере радиуса 1 и такой, что $O \in \text{conv}(\mathbf{v})$. Если O является внутренней точкой этой выпуклой оболочки, нетрудно построить новую кусочно-регулярную замкнутую кривую $\tilde{\mathbf{v}}(s)$, длина которой меньше длины $\mathbf{v}(s)$, такую, что $O \in \text{conv}(\tilde{\mathbf{v}})$, но O не является внутренней точкой $\text{conv}(\tilde{\mathbf{v}})$. Если O не является внутренней точкой $\text{conv}(\tilde{\mathbf{v}})$, поло-

жим $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$. Покажем, что длина кривой $\tilde{\mathbf{v}}$ не меньше 2π . Так как $O \in \text{conv}(\tilde{\mathbf{v}})$, найдутся $0 \leq s_0 < s_1 < s_2 < s_3 \leq l$ такие, что $O \in \Delta = \text{conv}(\tilde{\mathbf{v}}(s_0), \tilde{\mathbf{v}}(s_1), \tilde{\mathbf{v}}(s_2), \tilde{\mathbf{v}}(s_3))$. Так как точка O не является внутренней точкой тетраэдра Δ , она принадлежит одной из граней Δ , скажем, грани $\Delta_0 = \text{conv}(\tilde{\mathbf{v}}(s_1), \tilde{\mathbf{v}}(s_2), \tilde{\mathbf{v}}(s_3))$. Рассмотрим плоскость, проходящую через точки $\tilde{\mathbf{v}}(s_1), \tilde{\mathbf{v}}(s_2), \tilde{\mathbf{v}}(s_3)$ и O . Она пересекает сферу по большой окружности и, значит, длина ее дуги, заключенной между точками $\tilde{\mathbf{v}}(s_i)$ и $\tilde{\mathbf{v}}(s_j)$, не больше, чем длина любой кривой, соединяющей эти точки. В частности, сумма длин всех трех дуг не больше длины кривой $\tilde{\mathbf{v}}(s)$. Это доказывает неравенство $\int |\tilde{\mathbf{v}}'(s)| ds \geq 2\pi$.

4.48.

$$\frac{ds^*}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{n}^*}{ds} \right| = |-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2}, \quad \left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = |-\kappa\mathbf{n}| = |\kappa|.$$

4.49. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — сферическая кривая. Имеем:

$$\langle \mathbf{r} - \mathbf{m}, \mathbf{r} - \mathbf{m} \rangle = R^2, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{m} \rangle = 0, \quad \langle \kappa\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

значит,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{m} \rangle &= -\frac{1}{k}, \quad (\dot{k}\mathbf{n} - k^2\mathbf{v} + k\kappa\mathbf{b}, \mathbf{r} - \mathbf{m}) + \langle \kappa\mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{r} - \mathbf{m} \rangle &= \frac{\dot{k}}{k^2\kappa}, \quad (-\kappa\mathbf{n}, \mathbf{r} - \mathbf{m}) + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{k}}{k^2\kappa} \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое соотношение $\frac{\kappa}{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{k}}{k^2\kappa} \right)$. Если это

соотношение выполнено, то вектор $\mathbf{m} = \mathbf{r} + \frac{1}{k}\mathbf{n} - \frac{\dot{k}}{k^2\kappa}\mathbf{b}$ постоянный. Так как вектор $\mathbf{r} - \mathbf{m}$ ортогонален вектору $\mathbf{v}$, его длина постоянна, т. е. $\mathbf{r}(s)$ — сферическая кривая.

4.50. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — кривая γ , параметризованная натуральным параметром. Параметризация кривой γ^* имеет вид $\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)$. Имеем:

$$\frac{d}{ds}\mathbf{r}^* = \mathbf{v} + \frac{1}{k}(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) = \frac{\kappa}{k}\mathbf{b}, \quad \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^* = \frac{\dot{\kappa}}{k}\mathbf{b} - \frac{\kappa^2}{k}\mathbf{n},$$

значит, $\left[\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^* \right] = \frac{\kappa^3}{k^2}\mathbf{v}$;

$$\frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}^* = \left(\frac{\dot{\kappa}}{k} \right)' \mathbf{b} - \frac{\dot{\kappa}\kappa}{k}\mathbf{n} - \left(\frac{\kappa^2}{k} \right)' \mathbf{n} - \frac{\kappa^2}{k}(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}).$$

Получаем $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^*, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}^*\right) = \frac{\varkappa^3}{k^2}\mathbf{v}$. Кривизна и кручение:

$$k^* = \frac{\left|\left[\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^*\right]\right|}{\left|\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*\right|^3} = k, \quad \varkappa^* = \frac{\left(\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^*, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}^*\right)}{\left|\left[\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^*\right]\right|^2} = \frac{k^2}{\varkappa}.$$

$$\begin{aligned} 4.51. \quad c(s) &= \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{m}, \mathbf{r}(s) - \mathbf{m} \rangle, \\ c'(s) &= \langle \mathbf{v}(s), \mathbf{r}(s) - \mathbf{m} \rangle, \\ c''(s) &= k(s) \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{r}(s) - \mathbf{m} \rangle + 1, \\ c'''(s) &= \langle k'(s) \mathbf{n}(s) - k(s)^2 \mathbf{v}(s) + k(s) \varkappa(s) \mathbf{b}(s), \mathbf{r}(s) - \mathbf{m} \rangle. \end{aligned}$$

4.53. См. решение задачи 4.51. Условие $c'(s_0) = c''(s_0) = 0$ равносильно следующему:

$$\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m} = -\frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0) - \lambda \mathbf{b}(s_0),$$

где λ — произвольное число.

4.54. См. решение задачи 4.53. Условие $c'(s_0) = c''(s_0) = c'''(s_0) = 0$ равносильно следующему:

$$\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{m} = -\frac{1}{k(s_0)}\mathbf{n}(s_0) + \frac{k(s_0)}{k^2(s_0)\varkappa(s_0)}\mathbf{b}(s_0).$$

Из условия $\sqrt{c(s_0)} = R^*$ следует соотношение для радиуса R^* .

4.55. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — замкнутая кривая на сфере. В силу задачи 4.53, кривизна кривой всюду положительна. Если $\varkappa \neq 0$, то функция $\frac{\varkappa(s)}{k(s)}$ не меняет знака, а значит, по задаче 4.49 функция $\frac{1}{\varkappa k^2} \frac{dk}{ds}$ строго монотонна, что противоречит замкнутости кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Таким образом, существует точка кривой, в которой кручение равно 0.

5.1. а) $a^2(\cos^2 v \, du^2 + dv^2);$

б) $(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \cos^2 v \, du^2 + 2(a^2 - b^2) \sin u \cos u \sin v \cos v \, du \, dv +$
 $+ ((a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) \sin^2 v + c^2 \cos^2 v) \, dv^2;$

в) $v^2(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \, du^2 + 2(b^2 - a^2) \sin u \cos u \, du \, dv +$
 $+ (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + c^2) \, dv^2;$

г) $(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) \, du^2 + c^2 \, dv^2.$

5.2. а) $ds^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{e} \rangle ds d\lambda + \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle d\lambda^2$;

б) $v^2 ds^2 + 2v\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\rho} \rangle ds dv + \langle \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} \rangle dv^2$;

в) $\left| \mathbf{v} + \lambda \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right|^2 ds^2 + 2\langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle ds d\lambda + d\lambda^2$;

г) $((1 - k \cos \varphi)^2 + \kappa^2) ds^2 + 2\kappa ds d\varphi + d\varphi^2$;

д) $\varphi^2 du^2 + (\varphi'^2 + \psi'^2) dv^2$; е) $(a + b \cos v)^2 du^2 + b^2 dv^2$;

ж) $du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$; з) $((1 - \lambda k)^2 + \kappa^2 \lambda^2) ds^2 + d\lambda^2$;

и) $(1 + \lambda^2 \kappa^2) ds^2 + d\lambda^2$. к) $a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{z}{a} d\varphi^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{z}{a} dz^2$.

5.3. $a^2 \operatorname{ctg}^2 u du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$.

5.4. $\cos \theta = \frac{2}{3}$.

5.5. $\cos \theta = \frac{7}{9}$.

5.6. $\cos \theta = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$.

5.7. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$.

5.8. $l = \pi R$.

5.9. а) $l = \pi R$; б) $l_\alpha = 2\pi R\sqrt{\alpha}$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5.10. $l = \pi R$.

5.11. $l = 2\pi\alpha$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5.12. $\cos \theta = \frac{2 - 4a^2}{\sqrt{(4 + a^2)(1 + 16a^2)}}$.

5.13. $\pi/2$.

5.14. $v = \pm \left(\sqrt{u^2 + 1} + \ln \frac{\sqrt{u^2 + 1} - 1}{u} \right) + \text{const.}$

5.15. $v = \frac{\operatorname{tg} \theta}{a} \cdot \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + \text{const.}$

5.16. Два семейства кривых:

а) $y^2 + z^2 = \text{const}$, $xy = az$;

б) $x^2 + z^2 = \text{const}$, $xy = az$.

5.17. Пусть уравнение сферы имеет вид

$$\mathbf{r} = (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v).$$

Уравнение локсодромии:

$$u = \operatorname{tg} \theta \cdot \ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right) \right),$$

где θ — данный угол,

$$\mathbf{v} = \cos \theta (-\sin v \cos u - \sin u \operatorname{tg} \theta, -\sin v \sin u + \cos u \operatorname{tg} \theta, \cos v),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta / \cos^2 v}} \left(-\cos u \cos v + \operatorname{tg} v \sin u \operatorname{tg} \theta - \frac{\cos u}{\cos v} \operatorname{tg}^2 \theta, \right. \\ \left. -\sin u \cos v - \operatorname{tg} v \cos u \operatorname{tg} \theta - \frac{\sin u}{\cos v} \operatorname{tg}^2 \theta, -\sin v \right),$$

$$\mathbf{b} = \frac{(\sin u, -\cos u, \operatorname{tg} \theta / \cos v)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta / \cos^2 v}};$$

$$k = \frac{\cos \theta}{a} \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^2 v}}, \quad \kappa = \frac{\operatorname{tg} \theta}{a(\cos^2 v + \operatorname{tg}^2 \theta)}.$$

5.19. а) Кривые $u = av^2/2$, $u = -av^2/2$ и $v = 1$ пересекаются в точках A ($u = 0, v = 0$), B ($u = a/2, v = 1$), C ($u = -a/2, v = 1$). При этом дифференциалы криволинейных координат на этих кривых связаны следующими соотношениями: $du = av dv$, $du = -av dv$, $dv = 0$

$$\text{на кривой } AB \quad \left(\text{уравнение } u = \frac{av^2}{2} \right);$$

$$\text{на кривой } AC \quad \left(\text{уравнение } u = -\frac{av^2}{2} \right);$$

$$\text{на кривой } BC \quad (\text{уравнение } v = 1).$$

Подставляя эти соотношения в первую квадратичную форму, получаем:

$$\text{на кривой } AB \quad ds^2 = a^2 \left(\frac{v^4}{4} + v^2 + 1 \right) dv^2, \quad ds = \left(\frac{v^2}{2} + 1 \right) dv;$$

$$\text{на кривой } AC \quad ds^2 = a^2 \left(\frac{v^4}{4} + v^2 + 1 \right) dv^2, \quad ds = \left(\frac{v^2}{2} + 1 \right) dv;$$

$$\text{на кривой } BC \quad ds^2 = du^2, \quad ds = du.$$

Остается взять интеграл в пределах, определяемых координатами точек A, B, C :

$$AB = AC = a \int_{v=0}^{v=1} \left(\frac{v^2}{2} + 1 \right) dv = \frac{7a}{6}, \quad CB = \int_{u=-a/2}^{u=a/2} du = a.$$

Итак, периметр треугольника равен $\frac{10a}{3}$;

$$\text{б) } \cos A = 1, \cos B = \cos C = \frac{2}{3}, \text{ т. е. } A = 0, B = C = \arccos \frac{2}{3};$$

$$\text{в) } S = a^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \ln(1 + \sqrt{2}) \right).$$

$$\text{5.20. а) } (v_0^2 + \operatorname{sh}^2 v_0)/4; \text{ б) } v_0, \operatorname{sh} v_0, \sqrt{2} \operatorname{sh} v_0; \text{ в) } \pi/2, \pi/4, \pi/4.$$

$$\text{5.21. } S = 2\alpha R^2, \text{ где } R \text{ — радиус сферы.}$$

$$\text{5.22. } 4\pi^2 r R.$$

5.23. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ задано в локальных координатах уравнениями $y^1 = y^1(x^1, x^2), y^2 = y^2(x^1, x^2)$. Пусть квадратичные формы $g = g_{ij} dx^i dx^j$ и $h = h_{ij} dx^i dx^j$ определяют римановы метрики на X и Y соответственно. Отображение f индуцирует на X риманову метрику

$$h' = h'_{ij}(x) dx^i dx^j = h_{kl}(g(x)) \frac{\partial y^k(x)}{\partial x^i} \frac{\partial y^l(x)}{\partial x^j} dx^i dx^j.$$

Конформность отображения f равносильна тому, что метрики g и h' на X конформно эквивалентны, т.е. угол между пересекающимися кривыми по отношению к метрике g равен углу между ними по отношению к метрике h' . Отсюда следует существование конформного множителя $\lambda(x) > 0$, гладко зависящего от точки и связывающего коэффициенты метрик равенством $h'_{ij}(x) = \lambda(x) g_{ij}(x)$. Индуцированная отображением f форма площади на X равна $d\sigma' = \sqrt{\det h'(x)} dx^1 \wedge dx^2 = \lambda(x) d\sigma$. Так как f сохраняет площадь, $d\sigma = d\sigma'$, откуда $\lambda = 1$. Следовательно, $h' = g$, т.е. f является локальной изометрией.

5.25. Пусть $S \ni (x, y, z) \mapsto (x_1, y_1, z_1) \in S$. При стереографической проекции с северного полюса на экваториальную плоскость P с координатами ξ, η имеем:

$$\xi = \frac{x}{1-z}, \quad \eta = \frac{y}{1-z}$$

и

$$x_1 = \frac{2\xi_1}{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad y_1 = \frac{2\eta_1}{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad z_1 = \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2 - 1}{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}.$$

Так как конформное отображение сферы на себя порождает конформное отображение плоскости P на себя с сохранением нуля и бесконечности, то $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1 = a\zeta = a(\xi + i\eta)$, где a — ненулевое комплексное число. Остается подставить в вышеприведенную формулу вместо ξ_1 и η_1 их значения через $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$.

5.26. Метрика гиперболического параболоида задается матричнозначной функцией

$$G = \begin{pmatrix} 1 + u^2 & -uv \\ -uv & 1 + v^2 \end{pmatrix},$$

поэтому форма площади равна

$$d\sigma = \sqrt{\det G} du \wedge dv = \sqrt{1 + u^2 + v^2} du \wedge dv.$$

Деформация индуцирует метрику, задаваемую матрицей

$$G' = \begin{pmatrix} 1 + (u \sin t + v \cos t)^2 & (u \sin t + v \cos t)(u \cos t - v \sin t) \\ (u \sin t + v \cos t)(u \cos t - v \sin t) & 1 + (u \cos t - v \sin t)^2 \end{pmatrix};$$

индуцированная форма площади равна

$$d\sigma' = \sqrt{\det G'} du \wedge dv = \sqrt{1 + u^2 + v^2} du \wedge dv.$$

Таким образом, $d\sigma = d\sigma'$, т.е. данная деформация сохраняет площадь.

5.27. $R(u, v) = \left(\sqrt{a^2 + u^2} \cos v, \sqrt{a^2 + u^2} \sin v, a \ln \frac{u + \sqrt{a^2 + u^2}}{a} \right)$, или

$R(z, \varphi) = \left(a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos \varphi, a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin \varphi, z \right)$. Это катеноид (поверхность вращения цепной линии $x = a \operatorname{ch} \frac{z}{a}$).

5.28. Метрика коноида: $2d\rho^2 + 2d\rho dv + (\rho^2 + 1)dv^2$; метрика гиперboloида вращения: $\frac{2r^2 - 1}{r^2 - 1}dr^2 + r^2d\varphi^2$. Остается проверить, что при указанном соответствии точек вторая метрика принимает вид первой метрики.

5.29. У к а з а н и е. Первое из уравнений, определяющих соответствие точек, имеет вид $r^2 = \rho^2 + a^2$.

5.30. Метрика винтовой поверхности:

$$(1 + F'(u)^2)du^2 + 2aF' du dv + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Метрика поверхности вращения $\mathbf{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, G(r))$ равна

$$(1 + G'(r)^2)dr^2 + r^2d\varphi^2.$$

Пусть соответствие точек устанавливается уравнениями $r^2 = u^2 + a^2$, $\varphi = v + H(u)$. Оно определяет локальную изометрию, если в координатах (u, v) вторая метрика принимает вид первой. Отсюда получаем условие

на функции G и H :

$$G'(r)^2 = F'(u)^2 + \frac{a^2}{u^2}, \quad H'(u) = \frac{a}{u^2 + a^2} F'(u).$$

5.32. Указание. Взять уравнение цилиндрической поверхности в виде $\mathbf{r} = \gamma + ve$, где $\mathbf{e}$ — постоянный вектор единичной длины, $\gamma(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром и лежащая в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{e}$. Сравните первую квадратичную форму этой поверхности с квадратичной формой плоскости.

5.33. Указание. Взять уравнение конической поверхности в виде $\mathbf{r} = v\mathbf{e}(u)$, где $|\mathbf{e}(u)| = 1$, и сравнить ее первую квадратичную форму с квадратичной формой плоскости в полярных координатах.

5.34. Нет, так как краям цилиндрической поверхности и соответствующей области D на конической поверхности на их развертке на плоскость должны соответствовать отрезки кривых одинаковой длины, что невозможно осуществить для развертки конуса.

6.1. а) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (-R \sin u \cos v, -R \sin u \sin v, R \cos u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-R \cos u \sin v, R \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-R^2 \cos^2 u \cos v, -R^2 \cos^2 u \sin v, -R^2 \cos u \sin u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = R^2 \cos u,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-R \cos u \cos v, -R \cos u \sin v, -R \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (R \sin u \sin v, -R \sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-R \cos u \cos v, -R \cos u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = R(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u) = R,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = R(-\cos u \cos v \sin u \sin v + (-\cos u \sin v)(-\sin u \cos v)) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = R((-\cos u \cos v)(-\cos u \cos v) + (-\cos u \sin v)(-\cos u \sin v)) = R \cos^2 u.$$

Ответ: $R du^2 + R \cos^2 u dv^2$.

б) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, c \cos u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-ac \cos^2 u \cos v, -ac \cos^2 u \sin v, -a^2 \cos u \sin u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a \cos u \sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} (-c \cos u \cos v, -c \cos u \sin v, -a \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-a \cos u \cos v, -a \cos u \sin v, -c \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (a \sin u \sin v, -a \sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-a \cos u \cos v, -a \cos u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} \times \\ \times ac(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} (-c \cos u \cos v a \sin u \sin v + \\ + (-c \cos u \sin v)(-a \sin u \cos v)) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} ((-c \cos u \cos v)(-a \cos u \cos v) + \\ + (-c \cos u \sin v)(-a \cos u \sin v)) = \frac{ac \cos^2 u}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{ac}{\sqrt{c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u}} (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

в) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (-b \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, b \cos u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-(a + b \cos u) \sin v, (a + b \cos u) \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = b(a + b \cos u)(-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = b(a + b \cos u),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-b \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -b \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (b \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-(a + b \cos u) \cos v, -(a + b \cos u) \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = b(\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u) = b,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\cos u \cos v b \sin u \sin v + (-\cos u \sin v)(-b \sin u \cos v) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = (-\cos u \cos v)(-(a + b \cos u) \cos v) + \\ + (-\cos u \sin v)(-(a + b \cos u) \sin v) = (a + b \cos u) \cos u.$$

$$\text{Ответ: } b du^2 + (a + b \cos u) \cos u dv^2.$$

г) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = \left(\operatorname{sh} \frac{u}{a} \cos v, \operatorname{sh} \frac{u}{a} \sin v, 1 \right),$$

$$\mathbf{r}_v = \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, -a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \operatorname{sh} \frac{u}{a} \right),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v + \operatorname{sh}^2 \frac{u}{a}} = a \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\operatorname{ch}(u/a)} \left(-\cos v, -\sin v, \operatorname{sh} \frac{u}{a} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \left(\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = \left(-\operatorname{sh} \frac{u}{a} \sin v, \operatorname{sh} \frac{u}{a} \cos v, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, -a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, 0 \right),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{a \operatorname{ch}(u/a)} \left(-\operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos^2 v - \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin^2 v \right) = -\frac{1}{a},$$

$$\begin{aligned} M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle &= \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}(u/a)} \left((-\cos v) \left(-\operatorname{sh} \frac{u}{a} \sin v \right) + (-\sin v) \left(\operatorname{sh} \frac{u}{a} \cos v \right) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle &= \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}(u/a)} \left((-\cos v) \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v \right) + (-\sin v) \left(-a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v \right) \right) = a. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{a} du^2 + a dv^2$.

д) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = \left(a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u + \frac{a}{\sin u} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= (a^2 \sin^2 u \cos v - a^2 \cos^2 v, a^2 \sin^2 u \sin v - a^2 \sin v, a^2 \cos u \sin u) = \\ &= (-a^2 \cos^2 u \cos v, -a^2 \cos^2 u \sin v, a^2 \cos u \sin u), \end{aligned}$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a^2 \cos u \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} = a^2 \cos u,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, \sin u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \left(-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, -a \cos u - \frac{a \cos u}{\sin^2 u} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (-a \cos u \sin v, a \cos u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-a \sin u \cos v, -a \sin u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = a \cos u \sin u \cos^2 v + \\ + a \cos u \sin u \sin^2 v - a \sin u \cos u - \frac{a \cos u \sin u}{\sin^2 u} = -a \operatorname{ctg} u,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = (-\cos u \cos v)(-a \cos u \sin v) + \\ + (-\cos u \sin v)a \cos u \cos v = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = (-\cos u \cos v)(-a \sin u \cos v) + \\ + (-\cos u \sin v)(-a \sin u \sin v) = a \cos u \sin u.$$

Ответ: $-a \operatorname{ctg} u \, du^2 + a \cos u \sin u \, dv^2$.

е) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (a \sin v, -a \cos v, u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{u^2 + a^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(a \sin v, -a \cos v, u)}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{a \sin v(-\sin v) + (-a \cos v) \cos v}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{a \sin v(-u \cos v) + (-a \cos v)(-u \sin v)}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

Ответ: $\frac{-2a \, du \, dv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$

ж) Выражая z через остальные переменные, имеем $z = f(x, y)$, где $f(x, y) = \frac{a^3}{xy}$. Тогда

$$f_x = -\frac{a^3}{x^2 y}, \quad f_y = -\frac{a^3}{x y^2}, \quad f_{xx} = \frac{2a^3}{x^3 y},$$

$$f_{xy} = \frac{a^3}{x^2 y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2a^3}{x y^3}.$$

По формулам для второй квадратичной формы поверхности $z = f(x, y)$ получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} &= \frac{\sqrt{x^4 y^4 + a^6 x^2 + a^6 y^2}}{x^2 y^2}, \\ L &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{2a^3 y}{x \sqrt{x^4 y^4 + a^6 x^2 + a^6 y^2}}, \\ M &= \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{a^3}{\sqrt{x^4 y^4 + a^6 x^2 + a^6 y^2}}, \\ N &= \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = \frac{2a^3 x}{y \sqrt{x^4 y^4 + a^6 x^2 + a^6 y^2}}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2a^3}{\sqrt{x^4 y^4 + a^6 x^2 + a^6 y^2}} \left(\frac{y}{x} dx^2 + dx dy + \frac{x}{y} dy^2 \right).$

6.4. а) $\mathbf{r}_u = (x', \rho' \cos \varphi, \rho' \sin \varphi)$, $\mathbf{r}_\varphi = (0, -\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$. Здесь штрих означает дифференцирование по u . Матрица первой квадратичной формы

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} (x')^2 + (\rho')^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\varphi = (\rho \rho', -\rho x' \cos \varphi, -\rho x' \sin \varphi), |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\varphi| = \rho \sqrt{(x')^2 + (\rho')^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_\varphi|} = \frac{(\rho', -x' \cos \varphi, -x' \sin \varphi)}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (x'', \rho'' \cos \varphi, \rho'' \sin \varphi), \mathbf{r}_{u\varphi} = (0, -\rho' \sin \varphi, \rho' \cos \varphi),$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = (0, -\rho \cos \varphi, -\rho \sin \varphi), L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{x'' \rho' - x' \rho''}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{u\varphi}, \mathbf{n} \rangle = 0, N = \langle \mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\rho x'}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}}.$$

Вторая квадратичная форма: $\frac{(x'' \rho' - x' \rho'') du^2 + \rho x' d\varphi^2}{\sqrt{(x')^2 + (\rho')^2}}.$

б) Найдем гауссову кривизну поверхности вращения:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\rho x' (x'' \rho' - x' \rho'')}{\rho^2 ((x')^2 + (\rho')^2)^2} = \frac{x' (x'' \rho' - x' \rho'')}{\rho ((x')^2 + (\rho')^2)^2}.$$

Направление выпуклости меридиана определяется знаком выражения $\frac{d^2 \rho}{dx^2}$. Вычисляя его по формулам для производной неявной функции,

получаем

$$\frac{d^2 \rho}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\rho}{dx} \right) = \frac{d}{du} \left(\frac{\rho'}{x'} \right) \frac{du}{dx} = \frac{\rho'' x' - \rho' x''}{(x')^2} \frac{1}{x'} = \frac{\rho'' x' - \rho' x''}{(x')^3}.$$

Сравнивая полученное выражение с формулой для K , находим $K = -\frac{(x')^4}{\rho((x')^2 + (\rho')^2)^2} \frac{d^2 \rho}{dx^2}$. Отсюда имеем, что $K > 0$, когда $\frac{d^2 \rho}{dx^2} < 0$, т.е. когда выпуклость меридиана направлена от оси вращения; $K < 0$, когда выпуклость направлена в сторону оси вращения; $K = 0$, если меридиан имеет точку перегиба или ортогонален оси вращения ($x' = 0$).

в) Пусть $\rho(u) = u$,

$$x(u) = \pm \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sqrt{a^2 - u^2} \right), \quad a > 0.$$

Тогда $\rho' = 1$, $\rho'' = 0$,

$$\begin{aligned} x' &= \pm \left(-\frac{a}{u} + \frac{a}{a + \sqrt{a^2 - u^2}} \frac{-u}{\sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \right) = \\ &= \pm \left(-\frac{a}{u} + \frac{-au + u(a + \sqrt{a^2 - u^2})}{(a + \sqrt{a^2 - u^2})\sqrt{a^2 - u^2}} \right) = \pm \left(-\frac{a}{u} + \frac{u}{a + \sqrt{a^2 - u^2}} \right) = \\ &= \pm \left(-\frac{a}{u} + \frac{u}{a^2 - (a^2 - u^2)} (a - \sqrt{a^2 - u^2}) \right) = \mp \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}, \end{aligned}$$

$$x'' = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} + \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} \right),$$

$$(x')^2 + (\rho')^2 = (x')^2 + 1 = \frac{a^2 - u^2}{u^2} + 1 = \frac{a^2}{u^2},$$

$$x' x'' = - \left(\frac{1}{u} + \frac{a^2 - u^2}{u^3} \right) = -\frac{a^2}{u^3},$$

$$K = \frac{x' x''}{u((x')^2 + 1)^2} = \frac{-a^2/u^3}{u(a^4/u^4)} = -\frac{1}{a^2}.$$

г) Вычислим среднюю кривизну поверхности вращения:

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{\rho x'((x')^2 + (\rho')^2) + \rho^2(x''\rho' - x'\rho'')}{\rho^2((x')^2 + (\rho')^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{x'((x')^2 + (\rho')^2) + \rho(x''\rho' - x'\rho'')}{\rho((x')^2 + (\rho')^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

д) Найдем решение уравнения $H = 0$, когда $x = u$. Подставляя выражение x в формулу для H , получаем $H = \frac{1 + (\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho(1 + (\rho')^2)^{3/2}}$. Из условия $H = 0$ получим дифференциальное уравнение $\rho''\rho - (\rho')^2 - 1 = 0$. Так как $\rho > 0$, то $\rho'' > 0$. После дифференцирования уравнения получим $\rho'''\rho + \rho''\rho' - 2\rho''\rho' = 0$. Отсюда $\rho'''\rho - \rho''\rho' = 0$, $\frac{\rho'''}{\rho''} = \frac{\rho'}{\rho}$, $(\ln \rho'')' = (\ln \rho)'$. Таким образом, задача свелась к решению дифференциального уравнения $\rho'' = C\rho$, где $C = k^2 > 0$, $k > 0$, — некоторая постоянная. Общее решение полученного дифференциального уравнения имеет вид

$$\rho(u) = A \operatorname{ch} ku + B \operatorname{sh} ku.$$

Подставляя это решение в исходное уравнение и приводя подобные члены, получаем условие на коэффициенты

$$1 = \rho''\rho - (\rho')^2 = k^2((A^2 - B^2) \operatorname{ch}^2 ku + (B^2 - A^2) \operatorname{sh}^2 ku),$$

откуда $k^2(A^2 - B^2) = 1$. Поскольку $\rho(u) > 0$ для всех u , то $A > 0$. Тогда A и B можно представить в виде

$$A = \frac{1}{k} \operatorname{ch} ku_0, \quad B = -\frac{1}{k} \operatorname{sh} ku_0;$$

$$\rho(u) = \frac{1}{k} (\operatorname{ch} ku_0 \operatorname{ch} ku - \operatorname{sh} ku_0 \operatorname{sh} ku) = \frac{1}{k} \operatorname{ch} (k(u - u_0)).$$

Таким образом, решением уравнения $H = 0$, когда $x = u$, являются функции $\rho(u) = \frac{1}{k} \operatorname{ch} (k(u - u_0))$, где $k > 0$, u_0 произвольное.

6.7. В этой задаче через $\mathbf{m}$ будем обозначать нормаль к поверхности. Пусть $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — репер Френе данной кривой. Тогда $\mathbf{r}_s = \mathbf{v} + k\mathbf{u}\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_u = \mathbf{v}$. Матрица первой квадратичной формы

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 + k^2 u^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u = k\mathbf{u}\mathbf{n} \times \mathbf{v} = -k\mathbf{u}\mathbf{b}, \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = ku, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u|} = -\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_{ss} = k\mathbf{n} + k_s\mathbf{u}\mathbf{n} + ku(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) = -k^2u\mathbf{v} + (1 + k_su)\mathbf{n} + uk\kappa\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_{su} = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_{uu} = \mathbf{0},$$

$L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = -k\mathbf{v}\kappa$, $M = \langle \mathbf{r}_{su}, \mathbf{m} \rangle = 0$, $N = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m} \rangle = 0$, где $\mathbf{m}$ — нормаль к поверхности.

Отсюда

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0,$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{-kv\kappa}{k^2v^2 + 1 - 1} = -\frac{\kappa}{kv}.$$

6.8. Поверхность, определяемая уравнением $z = f(x, y)$, может быть задана параметрически в виде

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad \mathbf{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, f_y).$$

Матрица первой квадратичной формы имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1), \quad |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1),$$

$$\mathbf{r}_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{xx}, \mathbf{n} \rangle = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{xy}, \mathbf{n} \rangle = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{yy}, \mathbf{n} \rangle = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Матрица второй квадратичной формы имеет вид

$$\mathbf{II} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix};$$

$$K = \frac{\det \mathbf{II}}{\det \mathbf{I}} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2},$$

$$H = \text{tr}(\mathbf{II} \cdot \mathbf{I}^{-1}) = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} =$$

$$= \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

6.9. Пусть $F_z \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности поверхность можно задать уравнением $z = f(x, y)$, причем $z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z}$, $z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z}$. Найдем вторые производные функции f :

$$\begin{aligned} f_{xx} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_x}{F_z} \right) = -\frac{F_{xx} + F_{xz}z_x}{F_z} + \frac{F_x(F_{xz} + F_{zz}z_x)}{F_z^2} = \\ &= -\frac{F_{xx} - F_{xz}(F_x/F_z)}{F_z} + \frac{F_x(F_{xz} - F_{zz}(F_x/F_z))}{F_z^2} = \\ &= -\frac{F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2}{F_z^3}, \end{aligned}$$

$$f_{xy} = -\frac{F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + F_{zz}F_xF_y}{F_z^3},$$

$$f_{yy} = -\frac{F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2}{F_z^3}.$$

Воспользуемся результатами задачи 6.8 для нахождения гауссовой и средней кривизны:

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad H = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - f_xf_yf_{xy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}},$$

$$1 + f_x^2 + f_y^2 = \frac{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}{F_z^2},$$

$$\begin{aligned} f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 &= \\ &= \frac{1}{F_z^6} ((F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2)(F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2) - \\ &\quad - (F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + F_{zz}F_xF_y)^2) = \\ &= \frac{1}{F_z^6} ((F_{xx}F_{yy}F_z^4 + 4F_{xz}F_{yz}F_xF_yF_z^2 + F_{zz}^2F_x^2F_y^2 - 2F_{xx}F_{yz}F_yF_z^3 - \\ &\quad - 2F_{zz}F_{yy}F_xF_z^3 + F_{xx}F_{zz}F_y^2F_z^2 + F_{yy}F_{zz}F_x^2F_z^2 - 2F_{xz}F_{zz}F_xF_y^2F_z - \\ &\quad - 2F_{yz}F_{zz}F_x^2F_yF_z) - (F_{xy}^2F_z^4 + F_{xz}^2F_y^2F_z^2 + F_{yz}^2F_x^2F_z^2 + F_{zz}^2F_x^2F_y^2 - \\ &\quad - 2F_{xy}F_{xz}F_yF_z^3 - 2F_{xy}F_{yz}F_xF_z^3 + 2F_{xy}F_{zz}F_x^2F_y^2F_z^2 - \\ &\quad - 2F_{xz}F_{zz}F_xF_y^2F_z - 2F_{yz}F_{zz}F_x^2F_yF_z + 2F_{xz}F_{yz}F_xF_yF_z^2)) = \\ &= \frac{1}{F_z^4} (F_{xx}F_{yy}F_z^2 + F_{xx}F_{zz}F_y^2 + F_{yy}F_{zz}F_x^2 - F_{xy}^2F_z^2 - F_{xz}^2F_y^2 - F_{yz}^2F_x^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2F_{xz}F_{yz}F_xF_y + 2F_{xy}F_{xz}F_yF_z + 2F_{xy}F_{xz}F_xF_z - \\
& - 2F_{xx}F_{yz}F_yF_z - 2F_{xz}F_{yy}F_xF_z - 2F_{xy}F_{zz}F_xF_y) = \\
& = -\frac{1}{F_z^4} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^2}.$$

Пусть $F_z > 0$:

$$\begin{aligned}
& (1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - f_x f_y f_{xy} = \\
& = -\frac{1}{F_z^5} ((F_x^2 + F_z^2)(F_{yy}F_z^2 - 2F_{yz}F_yF_z + F_{zz}F_y^2) + \\
& \quad + (F_y^2 + F_z^2)(F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2) - \\
& \quad - 2F_xF_y(F_{xy}F_z^2 - F_{xz}F_yF_z - F_{yz}F_xF_z + F_{zz}F_xF_y)) = \\
& = -\frac{1}{F_z^5} (F_{yy}F_x^2F_z^2 - 2F_{yz}F_x^2F_yF_z + F_{zz}F_x^2F_y^2 + \\
& \quad + F_{xx}F_y^2F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_y^2F_z + F_{zz}F_x^2F_y^2 + \\
& \quad + (F_{xx} + F_{yy})F_z^4 - 2(F_{xz}F_x + F_{yz}F_y)F_z^3 + F_{zz}(F_x^2 + F_y^2)F_z^2 - \\
& \quad - 2(F_{xy}F_xF_yF_z^2 - F_{xz}F_xF_y^2F_z - F_{yz}F_x^2F_yF_z + F_{zz}F_x^2F_y^2)) = \\
& = -\frac{1}{F_z^3} ((F_{yy} + F_{zz})F_x^2 + (F_{xx} + F_{zz})F_y^2 + (F_{xx} + F_{yy})F_z^2 - \\
& \quad - 2F_{xy}F_xF_y - 2F_{xz}F_xF_z - 2F_{yz}F_yF_z) = \\
& = -\frac{1}{F_z^3} ((F_{xx} + F_{yy} + F_{zz})(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2) - (F_{xx}F_x^2 + F_{yy}F_y^2 + \\
& \quad + F_{zz}F_z^2 + 2F_{xy}F_xF_y + 2F_{xz}F_xF_z + 2F_{yz}F_yF_z)), \\
& H = -\frac{F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} + \\
& \quad + \frac{F_{xx}F_x^2 + F_{yy}F_y^2 + F_{zz}F_z^2 + 2F_{xy}F_xF_y + 2F_{xz}F_xF_z + 2F_{yz}F_yF_z}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Среднюю кривизну можно также записать в виде

$$H = \frac{\mathbf{H}(\text{grad } F, \text{grad } F)}{|\text{grad } F|^3} - \frac{\text{tr } \mathbf{H}}{|\text{grad } F|},$$

где $\text{grad } F = (F_x, F_y, F_z)$ — градиент функции F , буквой $\mathbf{H}$ обозначена матрица вторых производных (гессиан), а также соответствующая ей билинейная форма. Если $F_z < 0$, то выражение для H просто меняет знак.

6.10. Имеем:

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{u \cos v}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \frac{u \sin v}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = (-\sqrt{u^2 + a^2} \sin v, \sqrt{u^2 + a^2} \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-a \cos v, -a \sin v, u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{u^2 + a^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(-a \cos v, -a \sin v, u)}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \left(\frac{a^2 \cos v}{(u^2 + a^2)^{3/2}}, \frac{a^2 \sin v}{(u^2 + a^2)^{3/2}}, -\frac{au}{(u^2 + a^2)^{3/2}} \right),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = \left(-\frac{u \sin v}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \frac{u \cos v}{\sqrt{u^2 + a^2}}, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-\cos v \sqrt{u^2 + a^2}, -\sin v \sqrt{u^2 + a^2}, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-a \cos v a^2 \cos v + (-a \sin v) a^2 \sin v + u(-au)}{(u^2 + a^2)^2} = -\frac{a}{u^2 + a^2},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-a \cos v(-u \sin v) + (-a \sin v)u \cos v}{u^2 + a^2} = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = -a \cos v(-\cos v) + (-a \sin v)(-\sin v) = a.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{a}{u^2 + a^2} du^2 + a dv^2.$$

6.11. Перейдем к цилиндрическим координатам $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = z$. Тогда уравнение поверхности можно записать в следующем параметрическом виде: $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = a \arctg \frac{y}{x} = av$. Таким образом, поверхность представляет собой прямой геликоид. Воспользовавшись результатами задачи 6.1, получаем

$$\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, av), \quad \mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2 + u^2, \quad L = 0, \quad M = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \quad N = 0.$$

Тогда

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}, \quad H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = 0.$$

Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ являются решениями уравнения $\lambda^2 - H\lambda + K = 0$.

Так как $H = 0$, то

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-K} = \pm\frac{a}{u^2 + a^2},$$

$$R_{1,2} = \frac{1}{\lambda_{1,2}} = \pm\frac{u^2 + a^2}{a} = \pm\frac{x^2 + y^2 + a^2}{a}.$$

Ответ: $R_1 = \frac{x^2 + y^2 + a^2}{a}, R_2 = -\frac{x^2 + y^2 + a^2}{a}.$

6.12. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= (\cos v - u \sin v, \sin v + u \cos v, u + v), \\ \mathbf{r}_u &= (-\sin v, \cos v, 1), \quad \mathbf{r}_v = (-u \cos v - \sin v, -u \sin v + \cos v, 1), \\ E &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 2, \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 2, \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = 2 + u^2, \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= (u \sin v, -u \cos v, u), \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = u\sqrt{2}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin v, -\cos v, 1), \\ \mathbf{r}_{uu} &= (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\cos v, -\sin v, 0), \\ \mathbf{r}_{vv} &= (u \sin v - \cos v, -u \cos v - \sin v, 0), \\ L &= \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0, \quad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}u, \\ K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0, \\ H &= \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{u\sqrt{2}}{2(2 + u^2) - 4} = \frac{1}{\sqrt{2}u}. \end{aligned}$$

Главные кривизны $\lambda_{1,2}$ являются решениями уравнения $\lambda^2 - H\lambda + K = 0$.

Тогда

$$\lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{2}u}\lambda = 0, \quad \frac{1}{R_1} = \lambda_1 = 0, \quad \frac{1}{R_2} = \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}u}.$$

Ответ: $\frac{1}{R_1} = 0, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt{2}u}.$

6.13. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (u \cos v, u \sin v, u + v), \quad \mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 1), \\ \mathbf{r}_v &= (-u \sin v, u \cos v, 1), \\ E &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 2, \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 1, \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = 1 + u^2, \\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= (\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u), \end{aligned}$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{1 + 2u^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2u^2}}(\sin v - u \cos v, -\cos v - u \sin v, u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0, M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1 + 2u^2}},$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{u^2}{\sqrt{1 + 2u^2}}, K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1 + 2u^2)^2},$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{2u^2 + 2}{(1 + 2u^2)^{3/2}} = \frac{2(1 + u^2)}{(1 + 2u^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Ответ: } K = -\frac{1}{(1 + 2u^2)^2}, H = \frac{2(1 + u^2)}{(1 + 2u^2)^{3/2}}.$$

6.14. Имеем:

$$\mathbf{r} = (3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3(u^2 - v^2)),$$

$$\mathbf{r}_u = (3 + 3v^2 - 3u^2, -6uv, 6u), \mathbf{r}_v = (6uv, 3v^3 - 3u^2 - 3, -6v),$$

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 9((1 + v^2 - u^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2) = 9(u^2 + v^2 + 1)^2,$$

$$F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 9((1 - u^2 + v^2)2uv + (-2uv)(v^2 - u^2 - 1) - 4uv) = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = 9(4u^2v^2 + (u^2 - v^2 + 1)^2 + 4v^2) = 9(u^2 + v^2 + 1)^2,$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 9(2u(u^2 + v^2 + 1), 2v(u^2 + v^2 + 1), (u^2 + v^2)^2 - 1),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = 9(u^2 + v^2 + 1)^2,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-6u, -6v, 6), \mathbf{r}_{uv} = (6v, -6u, 0), \mathbf{r}_{vv} = (6u, 6v, -6),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 6 \frac{2u(-u) + 2v(-v) + (u^2 + v^2 - 1)1}{u^2 + v^2 + 1} = -6,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 6 \frac{2uv + 2v(-u)}{u^2 + v^2 + 1} = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 6 \frac{2uu + 2vv + (u^2 + v^2 - 1)(-1)}{u^2 + v^2 + 1} = 6,$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{36}{81(u^2 + v^2 + 1)^4} = -\frac{4}{9(u^2 + v^2 + 1)^4},$$

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = \frac{(u^2 + v^2 + 1)^2(-6) + (u^2 + v^2 + 1)^2 6}{81(u^2 + v^2 + 1)^4} = 0.$$

$$\text{Ответ: } K = -\frac{4}{9(u^2 + v^2 + 1)^4}, H = 0.$$

6.17. III – KI. См. решение задачи 6.22.

6.20. Воспользоваться явной формулой для гауссовой кривизны поверхности в координатах (u, s) , где u — координата вдоль прямолинейной образующей, а s — натуральный параметр на кривой, по которой скользит прямая.

6.21. Параметрическое уравнение геликоида имеет вид $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$. Тогда

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av),$$

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, a),$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = a^2 + u^2,$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (a \sin v, -a \cos v, u), \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{u^2 + a^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(a \sin v, -a \cos v, u)}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{a \sin v(-\sin v) + (-a \cos v) \cos v}{\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{a \sin v(-u \cos v) + (-a \cos v)(-u \sin v)}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

$$\text{Отсюда получаем } H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2} = 0.$$

6.22. Имеем:

$$\rho_u = \mathbf{r}_u + a\mathbf{n}_u, \quad \rho_v = \mathbf{r}_v + a\mathbf{n}_v,$$

$$\begin{aligned} E^* = \langle \rho_u, \rho_u \rangle &= \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + 2a\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u \rangle + a^2\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle = \\ &= E - 2aL + a^2\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$F^* = \langle \rho_u, \rho_v \rangle = F - 2aM + a^2\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle,$$

$$G^* = \langle \rho_v, \rho_v \rangle = G - 2aN + a^2\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится явное выражение для $\mathbf{n}_u$ и $\mathbf{n}_v$. Найдем его. Так как $|\mathbf{n}| \equiv 1$, то $\mathbf{n}_u \perp \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_v \perp \mathbf{n}$. Тогда

$$\mathbf{n}_u = b\mathbf{r}_u + c\mathbf{r}_v, \quad \mathbf{n}_v = d\mathbf{r}_u + e\mathbf{r}_v,$$

$$-L = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{uu} \rangle = \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_u \rangle = b\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + c\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u \rangle = bE + cF,$$

$$-M = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{r}_v \rangle = b\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle + c\langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = bF + cG,$$

$$\begin{pmatrix} -L \\ -M \end{pmatrix} = \mathbf{I} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ — матрица первой квадратичной формы;

$$\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = -\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \mathbf{I}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} = -\mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= (b, c) \mathbf{I} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = (L, M) \mathbf{I}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} = \\ &= (L, M) \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix} = \frac{EM^2 - 2FLM + GL^2}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle = (L, M) \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \frac{EMN - FLN - FM^2 + GLM}{EG - F^2},$$

$$\langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle = (M, N) \mathbf{I}^{-1} \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = \frac{EN^2 - 2FMN + GM^2}{EG - F^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle &= \frac{EM^2 - 2FLM + GL^2}{EG - F^2} = \\ &= \frac{GL^2 + ELN - 2FLM + EM^2 - ELN}{EG - F^2} = \\ &= \frac{L(GL + EN - 2FM) - E(LN - M^2)}{EG - F^2} = \frac{LH - EK}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle &= \frac{EMN - FLN - FM^2 + GLM}{EG - F^2} = \\ &= \frac{M(GL + EN - 2FM) - F(LN - M^2)}{EG - F^2} = \frac{MH - FK}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle &= \frac{EN^2 - 2FMN + GM^2}{EG - F^2} = \\ &= \frac{N(GL + EN - 2FM) - G(LN - M^2)}{EG - F^2} = \frac{NH - GK}{EG - F^2}, \end{aligned}$$

что соответствует задаче 6.17.

Следовательно,

$$\begin{aligned} E^* &= \langle \rho_u, \rho_u \rangle = E - 2aL + a^2(LH - EK) = \\ &= (1 - a^2K)E + a(aH - 2)L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^* &= \langle \rho_u, \rho_v \rangle = F - 2aM + a^2(MH - FK) = \\ &= (1 - a^2K)F + a(aH - 2)M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^* &= \langle \rho_v, \rho_v \rangle = G - 2aN + a^2(NH - GK) = \\ &= (1 - a^2K)G + a(aH - 2)N. \end{aligned}$$

Так как векторы $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v$ ортогональны вектору $\mathbf{n}$, то ρ_u, ρ_v ортогональны $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$.

$$\begin{aligned} L^* &= \langle \rho_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + a \langle \mathbf{n}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = L - a \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_u \rangle = \\ &= L - a(LH - EK) = aKE + (1 - aH)L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^* &= \langle \rho_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle - a \langle \mathbf{n}_u, \mathbf{n}_v \rangle = \\ &= M - a(MH - FK) = aKF + (1 - aH)M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^* &= \langle \rho_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle - a \langle \mathbf{n}_v, \mathbf{n}_v \rangle = \\ &= N - a(NH - GK) = aKG + (1 - aH)N. \end{aligned}$$

Ответ: $E^* = (1 - a^2K)E + a(aH - 2)L$,

$$F^* = (1 - a^2K)F + a(aH - 2)M, \quad G^* = (1 - a^2K)G + a(aH - 2)N,$$

$$L^* = aKE + (1 - aH)L, \quad M^* = aKF + (1 - aH)M,$$

$$N^* = aKG + (1 - aH)N.$$

6.24. Как известно, $K^* = \frac{L^*N^* - M^{*2}}{E^*G^* - F^{*2}}$. Подставляя в эту формулу явные выражения для $E^*, F^*, G^*, L^*, M^*, N^*$ из задачи 6.22 и производя элементарные вычисления, получаем ответ: $K^* = \frac{K}{1 - aH + a^2K}$.

6.25. Как известно, $H^* = \frac{E^*N^* + G^*L^* - 2F^*M^*}{E^*G^* - F^{*2}}$. Подставляя в эту формулу явные выражения для $E^*, F^*, G^*, L^*, M^*, N^*$ из задачи 6.22 и производя элементарные вычисления, получаем ответ:

$$H^* = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2K}.$$

6.26. а) Пусть данные параллельные поверхности S и S^* задаются уравнениями: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(u, v) + a\mathbf{n}(u, v)$. Тогда согласно

задачам 6.24 и 6.25 имеем $K^* = \frac{K}{1 - aH + a^2K}$, $H^* = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2K}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{H^{*2} - 4K^*}{K^{*2}} &= \frac{(H - 2aK)^2 - 4K(1 - aH + a^2K)}{K^2} = \\ &= \frac{H^2 - 4aKH + 4a^2K^2 - 4(K - aKH + a^2K^2)}{K^2} = \frac{H^2 - 4K}{K^2}. \end{aligned}$$

б) Минимальная поверхность задается уравнением $H^* = 0$. Согласно задаче 6.25 имеем $H^* = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2K}$. Отсюда видно, что уравнение $H^* = 0$ равносильно выполнению равенства $2a = H/K$. Так как отношение кривизн постоянно, то поверхность S^* , задаваемая уравнением

$$\rho(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \frac{2H}{K}\mathbf{n}(u, v),$$

будет минимальной поверхностью.

в) Согласно задаче 6.25 имеем

$$K^* = \frac{K}{1 - aH + a^2K} = \frac{K}{1 - H/H + K/H^2} = \frac{K}{K/H^2} = H^2 = \text{const.}$$

г) Согласно задаче 6.25 имеем

$$H^* = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2K} = \frac{H - \sqrt{K}}{1 - H/\sqrt{K} + K/(\sqrt{K})^2} = -\sqrt{K} = \text{const.}$$

Ответ: $H^* = -\sqrt{K}$.

6.27. У к а з а н и е. Согласно задаче 6.26, для параллельных поверхностей выполняется следующее соотношение: $\frac{H^2 - 4K}{K^2} = \frac{H^{*2} - 4K^*}{K^{*2}}$. Заметим, что точка является омбилической тогда и только тогда, когда в этой точке $H^2 - 4K = 0$. Отсюда очевидным образом вытекает решение.

6.28. Воспользуемся задачей 6.26. Она известна как теорема Бонне. Запишем для простоты метрику заданной поверхности в изотермических координатах. Отложим по нормальям к поверхности отрезки длины $a = \frac{1}{H}$. Тогда для параллельной поверхности имеем неравенство

$$EG - F^2 = \frac{K^2\Lambda^4}{H^4} > 0, \quad E + G = \left(1 - \frac{2K}{H^2}\right)\Lambda^2 > 0,$$

где Λ — конформный множитель метрики. Получается регулярная поверхность с постоянной гауссовой кривизной. Известно, что такая поверхность изометрична стандартной сфере. Отметим, что если бы поверхность была незамкнутой, то она могла бы быть изометричной части сферы, но не совмещаться с ней движением объемлющего пространства. Дело в том, что, например, часть сферы допускает нетривиальные изгибания.

6.29. Напомним, что если λ_1 и λ_2 — главные кривизны поверхности и $H = \lambda_1 + \lambda_2$, $K = \lambda_1 \lambda_2$, то λ_i являются корнями уравнения $\lambda^2 - H\lambda + K = 0$. Так как λ_i — вещественные числа, то дискриминант уравнения неотрицателен: $D = H^2 - 4K \geq 0$. Равенство $H^2 = 4K$ (т. е. $D = 0$) равносильно равенству $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, квадрат средней кривизны равняется учетверенной гауссовой кривизне в омбилических точках, т. е. в точках, где $\lambda_1 = \lambda_2$ (см. рис. 117).

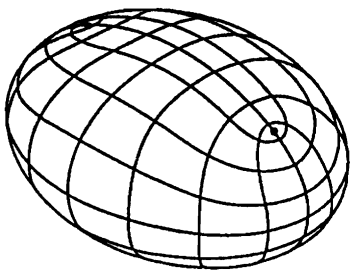


Рис. 117. Омбилические точки на эллипсоиде

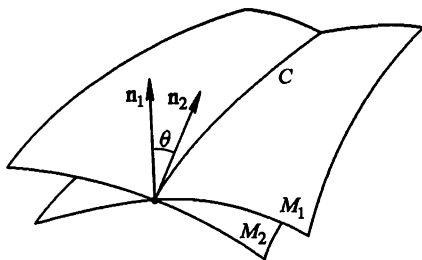


Рис. 118

6.30. Согласно известной формуле $H = \text{tr } \Pi \cdot \mathbf{I}^{-1}$, где $\mathbf{I}$ — первая квадратичная форма, а след берется от произведения соответствующих матриц. Тогда средняя кривизна равняется следу оператора $\mathbf{A}$, канонически сопряженного форме Π относительно метрики, задаваемой формой $\mathbf{I}$. Оператор $\mathbf{A}$ и форма Π связаны соотношением $\Pi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, где скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ задается симметрической матрицей $\mathbf{I}$. След оператора в произвольном ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ вычисляется по формуле $\text{tr } \mathbf{A} = \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle$. Тогда

$$H = (\langle \mathbf{A}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle) = \Pi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \Pi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2),$$

что и требовалось доказать.

6.33. Пусть $\mathbf{v}(s)$ — вектор касательной к кривой γ , а $\mathbf{n}(s)$ — единичный вектор нормали к кривой γ (см. рис. 118). Тогда $\frac{d\mathbf{v}}{ds} = k\mathbf{n}$, $\lambda_i = k\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_i \rangle$, где $\mathbf{n}_i$ — нормаль к поверхности M_i , и $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}$. Так как $\mathbf{v}$ — вектор, касательный к поверхностям M_1 и M_2 , то $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_1$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{n}_2$. Следовательно, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}$ лежат в одной плоскости.

1) $\theta = 0$. Тогда $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$ и

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0 = k^2 \sin^2 \theta;$$

2) $\theta = \pi$. Тогда $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ и приходим к тождеству $0 = 0$;

3) $0 < \theta < \pi$. Тогда $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ образуют базис пространства, ортогонального $\mathbf{v}$, и $\mathbf{n} = a\mathbf{n}_1 + b\mathbf{n}_2$. Следовательно,

$$\lambda_1 = ka\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_1 \rangle + kb\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1 \rangle = ka + kb \cos \theta,$$

$$\lambda_2 = ka\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle + kb\langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_2 \rangle = ka \cos \theta + kb,$$

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos \theta &= (ka + kb \cos \theta)^2 + (ka \cos \theta + kb)^2 - \\ &- 2(ka + kb \cos \theta)(ka \cos \theta + kb) \cos \theta = k^2(a^2(1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + \\ &+ 2ab(2 \cos \theta - (1 + \cos^2 \theta) \cos \theta) + b^2(1 + \cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta)) = \\ &= k^2 \sin^2 \theta (a^2 + 2ab \cos \theta + b^2) = k^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

так как $1 = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = \langle a\mathbf{n}_1 + b\mathbf{n}_2, a\mathbf{n}_1 + b\mathbf{n}_2 \rangle = a^2 + 2ab \cos \theta + b^2$.

6.41. У к а з а н и е. Считая, что метрика поверхности имеет вид $du^2 + G dv^2$, выразить G через гауссову кривизну K .

6.42. Рассмотрим следующие поверхности вращения:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$z = \frac{1}{2} \left(\arctg \sqrt{-\frac{1+2C+2r}{C+2r}} - \sqrt{-(C+2r)(1+2C+2r)} \right).$$

У этих поверхностей $K = \frac{1}{r}$, $ds^2 = -\frac{1}{C+2r} dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Отсюда видно, что, меняя число C , мы получаем однопараметрическое семейство попарно неизометричных поверхностей с одинаковой гауссовой кривизной в соответствующих точках.

6.49. Показать, что каждая точка поверхности является точкой уплощения. Иными словами, в каждой точке обе главные кривизны равны нулю.

7.1. В качестве карт можно взять множества $U_k^\pm$, $k = 0, \dots, n$, задаваемые следующими неравенствами: $U_k^+ = \{x_k > 0\}$, $U_k^- = \{x_k < 0\}$. В качестве координатных функций в карте $U_k^\pm$ следует взять все декартовы координаты за исключением x_k . Минимальный атлас содержит две карты.

7.2. Воспользоваться тем, что тор T^2 гомеоморфен декартову произведению $S^1 \times S^1$, и свести задачу к предыдущей при $n = 1$.

7.3. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ есть множество классов эквивалентности наборов $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $\sum x_i^2 \neq 0$, а отношение эквивалентности задано следующим образом:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \sim (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Введем на $\mathbb{R}P^n$ вещественно-аналитическую структуру. Для этого покроем $\mathbb{R}P^n$ набором из $(n+1)$ карты. Рассмотрим наборы $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$, для которых $x_i \neq 0$. Множество таких наборов естественно отождествляется с $\mathbb{R}^n$, а именно:

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Легко видеть, что это соответствие корректно определено. Осталось рассмотреть функции перехода от i -й карты к j -й карте. Пусть $x_k^{(i)}$ — k -я координата набора $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ в i -й карте, а $x_l^{(j)}$ — l -я координата в j -й карте (пусть для простоты $i < j$). Тогда

$$x_1^{(i)} = \frac{x_1^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}}, \dots, x_i^{(i)} = \frac{x_i^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}}, x_{i+1}^{(i)} = \frac{x_{i+2}^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}}, \dots, x_j^{(i)} = \frac{x_{j+1}^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}},$$

$$x_{j+1}^{(i)} = \frac{1}{x_{i+1}^{(j)}}, x_{j+2}^{(i)} = \frac{x_{j+2}^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}}, \dots, x_n^{(i)} = \frac{x_n^{(j)}}{x_{i+1}^{(j)}}.$$

Таким образом, функции перехода не только гладкие, но и вещественно-аналитические.

7.4. См. задачу 7.3.

7.5. а) Атлас состоит из одной карты с координатными функциями $(x_1, \dots, x_n)$.

7.9. Используя локальные координаты, вычислить ранг матрицы Якоби отображения.

7.10. Указание. Воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций.

7.12. Ранг равен 1.

7.14. Указание. Композиция гладких отображений является гладким отображением.

7.15. Указание. Написать формулы, явно выражающие координаты нормали в локальных координатах тора.

7.16. Однородные координаты прямой гладко зависят от локальных координат на сфере, а локальные координаты на $\mathbb{R}P^2$, в свою очередь, выражаются через однородные координаты.

7.19. Представить элементы группы $SO(2)$ как повороты плоскости на некоторый угол вокруг начала координат. Группа $O(2)$ гомеоморфна объединению двух экземпляров S^1 .

7.20. Представить элементы группы $SO(3)$ как повороты пространства вокруг некоторой оси на некоторый угол.

7.27. Группы $GL(n, \mathbb{R})$ и $GL(n, \mathbb{C})$ являются открытыми множествами в пространствах соответственно всех вещественных и всех комплексных матриц.

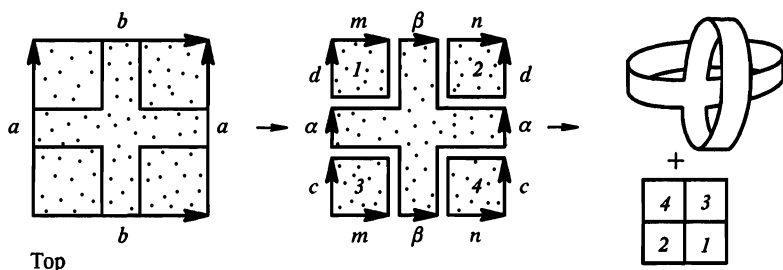


Рис. 119

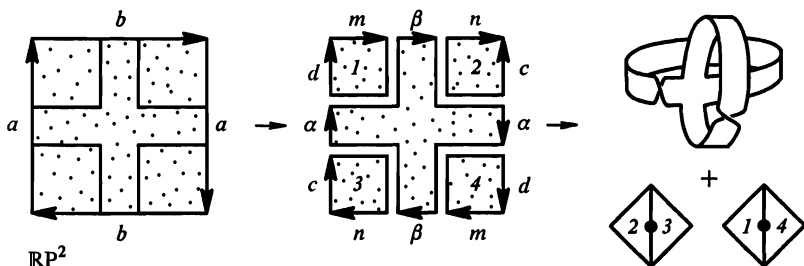


Рис. 120

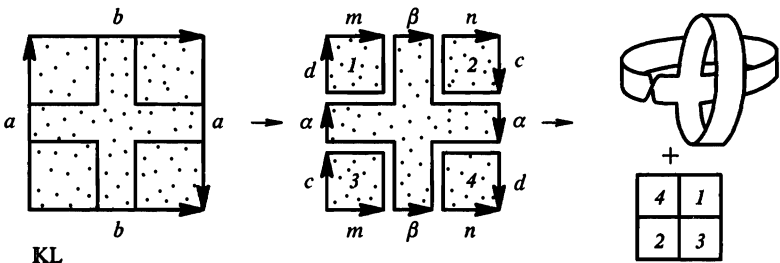


Рис. 121

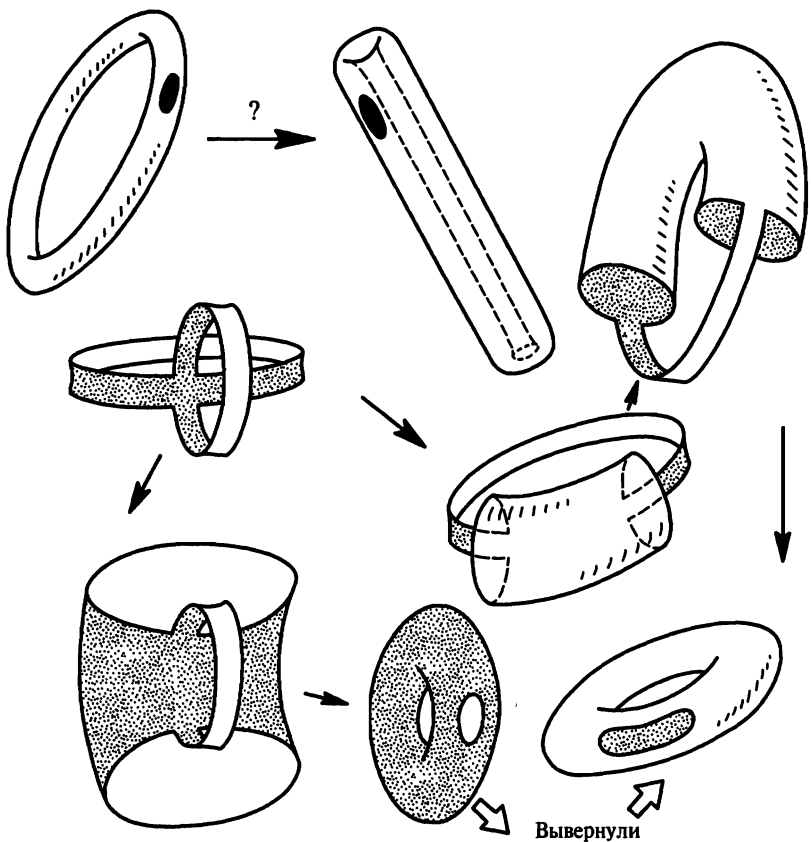


Рис. 122

7.34. Любая окрестность начала координат распадается не менее чем на 4 компоненты связности при выбрасывании начала координат, чего не может быть на многообразии.

7.35. а) Да; б) нет.

7.37. Указание. Использовать свойства ранга произведения двух матриц.

7.38. $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$.

7.41. Координатные функции являются частным случаем гладкой функции на многообразии.

7.43. Воспользоваться задачей 7.8.

7.51. См. рис. 88 из § 21.

7.57. а) См. рис. 119.

б) См. рис. 120.

г) См. рис. 121.

д) См. рис. 121.

е) Указание. Ответ зависит от четности чисел p и q . Могут получиться только три поверхности из пунктов а), б) и г).

7.58. См. рис. 122.

7.59. Рассмотрим сечение тора плоскостью, проходящей через ось вращения. Пусть плоскость Π перпендикулярна плоскости сечения и проходит

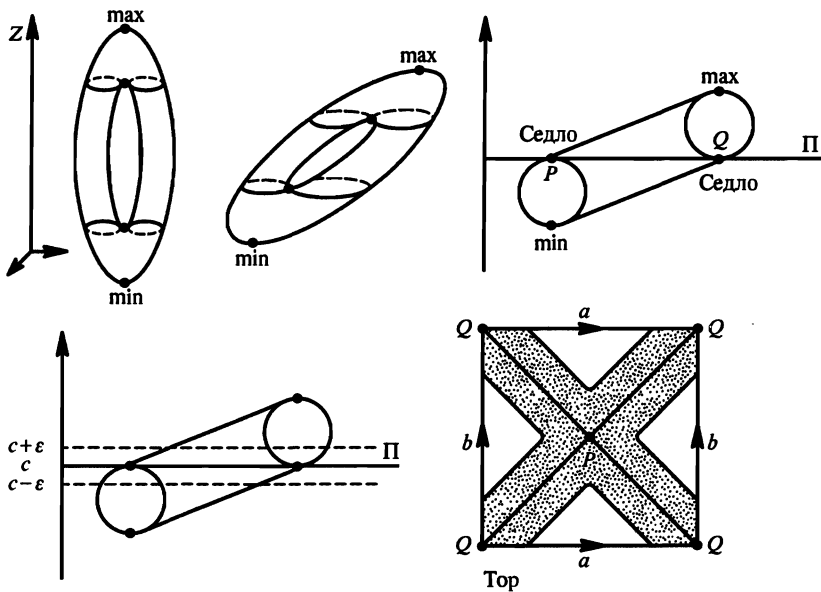


Рис. 123

так, как показано на рисунке. Искомые плоскости отстоят от Π на расстояние ε в обе стороны. См. рис. 123 и рис. 124.

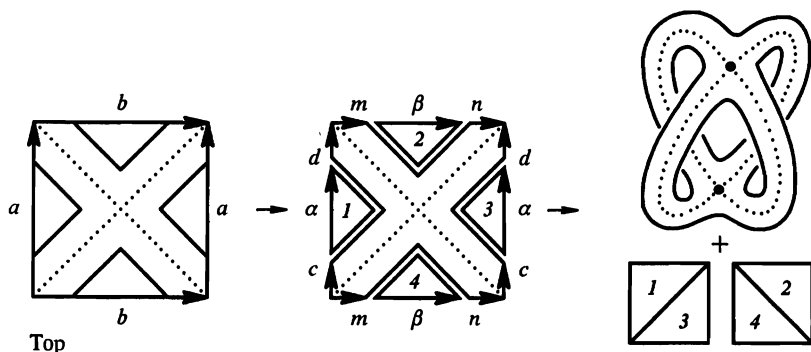


Рис. 124

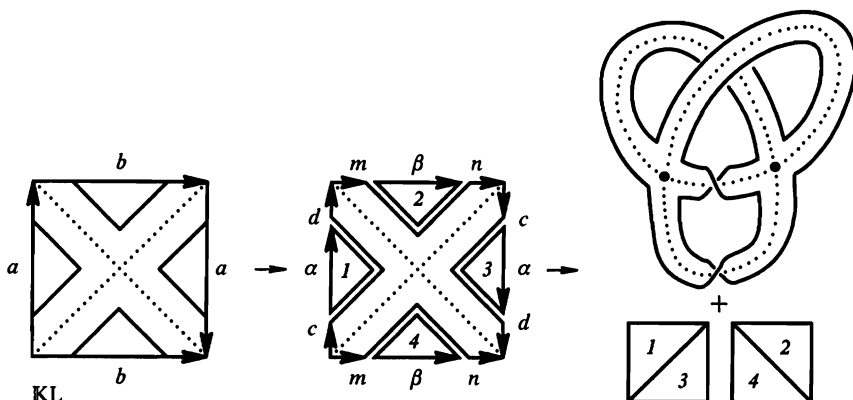


Рис. 125

7.60. См. рис. 125.

7.64. Два варианта ответа показаны на рис. 126 и на рис. 127. Заметим, что если поверхность неподвижна, а деформировать можно лишь кривую (посредством изотопии), то нельзя одну отмеченную кривую перевести в другую, так как они представляют разные элементы в фундаментальной группе поверхности: a и $a \cdot b$.

7.65. Два варианта искомой деформации показаны на рис. 128 и рис. 129. Так же, как и в предыдущей задаче, одну пару кривых нельзя перевести в другую их изотопией на неподвижной поверхности, так как они образуют разные пары элементов фундаментальной группы поверхности: a , b и a , $a \cdot b$.

7.66. а) Да, деформация показана на рис. 130.

б) Нет, см. объяснение на рис. 131.

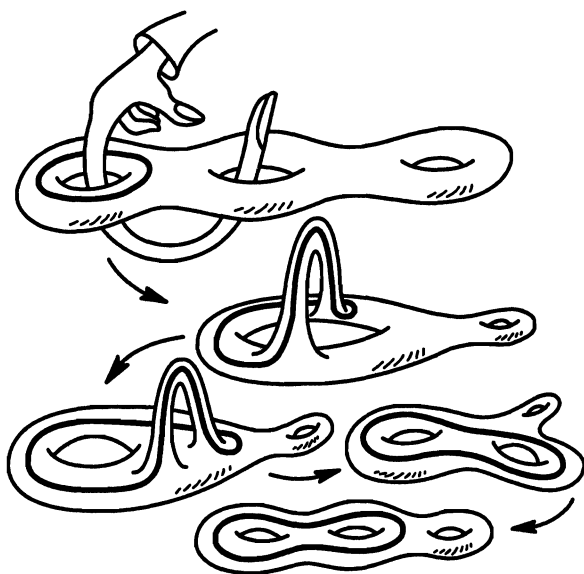


Рис. 126

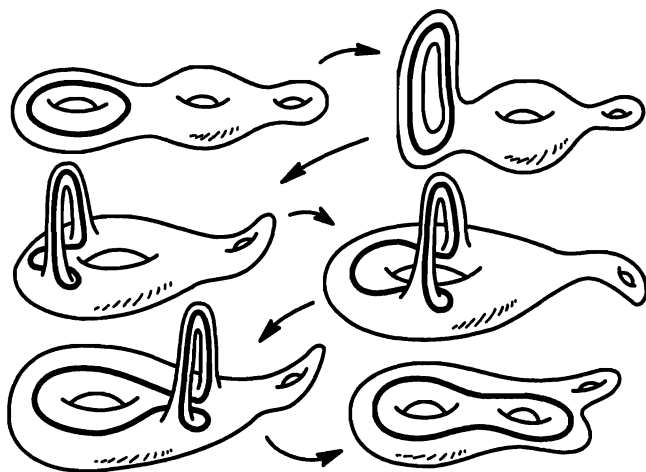


Рис. 127

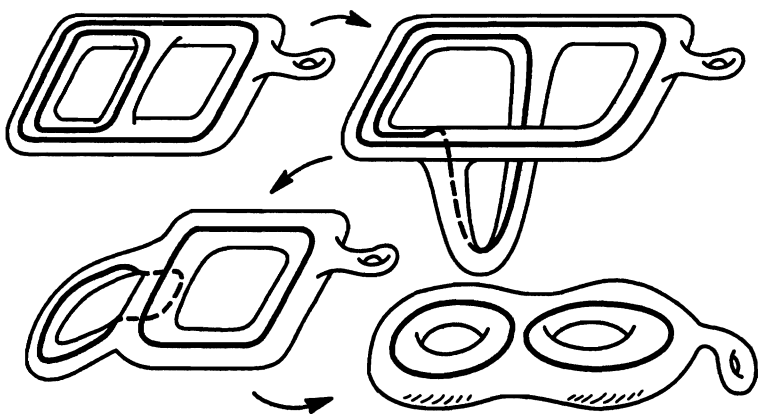


Рис. 128

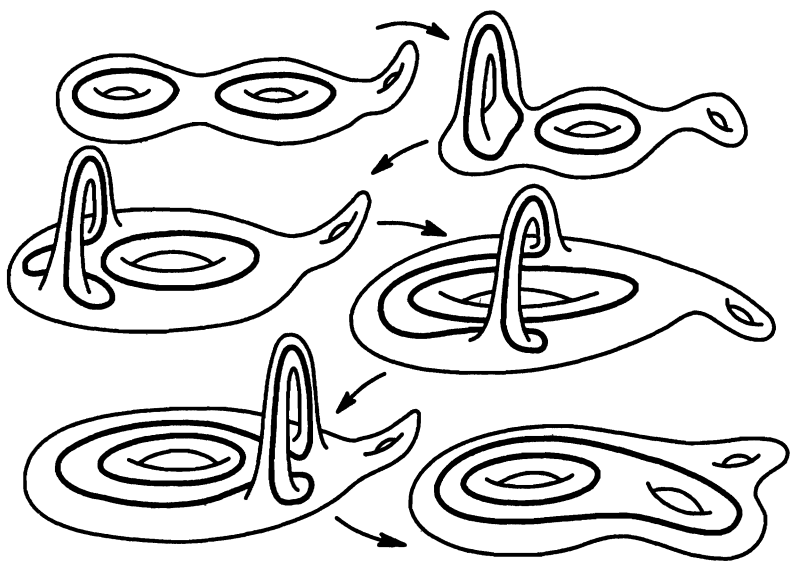


Рис. 129

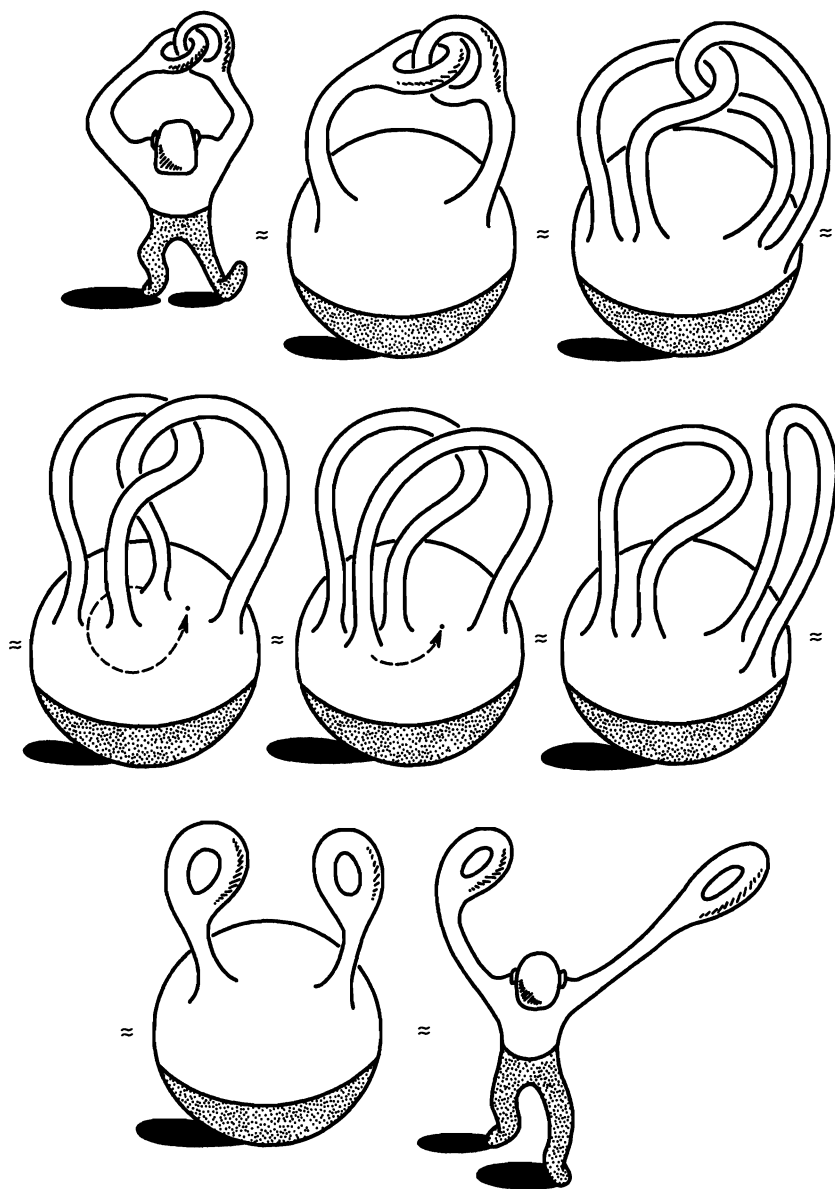


Рис. 130

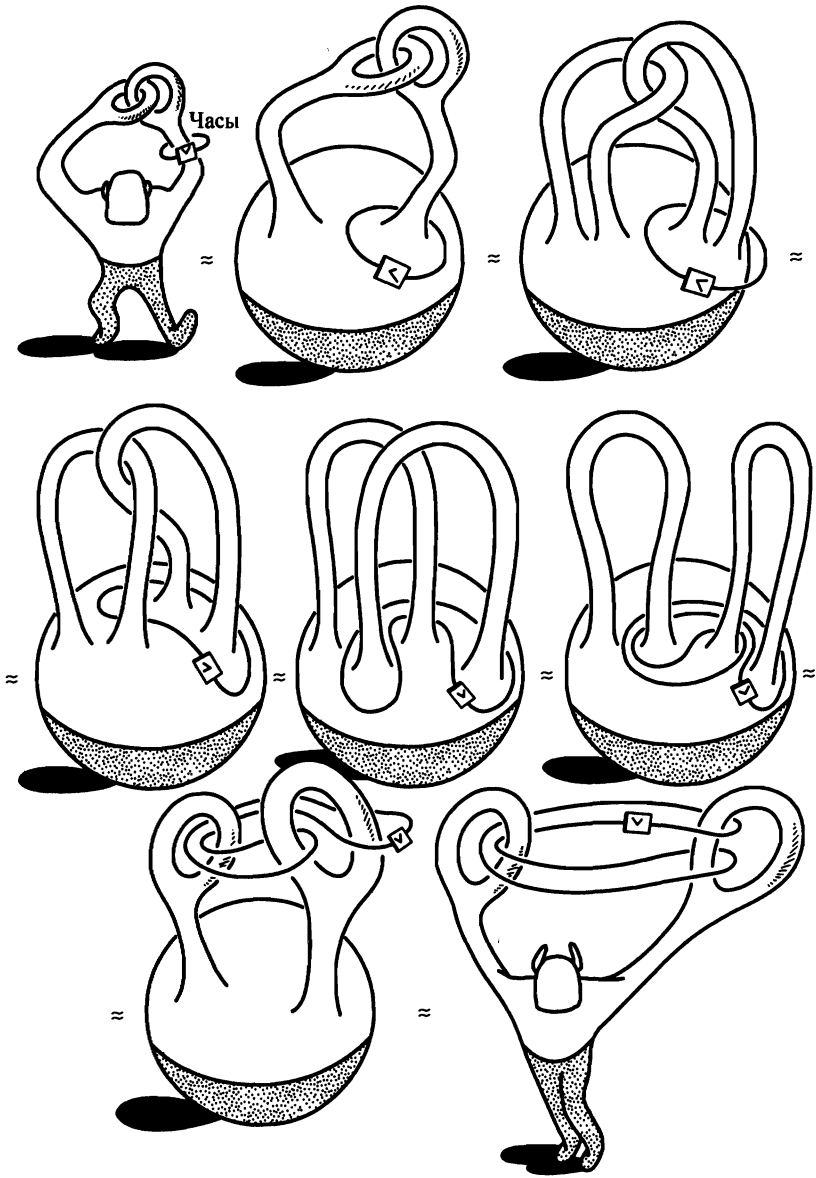


Рис. 131

8.1. а) (0, 1); б) (0, 2); в) (1, 1); г) (0, 2).

8.8. Если $\dim V = k$, то $\dim V_n^m = k^{(n+m)}$.

9.2. а) $\frac{3}{\sqrt{15}}$; б) $\frac{-7}{\sqrt{21}}$; в) $\frac{e^3}{\sqrt{3}}$; г) $-\frac{2}{5}$.

9.3. $1/r^2$.

9.4. 1.

9.11. Проверить действие коммутатора на произведение двух гладких функций.

9.17. Рассмотреть случай, когда $\xi = \partial/\partial x^1$.

10.9. Указание. См. задачу 10.8.

10.12. Будем считать координату r первой, а координату φ — второй.

Тогда $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -r$, $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$.

10.13. Будем считать, что координата u — первая, а координата v — вторая, тогда $\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_u}{2\lambda}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{\lambda_v}{2\lambda}$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{\lambda_u}{2\lambda}$, $\Gamma_{11}^2 = -\frac{\lambda_v}{2\lambda}$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\lambda_u}{2\lambda}$, $\Gamma_{22}^2 = \frac{\lambda_v}{2\lambda}$.

10.14. а) $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\sin\theta \cos\theta$, $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \text{ctg}\theta$. Здесь координата θ считается первой, а координата φ — второй;

б) $\Gamma_{11}^1 = -\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{2y}{1+x^2+y^2}$, $\Gamma_{22}^1 = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{2x}{1+x^2+y^2}$, $\Gamma_{22}^2 = -\frac{2y}{1+x^2+y^2}$. Здесь координата x считается первой, а координата y — второй;

в) $\Gamma_{11}^1 = -\frac{2r}{1+r^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = \frac{r^3-r}{1+r^2}$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1-r^2}{r(1+r^2)}$, $\Gamma_{22}^2 = 0$. Здесь координата r считается первой, а координата φ — второй.

10.15. а) $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}$, $\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}$, $\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$, $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 0$. Здесь координата x считается первой, а координата y — второй;

б) $\Gamma_{11}^1 = \frac{2x}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{2x}{1-x^2-y^2}$,

$\Gamma_{11}^2 = -\frac{2y}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{2x}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{22}^2 = \frac{2y}{1-x^2-y^2}$. Здесь координата x считается первой, а координата y — второй;

в) $\Gamma_{11}^1 = \frac{2r}{1-r^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{r^3+r}{1-r^2}$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1+r^2}{r(1-r^2)}$, $\Gamma_{22}^2 = 0$. Здесь координата r считается первой, а координата φ — второй.

10.17. Будем считать координату u первой, а v — второй. Тогда $\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{f'f}{(f')^2 + (g')^2}$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{f'}{f}$, $\Gamma_{22}^2 = 0$.

10.18. Будем считать координату u первой, а координату v — второй. Тогда $\Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{\cos u \sin u}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -\frac{\sin^3 u}{\cos u}$, $\Gamma_{11}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} u$, $\Gamma_{22}^2 = 0$.

10.19. Будем считать координату u первой, а координату v — второй. Тогда $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = -\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \operatorname{cth} u$.

10.20. Будем считать координату u первой, а координату v — второй. Тогда $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{a} \operatorname{th} \frac{u}{a}$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{a} \operatorname{th} \frac{u}{a}$, $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{22}^1 = -a \operatorname{th} \frac{u}{a}$.

10.21. Будем считать, что координата u — первая, а v — вторая. Метрика имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2 + h^2) dv^2$. Символы Кристоффеля равны $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$, $\Gamma_{12}^2 = -u$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{u}{u^2 + h^2}$.

10.24. а) Параметризация линии $\theta = \theta_0$, $\varphi = t$. Уравнения параллельного переноса:

$$\frac{d\xi^1}{dt} - \sin \theta_0 \cos \theta_0 \xi^2 = 0, \quad \frac{d\xi^2}{dt} + \operatorname{ctg} \theta_0 \xi^1 = 0.$$

Общее решение уравнений:

$$\xi^1 = -C_1 \sin \theta_0 \cos (t \cos \theta_0 + C_2), \quad \xi^2 = C_1 \sin (t \cos \theta_0 + C_2);$$

б) параметризация линии $\theta = t$, $\varphi = \varphi_0$. Уравнения параллельного переноса:

$$\frac{d\xi^1}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi^2}{dt} = -\xi^2 \operatorname{ctg} t.$$

Общее решение уравнений: $\xi^1 = C_1 \frac{1}{\sin t}$, $\xi^2 = C_2$.

10.25. Указание. См. задачу 10.23, см. также рис. 132; либо воспользоваться результатом предыдущей задачи.

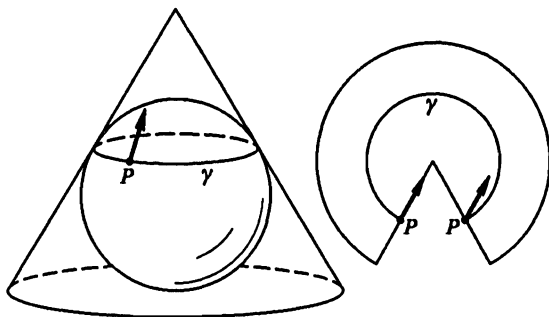


Рис. 132

10.27. Пусть поверхность образована вращением графика функции f . Тогда угол α между начальным и конечным векторами определяется равенством $\cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{\sqrt{1+f'^2}}$.

10.28. а) Указание. Ковариантно продифференцировать векторное поле, состоящее из векторов, касательных к параллелям.

10.29. Угол поворота равен $\frac{2\pi}{\sqrt{1+h^2}}$.

10.30. а) Параметризация кривой: $x(t) = x_0$, $y(t) = t$, $t \in (0, +\infty)$.

Уравнения параллельного переноса: $\frac{d\xi^1}{dt} - \frac{1}{t}\xi^1 = 0$, $\frac{d\xi^2}{dt} - \frac{1}{t}\xi^2 = 0$.

Общее решение уравнений: $\xi^1 = C_1 t$, $\xi^2 = C_2 t$;

б) параметризация кривой: $x(t) = t$, $y(t) = y_0$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

Уравнения параллельного переноса: $\frac{d\xi^1}{dt} - \frac{1}{y_0}\xi^2 = 0$, $\frac{d\xi^2}{dt} + \frac{1}{y_0}\xi^1 = 0$.

Общее решение уравнений:

$$\xi^1 = C_1 \sin\left(\frac{t}{y_0} + C_2\right), \quad \xi^2 = C_1 \cos\left(\frac{t}{y_0} + C_2\right).$$

10.31. а) Указание. Заменить сферу на конус и воспользоваться результатом задачи 10.22.

б) Указание. Заменить сферу на цилиндр.

в) Воспользоваться результатами предыдущих двух пунктов.

10.36. $\pi + S = \alpha$.

10.37. $\pi - S = \alpha$.

11.7. По теореме Менье радиус кривизны R кривой γ в некоторой точке равен проекции радиуса геодезической кривизны $R_g = 1/k_g$ на соприкасающуюся плоскость кривой γ , т. е. $R = |R_g \cos \theta|$. Вектор $\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}$ — единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности и ортогональный к кривой γ , вектор $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали кривой γ . Отсюда $|\cos \theta| = |\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle|$ и, следовательно,

$$k_g = k |\cos \theta| = k |\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle| = |\langle \mathbf{e}, \dot{\mathbf{v}} \rangle| = |\langle \mathbf{v} \times \mathbf{m}, \dot{\mathbf{v}} \rangle| = |\langle \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}} \rangle|.$$

11.16. Предположим, что прямолинейные образующие параллельны оси Oz . Тогда уравнение поверхности можно взять в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{e}_1 + \varphi(u)\mathbf{e}_2 + v\mathbf{e}_3,$$

где u — натуральный параметр направляющей линии. Будем искать уравнение геодезической в виде

$$v = v(u). \quad (*)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v] = \varphi' \mathbf{e}_1 - f' \mathbf{e}_2, \\ d\mathbf{r} &= (f' \mathbf{e}_1 + \varphi' \mathbf{e}_2 + v' \mathbf{e}_3) du, \\ d^2\mathbf{r} &= (f'' \mathbf{e}_1 + \varphi'' \mathbf{e}_2 + v'' \mathbf{e}_3) du^2, \end{aligned}$$

и уравнение для определения геодезических линий имеет вид (см. задачу 11.8)

$$\begin{vmatrix} \varphi' & -f' & 0 \\ f' & \varphi' & v' \\ f'' & \varphi'' & v'' \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(\varphi'^2 + f'^2)v'' - (\varphi'\varphi'' + f'f'')v' = 0.$$

Но $\varphi'^2 + f'^2 = 1$, следовательно,

$$\varphi'\varphi'' + f'f'' = \frac{1}{2}(\varphi'^2 + f'^2)' = 0.$$

Таким образом, $v'' = 0$, т. е. $v = c_1 u + c_2$. Векторное уравнение семейства геодезических имеет вид

$$\rho(u) = f(u)\mathbf{e}_1 + \varphi(u)\mathbf{e}_2 + (c_1 u + c_2)\mathbf{e}_3.$$

Заметим, что

$$\cos \theta = \cos (\widehat{\rho_u, \mathbf{e}_3}) = \frac{c_1}{\sqrt{1 + c_1^2}}.$$

Следовательно, найденные геодезические являются обобщенными винтовыми линиями. Кроме того, геодезическими являются прямолинейные образующие. Они не вошли в найденное семейство геодезических, поскольку уравнения прямолинейных образующих нельзя представить в виде (*).

11.18. Уравнения геодезических имеют вид

$$\mathbf{r}(v) = \left(\frac{C \cos v}{\sin((C_1 \pm v)/\sqrt{2})}, \frac{C \sin v}{\sin((C_1 \pm v)/\sqrt{2})}, \frac{C}{\sin((C_1 \pm v)/\sqrt{2})} \right).$$

11.19. Рассмотрим параметрическое уравнение конуса в виде $\mathbf{r}(u, v) = u\boldsymbol{\rho}(v)$ и будем считать, что $|\boldsymbol{\rho}| = 1$, $|\boldsymbol{\rho}'| = 1$. Тогда уравнения геодезических будут иметь вид $\mathbf{r}(v) = \frac{C_1}{\sin(C - v)}\boldsymbol{\rho}(v)$.

11.20. Доказательство получается из рассмотрения развертки конуса, на которой геодезические являются отрезками прямых. Замкнутые геодезические на конусе имеют вид, показанный на рис. 65. В точке самопересечения геодезическая пересекает саму себя под углом, отличным от 0 и π . Этот угол зависит только от угла при вершине конуса.

11.22.
$$v = C_1 + \int \frac{C du}{\sqrt{(u^2 + h^2)(u^2 + h^2 - C^2)}}.$$

11.23. Будем рассматривать v как функцию u вдоль геодезической.

Символы Кристоффеля имеют вид (см. задачу 10.13)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}, \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{\varphi'_u}{2(\varphi + \psi)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{\psi'_v}{2(\varphi + \psi)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнения геодезических:

$$\begin{aligned} 2(\psi + \varphi) \frac{d^2 v}{du^2} &= \frac{d\psi}{dv} - 2 \frac{d\varphi}{du} \frac{dv}{du} - \frac{d\psi}{dv} \left(\frac{dv}{du} \right)^2, \\ 0 &= \frac{d\varphi}{du} + 2 \frac{d\psi}{dv} \frac{dv}{du} - \frac{d\varphi}{du} \left(\frac{dv}{du} \right)^2. \end{aligned}$$

Умножим второе уравнение на $\frac{dv}{du}$ и прибавим к первому уравнению, получим

$$2(\psi + \varphi) \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{du} \frac{dv}{du} + \frac{d\psi}{dv} \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - \frac{d\varphi}{du} \left(\frac{dv}{du} \right)^3.$$

Легко видеть, что это условие равносильно равенству

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\psi - \varphi (dv/du)^2}{1 + (dv/du)^2} \right) = 0.$$

Интегрируя это равенство, получаем искомые уравнения.

$$11.26. \ddot{\varphi} + 2 \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)} \dot{\varphi} \dot{\tau} = 0,$$

$$\ddot{\tau} + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)} (\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2) = 0.$$

11.29. У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой Клеро.

$$11.35. \text{ а) } \frac{a}{a^2 + h^2}; \text{ б) } 0.$$

$$11.36. \frac{\operatorname{sh} v}{\sqrt{2} \operatorname{ch}^2 v}.$$

11.37. Геодезическая кривизна равна 1.

$$11.40. \text{ Геодезическая кривизна меридианов равна } 0, \text{ а параллелей равна } \frac{f'(u)}{f(u)\sqrt{1+f'^2(u)}}.$$

$$11.41. \text{ Геодезическая кривизна линий } v = \text{const} \text{ равна } \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \text{ а} \\ \text{линий } u = \text{const} \text{ равна } \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial v}.$$

$$12.5. R = -\frac{1}{\lambda} \Delta \ln \lambda.$$

$$12.8. \text{ а) } \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2}, \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G}.$$

$$\text{ б) } K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}.$$

$$12.9. K = -\frac{\omega_{uv}}{\sin \omega}.$$

$$13.11. \text{ а) } 2(z-1) dx \wedge dy \wedge dz; \text{ б) } yz dx \wedge dz + xz dy \wedge dz; \text{ в) } 6y^2 dx \wedge dy \wedge dz; \\ \text{ г) } 0; \text{ д) } 0; \text{ е) } 0; \text{ ж) } df \wedge dg; \text{ з) } 0.$$

13.12. Свести задачу к случаю постоянных коэффициентов.

$$13.22. \text{ а) } (2r \cos \theta, -r \sin \theta, 0);$$

$$\text{ б) } (6r \sin \theta + e^r \sin \varphi r \sin \theta);$$

$$\text{ в) } \left(-\frac{2 \cos \theta}{r^3}, -\frac{\sin \theta}{r^3}, 0 \right).$$

13.39. Указание. Рассмотреть векторное поле X , двойственное форме ω . Показать, что существует система локальных координат $(x^1, \dots, x^n)$, в которой $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Далее рассмотреть формы Ω и ω в этой системе координат.

14.30. В качестве пространства X возьмем пространство l_2 , элементами которого являются последовательности действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, удовлетворяющих условию $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. В качестве пространства $Y \subset X$ возьмем сферу в X , т.е. множество таких x , для которых $\|x\|^2 = 1$. Рассмотрим в Y последовательность точек x_i , у которых на i -м месте стоит 1, а на остальных — 0. Эта бесконечная последовательность не имеет предельной точки, поскольку $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ для любых i, j . Следовательно, Y не является компактом.

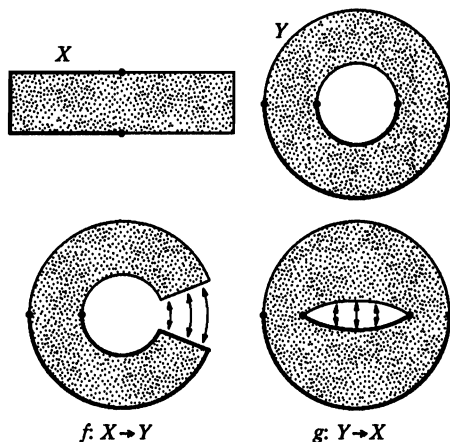


Рис. 133

14.44. Нет. Если топологическое метрическое компактное пространство связно, оно не обязательно линейно связно. Известный пример — множество точек на плоскости (x, y) , задаваемое так:

$$\left\{ y = \sin \frac{1}{x} \right\} \cup \{ (x = 0; -1 \leq y \leq 1) \}.$$

14.57. Пример см. на рис. 133.

15.18. а) Интегральными траекториями векторного поля $\text{grad}(\text{Re } z^n)$ являются линии уровня сопряженной функции $\text{Im } z^n = r^n \sin n\varphi$. Единственной особой точкой поля $\text{grad}(\text{Re } z^n)$ является $z = 0$, так как только в этой точке $f'(z) = 0$. Точка $z = 0$ — вырожденное седло. См. рис. 134.

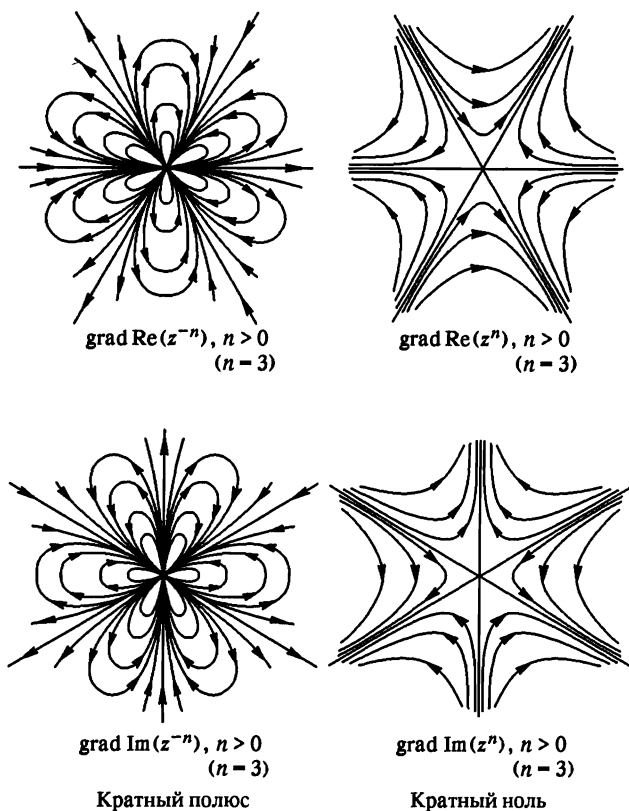


Рис. 134

Сделаем малое возмущение функции $z^n \rightarrow \prod_{i=1}^n (z - \varepsilon_i)$. Тогда особая точка распадается на $n - 1$ невырожденных седел 2-го порядка. Рассмотрим поведение интегральных траекторий вблизи одной из особых точек. Разложим функцию в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(a_i) + f'(a_i)(z - a_i) + \frac{f''(a_i)}{2}(z - a_i)^2 + \dots$$

Разложение начинается с члена 2-го порядка, так как $f'(a_i) = 0$. При этом $f''(a_i) \neq 0$ (невырожденная критическая точка), поскольку $f''(a_i) =$

$= 0$ тогда и только тогда, когда a_i является кратным корнем для $f(z)$.
(См. также рис. 137, 138.)

б) Для функции $f(z) = z + \frac{1}{z}$, переходя к полярным координатам ($z = \rho e^{i\varphi}$), имеем:

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \varphi, \quad \operatorname{Im}(f(z)) = \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \varphi.$$

Начало координат является особой точкой, так как функция $\frac{1}{z}$ разрывна.

Производная функции $f(z)$ равна $1 - \frac{1}{z^2}$, т. е. особые точки — это $z = 1$

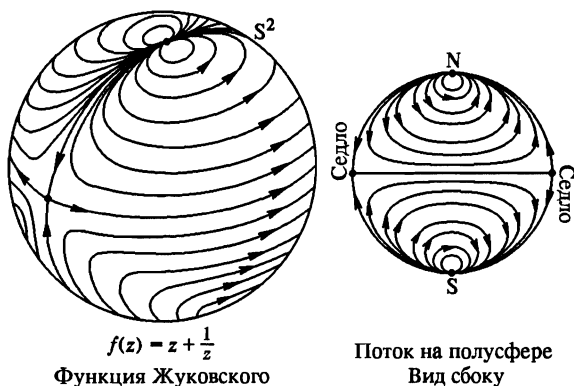
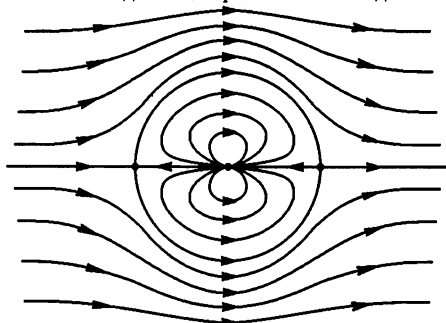


Рис. 135

и $z = -1$. Обе точки невырождены. Рассмотрим интегральные траектории поля $\operatorname{grad}(\operatorname{Re} f(z))$. Они задаются уравнениями $\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \varphi = c$. Для интегральных траекторий, входящих в особые точки и выходящих

Обтекание диска (шара) в потоке жидкости



$f(z) = z + \frac{1}{z}$ (функция Жуковского)
Нарисуйте второй, сопряженный поток

Рис. 136

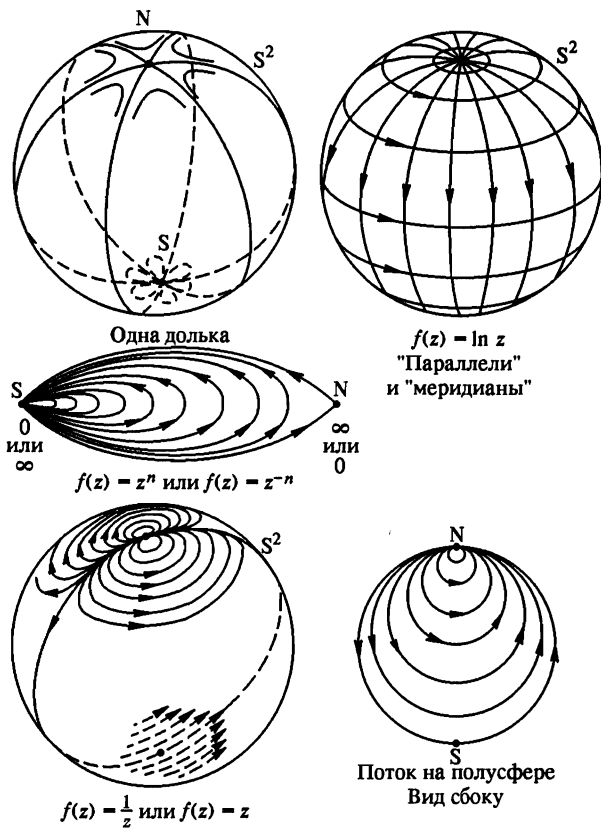


Рис. 137

из особых точек, т. е. для сепаратрис, $c = 0$. Отсюда получаем, что сепаратрисы задаются уравнениями $\varphi = \pm\pi$ (единичная окружность, состоящая из двух сепаратрис) и $\rho = 1$ (вещественная ось, состоящая из четырех сепаратрис). Аналогичным образом можно построить сепаратрисы поля $\text{grad}(\text{Im } f(z))$, которые задаются уравнением $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \cos \varphi = 2$ и имеют вид двух касающихся петель. См. рис. 135, 136. См. также рис. 137.

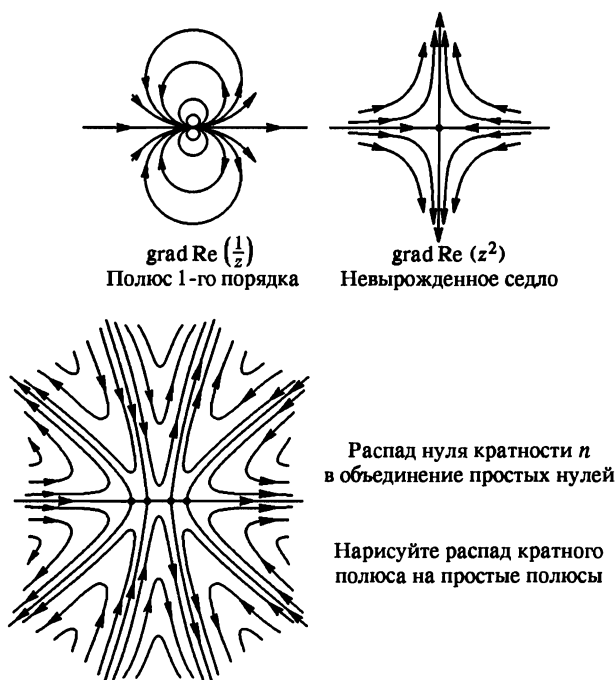


Рис. 138

в) $f(z) = z + \frac{1}{z^2}$. Рассмотрим $\text{grad Re } f(z)$. Интегральные траектории этого потока являются линиями уровня функций $\text{Im } f(z)$:

$$\text{Im } f(z) = y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = r \sin \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Аналогично ищем линии уровня функции $\text{Re } f(z) = r \cos \varphi - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}$.

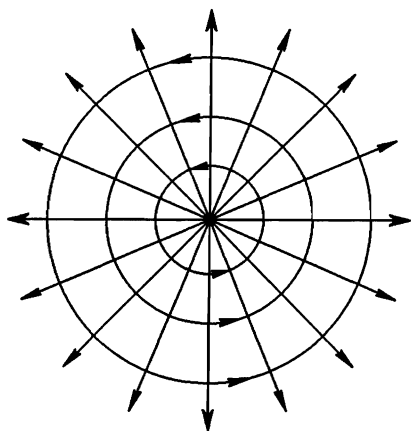
г) Особые точки функции $f(z) = z + \frac{1}{z-2}$ — это $z = 2$ (полюс) и $z = 1$, $z = 3$ (нули функции $f'(z)$). Особые точки $z = 1$ и $z = 3$ являются

невырожденными седлами, так как $f''(1) \neq 0$ и $f''(3) \neq 0$. В окрестности точки $z = 2$ интегральные траектории векторных полей $\text{grad}(\text{Re } f(z))$ и $\text{grad}(\text{Im } f(z))$ качественно устроены так же, как и соответствующие траектории для функции $f(z) = \frac{1}{z}$ в окрестности нуля.

д) См. рис. 139.

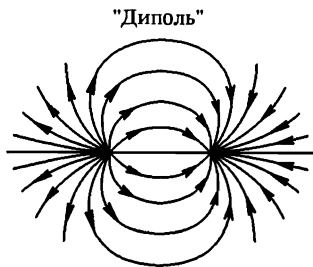
е) См. рис. 140.

з) Особые точки функции $f(z) = z^3(z-1)^{100}(z-2)^{900}$, т.е. нули производной $f'(z)$, следующие: $z_1 = 0$ — седло второго порядка, $z_2 = 1$ — седло 99-го порядка, $z_3 = 2$ — седло 899-го порядка, $z_4 \approx 0,005$



$\text{grad Re}(\ln z)$ и $\text{grad Im}(\ln z)$

Рис. 139



$f(z) = \ln\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$
Нарисуйте второй,
сопряженный поток

Рис. 140

и $z_5 \approx 1,1$ (это корни квадратного уравнения $1003z^2 - 1109z + 6 = 0$) — невырожденные седла. Локально в окрестности каждой особой точки интегральные траектории ведут себя так же, как в окрестности седел соответствующего порядка.

к) Функцию $f(z) = 1 + z^4(z^4 - 4)^{44}(z^{44} - 44)^{444}$ в окрестности точки $z = 0$ можно заменить на $\tilde{f}(z) = 1 + 4^{44}44^{444}z^4$. От этого качественная картина поведения линий в окрестности точки $z = 0$ не изменится. Но добавление постоянной не изменяет вид траекторий, поэтому можно рассматривать функцию $f_1(z) = cz^4$ в окрестности нуля, где $c = 4^{44}44^{444}$. Точка $z = 0$ является вырожденной особой точкой для функции $f_1(z)$ (а значит, и для функции $f(z)$). При подходящем малом возмущении эта особая точка распадется на три невырожденные особые точки.

л) Функция $f(z) = \frac{1}{100} \ln \left(\frac{z-2i}{z-4} \right)^3$ имеет логарифмические особенности в точках $z = 2i$ и $z = 4$. Кроме них особых точек нет.

м) Для упрощения записи функции $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 1}$ сделаем сдвиг $w = z + 1$. Тогда $g(w) = f(w-1) = \frac{1}{w^2 - 2}$. Точки $w = \pm\sqrt{2}$ — особые точки (полюса) функции $g(w)$. Особые точки векторных полей $\text{grad}(\text{Re } f(z))$ и $\text{grad}(\text{Im } f(z))$ совпадают с нулями функции $f'(z)$. Отсюда $w = 0$ — особая точка, причем невырожденная, поскольку $g''(0) \neq 0$.

н) Точка $z = 0$ является особой точкой для функции $f(z) = \frac{2}{z} + 21 \ln z^2$. Кроме того, $z = 1/21$ — особая точка векторных полей $\text{grad}(\text{Re } f(z))$ и $\text{grad}(\text{Im } f(z))$, поскольку $f'(1/21) = 0$.

о) Точка $z = 0$ является особой точкой для функции $f(z) = z^5 + 2 \ln z$. Нули производной $f'(z)$ — это корни уравнения $z^5 = -2/5$ (вершины пятиугольника). В этих точках $z_1, \dots, z_5$ имеем: $f(z) \sim f(z_i) + k_i(z - z_i)^2 + \dots$, где $k_i \neq 0$, $i = 1, \dots, 5$.

п) Точки $z = 1$ и $z = -10i$ — особые точки функции

$$f(z) = 2 \ln(z-1)^2 - \frac{4}{3} \ln(z+10i)^3.$$

При этом $f'(z) \neq 0$ для всех значений z .

р) Точки $z = 0$ и $z = i$ являются особыми точками функции $f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z-i)^3}$ (полюса третьего порядка). Дифференцируем: $f'(z) = -\frac{3}{z^4} + \frac{1}{(z-i)^4} = 0$. Получаем четыре точки, в которых $f'(z) = 0$:

$$\frac{i\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}-1}, \quad \frac{i\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}+1}, \quad \frac{i\sqrt{3}+\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}+1}, \quad \frac{i\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}+1}.$$

Интегральные траектории векторных полей

$$\text{grad}(\text{Re } f(z)) \quad \text{и} \quad \text{grad}(\text{Im } f(z))$$

на бесконечности ведут себя так же, как и интегральные траектории соответствующих векторных полей для функции $1/z^4$.

15.19. а, б) См. рис. 141.

15.22. а) См. рис. 142.

15.23. См.: а) рис. 143, 144; б) рис. 145; в) рис. 146; г) рис. 147; д) рис. 148, 149; е) рис. 150, 151; ж) рис. 152.

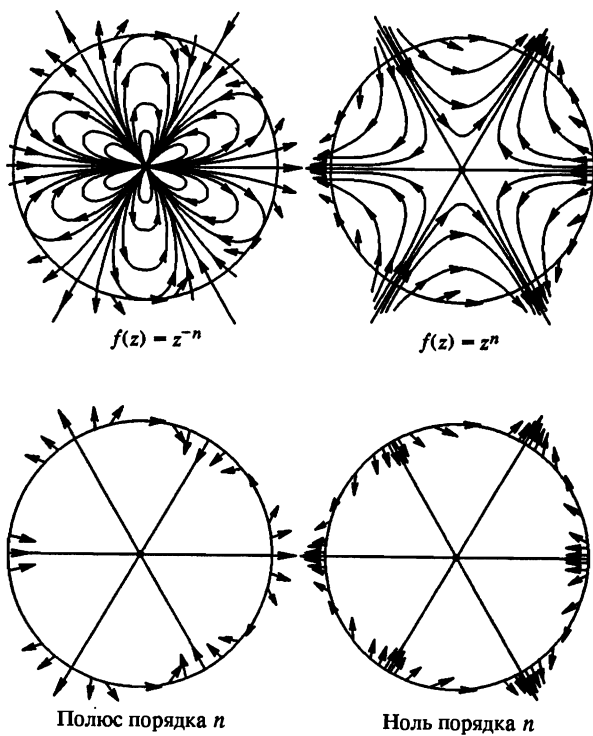
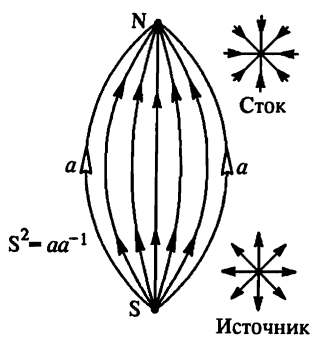
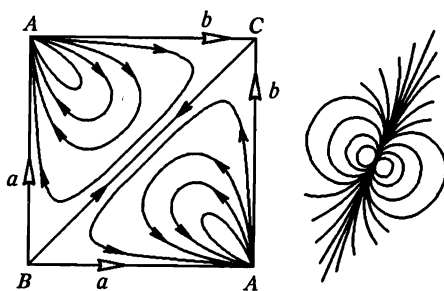


Рис. 141



Векторное поле на S^2
с двумя особенностями

Рис. 142



Векторное поле на S^2
с одной особенностью
 $S^2 = abb^{-1}a^{-1}$

Рис. 143

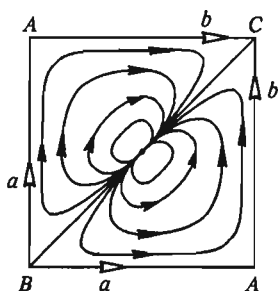
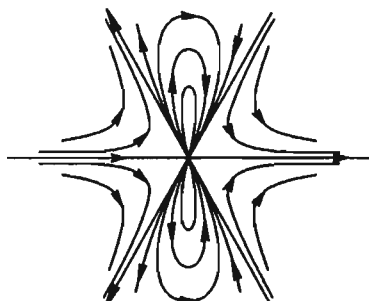
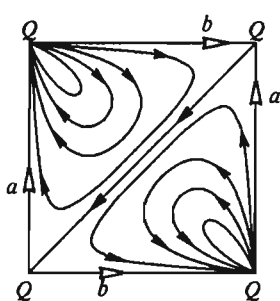
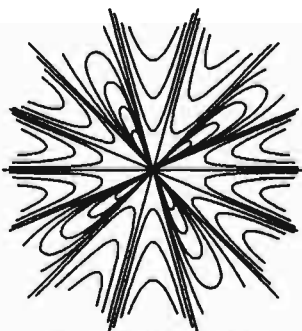
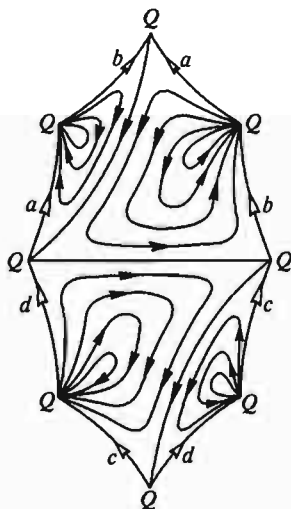


Рис. 144. Векторное поле на сфере с одной особенностью $S^2 = abb^{-1}a^{-1}$



Структура особенности

Рис. 145. Векторное поле на торе с одной особенностью $T^2 = aba^{-1}b^{-1}$



Структура особенности

Рис. 146. Векторное поле на кренделе $aba^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}cd$

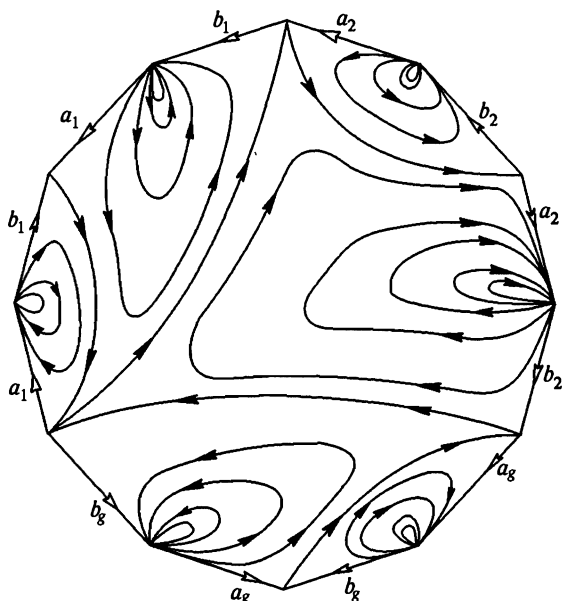


Рис. 147. Векторное поле с одной особой точкой на ориентированной поверхности рода g : $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$

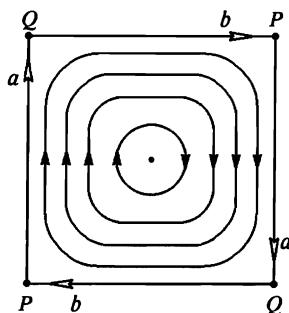


Рис. 148

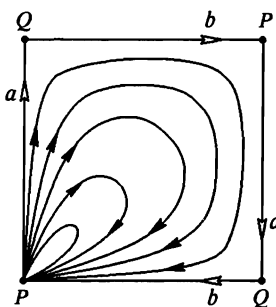
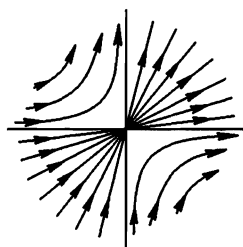
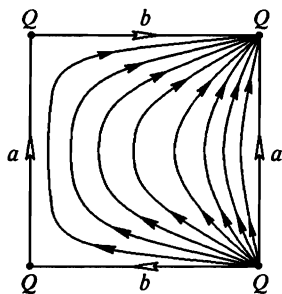


Рис. 149. Поле на $\mathbb{RP}^2$ с одной особой точкой $\mathbb{RP}^2 = abab$



Структура особенности

Рис. 150. Векторное поле на бутылке Клейна с одной особенностью $KL = aba^{-1}b$

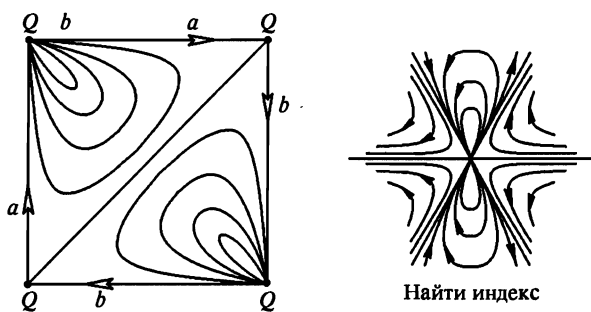


Рис. 151. Поле с одной особенностью на $KL = aabb$ (бутылка Клейна)

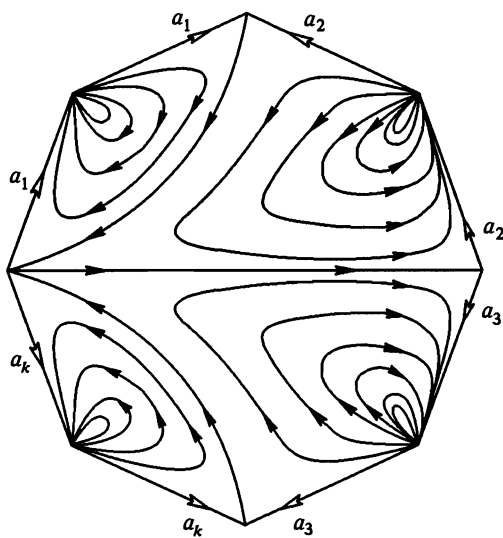


Рис. 152. Поле с одной особой точкой на неориентируемой поверхности общего вида

Часть 2

$$16.1. \text{ б) } \frac{-a^2}{(\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^2}, \frac{-(\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2)^2}{a^2}; \text{ в) да.}$$

$$16.2. \text{ б) } \frac{c^3 \sin u_1}{(\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1)^3}, \frac{(\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1)^3}{c^3 \sin u_1}; \text{ в) да.}$$

$$16.3. \text{ б) } c^3(u_2^2 - u_1^2), \frac{1}{c^3(u_2^2 - u_1^2)}; \text{ в) да.}$$

$$16.4. \text{ б) } c^3 u_1 u_2 \frac{u_1^2 - u_2^2}{\sqrt{(1 - u_2^2)(u_1^2 - 1)}}, \frac{\sqrt{(1 - u_2^2)(u_1^2 - 1)}}{c^3 u_1 u_2 (u_1^2 - u_2^2)}; \text{ в) да.}$$

$$16.5. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + V.$$

$$16.6. \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial V}{\partial u} + 2v(1 - v^2) \frac{\partial V}{\partial v} + u^2 v^2 V = 0, \text{ область определения } y \neq 0, \text{ область значения } v \neq 0.$$

$$16.7. \left(\frac{1}{4} \ln^2 (u^2 + v^2) + \operatorname{arctg}^2 \frac{v}{u} \right) (u^2 + v^2) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right).$$

$$16.8. \left(\frac{1}{4} \ln^2 \frac{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2}{(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg}^2 \frac{(u - u_2)(v - v_1) - (u - u_1)(v - v_2)}{(u - u_1)(u - u_2) + (v - v_1)(v - v_2)} \right) \times \\ \times \frac{((u - u_2)^2 + (v - v_2)^2)((u - u_1)^2 + (v - v_1)^2)}{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right).$$

$$16.9. \frac{1}{9(u^2 + v^2)((u - 2)^2 + v^2)} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right).$$

$$17.1. \text{ а) Например: } x = t^2, y = t^3. \text{ См. рис. 153.}$$

$$17.3. \text{ а) Например: } x = \frac{t^n}{\ln(1/t^2)}, y = \frac{|t|^n}{\ln(1/t^2)}.$$

$$17.4. \text{ а) } k \text{ — нечетно и } n \neq mk, m \in \mathbb{N}; \text{ б) } k \text{ — нечетно и } n = km, m \in \mathbb{N}; \text{ в) } k \text{ — четно.}$$

17.5. Если кривизна в точке перехода кривой из одной плоскости в другую отлична от нуля, то гладкость не выше C^1 ; если же кривизна в этой точке может равняться нулю, то C^∞ .

17.6. Один из возможных ответов для аналитической параметризации:

$$x = a \cos \varphi \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}{\sqrt{2}}, \quad y = a \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

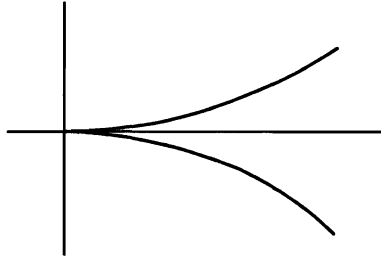


Рис. 153. Нерегулярная кривая с аналитической параметризацией

17.7. Нет. Препятствием является число вращения регулярной замкнутой кривой.

17.8. а) $y^2 = 2ax - 2C$ — парабола с осью OX и параметром $p = |a|$. Кривая обращена вогнутостью влево в случае $a < 0$ и вправо в случае $a > 0$; б) $y = Ce^{-x/a}$; в) $(x - C)^2 + y^2 = a^2$ — окружность радиуса a с центром на оси OX .

17.9. Условие постоянства длины касательной записывается в виде $y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = a$. Мы будем рассматривать кривую лишь в верхней полуплоскости и поэтому положим $|y| = y > 0$. Рассмотрим угол φ , $0 < \varphi < \pi$, определяемый из условия $\operatorname{tg} \varphi = dy/dx$. Заменяя dx/dy через $\operatorname{ctg} \varphi$, получим $y/\sin \varphi = a$ или $y = a \sin \varphi$. Отсюда $dy = a \cos \varphi d\varphi$. Но из условия, определяющего угол φ , следует, что $dx = \operatorname{ctg} \varphi dy$. Подставив сюда полученное для dy выражение, получим $dx = a \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} d\varphi$, или $dx = a \left(\frac{1}{\sin \varphi} - \sin \varphi \right) d\varphi$. Интегрируя почленно, найдем $x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi \right) + C$. Уравнение этой кривой можно записать иначе:

$$x = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

17.10. $y = a^3/(x^2 + a^2)$; $x = a \operatorname{ctg} t$, $y = a \sin^2 t$.

17.11. У к а з а н и е. Применить теорему Ролля к функции $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) \rangle$.

17.12. Использовать тот факт, что $|\mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t)|^2 = \text{const}$, где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиус-векторы движущихся точек, t — время.

17.13. Положим $\frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}} = \lambda$; $\lambda(t)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция, сохраняющая определенный знак. Имеем $\mathbf{r}' - \lambda \mathbf{r} = 0$, откуда $\mathbf{r} = \mathbf{a} e^{\int \lambda dt}$.

Так как производная от функции $e^{\int \lambda dt}$ равна $\lambda e^{\int \lambda dt}$, то она сохраняет знак на сегменте $[a, b]$, т.е. $e^{\int \lambda dt}$ — монотонная и непрерывная функция t .

17.14. Применяя метод решения предыдущей задачи, будем иметь $\mathbf{r}' = \mathbf{a} e^{\int \lambda dt}$, откуда

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} \int e^{\int \lambda dt} dt + \mathbf{b}.$$

Производная от $\int e^{\int \lambda dt} dt$ равна $e^{\int \lambda dt} > 0$; значит, $\int e^{\int \lambda dt} dt$ — монотонно возрастающая функция от $t \in [a, b]$.

Примечание. Через $[\mathbf{r}]$ будем обозначать вектор, полученный из $\mathbf{r}$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$.

17.15. Радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ произвольной точки неподвижной центроиды может быть определен одним из соотношений: $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 + \lambda[\mathbf{r}'_1] = \mathbf{r}_2 + \mu[\mathbf{r}'_2]$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \lambda[\mathbf{r}'_1] = \mu[\mathbf{r}'_2]$, $\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2 \rangle + \langle \lambda[\mathbf{r}'_1], \mathbf{r}'_2 \rangle = 0$, $\lambda = \frac{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 \rangle}{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|}$.

Следовательно, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 + \frac{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 \rangle}{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|} [\mathbf{r}'_1]$.

В координатах:

$$\xi = x_1 - \frac{(x_2 - x_1)x'_2 + (y_2 - y_1)y'_2}{x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1} y'_1,$$

$$\eta = y_1 - \frac{(x_2 - x_1)x'_2 + (y_2 - y_1)y'_2}{x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1} x'_1.$$

17.16. Рассмотрим вектор $\lambda[\mathbf{r}'_1]$, где $\lambda = \frac{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 \rangle}{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|}$; если этот вектор отложить от конца M_1 стержня, то его конец попадет в мгновенный центр вращения. Проекция вектора $\lambda[\mathbf{r}'_1]$ на векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ и $[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]$ соответственно равны:

$$\frac{\langle \lambda[\mathbf{r}'_1], \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rangle}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{и} \quad \frac{\langle \lambda[\mathbf{r}'_1], [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1] \rangle}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Поэтому уравнения подвижной центроиды:

$$x = \frac{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle}{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|} \frac{|\mathbf{r}'_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad y = \frac{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 \rangle}{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|} \frac{\langle \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \rangle}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|},$$

или

$$x = \frac{((x_2 - x_1)x'_1 + (y_2 - y_1)y'_1) \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}},$$

$$y = \frac{((x_2 - x_1)x'_2 + (y_2 - y_1)y'_2) ((x_2 - x_1)x'_1 + (y_2 - y_1)y'_1)}{\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 \\ x'_2 & y'_2 \end{vmatrix} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

17.17. $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \xi \mathbf{a} + \eta [\mathbf{a}]$, где $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ (точка M жестко связана со стержнем); $\mathbf{R}' = \mathbf{r}'_1 + \xi \mathbf{a}' + \eta [\mathbf{a}']$. Так как $|\mathbf{a}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = \text{const}$, то $\mathbf{a}' \perp \mathbf{a}$; значит, $\mathbf{a}' = s[\mathbf{a}]$, $\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = s[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]$, $\langle \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1, [\mathbf{r}'_1] \rangle = s \langle [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1], [\mathbf{r}'_1] \rangle$, $\langle [\mathbf{r}'_1], \mathbf{r}'_2 \rangle = \langle s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \mathbf{r}'_1 \rangle$, $s = \frac{|\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}'_2|}{\langle \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1 \rangle} = \frac{1}{\lambda}$. Итак: $\mathbf{a}' = \frac{1}{\lambda}[\mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}'] = -\frac{1}{\lambda}\mathbf{a}$, $\mathbf{R}' = \mathbf{r}'_1 + \frac{\xi}{\lambda}[\mathbf{a}] - \eta \lambda \mathbf{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda \mathbf{r}'_1 + \xi[\mathbf{a}] - \eta \mathbf{a})$. С другой стороны,

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 + \xi \mathbf{a} + \eta [\mathbf{a}] - \mathbf{r}_1 - \lambda [\mathbf{r}'_1] = \xi \mathbf{a} + \eta [\mathbf{a}] - \lambda [\mathbf{r}'_1],$$

$$[\mathbf{r}] = \lambda \mathbf{r}'_1 - \xi [\mathbf{a}] - \eta \mathbf{a},$$

значит, $\mathbf{R}' = \frac{1}{\lambda}[\mathbf{r}]$, $\omega = \frac{1}{\lambda}$.

17.21. $\frac{x^2}{(a/\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(b/\sqrt{2})^2} = 1$, где a и b — полуоси данного эллипса.

17.22. $xy = \pm s/2$, где s — данная площадь.

17.23. $y = ax^2 + \sqrt[3]{\frac{9as^2}{16}}$, где парабола задается уравнением $y = ax^2$, а s — площадь сегмента.

17.24. $\left(x - \frac{l}{\cos(\alpha/2)}\right)^2 + y^2 = \left(l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^2$, где α — данный угол, l — полупериметр треугольника.

17.25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2a^2} = 1$, где a — радиус данной окружности.

17.26. $\mathbf{r} = (l \cos^3 v, l \sin^3 v)$, где l — заданная сумма полуосей.

17.27. $x = \frac{a}{4}(3 \cos v - \cos 3v)$, $y = \frac{a}{4}(3 \sin v - \sin 3v)$ — гипоциклоида.

17.28. $xy = \pm \frac{1}{2}\sqrt{c}$, где c — заданная площадь.

17.29. $(x-c)^2 + y^2 = 4a^2$, где a — большая полуось эллипса, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

17.30. $\rho = r \pm a \frac{[r']}{|r'|}$.

17.31. $\rho = r + [r'] \frac{|r'|^2}{|r' \times r''|}$; в координатах:

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}.$$

17.32. Кардиоида.

17.33. $(x+1)/2 = (y-13)/3 = z/6$; $2x + 3y + 6z - 37 = 0$.

17.34. Для указанной точки A имеем: $t = -1$.

Касательная прямая: $(x-3)/6 = (y+7)/(-17) = (z-2)/7$.

Нормальная плоскость: $6x - 17y + 7z - 151 = 0$.

17.35. Для указанной точки A имеем: $t = 1$. Так как $r'(1) = 0$, а $r''(1) = (2, 2, 12) \neq 0$, то направление касательной определяется этим последним вектором или коллинеарным ему $(1, 1, 6)$.

Касательная прямая: $(x-2)/1 = y/1 = (z+2)/6$.

Нормальная плоскость: $x + y + 6z + 10 = 0$.

17.36. Уравнение касательной:

$$X = x + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad Y = y + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix},$$

$$Z = z + \lambda \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Нормальная плоскость:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

17.37. $s = 5at$.

17.38. $s = 8a\sqrt{2}$.

17.39. $s = 9a$.

17.40. $s = 10$. Кривая имеет четыре точки возврата с изменением знака ds/dt в точках $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

17.42. Необходимое и достаточное условие: $\mathbf{e}' \neq 0, (\rho', \mathbf{e}, \mathbf{e}') = 0$. Уравнение огибающей: $\mathbf{r} = \rho - \frac{\langle \rho', \mathbf{e}' \rangle}{|\mathbf{e}'|^2} \mathbf{e}$.

17.43. $\mathbf{r} = \rho + v\mathbf{e}$.

17.44. $\mathbf{r} = v\rho$.

17.45. $\mathbf{r} = \rho + v\rho'$.

17.46. $\mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + \mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi$, где $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ — главная нормаль и бинормаль соответственно.

17.47. $\mathbf{r}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$. В частном случае: $\mathbf{r} = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, v)$.

17.48. Если уравнение винтовой линии задано в виде

$$\rho = (a \cos u, a \sin u, bu),$$

то $\mathbf{n} = (-\cos u, -\sin u, 0)$ — вектор главной нормали. Отсюда искомое уравнение

$$\mathbf{r} = \rho - \lambda \mathbf{n} = ((a + \lambda) \cos u, (a + \lambda) \sin u, bu) = (v \cos u, v \sin u, bu)$$

задает прямой геликоид.

17.49. $\mathbf{r} = \rho(s) + \lambda(\mathbf{n}(s) \cos \varphi(s) + \mathbf{b}(s) \sin \varphi(s))$, где $\varphi(s)$ — произвольная функция переменной s .

17.50. Векторы $\mathbf{n} = (\cos u, \sin u, 0)$ и $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ определяют нормальную плоскость к окружности $\rho = (a \cos u, a \sin u, 0)$. Вектор, лежащий в нормальной плоскости и наклоненный под углом u к вектору $\mathbf{n}$, есть вектор $\alpha = \mathbf{n} \cos u + \mathbf{k} \sin u$. Поэтому уравнение искомой поверхности

$$\mathbf{r} = \rho + v\alpha = (a \cos u + v \cos^2 u, a \sin u + v \sin u \cos u, v \sin u).$$

Исключая параметры u и v , находим

$$x = \operatorname{ctg} u(a \sin u + z \cos u), \quad y = (a \sin u + z \cos u),$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} u, \quad \frac{y^2}{\sin^2 u} = (a + z \operatorname{ctg} u)^2, \quad y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = \left(a + \frac{xz}{y}\right)^2.$$

Итак, $y^2(x^2 + y^2) = (ay + xz)^2$ — поверхность четвертого порядка.

17.51. $\mathbf{R}(u, v) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}(u) + \rho(v))$.

17.52. Уравнение данной прямой $\mathbf{r}_1 = (u, 0, h)$. Уравнение эллипса $\mathbf{r}_2 = (a \cos v, b \sin v, 0)$. Далее, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (u - a \cos v, -b \sin v, h)$. Отсюда

при $u - a \cos v = 0$ имеем $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (0, -b \sin v, h)$. Искомое уравнение коноида:

$$\mathbf{r} = (a \cos v, b \sin v, 0) + \lambda(0, -b \sin v, h) = (a \cos v, b(1 - \lambda) \sin v, \lambda h).$$

Исключая параметры λ и v , получим уравнение коноида в неявном виде:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(\frac{z}{h} - 1\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

17.53. $\mathbf{r}_1 = (a, 0, u)$, $\mathbf{r}_2 = \left(0, v, \frac{v^2}{2p}\right)$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left(a, -v, u - \frac{v^2}{2p}\right)$. Если $u - \frac{v^2}{2p} = 0$, то $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (a, -v, 0)$. Отсюда

$$\mathbf{r} = \left(0, v, \frac{v^2}{2p}\right) + \lambda(a, -v, 0) = \left(a\lambda, v(1 - \lambda), \frac{v^2}{2p}\right),$$

или $a^2 y^2 = 2pz(x - a)^2$.

17.54. Параметрические уравнения данных окружностей:

$$\mathbf{r}_1 = (a(1 + \cos u), 0, a \sin u), \quad \mathbf{r}_2 = (0, a(1 + \cos v), a \sin v).$$

Находим: $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (a(1 + \cos u), -a(1 + \cos v), a(\sin u - \sin v))$. Имеем $\sin u - \sin v = 0$, откуда: 1) $v = u + 2k\pi$, 2) $v = \pi - u + 2k\pi$. В первом случае $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (a(1 + \cos u), -a(1 + \cos u), 0)$ параллелен $(1, -1, 0)$. Таким образом, получаем эллиптический цилиндр

$$\begin{aligned} \rho(u, \lambda) &= (a(1 + \cos u), 0, a \sin u) + \lambda(1, -1, 0) = \\ &= (a(1 + \cos u) + \lambda, -\lambda, a \sin u). \end{aligned}$$

Во втором случае $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (a(1 + \cos u), -a(1 - \cos u), 0)$ параллелен $(1, -1, 0)$, и вторая поверхность, составляющая данный цилиндрический коноид, определяется уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(u, \lambda) &= (a(1 + \cos u), 0, a \sin u) + \lambda(a(1 + \cos u), -a(1 - \cos u), 0) = \\ &= (a(1 + \lambda)(1 + \cos u) + \lambda, -a\lambda(1 - \cos u), a \sin u). \end{aligned}$$

Исключая параметры λ и u , получим:

$$z^4 + z^2((x - y)^2 - 2a(x + y)) + 4a^2 xy = 0.$$

17.55. $\mathbf{r}_1 = \left(\frac{u^2}{2p}, u, 0\right)$, $\mathbf{r}_2 = \left(\frac{-v^2}{2p}, 0, v\right)$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2p}, u, -v\right)$.

Условие коллинеарности вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и плоскости $y - z = 0$ дает

$u + v = 0$, $v = -u$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left(\frac{u^2}{p}, u, u\right)$. Искомое уравнение:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{u^2}{2p}, u, 0\right) + v \left(\frac{u^2}{p}, u, u\right) = \left(\frac{u^2}{2p}(1 + 2v), u(1 + v), uv\right).$$

Исключая параметры u и v , получим $y^2 - z^2 = 2px$ — гиперболический параболоид.

17.56. Уравнение оси Oz имеет вид $\mathbf{r}_1 = (0, 0, u)$; уравнение данной кривой —

$$\mathbf{r}_2(v) = \left(b \cos v, b \sin v, \frac{a^3}{b^2 \cos v \sin v}\right).$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \left(b \cos v, b \sin v, \frac{a^3}{b^2 \cos v \sin v} - u\right), \quad u = \frac{a^3}{b^2 \cos v \sin v},$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (b \cos v, b \sin v, 0),$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \left(0, 0, \frac{a^3}{b^2 \cos v \sin v}\right) + \lambda(b \cos v, b \sin v, 0) = \\ &= \left(\lambda b \cos v, \lambda b \sin v, \frac{a^3}{b^2 \cos v \sin v}\right). \end{aligned}$$

Исключая параметры λ и v , получим: $b^2xyz = a^3(x^2 + y^2)$.

17.57. Из условия $\langle \mathbf{a} + u\mathbf{b} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{n} \rangle = 0$ находим $u = \frac{\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle}$. Отсюда

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \lambda(\mathbf{a} + u\mathbf{b} - \boldsymbol{\rho}) = (1 - \lambda)\boldsymbol{\rho} + \lambda \left(\mathbf{a} + \frac{\langle \mathbf{n}, \boldsymbol{\rho} - \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{b} \rangle} \mathbf{b} \right).$$

17.58. Возьмем уравнения данных эллипсов в виде

$$\mathbf{r}_1 = (a, b \cos u, c \sin u), \quad \mathbf{r}_2 = (-a, c \cos v, b \sin v).$$

Вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (2a, b \cos u - c \cos v, c \sin u - b \sin v)$ параллелен плоскости xOy , поэтому $c \sin u - b \sin v = 0$. Отсюда

$$\sin v = \frac{c}{b} \sin u, \quad \cos v = \pm \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 u},$$

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left(2a, b \cos u \pm \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 u}, 0\right).$$

Искомое уравнение:

$$\mathbf{R} = (a, b \cos u, c \sin u) + v \left(2a, b \cos u \pm \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 u}, 0 \right)$$

или

$$\mathbf{R} = \left(a + 2av, b \cos u + v \left(b \cos u \pm \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 u} \right), c \sin u \right).$$

17.59. Уравнение оси Oz : $\mathbf{p} = (0, 0, v)$. Находим:

$$\rho - \mathbf{p} = (u, u^2, u^3 - v), \quad u^3 - v = 0, \quad \mathbf{p} = (0, 0, u^3).$$

Искомое уравнение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + v(\rho - \mathbf{p}) = (0, 0, u^3) + v(u, u^2, 0) = (uv, u^2v, u^3).$$

17.60. $\mathbf{r} = (bv, av \cos u, (b + a \cos u)(1 - v) + a \sin u)$.

17.61. Уравнения данных прямых: $\rho = (u, 1, 1)$ и $\mathbf{p} = (1, v, 0)$. Уравнение прямой, проходящей через две произвольные точки этих прямых, имеет вид $\mathbf{r} = (1, v, 0) + \lambda(u, 1, 1)$. Для точки пересечения этой прямой с плоскостью xOz имеем: $v + \lambda = 0$, $\mathbf{r} = (1, v, 0) - v(u, 1, 1) = (1 - uv, 0, -v)$. Эта точка должна лежать на окружности $x = \cos \varphi$, $y = 0$, $z = \sin \varphi$. Следовательно, $1 - uv = \cos \varphi$, $v = -\sin \varphi$, откуда $u = \frac{1 - \cos \varphi}{-\sin \varphi} = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Остается составить уравнения прямой, проходящей через точки $\left(-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, 1, 1\right)$ и $(1, -\sin \varphi, 0)$. В результате получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (1, -\sin \varphi, 0) + \psi \left((1, -\sin \varphi, 0) - \left(-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, 1, 1\right) \right) = \\ &= \left(1 + \psi \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right), -\sin \varphi - \psi(1 + \sin \varphi), -\psi \right). \end{aligned}$$

17.62. $\mathbf{r} = (a(\cos v - u \sin v), a(\sin v + u \cos v), b(u + v))$.

17.63. $c^2(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)(z + c)^2$.

17.64. Будем считать, что в плоскости π заданы прямоугольные декартовы координаты (ξ, η) . Тогда уравнение кривой $\rho = \rho(u)$ можно записать в координатной форме: $\xi = \xi(u)$, $\eta = \eta(u)$. Кроме того, предположим, что прямая AB представляет собой ось z в пространстве и что по ней скользит ось η движущейся плоскости π . При надлежащем выборе осей x, y и положительных направлений на координатных осях имеем:

$$\mathbf{R}(u, v) = (\xi(u) \cos v, \xi(u) \sin v, \eta(u) + av).$$

17.65. $\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{r}(u) + a\mathbf{n}(u) \cos v + a\mathbf{b}(u) \sin v$, где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ — главная нормаль и бинормаль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$; точки (u, v) и $(u, v + 2\pi)$ отождествляются.

17.66. Возьмем точку пересечения нормалей за начало отсчета радиус-векторов. Тогда $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_u \rangle = 0$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}_v \rangle = 0$, откуда $|\mathbf{r}|^2 = \text{const}$. Следовательно, данная поверхность — сфера или часть сферы.

17.67. Объем тетраэдра равен $9a^3/2$.

17.68. Касательная плоскость: $\frac{x}{u \sin v} + \frac{y}{u \cos v} + \frac{z}{\sqrt{a^2 - u^2}} = a^2$. Искомая сумма равна a^6 .

17.69. Уравнения линии пересечения в криволинейных координатах: $u = u_1 \cos(v + v_1) / \cos 2v_1$ (кроме образующей $v = v_1$), где u_1, v_1 — координаты точки касания; параметрические уравнения той же линии в декартовых координатах:

$$x = u_1 \frac{\cos(v + v_1)}{\cos 2v_1} \cos v, \quad y = u_1 \frac{\cos(v + v_1)}{\cos 2v_1} \sin v, \quad z = a \sin 2v.$$

Уравнение ее проекции на плоскость xy :

$$x^2 + y^2 = \frac{u_1^2}{\cos 2v_1} (x \cos v_1 - y \sin v_1).$$

Поскольку проекция есть окружность, то сама линия (плоская линия) есть эллипс.

17.70. Уравнение касательной плоскости:

$$Z - xf = \left(f - \frac{y}{x}f'\right)(X - x) + (Y - y)f'$$

или $Z = \left(f - \frac{y}{x}f'\right)X + Yf'$, т.е. все касательные плоскости проходят через одну точку — начало координат. Впрочем, это ясно и из того, что данное уравнение определяет конус с вершиной в начале координат (z — однородная функция от x и y).

17.71. Касательная плоскость: $kx \sin u - ky \cos u + vz - kuv = 0$; нормаль: $\mathbf{r} = (v \cos u + \lambda k \sin u, v \sin u - \lambda k \cos u, ku + \lambda v)$.

$$\text{17.72. } \frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3.$$

17.73. Пусть уравнение кривой γ имеет вид $\rho = \rho(s)$. Уравнение поверхности: $\mathbf{r} = \rho + \lambda \mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ — единичный вектор, касательный к кривой γ . Находим:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{v} + \lambda \mathbf{k}\mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \lambda \mathbf{k}\mathbf{b};$$

при $s = \text{const}$ (т.е. в точках одной и той же касательной) этот вектор имеет неизменное направление (ибо тогда $\mathbf{b} = \text{const}$). Отсюда также следует, что касательной плоскостью к такой поверхности во всех точках кривой γ является соприкасающаяся плоскость этой кривой.

17.74. Уравнение поверхности: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \lambda \mathbf{n}$;

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{v} + \lambda(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = (1 - \lambda k)\mathbf{b} - \lambda \kappa \mathbf{v}.$$

Уравнение касательной плоскости: $\langle \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho} - \lambda \mathbf{n}, \mathbf{b} - \lambda k\mathbf{b} - \lambda \kappa \mathbf{v} \rangle = 0$, или $\langle \mathbf{R}, \mathbf{b} - \lambda \kappa \mathbf{v} \rangle - \langle \boldsymbol{\rho}, \mathbf{b} - \lambda \kappa \mathbf{v} \rangle + \lambda^2 \kappa = 0$. Уравнение нормали: $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \lambda \mathbf{n} + \xi(\mathbf{b} - \lambda \kappa \mathbf{v})$.

17.75. Уравнение поверхности: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \lambda \mathbf{b}$;

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{v} - \lambda \kappa \mathbf{n}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{b}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = -\mathbf{n} - \lambda \kappa \mathbf{v}.$$

Уравнение касательной плоскости: $\langle \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho} - \lambda \mathbf{b}, \mathbf{n} + \lambda \kappa \mathbf{v} \rangle = 0$, или $\langle \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{n} + \lambda \kappa \mathbf{v} \rangle = 0$. Уравнение нормали: $\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + \lambda \mathbf{b} + \xi(\mathbf{n} + \lambda \kappa \mathbf{v})$.

17.77. Если $\mathbf{a}$ — направляющий вектор заданной прямой и начало радиус-векторов взято на этой прямой, то векторы $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ лежат в одной плоскости и

$$\left\langle \mathbf{r}, \mathbf{a} \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \right\rangle = 0.$$

Отсюда

$$\left\langle \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\rangle \left\langle \mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\rangle - \left\langle \mathbf{r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\rangle \left\langle \mathbf{a}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\rangle = 0.$$

Но это равенство можно записать в виде равенства нулю функционального определителя:

$$\frac{\partial |\mathbf{r}|^2}{\partial u} \frac{\partial \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle}{\partial v} - \frac{\partial |\mathbf{r}|^2}{\partial v} \frac{\partial \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle}{\partial u} = 0.$$

Отсюда следует, что между величинами $|\mathbf{r}|^2$ и $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle$ существует функциональная зависимость $|\mathbf{r}|^2 = f(\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle)$. Выбирая ось Oz вдоль вектора $\mathbf{a}$, получаем поверхность вращения $x^2 + y^2 = f(z)$.

17.80. Огибающая: $4z^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 1$; ребро возврата мнимо.

17.81. Огибающая: $x^2 + \frac{a^2}{a^2 + b^2} y^2 + z^2 = a^2$.

17.82. Огибающая: $(x^2 + y^2 + z^2 - x)^2 = x^2 + y^2$; ребро возврата вырождается в точку $(0, 0, 0)$.

17.83. Взяв уравнения парабол в виде $y^2 = 2px$, $z = 0$ и $y^2 = 2qz$, $x = 0$, получим уравнение огибающей в виде $y^2 = 2px + 2qz$ — параболический цилиндр с параметром $\sqrt{p^2 + q^2}$.

17.84. Дифференцируя выражение $|\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}|^2 = a^2$ по s , получим $\langle \mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Отсюда $\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho} = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{n}$. Так как $|\mathbf{R} - \boldsymbol{\rho}|^2 = a^2$, то $\lambda^2 + \mu^2 = a^2$ и можно положить $\lambda = a \cos \varphi$, $\mu = a \sin \varphi$. Таким образом, уравнение огибающей:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\rho} + a(\mathbf{b} \cos \varphi + \mathbf{n} \sin \varphi).$$

17.85. Ребро возврата представляет собой кривую, точки которой получаются при пересечении осей кривизны кривой $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(s)$ с соответствующими сферами данного семейства сфер.

17.86. Уравнение семейства: $(x - b \cos \varphi)^2 + y - b \sin^2 \varphi + z^2 - a^2 = 0$. Огибающая — тор (поверхность четвертого порядка):

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Это уравнение получается при исключении φ из уравнений $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial s} \varphi = 0$. Ребро возврата в случае $a > b$ вырождается в две точки $(0, 0, \pm\sqrt{a^2 - b^2})$, а в случае $a = b$ вырождается в одну точку $(0, 0, 0)$.

17.87. Уравнение семейства: $x^2 + y^2 + z^2 - 2u^3x - 2u^2y - 2uz = 0$. Исключая u из этого уравнения и уравнения $3u^2x + 2uy + z = 0$, найдем огибающую:

$$3x(9x(x^2 + y^2 + z^2) - 2zy)^2 + 2y(9x(x^2 + y^2 + z^2) - 2zy) - \\ - (12xz - 4y^2) + z(12xz - 4y^2)^2 = 0.$$

Ребро возврата найдем, присоединяя к двум указанным выше уравнениям еще уравнение $6ux + 2y = 0$. Отсюда $u = -y/3x$, и уравнение ребра возврата:

$$27x^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4y^3 + 18xyz = 0, \quad y^2 - 3xz = 0.$$

Ребро возврата можно получить и в параметрической форме:

$$\mathbf{r} = \left(\frac{2u^3}{9u^4 + 9u^2 + 1}, \frac{-6u^4}{9u^4 + 9u^2 + 1}, \frac{6u^5}{9u^4 + 9u^2 + 1} \right).$$

17.88. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = l^{2/3}$.

17.89. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

17.90. $xyz = 2a^3/9$.

17.91. Огибающая: $y^2 = 4xz$; ребро возврата вырождается в точку, совпадающую с началом координат.

17.92. Ребро возврата — винтовая линия:

$$x = C \cos \alpha, \quad y = C \sin \alpha, \quad z = C\alpha.$$

17.93. Пусть $\rho = \rho(s)$ — уравнение данной кривой. Уравнение семейства соприкасающихся плоскостей $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{b} \rangle = 0$. Дифференцируя по s , получим $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{v} \rangle = 0$. Характеристикой является касательная: $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{b} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{n} \rangle = 0$. Огибающая: $\mathbf{r} = \rho + \lambda \mathbf{v}$ — поверхность, образованная касательными к данной кривой. Дифференцируя соотношение $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{n} \rangle = 0$ еще раз, получим $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{b} \rangle = 0$. Отсюда и из соотношений $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{b} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{r} - \rho, \mathbf{n} \rangle = 0$ имеем $\mathbf{r} = \rho$, т.е. ребром возврата является данная кривая.

17.94. Характеристики — оси кривизны данной кривой. Огибающая — поверхность, образованная осями кривизны. Ребро возврата — кривая, описываемая центрами соприкасающихся сфер данной кривой.

17.95. $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}' \rangle + D' = 0$, $\mathbf{r} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{n}' + \lambda \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$, $\alpha = \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = -D$, $\beta = \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}' \rangle}{|\mathbf{n}'|^2} = -\frac{D'}{|\mathbf{n}'|^2}$. Уравнение огибающей: $\mathbf{r} = -D\mathbf{n} - \frac{D'\mathbf{n}'}{|\mathbf{n}'|^2} + \lambda \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$ (параметры u и λ). Характеристики — прямые $u = \text{const}$. Ребро возврата определим, разрешая уравнения $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}' \rangle + D' = 0$, $\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}'' \rangle + D'' = 0$ относительно $\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle (\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'') + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}' \rangle (\mathbf{n}'' \times \mathbf{n}) + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n}'' \rangle (\mathbf{n} \times \mathbf{n}')}{(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}'')} = \\ &= -\frac{D\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'' + D'\mathbf{n}'' \times \mathbf{n} + D''\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{(\mathbf{n}, \mathbf{n}', \mathbf{n}'')}. \end{aligned}$$

17.96. Огибающая семейства плоскостей, касательных к обоим парабололам. Уравнение семейства:

$$X\alpha - 2aY - \left(\frac{\alpha^2}{2b} + \frac{4a^3}{b\alpha} \right) Z + \frac{4a^3}{\alpha} = 0,$$

где α — параметр семейства.

17.97. Вектор нормали $\mathbf{n} = (u + v)(\mathbf{i} \sin v - \mathbf{j} \cos v + \mathbf{k})$ параллелен вектору $\mathbf{i} \sin v - \mathbf{j} \cos v + \mathbf{k}$, который не меняется, если параметр v сохраняет постоянное значение. Отсюда линии $v = \text{const}$ — прямолинейные образующие поверхности, а линия $u + v = 0$ — ребро возврата, так как во всякой ее точке модуль вектора $\mathbf{n}$ обращается в нуль.

17.99. Уравнение кривой: $u = \text{const}$; ребро возврата:

$$\begin{aligned}x &= 2(a-b)u \cos^2 v, & y &= 2(a-b)u \sin^3 v, \\z &= 2u^2((a-2b) \cos^2 v + (b-2a) \sin^2 v).\end{aligned}$$

17.100. $x = 3t$, $y = -3t^2/b$, $z = -t^3/ab$.

17.101. Искомая развертывающаяся поверхность огибает семейство плоскостей

$$Xx + Y\sqrt{a^2 - x^2} + Z\sqrt{\frac{a^4}{b^2} - x^2} = a^2,$$

где x — параметр семейства.

18.1. а) $\frac{4am(1+m)}{1+2m} \sin \frac{t}{2}$; б) $\frac{a(y^4 - 2by^3 + a^2b^2)^{3/2}}{y^3|2a^2b - y^3 - 3by^2|}$.

18.2. а) $|\cos x|$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{a\pi}$; г) $\frac{3}{8a|\sin(t/2)|}$.

18.3. а) $\frac{2+\varphi^2}{a(1+\varphi^2)^{3/2}}$; б) $\frac{k(k+1)+\varphi^2}{a\varphi^{k-1}(k^2+\varphi^2)^{3/2}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$.

18.4. а) $\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$.

18.5. $k = \frac{1}{4}\sqrt{1+\sin^2 \frac{t}{2}}$.

18.6. а) $\mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(\sin 4t + 2 \sin 2t), -\frac{a}{2}(\cos 4t + 2 \cos 2t)\right)$;

б) $\mathbf{r} = (a(2t + \sin 2t), a(2 - \cos 2t))$ — циклоида;

в) $\mathbf{r} = \left(a \cos t, a \ln \left(\operatorname{tg} \left|\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right|\right) - a \sin t\right)$ — трактриса.

18.10. $9x - 27y - z + 7 = 0$.

18.11. Для соприкасающейся плоскости находим уравнение $sx - ay = bc - ad$, не содержащее параметра u . Подставляя в это уравнение выражение для x, y через u , получаем тождество, откуда заключаем, что кривая действительно лежит в своей соприкасающейся плоскости.

18.12. Соприкасающаяся плоскость: $6x - 8y - z + 3 = 0$. Главная нормаль: $x = 1 - 31\lambda$, $y = 1 - 26\lambda$, $z = 1 + 22\lambda$. Бинормаль: $x = 1 + 6\lambda$, $y = 1 - 8\lambda$, $z = 1 - \lambda$.

18.13. $y = 1$.

18.14. Касательная: $\mathbf{r} = (a \cos t - a\lambda \sin t, a \sin t + a\lambda \cos t, b(\lambda + t))$. Нормальная плоскость: $ax \sin t - ay \cos t - bz + b^2 t = 0$. Бинормаль: $\mathbf{r} = (a \cos t + b\lambda \sin t, a \sin t - b\lambda \cos t, bt + a\lambda)$. Соприкасающаяся плоскость: $bx \sin t - by \cos t + az - abt = 0$. Главная нормаль: $\mathbf{r} = ((a + \lambda) \cos t, (a + \lambda) \sin t, bt)$.

18.15. Касательная: $x = 1 + 2\lambda, y = -\lambda, z = 1 + 3\lambda$. Нормальная плоскость: $2x - y + 3z - 5 = 0$. Бинормаль: $x = 1 - 3\lambda, y = -3\lambda, z = 1 + \lambda$. Соприкасающаяся плоскость: $3x + 3y - z - 2 = 0$. Главная нормаль: $x = 1 - 8\lambda, y = 11\lambda, z = 1 + 9\lambda$.

18.17. а) $d \sim \frac{1}{6} k_0 \kappa_0 s^3, s \rightarrow 0$; б) $d \sim \frac{1}{2} k_0^2 s^2, s \rightarrow 0$.

18.18. $R = \frac{x}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{2x^2} \right)^2, r = -\frac{x}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{2x^2} \right)^2$.

18.19. $v = Ce^{\frac{u \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1+k^2}}}$.

18.20. а) Пусть $\mathbf{a}$ — единичный вектор фиксированного направления. Тогда $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \cos v$ ($v = \text{const}$). Так как $\frac{d}{ds} \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{v}} \rangle = 0$, то $k \langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Исключая случай, когда $k = 0$ (прямые), получаем $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Следовательно, нормали перпендикулярны фиксированному направлению. Обратно, если $\mathbf{n}$ перпендикулярен фиксированному направлению, то $\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \text{const}$.

б) Пусть $\kappa \neq 0$. Из $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$ и третьей формулы Френе вытекает $\langle \mathbf{a}, \dot{\mathbf{b}} \rangle = 0$, откуда $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{const}$. Обратно, дифференцируя это равенство, получаем $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$.

в) Дифференцируя равенство $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$, получаем $k \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = \kappa \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, откуда $\frac{k}{\kappa} = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle} = \text{const}$. Обратно, из первой и третьей формул Френе следует $\frac{\dot{\mathbf{v}}}{k} + \frac{\dot{\mathbf{b}}}{\kappa} = 0$, откуда $\frac{\kappa}{k} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{b}} = 0, \frac{\kappa}{k} \mathbf{v} + \mathbf{b} = \text{const} = \mathbf{a}$. Умножая скалярно на $\mathbf{n}$, получаем $\langle \mathbf{a}, \mathbf{n} \rangle = 0$.

18.21. Показать, что для этой кривой $\frac{k}{\kappa} = \text{const}$, и воспользоваться задачей 18.20.

18.22. Показать, что $\frac{k}{\kappa} = 1$, и воспользоваться задачей 18.20. Искомый вектор $\mathbf{e} = \mathbf{v} + \mathbf{b} = (1, 0, 1)$.

18.24. Согласно задаче 18.20, $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b}\right) = 0$, поэтому сферическая индикатриса является плоской кривой. А так как она лежит на сфере, то она является окружностью.

18.33. а) Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — уравнение кривой γ в натуральном параметре. Тогда кривую γ^* можно задать в виде $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}(s) + a(s)\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — главная нормаль к кривой γ , а $a(s)$ — некоторая скалярная функция. Ясно, что, вообще говоря, s не является натуральным параметром на кривой γ^* . Имеем $\frac{d}{ds}\mathbf{r}^* = \mathbf{v} + \mathbf{n}\frac{d}{ds}a + a(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b})$. Далее, из условия вытекает, что $\left\langle \frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^* \right\rangle$. Так как вектор $\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*$ параллелен вектору $\mathbf{v}^*$, то $\left\langle \frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \mathbf{n}^* \right\rangle = 0$. Итак, доказано, что $\left\langle \frac{d}{ds}\mathbf{r}^*, \mathbf{n} \right\rangle = 0$. Подставляя выражение для $\frac{d}{ds}\mathbf{r}^*$, получаем, что $\frac{d}{ds}a = 0$, т. е. $a = \text{const}$.
б) Из решения предыдущего пункта следует, что

$$\frac{d}{ds}\mathbf{r}^* = \mathbf{v}(1 - ak) + a\kappa\mathbf{b}.$$

Продифференцируем это равенство по s и воспользуемся формулой Френе. Получим

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}^* = k\mathbf{n}(1 - ak) + \mathbf{v}\frac{d}{ds}(1 - ak) + a\left(\frac{d}{ds}\kappa\right)\mathbf{b} - a\kappa^2\mathbf{n}.$$

Заметим, что в соприкасающейся плоскости кривой γ^* лежат векторы $\frac{d}{ds}\mathbf{r}$, $\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}$, $\mathbf{n}^*$. Но по условию $\mathbf{n} = \pm\mathbf{n}^*$, поэтому векторы $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{n} = (1 - ak)\mathbf{b} - a\kappa\mathbf{v}$, $\left(\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{n} = \left(\frac{d}{ds}(1 - ak)\right)\mathbf{b} - a\left(\frac{d}{ds}\kappa\right)\mathbf{v}$ коллинеарны. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\frac{(d/ds)(1 - ak)}{a - ak} = \frac{a(d/ds)\kappa}{a\kappa}$, что эквивалентно равенству $\frac{d}{ds}\left(\frac{1 - ak}{\kappa}\right) = 0$. Отсюда $\frac{1 - ak}{\kappa} = b = \text{const}$, т. е. $ak + b\kappa = 1$, где a и b — некоторые постоянные.

18.35. Пусть исходная кривая задана в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Покажем, что в качестве кривой, составляющей с исходной пару Бертрана, можно взять кривую $\rho(s) = \mathbf{r}(s) + a\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — вектор нормали к исходной кривой.

Легко показать, что $\frac{d}{ds}\rho = (1 - ak)v(s) + a\kappa b(s)$ перпендикулярен $n(s)$. Далее, легко проверить, что

$$\frac{d^2}{ds^2}\rho = (1 - ak)kv + a\left(\frac{d}{ds}k\right)v + a\frac{d}{ds}\kappa b - a\kappa^2 n.$$

Для доказательства того факта, что $\rho(s) = r(s) + an(s)$ составляет с исходной кривой пару Бертрана, достаточно показать, что векторы $\frac{d}{ds}\rho$, $\frac{d^2}{ds^2}\rho$ и n компланарны, т.е. параллельны одной плоскости. Для этого достаточно проверить, что векторы $\left(\frac{d}{ds}\rho\right) \times n$ и $\left(\frac{d^2}{ds^2}\rho\right) \times n$ пропорциональны. Легко показать, что

$$\left(\frac{d}{ds}\rho\right) \times n = (1 - ak)b - a\kappa v, \quad \left(\frac{d^2}{ds^2}\rho\right) \times n = -a\left(\frac{d}{ds}k\right)b - \left(\frac{d}{ds}\kappa\right)av.$$

Так как $\frac{1 - ak}{\kappa} = b = \text{const}$, то $\frac{d}{ds}\left(\frac{1 - ak}{\kappa}\right) = 0$. Это равенство можно переписать в виде $\frac{-a(d/ds)k}{1 - ak} = \frac{a(d/ds)\kappa}{a\kappa}$. Отсюда следует, что векторы $\left(\frac{d}{ds}\rho\right) \times n$ и $\left(\frac{d^2}{ds^2}\rho\right) \times n$ пропорциональны.

18.36. Воспользоваться задачей 18.35. Положить $b = 0$, $a = 1/k$.

18.39. Пусть кривая γ задана в натуральной параметризации $r = r(s)$. Тогда кривая γ^* задается в виде $\rho(s) = r(s) + \lambda b(s)$. Так как бинормаль кривой γ^* параллельна b , то $\left\langle b, \frac{d}{ds}\rho \right\rangle = 0$. Отсюда $\frac{d}{ds}\lambda = 0$, т.е. λ — постоянная величина. Поэтому $\frac{d}{ds}\rho = v - \lambda\kappa n$ и $\frac{d^2}{ds^2}\rho = \kappa n - \dot{\lambda}\kappa n - \lambda\dot{\kappa}n + \lambda\kappa kv - \lambda\kappa^2 b$. Заметим теперь, что $\left\langle \frac{d^2}{ds^2}\rho, b \right\rangle = 0$, поэтому $\lambda\kappa^2 = 0$. Так как кривые γ и γ^* различны, то $\kappa = 0$.

18.40. Пусть $r = r(s)$ — натуральная параметризация кривой γ . Запишем уравнение кривой γ^* в виде $\rho(s) = r(s) + \lambda(s)n(s)$, где $n(s)$ — вектор главной нормали кривой γ , а $\lambda(s)$ — некоторая скалярная функция. Имеем $\frac{d}{ds}\rho = v + \lambda(-kv + \kappa b) + \dot{\lambda}n$. Так как $\left\langle \frac{d}{ds}\rho, b^* \right\rangle = 0$, то $\left\langle \frac{d}{ds}\rho, n \right\rangle = 0$. Отсюда $\lambda = \text{const}$ и $\frac{d}{ds}\rho = v + \lambda(-kv + \kappa b)$. Далее,

вектор $\frac{d^2}{ds^2}\rho = -\lambda\dot{\kappa}v + (k - \lambda k^2 - \lambda\kappa^2)n + \lambda\dot{\kappa}b$ ортогонален вектору $b^* = n$. Следовательно, $k - \lambda k^2 - \lambda\kappa^2 = 0$, т. е. $k = \lambda(k^2 + \kappa^2)$.

18.54. Пусть k и κ — соответственно кривизна и кручение исходной кривой, параметризованной натуральным параметром s , а k^* и κ^* — соответственно кривизна и кручение ее эволюты. Тогда

$$k^* = \frac{\sqrt{k^2 + \kappa^2}}{|sk|}, \quad \kappa^* = \frac{\kappa^2}{sk(k^2 + \kappa^2)} \frac{d}{ds} \left(\frac{k}{\kappa} \right).$$

18.55. У линий откоса отношение $\frac{k}{\kappa}$ постоянно. Отсюда по задаче 18.54 получаем требуемое.

18.56. Уравнение подеры будем искать в виде $\rho(t) = r(t) + \lambda(t)r'(t)$. Скалярную функцию λ найдем из условия $\langle \rho, r' \rangle = 0$. Имеем $\lambda = -\frac{\langle r, r' \rangle}{|r'|^2}$. Отсюда $\rho(t) = r - r' \frac{\langle r, r' \rangle}{|r'|^2}$.

18.57. $x = a \left(\cos t + \frac{h^2 t}{a^2 + h^2} \sin t \right)$, $y = a \left(\sin t - \frac{h^2 t}{a^2 + h^2} \cos t \right)$, $z = \frac{a^2 h t}{a^2 + h^2}$.

18.65. а) Единичный вектор бинормали $b = (-1, 0, 0)$ параллелен оси Ox . Соприкасающаяся плоскость кривой в рассматриваемой точке совпадает с плоскостью xOy . Центр соприкасающейся окружности находится в точке $(0, 1, 0)$. Радиус этой окружности равен 1. Соприкасающуюся окружность можно задать уравнениями $(y - 1)^2 + z^2 = 1$, $x = 0$;

$$\text{б) } \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = \frac{81}{4}, \quad 2x - 2y - z - 3 = 0.$$

18.66. Воспользуемся задачей 18.64. Радиус кривизны кривой равен

$$R = \frac{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}{(36t^4 + 36t^2 + 4)^{1/2}}.$$

Далее,

$$\dot{R} = \frac{dR}{ds} = \frac{dR}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad \frac{ds}{dt} = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{1/2}.$$

Отсюда получаем, что радиус соприкасающейся сферы равен $\frac{1}{2}$.

18.67. а) $\frac{a^2 + h^2}{a}$; б) $(e^t + e^{-t})^2 \sqrt{\frac{1}{2} + (e^t - e^{-t})^2}$; в) $3\sqrt{2}e^t$.

18.69. Винтовая линия, которая лежит на цилиндре $x^2 + y^2 = \frac{h^4}{a^2}$ и имеет шаг 1.

18.72. Пусть рассматриваемая кривая имеет параметризацию $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \begin{vmatrix} x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}.$$

Разложим $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ в ряды Тейлора и в выражении для функции $\varphi(t)$ коэффициент при $(t - t_0)^3$ приравняем к нулю. Получим

$$\begin{vmatrix} x'''(t_0) & y'''(t_0) & z'''(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, кручение рассматриваемой кривой равно 0.

$$\mathbf{18.74.} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle}{2k|\mathbf{r}|^2 + \langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle} (\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} - \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}).$$

$$\mathbf{18.75.} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}}{2|\mathbf{r}|^2(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') + (\mathbf{r}' \times \mathbf{r})|\mathbf{r}'|^2} (|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}|[\mathbf{r}'] - \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle \mathbf{r}').$$

$$\mathbf{18.76.} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{\langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle}{2k} (\mathbf{n} \langle \mathbf{e}, \mathbf{n} \rangle - \mathbf{v} \langle \mathbf{e}, \mathbf{v} \rangle). \text{ Если кривая задана уравнением } \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \text{ то}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{e}}{2|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|} (|\mathbf{r}' \times \mathbf{e}|[\mathbf{r}'] - \langle \mathbf{r}', \mathbf{e} \rangle \mathbf{r}').$$

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то

$$X = x - \frac{(m - lf'(x))^2}{2f''(x)} f'(x) - \frac{(m - lf'(x))(l + mf'(x))}{2f''(x)},$$

$$Y = f(x) + \frac{(m - lf'(x))^2}{2f''(x)} - \frac{(m - lf'(x))(l + mf'(x))}{2f''(x)} f'(x),$$

где $\mathbf{e} = (l, m)$.

18.78. а) Пусть эллипс задан в параметрическом виде: $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$. Тогда эволюта эллипса задается в виде

$$x(t) = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad y(t) = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Радиус кривизны равен $\frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$. Чтобы найти уравнение эвольвенты эллипса, запишем выражение для длины дуги эллипса:

$$s(t) = \int \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Заметим, что этот интеграл в элементарных функциях не берется. Отсюда получаем уравнение эвольвенты:

$$x = a \cos t + (s(t) - C) \frac{a \sin t}{s'(t)}, \quad y = b \sin t - (s(t) - C) \frac{b \cos t}{s'(t)}.$$

Здесь C — произвольная постоянная.

б) Пусть гипербола параметризована следующим образом: $x(t) = a \operatorname{ch} t$, $y(t) = b \operatorname{sh} t$. Тогда уравнение эволюты имеет вид

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a} \operatorname{ch}^3 t, \quad y = -\frac{a^2 + b^2}{b} \operatorname{sh}^3 t.$$

Радиус кривизны гиперболы равен $\frac{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t)^{3/2}}{ab}$.

в) Параметризуем параболу следующим образом: $x(t) = t$, $y(t) = \frac{t^2}{2p}$. Эволюта задается в виде $x = -\frac{t^3}{p^2}$, $y = p + \frac{3t^2}{2p}$. Радиус кривизны

параболы равен $p \left(1 + \frac{t^2}{p^2}\right)^{3/2}$.

г) Эволюта этой кривой задается в виде $x = -a\pi + a(t' - \sin t')$, $y = -2a + a(1 - \cos t')$, $t' = t + \pi$. Радиус кривизны данной кривой равен $R = 4a \left| \sin \frac{t}{2} \right|$.

д) У к а з а н и е. Перейти к декартовым координатам.

Уравнение эволюты имеет следующий вид: $x = \frac{a}{3}(\cos \varphi - \cos^2 t + 2)$, $y = \frac{a}{3}(1 - \cos \varphi) \sin \varphi$. Эта кривая является кардиоидой. Чтобы убедиться в этом, достаточно сделать замену $\varphi = \pi - t$ и произвести замену координат $X = -\left(x - \frac{2}{3}a\right)$, $Y = y$. Радиус кривизны исходной кривой равен $\frac{4}{3}a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$.

е) Эволюта: $x = x - a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $y = 2a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Радиус кривизны: $a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$. Эвольвента цепной линии, проходящая через ее вершину, задается в виде $\left(a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right), a \sin t\right)$, т.е. является трактрисой.

ж) Эволюта:

$$x = \frac{a\varphi \cos \varphi}{\varphi^2 + 2} - \frac{a(\varphi^2)}{\varphi^2 + 2} \sin \varphi, \quad y = \frac{a\varphi \sin \varphi}{\varphi^2 + 2} + \frac{a(\varphi^2 + 1)}{\varphi^2 + 2} \cos \varphi.$$

Радиус кривизны: $\frac{a(1 + \varphi^2)^{3/2}}{2 + \varphi^2}.$

Эвольвента:

$$x = a\varphi \cos \varphi - (C + s) \frac{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}},$$

$$y = a\varphi \sin \varphi - (C + s) \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 + \varphi^2}},$$

где $s = \frac{a}{2}(\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}))$, а C — произвольная постоянная.

18.79. Эволюта логарифмической спирали задается в виде

$$x = -a^\varphi \ln a \sin \varphi, \quad y = a^\varphi \ln a \cos \varphi.$$

Легко проверить, что эти формулы можно переписать следующим образом:

$$x = (a^{-\pi/2} \ln a) a^{\pi/2 + \varphi} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right),$$

$$y = (a^{-\pi/2} \ln a) a^{\pi/2 + \varphi} \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right).$$

Теперь легко проверить, что эти уравнения задают логарифмическую спираль с тем же самым параметром a , повернутую относительно исходной на угол $\frac{\pi}{2}$.

18.82. $x = a \cos t + (at - C) \sin t$, $y = a \sin t - (at - C) \cos t$, где C — произвольная постоянная.

18.83. $8r \sin \frac{t}{2}.$

18.85. Зададим астроиду параметрически: $x = R \cos^3 \frac{t}{4}$, $y = R \sin^3 \frac{t}{4}$.

Эволюта:

$$x = R \cos \frac{t}{4} \left(\cos^2 \frac{t}{4} + 3 \sin^2 \frac{t}{2} \right), \quad y = R \sin \frac{t}{4} \left(\sin^2 \frac{t}{4} + 3 \cos^2 \frac{t}{2} \right).$$

Ортогональным преобразованием $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$, т. е.

поворотом на угол $\frac{\pi}{4}$, уравнения эволюты приводятся к виду

$$x = 2R \cos^3 \left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4} \right), \quad y = 2R \sin^3 \left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4} \right).$$

18.88. Натуральные уравнения таких кривых: $k = \frac{1}{-s + C}$, где C — произвольная постоянная.

18.89. $\rho = \varphi(s)\varphi'(s)$ и $\sigma = \varphi(s) + \text{const.}$

18.92. Пусть кривая γ задана в натуральном параметре уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. В этом случае кривая γ^* задается уравнением $\rho(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{1}{k}\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — вектор главной нормали к кривой γ . Заметим, что, вообще говоря, s не является натуральным параметром на кривой γ^* . Имеем:

$$\rho' = \frac{\kappa}{k}\mathbf{b}, \quad \rho'' = \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{k}\right) - \frac{\kappa^2}{k}\mathbf{n}, \quad \rho' \times \rho'' = \frac{\kappa^3}{k^2}\mathbf{v}.$$

Отсюда $k^* = k$, $\kappa^* = \frac{k^2}{\kappa}$.

18.94. $\frac{1}{6} \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}$; в частном случае: $\frac{1}{6}k|\kappa|$.

18.96. Показать, что асимптотическое направление не может быть перпендикулярно оси вращения.

18.110. Надо взять произвольную дугу винтовой линии с параллельными касательными в концевых точках и соединить эти точки плоской кривой. Концы дуги винтовой линии, конечно, сначала надо немного продлить так, чтобы кручение непрерывно перешло в нуль.

18.133. Воспользоваться формулой Гаусса–Бонне и формулой для прообраза формы площади сферы при гауссовом отображении.

19.1. Пусть a , b , c , x и β — катеты, гипотенуза, перпендикуляр на катет a и угол, противолежащий стороне b , соответственно. Тогда по теореме синусов

$$\text{sh } x = \text{sh } \frac{c}{2} \sin \beta,$$

а с другой стороны,

$$\text{sh } b = \text{sh } c \sin \beta, \quad 2 \text{sh } \frac{b}{2} \text{ch } \frac{b}{2} = 2 \text{sh } \frac{c}{2} \text{ch } \frac{c}{2} \sin \beta.$$

Таким образом, $\frac{\text{sh } x}{\text{sh } (b/2)} = \frac{\text{ch } (c/2)}{\text{ch } (b/2)}$. Остается заметить, что функции ch и sh возрастают на $\mathbb{R}_+$.

19.4. а) π ; б) $\pi/2$; в) $\pi/2$; г) $\pi/6$; д) $\pi/2$; е) $\pi/2$; ж) $\pi/4$.

19.5. $4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2}$.

19.7. $\pi/2$.

19.14. б) $ds^2 = \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$.

в) $\Gamma_{11}^1 = 2\Gamma_{12}^2 = 2\Gamma_{21}^2 = \frac{2x}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{22}^2 = 2\Gamma_{12}^1 = 2\Gamma_{21}^1 =$
 $= \frac{2y}{1-x^2-y^2}$, $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$.

д) Хорды и диаметры единичного круга.

19.16. Рассмотрим $\mathbb{R}_1^4$ с псевдоевклидовым скалярным произведением, заданным формой $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2$. Пусть C — конус $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$. Тогда $S^2 = C \cap \{w = -1\}$. Окружности на сфере S^2 — это сечения ее гиперплоскостями Π_i : $a_i x + b_i y + c_i z - d_i w = 0$, $i = 1, 2$. Пусть $\gamma_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$. Остается проверить, что $\cos \varphi = \frac{(\gamma_1, \gamma_2)}{|\gamma_1||\gamma_2|}$.

19.17. а) $\frac{1}{4} \left(v + \frac{1}{v} \right)^2 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 +$
 $+ \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \sin u \cos u \left(v - \frac{1}{v^3} \right) du dv +$
 $+ \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{v^2} \right)^2 (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) + c^2 \left(1 + \frac{1}{v^2} \right)^2 \right) dv^2;$

б) $\frac{1}{(u+v)^4} (a^2(v^2-1)^2 + 4b^2v^2 + c^2(v^2+1)^2) du^2 +$
 $+ 2(a^2(u^2-1)(v^2-1) - 4b^2uv + c^2(u^2+1)(v^2+1)) du dv +$
 $+ \frac{1}{(u+v)^4} (a^2(u^2-1)^2 + 4b^2u^2 + c^2(u^2+1)^2) dv^2;$

в) $\frac{1}{4} \left(v - \frac{1}{v} \right)^2 (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 +$
 $+ \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \sin u \cos u \left(v - \frac{1}{v^3} \right) du dv +$
 $+ \frac{1}{4} \left(\left(1 + \frac{1}{v^2} \right)^2 (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) + c^2 \left(1 - \frac{1}{v^2} \right)^2 \right) dv^2;$

$$\text{г)} (p \sin^2 u + q \cos^2 u) v^2 du^2 + 2(q - p) \sin u \cos u du dv + \\ + (p \cos^2 u + q \sin^2 u + v^2) dv^2;$$

$$\text{д)} (p + q + 4v^2) du^2 + 2(p - q + 4uv) du dv + (p + q + 4u^2) dv^2;$$

$$\text{е)} (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 + dv^2;$$

$$\text{ж)} \left(\frac{a^2}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2} \right)^2 + \frac{b^2}{4} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right)^2 \right) du^2 + dv^2.$$

19.21. Сфера: $ds^2 = du^2 + R^2 \cos^2(u/R) dv^2$.

Тор: $ds^2 = du^2 + \left(a + b \cos \frac{u}{b} \right)^2 dv^2$.

Катеноид: $ds^2 = du^2 + (a^2 + u^2) dv^2$.

Псевдосфера: $ds^2 = du^2 + e^{-2u/a} dv^2$.

У к а з а н и е. u — натуральный параметр меридиана.

19.22. $ds^2 = d\tilde{u}^2 + e^{-2\tilde{u}/a} d\tilde{v}^2$. Полагая $u = \tilde{v}$, $v = ae^{\tilde{u}/a}$, получаем $ds^2 = \frac{a^2}{v^2} (du^2 + dv^2)$.

19.26. Пусть $r = F(\rho)$ — искомая зависимость. Имеем:

$$ds^2 = (f'^2 + g'^2) dr^2 + f^2 d\varphi^2 = (f'^2 + g'^2) F'^2 d\rho^2 + f^2 d\varphi^2 = \\ = \Lambda^2 (du^2 + dv^2) = \Lambda^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2),$$

откуда получаем уравнение $\frac{\rho}{\rho'(r)} = \frac{f}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}$, решая которое, получаем искомую связь

$$\ln \rho = \int \frac{\sqrt{f'^2(r) + g'^2(r)}}{f(r)} dr.$$

Применение к катеноиду этой формулы дает $\rho = e^z$ и, положив $u = \rho \cos \varphi$, $v = \rho \sin \varphi$, получаем

$$x = \frac{1}{2} \left(u + \frac{u}{u^2 + v^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(w + \frac{1}{w} \right),$$

$$y = \frac{1}{2} \left(v + \frac{v}{u^2 + v^2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-iw + \frac{i}{w} \right),$$

$$z = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) = \operatorname{Re} \ln w, \quad w = u + iv, \quad 0 < |w| < \infty.$$

19.28. Пусть поверхность $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнениями $x_i = x_i(p, q)$, $i = 1, 2, 3$, а переменные p и q изменяются в некоторой области на

плоскости. Пусть функции $x_i = x_i(p, q)$ — вещественно-аналитические. Пару (p, q) можно рассматривать как координаты точки на поверхности M^2 . Кривая C на M^2 задается уравнениями

$$p = p(t), \quad q = q(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Элемент длины дуги выражается через вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$ds^2 = \langle d\mathbf{x}, d\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_p dp + \mathbf{x}_q dq, \mathbf{x}_p dp + \mathbf{x}_q dq \rangle,$$

или

$$ds^2 = \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p \rangle dp^2 + 2\langle \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \rangle dp dq + \langle \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q \rangle dq^2 = \\ = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2,$$

где $E = \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_p \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_p, \mathbf{x}_q \rangle$, $G = \langle \mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q \rangle$.

В силу того, что элемент длины ds^2 всегда положителен, $W^2 = EG - F^2$ также положителен. Найдем систему координат (u, v) с элементом дуги $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Имеем:

$$ds^2 = \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq \right) \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - iW}{\sqrt{E}} dq \right).$$

Предположим, что мы можем найти такой интегрирующий множитель $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, что

$$\sigma \left(\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq \right) = du + i dv.$$

Тогда

$$\bar{\sigma} \left(\sqrt{E} dp + \frac{F - iW}{\sqrt{E}} dq \right) = du - i dv$$

и, наконец, $|\sigma|^2 ds^2 = du^2 + dv^2$. Полагая $\sigma^2 = 1/\lambda$, мы получаем искомые изотермические координаты (u, v) . Таким образом, мы получили изотермические координаты, найдя интегрирующий множитель, который превращает выражение $\sqrt{E} dp + \frac{F + iW}{\sqrt{E}} dq$ в полный дифференциал. Дифференциал $du + i dv$ может быть записан в виде

$$du + i dv = \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq.$$

Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} = \sigma \sqrt{E}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} = \sigma \frac{F + iW}{\sqrt{E}}.$$

Исключая σ , получим

$$E \left(\frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) = (F + iW) \left(\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right),$$

или

$$E \frac{\partial u}{\partial q} = F \frac{\partial u}{\partial p} - W \frac{\partial v}{\partial p}, \quad E \frac{\partial v}{\partial q} = W \frac{\partial u}{\partial p} + F \frac{\partial v}{\partial p}.$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных $\partial v / \partial p$ и $\partial v / \partial q$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{F(\partial u / \partial p) - E(\partial u / \partial q)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{G(\partial u / \partial p) - F(\partial u / \partial q)}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (*)$$

Аналогично,

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E(\partial v / \partial q) - F(\partial v / \partial p)}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F(\partial v / \partial q) - G(\partial v / \partial p)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Следовательно, u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{F(\partial u / \partial p) - E(\partial u / \partial q)}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{F(\partial u / \partial q) - G(\partial u / \partial p)}{W} \right) = 0,$$

которое называется уравнением Бельтрами–Лапласа. Если известно второе семейство изотермических координат (x, y) в окрестности точки, то $ds^2 = \mu(dx^2 + dy^2)$. Используя координаты (x, y) вместо координат (p, q) , получаем $E = G = \mu$, $F = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Итак, получены уравнения Коши–Римана, откуда видно, что функции u и v являются сопряженными гармоническими функциями, а функция $f = u + iv$ — аналитической от $z = x + iy$. Уравнение Бельтрами принимает вид известного уравнения Лапласа $\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$. Говорят, что комплекснозначная функция $f(p, q)$, определенная на M^2 , называется *комплексным потенциалом* на M^2 , если ее действительная и мнимая части удовлетворяют уравнениям (*). Таким образом, действительная и мнимая части комплексного потенциала на многообразии M^2 дают изотермические координаты в окрестности каждой точки M^2 . Отметим, что эти координаты — локальные: они не определены, вообще говоря, на всем 2-мерном многообразии; при переходе от одной точки к другой комплексный потенциал будет меняться.

19.30. а) Рассмотрим на поверхности сферы некоторую кривую $\varphi = \varphi(\theta)$. При движении по этой кривой стрелка компаса образует с направлением движения угол ψ , определяемый соотношениями $\operatorname{tg} \psi = \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta}$. Здесь угол ψ измеряется от оси y по часовой стрелке. На карте мы получим $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi}$. Из этих двух соотношений следует

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta} &= -\frac{dx/d\theta}{dy/d\theta} = -\frac{\partial x/\partial \theta + (\partial x/\partial \varphi)(d\varphi/d\theta)}{\partial y/\partial \theta + (\partial y/\partial \varphi)(d\varphi/d\theta)}, \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} \right) \frac{d\varphi}{d\theta} \sin \theta &= -\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{d\theta}. \end{aligned}$$

Поскольку это соотношение должно выполняться в рассматриваемой точке при любом значении $d\varphi/d\theta$, то, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях производной $d\varphi/d\theta$ в правой и левой частях, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= 0, \quad y = y(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \quad x = x(\varphi), \\ -\sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Из двух предпоследних соотношений следует, что левая часть последнего зависит только от θ , в то время как правая зависит только от φ , поэтому обе части этого соотношения должны быть постоянными. Эту постоянную мы положим равной единице. Таким образом, в проекции Меркатора отображение задается формулами

$$x = \varphi, \quad y = -\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{б) } ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 = \sin^2 \theta (dx^2 + dy^2) = \frac{dx^2 + dy^2}{\operatorname{ch}^2 y}.$$

$$\text{19.31. } ds^2 = \frac{dv^2}{(1 - v^2/c^2)^2} + \frac{v^2 d\varphi^2}{1 - v^2/c^2}.$$

$$\text{19.32. } ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2.$$

$$\text{19.33. } ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}{(1 - \rho^2)^2}.$$

19.40. У к а з а н и е. Построить изометрическое отображение трехмерного пространства в четырехмерное в виде трехмерной цилиндрической поверхности.

19.49. Указание. Лучше доказывать обратный ход изгибания: поверхность вращения S вида

$$x = g(u) \cos \varphi, \quad y = g(u) \sin \varphi, \quad z = - \int \sqrt{1 - g'^2} du$$

с метрикой $ds^2 = du^2 + g^2(u) d\varphi^2$ изгибать в винтовые поверхности S_h вида $x = \sqrt{g^2 - h^2} \cos(\varphi + hF(u))$, $y = \sqrt{g^2 - h^2} \sin(\varphi + hF(u))$, $z = h\varphi + h^2 F(u) + G(u, h)$.

Решение. Пункты а) и б) очевидны. Для доказательства пункта в) вычислим сначала метрику общей винтовой поверхности. Получим $ds^2 = (1 + f'^2(u)) du^2 + 2hf'(u) du dv + (h^2 + u^2) dv^2$. Сделаем замену переменных $u = u(r)$, $v = H(r) + \varphi$. В новых переменных метрика представится в виде

$$ds^2 = (1 + f'^2(u(r))u'^2(r) + 2hf'(r)u'(r)H'(r) + (h^2 + u^2(r))H'^2(r)) dr^2 + 2(hf'(r)u'(r) + (h^2 + u^2(r))H'(r)) dr d\varphi + ((h^2 + u^2(r)) d\varphi^2.$$

Чтобы прийти к метрике вращения, достаточно потребовать, чтобы $hf'(r)u'(r) + (h^2 + u^2(r))H'(r) = 0$ и $(1 + f'^2(u(r))u'^2(r) + 2hf'(r)u'(r) \times H'(r) + (h^2 + u^2(r))H'^2(r)) = 1$. Получим требуемые замены:

$$r(u) = \int \sqrt{1 + \frac{u^2 f'^2(u)}{h^2 + u^2}} du, \quad H(r) = \int \frac{hf'(u) du}{h^2 + u^2},$$

где $u = u(r)$, приводящие к метрике вращения вида $ds^2 = dr^2 + G^2(r) d\varphi^2$, где $G^2 = h^2 + u^2(r)$.

Обратно, имея метрику вида $ds^2 = dr^2 + G^2(r) d\varphi^2$, легко так подобрать замены $r = r(u)$, $\varphi = v - H(r)$, чтобы получилась метрика общей винтовой поверхности с соответствующей функцией $f(u)$;

г) требуемое изгибание дается формулами

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{g^2(u) - h^2} \cos(\varphi + hF(u)), \\ y &= \sqrt{g^2(u) - h^2} \sin(\varphi + hF(u)), \\ z &= h\varphi + h^2 F(u) + G(u, l), \end{aligned}$$

где

$$F(u) = \int \frac{hR du}{g(g^2 - h^2)}, \quad G(u) = - \int \frac{gR du}{g^2 - h^2}$$

и $R^2 = g^2 - h^2 - g^2 g'^2$, а h — числовой параметр;

д) так как $x(u, v; t) = u \cos(v + t)$, $y(u, v; t) = u \sin(v + t)$, $z(u, v; t) = h(v + t) + f(u)$, то изгибание скольжения порождается винтовым движением всего пространства, состоящим из поступательного движения параллельно оси Oz с постоянным вектором скорости $\mathbf{v} = (0, 0, h)$ и вращательного движения вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью 1. Выпишите закон перехода от точки (x, y, z) к ее положению в момент t , выделив в нем поступательную и вращательную части.

19.50. Пусть $\gamma_0: \mathbf{u} = \mathbf{u}(t; u_0, v_0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t; u_0, v_0)$ — траектория точки (u_0, v_0) при изгибании скольжения. Пусть точка (u_0, v_0) соответствует значению $t = 0$. При изометрии, порожденной изгибанием скольжения при данном значении параметра t , каждая дуга кривой γ , начинающаяся в (u_0, v_0) , переходит в дугу той же кривой, начинающейся в ее точке, соответствующей значению t . Проведем через точки кривой γ_0 ортогональные к ней геодезические Γ_t и отметим на каждой из них точку $M_t(d)$ на некотором одинаковом расстоянии d от соответствующей точки на γ_0 . Так как окрестность точки (u_0, v_0) изометрична окрестности точки

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t; u_0, v_0), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(t; u_0, v_0)$$

при любом малом t , то при этой изометрии геодезической Γ_0 , выходящей из точки (u_0, v_0) ортогонально к γ_0 , соответствует геодезическая Γ_t , тоже выходящая ортогонально к γ_0 в соответствующей точке, и в силу сохранения расстояний, точке $M_0(d) \in \Gamma_0$ окажется соответствующей точка $M_t(d)$. Следовательно, при разных d точки $M_t(d)$ будут траекториями точек $M_0(d)$, которые мы обозначим через γ_d . В силу соответствия дуг на γ_d по изометрии, геодезическая кривизна каждой кривой γ_d постоянна. Введем полугеодезическую систему координат, взяв за семейство параллельных геодезических линии Γ_t и за ортогональные к ним линии — кривые γ_d . Для удобства записи оставим за новыми координатами прежние обозначения (u, v) . Форма длины в полугеодезических координатах имеет вид $ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2$, причем кривым γ_t соответствуют линии $u = \text{const}$. Вычисляя геодезическую кривизну k_g этих линий, получаем, что $k_g = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial u}$. Но так как она постоянна вдоль каждой линии $u = \text{const}$, то выражение $\frac{\partial \ln G}{\partial u}$ от v не зависит, следовательно, на самом деле $G(u, v) = G(u)$, а это и означает, что метрика ds^2 является метрикой вращения.

20.1. а) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-a \operatorname{ch} u \sin v, a \operatorname{ch} u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-ac \operatorname{ch}^2 u \cos v, -ac \operatorname{ch}^2 u \sin v, a^2 \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a \operatorname{ch} u \sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}} (-c \operatorname{ch} u \cos v, -c \operatorname{ch} u \sin v, a \operatorname{sh} u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (-a \operatorname{sh} u \sin v, a \operatorname{sh} u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-a \operatorname{ch} u \cos v, -a \operatorname{ch} u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}} ac (-\operatorname{ch}^2 u \cos^2 v - \\ - \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v + \operatorname{sh}^2 u) = -\frac{ac}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}} ((-c \operatorname{ch} u \cos v)(-a \operatorname{sh} u \sin v) + \\ + (-c \operatorname{ch} u \sin v)(a \operatorname{sh} u \cos v)) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}} ((-c \operatorname{ch} u \cos v)(-a \operatorname{ch} u \cos v) + \\ + (-c \operatorname{ch} u \sin v)(-a \operatorname{ch} u \sin v)) = \frac{ac \operatorname{ch}^2 u}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}}.$$

Ответ: $\frac{ac}{\sqrt{c^2 \operatorname{ch}^2 u + a^2 \operatorname{sh}^2 u}} (-du^2 + \operatorname{ch}^2 u dv^2).$

б) Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u),$$

$$\mathbf{r}_v = (-a \operatorname{sh} u \sin v, a \operatorname{sh} u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-ac \operatorname{sh}^2 u \cos v, -ac \operatorname{sh}^2 u \sin v, a^2 \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = a \operatorname{sh} u \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} (-c \operatorname{sh} u \cos v, -c \operatorname{sh} u \sin v, a \operatorname{ch} u),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (-a \operatorname{ch} u \sin v, a \operatorname{ch} u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-a \operatorname{sh} u \cos v, -a \operatorname{sh} u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} ac(-\operatorname{sh}^2 u \cos^2 v - \\ - \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v + \operatorname{ch}^2 u) = -\frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} ((-c \operatorname{sh} u \cos v)(-a \operatorname{ch} u \sin v) + \\ + (-c \operatorname{sh} u \sin v)(a \operatorname{ch} u \cos v)) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} ((-c \operatorname{sh} u \cos v)(-a \operatorname{sh} u \cos v) + \\ + (-c \operatorname{sh} u \sin v)(-a \operatorname{sh} u \sin v)) = \frac{ac \operatorname{sh}^2 u}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}}.$$

Ответ: $\frac{ac}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 u + c^2 \operatorname{sh}^2 u}} (du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2).$

20.2. Пусть для определенности $u > 0$. Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 2u), \quad \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u), \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = u\sqrt{1+4u^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} (-2u \cos v, -2u \sin v, 1),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 2), \quad \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} ((-2u \cos v)(-\sin v) + (-2u \sin v) \cos v) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} ((-2u \cos v)(-u \cos v) + \\ + (-2u \sin v)(-u \sin v)) = \frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}} (du^2 + u^2 dv^2).$

20.3. Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (0, 0, 1), \quad \mathbf{r}_v = (-R \sin v, R \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-R \cos v, -R \sin v, 0), \quad |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = R,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (-\cos v, -\sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \mathbf{r}_{uv} = (0, 0, 0), \mathbf{r}_{vv} = (-R \cos v, -R \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0, M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = ((-\cos v)(-R \cos v) + (-\sin v)(-R \sin v)) = R.$$

Ответ: $R dv^2$.

20.4. Пусть для определенности $u > 0$. Имеем:

$$\mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, k), \mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-k u \cos v, -k u \sin v, u), |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = u \sqrt{1 + k^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}(-k \cos v, -k \sin v, 1),$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0),$$

$$\mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}((-k \cos v)(-\sin v) + (-k \sin v) \cos v) = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}((-k \cos v)(-u \cos v) + (-k \sin v)(-u \sin v)) = \frac{ku}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Ответ: $\frac{ku dv^2}{\sqrt{1 + k^2}}$.

20.5. Имеем:

$$\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, f(v)), \mathbf{r}_u = (\cos v, \sin v, 0),$$

$$\mathbf{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, f'),$$

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1, F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0, G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = u^2 + (f')^2,$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (f' \sin v, -f' \cos v, u), |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{u^2 + (f')^2},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + (f')^2}}(f' \sin v, -f' \cos v, u), \mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0),$$

$$\mathbf{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0), \mathbf{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, f''),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0, M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-f'}{\sqrt{u^2 + (f')^2}},$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{uf''}{\sqrt{u^2 + (f')^2}}, K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{(f')^2}{(u^2 + (f')^2)^2}.$$

Таким образом, $K = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ и, следовательно, главные кривизны λ_1 и λ_2 имеют разные знаки.

20.6. Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ — репер Френе данной кривой. Тогда поверхность задается уравнением $\mathbf{r}(s, u) = \rho(s) + u\mathbf{b}(s)$, где s — натуральный параметр кривой ρ . Тогда $\mathbf{r}_s = \mathbf{v} - u\kappa\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_u = \mathbf{b}$, $E = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = 1 + u^2\kappa^2$,

$$F = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_u \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1, \quad \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u = -\mathbf{n} - u\kappa\mathbf{v}, \quad |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u| = \sqrt{1 + u^2\kappa^2},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u|} = -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2\kappa^2}}(u\kappa\mathbf{v} + \mathbf{n}),$$

$$\mathbf{r}_{ss} = k\mathbf{n} - u\dot{\kappa}\mathbf{n} - u\kappa(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) = u\kappa\kappa\mathbf{v} + (k - u\dot{\kappa})\mathbf{n} - u\kappa^2\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_{su} = -k\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_{uu} = 0, \quad L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = -\frac{ku^2\kappa^2 + k - u\dot{\kappa}}{\sqrt{1 + u^2\kappa^2}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{su}, \mathbf{m} \rangle = -\frac{\kappa}{\sqrt{1 + u^2\kappa^2}}, \quad N = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m} \rangle = 0,$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{\kappa^2}{(1 + u^2\kappa^2)^2},$$

$$H = \frac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2} = -\frac{k + ku^2\kappa^2 - u\dot{\kappa}}{(1 + u^2\kappa^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Ответ: } K = -\frac{\kappa^2}{(1 + u^2\kappa^2)^2}, \quad H = -\frac{k + ku^2\kappa^2 - u\dot{\kappa}}{(1 + u^2\kappa^2)^{3/2}}.$$

20.7. Пусть $\mathbf{v}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — репер Френе данной кривой. Тогда поверхность задается уравнением $\mathbf{r}(s, u) = \rho(s) + u\mathbf{n}(s)$, где s — натуральный параметр кривой ρ . Тогда $\mathbf{r}_s = \mathbf{v} - ku\mathbf{v} + u\kappa\mathbf{b} = (1 - ku)\mathbf{v} + u\kappa\mathbf{b}$, $\mathbf{r}_u = \mathbf{n}$, $E = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = (1 - ku)^2 + u^2\kappa^2$, $F = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_u \rangle = 0$, $G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1$,

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u = -u\kappa\mathbf{v} + (1 - ku)\mathbf{b}, \quad |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u| = \sqrt{(1 - ku)^2 + u^2\kappa^2},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - ku)^2 + u^2\kappa^2}}(-u\kappa\mathbf{v} + (1 - ku)\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{r}_{ss} = -u\dot{\kappa}\mathbf{v} + k(1 - ku)\mathbf{n} + u\dot{\kappa}\mathbf{b} - u\kappa^2\mathbf{n} =$$

$$= -\dot{\kappa}u\mathbf{v} + (k - k^2u - \kappa^2u)\mathbf{n} + \dot{\kappa}u\mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}_{su} = -k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_{uu} = 0, \quad L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = \frac{(\dot{\kappa}\kappa - k\dot{\kappa})u^2 + \dot{\kappa}u}{\sqrt{(1 - ku)^2 + u^2\kappa^2}},$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{su}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\kappa}{\sqrt{(1 - ku)^2 + u^2\kappa^2}}, \quad N = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m} \rangle = 0,$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{\kappa^2}{((1 - ku)^2 + u^2\kappa^2)^2},$$

$$H = \frac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2} = \frac{(\dot{\kappa}\kappa - k\dot{\kappa})u^2 + \dot{\kappa}u}{((1 - ku)^2 + u^2\kappa^2)^{3/2}}.$$

$$\text{Ответ: } K = -\frac{\kappa^2}{((1 - ku)^2 + u^2\kappa^2)^2}, \quad H = \frac{(\dot{\kappa}\kappa - k\dot{\kappa})u^2 + \dot{\kappa}u}{((1 - ku)^2 + u^2\kappa^2)^{3/2}}.$$

$$20.9. \text{ Имеем: } \mathbf{r} = \left(\frac{a}{2}(u - v), \frac{b}{2}(u + v), \frac{uv}{2} \right), \quad \mathbf{r}_u = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{v}{2} \right),$$

$$\mathbf{r}_v = \left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{u}{2} \right), \quad E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + v^2),$$

$$F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{4}(b^2 - a^2 + uv), \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + u^2),$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \frac{1}{4}(b(u-v), -a(u+v), 2ab),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(b(u-v), -a(u+v), 2ab)}{\sqrt{a^2(u+v)^2 + b^2(u-v)^2 + 4a^2b^2}},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{r}_{uv} = \left(0, 0, \frac{1}{2} \right), \quad \mathbf{r}_{vv} = (0, 0, 0), \quad L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{ab}{\sqrt{a^2(u+v)^2 + b^2(u-v)^2 + 4a^2b^2}}, \quad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Запишем дифференциальное уравнение, определяющее линии кривизны поверхности:

$$0 = \begin{vmatrix} dv^2 & -du \, dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = -M(G \, dv^2 - E \, du^2) =$$

$$= \frac{ab((a^2 + b^2 + v^2) \, du^2 - (a^2 + b^2 + u^2) \, dv^2)}{4\sqrt{a^2(u+v)^2 + b^2(u-v)^2 + 4a^2b^2}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{du^2}{a^2 + b^2 + u^2} = \frac{dv^2}{a^2 + b^2 + v^2}, \quad \frac{du}{\sqrt{a^2 + b^2 + u^2}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{a^2 + b^2 + v^2}},$$

$$\operatorname{arsh} \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \operatorname{arsh} \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C,$$

$$\operatorname{sh} \left(\operatorname{arsh} \frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mp \operatorname{arsh} \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \operatorname{sh} C,$$

$$\frac{u}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + v^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mp \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + u^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \operatorname{sh} C,$$

так как $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ и $\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$. Таким образом, линии кривизны данной поверхности задаются уравнением

$$u\sqrt{a^2 + b^2 + v^2} \pm v\sqrt{a^2 + b^2 + u^2} = \operatorname{const}.$$

20.10. Как известно (см. соответствующие задачи для геликоида в первой части книги), имеем $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = 1$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$, $G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = a^2 + u^2$, $L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = 0$, $M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}}$,

$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 0$. Запишем дифференциальное уравнение, определяющее линии кривизны поверхности:

$$0 = \begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = -M(G\,dv^2 - E\,du^2) = \\ = -\frac{a(du^2 - (a^2 + u^2)dv^2)}{\sqrt{a^2 + u^2}}.$$

Отсюда получаем $dv^2 = \frac{du^2}{a^2 + u^2}$, $dv = \pm \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}$. Следовательно,

$$v = \pm \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C.$$

20.11. Согласно задаче 20.10, линии кривизны геликоида задаются уравнениями $v = \pm \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$. Как известно, вторая квадратичная форма катеноида имеет вид $-\frac{a\,du^2}{u^2 + a^2} + a\,dv^2$. Тогда значение второй квадратичной формы на касательных векторах к кривым, являющимися образами линий кривизны при изометрии, равно

$$-\frac{a}{u^2 + a^2} + a \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + u^2}} \right)^2 = 0.$$

Таким образом, линии кривизны при наложении переходят в асимптотические линии катеноида.

20.12. Из условия следует, что $\rho(s)$ — плоская кривая. Пусть $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — векторы нормали и бинормали кривой $\rho(s)$. Тогда $\mathbf{a} = \pm \mathbf{b}$. Будем считать, что $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Отсюда следует, что $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{a}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = -\mathbf{n}$, $\mathbf{n} \times \mathbf{a} = \mathbf{v}$. $\mathbf{r}_s = \mathbf{v} + kg\mathbf{v} = (1 + kg)\mathbf{v}$, $\mathbf{r}_u = f'\mathbf{a} - g'\mathbf{n}$,

$$E = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = (1 + kg)^2, \quad F = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_u \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = (f')^2 + (g')^2, \quad \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u = -(1 + kg)g'\mathbf{a} - (1 + kg)f'\mathbf{n},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_u|} = -\frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}(f'\mathbf{n} + g'\mathbf{a}),$$

$$\mathbf{r}_{ss} = k'g\mathbf{v} + k(1 + kg)\mathbf{n}, \quad \mathbf{r}_{su} = kg'\mathbf{v}, \quad \mathbf{r}_{uu} = f''\mathbf{a} - g''\mathbf{n},$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = -\frac{kf'(1 + kg)}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}, \quad M = \langle \mathbf{r}_{su}, \mathbf{m} \rangle = 0,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m} \rangle = \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}},$$

Уравнения линий кривизны имеют вид

$$0 = \begin{vmatrix} du^2 & -ds du & ds^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = (EN - GL) du ds.$$

Отсюда видно, что линиями кривизны являются кривые, определяемые уравнениями $s = \text{const}$, $u = \text{const}$.

20.13. Имеем: а, б) $\mathbf{r}_s = \mathbf{v} - \mathbf{v} a \cos \varphi \mathbf{k} = \mathbf{v}(1 - ak \cos \varphi)$,

$$\mathbf{r}_\varphi = -\mathbf{n} a \sin \varphi + \mathbf{b} a \cos \varphi,$$

$$E = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = (1 - ak \cos \varphi)^2, \quad F = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_\varphi \rangle = 0, \quad G = \langle \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi \rangle = a^2,$$

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi = -\mathbf{b} a (1 - ak \cos \varphi) \sin \varphi - \mathbf{n} a (1 - ak \cos \varphi) \cos \varphi,$$

$$|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi| = a(1 - ak \cos \varphi), \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi|} = -\mathbf{b} \sin \varphi - \mathbf{n} \cos \varphi,$$

$$\mathbf{r}_{ss} = \mathbf{n} k (1 - ak \cos \varphi) - \mathbf{v} a k \cos \varphi, \quad \mathbf{r}_{s\varphi} = \mathbf{v} a k \sin \varphi,$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = -\mathbf{n} a \cos \varphi - \mathbf{b} a \sin \varphi, \quad L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = -k(1 - ak \cos \varphi) \cos \varphi,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{s\varphi}, \mathbf{m} \rangle = 0, \quad N = \langle \mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{m} \rangle = a,$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{k \cos \varphi}{a(1 - ak \cos \varphi)},$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + GL - 2MF}{EG - F^2} = \\ &= \frac{(1 - ak \cos \varphi)^2 a + a^2 (-k(1 - ak \cos \varphi) \cos \varphi)}{a^2 (1 - ak \cos \varphi)^2} = \frac{1 - 2ak \cos \varphi}{a(1 - ak \cos \varphi)}; \end{aligned}$$

в) запишем уравнение на линии кривизны:

$$0 = \begin{vmatrix} d\varphi^2 & -ds d\varphi & ds^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = (EN - GL) ds d\varphi = a(1 - ak \cos \varphi) ds d\varphi.$$

Так как $1 - ak \cos \varphi > 0$, то $ds d\varphi = 0$ и линии кривизны имеют вид $s = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$.

20.14. Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s &= \mathbf{v} + a(-k\mathbf{v} + \kappa\mathbf{b}) \cos \varphi - a\kappa\mathbf{n} \sin \varphi = \\ &= \mathbf{v}(1 - ak \cos \varphi) - \mathbf{n} a \kappa \sin \varphi + \mathbf{b} a \kappa \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_\varphi = -\mathbf{n} a \sin \varphi + \mathbf{b} a \cos \varphi, \quad E = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s \rangle = (1 - ak \cos \varphi)^2 + a^2 \kappa^2,$$

$$F = \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_\varphi \rangle = a^2 \kappa, \quad G = \langle \mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi \rangle = a^2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi &= \mathbf{v}(-a^2 \kappa \sin \varphi \cos \varphi + a^2 \kappa \cos \varphi \sin \varphi) + \\ &\quad + \mathbf{n}(ak \cos \varphi - 1)a \cos \varphi + \mathbf{b}(ak \cos \varphi - 1)a \sin \varphi = \\ &= -a(1 - ak \cos \varphi)(\mathbf{n} \cos \varphi + \mathbf{b} \sin \varphi), \end{aligned}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_\varphi|} = -\mathbf{n} \cos \varphi - \mathbf{b} \sin \varphi,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{ss} &= \mathbf{v}(-a\dot{\kappa} \cos \varphi + ak\kappa \sin \varphi) + \\ &\quad + \mathbf{n}(-a\dot{\kappa} \sin \varphi + k(1 - ak \cos \varphi) - a\kappa^2 \cos \varphi) + \mathbf{b}(a\dot{\kappa} \cos \varphi - a\kappa^2 \sin \varphi), \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{s\varphi} = \mathbf{v}ak \sin \varphi - \mathbf{n}a\kappa \cos \varphi - \mathbf{b}a\kappa \sin \varphi,$$

$$\mathbf{r}_{\varphi\varphi} = -\mathbf{n}a \cos \varphi - \mathbf{b}a \sin \varphi, \quad L = \langle \mathbf{r}_{ss}, \mathbf{m} \rangle = a\kappa^2 - k \cos \varphi + ak^2 \cos^2 \varphi,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{s\varphi}, \mathbf{m} \rangle = a\kappa, \quad N = \langle \mathbf{r}_{\varphi\varphi}, \mathbf{m} \rangle = a.$$

Запишем уравнение на линии кривизны:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} d\varphi^2 & -ds d\varphi & ds^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} d\varphi^2 & -ds d\varphi & ds^2 \\ (1 - ak \cos \varphi)^2 + a^2 \kappa^2 & a^2 \kappa & a^2 \\ a\kappa^2 - k \cos \varphi + ak^2 \cos^2 \varphi & a\kappa & a \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} d\varphi^2 & -ds d\varphi & ds^2 \\ (1 - ak \cos \varphi)^2 + a^2 \kappa^2 & a^2 \kappa & a^2 \\ k \cos \varphi - \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{vmatrix} = a(1 - ak \cos \varphi)(d\varphi + \kappa ds) ds. \end{aligned}$$

Так как $1 - ak \cos \varphi > 0$, то имеем $ds = 0$ или $\frac{d\varphi}{ds} = -\kappa$. Следовательно,

линии кривизны имеют вид $s = \text{const}$, $\varphi = -\int \kappa ds + \text{const}$.

20.15. Имеем:

$$\mathbf{r}_v = \left(3v^2 - 3u^2 - \frac{1}{3}, 6uv, 2v \right), \quad \mathbf{r}_u = \left(6uv, 3u^2 - 3v^2 - \frac{1}{3}, 2u \right),$$

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \left(3v^2 - 3u^2 - \frac{1}{3} \right)^2 + 36u^2v^2 + 4u^2 = \left(3u^2 + 3v^2 + \frac{1}{3} \right)^2,$$

$$F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = \left(3v^2 - 3u^2 - \frac{1}{3} \right) 6uv + 6uv \left(3u^2 - 3v^2 - \frac{1}{3} \right) + 2v2u = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = 36u^2v^2 + \left(3u^2 - 3v^2 - \frac{1}{3} \right)^2 + 4u^2 = \left(3u^2 + 3v^2 + \frac{1}{3} \right)^2,$$

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(6u^2v + 6v^3 + \frac{2}{3}v, 6u^3 + 6uv^2 + \frac{2}{3}u, \right. \\ \left. \left(\frac{1}{3} + 3u^2 + 3v^2 \right) \left(\frac{1}{3} - 3u^2 - 3v^2 \right) \right),$$

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \left(3u^2 + 3v^2 + \frac{1}{3} \right)^2,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(2v, 2u, 1/3 - 3u^2 - 3v^2)}{3u^2 + 3v^2 + 1/3},$$

$$\mathbf{r}_{uu} = (-6u, 6v, 0), \mathbf{r}_{uv} = (6v, 6u, 2), \mathbf{r}_{vv} = (6u, -6v, 0),$$

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-6u2v + 6v2u}{3u^2 + 3v^2 + 1/3} = 0,$$

$$M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{6v2v + 6u2u + 2(1/3 - 3u^2 - 3v^2)}{3u^2 + 3v^2 + 1/3} = 2,$$

$$N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = \frac{6u2v - 6v2u}{3u^2 + 3v^2 + 1/3} = 0.$$

Запишем уравнение на линии кривизны:

$$0 = \begin{vmatrix} dv^2 & -du dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 2 \left(3u^2 + 3v^2 + \frac{1}{3} \right)^2 (d^2u - d^2v).$$

Отсюда получаем

$$d^2u - d^2v = (du + dv)(du - dv) = 0 \Rightarrow u \pm v = \text{const.}$$

Ответ: $u \pm v = \text{const.}$

20.16. Так как $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$, то $\mathbf{r}_u = \sqrt{E}\mathbf{l}$, $|\mathbf{l}| = 1$. Аналогично, $\mathbf{r}_v = \sqrt{G}\mathbf{m}$, $|\mathbf{m}| = 1$. Гауссова кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой и второй квадратичных форм следующим образом: $K = \frac{LN - M^2}{EG}$, где $L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle$, $M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle$, $N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$; $\mathbf{r}_{uu} = \frac{1}{2} \frac{E_u}{\sqrt{E}} \mathbf{l} + \sqrt{E} \mathbf{l}_u$. Так как $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{n} \rangle = 0$, то $L = \sqrt{E} \langle \mathbf{l}_u, \mathbf{n} \rangle$. Так как $\langle \mathbf{l}, \mathbf{l} \rangle = 1$, то $\langle \mathbf{l}_u, \mathbf{l} \rangle = 0$ и отсюда $\mathbf{l}_u = p_1 \mathbf{m} + q_1 \mathbf{n}$.

Аналогично, $N = \sqrt{G} \langle \mathbf{m}_v, \mathbf{n} \rangle$, $\mathbf{m}_v = p_2 \mathbf{l} + q_2 \mathbf{n}$.

Тогда $LN = \sqrt{EG} \langle \mathbf{l}_u, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{m}_v, \mathbf{n} \rangle = \sqrt{EG} q_1 q_2 = \sqrt{EG} \langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m}_v \rangle$.

Точно так же показывается, что

$$M^2 = \sqrt{EG} \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m}_u \rangle \quad \text{и} \quad K = \frac{\langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m}_v \rangle - \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m}_u \rangle}{\sqrt{EG}},$$

$$\langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m}_v \rangle = \langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m} \rangle_v - \langle \mathbf{l}_{uv}, \mathbf{m} \rangle, \quad \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m}_u \rangle = \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m} \rangle_u - \langle \mathbf{l}_{uv}, \mathbf{m} \rangle.$$

$$\text{Тогда } K = \frac{\langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m} \rangle_v - \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m} \rangle_u}{\sqrt{EG}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{l}_u, \mathbf{m} \rangle &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle}{\sqrt{EG}} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle}{\sqrt{EG}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(\partial/\partial v) \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle}{\sqrt{EG}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right). \end{aligned}$$

В этой выкладке мы два раза воспользовались тем, что $\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle = 0$. Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{l}_v, \mathbf{m} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right).$$

В итоге получаем

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right) \right\}.$$

20.17. Воспользуемся формулой для гауссовой кривизны поверхности с квадратичной формой $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ (см. задачу 20.16). Гауссова кривизна такой поверхности равна

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right) \right\}.$$

Полагая в выражении для кривизны $E \equiv 1$, получаем

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{G}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left(2 \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) = -\frac{(\partial^2 / \partial u^2) \sqrt{G}}{\sqrt{G}}.$$

$$\text{Ответ: } K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

20.18. $K = -\frac{1}{2B} \Delta \ln B$, где Δ — оператор Лапласа.

20.19. Для вычисления кривизны можно воспользоваться формулой, введенной в задаче 20.17. Имеем $G(u, v) = e^{2u}$, откуда

$$K = -\frac{1}{e^u} \frac{\partial^2 e^u}{\partial u^2} = -1.$$

20.20. Показать, что через метрику выражаются скалярные произведения $\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_k \rangle$ и разности $\langle \mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{kl} \rangle - \langle \mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jl} \rangle$.

20.24. Рассмотрим поверхность вращения M с уравнением

$$x = r(u) \cos \varphi, \quad y = r(u) \sin \varphi, \quad z = h(u),$$

где $a \leq u \leq b$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Элемент площади этой поверхности равен $d\sigma = r(u) \sqrt{r'^2 + z'^2} du d\varphi$. Будем искать деформацию поверхности вращения в виде $x = R(u, \varepsilon) \cos \varphi$, $y = R(u, \varepsilon) \sin \varphi$, $z = H(u, \varepsilon)$ с условием равенства элементов площади

$$r \sqrt{r'^2 + h'^2} du d\varphi = R \sqrt{R'^2 + H'^2} du d\varphi.$$

Положим $R(u, \varepsilon) = \varepsilon r(u)$, $\varepsilon \rightarrow 1 - 0$. Тогда это уравнение допускает решение

$$H(u, \varepsilon) = h(0) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^u \sqrt{(1 - \varepsilon^4) r'^2(t) + h'^2(t)} dt,$$

которое и определяет искомое семейство поверхностей вращения, удовлетворяющих условию задачи.

20.27. а) $F_1'^2(w) + F_2'^2(w) + F_3'^2(w) = 0$; б) $ds^2 = \Lambda^2(w)(du^2 + dv^2)$, где

$$\Lambda^2 = \frac{|F_1'^2(w)| + |F_2'^2(w)| + |F_3'^2(w)|}{2}.$$

20.29. Указание. Использовать связь между тремя квадратичными формами поверхности.

20.38. Кривизну K считаем по формуле $K = -\frac{1}{2\Lambda} \Delta \ln \Lambda$, где $\Lambda = e^{-2u^2}$, и находим, что $K = 2e^{2u^2} > 0$. Неполнота метрики следует из существования уходящего в бесконечность пути конечной длины, а именно, $v = 0$. Изометрическое вложение метрики в $\mathbb{R}^3$ в виде выпуклой поверхности невозможно, так как интегральная кривизна

$$\iint K dS = 2e^{2u^2} du dv = \infty,$$

а интегральная кривизна выпуклой поверхности, равная площади ее сферического изображения, не превышает 4π .

22.3. Нет, так как в противном случае на листе Мёбиуса существовало бы непрерывное поле нормалей. В самом деле, так как гауссова кривизна положительна, то поверхность локально лежит по одну сторону от касательной плоскости. Поэтому можно определить гладкое поле «внешних нормалей», что противоречит неориентируемости листа Мёбиуса.

22.5. а) При указанных условиях можно определить гладкое поле «внешних нормалей» (см. задачу 22.3), что противоречит неориентируемости поверхности.

22.6. а) У к а з а н и е. Из бесконечности придвигать плоскость до момента соприкосновения с поверхностью. Рассмотреть гауссову кривизну поверхности в точке касания.

б) У к а з а н и е. Выбрать сферу достаточно большого радиуса так, чтобы она содержала поверхность внутри. Затем непрерывно уменьшать радиус сферы до момента соприкосновения с поверхностью. Рассмотреть гауссову кривизну поверхности в точке касания.

22.7. У к а з а н и е. См. задачу 22.6.

22.8. У к а з а н и е. Применить теорему Гаусса–Бонне.

22.10. а) Рассмотреть часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $|z| \leq a$, $a < R$. Отождествить противоположные точки.

б) У к а з а н и е. Найти поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны, инвариантную при центральной симметрии относительно начала координат (см. задачу 20.23). Отождествить по подходящему действию группы $\mathbb{Z}/2$.

Другой вариант решения. Рассмотрим на прямоугольнике Π : $-a \leq u \leq a$, $-b \leq v \leq b$ метрику $ds^2 = \text{ch}^2 v du^2 + dv^2$. Отождествим теперь стороны $u = -a$ и $u = a$ по равенству длин склеиваемых отрезков так, чтобы получился лист Мёбиуса. Легко показать, что на листе Мёбиуса получится аналитическая метрика кривизны -1 . При достаточно малых b эта метрика реализуется на «катушке» Миндинга, имеющей уравнение

$$x = \text{ch } v \cos u, \quad y = \text{ch } v \sin u, \quad z = \int_0^v \sqrt{1 - \text{sh}^2 t} \, dt.$$

$$22.14. \int_{v_1}^{v_2} dv \int_{u_1}^{u_2} (\sqrt{G})_{uu} du.$$

$$22.15. 2\pi.$$

22.17. Двукратно покрытая сфера.

22.20. Поверхность вращения кривой $z = \frac{1}{8}x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $z = x - \ln x$, $x \geq 2$.

22.21. Пусть поверхность вращения параметризована следующим образом: $(u \cos v, u \sin v, f(u))$. Ее параллели задаются уравнениями $u = \text{const}$, а меридианы — уравнениями $v = \text{const}$. Первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид $ds^2 = (1 + (f'(u))^2) du^2 + u^2 dv^2$. Сделаем замену переменной u на переменную U , где

$$U = \int \frac{\sqrt{1 + (f'(u))^2}}{u} du.$$

Обратную зависимость u от U обозначим $u = \lambda(U)$. Первая квадратичная форма при такой замене переменных принимает вид $ds^2 = \lambda^2(U) \times \times (dU^2 + dv^2)$. Заметим, что параллели поверхности задаются уравнениями $U = \text{const}$, а меридианы — прежними уравнениями $v = \text{const}$.

Рассмотрим евклидову плоскость с координатами (x, y) и метрикой $dx^2 + dy^2$. Нетрудно проверить, что отображение, задаваемое в координатах формулой $(U, v) \mapsto (x, y)$, обладает необходимыми свойствами.

22.23. а) 4π ; б) 2π ; в) 4π .

22.24. Пусть в сферических координатах φ, ψ прямоугольник P задан неравенствами $-a \leq \varphi \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < b \leq \psi \leq c < \frac{\pi}{2}$. Тогда изометрическое вложение P в $\mathbb{R}^3$ дается следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\pi} \cos \frac{\pi}{a} \varphi \cos \psi, & y &= \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} \varphi \cos \psi, \\ z &= f(\psi) = \int \sqrt{1 - \frac{a^2}{\pi^2} \sin^2 \psi} d\psi, \end{aligned}$$

откуда легко установить аналитичность и погружения, и метрики.

22.25. Метрика единичной сферы в сферических координатах имеет вид $ds^2 = \cos^2 \psi d\varphi^2 + d\psi^2$. Отождествление производится по отображению $(-a, \psi) \rightarrow (a, b + c - \psi)$. Остальное очевидно.

23.1. Разбиения показаны на рис. 154.

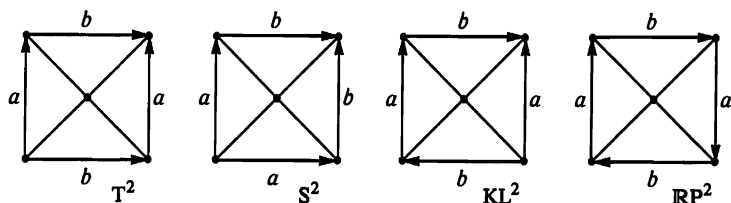


Рис. 154. Триангуляции тора, сферы, бутылки Клейна и проективной плоскости

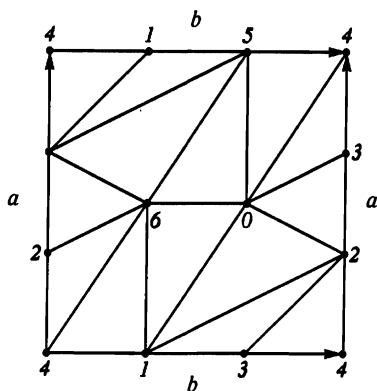


Рис. 155. Триангуляция тора

23.3. Указание. Требуемая оценка следует из системы неравенств

$$V(V-1) \geq 2E,$$

$$V - E + F = \chi(M),$$

$$3F = 2E.$$

23.4. См. а) рис. 155, 156; б) рис. 157.

23.5. Минимальная триангуляция тора может быть построена путем рассмотрения плоской решетки, состоящей из правильных треугольников (см. рис. 158). Следует взять

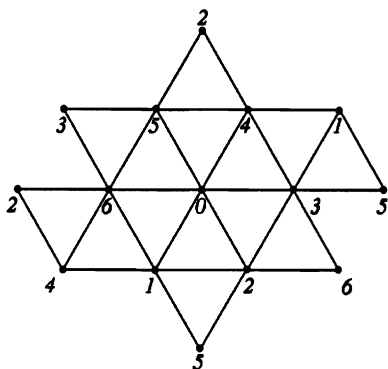


Рис. 156. Триангуляция тора — другой вариант

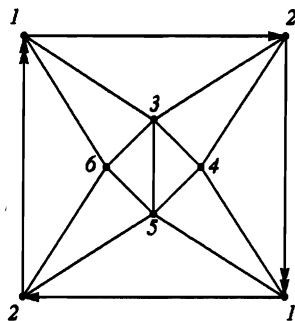


Рис. 157. Триангуляция проективной плоскости

вторую решетку, порожденную векторами e_1 , e_2 , указанными на рисунке. Фундаментальной областью этой второй решетки, является параллелограмм со сторонами e_1 , e_2 . отождествляя его противоположные

стороны, получим тор, на котором треугольники исходной правильной решетки задают искомую триангуляцию.



Рис. 158. Решетки, порождающие триангуляцию тора

23.9. См. рис. 159.

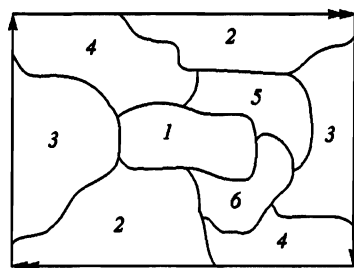


Рис. 159. Карта на проективной плоскости

23.11. У к а з а н и е. Построить гомеоморфизмы, показанные на рис. 160.

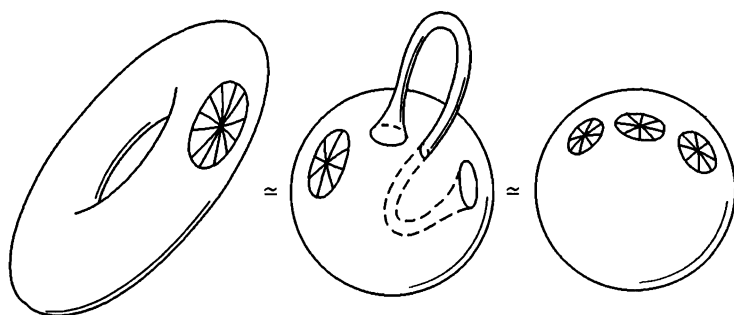


Рис. 160

23.12. См. рис. 161.

23.13. См. рис. 162.

23.14. См. рис. 163.

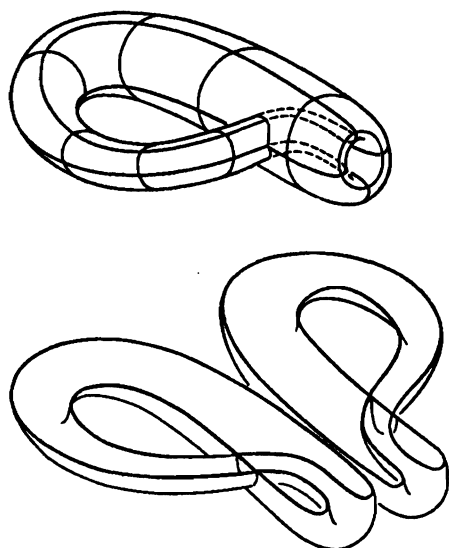


Рис. 161. Склеива бутылки Клейна из двух листов Мёбиуса

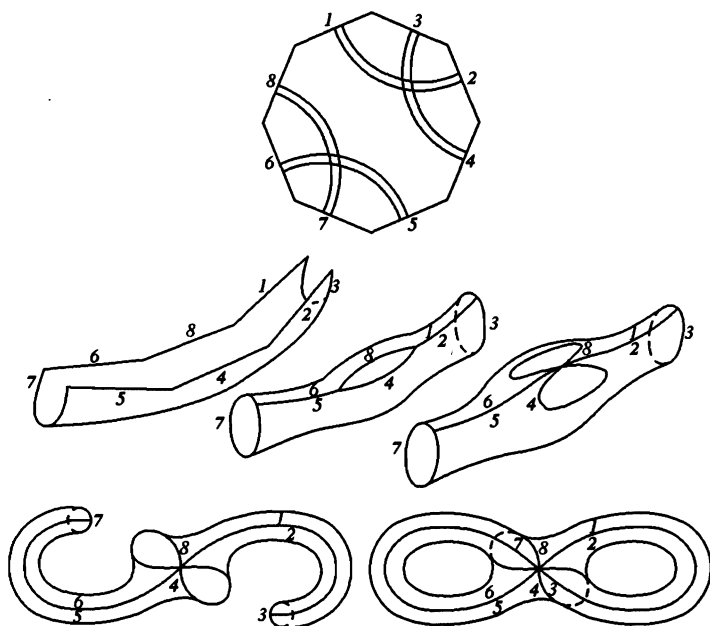


Рис. 162

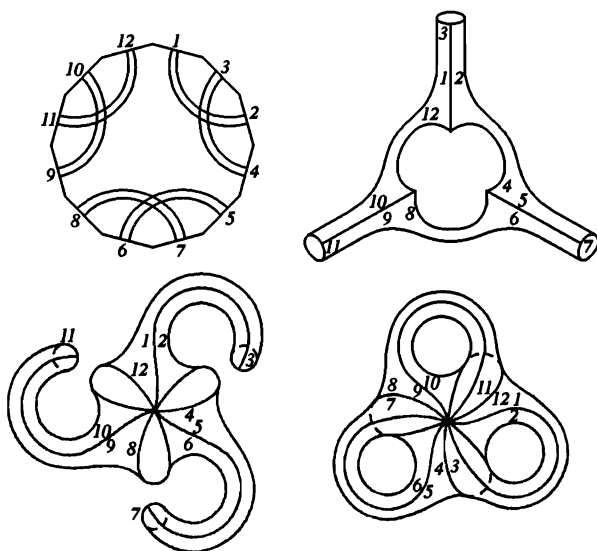


Рис. 163

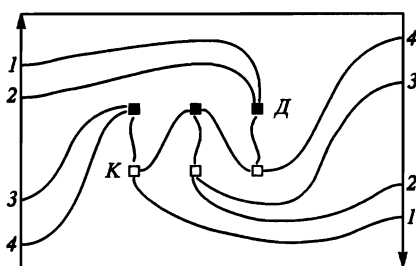


Рис. 164. Граф «3 домика и 3 колодца» на листе Мёбиуса

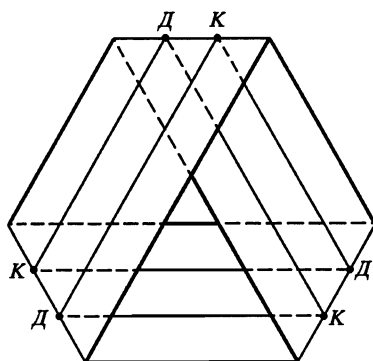


Рис. 165. Граф «3 домика и 3 колодца» на листе Мёбиуса

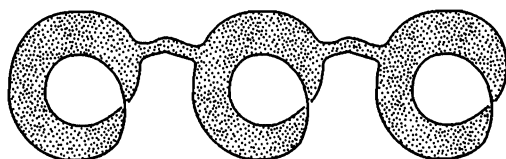


Рис. 166

23.21. См. рис. 164. В более симметричном виде искомое вложение изображено на рис. 165.

23.25. См. рис. 166.

23.26. См. рис. 167.

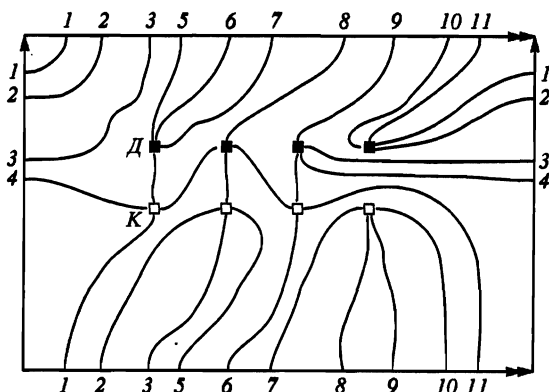


Рис. 167. Граф «4 домика и 4 колодца» на торе

24.1. Продифференцируем уравнение, задающее данное семейство линий. Получим $c = \frac{u \, du}{v \, dv}$. Подставим это выражение для c в уравнение семейства. Получим дифференциальное уравнение линий семейства: $\frac{dv}{du} = \frac{1 + v^2}{uv}$. Подставляя в дифференциальное уравнение, определяющее сопряженное семейство

$$L \, du \, \delta u + M (du \, \delta v + dv \, \delta u) + N \, dv \, \delta v = 0,$$

получим $\frac{\delta v}{\delta u} = -1$. Здесь L , M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности, (du, dv) — направление вектора скорости линии исходного семейства, а $(\delta u, \delta v)$ — направление вектора скорости линии сопряженного семейства. Следовательно, сопряженное семейство состоит из линий $u + v = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная.

24.3. Дифференциальное уравнение линий сопряженного семейства имеет вид $\frac{du}{u} = -\frac{1}{4} \sin 2v \, dv$. Интегрируя, получаем уравнения линий сопряженного семейства $u = C e^{(1/8) \cos 2v}$, где C — произвольная постоянная.

24.4. Условие сопряженности указанных в условии задачи семейств линий легко сводится к дифференциальному уравнению $f_{xy} = 0$.

Отсюда $f(x, y) = g(x) + h(y)$, где g и h — произвольные гладкие функции одной переменной.

24.5. Введем на поверхностях координаты так, чтобы соответствующие точки на поверхностях задавались одной и той же парой чисел. Из условия задачи получаем

$$L du \delta u + M (du \delta v + dv \delta u) + N dv \delta v = \\ = \lambda (E_1 du \delta u + F_1 (du \delta v + dv \delta u) + G_1 dv \delta v),$$

$$L_1 du \delta u + M_1 (du \delta v + dv \delta u) + N_1 dv \delta v = \\ = \mu (E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v).$$

Здесь λ и μ — некоторые множители пропорциональности. Отсюда получаем, что

$$\frac{L}{E_1} = \frac{M}{F_1} = \frac{N}{G_1}, \quad \frac{L_1}{E} = \frac{M_1}{F} = \frac{N_1}{G}.$$

24.6. Дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид

$$y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = b^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Отсюда $y = x \frac{dy}{dx} \pm \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$. Легко видеть, что полученное дифференциальное уравнение является уравнением Клеро. Решая его, получаем

$$y = C_1 x + \sqrt{b^2 + a^2 C_1^2}, \quad y = C_2 x - \sqrt{b^2 + a^2 C_2^2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Заметим, что асимптотическими линиями однополостного гиперболоида являются его прямолинейные образующие.

24.7. Дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид $f''(x) dx^2 - f''(y) dy^2 = 0$. Условие ортогональности асимптотической сети записывается в виде равенства $\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = \frac{f''(y)}{1 + (f'(y))^2}$. Отсюда немедленно получаем, что

$$\frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = a, \quad \frac{f''(y)}{1 + (f'(y))^2} = a,$$

где a — некоторая постоянная. Решая эти уравнения, получаем

$$f'(x) = \operatorname{tg}(ax + b), \quad f(x) = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + c,$$

$$f'(y) = \operatorname{tg}(ay + b), \quad f(y) = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ay + b)| + c.$$

Отсюда получаем уравнение искомой поверхности:

$$z = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\cos(ax + b)}{\cos(ay + b)} \right|.$$

24.8. Легко показать, что дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид

$$xy \, dx^2 + (x^2 - y^2) \, dx \, dy - xy \, dy^2 = 0.$$

Это уравнение распадается: $(x \, dx - y \, dy)(x \, dy + y \, dx) = 0$. Отсюда немедленно получаем, что асимптотическими линиями являются $x^2 - y^2 = C_1$, $xy = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Асимптотические линии, проходящие через точку M_0 , имеют уравнения $x^2 - y^2 = -3$, $xy = 2$.

24.9. $u + v = C_1$, $u - v = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24.10. Параметризовать геликоид следующим образом:

$$(u \cos v, u \sin v, av).$$

Показать, что асимптотические линии задаются уравнениями $u = C_1$ и $v = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24.15. Параметризуем поверхность следующим образом:

$$x = \frac{a}{2}(\cos u + \cos v), \quad y = \frac{a}{2}(\sin u + \sin v), \quad z = \frac{b}{2}(u + v).$$

Тогда дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид $du^2 - dv^2 = 0$. Отсюда получаем уравнения асимптотических линий: $u + v = C_1$, $u - v = C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24.17. Заметим, что касательная плоскость к поверхности в точках кривой совпадает с соприкасающейся плоскостью этой кривой. Отсюда немедленно вытекает требуемое утверждение.

24.18. Примем за координатную сеть на поверхности сеть, состоящую из асимптотических линий. Тогда косинус угла между асимптотическими

линиями равен $\cos \varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Кроме того,

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{-FM}{EG - F^2}.$$

Отсюда получаем, что $\cos^2 \varphi = \frac{H^2}{H^2 - K}$. Следовательно, $K = -H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi$.

24.19. $v = C_1, \quad u^2 = C_2 \sin \lambda v.$

24.20. $u + v = C_1, \quad u - v = C_2.$

24.21. $x = C_1, \quad y^2 \sin x = C_2.$

24.22. $x = \frac{a}{2}(u + v), \quad y = \frac{b}{2}(u - v), \quad z = \frac{1}{2}uv.$

24.24. Если координатная сеть является асимптотической, то $L = N = 0$.

В этом случае $K = \frac{-M^2}{EG - F^2}$, а уравнения Петерсона–Кодацци принимают вид

$$2(EG - F^2)M_u - (2F(E_v - F_u) - (EG_u - GE_u))M = 0,$$

$$2(EG - F^2)M_v - (2F(F_v - G_u) - (EG_v - GE_v))M = 0.$$

Отсюда легко получить требуемые формулы.

24.25. Заметим, что сеть, состоящая из координатных линий, является чебышевской тогда и только тогда, когда $E_u = G_v = 0$. Примем за координатные линии поверхности ее асимптотические линии и воспользуемся результатом задачи 24.24.

24.26. Легко показать, что касательная плоскость к поверхности в некоторой точке является соприкасающейся для каждой из асимптотических линий, проходящих через эту точку. Следовательно, бинормали к асимптотическим линиям в точке их пересечения являются нормальными к поверхности, т. е. $\mathbf{m} = \pm \mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ — вектор бинормали к асимптотическим линиям, а $\mathbf{m}$ — вектор нормали к поверхности. Проинтегрируем это равенство по дуге асимптотической линии и, используя формулы Френе, получим $\frac{d}{ds}\mathbf{m} = \pm \frac{d}{ds}\mathbf{b} = \mp \kappa \mathbf{n}$. Здесь $\mathbf{n}$ — вектор главной нормали асимптотической кривой. Отсюда получаем, что

$$\kappa^2 = \left\langle \frac{d}{ds}\mathbf{m}, \frac{d}{ds}\mathbf{m} \right\rangle = \frac{\text{III}}{\text{I}}.$$

Здесь через I и III обозначены значения первой и, соответственно, третьей квадратичной форм на векторе скорости асимптотической кривой.

Из соотношения между квадратичными формами поверхностей $\text{III} = \text{HII} - \text{KI}$ и того факта, что в асимптотическом направлении $\text{II} = 0$, получаем $\frac{\text{III}}{\text{I}} = -K$. Отсюда $\kappa^2 = -K = |K|$.

24.28. Дифференциальное уравнение линий кривизны, как легко проверить, имеет вид $du^2 - (u^2 + a^2) dv^2 = 0$. Интегрируя, находим

$$v = C_1 - \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}), \quad v = C_2 + \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

24.29. Линиями кривизны цилиндрической поверхности, отличной от плоскости, являются ее прямолинейные образующие и линии, по которым пересекают поверхность плоскости, ортогональные образующим поверхности.

24.30. Линиями кривизны конической поверхности, отличной от плоскости, являются ее прямолинейные образующие и линии, по которым пересекают поверхность всевозможные сферы с центром в вершине конической поверхности.

24.31. Воспользоваться тем, что только у сферы и плоскости соответствующие коэффициенты первой и второй квадратичных форм пропорциональны.

24.44. У к а з а н и е. Показать, что все геодезические являются линиями кривизны. Воспользоваться тем, что если на поверхности в каждом направлении проходит линия кривизны, то все точки омбилические.

24.47. Пусть $\mathbf{r}(s) + t\mathbf{l}(s)$ — радиус-вектор линейчатой поверхности в некоторой асимптотической параметризации. Введем новые координаты s, τ , где $\tau = t + t(s)$, $t(s) = \int_0^s \langle \mathbf{l}, \mathbf{r}' \rangle ds$. Тогда получаем требуемую

параметризацию $\mathbf{R}(s) + \tau\mathbf{l}(s)$, в которой новая образующая имеет вид $\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) - t(s)\mathbf{l}(s)$.

$$\mathbf{24.48.} \quad ds^2 = du^2 + 2F du dv + dv^2.$$

24.49. Прямой круговой цилиндр или область на нем.

24.52. Вывести формулу для гауссовой кривизны в асимптотических координатах.

24.56. а) Очевидно, любая поверхность с постоянной внешней геометрией имеет постоянные гауссову и среднюю кривизны. Рассмотрим два случая.

1) $K = 0$. Поверхность развертывающаяся. Если на ней $H = 0$, то это плоскость. Пусть $H \neq 0$. Напишем уравнение поверхности в ортогональной асимптотической параметризации $\mathbf{r}(s) + t\mathbf{l}(s)$, в которой средняя кривизна вычисляется по формуле (в обозначениях Рашевского)

$$H = C_0 = \frac{A(s)t^2 + B(s)t + C(s)}{1 + 2t\langle \mathbf{r}', \mathbf{l}' \rangle + t^2\langle \mathbf{l}', \mathbf{l}' \rangle}.$$

Так как при фиксированном s на это равенство можно смотреть как на алгебраическое относительно t , то имеем (при $t \rightarrow \infty$), что $\langle \mathbf{l}', \mathbf{l}' \rangle = 0$, т. е. вектор $\mathbf{l}$ постоянный. И так как $\langle \mathbf{l}, \mathbf{r}' \rangle = 0$ в силу ортогональности параметризации, то направляющая — плоская. Далее получаем, что $A(s) = \langle \mathbf{r}'', \mathbf{r}', \mathbf{l} \rangle = \text{const}$, следовательно, кривизна плоской кривой $\mathbf{r}(s)$ постоянна, т. е. она является окружностью.

2) $K = \text{const} = C_1 \neq 0$. Введем на поверхности координаты в линиях кривизны. Тогда $E = M = 0$ и $2H = \frac{N}{G} + \frac{L}{E} = 2C_2$, $K = \frac{LN}{EG} = C_1$. Решив эту систему алгебраических уравнений, получаем

$$L = E(C_2 \mp \sqrt{H^2 - K}), \quad N = G(C_2 \pm \sqrt{H^2 - K}).$$

Теперь из одного из уравнений Петерсона–Кодацци, например, из $L_v = C_2 E_v$, получаем: $E_v(C_2 \mp \sqrt{H^2 - K}) = C_2 E_v$, т. е. $H^2 - K = 0$. Если $E_v = 0$, то применим другое из уравнений Петерсона–Кодацци. Следовательно, все точки поверхности омбилические, т. е. поверхность — сфера;

б) поворот пространства $\mathbb{R}^4$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix},$$

где $\alpha = u_1 - u_2$, $\beta = v_1 - v_2$, переводит окрестность точки

$$(R_1 \cos u_1, R_1 \sin u_1, R_2 \cos v_1, R_2 \sin v_1)$$

в окрестность точки $(R_1 \cos u_2, R_1 \sin u_2, R_2 \cos v_2, R_2 \sin v_2)$.

24.64. Воспользоваться теоремой Бельтрами–Эннепера о кручении асимптотической линии на поверхности отрицательной кривизны.

24.65. См. предыдущую задачу.

24.67. Применить формулу для гауссовой кривизны K .

25.17. См. рис. 168 с тремя вариантами ответа.

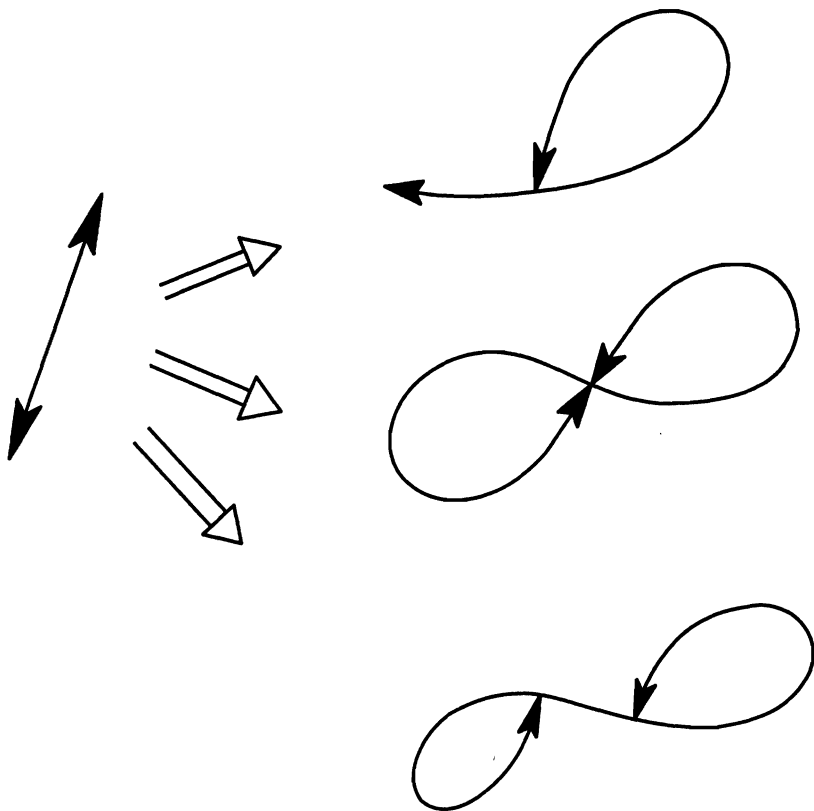


Рис. 168

25.19. См. рис. 169.

25.24. Множество точек самопересечения гомеоморфно букету из трех окружностей: $S^1 \vee S^1 \vee S^1$. Вершина этого букета — трехкратная точка самопересечения, а любая точка букета, отличная от вершины, — двухкратная.

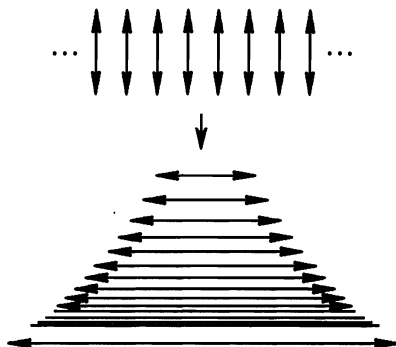


Рис. 169

25.25. Граница M^2 построенной нормальной трубчатой окрестности радиуса ε , очевидно, проектируется на $\mathbb{R}P^2$ (две концевые точки нормального отрезка переходят в его центр, лежащий на $\mathbb{R}P^2$). Таким образом, M^2 является гладким двумерным компактным замкнутым многообразием, двулистно накрывающим проективную плоскость. Если мы докажем, что это многообразие связно, то тем самым будет доказано, что это — двумерная сфера, так как S^2 — единственное двулистное связное накрытие над $\mathbb{R}P^2$.

Для установления связности достаточно рассмотреть две точки на M^2 , являющиеся концами одного и того же нормального отрезка, и предъявить на M^2 путь, соединяющий эти две точки. Для построения такого пути достаточно рассмотреть точку T на $\mathbb{R}P^2$, являющуюся центром рассматриваемого отрезка, и взять на $\mathbb{R}P^2$ замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в точке T и при передвижении вдоль которого меняется ориентация двуместного репера, скользящего вдоль пути и остающегося все время касательным к $\mathbb{R}P^2$. Тогда, дополнив этот репер третьим вектором, ортогональным к $\mathbb{R}P^2$, и рассмотрев след этого вектора, высекаемый им при непрерывном передвижении репера по замкнутому пути, мы и получаем на M^2 непрерывный путь, соединяющий две выбранные нами точки.

Дополнительное замечание. Построенное погружение двумерной сферы в трехмерное евклидово пространство позволяет доказать замечательный топологический факт — возможность «выворачивания

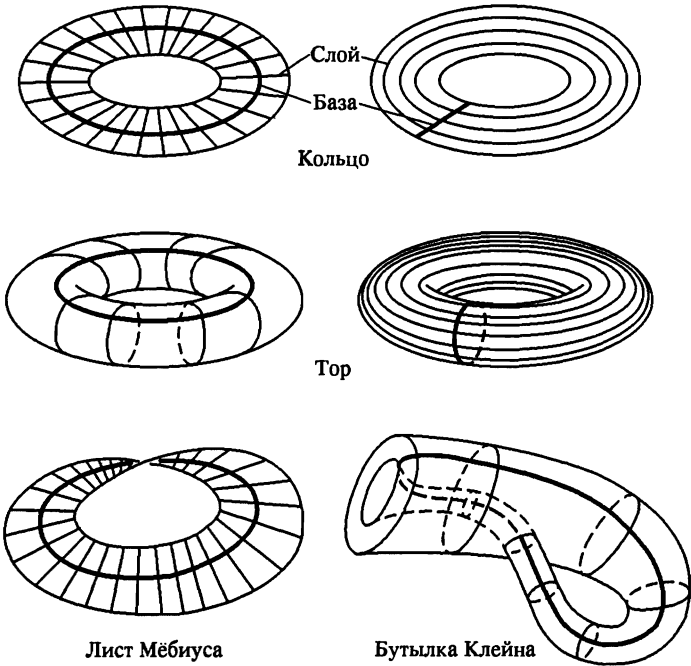


Рис. 170. Тор, кольцо, бутылка Клейна

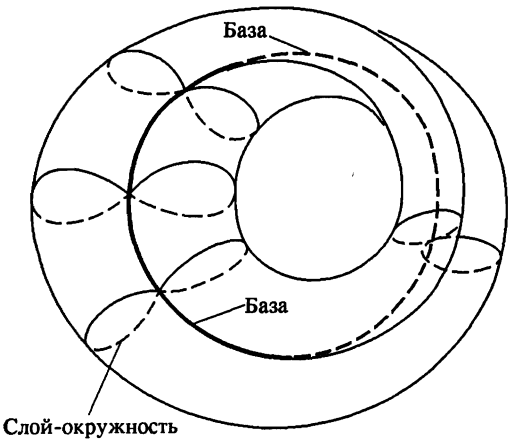


Рис. 171. Бутылка Клейна

наизнанку» двумерной сферы в $\mathbb{R}^3$. Эта задача находится за пределами нашего курса, поэтому ограничимся только кратким пояснением. Указанное погружение S^2 таково, что позволяет, оставаясь в классе регулярных погружений, поменять местами внешность и внутренность двумерной сферы. В самом деле, достаточно рассмотреть гладкую деформацию двумерной сферы вдоль нормального векторного поля, определяемого описанными выше нормальными отрезками. При этом внутренняя и внешняя поверхности сферы поменяются местами.

25.50. Структуры расслоенных пространств показаны на рис. 170, 171. Жирной линией показана база расслоения, а тонкими линиями — слои.

25.58. Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, которое задается формулами $(x, y) \mapsto (x^2, y^3)$. При этом отображении прямая $x = y$ переходит в полукубическую параболу $y^3 = x^2$.

29.1. $3\sqrt{2}/5$.

29.2. $1/4$.

29.3. а) 0; б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{2} + 3)$; в) 0; г) -2 ; д) $\frac{\pi a^2}{\sqrt{a + R^2}}$.

29.5. $\langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle$.

29.10. а) $(0, x, y - x)$; б) $(0, 0, y^2 - 2xz)$; в) $(0, e^x - xe^y, 0)$;
 г) $(0, 3x^2, 2y^3 - 6xz)$; д) $(0, -x(x + y^2), x^3 + y^3)$;
 е) $(0, xz^2 + yze^{x^2}, -2xyz)$; ж) $(\sin xz/x, 0, -\sin xz/y)$;
 з) $(xz/(x^2 + y^2), yz/(x^2 + z^2), -1)$.

29.11. Использовать теорему о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

29.15. Сферу S^3 представить как группу кватернионов единичного модуля.

29.20. Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — особая точка векторного поля $\text{grad}(\text{Re } f)$, где $f(z) = u(z) + iv(z)$, т. е.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0.$$

Согласно условию Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x},$$

следовательно, $f'_z(z_0) = 0$. Обратно, пусть $f'_z(z_0) = 0$. Так как $f'_z \equiv 0$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 0$, т.е. $\text{grad}(\text{Re } f)(z_0) = 0$. Для поля $\text{grad}(\text{Im } f)$ доказательство аналогично.

29.21. Будем искать интегральные траектории только в полуплоскости, лежащей выше прямой AB . Линии уровня для функции $f(x)$ — это дуги окружностей, для которых отрезок AB является хордой. Вектор $\text{grad } f(x)$ ортогонален линии уровня. Следовательно, ортогональный ему вектор является касательным к линии уровня, т.е. к окружности, и все описанные дуги окружностей являются интегральными траекториями потока $v_1(x)$.

29.22. Пусть поток $\mathbf{v} = (P, Q)$ — безвихревой, т.е.

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Найдем такую функцию f , что $P = \partial f / \partial x$, $Q = \partial f / \partial y$. Для этого проинтегрируем первое соотношение по x от 0 до x :

$$f(x, y) = \int_0^x P \, dx + g(y).$$

Для того чтобы найти $g(y)$, продифференцируем последнее соотношение по y :

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \int_0^x \frac{\partial P}{\partial y} y \, dx + g'(y) = \\ &= \int_0^x \frac{\partial Q}{\partial s} x \, dx + g'(y) = Q(x, y) - Q(0, y) + g'(y). \end{aligned}$$

Таким образом, $Q(x, y) = Q(x, y) - Q(0, y) + g'(y)$. Поэтому $g'(y) = Q(0, y)$, т.е.

$$g(y) = \int_0^y Q(0, y) \, dy + C.$$

Следовательно,

$$f(x, y) = \int_0^x P(x, y) \, dy + \int_0^y Q(0, y) \, dy + C.$$

Пусть γ_1 и γ_2 — два пути из $(0, 0)$ в точку (x, y) в плоскости (x, y) . Тогда, если $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, то

$$\int_{\gamma_1} (P dx + Q dy) = \int_{\gamma_2} (P dx + Q dy).$$

Следовательно,

$$f(x, y) = \int_{\gamma} (P dx + Q dy) + C,$$

где γ — произвольный путь из $(0, 0)$ в (x, y) .

Пусть поток еще и несжимаем, т. е. $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$. Рассмотрим поток $\mathbf{v}' = (-Q, P)$. Очевидно, $\operatorname{rot} \mathbf{v}' = 0$, следовательно, поле $\mathbf{v}'$ потенциально. Таким образом, существуют такие функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$, что $\mathbf{v} = \operatorname{grad} a(x, y)$, $\mathbf{v}' = \operatorname{grad} b(x, y)$. Ввиду того, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$, получаем, что $a(x, y)$ и $b(x, y)$ — гармонические функции, т. е. $\Delta a \equiv \Delta b \equiv 0$. Рассмотрим функцию $f = a + ib$. Она комплексно-аналитическая, так как имеют место уравнения Коши–Римана:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = P(x, y), \quad \frac{\partial a}{\partial y} = -\frac{\partial b}{\partial x} = Q(x, y).$$

Такая функция f называется комплексным потенциалом потока.

29.25. Указание. $d\varphi_2$ гомотопно $d\varphi_1$.

29.32. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ линейное дифференциальное уравнение $\dot{x} = Ax$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Интегральные траектории этого уравнения, принадлежащие сфере $S^3 = \{x : |x| = 1\}$, и есть искомое множество. Ясно, что $x(t) = e^{At}x(0)$. Если рассматривать $\mathbb{R}^4$ как $\mathbb{C}^2(z_1, z_2)$, где $z_1 = x_1 + ix_0$, $z_2 = x_3 + ix_2$, то интегральная траектория, проходящая через точку $(z_1, z_2) \in S^3$, имеет вид $(e^{it}z_1, e^{it}z_2)$, поскольку e^{At} имеет комплексную запись $\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix}$. Поставим в соответствие этой траектории точку $(z_1 : z_2)$, принадлежащую пространству CP^1 (которое

гомеоморфно S^2). Соответствие корректно, поскольку любая другая пара $(z'_1 : z'_2)$, лежащая на той же траектории, отличается от $(z_1 : z_2)$ лишь множителем e^{it} и, следовательно, задает ту же точку в $\mathbb{CP}^1$. Остается заметить, что построенное отображение взаимно-однозначно и непрерывно.

30.21. Зафиксируем ортонормированный репер $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathbb{R}^3$. Произвольное состояние описанной системы однозначно задается точкой $x \in S^2$ и вектором скорости $v(x) \in T_x(S^2)$, где $|v(x)| = c = \text{const} \neq 0$. Отображение $x \rightarrow x, v(x) \rightarrow v(x)/c$, очевидно, является гомеоморфизмом; x — единичный вектор в $\mathbb{R}^3$, выходящий из точки 0, $v(x)$ — единичный вектор в $\mathbb{R}^3$ (начало $v(x)$ перенесем в точку 0). Это преобразование тождественно на векторах x и $v(x)$; x и v ортогональны. Пусть $y \in \mathbb{R}^3$ — такой вектор, что $|y| = 1$, он ортогонален векторам x и v , и система $\{e_1, e_2, e_3\}$ одинаково ориентирована с системой $\{x, v, y\}$. Отображение $(x, v) \rightarrow \{x, v, y\}$, очевидно, гомеоморфизм. Каждая система $\{x, v, y\}$ взаимно-однозначно и непрерывно задается матрицей, соответствующей линейному преобразованию в $\mathbb{R}^3$, переводящему ортонормированный репер $\{e_1, e_2, e_3\}$ в ортонормированный репер $\{x, v, y\}$. Эти матрицы образуют группу $SO(3) = \{A : AA^T = E, \det A = 1\}$. Таким образом, пространство состояний нашей системы гомеоморфно многообразию $SO(3)$. Любое ортогональное преобразование $\mathbb{R}^3$, сохраняющее ориентацию, есть вращение вокруг некоторой оси на угол φ , где $-\pi < \varphi < \pi$.

30.22. У к а з а н и е. Прокатить шар таким образом, чтобы его точка касания с нижней плоскостью описала границу прямоугольника с вершинами в указанном порядке: $(0, 0), (\pi/2, 0), (\pi/2, \varphi), (0, \varphi), (0, 0)$. Показать, что при этом шар повернется на угол φ вокруг оси, проходящей через его центр параллельно оси Ox . Аналогично реализовать поворот на угол ψ вокруг оси Oy . Обозначим эти повороты соответственно $A_x(\varphi), A_y(\psi)$. Показать, что композициями этих поворотов можно получить любой элемент группы $SO(3)$. См. задачу 30.10 про углы Эйлера.

30.39. Пусть G — конечная группа, действующая эффективно на $\mathbb{R}^n$, т. е. если $gx = x$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$, то $g = e$. Группа $\mathbb{Z}_k$, порожденная

некоторым элементом $g \neq e$, тоже эффективно действует на $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространство $X = G/\mathbb{Z}_k$, где $x \sim y$, если $y = g^l x$. Так как $\mathbb{R}^n \rightarrow X$ является накрытием, то $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_k$, $\pi_i(X) = \pi_i(\mathbb{R}^n) = 0$ при $i > 1$. Значит, пространство X гомотопически-эквивалентно пространству $K(\mathbb{Z}_k, 1)$, т.е. линзовому пространству. Но гомологии $K(\mathbb{Z}_k, 1)$ нетривиальны в бесконечном числе размерностей, в то время как X не имеет клеток размерностей больше n . Таким образом, для завершения доказательства необходимо лишь обосновать следующие утверждения: а) если на $\mathbb{R}^n$ действует без неподвижных точек дискретная группа G и $X_G = \mathbb{R}^n/G$ — пространство орбит, то естественное отображение $p: \mathbb{R}^n \rightarrow X_G$ является накрытием; б) $\pi_1(X_G) = G$. Доказательство этих утверждений остается читателю.

32.3. Напомним определение топологии CW -комплекса. Если K есть CW -комплекс, то множество $F \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для всех клеток e_i^q полный прообраз $(f_i^q)^{-1}(F) \subset B^q$ замкнут в B^q . Будем обозначать эту топологию символом (W) .

Предположим, что в пространстве X есть две топологии $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$. Скажем, что $\{V_\beta\} \geq \{U_\alpha\}$ (сильнее), если для каждой точки $x \in X$ и для каждого $V_{\beta_0} \ni x$ найдется такое $U_{\alpha_0} \ni x$, что $U_{\alpha_0} \subset V_{\beta_0}$.

Предположим, что в CW -комплексе, помимо топологии (W) , есть еще некоторая топология $\{U_\alpha\}$. Возьмем произвольную точку $x \in K$, т.е. точку, принадлежащую CW -комплексу и $U_{\alpha_0} \ni x$. Окрестность является объединением попарно-непересекающихся открытых пересечений $(e_i^q \cap U_{\alpha_0})$. Рассмотрим полный образ $(f_i^q)^{-1}(U_{\alpha_0})$. Он открыт в B^q (это следует из непрерывности отображений f_i^q). Значит, для дополнения $(K \setminus U_{\alpha_0})$ полный прообраз $(f_i^q)^{-1}(K \setminus U_{\alpha_0})$ замкнут в B^q для всех e_i^q . По аксиоме (W) следует, что $(K \setminus U_{\alpha_0})$ замкнуто в K , значит, U_{α_0} открыто в топологии (W) , т.е. U_{α_0} принадлежит системе открытых множеств (W) .

32.25. Бутылка Клейна.

32.32. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in H(X', Y)$, $\alpha_1 \sim \alpha_2$. Это значит, что существует гомотопия $F: X' \times I \rightarrow Y$, такая, что $F(x, 0) = \alpha_1(x)$, $F(x, 1) = \alpha_2(x)$. Положим $F' = F \circ \varphi$. Тогда $F': X \times I \rightarrow Y$, $F'(x, 0) = F(h(x), 0) =$

$= \alpha_1(h(x)), F'(x, 1) = F(h(x), 1) = \alpha_2(h(x))$. Следовательно,

$$\alpha_1 \circ h \sim \alpha_2 \circ h.$$

32.34. Пусть $S^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n$, где S^{n+1} является надстройкой над S^n . Так определенная сфера S^∞ является CW -комплексом. Рассмотрим $\alpha \in \pi_i(S^\infty)$ и $f \in \alpha: f: S^i \rightarrow S^\infty$, и f переводит отмеченную точку в S^i в отмеченную точку S^∞ . Пусть $f: K \rightarrow L$ — непрерывное отображение комплекса K в комплексе L , причем на подкомплексе $K_1 \subset K$ отображение клеточно. Тогда существует такое отображение $g: K \rightarrow L$, что: а) f гомотопно g ; б) g клеточно на K ; в) $f|_{K_1} \equiv g|_{K_1}$; г) гомотопия, соединяющая f и g , тождественна на K_1 . Этот факт означает, что для f существует гомотопное ему отображение, которое S^i переводит в i -мерный остов S^∞ , т.е. в S^i , но $S^i \subset S^{i+1} \subset S^\infty$. Значит, $g: S^i \rightarrow S^{i+1}$. Поскольку $\pi_i(S^n) = 0$ при $i < n$, то любое отображение $i \in \alpha \in \pi_i(S^\infty)$ гомотопно отображению, переводящему всю S^i в отмеченную точку S^n (постоянному отображению). Это и означает, что отображение $f: S^i \rightarrow S^\infty$ гомотопно постоянному. Отображение f выбиралось произвольно, следовательно, $\pi_i(S^\infty) = 0$.

Если X и Y — клеточные комплексы и отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп, то f — гомотопическая эквивалентность. В качестве f возьмем отображение $S^\infty \rightarrow *$. Изоморфизм гомотопических групп индуцируется, так как все они равны нулю. Значит, сфера S^∞ гомотопически эквивалентна точке. Следовательно, S^∞ стягивается к точке.

32.36. Пусть $p^{-1}(x_0) = F_0$, $p^{-1}(x_1) = F_1$. Пусть $\varphi_0: F_0 \rightarrow X$ — вложение. Тогда $p \circ \varphi_0: F_0 \rightarrow x_0 \in Y$. Соединим x_0 и x_1 путем, т.е. устроим гомотопию между отображением F_0 в x_0 и x_1 , а именно: $\psi_t: F_0 \rightarrow Y$, $\psi_t(F_0) = \gamma(t)$, где γ — наш путь. Тогда из аксиомы о накрывающей гомотопии следует, что существует накрывающая гомотопия (семейство отображений $\varphi_t: F_0 \rightarrow X$), такая, что $(p \circ \varphi_t)(F_0) = \gamma(t)$, т.е. $(p \circ \varphi_1)(F_0) = \gamma(1) = x_1$. Отсюда следует, что $\varphi_1(F_0) \subset F_1$. Итак, по пути γ мы построили отображение $\gamma\varphi_1: F_0 \rightarrow F_1$. Докажем, что $\gamma\varphi_1$ зависит только от гомотопического класса пути γ , т.е. если γ_1 гомотопно γ_2 , то $\gamma_1\varphi_1$ гомотопно $\gamma_2\varphi_1$. Заметим, что построенное нами отображение $F_0 \rightarrow F_1$ не зависит от выбора накрывающей гомотопии в том смысле, что любые два таких отображения гомотопны. Действительно, пусть φ_t и ξ_t накрывают ψ_t . Тогда отображение $\varphi_1: F_0 \rightarrow F_1$ гомотопно $\varphi_0: F_0 \rightarrow F_0$, $\varphi_0 = \xi_0$, а последнее, в свою очередь, гомотопно $\xi_1: F_0 \rightarrow F_1$.

Пусть теперь дано семейство γ_t путей. Покажем, что $\gamma_0 \varphi_1$ гомотопно $\gamma_1 \varphi_1$. Имеем отображение

$$\gamma_0 \varphi : F_0 \times I \rightarrow X; \quad (p \circ \gamma_0 \varphi)(F_0 \times I) = \gamma_0.$$

В Y существует гомотопия γ_0 в γ_1 , которую можно накрыть таким отображением $\Phi: (F_0 \times I) \times I \rightarrow X$, что $\Phi|_{(F_0 \times I) \times 0} = \gamma_0 \varphi$. Пусть $\Phi|_{(F_0 \times I) \times 1} = f_t$, ясно, что $(p \circ f)(F_0 \times I) = \gamma_1$. Следовательно, отображение f_t можно взять в качестве накрытия для γ_1 , $f_1 = \gamma_1 \varphi_1$. Тогда $\Phi|_{(F_0 \times I) \times I}$ является гомотопией между $\gamma_1 \varphi_1$ и $\gamma_0 \varphi_1$. Заметим далее, что аналогично можно построить по пути $(-\gamma)$ отображение $(-\gamma)\chi_1: F_1 \rightarrow F_0$. Осталось доказать, что отображение $((-\gamma)\chi_1 \cdot \gamma \varphi_1): F_0 \rightarrow F_0$ гомотопно тождественному. Но это отображение можно рассматривать как отображение, индуцированное путем $\gamma + (-\gamma)$, который, очевидно, гомотопен отображению в точку.

32.43. Решение ясно из рис. 172.

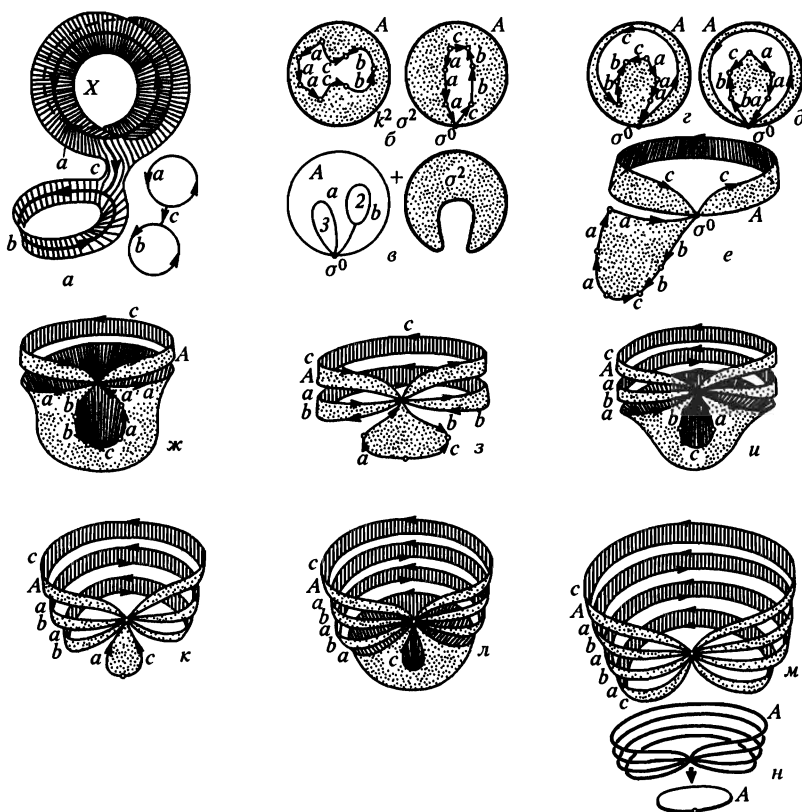


Рис. 172

32.44. Пусть $S^k \times S^{n-k}$ — клеточный комплекс, у которого имеются лишь четыре клетки: e^0 , e^k , e^{n-k} , e^n . Рассмотрим отображение $f: S^k \times S^{n-k} \rightarrow S^n$, $f(e^0) = *$ — некоторая точка в S^n ; возьмем ее за нульмерную клетку в S^n .

По теореме о клеточной аппроксимации существует отображение $g: S^k \times S^{n-k} \rightarrow S^n$, которое уже является клеточным и которое гомотопно f , причем на e^0 $f(e^0) = g(e^0)$ и вся гомотопия, соединяющая f и g , совпадает на e^0 с f . Поскольку S^n состоит лишь из двух клеток: нульмерной ($*$) и n -мерной, то при отображении g клетки e^k и e^{n-k} переходят в точку на S^n . Получаем, что отображение g может быть не равным постоянному лишь на n -мерной клетке. Значит, все отображения $S^k \times S^{n-k} \rightarrow S^n$ отличны лишь на некоторое отображение n -мерной клетки в $S^k \times S^{n-k}$, а затем в S^n , переводящее всю границу в точку на S^n (из-за линейной связности S^n выбор точки не играет роли). Но эти отображения являются отображениями $S^n \rightarrow S^n$, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между $\pi(S^k \times S^{n-k}, S^n)$ и $\pi(S^n, S^n)$.

32.56. Пусть $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n, 0)$ — стандартное вложение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ в виде гиперплоскости. Рассмотрим две точки $A = (0, \dots, 0, 1)$, $B = (0, \dots, 0, -1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и построим конусы $C_A M$ и $C_B M$ с вершинами в точках A и B соответственно и с общим основанием $H \subset \mathbb{R}^n$. После этого любая деформация подмножества $\mathbb{R}^n \setminus H$ в $\mathbb{R}^n$ может быть продолжена до деформации подмножества $\Sigma(\mathbb{R}^n \setminus H)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

32.57. Предположим противное: пусть $\text{Cat}(M^n) < l(M^n; G)$, т.е. существует покрытие M^n замкнутыми множествами $X_1, \dots, X_k$, $k < l(M^n; G)$, каждое из которых стягивается по M^n в точку. В силу двойственности Пуанкаре $H_k(M^n; G) \cong H^{n-k}(M^n; G)$, коциклам $x_1, \dots, x_l$ соответствуют циклы $y_1, \dots, y_l$; при этом произведению $h = x_1 \wedge \dots \wedge x_l$ коциклов $x_1, \dots, x_l$ соответствует цикл $\alpha = y_1 \cap \dots \cap y_l$, являющийся пересечением всех циклов $y_1, \dots, y_l$. Так как оператор D двойственности Пуанкаре является изоморфизмом, то пересечение $y_1 \cap \dots \cap y_l = \alpha$ отлично от нуля (т.е. цикл α не гомологичен нулю). Так как каждое подмножество X_i ($1 \leq i \leq k$) стягивается по M^n в точку, то $H^*(M^n; X_i) = H^*(M^n)$ (где $*$ > 0). Поэтому можно считать, что цикл $y_i \in H_*(M^n)$ гомологичен циклу $y_i \in H_*(M^n; X_i)$, т.е. носитель цикла $\bar{y}_i$ лежит в $M^n \setminus X_i$, $1 \leq i \leq k$. Отсюда следует, что пересечение $\bar{y}_1 \cap \dots \cap \bar{y}_k$ (гомологичное пересечению $y_1 \cap \dots \cap y_k$) лежит в дополнении к (объединению) $X_1 \cup \dots \cup X_k$; тем более, $\bar{y}_1 \cap \dots \cap \bar{y}_k \cap \dots \cap \bar{y}_l \subset M^n \setminus (X_1 \cup \dots \cup X_k) = \emptyset$, так как $X_1, \dots, X_k$ образует покрытие M^n . Так как пересечение носите-

лей циклов $\bar{y}_1 \cap \dots \cap \bar{y}_l = \emptyset$, то соответствующее произведение коциклов $x_1 \wedge \dots \wedge x_l = 0$, что противоречит условию: $x_1 \wedge \dots \wedge x_l \neq 0$. Теорема доказана.

32.58. Рассмотрим расслоение (E, p, X) , где E — пространство всех путей пространства X , начинающихся в точке x_0 , а p — отображение, сопоставляющее каждому пути его конечную точку. Пространство E рассматривается при этом в компактно-открытой топологии. Слоем этого расслоения является пространство $\Omega X = \Omega_{x_0}$ всех петель пространства X в точке x_0 . Легко видеть, что пространство E стягивается по себе в точку (каждый путь стягивается по себе в точку x_0). Поэтому $\pi_n(E) = 0$, и, следовательно, гомотопическая последовательность этого расслоения

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(E) \rightarrow \pi_{n+1}(X) \rightarrow \pi_n(\Omega_{x_0}) \rightarrow \pi_n(E) \rightarrow \dots$$

порождает изоморфизм $\pi_n(\Omega_{x_0}) \approx \pi_{n+1}(X)$, в частности $\pi_1(\Omega_{x_0}) \approx \pi_2(X)$. Группа $\pi_n(X)$ абелева при $n \geq 2$.

32.59. Напомним два определения.

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $X \rightarrow X$ гомотопно отображению $X \rightarrow X$, приводящему все X в точку.

Связное пространство X называется *односвязным*, если $\pi_1(X) = 0$.

Так как X стягиваемо, то существует $\varphi_t: X \rightarrow X$, φ_0 — тождественное отображение $X \rightarrow X$, φ_1 — отображение $X \rightarrow x_0 \in X$. Так как определение фундаментальной группы не зависит от отмеченной точки (с точностью до изоморфизма), то пусть $\gamma: I \rightarrow X$ — произвольный путь на X , $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$; $\delta(\tau) \equiv x_0$, $\delta: I \rightarrow X$. Та же гомотопия $\varphi_t: X \rightarrow X$ устанавливает гомотопность петель γ и δ . Таким образом, любые два пути на X гомотопны, т.е. $\pi_1(X) = 0$.

32.60. Утверждение задачи вытекает из следующих двух утверждений:

а) всякий элемент из $\pi_1(B_A^1)$ (B_A^1 — букет окружностей) представим в виде конечного произведения элементов η_α^{-1} и η_α , где $\eta_\alpha \in \pi_1(B_A^1)$ — класс отображения i_α , являющегося стандартным вложением;

б) такое представление единственно с точностью до сокращения идущих подряд сомножителей η_α и η_α^{-1} .

Докажем утверждение а). Рассмотрим отображение $f: S^1 \rightarrow B_A^1$. Представим каждую окружность S^1 в $S_A^1 \in B_A^1$ в виде суммы трех одномерных симплексов P, Q, R и $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$. По теореме о симплициальной аппроксимации, отображение f гомотопно симплициальному отображе-

нию F некоторого подразделения комплекса S^1 в B_A^1 . Отображение F умножим справа на гомотопию φ_t , где φ_0 — тождественное отображение, φ_1 переводит P_α, R_α в отмеченную точку и растягивает Q_α на всю S_α^1 . Получим отображение F_1 , гомотопное исходному. Отображение F_1 переводит каждую из равных частей, на которые разделена S^1 , либо в точку, либо наматывает на одну из S_α^1 , $\alpha \in A$. Класс такого отображения в $\pi_1(B_A^1)$ представляет собой произведение элементов вида $\eta_\alpha, \eta_\alpha^{-1}$, e — единицы фундаментальной группы, т. е. класса постоянного отображения.

Перейдем к утверждению б). Произведение $\eta_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots \eta_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ ($\varepsilon_s = \pm 1$), $k \geq 1$, в котором не встречаются подряд η_α и η_α^{-1} , не равно единице в $\pi_1(B_A^1)$, т. е. не существует никаких соотношений в $\pi_1(B_A^1)$. При накрытии $p: T \rightarrow X$ прообраз каждой точки $p^{-1}x = D$ находится во взаимно однозначном соответствии с классами смежности группы $\pi_1(X)$ по подгруппе $p_*(\pi_1(T))$. В частности, если $x_1, x_2 \in T$, $x \in X$ и $p(x_1) = p(x_2) = x$, S — любой путь из x_1 в x_2 , то петля $p(S)$ с вершиной в точке x не гомотопна нулю, так как в противном случае $x_1 = x_2$. Пусть $\eta = \eta_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \dots \eta_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$, $\eta_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$ — петля, проходимая в направлении окружности букета в зависимости от знака ε_i . Возьмем $k + 1$ экземпляров букета и расположим их друг над другом. Берем η_{α_i} в первом и втором букетах, вырежем из обоих экземпляров по отрезку, а концы соединим «крест-накрест», продолжив на них проекцию π . Аналогично соединим второй букет с третьим, используя $\eta_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}$ и т. д. Если в слове η идут подряд две одинаковые буквы, то надо вырезать два отрезка из одной и той же окружности. При этом вторая операция предшествует первой, если $\varepsilon_i = 1$, и следует за ней в противном случае. Получим $(k + 1)$ -листное накрытие над B_A^1 . При этом путь η накрывается путем, начинающимся в нижней точке и кончающимся в верхней. Эта петля не гомотопна нулю.

32.61. Пусть $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ и $g: Y_2 \rightarrow Y_1$ — гомотопические эквивалентности, т. е. $g \circ f \sim \text{Id}_{Y_1}$; $f \circ g \sim \text{Id}_{Y_2}$. Определим отображение $f_*: \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(Y_2)$ и $g_*: \pi_1(Y_2) \rightarrow \pi_1(Y_1)$. (Если $\alpha: S^1 \rightarrow Y_1$, $\alpha \in \bar{\alpha} \in \pi_1(Y_1)$, то $f_*\alpha$ — класс петли $f \circ \alpha: S^1 \rightarrow Y_2$.) Так как $f_*g_* = (f \circ g)_*$, то $f_*g_*: \pi_1(Y_2) \rightarrow \pi_1(Y_2)$ и $g_*f_*: \pi_1(Y_1) \rightarrow \pi_1(Y_1)$ — изоморфизмы. Отсюда $\pi_1(Y_1) = \pi_1(Y_2)$.

32.62. Пусть $\pi_1(X) * \pi_1(Y)$ — свободное произведение $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. Пусть $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ — универсальные накрытия над X и Y соответственно. Пусть x_0 — отмеченная точка X, Y и букета $X \vee Y$. Построим следующую

щее пространство Z : возьмем $\hat{X}$, рассмотрим $p^{-1}(x_0)$, где $p: \hat{X} \rightarrow X$ — накрытие, и в каждой точке $x_0^i \in p^{-1}(x_0)$ приклеим $\hat{Y}$. отождествим x_0^i с $x_0^{i'}$, где $x_0^{i'}$ — некоторая точка из $p_1^{-1}(x_0)$, $p_1: \hat{Y} \rightarrow Y$ — накрытие. В каждой оставшейся точке из $p_1^{-1}(x_0)$ в каждом экземпляре «приклеенного» $\hat{Y}$ приклеим таким образом $\hat{X}$ и т.д. Проекцию $p'': Z \rightarrow X \vee Y$ определяем естественным образом: каждый экземпляр $\hat{Y}$ посредством p' отображается в Y и каждый экземпляр $\hat{X}$ посредством p отображается в X . Очевидно, что полученное пространство является накрытием над $X \vee Y$. Рассмотрим фундаментальную группу $X \vee Y$, точки t_1, t_2 из Z такие, что $t_1, t_2 \in (p'')^{-1}(x_0)$, и путь, соединяющий t_1 и t_2 . При проекции p'' этот путь перейдет в некоторую петлю α , представляющую класс $\tilde{\alpha}$ в $\pi_1(X \vee Y)$. Заметим, что из конструкции накрытия и из односвязности $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ следует, что путь из t_1 в t_2 единственный с точностью до гомотопии.

Пусть $\tilde{\alpha} \in \pi_1(X \vee Y)$ разлагается по образующим $\tilde{c}_i \in \pi_1(X)$ и $\tilde{b}_j \in \pi_1(Y)$, т.е. $\tilde{\alpha} = \tilde{c}_{i_1}^{\varepsilon_1} \tilde{b}_{j_1}^{\sigma_1} \tilde{c}_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots \tilde{b}_{j_n}^{\sigma_n}$. Тогда это представление однозначно с точностью до соотношений в $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$. Действительно, пусть $\tilde{\beta} = \tilde{c}_{i_1}^{\varepsilon_1} \tilde{b}_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots \tilde{c}_{i_n}^{\varepsilon_n} \tilde{b}_{j_n}^{\sigma_n} \sim 1$, где 1 — постоянная петля в точке x_0 и не все ε_k и σ_s равны нулю (мы берем редуцированное слово). Тогда $\tilde{\beta}$ можно накрыть путем в Z , который, как очевидно следует из вида накрытия, не будет замкнутым, и, следовательно, $\tilde{\beta} = 1$. Итак, мы получили, что $\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$. Этот же результат следует из теоремы Ван-Кампена о выражении фундаментальной группы комплекса через фундаментальные группы его подкомплексов и пересечений.

32.63. Определение. Если K — узел, то фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ называется *группой узла*.

Найдем копредставление этой группы. Рассмотрим верхнее (нижнее) копредставление трилистника. Пусть PK — его проекция. Точки K_i ($i = 1, \dots, 6$) делят узел на два класса замкнутых связных дуг — класс переходов и класс проходов, чередующихся друг с другом. Пусть A_1, A_2, A_3 — переходы, B_1, B_2, B_3 — проходы, F_3 — свободная группа с образующими x, y, z . Назовем путь v в $\mathbb{R}^2$ простым, если он является объединением конечного числа замкнутых прямолинейных отрезков, его начальная и конечная точки не принадлежат PK , он пересекает PK в конечном числе точек, не являющихся вершинами PK или v . Каждому пути v сопоставим $v^\# \in F_3$: $v^\# = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}$, x_{i_k} — образующие свободной группы, $\varepsilon_k = 1$ или -1 , в зависимости от того, как v про-

ходит под A_{i_k} . Верхнее копредставление группы $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ имеет вид $(x, y, z; r_1, r_2, r_3)$, где $r_i = v_i^\#$ — соотношения. Известно, что верхнее копредставление, задаваемое этой формулой, является копредставлением $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$. Петли v_1, v_2, v_3 вокруг переходов $(x, y, z$ — образующие) удовлетворяют равенствам:

$$v_1^\# = x^{-1} y z y^{-1}, \quad v_2^\# = y^{-1} z x z^{-1}, \quad v_3^\# = z^{-1} x y x^{-1}.$$

Получаем копредставление $(x y z; x = y z y^{-1}, y = z x z^{-1}, z = x y x^{-1})$. Подставим $z = x y x^{-1}$. Получим

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = (x, y; x = y x y x^{-1} y^{-1}, y = x y x).$$

Итак, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = (x, y; x y x = y x y)$. Трилистник нельзя развязать, так как его тип отличен от типа тривиального узла. Если узлы K' и K'' имеют один и тот же тип, то их дополнительные пространства обладают совпадающими фундаментальными группами. Группа $G = (x, y; x y x = y x y)$ не является бесконечной циклической группой $\mathbb{Z}$. Действительно, можно построить гомоморфизм $\theta: G \rightarrow S_3$, где S_3 порождается циклами (12), (23).

Пусть K' и K'' — связные подкомплексы связного n -мерного симплициального комплекса K , причем каждый симплекс из K принадлежит по крайней мере одному из этих подкомплексов. Пусть $D = K' \cap K''$ — пересечение, которое не пусто и не связно. Пусть F, F', F'', F_D — фундаментальные группы комплексов K, K', K'', D . В качестве начальной точки замкнутых путей возьмем $0 \in D$. Тогда каждый замкнутый путь подкомплекса D является одновременно путем комплексов K' и K'' . Сошлемся здесь на известную теорему Ван-Кампена. Группа F получается из свободного произведения $F' \times F''$, если отождествить каждые два элемента F' и F'' , соответствующие одному и тому же элементу F_D , т.е. полагая эти элементы равными, тем самым добавляя соотношения между образующими групп F' и F'' .

32.64. Найдем фундаментальную группу винтового узла, определенного следующим образом: на боковой поверхности кругового цилиндра проведем образующие на расстоянии $2\pi/m$ друг от друга, а затем повернем верхнее и нижнее основания друг относительно друга на $2\pi n/m$. После этого отождествим основания. Присоединим к $\mathbb{R}^3$ одну несобственную точку (∞) , превратив $\mathbb{R}^3$ в S^3 . Удалим из S^3 все точки, принадлежащие трубчатой окрестности узла. Получим полиэдр K , являющийся дополнением узла. Разобьем S^3 на две части тором, на котором лежит винтовой узел. Комплекс K распадается на два полнотория, у каждого из

которых на поверхности выброшена трубчатая окрестность узла. Одно полноторие возьмем в качестве K' , другое (с несобственной точкой) — в качестве K'' . Фундаментальная группа $F'(F'')$ полиэдра $K'(K'')$ есть свободная группа с одной образующей $A(B)$. Образующую A можно представить средней линией полнотория полиэдра K (аналогично поступим с B). Пересечение D обоих полноторий представляет собой закрученное кольцо. Фундаментальная группа D также является свободной с одной образующей, в качестве которой возьмем среднюю линию кругового кольца. Группа $F' \odot F''$ есть свободная группа от образующих A и B . При надлежащей ориентации путей A и B путь C , рассматриваемый как элемент группы F' , равен A^m , а как элемент группы F'' он равен B^n . Получаем соотношение $A^m = B^n$. Итак, копредставление группы $\pi_1(S^3 \setminus \gamma) = \{A, B; A^2 = B^3\}$, где γ — трилистник.

Два полученных копредставления фундаментальной группы трилистника эквивалентны. Проверку этого мы предоставляем читателю.

32.65. Выберем в качестве начальной точки замкнутых путей точку 0 , принадлежащую W . Тогда каждый замкнутый путь комплекса W является одновременно путем комплексов Z, Y , т. е. каждому элементу группы $\pi_1(W)$ соответствует элемент группы $\pi_1(X)$ и элемент группы $\pi_1(Y)$. Представим Z, Y, W в виде симплициальных комплексов. Соединим каждую вершину X путем с 0 . Если вершина лежит в W , то путь можно целиком провести в W в силу связности. Симплекс произвольной размерности комплекса X принадлежит либо Z (но не Y), либо $Y \setminus Z$, либо $Y \cap Z$. Множество всех симплексов разбивается на три непересекающихся подмножества $\bar{Z}, \bar{Y}, \bar{W}$. Образующие a_i группы $\pi_1(X)$ могут быть поставлены во взаимно-однозначное соответствие с ребрами комплекса X . В зависимости от того, какому симплициальному комплексу принадлежит это ребро ($\bar{Z}, \bar{Y}$ или $\bar{W}$), переименуем a_i в z_i, y_i или w_i . Таким образом, $\pi_1(X)$ имеет своими образующими фундаментальные группы $\pi_1(Y)$ и $\pi_1(Z)$ (образующие $\pi_1(W)$ входят в число образующих $\pi_1(Z)$ и $\pi_1(Y)$). Соотношения в группе $\pi_1(X)$ взаимно-однозначно соответствуют ребрам и треугольникам комплекса X . Вследствие разбиения комплекса X на три подмножества эти соотношения также разбиваются на три класса. Запишем соотношения:

$$\varphi_j(w_i, z_i) = 1 \text{ (в } \bar{Z} \text{)}, \quad \varphi_j(w_i, y_i) = 1 \text{ (в } \bar{Y} \text{)}, \quad \psi_j(w_i) = 1 \text{ (в } \bar{W} \text{)}.$$

Соотношения третьего типа являются определяющими для группы $\pi_1(W)$; соотношения второго и третьего типов определяют группы $\pi_1(Y)$

и $\pi_1(W)$; соотношения первого и третьего типов определяют группы $\pi_1(Z)$ и $\pi_1(W)$; и, наконец, соотношения всех трех типов определяют группу $\pi_1(X)$. Эти соотношения можно переписать следующим образом:

$$\varphi_j(w'_i, z_i) = 1, \quad \psi_j(w'_i) = 1, \quad \varphi_j(w''_i, y_i) = 1, \quad \psi_j(w''_i) = 1, \quad w'_i = w''_i.$$

Соотношения первых четырех типов определяют свободное произведение групп $\pi_1(Z)$ и $\pi_1(Y)$. Последнее соотношение означает, что элементы групп $\pi_1(Z)$ и $\pi_1(Y)$, соответствующие одному и тому же элементу w_i группы $\pi_1(W)$, должны быть отождествлены. В доказательстве использован тот факт, что W связно, так как в противном случае полученное утверждение о группе $\pi_1(X)$ неверно.

Пример. $Z = Y = I$ — отрезок, $W = S^0$, $X = S^1$, $\pi_1(X) = Z$, $\pi_1(Z) = \pi_1(Y) = e$.

32.85. Как известно, для любой подгруппы $G \subset \pi_1(X)$ существует накрытие $p: \bar{X}_G \rightarrow X$, такое, что $\text{Im } p_*(\pi_1(\bar{X}_G)) = G$. Введем на $\bar{X}_G$ умножение. Пусть $\hat{e} \in p^{-1}(e)$, где e — единица в X , $\hat{x}, \hat{y} \in \bar{X}_G$. Соединим $\hat{e}$ с $\hat{x}$ и $\hat{y}$ путями $\hat{x}_t$ и $\hat{y}_t$: $\hat{x}_0 = e$, $\hat{x}_1 = \hat{x}$, $\hat{y}_0 = e$, $\hat{y}_1 = \hat{y}$. Пусть $p(\hat{x}) = x$, $p(\hat{y}) = y$. Тогда x и y соединены с e путями $p(\hat{x}_t) = x_t$ и $p(\hat{y}_t) = y_t$ соответственно. Эти два пути мы можем умножить в X , т. е. рассмотреть путь $z_t = \hat{x}_t \times \hat{y}_t$, который соединяет e с точкой $z_1 = z = xy$. Пусть z_t можно поднять в $\bar{X}_G$ в путь $\hat{z}_t$. Положим $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}_1$. Остается проверить корректность определения. Можно доказать следующее утверждение. Пусть X — группоид с единицей, $\alpha, \beta \in \pi_1(X, e)$. Тогда $\alpha\beta = \alpha \times \beta$, где слева — умножение в $\pi_1(X, e)$, а справа — умножение в X .

Доказательство мы опускаем, предоставляя его читателю. Корректность определения следует непосредственно из этого утверждения.

32.86. При $p > 0$ и $q > 0$ для любого $n < p + q - 1$ имеет место изоморфизм $\pi_n(S^p \vee S^q) \approx \pi_n(S^p) + \pi_n(S^q)$. Поскольку пара $(S^p \times S^q, S^p \vee S^q)$ является относительной $(p + q)$ -мерной клеткой, то отсюда следует, что $\pi_m(S^p \times S^q, S^p \vee S^q) = 0$ при $m < p + q$. Следовательно, $\pi_m(S^p \vee S^q) = \pi_m(S^p) + \pi_m(S^q)$.

Если для тройки (X, A, x_0) пара (X, A) является относительной n -мерной клеткой, то $\pi_m(X, A, x_0) = 0$ при $0 < m < n$. Доказательство предоставляется читателю.

32.88. Из теоремы Фрейденшталя следует утверждение: гомоморфизм вырезания $\pi_m(U, S^n) \rightarrow \pi_m(S^{n+1}, V)$ является изоморфизмом при $m < 2n$ и эпиморфизмом при $m = 2n$, где U и V — северная и южная полусферы

S^{n+1} . Найдем $\pi_3(D^2, \partial D^2)$:

$$\dots \rightarrow \pi_n(\partial D^2) \rightarrow \pi_n(D^2) \rightarrow \pi_n(D^2, \partial D^2) \rightarrow \pi_{n-1}(\partial D^2) \rightarrow \dots$$

При $n = 3$ имеем $\pi_3(\partial D^2) = \pi_3(S^1) = 0$, $\pi_3(D^2) = 0$, $\pi_2(\partial D^2) = 0$. Отсюда $\pi_3(D^2) \approx \pi_3(D^2, \partial D^2) = 0$. Из точной последовательности $\pi_3(S^2) = \pi_3(S^2, D^2) = \mathbb{Z}$.

32.89. Доказательство следует из точной гомотопической последовательности расслоения Серра.

32.90. Доказательство следует из клеточного представления проективного пространства и из рассмотрения стандартного накрытия.

32.92. Докажем, что $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$. Здесь $\mathbb{C}P^n$ — клеточный комплекс, который имеет по одной клетке в каждой четной размерности, т.е. одномерных клеток у него нет. По теореме о фундаментальной группе клеточного комплекса с одной нульмерной клеткой получаем, что $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$. Далее, сфера S^{2n+1} расслаивается над $\mathbb{C}P^n$ со слоем S^1 . Действительно, пусть $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ (стандартное вложение). Точка $(z_1, \dots, z_{n+1})$ принадлежит S^{2n+1} тогда и только тогда, когда $\sum |z_i|^2 = 1$. Далее,

$$\mathbb{C}P^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \text{ с точностью до умножения на } \lambda\},$$

т.е. $\lambda(z_1, \dots, z_{n+1})$ и $(z_1, \dots, z_{n+1})$ определяют одну и ту же точку в $\mathbb{C}P^n$. Устроим отображение $p: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $p(z_1, \dots) = (z_1, \dots)$. Оно непрерывно и его образ — все пространство $\mathbb{C}P^n$. Над точкой из $\mathbb{C}P^n$ «висит» следующее множество точек из S^{2n+1} : пусть $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$, тогда $f^{-1}(z_1, \dots, z_{n+1}) = \{e^{i\varphi}(z_1, \dots, z_{n+1})\} \subset S^{2n+1}$, где f^{-1} — полный прообраз, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Действительно, $e^{i\varphi_1}(z_1, \dots, z_{n+1})$ и $e^{i\varphi_2}(z_1, \dots, z_{n+1})$ — одна и та же точка в $\mathbb{C}P^n$, но если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то в S^{2n+1} являются расслоением. Осталось применить точную гомотопическую последовательность расслоения.

32.93. Утверждения следуют из теоремы о клеточной аппроксимации.

32.94. Пусть $p_X: X \times Y \rightarrow Y$, $p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ — проекции. Устроим гомоморфизм $\varphi: \pi_i(X \times Y) \rightarrow \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y)$, а именно: $\varphi(\alpha) = (p_X \cdot \alpha, p_Y \cdot \alpha)$. Докажем, что φ — гомоморфизм:

$$\varphi(\alpha + \beta) = (p_X \cdot (\alpha + \beta), p_Y \cdot (\alpha + \beta)) =$$

$$= (p_X \cdot \alpha, p_Y \cdot \alpha) \oplus (p_X \cdot \beta, p_Y \cdot \beta) = \varphi(\alpha) \oplus \varphi(\beta).$$

Докажем, что φ — мономорфизм. Пусть $\varphi(\alpha) = 0$, т.е. $p_X \cdot \alpha = 0$, $p_Y \cdot \alpha = 0$. Следовательно, $\psi_X = p_X \circ \alpha: S^n \rightarrow X$ гомотопно постоянному, т.е. существует $\psi_X: S^n \rightarrow X$, такое, что $\psi_X \circ \alpha = \psi_X$, $\psi_X = *$. Тогда

устроим гомотопию Φ_t следующим образом: $\Phi_t(\alpha) = (\psi_{x^*}(\alpha), p_{Y^*}\alpha)$. $\Phi_1(\alpha)$ — отображение S^n в $(*) \times Y \subset X \times Y$, $(*, p_{Y^*}(\alpha)) \in \pi_n((*) \times Y) = \pi_n(Y)$. Но $p_{Y^*}(\alpha)$ — стягиваемый сфероид, т. е. α — стягиваем.

Докажем, что φ — эпиморфизм. Пусть $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_n(Y)$. Тогда $\alpha = (\beta, \gamma)$ при φ переходит в $\beta \oplus \gamma$.

Пусть есть универсальные накрытия: $E_1 \xrightarrow{p_1} X$, $E_2 \xrightarrow{p_2} Y$. Рассмотрим отображение $p_1 \times p_2$: $E_1 \times E_2 \rightarrow X \times Y$, $(p_1 \times p_2)(e_1 \times e_2) = (p_1 e_1 \times p_2 e_2)$. Утверждается, что это — накрытие. Доказательство мы опускаем, предоставляя его читателю.

Пусть $\gamma_1 \in \pi_1(X, x_0)$, $\gamma_2 \in \pi_1(Y, y_0)$, $\alpha_1 \in \pi_n(X, x_0)$, $\alpha_2 \in \pi_n(Y, y_0)$, и пусть задана некоторая гомотопия F_t вдоль пути γ_1 сфероида α_1 так, что $F_0(\alpha_1) = \alpha_1$, $F_1(\alpha_1) = \gamma_1[\alpha_1]$, $F_t(\alpha_1) \in \pi_n(X, \gamma_1(t))$. Аналогично для $\Phi_t(\alpha_2)$: $\Phi_0(\alpha_2) = \alpha_2$, $\Phi_1(\alpha_2) = \gamma_2[\alpha_2]$, $\Phi_t(\alpha_2) \in \pi_n(Y, \gamma_2(t))$. Определим гомотопию вдоль петли $\gamma = (\gamma_1 \oplus \gamma_2)(t)$ в $X \times Y$ сфероида $\alpha = (\alpha_1 \oplus \alpha_2)$ как $F_t(\alpha_1) \times \Phi_t(\alpha_2)$. Тогда $F_1(\alpha_1) \times \Phi_1(\alpha_2) = \gamma[\alpha_1] \oplus \gamma_2[\alpha_2]$. Итак, $[\gamma_1 \oplus \gamma_2][\alpha_1 \oplus \alpha_2] = \gamma_1[\alpha_1] \oplus \gamma_2[\alpha_2]$, но так как любая петля γ и любой сфероид из $X \times Y$ имеют вид $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ и $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ для некоторых $\gamma_1 \in \pi_1(X)$, $\gamma_2 \in \pi_n(Y)$, $\alpha_1 \in \pi_n(X)$, $\alpha_2 \in \pi_n(Y)$, то действие $\pi_1(X \times Y)$ на $\pi_n(X \times Y)$ полностью определено.

32.96. Воспользуемся расслоением Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. Оно устроено следующим образом:

$$S^3 = \{(z_1, z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \in \mathbb{C}^2, \quad S^2 = \mathbb{C}P^1,$$

т. е. $S^2 = \{(z_1, z_2) : (\lambda z_1, \lambda z_2) \sim (z_1, z_2)\}$. Получаем расслоение $S^3 \rightarrow S^2$. Для этого расслоения напомним точную последовательность

$$\dots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \dots$$

Из свойства последовательности $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$ при $i \geq 3$. По теореме Фрейденшталя, гомоморфизм $\pi_{i-1}(S^{n-1}) \rightarrow \pi_i(S^n)$ является эпиморфизмом при $i \leq 2n - 2$ и изоморфизмом при $i < 2n - 2$, т. е. гомоморфизмы $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_3(S^3)$ являются изоморфизмами. Следовательно, $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Так как $\pi_i(S^3) = \pi_i(S^2)$, $i \geq 3$, то $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$.

34.21. а) См. рис. 173. б) См. рис. 174.

Рассмотрим вложение тора в $\mathbb{R}^3$, при котором его ось вращения горизонтальна, т. е. тор «стоит вертикально». На рис. 174а показаны критические уровни функции высоты. Начнем «заваливать тор набок». При

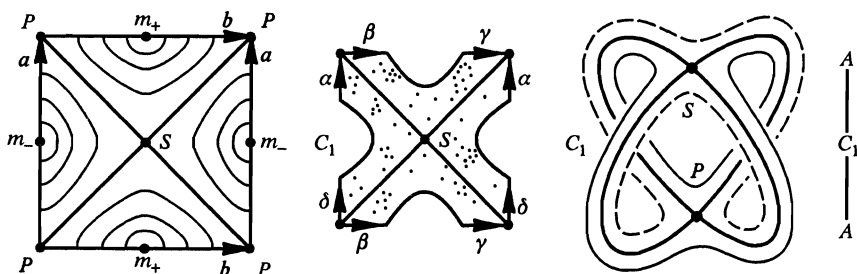


Рис. 173

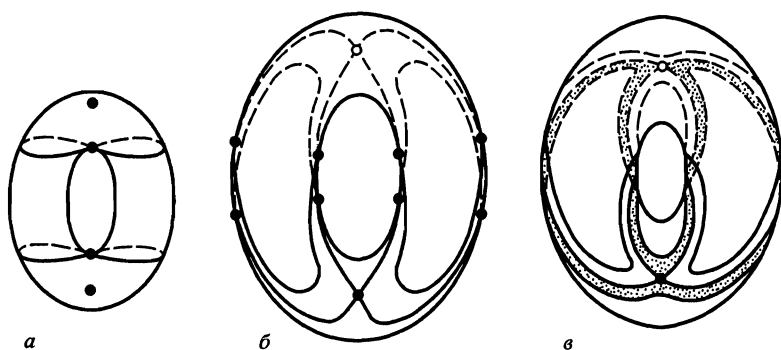


Рис. 174

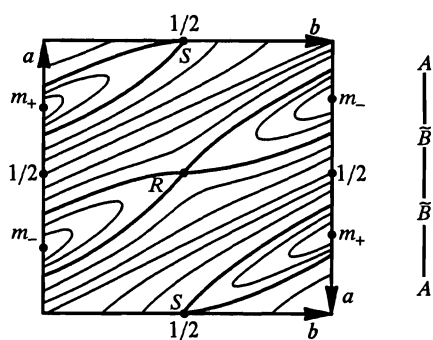


Рис. 175

этом критические значения, соответствующие седловым критическим точкам, сближаются. На рис. 174б показан момент, когда седловые критические точки оказались на одном уровне. Изображен соответствующий

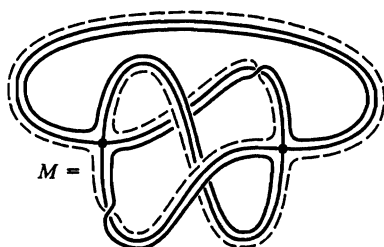
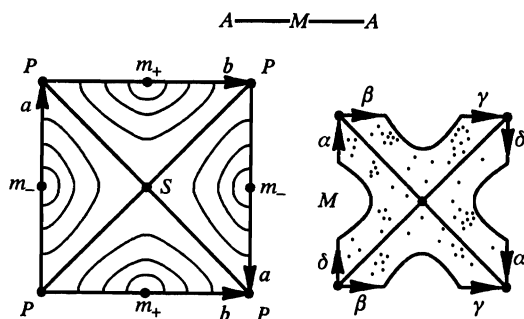


Рис. 176

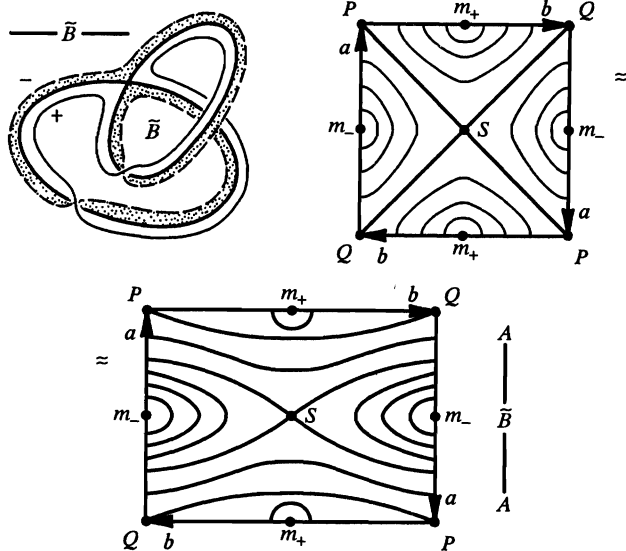


Рис. 177

критический уровень функции высоты. На рис. 174в изображен атом, т. е. окрестность седлового критического уровня.

34.22. См. рис. 175.

34.23. См. рис. 176.

34.24. См. рис. 177.

35.1. Достаточно рассмотреть уравнения Эйлера функционала действия и записать эти уравнения в локальных координатах. При этом следует использовать явные формулы для символов Кристоффеля.

35.2. Следует выписать уравнения Эйлера для обоих функционалов, затем рассмотреть, что происходит с функционалами при замене параметра (времени) на экстремальных-решениях. Искомое утверждение следует из того, что функционал длины инвариантен при замене параметра, а функционал действия — не инвариантен.

35.3. Доказательство сводится к прямому вычислению. Следует записать уравнение Эйлера в декартовых координатах и воспользоваться явными формулами для средней кривизны, подсчитанной для графика гладкой функции.

35.4. Доказательство аналогично доказательству предыдущей задачи. Эта аналогия основана на том, что в обеих задачах коразмерность графика функции равна единице, поэтому тензор средней кривизны задается одной функцией — а именно, средней кривизной.

35.5. Использовать классическое неравенство

$$\left(\int_a^b f g \, dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 \, dt \right) \left(\int_a^b g^2 \, dt \right).$$

35.6. Возвести в квадрат подынтегральные выражения и сравнить их.

35.7. Использовать локальную теорию уравнения Бельтрами–Лапласа, записанного в криволинейной системе координат. Из этой теории следует, что на двумерной поверхности, заданной аналитическими функциями, локально всегда можно ввести конформные координаты. Добавление условия, что средняя кривизна равна 0, превращает эти координаты в гармонические.

35.8. Например, функция $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$.

35.9. а) Указание. Пусть $r = 1$, ω_1, ω_2 — ортонормированная пара векторов. Надо доказать, что $\omega(\omega_1, \omega_2) \leq 1$, где $\omega(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)$.

Рассмотрим

$$H = (\omega_1, \omega_2) = (S + iA)(\omega_1, \omega_2) = S(\omega_1, \omega_2) + iA(\omega_1, \omega_2) = iA(\omega_1, \omega_2).$$

Отсюда $|H(\omega_1, \omega_2)| = |A(\omega_1, \omega_2)| \leq |\omega_1| \cdot |\omega_2| = 1$. Пусть теперь $A(\omega_1, \omega_2) = 1$. Тогда $H(\omega_1, \omega_2) = i$, т.е. $S(i\omega_1, \omega_2) = 1$. Так как $|\omega_2| = |i\omega_1| = 1$, то отсюда следует, что $\omega_2 = i\omega_1$, т.е. двумерная плоскость, натянутая на ω_1, ω_2 , является комплексной прямой. Для $r > 1$ нужно воспользоваться соотношением: $\Omega^{(2r)}(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\det g_{ij}}$, где g_{ij} — кососимметрическое скалярное произведение, определяемое 2-формой $\omega^{(2)}$.

б) Указание. Утверждение вытекает из неравенства Виртингера (см. выше) и из формулы Стокса. В самом деле, рассмотрим внешнюю 2-форму

$$\omega = \sum_{k=1}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k \quad \text{и} \quad \Omega^{(2r)} = \frac{1}{r!} \omega \wedge \dots \wedge \omega \quad (r \text{ раз}).$$

Так как $d\omega = 0$, то и $d\Omega^{(2r)} = 0$. Из формулы Стокса следует:

$$\int_W \Omega^{(2r)} = \int_V \Omega^{(2r)}.$$

При интегрировании формулы $\Omega^{(2r)}$ по $2r$ -мерному подмногообразию следует рассмотреть (в локальных координатах $x^1, \dots, x^{2r}$) выражение вида $\Omega^{(2r)}(\omega_1, \dots, \omega_{2r}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2r}$, где $\omega_1, \dots, \omega_{2r}$ — ортонормированный базис касательной плоскости к подмногообразию (в римановой метрике, индуцированной объемлющей евклидовой метрикой в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$). Если подмногообразие W — комплексное, то

$$\Omega^{(2r)}(\omega_1, \dots, \omega_{2r}) = 1 \quad \text{и} \quad \text{vol}(W) = \int_W \Omega^{(2r)}.$$

Если подмногообразие V — общего вида (т.е. вещественно), то $\Omega^{(2r)}(\omega_1, \dots, \omega_{2r}) \leq 1$, т.е. $\int_V \Omega^{(2r)} \leq \text{vol}(V)$, что и доказывает утверждение.

в) Вычисления, проведенные в пункте б), носят локальный характер, что позволяет провести их в окрестности каждой точки на кэлеровом многообразии. Формула Стокса, напротив, имеет место на любом гладком многообразии. Напомним, что кэлерова внешняя 2-форма замкнута.

35.10. По теореме о неявной функции, одну из координат, например x^n , можно выразить (на поверхности уровня $F_0 = \text{const}$) как гладкую функцию от остальных координат. После этого следует подставить эту функцию в уравнение Эйлера для экстремали функционала J .

36.9. Заметим, что открытый шар B^n и сфера S^n с выколотой точкой гомеоморфны. Докажем наше утверждение индукцией по размерности комплекса. Если размерность $n = 0$, то утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для всех чисел, меньших n . Тогда по предположению индукции $(n - 1)$ -мерный остов K^{n-1} нашего комплекса вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$. Это значит, что на K^{n-1} заданы непрерывные вещественные функции $f_1(x), \dots, f_N(x)$, такие, что $(f_1(x), \dots, f_N(x)) \neq (f_1(y), \dots, f_N(y))$ при $x \neq y$. Пусть e_j^n , $j = 1, \dots, k$, — все n -мерные клетки нашего комплекса. Тогда функции $f_i(x)$ определены на границе каждой клетки e_j^n (обозначим ее через e_j^n). Пусть e_j^n гомеоморфна внутренности B^n замкнутого шара D^n . Тогда можно считать, что функции $f_i(x)$ заданы на $D^n \setminus B^n$. Непрерывность их при этом сохраняется, взаимная однозначность может быть потеряна. Продолжим эти функции с $D^n \setminus B^n$ на B^n (т.е. с ∂e_j^n на e_j^n) следующим образом. Пусть $z \in B^n$ и $z \neq 0$. Полагаем $f_i(z) = |z|f_i(z/|z|)$. Если $z = 0$, то полагаем $f_i(z) = 0$. Итак, мы продолжили функции f_i до непрерывных функций на всем комплексе K . Теперь определим функции $g_1^j(x), \dots, g_{n+1}^j(x)$. Вне e_j^n положим $g_s^j(x) \equiv 0$, $s = 1, \dots, n + 1$, на e_j^n полагаем

$$(g_1^j(x), \dots, g_n^j(x), g_{n+1}^j(x)) = \left(\frac{x_1}{|x|} \sin \pi |x|, \dots, \frac{x_n}{|x|} \sin \pi |x|, \cos \pi |x| + 1 \right).$$

Определим $F: K \rightarrow \mathbb{R}^{N+k(n+1)}$ равенством

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x); g_1^1(x), \dots, g_{n+1}^1(x), g_1^2(x), \dots, g_{n+1}^2(x)).$$

Отображение F взаимно-однозначно. Утверждение доказано.

36.11. Пусть $e_1, \dots, e_s$ — вершины комплекса K . Возьмем в $\mathbb{R}^{2n+1}$ точки $e'_1, \dots, e'_s$ в общем положении, т.е. при $j \leq 2n + 2$ любые j точек будут линейно независимы. Каждому остову $T = |e_{i_0} \dots e_{i_r}| \in K$ поставим в соответствие симплекс $T' = |e'_{i_0} \dots e'_{i_r}| \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Этот симплекс существует, так как в силу общего положения точек $e'_1, \dots, e'_s$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ и неравенства

$r \leq n$ точки $e_{i_0}, \dots, e_{i_r}$ линейно независимы. Симплексы образуют комплекс, изоморфный комплексу T' , так как каждой вершине соответствует одна и только одна вершина из K .

Комплекс K — триангуляция. Для доказательства этого достаточно показать, что никакие два симплекса $T'_i, T'_j \in K'$ не пересекаются. Пусть $e'_{i_0}, \dots, e'_{i_p}$ — вершины T'_i ; $e'_{j_0}, \dots, e'_{j_q}$ — вершины T'_j (некоторые вершины могут быть общими). Пусть $e'_{k_0}, \dots, e'_{k_r}$ — все точки, являющиеся вершинами хотя бы одного из симплексов T'_i и T'_j . Число $r+1$ этих точек удовлетворяет неравенству

$$r+1 \leq (p+1) + (q+1) \leq (n+1) + (n+1) = 2n+2.$$

В силу общего положения точек $e'_1, \dots, e'_s$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ точки $e'_{k_0}, \dots, e'_{k_r}$ являются вершинами некоторого невырожденного симплекса T_0 размерности не выше $2n+1$. Симплексы T'_i и T'_j являются гранями T_0 , а значит, не пересекаются, если они различны.

36.13. Проверим, что для любого $F \in \text{exp } X$ найдется множество вида $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ такое, что $F \in O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Это очевидно: $F \in O \langle X \rangle$. Проверим теперь, что для любых $O_1 = O \langle U_1, \dots, U_n \rangle, O_2 = O \langle V_1, \dots, V_k \rangle$ таких, что $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$, и для любого $F \in \text{exp } X$ такого, что $F \in O_1 \cap O_2$, найдется $O_3 = O \langle W_1, \dots, W_m \rangle$ такое, что $O_3 \subset O_1 \cap O_2$, причем $F \in O_3$.

Пусть $F \in O_1 \cap O_2$. Для любого $i = 1, \dots, n$ рассмотрим множество $F_i = U_i \cap F$. Так как $F \in O_1$, $F_i \neq \emptyset$. Так как $F \in O_2$, найдутся $V_{j_1(i)}, \dots, V_{j_l(i)}$ такие, что $F_i \subset \bigcup_{p=1}^l V_{j_p(i)}$. Можно считать, что $\{V_{j_p(i)}\}$ — все те из множеств $V_1, \dots, V_k$, которые пересекаются с F_i . Пусть $W_1, \dots, W_m$ — нумерация множеств $\{V_{j_p(i)}\}$ по всем i . По построению множеств W_i , $F \in O \langle W_1, \dots, W_m \rangle$. Кроме того, нетрудно видеть, что $O \langle W_1, \dots, W_m \rangle \subset O_1 \cap O_2$. Итак, проверено, что множества вида $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ образуют базу некоторой топологии, что и требовалось доказать.

36.14. Поскольку X — T_1 -пространство, все его одноточечные подмножества замкнуты, следовательно, отображение f определено корректно. Ясно, что f — биекция на свой образ $f(X) = \text{exp}_1 X$. Далее, пусть $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ — окрестность точки $\{x\}$ в $\text{exp } X$. Положим $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Множество U непусто, так как $x \in U_i$ для всех i . Множество $O \langle U \rangle$ является окрестностью точки $\{x\}$ в пространстве $\text{exp } X$, причем $O \langle U \rangle \subset$

$\subset O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Очевидно, что $f^{-1}(O\langle U \rangle) = U$, следовательно, f — непрерывно, так как $U = f^{-1}(O\langle U \rangle) \subset f^{-1}(O\langle U_1, \dots, U_n \rangle)$. Открытость f очевидна, так как $f(U) = O\langle U \rangle \cap \text{exp}_1 X$ для любого открытого U в X .

36.15. а) Пусть X — регулярно. Пусть $F_1 \in \text{exp } X$, $F_2 \in \text{exp } X$ и $F_1 \neq F_2$. Можно считать, что $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$. В силу регулярности пространства X найдутся такие окрестности U точки x и V множества F_1 , что $U \cap V = \emptyset$. Если $F_2 = \{x\}$, то $O\langle U \rangle$ и $O\langle V \rangle$ являются дизъюнктными окрестностями точек F_1 и F_2 в пространстве $\text{exp } X$. Если $F_2 \neq \{x\}$, то $O\langle U, X \setminus \{x\} \rangle$ и $O\langle V \rangle$ являются требуемыми окрестностями. Таким образом, $\text{exp } X$ — хаусдорфово.

б) Пусть $\text{exp } X$ — хаусдорфово. Пусть $x \in X$, F — замкнутое подмножество X такое, что $x \notin F$. Точки F и $F \cup \{x\}$ являются различными точками в пространстве $\text{exp } X$. Следовательно, найдутся непересекающиеся окрестности $O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ и $O\langle V_1, \dots, V_k \rangle$ точек F и $F \cup \{x\}$ соответственно. Пусть $V = \bigcap \{V_i \mid x \in V_i\}$. Покажем, что $V \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) = \emptyset$. Предположим, что найдется точка $y \in V \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right)$. Тогда $y \in \bigcup_{i=1}^n U_i$. Следовательно, $\{y\} \cup F \in O\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap O\langle V_1, \dots, V_k \rangle$, что противоречит выбору множеств $O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ и $O\langle V_1, \dots, V_k \rangle$. Итак, $V \cap \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) = \emptyset$, кроме того, $x \in V$ и $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Следовательно, V и $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ — дизъюнктные окрестности точки x и множества F соответственно, поэтому X — регулярно.

36.16. Докажем эквивалентность условий а) и б). Пусть X — нормально, F — замкнутое подмножество X , $O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ — его окрестность в пространстве $\text{exp } X$. Заметим, что семейство $\{U_1, \dots, U_n, X \setminus F\}$ является открытым покрытием X . Так как X нормально, по лемме об ужатии конечного открытого покрытия существует замкнутое конечное покрытие $\{F_1, \dots, F_n, F_{n+1}\}$ пространства X , причем $F_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, $F_{n+1} \subset X \setminus F$. Заметим, что F_i можно дополнить одной точкой так, чтобы выполнялось условие $F_i \cap F \neq \emptyset$ (точку можно выбрать из множества $U_i \cap F \neq \emptyset$), поэтому можно считать, что условие $F_i \cap F \neq \emptyset$ выполняется.

Так как X нормально, по лемме Урысона найдутся непрерывные на X функции $f_i: X \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, n+1$, причем $f_i|_{F_i} \equiv 0$, $f_i|_{X \setminus U_i} \equiv 1$. Для произвольного $t > 0$, $i = 1, \dots, n$ положим

$$V_{i,t} = \{x \mid f_i(x) < t\} \quad W_t = O \langle V_{1,t}, \dots, V_{n,t} \rangle.$$

Для любых q и r из отрезка $[0, 1]$ таких, что $q < r$, верно условие $\overline{V_{i,q}} \subset V_{i,r}$ (где через $\overline{A}$ здесь и далее обозначается замыкание множества A).

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся две вспомогательные леммы. Для подмножества X_0 пространства X обозначим через $\exp(X_0, X)$ множество всех $F \subseteq X_0$ таких, что $F \neq \emptyset$ и F замкнуто в X .

Лемма 1. Пусть $X_0 \subset X$, где X — T_1 -пространство. Тогда

$$\overline{\exp(X_0, X)}^{\exp X} = \exp(\overline{X_0}^X, X).$$

Доказательство. Очевидно, что $\exp(X_0, X) \subseteq \exp(\overline{X_0}^X, X)$. Заметим, что $\exp(\overline{X_0}^X, X)$ замкнуто в $\exp X$, следовательно, $\overline{\exp(X_0, X)} \subset \exp(\overline{X_0}^X, X)$. Проверим обратное включение. Пусть F_0 — произвольная точка из $\exp(\overline{X_0}^X, X)$, $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ — произвольная окрестность этой точки. Имеем $F_0 \subset \overline{X_0}$ и для всех $i = 1, \dots, n$ $U_i \cap F_0 \neq \emptyset$. Следовательно, $U_i \cap \overline{X_0} \neq \emptyset$, поэтому $U_i \cap X_0 \neq \emptyset$ для всех i .

Выберем $X_i \in U_i \cap X_0$. Положим $F = \{X_1, \dots, X_n\}$. Тогда $F \in \exp(X_0, X) \cap O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, т.е. $\exp(X_0, X) \cap O \langle U_1, \dots, U_n \rangle \neq \emptyset$. Итак, включение $\exp(\overline{X_0}^X, X) \subset \overline{\exp(X_0, X)}$ проверено, что и доказывает лемму.

Лемма 2. Пусть $\{U_1, \dots, U_n\}$ и $\{V_1, \dots, V_n\}$ — два семейства открытых в T_1 -пространстве X множеств и для любого $i = 1, \dots, n$ верно, что $\overline{V_i} \subset U_i$, тогда

$$\overline{O \langle V_1, \dots, V_n \rangle}^{\exp X} \subset O \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Доказательство:

$$\overline{O \langle V_1, \dots, V_n \rangle} = \overline{\exp \left(\bigcup_{i=1}^n V_i, X \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (\exp X \setminus \exp(X \setminus V_i, X)) \right)} \subset$$

так как замыкание пересечения содержится в пересечении замыканий

$$\subset \exp \left(\overline{\bigcup_{i=1}^n V_i}^X, X \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{(\exp X \setminus \exp(X \setminus V_i, X))} \right) \subset$$

по лемме 1

$$\subset \exp \left(\overline{\bigcup_{i=1}^n V_i}, X \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (\exp X \setminus \exp (X \setminus V_i, X)) \right) \subset$$

по условию леммы

$$\subset \exp \left(\bigcup_{i=1}^n U_i, X \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n (\exp X \setminus \exp (X \setminus U_i, X)) \right) = O \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Лемма 2 доказана.

По лемме 2 выполняется включение $[W_q] \subset W_r$. Это означает, что пространство $\exp X$ допускает плотное дробление между произвольной точкой F и произвольным замкнутым множеством

$$F_1 = \exp X \setminus O \langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

следовательно, $\exp X$ вполне регулярно.

То, что из условия б) вытекает в), — очевидно.

Докажем, что из в) вытекает а). Пусть F_0 и F_1 — непустые замкнутые непересекающиеся подмножества X . Рассмотрим

$$W = \exp (X \setminus F_1, X);$$

W открыто в $\exp X$, причем $F_0 \in W$. В силу регулярности пространства $\exp X$ найдется окрестность $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ точки F_0 такая, что $\overline{O \langle U_1, \dots, U_n \rangle}^{\exp X} \subset W$. Следовательно, $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Покажем, что

$$\bigcup_{i=1}^n U_i \cap F_1 = \emptyset. \text{ Предположим противное. Тогда } \bigcup_{i=1}^n (\overline{U_i} \cap F_1) = \bigcup_{i=1}^n (\overline{U_i}) \cap$$

$$\cap F_1 = \bigcup_{i=1}^n U_i \cap F_1 \neq \emptyset \text{ и найдется по крайней мере один индекс } j =$$

$= 1, \dots, n$ такой, что $\overline{U_j} \cap F_1 \neq \emptyset$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ выберем по точке $x_i \in \overline{U_i}$, если $i \neq j$, и $x_i \in \overline{U_i} \cap F_1$, если $i = j$. Пусть $F = \{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Легко видеть, что любая окрестность точки F в пространстве $\exp X$ содержит точки из множества $O \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, поэтому $F \in \overline{O \langle U_1, \dots, U_n \rangle}^{\exp X} \subset W = \exp (X \setminus F_1, X)$. Но $F \cap F_1 \neq \emptyset$.

Противоречие.

Итак, $\bigcup_{i=1}^n U_i \cap F_1 = \emptyset$. Ввиду произвольности F_0 и F_1 это означает нормальность пространства X .

36.17. Покажем, что $\text{exp } X \setminus \text{exp}_n X$ открыто в $\text{exp } X$. Пусть $F \in \text{exp } X \setminus \text{exp}_n X$. Тогда $|F| > n$. Пусть $x_1, \dots, x_{n+1}$ — различные точки, принадлежащие F . Так как X хаусдорфово, для любого i найдется окрестность U_i точки x_i такая, что $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Положим $W = O\langle X, U_1, \dots, U_{n+1} \rangle$. Тогда $F \in W$. Кроме того, $W \cap \text{exp}_n X = \emptyset$, так как если $G \in W$, то $|G| > n$ по построению множеств $U_1, \dots, U_{n+1}$. Итак, $\text{exp } X \setminus \text{exp}_n X$ открыто, следовательно, $\text{exp}_n X$ замкнуто.

36.18. Пусть x и y — две различные точки в пространстве X . Положим $F = \{x, y\}$. Тогда $F \in \text{exp}_2 X \setminus \text{exp}_1 X$. Поскольку $\text{exp}_1 X$ замкнуто в $\text{exp}_2 X$, то $\text{exp}_2 X \setminus \text{exp}_1 X$ открыто. Следовательно, для F найдется $W = O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ — окрестность F в пространстве $\text{exp}_2 X$ такая, что $W \cap \text{exp}_1 X = \emptyset$.

Положим $O_x = \cap \{U_i \mid x \in U_i\}$, $O_y = \cap \{U_i \mid y \in U_i\}$. Нетрудно видеть, что $x \in O_x$, $y \in O_y$ и $O_x \cap O_y = \emptyset$. Итак, X хаусдорфово, что и требовалось доказать.

36.19. а) Пусть $V = O\langle V_1, \dots, V_k \rangle$, где V_i открыты в X . Докажем, что $\pi_n^{-1}V$ открыто в X^n . Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in \pi_n^{-1}V$. Так как $\pi_n x \in V$, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_1, \dots, x_{j_1} \in V_1, \dots, x_{j_{k-1}+1}, \dots, x_{j_k} \in V_k$. Положим

$$O = \underbrace{V_1 \times \dots \times V_1}_{j_1} \times \dots \times \underbrace{V_k \times \dots \times V_k}_{j_k - j_{k-1}}.$$

Тогда O — окрестность точки x в X^n такая, что $O \subseteq \pi_n^{-1}V$. Следовательно, $\pi_n^{-1}V$ открыто.

б) Пусть $\pi_n^{-1}V$ открыто. Докажем, что V открыто. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in V$, $m \leq n$, где $x_1, \dots, x_m$ — различные точки в X . Пусть $y \in \pi_n^{-1}x$. Тогда $y = (y_i^j)$, где $j = 1, \dots, m$, $y_i^j = x_j$. Так как $\pi_n^{-1}V$ открыто, то для любого $y \in \pi_n^{-1}x$ найдется окрестность $O_y = \prod_{i=1}^n O_i^j(y)$ такая, что $O_y \subseteq \pi_n^{-1}V$. Положим

$$O_j = \bigcap_{y \in \pi_n^{-1}x} \left(\bigcap_i O_i^j(y) \right).$$

Тогда $W = O\langle O_1, \dots, O_m \rangle$ — открытая окрестность точки x , причем $\pi_n^{-1}W \subseteq \pi_n^{-1}V$, следовательно, $W \subset V$, поэтому V открыто в $\text{exp}_n X$.

36.20. Пусть $[x] \in SP_{G'}^n X = X^n/G'$. Рассмотрим точку $(x_1, \dots, x_n)$ — любой представитель класса эквивалентности $[x]$. Для выполнения условия $\pi_{G'}^n \circ \pi_G^n = \pi_G^n$ необходимо, чтобы выполнялось $\pi_{G'}^n([x]) = [x]_G$, где $[x]_G = \{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in G\}$. Таким образом, единственность отображения $\pi_{G'}^n$ проверена. Остается доказать независимость от выбора представителя $(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $(x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)})$ — другой представитель класса $[x]$, где $g \in G'$. Поскольку $G' \subset G$, то $g \in G$, откуда $(x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)}) \in \{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in G\}$, что и требовалось доказать.

36.21. Пусть $O \subseteq X^n$ открыто, $O = \bigcup_{i=1}^n O_i$. Докажем, что $\pi_G^n O$ открыто. Для этого, согласно определению топологии в фактор-пространстве X^n/G , достаточно проверить, что $(\pi_G^n)^{-1}(\pi_G^n O)$ открыто в X^n . В самом деле,

$$(\pi_G^n)^{-1}(\pi_G^n O) = \bigcup_{\sigma \in G} O_{\sigma(1)} \times \dots \times O_{\sigma(n)} = \bigcup_{\sigma \in G} \prod_{i=1}^n O_{\sigma(i)}.$$

Итак, открытость отображения π_G^n проверена.

Пусть $F \subseteq X^n$ замкнуто. Необходимо проверить, что $\pi_G^n F$ замкнуто. Пусть $[x] \in SP_G^n X \setminus \pi_G^n F$. Тогда $[x] = [(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})]$, где $(x_1, \dots, x_n)$ — какой-нибудь представитель класса $[x]$, причем $(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \notin F$ для любого $\sigma \in G$. Так как F замкнуто, для любого $g \in G$ найдется множество Ox_g — окрестность точки $x_g = (x_{g(1)}, \dots, x_{g(n)})$ такая, что $Ox_g \cap F = \emptyset$. Можно считать, что $Ox_g = \prod_{i=1}^n O_i^g$, причем $x_{g(i)} \in O_i^g$ для всех $i = 1, \dots, n$. Положим $V_i = \bigcap_{g \in G} O_i^g$, $V = \prod_{i=1}^n V_i$. Тогда для любой $g \in G$ имеем $\prod_{i=1}^n V_{g(i)} \cap F = \emptyset$. Следовательно, $\pi_G^n V \cap \pi_G^n F = \emptyset$. Кроме того, по доказанному, $\pi_G^n V$ открыто в $SP_G^n(X)$, и, по построению, $[x] \in \pi_G^n V$. Итак, $SP_G^n(X) \setminus \pi_G^n F$ открыто, следовательно, $\pi_G^n F$ замкнуто.

36.22. Докажем следующий общий факт:

Лемма. Пусть X, Y, Z — топологические пространства, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: X \rightarrow Z$ — непрерывные отображения, причем $h = g \circ f$, и отображение f сюръективно. Тогда, если h открыто (замкнуто), то и g открыто (замкнуто).

Доказательство. Пусть h открыто. Докажем, что g открыто. Пусть V — открытое подмножество в Y . Тогда $f^{-1}V$ открыто в силу

непрерывности f . Кроме того, $g(f(f^{-1}V)) = g(V)$, так как f сюръективно. С другой стороны, $g(f(f^{-1}V)) = h(f^{-1}V)$ открыто, так как h открыто. В случае, когда h замкнуто, доказательство аналогично. Лемма доказана.

В нашем случае $f = \pi_{G'}^n$, $g = \pi_{G',G}^n$, $h = \pi_G^n$, где $\pi_{G',G}^n$ — отображение, существующее в силу задачи 36.20. Открытость и замкнутость отображений $\pi_{G'}^n$ и π_G^n следует из задачи 36.21. Применяя лемму, получаем, что $\pi_{G',G}^n$ открыто и замкнуто.

36.23. Необходимо проверить, что $V \subset \text{exr}_n X$ открыто тогда и только тогда, когда $q_n^{-1}V$ открыто в $SP^n X$. Пусть V открыто в $\text{exr}_n X$. Проверим, что $q_n^{-1}V$ открыто в $SP^n X$. Для этого, согласно определению фактортопологии в $SP^n X$, необходимо доказать, что $(\pi^n)^{-1}(q_n^{-1}V)$ открыто в X^n . Но $(\pi^n)^{-1}(q_n^{-1}V) = \pi_n^{-1}V$, так как $\pi_n = q_n \circ \pi^n$, а множество $\pi_n^{-1}V$ открыто в силу факторности отображения π_n . Так как $q_n^{-1}V$ открыто в $SP^n X$, то $(\pi^n)^{-1}(q_n^{-1}V)$ открыто в X^n . Но $(\pi^n)^{-1}(q_n^{-1}V) = \pi_n^{-1}V$, поэтому в силу факторности отображения π_n , V открыто в $\text{exr}_n X$.

36.24. Указание. Применить лемму Александра.

Решение. Пусть X — компакт. Тогда X регулярно, следовательно, $\text{exr } X$ хаусдорфово (см. задачу 36.15). Нам потребуются следующая вспомогательная лемма (лемма Александра): пусть в пространстве X существует такая предбаза $\mathcal{B}$, что из любого покрытия пространства X элементами этой предбазы можно выбрать конечное подпокрытие, то X бикompактно.

Заметим, что множества вида $O\langle U \rangle$ и $O\langle X, U \rangle$ образуют предбазу топологии Вьеториса. Пусть $\mathcal{D}$ — покрытие, состоящее из элементов этой предбазы. Покажем, что $\mathcal{D}$ содержит конечное подпокрытие. Положим $W = X \setminus \bigcup \Omega$, где $\Omega = \{V \mid O\langle X, V \rangle \in \mathcal{D}\}$. Если $W = \emptyset$, то Ω является открытым покрытием X . Поскольку X бикompакт, Ω содержит конечное подпокрытие $\{V_1, \dots, V_n\}$. Тогда семейство $\{O\langle X, V_1 \rangle, \dots, O\langle X, V_n \rangle\}$ является покрытием пространства $\text{exr } X$, поскольку для любой точки $F \in \text{exr } X$ соответствующее замкнутое множество F пространства X пересекается с каким-либо V_i , следовательно, $F \in O\langle X, V_i \rangle$.

Если же W не пусто, то W не пересекается ни с одним элементом семейства Ω . Следовательно, найдется открытое множество U такое, что $O\langle U \rangle \in \mathcal{D}$, причем $W \subset U$.

Заметим, что Ω является покрытием компакта $X \setminus U$. Выберем из него конечное подпокрытие $\{V_1, \dots, V_n\}$. Тогда семейство $\{O\langle U \rangle, O\langle X, V_1 \rangle, \dots, O\langle X, V_n \rangle\}$ является покрытием пространства $\text{exr } X$, поскольку для любой точки $F \in \text{exr } X$ либо $F \in O\langle X, V_i \rangle$ для некоторого i , либо $F \cap \left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right) = \emptyset$, а тогда $F \subset U$ и, следовательно, $F \in O\langle U \rangle$.

Итак, из $\mathcal{D}$ можно выбрать конечное подпокрытие, следовательно, по лемме Александера, $\text{exr } X$ — компакт.

36.25. Согласно задаче 36.24, $\text{exr } X$ — компакт. Согласно задаче 36.17, $\text{exr}_n X$ замкнуто в $\text{exr } X$. Следовательно, $\text{exr}_n X$ — компакт как замкнутое подмножество компакта.

36.26. Так как X — компакт, то по теореме Тихонова X^n — компакт. Заметим, что $SP_G^n X$ является образом X^n при непрерывном отображении π_G^n . Итак, $SP_G^n X$ — компакт как непрерывный образ компакта X^n .

36.27. Пусть $\mathcal{B}$ — база топологии пространства X , F — замкнутое подмножество X . Пусть $F \in O\langle V_1, \dots, V_n \rangle$, где множества V_i , $i = 1, \dots, n$, открыты в X . Для каждого $i = 1, \dots, n$ найдутся $U_i^{\alpha_i} \in \mathcal{B}$, $\alpha_i \in \mathcal{A}_i$ (где $\mathcal{A}_i$ — некоторое множество индексов) такие, что $V_i = \bigcup_{\alpha_i \in \mathcal{A}_i} U_i^{\alpha_i}$ (по определению базы топологии). Тогда $\{U_i^{\alpha_i} \mid i = 1, \dots, n, \alpha_i \in \mathcal{A}_i\}$ — открытое покрытие компакта F . Выберем из него конечное подпокрытие $W_1, \dots, W_m$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $W_i \cap F \neq \emptyset$ для любого $i = 1, \dots, m$.

Очевидно, что $F \in O\langle W_1, \dots, W_m \rangle \subset O\langle V_1, \dots, V_n \rangle$. Таким образом, для любой точки пространства $\text{exr } X$ и для любой ее окрестности существует лежащая внутри нее другая окрестность вида $O\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, где $U_i \in \mathcal{B}$, а $\mathcal{B}$ — база пространства X , что и требовалось доказать.

36.28. Поскольку компакт $\text{exr } X$ содержит $\text{exr}_n X$ и, в частности, подпространство $\text{exr}_1 X$, гомеоморфное X , выполняются неравенства $w \text{exr } X \geq w \text{exr}_n X \geq wX$. Пусть $wX = \tau$. Согласно задаче 36.27, на $\text{exr } X$ существует база топологии мощности τ . Следовательно, $w \text{exr } X \leq wX$, откуда мы заключаем, что $w \text{exr } X = w \text{exr}_n X = wX$.

Наконец, $SP_G^n X$ является непрерывным образом X^n и содержит X , следовательно,

$$wX = wX^n \geq wSP_G^n X \geq wX,$$

что и требовалось доказать.

36.29. 1) Неравенство $\rho_H(F_1, F_2) \geq 0$ очевидно. Пусть $\rho_H(F_1, F_2) = 0$. Предположим, что $F_1 \neq F_2$. Можно считать, что $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$. Пусть $x \in F_2 \setminus F_1$. Положим $d = \inf_{y \in F_1} \rho(x, y)$. Так как F_1 замкнуто и $x \notin F_1$, то $d > 0$. Но $F_2 \subset O_\varepsilon F_1$ для любого $\varepsilon > 0$, в частности, $F_2 \subset O_{d/2} F_1$. Значит, найдется точка $x' \in F_1$ такая, что $\rho(x, x') < \frac{d}{2}$. Противоречие с выбором d , следовательно, $F_1 = F_2$.

2) Очевидно, что $\rho_H(F_1, F_2) = \rho_H(F_2, F_1)$.

3) Проверим неравенство треугольника $\rho_H(F_1, F_3) \leq \rho_H(F_1, F_2) + \rho_H(F_2, F_3)$. Множество F_2 содержится в $(\rho_H(F_1, F_2) + \varepsilon)$ -окрестности множества F_1 . Множество F_3 содержится в $(\rho_H(F_1, F_2) + \varepsilon)$ -окрестности множества F_2 . Из аксиомы треугольника для ρ следует, что любая точка из F_3 удалена от F_1 не более, чем на $\rho_H(F_1, F_2) + \varepsilon + \rho_H(F_2, F_3) + \varepsilon$. Так как ε произвольно, отсюда следует неравенство треугольника для ρ_H .

4) Наконец, очевидно, что $\rho(x, y) = \rho_H(\{x\}, \{y\})$.

36.30. Пусть $S = \{s_1, \dots, s_m\} \in \exp X$, $m \leq n$.

а) Покажем, что каждая окрестность точки S в смысле топологии Вьеториса содержит окрестность этой же точки в смысле метрики Хаусдорфа. Пусть $O\langle U_1, \dots, U_k \rangle$ — окрестность точки S . Выберем $\varepsilon > 0$ так, что для всех $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, k$ из $s_i \in U_j$ следует включение $O_\varepsilon(s_i) \subset U_j$. Пусть $T \in \exp_n X$ — такая точка, что $\rho_H(S, T) < \varepsilon$. Тогда для всех $t \in T$ существует $s_i \in S$ такая, что $\rho(s_i, t) < \varepsilon$, т.е. $t \in O_\varepsilon(s_i) \subset U_j$ для некоторого j . Следовательно, $T \subset \bigcup_{i=1}^k U_j$. Кроме того, для каждого U_j можно выбрать точку $s_i \in U_j$ такую, что найдется $t \in T$, для которого $\rho(s_i, t) < \varepsilon$. Тогда $t \in O_\varepsilon(s_i) \subset U_j$. Поэтому $T \cap U_j \neq \emptyset$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Следовательно, $T \in O\langle U_1, \dots, U_k \rangle$. Итак, ε -окрестность (в смысле метрики ρ_H) точки S содержится в $O\langle U_1, \dots, U_k \rangle$.

б) Покажем, что каждая окрестность точки S в смысле метрики Хаусдорфа содержит окрестность этой же точки в смысле топологии Вьеториса. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $U_i = O_\varepsilon(s_i)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда из условия $T \in O\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ следует, что $\rho_H(S, T) < \varepsilon$, т.е. $O\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ содержится в ε -окрестности точки S .

36.31. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Для точек $[x]$ и $[y]$ из $SP_G^n X$ положим

$$\rho_G([x], [y]) = \min_{\sigma \in G} \max_i \rho(x_i, y_{\sigma(i)}),$$

где $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ — представители классов $[x]$ и $[y]$ соответственно. Очевидно, что ρ_G не зависит от выбора представителей классов $[x]$ и $[y]$.

а) Проверим, что ρ_G — метрика.

1) $\rho_G \geq 0$ — очевидно. Докажем, что условие $\rho_G([x], [y]) = 0$ равносильно совпадению классов $[x]$ и $[y]$. Действительно, если $[x] = [y]$, то для $\sigma = e$ имеем $\max_i \rho(x_i, y_{\sigma(i)}) = \max_i \rho(x_i, y_i) = \max_i \rho(x_i, x_i) = 0$ (можно считать, что для совпадающих классов $[x]$ и $[y]$ выбраны одинаковые представители, т. е. $x_i = y_i$). Обратно, пусть $\rho_G([x], [y]) = 0$. Тогда найдется такая перестановка $\sigma \in G$, что $x_i = y_{\sigma(i)}$ для всех $i = 1, \dots, n$, откуда следует совпадение классов $[x]$ и $[y]$.

2) Докажем, что $\rho_G([x], [y]) = \rho_G([y], [x])$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_G([x], [y]) &= \min_{\sigma \in G} \max_i \rho(x_i, y_{\sigma(i)}) = \min_{\sigma \in G} \max_i \rho(y_{\sigma(i)}, x_i) = \\ &= \min_{\sigma \in G} \max_j \rho(y_j, x_{\sigma^{-1}(j)}) = \min_{g \in G} \max_j \rho(y_j, x_{g(j)}) = \rho_G([y], [x]). \end{aligned}$$

3) Проверим неравенство треугольника $\rho_G([x], [y]) + \rho_G([y], [z]) \geq \rho_G([x], [z])$. Пусть $\rho_G([x], [y]) = \rho_G(x_s, y_m)$, $\rho_G([y], [z]) = \rho_G(y_p, z_l)$, $\rho_G([x], [z]) = \rho_G(x_k, z_j)$. Пусть далее $\rho(x_t, z_l) = \max_i \rho(x_i, z_l)$. Тогда, согласно определению ρ_G , выполняется следующее неравенство:

$$\rho(x_k, z_j) \leq \rho(x_t, z_l).$$

Аналогично имеем $\rho(y_p, z_l) \geq \rho(y_m, z_l)$, $\rho(x_s, y_m) \geq \rho(x_t, y_m)$. Исходя из этих трех неравенств, имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \rho_G([x], [y]) + \rho_G([y], [z]) &= \rho(x_s, y_m) + \rho(y_p, z_l) \geq \\ &\geq \rho(x_t, y_m) + \rho(y_m, z_l) \geq \rho(x_t, z_l) \geq \rho(x_k, z_j) = \rho_G([x], [z]), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Проверим, что ρ_G порождает фактор-топологию в $SP_G^n X$. Пусть $[x] \in SP_G^n X$, $O_\varepsilon[x]$ — открытая ε -окрестность точки $[x]$ в метрике ρ_G . Покажем, что $O_\varepsilon[x]$ открыто в $SP_G^n X$. Для этого нужно показать, что $(\pi_G^n)^{-1}O_\varepsilon[x]$ открыто в X^n . Пусть $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\pi_G^n)^{-1}O_\varepsilon[x]$. Тогда $\min_{\sigma} \max_i \rho(x_i, y_{\sigma(i)}) = \varepsilon_1 < \varepsilon$. Положим $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 > 0$. Пусть $V = \{z \in X^n \mid \rho(y_i, z_i) < \varepsilon_2\}$. Заметим, что V является открытой окрестностью точки y в пространстве X^n . Легко проверить, что $V \subset (\pi_G^n)^{-1}O_\varepsilon[x]$.

Пусть теперь U — открытое подмножество в $SP_G^n X$ и точка $[x]$ лежит в U . Так как $(\pi_G^n)^{-1}U$ открыто в X^n , для любой подстановки $\sigma \in G$ найдется $\varepsilon_\sigma > 0$ такое, что

$$\{y \in X^n \mid \rho(x_{\sigma(i)}, y_i) < \varepsilon_\sigma\} \subset (\pi_G^n)^{-1}U.$$

Положим $\varepsilon = \min_{\sigma \in G} \varepsilon_\sigma$. Тогда $O_\varepsilon[x] \subset U$. Итак, ρ_G — метрика, порождающая топологию на $SP_G^n X$, определяемую факторизацией X^n/G , что и требовалось доказать.

36.32. Проверим, что тождественное отображение $i: \text{exr } X \rightarrow (\text{exr } X, \rho_n)$ непрерывно. Из этого будет следовать утверждение задачи, так как непрерывная биекция компактов является гомеоморфизмом (напомним, что $\text{exr } X$ — компакт по задаче 36.24).

Пусть точка F_0 лежит в $(\text{exr } X, \rho_n)$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $x \in F_0$ фиксируем $O_{\varepsilon/2}(x)$ — открытую $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность точки x в метрике ρ . Семейство $\{O_{\varepsilon/2}(x) \mid x \in F_0\}$ является открытым покрытием компакта F_0 . Выберем из него конечное подпокрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$. Заметим, что $F_0 \in O(U_1, \dots, U_n)$. Пусть F — произвольная точка из $O(U_1, \dots, U_n)$. Если $y \in F$, то $y \in U_j$ для некоторого j . Заметим теперь, что $F_0 \cap U_j \neq \emptyset$ при всех j и $\text{diam } U_j = \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\rho(y, F_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку точка y была выбрана произвольно, а также из компактности множества F следует, что $F \subseteq O_{\varepsilon/2}(F_0)$. Аналогично, $F_0 \subset O_\varepsilon(F)$. Следовательно, $\rho_n(F_0, F) < \varepsilon$. Таким образом, множество $i(O(U_1, \dots, U_n))$ содержится в ε -окрестности точки F_0 , следовательно, отображение i непрерывно в точке F_0 . В силу произвольности точки F_0 отсюда следует непрерывность отображения i , что и требовалось доказать.

36.33. Это утверждение следует из задач 36.24–36.26 и 36.29–36.32.

36.34. Пусть $I = [0, 1]$. Заметим, что отображение $\pi_2: I^2 \rightarrow \text{exr}_2 I$ отождествляет точки квадрата I^2 , симметричные относительно диагонали $\Delta = \{(x, x) \mid x \in I\}$. В результате такого отождествления получается треугольник, который, очевидно, гомеоморфен I^2 .

36.35. Отображение $\pi_2: H^1 \times H^1 \rightarrow \text{exr}_2 H_1$ отождествляет точки первой четверти плоскости $\mathbb{R}^2$, симметричные относительно луча $x = y$. В результате этого отождествления получается пространство, состоящее из тех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, что $x \geq 0$ и $x \leq y$, которое, очевидно, гомеоморфно H^2 .

36.36. Отображение $\pi_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \exp_2 \mathbb{R}$ отождествляет точки плоскости $\mathbb{R}^2$, симметричные относительно прямой $x = y$. В результате получается полуплоскость, состоящая из тех точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, что $x \leq y$. Эта полуплоскость гомеоморфна H^2 .

36.37. Реализуем окружность как отрезок $I = [0, 1]$ с отождествленными концами. Легко видеть, что $S^1 \times S^1$ получается из квадрата $I \times I$ отождествлением точек вида $(0, x)$ с точками вида $(1, x)$ и точек вида $(x, 0)$ с точками вида $(x, 1)$. Обозначим это отождествление через p . Проекция $\pi_2: S^1 \times S^1 \rightarrow \exp S_1$ реализуется как композиция отождествления p и проекции $\pi_2: I \times I \rightarrow \exp_2 I$.

Пусть $T = \{(x, y) \in I^2 \mid y \geq x\}$. Легко видеть, что π_2 реализуется как отождествление точек множества T , имеющих вид $(x, 1)$, с точками того же множества вида $(0, x)$. Обозначим это отождествление через $\sim$. Итак, $\exp_2 S^1$ гомеоморфно $T/\sim$. Нетрудно проверить, что пространство $T/\sim$ гомеоморфно листу Мёбиуса.

36.38. Пусть T — множество точек куба I^3 , координаты которых удовлетворяют условию $x_1 \geq x_2$ и $x_1 \geq x_3$. Легко видеть, что $I(3)$ получается из множества T отождествлением точек, лежащих на гранях множества T , удовлетворяющих условиям $x_1 = x_2$ и $x_1 = x_3$ и переходящих друг в друга при повороте вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$ на угол $2\pi/3$. Заметим, что результат этого отождествления гомеоморфен конусу над квадратом I^2 , а этот конус в свою очередь гомеоморфен I^3 , что и требовалось доказать.

36.39. См. решение задачи 36.55.

36.40. Пусть T — множество точек куба I^3 , координаты которых удовлетворяют условию $x_1 \geq x_2 \geq x_3$. Очевидно, что T — трехмерный симплекс. Заметим, что $\exp_3 I$ получается из T отождествлением точек, лежащих на гранях $x_1 = x_2$ и $x_2 = x_3$ этого симплекса, при котором точка (t, t, z) переходит в точку (z, z, t) . В результате этого отождествления получается конус, который гомеоморфен I^3 .

36.41. Заметим, что H_1 гомеоморфно полуинтервалу $[0, 1]$. Положим

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1]^3 \mid x_1 \geq x_2, x_1 \geq x_3\}.$$

Заметим, что $H^1(3)$ получается из T отождествлением точек граней $x_1 = x_2$ и $x_1 = x_3$ множества T , переходящих друг в друга при повороте на

угол $2\pi/3$ вокруг прямой $x_1 = x_2 = x_3$. В результате такого отождествления получается множество, гомеоморфное конусу без точек основания. Легко видеть, что такой конус гомеоморфен H^3 .

36.42. Заметим, что H_1 гомеоморфно полуинтервалу $[0, 1)$. Положим

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1)^3 \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3\}.$$

Легко видеть, что T гомеоморфно $SP^3(H^1)$. С другой стороны, T — трехмерный симплекс, у которого выброшены точки одной из граней, следовательно, T гомеоморфен H^3 .

36.43. Заметим, что H_1 гомеоморфно полуинтервалу $[0, 1)$. Положим

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in [0, 1)^3 \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3\}.$$

Тогда $\text{exr}_3(H^1)$ получается из T отождествлением точек граней $x_1 = x_2$ и $x_2 = x_3$ множества T , при котором полуинтервал $\{x_2 = x_3 = 0\}$ переходит в полуинтервал $\{x_1 = x_2, x_3 = 0\}$, интервал $\{x_2 = x_3, x_1 = 0\}$ в интервал $\{x_1 = x_2 = 1\}$. В результате такого отождествления получается множество, гомеоморфное конусу без точек основания, а оно в свою очередь гомеоморфно H^3 , что и требовалось доказать.

36.44. Заметим, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно $(0, 1)$. Далее, аналогично решению задачи 36.41, получаем, что $\mathbb{R}(3)$ гомеоморфно конусу без точек границы, т. е. открытому шару, который, очевидно, гомеоморфен $\mathbb{R}^3$.

36.45. Заметим, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно $(0, 1)$. Далее, дословно повторяя рассуждения из задачи 36.42, видим, что $SP^3(\mathbb{R})$ гомеоморфно трехмерному симплексу, у которого выброшены точки двух граней, а такой симплекс гомеоморфен H^3 .

36.46. Заметим, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно $(0, 1)$. Далее, аналогично решению задачи 36.43, получаем, что $\text{exr}_3(\mathbb{R})$ гомеоморфно конусу, у которого выброшены точки основания и боковой поверхности. Это множество гомеоморфно открытому шару, который в свою очередь гомеоморфен $\mathbb{R}^3$.

36.47. Пусть X — клеточное пространство. Через X^n будем обозначать n -мерный остов X . Нам потребуется следующее вспомогательное предположение.

Теорема о фундаментальной группе клеточного пространства. Пусть X — клеточное пространство с единственной нульмерной клеткой e^0 , одномерными клетками $\{e_i^1\}_{i=1}^N$ и двумерными

клетками $\{e_i^2\}_{i=1}^M$. Пусть $\beta_j \in \pi_1(X^1)$ — элемент группы $\pi_1(X^1)$, порожденный «приклеивающим» отображением $g_j : S^1 \rightarrow X^1$ ($j = 1, \dots, M$). Тогда $\pi_1(X, e^0)$ есть группа с системой образующих $\{e_i^1\}$ и системой определяющих соотношений $\beta_j = 1$ ($j = 1, \dots, M$).

Доказательство этой теоремы можно найти в стандартных руководствах по гомотопической топологии.

Реализуем окружность как отрезок $J = [0, 1]$ с отождествленными концами. Тогда $(S^1)^3$ получается из I^3 отождествлением точек противоположных граней куба I^3 .

Пусть $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in I^3 \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3\}$. Легко видеть, что T — трехмерный симплекс. Положим $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (1, 1, 1)$. Тогда A , B , C и D — вершины симплекса T .

Легко видеть, что $\text{exr}_3(S^1)$ получается из T отождествлением точек граней ABC и BCD , причем точка B отождествляется с точкой A , точка D отождествляется с C , точка C отождествляется с B , а также отождествлением точек граней ADC и ABD , причем точка B отождествляется с точкой C . Заметим, что при таком отождествлении точки A , B , C , D переходят в одну точку. Обозначим ее через e^0 . Кроме того, ребра AB , BC , CD , AC и BD переходят в окружность, которую обозначим через α , а ребро BD переходит в окружность, которую мы обозначим через β . Теперь нетрудно заметить, что $\text{exr}_3(S^1)$ является клеточным пространством с нульмерной клеткой e^0 и одномерными клетками α и β . Согласно теореме о фундаментальной группе клеточного пространства, $\pi_1(\text{exr}_3(S^1), e^0)$ есть группа с системой образующих $\{\alpha, \beta\}$ и определяющими соотношениями $\alpha^2 \circ \alpha^{-1} = 1$, $\alpha^2 \circ \beta^{-1} = 1$. Отсюда мы заключаем, что $\alpha = \beta = 1$, следовательно, группа $\pi_1(\text{exr}_3(S^1), e^0)$ тривиальна. Остается только заметить, что в силу связности $\text{exr}_3(S^1)$ фундаментальная группа не зависит от выбора отмеченной точки e^0 . Итак, $\text{exr}_3(S^1)$ односвязно, что и требовалось доказать.

36.48. Как и в решении задачи 36.47, реализуем S^1 как отрезок $I = [0, 1]$ с отождествленными концами и полагаем $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in I^3 \mid x_1 \geq x_2 \geq x_3\}$ — симплекс с вершинами $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (1, 1, 1)$. Нетрудно видеть, что $SP^3(S^1)$ получается из T отождествлением точек граней ABC и BCD , причем

ребро AB отождествляется с ребром BC , ребро BC — с ребром DC , а ребро AC — с ребром BD . При этом, как легко заметить, все точки A, B, C, D переходят в одну, которую мы обозначим через e^0 . Далее, окружность, в которую переходят ребра AB, BC и CD , обозначим через α , окружность, в которую переходят ребра AC и BD , обозначим через β , и, наконец, окружность, в которую переходит ребро AD , обозначим через γ .

Легко видеть, что $SP^3(S^1)$ является клеточным пространством с вершиной e^0 и одномерными клетками α, β, γ . Согласно теореме о фундаментальной группе клеточного пространства (см. решение задачи 36.47), $\pi_1(SP^3(S^1), e^0)$ является группой с образующими α, β, γ и с определяющими соотношениями $\alpha^2\beta^{-1} = 1, \beta\alpha\gamma^{-1} = 1$. Легко видеть, что система определяющих соотношений равносильна системе $\alpha^2 = \beta, \alpha^3 = \gamma$. Таким образом, любой элемент группы $\pi_1(SP^3(S^1), e^0)$ представим (причем единственным образом) в виде α^n , $n \in \mathbb{Z}$, откуда мы заключаем, что $\pi_1(SP^3(S^1), e^0) \approx \mathbb{Z}$. Следовательно, $SP^3(S^1)$ неодносвязно.

36.49. Полагаем

$$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in I^3 \mid x_1 \geq x_2, x_1 \geq x_3\}.$$

Нетрудно видеть, что T — многогранник с вершинами $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$, $D = (1, 1, 1)$, $E = (1, 0, 1)$. Заметим, что $S^1(3)$ получается из T отождествлением граней AED и ACD , при котором «склеиваются» точки, получающиеся друг из друга поворотом на угол $2\pi/3$, в частности, точка E отождествляется с точкой C , а также отождествлением точек треугольников ABE, BED, ABC и BCD . Обозначим это отождествление через $\sim$. Тогда $AB \sim BC \sim CD \sim BE \sim ED, AC \sim BD$.

Обозначим окружности, в которые переходят при таком отождествлении ребра AB, AC и AD , через α, β и γ соответственно, через e^0 обозначим точку, в которую переходят вершины T . Нетрудно видеть, что $S^1(3)$ является клеточным пространством с вершиной e^0 и одномерными клетками α, β и γ . По теореме о фундаментальной группе клеточного пространства (см. решение задачи 36.47), группа $\pi_1(S^1(3), e^0)$ является группой с образующими α, β, γ и определяющими соотношениями $\alpha^2\beta^{-1} = 1, \beta\alpha\gamma^{-1} = 1$. Эта система определяющих соотношений

равносильна системе $\alpha^2 = \beta$ и $\alpha^3 = \gamma$, следовательно, любой элемент группы $\pi_1(S^1(3), e^0)$ однозначно представим в виде α^n , $n \in \mathbb{Z}$. Итак, $\pi_1(S^1(3), e^0) \approx \mathbb{Z}$, в частности, $S^1(3)$ неодносвязно.

36.53. Предположим противное: пусть существует вложение пространства $\text{exp}_4 I$ в $\mathbb{R}^4$. Пусть $U_1 = \left(1, \frac{1}{3}\right)$, $U_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $U_3 = \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ — открытые дизъюнктные подмножества отрезка I . Пусть

$$V = \{x \in \text{exp}_4 I \mid x = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ и } x_i \in U_i \text{ для } i = 1, 2, 3\}.$$

Нетрудно видеть, что V гомеоморфно $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{O} = \langle U_1, U_2, U_3 \rangle$. Положим $W_i = \{x \in \text{exp}_4 I \mid x \in \mathcal{O}, |x| = 4 \text{ и } |x \cap U_i| = 2\}$. Нетрудно заметить, что W_i гомеоморфно $\mathbb{R}^4$ для каждого i и $W_i \cap W_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Кроме того, очевидно, что множество V является общей границей для множеств W_i , $i = 1, 2, 3$. Следовательно, в $\mathbb{R}^4$ нашлось множество, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$ и являющееся общей границей для трех непересекающихся множеств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{R}^4$, что противоречит теореме Жордана. Итак, $\text{exp}_4 I \not\subset \mathbb{R}^4$, что и требовалось доказать.

36.54. Предположим противное: пусть $\text{exp}_4 I$ является 4-многообразием. Рассмотрим произвольную точку $x = \{x_1, x_2, x_3\} \in \text{exp}_4 I$, где $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$. Согласно нашему предположению, у точки x найдется окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^4$. Можно считать, что эта окрестность имеет вид $\mathcal{O} = \mathcal{O}(U_1, U_2, U_3)$, где U_1, U_2 и U_3 — дизъюнктные окрестности точек x_1, x_2 и x_3 соответственно, причем $0 \notin U_1$ и $1 \notin U_3$. Пусть $V = \{x \in \mathcal{O} \mid |x| = 3\}$. Пусть $W = \mathcal{O} \setminus V$. Нетрудно заметить, что $W = \bigcup_{i=1}^3 W_i$, причем W_i — открыто-замкнуты в W . Легко видеть, что $W_i \cap W_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$. Таким образом, W имеет по крайней мере три компоненты связности, откуда следует, что множество, гомеоморфное $\mathbb{R}^3$, разбивает пространство $\mathbb{R}^4$ более чем на две компоненты связности, что противоречит теореме Жордана. Полученное противоречие показывает, что $\text{exp}_4 I$ не многообразие, что и требовалось доказать.

36.55. Построим отображение $h: SP^n I \rightarrow I^n$ следующим образом. Пусть $[x] \in SP^n I$. Тогда полагаем $h([x]) = (x_1, \dots, x_n)$, где $(x_1, \dots, x_n)$ — такой представитель класса $[x]$, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Пусть $T^n = \{x \in X^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$. Заметим, что T^n — n -мерный замкнутый симплекс. Таким образом, h отображает $SP^n I$ на T^n .

Очевидно, T^n гомеоморфно n -мерному кубу I^n . Следовательно, нам достаточно проверить, что h — гомеоморфизм. Инъективность и сюръективность отображения h очевидны. Заметим, что h^{-1} непрерывно, так как $h^{-1} \equiv \pi^n|_{T^n}$. Кроме того, согласно задаче 36.26, $SP^n I$ — компакт. Следовательно, h^{-1} — гомеоморфизм (как непрерывная биекция компактов), поэтому и h — гомеоморфизм.

36.56. Заметим, что H_1 гомеоморфно полуинтервалу $[0, 1]$. Пусть $[x] \in SP^n H^1$, $(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ — такой представитель класса $[x]$, что $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Положим $h([x]) = (x_1, \dots, x_n)$. Тогда h является биекцией пространства $SP^n H^1$ на пространство

$$Y = \{x \in [0, 1]^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}.$$

Покажем, что h — гомеоморфизм. Действительно, h^{-1} непрерывно, так как $h^{-1} \equiv \pi^n|_Y$. Проверим, что h непрерывно. Пусть U — открытое подмножество в Y . Тогда $h^{-1}(U) = \pi^n(U)$ открыто, поскольку отображение π^n открыто. Итак, h — гомеоморфизм.

Далее, легко видеть, что Y является n -мерным симплексом, у которого выброшены точки грани $x_n = 1$, а такой симплекс гомеоморфен H^n , что и требовалось доказать.

36.57. Заметим, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно $(0, 1)$. Так же, как и при решении задачи 36.56, строим гомеоморфизм $h: SP^n \mathbb{R} \rightarrow Y$, где $Y = \{x \in (0, 1)^n \mid x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n\}$. Легко видеть, что Y является n -мерным симплексом, у которого выброшены точки граней $x_n = 1$ и $x_1 = 0$; следовательно, Y гомеоморфен H^n , что и требовалось доказать.

36.59. Пусть M — произвольное n -многообразие, $n \geq 1$. Предположим противное, а именно, что $M(4)$ является $4n$ -многообразием. Пусть a — произвольная точка многообразия M , $U(a)$ — окрестность этой точки, гомеоморфная $\mathbb{R}^4$. Обозначим через M' множество точек $[x] \in M(4)$, у которых найдется представитель (x_1, x_2, x_3, x_4) класса $[x]$ такой, что $x_i \in U(a)$ для всех i . Заметим, что по определению топологии в $M(4)$ подпространство M' открыто в $M(4)$ и, в частности, также является многообразием. С другой стороны, по выбору окрестности $U(a)$, имеем $M' = \mathbb{R}^n(4)$. Таким образом, нам достаточно свести к противоречию предположение о том, что $\mathbb{R}^n(4)$ — многообразие.

36.60. Предположим противное. Рассмотрим любые различные точки $x, y \in M^2$. Тогда $\{x, y\} \in \text{exp}_3 M^2$. По нашему предположению, най-

дятся окрестность этих точек в пространстве $\text{exp}_3 M^2$, гомеоморфная $\mathbb{R}^6$. Можем считать, что эта окрестность имеет вид $O\langle U, V \rangle$, где U и V — дизъюнктные окрестности точек x и y соответственно. Более того, поскольку M^2 — двумерное многообразие, можно считать, что U и V гомеоморфны $\mathbb{R}^2$. Так как $U \cap V = \emptyset$, то $\text{exp}_1 M^2 \cap O\langle U, V \rangle = \emptyset$. Положим

$$A = \text{exp}_2 M^2 \cap O\langle U, V \rangle, \quad B = \{z \in \text{exp}_3 M^2 \mid |z| = 3\} \cap O\langle U, V \rangle.$$

Тогда нетрудно видеть, что A гомеоморфно $\mathbb{R}^4$. Кроме того, $O\langle U, V \rangle \setminus A$ несвязно. Действительно, $O\langle U, V \rangle \setminus A = B_1 \cup B_2$, где

$$B_1 = \{z = \{x_1, x_2, x_3\} \in B \mid x_1 \in U, x_2 \in U, x_3 \in V\}, \quad B_2 = B \setminus B_1$$

и точку из B_1 нельзя соединить с точкой из B_2 путем, лежащим в B .

Будем говорить, что пространство X разбивается своим подпространством Y , если $X \setminus Y$ несвязно. Тогда из сказанного выше следует, что $O\langle U, V \rangle$ разбивается множеством A . Напомним, что $O\langle U, V \rangle \approx \mathbb{R}^6$, A гомеоморфно $\mathbb{R}^4$. Следовательно, пространство $\mathbb{R}^6$ разбивается множеством, гомеоморфным $\mathbb{R}^4$, что противоречит следующей известной теореме:

Теорема. *Пространство $\mathbb{R}^n$ не разбивается никаким лежащим в нем множеством размерности, не превосходящей $n - 2$.*

Из полученного противоречия мы заключаем, что $\text{exp}_3 M^2$ — не многообразие, что и требовалось доказать.

36.63. Пусть $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Полагая $z = x + iy$, отождествляем $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$. Таким образом, надо показать, что $SP^n \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$. Пусть $[(z_1, \dots, z_n)] \in SP^n \mathbb{C}$. Поставим в соответствие классу $[(z_1, \dots, z_n)]$ набор коэффициентов многочлена $P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$:

$$[(z_1, \dots, z_n)] \mapsto (a_{n-1}, \dots, a_0) \in \mathbb{C}^n.$$

Легко видеть, что полученное отображение $f: SP^n \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ является сюръективным и инъективным (действительно, любой многочлен над полем комплексных чисел имеет ровно n корней, которые однозначно определяются его коэффициентами). Кроме того, коэффициенты многочлена непрерывно зависят от его корней и обратно, корни многочлена

являются непрерывными функциями его коэффициентов, откуда мы заключаем, что построенное отображение f является гомеоморфизмом, что и требовалось доказать.

36.64. Обозначим через $\overline{\mathbb{C}}$ расширенную комплексную плоскость. Заметим, что сфера S^2 гомеоморфна $\overline{\mathbb{C}}$, следовательно, $SP^n S^2$ гомеоморфно $SP^n \overline{\mathbb{C}}$. Построим отображение $f: \overline{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$, ставящее в соответствие вектору $(z_1, \dots, z_n) \in \overline{\mathbb{C}}^n$ класс эквивалентности

$$[a_0, \dots, a_n] = \{(ca_0, \dots, ca_n) \mid c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \in \mathbb{C}P^n$$

таким образом, что $z_1, \dots, z_n$ — корни многочлена

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

а вектору вида $(z_1, z_2, \dots, z_k, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{n-k})$ — класс эквивалентности

$$[a_0, \dots, a_k, 0, \dots, 0],$$

причем $z_1, \dots, z_k$ — корни многочлена $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k$.

Докажем, что отображение h непрерывно, замкнуто и сюръективно. Сюръективность f очевидна, так как любой многочлен степени n имеет ровно n корней над полем $\mathbb{C}$. Непрерывность f в точках $(z_1, \dots, z_n)$, где $z_i \neq \infty$ для всех i , следует из того, что вектор $(a_0, \dots, a_{n-1}, 1)$, составленный из коэффициентов многочлена $P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_n)$ и рассматриваемый как функция от набора $z_1, \dots, z_n$, непрерывен по совокупности переменных $\{z_1, \dots, z_n\}$.

Покажем на примере $\overline{\mathbb{C}}^2$, что f непрерывна в точке (z_1, ∞) . Пусть $z_2 \neq \infty$, $z_2 \neq 0$. Тогда

$$f(z_1, z_2) = [z_1 z_2, -(z_1 + z_2), 1] = \left[z_1, -\left(\frac{z_1}{z_2} + 1\right), \frac{1}{z_2} \right],$$

$$\lim_{z_2 \rightarrow \infty} f(z_1, z_2) = [z_1, -1, 0] = f(z_1, \infty),$$

т.е. f непрерывна в точке $(z_1, \infty) \in \overline{\mathbb{C}}^2$. В случае произвольного n непрерывность доказывается аналогично.

Отображение f порождает на $\overline{\mathbb{C}}^n \cong (S^2)^n$ естественное отношение эквивалентности $\sim_f: x \sim y \leftrightarrow f(x) = f(y)$. Легко видеть, что это отно-

шение совпадает с отношением эквивалентности, порожденным отображением $\pi^n: \overline{\mathbb{C}}^n \cong (S^2)^n \rightarrow SP^n \overline{\mathbb{C}}$. Напомним, что образом f является $\mathbb{C}P^n$. Итак,

$$SP^n S^2 = SP^n \overline{\mathbb{C}} \cong \overline{\mathbb{C}}^n / \sim_{\pi^n} \cong \overline{\mathbb{C}}^n / \sim_f \cong \mathbb{C}P^n,$$

что и требовалось доказать.

36.65. Как и при решении задачи 36.63, отождествляем $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ с $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и строим отображение $f: SP^n(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Образом этого отображения являются векторы $(a_{n-1}, \dots, a_0)$, удовлетворяющие условию $a_0 \neq 0$, и только они. Множество этих векторов естественным образом гомеоморфно произведению $\mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})$, которое в свою очередь гомеоморфно $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{2n-2}$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мищенко А.С., Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
2. Кованцов Н.И. и др. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ.—Киев, 1989.
3. Васильев А.М., Соловьев Ю.П. Дифференциальная геометрия (методические указания).—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
4. Трофимов В.В. Задачи по теории групп и алгебр Ли.—М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
5. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии (геометрические главы).—М.: Наука, 1977.
6. Розендорн Э.Р. Задачи по дифференциальной геометрии.—М.: Наука, 1971.
7. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.—М.: Наука, 1986.
8. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Наука, 1987.
9. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии.—М.: Факториал Пресс, 2000.
10. Шварц Дж. Дифференциальная геометрия и топология.—М: Мир, 1970.
11. Бляшке В. Введение в дифференциальную геометрию.—М: Мир, 1957.
12. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ.—М.: Наука, 1967.
13. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии.—М.: Гостехиздат, 1956.
14. Торп Дж. Начальные главы дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1982.
15. Мантуров О.В. Элементы тензорного анализа.—М.: Просвещение, 1991.
16. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии.—М.: Мир, 1970.
17. Буземан Г. Геометрия геодезических.—М.: Физматгиз, 1962.
18. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия.—М.: Наука, 1974.

-
19. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Наука, 1969.
 20. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.: Гостехиздат, 1948.
 21. Фиников С. П. Курс дифференциальной геометрии.— М.: Гостехиздат, 1952.
 22. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.
 23. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия.— М.: Гостехиздат, 1961.
 24. Gerd Fischer. Mathematical Models. В 2-х томах.— Draunschweig/Weisbaden (Germany): Friedr. Vieweg & Sohn.

Учебное издание

МИЩЕНКО Александр Сергеевич
СОЛОВЬЕВ Юрий Петрович
ФОМЕНКО Анатолий Тимофеевич

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ**

Редактор *Л.А. Панюшкина*
Компьютерная графика *М.В. Ивановский*
Компьютерная верстка *Г.М. Красникова*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.10.953.Д.005466.07.03
от 25.07.2003

Подписано в печать 21.06.2004. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,75. Уч.-изд. л. 28,33.
Тираж 3000 экз. (1-й завод — 1500 экз.)
Заказ № 149

Издательство Физико-математической литературы
119071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с готовых диапозитивов
ГП «Облиздат»
248640 Калуга, пл. Старый торг, 5