

Уважаемый читатель!

Вы открыли одну из книг, изданных в серии «Классический университетский учебник», посвященной 250-летию Московского университета. Серия включает более 150 учебников и учебных пособий, рекомендованных к изданию Учеными советами факультетов и Редакционным советом серии.

Московский университет всегда славился своими профессорами и преподавателями, воспитавшими не одно поколение студентов, впоследствии внесших заметный вклад в развитие нашей страны, составивших гордость отечественной и мировой науки, культуры и образования. Юбилей Московского университета — выдающееся событие в жизни всей нашей страны и мирового образовательного сообщества.

Высокий уровень образования в Московском университете в первую очередь обеспечивается высоким уровнем написанных выдающимися учеными и педагогами учебников и учебных пособий, в которых сочетаются как глубина, так и доступность излагаемого материала. В этих книгах собран бесценный опыт методики и методологии преподавания, который стал достоянием не только Московского университета, но и других университетов России и всего мира.

Издание серии «Классический университетский учебник» наглядно демонстрирует тот вклад, который внес Московский университет в классическое университетское образование в нашей стране.

Решение этой благородной задачи было бы невозможным без активной помощи со стороны издательств, принявших участие в издании книг серии «Классический университетский учебник». Мы расцениваем это как поддержку ими позиции, которую занимает Московский университет в вопросах образования и науки.

Ректор Московского университета
академик РАН, профессор

B. A. Садовничий

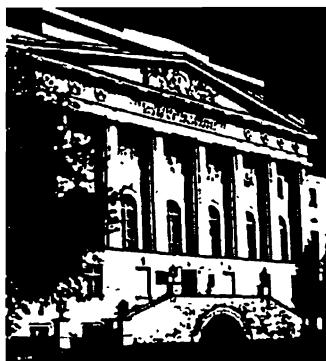
Серия

КЛАССИЧЕСКИЙ

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

основана в 2002 году по инициативе ректора
МГУ им. М.В. Ломоносова
академика РАН В.А. Садовничего
и посвящена

250-летию
Московского университета



КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Редакционный совет серии:

**Председатель совета
ректор Московского университета
В.А. Садовничий**

Члены совета:

Виханский О.С., Голиченков А.К., Гусев М.В.,
Добреньков В.И., Донцов А.И., Засурский Я.Н.,
Зинченко Ю.П. (ответственный секретарь),
Камзолов А.И. (ответственный секретарь),
Карпов С.П., Касимов Н.С., Колесов В.П.,
Лободанов А.П., Лунин В.В., Лупанов О.Б.,
Мейер М.С., Миронов В.В. (заместитель председателя),
Михалев А.В., Моисеев Е.И., Пушаровский Д.Ю.,
Раевская О.В., Ремнева М.Л., Розов Н.Х.,
Салецкий А.М. (заместитель председателя),
Сурин А.В., Тер-Минасова С.Г.,
Ткачук В.А., Третьяков Ю.Д., Трухин В.И.,
Трофимов В.Т. (заместитель председателя), Шоба С.А.



А.С. МИШЕНКО, А.Т. ФОМЕНКО

КРАТКИЙ КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

*Рекомендовано Советом по математике
и механике УМО по классическому
университетскому образованию в качестве
учебника для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по направлениям
“510100 - Математика”, “511200 - Математика.
Прикладная математика” и специальности
“010100 - Математика”*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 513.73

ББК 22.151

М 71

Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 304 с. — ISBN 5-9221-0442-X.

Книга представляет собой краткую версию курса дифференциальной геометрии, читаемого в течение двух семестров на математических факультетах университетов. Она содержит основной программный материал по общей топологии, нелинейным системам координат, теории гладких многообразий, теории кривых и поверхностей, группам преобразований, тензорному анализу и римановой геометрии, теории интегрирования и гомологиям, фундаментальным группам поверхностей, вариационным принципам в римановой геометрии. Изложение иллюстрируется большим количеством примеров и сопровождается задачами, часто содержащими дополнительный материал.

Для математиков и физиков, студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников.

ISBN 5-9221-0442-X

© ФИЗМАТЛИТ, 2004

© А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, 2004

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Г л а в а 1. Введение в дифференциальную геометрию | 7 |
| 1.1. Криволинейные системы координат. Простейшие примеры | 7 |
| 1.1.1. Мотивировка | 7 |
| 1.1.2. Декартовы и криволинейные координаты | 9 |
| 1.1.3. Простейшие примеры криволинейных систем координат | 14 |
| 1.2. Длина кривой в криволинейных координатах | 17 |
| 1.2.1. Длина кривой в евклидовых координатах | 17 |
| 1.2.2. Длина кривой в криволинейных координатах | 19 |
| 1.2.3. Понятие римановой метрики в области евклидова пространства | 23 |
| 1.2.4. Индефинитные метрики | 25 |
| 1.3. Геометрия на сфере, плоскости | 28 |
| 1.4. Псевдосфера и геометрия Лобачевского | 34 |
| Г л а в а 2. Общая топология | 48 |
| 2.1. Определения и простейшие свойства метрических и топологических пространств . | 48 |
| 2.1.1. Метрические пространства | 48 |
| 2.1.2. Топологические пространства | 50 |
| 2.1.3. Непрерывные отображения | 52 |
| 2.1.4. Фактортопология | 54 |
| 2.2. Связность. Аксиомы отделимости | 56 |
| 2.2.1. Связность . | 56 |
| 2.2.2. Аксиомы отделимости | 58 |
| 2.3. Компактные пространства | 60 |
| 2.3.1. Компактные пространства | 60 |
| 2.3.2. Свойства компактных пространств . | 61 |
| 2.3.3. Метрические компактные пространства . | 62 |
| 2.3.4. Операции над компактными пространствами | 62 |
| 2.4. Функциональная отделимость. Разбиение единицы | 63 |
| 2.4.1. Функциональная отделимость . | 64 |
| 2.4.2. Разбиение единицы . . | 66 |

| | |
|--|-----|
| Г л а в а 3. Гладкие многообразия (общая теория) | 68 |
| 3.1. Понятие многообразия | 70 |
| 3.1.1. Основные определения . | 70 |
| 3.1.2. Функции замены координат. Определение гладкого многообразия . | 73 |
| 3.1.3. Гладкие отображения. Диффеоморфизм | 77 |
| 3.2. Задание многообразий уравнениями | 80 |
| 3.3. Касательные векторы. Касательное пространство | 85 |
| 3.3.1. Простейшие примеры | 85 |
| 3.3.2. Общее определение касательного вектора | 88 |
| 3.3.3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$ | 89 |
| 3.3.4. Производная функции по направлению | 90 |
| 3.3.5. Касательное расслоение . | 93 |
| 3.4. Подмногообразия | 95 |
| 3.4.1. Дифференциал гладкого отображения | 95 |
| 3.4.2. Локальные свойства отображений и дифференциал . | 98 |
| 3.4.3. Вложение многообразий в евклидово пространство . | 100 |
| 3.4.4. Риманова метрика на многообразии . | 102 |
| 3.4.5. Теорема Сарда . | 104 |
| Г л а в а 4. Гладкие многообразия (примеры) | 109 |
| 4.1. Теория кривых на плоскости и в трехмерном пространстве . . . | 109 |
| 4.1.1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе . | 109 |
| 4.1.2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе | 114 |
| 4.2. Поверхности. Первая и вторая квадратичные формы . | 119 |
| 4.2.1. Первая квадратичная форма | 119 |
| 4.2.2. Вторая квадратичная форма | 122 |
| 4.2.3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности | 126 |
| 4.2.4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей . | 131 |
| 4.3. Группы преобразований . | 140 |
| 4.3.1. Простейшие примеры групп преобразований | 140 |
| 4.3.2. Матричные группы преобразований | 151 |
| 4.3.3. Полная линейная группа | 152 |
| 4.3.4. Специальная линейная группа | 152 |

| | |
|---|-----|
| 4.3.5. Ортогональная группа | 153 |
| 4.3.6. Унитарная группа и специальная унитарная группа . . . | 154 |
| 4.3.7. Симплектическая некомпактная и симплектическая компактная группы | 157 |
| 4.4. Динамические системы | 161 |
| 4.5. Классификация двумерных поверхностей | 171 |
| 4.5.1. Многообразия с краем | 171 |
| 4.5.2. Ориентируемые многообразия | 173 |
| 4.5.3. Классификация двумерных многообразий | 175 |
| 4.6. Двумерные многообразия как римановы поверхности алгебраических функций | 186 |
| Г л а в а 5. Тензорный анализ и риманова геометрия | 197 |
| 5.1. Общее понятие тензорного поля на многообразии . | 197 |
| 5.2. Простейшие примеры тензорных полей | 202 |
| 5.2.1. Примеры | 202 |
| 5.2.2. Алгебраические операции над тензорами | 205 |
| 5.2.3. Кососимметричные тензоры | 208 |
| 5.3. Связность и ковариантное дифференцирование | 215 |
| 5.3.1. Определение и свойства аффинной связности | 215 |
| 5.3.2. Римановы связности . . | 222 |
| 5.4. Параллельный перенос. Геодезические | 224 |
| 5.4.1. Предварительные замечания | 224 |
| 5.4.2. Уравнение параллельного переноса | 226 |
| 5.4.3. Геодезические | 228 |
| 5.5. Тензор кривизны . | 237 |
| 5.5.1. Предварительные замечания | 237 |
| 5.5.2. Координатное определение тензора кривизны | 238 |
| 5.5.3. Инвариантное определение тензора кривизны | 239 |
| 5.5.4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана | 240 |
| 5.5.5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана . | 243 |
| Г л а в а 6. Теория гомологий | 246 |
| 6.1. Исчисление внешних дифференциальных форм. Когомологии | 247 |
| 6.1.1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм | 247 |

| | |
|---|------------|
| 6.1.2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама) | 252 |
| 6.1.3. Гомотопические свойства групп когомологий | 255 |
| 6.2. Интегрирование внешних форм | 260 |
| 6.2.1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию | 260 |
| 6.2.2. Формула Стокса | 261 |
| 6.3. Степень отображения и ее приложения | 266 |
| 6.3.1. Степень отображения | 266 |
| 6.3.2. Основная теорема алгебры | 267 |
| 6.3.3. Интегрирование форм | 268 |
| 6.3.4. Гауссово отображение гиперповерхности | 269 |
| Г л а в а 7. Простейшие вариационные задачи римановой геометрии | 271 |
| 7.1. Понятие функционала. Экстремальные функции. Уравнение Эйлера | 271 |
| 7.2. Экстремальность геодезических | 277 |
| 7.3. Минимальные поверхности | 281 |
| 7.4. Вариационное исчисление и симплектическая геометрия | 284 |

Глава 1

Введение в дифференциальную геометрию

1.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

1.1.1. Мотивировка

Рассмотрим евклидово пространство размерности n , которое мы в дальнейшем будем обозначать через \mathbf{R}^n . Будем считать, что в нем заданы декартовы координаты x^1, \dots, x^n относительно выбранного и фиксированного ортонормированного базиса e_1, e_2, \dots, e_n . Напомним, что с декартовыми координатами тесно связано понятие евклидова скалярного произведения — билинейной формы, сопоставляющей каждой паре векторов $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$ вещественное число $\langle \xi, \eta \rangle$, причем эта операция является симметричной, линейной по каждому аргументу, а сама форма — положительно определенной. В декартовых координатах

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^1 \eta^1 + \dots + \xi^n \eta^n, \quad \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n), \quad \eta = (\eta^1, \dots, \eta^n).$$

Однако декартовых координат недостаточно для удобной аналитической записи многих конкретных задач. Конечно, когда мы имеем дело с довольно простыми кривыми, например с окружностью или эллипсом, то их аналитическое выражение в декартовых координатах является весьма простым. Но весьма часто, например в физических задачах, встречаются, скажем, траектории движения материальных точек в поле каких-либо сил, явное выражение которых в декартовых координатах затруднительно. Например, следующее уравнение определяет в декартовых координатах спираль: $\sqrt{x^2 + y^2} - e^{\lambda(\arctg(y/x))} = 0$ (рис. 1.1). Конечно, эта запись не слишком сложна, но тем не менее эта кривая запишется значительно проще в другой, так называемой *полярной системе координат* (r, φ) , связанных с декартовыми

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

(рис. 1.2). В этих координатах уравнение спирали принимает вид $r = e^{\lambda\varphi}$, что позволяет сразу оценить характер движения точки по траектории.

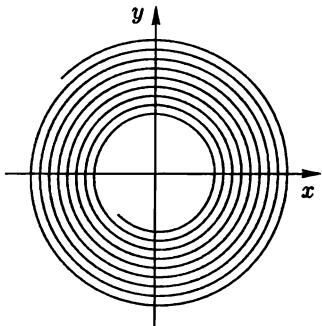


Рис. 1.1

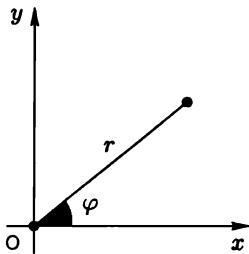


Рис. 1.2

Укажем еще на одну задачу, где полярные координаты являются полезными. Рассмотрим движение материальной точки на плоскости в центральном поле сил. Пусть центр находится в точке O , \mathbf{r} —

радиус-вектор движущейся точки, r — его длина. Тогда координаты r и φ будут какими-то функциями времени t . Рассмотрим в точке $\mathbf{r}(t)$, имеющей полярные координаты r, φ , два единичных ортогональных вектора: вектор \mathbf{e}_r , направленный по радиус-вектору точки, и вектор \mathbf{e}_φ , ортогональный вектору \mathbf{e}_r и направленный в сторону увеличения угла φ (рис. 1.3). Точкой будем обозначать дифференцирование по времени t .

Тогда, как известно из механики, движение материальной точки массы 1 в центральном поле сил на плоскости определяется следующим дифференциальным уравнением: $\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{e}_r$, где f — некоторая гладкая функция от r .

Движение материальной точки задается двумя функциями: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Легко убедиться в том, что при этом сохраняется величина $r^2\dot{\varphi}$. Это есть один из законов Кеплера, открытый при изучении движения планет в Солнечной системе. Этой сохраняющейся величине можно придать прозрачный смысл. Кеплер ввел удобное понятие: он назвал секториальной скоростью v скорость

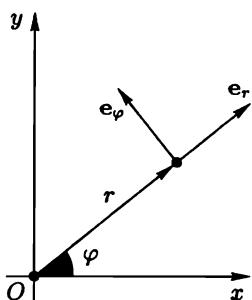


Рис. 1.3

изменения площади $s(t)$, заметаемой радиус-вектором $r(t)$, т. е. $v = \frac{ds(t)}{dt}$.

Тогда закон Кеплера формулируется так: в равные времена радиус-вектор заметает равные площади, иными словами, секториальная скорость постоянна: $\frac{ds(t)}{dt} = \text{const.}$

Аналогичным образом при решении задач механики и физики возникли и другие криволинейные координаты — цилиндрические, сферические и т. д. Изучая подобные способы задания точек пространства набором вещественных чисел, можно заметить, что в основе лежит общая идея, которую мы сейчас и опишем.

1.1.2. Декартовы и криволинейные координаты

Рассмотрим произвольную область в \mathbf{R}^n . Напомним, что мы называем *областью* произвольное множество C в евклидовом пространстве, каждая точка P которого входит в C вместе с некоторым шаром достаточно малого радиуса, имеющим точку P своим центром.

Рассмотрим второй экземпляр евклидова пространства, который обозначим через \mathbf{R}_1^n . Задать координаты точки P в области C — значит сопоставить ей набор чисел, точку в \mathbf{R}_1^n . Ясно, что соответствие должно удовлетворять естественным требованиям. В первую очередь, нужно, чтобы различным точкам отвечали различные наборы координат.

Сопоставляя каждой точке P области C набор n вещественных чисел, мы получаем n функций $x^1(P), \dots, x^n(P)$, имеющих областью определения область C ; здесь x^1, \dots, x^n — координаты в пространстве \mathbf{R}_1^n . Обычно требуют, чтобы эти функции были непрерывны и даже гладки.

Итак, рассмотрим два экземпляра евклидова пространства: \mathbf{R}^n с декартовыми координатами y^1, \dots, y^n и \mathbf{R}_1^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n ; пусть C — область в \mathbf{R}^n .

Определение 1. *Непрерывной системой координат* в области C евклидова пространства \mathbf{R}^n называется набор функций $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$, задающих взаимно однозначное и непрерывное в обе стороны отображение области C на некоторую область A в евклидовом пространстве \mathbf{R}_1^n . Иными словами, этот набор функций задает *гомеоморфизм* области C на область A .

Функции $x^1(P), \dots, x^n(P)$ будем называть *координатами* точки P относительно координатного отображения $f: C \rightarrow A$.

Например, в качестве отображения $f: C \rightarrow A$ можно взять тождественное отображение: $x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n$.

Иногда будем записывать точку P с ее координатами $x^1(P), \dots, x^n(P)$ в виде $P(x^1, \dots, x^n)$, предполагая, что уже задано координатное отображение f .

Среди всех непрерывных координатных отображений выделены такие, которые задают гладкое отображение области C на область A , т. е. все функции $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$ являются гладкими функциями. Мы сразу перейдем к определению координат, у которых гладкими являются оба отображения: как f , так и f^{-1} . Напомним понятие матрицы Якоби гладкого отображения.

Пусть $f: C \rightarrow A$ — гладкое отображение, задаваемое функциями $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$.

Определение 2. Матрицей Якоби отображения f называется функциональная матрица

$$df = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix},$$

составленная из частных производных от координат. Ее определитель будем обозначать через $J(f)$ и называть якобианом отображения f .

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначение df для матрицы Якоби не вызовет путаницы с дифференциалом функции f , поскольку дифференциал гладкой функции соответствует матрице Якоби в этом частном случае. Матрица Якоби является переменной матрицей, т. е. зависит от точки P из области C .

Определение 3. Регулярной системой координат в области C пространства \mathbf{R}^n называется набор гладких функций $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$, задающих взаимно однозначное отображение области C на некоторую область A в пространстве \mathbf{R}_1^n , причем якобиан отображения $J(f)$ отличен от нуля во всех точках области C .

Отличие от нуля якобиана отображения f во всех точках области C означает, что отображение f^{-1} , обратное к f , является гладким. Это следует из теоремы о системе неявных функций. Итак, регулярная система координат задается двумя гладкими, взаимно обратными отображениями, устанавливающими гомеоморфизм между областями C и A .

Можно было бы считать, что с самого начала в области C пространства \mathbf{R}^n были введены декартовы координаты с помощью тождественного отображения C на A при естественном отождествлении обоих пространств \mathbf{R}^n и \mathbf{R}_1^n . Тогда введение в области C еще одной системы координат, задаваемой регулярным отображением f , можно рассматривать как замену координат: мы перешли от декартовых координат к новым координатам в той же области.

Определение 4. Регулярную систему координат общего вида в области C будем называть также *криволинейными координатами* в области C .

Рассмотрим теперь в области C две произвольные криволинейные системы координат: $x^1(P), \dots, x^n(P)$ и $z^1(P), \dots, z^n(P)$. Это означает, что заданы два регулярных отображения:

$$f: C \rightarrow A \subset \mathbf{R}_1^n(x^1, \dots, x^n); \quad g: C \rightarrow B \subset \mathbf{R}_2^n(z^1, \dots, z^n),$$

т. е. отображения f и g устанавливают взаимно однозначные и гладкие в обе стороны соответствия между областями C , A и B , B соответственно. Иными словами, каждой точке P из области C сопоставлены два набора ее криволинейных координат, $\{x^i(P)\}$ и $\{z^i(P)\}$. Следовательно, можно сопоставить координатам $\{x^i(P)\}$ точки P ее координаты $\{z^i(P)\}$, что определяет отображение $\psi_{x,z}: A \rightarrow B$, т. е. $\psi_{x,z}: \{x^i(P)\} \rightarrow \{z^i(P)\}$, $1 \leq i \leq n$.

Отображение $\psi_{x,z}$ называется *заменой координат* в области C . При этом точка P получает вместо исходных координат $\{x^i(P)\}$ новые координаты $\{z^i(P)\}$.

Лемма 1. Отображение $\psi_{x,z}$ является взаимно однозначным, гладким в обе стороны отображением области A на область B с ненулевым якобианом.

Доказательство. Взаимная однозначность отображения $\psi_{x,z}$ сразу следует из определения 3. Гладкость отображения $\psi_{x,z}$ следует из того, что композиция двух гладких отображений является гладким отображением. Осталось проверить, что отображение $\psi_{x,z}$ имеет ненулевой (в каждой точке области A) якобиан.

В самом деле, отображение $\psi_{x,z}$ распадается в композицию двух отображений: $g \circ f^{-1}: A \rightarrow B$ (рис. 1.4). Матрица Якоби отображения $\psi_{x,z}$ распадается в произведение матриц Якоби отображения f^{-1} и отображения g .

В самом деле, так как

$$z^i = z^i(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)),$$

где функции $\{y^\alpha(x^1, \dots, x^n)\}$ задают гладкое отображение f^{-1} :

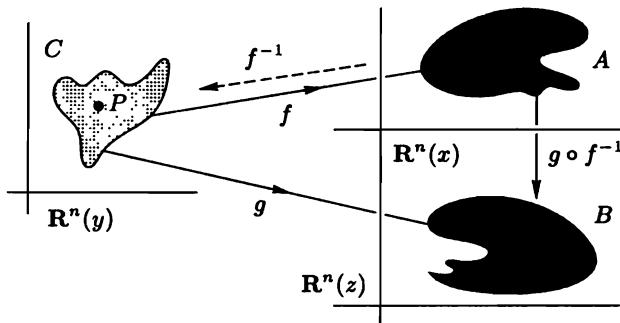


Рис. 1.4

$A \rightarrow C$, то по формуле дифференцирования сложной функции получаем $\frac{\partial z^i}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial z^i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$, что и означает, что матрица Якоби $d\psi_{x,z}$

распалась в произведение двух матриц, dg и df^{-1} . Осталось выяснить, как связаны матрицы Якоби df и $d(f^{-1})$. Так как композиция $f^{-1} \circ f$ является тождественным отображением области C на себя, то получаем, что $d(f^{-1} \circ f) = df^{-1} \circ df = E$, где E — единичная матрица, т. е. окончательно, $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$. Тем самым, $d\psi_{x,z} = (dg) \cdot (df)^{-1}$, т. е. $J(\psi_{x,z}) = \frac{J(g)}{J(f)}$, и так как оба якобиана $J(g)$ и $J(f)$ отличны от нуля, то и якобиан $J(\psi_{x,z})$ отличен от нуля. ■

Пусть на области C задан набор гладких функций $\{x^i(P)\}$, $1 \leq i \leq n$. Как узнать, задает ли он регулярную систему координат?

Лемма 2. Пусть гладкие функции $\{x^i(P)\}$, $1 \leq i \leq n$, таковы, что соответствующий якобиан $J(f)$, $f(P) = \{x^i(P)\}$, отличен от нуля в области C . Тогда для каждой точки P из области C существует такая открытая окрестность, что в ней функции $\{x^i(P)\}$ задают регулярные координаты.

Такие функции можно назвать *локальной системой координат*.

Доказательство. В условии леммы не было предположено, что функции $\{x^i(P)\}$ определяют взаимно однозначное отображение области C на область A пространства R_1^n . Однако по теореме о неявных функциях из условия отсутствия якобиана отличия от нуля якобиана вытекает существование (по крайней мере локально) обратного гладкого отображения. Лемма доказана. ■

Отметим, что функции, удовлетворяющие условию леммы 2, не обязательно определяют регулярную систему координат сразу во всей области C , т. е. гладкое отображение f^{-1} области A на

область C может и не существовать. Действительно, рассмотрим простой пример. Возьмем в качестве области C двумерную плоскость, из которой «выколота» одна точка — начало координат O , и рассмотрим гладкое отображение

$$f(y) = (x^1(y), x^2(y)), \quad x^1(y) = (y^1)^2 - (y^2)^2, \quad x^2(y) = 2y^1 y^2,$$

т. е. если положить $z = y^1 + iy^2$, $w = x^1 + ix^2$ (где i — мнимая единица), то $w = z^2$. Это отображение переводит комплексное число z в его квадрат. В полярных координатах (r, φ) отображение запишется так: $f(r, \varphi) = (r^2, 2\varphi)$ (рис. 1.5). Матрица Якоби df имеет вид

$$df = \begin{pmatrix} 2y^1 & -2y^2 \\ 2y^2 & 2y^1 \end{pmatrix},$$

$$J(f) = 4((y^1)^2 + (y^2)^2) > 0.$$

Мы видим, что якобиан положителен во всех точках области C (так как начало координат «выколото»). Следовательно, по лемме 2 отображение устанавливает локальные регулярные координаты в некоторой открытой окрестности каждой точки из области C . В то же время отображение f не имеет обратного отображения f^{-1} , поскольку f не взаимно однозначно.

Дело в том, что каждая точка $w = x^1 + ix^2$, не являющаяся началом координат, всегда имеет ровно два прообраза при отображении f , это — точки (r, φ) и $(r, \varphi + \pi)$.

В приведенном примере якобиан системы функций стремится к нулю, когда точка P приближается к выколотой точке. В геометрии давно обсуждается вопрос: будет ли взаимно однозначным такое гладкое отображение f евклидова пространства на себя, при котором на якобиан наложено условие $0 < \varepsilon \leq J(f) \leq N < \infty$? Здесь ε и N — постоянные. Мы не будем здесь заниматься этой проблемой.

Каждая система криволинейных координат в области определяет так называемые координатные линии. А именно: i -я координатная линия задается уравнением

$$x^1(P) = c_1, \quad x^{i-1}(P) = c_{i-1}, \quad x^i(P) = t,$$

$$x^{i+1}(P) = c_{i+1}, \quad x^n(P) = c_n,$$

где все c_j — постоянные, а t — непрерывный параметр. С измене-

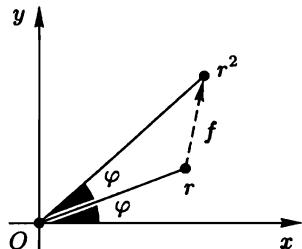


Рис. 1.5

нием t точка P прочерчивает гладкую траекторию в области. Таким образом, из каждой точки P области C выходит n гладких траекторий, которые и называются координатными линиями данной системы координат (в точке P). Для другой точки P будут другие координатные линии, причем они гладко деформируются при изменении точки P . Если координаты — декартовы, то координатные линии являются прямыми. При наглядном изображении криволинейных коор-

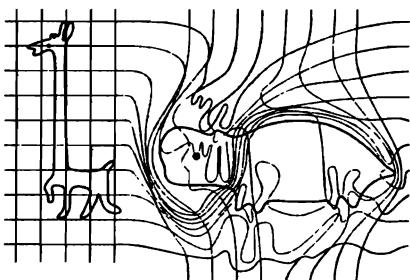


Рис. 1.6

нат полезно изображать координатные линии. На рис. 1.6 показана гладкая замена координат, «превращающая» жирафа в бегемота.

1.1.3. Простейшие примеры криволинейных систем координат

Для начала отметим, что полярные координаты (r, φ) на плоскости не задают регулярные координаты на всей плоскости \mathbb{R}^2 . В самом деле, переход от полярной системы к декартовой задается функциями: $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$. Найдем якобиан замены. Прямое вычисление дает $J(\psi) = r$.

Таким образом, якобиан равен нулю в начале координат. Следовательно, полярные координаты не являются регулярными на всей плоскости. Более того, они не задают взаимно однозначного отображения всей двумерной плоскости на себя, так как точки вида (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi)$ переходят в одну и ту же точку.

Выделим ту область C , где полярные координаты регулярны.

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2(r, \varphi)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$. В качестве области C возьмем бесконечную полосу, определяемую неравенствами $0 < \varphi < 2\pi$, $0 < r < +\infty$. Тогда в качестве области A в плоскости $\mathbb{R}^2(x^1, x^2)$ следует взять всю плоскость, за исключением луча $x^1 \geq 0$, $x^2 = 0$. Отображение $f: C \rightarrow A$ задается формулами $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$. На рис. 1.7 показано, что происходит с координатными линиями при отображении f . Прямоугольная сетка превращается в полярную сетку. Взаимная однозначность и регулярность отображения очевидны.

Рассмотрим теперь трехмерное евклидово пространство и изучим цилиндрическую систему координат. Формулы замены следу-

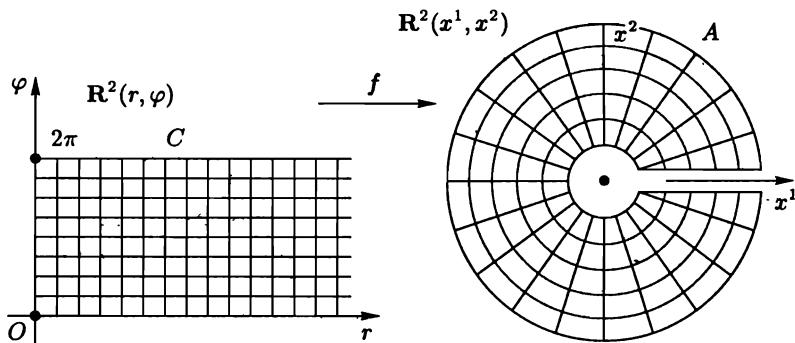


Рис. 1.7

ющие: $x^1 = r \cos \varphi$, $x^2 = r \sin \varphi$, $x^3 = z$. Рассмотрим $R^3(y^1, y^2, y^3)$, где $y^1 = r$, $y^2 = \varphi$, $y^3 = z$, и в качестве C возьмем область $0 < r$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Приведенные выше формулы определяют гладкое отображение $f: C \rightarrow A \subset R^3(x^1, x^2, x^3)$, где область A получается из $R^3(x^1, x^2, x^3)$ выбрасыванием полуплоскости $x^2 = 0$, $x^1 \geq 0$ (рис. 1.8). Матрица Якоби имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Якобиан замены равен r . Таким образом, в области A цилиндрические координаты регулярны. Дело в том, что якобиан равен нулю только в точках оси z , но полуплоскость, проходящая через эту ось, исключена для обеспечения взаимной однозначности.

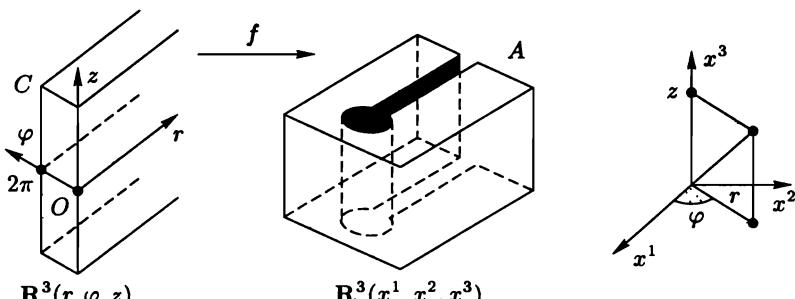


Рис. 1.8

Теперь рассмотрим n -мерное евклидово пространство и введем в нем *сферическую систему координат*. Формулы замены таковы:

$$f_n: C(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \rightarrow A(x^1, x^2, \dots, x^n);$$

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta_1, \\ x^2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x^3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \vdots \\ x^{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \\ x^n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Структура формул ясна: удобно считать, что все строки имеют одно и то же происхождение, но только параметры θ_i , начиная с номера $i = n$, равны нулю. Предоставляем читателю вычисление матрицы Якоби и якобиана.

Для трехмерного пространства сферические координаты обычно обозначаются через (r, θ, φ) . Тогда формулы замены приобретают вид (с точностью до перенумерации)

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta; \\ 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad r \geq 0.$$

В этих координатах $J = r^2 \sin \theta$.

Области C и A показаны на рис. 1.9. Якобиан равен нулю только в точках оси x^3 . Полуплоскость $x^2 = 0, x^1 \geq 0$, удалена для обеспечения взаимной однозначности координатной системы. При фиксированном r координатные линии параметров θ, φ показаны

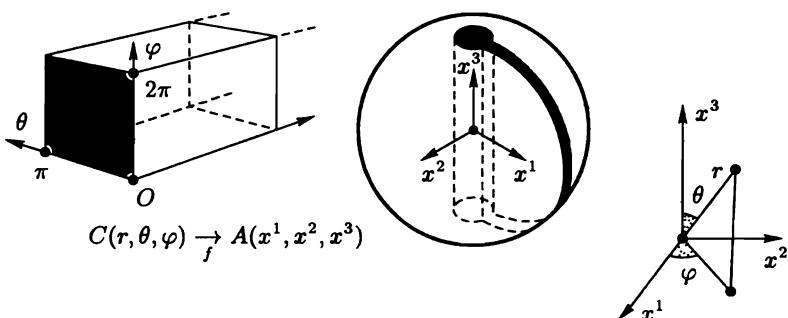


Рис. 1.9

на рис. 1.10. Эти угловые параметры иногда называются широтой и долготой. Они задают координатную сеть на глобусе. Матрица Якоби в трехмерном случае имеет вид

$$d\psi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

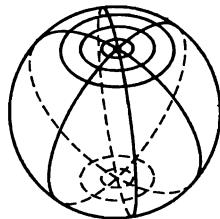


Рис. 1.10

Задачи

1. Доказать, что набор функций $u = x + \sin y$, $v = y - \frac{1}{2} \sin x$ на плоскости задает регулярные координаты.
2. Показать, что на окружности S^1 нельзя задать единой системы координат.
3. Записать уравнение Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ в полярных координатах.

1.2. ДЛИНА КРИВОЙ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

1.2.1. Длина кривой в евклидовых координатах

Рассмотрим пространство \mathbf{R}^n и зададим в нем евклидово скалярное произведение $\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^i \eta^i$. Тогда для каждого вектора ξ можно вычислить его **модуль** или **длину** по формуле $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Если же мы хотим найти расстояние между двумя произвольными точками $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$, то следует вычислить длину вектора $\xi - \eta$. Как известно из аналитической геометрии, угол φ между двумя векторами можно выразить через скалярные произведения по формуле $\cos \varphi = \frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi||\eta|}$. Мы видим, что такие важные метрические понятия, как длины векторов и углы между ними, тесно связаны со скалярным произведением. При построении других важных понятий геометрии мы будем опираться на различные формы скалярных произведений.

Дадим теперь определение длины гладкой кривой. Зададим кривую $\gamma(t)$ в параметрическом виде, т. е. будем считать, что **гладкая кривая** задана в евклидовом пространстве n гладкими функциями $x^1(t), \dots, x^n(t)$, где параметр пробегает либо всю вещественную

ось, либо конечный отрезок $[a, b]$. Здесь x^1, \dots, x^n — это декартовы координаты в \mathbf{R}^n .

Определение 1. Длиной кривой от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ (или от значения параметра $t = a$ до $t = b$) называется число $l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$, где $\dot{\gamma}(t)$ — вектор с координатами $\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^n(t)}{dt} \right)$, называемый вектором скорости кривой $\gamma(t)$ или касательным вектором.

В явном виде формула имеет вид

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(t)}{dt} \right)^2} dt.$$

Лемма 1. Пусть на гладкой кривой $\gamma(t)$ заданы две точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. Пусть $t = t(\tau)$ — произвольная гладкая замена параметра t на новый параметр τ , причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Тогда длина кривой $l(\gamma(t))_a^b$ не изменится, т. е. имеет место равенство $l(\gamma(t))_a^b = l(\gamma(\tau))_\alpha^\beta$, где $a = t(\alpha)$, $b = t(\beta)$.

Доказательство. Обозначим вектор $\left\{ \frac{dx^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^n(t)}{dt} \right\}$ через $\dot{\gamma}_t$. Прямое вычисление дает

$$l(\gamma(t))_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}_t, \dot{\gamma}_t \rangle} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 d\tau = \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} d\tau.$$

Пусть даны две гладкие кривые, $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$, пересекающиеся в точке P евклидова пространства, т. е. существуют такие значения параметров $t = a$ и $\tau = b$, что $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$. Определим угол между кривыми в точке их пересечения.

Определение 2. Углом между пересекающимися гладкими траекториями $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(\tau)$ в точке их пересечения называется угол φ , определяемый равенством

$$\cos \varphi = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(a), \dot{\gamma}_2(b) \rangle}{|\dot{\gamma}_1(a)| |\dot{\gamma}_2(b)|},$$

если только оба вектора скорости, $\dot{\gamma}_1(a)$ и $\dot{\gamma}_2(b)$, отличны от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Строго говоря, это равенство определяет не один угол, а два угла, дающих в сумме угол, равный π . Однако поскольку кривые занумерованы, то возникает понятие ориентированного угла, который определяется приведенной выше формулой уже однозначно. Остановимся также на требовании, чтобы оба вектора скорости были отличны от нуля в точке пересечения. Дело в том, что в точках, где вектор скорости обращается в нуль, кривая может претерпевать излом, скачком меняя направление движения (рис. 1.11). Наличие на гладкой кривой точки излома не противоречит гладкости кривой (см. определение гладкой кривой).

Пример гладкой кривой, имеющей излом, приведен рис. 1.12. Здесь «угол излома» равен $\pi/2$. Легко построить гладкую кривую, имеющую в особой точке угол излома, равный π (рис. 1.13).

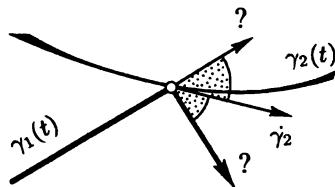


Рис. 1.11

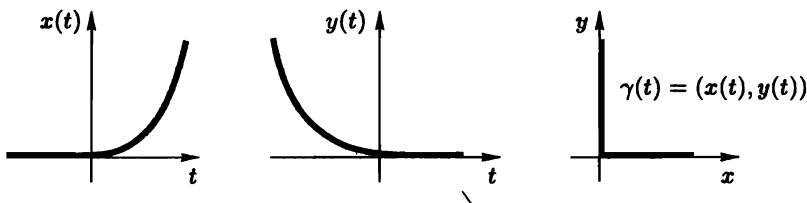


Рис. 1.12

УПРАЖНЕНИЕ. Напишите параметрическое уравнение кривой, изображенной на рис. 1.13. Можно ли задать эту кривую аналитическими функциями $x(t)$, $y(t)$?

Представляем читателю убедиться, что длина отрезка и длина окружности, подсчитанные по указанной общей формуле, совпадают с известными из элементарной геометрии величинами.



Рис. 1.13

1.2.2. Длина кривой в криволинейных координатах

Рассмотрим теперь криволинейные координаты в области C евклидова пространства, и пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая в этой области. Как запишется длина кривой в криволинейных координатах? Обозначим криволинейные координаты через z^1, \dots, z^n , т. е. $x^i = x^i(z)$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dx^i(t)}{dt} = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{\partial z^k}{\partial t},$$

т. е.

$$\begin{aligned} l(\gamma)_a^b &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i(z(t))}{dt} \right)^2} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{m,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{dz^m}{dt} \frac{dz^p}{dt}} dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp}(z) \frac{dz^m}{dt} \frac{dz^p}{dt}} dt, \end{aligned}$$

где функции $g_{mp}(z)$ имеют следующий вид: $g_{mp}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$.

Очевидно, они симметричны по индексам m и p , т. е. $g_{mp} = g_{pm}$. Следовательно, эти функции можно организовать в симметричную матрицу $G = (g_{mp})$.

Поскольку $d\psi_{z,x} = \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)$, то матрица G является произведением двух матриц: $G = AA^\top$, где $A = d\psi_{z,x}$. Каков закон изменения матрицы $G(z)$ при замене координат?

Заменим переменные, перейдя от $\{z^i\}$ к переменным $\{y^k\}$, т. е. рассмотрим регулярную замену вида $z^i = z^i(y^1, \dots, y^n)$, $1 \leq i \leq n$. При этом мы считаем $\{y^k\}$ снова криволинейными координатами в области C . Тогда коэффициенты $g_{mp}(z)$ меняются по закону

$$\begin{aligned} g_{kl}(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l} = \sum_{m,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \right) \frac{\partial z^p}{\partial y^l} = \\ &= \sum_{m,p} \frac{\partial z^m}{\partial y^k} g_{mp}(z) \frac{\partial z^p}{\partial y^l}, \end{aligned}$$

т. е. $G(y) = d\psi_{y,z} G(z) (d\psi_{y,z})^\top$

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда мы будем обозначать новые координаты $z^{i'}$, ставя штрих у индексов, записанных в новой системе координат.

Функции $g_{mp}(z)$ имеют прозрачный смысл. Рассмотрим точку P в области C и координатные линии криволинейных координат z^1, \dots, z^n , проходящие через точку P . Каждую линию можно

задать параметрически:

$$z^1 = c_1, \quad z^{i-1} = c_{i-1}, \quad z^i = t, \quad z^{i+1} = c_{i+1}, \quad z^n = c_n,$$

где c_α , $1 \leq \alpha \leq n$, $\alpha \neq i$, — такие постоянные, что точка P имеет координаты $z^\alpha = c_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq n$. Обозначим m -ю координатную линию через $\gamma_m(t)$. Тогда в системе координат x она запишется так: $x^i(c_1, \dots, c_{m-1}, z^m = t, c_{m+1}, \dots, c_n)$, $1 \leq i \leq n$.

Вектор скорости этой кривой в точке P имеет координаты $\mathbf{e}_m = \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \right\}$. Так как $g_{mp}(z) = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$, то $g_{mp}(z) = \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_p \rangle$,

т. е. функции g_{mp} являются евклидовыми скалярными произведениями векторов, касательных к соответствующим координатным линиям (рис. 1.14).

Мы видим, что матрица $G(z)$ при заменах координат преобразуется как матрица квадратичной формы. Если исходные координаты были декартовыми, то матрица G является единичной и, следовательно, в других, криволинейных, координатах ее можно записать так: $G(z) = A E A^\top$, где $A = d\psi_{z,x}$ и $\{x^i\}$ — декартовы координаты.

Рассмотрим простейшие примеры формул для длины кривой в различных криволинейных координатах. Попутно мы вычислим в матрицу G для этих координат.

1) Полярные координаты на плоскости. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах имеет вид

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{т. е. } g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Матрица Якоби была уже вычислена нами выше. Отсюда получаем

$$G(r, \varphi) = d\psi(d\psi)^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Следовательно, в полярных координатах длина кривой $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} dt.$$

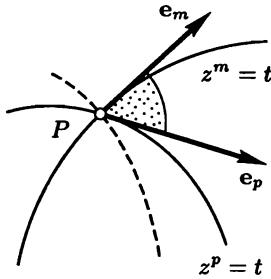


Рис. 1.14

2) Цилиндрические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3(r, \varphi, z)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше. Отсюда получаем

$$G(r, \varphi, z) = (d\psi)(d\psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, в цилиндрических координатах длина кривой $\gamma(t) = (r(t), \varphi(t), z(t))$, выражается по формуле

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

Пример. Длина винтовой линии на прямом круговом цилиндре, заданной параметрически уравнениями: $r(t) = R$, $\varphi(t) = \omega t$, $z = qt$ вычисляется так:

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{R^2\omega^2 + q^2} dt = (R^2\omega^2 + q^2)(b - a).$$

3) Сферические координаты в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3(r, \theta, \varphi)$. Матрица $G(x)$ в декартовых координатах имеет вид $G(x) = E$. Матрица Якоби была уже вычислена нами выше. Отсюда получаем

$$G(r, \theta, \varphi) = (d\psi)(d\psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Следовательно, в сферических координатах длина кривой $\gamma(t) = (r(t), \theta(t), \varphi(t))$, выражается формулой

$$l(\gamma)_a^b = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} dt.$$

Иногда удобно выписать явную формулу для дифференциала длины дуги dl . В частности, в разобранных примерах эти дифференциалы имеют вид: $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$ в полярных координатах; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 + (dz)^2$ в цилиндрических координатах; $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$ в сферических координатах.

1.2.3. Понятие римановой метрики в области евклидова пространства

Мы сопоставили каждой криволинейной системе координат z в области C гладкую матричную функцию $G(z)$, преобразующуюся при замене координат, как квадратичная форма.

Определение 3. Мы скажем, что задана *риманова метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат z^1, \dots, z^n определен набор гладких функций $g_{mp}(z^1, \dots, z^n)$ таких, что:

$$1) g_{mp}(z) = g_{pm}(z), \text{ т. е. матрица } G(z) \text{ симметрична};$$

2) матрица $G(z) = (g_{mp})$ невырождена и положительно определена;

3) при замене координат $z \rightarrow y$ матрица $G(z)$ преобразуется по правилу $G(y) = d\psi G(z)(d\psi)^T$. Здесь через $d\psi$ обозначена матрица Якоби замены координат $d\psi_{y,z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для упрощения обозначений в выражениях типа $\sum_i a_i b^i$, где суммирование ведется по повторяющимся индексам (один индекс — верхний, другой — нижний), мы иногда будем опускать знак \sum и писать просто $a_i b^i$, подразумевая суммирование по i .

Определение 4. Если в области C задана риманова метрика $G(z) = (g_{ij})$, и в системе координат (z^i) задана гладкая кривая $\gamma(t) = \{z^i(t)\}$, то ее *длиной* от точки $\gamma(a)$ до точки $\gamma(b)$ называется число

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z) \frac{dz^i(t)}{dt} \frac{dz^j(t)}{dt}} dt.$$

Определение римановой метрики можно сформулировать в более инвариантных терминах. А именно, задание римановой метрики позволяет определить квадратичную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, определенную в каждой точке области на множестве всех векторов, касательных к гладким траекториям, проходящим через эту точку. В самом деле, если $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$, то для векторов $\xi = \dot{\gamma}_1(0)$ и $\eta = \dot{\gamma}_2(0)$, где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$, можно положить: $\langle \xi, \eta \rangle_g = g_{ij} \xi^i \eta^j$.

Лемма 2. Отображение $\xi, \eta \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle_g$ задает невырожденную, положительно определенную квадратичную форму, гладко зависящую от точки.

Доказательство. Симметрия и билинейность построенного отображения следует из определения 3. Убедимся в том, что

это соответствие определяет билинейную форму. Сделаем регулярную замену координат $z^i \rightarrow z^{i'}$. Тогда

$$\gamma_1 = \{z_1^1(t), \dots, z_1^n(t)\}, \quad \gamma_2 = \{z_2^1(t), \dots, z_2^n(t)\},$$

$$\xi^{i'} = \frac{dz_1^{i'}}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \xi^i, \quad \eta^{i'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \eta^i, \quad g_{i'j'} = \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} g_{ij}.$$

Отсюда

$$\langle \xi', \eta' \rangle_{g'} = g_{i'j'} \xi^{i'} \eta^{j'} = \left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} \right) \left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} \frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p} \right) g_{ij} \xi^k \eta^p =$$

$$= \delta_k^i \delta_p^j g_{ij} \xi^k \eta^p = \langle \xi, \eta \rangle_g,$$

т. е. $\langle \xi, \eta \rangle_g$ действительно является билинейной формой. При доказательстве мы воспользовались тем, что $\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} = \delta_k^i$. ■

Итак, можно говорить, что в области C евклидова пространства задана риманова метрика, если в каждой точке области задана билинейная форма (скалярное произведение), определенная на векторах, касательных к гладким кривым, проходящим через эту точку, причем форма невырожденная и положительно определенная.

Из леммы 1 вытекает эквивалентность этого определения и определения 3. В частности, из леммы 1 вытекает независимость длины гладкой кривой от выбора криволинейных координат.

Если в точке P пересекаются две гладкие кривые γ_1 и γ_2 (такие, что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P, \dot{\gamma}_1(0) \neq 0, \dot{\gamma}_2(0) \neq 0$), то углом между ними, в данной римановой метрике, называется такое число φ , что

$$\cos \varphi = \frac{\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle}{|\dot{\gamma}_1| |\dot{\gamma}_2|}.$$

Существуют ли римановы метрики? Да, и первый пример мы уже привели. В самом деле, если в области C в декартовых координатах, x^1, \dots, x^n , задать матрицу $G(x) = (\delta_{ij})$, то тогда в любых криволинейных координатах z , получающихся из декартовых регулярной заменой, можно по определению положить $G(z) = d\psi \times G(x)(d\psi)^T = (d\psi)(d\psi)^T$, где $d\psi$ — матрица Якоби данной замены. Тем самым мы определили риманову метрику, заданную в области евклидова пространства. Эта метрика является евклидовой, и квадрат дифференциала дуги гладкой кривой в декартовых коор-

динатах записывается так: $(dl)^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$. Однако если задана произвольная риманова метрика, то не следует думать, что путем подходящей замены координат в области C эту метрику можно привести к виду $\sum_{i=1}^n (dx^i)^2$. В общем случае это неверно.

Определение 5. Риманова метрика G , заданная в области C , называется *евклидовой*, если существуют координаты y (вообще говоря, криволинейные), в которых матрица $G(y)$ становится единичной.

Если задана евклидова метрика, то можно описать все системы координат, в которых она также имеет евклидов вид, то есть задается единичной матрицей. Такое описание мы дадим позже. Здесь отметим только, что все такие системы координат получаются из одной путем вращений, сдвигов и отражений в евклидовом пространстве.

Существование неевклидовых метрик, т. е. таких, которые не могут быть приведены к виду $\sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ никакой регулярной заменой координат, пока ниоткуда не следует. В данный момент мы не можем пока предъявить такую метрику. Но вскоре мы это сделаем.

Евклидова метрика, записанная в криволинейных координатах z , теряет свой простой «евклидов» вид и задается матрицей $G(z)$, распознать в которой евклидову метрику иногда не просто. Посмотрим, как записывается евклидова метрика в простейших криволинейных координатах, указанных выше. Часто бывает удобно записывать не матрицу $G(z)$, а квадрат дифференциала длины дуги гладкой кривой $(dl)^2 = g_{ij}(z)dz^i dz^j$:

- 1) в полярных координатах на плоскости: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$;
- 2) в цилиндрических координатах в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$;
- 3) в сферических координатах в трехмерном пространстве: $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

1.2.4. Индефинитные метрики

До сих пор мы имели дело только с положительно определенными метриками, которые мы называли римановыми. Однако в приложениях часто встречаются так называемые индефинитные метрики.

Определение 6. Мы скажем, что задана *индефинитная метрика* в области C евклидова пространства, если в каждой регулярной системе координат z^1, \dots, z^n определен набор гладких функций $\{g_{mp}(z^1, \dots, z^n)\}$, удовлетворяющих всем требованиям, наложенным на риманову метрику (см. определение 3), кроме требования

положительной определенности, т. е. соответствующая квадратичная форма является индефинитной.

Простейший пример: псевдоевклидовы метрики индекса s в псевдоевклидовых пространствах \mathbf{R}_s^n . Для построения этой метрики возьмем обычное евклидово пространство \mathbf{R}^n с декартовыми координатами x^1, \dots, x^n и зададим в каждой точке P следующую билинейную форму (с постоянными, т. е. не зависящими от точки коэффициентами): $\langle \xi, \eta \rangle_s = -\sum_{i=1}^s \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^n \xi^j \eta^j$. Тогда для гладкой кривой $\gamma(t) = \{x^i(t)\}$ длина дуги выражается по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{-\sum_{i=1}^s \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{i=s+1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt.$$

При $n = 4$ псевдоевклидово пространство индекса 1 называется иногда *пространством Минковского* (в специальной теории относительности). Мы также будем рассматривать пространства \mathbf{R}_1^3 и \mathbf{R}_1^2 . Отметим, что псевдоевклидово пространство индекса 0 совпадает с обычным евклидовым пространством.

Как и в обычном евклидовом пространстве, длина вектора ξ в пространстве \mathbf{R}_s^n определяется по формуле $|\xi|_s = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_s}$, однако в \mathbf{R}_s^n , в отличие от \mathbf{R}^n , длины векторов могут быть нулевыми и мнимыми. В самом деле, так как форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ не является положительно определенной, то множество всех векторов разбивается на следующие три непересекающихся класса: $\langle \xi, \xi \rangle_s < 0$ (*времени-подобные* векторы), $\langle \xi, \xi \rangle_s = 0$ (*световые* или *изотропные* векторы), $\langle \xi, \xi \rangle_s > 0$ (*пространственно-подобные* векторы). Таким образом, имеются векторы нулевой, вещественной и чисто мнимой длины. Времени-подобные векторы имеют чисто мнимую длину, световые (изотропные) — нулевую, а пространственно-подобные — вещественную длины. Изотропные векторы, выходящие, например, из начала координат, заполняют конус

$$-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$$

с вершиной в начале координат. Времени-подобные векторы расположены внутри конуса, т. е. в его полости, определяемой координатной плоскостью (x^1, \dots, x^s) , а пространственно-подобные векторы расположены вне светового конуса (рис. 1.15).

ЗАМЕЧАНИЕ. В пространстве Минковского \mathbf{R}_1^4 (в специальной теории относительности) изотропный конус состоит из световых

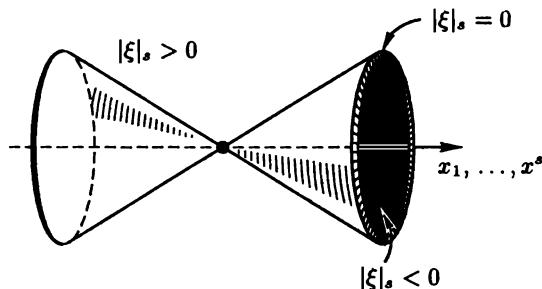


Рис. 1.15

векторов и называется световым конусом. Луч света, выпущенный из начала координат, будет распространяться по одной из образующих этого конуса.

Мы определим длину гладкой кривой в псевдоевклидовом пространстве \mathbf{R}_s^n индекса s , положив $l_s = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle_s} dt$. В отличие от евклидова случая, некоторые кривые могут иметь нулевую, чисто минимую или комплексную длину.

Пространство Минковского \mathbf{R}_1^4 было введено для удобной записи некоторых эффектов специальной теории относительности. Отнесем пространство \mathbf{R}_1^4 к координатам $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, т. е. $dl^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Здесь t — время, c — скорость света. Рассмотрим так называемую *мировую линию* какой-нибудь материальной частицы $\gamma(\tau)$. Эта линия является гладкой траекторией в \mathbf{R}_1^4 . Если координаты x , y , z трактовать как пространственные, то тогда движение частицы по траектории $\gamma(\tau)$ можно интерпретировать как эволюцию во времени материальной точки, перемещающейся в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть $\dot{\gamma}$ — как и раньше, касательный вектор к траектории $\gamma(\tau)$. В специальной теории относительности принимается постулат, что никакой сигнал не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света c . Следовательно, $cdt > \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, где (cdt, dx, dy, dz) — координаты бесконечно малого вектора смещения вдоль траектории γ в направлении касательного вектора $\dot{\gamma}$.

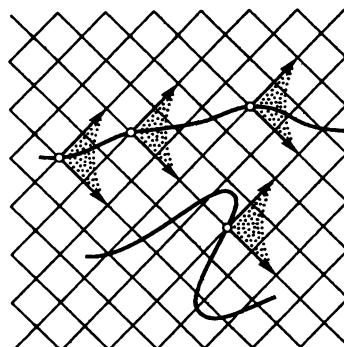


Рис. 1.16

Отсюда мы получаем, что вдоль мировой линии материальной частицы всегда выполнено соотношение $-c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 < 0$, т. е. $\langle \dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau) \rangle_1 < 0$. Это означает, что каждый касательный вектор к мировой линии является времени-подобным. Отсюда следует, что мировая линия всегда имеет чисто мнимую длину. В частности, мировая линия целиком распространяется строго внутри светового (изотропного) конуса, имеющего своей осью ось t . Это условие должно выполняться в каждой точке мировой линии (рис. 1.16).

Задачи

- Проверить, что длину кривой можно вычислять как предел длин ломаных, которые состоят из отрезков, соединяющих последовательно конечное число точек на кривой, когда максимальная длина отрезков стремится к нулю.
- Доказать, что в евклидовом пространстве прямолинейный отрезок имеет минимальную длину среди длин кривых, соединяющих две точки.

1.3. ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ, ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим двумерную плоскость, отнесенную к декартовым координатам x, y и снабженную евклидовой метрикой $dl^2 = dx^2 + dy^2$. Иногда для обозначения бесконечно малого элемента длины дуги кривой используют наряду с dl^2 также символ ds^2 . Мы будем пользоваться обоими этими обозначениями. Окружности с центром в точке O окажутся в полярных координатах координатными линиями вида $r(t) = \text{const}$. Здесь бесконечно малый элемент дуги окружности равен $rd\varphi$.

Рассмотрим теперь стандартное вложение двумерной сферы в трехмерное пространство, отнесенное к декартовым координатам x, y, z в виде множества точек, являющихся концами векторов длины R , выходящих из точки O . Сделаем следующее общее замечание. Пусть на сфере S^2 задана гладкая кривая $\gamma(t)$, и нужно найти ее длину. Для этого можно рассмотреть объемлющую трехмерную евклидову метрику $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, записать кривую в параметрическом виде $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и вычислить длину по правилу, изложенному ранее. Точно так же можно поступить, если нужно измерить угол между двумя лежащими на сфере и пересекающимися кривыми.

Введем в \mathbf{R}^3 сферические координаты r, θ, φ . Тогда сфера радиуса R задается одним уравнением $r = R$.

Вычислим скалярное произведение двух векторов, касательных к кривым, целиком лежащим на сфере S^2 . Пусть $\gamma_1(t) = (R, \theta_1(t), \varphi_1(t))$, $\gamma_2(t) = (R, \theta_2(t), \varphi_2(t))$. Тогда $\dot{\gamma}_1(t) = (0, \dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1)$, $\dot{\gamma}_2(t) = (0, \dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2)$, т. е.

$$\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = R^2(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2).$$

Формула записана в точке пересечения двух кривых.

Видно, что получившееся скалярное произведение совпадает со скалярным произведением двух векторов, $(\dot{\theta}_1, \dot{\varphi}_1)$ и $(\dot{\theta}_2, \dot{\varphi}_2)$, относительно новой билинейной формы $R^2(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2)$. Она определяет квадратичную форму $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, получающуюся из соответствующей квадратичной формы в евклидовом пространстве $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ подстановкой в нее вместо переменных r, θ, φ новых функций от θ, φ вида $r = R$, $\theta = \theta$, $\varphi = \varphi$. Будем говорить, что полученная в результате риманова метрика на сфере S^2

$$R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

является *индуцированной* объемлющей евклидовой метрикой трехмерного пространства.

Положение точки на сфере можно задавать двумя параметрами, θ и φ , (широта и долгота). Поэтому радиус-вектор точки на сфере записывается так:

$$x = R \cos \theta \cos \varphi, \quad y = R \cos \theta \sin \varphi, \quad z = R \sin \varphi.$$

Подставляя эти три функции от двух параметров в квадрат дифференциала длины дуги в трехмерном пространстве $dx^2 + dy^2 + dz^2$, мы получаем

$$R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Этот пример будет нами в дальнейшем сильно обобщен. Он окажется частным случаем индуцированных римановых метрик на поверхностях в евклидовом пространстве.

На сфере S^2 можно ввести и другие криволинейные координаты, иногда используемые при вычислениях. Приведем основные примеры.

Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость. Поместим центр сферы радиуса R в начало координат и рассмотрим координатную плоскость $R^2(x, y)$, проходящую через точку O . Отметим также на сфере северный полюс N и южный полюс S . Пусть P — точка сферы, отличная от N . Соединим ее с северным полюсом

и продолжим этот отрезок до пересечения с плоскостью $\mathbf{R}^2(x, y)$ в точке Q . Сопоставим точке P точку Q . Мы получим некоторое отображение $\varphi_0: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, которое и называется *стереографической проекцией* сферы.

Отображение φ_0 определено во всех точках сферы, кроме северного полюса N . Можно условно считать, что северный полюс изображает бесконечно удаленные точки двумерной плоскости (рис. 1.17). Запишем отображение φ_0 аналитически.

Рассмотрим сферические координаты r, θ, φ в \mathbf{R}^3 . Они индуцируют на сфере координаты (θ, φ) , а на плоскости — координаты (r, φ) , т. е. полярные координаты. Так как отображение φ_0 сохраняет координату φ , то для определения φ_0 достаточно найти зависимость радиуса r от угла θ . Рассмотрим плоское сечение S^2 плоскостью, проходящей через точки P, O, N (рис. 1.18). Так как угол ONT равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, то получаем формулы замены координат: $\varphi = \varphi; r = R \operatorname{ctg}(\theta/2)$.

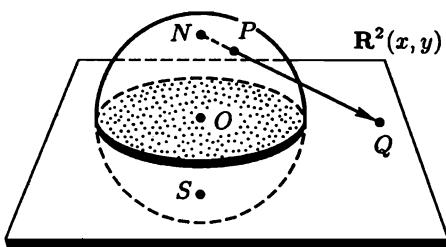


Рис. 1.17

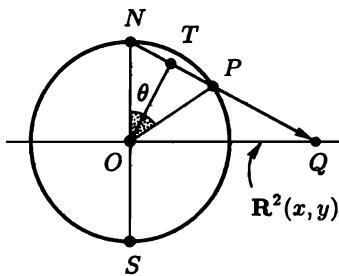


Рис. 1.18

Несложно проверить, что якобиан такой замены имеет вид $J = \frac{R}{2 \sin^2(\theta/2)}$. Следовательно, замена является регулярной во всех точках сферы, кроме северного полюса. Итак, на сфере можно ввести координаты, заимствованные с полярных координат на плоскости. Какой вид примет в них метрика сферы? Легко проверить, что метрика $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ записывается теперь так:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Полученная нами метрика на сфере отличается от евклидовой метрики на плоскости $(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$, записанной в полярных коор-

динатах. Отличие — в множителе $\frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2}$. Такие метрики называются конформными.

Определение 1. Риманова метрика $g_{ij}(z)$, заданная в области C евклидова пространства в криволинейных координатах z^1, \dots, z^n , называется *конформной*, если она имеет вид $g_{ij}(z) = \lambda(z)g_{ij}^e(z)$, где $\lambda(z)$ — гладкая функция, а $g_{ij}^e(z)$ — евклидова метрика, записанная в координатах z^1, \dots, z^n . Иными словами, метрика $g_{ij}(z)$ называется конформной, если существует такая система координат x , в которой $g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$.

Таким образом, на евклидовой плоскости возникли две метрики:

$dr^2 + r^2 d\varphi^2$, т. е. евклидова, и $\frac{4R^4}{R^2 + r^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$, т. е. метрика сферы. Вернемся к вопросу об эквивалентности метрик. Существует ли такая регулярная замена координат на плоскости, при которой первая метрика перейдет во вторую?

Мы приведем наглядное обоснование этого факта, что эти две метрики неэквивалентны. Подсчитаем длину окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в евклидовой и в сферической метриках как функцию от радиуса окружности. Длина в евклидовой метрике нам известна: $l_e = 2\pi a$, где a — величина радиуса, подсчитанная в евклидовой метрике. Рассмотрим теперь сферическую метрику. В ней соотношение между евклидовой величиной радиуса a и его величиной ρ в сферической метрике, а также длина окружности имеют вид

$$\rho = 2 \int_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr = 2R \operatorname{arctg}(a/R),$$

$$l_c = 2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 a d\varphi}{R^2 + a^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2 + a^2} = 2\pi R \sin \rho.$$

Геометрически величина ρ изображается как длина меридиана, соединяющего северный полюс с точкой на окружности (рис. 1.19).

В частности, при $\rho \rightarrow 0$, т. е. для окружностей малого радиуса, получаем, что $l_c \sim 2\pi\rho$, и формула переходит в выражение для длины плоской окружности. Итак, сравнивая две формулы: «евклидова длина окружности евклидова радиуса ρ равна $2\pi\rho$ » и «сферическая длина окружности сферического радиуса ρ равна $2\pi R \sin \rho$ », мы видим, что они различны. В частности, одна линейная, а вторая периодическая.

Мы видим, что формулы для длины окружности одного и того же радиуса в евклидовой и сферической метрике — разные. Это указывает на то, что метрики не эквивалентны, или, как часто говорят, не изометричны. Строгое доказательство их неизометричности мы получим позже.

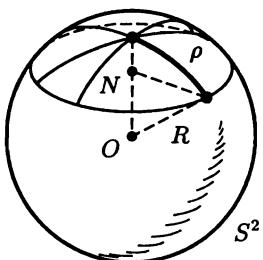


Рис. 1.19

много кругового цилиндра, накладывая его на плоскость.

Длину окружности на сфере можно вычислить непосредственно в сферических координатах (θ, φ) , в которых метрика сферы имеет вид: $R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Областью определения метрики можно считать диск радиуса π на плоскости переменных θ, φ .

В этих координатах очевидно, что длина окружности радиуса θ равна $2\pi R \sin \theta$ (рис. 1.20). При этом точка O отождествляется с северным полюсом сферы, а граничная окружность диска (радиуса π) склеивается в одну точку, отождествляясь с южным полюсом сферы.

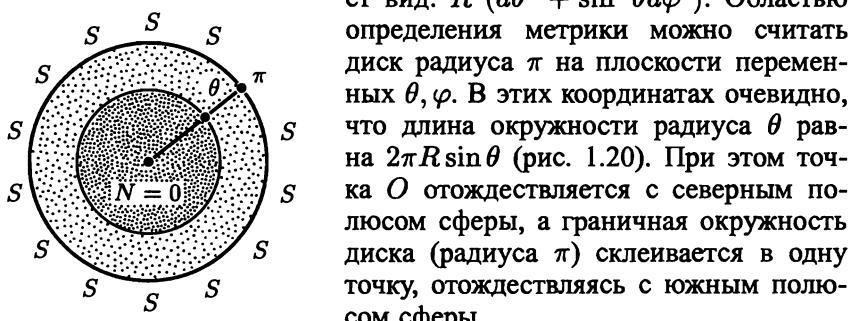


Рис. 1.20

Рассмотрим другой пример вычисления длин кривых на сфере. Рассмотрим

так называемую *локсадруму* — траекторию, пересекающую меридианы под одним и тем же углом α . Эта кривая хорошо известна в теории навигации, по ней иногда удобно прокладывать маршруты самолетов.

Найдем уравнение локсадромы. При стереографической проекции сферы на плоскость меридианы перейдут в лучи, выходящие из начала координат. Образом локсадромы будет кривая на плоскости, пересекающая эти лучи под тем же углом α . Это утверждение следует из более общего факта: стереографическая проекция сохраняет углы между пересекающимися кривыми. Такие преобразования называются *конформными*. Более точно, мы имеем в виду следующее: рассмотрим на сфере метрику, индуцированную объемлющей

евклидовой метрикой, и пусть две кривые на сфере пересекаются под углом $\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2)$ (мы предполагаем углы ориентированными) (рис. 1.21).

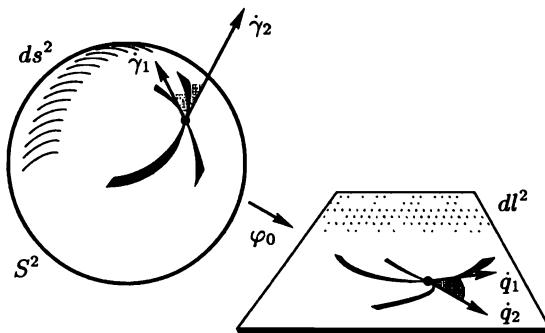


Рис. 1.21

Кривые γ_1 и γ_2 переходят при стереографической проекции в кривые q_1 и q_2 . Угол между ними, подсчитанный в евклидовой метрике на плоскости, мы обозначим через $\beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$.

Лемма 1. Имеет место равенство $\alpha(\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) = \beta(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$.

Доказательство. Достаточно сравнить явные формулы для углов α и β , а также использовать запись сферической метрики после отображения φ_0 в полярных координатах на плоскости R^2 . ■

В действительности имеет место еще более общее утверждение.

Лемма 2. Пусть $g_{ij}(z)$ и $q_{ij}(z)$ — две метрики, заданные в области C евклидова пространства в криволинейных координатах (z^1, \dots, z^n) . Тогда если в каждой точке $z \in C$ выполнено тождество $g_{ij} = \lambda q_{ij}$, где $\lambda = \lambda(z)$ — гладкая функция, то углы между пересекающимися кривыми, вычисленные в этих метриках, совпадают.

Доказательство дословно повторяет рассуждение из леммы 1.

Вернемся к локсадроме. В силу леммы 1 достаточно найти ее уравнение на евклидовой плоскости. Условие сохранения угла α означает, что $\langle (\dot{r}, \dot{\varphi}), (1, 0) \rangle = \cos \alpha$. Здесь $(\dot{r}, \dot{\varphi})$ — касательный вектор к локсадроме, $(1, 0)$ — вектор скорости луча $\varphi = \text{const}$, $r = t$.

Отсюда $\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}} = \cos \alpha$. Решая это простое уравнение, получаем

$$\dot{r}/r = \dot{\varphi} \operatorname{ctg} \alpha, \quad r = ce^{\varphi \operatorname{ctg} \alpha},$$

где $c = \text{const}$.

Вычисляя длину дуги, получаем

$$l(\gamma)_{\varphi_0}^\varphi = c' e^{\varphi t \operatorname{ctg} \alpha} + c'',$$

где $c'', c' = \text{const}$. Задача: найдите значение постоянных c', c'' .

Задачи

- Показать, что у треугольника на сфере S^2 , составленного из дуг больших окружностей, сумма углов больше 2π .
- Выразить сумму углов треугольника на сфере S^2 через его площадь (треугольник составлен из дуг больших окружностей).
- Показать, что на сфере S^2 преобразование подобия возможно только с единичным коэффициентом.
- Показать, что для любой римановой метрики найдется такая система координат, в которой в данной точке матрица римановой метрики единична.

1.4. ПСЕВДОСФЕРА И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В евклидовом пространстве \mathbf{R}^n сфера S^{n-1} (гиперсфера) может быть определена как множество точек, удаленных от начала координат на расстояние ρ . В псевдоевклидовом пространстве \mathbf{R}_s^n индекса s также можно рассмотреть множество точек, удаленных от некоторой точки на расстояние ρ . Но здесь число ρ может быть не только вещественным, но также чисто мнимым или нулем. Это множество мы назовем *псевдосферой* индекса s и обозначим через S_s^{n-1} . Будем различать псевдосфера вещественного, мнимого и нулевого радиусов. Псевдосфера нулевого радиуса описывается уравнением второго порядка $-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$, где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbf{R}^n , на котором мы моделируем псевдоевклидово пространство. Очевидно, что псевдосфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом.

Рассмотрим примеры. Пусть $n = 2$, $s = 1$. Изотропный «конус» на двумерной плоскости состоит из двух прямых: $x^1 = \pm x^2$. Он разбивает плоскости на две области: в одной из них $\langle \xi, \xi \rangle_1 > 0$, т. е. $|x^2| > |x^1|$, а в другой $\langle \xi, \xi \rangle_1 < 0$, т. е. здесь $|x^2| < |x^1|$ (рис. 1.22).

Псевдоокружности вещественного радиуса — это гиперболы $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2$, где α — вещественно. Псевдоокружности мнимого радиуса — это гиперболы $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2$ (рис. 1.23).

Пусть теперь $n = 3$, $s = 1$. Изотропный конус, т. е. псевдосфера нулевого радиуса, — это обычный конус второго порядка, задаваемый уравнением $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$, с осью x^1 . Он разбивает

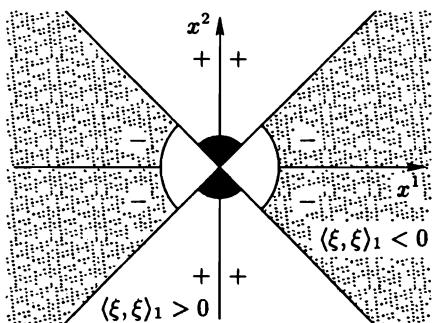


Рис. 1.22

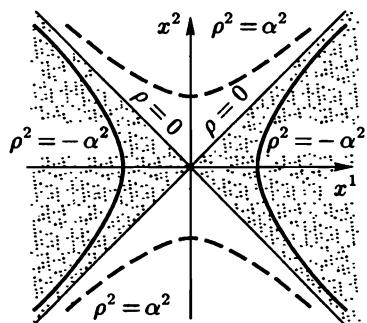


Рис. 1.23

пространство на две области — внутреннюю и внешнюю (рис. 1.24). Псевдосфера вещественного радиуса — это однополостные гиперболоиды $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = +\alpha^2$. Псевдосфера мнимого радиуса — это двухполостные гиперболоиды $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2$, (рис. 1.25). Напомним, что для удобства мы моделируем R^3_1 на пространстве R^3 . Через x, y, z обозначаются декартовы координаты. Тогда $\langle \xi, \xi \rangle_1 = -x^2 + y^2 + z^2$.

Рассмотрим псевдосферу мнимого радиуса — двухполостный гиперболоид $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$.

Геометрия (метрика) пространства R^3_1 индуцирует некоторую геометрию (метрику) на псевдосфере мнимого радиуса.

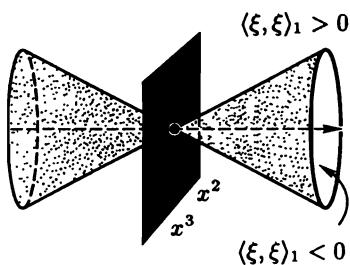


Рис. 1.24

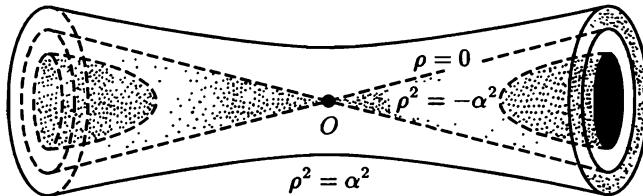


Рис. 1.25

Для простоты ограничимся изучением только одной ее полости, например, определенной неравенством $x > 0$. «Точки» геомет-

рии псевдосферы объявим обычные точки гиперболоида, а «прямыми» — линии на гиперболоиде, являющиеся пересечениями с плоскостями $ax + by + cz = 0$, проходящими через начало координат (рис. 1.26).

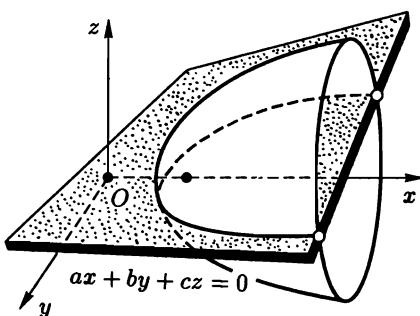


Рис. 1.26

с координатами $(\alpha, 0, 0)$. В качестве плоскости YOZ , проходящую через центр псевдосферы. Кстати, ограничение скалярного произведения $\langle \xi, \eta \rangle_1$ на эту плоскость имеет вид $\xi^2 \eta^2 + \xi^3 \eta^3$, т. е. является евклидовым.

Рассмотрим переменную точку P на правой полости гиперболоида и соединим ее с точкой N , т. е. с северным полюсом. Отрезок \overline{PN} встречает плоскость YOZ в точке $f(P)$, которую мы и назовем образом точки P при стереографической проекции $f: S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Точно так же определяется стереографическая проекция левой полости гиперболоида на ту же плоскость, если за центр проектирования взять южный полюс S . На рис. 1.27 показано сечение псевдосферы плоскостью, проходящей через ось OZ .

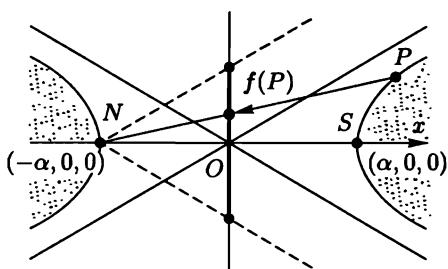


Рис. 1.27

реографической проекции покрывает не всю плоскость YOZ , так как окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ не принадлежит образу проекции. Северный полюс N переходит в бесконечно удаленную точку плоскости YOZ .

Далее, рассмотрим преобразование, аналогичное стереографической проекции обычной сферы на плоскость. Центром псевдосферы $S_1^2 = \{-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2\}$ мы считаем начало координат; северным полюсом N — точку с координатами $(-\alpha, 0, 0)$; южным полюсом S — точку

плоскости проекции возьмем \mathbb{R}^2 . Точно так же определяется стереографическая проекция левой полости гиперболоида на ту же плоскость, если за центр проектирования взять южный полюс S . На рис. 1.27 показано сечение псевдосферы плоскостью, проходящей через ось OZ . Образ правой полости гиперболоида покрывает не всю плоскость YOZ , а только внутренность диска радиуса α : $y^2 + z^2 < \alpha^2$. Образ левой полости гиперболоида покрывает внешность окружности $y^2 + z^2 = \alpha^2$. В отличие от обычной сферы, образ псевдосферы при стереографической проекции покрывает не всю плоскость YOZ , так как окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ не принадлежит образу проекции. Северный полюс N переходит в бесконечно удаленную точку плоскости YOZ .

Пусть точка P имеет координаты (x, y, z) , где $x > 0$, и пусть (u^1, u^2) — декартовы координаты точки $f(P)$ на плоскости YOZ , где отображение f — стереографическая проекция. Найдем явные формулы для стереографической проекции.

Лемма 1. Пусть $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$. Тогда

$$x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}, \quad z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2},$$

где $|\mathbf{u}|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$.

Доказательство. Из рис. 1.27 следует

$$\frac{y}{u^1} = \frac{x + \alpha}{\alpha}, \quad \frac{z}{u^2} = \frac{x + \alpha}{\alpha}.$$

Так как $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, то

$$-\alpha^2 = -x^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2) \frac{(x + \alpha)^2}{\alpha^2}.$$

Отсюда

$$x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}. \blacksquare$$

Лемма 2. Координаты (u^1, u^2) , меняющиеся в открытом диске $(u^1)^2 + (u^2)^2 < \alpha^2$, задают регулярную систему координат на правой полости гиперболоида, т. е. стереографическая проекция задает регулярные координаты $f(x, y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$.

Доказательство. Можно считать, что правая полость псевдосферы задается уравнением $x = \sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}$. Тем самым стереографическую проекцию f можно понимать как замену координат $(y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$. Осталось найти матрицу Якоби и убедиться, что якобиан отличен от нуля. Прямой подсчет дает

$$J(f) = 4\alpha^4 \frac{\alpha^2 + |\mathbf{u}|^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^3} = \frac{4\alpha^3 x}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} > 0.$$

Итак, якобиан положителен в диске $y^2 + z^2 < \alpha^2$. ■

Вернемся к обычной сфере. Какая геометрия возникнет на ней, если «точками» объявить обычные точки сферы, а «прямыми» — сечения сферы плоскостями, проходящими через центр O , т. е. экваторы? Каким аксиомам будет удовлетворять множество таких точек и прямых? Ясно, что через каждую пару не диаметрально противоположных точек проходит одна и только одна прямая. Однако если точки диаметрально противоположны, то через них проходит

бесконечное множество прямых. Кроме того, через точку, расположенную вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, не пересекающейся с исходной прямой. В получившейся геометрии на сфере не существует параллельных, т. е. не пересекающихся, прямых.

Кое-какие улучшения сделать можно. Объявим «точками» новой геометрии пары диаметрально противоположных точек, P и $-P$, на сфере. Теперь через любую пару точек проходит одна и только одна «прямая» (если точки не совпадают). Легко проверяется, что в получившейся геометрии выполнены все классические аксиомы Евклида, кроме так называемого пятого постулата. По-прежнему, через точку, взятую вне прямой, нельзя провести ни одной прямой, параллельной данной, т. е. любые две прямые либо пересекаются в одной точке, либо совпадают. Эта геометрия называется иногда *эллиптической*.

Описанное отождествление точек вида P и $-P$ эквивалентно факторизации сферы по действию симметрии отражения в точке O . Так как каждая пара $(P, -P)$ определяет ровно одну прямую в трехмерном пространстве (куда вложена сфера), то можно сопоставить каждой «прямой» эллиптической геометрии, т. е. экватору, ортогональную прямую, проходящую через O . Таким образом, эллиптическая геометрия моделируется на двумерном вещественном проективном пространстве.

Вернемся к псевдоевклидовой геометрии и к геометрии, индуцируемой на псевдосфере мнимого радиуса. Рассмотрим стереографическую проекцию $f: {}^+S_1^2 \rightarrow \{y^2 + z^2 < \alpha^2\} = D^2$. Через ${}^+S_1^2$ обозначена правая полость гиперболоида. Ее точки переходят во внутренние точки диска D^2 радиуса α . В какие кривые на круге D^2 перейдут «прямые» геометрии на гиперболоиде, т. е. линии пересечения его с плоскостями, проходящими через центр псевдосферы — точку O , т. е. аналоги экваторов на сфере?

Лемма 3. Каждая линия пересечения ${}^+S_1^2$ с плоскостью вида $ax + by + cz = 0$ переходит при отображении f в дугу окружности, пересекающую окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ под прямым углом (рис. 1.28).

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно подставить в уравнение плоскости $ax + by + cz = 0$ выражения переменных x, y, z как функций от переменных u^1, u^2 . Пусть, например, $a \neq 0$. Тогда уравнение

$$a\alpha \frac{|u|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |u|^2} + \frac{2b\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |u|^2} + \frac{2c\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |u|^2} = 0$$

после элементарных преобразований приводится к виду

$$\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 + c^2 - a^2),$$

т. е. определяет окружность с центром в точке $(-b\alpha/a, -c\alpha/a)$ радиуса $(\alpha/a)\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} = r$, пересекающую окружность $y^2 + z^2 = \alpha^2$ в точках A и B под прямым углом (рис. 1.29). Очевидно, что угол в точках пересечения равен $\pi/2$. ■

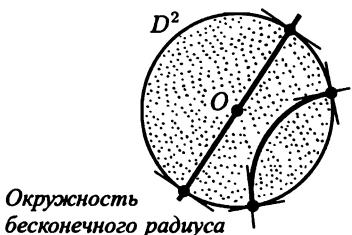


Рис. 1.28

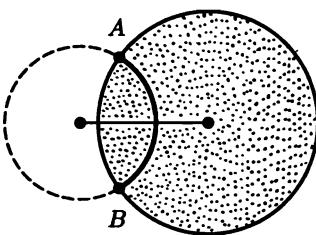


Рис. 1.29

Итак, геометрия, индуцированная на псевдосфере мнимого радиуса в R_1^3 совпадает с геометрией, возникающей в открытом евклидовом диске радиуса α , если в качестве «точек» взять обычные точки диска, а в качестве «прямых» взять дуги окружностей, пересекающих границу круга под прямым углом. В частности, «прямыми» являются все диаметры круга, поскольку их можно рассматривать как дуги окружностей бесконечно большого радиуса. Эта геометрия называется *гиперболической* или *геометрией Лобачевского*, а ее модель в круге радиуса α называется *моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского*.

На модели Пуанкаре легко проверить, что здесь все аксиомы Евклида, кроме пятого постулата, справедливы. На рис. 1.30 видно, что через любую точку, взятую вне прямой, можно провести бесконечное число прямых, параллельных данной, т. е. не пересекающихся с ней. Если устремить параметр α к бесконечности, то в любой конечной области геометрия Лобачевского будет «стремиться» к евклидовой, так как дуги окружностей начнут распрямляться и превращаться в евклидовые прямые. Граница модели Пуанкаре, окружность, называется *абсолютом*. Здесь расположены бесконечно удаленные точки плоскости Лобачевского. При изучении плоскости Лобачевского часто полагают для простоты $\alpha = 1$.

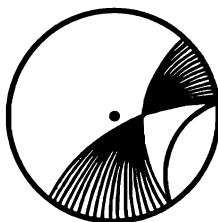


Рис. 1.30

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно рассмотреть геометрию, возникающую на псевдосферах вещественного радиуса, т. е. на однополостных гиперболоидах. Докажите, что она совпадает с геометрией Лобачевского.

Вычислим риманову метрику, индуцированную на псевдосфере мнимого радиуса объемлющей индефинитной метрикой. Введем в \mathbf{R}_1^3 аналог сферических координат. В плоскости YOZ зададим полярные координаты (r, φ) , где φ — угол с осью y . Введем еще параметр θ' и сделаем замену переменных

$$y = \alpha \operatorname{sh} \theta' \cos \varphi, \quad z = \alpha \operatorname{sh} \theta' \sin \varphi, \quad x = \alpha \operatorname{ch} \theta'$$

В этой «псевдосферической» системе координат уравнение псевдосферы очевидно запишется в виде $\alpha = \text{const}$.

Вычислим риманову метрику на псевдосфере в координатах u^1 , u^2 на модели Пуанкаре. Подставляя формулы для стереографической проекции в квадрат дифференциала длины дуги в \mathbf{R}_1^3 , получаем (проверьте!)

$$4\alpha^4 \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2}.$$

В полярных координатах (пусть $\alpha = 1$) на модели Пуанкаре эта же метрика запишется так:

$$ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1 - r^2)^2}.$$

Видно, что получившаяся метрика конформна, т. е. отличается от евклидовой множителем $\lambda(r) = 4(1 - r^2)^{-2}$. Перепишем метрику в псевдосферических координатах. Заменим координаты (r, φ) на параметры (χ, φ) по формулам: $r = \operatorname{cth}(\chi/2)$, $\varphi = \varphi$. Непосредственное вычисление дает (проверьте!) $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2$. Этот вид метрики полностью аналогичен записи метрики сферы в координатах (θ, φ) , но только обычные тригонометрические функции заменены здесь на гиперболические.

Найдем геометрический смысл параметра χ . Рассмотрим плоскость XOZ с индуцированной на ней псевдоевклидовой метрикой $-dx^2 + dz^2$. Псевдосфера пересекает эту плоскость по гиперболе, которая в псевдосферических координатах имеет вид (мы считаем, что $\alpha = 1$) $x = \operatorname{ch} \theta'$, $z = \operatorname{sh} \theta'$ (рис. 1.31). В качестве параметра θ возьмем евклидово значение угла POS (рис. 1.32). Тогда, очевидно, $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{th} \theta'$. Найдем длину отрезка гиперболы в псевдоевклидовой метрике от значения 0 до θ' . Имеем

$$l = \int_0^{\theta'} \sqrt{-\operatorname{sh}^2 \theta + \operatorname{ch}^2 \theta} d\theta = \theta'$$

Таким образом, θ' совпадает с длиной «меридиана» на псевдосфере, идущего из южного полюса S в точку P , т. е. параметр аналогичен параметру θ на сфере.

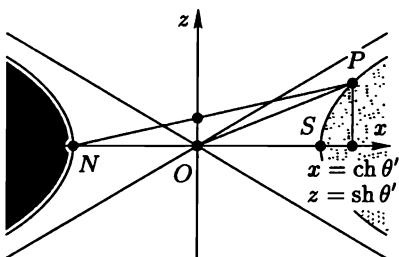


Рис. 1.31

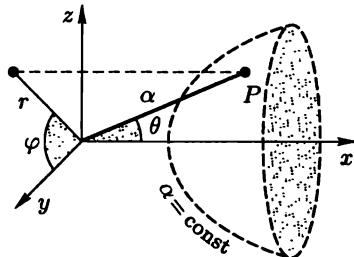


Рис. 1.32

Рассмотрим теперь стереографическую проекцию псевдосферы. Для простоты, мы рассматриваем только плоскость XOZ , так как все вычисления сохраняются при вращениях плоскости XOZ вокруг оси OX . Так как $z = 2u^2a^2/(a^2 - r^2)$, то получаем: $z = 2r/(1 - r^2)$ (так как $u^2 = r$ в плоскости XOZ). Так как $z = \operatorname{sh} \theta' \times \sin \varphi = \operatorname{sh} \theta'$ (так как $\varphi = \pi/2$), то $2r/(1 - r^2) = \operatorname{sh} \theta'$, откуда $r = \operatorname{cth}(\theta'/2)$. Тем самым доказано, что $\chi = \theta'$. Итак, мы получили на модели Пуанкаре риманову метрику $4(dr^2 + r^2d\varphi^2)/(1 - r^2)^2$.

Отметим, что она — положительно определенная, хотя объемлющая метрика была псевдоевклидовой. То обстоятельство, что на псевдосфере индуцируется положительно определенная метрика, можно усмотреть из наглядных соображений. Рассмотрим для простоты сечение псевдосферы плоскостью XOZ , и пусть ξ — вектор скорости гиперболы в точке P . Мы хотим убедиться в том, что его псевдоевклидова длина вещественна. Это следует из рис. 1.33, поскольку вектор ξ расположен вне светового конуса с вершиной в точке P .

Полученная риманова метрика называется *метрикой Лобачевского*. Ее можно рассматривать на евклидовом круге. Мы уже по-

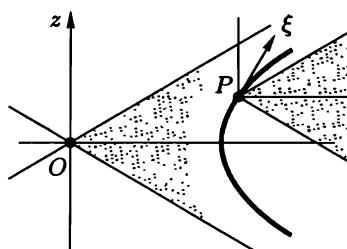


Рис. 1.33

знакомились с другими метриками на круге — евклидовой и сферической. Было показано, что они метрики не эквивалентны.

Докажем, что метрика Лобачевского не эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. Применим уже использованный прием: найдем длину окружности на плоскости Лобачевского как функцию от радиуса (вычисленного в метрике Лобачевского). Пусть окружность имеет центр в точке O и ее евклидов радиус равен a . Найдем длину радиуса в метрике Лобачевского. По определению длины кривой, получаем

$$\chi = 2 \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \ln \frac{1 + a}{1 - a},$$

т. е. $a = \operatorname{th}(\chi/2)$. Длина окружности:

$$l = 2 \int_0^{2\pi} \frac{ad\varphi}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{4\pi a}{1 - a^2} = 2\pi \operatorname{sh} \chi.$$

Если χ мало, то приближенно можно считать, что $l \sim 2\pi\chi$, т. е. получаем формулу для длины окружности в евклидовой метрике.

Поскольку мы выразили длину окружности (в метрике Лобачевского) в инвариантных относительно замен координат терминах, т. е. через величину радиуса, также подсчитанную в метрике Лобачевского, то полученная формула инвариантна относительно замен координат. Следовательно, метрика Лобачевского не эквивалентна ни одной из двух предыдущих метрик. На рис. 1.34 сравниваются разные записи метрик сферы и псевдосферы.

Укажем еще две полезные записи перечисленных ранее метрик — так называемые комплексные формы.

Введем на евклидовой плоскости комплексную координату $z = x + iy$. В качестве \bar{z} возьмем $x - iy$. Рассмотрим замену $(x, y) \rightarrow (z, \bar{z})$ как формальную замену переменных. Тогда якобиан имеет вид: $J = -2i \neq 0$, а потому замена регулярна. Так как $dz = dx + i dy$, $d\bar{z} = dx - i dy$, то евклидова метрика в новых координатах принимает вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + i dy)(dx - i dy) = dz d\bar{z}.$$

Метрика сферы, следовательно, принимает вид

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dz d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2},$$

где $|z|^2 = r^2$. Аналогично получается комплексная форма метрики Лобачевского: $ds^2 = dz d\bar{z}/(1 - |\bar{z}|^2)^2$.

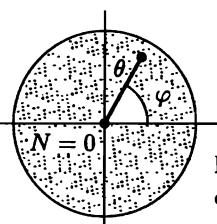
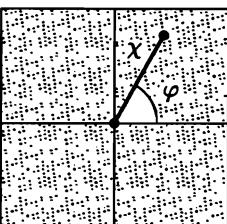
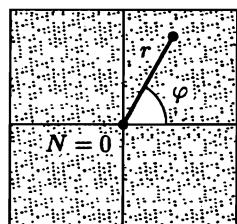
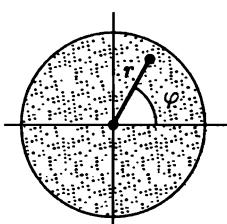
| Сфера | Псевдосфера |
|--|--|
| $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$  $0 < \theta < \pi$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ Развертка сферы $S^2 \setminus S$ | $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2$  $0 \leq \chi < \infty$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ |
| $ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1+r^2)^2}$  $0 \leq r < \infty$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ | $ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{(1-r^2)^2}$  $0 \leq r < 1$ $0 \leq \varphi < 2\pi$ |

Рис. 1.34

Для метрики Лобачевского существует еще одна полезная форма записи на верхней полуплоскости. Рассмотрим еще один экземпляр плоскости с комплексной координатой w . Выделим верхнюю полуплоскость неравенством $\operatorname{Im}(w) > 0$, где $w = u + iv$; $v = \operatorname{Im}(w)$.

Рассмотрим отображение $\mathbb{R}^2(w) \rightarrow \mathbb{R}^2(z)$, задаваемое формулой $z = (aw + b)/(cw + d)$, где a, b, c, d — комплексные числа такие, что $ad - bc \neq 0$. Такие отображения называются *невырожденными дробно-линейными*. Отметим, что если $ad - bc = 0$, то отображение переводит всю плоскость в одну точку (проверьте!).

Легко найти невырожденное отображение вида $z = (aw + b)/(c \times w + d)$, переводящее верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга $|z| < 1$ на плоскости z . При этом вещественная прямая $\operatorname{Im}(w) = 0$ перейдет в окружность $|z| = 1$. Между прочим, любое невырожденное дробно-линейное отображение однозначно задается образом любых трех точек, не лежащих на одной прямой. Мы не будем здесь доказывать этот факт. Итак, найдем такое отображение $z = (aw + b)/(cw + d)$, чтобы $0 \rightarrow 1$, $i \rightarrow 0$, $1 \rightarrow i$

(рис. 1.35). Решая получающуюся систему уравнений для a, b, c, d , находим: $z = (1 + iw)/(1 - iw)$. Итак, мы нашли дробно-линейное преобразование, переводящее верхнюю полуплоскость на единичный круг (таких преобразований имеется много).

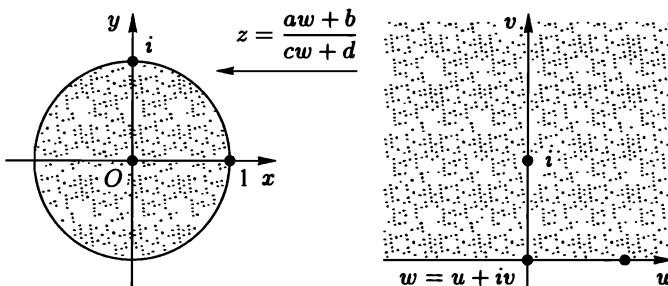


Рис. 1.35

Преобразование $z = (1 + iw)/(1 - iw)$ является регулярным. В самом деле, представим его в виде

$$z = -1 - \frac{2}{iw - 1}.$$

Достаточно доказать, что преобразование $z = 1/w$ является регулярной заменой координат, поскольку исходное отображение является композицией преобразований: $z = 1/w$, сдвига на постоянный вектор, поворота и растяжения. В вещественном виде отображение $z = 1/w$ записывается так:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Отсюда якобиан $J = (u^2 + v^2)^2 > 0$. Утверждение доказано.

Далее:

$$dz = \frac{2i \, dw}{(1 - iw)^2}.$$

Производя замену в выражении $ds^2 = dz \, d\bar{z}/(1 - |z|^2)^2$, получаем

$$ds^2 = 4 \frac{-dw \, d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}.$$

Отсюда еще раз видно, что точки вещественной оси (образ абсолюта модели Пуанкаре) являются бесконечно удаленными точками на плоскости Лобачевского. В самом деле, если мы захотим подсчитать длину отрезка оси Ov , от точки i до точки O , то получим $l = \int_0^1 dv/v = \ln v \Big|_0^1 = -\ln(0) \rightarrow \infty$.

Выясним, в какие кривые перейдут при отображении на верхнюю полуплоскость прямые плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре). Сначала решим аналогичный вопрос для эллиптической геометрии. Напомним, что здесь «прямыми» являются экваторы на сфере. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость и найдем образы экваторов.

Лемма 4. При стереографической проекции экваторы сферы переходят либо в окружности на плоскости, либо в прямые. Причем, экватор отображается в прямую тогда и только тогда, когда он проходит через северный полюс сферы.

Доказательство. Запишем стереографическую проекцию в декартовых координатах. Пусть x, y, z — координаты точки P на сфере, а x', y' — координаты ее образа на плоскости. Из рис. 1.36 получаем: $x' = x/(1 - z)$, $y' = y/(1 - z)$.

Окружность на сфере радиуса 1 зададим двумя уравнениями: $ax + by + cz = d$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Прямое вычисление дает:

$$(x')^2 + (y')^2 + \frac{2a}{c-d}x' + \frac{2b}{c-d}y' = 1 + \frac{2d}{c-d}.$$

Это уравнение второго порядка определяет на плоскости либо прямую, либо окружность.

Аналогичное утверждение имеется и для плоскости Лобачевского. ■

Лемма 4. Невырожденное дробно-линейное преобразование $z = (aw + b)/(cw + d)$ плоскости в себя, отображает прямые и окружности снова в прямые и окружности, причем прямая может перейти в окружность, и наоборот.

Доказательство. Если $c = 0$, то утверждение очевидно, так как тогда преобразование представляет собой параллельный сдвиг на вектор и умножение на комплексное число. Пусть $c \neq 0$. Тогда

$$z = \frac{a}{c} - \frac{(ad - bc)}{c(cw + d)},$$

т. е. утверждение осталось доказать лишь для преобразования $z = 1/w$.

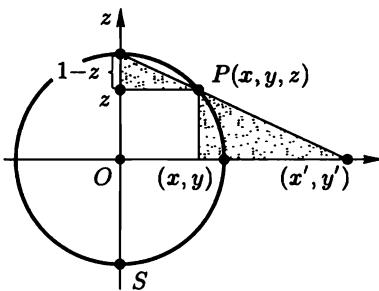


Рис. 1.36

Запишем произвольную окружность на плоскости z в виде $|z - z_0|^2 = \varepsilon^2$, т. е. $(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \varepsilon^2$. Делая замену $z = 1/w$, получаем

$$z\bar{z}(\varepsilon^2 - z_0\bar{z}_0) + z_0z + \bar{z}_0\bar{z} - 1 = 0.$$

Ясно, что это уравнение, в зависимости от параметров ε, z_0 , определяет либо окружность, либо прямую. ■

СЛЕДСТВИЕ 1. Рассмотрим отображение $z = (1 + iw)/(1 - iw)$, переводящее верхнюю полуплоскость в единичный круг. Тогда «прямые» модели Пуанкаре, т. е. дуги окружностей, ортогональных абсолюту, переходят либо в прямые на плоскости $w = u + iv$, ортогональные вещественной оси, либо в полуокружности, ортогональные вещественной оси (рис. 1.37).

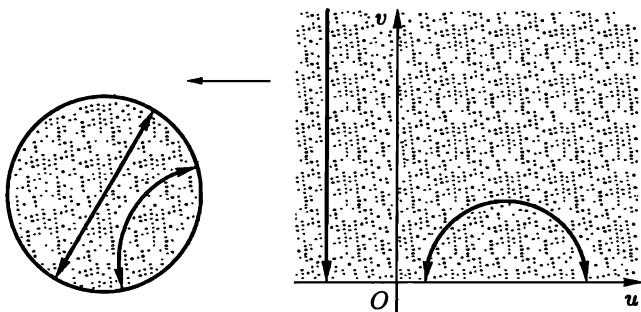


Рис. 1.37

Доказательство. Отображение $z = (1 + iw)/(1 - iw)$ можно считать определенным всюду на плоскости w . В силу леммы 4 оно переводит прямые либо в прямые, либо в окружности. Аналогично и окружности переходят либо в прямые, либо в окружности. Преобразование имеет обратное: $w = (z - 1)/i(z + 1)$. Следовательно, «прямые» модели Пуанкаре переходят либо в прямые, либо в окружности на плоскости w . Осталось доказать, что они должны быть ортогональны вещественной оси в точках пересечения с ней. Это будет следовать из леммы 5.

Лемма 5. Любое невырожденное дробно-линейное преобразование $z = (aw + b)/(cw + d)$, отображающее плоскость w на плоскость z , сохраняет углы между гладкими кривыми в точках их пересечения.

Доказательство. Достаточно вычислить евклидову метрику $dz d\bar{z}$ в новых координатах $w = u + iv$. Прямое вычисление показывает, что

$$dz = \frac{ad - bc}{(cw + d)^2},$$

т. е. $dz d\bar{z} = \frac{|ad - bc|^2}{|cw + d|^4} dw d\bar{w}$. Таким образом, отображение оказалось конформным, т. е. умножает евклидову метрику на положительный множитель и, как было доказано ранее, сохраняет углы между пересекающимися кривыми. ■

Тем самым полностью доказано и следствие 1.

Отметим, что через любые две различные точки на плоскости Лобачевского всегда проходит единственная прямая (в смысле Лобачевского). Ее построение см. на рис. 1.38. В случае, когда обе точки расположены на прямой, ортогональной вещественной оси, прямая плоскости Лобачевского совпадает с этой прямой.

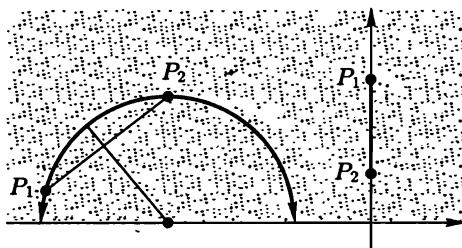


Рис. 1.38

Найдем формулу для длины отрезка прямой от точки P_1 до точки P_2 в метрике Лобачевского, реализованной, например, на верхней полуплоскости. Применяя горизонтальный параллельный перенос (он сохраняет метрику Лобачевского $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$), можно считать, что центр окружности, изображающей прямую, проходящую через точки P_1 и P_2 , находится в точке O . Уравнение прямой имеет вид $r = r_0$, где (r, φ) — полярные координаты. Пусть точки P_1 и P_2 задаются координатами (r_0, φ_1) и (r_0, φ_2) соответственно. Тогда длина дуги от P_1 до P_2 имеет вид (проверьте!)

$$l(P_1, P_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0 d\varphi}{r_0 \sin \varphi} = \ln \left(\frac{\tan(\varphi_1/2)}{\tan(\varphi_2/2)} \right).$$

Г л а в а 2

Общая топология

Топология — это раздел математики, который изучает свойства геометрических объектов, не меняющиеся при «деформации» или при преобразованиях, подобных деформациям.

Первоначально топологические задачи возникли в математическом анализе, где встречается много понятий схожих по своим свойствам и методам исследования. Например, понятия сходимости и предела встречаются в анализе в качестве: а) предела последовательности, б) различных типов пределов функций одной переменной, в) пределов функций многих переменных, г) пределов векторнозначных функций, д) сходимости интегральных сумм. Все эти понятия сходимости и предела основаны на некоторых общих для них приемах исследования, которые интуитивно мы понимаем как близость точек некоторого множества.

Другим важным стимулом для развития топологии было изучение различных типов понятия непрерывности, к которым тесно примыкает понятие сходимости.

Общая топология возникла в результате изучения наиболее общих свойств геометрических пространств и их преобразований, связанных со свойствами сходимости и непрерывности.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

2.1.1. Метрические пространства

Метрикой на произвольном абстрактном множестве X называется числовая неотрицательная функция $\rho(x, y)$, зависящая от пары элементов $x, y \in X$, для которой выполнены следующие аксиомы:

- а) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
- б) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);
- в) для любых трех элементов $x, y, z \in X$ имеет место неравенство $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Множество X , снабженное некоторой метрикой ρ , называется метрическим пространством. Элементы множества X называются его *точками*. Значение метрики $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между точками* x и y .

Примером метрического пространства является множество вещественных чисел \mathbf{R}^1 , метрика на котором задается равенством $\rho(x, y) = |x - y|$. Аналогично, n -мерное векторное пространство \mathbf{R}^n с метрикой $\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, тоже является примером метрического пространства. Любое подмножество $Y \subset X$ метрического пространства X является метрическим пространством по отношению к ограничению метрики ρ на подмножество Y . Подмножество Y при этом называется подпространством пространства X .

Шаровой окрестностью с центром $x \in X$ *радиуса* ε называется множество $O_\varepsilon(x)$ всех точек $y \in X$, для которых $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Расстоянием $\rho(Y_1, Y_2)$ *между двумя множествами* $Y_1, Y_2 \subset X$ называется нижняя грань множества чисел вида $\rho(x, y)$, когда x пробегает множество Y_1 , а y пробегает множество Y_2 . Если множества Y_1 и Y_2 имеют общую точку, то $\rho(Y_1, Y_2) = 0$.

Шаровой окрестностью подмножества $Y \subset X$ *радиуса* ε называется множество $O_\varepsilon(Y)$ всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, Y) < \varepsilon$.

Точкой прикосновения подмножества $Y \subset X$ называется всякая точка $x \in X$, для которой $\rho(x, Y) = 0$.

Замыканием множества Y называется множество всех его точек прикосновения. Замыкание множества Y обозначается через \bar{Y}

Подмножество Y метрического пространства называется *замкнутым*, если его замыкание \bar{Y} совпадает с Y : $Y = \bar{Y}$

Подмножество $Y \subset X$ называется *открытым* множеством, если его дополнение $X \setminus Y$ замкнуто.

Объединение любого семейства открытых множеств, а также пересечение конечного числа открытых множеств являются *открытыми* множествами. Пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются *замкнутыми* множествами.

Во всех предыдущих утверждениях мы пока не пользовались свойством в) метрики. Сформулируем несколько утверждений о метрических пространствах, основанных на этом неравенстве.

- шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$ является открытым множеством;
- внутренность $\text{Int } Y$ произвольного множества Y является открытым множеством;
- замыкание \bar{Y} произвольного множества Y является замкнутым множеством.

Во многих утверждениях о метрических пространствах используются только свойства, сформулированные выше. Поэтому можно расширить класс пространств, для которых имеет смысл говорить об открытых, замкнутых множествах, внутренних точках и точках прикосновения.

2.1.2. Топологические пространства

Скажем, что на множестве X задана *топология*, если задано некоторое семейство подмножеств множества X , называемых *открытыми* множествами, для которого выполнены следующие условия:

а) все множество X , а также пустое множество являются *открытыми* множествами;

б) объединение любого семейства и пересечение конечного числа открытых множеств являются *открытыми* множествами.

Множество X с заданной на нем топологией называют *топологическим пространством*, элементы множества X называются *точками* пространства X . Дополнения к открытым множествам называются *замкнутыми множествами*. В топологическом пространстве X выполнены двойственные условия для замкнутых множеств:

а') все множество X , а также пустое множество являются *замкнутыми* множествами,

б') пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств являются *замкнутыми* множествами.

Семейство открытых множеств метрического пространства X задает на X некоторую топологию, т. е. превращает X в топологическое пространство.

В топологических пространствах воспроизводятся многие понятия метрических пространств. *Окрестностью точки* x топологического пространства X называется любое открытое множество, содержащее точку x . Открытое множество, содержащее подмножество Y , называется *окрестностью множества* Y . *Точкой прикосновения* множества $Y \subset X$ называется такая точка x , для которой каждая ее окрестность имеет непустое пересечение с множеством Y . Множество всех точек прикосновения множества Y называется *замыканием* множества Y и обозначается через \bar{Y} . *Внутренней точкой* множества Y называется такая точка $x \in Y$, которая лежит в Y вместе с некоторой своей окрестностью. Множество всех внутренних точек множества Y называется *внутренностью* и обозначается через $\text{Int } Y$.

Множество $Y \subset X$ замкнуто (т. е. является дополнением к открытому множеству) тогда и только тогда, когда $Y = \bar{Y}$.

Замыкание \overline{Y} произвольного множества Y топологического пространства X является замкнутым множеством, т. е. $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$

Пример 1. Рассмотрим множество X , состоящее из одного элемента x . Тогда на X может быть введена единственная топология, открытыми множествами которой являются множество X и пустое множество.

Пример 2. Рассмотрим множество X , состоящее из двух элементов, x и y , $x \neq y$. На этом множестве можно ввести уже несколько различных топологий. Первая топология задается множеством всех подмножеств в качестве открытых множеств, т. е. $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, X\}$. Вторая топология задается следующим семейством открытых множеств: $\{\emptyset, X\}$. Можно задать и третью топологию, в качестве семейства открытых множеств которой следует взять $\{\emptyset, \{x\}, X\}$. Мы перечислили все различные топологии на одном и том же множестве X , которые задают три различных топологических пространства.

Пример 3. Пусть X — произвольное множество. Введем на X топологию, объявив любое его подмножество открытым. Тогда любое одноточечное подмножество является открытым, а значит, и всякое подмножество как объединение своих точек тоже открыто. Такая топология называется *дискретной*.

Пусть X — топологическое пространство, $Y \subset X$ — его подмножество. Тогда на Y также можно задать топологию, объявив открытым всякое множество вида $Y \cap U$, где U — открытое в X множество. Тогда топологическое пространство Y называется *подпространством* топологического пространства X , а топология в Y — *индуцированной топологией*. Если X — метрическое пространство, а Y — его подпространство, то топология в Y задается независимо от порядка операций: ограничения метрики и перехода к топологии или перехода к топологии и индуцирования топологии.

Пусть $Y \subset X$ — подмножество в топологическом пространстве X . Множество Y называется *плотным* (*всюду плотным*), если $\overline{Y} = X$.

Теорема 1. *Если Y_1 и Y_2 — два открытых плотных множества в пространстве X , то их пересечение $Y = Y_1 \cap Y_2$ открыто и плотно в X .*

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, U — ее окрестность. Поскольку множество Y_1 плотно, то $U \cap Y_1 \neq \emptyset$, т. е. найдется такая точка y , что $y \in U \cap Y_1$. Так как $U \cap Y_1$ — открытое множество, а Y_2 — плотное множество, то $U \cap Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, т. е. $U \cap Y \neq \emptyset$, это и означает, что Y — плотное множество в X . ■

2.1.3. Непрерывные отображения

Понятие топологического пространства настолько удобно, что определение непрерывности отображения дословно переносится из математического анализа.

Определение 1 (по Коши). Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0))$ точки $f(x_0) \in Y$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 \in X$, что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным отображением*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X .

Теорема 2. *Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

- a) *прообраз любого открытого множества является открытым множеством;*
- б) *прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Доказательство. Поскольку для прообразов справедливо соотношение $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, то условия а) и б) эквивалентны. Допустим, что f — непрерывное отображение, $V \subset Y$ — открытое множество. Покажем, что его прообраз $f^{-1}(V)$ открыт. Пусть $x \in f^{-1}(V)$; тогда $f(x) \in V$, т. е. V является окрестностью точки $f(x)$. Тогда согласно определению непрерывности отображения f найдется такая окрестность U точки x , что $f(U) \subset V$, т. е. $U \subset f^{-1}(V)$; это означает, что множество $f^{-1}(V)$ открыто.

Обратно, пусть выполнено условие а). Если $V \ni f(x_0)$ — окрестность точки $f(x_0)$, то $U = f^{-1}(V) \ni x_0$ — окрестность точки (x_0) , причем $f(U) = f(f^{-1}(V)) = V \subset V$. Следовательно, f — непрерывное отображение. ■

Условия а) и б) теоремы 2 удобны при проверке непрерывности отображений топологических пространств. В частности, если отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ непрерывные отображения топологических пространств. Тогда композиция отображений, $gf: X \rightarrow Z$, тоже непрерывна.

Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств: $X = F_1 \cup F_2$, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение пространства X в топологическое пространство Y . Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны ограничения $f|_{F_1}$ и $f|_{F_2}$ отображения f на подмножества F_1 и F_2 .

Рассмотрим непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y . Если отображение f взаимно однозначно, а обратное отображение f^{-1} непрерывно, то отображение f называется *гомеоморфизмом*. При этом топологические пространства X и Y называются *гомеоморфными топологическими пространствами*. При гомеоморфизме устанавливается не только взаимно однозначное соответствие между точками топологических пространств X и Y , но и взаимно однозначное соответствие между самими топологиями, т. е. между семействами открытых множеств (семействами замкнутых множеств).

Пример 4. Важным частным случаем непрерывных отображений являются непрерывные функции, т. е. непрерывные отображения топологического пространства X в пространство \mathbf{R}^1 вещественных чисел. Условие непрерывности функции f можно сформулировать следующим образом: для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки x_0 , что при $y \in U$ выполнено неравенство $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$. Для функций на топологическом пространстве можно определить равномерный предел последовательности непрерывных функций. Функция f называется *равномерным пределом* последовательности непрерывных функций F_n , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N , такое что для всех $n > N$ и всех точек $x \in X$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Так же, как и в случае функций одной вещественной переменной, справедливо утверждение: если $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ и последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций на топологическом пространстве X сходится к f равномерно, то функция f также непрерывна.

Пример 5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение метрических пространств, ρ_1 и ρ_2 — метрики на пространствах X и Y соответственно. Тогда условие непрерывности отображения f можно сформулировать следующим образом: для любого $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho_1(x, x_0) < \delta$ следует неравенство $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Скажем, что последовательность точек $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$. В терминах сходящихся последовательностей метрического пространства формулируются многие свойства пространств и отображений. Например, множество $Y \subset X$ является замкнутым, если для любой сходящейся последовательности точек $\{x_n\} \subset Y$ предел $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ также принадлежит множеству Y . Далее, условие непрерывности отображения $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств можно сформулировать по Гейне.

Определение 2 (по Гейне). Отображение f непрерывно в точке x_0 , если из равенства $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ следует равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Пример 6. Рассмотрим два топологических пространства X и Y . Образуем новое топологическое пространство $X \times Y$. Множество $X \times Y$ есть множество всех пар вида (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$, и называется *декартовым произведением множеств* X и Y . Определим теперь топологию в $X \times Y$. Множество $U \subset X \times Y$ назовем открытым, если U представимо в виде объединения $U = \bigcup_{\alpha} (V_{\alpha} \times W_{\alpha})$, где $V_{\alpha} \subset X$, $W_{\alpha} \subset Y$ — открытые множества. Проверка свойств открытых множеств тривиальна. Множество $X \times Y$ с определенной выше топологией называется *декартовым произведением топологических пространств* X и Y . При этом топологические пространства X и Y называются *сомножителями* декартова произведения $X \times Y$.

Пусть Z , X_1 и X_2 — топологические пространства. Для любых двух отображений $f_1: Z \rightarrow X_1$ и $f_2: Z \rightarrow X_2$ отображение $F: Z \rightarrow X_1 \times X_2$, $F(z) = (f_1(z), f_2(z))$, непрерывно в том и только том случае, если f_1 и f_2 непрерывны.

Пример 7. Пусть X и Y — метрические пространства; тогда декартово произведение $X \times Y$ допускает метрику, согласованную с топологией декартова произведения. Пусть ρ_1 , ρ_2 — метрики пространств X и Y соответственно. Определим метрику ρ в декартовом произведении $X \times Y$ по формуле

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_1(x_1, x_2), \rho_2(y_1, y_2)\}. \quad (2.1)$$

Другой способ задавать метрику в декартовом произведении использует аналогию между между сомножителями X и Y декартова произведения с осями координат на плоскости. Метрика задается по формуле

$$\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{\rho_1(x_1, x_2)^2 + \rho_2(y_1, y_2)^2}. \quad (2.2)$$

Топология, задаваемая метрикой (2.2), совпадает с топологией, задаваемой метрикой (2.1), для чего достаточно найти две такие константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что

$$C_1 \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq \rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \leq C_2 \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

2.1.4. Фактортопология

Пусть X — топологическое пространство, Y — некоторое множество и $f: X \rightarrow Y$ — отображение пространства X на Y . *Фактортопология на множестве Y , задаваемая отображением f* , опреде-

ляется следующим образом: множество $U \subset Y$ открыто тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ — открытое подмножество пространства X .

Пример 8. Пусть X — замкнутый интервал $[0, 2\pi]$, Y — единичная окружность $x^2 + y^2 = 1$. Определим отображение $f: X \rightarrow Y$ формулой $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Тогда топология окружности, индуцированная из \mathbb{R}^2 , совпадает с фактортопологией, задаваемой отображением f .

Пример 9. Пусть R — отношение эквивалентности на топологическом пространстве X , X/R — множество всех классов эквивалентности и $f: X \rightarrow X/R$ — естественное отображение, ставящее в соответствие каждой точке из X ее класс эквивалентности. Тогда на X/R вводится фактортопология, задаваемая этим отображением. Наделенное этой топологией пространство X/R называется *факторпространством пространства X по модулю R* . Например, пусть $X = \mathbb{R}^1$ — действительная прямая и R — отношение эквивалентности « $x \equiv y \pmod R$ тогда и только тогда, когда число $x - y$ целое». Тогда факторпространство X/R гомеоморфно окружности.

Пример 10. Пусть X — квадрат $ABCD$ на плоскости \mathbb{R}^2 . Тогда X является топологическим пространством с топологией, индуцированной из \mathbb{R}^2 . Введем следующие отношения эквивалентности R_i :

- (R_1) отождествим точки отрезков AB и DC , лежащие на одной и той же прямой, параллельной AD ;
- (R_2) отождествим точки отрезков AB и CD , лежащие на одной и той же прямой, проходящей через центр квадрата;
- (R_3) отождествим точки отрезков AB и DC по (R_1) и точки отрезков BC и AD , лежащие на одной и той же прямой, параллельной AB ;
- (R_4) отождествим точки отрезков AB и CD по (R_2) и точки отрезков BC и AD , лежащие на одной и той же прямой, параллельной AB ;
- (R_5) отождествим точки отрезков AB и CD по (R_2) и точки отрезков BC и DA , лежащие на одной и той же прямой, проходящей через центр квадрата.

Тогда X/R_1 — кольцо, X/R_2 — лист Мебиуса, X/R_3 — двумерный тор, X/R_4 — бутылка Клейна, X/R_5 — проективная плоскость.

Задачи

1. Привести пример метрики на конечном множестве, которая не индуцируется никаким его вложением в евклидово пространство.
2. Показать, что конечное множество на прямой является замкнутым.

3. Показать, что $\rho(x, Y) = \rho(x, \bar{Y})$.
4. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x, Y)$ непрерывна для любого подмножества Y
5. Показать, что любая метрика на конечном множестве индуцирует на нем дискретную топологию.
6. Доказать, что интервал, полуинтервал и сегмент на вещественной прямой попарно не гомеоморфны.
7. Доказать, что метрика $\rho(x, y)$ является непрерывной функцией на декартовом квадрате $X \times X$ метрического пространства X .
8. Доказать, что множество X представимо в виде разности двух замкнутых множеств тогда и только тогда, когда $(\bar{X} \setminus X)$ является замкнутым множеством.
9. Доказать, что образ плотного подмножества при непрерывном отображении плотен в образе.

2.2. СВЯЗНОСТЬ. АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

2.2.1. Связность

Рассмотрим две точки $x, y \in X$ в топологическом пространстве X и такое непрерывное отображение единичного отрезка $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Скажем, что γ есть кривая, соединяющая точки x и y . Топологическое пространство X называется линейно связным, если любые его точки можно соединить кривой. В этом случае пространство нельзя разбить на два непустых непересекающихся открыто замкнутых подмножества. Этот факт вытекает из того, что единичный отрезок уже обладает этим свойством. В самом деле, допустим, что отрезок $[a, b]$ представлен в виде объединения двух непустых открыто замкнутых непересекающихся множеств, $[a, b] = A \cup B$. Без ограничения общности будем считать, что $a \in A$. Тогда в силу открытости A найдется такое $\varepsilon > 0$, что полуинтервал $[a, a + \varepsilon] \subset A$. Пусть $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon\}$, когда ε пробегает такие числа, что $[a, a + \varepsilon] \subset A$. Тогда для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеем включение $[a, a + \varepsilon + (\varepsilon_0 - \varepsilon)/2] \subset A$, т. е. $a + \varepsilon \in A$ для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$. Следовательно, $a + \varepsilon_0 \in A$ в силу замкнутости A . Так как A одновременно открыто, то ε_0 входит в A вместе с некоторой окрестностью. Единственной возможностью для ε_0 может быть только равенство $a + \varepsilon_0 = b$, поскольку в противном случае $\varepsilon_0 < \sup\{\varepsilon\}$. Таким образом, $A = [a, b]$, т. е. $B = \emptyset$, что противоречит предположению.

Вообще, пространство X называется связным, если его нельзя разбить на два непустых открыто замкнутых подмножества.

Теорема 1. Пусть $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$, каждое X_{α} связно и пересечение $\bigcap_{\alpha} X_{\alpha}$ непусто. Тогда пространство X связано.

Доказательство. Допустим противное, т. е. $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, множества A и B открыты и непусты. Тогда $X_{\alpha} = (X_{\alpha} \cap A) \cup (X_{\alpha} \cap B)$, где $X_{\alpha} \cap A$ и $X_{\alpha} \cap B$ открыты в X_{α} . Но поскольку множество X_{α} связано, то либо $X_{\alpha} \cap A = \emptyset$, либо $(X_{\alpha} \cap B) = \emptyset$, т. е. каждое множество X_{α} целиком лежит либо в A , либо в B . Далее, так как множества A и B непусты, то найдутся точки $a \in A$, $b \in B$. Пусть $a \in X_{\alpha_0}$, тогда $X_{\alpha_0} \subset A$. Пусть $b \in X_{\alpha_1}$, тогда $X_{\alpha_1} \subset B$. Значит, $X_{\alpha_0} \cap X_{\alpha_1} = \emptyset$, что противоречит условию теоремы. ■

Теорема 2. Образ при непрерывном отображении связного пространства связан.

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y = f(X)$ — непрерывное отображение. Поэтому если Y — несвязное пространство, то $Y = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, множества A, B — открыты и непусты. Следовательно, $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, множества $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ открыты, непусты и не пересекаются. ■

Пример 1. Из теоремы 2 следует, что всякая непрерывная вещественная функция $y = f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой, принимает промежуточные значения. Если бы функция f не принимала какое-либо промежуточное значение y_0 , то образ $f([a, b])$ распадался бы в объединение двух открытых непустых множеств: тех значений, которые меньше y_0 , и тех значений, которые больше y_0 , что противоречит теореме 2.

Существуют примеры связных, но не линейно связных топологических пространств.

Пример 2. Пусть X — замыкание графика функции $y = f(x) = \sin(1/x)$ как множества в двумерном евклидовом прост-

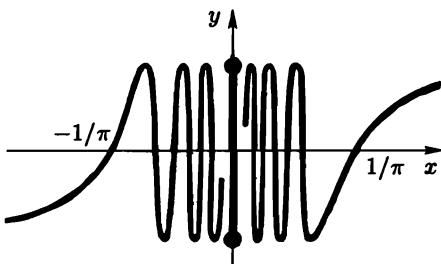


Рис. 2.1

ранстве \mathbb{R}^2 (рис. 2.1). Метрика в \mathbb{R}^2 берется классическая, по длине отрезков, соединяющих пары точек в \mathbb{R}^2 . Тогда множество X состо-

ит из объединения графика функции $y = \sin(1/x)$ и вертикального отрезка $\Gamma_3 = \{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq +1\}$. График функции f распадается на два подмножества, каждое из которых гомеоморфно интервалу:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < \infty, y = f(x)\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) \mid -\infty < x < 0, y = f(x)\}.$$

Поэтому, если $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B — открытые непустые множества, то каждое из подмножеств $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ целиком лежит либо в A , либо B . Пусть $\Gamma_3 \subset B$. Нетрудно проверить, что любая окрестность Γ_3 пересекается как с Γ_1 , так и с Γ_2 , т. е. $\Gamma_1 \subset B$, $\Gamma_3 \subset B$. Значит, $A = \emptyset$, что противоречит предложению. Таким образом, X — связное пространство.

Покажем теперь, что X не является линейно связным. Рассмотрим две точки $P = (-1/\pi, 0)$ и $Q = (1/\pi, 0)$ в X . Предположим, что существует непрерывное отображение $f: [0, 1] \rightarrow X$, $f(0) = P$, $f(1) = Q$. Отображение f задается двумя непрерывными числовыми функциями: $f(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) = \sin(1/x(t))$ при $x(t) \neq 0$. Поскольку $x(0) = -1/\pi$, то точная нижняя грань t_0 тех значений t , для которых $x(t) = 0$, строго больше нуля, $t_0 > 0$.

Итак, на интервале $[0, t_0]$ выполнены условия: $x(t) < 0$, $y(t) = \sin(1/x(t))$. Поскольку $x(t)$ — непрерывная функция, и существует последовательность $t_k \geq t_0$, $t_k \rightarrow t_0$, где $x(t_k) = 0$, то $x(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = 0$. Но тогда функция $\sin(1/x(t))$ не имеет предела при $t \rightarrow t_0 - 0$; следовательно, функция $y(t)$ не является непрерывной. Таким образом, пространство X не является линейно связным пространством.

2.2.2. Аксиомы отделимости

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым пространством*, если для любых точек $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

В хаусдорфовом пространстве каждая точка $x \in X$ является замкнутым множеством. В самом деле, если $y \neq x$, то найдется окрестность $U(y)$ точки y , не содержащая x . Тогда множество $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U(y)$ является открытым, а его дополнение, состоящее из одной точки x , замкнуто.

Дискретное топологическое пространство X является хаусдорфовым пространством. В самом деле, каждая точка $x \in X$ является открытым множеством, значит, если $x \neq y$, то окрестности $\{x\}$ и $\{y\}$ не пересекаются.

Если X и Y — хаусдорфовы пространства, то их декартово произведение, несвязная и связная суммы являются хаусдорфовыми топологическими пространствами.

Всякое метрическое пространство хаусдорфово. Более того, если два замкнутых подмножества F_1 и F_2 метрического пространства не пересекаются, то существуют непересекающиеся их окрестности $U_1 \supset F_1$ и $U_2 \supset F_2$.

Действительно, пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ , F_1 и F_2 — два непересекающихся замкнутых множества. Пусть $x \in F_1$, $\varepsilon(x) = (1/3)\rho(x, F_2)$. Положим $U_1 = \bigcup_{x \in F_1} O_{\varepsilon(x)}(x)$. Аналогично определим открытое множество $U_2 = \bigcup_{y \in F_2} O_{\varepsilon'(y)}(y)$, где $\varepsilon'(y) = (1/3)\rho(y, F_1)$. Мы получили окрестности множеств F_1 и F_2 . Покажем, что множества U_1 и U_2 не пересекаются. Допустим противное, т. е. что существует точка $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда для некоторых точек $x \in F_1$ и $y \in F_2$ имеем $z \in O_{\varepsilon(x)}(x)$, $z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$, т. е. $\rho(x, z) < (1/3)\rho(x, F_2)$, $\rho(y, z) < (1/3)\rho(y, F_1)$. В частности,

$$\rho(x, z) < (1/3)\rho(x, y), \quad \rho(y, z) < (1/3)\rho(y, x).$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) < (2/3)\rho(x, y),$$

что противоречит неравенству треугольника.

Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *открытым покрытием*, если $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Покрытия — удобное понятие при изучении топологических пространств. Например, если в каждом множестве U_α задана непрерывная функция f_α , а на каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ функции f_α и f_β совпадают, то существует одна непрерывная функция f на пространстве X , совпадающая с f_α в каждом открытом множестве U_α .

Пусть задано два открытых покрытия $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ топологического пространства X . Скажем, что покрытие $\{V_\beta\}$ *измельчает покрытие $\{U_\alpha\}$* или *является более мелким, чем покрытие $\{U_\alpha\}$* , если каждое множество V_β лежит в некотором множестве U_α , $\alpha = \alpha(\beta)$.

Теорема 3. Пусть X — метрическое пространство, $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ — конечное открытое покрытие. Тогда существует более мелкое покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, причем $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$.

Доказательство. Заметим, что в теореме 3 утверждается существование не просто более мелкого покрытия, а такого, у которого элементы нумерованы тем же индексом α и включение множеств происходит с одинаковым значением индекса α . Для

доказательства теоремы рассмотрим замкнутые непересекающиеся множества $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha$ и $X \setminus U_1$. Тогда существуют окрестности, разделяющие эти два множества. В качестве окрестности V_1 нужно взять ту из них, что содержит $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha$. Тогда $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$ и система множеств $\{V_1, U_2, \dots, U_N\}$ покрывает пространство X . Поэтому мы можем найти множество $V_2 \subset \bar{V}_2$, при чем система $\{V_1, V_2, U_3, \dots, U_N\}$ тоже покрывает пространство X . Заменяя последовательно множество U_k на $V_k \subset \bar{V}_k \subset U_k$, мы придем к искомому покрытию $\{V_1, \dots, V_N\}$ за N шагов. ■

Задачи

1. Доказать, что если из \mathbf{R}^n , $n \geq 2$, выбросить конечное (или счетное) число точек, то оставшееся пространство будет связным.
2. Доказать, что если из \mathbf{R}^n выбросить конечное число подпространств размерности меньше, чем $n - 1$, то оставшееся пространство будет связно.
3. Подсчитать, на какое наибольшее число компонент связности разобьется \mathbf{R}^2 конечным числом прямых. Каково наименьшее число компонент связности?
4. Пусть $f: X \rightarrow X$ — непрерывное отображение хаусдорфова пространства. Доказать, что множество неподвижных точек (т. е. точек x , для которых $f(x) = x$) замкнуто.
5. Доказать, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, y) \mid x = y\} \subset X \times X$ замкнута в $X \times X$.
6. Доказать, что отображение $f: X \rightarrow Y$ в хаусдорфово пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда график $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ замкнут в $X \times Y$

2.3. КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Свойство компактности, которое мы рассмотрим в настоящем параграфе, является одним из важнейших свойств топологических пространств. В частности, это свойство играет фундаментальную роль при исследовании вещественных чисел и непрерывных функций.

2.3.1. Компактные пространства

Определение 1. Хаусдорфово топологическое пространство X называется *компактным*, если из его всякого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выделить конечную часть $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$, покрывающую X .

Можно требовать всего лишь, чтобы существовало конечное более мелкое покрытие.

Пример 1. Докажем, что любой конечный отрезок $[a, b]$ вещественной оси \mathbf{R} является компактным пространством. В самом деле, если $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие отрезка $[a, b]$, то без ограничения общности можно считать, что каждый элемент покрытия U_α является интервалом (c_α, d_α) (за исключением двух полуинтервалов, $[a, a')$ и $(b', b]$). Рассмотрим множество P всех таких чисел $x \in [a, b]$, что отрезок $[a, x]$ покрывается конечным числом элементов U_α . Тогда, если $x \in P$, $y < x$, то y тоже принадлежит P . Поскольку точка a принадлежит элементу покрытия $[a, a')$, $a' > a$, то множество P состоит более чем из одной точки a .

Пусть x_0 — точная верхняя грань множества P , $x_0 > a$. Если $x_0 < b$, то точка x_0 лежит в некотором интервале $U_{\alpha_0} = (c_{\alpha_0}, d_{\alpha_0})$, т. е. $c_{\alpha_0} < x_0 < d_{\alpha_0}$. Пусть y, z — такие числа, что $c_{\alpha_0} < y < x_0 < z < d_{\alpha_0}$. Тогда $y \in P$ и, значит, конечное число множеств U_β покрывает отрезок $[a, y]$, поэтому отрезок $[a, z]$ тоже покрывается конечным числом множеств U_β . Следовательно, x_0 не является верхней гранью множества P . Таким образом, $x_0 = b$. Тогда $b' < x_0 = b$. Если $b' < y < x_0$, то $y \in P$, и отрезок $[a, y]$ опять-таки покрывается конечным числом множеств U_β . Вместе с ним покрывается конечным числом множеств U_β и весь отрезок $[a, b]$.

2.3.2. Свойства компактных пространств

Теорема 1. Пусть $F \subset X$ — компактное подпространство в хаусдорфовом топологическом пространстве X . Тогда F — замкнутое множество в пространстве X .

Доказательство. Пусть x — произвольная точка пространства X , не принадлежащая F . В силу хаусдорфовости пространства X для точек $y \in F$ найдутся непересекающиеся окрестности $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Тогда семейство $\{U_y\}$ покрывает множество F , а в силу его компактности найдется конечное семейство $\{U_{y_k}\}_{k=1}^N$, покрывающее F . Тогда объединение $\bigcup_{k=1}^N U_{y_k}$ не пересекается с пересечением $\bigcap_{k=1}^N V_{y_k}$ и содержит множество F . Следовательно, точка x имеет окрестность, не пересекающуюся с множеством F , что и означает, что множество F замкнуто. ■

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в пространство Y . Тогда образ $f(X)$ является компактным пространством.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие множества $f(X)$. Тогда семейство $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ является открытым

покрытием компактного пространства X . Следовательно, некоторое конечное семейство $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^N$ покрывает пространство X . Тогда семейство $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^N$ покрывает образ $f(X)$. ■

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее общее свойство непрерывных функций на компактных пространствах, известное из курса математического анализа.

Теорема 3. *Пусть $f: X \rightarrow \mathbf{R}^1$ – непрерывная функция на компактном пространстве X . Тогда функция f ограничена и принимает максимальное и минимальное значения.*

Доказательство. По теореме 2 образ $f(X)$ является компактным подпространством в \mathbf{R}^1 , а по теореме 1 – замкнутым множеством. Если бы образ $f(X)$ не был ограниченным, то система интервалов $U_n = (-n, n)$ покрывала бы $f(X)$ и из нее нельзя было бы выделить конечного подпокрытия. Положим $A = \sup_{x \in X} \{f(x)\}$, $B = \inf_{x \in X} \{f(x)\}$. Тогда A и B – точки прикосновения множества $f(X)$. Так как множество $f(X)$ замкнуто, то $A, B \in f(X)$. ■

2.3.3. Метрические компактные пространства

Для метрических пространств свойство компактности можно сформулировать в привычных для математического анализа терминах.

Теорема 4. *Пусть X – метрическое пространство. Пространство X является компактным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных свойств:*

- всякая последовательность $\{x_n\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность;*
- всякая последовательность вложенных непустых замкнутых подмножеств $\{F_n\}$, $F_n \supset F_{n+1}$, имеет непустое пересечение.*

В качестве следствия из теоремы 4 приведем следующее фундаментальное свойство вещественных чисел: *последовательность вложенных отрезков вещественной прямой имеет общую точку*.

2.3.4. Операции над компактными пространствами

Если хаусдорфово пространство X является объединением конечного числа своих компактных подмножеств, то X является компактным пространством.

Теорема 5. *Декартово произведение $X \times Y$ метрических компактных пространств X и Y является компактным пространством.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В самом деле, согласно теореме 4 рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\}$, $z_n = (x_n, y_n)$. Поскольку X –

компактное пространство, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда в силу компактности пространства Y из последовательности $\{y_{n_k}\}$ выделяется сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_{k_s}}\}$. Таким образом, подпоследовательность $\{z_{n_{k_s}}\}$ также сходится.

Задачи

1. Доказать, что объединение конечного числа компактных пространств компактно.
2. Показать, что если X — некомпактное метрическое пространство, то существует непрерывная и не ограниченная на этом пространстве функция.
3. Доказать, что метрическое компактное пространство имеет счетное плотное подмножество.
4. Доказать, что если в компактном метрическом пространстве два замкнутых множества A и B не пересекаются, то $\rho(A, B) > 0$.

2.4. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ОТДЕЛИМОСТЬ. РАЗБИЕНИЕ ЕДИНИЦЫ

В этом параграфе мы приведем теоремы, позволяющие при довольно слабых предположениях проводить анализ непрерывных функций так же, как и в случае функций одной вещественной переменной. Как уже отмечалось ранее, непрерывные функции на топологических пространствах во многих отношениях ведут себя так же, как и функции одной вещественной переменной. Сумма $f + g$, произведение fg двух непрерывных функций, а также отношение f/g при $g \neq 0$ являются непрерывными функциями. В классе непрерывных функций на топологическом пространстве X можно переходить к пределу. Последовательность функций f_n равномерно сходится к функции f , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что при $n > N$ выполнено неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$.

Теорема 1. Равномерный предел последовательности непрерывных функций на топологическом пространстве X является непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Покажем, что функция f непрерывна. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и точку $x_0 \in X$. Тогда найдется такой номер n , что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. Поскольку функция f_n непрерывна, то найдется такая окрестность $O(x_0)$, что при $x \in O(x_0)$ выполнено неравенство $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. Тогда при $x \in O(x_0)$

имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \\ &+ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

2.4.1. Функциональная отделимость

Если F_1, F_2 – два непересекающихся замкнутых множества в топологическом пространстве X , то для построения непересекающихся окрестностей множеств F_1 и F_2 достаточно построить такую непрерывную функцию f на пространстве X , для которой $f(x) \geq a$ при $x \in F_1$, $f(x) \leq b$ при $x \in F_2$ и $a > b$. Тогда в качестве окрестностей множеств F_1 и F_2 можно взять прообразы интервалов $f^{-1}(c, \infty)$ и $f^{-1}(-\infty, c)$, где $b < c < a$. В некотором смысле справедливо и обратное утверждение.

Теорема 2 (лемма Урысона). *Пусть X – нормальное топологическое пространство, F_0, F_1 – два замкнутых непересекающихся множества. Тогда существует такая непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, что $f|_{F_0} \equiv 0$, $f|_{F_1} \equiv 1$.*

Доказательство. Построим такую систему открытых множеств Γ_r , занумерованных всеми двоично-рациональными числами $0 \leq r \leq 1$, что выполнены следующие условия: 1) $F_0 \subset \Gamma_0$; 2) $\overline{\Gamma}_1 \subset X \setminus F_1$; 3) $\overline{\Gamma}_r \subset \Gamma_{r'}$ при $r < r'$.

Тогда систему открытых множеств $\{\Gamma_r\}$ можно расширить, добавив к ним множества $\Gamma_t = \bigcup_{r < t} \Gamma_r$, где t – уже произвольное вещественное число, $0 \leq t \leq 1$. Система открытых множеств $\{\Gamma_t\}$ удовлетворяет тем же условиям: $\overline{\Gamma}_t \subset \Gamma_{t'}$ при $t < t'$. В самом деле, взяв такие рациональные числа r, r' , что $t < r < r' < t'$, получаем $\Gamma_t \subset \Gamma_r, \Gamma_{r'} \subset \Gamma_{t'},$ следовательно, $\overline{\Gamma}_t \subset \overline{\Gamma}_r \subset \Gamma_{r'} \subset \Gamma_{t'}$.

Построим теперь непрерывную функцию $f: X \rightarrow [0, 1]$, полагая $f(x) = 0$ при $x \in F_0$ и $f(x) = \sup\{t \mid x \notin \Gamma_t\}$ при $x \notin F_0$. Покажем, что f – непрерывная функция. Фиксируем точку x_0 и $\varepsilon > 0$. Положим $t_0 = f(x_0)$. В силу определения функции f имеем $x_0 \notin \Gamma_{(t_0-\varepsilon/2)}, x_0 \in \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$. Рассмотрим окрестность U точки x_0 : $U = \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)} \setminus \overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. Тогда если $y \in U$, то $y \in \Gamma_{(t_0+\varepsilon/2)}$, $y \notin \overline{\Gamma}_{(t_0-\varepsilon/2)}$. По определению функции f выполнены неравенства $t_0 - \varepsilon/2 \leq f(y) \leq t_0 + \varepsilon/2$, т. е. $|f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$. Таким образом, функция f непрерывна. Кроме того, если $x \in F_0$, то $f(x) = 0$, а если $x \in F_1$, то $f(x) = 1$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 2, нам осталось построить систему открытых множеств Γ_r , удовлетворяющих услови-

ям 1), 2) и 3). В силу нормальности пространства X для любого замкнутого множества F и его окрестности U , $F \subset U$, найдется другая окрестность V такая, что $F \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Для краткости будем писать $V \ll U$, если $V \subset \bar{V} \subset U$. Итак, $F_0 = \bar{F}_0 \subset X \setminus F_1$. Поэтому $F_0 \ll X \setminus F_1$. Следовательно, найдется открытое множество Γ_0 такое, что $F_0 \ll \Gamma_0 \ll X \setminus F_1$. Аналогично, найдется такое открытое множество Γ_1 , что $F_0 \ll \Gamma_0 \ll \Gamma_1 \ll X \setminus F_1$. Предположим, что для всех двоично-рациональных чисел вида $r = p/2^n$, $0 \leq p \leq 2^n$, уже построены открытые множества Γ_r , причем $\Gamma_{(p/2^n)} \ll \Gamma_{((p+1)/2^n)}$. Определим тогда множество $\Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}}$ так, что $\Gamma_{p/2^n} \ll \Gamma_{(2p+1)/2^{n+1}} \ll \Gamma_{(p+1)/2^n}$. По индукции все семейство множеств $\{\Gamma_r\}$ построено. ■

Из теоремы 2 следует теорема о продолжении непрерывных функций.

Теорема 3. Пусть X — нормальное топологическое пространство, $F \subset X$ — замкнутое множество, $f: F \rightarrow \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция на множестве F . Тогда функция f продолжается до непрерывной функции $g: X \rightarrow \mathbf{R}^1$ на всем пространстве X . Если функция f ограничена, $|f(x)| \leq A$, то и функцию g можно выбрать ограниченной той же константой, $|g(x)| \leq A$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция f ограничена, $|f(x)| \leq A$. Положим $\varphi_0(x) = f(x)$ и рассмотрим два замкнутых подмножества: $A_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \leq -A/3\}$, $B_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \geq A/3\}$. Поскольку множества A_0 и B_0 не пересекаются, то согласно теореме 2 существует непрерывная функция $f_0: X \rightarrow [-A/3, A/3]$, равная $-A/3$ на множестве A_0 и $A/3$ на множестве B_0 . Другими словами, $|f_0(x)| \leq A/3$, $x \in X$, $|\varphi_0(x) - f_0(x)| \leq 2A/3$.

Положим $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$. Тогда функция φ_1 ограничена на множестве F константой $2A/3$. Поэтому, повторяя весь процесс, можно построить два непересекающихся замкнутых множества: $A_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \leq -2A/9\}$, $B_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \geq 2A/9\}$, и непрерывную функцию $f_1: X \rightarrow [-2A/9, 2A/9]$, равную $-2A/9$ на множестве A_1 и $2A/9$ на множестве B_1 . Другими словами, $|f_1(x)| \leq 2/3 \cdot A/3$, $|\varphi_1(x) - f_1(x)| \leq 4A/9$. Повторяя указанный процесс бесконечное число раз, мы построим две последовательности функций $f_n: X \rightarrow \mathbf{R}^1$, $\varphi_n: F \rightarrow \mathbf{R}^1$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x),$$

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3}, \quad |\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n A. \quad (2.3)$$

Далее,

$$f(x) = \varphi_0(x) = f_0(x) + \varphi_1(x) = \dots$$

$$\dots = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \varphi_{n+1}(x) \quad \text{при } x \in F.$$

В силу неравенства (2.3) ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на всем пространстве X . По теореме 1 функция $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ является непрерывной и по построению $g(x) = f(x)$ при $x \in F$. В силу неравенства (2.3) имеем

$$|g(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{A}{3} = A.$$

Тем самым теорема доказана для случая ограниченной функции f .

В общем случае рассмотрим гомеоморфизм $h: \mathbf{R}^1 \rightarrow (-1, 1)$. Тогда композиция $hf: F \rightarrow (-1, 1)$ является непрерывной ограниченной функцией. Применяя теорему 3 для ограниченной функции hf , построим непрерывную функцию $g: X \rightarrow [-1, 1]$, продолжающую функцию hf . Значения ± 1 функция g принимает на некотором замкнутом множестве F_1 , не пересекающемся со множеством F . По теореме 2 существует непрерывная функция $\psi: X \rightarrow [0, 1]$, равная 1 на множестве F и 0 на множестве F_1 . Тогда функция $g_1(x) = \psi(x)g(x)$, $x \in X$, совпадает с функцией hf на множестве F и не принимает значений ± 1 . Таким образом, функция g_1 отображает пространство X в интервал $(-1, 1)$. Наконец, положим $g(x) = h^{-1}g_1(x)$. Тогда $g: X \rightarrow \mathbf{R}^1$ непрерывна и при $x \in F$ выполнены равенства $g(x) = h^{-1}g_1(x) = h^{-1}hf(x) = f(x)$. Теорема полностью доказана. ■

2.4.2. Разбиение единицы

Носителем непрерывной функции f на топологическом пространстве X называется замыкание множества тех точек $x \in X$, где $f(x) \neq 0$. Носитель функции f обозначается через $\text{supp } f$. Таким образом, вне носителя функция f тождественно равна нулю. Одним из полезных приемов в топологии является разложение функций в сумму так, чтобы каждое из слагаемых имело достаточно малый носитель.

Теорема 4. Пусть X — метрическое пространство, $\{U_\alpha\}$ — конечное открытое покрытие. Тогда существуют такие функции $\varphi_\alpha: X \rightarrow \mathbf{R}^1$, $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$, что: а) $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$, б) $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \equiv 1$.

Система функций $\{\varphi_\alpha\}$, указанных в теореме 4, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{U_\alpha\}$* .

Доказательство. Рассмотрим конечное покрытие $\{U_\alpha\}$. Согласно теореме 3 из разд. 2.2 найдется более мелкое покрытие $\{V_\alpha\}$, причем $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$. По теореме 2 существует непрерывная функция ψ_α на пространстве X , удовлетворяющая условиям

$$\psi_\alpha|_{\bar{V}_\alpha} \equiv 1, \quad \psi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \equiv 0, \quad 0 \leq \psi_\alpha \leq 1.$$

Это значит, что $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$ и $\psi_\alpha(x) = 1$ при $x \in V_\alpha$.

Положим $\psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)$. Функция ψ непрерывна. Покажем, что $\psi(x) \geq 1$ в каждой точке $x \in X$. В самом деле, поскольку система $\{V_\alpha\}$ покрывает пространство X , то найдется такой номер α_0 , что $x \in V_{\alpha_0}$, т. е. $\psi_{\alpha_0}(x) > 0$. Тогда $\psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x) \geq \psi_{\alpha_0}(x) > 0$.

Наконец, положим $\varphi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\psi(x)$. Тогда

$$\text{supp } \varphi_\alpha = \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha, \quad 0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1,$$

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = \sum \frac{\psi_\alpha(x)}{\psi(x)} = \frac{\sum \psi_\alpha(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi(x)}{\psi(x)} \equiv 1.$$

Задачи

1. Доказать, что в теореме 2 можно требовать, чтобы функция f была гладкой, если X — евклидово пространство \mathbf{R}^n .
2. Доказать, что в теореме 4 при $X = \mathbf{R}^n$ можно требовать, чтобы функции φ_α были гладкими.
3. Для окружности построить разбиение единицы системой а) непрерывных, б) гладких функций.
4. Доказать, что для окружности не существует разбиения единицы системой аналитических функций.
5. Обобщить задачи 3, 4 на случай сферы $S^n = \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ в \mathbf{R}^{n+1} .

Глава 3

Гладкие многообразия (общая теория)

В гл. 1 на различных примерах было показано, что основным инструментом при изучении геометрических объектов является система координат, характеризующая расположение точек в пространстве. С помощью системы координат мы можем использовать для решения многих задач методы дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому в геометрии выделяют в отдельный раздел изучение таких пространств, которые допускают такие понятия, как дифференцируемые или гладкие функции, операции дифференцирования и интегрирования.

Полезно рассмотреть несколько примеров таких пространств.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости (т. е. в двумерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^2) окружность S^1 единичного радиуса. Для того чтобы описать точки окружности с помощью системы координат, зададим ее как множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (3.1)$$

где (x, y) — декартовы координаты точки на плоскости. Таким образом, каждая точка $P \in S^1$ однозначно задается парой чисел — декартовыми координатами x и y . Однако для точек окружности излишне задавать обе координаты x и y . Если нам известна координата x точки P , то вторая координата y может быть получена из уравнения (3.1): $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, т. е. вторая координата y однозначно (с точностью до знака) определяется первой координатой x . Более того, если точка $P_0 = (x_0, y_0)$ не находится на оси абсцисс, т. е. $y_0 \neq 0$, то найдется такая достаточно малая окрестность U точки P_0 , что для всех точек $P \in U$ выбор знака координаты y точки P определяется однозначно знаком координаты y_0 точки P_0 . В некотором смысле мы можем сказать, что точки на окружности S^1 описываются одним числовым параметром — ее первой декартовой координатой x . Более точно, можно утверждать, что точки, лежащие в верхней половине окружности, т. е. удовлетворяющие неравенству $y > 0$, однозначно задаются одним числовым параметром x . Аналогично, точки, лежащие в нижней половине окружности, т. е.

удовлетворяющие неравенству $y < 0$, тоже однозначно задаются одним числовым параметром x . Как для верхней половины окружности, так и для ее нижней половины область изменения параметра x одна и та же, а именно интервал вещественной оси $(-1, 1)$. Если бы мы захотели подобным же образом параметрически описывать точки окружности, включая и оставшиеся «особые» точки $P_0 = (1, 0)$ и $P_1 = (-1, 0)$, то нам бы пришлось поменять местами координаты x и y и выразить из уравнения (3.1) координату x через координату y .

Возникает вопрос: нельзя ли так ввести параметризацию точек на окружности S_1 , чтобы сразу все точки окружности однозначно задавались некоторым значением числового параметра? Наилучшим приближением к ответу на этот вопрос является угловой параметр φ , равный углу между осью абсцисс и радиус-вектором с концом в точке P . Но угловой параметр определен неоднозначно. Если же мы ограничимся значением угла φ в некотором интервале, скажем, $0 < \varphi \leq 2\pi$, то функция, сопоставляющая точке $P \in S_1$ значение углового параметра φ , будет претерпевать разрыв в точке $P_0 = (1, 0)$.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение: *на окружности S^1 (как на топологическом пространстве) не существует такой непрерывной функции, значения которой однозначно определяли бы точки окружности.*

П р и м е р 2. В качестве еще одного примера рассмотрим двумерную сферу S^2 в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Так же, как и в случае окружности, для точек сферы S^2 излишне задавать все три декартовы координаты (x, y, z) , поскольку, скажем, координату z можно выразить через первые две: $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Ясно, что на верхней (и, аналогично, на нижней) полусфере, координата z точки P однозначно восстанавливается по ее первым двум координатам x и y .

Можно показать, что и в случае двумерной сферы невозможно найти две непрерывные функции на сфере S^2 , по значениям которых точка P на сфере восстанавливалась бы однозначно.

Рассмотренные примеры показывают, что мы имеем только один выход — отказаться от попытки построения системы координат, единой для всех точек рассматриваемого пространства, и довольствоваться для различных частей пространства своей системой координат. Страгое описание этой конструкции привело к введению специального понятия в геометрии — многообразия.

3.1. ПОНЯТИЕ МНОГООБРАЗИЯ

3.1.1. Основные определения

Метрическое пространство M называется *n-мерным многообразием* (или просто *многообразием*), если каждая его точка P содержится в окрестности $U \subset M$, гомеоморфной некоторой области V евклидова пространства \mathbf{R}^n . Это условие кратко формулируют следующим образом: *n-мерное многообразие M локально гомеоморфно области в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n* . При этом говорят, что *размерность многообразия M равна n* и записывают $\dim M = n$. Таким образом, если M — *n-мерное многообразие*, то в пространстве M можно указать систему открытых множеств $\{U_\alpha\}$, занумерованных некоторым (конечным или бесконечным) множеством индексов i , и гомеоморфизмы $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbf{R}^n$ множеств U_α на области V_α . При этом система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ должна покрывать пространство M : $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Области V_α могут, вообще говоря, пересекаться между собой. Множество U_α вместе с гомеоморфизмом φ_α называется *картой*.

Фиксируем в пространстве \mathbf{R}^n некоторую декартову систему координат (x^1, \dots, x^n) , как систему линейных функций на \mathbf{R}^n . Тогда композиции $x^k = x^k(P) = x^k(\varphi_\alpha(P))$, $P \in U_\alpha$, задают систему функций на открытом множестве U_α , которая называется локальной системой координат на карте U_α .

Совокупность карт $\{U_\alpha\}$, покрывающая все многообразие M , называется *атласом карт*.

Удобно локальные координаты точки $P \in M$ нумеровать дополнительным индексом, нумерующим саму карту U_α : $x_\alpha^k = x_\alpha^k(P)$. Поскольку точка P может принадлежать одновременно нескольким картам, то она приобретает несколько наборов локальных координат.

Рассмотрим простейшие примеры многообразий.

Пример 1. Во введении была рассмотрена окружность $S^1 \subset \mathbf{R}^2$, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Покроем S^1 атласом, состоящим из четырех карт (рис. 3.1)

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}, & U_2 &= \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}, \\ U_3 &= \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}, & U_4 &= \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}. \end{aligned}$$

Соответствующие им области V_1, V_2, V_3, V_4 на вещественной прямой \mathbf{R}^1 совпадают и равны открытыму интервалу $(-1, 1)$. Гомеоморфизмы φ_1 и φ_2 построим как проекции окружности на ось абсцисс: $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = x$, а гомеоморфизмы φ_3, φ_4 — как проекции на ось ординат: $\varphi_3(x, y) = \varphi_4(x, y) = y$. Чтобы доказать, что

отображения φ_k , $k = 1, \dots, 4$, являются гомеоморфизмами, достаточно в явном виде записать формулы для обратных отображений:

$$\varphi_1^{-1}(x) = (x, \sqrt{1-x^2}) \in S^1, \quad \varphi_2^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}) \in S^1,$$

$$\varphi_3^{-1}(y) = (\sqrt{1-y^2}, y) \in S^1, \quad \varphi_4^{-1}(y) = (-\sqrt{1-y^2}, y) \in S^1$$

и убедиться, что обратные отображения непрерывны. Тогда на окружности получаются четыре локальные системы координат, каждая из которых состоит из одной координаты: $x_1 = \varphi_1(x, y) = x$, $x_2 = \varphi_2(x, y) = x$, $x_3 = \varphi_3(x, y) = y$, $x_4 = \varphi_4(x, y) = y$. Некоторые точки снабжены сразу двумя локальными системами координат. Так, например, для точек P пересечения $U_1 \cap U_3$ определены координаты $x_1(P)$ и $x_3(P)$ (рис. 3.2).

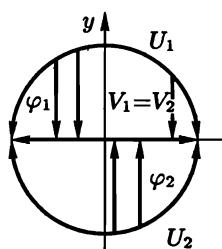


Рис. 3.1

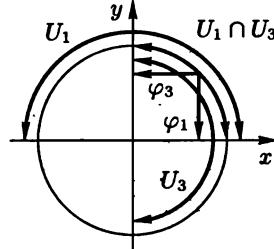
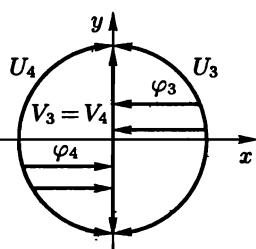


Рис. 3.2

Существуют и другие способы введения атласа карт на окружности. В гл. 1 были рассмотрены полярные координаты (r, φ) на плоскости. Уравнение окружности в полярных координатах имеет простой вид: $r = 1$. Строго говоря, полярные координаты на плоскости не являются системой координат (см. гл. 1). Поэтому на окруж-

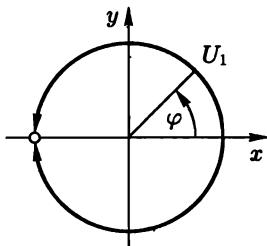


Рис. 3.3

ности S^1 введем карты $U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x \neq -1\}$, $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : x \neq 1\}$ (рис. 3.3). Положим $\varphi_1(P) = \varphi_1(x, y)$ равным значению угла φ , лежащему в промежутке $(-\pi, \pi)$, а $\varphi_2(P) = \varphi_2(x, y)$ —

равным значению углу φ , лежащему в промежутке $(0, 2\pi)$, т. е. $V_1 = (-\pi, \pi)$, $V_2 = (0, 2\pi)$. Ясно, что локальные координаты $\varphi_1 = \varphi_1(P)$ и $\varphi_2 = \varphi_2(P)$ совпадают для точек верхней полуокружности и не совпадают для точек нижней полуокружности, т. е. $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y)$ при $y > 0$, $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) - 2\pi$ при $y < 0$ (рис. 3.4).

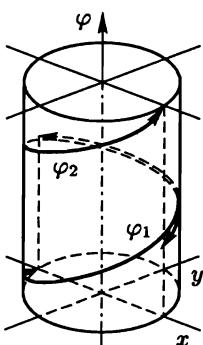


Рис. 3.4

Пример 2. Окружность S^1 , рассмотренная в примере 1, представляет собой уже довольно сложное многообразие. Простейшим примером является само евклидово пространство \mathbf{R}^n . Атлас карт можно взять состоящим всего лишь из одной карты $U = \mathbf{R}^n$, координатный гомеоморфизм φ — это тождественное отображение $\varphi: U \rightarrow V = \mathbf{R}^n$, локальная система координат — это декартовы координаты точек в \mathbf{R}^n . Аналогично, любая область $U \subset \mathbf{R}^n$ является n -мерным многообразием, атлас карт которого тоже состоит из одной карты с декартовой системой координат.

Пример 3. Рассмотрим n -мерную сферу S^n единичного радиуса, задаваемую как множество точек в \mathbf{R}^{n+1} , удовлетворяющих уравнению $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1$. Покажем, что n -мерная сфера является n -мерным многообразием. В качестве атласа карт возьмем открытые множества

$$U_i^+ = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n : x^i < 0\}.$$

Координатные гомеоморфизмы φ_i^+ , φ_i^- определим как ограничения проекций евклидова пространства \mathbf{R}^{n+1} на \mathbf{R}^n вдоль координаты x^i .

Тогда области V_i^+ и V_i^- совпадают друг с другом и равны шару единичного радиуса.

Пример 4. Рассмотрим проективную плоскость \mathbf{RP}^2 . Мы ее будем представлять как пространство, точками которого объявлены всевозможные прямые, проходящие через начало координат в \mathbf{R}^3 . Определим расстояние между двумя прямыми как меньший угол между ними. Тогда \mathbf{RP}^2 превращается в метрическое пространство. Покажем, что \mathbf{RP}^2 является 2-мерным многообразием. Для этого удобно каждую прямую $P \in \mathbf{RP}^2$ задавать тремя однородными координатами $(x: y: z)$, которые разрешается умножать на одно и то же число $\lambda \neq 0$. Однородные координаты не обращают-

ся в нуль одновременно, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 > 0$. Покроем \mathbf{RP}^2 тремя картами: $U_1 = \{(x: y: z): x \neq 0\}$, $U_2 = \{(x: y: z): y \neq 0\}$, $U_3 = \{(x: y: z): z \neq 0\}$. Пусть $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbf{R}^2$. В качестве координатных гомеоморфизмов возьмем отображения $\varphi_k: U_k \rightarrow V_k = \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x: y: z) &= (y/x, z/x), \quad \varphi_2(x: y: z) = (x/y, z/y), \\ \varphi_3(x: y: z) &= (x/z, y/z).\end{aligned}$$

Таким образом, мы построили три локальные системы координат:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= y/x, \quad x_1^2 = z/x; \quad x_2^1 = x/y, \quad x_2^2 = z/y; \\ x_3^1 &= x/z, \quad x_3^2 = y/z.\end{aligned}$$

Рассмотренные примеры показывают, что в одном и том же многообразии M можно фиксировать различные атласы карт. Даже если карты как открытые множества оставить неизменными, можно менять локальную систему координат в карте путем выбора другого координатного гомеоморфизма. Если $U' \subset U$ — открытое подмножество в карте U , то, ограничивая координатные функции на подмножество U' , получаем новую карту, более мелкую, чем карта U .

Пусть $\{U_\alpha\}$, $\{U'_\beta\}$ — два атласа карт на многообразии M . Тогда существует третий атлас карт, измельчающий как $\{U_\alpha\}$, так и атлас $\{U'_\beta\}$. Этот новый атлас можно, например, составить из попарных пересечений карт исходных двух атласов.

3.1.2. Функции замены координат.

Определение гладкого многообразия

Определение 1. Пусть M — n -мерное многообразие, $\{U_\alpha\}$ — его атлас карт, φ_α — координатные гомеоморфизмы, $\{x_\alpha^k\}$ — набор локальных систем координат. В каждом пересечении $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ двух карт определены две локальные системы координат, $\{x_\alpha^k\}$ и $\{x_\beta^k\}$, причем координатные функции $x_\alpha^k(P)$ одной карты функционально выражаются через координатные функции $x_\beta^k(P)$ другого атласа, $x_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(x_\beta^1(P), \dots, x_\beta^n(P))$, $P \in U_{\alpha\beta}$. Функции $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ называются *функциями замены координат* или *функциями перехода от координат $\{x_\alpha^k\}$ к координатам $\{x_\beta^k\}$* .

Функции замены координат определены не во всей области V_β , а в ее некоторой части $V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$, там, где имеет смысл говорить сразу о двух системах координат.

На рис. 3.5 для удобства области V_α и V_β в евклидовом пространстве показаны как непересекающиеся множества. Функции

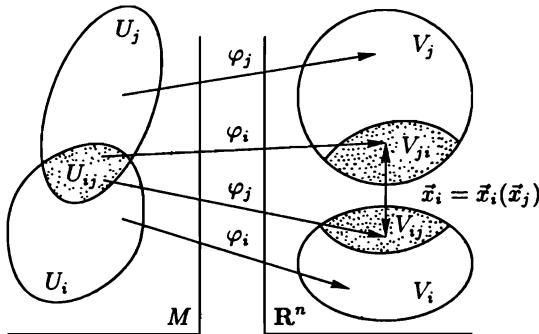


Рис. 3.5

замены координат $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ осуществляют совместное отображение области $V_{\beta\alpha}$ в область $V_{\alpha\beta}$, лежащие в \mathbb{R}^n :

$$x_\alpha = \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}(x_\beta) = \varphi_{\alpha\beta}(x_\beta).$$

Определение 2. Гладким n -мерным многообразием называется n -мерное многообразие M , на котором фиксирован атлас карт $\{U_\alpha\}$ с локальными системами координат $\{x_\alpha^k\}$, удовлетворяющими условию: функции замены координат $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для любой пары карт U_α и U_β и во всей области их определения.

Определение 3. Функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенная на гладком многообразии M , называется непрерывно дифференцируемой функцией в точке $P_0 \in M$, если в любой локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ (карты $U_\alpha \ni P_0$ из фиксированного атласа карт) функция f представляется в виде непрерывно дифференцируемой функции $h(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ от n независимых переменных в окрестности точки $(x_\alpha^1(P_0), \dots, x_\alpha^n(P_0))$.

П р и м е р 5. Рассмотрим следующий пример атласа карт на многообразии M . Пусть $M = \mathbb{R}^1$ — вещественная прямая, атлас карт состоит из двух одинаковых карт $U_1 = U_2 = M = \mathbb{R}^1$, но с различными системами координат. На U_1 зададим координату $x_1 = x$, $x \in \mathbb{R}^1$, а на U_2 координату зададим формулой $x_2 = x^3$. Тогда функции замены координат имеют вид

$$x_2 = x_2(x_1) = (x_1)^3, \quad (3.2)$$

$$x_1 = x_1(x_2) = \sqrt[3]{x_2}. \quad (3.3)$$

Если функция замены координат (3.2) является непрерывно дифференцируемой функцией (многочлен!), то функция (3.3) имеет

разрывную производную. Поэтому согласно определению 2 многообразие M с атласом карт $\{U_1, U_2\}$ не является гладким многообразием.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если атлас карт на многообразии M состоит из одной карты (т. е. M гомеоморфно области в евклидовом пространстве), то M является гладким многообразием.

Определение 4. Пусть на многообразии M заданы два атласа карт, $\{U_\alpha\}$ и $\{U'_\beta\}$, и по отношению к каждому из них M является гладким многообразием. Два атласа карт, $\{U_\alpha\}$ и $\{U'_\beta\}$, называются *эквивалентными*, если функции перехода от каждой локальной системы координат в атласе $\{U_\alpha\}$ в каждую локальную систему координат в атласе $\{U'_\beta\}$ являются непрерывно дифференцируемыми.

Определение 4 оправдывается тем, что *всякая функция f на многообразии M является непрерывно дифференцируемой в атласе $\{U_\alpha\}$ тогда и только тогда, когда она непрерывно дифференцируема в атласе $\{U'_\beta\}$.* Таким образом, с точки зрения непрерывно дифференцируемых функций на многообразии M эквивалентные атласы карт равноправны, и для представления функций в виде непрерывно дифференцируемых вещественнонозначных функций от независимых переменных (координат точки) можно пользоваться любыми из эквивалентных атласов карт.

Напомним, что вещественнонозначная функция $h(x^1, \dots, x^n)$ имеет класс гладкости C^r в окрестности (x_0^1, \dots, x_0^n) , если в окрестности этой точки существуют и непрерывны все частные производные функции h до порядка r включительно. В случае $r = \infty$ это означает, что существуют и непрерывны частные производные функции h во всех порядков.

Определение 5. Многообразие M с фиксированным атласом карт $\{U_\alpha\}$ называется *гладким многообразием класса C^r* , если все функции замены координат являются функциями класса гладкости C^r во всех точках области их определения.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только многообразия класса C^∞ , а функции на многообразии — класса гладкости C^∞ .

П р и м е р 6. Модифицируем пример 5. Выберем координату во второй карте U_2 равной $x_2 = x + x|x|$. Тогда многообразие M является гладким многообразием класса C^1 , но не является гладким многообразием класса C^2 .

В примерах 1–4 рассмотрены многообразия с такими атласами карт, что эти многообразия автоматически являются гладкими многообразиями класса C^∞ .

В геометрии рассматриваются и другие, более сильные условия на атласы карт и их функции замены координат. Так, если все функции замены координат являются вещественно аналитическими функциями, т. е. в окрестности каждой точки их определения разлагаются в сходящиеся ряды Тейлора, то само многообразие называется *вещественно аналитическим многообразием*. Вещественно аналитическое многообразие является гладким многообразием класса C^∞ .

Более важный класс многообразий — комплексно аналитические многообразия. Пусть M — $2n$ -мерное многообразие, $\{U_\beta\}$ — атлас его карт, $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow V_\beta \subset \mathbb{R}^{2n}$ — его координатные гомеоморфизмы. Отождествим $2n$ -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^{2n} с n -мерным комплексным линейным пространством \mathbb{C}^n , считая, что комплексные координаты точки (z^1, \dots, z^n) дают $2n$ вещественных координат $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, $z^k = x^k + iy^k$. Тогда $2n$ координатных функций $x_\beta^1(P), \dots, x_\beta^n(P), y_\beta^1(P), \dots, y_\beta^n(P)$ в карте U_β превращаются в n комплекснозначных функций $z_\beta^k(P) = x_\beta^k(P) + iy_\beta^k(P)$. Функции $z_\beta^k(P)$ мы назовем комплексными координатами точки в карте U_β . На пересечении двух карт $U_\beta \cap U_\gamma$ мы имели функции перехода из одной системы координат в другую в виде

$$\begin{aligned} x_\beta^k &= x_\beta^k(x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^n, y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n), \\ y_\beta^k &= y_\beta^k(x_\gamma^1, \dots, x_\gamma^n, y_\gamma^1, \dots, y_\gamma^n), \end{aligned}$$

которые можно представить как комплекснозначные функции от n независимых комплексных переменных:

$$z_\beta^k = z_\beta^k(z_\gamma^1, \dots, z_\gamma^n). \quad (3.4)$$

Функции (3.4) мы назовем функциями перехода или функциями замены комплексных координат.

Многообразие M с фиксированным атласом карт $\{U_\beta\}$ и локальными системами комплексных координат $(z_\beta^1, \dots, z_\beta^n)$ называется *комплексно аналитическим многообразием*, если все функции замены комплексных координат (3.4) являются комплексно аналитическими функциями, т. е. разлагаются в сходящиеся ряды Тейлора комплексных переменных в окрестности каждой точки своей области определения.

В качестве примера многообразия, допускающего структуру комплексно аналитического многообразия, рассмотрим двумерную сферу S^2 и специальным образом построим на ней атлас карт. В гл. 1 была построена стереографическая проекция сферы $S^2 =$

$= \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ из северного полюса $P_0 = (0, 0, 1)$ на координатную плоскость (x, y) . Обозначим это отображение через φ_0 . Отображение φ_0 отображает все точки сферы S^2 , за исключением полюса P_0 , т. е. открытое множество $U_0 = S^2 \setminus P_0$ гомеоморфно на всю плоскость $V_0 = \mathbf{R}^2$. В декартовых координатах гомеоморфизм φ_0 имеет вид $\varphi_0(x, y, z) = (x/(1-z), y/(1-z))$. Поэтому введем в карте U_0 одну комплексную координату $w_0 = (x+iy)/(1-z)$, выраженную через декартовы координаты точки на сфере. Кроме этого, рассмотрим южный полюс $P_1 = (0, 0, -1)$ и стереографическую проекцию φ_1 из южного полюса на ту же координатную плоскость (x, y) . Отображение φ_1 гомеоморфно отображает множество $U_1 = S^2 \setminus P_1$ на всю плоскость $V_1 = \mathbf{R}^2$. В декартовых координатах гомеоморфизм φ_1 имеет вид $\varphi_1(x, y, z) = (x/(1+z), y/(1+z))$. Введем в карте U_1 комплексную координату $w_1 = (x-iy)/(1+z)$. Тогда на пересечении $U_0 \cap U_1$ получаем $w_0 w_1 = (x^2 + y^2)/(1-z^2) \equiv 1$. Следовательно,

$$w_0 = w_0(w_1) = 1/w_1, \quad w_1 = w_1(w_0) = 1/w_0. \quad (3.5)$$

Функции (3.5) являются комплексно аналитическими функциями. Значит, сфера S^2 является комплексно аналитическим многообразием.

3.1.3. Гладкие отображения. Диффеоморфизм

Пусть M_1 и M_2 — два гладких многообразия, $f: M_1 \rightarrow M_2$ — непрерывное отображение.

Определение 6. Отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладких многообразий называется *гладким отображением* класса C^r , если для любых локальных систем координат (x^1, \dots, x^n) в окрестности любой точки $P_0 \in M_1$ и (y^1, \dots, y^m) в окрестности точки $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ представление функции f в виде вектор-функции $\mathbf{y} = (y^k) = (h^k(x^1, \dots, x^n)) = h(\mathbf{x})$ является вектор-функцией класса гладкости C^r .

Отметим, что определение гладкого отображения класса гладкости C^r имеет смысл только в том случае, когда классы гладкости многообразий M_1 и M_2 не меньше, чем r .

Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гомеоморфизм многообразий. Если f является гладким отображением класса C^r , то обратное отображение f^{-1} не обязано быть гладким отображением. В случае, когда обратное отображение $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ тоже является гладким отображением класса C^r , гомеоморфизм f называют *гладким гомеоморфизмом класса C^r* или *дiffeоморфизмом класса C^r* . Дiffeоморфизмы гладких многообразий Если $f: M_1 \rightarrow M_2$ — дiffeоморфизм, то

многообразия M_1 и M_2 называются диффеоморфными многообразиями.

Теорема 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкий гомеоморфизм класса C^r ($r \geq 1$) гладких многообразий. Тогда $\dim M_1 = \dim M_2$.

Доказательство. Выберем локальные координаты (x^1, \dots, x^n) на многообразии M_1 и локальные координаты (y^1, \dots, y^m) на многообразии M_2 в окрестности V_0 точки Q_0 . Пусть $g = f^{-1}$ — обратное к f отображение. Тогда отображения f и g представляются в виде двух вектор-функций, которые мы обозначим теми же буквами, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, причем $g(f(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{x}$, $f(g(\mathbf{y})) \equiv \mathbf{y}$. Другими словами, для функций f и g выполнены равенства

$$gf = Id_x, \quad fg = Id_y,$$

где Id_x, Id_y — тождественные отображения векторных пространств. Значит, и для матриц Якоби выполняются аналогичные равенства

$$(dg)(df) = E_x, \quad (df)(dg) = E_y,$$

где E_x, E_y — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Из линейной же алгебры известно, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Поскольку $\text{rank } dh \leq \min(m, n)$, $\text{rank } dh^{-1} \leq \min(m, n)$ (матрицы dh и dh^{-1} — прямоугольные!), то $\text{rank } de_0 \leq \min(m, n)$, $\text{rank } de_1 \leq \min(m, n)$. Следовательно, $m \leq \min(m, n)$, $n \leq \min(m, n)$, или $\max(m, n) \leq \min(m, n)$, что и означает, что $m = n$. Теорема доказана. ■

В заключение приведем два полезных утверждения об атласах карт.

Лемма 1. В гладком многообразии M существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$, что каждая карта U_α диффеоморфна \mathbb{R}^n .

Доказательство. Сначала покажем, что можно построить такой атлас карт, чтобы каждая карта была диффеоморфна открытому шару некоторого радиуса ε в \mathbb{R}^n . Пусть $P_0 \in M$ — произвольная точка, $U_\alpha \ni P_0$, $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ — координатный гомеоморфизм, $Q_0 = \varphi_\alpha(P_0)$. Поскольку V_α — открытое множество в \mathbb{R}^n , то найдется такое число ε , что открытый шар радиуса ε с центром в точке Q_0 лежит в V_α . Обозначим этот шар через $O_\varepsilon(Q_0)$, а его прообраз $\varphi_\alpha^{-1}(O_\varepsilon(Q_0))$ — через W_P . Семейство открытых множеств $\{W_P\}$ является атласом карт на многообразии M , и каждая карта W_P диффеоморфна открытому шару в \mathbb{R}^n . Чтобы завершить доказательство леммы, покажем, что открытый шар радиуса ε диффеоморфен \mathbb{R}^n . Достаточно рассмотреть случай $\varepsilon = 1$. Итак, пусть (x^1, \dots, x^n) — точка в шаре радиуса 1, $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1$. Положим

$$\begin{aligned} y^k &= \frac{x^k}{\sqrt{1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}}, \\ x^k &= \frac{y^k}{\sqrt{1 + (y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Функции (3.6) являются гладкими и осуществляют взаимно обратное отображения шара радиуса 1 и \mathbf{R}^n . ■

Лемма 2. Пусть M — гладкое компактное многообразие, $\{U_\alpha\}$ — атлас карт на нем. Тогда существует гладкое разбиение единицы ψ_α , подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$, т. е.

$$0 \leq \psi_\alpha \leq 1, \quad \sum \psi_\alpha = 1, \quad \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha.$$

Доказательство. Достаточно считать на основании леммы 1, что все карты гомеоморфны шару радиуса 1. Пусть $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow D_1^n \subset \mathbf{R}^n$ — координатные гомеоморфизмы. (Здесь D_r^n — открытый шар радиуса r с центром в начале координат.) Выберем такое достаточно малое $\varepsilon > 0$, чтобы $\varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$ покрывали многообразие M . Допустим, что существует такая гладкая функция f класса C^∞ на шаре D_1^n , что $\text{supp } f = D_{(1-\varepsilon)}^n$, $0 \leq f \leq 1$. Положим

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_\alpha(P) &= 0, \quad \text{если } P \notin U_\alpha, \\ f(\varphi_\alpha(P)), &\quad \text{если } P \in U_\alpha. \end{aligned}$$

Поскольку $f(\varphi_\alpha(P)) = 0$ при $P \notin \varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$, то функции $\bar{\psi}_\alpha$ гладкие на многообразии M , причем $\text{supp } \bar{\psi}_\alpha \subset U_\alpha$, $0 \leq \bar{\psi}_\alpha \leq 1$. Более того, $\text{supp } \psi_\alpha \supset \varphi_\alpha^{-1}(D_{(1-\varepsilon)}^n)$. Следовательно, сумма функций $\bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}(P) = \sum_i \bar{\psi}_\alpha(P)$ строго больше нуля в каждой точке. Тогда положим $\psi_\alpha(P) = \bar{\psi}_\alpha(P)/\bar{\psi}(P)$. Функции $\psi_\alpha(P)$ образуют гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$.

Таким образом, нам осталось построить такую функцию f класса C^∞ в \mathbf{R}^n , чтобы ее носителем был шар $D_{(1-\varepsilon)}^n$. Будем искать функцию f в виде $f(x^1, \dots, x^n) = h((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)$. Следовательно, достаточно построить гладкую функцию одной переменной $h(x)$, чтобы выполнялись условия: $h(x) = 0$ при $x > (1 - \varepsilon)^2$ и $h(x) > 0$ при $x < (1 - \varepsilon)^2$. В качестве h возьмем функцию

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-1/(x-(1-\varepsilon)^2)^2} & x < (1 - \varepsilon)^2, \\ &0, & x \geq (1 - \varepsilon)^2, \end{aligned}$$

которая, как известно, является гладкой класса C^∞ . ■

Задачи

1. Доказать, что пространство расположений жесткого отрезка на плоскости является гладким многообразием.
2. Доказать, что группа $\text{SO}(3)$ гомеоморфна трехмерному проективному пространству.
3. Описать конфигурационное пространство системы из двух шарнирно соединенных стержней в трехмерном пространстве.
4. Привести пример гладкого взаимно однозначного отображения, не являющегося диффеоморфизмом.
5. Показать, что на сфере S^n не существует атласа, состоящего из одной карты.

3.2. ЗАДАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ УРАВНЕНИЯМИ

Ранее многие примеры многообразий возникали в виде множества решений некоторого нелинейного уравнения, заданного в евклидовом пространстве. Так, например, n -мерная сфера S^n задается уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = 1$ в евклидовом пространстве \mathbf{R}^{n+1} ; псевдосфера S_1^2 задается уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Вообще, если $f(x^1, \dots, x^n)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то множество решений уравнения $f(x^1, \dots, x^n) = -c$ называется *многообразием уровня с функцией* f . Таким образом, все евклидово пространство \mathbf{R}^n разлагается в объединение многообразий уровня функций f . В случае функции двух переменных решения уравнения обычно называют *линиями уровня* функции f , а в случае функции трех переменных — *поверхностями уровня*. Чтобы оправдать название «многообразие уровня функции f » необходимо было бы доказать, что многообразие уровня функции f действительно является многообразием. Однако это не всегда так.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ее линии уровня описываются уравнением $x^2 - y^2 = c$. Если $c > 0$, то линия уровня состоит из двух компонент связности, каждая из которых может быть описана одним из уравнений $x = \sqrt{c + y^2}$, $x = -\sqrt{c + y^2}$, т. е. является графиком функции одной переменной (рис. 3.6). Аналогично, при $c < 0$ линия уровня состоит из графиков двух функций: $y = \sqrt{x^2 - c}$, $y = -\sqrt{x^2 - c}$.

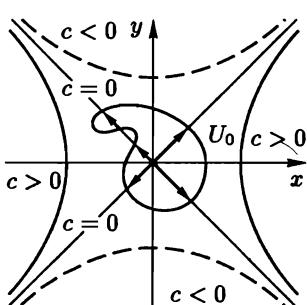


Рис. 3.6

функции одной переменной (рис. 3.6). Аналогично, при $c < 0$ линия уровня состоит из графиков двух функций: $y = \sqrt{x^2 - c}$, $y = -\sqrt{x^2 - c}$.

$= -\sqrt{x^2 - c}$. Таким образом, при $c \neq 0$ линии уровня являются одномерными многообразиями. Особый случай представляет линия уровня при $c = 0$. В этом случае линия уровня состоит из пары пересекающихся прямых: $x = y$, $x = -y$, и не является многообразием.

Тем не менее в некотором смысле почти всегда многообразия уровня непрерывно дифференцируемой функции f являются многообразиями.

Теорема 1. Пусть $f = f(x^1, \dots, x^n)$ — функция класса C^∞ , определенная во всем евклидовом пространстве \mathbf{R}^n . Положим $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) : f(x^1, \dots, x^n) = c\}$. Если градиент функции f отличен от нуля в каждой точке множества M_c , то M_c является гладким $(n-1)$ -мерным многообразием класса C^∞ . При этом в окрестности каждой точки $P_0 \in M_c$ в качестве локальных координат можно взять некоторые $n-1$ декартовых координат объемлющего евклидова пространства \mathbf{R}^n .

Доказательство. По сути дела теорема 1 является теоремой о неявной функции, сформулированной в удобных для нас терминах. Фиксируем некоторую точку $P_0 \in M_c$, $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Поскольку

$$\operatorname{grad}_{P_0} f \neq 0, \quad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right),$$

то найдется отличная от нуля в точке P_0 частная производная. Без ограничения общности мы можем считать, что $\partial f(x_0^1, \dots, x_0^n)/\partial x^n \neq 0$. Пусть $Q_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ — точка в \mathbf{R}^{n-1} , являющаяся образом точки P_0 при проекции вдоль координатной оси x^n .

Согласно теореме о неявной функции существуют такая окрестность $V_0 \ni Q_0$ точки Q_0 , интервал $(x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ и такая непрерывная функция $y = y(x^1, \dots, x^{n-1})$ класса гладкости C^∞ , определенная в окрестности V_0 , что:

a) $f(x^1, \dots, x^{n-1}, y(x^1, \dots, x^{n-1})) \equiv c$ в области V_0 ;

б) $x_0^n = y(x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$;

в) $|x_0^n - y(x^1, \dots, x^{n-1})| < \delta$ в области V_0 ;

г) всякое решение $(x^1, \dots, x^n) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$ уравнения $f(x^1, \dots, x^n) = c$ имеет вид $x^n = y(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Тогда через U_0 обозначим окрестность точки $P_0 \in M_c$, равную $U_0 = M_c \cap (V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta))$. Окрестность U_0 и будет искомой картой, содержащей точку P_0 . В качестве координатного гомеоморфизма φ_0 возьмем ограничение на U_0 проекции \mathbf{R}^n в \mathbf{R}^{n-1} , $\varphi_0(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^{n-1}) \in V^0$. Обратное отображение φ_0^{-1}

зададим равенством

$$\varphi_0^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) = (x^1, \dots, x^{n-1}, y(x^1, \dots, x^{n-1})).$$

Из условия в) следует, что $\varphi_0^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) \in V_0 \times (x_0^n - \delta, x_0^n + \delta)$, а из условия а), что $\varphi_0^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) \in M_c$. Таким образом, $\varphi_0^{-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) \in U_0$. Отображения φ_0 и φ_0^{-1} непрерывны и взаимно обратны.

Мы доказали, что множество M_c является $(n-1)$ -мерным многообразием, и указали в окрестности каждой точки $P_0 \in M_c$ локальную систему координат, составленную из некоторых декартовых координат евклидова пространства \mathbf{R}^n . Докажем теперь, что функции замены координат являются гладкими функциями. Пусть точка P_0 содержится еще в одной карте U_1 и в качестве локальных координат в карте U_1 взяты декартовы координаты $x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n$. Тогда на пересечении карт $U_0 \cap U_1$ координаты $x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n$ выражаются через координаты x^1, \dots, x^{n-1} как функции следующим образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1, \\ &\dots, \\ x^{n-1} &= x^{n-1}, \\ x^n &= y(x^1, \dots, x^{n-1}). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Поскольку функция $y = y(x^1, \dots, x^{n-1})$ имеет класс гладкости C^∞ , то и все функции (3.7) будут класса гладкости C^∞ . Теорема 1 полностью доказана. ■

Пример 2. Снова рассмотрим n -мерную сферу S^n , заданную уравнением $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (x^k)^2 = 1$. Градиент функции f равен $\text{grad } f = (2x^1, 2x^2, \dots, 2x^{n+1})$. Если точка $P = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1})$ лежит на сфере S^n , то не все ее координаты обращаются в нуль; следовательно, одна из координат градиента отлична от нуля. Выполнены условия теоремы 1, и, значит, сфера S^n является гладким многообразием класса C^∞ .

Пример 3. Рассмотрим евклидово пространство \mathbf{R}^{n^2} размерности n^2 . Будем представлять точки пространства \mathbf{R}^{n^2} в виде квадратных матриц A порядка n с координатами $A = (a_{ij})$. Рассмотрим множество $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ всех матриц $A \in \mathbf{R}^{n^2}$, детерминант которых равен единице: $\det A = 1$. Множество $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ является группой относительно операции умножения матриц и называется *специальной линейной группой*. Покажем, что группа $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ является гладким многообразием класса C^∞ и размерности $n^2 - 1$.

Рассмотрим функцию f от n^2 переменных $f(a_{ij}) = \det(a_{ij})$. Функция f является многочленом, и, значит, имеет класс гладкости C^∞ . Чтобы применить теорему 1, следует вычислить градиент функции f во всех точках группы $\text{SL}(n, \mathbf{R})$. Пусть E — единичная матрица. Поскольку $\det E = 1$, то $E \in \text{SL}(n, \mathbf{R})$.

Вычислим градиент функции f в точке E . Для этого разложим сначала $\det A$ по первой строке:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}. \quad (3.8)$$

В разложении (3.8) стоят детерминанты матриц A_{1k} , которые являются многочленами всех переменных a_{ij} , кроме элементов первой строки. Тогда частная производная функции f по переменной a_{11} имеет вид $\partial f / \partial a_{11} = \partial(\det A_{11}) / \partial a_{11} = \det A_{11}$. В точке E получаем

$$\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(E) = 1. \quad (3.9)$$

Таким образом, градиент функции f в точке E отличен от нуля.

Покажем теперь, что в произвольной точке $A_0 \in \text{SL}(n, \mathbf{R})$ градиент функции f тоже отличен от нуля. Введем новые переменные b_{ij} , задаваемые равенством $(b_{ij}) = B = A_0^{-1}A = A_0^{-1}(a_{ij})$. Если $A = A_0$, то $B = E$. Тогда

$$f(A) = f(A_0B) = \det(A_0B) = \det A_0 \det B = f(B).$$

Тогда, дифференцируя суперпозицию функций, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A_0) \frac{\partial a_{ij}}{\partial b_{11}}. \quad (3.10)$$

Левая часть равенства (3.10) равна единице согласно формуле (3.9). Следовательно, в правой части хотя бы одно слагаемое отлично от нуля. Значит, одна из частных производных $\partial(A_0)/\partial a_{ij}$, а вместе с ней и градиент функции f отличны от нуля. Таким образом, выполнены условия теоремы 1, и, значит, группа $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ является гладким многообразием размерности $n^2 - 1$.

Теорема 1 легко обобщается на случай систем нелинейных уравнений. Заметим, что условие теоремы 1 можно сформулировать следующим образом. Градиент функции f представится в виде столбца частных производных функции f , и, значит, является матрицей Якоби функции f . Тогда условие нетривиальности градиента f в некоторой точке $P_0 \in \mathbf{R}^n$ эквивалентно тому, что ранг матрицы Якоби df функции f равен единице, т. е. максимальен.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{aligned} f^1(x^1, \dots, x^n) &= c^1, \\ \dots &\dots \\ f^k(x^1, \dots, x^n) &= c^k, \end{aligned} \tag{3.11}$$

которую кратко можно записать в виде $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{c} = (c^1, \dots, c^k) \in \mathbf{R}^k$, а f — отображение, определяемое функциями (f^1, \dots, f^k) . Множество M_c решений системы (3.11) будем называть многообразием уровня системы функций (f^1, \dots, f^k) .

Теорема 2. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ — отображение класса гладкости C^∞ , M_c — множество решений системы уравнений $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$. Если ранг матрицы Якоби отображения f максимальен в каждой точке $P_0 \in M_c$ (т. е. $\text{rank } df(P_0) = k$), то M_c является $(n-k)$ -мерным гладким многообразием класса C^∞ . При этом в окрестности каждой точки $P_0 \in M_c$ в качестве локальных координат можно взять некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего евклидова пространства \mathbf{R}^n .

Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1 с той лишь разницей, что вместо одной переменной x^n выделяется k переменных x^{i_1}, \dots, x^{i_k} . Обозначив эту группу переменных одной буквой, скажем, $\mathbf{y} = (x^{i_1}, \dots, x^{i_k})$, мы будем получать те же формулы, что и в доказательстве теоремы 1. ■

Пример 4. Рассмотрим в евклидовом пространстве \mathbf{R}^4 с координатами x^1, x^2, x^3, x^4 систему двух уравнений

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \tag{3.12}$$

Соответствующие им функции f_1 и f_2 имеют вид

$$\begin{aligned} f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1)^2 + (x^2)^2, \\ f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^3)^2 + (x^4)^2. \end{aligned}$$

Чтобы применить теорему 2, вычислим матрицу Якоби отображения $f = (f^1, f^2)$:

$$df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^2} & \frac{\partial f^1}{\partial x^3} & \frac{\partial f^1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1} & \frac{\partial f^2}{\partial x^2} & \frac{\partial f^2}{\partial x^3} & \frac{\partial f^2}{\partial x^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^1 & 2x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x^3 & 2x^4 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\text{rank } df \leq 1$ только в том случае, когда одна из строк матрицы Якоби равна нулю, что невозможно в точках решения

системы (3.12). Таким образом, решения системы (3.12) образуют гладкое двумерное многообразие класса C^∞ . Поскольку система (3.12) распадается на два уравнения, каждое от своей группы переменных, то и множество решений можно представить в виде декартова произведения решений каждого уравнения в отдельности, т. е. решения системы (3.11) представляются в виде произведения двух экземпляров окружности. Это многообразие называется (двумерным) *тором*.

3.3. КАСАТЕЛЬНЫЕ ВЕКТОРЫ. КАСАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В гл. 1 мы видели, что для изучения метрических свойств кривых и поверхностей и вообще метрических свойств областей евклидового пространства важную роль играют так называемые инфинитезимальные свойства пространств. Это такие свойства, которые определяются в очень малой окрестности фиксированной точки P путем пренебрежения величинами большего порядка малости, чем расстояние до точки P . В математическом анализе существуют аналогичные процедуры пренебрежения бесконечно малыми величинами при изучении поведения функции в окрестности некоторой точки. При изучении гладких многообразий тоже возникает естественное желание осуществлять процедуру пренебрежения бесконечно малыми величинами. Один из таких способов заключается во введении специальных понятий, аналогичных касательным векторам к кривым и касательным плоскостям к поверхностям.

3.3.1. Простейшие примеры

Рассмотрим гладкую кривую в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 , параметризованную некоторым параметром t : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$. Фиксируем значение параметра t_0 . Применим к вектор-функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ разложение по формуле Тейлора в окрестности точки t_0 :

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (3.13)$$

Первые два слагаемых в правой части (3.13) можно, с одной стороны, рассматривать как некоторую аппроксимацию вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ в окрестности точки t_0 с помощью линейной вектор-функции. С другой стороны, эта линейная функция $\mathbf{y}(\Delta t) = \mathbf{x}(t_0) + d\mathbf{x}/dt(t_0)\Delta t$ задает в \mathbf{R}^3 параметризованное представление пря-

мой, проходящей через точку $P_0 = \mathbf{x}(t_0)$. Эта прямая называется касательной прямой к кривой $\mathbf{x}(t)$ в точке P_0 , а направляющий вектор $d\mathbf{x}/dt(t_0)$ называется касательным вектором к кривой $\mathbf{x}(t)$ в точке P_0 (рис. 3.7).

Рассмотрим теперь поверхность M в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 , заданную в параметрическом виде как вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ от двух независимых параметров u, v . Поверхность $\mathbf{x}(u, v)$ называется *невырожденной*, если в каждой точке частные производные $\partial\mathbf{x}(u, v)/\partial u$ и $\partial\mathbf{x}(u, v)/\partial v$ линейно независимы как векторы в \mathbb{R}^3 .

Разлагая функцию $\mathbf{x}(u, v)$ по формуле Тейлора в точке (u_0, v_0) :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) &= \mathbf{x}(u_0, v_0) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + O(\Delta u^2 + \Delta v^2),\end{aligned}\quad (3.14)$$

получаем, что линейная часть разложения (3.14) определяет параметрическое представление плоскости, которая называется касательной плоскостью Π к поверхности M в точке $P_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ (рис. 3.8).

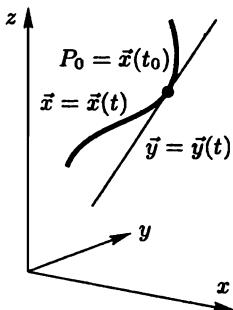


Рис. 3.7

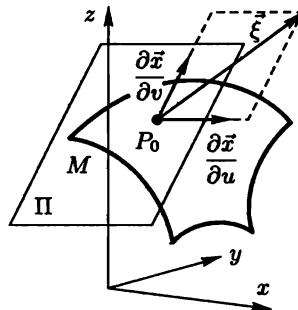


Рис. 3.8

Касательным вектором к поверхности M в точке P_0 называется всякий вектор с началом в точке P_0 , лежащий в касательной плоскости Π . Касательный вектор ξ разлагается в линейную комбинацию векторов $\partial\mathbf{x}(u_0, v_0)/\partial u$ и $\partial\mathbf{x}(u_0, v_0)/\partial v$:

$$\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$$

для подходящего выбора параметров Δu и Δv . Таким образом, векторы $\partial\mathbf{x}(u_0, v_0)/\partial u$ и $\partial\mathbf{x}(u_0, v_0)/\partial v$ образуют базис в касательной

плоскости Π , а величины Δu и Δv служат линейными координатами касательного вектора ξ в этом базисе.

Проведем теперь на поверхности M гладкую кривую $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, проходящую через точку P_0 . Поскольку кривая $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ лежит на поверхности M , то ее параметрически можно представить в виде композиции

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)) \quad (3.15)$$

для некоторых функций $u(t)$, $v(t)$. Иначе это можно сказать следующим образом: функции $u(t)$, $v(t)$ являются параметрическим заданием кривой в локальной системе координат (u, v) на поверхности M . Тогда условие прохождения кривой через точку P_0 перепишем в виде условия на координаты $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$. Вычислим теперь касательный вектор ξ к кривой (или, как его иначе называют, вектор скорости кривой):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(u(t), v(t)))|_{t=t_0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u(t_0), v(t_0)) \frac{du}{dt}(t_0) + \\ &+ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u(t_0), v(t_0)) \frac{dv}{dt}(t_0) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \frac{dv}{dt}(t_0). \end{aligned}$$

Следовательно, касательный вектор к кривой, лежащей на поверхности M , лежит в касательной плоскости.

Определение 1. Пусть $\xi = \partial \mathbf{x}(u_0, v_0) / \partial u \times \xi^1 + \partial \mathbf{x}(u_0, v_0) / \partial v \times \xi^2$ — касательный вектор к поверхности M в точке P_0 . Тогда числа (ξ^1, ξ^2) назовем координатами касательного вектора ξ к поверхности M в точке P_0 по отношению к локальной системе координат (u, v) на поверхности M .

Если (u', v') — другая система координат, то координаты u и v выражаются как гладкие функции от координат u' , v' : $u = u(u', v')$, $v = v(u', v')$, $u_0 = u(u'_0, v'_0)$, $v_0 = v(u'_0, v'_0)$. Тогда, рассматривая композиции функций, мы получаем новое параметрическое задание поверхности M :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(u', v'), v(u', v')).$$

Поэтому кривая (3.15) может быть записана с помощью некоторых функций $u'(t)$, $v'(t)$ так, чтобы $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(u'(t), v'(t)), v(u'(t), v'(t)))$. Тогда, согласно определению координат касательного вектора к кривой по отношению к этой новой локальной системе координат (u', v') , пара чисел $(du'(t_0)/dt, dv'(t_0)/dt)$ является координатами касательного вектора к кривой. Дифференцируя сложные функции, получим зависимость между координатами касательного

вектора к кривой в различных локальных системах координат:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t_0) &= \frac{\partial u}{\partial u'}(u'_0, v'_0) \frac{du'}{dt} + \frac{\partial u}{\partial v'}(u'_0, v'_0) \frac{dv'}{dt}(t_0), \\ \frac{dv}{dt}(t_0) &= \frac{\partial v}{\partial u'}(u'_0, v'_0) \frac{du'}{dt}(t_0) + \frac{\partial v}{\partial v'}(u'_0, v'_0) \frac{dv'}{dt}(t_0).\end{aligned}\quad (3.16)$$

3.3.2. Общее определение касательного вектора

Рассмотренные примеры позволяют дать следующее общее определение касательного вектора к многообразию.

Определение 2. Пусть M — гладкое n -мерное многообразие, $P_0 \in M$ — произвольная точка. *Касательным вектором* ξ в точке P_0 к многообразию M называется соответствие, которое каждой локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ сопоставляет набор чисел $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, удовлетворяющий следующему соотношению для каждой пары локальных систем координат:

$$\xi_\alpha^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P_0) \xi_\beta^l. \quad (3.17)$$

Числа $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ называются *координатами касательного вектора* ξ в локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Соотношение (3.17) называется *тензорным законом преобразования координат* касательного вектора ξ при заменах локальных координат.

Определение 2 обобщает понятие координат касательного вектора к кривой на поверхности. Закон (3.16) изменения этих координат является частным случаем тензорного закона (3.17) преобразования координат касательного вектора к многообразию. Более того, всякая гладкая кривая на гладком многообразии снабжается в каждой своей точке касательным вектором в смысле определения 2. Это важное свойство мы сформулируем в виде предложения.

Предложение 1. Пусть M — гладкое многообразие, $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$ — гладкое отображение интервала $(-1, 1)$ в многообразие M . Тогда соответствие, которое каждой локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) в окрестности точки $P_0 = \gamma(0)$ сопоставляет набор чисел $(dx^1(\gamma(t))/dt, \dots, dx^n(\gamma(t))/dt)_{t=0}$, является *касательным вектором* в смысле определения 2.

Для доказательства предложения 1 достаточно проверить тензорный закон преобразования координат (3.17). Положим $\xi_\beta^k = dx_\beta^k(\gamma(t))/dt|_{t=0}$, где $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ — локальная система координат на многообразии M в окрестности точки P_0 . Тогда для двух

локальных систем координат получим:

$$\begin{aligned}\xi_\alpha^k &= \frac{d}{dt} x_\alpha^k(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(x_\alpha^k(x_\beta^1(\gamma(t)), \dots, x_\beta^n(\gamma(t))))|_{t=0} = \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(\gamma(t)) \frac{d}{dt} x_\beta^l(\gamma(t))|_{t=0} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P_0) \xi_\beta^l.\end{aligned}$$

Это и есть тензорный закон (3.17). ■

Таким образом, указанное в предложении 1 соответствие естественно называть *касательным вектором к кривой γ* или *вектором скорости кривой γ* . Касательный вектор к кривой будем обозначать через $d\gamma(t_0)/dt$ или $\dot{\gamma}(t_0)$.

3.3.3. Касательное пространство $T_{P_0}(M)$

Множество всех касательных векторов в фиксированной точке P_0 к многообразию M называется *касательным пространством к многообразию M в точке P_0* . Это множество обозначается через $T_{P_0}(M)$. Каждый касательный вектор $\xi \in T_{P_0}(M)$ однозначно определяется своими компонентами в одной фиксированной системе координат. Действительно, если задан набор чисел (μ^1, \dots, μ^n) и мы считаем этот набор компонент искомого касательного вектора в фиксированной локальной системе координат $(x_{\alpha_0}^1, \dots, x_{\alpha_0}^n)$, т. е. $\mu^k = \xi_{\alpha_0}^k$, то для задания всего касательного вектора необходимо определить его компоненты в каждой локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Положим для этого

$$\xi_\alpha^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0) \mu^l.$$

Полученные компоненты удовлетворяют тензорному закону преобразования координат (3.17):

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0) \mu^l &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s}(P_0) \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0) \mu^l = \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s}(P_0) \frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}(P_0) \right) \mu^l.\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_{\alpha_0}^l} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^s} \cdot \frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_{\alpha_0}^l}$ (закон изменения матрицы Якоби тройной замены координат), то соотношение (3.17) выполняется тождественно.

Мы установили, таким образом, что множество всех касательных векторов к многообразию M в точке P_0 однозначно описывается своими компонентами в одной фиксированной локальной системе координат. Следовательно, все касательное пространство T_{P_0} отождествляется с арифметическим векторным пространством \mathbf{R}^n . Это значит, что касательное пространство $T_{P_0}(M)$ можно снабдить структурой линейного пространства. Структура линейного пространства в T_{P_0} не зависит от выбора локальной системы координат в окрестности точки P_0 , т. е. справедливо следующее

Предложение 2. *Операции сложения векторов и умножения вектора на число в касательном пространстве $T_{P_0}(M)$ не зависят от выбора локальной системы координат на многообразии M в окрестности точки P_0 .*

Доказательство. Проверка справедливости предложения основана на линейности тензорного закона (3.17) преобразования координат касательных векторов. ■

3.3.4. Производная функции по направлению

Существует способ представлять касательный вектор на многообразии M в виде операции дифференцирования гладких функций.

Определение 3. Пусть $P_0 \in M$, $\xi \in T_{P_0}$, $\gamma(t)$ — гладкая кривая, проходящая через точку P_0 , $\gamma(t_0) = P_0$ и ее касательный вектор в точке P_0 равен ξ . Пусть f — гладкая функция на многообразии M . Число

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} = \xi(f) \quad (3.18)$$

называется *производной функции f по направлению касательного вектора ξ* . Операция взятия производной называется *дифференцированием функции f по направлению вектора ξ* .

Теорема 1. Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальная система координат в окрестности точки $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ многообразия M , $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — касательный вектор к многообразию M в точке P_0 , $f = f(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая функция в окрестности точки P_0 , представленная как функция от локальных координат (x^1, \dots, x^n) . Тогда

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) \xi^i. \quad (3.19)$$

Следовательно, определение (3.18) производной не зависит от выбора кривой γ , а правая часть (3.19) не зависит от выбора локальной системы координат.

Доказательство. Представим кривую $\gamma(t)$, проходящую через точку P_0 , в координатном виде: $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Тогда по определению касательного вектора к кривой $dx^i(t_0)/dt = \xi^i$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\xi(f) &= \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) \Big|_{t=t_0} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) \frac{\partial x^i}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) \xi^i. \blacksquare\end{aligned}$$

Операция дифференцирования гладкой функции f по направлению касательного вектора ξ удовлетворяет следующим двум свойствам:

а) операция дифференцирования по направлению вектора ξ линейна, т. е. если f и g — две гладких функции, а λ, μ — два произвольных числа, то

$$\xi(\lambda f + \mu g) = \lambda \xi(f) + \mu \xi(g);$$

б) операция дифференцирования по направлению вектора ξ удовлетворяет формуле Ньютона–Лейбница: если f и g — две гладких функций в окрестности точки P_0 , то для произведения функций f и g справедлива формула

$$\xi(fg) = f(x_0^1, \dots, x_0^n) \xi(g) + \xi(f)g(x_0^1, \dots, x_0^n). \quad (3.20)$$

Дадим общее определение.

Определение 4. Операция A , сопоставляющая каждой гладкой функции f класса C^∞ на гладком многообразии M число $A(f)$, удовлетворяющее свойствам а) и б), называется *операцией дифференцирования в точке $P_0 \in M$* .

Теорема 2. Пусть M — гладкое многообразие класса C^∞ , $P_0 \in M$ — произвольная точка, A — операция дифференцирования в смысле определения 4. Тогда операция A совпадает с дифференцированием вдоль некоторого (единственного) касательного вектора ξ в точке P_0 .

Доказательство. Касательный вектор будем искать в виде столбца его компонент в некоторой локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) в окрестности точки P_0 . Тогда всякую гладкую функцию будем представлять в виде функции от переменных (x^1, \dots, x^n) . Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Всякую гладкую функцию $f(x^1, \dots, x^n)$ класса C^∞ можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(x_0^1, \dots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n)(x^i - x_0^i) + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n h_{ij}(x^1, \dots, x^n)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j), \quad (3.21) \end{aligned}$$

где $h_{ij}(x^1, \dots, x^n)$ — гладкие функции класса C^∞ .

Доказательство. Запишем тождество

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &\equiv f(x_0^1, \dots, x_0^n) + \\ &\quad + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt \end{aligned}$$

и произведем дифференцирование по t под знаком интеграла:

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(x_0^1, \dots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) h_i(x^1, \dots, x^n), \quad (3.22)$$

где

$$h_i(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt. \quad (3.23)$$

Применим теперь формулу (3.22) к самим функциям $h_i(x^1, \dots, x^n)$. Получим

$$h_i(x^1, \dots, x^n) = h_i(x_0^1, \dots, x_0^n) + \sum_{j=1}^n (x^j - x_0^j) h_{ij}(x^1, \dots, x^n). \quad (3.24)$$

Подставим (3.24) в (3.22) и учтем (3.23):

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(x_0^1, \dots, x_0^n) + \sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) h_{ij}(x^1, \dots, x^n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть f, g — две такие гладкие функции на многообразии M , что $f(P_0) = g(P_0) = 0$. Тогда для любого дифференцирования A в точке P_0 имеет место равенство $A(fg) = 0$.

Доказательство следует немедленно из формулы Ньютона–Лейбница (3.20). ■

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2. Представим функцию f в виде (3.21) и применим к левой и правой частям операцию дифференцирования A . В силу линейности операции получаем

$$\begin{aligned} A(f) = f(x_0^1, \dots, x_0^n)A(1) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n)A(x^i - x_0^i) + \\ + \sum_{i,j=1}^n A((x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)h_{ij}(x^1, \dots, x^n)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Заметим, что для постоянной функции, равной единице, $A(1) = A(1 \cdot 1) = A(1) \cdot 1 + 1 \cdot A(1) = 2A(1) = 0$. Далее, в последней сумме из (3.25) каждое слагаемое представимо в виде произведения двух функций, $(x^i - x_0^i)$ и $(x^j - x_0^j)h_{ij}(x^1, \dots, x^n)$, каждая из которых обращается в нуль в точке P_0 . Поэтому в силу леммы 2 $A((x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)h_{ij}(x^1, \dots, x^n)) = 0$. Следовательно,

$$A(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n)A(x^i - x_0^i).$$

Полагая $\xi^i = A(x^i - x_0^i)$, получаем такой вектор $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, что

$$A(f) = \xi(f). \blacksquare$$

Примером дифференцирования гладких функций служит операция взятия частной производной в некоторой локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) . По теореме 2 операция $\partial/\partial x^k$ является касательным вектором, координаты которого равны $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, где 1 стоит на месте с номером k . Поэтому касательные векторы $\{\partial/\partial x^k\}$ образуют базис в касательном пространстве $T_{P_0}(M)$, а всякий касательный вектор $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ разлагается в линейную комбинацию $\xi = \xi^1 \partial/\partial x^1 + \dots + \xi^n \partial/\partial x^n$.

3.3.5. Касательное расслоение

Множество всех касательных векторов $T_{P_0}(M)$ к многообразию M в точке P_0 является, как мы уже видели, линейным пространством той же размерности, что и многообразие M . Совокупность всех касательных векторов к многообразию M является объединением $\bigcup_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$. Это пространство обозначают через $T(M)$ и называют *касательным расслоением многообразия M* .

Рассмотрим следующий пример: окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. На рис. 3.9 показаны две касательные к окружности в точках P_0 и Q_0 и два касательных вектора ξ и μ , имеющие общий конец. По-

этому, для того чтобы изобразить касательное расслоение $T(S^1)$ в виде топологического пространства, расположенного в евклидовом пространстве, необходимо перейти в трехмерное пространство \mathbf{R}^3 и «поворнуть» касательные к окружности на некоторый угол по отношению к плоскости (x, y) так, чтобы они перестали пересекаться (рис. 3.10). Тогда касательное расслоение $T(S^1)$ превратится в однополостный гиперболоид (геометрический цилиндр). При этом теряется свойство «тесного примыкания» касательного пространства $T_{P_0}(S^1)$ к окружности. Мы как бы «оторвали» касательную к окружности и забыли о том, что слои должны касаться окружности S^1 . Можно немного изменить способ вложения касательного расслоения в \mathbf{R}^3 так, чтобы свойство касания $T_{P_0}(S^1)$ к S^1 исчезло и различные слои не пересекались. Это можно сделать не на всей окружности S^1 , а только на ее части — дуге. Вложим дугу в \mathbf{R}^3 в виде винтовой линии. Тогда касательные к винтовой линии не пересекаются (рис. 3.11).

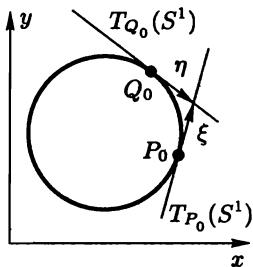


Рис. 3.9

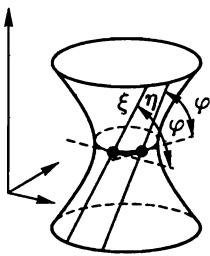


Рис. 3.10

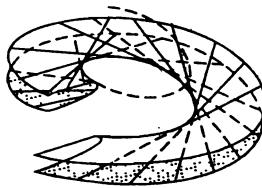


Рис. 3.11

Рассмотрим некоторые примеры из механики, показывающие, что для описания механических систем удобно рассматривать нетривиальные многообразия и касательные расслоения к ним.

Пример 1. Рассмотрим движение плоского маятника, т. е. твердого стержня, закрепленного шарниром в одной точке (рис. 3.12). Тогда положение стержня определяется одним параметром — углом φ между осью стержня и вертикалью. Поэтому множество всех положений стержня представляет собой окружность S^1 . Множество всех положений называют *конфигурационным пространством*.

Рассмотрим двухшарнирный маятник — два стержня, соединенных шарниром (рис. 3.13). Положение маятника определяется двумя углами, φ_1 и φ_2 , а множество всех положений представляет двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$. На рис. 3.14 изображена другая система, у которой пространство конфигураций является тором, вложенным в \mathbf{R}^3 .

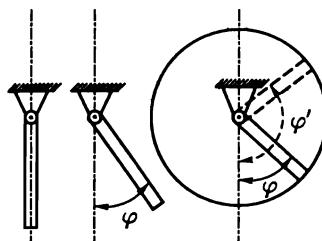


Рис. 3.12

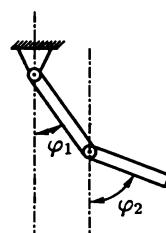


Рис. 3.13

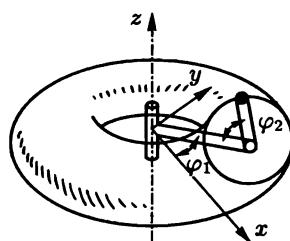


Рис. 3.14

П р и м е р 2. В механике обычно описывают движение механической системы совокупностью параметров, описывающих положение системы и скоростей ее частей. Множество всех расположений механической системы с учетом скоростей называют *фазовым пространством*. Тогда фазовое пространство естественно отождествить с касательным расслоением к конфигурационному пространству. Так, например, если материальная точка движется по поверхности двумерной сферы с постоянным модулем скорости, то фазовым пространством в данном случае будет подмножество в касательном расслоении, состоящее из касательных векторов постоянной длины.

П р и м е р 3. Бывают и более сложные примеры конфигурационных и фазовых пространств. Рассмотрим, например, твердое трехмерное тело с закрепленной точкой. Всевозможные его положения в \mathbb{R}^3 можно описать следующим образом. Фиксируем в твердом теле три ортонормированных вектора e_1, e_2, e_3 с началом в закрепленной точке. Тогда любое расположение твердого тела с закрепленной точкой однозначно задается расположением этих векторов e_1, e_2, e_3 в \mathbb{R}^3 . Таким образом, конфигурационное пространство можно отождествить с компонентой связности множества всех ортонормированных базисов в \mathbb{R}^3 .

3.4. ПОДМНОГООБРАЗИЯ

3.4.1. Дифференциал гладкого отображения

Определение 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладкое отображение гладких многообразий. *Дифференциалом* df_{P_0} гладкого отображения f в точке $P_0 \in M_1$ называется линейное отображение касательного пространства $T_{P_0}(M_1)$ в касательное пространство $T_{Q_0}(M_2)$, $Q_0 = f(P_0)$, определяемое в локальных системах координат матрицей Якоби отображения f .

Определение 1 дифференциала df_{P_0} , не зависит от выбора локальных систем координат в окрестностях точек $P_0 \in M_1$ и $Q_0 \in M_2$. Чтобы показать это, достаточно переформулировать определение 1 в терминах дифференцирований гладких функций, в которых вообще не участвуют какие бы то ни было локальные координаты.

Лемма 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладкое отображение, $f(P_0) = Q_0$, $\xi = T_{P_0}(M_1)$ — касательный вектор к многообразию M_1 в точке P_0 , $\eta = df_{P_0}(\xi)$ — касательный вектор к многообразию M_2 в точке Q_0 в смысле определения 1. Тогда для любой гладкой функции g на многообразии M_2 выполнено соотношение

$$\eta(g) = \xi(g \circ f). \quad (3.26)$$

Проверку соотношения (3.26) достаточно производить в произвольной системе координат. Правая часть (3.26) не зависит от выбора локальной системы координат. Значит от этого выбора не зависит и правая часть.

Лемма 2. Если $\gamma = \gamma(t)$ — кривая на многообразии M_1 , проходящая через точку P_0 , $\gamma(t_0) = P_0$, а ξ — касательный вектор к кривой γ в точке P_0 , то образ вектора ξ , $\eta = df_{P_0}(\xi)$ при отображении $f: M_1 \rightarrow M_2$ является касательным вектором к образу кривой γ , $f(\gamma(t))$.

Доказательство непосредственно проверяется в некоторых локальных системах координат многообразий M_1 и M_2 .

Пример 1. Рассмотрим гладкую функцию $y = f(x)$ как гладкое отображение многообразий $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$. Тогда согласно определению 1 дифференциал — это линейное отображение $T_x(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1$ в $T_{f(x)}(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1$, задаваемое формулой $\eta = f'(x)\xi$. В математическом анализе под дифференциалом функции $f(x)$ понимают линейную часть приращения функции f как функцию от двух независимых аргументов (x и dx): $dy = f'(x)dx$. Так что, полагая $dx = \xi$, $dy = \eta$, получаем совпадение понятий.

Пример 2. Рассмотрим гладкую функцию f от n независимых переменных $y = f(x^1, \dots, x^n)$. Так же, как и в случае функции одной переменной, представим ее как гладкое отображение многообразий $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$. Тогда дифференциал отображения f является линейным отображением касательных пространств

$$df_{P_0}: T_{P_0}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n \rightarrow T_{Q_0}(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1,$$

$$P_0 = (x_1^1, \dots, x_0^n), \quad Q_0 = f(x_1^1, \dots, x_0^n).$$

Дифференциал df_{P_0} в локальных координатах задается формулой $\eta = \sum_{k=1}^n \partial(P_0)/\partial x^k \cdot \xi^k$. С другой стороны, дифференциал

функции f есть линейная часть приращения функции (x^1, \dots, x^n) как функция от двух групп независимых переменных, (x^1, \dots, x^n) и (dx^1, \dots, dx^n) :

$$df(x^1, \dots, x^n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^n) dx^k.$$

Полагая $\xi^k = dx^k$, $\eta = dy$, получаем совпадение понятий дифференциала функции и дифференциала ее же как отображения многообразий. Более того, матрица дифференциала df_{P_0} есть матрица Якоби отображения f , а с другой стороны — градиент $\text{grad } f$ функции f ; таким образом, градиент f — это матрица дифференциала df_{P_0} в фиксированной системе координат. Ясно, что при изменении системы координат будут меняться и компоненты градиента функции f .

Пример 3. Рассмотрим гладкую функцию $f = f(x^1, \dots, x^n)$. Пусть $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ — экстремальная точка функции f . Тогда одна из теорем анализа гласит, что $\text{grad}_{P_0} f = 0$. В нашей терминологии это значит, что $df_{P_0} = 0$. Это утверждение обобщается на случай произвольных многообразий: *если в точке $P_0 \in M$ гладкая функция f достигает локального максимума, то $df_{P_0} = 0$* .

Это обстоятельство получает новое освещение в теории многообразий. В случае областей в евклидовом пространстве всегда существуют такие гладкие функции, для которых $\text{grad } f \neq 0$ в каждой точке. Для гладкого многообразия это уже не так. Например, на двумерной сфере S^2 для всякой гладкой функции f ее дифференциал df обращается в нуль по крайней мере в двух точках: в точке максимума функции f и в точке ее минимума. Вообще, *если M — компактное гладкое многообразие, то для всякой гладкой функции f дифференциал df обращается в нуль не менее чем в двух точках*. На рис. 3.15 изображено поведение дифференциала функции «высоты» на двумерной сфере S^2 , а на рис. 3.16 — функция высоты на торе T^2 .

Пример 4. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ — линейное отображение, которое в стандартных координатах записывается в матричном виде:

$$Y = AX,$$

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда, очевидно, матрица Якоби отображения f (а, значит, и диффе-

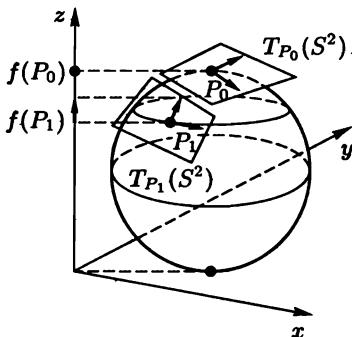


Рис. 3.15

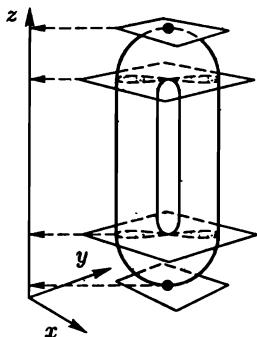


Рис. 3.16

ренциал df_{P_0}) совпадает с матрицей A . Другими словами, $df_{P_0}(\xi) = f(\xi)$. Впрочем, это не удивительно. Если представить дифференциал df_{P_0} , как и в случае функций многих переменных, в виде линейной части приращения отображения, то получим $\Delta Y = A(X + \Delta X) - AX = A\Delta X$. Следовательно, само приращение ΔY тождественно совпадает с его линейной частью. Таким образом, дифференциал линейного отображения не зависит от точки $P_0 \in \mathbb{R}^n$.

3.4.2. Локальные свойства отображений и дифференциал

Определение 2. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение. Точка $P_0 \in M_1$ называется *регулярной точкой отображения* f , если дифференциал отображения $df_{P_0}: T_{P_0}(M_1) \rightarrow T_{f(P_0)}(M_2)$, $Q_0 = f(P_0)$, является эпиморфизмом, т. е. отображением на все пространство $T_{Q_0}(M_2)$. Точка $Q_0 \in M_2$ называется *регулярной точкой отображения* f , если всякая точка P_0 из прообраза $f^{-1}(Q_0)$ является регулярной точкой отображения f .

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 из разд. 3.2:

Теорема 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение гладких многообразий, $Q_0 \in M_2$ — регулярная точка отображения f . Тогда прообраз $M_3 = f^{-1}(Q_0)$ является гладким многообразием, $\dim M_3 = \dim M_1 - \dim M_2$. Более того, в качестве локальных координат в многообразии M_3 можно взять некоторые из локальных координат многообразия $P_0 \in M_3$.

Доказательство. Для того чтобы доказать, что M_3 является многообразием, достаточно в окрестности каждой точки $P_0 \in M_3$ применить теорему 2 из разд. 3.2. Получаем, что каждая точка $P_0 \in M_3$ допускает окрестность $U \ni P_0$, гомеоморфную области в

евклидовом пространстве \mathbf{R}^{n-m} , где $n = \dim M_1$, $m = \dim M_2$. Более того, в качестве локальных координат в окрестности U можно взять некоторые $(n - m)$ локальных координат (x^1, \dots, x^n) многообразия M_1 в окрестности точки P_0 . Если это координаты $(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-m}})$, то остальные локальные координаты (x^j) выражаются на M_3 через $(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-m}})$ в виде гладких функций. Отсюда следует, что M_3 — гладкое многообразие. В самом деле, пусть (y^1, \dots, y^n) — другая система координат на многообразии M_1 , а $(y^{i_1}, \dots, y^{i_{n-m}})$ — образуют локальную систему координат на M_3 . Тогда

$$\begin{aligned} y^{i_k} &= y^{i_k}(x^1, \dots, x^n) = \\ &= y^{i_k}(x^1(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-m}}), \dots, x^n(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-m}})) \end{aligned}$$

— гладкая функция. ■

Определение 3. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладкое отображение. Отображение f называется *погружением*, если в каждой точке $P \in M_1$ дифференциал df_P является мономорфизмом, т. е. взаимно однозначным отображением на свой образ.

Если, кроме того, отображение f взаимно однозначно отображает многообразие M_1 на свой образ $f(M_1)$ и $f(M_1)$ — замкнутое множество, то отображение f называется *вложением*. Образ $f(M_1)$ (равно как и M_1) в этом случае называется *подмногообразием* многообразия M_2 .

Пример 5. Прообраз регулярной точки отображения $f: M_1 \rightarrow M_2$ согласно теореме 1 является подмногообразием. В самом деле, так как в качестве локальной системы координат в M_3 можно взять некоторые из локальных координат объемлющего многообразия M_1 , то в локальных координатах тождественное отображение $\varphi: M_3 \rightarrow M_1$ имеет вид

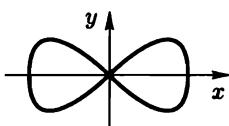
$$\begin{aligned} x^1 &= x^1, \\ x^{n-m} &= x^{n-m}, \\ x^{n-m+1} &= x^{n-m+1}(x^1, \dots, x^{n-m}), \\ x^n &= x^n(x^1, \dots, x^{n-m}). \end{aligned}$$

Поэтому матрица Якоби $d\varphi$ содержит в себе единичную квадратную матрицу. Следовательно, $\text{rank } d\varphi = n - m$, т. е. $d\varphi$ является мономорфизмом.

Пример 6. Рассмотрим отображение $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$, заданное формулами $f(\varphi) = \{\cos \varphi, \sin 2\varphi\}$. Вектор скорости равен $df/d\varphi =$

$= \{-\sin \varphi, 2\cos 2\varphi\}$ и ни в какой точке не обращается в нуль, т. е. ранг матрицы Якоби равен единице. Поэтому f является погружением (рис. 3.17). Кривая, изображенная на рис. 3.17, является одной из фигур Лиссажу, и может быть получена на осциллографе при синусоидальных сигналах на вертикальной и горизонтальной развертках.

Рис. 3.17



3.4.3. Вложение многообразий в евклидово пространство

Мы завершим настоящий параграф теоремой Уитни, показывающей, что всякое компактное многообразие можно считать подмногообразием евклидова пространства достаточно большой размерности.

Теорема 2 (слабая теорема Уитни). Пусть M — гладкое компактное многообразие. Тогда существует вложение $\varphi: M \rightarrow \mathbf{R}^N$ для подходящего выбора размерности N .

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ — конечный атлас карт, $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ — локальная система координат в карте U_α . Без ограничения общности можно считать, что карты U_α гомеоморфны шару $D^n \subset \mathbf{R}^n$ радиуса 1, причем координаты $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ осуществляют гомеоморфизм φ_α карты U_α на шар D^n . Далее, можно считать, что шар D^n лежит в \mathbf{R}^n и не содержит начала координат. Этого можно достичнуть с помощью параллельного переноса в \mathbf{R}^n . Пусть, далее, $D_1^n \subset D^n$ — шар меньшего радиуса с тем же центром, что и шар D^n , причем открытые множества $U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(D_1^n) \subset U_\alpha$ покрывают многообразие M . Пусть f — гладкая функция в \mathbf{R}^n , равная тождественно единице на D_1^n , и $\text{supp } f \subset D^n$. Положим тогда:

$$y_\alpha^k(P) = \begin{cases} f(\varphi_\alpha(P))x_\alpha^k(P), & \text{если } P \in U_\alpha, \\ 0, & \text{если } P \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Ясно, что $y_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$, если $P \in U'_\alpha$. Мы получили систему гладких функций $\{y_\alpha(P)\}$ в количестве $N = nM$. Эта система функций совместно осуществляет отображение g многообразия M в евклидово пространство \mathbf{R}^N : $g(P) = \{y_\alpha^k(P)\} \in \mathbf{R}^N$.

Покажем, что ранг дифференциала отображения g в каждой точке равен n . Пусть $P \in M$ — произвольная точка, $U'_\alpha \ni P$, $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ — локальная система координат. Матрица Якоби отображе-

ния g в точке P в локальной системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ состоит из частных производных $\{\partial y_\beta^k(P)/\partial x_\alpha^j\}$. В частности, если $\beta = \alpha$, то

$$\frac{\partial y_\beta^k}{\partial x_\alpha^j}(P) = \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j}(P) = \delta_\beta^k,$$

т. е. матрица Якоби отображения g содержит единичную матрицу порядка n . Следовательно, $\text{rank } dg = n$.

Таким образом, отображение g является погружением. Для того чтобы отображение g было вложением, необходимо, чтобы различные точки P и Q переходили в различные точки $g(P)$ и $g(Q)$.

Построим новое отображение

$$\bar{g}(P) = \{y_\alpha^k(P), f(\varphi_\alpha(P))\} \in \mathbf{R}^{N+M}$$

Оно по тем же причинам, что и g , является погружением. Пусть теперь P и Q , $P \neq Q$, — две точки на многообразии. Рассмотрим такой номер α , что $f(\varphi_\alpha(P)) = 1$. Если $f(\varphi_\alpha(Q)) < 1$, то $\bar{g}(P) \neq \bar{g}(Q)$; если $f(\varphi_\alpha(Q)) = 1$, то $y_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(P)$, $y_\alpha^k(Q) = x_\alpha^k(Q)$, и, значит, для некоторого номера k координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ имеем: $x_\alpha^k(P) \neq x_\alpha^k(Q)$, т. е. $\bar{g}(P) \neq \bar{g}(Q)$. Таким образом, отображение $\bar{g}: M \rightarrow \mathbf{R}^{N+M}$ является взаимно однозначным погружением, т. е. вложением. ■

Итак, всякое гладкое компактное многообразие M можно считать вложенным в виде подмногообразия в евклидово пространство \mathbf{R}^N некоторой достаточно большой размерности N . На самом деле размерность евклидова пространства \mathbf{R}^N можно существенно понизить. Так, например, сфера S^n вкладывается в \mathbf{R}^{n+1} , а тор T^n вкладывается в \mathbf{R}^{2n} . Проективная плоскость \mathbf{RP}^2 не вкладывается в \mathbf{R}^3 , однако может быть вложена в \mathbf{R}^5 . В самом деле, пусть $(x_1: x_2: x_3)$ — однородные координаты точки P в \mathbf{RP}^2 . Положим

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, & y^2 &= \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, & y^3 &= \frac{x_3^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ y^4 &= \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, & y^5 &= \frac{x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, & y^6 &= \frac{x_3 x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Получаем отображение

$$g: \mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^6, \quad g(P) = g(x_1: x_2: x_3) = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6).$$

На самом деле образ отображения g лежит в линейном подпространстве $\mathbf{R}^6 \subset \mathbf{R}^6$, задаваемом уравнением $y^1 + y^2 + y^3 = 1$.

3.4.4. Риманова метрика на многообразии

Теперь мы можем дать общее понятие римановой метрики на многообразии, частные случаи которого рассматривались выше.

Римановой метрикой на гладком многообразии M назовем семейство положительно определенных скалярных произведений, заданных в каждом касательном пространстве $T_P(M)$. Если в окрестности U точки P фиксирована система координат (x^1, \dots, x^n) , то и в $T_P(M)$ задается система координат (ξ^1, \dots, ξ^n) . Скалярное произведение в системе (ξ^1, \dots, ξ^n) определяется невырожденной симметрической матрицей $G = (g_{ij})$, зависящей от точки. При переходе к новой системе координат (y^1, \dots, y^n) матрица меняется по закону

$$g'_{ij}(P) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta}(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}(P) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}(P),$$

где $G' = (g'_{ij}(P))$ — матрица скалярного произведения в новой системе координат (y^1, \dots, y^n) .

Определение 4. *Римановой метрикой* на гладком многообразии M называется такое семейство невырожденных положительно определенных скалярных произведений в каждом касательном пространстве $T_P(M)$, $P \in M$, что в локальной системе координат матрица скалярного произведения является гладкой функцией от локальных координат.

Метрику можно задавать как соответствие, сопоставляющее каждой системе координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ в карте U_α матричноизначенную гладкую функцию в карте U_α : $G^\alpha(P) = (g_{ij}^\alpha(P))$, такую, что:

- а) матрица $G^\alpha(P)$ симметрична и положительно определена;
- б) коэффициенты $g_{ij}^\alpha(P)$ преобразуются по закону

$$g_{ij}^\alpha(P) = \sum_{k,l=1}^n g_{kl}^\beta(P) \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^i}(P) \frac{\partial x_\beta^l}{\partial x_\alpha^j}(P) \quad (3.27)$$

для точек $P \in U_\alpha \cap U_\beta$. Если $\xi = (\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, $\eta = (\eta_\alpha^1, \dots, \eta_\alpha^n)$ — два касательных вектора, то скалярное произведение ξ, η записывается так:

$$(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^\alpha(P) \xi_\alpha^i \eta_\alpha^j.$$

Ниже мы приведем более общую конструкцию римановой метрики на многообразии.

Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое вложение многообразия M_1 в многообразие M_2 , $\dim M_1 = m$, $\dim M_2 = n$. На многообразии M_2 определена риманова метрика, которая задана набором матрично-значных функций $\{G^\alpha(P) = (G_{ij}^\alpha(P))\}$ на атласе карт $\{U_\alpha\}$.

Тогда вложение f задает на подмногообразии M_1 риманову метрику, порожденную римановой метрикой в объемлющем многообразии M_2 . В самом деле, без ограничения общности можно считать, что атлас карт $\{V_\alpha\}$ на подмногообразии M_1 задается пересечениями

$$V_\alpha = M_1 \cap U_\alpha$$

и некоторыми локальными координатами $\{y_\alpha^i\}_{1 \leq i \leq m}$ в карте V_α . Вложение f в картах V_α и U_α задается набором формул

$$x_\alpha^i = x_\alpha^i(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^m).$$

Матрица Якоби этого отображения имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{x_\alpha^i}{y_\alpha^j}\right) = m \dim M_1.$$

Метрика на многообразии M_1 задается формулами

$$(h_{ij}^\alpha(P))_{1 \leq i, j \leq m}, \quad P \in V_\alpha,$$

где

$$h_{ij}^\alpha(P) = g_{kl}^\alpha(P) \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j}. \quad (3.28)$$

Предложение 1. *Формулы (3.28) задают риманову метрику на многообразии M_1 .*

Доказательство. Симметричность и положительная определенность матрицы $H^\alpha(P)$ следует из алгебраических свойств формул (3.28). Осталось проверить только выполнение закона преобразования (3.27). В силу формул (3.28) имеем

$$\begin{aligned} h_{ij}^\alpha(P) &= g_{kl}^\alpha(P) \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j} = g_{st}^\beta(P) \frac{\partial x_\beta^s}{\partial x_\alpha^k} \frac{\partial x_\beta^t}{\partial x_\alpha^l} \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\alpha^l}{\partial y_\alpha^j} = \\ &= g_{st}^\beta(P) \frac{\partial x_\beta^s}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\beta^t}{\partial y_\alpha^j} = g_{st}^\beta(P) \frac{\partial x_\beta^s}{\partial y_\beta^p} \frac{\partial y_\beta^p}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial x_\beta^t}{\partial y_\beta^q} \frac{\partial y_\beta^q}{\partial y_\alpha^j} = h_{pq}^\beta(P) \frac{\partial y_\beta^p}{\partial y_\alpha^i} \frac{\partial y_\beta^q}{\partial y_\alpha^j}. \end{aligned}$$

Тем самым выполнен закон преобразования (3.27). ■

Следствие 1. На любом компактном многообразии существует риманова метрика.

Доказательство. Напомним, что в силу предложения 1 риманова метрика определена на подмногообразии M_1 если она определена на объемлющем многообразии M_2 .

В силу теоремы Уитни, задача сводится к построению римановой метрики на евклидовом пространстве \mathbf{R}^N . Так как многообразие \mathbf{R}^N покрывается одной картой, то необходимо предъявить лишь одну функцию $G(P)$, $P \in \mathbf{R}^N$. В качестве этой функции можно выбрать $G(P) \equiv E$, где E — единичная матрица. Тем самым, на \mathbf{R}^N имеется хотя бы одна риманова метрика, а, значит, на любом компактном многообразии также существует риманова метрика. ■

Задачи

- Построить вложение тора T^n в \mathbf{R}^{n+1} .

Указание. Представить тор T^n как гиперповерхность вращения T^{n-1} вокруг оси.

- Построить вложение $S^2 \times T^2$ в \mathbf{R}^5 .

Указание. Найти в \mathbf{R}^5 открытую область, гомеоморфную $S^2 \times \mathbf{R}^3$.

3.4.5. Теорема Сарда

В предыдущем пункте мы показали, как по свойствам дифференциала восстанавливаются локальные свойства гладкого отображения. В некоторых случаях можно, и обратно, восстановить свойства дифференциала по свойствам самого отображения. Например, если $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкий гомеоморфизм, то, как было показано в разд. 3.3 (лемма 2), дифференциал $df: T_P(M_1) \rightarrow T_{f(P)}(M_2)$ является изоморфизмом. Рассмотрим теперь задачу, в некотором смысле обратную к задаче, решенной в теореме 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение многообразия M_1 на все многообразие M_2 , т. е. $f(M_1) = M_2$. Такие отображения можно рассматривать как аналоги эпиморфизмов для линейных отображений. Поставим вопрос: будет ли дифференциал $df: T_P(M_1) \rightarrow T_{f(P)}(M_2)$ эпиморфизмом? К сожалению, это не так. Рассмотрим следующий пример. Пусть $M_1 = M_2 = \mathbf{R}^1$, $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}^1$. Тогда f — гладкое отображение и $f(\mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1$. Однако в точке $x = 0$ дифференциал df равен нулю и, значит, не является эпиморфизмом. В других же точках дифференциал df имеет значение $3x^2 dx$ и является эпиморфизмом. В рассмотренном примере можно предугадать общий ответ на поставленный вопрос. Мы его сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 3 (Сард). Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение компактных многообразий. Тогда множество G регулярных точек $Q \in M_2$ отображения f является открытым всюду плотным множеством.

Прежде чем доказывать теорему 3, рассмотрим несколько примеров.

Пример 7. Пусть $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$, $f(x) \equiv a$, где $a = \text{const}$. В этом случае дифференциал df ни в одной точке не является эпиморфизмом. Однако образ $f(\mathbf{R}^1)$ состоит из одной точки a , т. е. согласно определению всякая точка $y \neq a$ является регулярной (так как $f^{-1}(y) \neq \emptyset$). Следовательно, множество регулярных точек является открытым всюду плотным множеством.

Пример 8. Пусть $f: \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ — финитная гладкая функция. Пусть $F = \{x: f'(x) = 0\}$. Множество F является замкнутым множеством. Образ $f(F)$ является компактным множеством и состоит из всех нерегулярных точек. Покажем, что $f(F)$ нигде не плотно. Если бы это было не так, то нашлась бы внутренняя точка $y \in f(F)$, т. е. точка y лежит в $f(F)$ вместе с некоторой окрестностью $y \in U \subset f(F)$. Поскольку f — финитная функция, то образ $f(F)$ лежит в образе некоторого интервала $f([a, b])$. Другими словами, достаточно доказать, что образ $f(F')$, $F' = F \cap [a, b]$, нигде не плотен. Пусть $V \supset F'$ — некоторая окрестность множества F' , $F' = V \subset (-2a, 2a)$. Тогда $f(V)$ содержит окрестность U . Значит, найдется такая точка $x \in V$, у которой производная $f'(x)$ по модулю больше числа $\varepsilon = \text{diam } U/4a$. Уменьшая окрестность V , получим последовательность точек $x_n \rightarrow F'$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \rightarrow x_0 \in F'$. Тогда $f'(x_n) \rightarrow f'(x_0)$, т. е. $|f'(x_0)| \geq \varepsilon$, что противоречит условию $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in F' \subset F$.

Теорему 3 удобнее формулировать более общим образом: если $F \subset M_1$ — компактное множество, состоящее из нерегулярных точек, то множество $f(F)$ нигде не плотно. Покажем, что теорему 2 достаточно доказать для случая, когда M_1 является окрестностью замкнутого диска в евклидовом пространстве. В самом деле, покроем M_1 конечным атласом карт U_α и выберем $V_\alpha \subset \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ так, чтобы V_α было гомеоморфно диску в евклидовом пространстве. Пусть $G_\alpha \subset M_2$ — множество регулярных точек для отображения f , ограниченного на \bar{V}_α . Тогда пересечение $G = \cap G_\alpha$ состоит из регулярных точек всего отображения f . Если G_α — открытые всюду плотные множества, то G тоже является открытым всюду плотным множеством. Выберем достаточно мелкий атлас карт U_α так, чтобы образ $f(U_\alpha)$ лежал в одной карте W_β многообразия M_2 . Тогда теорему 1 достаточно доказать для регулярных точек отображения

$f|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow W_\beta$ на \overline{V}_α .

В самом деле, если $G \subset W_\beta$ — множество регулярных точек отображения $f|_{U_\alpha}$, то $G \cup (M_2 \setminus f(\overline{V}_\alpha))$ является множеством регулярных точек отображения $f: U_\alpha \rightarrow M_2$ на \overline{V}_α . Итак, пусть U — окрестность диска D^n в \mathbf{R}^n , $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ — гладкое отображение. Покажем, что множество тех точек $y \in \mathbf{R}^m$, для которых $D^n \cap f^{-1}(y)$ состоит из регулярных точек, является открытым всюду плотным множеством.

Лемма 3. Теорема справедлива для $m = 1$.

Доказательство. Пусть $F \subset D^n$ — множество нерегулярных точек функции f . Тогда $f(F)$ компактно и содержит все нерегулярные точки функции f . Покажем, что $\mathbf{R}^1 \setminus f(F)$ всюду плотно. Если это не так, то найдется интервал $V \subset f(F)$. Фиксируем $k > n$ и рассмотрим множество F_k таких точек, у которых все частные производные функции f до порядка k включительно равны нулю. Тогда, разлагая функцию f по формуле Тейлора в окрестности произвольной точки $y \in F_k$, получаем оценку $|f(y) - f(x)| < C|x - y|^k$, причем константа C не зависит от выбора $y \in F_k$ и $x \in D^n$. Это значит, что если покрыть множество F_k кубами со стороной $1/N$ (число этих кубов не превосходит N^n), то образ $f(F_k)$ покроется интервалами, причем длина каждого интервала не превосходит числа $2\sqrt{n}C/N^{k-n}$. Следовательно, сумма длин всех интервалов не превосходит $2\sqrt{n}C/N^{k-n}$ и стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Значит, множество $f(F_k)$ нигде не плотно.

Оставшуюся часть множества F , т. е. $F \setminus F_k$, можно представить в виде объединения конечного семейства подмножеств, каждое из которых лежит на подмногообразии, задаваемом одним из уравнений

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = 0, \quad l_1 + \dots + l_n = l < k.$$

В самом деле, пусть $F_{l_1 \dots l_n}$ — множество тех точек из F , где

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0, \quad \text{grad } \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \neq 0. \quad (3.29)$$

Ясно, что $F \setminus F_k = \bigcup_{l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}$. С другой стороны, множество $F_{l_1 \dots l_n}$ лежит на подмногообразии $M_{l_1 \dots l_n}$, состоящем из тех точек, где выполнены условия (3.29). Размерность подмногообразия $M_{l_1 \dots l_n}$ меньше n . Поэтому, применяя индукцию, можно считать, что лемма 2 выполнена для $M_{l_1 \dots l_n}$.

Итак, множество $f(F_k)$ не покрывает интервал V . Значит найдется такая окрестность $U_k \supset F_k$, что $f(U_k)$ не покрывает интер-

вал V . Пусть $l_1 + \dots + l_n = k - 1$. Тогда $F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_k$ — компактное множество в многообразии $M_{l_1 \dots l_n}$ и поэтому $f(F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_k)$ не покрывает $V \setminus f(U_k)$, т. е. $f(F_k \cup F_{l_1, \dots, l_n})$ не покрывает V . Следовательно, имеется такая окрестность

$$U_s \supset F_k \cup \bigcup_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n},$$

что $\overline{f(U_s)}$ не покрывает интервал V . Поэтому множества $F_{l_1 \dots l_n} \setminus U_s$ при $l_1 + \dots + l_n = s$ тоже не покрывают при отображении f остатка

$$V \setminus f\left(F_k \cup \bigcup_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}\right).$$

Значит

$$f\left(F_k \cup \bigcup_{s < l_1 + \dots + l_n < k} F_{l_1 \dots l_n}\right)$$

не покрывает интервал V . За конечное число шагов получаем, что $f(F)$ не покрывает V . Лемма доказана. ■

Применим лемму 2 к доказательству теоремы 3 для случая системы функций $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$, $D^n \subset U$, $f(P) = (f^1(P), \dots, f^m(P))$, индукцией по числу m . Поскольку f^1 — гладкая функция, то по лемме 2 множество G_1 регулярных значений функции f^1 открыто и всюду плотно в \mathbf{R}^1 . Пусть $y_0^1 \in G_1$, $N = (f^1)^{-1}(y_0^1)$. По теореме 1 множество N является гладким подмногообразием, которое с помощью отображения f отображается в гиперплоскость \mathbf{R}^{m-1} . Тогда точка (y_0^2, \dots, y_0^m) является регулярной для отображения $f|_N$ тогда и только тогда, когда точка (y_0^2, \dots, y_0^m) является регулярной для отображения f . По предположению индукции множество точек (y_0^2, \dots, y_0^m) , регулярных для отображения $f|_N$, всюду плотно в \mathbf{R}^m , всюду плотно в \mathbf{R}^{m-1} , следовательно, и множество регулярных точек для отображения f всюду плотно в \mathbf{R}^m . Для того чтобы показать, что множество регулярных точек открыто, достаточно заметить, что прообраз регулярной точки $D^n \cap f^{-1}(y_0^1, \dots, y_0^n)$ является компактом и в каждой его точке отличен от нуля некоторый минор матрицы дифференциала отображения f . Поэтому для любой достаточно близкой точки (y_1^1, \dots, y_1^n) прообраз $D \cap f^{-1}(y_1^1, \dots, y_1^n)$ лежит в достаточно малой окрестности множества $D \cap f^{-1}(y_0^1, \dots, y_0^n)$, т. е. те же миноры отличны от нуля. Это и значит, что множество регулярных точек отображения f открыто. Доказательство теоремы 3 завершено. ■

В качестве применения теоремы Сарда рассмотрим гладкое отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ при $\dim M_1 < \dim M_2$. Тогда ни одна точка $P \in M_1$ не может быть регулярной. Это значит, что образ $f(M_1)$ никогда не плотен в многообразии M_2 . В частности, образ отображения f не покрывает многообразие M_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема Сарда может быть обобщена на случай некомпактных сепарабельных многообразий. Однако тогда множество регулярных точек не обязано быть открытым множеством, а всего лишь пересечением счетного числа открытых всюду плотных множеств. Такие множества называются G_δ -множествами. Из общей топологии известно, что пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств в \mathbf{R}^n всегда не пусто и всюду плотно. Так что множество регулярных точек для случая некомпактных многообразий непусто и всюду плотно.

Глава 4

Гладкие многообразия (примеры)

4.1. ТЕОРИЯ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ И В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

4.1.1. Теория кривых на плоскости. Формулы Френе

Рассмотрим на плоскости декартовы координаты (x, y) . Гладкие плоские кривые $\gamma(t)$ будем задавать радиус-вектором $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, выходящим из начала координат. Напомним, что вектором скорости $\mathbf{v}(t)$ кривой $\gamma(t)$ называется вектор с координатами $(dx(t)/dt, dy(t)/dt)$. Определяемая им прямая касается кривой в точке $\gamma(t)$. Обычно будем предполагать, что $\mathbf{v}(t) \neq 0$. Напомним, что в точках, где вектор скорости обращается в нуль, гладкая кривая может претерпевать излом. Мы будем рассматривать регулярные кривые, то есть с ненулевым вектором скорости. Производную будем иногда обозначать точкой или штрихом.

Через $|d\mathbf{r}(t)/dt| = |\mathbf{v}(t)|$ обозначим модуль вектора скорости в евклидовой метрике. Пусть s — длина дуги кривой от некоторой фиксированной точки до переменной точки на кривой. Поскольку длина дуги монотонно растет при движении точки по кривой в одном направлении, то длину дуги можно взять за параметр вдоль кривой. Он называется *натуральным параметром*. Уравнение кривой $\mathbf{r}(s) = (x(s), y(s))$, записанной относительно параметра s , называется *натуральной параметризацией кривой*.

Лемма 1. Модуль вектора скорости кривой, записанной в натуральном параметре, постоянен и равен единице.

Доказательство. Утверждение следует из формулы для дифференциала dl длины дуги l , т. е. $dl = dt|d\mathbf{r}(t)/dt|$. ■

Отметим, что в каждой точке регулярной гладкой кривой вектор скорости $\mathbf{v}(s)$ отличен от нуля.

Далее, в каждой точке кривой можно задать еще один вектор, а именно, ускорение кривой: $\ddot{\mathbf{r}}(s) = d\mathbf{v}(s)/ds$. Оказывается, ускорение (относительно натурального параметра) ортогонально скорости кривой.

Лемма 2. Пусть задана вектор-функция $\mathbf{p}(t)$ такая, что $|\mathbf{p}(t)| \equiv 1$. Тогда вектор $d\mathbf{p}(t)/dt$ ортогонален вектору $\mathbf{p}(t)$.

Доказательство. Дифференцируя тождество $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \equiv 1$, получаем:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \mathbf{p} \right\rangle \equiv 0.$$

Итак, в каждой точке гладкой кривой, отнесенной к натуральному параметру, возникают два ортогональных друг другу вектора, один — скорость, другой — ускорение. Вектор ускорения не обязан быть единичным. Предположим, что ускорение отлично от нуля и рассмотрим единичный вектор $\mathbf{n}(s) = (d\mathbf{v}(s)/ds) / |d\mathbf{v}(s)/ds|$, т. е. «нормированное ускорение». Тем самым мы получаем вдоль кривой гладкое семейство реперов вида: $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$. Они называются реперами или базисами Френе. Вектор $\mathbf{n}(s)$ называется *вектором нормали* к кривой в точке s . Каждый репер Френе, после его параллельного переноса в начало координат, однозначно определяет некоторое вращение плоскости вокруг точки O . Тем самым реперное поле вдоль кривой задает гладкое отображение $\gamma(s)$ кривой в группу ортогональных матриц, т. е. в группу вращений плоскости. Ниже мы изучим свойства этого отображения сразу в многомерном случае.

Определение 1. Пусть кривая отнесена к натуральному параметру. *Кривизной кривой* в точке s называется величина $k(s) = |d^2\mathbf{r}(s)/ds^2|$, т. е. модуль ускорения.

Из определения сразу видим, что $d^2\mathbf{r}(s)/ds^2 = k(s)\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — вектор нормали к кривой.

Определение 2. *Радиусом кривизны* гладкой кривой в точке s называется число $R(s) = 1/k(s)$.

Рассмотрим простые примеры. Прямая на плоскости задается линейной вектор-функцией: $x(s) = x(0) + \alpha s$; $y(s) = y(0) + \beta s$, где s — натуральный параметр. Ясно, что должно выполняться равенство $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$, так как $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ и $|\mathbf{v}(s)| \equiv 1$. Тогда ускорение $d\mathbf{v}(s)/ds$ равно нулю тождественно, а потому кривизна прямой линии равна нулю и радиус кривизны равен бесконечности.

Рассмотрим плоскую окружность радиуса R . Ее параметрическое уравнение таково:

$$x(s) = x(0) + R \cos(s/R), \quad y(s) = y(0) + R \sin(s/R).$$

Прямой подсчет дает, что кривизна окружности постоянна и равна $1/R$, то есть радиус кривизны равен $1/k = R$.

Однако во многих задачах уравнения кривой отнесены не к натуральному параметру, а к какому-то произвольному параметру t , а потому полезно уметь вычислять кривизну кривой, отнесенной к произвольному параметру.

Теорема 1. Пусть гладкая кривая $\gamma(t)$ отнесена к некоторому параметру t , не обязательно натуральному. Пусть в точке t вектор скорости $\mathbf{v}(t)$ отличен от нуля. Тогда

$$k(s) = \frac{|x''y' - y''x'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}},$$

где через x', x'' , обозначены производные по параметру t .

Доказательство. Пусть $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ — радиус-вектор кривой и $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ — вектор скорости. Если s — натуральный параметр, то для произвольной вектор-функции $\mathbf{q}(t)$ имеем

$$\frac{d}{ds} \mathbf{q}(t) = \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} \frac{dt}{ds}.$$

Из определения кривизны получаем

$$k = \left| \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right) \right|.$$

Далее:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right) = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right)$$

и

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)/dt|} = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \right) = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \left(\mathbf{r}'' - \frac{\mathbf{r}'}{2|\mathbf{r}'|^2} \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'|^2 \right).$$

Так как

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}'|^2 = 2\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \rangle,$$

то

$$k = \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \left| \mathbf{r}'' - \mathbf{r}' \frac{\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \rangle}{|\mathbf{r}'|^2} \right|.$$

Далее:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \left(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' \frac{\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \rangle}{|\mathbf{r}'|^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \left(\frac{x''(y')^2 - x'y'y''}{(x')^2 + (y')^2} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{|\mathbf{r}'|^2} \left(\frac{y''(x')^2 - y'x'x''}{(x')^2 + (y')^2} \right) \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } k = \frac{|(x''y' - y''x')|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}}. \blacksquare$$

Оказывается, производные от векторов репера Френе удовлетворяют простым соотношениям, называемым «формулами Френе».

Теорема 2 (Формулы Френе). *Если кривая отнесена к натуральному параметру, то выполнены равенства*

$$\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -k(s)\mathbf{v}(s).$$

Доказательство. Первая формула сразу следует из определения кривизны. Далее, в силу определения имеем $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 1$. Из леммы 2 получаем:

$$\left\langle \mathbf{n}, \frac{d}{ds} \mathbf{n} \right\rangle = 0,$$

т. е.

$$\frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \lambda(s)\mathbf{v}(s),$$

где $\lambda(s)$ — некоторая гладкая функция. Найдем ее. Дифференцируя тождество $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$, получаем

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}, \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right\rangle = 0,$$

откуда $k\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = 0$, т. е. $k = -\lambda$. \blacksquare

Формулы Френе можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{v}/ds \\ d\mathbf{n}/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Это соотношение имеет прозрачный геометрический смысл. Рассмотрим в точке s репер $\omega(s) = (\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$ и сместимся по кривой $\mathbf{r}(s)$ в бесконечно близкую точку $s + \Delta s$ (рис. 4.1). Перенеся

параллельно репер $\omega(s + \Delta s)$ в точку s , получим в ней два репера: $\omega(s)$ и $\omega(s + \Delta s)$, причем $\omega(s + \Delta s)$ получается из репера $\omega(s)$ поворотом на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Следовательно, реперы $\omega(s + \Delta s)$, $\omega(s)$ связаны ортогональным преобразованием: $\omega(s + \Delta s) = A(\Delta s)\omega(s)$, где $A(\Delta s) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi & \sin \Delta\varphi \\ -\sin \Delta\varphi & \cos \Delta\varphi \end{pmatrix}$.

Разлагая функции $\cos \Delta\varphi$, $\sin \Delta\varphi$

в ряды по малому приращению $\Delta\varphi$ и пренебрегая членами второго порядка малости по $\Delta\varphi$, получаем

$$A(\Delta\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} + \dots,$$

т. е.

$$\omega(s + \Delta s) = \omega(s) + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\varphi \\ -\Delta\varphi & 0 \end{pmatrix} \omega(s) +$$

Отсюда

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\varphi(s)}{ds} \\ -\frac{d\varphi(s)}{ds} & 0 \end{pmatrix} \omega(s),$$

где $\varphi(s)$ — угол поворота репера $\omega(s)$ относительно какого-то фиксированного репера на плоскости (скажем, относительно репера $\omega(0)$). В то же время, из формул Френе следует, что $d\omega(s)/ds = = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \omega(s)$. Сравнивая полученные матрицы, видим,

что $k(s) = d\varphi(s)/ds$. Итак, кривизна кривой в точке s равна скорости изменения угла $\varphi(s)$ в этой точке (т. е. скорости поворота репера Френе). В случае плоской кривой функция $k(s)$ полностью определяет кривую, если только $k \neq 0$ для всех s . Более точно, имеет место

Теорема 3. Пусть задана гладкая функция $k(s)$, не обращающаяся в нуль для всех таких s , что $a \leq s \leq b$. Тогда на плоскости существует гладкая кривая $\mathbf{r}(s)$, определяемая однозначно с точностью до параллельного переноса и ортогонального преобразования, для которой $k(s)$ является кривизной, а s — натуральным параметром.

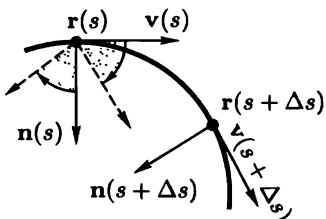


Рис. 4.1

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} d\mathbf{v}(s)/ds \\ dn(s)/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}(s) \\ n(s) \end{pmatrix},$$

где $k(s)$ — заданная функция. Так как $k(s) \neq 0$, то по теореме существования и единственности из теории дифференциальных уравнений эта система имеет единственное (при фиксированных начальных данных) решение, гладкое на всем интервале $a < s < b$. Следовательно, можно рассмотреть уравнение $d\mathbf{r}(s)/ds = k(s)\mathbf{v}(s)$.

По тем же причинам, это уравнение имеет решение, однозначно определенное при задании начальных данных на всем интервале $a < s < b$. (Проверьте, что решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ является искомой кривой!) Здесь любые начальные данные на плоскости можно совместить параллельным переносом и поворотом. ■

Какова роль условия $k(s) \neq 0$? Рассмотрим гладкую кривую, кривизна которой в некоторой точке $s = s_0$ обращается в нуль вместе

с производными всех порядков. Существование таких кривых вытекает из теоремы 3, примененной к гладкой функции $k(s)$, имеющей нуль бесконечного порядка в одной из концевых точек, a или b , где $a \leq s \leq b$. Сопрягая две такие кривые двумя разными способами в их общей концевой точке, где кривизна обращается в нуль вместе со всеми производными, мы и получаем две гладкие кривые, имеющие совпадающие кривизны, но не конгруэнтные (рис. 4.2).

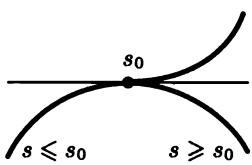


Рис. 4.2

вместе со всеми производными, мы и получаем две гладкие кривые, имеющие совпадающие кривизны, но не конгруэнтные (рис. 4.2).

4.1.2. Теория пространственных кривых. Формулы Френе

Рассмотрим гладкую кривую $\mathbf{r}(t)$ в пространстве \mathbf{R}^n , отнесенном к декартовым координатам x^1, \dots, x^n , т. е. $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Как и в плоском случае, с каждой точкой кривой $\mathbf{r}(s)$ можно однозначно связать репер Френе, гладко меняющийся вдоль кривой при изменении натурального параметра s . Докажем сначала вспомогательное утверждение о дифференцировании матричных функций.

Рассмотрим гладкую кривую в линейном пространстве матриц, т. е. однопараметрическое семейство $A(t)$, где $A(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, коэффициенты которой есть гладкие функции по t , $t \in (-a, a)$. Предположим, что все матрицы $A(t)$ ортогональны с определителем +1, а также, что $A(0) = E$, где E — единичная матрица.

Лемма 3. Пусть $X = \dot{A}(t)|_{t=0}$ — производная этого однопараметрического семейства ортогональных матриц $A(t)$ при $t = 0$, т. е. X — это матрица, составленная из функций вида $da_{ij}(t)/dt|_{t=0}$, где $A(t) = (a_{ij}(t))$. Тогда X — кососимметрическая матрица.

Доказательство. Ортогональная матрица $A(t)$, действуя как оператор, сохраняет евклидово скалярное произведение. Поэтому любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ имеет место тождество $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Слева стоит гладкая функция от t . Вычислим ее производную при $t = 0$. Получим $\langle \dot{A}\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle + \langle A\mathbf{x}, \dot{A}\mathbf{y} \rangle|_{t=0} = 0$, т. е. $\langle X\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, X\mathbf{y} \rangle = 0$, что и означает косую симметрию матрицы X . ■

Матричнозначную функцию $A(t)$ можно разложить в точке $t = 0$ по степеням бесконечно малого приращения Δt :

$$A(\Delta t) = E + \frac{dA(t)}{dt} \Big|_{t=0} \Delta t +$$

Тогда матрица X появляется как «коэффициент» при Δt .

Построим репер Френе. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — вектор-функция, задающая гладкую траекторию $\gamma(s)$ в евклидовом пространстве. Предположим, что все векторы вида $d\mathbf{r}/ds, d^2\mathbf{r}/ds^2, \dots, d^n\mathbf{r}/ds^n$ линейно независимы при каждом s . Тогда они образуют репер (не ортогональный!), гладко меняющийся от точки к точке. В частности, все $d^k\mathbf{r}/ds^k$ отличны от нуля, $1 \leq k \leq n$.

Предложение 1. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — гладкая вектор-функция в \mathbb{R}^n , и пусть k -я производная $d^k\mathbf{r}/ds^k$ оказалась линейно зависимой от производных $d\mathbf{r}/ds, d^2\mathbf{r}/ds^2, \dots, d^{k-1}\mathbf{r}/ds^{k-1}$ в каждой точке интервала $a \leq s \leq b$, причем $d^k\mathbf{r}/ds^k \neq 0$ при $a \leq s \leq b$ и все производные $d\mathbf{r}/ds, d^2\mathbf{r}/ds^2, \dots, d^{k-1}\mathbf{r}/ds^{k-1}$ линейно независимы при $a \leq s \leq b$. Тогда кривая $\mathbf{r}(s)$ целиком содержится в некоторой $(k-1)$ -мерной плоскости, натянутой на векторы $d\mathbf{r}/ds, d^2\mathbf{r}/ds^2, \dots, d^{k-1}\mathbf{r}/ds^{k-1}$. Эта плоскость не меняет своего положения в пространстве при изменении s от a до b .

Доказательство. В силу условия существуют гладкие функции $\lambda_i(s)$, $1 \leq i \leq k-1$, такие, что $d^k\mathbf{r}/ds^k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i(s) \times \times d^i\mathbf{r}/ds^i$. В силу линейной независимости векторов $d\mathbf{r}/ds, d^2\mathbf{r}/ds^2, \dots, d^{k-1}\mathbf{r}/ds^{k-1}$ они определяют базис в плоскости \mathbb{R}^{k-1} , натянутой на эти векторы. Чтобы доказать, что кривая $\gamma(s)$ лежит в k -мерной плоскости, достаточно показать, что плоскость $\mathbb{R}^{k-1}(s)$ не меняет своего положения в пространстве \mathbb{R}^n при изменении s . Достаточно показать, что производная указанного базиса состоит из векторов, разлагающихся по нему же. Но это очевидно в силу условия. ■

Итак, если векторы $dr/ds, d^2r/ds^2, \dots, d^n r/ds^n$ линейно независимы, то кривая $r(s)$ не содержится ни в какой фиксированной $(n - 1)$ -мерной плоскости. Построим в каждой точке s ортонормированный базис τ_1, \dots, τ_n . Положим $(dr/ds)/|dr/ds| = \tau_1$. Затем рассмотрим двумерную плоскость, натянутую на векторы τ_1 и d^2r/d^2s , и выберем в ней вектор τ_2 , ортогональный τ_1 . Так как по предположению dr/ds и d^2r/d^2s линейно независимы, то τ_2 имеет нулевую проекцию на d^2r/d^2s . Следующий вектор τ_3 выберем в трехмерном пространстве, натянутом на $d^3r/d^3s, \tau_2, \tau_1$, причем в качестве τ_3 возьмем вектор, ортогональный плоскости векторов τ_2, τ_1 . Продолжая процесс, мы и получаем искомый ортонормированный репер τ_1, \dots, τ_n . Ясно, что при изменении s репера $\tau(s)$ меняется гладко. Рассмотрим производные от векторов репера $\tau(s) = (\tau_1(s), \dots, \tau_n(s))$. Оказывается, что они также удовлетворяют формулам Френе.

Теорема 4. *Пусть гладкая кривая $r(s)$ в R^n отнесена к натуральному параметру s , и пусть векторы $dr/ds, d^2r/ds^2, \dots, d^n r/ds^n$ линейно независимы в каждой точке $a \leq s \leq b$. Тогда существуют такие гладкие функции $k_2(s), \dots, k_n(s)$, что выполняются тождества (формулы Френе)*

$$\left\{ \begin{array}{l} d\tau_1/ds = k_2 \tau_2, \\ d\tau_2/ds = k_3 \tau_3 - k_2 \tau_1, \\ \vdots \\ d\tau_{n-1}/ds = k_n \tau_n - k_{n-1} \tau_{n-2}, \\ d\tau_n/ds = -k_1 \tau_1, \end{array} \right.$$

m. e. $d\tau_i/ds = k_{i+1} \tau_{i+1} - k_i \tau_{i-1}$, где $k_1 = k_{n+1} = 0$.

Доказательство. Так как вектор τ_i содержится в линейной оболочке векторов $dr/ds, \dots, d^i r/ds^i$, то его производная содержится в линейной оболочке векторов $dr/ds, \dots, d^i r/ds^i, d^{i+1} r/ds^{i+1}$ т. е. существуют некоторые функции $a_{i,1}(s), \dots, a_{i,i+1}(s)$ такие, что

$$\frac{d\tau_i}{ds} = \sum_{j=1}^{i+1} a_{i,j}(s) \tau_j(s).$$

Если мы составим матрицу X размера $n \times n$, выражающую набор векторов $d\tau_1/ds, \dots, d\tau_n/ds$ через репер $\tau(s) = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, то она будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & & & * \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & & \\ & & & a_{n-1,n-2} & \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} & a_{n,n-1} \\ & & & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

С другой стороны, как и в двумерном случае, мы можем интерпретировать перемещение репера $\tau(s)$ вдоль кривой $\gamma(s)$ в терминах семейства ортогональных матриц $A(s)$ таких, что $\tau(s) = A(s) \times \tau(0)$. Задание этого однопараметрического семейства однозначно определяет эволюцию репера $\tau(s)$ при изменении s . Тогда, очевидно, матрица X совпадает с производной матрицы $dA(s)/ds$ при $s = 0$. В силу леммы 3 матрица X будет кососимметрической, т. е.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & & & 0 \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & & \\ & a_{23} & 0 & -a_{34} & \\ & & a_{34} & 0 & \\ & & & 0 & -a_{n-2,n-1} \\ 0 & & & a_{n-2,n-1} & 0 \\ & & & & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Взяв в качестве функций $k_i(s)$ функции $a_{i,i+1}(s)$, мы получаем доказательство теоремы. ■

Рассмотрим трехмерный случай: $n = 3$. Здесь формулы Френе принимают вид

$$\frac{d\tau_1}{ds} = k_2 \tau_2, \quad \frac{d\tau_2}{ds} = k_3 \tau_3 - k_2 \tau_1, \quad \frac{d\tau_3}{ds} = -k_3 \tau_2.$$

Вектор τ_1 является единичным вектором скорости кривой $\gamma(s)$ и обычно обозначается через $\mathbf{v}(s)$. Вектор $\tau_2(s)$ совпадает с производной по s от вектора \mathbf{v} , так как $d\mathbf{v}/ds \perp \mathbf{v}$ и $|\mathbf{v}(s)| = 1$. Здесь мы использовали тот факт, что s — натуральный параметр. Вектор τ_3 ортогонален \mathbf{v} и $\mathbf{n} = d\mathbf{v}/ds$, т. е. можно считать, что он совпадает с векторным произведением векторов \mathbf{v} , \mathbf{n} . Вектор \mathbf{n} называют **вектором нормали** к кривой $\gamma(s)$, а вектор $\mathbf{b} = [\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ — **вектором бинормали** к кривой $\gamma(s)$. Здесь через $[\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ мы обозначили векторное произведение \mathbf{v} и \mathbf{n} . В этих обозначениях формулы Френе запишутся так:

$$\frac{dv}{ds} = k \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \alpha \mathbf{b} - k \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\alpha \mathbf{n}.$$

Здесь $k(s) = k_2(s)$ и называется *кривизной* кривой, а $\alpha(s) = k_3(s)$ и называется *кручением* кривой. Иногда вектор $\mathbf{n}(s)$ называют не просто *нормалью*, а *главной нормалью* к кривой $\gamma(s)$.

Для удобства работы с кривизной, будем всегда считать, что вектор τ_2 совпадает с $(dv(s)/ds)/|dv(s)/ds|$; тогда $k(s)$ совпадает с модулем вектора $dv(s)/ds$ и, следовательно, является положительным числом (мы считаем, что соответствующие производные радиус-вектора отличны от нуля). Если кривая плоская, то вектор бинормали является постоянным вектором, не меняется при изменении точки на кривой; в частности, кручение кривой равно нулю. Следовательно, плоские кривые могут быть охарактеризованы (с точки зрения \mathbb{R}^3) как кривые с нулевым кручением.

Изучим подробнее роль кручения пространственной кривой, когда оно отлично от нуля. Рассмотрим скольжение репера $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ вдоль кривой и будем проектировать векторы $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ на плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{b}(s_0)$ и $\mathbf{n}(s_0)$, где s_0 — некоторое фиксированное значение параметра s , а значения s предполагаются бесконечно близкими к s_0 . При этом вектор скорости спроектируется в вектор бесконечно малой длины, а потому можно считать (в первом приближении), что этот вектор проектируется в нуль. Тогда в плоскости $\mathbf{b}(s_0)$, $\mathbf{n}(s_0)$ возникает некоторое движение векторов $\mathbf{b}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, спроектированных на эту плоскость. Из формул Френе следует, что это движение описывается формулами $d\mathbf{n}/ds = \alpha \mathbf{b}$, $d\mathbf{b}/ds = -\alpha \mathbf{n}$, т. е. движение определяется кососимметрической матрицей $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$, что определяет бесконечно малый поворот репера \mathbf{b} , \mathbf{n} . Следовательно, векторы \mathbf{b} , \mathbf{n} вращаются относительно вектора скорости кривой, причем скорость вращения однозначно задается кручением кривой (отсюда, кстати, происходит и сам термин «кручение»). При этом кривая теряет свою плоскую форму и становится «изогнутой в пространстве», если она первоначально была плоской. Итак, можно считать, что пространственная

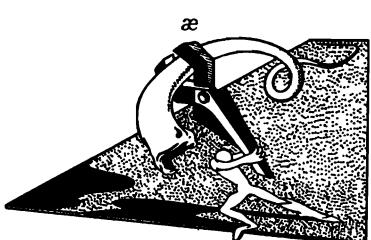


Рис. 4.3

кривая (в малом) может быть получена из плоской кривой, если двигаться по ней с равномерной скоростью, «подкручивая» в каждый момент времени эту кривую с помощью кручения α (рис. 4.3).

вектора скорости кривой, причем скорость вращения однозначно задается кручением кривой (отсюда, кстати, происходит и сам термин «кручение»). При этом кривая теряет свою плоскую форму и становится «изогнутой в пространстве», если она первоначально была плоской. Итак, можно считать, что пространственная

Предложение 2. Гладкая кривая с ненулевым вектором скорости является гладким одномерным многообразием, гладко вложенным в \mathbf{R}^n .

Доказательство. То, что кривая является гладким многообразием, непосредственно следует из определения гладкого многообразия. Остается проверить, что она является гладким подмногообразием в \mathbf{R}^n , для чего нужно изучить дифференциал отображения вложения i , т. е. линейное отображение di . Поскольку оно полностью определяется вектором скорости кривой, то матрица Якоби имеет максимальный ранг в каждой точке кривой, а потому кривая является подмногообразием. ■

Ясно, что любое одномерное гладкое замкнутое (т. е. не имеющее края) многообразие диффеоморфно либо прямой (некомпактное многообразие), либо окружности (компактное многообразие). Таким образом, все одномерные многообразия исчерпываются только двумя различными многообразиями. Они уже не диффеоморфизмы, так как прямая некомпактна, а окружность компактна.

Задачи

1. Доказать, что если у плоской кривой кривизна тождественно равна нулю, то это — прямая линия.
2. Доказать, что в трехмерном пространстве плоские кривые характеризуются условием $\alpha \equiv 0$.
3. Доказать, что прямые в трехмерном пространстве характеризуются условиями $k \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$.
4. Описать класс кривых, для которых $k = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.
5. Доказать, что траектории движения материальной точки в центральном силовом поле являются плоскими кривыми.

4.2. ПОВЕРХНОСТИ.

ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

4.2.1. Первая квадратичная форма

Рассмотрим в пространстве \mathbf{R}^n гладкое подмногообразие V^{n-1} размерности $n - 1$ (или, как говорят, «коразмерности один»). Сейчас мы будем интересоваться лишь локальными свойствами гиперповерхности. Поэтому можно считать, что задано гладкое вложение диска D^{n-1} в \mathbf{R}^n . Выше мы обсуждали различные способы задания гиперповерхностей. Выберем параметрическое задание, т. е. будем считать, что V^{n-1} локально задается гладким радиус-

вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$, где координаты u^1, \dots, u^{n-1} меняются в некотором диске в пространстве параметров \mathbf{R}^{n-1} . Векторы $dr/du^1, \dots, dr/du^{n-1}$ можно считать линейно независимыми в каждой точке области определения. Они являются касательными к соответствующим координатным линиям, проходящим через выбранную точку на поверхности. Гладкое вложение V^{n-1} в \mathbf{R}^n порождает на V^{n-1} индуцированную риманову метрику. Напомним эту конструкцию.

Пусть x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в \mathbf{R}^n ; тогда радиус-вектор \mathbf{r} задается гладкими функциями $x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть $ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ — евклидова метрика; тогда возникает следующая квадратичная форма:

$$ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k,p=1}^{n-1} \frac{\partial x^i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u) du^k du^p,$$

$$g_{kp} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right\rangle;$$

здесь через \langle , \rangle обозначено скалярное произведение в \mathbf{R}^n .

Определение 1. Первой квадратичной формой гиперповерхности V^{n-1} в \mathbf{R}^n называется форма $ds^2|_{V^{n-1}} = \sum_{k,p} g_{kp} du^k du^p$, где функции $g_{kp}(u^1, \dots, u^{n-1})$ определены выше.

Первая квадратичная форма определена на векторах, касательных к V^{n-1} . Более точно: если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_p V^{n-1}$ — два касательных вектора, то определено скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})} = g_{kp} a^k b^p = \sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp} a^k b^p$.

Напомним, что для упрощения обозначений мы опускаем знак суммирования, когда оно ведется по совпадающим верхним и нижним индексам. Ясно, что скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{ds^2(V^{n-1})}$ совпадает с евклидовым скалярным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , рассматриваемых как векторы объемлющего пространства \mathbf{R}^n . Симметричная матрица метрического тензора \mathfrak{G} , составлена из функций g_{kp} .

Длина дуги $\gamma(t)$, расположенной в V^{n-1} , выражается по формуле $\int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} dt$, т. е.

$$l = \int_a^b \sqrt{\sum_{k,p=1}^{n-1} g_{kp}(u(t)) \frac{du^k(t)}{dt} \frac{du^p(t)}{dt}} dt.$$

Какой вид приобретает первая квадратичная форма для различных способов задания гиперповерхности? Пусть V^{n-1} задана в ви-

де графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Имеем

$$\begin{aligned} ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + (dx^n(x^1, \dots, x^{n-1}))^2 = \\ &= \sum_{k,p=1}^{n-1} \left(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} \right) dx^k dx^p. \end{aligned}$$

Иногда будем обозначать $\partial f / \partial x^\alpha$ через f_{x^α} .

Пусть поверхность V^{n-1} задана с помощью неявной функции, т.е. в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, где $\partial F / \partial x^n \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует локальное решение уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ вида $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, причем $\partial f / \partial x^i = -(\partial F / \partial x^i) / (\partial F / \partial x^n)$. Отсюда получаем $\mathfrak{G} = (g_{kp})$, где

$$g_{kp} = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial F}{\partial x^p} \right) \Big/ \left(\frac{\partial F}{\partial x^n} \right)^2 \right] + \delta_{kp}.$$

Рассмотрим вложение двумерной поверхности в трехмерное евклидово пространство. Пусть V^2 задано параметрически: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Тогда первая квадратичная форма обычно записывается в виде $ds^2(V^2) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, где $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$, $G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$ — коэффициенты формы, выраженные через компоненты радиус-вектора \mathbf{r} :

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Напомним, что метрика $ds^2(V^2)$ называется *конформно-евклидовой*, если $E = G$ и $F = 0$.

Рассмотрим первую квадратичную форму поверхностей вращения, вложенных в \mathbb{R}^3 . Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) , и пусть поверхность задана параметрически: $\varphi = u$, $z = v$, $r = r(v)$. Тогда вычисление дает

$$ds^2(V^2) = (1 + (r'_v)^2) dv^2 + r^2 du^2.$$

Здесь $F = 0$, $E = r^2(v)$, $G = 1 + (r'_v)^2$. Тот факт, что $F = 0$, означает, что координатные линии $v = v_0 = \text{const}$ и $u = u_0 = \text{const}$ ортогональны друг другу в каждой точке (рис. 4.4).

Лемма 1. Пусть $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие и \mathfrak{G} — первая квадратичная форма. Тогда форма \mathfrak{G} невырождена.

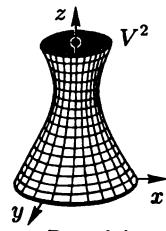


Рис. 4.4

Доказательство. В силу определения радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$ все векторы \mathbf{r}_{u^k} линейно независимы. Поскольку матрица \mathfrak{G} составлена из скалярных произведений векторов \mathbf{r}_{u^k} и \mathbf{r}_{u^p} , то \mathfrak{G} невырождена. ■

4.2.2. Вторая квадратичная форма

Пусть V^{n-1} — гиперповерхность в \mathbf{R}^n , заданная радиус-вектором вида $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$. Пусть $\mathbf{n}(P)$ — единичный вектор, ортогональный поверхности V^{n-1} в точке P . Определим квадратичную форму $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$, задав ее значения для произвольного вектора $\mathbf{a} \in T_P(V^{n-1})$.

Рассмотрим гладкую кривую $\gamma(t)$, лежащую на V^{n-1} и проходящую через точку P , причем так, что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$. Такая кривая всегда существует, хотя и определена неоднозначно (рис. 4.5). Так как вдоль кривой $\gamma(t)$ радиус-вектор \mathbf{r} является функцией от t , то $\mathbf{a} = d\mathbf{r}(u(t))/dt|_{t=0}$. Рассмотрим вектор-функцию $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}(u(t))/dt^2$. Обозначим через $\ddot{\mathbf{r}}_a$ значение $\ddot{\mathbf{r}}$ при $t = 0$. Это — вторая производная \mathbf{r} по направлению вектора \mathbf{a} .

и ее производную по t , т. е. $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}(u(t))/dt^2$. Обозначим через $\ddot{\mathbf{r}}_a$ значение $\ddot{\mathbf{r}}$ при $t = 0$. Это — вторая производная \mathbf{r} по направлению вектора \mathbf{a} .

Определение 2. Положим $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \langle \ddot{\mathbf{r}}_a; \mathbf{n} \rangle$.

Определенное нами число является величиной проекции вектора $\ddot{\mathbf{r}}_a$ на нормаль \mathbf{n} в точке P (рис. 4.6). Вычислим $Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ через координаты вектора \mathbf{r} . Имеем

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt} + \mathbf{r}_{u^k} \frac{d^2u^k}{dt^2},$$

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(u(t)), \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \mathbf{r}_{u^k, u^p} \frac{du^k}{dt} \frac{du^p}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle + 0.$$

Рис. 4.6

При этом следует помнить, что вектор \mathbf{a} имеет координаты $(du^1(0)/dt, \dots, du^{n-1}(0)/dt)$, т. е. окончательно

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \langle \mathbf{n}, \mathbf{r}_{u^k u^p}|_{t=0} \rangle a^k a^p.$$

Эта квадратичная форма однозначно определяет билинейную форму $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, значение которой на паре произвольных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(V^{n-1})$ определяется так:

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{kp} a^k b^p,$$

где $q_{kp} = \langle \mathbf{r}_{u^k u^p}|_{t=0}, \mathbf{n} \rangle$.

Лемма 2. Выражение $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{kp}a^k b^p$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(V^{n-1})$ определяет билинейную форму.

Доказательство. Имеем

$$q_{k'p'} = \langle \mathbf{r}_{u^{k'} u^{p'}}|_{t=0}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{r}(0)}{\partial u^k \partial u^p}, \mathbf{n} \right\rangle = \frac{\partial u^k}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^p}{\partial u^{p'}} q_{kp},$$

т. е. функции q_{kp} преобразуются при замене координат как коэффициенты билинейной формы, что и требовалось доказать. ■

Определение 3. Билинейная форма $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ называется *второй квадратичной формой поверхности* $V^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Ясно, что форма Q зависит от способа вложения V^{n-1} в \mathbb{R}^n , т. е. при гладкой деформации V^{n-1} эта форма, вообще говоря, меняется. Она не является инвариантной при изометриях V^{n-1} в \mathbb{R}^n . Например, пусть V^2 — двумерная плоскость в \mathbb{R}^3 ; тогда радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ можно считать линейной функцией от u, v . Следовательно, первая форма является евклидовой метрикой: $du^2 + dv^2$ (рис. 4.7).

Теперь рассмотрим изометрическое преобразование V^2 — свертывание плоскости \mathbb{R}^2 в цилиндр, ось которого параллельна оси Ox (рис. 4.8). Ясно, что вторая форма цилиндра отлична от нуля, так как отлично от нуля число $\langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$. В то же время вторая форма плоскости \mathbb{R}^2 тождественно равна нулю. Следовательно, при изгиении (т. е. при изометрии) вторая форма изменилась.

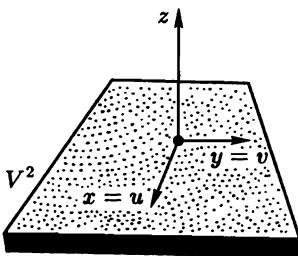


Рис. 4.7

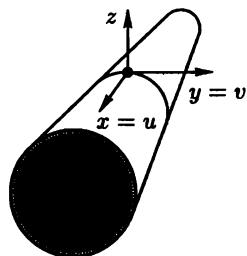


Рис. 4.8

Рассмотрим фиксированное подмногообразие V^{n-1} . В каждой его точке P определена первая форма \mathfrak{G} и вторая форма Q . С этой парой связан набор инвариантов, позволяющих изучать V^{n-1} независимо от введенной на ней системы координат. Пусть \mathfrak{G} и Q — матрицы форм. Рассмотрим полином по переменной λ : $\det(Q - \lambda \mathfrak{G})$. Поскольку форма \mathfrak{G} невырождена, то существует матрица \mathfrak{G}^{-1} . Следовательно, уравнение $\det(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E) = 0$ эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda \mathfrak{G}) = 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ собственные числа матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$, т. е. корни уравнения $\det(Q - \lambda\mathfrak{G}) = 0$. Вскоре мы докажем, что все они вещественны. Запишем характеристический полином $F(\lambda)$ в виде $\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k \lambda^k$, где σ_k — симметрические функции от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$.

Лемма 3. Функции σ_k являются инвариантами пары форм \mathfrak{G} и Q , т. е. сохраняются при произвольной невырожденной замене координат в окрестности точки $P \in V^{n-1}$.

Доказательство. При регулярной замене координат $x \rightarrow x'$ в касательном пространстве $T_P V^{n-1}$ возникает индуцированное линейное невырожденное преобразование с помощью матрицы Якоби: J . При этом $\mathfrak{G} \rightarrow J\mathfrak{G}J^\top = \mathfrak{G}'$; $Q \rightarrow JQJ^\top = Q'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \det((\mathfrak{G}')^{-1}Q' - \lambda E) &= \det[(J^\top)^{-1}(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E)J^\top] = \\ &= \det(\mathfrak{G}^{-1}Q - \lambda E), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. ■

Нас будут особенно интересовать инварианты

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \text{Sp}(\mathfrak{G}^{-1}Q), \quad \sigma_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \det(\mathfrak{G}^{-1}Q).$$

Определение 4. Функция $H(P) = \sigma_1(P) = \sigma_1(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется средней кривизной поверхности V^{n-1} . Функция $K(P) = \sigma_{n-1}(P) = \sigma_{n-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ называется гауссовой кривизной поверхности V^{n-1} .

Если $n = 3$, то $H(P) = \lambda_1 + \lambda_2$, $K(P) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Теорема 1. Все собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ пары форм \mathfrak{G} , Q вещественны. В том случае, когда все эти числа попарно различны, собственные векторы e_1, \dots, e_{n-1} матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$ взаимно ортогональны, как относительно объемлющей евклидовой метрики в \mathbf{R}^n , так и относительно римановой метрики, индуцированной на V^{n-1} вложением $V^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Доказательство. По известной теореме из алгебры собственные числа симметрической матрицы вещественны и все ее собственные векторы взаимно ортогональны для различных собственных чисел. Пока что эта теорема неприменима, так как матрица $\mathfrak{G}^{-1}Q$, вообще говоря, не симметрична. Так как форма $\mathfrak{G}(P)$ симметрична, то в некоторой окрестности точки P существует регулярная замена координат такая, что в одной точке P форма $\mathfrak{G}(P)$ приводится к диагональному виду. Приведя \mathfrak{G} к диагональному виду, можно затем привести ее к единичной матрице, применяя растя-

жения вдоль главных осей формы. Пусть A — линейный оператор $A: T_P V^{n-1} \rightarrow T_P V^{n-1}$, приводящий \mathfrak{G} к единичной матрице. Тогда $\mathfrak{G} = AEA^\top = AA^\top$. Матрица E определяет ортобазис $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в $T_P V^{n-1}$. Получаем $\det(Q - \lambda\mathfrak{G}) = \det[A(A^{-1}Q(A^{-1})^\top - \lambda E)A^\top]$.

Рассмотрим форму $\tilde{Q} = BQB^\top$, где $B = A^{-1}$. Исходное уравнение $\det(Q - \lambda\mathfrak{G}) = 0$ запишется в базисе $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ в виде $\det(\tilde{Q} - \lambda E) = 0$, так как $\det A \neq 0$. При этом $\tilde{Q}^\top = \tilde{Q}$, так как $Q^\top = Q$. Следовательно, все собственные числа и собственные векторы у формы \tilde{Q} и матрицы $\mathfrak{G}^{-1}Q$ одни и те же. Так как форма \tilde{Q} симметрична, то все ее собственные числа (т. е. $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$) вещественны, и в случае, когда все они попарно различны, все ее собственные векторы взаимно ортогональны. Это следует из известной теоремы алгебры. ■

Определение 5. Направления, задаваемые векторами e_1, \dots, e_{n-1} (определенными однозначно, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$) называются *главными направлениями гиперповерхности* V^{n-1} в точке P , или *главными осями*.

Итак, мы связали с каждой точкой гиперповерхности V^{n-1} однозначно определенный (если $\lambda_i \neq \lambda_j$) с точностью до выбора знака ортобазис e_1, \dots, e_{n-1} , гладко зависящий от P .

Поскольку в ортобазисе e_1, \dots, e_{n-1} матрица \mathfrak{G} становится единичной, то $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ совпадают с собственными числами формы Q , записанной в ортобазисе e_1, \dots, e_{n-1} .

Рассмотрим частный случай. Пусть V^{n-1} задана в виде графика $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ и плоскость $T_P V^{n-1}$ в точке P совпадает с плоскостью переменных x^1, \dots, x^{n-1} (рис. 4.9). Тогда нормаль \mathbf{n} к V^{n-1} в точке P имеет координаты $(0, \dots, 0, 1)$; радиус-вектор \mathbf{r} , описывающий поверхность V^{n-1} , имеет вид $\mathbf{r} = (x^1, \dots, x^{n-1}; f(x^1, \dots, x^{n-1}))$. Так как гиперплоскость $(x^1, \dots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$ касается V^{n-1} в точке P , то $\partial f / \partial x^i|_P = 0$; отсюда $\mathfrak{G}(P) = E$, так как $g_{ij} = f_{x^i} f_{x^j} + \delta_{ij}$.

Рассмотрим матрицу $Q = (q_{ij})$, где

$$q_{ij} = \langle \mathbf{r}_{x^i x^j}; \mathbf{n} \rangle = \frac{\partial^2 f(P)}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Итак, $Q = (f_{x^i x^j}(P))$ совпадает с матрицей гессиана функции f в

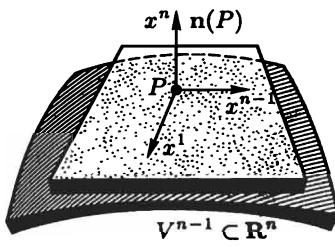


Рис. 4.9

точке P . Средняя кривизна $H(P)$ имеет вид

$$H(P) = \sum_{k=1}^{n-1} f_{x^k x^k};$$

для гауссовой кривизны $K(P)$ получаем $K(P) = \det(f_{x^i x^j}(P))$. Для двумерной поверхности (при $n = 3$) получаем

$$H(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f,$$

где Δ — оператор Лапласа, $K(P) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

4.2.3. Элементарная теория гладких кривых на гиперповерхности

Пусть $\mathbf{n}(P)$ — нормаль к гиперповерхности V^{n-1} . Рассмотрим двумерную плоскость \mathbf{R}^2 , проходящую через P и пересекающую V^{n-1} по некоторой гладкой кривой $\gamma(t) = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$. Мы рассматриваем здесь малую окрестность точки.

Определение 6. Гладкая кривая $\gamma(t) = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ называется *плоским сечением гиперповерхности*.

Пусть γ — плоское сечение V^{n-1} . Зафиксируем содержащую ее плоскость \mathbf{R}^2 , и пусть точка O — начало координат, из которого

выходит радиус-вектор $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$, описывающий поверхность V^{n-1} . Пусть \mathbf{m} — нормаль к плоской кривой $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$, содержащаяся в \mathbf{R}^2 (рис. 4.10). Нормали \mathbf{n} и \mathbf{m} , вообще говоря, не совпадают.

Введем на кривой $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ натуральный параметр s . Тогда в плоскости \mathbf{R}^2 кривая $\gamma(s)$ задается радиус-вектором $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^1(s), \dots, u^{n-1}(s))$. В силу формул Френе для плоских кривых имеем $k = |d^2\mathbf{r}/ds^2|$, где $k(s)$ — кривизна кривой. Напомним, что $d^2\mathbf{r}/ds^2 = m k$. С другой стороны, если $\mathbf{a} = d\mathbf{r}(s)/ds$ — вектор скорости кривой γ , то, в силу определения второй формы Q , имеем

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \langle \mathbf{k} \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = k \cos \theta,$$

где θ — угол между нормалями \mathbf{m} и \mathbf{n} (рис. 4.10). С другой стороны,

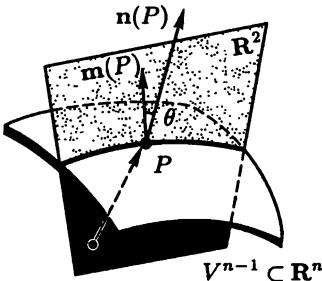


Рис. 4.10

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-2} Q\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right),$$

где t — произвольный гладкий параметр вдоль кривой γ . Здесь $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{a}$ — произвольный касательный вектор к кривой γ в точке P . Если $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^{n-1})$, то

$$k \cos \theta = \frac{q_{ij} a^i a^j}{g_{ij} a^i a^j}.$$

Следовательно, нами доказана

Теорема 2 (Менье). Для любого касательного вектора $\mathbf{a} \in T_P V^{n-1}$ и любого плоского сечения γ (такого, что $\dot{\gamma} = \mathbf{a}$) отношение второй формы к первой равно $k \cos \theta$, т. е.

$$\frac{Q(\mathbf{a}, \mathbf{a})}{G(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \frac{q_{ij} a^i a^j}{g_{ij} a^i a^j} = k \cos \theta.$$

Кривизна k называется *кривизной плоского сечения*. Среди плоских сечений выделен класс нормальных сечений.

Определение 7. Плоское сечение $\gamma = \mathbf{R}^2 \cap V^{n-1}$ называется *нормальным*, если $\mathbf{n}(P) \in \mathbf{R}^2$, т. е. $\theta = 0$.

Каждое нормальное сечение в точке P однозначно задается касательным вектором $\mathbf{a} \in T_P V^{n-1}$. Плоскость \mathbf{R}^2 , определяющая сечение, натянута на нормаль $\mathbf{n}(P)$ и вектор \mathbf{a} . Вращая плоскость \mathbf{R}^2 вокруг $\mathbf{n}(P)$, получаем все нормальные сечения гиперповерхности в точке P .

Для нормального сечения γ доказанная в теореме 2 формула принимает вид

$$k = \frac{q_{ij} a^i a^j}{g_{ij} a^i a^j},$$

так как $\theta = 0$. Поскольку кривизна плоского сечения (вдоль вектора \mathbf{a}), образующего угол θ с нормалью \mathbf{n} , зависит от θ , то эту функцию следует записать в виде $k(\theta, \mathbf{a})$. В силу доказанного утверждения: $k(\theta, \mathbf{a}) \cos \theta = k(0, \mathbf{a})$, где $k(0, \mathbf{a})$ — кривизна нормального сечения (вдоль вектора \mathbf{a}).

Таким образом, если известна кривизна нормального сечения $k(0, \mathbf{a})$, то кривизна любого другого плоского сечения (вдоль \mathbf{a}), образующего угол θ с \mathbf{n} , находится из формулы $k(\theta, \mathbf{a}) = 1/\cos \theta \times k(0, \mathbf{a})$.

Теперь напомним, что в касательной плоскости $T_P V^{n-1}$ всегда определены главные направления $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$, определяющиеся однозначно, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим эти «главные

оси» e_1, \dots, e_{n-1} и построим по каждому из них нормальное плоское сечение $\gamma_i = R_i^2 \cap V^{n-1}$, где плоскость R_i^2 натянута на n, e_i . Все главные направления e_i взаимно ортогональны в евклидовой метрике на $T_P V^{n-1}$. Обозначим через k_i кривизну нормального сечения γ_i (эти сечения иногда называются главными нормальными сечениями).

Теорема 3. Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ совпадают с кривизнами k_1, \dots, k_{n-1} главных нормальных сечений.

Доказательство. Из теоремы 2 имеем $k \cos \theta = q_{ij} a^i \times a^j / g_{ij} a^i a^j$; так как $\theta = 0$ для нормального сечения, то $k = q_{ij} a^i \times a^j / g_{ij} a^i a^j$, где a — определяющий вектор нормального сечения. Фиксируем в $T_P V^{n-1}$ ортобазис e_1, \dots, e_{n-1} . Тогда $g_{ij} = \delta_{ij}$, $q_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$; следовательно,

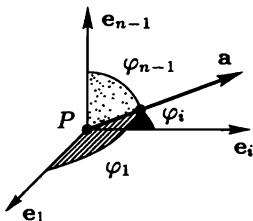


Рис. 4.11

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (a^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (a^i)^2}.$$

Если $a \in T_P V^{n-1}$ совпадает с одним из e_i , то $k_i = \lambda_i$, что и требовалось. ■

Рассмотрим в $T_P V^{n-1}$ произвольный вектор a и рассмотрим нормальное сечение вдоль a . Обозначим через φ_i углы, образуемые a с главными направлениями e_1, \dots, e_{n-1} (рис. 4.11).

Предложение 1. Для нормального сечения вдоль произвольного вектора $a \in T_P V^{n-1}$ выполнена формула Эйлера

$$k(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем

$$k(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{(a^i)^2}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (a^i)^2} \right)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \cos^2 \varphi_i,$$

где

$$\cos \varphi_i = a^i / |a| \quad ■.$$

Формула Эйлера позволяет установить «экстремальные свойства» главных кривизн $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Рассмотрим кривизну нормального сечения $k(a)$ как функцию от $a \in T_P V^{n-1}$. Положив $x^i = \cos \varphi_i$, можно считать, что $k(a) = k(x^1, \dots, x^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x^i)^2$ является функцией на сфере S^{n-2} , заданной уравнением $(x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 = 1$ в $T_P V^{n-1}$. Так как сфера S^{n-2} — гладкое

многообразие, то в окрестности каждой ее точки можно ввести локальные координаты y^1, \dots, y^{n-2} .

Назовем точку $x_0 \in S^{n-2}$ *критической* для функции $f(x)$, заданной на S^{n-2} , если $\partial f / \partial y^i|_{x_0} = 0$.

Вопрос: какие критические точки имеет на сфере гладкая функция $k(\mathbf{a})$? И, кроме того, какие значения принимает кривизна $k(\mathbf{a})$ в этих критических точках?

Теорема 4. Критическими точками кривизны $k(\mathbf{a})$ на сфере $S^{n-2} \in T_p V^{n-1}$ являются в точности точки вида $\pm \mathbf{e}_i$, $1 \leq i \leq n-1$, в том случае, когда $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В точках $\pm \mathbf{e}_i$ функция $k(\mathbf{a})$ принимает значения, равные λ_i . В этом смысле главные кривизны являются экстремальными значениями функции кривизны $k(\mathbf{a})$. Если среди собственных чисел $\{\lambda_i\}$ есть совпадающие, то критическими точками функции $k(\mathbf{a})$ являются в точности концы всех собственных векторов формы Q .

Доказательство мы предоставляем читателю.

Пусть $n = 3$. Тогда формула Эйлера принимает вид $k(\mathbf{a}) = \lambda_1 \times \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2 \cos^2 \varphi_2$, где $\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 = 1$ (пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2$), т. е. $k(\mathbf{a}) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cos^2 \varphi_1 + \lambda_2$. Ясно, что минимум $k(\mathbf{a})$ равен λ_2 , максимум $k(\mathbf{a})$ равен λ_1 . Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $k(\mathbf{a}) = \lambda_1 = \lambda_2$ (рис. 4.12).

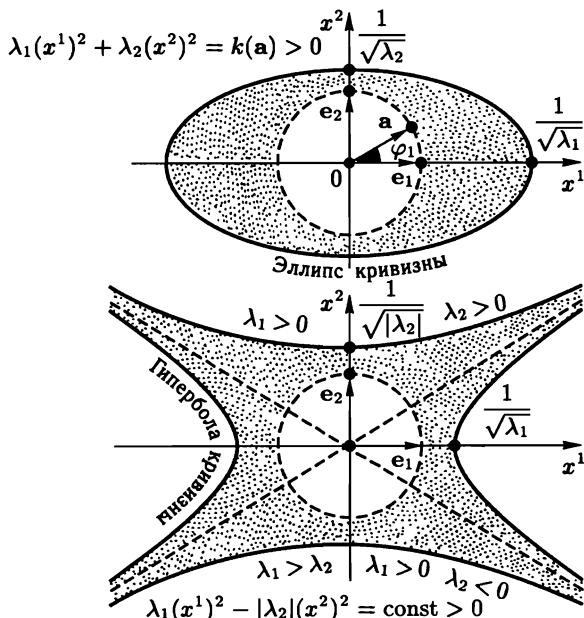


Рис. 4.12

Квадрикой нормальных кривизн называется следующая поверхность: $\lambda_1 \cos^2 \varphi_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cos^2 \varphi_{n-1} = \text{const}$. Направления, соответствующие экстремальным (критическим) значениям кривизны, совпадают с главными осями квадрики. Если все главные кривизны положительны, то квадрика является эллипсоидом.

Разберем случай двумерной поверхности $V^2 \subset \mathbf{R}^3$. Ее гауссова кривизна $K(P)$ описывает важные локальные свойства поверхности. Поскольку $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$, то выделяются три случая: а) $K > 0$; б) $K < 0$; в) $K = 0$.

Достаточно рассмотреть только случаи: а) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$; б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$; в) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В случае а) поверхность выпукла, т. е. локально расположена по одну сторону от касательной плоскости в точке P (рис. 4.13). В случае б) поверхность локально имеет вида седла (рис. 4.14). Такие точки называются седловыми или точками перевала. В случае в), при $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = 0$, поверхность V^2 имеет (локально, в первом приближении) вид «цилиндра» (рис. 4.15). Если обе главные кривизны нулевые, такая точка называется точкой уплощения поверхности.

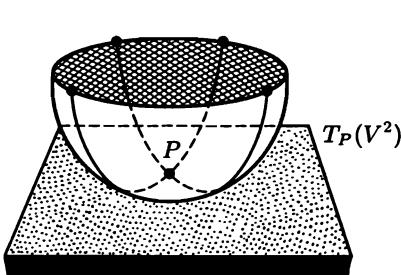


Рис. 4.13

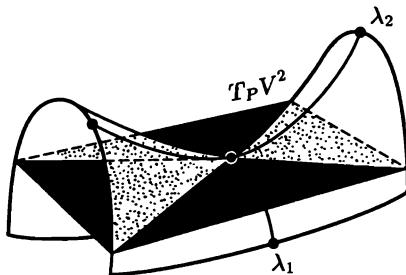


Рис. 4.14

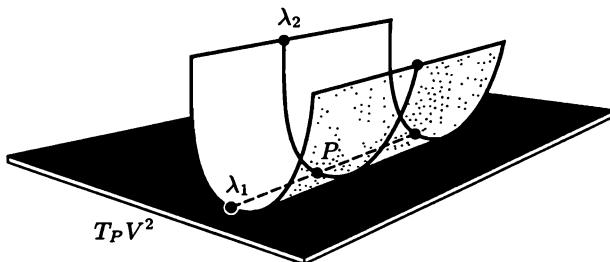


Рис. 4.15

4.2.4. Гауссова и средняя кривизны двумерных поверхностей

Пусть поверхность $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ задана в виде графика $z = f(x, y)$, где (x, y, z) — декартовы координаты. Пусть $f(0, 0) = 0$; тогда координатная плоскость (x, y) — касательная к V^2 в точке $(0, 0)$. Так как

$$\mathfrak{G}|_{(0,0)} = E, \quad Q|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

то $K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$; $H = f_{xx} + f_{yy} = \lambda_1 + \lambda_2$. Теперь вычислим H и K в точках, отличных от $(0, 0)$.

Пусть $\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. Тогда прямой подсчет дает:

$$H = \frac{1}{g}(GL - 2MF + EN), \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Здесь $g = \det \mathfrak{G}$.

Если $z = f(x, y)$, то $ds^2 = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2)dy^2$. Так как радиус-вектор поверхности имеет вид $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$, то

$$\mathbf{r}_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad \mathbf{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy}), \quad \mathbf{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad}(z - f)}{|\text{grad}(z - f)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

Отсюда

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Гауссова и средняя кривизны не зависят от выбора локальных координат на поверхности.

Легко подсчитать, что для сферы $K = 1/R^2$, $H = 2/R$, в частности, ее гауссова и средняя кривизны постоянны.

Гауссова и средняя кривизны двумерной плоскости равны нулю.

Определение 8. Двумерная поверхность $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ называется *поверхностью постоянной кривизны*, если ее гауссова кривизна K постоянна.

Определение 9. Двумерная поверхность $V^2 \subset \mathbf{R}^3$ называется *поверхностью положительной, нулевой, отрицательной кривизны*,

если соответственно гауссова кривизна поверхности во всех ее точках положительна, равна нулю, отрицательна.

Стандартная двумерная сфера является многообразием положительной (постоянной) кривизны.

Задача. Докажите, что эллипсоид $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ является поверхностью строго положительной кривизны, если полуоси a, b, c отличны от 0 и ∞ . Эллипсоид можно записать параметрически так:

$$x = a \cos \theta \cos \varphi, \quad y = b \cos \theta \sin \varphi, \quad z = \sin \theta.$$

Евклидова плоскость является многообразием нулевой постоянной кривизны. Пример многообразия отрицательной кривизны дает график $z = x^2 - y^2$. Ясно, что

$$K = \frac{-4}{(1 + 4(x^2 + y^2))^2} < 0.$$

Здесь гауссова кривизна является переменной функцией. Легко построить многообразие постоянной отрицательной кривизны $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Сейчас мы укажем такую поверхность. Тем самым мы докажем утверждение: *в трехмерном евклидовом пространстве существуют (локально) поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной кривизны*.

Рассмотрим на плоскости кривую γ , расположенную в первом квадранте, со следующим свойством: длина отрезка касательной от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью Ox постоянна и равна a (рис. 4.16). При перемещении точки A

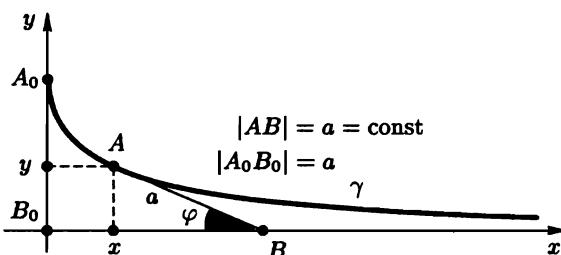


Рис. 4.16

по кривой γ точка B скользит по оси Ox , и отрезок AB имеет постоянную длину, равную a .

Найдем уравнение кривой γ . Из треугольника ABx (рис. 4.16) имеем $\operatorname{tg} \varphi = -y'_x$, где $y = y(x)$ — график γ ; $a \sin \varphi = y$. Отсюда

$$x'_y = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

где $x = x(y)$ — график γ . Итак,

$$x(y) = - \int_y^a \frac{1}{y} \sqrt{a^2 - y^2} dy = -\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} \right).$$

Рассмотрим поверхность вращения, получающуюся вращением кривой γ вокруг оси Ox (рис. 4.17). Она называется *поверхностью Бельтрами*, или *псевдосферой*. Найдем ее гауссову кривизну. Сделаем это для поверхности вращения общего вида.

Рассмотрим в $\mathbf{R}^3(x, y, z)$ поверхность V^2 , образованную вращением вокруг оси Ox кривой $x = x(y)$ (т. е. образующей), расположенной в плоскости Oxy . На V^2 возникает ортогональная координатная сеть: параллели и меридианы (рис. 4.18).

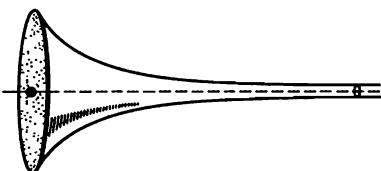


Рис. 4.17

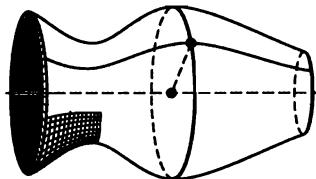


Рис. 4.18

Лемма 4. В каждой точке поверхности вращения главные направления, т. е. отвечающие главным кривизнам λ_1, λ_2 , всегда можно считать совпадающими с направлениями меридиана и параллели, проходящих через эту точку.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то главные направления определены однозначно и совпадают с направлениями меридиана и параллели. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то любое направление главное.

Доказательство. Главными направлениями в $T_P V^2$ являются те ортобазисы e_1, e_2 , в которых обе формы \mathfrak{G} и Q диагональны. Ясно, что первая форма диагональна в координатах (u, v) на поверхности, порожденных меридианами и параллелями. Докажем, что вторая форма также диагональна. Надо доказать, что $M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$,

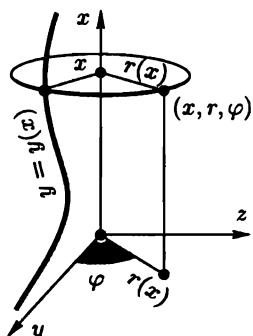


Рис. 4.19

где $\mathbf{r}(u, v)$ — радиус-вектор V^2 , \mathbf{n} — нормаль к V^2 . Рассмотрим цилиндрические координаты (r, φ, x) в \mathbb{R}^3 . Пусть V^2 задается образующей $r = r(x)$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}(x, \varphi)$ поверхности V^2 имеет вид $\mathbf{r} = (x, r(x) \cos \varphi, r(x) \sin \varphi)$ (рис. 4.19). Нормаль к V^2 имеет вид $\mathbf{n} = (r', -\cos \varphi, -\sin \varphi)/\sqrt{1 + (r')^2}$. Ясно, что $\langle \mathbf{r}_{x\varphi}, \mathbf{n} \rangle = 0$, что и требовалось. ■

Лемма 5. Модуль гауссовой кривизны K поверхности вращения имеет вид

$$|K| = \frac{|r''|}{r(1 + (r')^2)^2},$$

где $r = r(x)$ — образующая поверхности вращения в цилиндрических координатах.

Доказательство. В силу леммы 4 главные направления совпадают с направлениями меридиана и параллели в точке P . Поэтому $K(P) = \lambda_1 \lambda_2$, где λ_2 и λ_1 — кривизны плоских кривых — меридиана и нормального сечения вдоль направления параллели соответственно. Так как меридиан совпадает с образующей, то $\lambda_2(x) = r''/(1 + (r')^2)^{3/2}$, что следует из формул Френе.

Найдем $\lambda_1(x)$ для нормального сечения вдоль направления параллели в точке $P = (x, r(x))$. Кривизна $k(\theta, a)$ самой параллели

окружности (вдоль касательного вектора a к параллели) очевидно равна $1/r(x)$. Здесь θ — это угол между нормалью к V^2 и вектором m , расположенным в плоскости параллели (рис. 4.20). Напомним, что

$$k(\theta, a) = \frac{1}{\cos \theta} k(0, a).$$

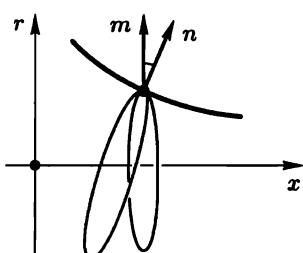


Рис. 4.20

Здесь $k(0, a)$ — интересующая нас кривизна λ_1 . Так как в плоскости xOr вектор m имеет координаты $(0, 1)$, а вектор n — координаты $1/\sqrt{1 + (r')^2}(-r', 1)$, то $\cos \theta = 1/\sqrt{1 + (r')^2}$. Следовательно, $\lambda_1(x) = 1/(r\sqrt{1 + (r')^2})$, что и завершает доказательство.

Лемма 6. Поверхность Бельтрами является многообразием постоянной отрицательной кривизны.

Доказательство. Поскольку поверхность Бельтрами является поверхностью вращения, то можно воспользоваться леммой 5. Функция $y = y(x)$ является обратной функцией к функции $x = x(y)$, найденной нами ранее. Как было уже подсчитано, $x'_y = (-\sqrt{a^2 - y^2})/y$. Отсюда $x'' = a^2/(r^2\sqrt{a^2 - y^2})$. Прямое вычис-

ление дает, что $K = -1/a^2$. Знак минус возник потому, что кривая $y = y(x)$ выпукла вниз. ■

Итак, мы указали в \mathbf{R}^3 поверхности постоянной положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Сфера имеет постоянную положительную кривизну, является компактным замкнутым (без края) многообразием. Многообразиями нулевой гауссовой кривизны являются плоскость или конус, образованный прямыми, исходящими из одной точки (конечной или бесконечной) и скользящими по произвольной гладкой кривой. Это — некомпактные (без края) открытые многообразия. Предъявленное нами многообразие отрицательной постоянной кривизны не является замкнутым многообразием, поскольку имеет край — окружность (рис. 4.17). Можно показать (мы не будем этого делать), что поверхность Бельтрами нельзя продолжить за эту окружность с сохранением условия $K(P) = -1/a^2 < 0$. Обычно эту поверхность «достраивают», добавляя поверхность, симметричную исходной относительно плоскости yOz (рис. 4.21). Но эта поверхность имеет «окружность излома», состоящую из особых точек.

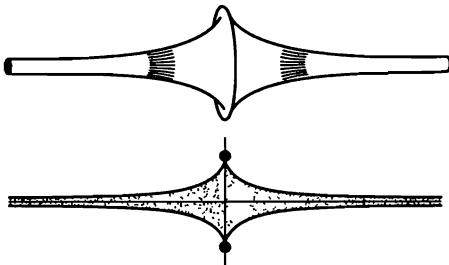


Рис. 4.21

Найдем индуцированную риманову метрику на «воронке» Бельтрами. Введем в \mathbf{R}^3 цилиндрические координаты (x, r, φ) , где $x = x = x$, $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ (т. е. ось Ox — ось вращения). Тогда индуцированная метрика на поверхности вращения с образующей, задаваемой функцией $x = x(r)$, имеет вид

$$ds^2 = (1 + (x'_r)^2) dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

В нашем примере $x'_r = (-\sqrt{a^2 - r^2})/r$ (см. выше), т. е. $ds^2 = dr^2/r^2 + r^2 d\varphi^2$.

Предложение 2. Риманова метрика, индуцированная на поверхности Бельтрами объемлющей евклидовой метрикой, является метрикой Лобачевского.

Доказательство. Рассмотрим замену $u = \varphi$, $v = 1/r$. Тогда $ds^2 = (v^2/v^4)dv^2 + du^2/v^2 = (du^2 + dv^2)/v^2$, что, очевидно, и доказывает утверждение. ■

Итак, локально поверхность Бельтрами изометрична плоскости Лобачевского, т. е. мы построили изометричное вложение некоторой области плоскости Лобачевского в трехмерное евклидово пространство. Можно описать — какая именно часть плоскости Лобачевского допускает изометричное вложение в \mathbb{R}^3 в виде поверхности Бельтрами, разрезанной вдоль ее образующей (рис. 4.22). Соответству-

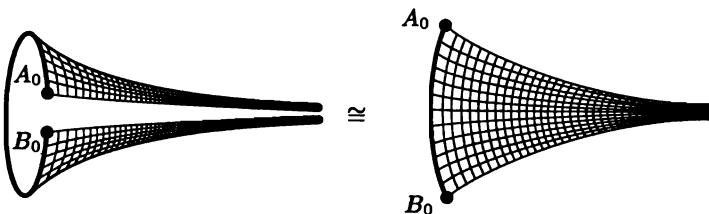


Рис. 4.22

ящая ей область на плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре) показана на рис. 4.23. Она отмечена символами ∞ , A_0 , B_0 и заключена между двумя параллельными прямыми геометрии Лобачевского, выходящими из одной точки ∞ на абсолюте, и дугой A_0B_0 , являющейся дугой длины 2π (если $a = 1$), частью окружности (в евклидовом смысле), касающейся точки ∞ на абсолюте.

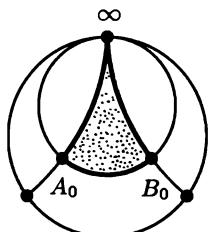


Рис. 4.23

Б о п р о с: можно ли изометрично реализовать в \mathbb{R}^3 , в виде двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны не только полосу (∞, A_0, B_0) , но и всю плоскость Лобачевского? Ответ отрицательный (мы не будем здесь этого доказывать).

Рассмотрим теперь среднюю кривизну поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$. Как было отмечено, средняя кривизна зависит от способа вложения $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, т. е. определяется как первой, так и второй формами. Как устроены поверхности постоянной средней кривизны? Например, поверхности нулевой средней кривизны — это так называемые минимальные поверхности. Они характеризуются тем, что их площадь локально минимальна по сравнению с площадью других

поверхностей, отличающихся от исходной только внутри (любого) шара достаточно малого радиуса (рис. 4.24). Физической моделью минимальных поверхностей $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ являются «мыльные пленки», возникающие на замкнутых проволочных контурах после их извлечения из мыльной воды. Уравнение $H = 0$ называется уравнением минимальных поверхностей. Найдем его явный вид. Так как $H = (GL - 2MF + EN)/(EG - F^2)$, то уравнение $H = 0$ имеет вид $GL - 2MF + EN = 0$. Если поверхность задана с помощью графика $z = f(x, y)$, то (см. выше) уравнение приобретает вид

$$ds^2 = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2,$$

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

следовательно,

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_{xy}f_x f_y + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Уравнение довольно сложное и описывать его решения непросто. Конечно, есть простые случаи. Например, евклидова плоскость является минимальной поверхностью, так как $Q \equiv 0$. Приведем более сложный пример некомпактной минимальной поверхности. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 две ортогональные, пересекающиеся в точке O прямые l_1 и l_2 . Фиксируем прямую l_1 и будем перемещать вдоль нее с постоянной скоростью a прямую l_2 , одновременно вращая l_2 с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси l_1 (винтовое движение). Прямая l_2 заметает двумерное гладкое подмногообразие $V^2 \subset \mathbb{R}^3$, которое называется *прямым геликоидом* (рис. 4.25). Докажите, что прямой геликоид — минимальная поверхность. Отметим, кстати, что любая минимальная поверхность имеет неположительную гауссову кривизну, так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Приведем еще один пример минимальной поверхности. Рассмотрим некомпактную поверхность, образованную вращением вокруг

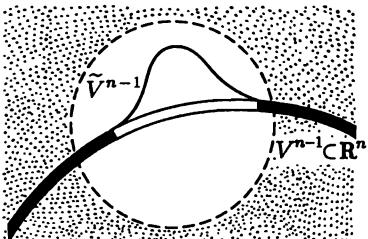


Рис. 4.24

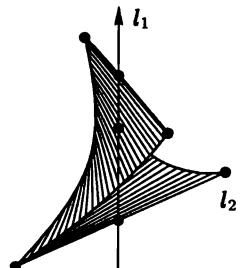


Рис. 4.25

оси Ox гладкой кривой $\gamma(t)$, задаваемой уравнением $y = a \operatorname{ch}(x/a)$. Как известно из курса анализа, эта кривая задает форму провисания тяжелой цепи, закрепленной в двух точках, A и B (рис. 4.26). Соответствующая поверхность называется *катеноидом* (рис. 4.27). Найдем H . Из доказательства леммы 5 видно, что

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{y\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \\ &= \left(a \operatorname{ch} \frac{x}{a}\right)^{-1} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-1/2} - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} \left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}\right)^{-3/2} = 0. \end{aligned}$$

Итак, катеноид — минимальная поверхность. Если рассмотреть его часть, заключенную между двумя окружностями, образованными вращением точек A и B вокруг оси Ox , то получим пример минимальной поверхности, натянутой на контур Γ , состоящий из этих двух граничных окружностей.

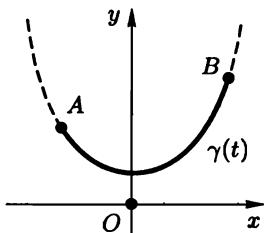


Рис. 4.26

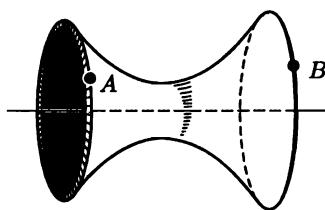


Рис. 4.27

С минимальными поверхностями тесно связаны так называемые гармонические поверхности.

Определение 10. Радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ называется *гармоническим* относительно координат u, v , если $\partial^2 \mathbf{r} / \partial u^2 + \partial^2 \mathbf{r} / \partial v^2 = 0$, т. е. $\Delta \mathbf{r} = 0$, где Δ — оператор Лапласа в координатах u, v .

Радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$, гармонический в координатах (u, v) , не обязан быть гармоническим в других координатах (u', v') .

Определение 11. Поверхность $V^2 \subset \mathbb{R}^3$ называется *гармонической*, если она задается гармоническим радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$ в некоторых криволинейных координатах (u, v) .

Будем говорить, что радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ *минимальен*, если средняя кривизна соответствующей поверхности тождественно равна нулю. Так как средняя кривизна не меняется при заменах координат на поверхности, то радиус-вектор, минимальный относительно одной системы координат, будет *минимальным* и относительно любой

другой регулярной системы координат. Для гармонических поверхностей это уже не так. Поэтому говорят о гармонических отображениях $\mathbf{r}: D(u, v) \rightarrow \mathbf{R}^3(x, y, z)$, где $D(u, v)$ — область на плоскости (u, v) , а $\mathbf{r}(u, v)$ — отображение, задающее поверхность $V^2 \subset \mathbf{R}^3$. Отображение \mathbf{r} , гармоническое в одних координатах, уже не будет, вообще говоря, гармоническим в других координатах (приведите пример!). Пример гармонической поверхности: $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$, где x, y, z — декартовы координаты, т. е. поверхность V^2 задается графиком $z = x^2 - y^2$. Ясно, что эта поверхность гармоническая. В то же время она не минимальна: $H = 0$ только в точке $(0, 0)$, а в других точках $H \neq 0$.

Напомним, что криволинейные координаты (u, v) на поверхности называются *конформными*, если в них метрика $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ является конформно-евклидовой, т. е. $E = G, F = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрим двумерное многообразие, на котором задана риманова метрика ds^2 с существенно аналитическими коэффициентами E, F, G , рассматриваемыми как функции от локальных криволинейных координат u, v . Тогда для любой точки P существует такая окрестность $U = U(P)$, что в ней можно ввести координаты p, q (являющиеся существенно аналитическими функциями от исходных координат u, v), в которых ds^2 имеет вид $\lambda(p, q)(dp^2 + dq^2)$, т. е. координаты p, q будут конформными. Доказательство несложно, однако требует ссылки на теорему существования решения специального уравнения в частных производных (уравнения Бельтрами–Лапласа), что выходит за рамки нашего курса.

Как связаны гармонические и минимальные векторы? Пример гармонического, но не минимального вектора мы привели. Минимальный вектор тоже не обязан быть гармоническим. Тем не менее имеет место следующее

Предложение 3. *Минимальный вектор, записанный в конформных координатах, является гармоническим.*

Доказательство. Пусть (u, v) — конформные координаты, а $\mathbf{r}(u, v)$ — вектор, задающий минимальную поверхность.

Напомним, что $E = G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$. Требуется доказать, что $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$. Положим $\alpha = \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}$. Так как $H = 0$, то $GL - 2MF + EN = 0$, т. е. $L + N = 0$. Отсюда $\langle \alpha, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle + \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = L + N = 0$, где \mathbf{n} — нормаль к V^2 . Осталось доказать, что $\langle \alpha, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \alpha, \mathbf{r}_v \rangle = 0$, так как тогда α будет иметь нулевые скалярные произведения с ортогональными векторами $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$, т. е. \mathbf{n} должен быть нулевым вектором. Дифференцируя тождества $E = G, F = 0$, получаем $\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle, \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle, \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle, \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle = -\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv} \rangle$.

Отсюда $\langle \alpha, r_u \rangle = \langle r_{uv}, r_v \rangle - \langle r_{vu}, r_v \rangle = 0$. Аналогично, $\langle \alpha, r_v \rangle = 0$, что и требовалось. ■

Задачи

1. Доказать, что если гауссова и средняя кривизны тождественно равны нулю, то поверхность в R^3 является плоскостью.
2. Пусть поверхность S образована касательными прямыми к кривой. Выразить гауссову и среднюю кривизны поверхности S через кривизну и кручение кривой.
3. В предыдущей задаче показать, что метрика на поверхности зависит только от кривизны кривой.

4.3. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

4.3.1. Простейшие примеры групп преобразований

Здесь мы будем изучать основные примеры групп преобразований метрик, т. е. отображений многообразий, сохраняющих метрику. Рассмотрим риманово многообразие M^n с метрикой g_{ij} .

Определение 1. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *движением* римановой метрики g_{ij} или *изометрией*, если риманова метрика при этом отображении переходит в себя, т. е. выполнено тождество

$$g_{kp}(y) = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^p},$$

где y^1, \dots, y^n — локальные координаты в некоторой окрестности точки $y \in M^n$; x^1, \dots, x^n — локальные координаты в некоторой окрестности точки $x \in M^n$; $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$ — функции, задающие (локально) отображение f , причем $x = f(y)$.

Мы дали «координатное» определение изометрии. Иногда удобно пользоваться инвариантным определением, не использующим локальные координаты. При диффеоморфизме f дифференциал df изоморфно отображает $T_y M^n$ на $T_x M^n$. В каждом из касательных пространств $T_y M^n$ и $T_x M^n$ определено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_y$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ соответственно, построенное по римановой метрике. Например, $\langle a, b \rangle_y = g_{ij}(y) a^i b^j$, где $a, b \in T_y M^n$.

Определение 2. Диффеоморфизм f многообразия M^n на себя называется *изометрией*, если $\langle a, b \rangle_y = \langle df(a), df(b) \rangle_x$ для любых $a, b \in T_y M^n$, $x = f(y)$.

Лемма 1. Координатное и инвариантное определение изометрий эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} \in T_y M^n$, $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$ в локальных координатах y^1, \dots, y^n ; отсюда $df(\mathbf{a}) \in T_x M^n$ имеет вид

$$(df(\mathbf{a}))^i = \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} a^k,$$

так как $df: T_y M^n \rightarrow T_x M^n$ задается матрицей Якоби. Отсюда

$$\langle df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b}) \rangle_x = g_{ij}(x(y)) \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \frac{\partial x^j(y)}{\partial y^l} a^k b^l = g_{kp} a^k b^p,$$

что и доказывает лемму. ■

Лемма 2. Множество всех изометрий риманова многообразия M^n образует группу (в алгебраическом смысле).

Доказательство. То, что композиция изометрий снова изометрия, вытекает из правила дифференцирования сложной функции и закона изменения коэффициентов g_{ij} при замене координат. То, что f^{-1} является изометрией, вытекает из того, что матрица Якоби отображения f^{-1} обратна к матрице Якоби $J(f)$. В качестве единичного элемента группы следует взять тождественное преобразование. ■

Группа изометрий риманова многообразия M^n обычно снабжается топологией из пространства отображений и обозначается через $\text{Iso}(M^n)$. Рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Снабдим вещественную прямую евклидовой метрикой $ds^2 = dx^2$, где x — координата на прямой. Пусть f — диффеоморфизм \mathbb{R}^1 на себя, задаваемый, следовательно, строго возрастающей (или убывающей) функцией $x = f(y)$. Поскольку метрика сохраняется, то $ds^2 = (f'_y)^2 dy^2 = dy^2$, т. е. $(f'_y)^2 = 1$. Таким образом, либо $f(y) = y + a$, либо $f(y) = -y + b$, где a и b — постоянные. Итак, группа изометрий вещественной прямой гомеоморфна паре вещественных прямых. Собственные изометрии сохраняют ориентацию прямой, а несобственные — меняют.

Пример 2. Найдем группу изометрий плоскости, сохраняющих начало координат. Сначала будем искать изометрии среди линейных преобразований (можно показать, что любая изометрия плоскости линейна; но мы не будем здесь на этом останавливаться). Условие инвариантности метрики $dx^2 + dy^2$, записывается в виде матричного уравнения $E = AA^\top$, где $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — линейное преобразование. Это — определение ортогональной группы, т. е. группы $\mathbf{O}(2)$, состоящей из матриц

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

— собственные вращения и

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

— несобственные вращения, или отражения. Собственные вращения образуют подгруппу в коммутативной группе $O(2)$, обозначаемую $SO(2)$. Несобственные вращения подгруппы не образуют. Поскольку группа $O(2)$ — матричная, то она является топологическим пространством. Каждой такая собственная матрица задается углом поворота φ . Таким образом, множество матриц, образующих $O(2)$, гомеоморфно двум экземплярам окружности. Следовательно, $O(2)$ является гладким одномерным замкнутым несвязным многообразием (рис. 4.28).

$$SO_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot SO(2)$$

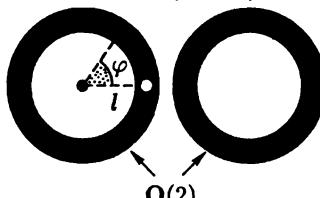


Рис. 4.28

Докажите, что группа $O(2)$ совпадает с группой всех изометрий окружности с метрикой $ds^2 = d\varphi^2$. Указание: поступить по аналогии с группой $Iso(\mathbb{R}^1)$.

Пример 3. Изометрии евклидовой плоскости записываются в виде $y = Ax + b$, где $A \in O(2)$, а вектор b определяет параллельный перенос (сдвиг) на плоскости. Ясно, что все такие преобразования сохраняют евклидову метрику (проверьте!). Как будет показано далее, они исчерпывают собою все изометрии плоскости. Этую группу можно представить в виде группы матриц

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, группа $Iso(\mathbb{R}^2)$ превращается в топологическое пространство, гомеоморфное прямому произведению пары окружностей на евклидову плоскость. Тем самым, эта группа является гладким трехмерным многообразием, некомпактным и несвязным, состоящим из двух компонент связности.

Пример 4. Рассмотрим индефинитную метрику $-dx^2 + dy^2$, определяющую псевдоевклидову плоскость \mathbb{R}_1^2 . Матрица первой формы постоянна и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, все линейные однородные преобразования, сохраняющие эту метрику, удовлетворяют уравнению $B = ABA^\top$, где $A: \mathbf{R}_1^2 \rightarrow \mathbf{R}_1^2$ — линейное преобразование. Записав его в виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

получаем систему уравнений на a, b, c, d :

$$a^2 - b^2 = 1, \quad ac = bd, \quad d^2 - c^2 = 1.$$

Решая систему, получаем

$$A = \begin{pmatrix} \pm \operatorname{ch} \psi & \pm \operatorname{sh} \psi \\ \pm \operatorname{sh} \psi & \pm \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix},$$

или

$$A = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \frac{b}{a} = \beta, \quad \beta = \operatorname{th} \psi.$$

Допустимыми являются следующие комбинации знаков:

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_1, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_2, \quad \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_3, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix} \in \mathfrak{G}_4.$$

Здесь представлены все возможные варианты. Например,

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

принадлежит \mathfrak{G}_1 , так как заменив ψ на $-\psi$, мы превращаем

$$\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \text{в} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

Напомним, что $\operatorname{sh}(-\psi) = -\operatorname{sh} \psi$, $\operatorname{ch}(-\psi) = \operatorname{ch} \psi$. Тем самым $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \cup \mathfrak{G}_3 \cup \mathfrak{G}_4$ (проверьте!) и $\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = \emptyset$, если $i \neq j$. В самом деле, допустим, например, что $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \neq \emptyset$; тогда $\operatorname{ch} \varphi = -\operatorname{ch} \psi$, $\operatorname{sh} \varphi = -\operatorname{sh} \psi$, что невозможно, поскольку $\operatorname{ch} \varphi > 0$ при любом φ . Аналогично устанавливается, что $\mathfrak{G}_i \cap \mathfrak{G}_j = \emptyset$.

Так как \mathfrak{G} — это группа однородных изометрий \mathbf{R}_1^2 , то она переводит в себя псевдоокружности вещественного и мнимого радиусов: $\{-x^2 + y^2 = 1\} \cup \{-x^2 + y^2 = -1\}$. Рассмотрим орторепер $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$. Под действием изометрии A он преобразу-

ется так, как показано на рис. 4.29. Введем вместо обычного евклидова угла поворота φ угол гиперболического поворота ψ , положив $\beta = \operatorname{th} \psi$ (см. выше). Тогда \mathfrak{G} превращается в группу гиперболических поворотов.

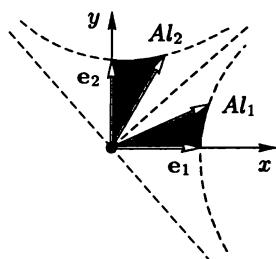


Рис. 4.29

Группа гиперболических поворотов состоит из четырех компонент связности. Это — множества $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4$, описанные выше.

Поскольку \mathfrak{G} реализована как матричная группа, то она вкладывается в

четырехмерное евклидово пространство всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а поэтому наследует его топологию. Каждое из подмножеств \mathfrak{G}_i является линейно связным (докажите!).

Из этих четырех связных компонент подгруппой является только \mathfrak{G}_1 (проверьте!).

Группа \mathfrak{G} является подмножеством в четырехмерном простран-

стве матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. При этом каждое \mathfrak{G}_i гомеоморфно вещественной прямой (рис. 4.30). Этот гомеоморфизм, например для \mathfrak{G}_1 , сопоставляет каждой матрице $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} \psi & \operatorname{sh} \psi \\ \operatorname{sh} \psi & \operatorname{ch} \psi \end{pmatrix}$ значение угла ψ . Это соответствие взаимно однозначно и непрерывно (проверьте!).

Группа \mathfrak{G} переводит в себя псевдоокружность мнимого радиуса $-x^2 + y^2 = -1$. На рис. 4.31 показано действие четырех преобразований — представителей $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_4$. Аналогичные события происходят и с псевдоокружностью вещественного радиуса.

Группа \mathfrak{G} коммутативна (проверьте!). Подгруппа \mathfrak{G}_1 — нормальный делитель в \mathfrak{G}_1 .

a) $g_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — тождественное преобразование;

б) $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно начала координат;

в) $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ — отражение относительно оси Ox ;

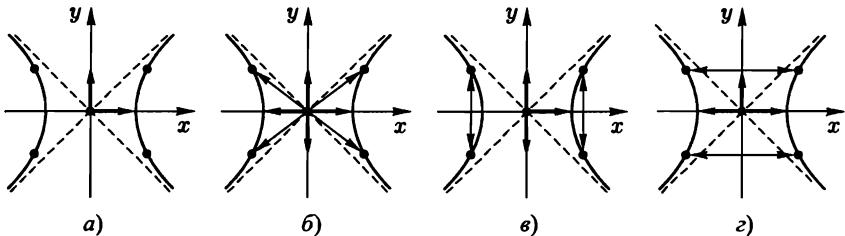


Рис. 4.31

2) $g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – отражение относительно оси Oy .

Итак, определена факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$, порядок которой равен числу связных компонент в \mathfrak{G} , т. е. 4. Так как \mathfrak{G} коммутативна, то $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ тоже коммутативна. Существуют только две коммутативные группы четвертого порядка: $Z_2 \oplus Z_2$ и Z_4 . Какой именно группе изоморфна $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$? Составив таблицу умножения представителей g_1, g_2, g_3, g_4 , получаем, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ изоморфна $Z_2 \oplus Z_2$. В этом отличие группы вращений псевдоокружности от группы вращений обычной окружности (для которой соответствующая фактор-группа изоморфна Z_2).

Пример 5. Рассмотрим группу изометрий двумерной сферы с метрикой, индуцированной стандартным вложением в \mathbb{R}^3 . Сначала рассмотрим \mathbb{R}^n и найдем группу линейных однородных преобразований A , сохраняющих евклидову метрику $ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$. Так как матрица (g_{ij}) является единичной, то $E = AA^\top$. Решениями этого уравнения являются ортогональные матрицы, образующие группу $O(n)$. В ней лежит подгруппа $SO(n)$ собственных (т. е. с определителем, равным +1) вращений. Подгруппа $SO(n)$ – нормальный делитель в $O(n)$, и факторгруппа $O(n)/SO(n)$ изоморфна Z_2 .

Пусть $n = 3$. Тогда $O(3)$ сохраняет евклидову метрику в \mathbb{R}^3 . Следовательно, переводит в себя сферу. Итак, $O(3)$ – подгруппа в $Iso(S^2)$. Далее мы покажем, что $O(3) \equiv Iso(S^2)$. Рассмотрим $SO(3) \subset O(3)$. Так как $SO(3)$ содержится в пространстве всех матриц размера 3×3 с вещественными коэффициентами, то она является топологическим пространством в индуцированной топологии.

Лемма 3. Группа $SO(3)$ как топологическое пространство гомеоморфна трехмерному проективному пространству \mathbb{RP}^3 .

Доказательство. Пусть A – элемент $SO(3)$. Тогда в \mathbb{R}^3 существует неподвижная ось $l(A)$ такая, что действие A в \mathbb{R}^3 является поворотом вокруг $l(A)$ на некоторый угол $\varphi(A)$. Если $A \neq E$, то $l(A)$ определена однозначно. Рассмотрим плоскость $\Pi(A)$, орто-

гональную оси $l(A)$ и проходящую через O . В $\Pi(A)$ выберем произвольный вектор e_1 , и пусть e_2 — вектор, получающийся из e_1 при повороте на угол $\varphi(A)$ (рис. 4.32).

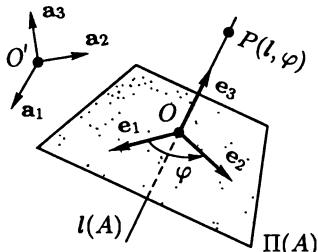


Рис. 4.32

Дополним e_1, e_2 третьим вектором e_3 до репера (e_1, e_2, e_3) так, чтобы ориентация репера (e_1, e_2, e_3) совпадала с ориентацией фиксированного зааранее репера (a_1, a_2, a_3) в \mathbf{R}^3 . Ось $l(A)$ превращается в вещественную прямую, поскольку на ней можно задать направление с помощью e_3 и отложить значение $\varphi(A)$. Мы однозначно сопоставили каждому элементу $A \in \text{SO}(3)$

точку в \mathbf{R}^3 . Обозначим ее $P(l, \varphi)$. Ясно, что $P(l, \pi) = P(l, -\pi)$, так как повороты вокруг $l(A)$ на π и на $-\pi$ совпадают. Если же $|\varphi(A)| < \pi$, то $P(l, \varphi)$ соответствует одному и только одному вращению A . Непрерывно меняя A , мы непрерывно меняем $P(l, \varphi)$; верно и обратное.

Итак, мы взаимно однозначно и непрерывно в обе стороны отождествили ортогональные преобразования A с точками трехмерного шара радиуса π , на границе которого (т. е. на сфере радиуса π) склеены диаметрально противоположные точки $P(l, \pi)$ и $P(l, -\pi)$. Осталось доказать, что этот шар со склейками на границе гомеоморфен \mathbf{RP}^3 . Одно из определений \mathbf{RP}^3 — это пучок прямых в \mathbf{R}^4 , проходящих через O . Эта модель эквивалентна следующей: нужно отождествить диаметрально противоположные точки на сфере S^3 . Достаточно отождествить диаметрально противоположные точки на границе полусферы S_+^3 , т. е. на экваторе S^2 (рис. 4.33). Полусфера диффеоморфна трехмерному диску: диффеоморфизм задается ортогональным проектированием S_+^3 на D^3 (рис. 4.33). Итак, \mathbf{RP}^3 гомеоморфно D^3 с отождествленными диаметрально противоположными граничными точками. ■

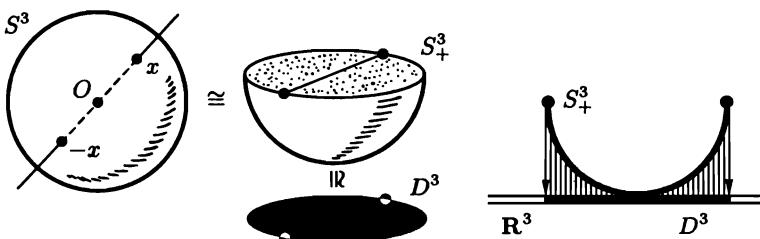


Рис. 4.33

Так как \mathbf{RP}^3 — линейно связно, то $O(3)$ состоит из двух компонент линейной связности.

Пример 6. Изучим группу изометрий плоскости Лобачевского. Рассмотрим реализацию плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости с метрикой $w = -dz d\bar{z}/(z - \bar{z})^2$. Будем искать ее группу изометрий среди дробно-линейных преобразований комплексной плоскости $(az + b)/(cz + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Так как $dw = (ad - bc)/(cz + d)^2 dz$ (проверьте!), то

$$dw d\bar{w} = \frac{|ad - bc|^2}{|cz + d|^4} dz d\bar{z}.$$

Кстати, отсюда видно, что евклидова метрика домножается на скалярный переменный множитель, т. е. дробно-линейные преобразования конформны. Они сохраняют косинусы углов между пересекающимися кривыми. Проверим, что сохраняются ориентированные углы.

Докажем, что якобиан J положителен. В самом деле, $dw = \lambda(z) dz$, $\lambda(z) = (ad - bc)/(cz + d)^2$, $T_z(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$, $T_w(\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2$ (рис. 4.34). Следовательно, действие дифференциала df отображения $f: z \rightarrow w$ записывается так: $df(z) = \lambda \cdot z$, где $\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть $\lambda = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$. Тогда матрица Якоби в вещественной записи имеет вид $\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$, т. е. якобиан равен $u^2 + v^2$ и положителен.

Итак, углы сохраняются.

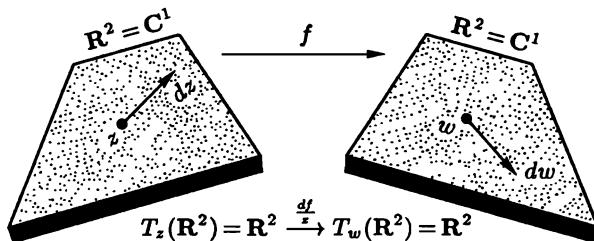


Рис. 4.34

Отберем теперь из всех дробно-линейных преобразований те, которые переводят в себя верхнюю полуплоскость.

Лемма 4. Преобразование $w = (az + b)/(cz + d)$ переводит в себя верхнюю полуплоскость тогда и только тогда, когда $(a, b, c, d) = \rho(a', b', c', d')$, где $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \neq 0$ (иными словами, коэффициенты a, b, c, d пропорциональны четверке вещественных чисел a', b', c', d') и, кроме того, $ad - bc > 0$.

Доказательство несложно и мы предоставляем его читателю (либо см. курс комплексного анализа).

Лемма 5. Любое преобразование $w = (az + b)/(cz + d)$ такое, что $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$, является изометрией плоскости Лобачевского.

Доказательство. Имеем

$$dw = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} dz, \quad \frac{dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = \frac{dz \bar{z}}{(z - \bar{z})^2},$$

что и требовалось доказать.

Так как $ad - bc > 0$, то можно считать, что $ad - bc = 1$. ■

Предложение 1. Группа изометрий плоскости Лобачевского $\text{Iso}(\mathbb{L}_2)$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\text{SL}(2; \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, т. е. факторгруппе $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ матриц размера 2×2 с вещественными коэффициентами и определителем $+1$ по подгруппе \mathbb{Z}_2 , состоящей из преобразований E и $-E$.

Доказательство. Изометрии, описанные в лемме 5, образуют группу. В самом деле, композиция дробно-линейных преобразований с вещественными коэффициентами и единичным определителем, является преобразованием того же типа. Так как $ad - bc \neq 0$, то существует обратное преобразование того же типа.

Рассмотрим матричную группу $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ — группу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc = 1$. Построим отображение $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{G}_1$, где \mathfrak{G}_1 — группа преобразований $w = (az + b)/(cz + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$. Положим

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Эпиморфность φ очевидна. Найдем $\text{Ker } \varphi$. Ясно, что $\varphi(g) = \varphi(-g)$, а потому $\text{Ker } \varphi \supset \mathbb{Z}_2 = (E, -E)$. Докажем, что $\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_2$. Пусть $\varphi(g) = \varphi(g')$, т. е.

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{b}{b'} &= \frac{d}{d'} = \lambda, & \frac{a}{a'} &= \frac{c}{c'} = \mu, & \frac{a+b}{c+d} &= \frac{a'+b'}{c'+d'}, \\ b &= \lambda b', & d &= \lambda d'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mu = \lambda$ и $g' = \lambda g$, поэтому $\lambda = \pm 1$, что и требовалось доказать. ■

Задача. Докажите, что $\text{SL}(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ — связное топологическое пространство.

Группа $\text{SL}(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z}_2$ не исчерпывает группу $\text{Iso}(\mathbf{L}_2)$. В самом деле, рассмотрим отображение $g_0: z \rightarrow -\bar{z}$. Оно переводит верхнюю полуплоскость в себя и сохраняет метрику Лобачевского (отражение относительно оси Oy). В то же время g_0 не имеет вида $(az+b)/(cz+d)$. В самом деле, преобразования $(az+b)/(cz+d)$ конформны (см. выше), сохраняют ориентированные углы. Отображение g_0 таковым не является (рис. 4.35).

Итак, нужно еще рассмотреть преобразования $w = g(z) = -(a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$, или, что тоже самое, $w = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d)$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = -1$. Обозначим множество таких преобразований через \mathfrak{G}_2 . Множества \mathfrak{G}_1 и \mathfrak{G}_2 гомеоморфны, так как любое $g \in \mathfrak{G}_2$ имеет вид $g = g_0 f$, где $f \in \mathfrak{G}_1$, и так как g_0 и f — изометрии, то и $g_0 f$ — изометрия. Гомеоморфизм задается умножением множества \mathfrak{G}_1 на $g_0 \in \mathfrak{G}_2$. Далее, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \emptyset$. В самом деле, преобразования первого типа сохраняют ориентированные углы, а второго типа — нет.

Лемма 6. Множество $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ является группой, причем \mathfrak{G}_1 — подгруппа.

Доказательство. Рассмотрим группу $\mathbf{L}(2, \mathbf{R})$ вещественных матриц размера 2×2 с определителем ± 1 . Группа состоит из двух компонент связности $\mathbf{L}(2, \mathbf{R}) = \mathbf{L}_1 \cup \mathbf{L}_2$, а именно: матрицы с определителем $+1$ и определителем -1 .

Подгруппа \mathbf{L}_1 обозначается $\text{SL}(2, \mathbf{R})$. Построим отображение $\varphi: \mathbf{L} \rightarrow \mathfrak{G}$. Если

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{L}_1,$$

то

$$\varphi(A) = f \in \mathfrak{G}_1, \quad f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1;$$

если

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{L}_2,$$

то

$$\varphi(B) = f \in \mathfrak{G}_2, \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc = -1.$$

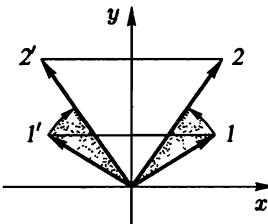


Рис. 4.35

Ясно, что φ — гомоморфизм (проверьте!). Далее, φ — эпиморфизм, но не взаимно однозначный и имеет ядро. Для нахождения ядра нужно найти прообраз единичного элемента группы \mathfrak{G} . Как и в предложении 1, доказывается, что $\text{Кер}(\varphi) = Z_2$, где $Z_2 = (+E, -E)$. ■

Фактически доказана следующая лемма.

Лемма 7. Группа $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ изоморфна $L(2, \mathbf{R})/Z_2$, где

$$L(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ad - bc = \pm 1 \right\}, \quad Z_2 = (E, -E).$$

Итак, в группе всех изометрий плоскости Лобачевского мы предъявили подгруппу, состоящую из двух компонент линейной связности, а именно $\mathfrak{G} \cong L(2, \mathbf{R})/Z_2$. Сколькими параметрами описываются элементы этой группы? Очевидно, что элемент $g \in \mathfrak{G}$ задается тремя независимыми параметрами.

Лемма 8. Группа $SL(2, \mathbf{R})$ как топологическое пространство гомеоморфна прямому произведению окружности на евклидову плоскость, а поэтому является гладким трехмерным некомпактным многообразием. Группа $L(2, \mathbf{R})$ гомеоморфна прямому произведению двух экземпляров окружности на евклидову плоскость.

Доказательство. Из курса алгебры известно, что любое линейное однородное преобразование плоскости с определителем $+1$ однозначно представимо как композиция собственного вращения и треугольного преобразования (теорема об ортогонализации базиса). Итак, любая матрица $g \in SL(2, \mathbf{R})$ допускает (однозначно) представление в виде произведения матриц

$$g = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix}$$

Так как совокупность вращений образует окружность, а треугольные унимодулярные матрицы — евклидову плоскость, то лемма доказана. ■

Как мы покажем ниже, группа $L(2, \mathbf{R})/Z_2$ полностью исчерпывает собою всю группу $\text{Iso}(L_2)$.

Пример 7. Вернемся к группе движений евклидовой плоскости. Найденные нами преобразования $y = Ax + b$, где $A \in O(2)$, $b \in \mathbf{R}^2$, можно записать в комплексной форме $w = az + b$, где $b \in \mathbf{C}$, $a \in \mathbf{C}$, $|a| = 1$, т. е. $w = e^{i\varphi} \cdot z + b$. Эта группа изоморфна группе матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a = e^{i\varphi}$.

Легко проверяется, что группа линейных изометрий $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ евклидова пространства \mathbf{R}^n изоморфна группе преобразований $y = Ax + b$, где матрица A – ортогональна, а вектор b задает сдвиг. Группа $\text{Iso}(\mathbf{R}^n)$ изоморфна группе матриц

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. как топологическое пространство она гомеоморфна прямому произведению $O(n) \times \mathbf{R}^n$.

4.3.2. Матричные группы преобразований

Все разобранные примеры групп оказывались не только топологическими пространствами, но и гладкими многообразиями. Топология на группе преобразований индуцировалась ее вложением в группу матриц, в которой топология определяется обычным образом: матрицы близки, если они близки поэлементно. Итак, возник класс гладких многообразий, точки на которых можно умножать, причем умножение удовлетворяет всем аксиомам группы.

Определение 3. Гладкое многообразие M^n называется *группой Ли*, если на нем заданы два гладких отображения, $f: M^n \times M^n \rightarrow M^n$ (умножение) и $\nu: M^n \rightarrow M^n$ (взятие обратного элемента), обозначаемые обычно так: $f(x, y) = x \cdot y$, $\nu(x) = x^{-1}$; кроме того существует отмеченная точка $e \in M^n$ (единица), удовлетворяющая вместе с отображениями f , ν соотношениям:

- 1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$
- 2) $e \cdot x = x \cdot e = x$, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Иногда требуют лишь непрерывность операций f и ν , однако в примерах, с которыми мы будем иметь дело, групповые операции будут гладкими, а потому мы и ввели в определение группы Ли именно гладкие отображения f и ν .

Определение 4. Множество элементов g группы Ли \mathfrak{G} , которые можно соединить непрерывным путем с единицей группы \mathfrak{G} , называется *связной компонентой единицы группы* \mathfrak{G} и обозначается через \mathfrak{G}_0 .

Предложение 2. *Множество \mathfrak{G}_0 является подгруппой в \mathfrak{G} . Более того, \mathfrak{G}_0 – нормальный делитель в \mathfrak{G} , а потому определена факторгруппа $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$.*

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_0$. Докажем, что $g_1 \times g_2 \in \mathfrak{G}_0$. В силу определения \mathfrak{G}_0 существуют непрерывные пути $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$, такие, что

$$\gamma_1(0) = e, \quad \gamma_1(1) = g_1; \quad \gamma_2(0) = e, \quad \gamma_2(1) = g_2.$$

Рассмотрим путь $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$. В силу непрерывности умножения в \mathfrak{G} путь непрерывен и, очевидно, соединяет единицу с элементом $g_1 \cdot g_2$.

Докажем, что для любого $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ и любого $g \in \mathfrak{G}$ элемент $gg_0 \times g^{-1}$ принадлежит \mathfrak{G}_0 . Так как $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, то существует непрерывный путь $\gamma(t)$ такой, что $\gamma(0) = e$, $\gamma(1) = g_0$. Рассмотрим путь $\varphi(t) = g\gamma(t)g^{-1}$. Он непрерывен и $\varphi(0) = e$; $\varphi(1) = gg_0g^{-1}$, т. е. $g \times g_0g^{-1} \in \mathfrak{G}_0$. ■

Рассмотрим основные примеры матричных групп. Все они являются группами Ли, однако мы докажем это лишь в некоторых частных случаях.

4.3.3. Полная линейная группа

Рассмотрим пространство \mathbf{R}^n и множество $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ всех невырожденных линейных однородных преобразований \mathbf{R}^n в себя, т. е. множество всех невырожденных матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами. Аналогично определяется и $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$.

Лемма 9. Множества $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ и $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ являются группами Ли.

Доказательство. Рассмотрим для определенности $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$. Тот факт, что это — группа (в алгебраическом смысле), очевиден. Снабдим $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ структурой гладкого многообразия так, что все групповые операции будут гладкими. Ясно, что $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{n^2} \setminus \{\det(g) = 0\}$, где пространство \mathbf{R}^{n^2} отождествлено с пространством всех матриц порядка n над полем \mathbf{R} . Так как уравнение $\det(g) = 0$ полиномиально, то множество $\mathbf{R}^{n^2} \setminus \{\det(g) = 0\}$ открыто, т. е. является областью, а потому гладким многообразием размерности n^2 . Умножение матриц — гладкая операция, поскольку каждый элемент матрицы AB является полиномом второго порядка от элементов матриц A и B . Каждый элемент обратной матрицы A^{-1} является рациональной функцией от элементов матрицы A (со знаменателем, отличным от нуля в силу невырожденности A). Аналогичным путем доказывается, что $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ — группа Ли. ■

4.3.4. Специальная линейная группа

Группа $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ определяется как подмножество в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, задаваемое уравнением $\det(g) = 1$. Ясно, что это множество является группой и топологическим пространством. В действительности $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ является гладким многообразием, но мы не будем здесь это доказывать. Группа $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ определяется как подгруппа

па в $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, удовлетворяющая соотношению $\det(g) = 1$. Размерность $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ равна $n^2 - 1$, а размерность $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ равна $2n^2 - 2$.

4.3.5. Ортогональная группа

Рассмотрим \mathbf{R}^n с билинейной евклидовой формой $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i$. Группа $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ определяется как группа вещественных матриц A порядка n , сохраняющих это скалярное произведение, т. е. $\langle A\mathbf{a}, A\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$. Обычно группа $\mathrm{O}(n, \mathbf{R})$ обозначается $\mathrm{O}(n)$. Группа $\mathrm{O}(n, \mathbf{C})$ определяется аналогично. Группа $\mathrm{O}(n)$ содержит подгруппу, обозначаемую $\mathrm{SO}(n)$ и называемую *специальной ортогональной группой*: $g \in \mathrm{SO}(n)$, если $\det(g) = 1$.

Лемма 10. Группа $\mathrm{SO}(n)$ линейно связна и совпадает со связной компонентой единицы в группе $\mathrm{O}(n)$.

Факторгруппа $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n)$ изоморфна \mathbf{Z}_2 , т. е. $\mathrm{O}(n)$ состоит из двух связных компонент.

Доказательство. Из курса алгебры известно, что для любого элемента $g_0 \in \mathrm{SO}(n)$ существует такое ортогональное преобразование $g \in \mathrm{O}(n)$, что $a = gg_0g^{-1}$, если $n = 2k$ четно, есть матрица вида

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & & & \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \cos \varphi_k & \sin \varphi_k \\ & & & -\sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix}$$

и, если $n = 2k + 1$ нечетно, то к указанной выше матрице добавляется еще один диагональный блок (размера 1 на 1), в котором стоит единица.

Непрерывный путь $\gamma(t)$, соединяющий g_0 с единицей, получается умножением на параметр t всех углов-аргументов в блочно-диагональной матрице. Итак, $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n)_0$. Так как множество ортогональных матриц с определителем -1 гомеоморфно $\mathrm{SO}(n)$, то лемма доказана. ■

Удобно представлять $\mathrm{O}(n)$ как подмножество в \mathbf{R}^{n^2} , определяемое системой уравнений $AA^\top = E$. Здесь \mathbf{R}^{n^2} — линейное пространство матриц A порядка n .

Рассмотрим в нем форму $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathrm{tr} AB^\top$. Получается евклидово скалярное произведение в базисе, состоящем из следующих векторов: \mathbf{e}_{ij} (все элементы такой матрицы равны нулю, кроме од-

ного, равного единице и расположенного в i -й строке и j -м столбце). Если

$$\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_i^j \mathbf{e}_{ij}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i,j} b_i^j \mathbf{e}_{ij},$$

то

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \sum_{i,j} a_i^j b_i^j,$$

что, очевидно, совпадает со скалярным евклидовым произведением. Отождествляя каждую матрицу $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ с вектором $\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_i^j \mathbf{e}_{ij}$, можно вычислить его длину, причем $\|A\|^2 = \text{tr } AA^\top$. Следовательно, для $A \in O(n)$ имеем: $\|A\| = \sqrt{n}$, т. е. $O(n)$ лежит в стандартной сфере $S^{n^2-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ радиуса \sqrt{n} .

4.3.6. Унитарная группа и специальная унитарная группа

Рассмотрим комплексное пространство \mathbb{C}^n с координатами z^1, \dots, z^n и эрмитовым скалярным произведением $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \text{Re}(\sum_{i=1}^n a^i \times \bar{b}^i)$, ассоциированным с билинейной комплекснозначной формой $\sum_{i=1}^n a^i \bar{b}^i$. Через $U(n)$ обозначим группу всех линейных операторов в \mathbb{C}^n , сохраняющих начало координат и это скалярное произведение, т. е. группу всех комплекснозначных матриц A порядка n , таких, что $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv \langle A\mathbf{a}, A\mathbf{b} \rangle$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$. Это условие эквивалентно матричному уравнению $A\bar{A}^\top = E$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Если $g \in U(n)$, то $\det(g) = e^{i\varphi}$. Определим $SU(n)$ как подгруппу в $U(n)$, такую, что $\det(g) = 1$.

Лемма 11. Группы $U(n)$ и $SU(n)$ линейно связны.

Доказательство. Рассмотрим $SU(n)$. Из курса алгебры известно, что для любого $g_0 \in SU(n)$ существует унитарное преобразование $g \in U(n)$ такое, что $a = g g_0 g^{-1}$ — диагональная матрица с собственными числами $e^{i\varphi_k}$, $1 \leq k \leq n$, совпадающими с собственными числами оператора g_0 , причем $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Непрерывный путь $\gamma(t)$, соединяющий g_0 с E задается семейством матриц $\gamma(t) = g^{-1}a(t)g$, где

$$a(t) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i(2l\pi - t \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k)} \end{pmatrix}$$

Ясно, что $\gamma(0) = E$, а $\gamma(1) = g_0$. Связность $U(n)$ доказывается аналогично.

Удобно представлять $\mathbf{U}(n)$ как подмножество в \mathbf{R}^{2n^2} , определяемое системой уравнений $A\bar{A}^\top = E$, где $\mathbf{R}^{2n^2} \cong \mathbf{C}^{n^2}$ отождествлено с линейным пространством всех комплекснозначных матриц A порядка n . Рассмотрим в \mathbf{C}^{n^2} базис, состоящий из матриц E_{kj} и I_{kj} , все элементы которых равны нулю, кроме одного, расположенного в k -м столбце и j -й строке. Если $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{C}^{n^2}$, то $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{tr} A\bar{B}^\top = \sum_{i,j=1}^n a_i^j \bar{b}_i^j$, что совпадает с эрмитовым скалярным произведением в \mathbf{C}^{n^2} . Отождествляя матрицу A с вектором, можно найти его длину: $\|\mathbf{A}\|^2 = \operatorname{Re} \operatorname{tr} A\bar{A}^\top$. Следовательно, $\mathbf{U}(n)$ расположена в сфере S^{2n^2-1} радиуса \sqrt{n} .

Лемма 12. Группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ состоит из двух компонент линейной связности. Группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ линейно связна.

Доказательство. Группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ распадается в объединение двух подмножеств, $\mathfrak{G}_0 = \{g \mid \det g > 0\}$ и $\mathfrak{G}_1 = \{g \mid \det g < 0\}$. Они не пересекаются, так как определитель матрицы — гладкая функция от ее коэффициентов, т. е. координат в \mathbf{R}^{n^2} . Далее, \mathfrak{G}_1 очевидно гомеоморфно \mathfrak{G}_0 .

Докажем связность \mathfrak{G}_0 . Так как каждый элемент $g \in \mathfrak{G}_0$ интерпретируется как некоторый базис в \mathbf{R}^n , то, применяя известный процесс его ортогонализации, получаем, что $g = \alpha \cdot \varphi$, где $\alpha \in \mathbf{SO}(n)$, а φ — верхнетреугольная матрица с положительными собственными числами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на главной диагонали. Матрица g непрерывно деформируется в матрицу α вдоль пути $\gamma(t) = \alpha \cdot \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 t + (1-t) & & & \\ & \varphi_2 t + (1-t) & & \varphi_{ij} t \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi_n t + (1-t) \end{pmatrix}$$

Осталось воспользоваться связностью $\mathbf{SO}(n)$. Лемма доказана для $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$. Доказательство связности $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ мы предоставим читателю. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Связность $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ и несвязность $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ можно пояснить (нестрого) еще так. Группа $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ получается из \mathbf{R}^{n^2} выбрасыванием гиперповерхности $\det(g) = 0$, разделяющей \mathbf{R}^{n^2} на две области. В комплексном случае $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ получается из $\mathbf{C}^{n^2} \cong \mathbf{R}^{2n^2}$ выбрасыванием подмножества $\det(g) = 0$, вещественная коразмерность которого равна 2, так как комплексное уравнение эквивалентно двум вещественным: $\operatorname{Re}(\det(g)) = 0, \operatorname{Im}(\det(g)) = 0$. Интуитивно ясно, что поверхность коразмерности два не разбивает

ваєт \mathbf{R}^{2n^2} на два куска. Любая пара неособых точек может быть соединена путем, «обходящим» особое множество.

Мы определили $U(n)$ как группу матриц, сохраняющих вещественнонзначное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n a^k \bar{b}^k$. Однако в \mathbf{C}^n имеется ассоциированная билинейная комплекснозначная форма $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{k=1}^n a^k \bar{b}^k$, а потому естественно возникает группа матриц $U(n)'$, сохраняющих эту форму, т. е. $(B\mathbf{a}, B\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^n$.

Лемма 13. Группа $U(n)$ и группа $U(n)'$ совпадают.

Доказательство несложно и предоставляем читателю.

Определим операцию овеществления, отождествляющую \mathbf{C}^n с \mathbf{R}^{2n} . Выберем в \mathbf{C}^n эрмитов базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Рассмотрим ортогональные (относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$) векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n$. Тогда для любого $\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n$ возникает разложение $\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n x^k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n y^k (i\mathbf{e}_k)$, где $x^k = x^k + iy^k$, т. е. \mathbf{C}^n отождествляется с \mathbf{R}^{2n} .

Отображение $\varphi: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$, задаваемое формулой $\varphi(\mathbf{z}) = (x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$, называется *овеществлением* \mathbf{C}^n . Легко проверить, что скалярное эрмитово произведение в \mathbf{C}^n переходит после овеществления в евклидово скалярное произведение \mathbf{R}^{2n} .

Что означает «задать в \mathbf{R}^{2n} комплексную структуру»? Рассмотрим овеществление $\varphi: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$; тогда $\mathbf{R}^{2n} \cong \mathbf{R}^n \oplus i\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$. Итак, в \mathbf{R}^{2n} возникает линейный оператор $A(\mathbf{x}) = i\mathbf{x}$. Ясно, что $A^2 = -E$ и $A(i\mathbf{e}_k) = -\mathbf{e}_k$, т. е. в ортобазисе $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n)$ матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

причем $A \in \mathbf{SO}(2n)$.

Определение 5. Будем говорить, что ортогональный оператор $A \in \mathbf{SO}(2n)$ такой, что $A^2 = -E$, определяет комплексную структуру на \mathbf{R}^{2n} .

Легко проверить, что такой оператор ортогональным поворотом базиса приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, возник ортобазис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n$ такой, что $A(\mathbf{e}_k) = \mathbf{t}_k$; $A(\mathbf{t}_k) = -\mathbf{e}_k$. Натягивая на $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ пространство $\mathbf{R}^n\{\mathbf{e}_k\}$, получаем разложение $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n\{\mathbf{e}_k\} \oplus \mathbf{R}^n\{\mathbf{t}_k\}$. Следовательно, любой $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{2n}$ допускает единственную запись вида $\mathbf{a} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n\{\mathbf{e}_k\}$. Так как $A^2 = -E$, то мы получаем \mathbf{C}^n , рассмотрев все комплексные линейные комбинации векторов $\{\mathbf{e}_k\}$.

Что происходит с унитарной группой при овеществлении φ ? Поскольку оператор $A \in \mathbf{U}(n)$ сохраняет эрмитову форму, то после овеществления он превратится в оператор φA , действующий в \mathbf{R}^{2n} и сохраняющий евклидову форму, т. е. станет элементом группы $\mathbf{O}(2n)$.

Предложение 3. Мономорфизм $\varphi: \mathbf{U}(n) \rightarrow \mathbf{SO}(2n)$, возникающий при овеществлении $\varphi: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$, записывается так:

$$A = C + iB \rightarrow \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2n),$$

где C и B вещественны. Кроме того,

$$\varphi(\mathbf{U}(n)) = \mathbf{SO}(2n) \cap \varphi(\mathbf{GL}(n; \mathbf{C})).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — базис в \mathbf{C}^n . Тогда $(C + iB)\mathbf{e}_k = C\mathbf{e}_k + B(i\mathbf{e}_k)$, $(C + iB)(i\mathbf{e}_k) = -B\mathbf{e}_k + C(i\mathbf{e}_k)$, т. е.

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление показывает, что $\det(\varphi(A)) = |\det A|^2$, т. е. $\det(\varphi(A)) > 0$.

Далее, пусть $\varphi(A) \in \varphi(\mathbf{U}(n))$. Тогда, с одной стороны, $\varphi(A) \in \mathbf{SO}(2n)$, а с другой стороны, $\varphi(A)$ получен овеществлением комплексного невырожденного оператора; отсюда: $\varphi(\mathbf{U}(n)) \subset \mathbf{SO}(2n) \cap \varphi(\mathbf{GL}(n, \mathbf{C}))$.

Обратно, пусть $g \in \mathbf{SO}(2n)$ и $g \in \varphi(\mathbf{GL}(n, \mathbf{C}))$. Это значит, что g имеет вид: $\begin{pmatrix} C & -B \\ B & C \end{pmatrix}$, т. е. $g \in \varphi(\mathbf{U}(n))$. ■

4.3.7. Симплектическая некомпактная и симплектическая компактная группы

Говорят, что в линейном пространстве L^{2n} задана линейная симплектическая структура, если задано билинейное кососимметрическое невырожденное скалярное произведение $(,)$, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ для любой пары векторов, и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ для любого \mathbf{a} в том и только в том случае, когда $\mathbf{b} = 0$. Пространство L^{2n} с такой структурой называется *симплектическим*. Удобно моделировать симплектическое пространство на евклидовом R^{2n} . Линейное преобразование симплектического пространства в себя называется *симплектическим*, если оно сохраняет симплектическую структуру. Со вокупность всех симплектических преобразований, оставляющих

на месте начала координат, называется *вещественной симплектической (некомпактной) группой* и обозначается $Sp(n, R)$. Докажите, что определитель линейного симплектического преобразования равен единице.

Компактная группа $Sp(n)$ определяется с помощью алгебры кватернионов \mathbf{Q} . Рассмотрим \mathbf{R}^4 с ортобазисом, обозначенным $1, i, j, k$. Любой вектор $q \in \mathbf{R}^4$ записывается в виде $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$, где $a^0, a^1, a^2, a^3 \in \mathbf{R}$. Определим умножение в \mathbf{R}^4 , задав его на базисе $1, i, j, k$, а затем продолжив на все векторы по линейности. Таблица имеет вид

| | 1 | i | j | k |
|-----|-----|------|------|------|
| 1 | 1 | i | j | k |
| i | i | -1 | k | $-j$ |
| j | j | $-k$ | -1 | i |
| k | k | j | $-i$ | -1 |

Возникает четырехмерная алгебра над \mathbf{R} , ассоциативная, но не коммутативная. Она называется *алгеброй кватернионов* \mathbf{Q} . В \mathbf{Q} имеется сопряжение

$$q \rightarrow \bar{q} = a^0 - a^1 \cdot i - a^2 \cdot j - a^3 \cdot k$$

и взятие обратного элемента $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$, где $|q|^2 = q\bar{q} = \sum_{i=0}^3 (a^i)^2$. В \mathbf{Q} имеется скалярное вещественнозначное произведение $\langle q_1, q_2 \rangle = \operatorname{Re}(q_1 \cdot \bar{q}_2)$. Здесь через $q_1 \cdot q_2$ обозначено произведение в \mathbf{Q} . Элементы q называются *кватернионами*. Кватернионы, у которых $a^0 = 0$, называются *мнимыми*; координата a^0 (см. выше) обозначается через $\operatorname{Re}(q)$. Итак $q = \operatorname{Re}(q) + \operatorname{Im}(q)$.

Рассмотрим n -мерное кватернионное пространство \mathbf{Q}^n с базисом e_1, \dots, e_n , т. е. любой вектор $a \in \mathbf{Q}^n$ записывается в виде $a = \sum_{k=1}^n q^k e_k$, где $q^k \in \mathbf{Q}$.

Определение 6. Компактной симплектической группой $Sp(n)$ называется совокупность всех линейных кватернионных преобразований \mathbf{Q}^n , сохраняющих точку 0 , оставляющих инвариантным следующее скалярное произведение в \mathbf{Q}^n :

$$\langle a, b \rangle = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n a^k \bar{b}^k.$$

Пространство \mathbf{Q}^n канонически отождествляется с \mathbf{C}^{2n} . Положим $n = 1$; тогда $\mathbf{Q}^1 = \mathbf{Q}$. Пусть $q = a^0 \cdot 1 + a^1 \cdot i + a^2 \cdot j + a^3 \cdot k$. Тогда, очевидно, $q = (a^0 + a^1 \cdot i) + j(a^2 - a^3 i) = z^1 + j\bar{z}^2$, где $z^1 = a^0 + ia^1$, $z^2 = a^2 + a^3 i$ — комплексные числа. Выполняя эту

операцию для каждой кватернионной координаты в \mathbf{Q}^n , получаем отождествление $\mathbf{Q}^n \cong \mathbf{C}^{2n}$. Как и в комплексном случае, наряду с $\mathrm{Sp}(n)$ определена группа инвариантности кватернионнозначной формы

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^n a^k \bar{b}^k; \quad a^k, b^k \in \mathbf{Q}.$$

Оказывается, группа инвариантности (\mathbf{a}, \mathbf{b}) совпадает с группой $\mathrm{Sp}(n)$. Доказательство предоставляем читателю.

Что происходит с кватернионнозначной формой (\mathbf{a}, \mathbf{b}) при отождествлении \mathbf{Q}^n с \mathbf{C}^{2n} ? Положим $n = 1$, тогда

$$\mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{b}} \rightarrow (p + j\bar{q})(\overline{c + jd}) = (p\bar{c} + q\bar{d}) + (-pd + qc)j.$$

Мы воспользовались соотношениями $jq = \bar{q}j$, $j^2 = -1$, $\overline{a \cdot b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (проверьте!).

При произвольном n форма (\mathbf{a}, \mathbf{b}) переходит в форму

$$\sum_{k=1}^n (p^k \bar{c}^k + q^k \bar{d}^k) + \sum_{k=1}^n (q^k c^k - p^k d^k) \cdot j,$$

где

$$\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n) \rightarrow (p^1 + j\bar{q}^1; \dots; p^n + j\bar{q}^n),$$

$$\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^n) \rightarrow (c^1 + jd^1; \dots; c^n + jd^n).$$

Ясно, что форма $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{эрм}} = \sum_{k=1}^n (p^k \bar{c}^k + q^k \bar{d}^k)$ совпадает с эрмитовой формой в \mathbf{C}^{2n} , а форма $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{косм}} = \sum_{k=1}^n (q^k c^k - p^k d^k)$ является кососимметрической, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{косм}} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\text{косм}}$. Если оператор $A: \mathbf{Q}^n \rightarrow \mathbf{Q}^n$ сохраняет $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{квт}}$, то после отождествления \mathbf{Q}^n с \mathbf{C}^{2n} он сохраняет уже две формы: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{эрм}}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{косм}}$. То, что оператор сохраняет $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{эрм}}$, означает, что он становится унитарным оператором.

Мы доказали, что $\mathrm{Sp}(n)$ вкладывается в $\mathrm{U}(2n)$ как подгруппа, сохраняющая в \mathbf{C}^{2n} кососимметрическую форму $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\text{косм}} = \sum_{k=1}^n (q^k c^k - p^k d^k)$.

Предложение 4. Группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$, $\mathrm{Sp}(n, R)$ некомпактны; группы $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ компактны.

Доказательство проводится по схеме, показанной нами выше.

Отметим, что мы отнюдь не исчерпали список всех групп Ли.

Рассмотрим некоторые группы Ли малых размерностей. Мы видели, что группа $\mathrm{SO}(2)$ гомеоморфна окружности; $\mathrm{SO}(3)$ гомеоморфна \mathbf{RP}^3 . Ясно, что $\mathrm{U}(1) \cong S^1$. Изучим группы $\mathrm{Sp}(1)$ и $\mathrm{SU}(2)$.

Предложение 5. Группы $SU(2)$ и $Sp(1)$ изоморфны (в алгебраическом смысле) и обе гомеоморфны сфере S^3 . Группа $SO(3)$ является факторгруппой $SU(2)$ по подгруппе Z_2 , состоящей из элементов $E, -E$.

Доказательство. Группа $Sp(1)$ действует в $\mathbf{Q}^1 = \mathbf{Q}$ как умножение на кватернион, т. е. каждый $A \in Sp(1)$ имеет вид: $Aq = q \cdot \bar{a}$, где a — фиксированный кватернион. Так как $(q_1, q_2)_{\text{квт}} = q_1 \cdot \bar{q}_2$ сохраняется при действии A , то $q_1 \bar{q}_2 = q_1 \bar{a} a \bar{q}_2 = |a|^2 q_1 \cdot q_2$. Отсюда $|a| = 1$. Так как $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$ (проверьте!), то $Sp(1)$ изоморфна группе кватернионов a таких, что $|a| = 1$. Такие кватернионы очевидно образуют сферу S^3 .

Докажем, что $Sp(1)$ изоморфна $SU(2)$. Рассмотрим вложение $Sp(1) \rightarrow U(2)$ (см. выше). Так как $n = 1$, то вложение имеет вид

$$\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix},$$

причем $p\bar{p} + q\bar{q} = 1$. Это проверяется прямым вычислением.

Итак, $Sp(1)$ изоморфна унимодулярной подгруппе в $U(2)$, причем размерность ее равна 3. Так как $SU(2)$ также трехмерна, то $Sp(1)$ и $SU(2)$ изоморфны.

Докажем, что существует эпиморфизм $f: SU(2) \rightarrow SO(3)$ с ядром, изоморфным Z_2 . Реализуем $SU(2)$ как группу единичных кватернионов. Положим $f(a) = aq\bar{a}$, где $|a| = 1$, и $\operatorname{Re}(q) = 0$, т. е. q — мнимые кватернионы, образующие подпространство \mathbf{R}^3 , ортогональное к $1 \in \mathbf{Q}$. Тогда f — гомоморфизм, так как $f(a_1 \cdot a_2) = a_1 a_2 \times q\bar{a}_2 \bar{a}_1 = f(a_1) \cdot f(a_2)$. Преобразование $f(a)$ переводит в себя \mathbf{R}^3 (мнимые кватернионы) и является изометрией, так как $\operatorname{Re}(aq\bar{a}a \times q\bar{a}\bar{a}) = \operatorname{Re}(aq_1\bar{q}_2\bar{a}) = \operatorname{Re}(q_1\bar{q}_2)$. Итак, $f(a) \in SO(3)$ (в силу связности S^3 образ $f(S^3)$ лежит в $SO(3)$).

Найдем ядро f . Если $aq\bar{a} \equiv q$ для всех мнимых q , то $aq = qa$, $|a| = 1$, т. е. $a = \pm 1$, так как коммутирование a со всеми мнимыми кватернионами означает, что мнимая часть a равна нулю. Так как $\operatorname{Ker}(f) = Z_2 = (E, -E)$, то $\dim(S^3/Z_2) = 3$, и так как $\dim SO(3) = 3$, то f — эпиморфизм.

Тот факт, что $SO(3) \cong S^3/Z_2$ соответствует представлению \mathbf{RP}^3 в виде фактора: S^3/Z_2 , где Z_2 действует на S^3 как умножение векторов на -1 . ■

Задачи

1. Доказать, что группа $O(2)$ совпадает с группой всех изометрий окружности (с метрикой $ds^2 = d\varphi^2$).
2. Доказать, что группа $SL(2, \mathbf{R})/Z_2$ является линейно связной.

3. Доказать, что группа $U(n)$ (как топологическое пространство) гомеоморфна прямому произведению $SU(n)$ на окружность S^1 .

4. Пусть \mathfrak{G} — связная группа Ли и H — ее дискретная нормальная подгруппа. (Подгруппа H называется дискретной, если единица группы \mathfrak{G} обладает такой открытой окрестностью U , что в ней содержится только один элемент H — единица.) Доказать, что любая дискретная нормальная подгруппа H лежит в центре \mathfrak{G} , т. е. коммутирует со всей группой \mathfrak{G} .

4.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Мы уже знакомы с векторным полем $\mathbf{v}(x) = \text{grad } f(x)$, где f — гладкая функция на \mathbb{R}^n . В действительности в криволинейных координатах grad не является векторным полем, так как у него иной закон преобразования, и трактовать grad как векторное поле можно только при наличии римановой метрики.

Напомним, что в евклидовом пространстве выполнено равенство: $df/da = \langle \mathbf{a}, \text{grad } f \rangle$, где df/da — производная по направлению, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово произведение.

Размерность гиперповерхности уровня функции $\{f = c\}$ равна $n - 1$, если $\{f = c\}$ — гладкое многообразие.

Определение 1. Точка $x_0 \in \{f = c\}$ называется *критической точкой функции* f , если $\text{grad } f(x_0) = 0$; в противном случае x_0 называется *неособой (некритической или регулярной) точкой*.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ — гладкая функция на \mathbb{R}^n и $x_0 \in \{f = c\}$ — неособая точка. Тогда вектор $\text{grad } f(x_0)$ ортогонален гиперповерхности $\{f = c\}$ в точке x_0 , т. е. $\text{grad } f(x_0)$ ортогонален любому вектору \mathbf{a} , касательному к $\{f = c\}$ в точке x_0 .

Доказательство вытекает из соотношения $\langle \mathbf{a}, \text{grad } f \rangle = df/da$.

Говорят, что на гладком многообразии M^n задано гладкое векторное поле \mathbf{v} , если в каждой точке P задан вектор $\mathbf{v}(P) \in T_P M^n$, гладко зависящий от точки.

Определение 2. Точка $P_0 \in M^n$ называется *особой* для векторного поля \mathbf{v} , если $\mathbf{v}(P_0) = 0$. Особая точка P_0 поля \mathbf{v} называется *изолированной*, если у нее существует открытая окрестность U , в которой поле \mathbf{v} не имеет других особенностей, кроме точки P_0 .

В физике большую роль играют разрывные поля, являющиеся гладкими всюду, кроме некоторого числа изолированных точек разрыва. См. примеры ниже.

Пусть \mathbf{v} — гладкое поле на M^n . Траектория $\gamma(t)$ называется *интегральной кривой поля* \mathbf{v} , если $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(\gamma(t))$, т. е. если касательные векторы скорости к $\gamma(t)$ совпадают с векторами поля \mathbf{v} .

Рассмотрим примеры. Пусть f — функция на плоскости и $\mathbf{v} = \text{grad } f$;

а) $f = x^2 + y^2$, $\text{grad } f = (2x, 2y)$, интегральные траектории образуют пучок лучей, исходящих из точки O (рис. 4.36);

б) $f = -x^2 - y^2$, $\text{grad } f = (-2x, -2y)$, интегральные траектории — лучи, входящие в точку O (рис. 4.37);

в) $f = -x^2 + y^2$, $\text{grad } f = (-2x, 2y)$, интегральные траектории — гиперболы (рис. 4.38).

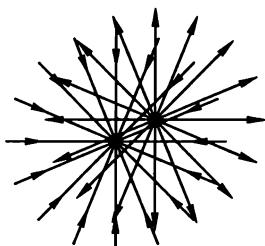


Рис. 4.36

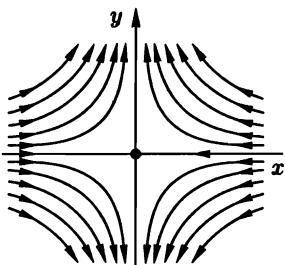


Рис. 4.37

Рис. 4.38

Часто о векторном поле \mathbf{v} говорят как о потоке жидкости, текущей по многообразию. Считается, что в каждой частице жидкости помещен вектор, указывающий ее скорость. Например, особая точка на рис. 4.36 — это источник: жидкость «вытекает» из точки O , а особая точка на рис. 4.37 — это сток. Интегральные траектории поля иногда называют *линиями тока жидкости*. Потоки, зависящие от времени, называются *нестационарными*. Они моделируются векторными полями $\mathbf{v}(P, t)$, зависящими от времени t . Как найти интегральные траектории поля? Соответствующие методы разработаны в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое поле $\mathbf{v} = (v^1(P), \dots, v^n(P))$ отождествляется с системой обыкновенных уравнений $dx^k/dt = v^k(x^1, \dots, x^n)$, $1 \leq k \leq n$.

Автономными или *стационарными* называются системы, правые части которых не зависят от времени t .

Остановимся на частном случае, когда поведение интегральных траекторий упрощается.

Определение 3. Пусть система дифференциальных уравнений отвечает полю \mathbf{v} на M^n . *Интегралом системы* называется гладкая функция f на M^n , постоянная вдоль всех интегральных траекторий потока.

Пусть f — интеграл. Гиперповерхности $\{f = c\}$ расслаивают M^n при изменении c . В окрестности неособых точек для $\text{grad } f$ поверх-

ности $\{f = c\}$ являются гладкими подмногообразиями размерности $n - 1$. Из определения интеграла следует, что если интегральная траектория имеет общую точку с $\{f = c_0\}$, то она целиком лежит в $\{f = c_0\}$. Отсюда следует, что поле $v(P)$ касается в каждой точке P поверхности $\{f = f(P)\}$ (рис. 4.39). Каждая поверхность $\{f = c\}$ расслоена на интегральные траектории потока v . Это позволяет понизить порядок исходной системы уравнений на единицу, ограничив поле v на поверхность $\{f = c\}$.

Если известны два функционально независимых интеграла f и g (т. е. почти во всех точках M^n поля $\text{grad } f$ и $\text{grad } g$ линейно независимы), то порядок системы понижается на две единицы (рис. 4.40) и т. д. Если найдены $n - 1$ независимых интегралов, то все интегральные траектории описываются так: $\gamma(t) = \{f_1 = c_1\} \cap \dots \cap \{f_{n-1} = c_{n-1}\}$, где $\gamma(0) = P$, $f_k(P) = c_k$. Если интегралов n , то последний интеграл задает скорость движения точки по интегральной траектории, т. е. поток интегрируется полностью.

Определение 4. Пусть на M^n заданы поля v_1, \dots, v_k . Они называются *линейно независимыми*, если векторы $v_1(P), \dots, v_k(P)$ линейно независимы в каждой точке P .

Предложение 1. Пусть $M^n = \mathfrak{G}$ — группа Ли. Тогда на \mathfrak{G} всегда существуют n линейно независимых гладких векторных полей v_1, \dots, v_n .

Доказательство. Рассмотрим на \mathfrak{G} операцию левого сдвига $L_a: g \rightarrow ag$. Ясно, что L_a является диффеоморфизмом. Рассмотрим единицу e и зададим в $T_e \mathfrak{G}$ n независимых векторов e_1, \dots, e_n . Рассмотрим дифференциал $dL_a: T_e \mathfrak{G} \rightarrow T_{a \cdot e} \mathfrak{G}$. Положим $v_k(a) = dL_a(e_k)$. Так как L_a — диффеоморфизм, то dL_a невырожден, т. е. все векторы $v_k(a)$ линейно независимы. ■

Интересный пример трех независимых полей можно построить на сфере S^3 , гомеоморфной $\text{SU}(2)$. Пусть $S^3 = \{q \in \mathbb{Q}; |q| = 1\}$. Положим $v_1(q) = iq$, $v_2(q) = jq$, $v_3(q) = kq$. Легко видеть, что эти поля касаются сферы и всюду независимы.



Рис. 4.39

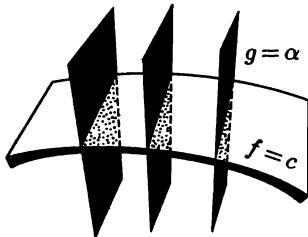


Рис. 4.40

Задача. Найти в явном виде интегральные траектории указанных полей на сфере S^3 .

Среди полей на M^n выделен класс так называемых градиентных или потенциальных полей. Пусть M^n снабжено римановой метрикой и f — гладкая функция на M^n . Тогда $\text{grad } f = \{\partial f / \partial x^i\}$ — элемент пространства, дуального к $T_p M^n$. Для того чтобы получить вектор, рассмотрим поле с компонентами $v^k = g^{kp} \cdot \partial f / \partial x^p$. Ясно, что функции v^1, \dots, v^n преобразуются по закону преобразования координат вектора; его мы и обозначим через $\text{grad } f$.

Определение 5. Потенциальным или градиентным полем \mathbf{v} на M^n называется поле вида $\mathbf{v} = \text{grad } f$, где f — гладкая функция на M^n .

Лемма 2. Потенциальное поле не имеет замкнутых интегральных траекторий без особых точек.

Доказательство. Пусть такая траектория есть. Она называется периодическим решением системы. Тогда $\dot{x}(t) = \mathbf{v}(x)$, где $x(t)$ — решение. Если f — потенциал, то

$$\frac{df}{dx} = \langle \dot{x}, \mathbf{v}(x) \rangle = g_{ij} \dot{x}^i v^j = g_{ij} v^i v^j = |\text{grad } f|^2 > 0.$$

Поэтому f строго монотонно растет с ростом t . Но так как траектория γ замкнута, то через некоторое время точка $\gamma(t)$ вернется в прежнее положение, что противоречит однозначности функции. ■

Например, поле, изображенное на рис. 4.41, не потенциально (вращение жидкости вокруг начала координат).

Рассмотрим поля на двумерных многообразиях. Ограничимся их локальным изучением. Тогда можно считать, что поток задан на евклидовой плоскости. Будем трактовать поле как поток жидкости постоянной плотности, равной 1. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, с каждым потоком связана однопараметрическая группа диффеоморфизмов, т. е. сдвигов вдоль интегральных траекторий поля. Пусть поле \mathbf{v} имеет координаты $(P(x, y), Q(x, y))$. Рассмотрим изменение массы в бесконечно малом прямоугольнике со сторонами dx, dy (рис. 4.42).

Если dm — масса жидкости в прямоугольнике, то $dm = dx dy$. Если $\gamma(t)$ — решение, то t определено с точностью до сдвига. Положим $f_{t_0}(P) = \gamma(t_0)$, где $\gamma(0) = P$. Отображение f_{t_0} — диффеоморфизм. Рассмотрим $P = (x, y)$ и прямоугольник (dx, dy) . Его образом при $f_{\Delta t}$ будет

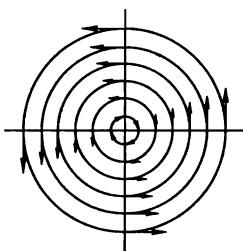


Рис. 4.41

бесконечно малый параллелограмм Γ (рис. 4.43). С изменением t масса $dm(t) = dx(t) dy(t)$ также меняется.

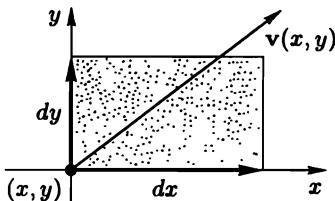


Рис. 4.42

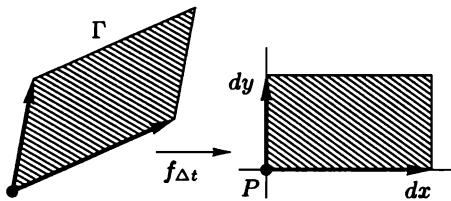


Рис. 4.43

Лемма 3. Изменение массы в бесконечно малом прямоугольнике (dx, dy) имеет вид

$$\frac{d}{dt}(dm(t)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказательство. Будем считать, что $f_{\Delta t}$ вводит в (dx, dy) новые координаты. Имеем

$$\begin{aligned} dx(t + \Delta t) dy(t + \Delta t) &= d(x(t) + \Delta t x'_t) d(y(t) + \Delta t y'_t) = \\ &= \left(dx(t) + \Delta t \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \right) \left(dy(t) + \Delta t \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \right). \end{aligned}$$

Так как в первом сомножителе приращению берется только вдоль оси Ox , то здесь Δy равно нулю. Во втором сомножителе равно нулю приращение вдоль Oy , т. е. Δx исчезает. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(dx(t) + \Delta t \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \left(dy(t) + \Delta t \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) &= \\ &= dx(t) dy(t) + \Delta t dx(t) dy(t) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Мы пренебрегаем малыми высшего порядка. Отсюда

$$\Delta dm(t) = \Delta t \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Определение 6. Функция $\text{div}(\mathbf{v}) = \partial P(x, y)/\partial x + \partial Q(x, y)/\partial y$ называется *дивергенцией потока* \mathbf{v} (в декартовых координатах). Поток называется *несжимаемым*, если $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$.

Из леммы 3 следует, что изменение массы равно нулю тогда и только тогда, когда поток несжимаем. Пусть D — ограниченная область с кусочно гладкой границей, $D(t)$ — область, полученная из D ее сдвигом вдоль интегральных траекторий \mathbf{v} за время t . Пусть площадь $D(t)$ равна $V(t)$. Если плотность жидкости равна 1, то $V(t)$ — масса, заключенная в $D(t)$.

Предложение 2. Для любой ограниченной области $D(t)$ имеем

$$\frac{dV(t)}{dt} = \iint_{D(t)} \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx dy.$$

Для доказательства достаточно разбить $D(t)$ на бесконечно малые прямоугольники и применить лемму 3.

Определение 7. Поток $\mathbf{v} = (P, Q)$ называется *безвихревым*, если $P_y = Q_x$.

Это условие можно видоизменить. Рассмотрим на плоскости гладкий контур $C = \gamma(t)$. *Вихрем потока* \mathbf{v} вдоль C называется число $\int_C (\mathbf{v}, \dot{\gamma}(t)) dt$ (рис. 4.44). Оно также называется циркуляцией потока вдоль контура.

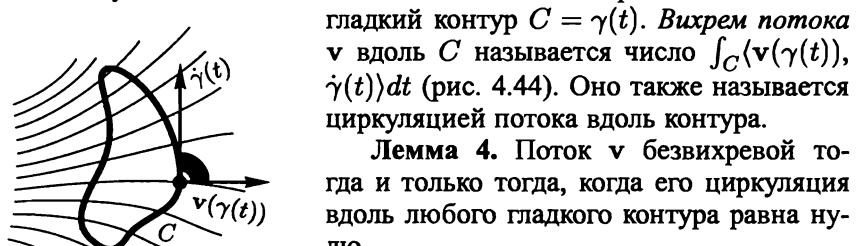


Рис. 4.44

Лемма 4. Поток \mathbf{v} безвихревой тогда и только тогда, когда его циркуляция вдоль любого гладкого контура равна нулю.

Доказательство. Пусть D — область, ограниченная C . Имеем

$$\int_{\gamma(t)} \langle \mathbf{v}, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left(P \frac{dx}{dt} + Q \frac{dy}{dt} \right) dt = \iint_D (P_y - Q_x) dx dy;$$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

Здесь применена формула Стокса (см. гл. 6). ■

Предложение 3. Пусть \mathbf{v} — безвихревый поток на плоскости. Тогда \mathbf{v} потенциален, т. е. существует гладкая функция $a(x, y)$ такая, что $\mathbf{v} = \operatorname{grad} a(x, y)$. Форма $P dx + Q dy$ — полный дифференциал функции $a(x, y)$, определенной однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Доказательство. Проинтегрируем уравнения $P = \partial a / \partial x$, $Q = \partial a / \partial y$ при условии, что $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x$. Интегрируя по x первое уравнение, получаем $a(x, y) = \int_0^x P(x, y) dx + g(y)$. Диффе-

ренцируя по y , получаем

$$Q(x, y) = \int_0^x \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} dx + \frac{dg(y)}{dy},$$

или $g'(y) = Q(0, y)$, т. е. $g(y) = \int_0^y Q(0, y) dx + C$, где $C = \text{const}$. Итак,

$$a(x, y) = \int_0^x P(x, y) dx + \int_0^y Q(0, y) dy + C.$$

Начиная с уравнения $Q = \partial a / \partial y$, мы получим $a(x, y) = \int_0^y Q(x, y) \times \times dy + \int_0^x P(x, 0) dx + C$.

Функция $a(x, y)$ — потенциал потока. Опишем его геометрически. Рассмотрим два кусочно гладких пути: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ и $\gamma' = \gamma'_1 \cup \gamma'_2$ (рис. 4.45). Ясно, что

$$a(x, y) = \int_{\gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\gamma'} (P dx + Q dy),$$

т. е. $a(x, y)$ получается интегрированием дифференциальной формы $\omega = P dx + Q dy$ вдоль пути γ или γ' ■

Предложение 4. Пусть поток \mathbf{v} безвихревый. Тогда он потенциален, и потенциал имеет вид

$$a(x, y) = \int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\gamma} \omega,$$

где γ — любой кусочно-гладкий путь, ведущий из точки $(0, 0)$ в точку (x, y) . Интеграл $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от выбора пути.

Доказательство. Тот факт, что $\int_{\gamma} (P dx + Q dy)$ не зависит от пути (если начало и конец фиксированы), вытекает из формулы Стокса (см. гл. 6). Так что можно взять один из путей, показанных на рис. 4.45. ■

Пусть поток \mathbf{v} — безвихревый и несжимаемый. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad P = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial a}{\partial y},$$

откуда $\partial^2 a / \partial x^2 + \partial^2 a / \partial y^2 = 0$.

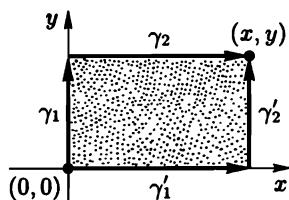


Рис. 4.45

Линейный дифференциальный оператор второго порядка $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ (записанный в декартовых координатах) называется *оператором Лапласа*. Функция $f(x, y)$ такая, что $\Delta f = 0$, называется *гармонической*.

Мы доказали, что потенциал безвихревого и несжимаемого потока — гармоническая функция. Иногда $a(x, y)$ рассматривают в паре с другим потенциалом $b(x, y)$, называемым *сопряженным потенциалом* или потенциалом сопряженного потока. Он является решением системы $\partial b/\partial x = -Q$, $\partial b/\partial y = P$.

Функция $b(x, y)$ является потенциалом потока $\tilde{v} = (-Q, P)$. Поток \tilde{v} называется *сопряженным к потоку v = (P, Q)*.

Потоки v и \tilde{v} очевидно взаимно ортогональны.

Рассмотрим плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ и комплекснозначную функцию: $f(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$, где a и b — соответственно потенциал и сопряженный потенциал несжимаемого потока $v = (P, Q)$. Вместо $\partial g/\partial y$, $\partial g/\partial x$ будем писать просто g_y , g_x . Так как $a_x = P$, $a_y = Q$, $b_x = -Q$, $b_y = P$, то $a_x = b_y$, $a_y = -b_x$. Такие функции $f = a + ib$ называются *комплексно аналитическими*, а уравнения на a и b — *уравнениями (условиями) Коши–Римана*. Функции a и b называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями функции f*: $a = \operatorname{Re}(f)$, $b = \operatorname{Im}(f)$. Напомним некоторые свойства комплексно аналитических функций.

Пусть $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Любая функция $g(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, разлагающаяся в сходящийся ряд по x, y , может быть записана так: $g(x, y) = \tilde{g}(z, \bar{z})$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Аналогично $\partial/\partial\bar{z} = 1/2(\partial/\partial x + i(\partial/\partial y))$. Выделим функции $g(z, \bar{z})$, зависящие только от z . Аналитически это можно записать так: $(\partial/\partial\bar{z})g(z, \bar{z}) = 0$. Они называются *комплексно аналитическими* и разлагаются в сходящийся ряд только по степеням переменной z . Так как $\partial g/\partial\bar{z} = 0$, то $g_x + ig_y = 0$, т. е. $u_x + iv_x + i(u_y + iv_y) = 0$, и условие $\partial g/\partial\bar{z} = 0$ эквивалентно уравнениям Коши–Римана $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

Тем самым, нами доказана

Теорема 1. *Любой безвихревый и несжимаемый поток v на плоскости представим в виде $v = \operatorname{grad} a(x, y)$, а сопряженный поток \tilde{v} — в виде $\tilde{v} = \operatorname{grad} b(x, y)$, где функция $f(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$ комплексно аналитическая и определена однозначно с точностью до аддитивной постоянной.*

Верно и обратное: если $f(z)$ — комплексно аналитическая функция, то потоки $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \operatorname{Re}(f(z))$ и $\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{grad} \operatorname{Im}(f(z))$ безвихревые и несжимаемые; кроме того они сопряжены друг другу.

Интегральные траектории \mathbf{v} и $\tilde{\mathbf{v}}$ ортогональны. Функция $f = a + ib$ называется *комплексным потенциалом потока*. Рассмотрим примеры особых точек векторных полей.

Пусть \mathbf{v} — безвихревый и несжимаемый поток. Как найти нули \mathbf{v} и $\tilde{\mathbf{v}}$? Из уравнений Коши–Римана имеем

$$f'_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = a_x - ia_y = b_y + ib_x.$$

Лемма 5. Точки, в которых $f'_z(z)$ обращается в нуль, совпадают с нулями потока \mathbf{v} (эти же точки — нули потока $\tilde{\mathbf{v}}$).

Доказательство сразу следует из равенства $f'_z(z) = a_x - ia_y = b_y + ib_x$.

До сих пор мы рассматривали гладкие поля. Однако рассуждения можно повторить и для потоков, имеющих изолированные точки разрыва (они не являются решениями уравнения $f'(z) = 0$).

Пусть \mathbf{v} — несжимаемый, безвихревый поток; т. е. поток вида $\operatorname{grad} \operatorname{Re}(f(z))$. Как найти интегральные его траектории? Оказывается, нет необходимости решать соответствующую систему дифференциальных уравнений.

Предложение 5. Пусть $f = a + ib$ — комплексно аналитическая функция, $\mathbf{v} = \operatorname{grad}(a)$, $\tilde{\mathbf{v}} = \operatorname{grad}(b)$. Тогда b — интеграл для поля \mathbf{v} , a — интеграл для $\tilde{\mathbf{v}}$, т. е. интегральные траектории \mathbf{v} суть линии уровня функции b , интегральные траектории $\tilde{\mathbf{v}}$ — линии уровня функции a .

Доказательство. Ясно, что $db/d\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \operatorname{grad} b \rangle = a_x b_x + a_y b_y = 0$ и $da/d\tilde{\mathbf{v}} = 0$. ■

Рассмотрим примеры.

1) Пусть $f(z) = z^k$, $k \geq 2$. Ясно, что $a = r^k \cos k\varphi$; $b = r^k \sin k\varphi$. На рис. 4.46 изображены интегральные траектории $\operatorname{grad} a$ при $k = 4$.

2) Пусть $f(z) = z^{-k}$, $k \geq 1$, $f = r^{-k}(\cos k\varphi - i \sin k\varphi)$. На рис. 4.47 изображены интегральные траектории $\operatorname{grad} a$ при $k = 4$.

3) Пусть $f(z) = \ln z$. На рис. 4.48 изображены интегральные траектории \mathbf{v} и $\tilde{\mathbf{v}}$. Это — логарифмическая особенность.

4) Рассмотрим функцию Жуковского: $f(z) = z + 1/z$. Интегральные траектории (для одного потока) см. на рис. 4.49.

Задача. Постройте траектории сопряженного потока.

5) Пусть $f(z) = 1/\alpha(\ln(z + \alpha) - \ln(z - \alpha))$, α вещественное. Картина одного потока показана на рис. 4.50.

З а д а ч а. Постройте картину сопряженного потока.

Здесь можно проиллюстрировать слияние особенностей. При $\alpha \neq 0$ картина потока (рис. 4.50) совпадает с диполем (два заряда, помещенные в особых точках). При $\alpha \rightarrow 0$ поле диполя превращается в поток полюса первого порядка (рис. 4.51).

6) Рассмотрим полином $P_k(z) = \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)$ с простыми вещественными корнями. Качественная картина поток показана на рис. 4.52. Пусть все корни α_i стремятся к нулю и полином превращается в z^k . Деформацию потока см. на рис. 4.53.

7) Задача. Используя стереографическую проекцию, перенести описанные выше потоки на двумерную сферу.

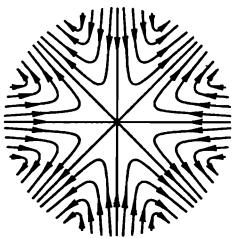


Рис. 4.46

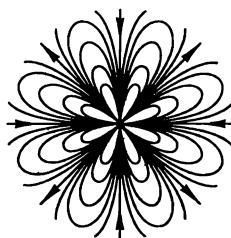


Рис. 4.47

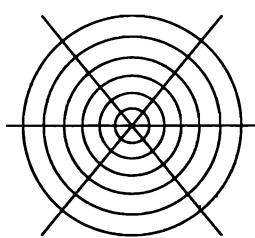


Рис. 4.48

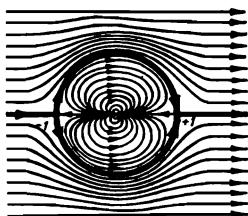


Рис. 4.49

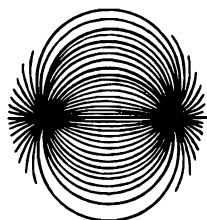


Рис. 4.50

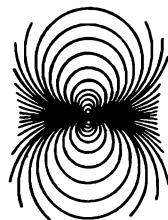


Рис. 4.51

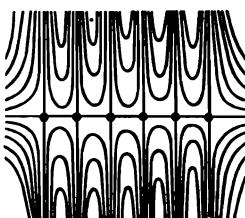


Рис. 4.52

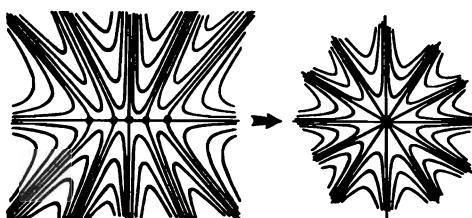


Рис. 4.53

Попытки построить на S^2 гладкое поле без особенностей кончаются неудачей. Это не случайно. Дадим интуитивное обоснование теоремы, что любое гладкое поле на S^2 имеет особенность. Допустим, что на S^2 построено поле без особенностей. Представим S^2

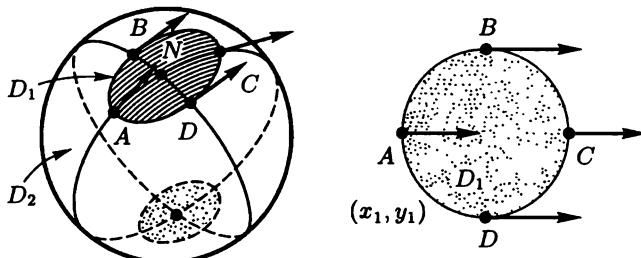


Рис. 4.54

в виде объединения двух дисков: $S^2 = D_1 \cup D_2$, где D_1 — диск с центром в северном полюсе N и малого радиуса, D_2 — дополнение к D_1 (рис. 4.54). Так как поле гладкое, то можно считать, что в D_1 это поле постоянно, и его векторы в точках A, B, C, D имеют направления, показанные на рис. 4.54. Введем на D_1 и D_2 декартовы координаты. Тогда в D_2 поле \mathbf{v} (в этих координатах) имеет вид, показанный на рис. 4.55. Это можно пояснить еще и так. Растигнем D_1 вдоль меридианов так, чтобы он покрыл всю сферу, за исключением D_2 малого радиуса. Тогда мы и получим картину, показанную на рис. 4.55. Так как радиус D_2 можно считать малым, то интуитивно ясно, что внутри должна быть особенность; в противном случае картина траекторий совпадала бы с картиной в D_1 .

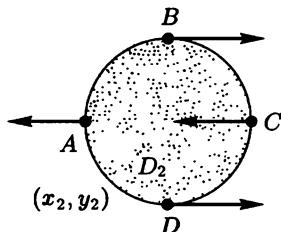


Рис. 4.55

4.5. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Мы начнем с общих определений, затем приведем примеры, а потом докажем теорему классификации поверхностей.

4.5.1. Многообразия с краем

Расширим понятие гладкого многообразия, включив в него подмножества в \mathbb{R}^n , задаваемые системами уравнений и неравенств. Обозначим через $\mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$ полупространство, задаваемое так: $x^n \geqslant$

≥ 0 . Границу \mathbf{R}_+^n , задаваемую $x^n = 0$, обозначим через \mathbf{R}_0^{n-1} . Пусть $f: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ — непрерывная функция во всех точках, включая и граничные. Определим дифференцируемую функцию f так. Если точка $x_0 \in \mathbf{R}_+^n$ внутренняя, т. е. $x^n > 0$, то определение дифференцируемости обычное. Если же $x_0 \in \mathbf{R}_0^{n-1}$, т. е. $x^n = 0$, то скажем, что f дифференцируема в точке x_0 , если справедливо разложение

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n a_i(x^i - x_0^i) + o(x - x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0} o(x - x_0)/|(x - x_0)| = 0$, $x^n \geq 0$. Тогда $a_i = \partial f / \partial x^i(x_0)$ при $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $a_n = \lim_{h \rightarrow +0}(1/h)(f(x_0^1, \dots, x_0^{n-1}, x_0^n + h) - f(x_0^1, \dots, x_0^n))$. Последний предел уместно называть *частной производной* $\partial f / \partial x^n$ функции f в точке x_0 . Аналогично определяется класс функций гладкости C^r .

Определение 1. Метрическое пространство M называется *гладким многообразием с краем*, если существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$ и координатные гомеоморфизмы $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbf{R}_+^n$, где V_α — открытое множество в \mathbf{R}_+^n , что функции замены координат

$$\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}: V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow V_{\beta\alpha} = \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

— гладкие функции.

Линейные координаты (x^1, \dots, x^n) в \mathbf{R}_+^n индуцируют локальные координаты в карте U_α : $x_\alpha^k(P) = x^k(\varphi_\alpha(P))$. Тогда в любой локальной системе координат имеем $x_\alpha^n(P) \geq 0$. Точка $P \in M$ называется *внутренней* точкой, если $x_\alpha^n(P) > 0$. Точка P называется *граничной*, если $x_\alpha^n(P) = 0$.

Итак, многообразие с краем характеризуется тем, что существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$ с локальными координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, что для любой карты выполнено строгое неравенство $x_\alpha^n > 0$ во внутренних точках и равенство $x_\alpha^n = 0$ в граничных точках. Если карта U_α не содержит граничных точек, то условие $x_\alpha^n > 0$ можно без ограничения общности отбросить. Множество ∂M граничных точек — гладкое многообразие на единицу меньшей размерности. В самом деле, в качестве атласа карт следует взять пересечение $W_\alpha = \partial M \cap U_\alpha$, а в качестве координат — первые $n-1$ координат $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1}$ карты U_α . Координатные гомеоморфизмы φ_α (см. выше) отображают W_α гомеоморфно на $V_\alpha \cap \mathbf{R}_0^{n-1}$, а функции замены остаются гладкими как ограничения функций замены координат многообразия M .

Если $\partial M = \emptyset$, то приходим к прежнему понятию многообразия, которое отныне будем называть *замкнутым многообразием*.

Пример 1. Рассмотрим шар D^n , задаваемый неравенством $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 \leq 1$ в \mathbf{R}^n . Это — многообразие с краем S^{n-1} .

Пример 2. Пусть $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ — вектор-функция, удовлетворяющая условиям теоремы о неявных функциях, т. е. во всех точках $P \in M = \{f(P) = 0\}$ дифференциал df имеет максимально возможный ранг. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} f^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ f^{k-1}(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ f^k(x^1, \dots, x^n) \geq 0, \end{cases}$$

и пусть M' — множество решений этой системы.

Если в каждой точке $P \in M'$ ранг $\|\partial f^i / \partial x^s\|$, $1 \leq i \leq k-1; 1 \leq s \leq n$, равен $k-1$, то M' — многообразие с краем $\partial M' = M$. В самом деле, в точках $P \in M' \setminus M$ существует атлас карт по теореме о неявной функции для системы $f^1 = 0, \dots, f^{k-1} = 0$. Рассмотрим $P \in M$. Пусть N' — множество решений системы $f^1 = 0, \dots, f^{k-1} = 0$ в некоторой окрестности точки P . Тогда f^k можно рассматривать как функцию на N' . Ясно, что дифференциал f^k на N' отличен от нуля. Следовательно, по теореме из гл. 3 разд. 5 N' диффеоморфно прямому произведению интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ на многообразие N , являющееся пересечением M с окрестностью точки P : $N' = N \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Поэтому неравенство $f^n \geq 0$ выделяет карту вида $N \times [0, \varepsilon]$, в которой в качестве координат можно взять набор (x^1, \dots, x^{n-k}) на многообразии N и функцию $f^k \geq 0$.

Пример 3. В предыдущем примере видно, что декартово произведение многообразия M с краем ∂M на замкнутое многообразие N является многообразием $M \times N$ с краем $\partial M \times N$.

4.5.2. Ориентируемые многообразия

Определение 2. Многообразие (с краем) M называется *ориентируемым*, если существует такой атлас карт $\{U_\alpha\}$, что якобиан функций перехода от одной локальной системы координат к другой положителен. Будем говорить также, что атлас карт $\{U_\alpha\}$, у которого все якобианы функций перехода положительны, задает на многообразии M ориентацию, а сам атлас карт назовем *ориентированным атласом карт*. Два атласа карт $\{U_\alpha\}$ и $\{U'_\beta\}$ задают одинаковую ориентацию, если объединение атласов $\{U_\alpha\} \cup \{U'_\beta\}$ снова является ориентированным атласом карт.

Всякий атлас карт на ориентируемом многообразии можно превратить в ориентированный атлас карт путем изменения локальных координат в каждой карте (докажите!).

Предложение 1. *На связном ориентированном многообразии существуют ровно две различные ориентации, причем любая карта задает локальную ориентацию, совпадающую с одной из ориентаций M .*

Доказательство предоставляется читателю.

Существует другое представление об ориентации M . Скажем, что базис $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ задает ориентацию евклидова пространства. Два базиса считаются *одинаково ориентированными*, если детерминант матрицы перехода положителен. Тогда \mathbb{R}^n приобретает ровно две различных ориентации. Задать ориентацию M — значит задать ориентацию касательного пространства $T_P M$ в каждой точке $P \in M$. Пусть $\varphi: [0, 1] \rightarrow M$ — непрерывный путь. Для любого базиса в начальной точке $(e_1, \dots, e_n) \in T_{\varphi(0)} M$ построим непрерывное семейство базисов $(e_1(t), \dots, e_n(t)) \in T_{\varphi(t)} M$, начинающееся с базиса (e_1, \dots, e_n) . Любые два таких семейства задают в $T_{\varphi(t)} M$ одинаковую ориентацию. Если M ориентируемо, то ориентация в конечной точке $\varphi(1)$ пути φ не зависит от выбора пути. Таким образом, задать ориентацию на M — значит задать ориентацию касательных пространств $T_P M$ так, чтобы они были согласованы по любому непрерывному пути, соединяющему пары точек. (Докажите эквивалентность двух определений ориентируемости.)

Теорема 1. *Если многообразие с краем M ориентируемо, то край ∂M тоже является ориентируемым многообразием.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha, (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$ — атлас на M . Последняя координата x_α^n в любой карте является неотрицательной функцией. Поскольку M ориентируемо, то, меняя в каждой карте U_α координату x_α^1 на $-x_\alpha^1$, если это необходимо, можно считать, что якобиан замены переменных положителен в каждом пересечении карт $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. В качестве карт на ∂M , как и раньше, возьмем пересечения $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, а в качестве локальных координат — первые $n-1$ координат, т. е. $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^{n-1}) = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1})$. Покажем, что $\det \|\partial y_\alpha^i / \partial y_\beta^j\| > 0$ в произвольной точке $P \in W_\alpha \cap W_\beta$.

Рассмотрим в объемлющем многообразии M матрицу Якоби $\partial(x_\alpha) / \partial(x_\beta)$ замены координат в точке P .

Поскольку на пересечении $W_\alpha \cap W_\beta$ имеем: $x_\alpha^n = x_\beta^n = 0$, то $\partial x_\alpha^n / \partial x_\beta^i \equiv 0$, $1 \leq i \leq n-1$. Поэтому $\det(\partial(x_\alpha) / \partial(x_\beta)) = \det(\partial(y_\alpha) / \partial(y_\beta)) \times \partial x_\alpha^n / \partial x_\beta^n > 0$. Следовательно, $\partial x_\alpha^n / \partial x_\beta^n \neq 0$. Так как $x_\alpha^n \geq 0$ в пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$, то $\partial x_\alpha^n / \partial x_\beta^n(P) > 0$. Итак, $\det(\partial y_\alpha / \partial y_\beta(P)) > 0$. ■

Определение 3. Пусть M — ориентированное многообразие с краем, $\{U_\alpha, (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)\}$, $x_\alpha^n \geq 0$, — атлас, задающий ориентацию на M . Ориентация на ∂M , задаваемая атласом $W_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^{n-1}) = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{n-1})$, называется *ориентацией, согласованной с ориентацией на M* .

Пример 4. Рассмотрим диск $D^2 \subset \mathbb{R}^2$. Для задания ориентации на диске достаточно в одной точке фиксировать базис. Если точку P выбрать на границе, то базис можно выбрать так, чтобы первый вектор e_1 касался края, а второй e_2 указывал направление внутрь диска. Тогда ориентация края, определяемая e_1 , согласована с ориентацией D^2 .

Пример 5. Рассмотрим лист Мебиуса, представленный как квадрат с отождествленными противоположными сторонами в разных направлениях (рис. 4.56). Фиксируя базис (e_1, e_2) в точке A ,

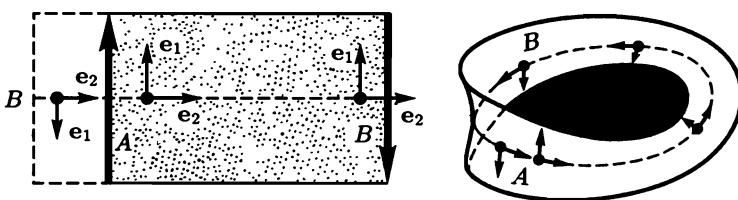


Рис. 4.56

построим непрерывное семейство базисов вдоль кривой ABA . В конце пути базис изменит ориентацию, т. е. лист Мебиуса неориентируем. Однако край — ориентируемая окружность.

4.5.3. Классификация двумерных многообразий

Переходим к описанию двумерных многообразий. Простейшее из них — сфера S^2 — диффеоморфна \mathbb{CP}^1 . Мы знакомы с тором $T^2 = S^1 \times S^1$, допускающим также следующее представление. Пусть $\mathfrak{G} = \mathbf{Z}(a) \oplus \mathbf{Z}(b)$ — абелева группа, образующие которой a и b представлены сдвигами на \mathbb{R}^2 : $a(x, y) = (x + 1, y)$; $b(x, y) = (x, y + 1)$. Рассмотрев факторпространство $\mathbb{R}^2 / \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, получаем T^2 . Квадрат $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ называется *фундаментальной областью*. Ее роль в том, что, применяя к ней элементы \mathfrak{G} , мы можем «замостить» всю плоскость (рис. 4.57).

Рассмотрим на $\mathbb{R}^2(x, y)$ другую группу $\mathfrak{G}(a, b)$, образующие которой задаются на \mathbb{R}^2 так: $b(x, y) = (x, y + 1)$; $a(x, y) = (1 - x, y + 1)$. (Найдите соотношения между a и b .) Фундаментальная область по-

казана на рис. 4.58. Стрелками показаны отождествления сторон в соответствии с действием группы. Поверхность, возникающая после факторизации, показана на рис. 4.58 и называется *бутылкой Клейна*. Тор и бутылка Клейна — гладкие многообразия; тор — ориентируемое, а бутылка Клейна — неориентируемое. (Проверьте!)

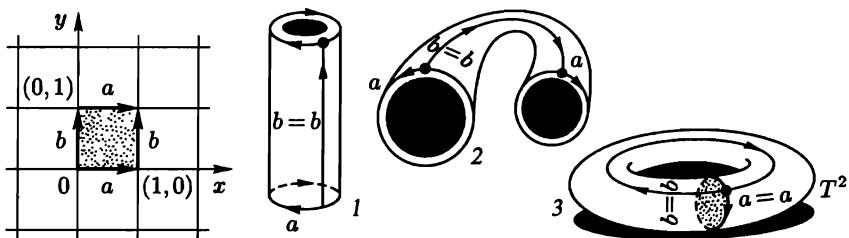


Рис. 4.57

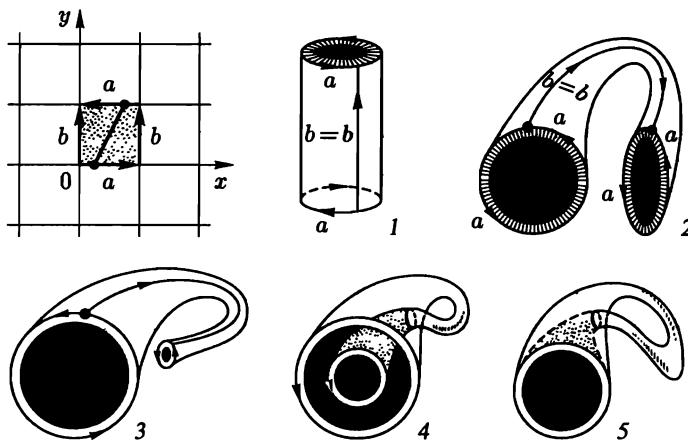
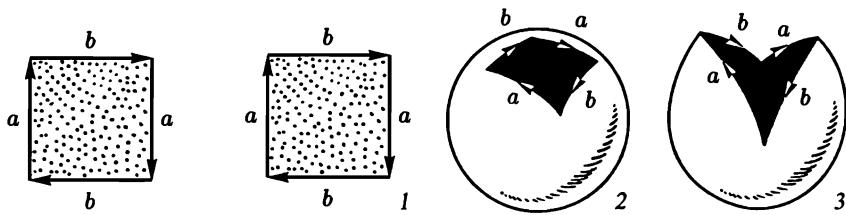


Рис. 4.58

Рассмотрим склейку на границе квадрата, показанную на рис. 4.59. Так как квадрат гомеоморфен диску, то мы получили проективную плоскость. Попробуем изобразить ее в \mathbb{R}^3 , выполнив требуемые склейки. На рис. 4.60 показана склейка, приводящая к модели \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^3 . Она не является погруженным подмногообразием, поскольку есть две особые точки A и B . Тем не менее погружение \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^3 все же существует. Об этом ниже.

Лемма 1. \mathbb{RP}^2 гомеоморфно склейке по общей границе диска и листа Мебиуса.

Доказательство на рис. 4.61.



II

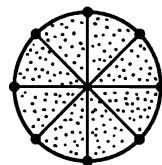
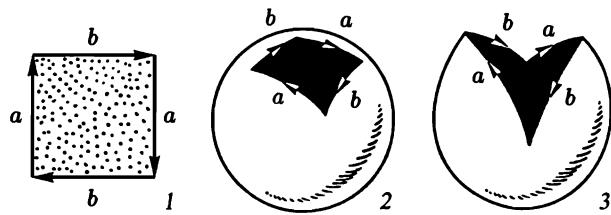


Рис. 4.59



I

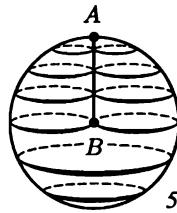
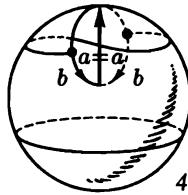


Рис. 4.60

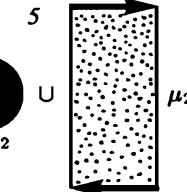
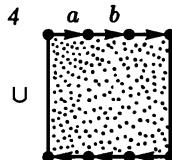
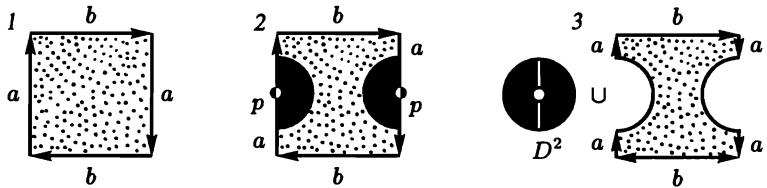


Рис. 4.61

Эквивалентная формулировка: если из \mathbf{RP}^2 удалить диск, то останется лист Мебиуса.

Рассмотрим T^2 и \mathbf{RP}^2 с иной точки зрения. Применим к ним гомеоморфизм, показанный на рис. 4.62. Тор получается из S^2 выбрасыванием двух дисков и приклейкой вместо них ручки (рис. 4.62), гомеоморфной $S^1 \times D^1$. Для получения \mathbf{RP}^2 следует выбросить из S^2 один диск и приклеить вместо него лист Мебиуса (рис. 4.62). Эту операцию называют приклейкой пленки Мебиуса.

Рассмотрим сферу с двумя ручками и сферу с двумя пленками Мебиуса. Какие получим поверхности? Рассмотрим восьмиугольник (рис. 4.63), на границе которого расположены буквы a, b, c, d , об-

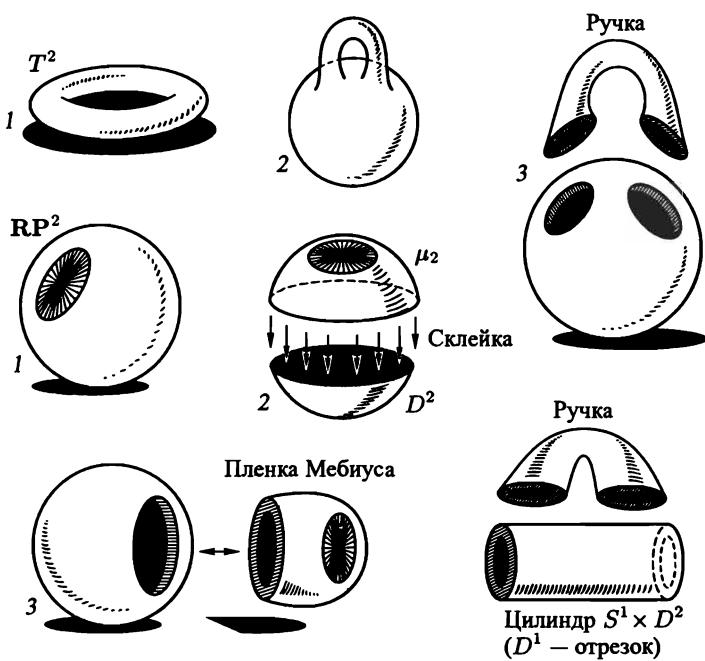


Рис. 4.62

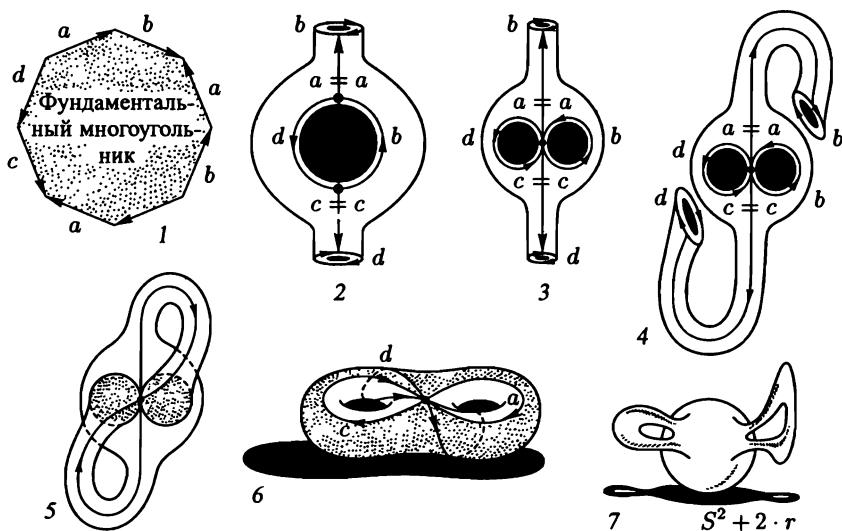


Рис. 4.63

разующие при последовательном обходе (по часовой стрелке) слово $W = aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$. Выполним склейки (см. рис. 4.63). Полученное двумерное многообразие называется «крендлем»; оно гомеоморфно сфере с двумя ручками: $S^2 + 2r$ (через r условно обозначаем ручку).

Лемма 2. Бутылка Клейна гомеоморфна сфере, заклеенной двумя пленками Мебиуса.

Доказательство см. на рис. 4.64. Склейка двух листов Мебиуса по их общей границе эквивалентна вклейке этих листов в сферу с двумя дырками (заклейка цилиндра двумя пленками Мебиуса). ■

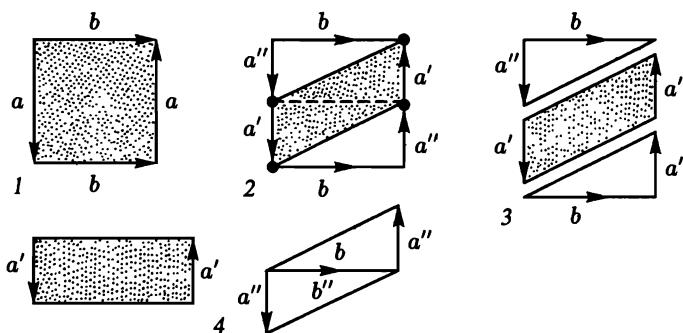


Рис. 4.64

Предъявим погружение \mathbf{RP}^2 в \mathbf{R}^3 . Рассмотрим погружение листа Мебиуса в \mathbf{R}^3 в виде половинки бутылки Клейна (см. рис. 4.65). Поясним, что разрезав бутылку так, как показано на рис. 4.65, получаем два листа Мебиуса (см. лемму 2). В силу леммы 1 для получе-

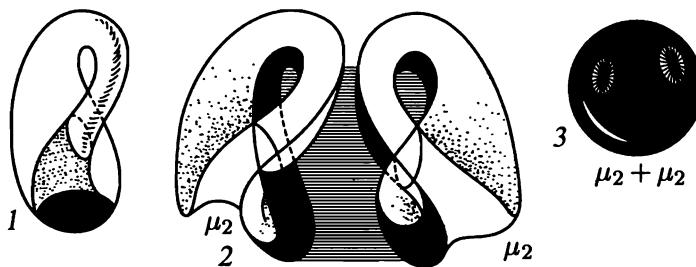


Рис. 4.65

ния \mathbf{RP}^2 достаточно заклеить лист Мебиуса диском. Осуществим эту заклейку в \mathbf{R}^3 так, чтобы получилось погружение $\mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Поместим границу листа Мебиуса в плоскость (см. рис. 4.66) и на-

чнем перемещать эту плоскость параллельно самой себе по направлению к зрителю. При этом будем в ней гладко деформировать граничную кривую листа Мебиуса (рис. 4.66). Автоматически достра-

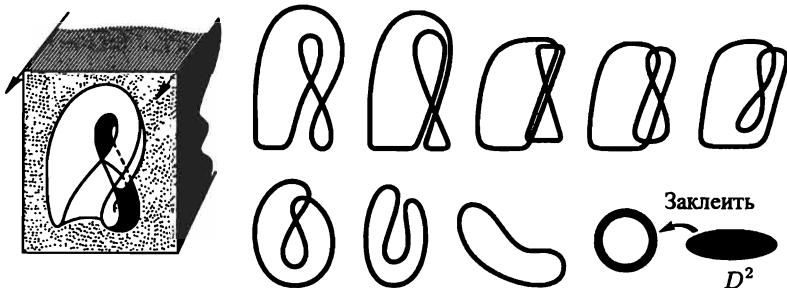


Рис. 4.66

иваем исходное погружение листа Мебиуса поверхностью, заметаемой деформирующейся окружностью. В последний момент времени окружность становится несамопересекающейся, и мы заклеиваем ее диском, что дает искомое погружение \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^3 . Мы получили два способа построения двумерных многообразий (рис. 4.67):

- 1) к S^2 нужно приклеить k ручек;
- 2) к S^2 нужно приклеить s пленок Мебиуса.

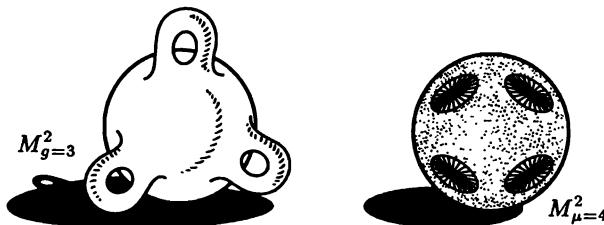


Рис. 4.67

Получаем две серии многообразий: $M_{g=k}^2 = S^2 + kr$ (ориентируемые), $M_{\mu=s}^2 = S^2 + s\mu$ (неориентируемые). Можно приклеивать к S^2 одновременно как ручки, так и пленки Мебиуса. Однако новых многообразий не получается. Оказывается, ручка в присутствии пленки Мебиуса превращается в две пленки Мебиуса (мы докажем это позже). Следовательно, $S^2 + kr + s\mu \cong S^2 + (2k + s)\mu$, т. е. многообразия смешанного типа гомеоморфны неориентируемым многообразиям.

Как было показано, все M_g^2 гладко вкладываются в \mathbf{R}^3 . Докажем, что неориентируемые многообразия гладко погружаются в \mathbf{R}^3 . Мы показали это для $\mathbf{RP}^2 = S^2 + \mu$. Из рис. 4.68 следует, что M_μ^2 есть склейка (так называемая связная сумма) нескольких экземпляров \mathbf{RP}^2 . Погружая каждый из них в \mathbf{R}^3 , получаем погружение M_μ^2 в \mathbf{R}^3 .

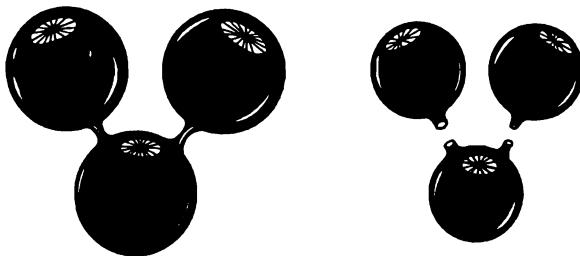


Рис. 4.68

Теорема 2 (теорема классификации). Любое гладкое, компактное, связное, замкнутое двумерное многообразие гомеоморфно либо сфере S^2 с k ручками, либо сфере S^2 с s пленками Мебиуса.

Доказательство. Разобьем его на несколько этапов. Будем говорить, что M^2 триангулировано, если на нем отмечено конечное число точек P_1, \dots, P_N , соединенных конечным числом гладких дуг γ_α так, что:

1) каждая дуга γ_i начинается в некоторой вершине P_α и заканчивается в некоторой вершине P_β , $P_\beta \neq P_\alpha$; причем на ней нет других P_γ , кроме P_α и P_β ;

2) совокупность этих дуг разбивает M^2 на конечное число замкнутых треугольников с вершинами в точках из множества $\{P_\alpha\}$;

3) любые два таких треугольника Δ_1 и Δ_2 либо не пересекаются, либо пересекаются по одной общей вершине, либо пересекаются по одной общей стороне (т. е. по какому-то из отрезков γ_i).

Задача. Постройте триангуляции тора, проективной плоскости и бутылки Клейна.

Одно и то же многообразие допускает бесконечно много триангуляций.

Лемма 3. Любое двумерное, гладкое, компактное, связное, замкнутое M^2 допускает конечную триангуляцию.

Доказательство будет дано в гл. 5.

Рассмотрим триангуляцию M^2 . Каждое ребро каждого треугольника отметим какой-либо буквой. Будем считать, что разные отрезки занумерованы разными буквами. На каждой стороне про-

извольным образом поставим стрелку (ориентацию). Разрежем M^2 вдоль всех отрезков. Тогда M^2 рассыпается на конечное множество треугольников, у которых на каждой стороне стоит буква и стрелка. Разрезая M^2 вдоль какого-то отрезка, мы ставим на обоих берегах разреза ту букву и ту стрелку, которые на нем были (рис. 4.69).

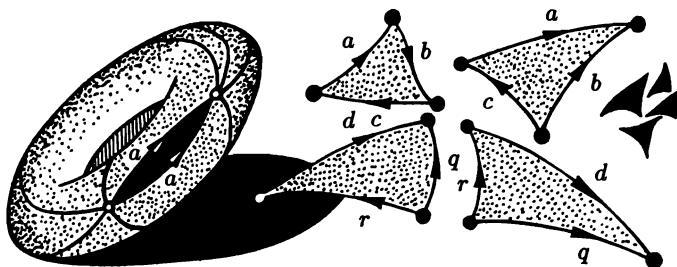


Рис. 4.69

Наша цель — склеить обратно все треугольники, но так, чтобы получился плоский многоугольник. Возьмем какой-то треугольник и обозначим его Δ_1 . Берем любую его сторону с буквой и ориентацией. Так как каждая буква входит в общий набор сторон треугольников в точности два раза (напомним, что M^2 замкнуто, т. е. не имеет края), то найдется сторона с той же буквой на другом треугольнике (обозначим его Δ_2). Эта буква найдется на треугольнике, отличном от Δ_1 , так как в противном случае исходное разбиение не было бы триангуляцией. Склейим Δ_1 и Δ_2 по этой общей стороне, совмещая стрелки. Получается плоская фигура, на границе которой расставлены буквы со стрелками. Снова берем какую-то букву; снова найдется Δ_3 , на одной из сторон которого стоит та же буква. Приклеиваем Δ_3 и т. д. Процесс заканчивается, когда все треугольники исчерпаются.

Мы под克莱им к плоской фигуре все треугольники, так как если бы в какой-то момент оказалось, что никакая граничная буква получающейся области не появляется среди букв, оставшихся на еще неприсоединенных треугольниках, то, склеив все буквы-дубликаты, вернемся к исходному M^2 (склейка ликвидирует разрезы). Но тогда M^2 оказалось бы несвязным, что противоречит условию. Итак, получился плоский многоугольник W .

1) Плоский многоугольник W определен неоднозначно, даже при фиксированной триангуляции. 2) Его граница ∂W состоит из четного числа ребер. 3) На каждом из них стоит буква и стрелка; каждая буква встречается ровно два раза.

Фиксируем на W ориентацию и, обходя границу (начиная с произвольной вершины), последовательно выпишем все буквы. Если направление обхода совпадает со стрелкой, отвечающей букве, то буква войдет в слово в степени $+1$; в противном случае запишем букву в степени -1 . После обхода получим слово $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \times a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_a = \pm 1$. Это слово однозначно задает многоугольник W (рис. 4.70).

Мы сопоставили каждому M^2 (в некоторой триангуляции) слово W (неоднозначно). Слово W можно рассматривать как код M^2 .

Лемма 4. Слово W можно перестроить так (с помощью гомеоморфизма M^2 и новой системы разрезов), что все вершины многоугольника W склеятся в одну точку.

Доказательство. Разобьем вершины W на классы эквивалентных вершин. Назовем две вершины эквивалентными, если они склеиваются в одну точку при отождествлении ребер на ∂W . Если класс эквивалентных вершин только один, то все доказано. Пусть имеются не менее двух классов эквивалентных вершин: $\{P\}$ и $\{Q\}$. Можно считать, что существует ребро a такое, что его начало принадлежит $\{P\}$, а конец $\{Q\}$. Перестроим W как показано на рис. 4.71. Получим многоугольник W' , у которого в классе $\{P\}$ стало на одну вершину меньше, а в $\{Q\}$ — на одну вершину больше. Будем уменьшать таким способом число вершин в $\{P\}$, пока в $\{P\}$ не останется одна вершина. На последнем шаге, когда в $\{P\}$ — одна вершина, соседние ребра имеют вид a, a^{-1} (см. рис. 4.72). ■

Лемма 5. Пусть $W = Abaa^{-1}cB$. Существуют гомеоморфизм M^2 и новая система разрезов, переводящие W в слово $AbcB$.

Доказательство см. на рис. 4.72. Здесь через A и B обозначены части W , не меняющиеся при перестройке.

Лемма 6. Если $W = BaAaC$, то существуют гомеоморфизм M^2 и новая система разрезов, такие, что W переходит в $W' = BA^{-1}aaC$.

Доказательство см. на рис. 4.73.

Лемма 7. Если $W = AaRbPa^{-1}Qb^{-1}B$, то существует новая система разрезов, переводящая W в $W' = AQPaba^{-1}b^{-1}RB$.

Доказательство см. на рис. 4.74.

Лемма 8. Если слово W (где уже выполнены все предыдущие операции) содержит пару букв a и a^{-1} : $W = AaBa^{-1}C$, причем $B \neq \emptyset$, то существует пара b, b^{-1} такая, что $W = AaDbQa^{-1}Rb^{-1}T$, где $B = DbQ$, $C = Rb^{-1}T$, т. е. для любой пары a, a^{-1} (где $B \neq \emptyset$) существует «зацепленная» с ней пара b, b^{-1} .

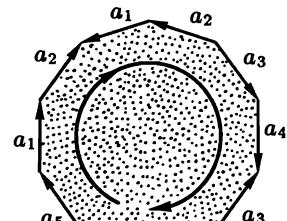


Рис. 4.70

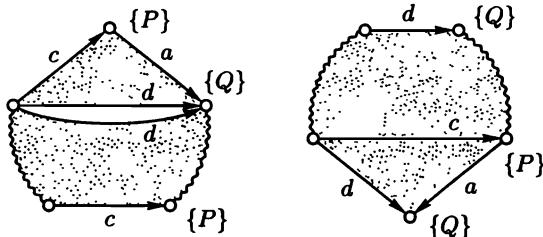


Рис. 4.71

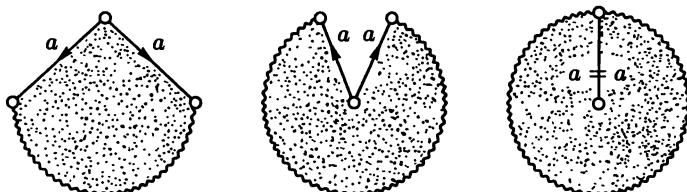


Рис. 4.72

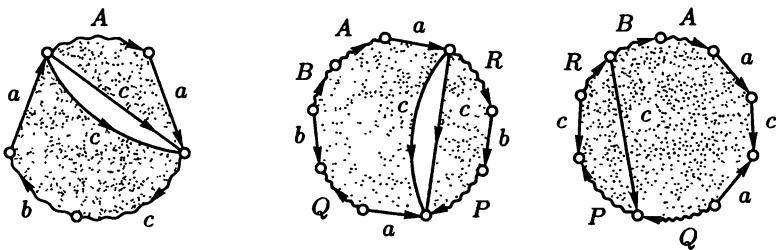


Рис. 4.73

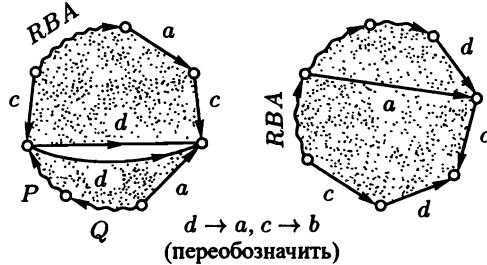


Рис. 4.74

Доказательство. Допустим противное: пусть для любой $b \in B$ соответствующая ей буква b^ε (где $\varepsilon = \pm 1$) попадает в же самое слово B . Выполним склейку W по a , см. рис. 4.75. Все вершины W разбиваются по крайней мере на два класса неэквивалентных вершин. Так как над W выполнена операция леммы 4, то

получили противоречие. Осталось доказать, что $\varepsilon = -1$. Если бы $\varepsilon = +1$, то получили бы противоречие с видом W из леммы 6. ■

Итак, W приведено к произведению выражений вида $aba^{-1}b^{-1}$ (коммутаторы) и cc (квадраты).

Осталось разобрать случай, когда в слове встречаются как коммутаторы, так и квадраты.

Лемма 9. Если $W = Aaba^{-1}b^{-1}BccQ$, то существует новая система разрезов, приводящая W к виду

$$W' = Mp^2q^2d^2N = Aabd^{-1}B^{-1}bad^{-1}Q.$$

Доказательство см. на рис. 4.76. Получается слово $\widetilde{W} = Aabd^{-1} \times B^{-1}bad^{-1}Q$. Осталось собрать вместе три квадрата, что можно сделать леммой 6. ■

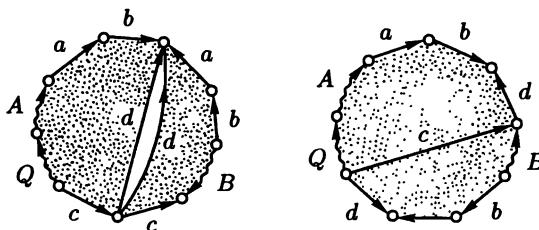


Рис. 4.76

Тем самым, многообразия смешанного типа гомеоморфны неориентируемым многообразиям.

Комбинируя доказанные леммы, получаем:

Лемма 10. Пусть W — один из кодов M^2 . Тогда существует новая система разрезов, приводящая W к одному из следующих видов:

- 1) $W = aa^{-1}$;
- 2) $W = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$;
- 3) $W = c_1c_1c_2c_2 \dots c_kc_k$.

Какие многообразия отвечают этим трем типам? В случае 1) ясно, что M^2 гомеоморфно сфере (рис. 4.77). В случае 2) M^2 представляется в виде S^2 с g ручками. Число g называется *родом поверхности*. В случае 3) M^2 гомеоморфно сфере с k пленками Мебиуса. Теорема 2 доказана. ■

Существуют и другие удобные представления M^2 .

Теорема 3. Любое гладкое, компактное, связное, замкнутое, двумерное многообразие M^2 можно представить в виде

$$W = a_1a_2 \dots a_N a_1^{-1}a_2^{-1} \dots a_{N-1}^{-1}a_N^\varepsilon,$$

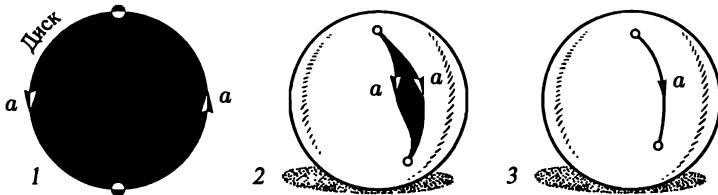


Рис. 4.77

где $\varepsilon = -1$ тогда и только тогда, когда $M^2 = M_g^2$ (ориентируемо), в этом случае N четно и $\varepsilon = +1$ (N – любое) тогда и только тогда, когда $M^2 = M_\mu^2$ (неориентируемо).

Доказательство несложно и предоставляем читателю.

Мы не располагаем пока аппаратом для доказательства того, что многообразия M_g^2 не гомеоморфны друг другу при $g_1 \neq g_2$, и что M_μ^2 не гомеоморфны при $\mu_1 \neq \mu_2$, а также, что M_g^2 и M_μ^2 не гомеоморфны. Мы сообщаем эти факты без доказательства.

4.6. ДВУМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ КАК РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Отнесем \mathbf{C}^n к координатам z^1, \dots, z^n , где $z^\alpha = x^\alpha + iy^\alpha$. Для $n = 1$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0.$$

Отождествим $\mathbf{C}^n\{z^k\}$ и $\mathbf{R}^{2n}\{x^k, y^k\}$. Тогда любой полином $f(z^1, \dots, z^n)$ можно записать в виде: $g(x^1, y^1; \dots; x^n, y^n)$. Обратно: любой полином $g(x^1, y^1; \dots; x^n, y^n)$ можно записать как $f(z^1, \bar{z}^1; \dots; z^n, \bar{z}^n)$.

Лемма 1. Полином $f(z^1, \bar{z}^1; \dots; z^n, \bar{z}^n)$ не зависит от \bar{z}^α тогда и только тогда, когда $\partial f / \partial \bar{z}^\alpha \equiv 0$.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Проверим, что если $\partial f / \partial \bar{z}^\alpha \equiv 0$, то $f(z^1, \bar{z}^1; \dots; z^n, \bar{z}^n)$ не содержит переменной \bar{z}^α . Допустим противное и представим f в виде полинома по степеням переменной \bar{z}^α : $f = \omega \cdot (\bar{z}^\alpha)^p + \dots$, где коэффициенты ω, \dots не зависят от \bar{z}^α . Пусть p – максимальная степень \bar{z}^α . Тогда $\partial f / \partial \bar{z}^\alpha = p \cdot \omega \cdot (\bar{z}^\alpha)^{p-1} \dots$, что противоречит условию. ■

Напомним, что функция $f(z^1, \bar{z}^1; \dots; z^n, \bar{z}^n)$ называется *аналитической*, если все $\partial f / \partial \bar{z}^\alpha \equiv 0$. При $n = 1$ имеем $f(x, y) = u(x, y) +$

$+ iv(x, y)$. Условие $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ эквивалентно соотношениям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Нам потребуется комплексный аналог теоремы о неявной функции. Доказательство см. в теории функций комплексного переменного.

Предложение 1. Пусть $f(z, w)$ — комплексно аналитическая функция на $C^2(z, w)$. Рассмотрим уравнение $f(z, w) = 0$ относительно переменной w , и пусть в некоторой точке $P_0 \in \{f = 0\}$ выполнено соотношение $\partial f / \partial w \neq 0$.

Тогда существует открытая окрестность $U(P_0)$ точки P_0 в C^2 , такая, что в ней существует функция $w = g(z)$ со свойствами:

1) $g(z)$ — комплексно аналитическая;

2) функция $w = g(z)$ — решение уравнения $f(z, w) = 0$ в окрестности $U(P_0)$, т. е. $f(z, g(z)) = 0$ в $U(P_0)$, и это решение единственное в $U(P_0)$.

Геометрически удобно рассматривать решение $w = g(z)$ в виде графика (рис. 4.78).

Определение 1. Пусть $f(z, w)$ — полином по переменным z, w в C^2 , и пусть уравнение $f(z, w) = 0$ разрешимо относительно w в некоторой открытой окрестности $U(P_0)$ (например, пусть $\partial f / \partial w \neq 0$). Тогда функция $w = g(z)$, являющаяся

решением этого уравнения, называется *алгебраической*, а совокупность точек (z, w) таких, что $f(z, w) = 0$ (т. е. нулевая поверхность уровня функции $f(z, w)$), называется *римановой поверхностью для алгебраической функции* $w = g(z)$ (в тех точках, где определена $w = g(z)$).

Если в точке P_0 имеем $\partial f / \partial z \neq 0$, то локально существует решение $z = \varphi(w)$, т. е. уравнение $f = 0$ можно разрешить относительно z . При этом $\varphi(w)$ удовлетворяет условиям 1), 2) предложения 1. Итак, условие локальной разрешимости уравнения $f(z, w) = 0$ имеет вид $\text{grad } f = (\partial f / \partial z, \partial f / \partial w) \neq 0$, где $\text{grad } f$ — комплексный градиент функции f .

Запишем полином $f(z, w)$ в общем виде, разложив его, например, по степеням z : $f = a_0(w)z^n + a_1(w)z^{n-1} + \dots$ Здесь коэффициенты $a_k(w)$ — полиномы от w . Отметим, что римановы поверхности алгебраических функций некомпактны и «уютят на беско-

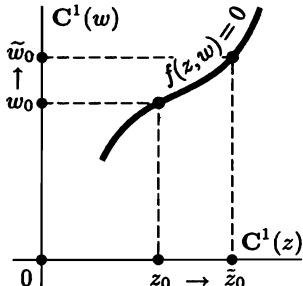


Рис. 4.78

нечность» в \mathbf{C}^2 . В самом деле, для любой точки w_0 возникает уравнение $a_0(w_0)z^n + a_1(w_0)z^{n-1} = 0$ относительно z . По известной теореме алгебры оно всегда имеет комплексный корень z_0 .

Так как f — полином, то можно перейти от неоднородных координат в \mathbf{CP}^2 к однородным координатам x^1, x^2, x^3 , положив $z = x^1/x^3, w = x^2/x^3$. Тогда $f(z, w) = \sum a_{pq}w^p z^q$ превратится в однородный полином $\sum a_{pq}(x^1)^q(x^2)^p(x^3)^{s-(p+q)}$, где s — наибольшая степень мономов $w^p z^q$. Так можно «компактифицировать» риманову поверхность, перенеся ее из \mathbf{C}^2 в \mathbf{CP}^2 . Поскольку уравнение $g(x^1, x^2, x^3) = 0$ на \mathbf{CP}^2 полиномиально, то эта поверхность уровня в \mathbf{CP}^3 компактна. Мы не будем вдаваться в детали этой компактификации, так как они нам не потребуются.

Изучим топологию римановых поверхностей. С вещественной точки зрения уравнение $f(z, w) = 0$ распадается на два: $\operatorname{Re}(f) = 0$ и $\operatorname{Im}(f) = 0$ в \mathbf{R}^4 , т. е. в точках общего положения множество $f = 0$ — двумерная вещественная поверхность.

Теорема 1. Пусть полином $f(z, w)$ имеет вид $f = w^q - P_n(z)$, где полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Тогда уравнение $f(z, w) = 0$ определяет гладкое двумерное (над \mathbf{R}) подмногообразие в $\mathbf{C}^2(z, w)$ (одномерную комплексную алгебраическую кривую).

Доказательство. Пусть точка $P_0 = (z_0, w_0)$ принадлежит множеству $\{f = 0\}$ и $w_0 \neq 0$. Тогда $\partial f / \partial w|_{P_0} = q w_0^{q-1} \neq 0$, т. е. по теореме о неявной функции поверхность $\{f = 0\}$ является в некоторой окрестности P_0 гладким двумерным подмногообразием — графиком алгебраической функции $w = g(z)$. Решение $w = g(z)$ в нашем случае имеет вид $w = \sqrt[q]{P_n(z)}$. Осталось рассмотреть точки $P_0 = (z_0, 0)$.

Но $\operatorname{grad} f(P_0) = (-dP_n(z_0)/dz; 0) \neq 0$. В самом деле, если бы $dP_n(z_0)/dz = 0$, то в точке $(z_0, 0)$ мы имели бы $P_n(z_0) = 0$ и $dP_n(z_0)/dz = 0$. Отсюда z_0 — кратный корень $P_n(z)$, что противоречит условию. Итак, $\operatorname{grad} f(P_0) \neq 0$ во всех точках поверхности $\{f = 0\}$. Осталось применить теорему о неявной функции. ■

Опишем основные свойства алгебраических функций.

1) Алгебраические функции обычно многозначны, т. е. почти всем значениям аргумента z отвечает несколько значений функции $w = g(z)$. Пример: $w = \sqrt{z}$. Здесь каждому $z_0 \neq 0$ отвечают ровно два значения $w = \pm\sqrt{z_0}$.

Рассмотрим проекцию $\pi: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^1(z)$, $\pi(z, w) = (z, 0)$. Прообразом любой точки z при проекции $\pi: \Gamma \rightarrow \mathbf{C}^1(z)$ являются в точности все значения функции $w = g(z)$ в точке z (рис. 4.79). Поскольку f — полином, то образом поверхности Γ при проекции является вся плоскость $\mathbf{C}^1(z)$ (см. выше).

Заменим переменную: запишем $w = g(z)$ в виде $w = \rho(P)$, где P — переменная точка на поверхности Γ (рис. 4.79). Ясно, что $w = \rho(P)$ — однозначная функция на римановой поверхности. Тем самым, алгебраическая функция стала однозначной, но за это «заплачено» усложнением области определения функции: вместо $C^1(z)$ теперь аргумент пробегает поверхность Γ — двумерное многообразие.

Итак, риманова поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ алгебраической функции $w = g(z)$ является областью однозначности этой функции.

2) Так как для каждого $z_0 \in C^1(z)$ существуют значения $w_i = g(z_0)$ (их число равно числу разных корней полиномиального уравнения $f(z_0, w) = 0$), то в открытой окрестности каждого z_0 возникает набор непрерывных функций $w = \{\varphi_i(z)\}$, $1 \leq i \leq k$, где k — степень полинома $a_0(z)w^k + a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z) = f(z, w)$ по переменной w . Каждая из них описывает изменение какого-то одного корня уравнения $f(z, w) = 0$ при изменении z . Функции $\varphi_i(z)$ продолжаются на всю плоскость. В некоторых точках они могут совпадать и даже «меняться местами».

Функции $\varphi_i(z)$ называются *ветвями алгебраической функции* $w = g(z)$. Над каждым z_0 «висят» значения функции $w = g(z)$, являющиеся корнями уравнения

$$f(z_0, w) = a_0(z_0)w^k + a_1(z_0)w^{k-1} + \dots + a_k(z_0) = 0.$$

Из теоремы о неявной функции следует, что каждая ветвь определяет (почти во всех точках) гладкое, даже комплексно аналитическое, подмногообразие в C^2 . Оно называется листом римановой поверхности.

3) Сопоставим точке z_0 число $k(z_0)$, равное числу различных корней уравнения $f(z_0, w) = 0$. Ясно, что $k(z_0) \leq k$. Если все корни уравнения $f(z_0, w) = 0$ простые, то $k(z_0) = k$. Если же есть кратные корни, то $k(z_0) < k$. В точках z_0 , где $k(z_0) < k$, некоторые ветви $\varphi_i(z)$ функции $w = g(z)$ сливаются вместе (рис. 4.80).

Пусть $f(z, w) = w^q - P_n(z)$, где полином $P_n(z)$ не имеет кратных корней. В силу теоремы 1 поверхность $\Gamma = \{f = 0\}$ — комплексно аналитическое подмногообразие в C^2 . Точки z_0 , для которых $k(z_0) < q$, назовем *точками ветвления алгебраической функции*.

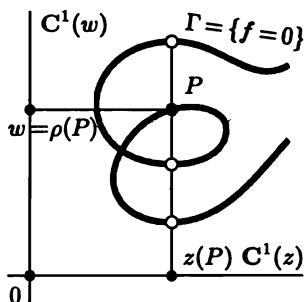


Рис. 4.79

ции $w = g(z)$. В случае $w = \sqrt[n]{P_n(z)}$ точками ветвления в конечной части плоскости $\mathbf{C}^1(z)$ являются корни полинома $P_n(z)$.

4) В точках ветвления сливаются несколько ветвей функции $w = g(z)$. Так как точка ветвления изолирована, то ее можно считать центром малого диска D^2 , где нет других точек ветвления. Рассмотрим окружность с центром в z_0 , расположенную в D^2 и обойдем ее. Тогда ветви функции $g(z)$, вообще говоря, меняются местами.

Разберем пример. Пусть $f = w^2 - z$. Тогда $w = g(z) = \sqrt{z}$. Ясно, что $\varphi_1(z) = +\sqrt{z}$, $\varphi_2(z) = -\sqrt{z}$. Пусть $z = re^{i\varphi}$. Точка 0 ∈ $\mathbf{C}^1(z)$ — единственная точка ветвления в конечной части плоскости. При обходе вокруг 0 ветви $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ меняются местами:

$$\varphi_1(z) = \sqrt{re^{i\varphi}} \rightarrow -\sqrt{re^{i\varphi}} = \varphi_2(z).$$

Условную схему см. на рис. 4.81. На самой римановой поверхности особых точек нет, так как Γ — гладкое подмногообразие в \mathbf{C}^2 .

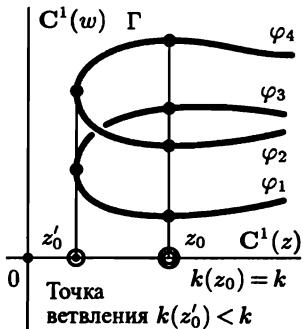


Рис. 4.80

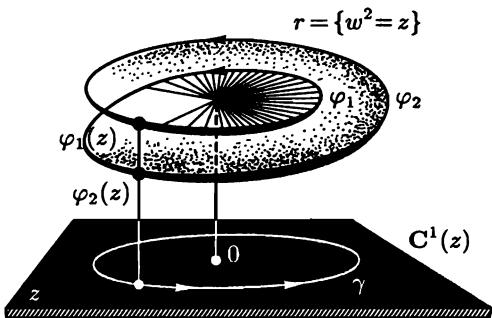


Рис. 4.81

Изучим топологические свойства римановых поверхностей. Ограничимся случаем $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, где $P_n(z)$ не имеет кратных корней. Поверхность Γ задается в \mathbf{C}^2 как график $w = g(z) = \sqrt{P_n(z)}$. Изучим поведение Γ «на бесконечности». Имеются различные способы придать этому понятию содержательный смысл. Опишем так называемую *компактификацию*, позволяющую превращать некомпактные открытые многообразия в компактные многообразия, «присоединяя край». Известно несколько способов компактификации.

Сначала пополним комплексную прямую $\mathbf{C}^1(z)$ бесконечно удаленной точкой. В результате получим \mathbf{CP}^1 . В самом деле, достаточно рассмотреть \mathbf{CP}^1 как множество точек $(\lambda z^1, \lambda z^2)$, где $\lambda \neq 0$ и взять отображение

$$h: (\lambda z^1, \lambda z^2) \rightarrow \frac{\lambda z^1}{\lambda z^2} = \frac{z^1}{z^2} \in S^2 = \mathbf{C}^1(z) \cup \infty.$$

Напомним, что пополненная плоскость отождествляется со сферой при помощи стереографической проекции.

Теперь компактифицируем \mathbf{C}^2 . Рассмотрим \mathbf{CP}^2 с однородными координатами (x^1, x^2, x^3) . Тогда \mathbf{CP}^2 покрывается тремя картами, гомеоморфными \mathbf{C}^2 . Возьмем одну из них, например, $A_3 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^3 \neq 0\}$. Положим

$$\alpha: A_3 \rightarrow \mathbf{C}^2(z, w), \quad \text{где } z = \frac{x^1}{x^3}, w = \frac{x^2}{x^3}.$$

Тогда α — гомеоморфизм между картой A_3 и \mathbf{C}^2 . Положим $\mathbf{CP}^1 = S^2 = \{\lambda(x^1, x^2, 0)\}$. Тогда $\mathbf{CP}^2 = A \cup S^2$. Итак, \mathbf{C}^2 компактифицируется, превращается в \mathbf{CP}^2 , путем присоединения сферы S^2 . Что происходит с римановой поверхностью Γ , вложенной в \mathbf{C}^2 ? Она также превращается в компактное пространство $\tilde{\Gamma}$. Докажите, что в случае простых корней $\tilde{\Gamma}$ — гладкое многообразие.

Вообще, пусть $g(z, w)$ — многочлен степени n по совокупности переменных. При подстановке $z = x^1/x^3, w = x^2/x^3$ получаем $g(z, w) = Q_n(x^1, x^2, x^3)/(x^3)^n$, где Q_n — однородный многочлен. На проективную плоскость \mathbf{CP}^2 уравнение $g(z, w) = 0$ продолжается в виде $Q_n(x^1, x^2, x^3) = 0$. Точки, где $x^3 = 0$ называются «бесконечно удаленными» точками римановой поверхности. В неособом случае однородное уравнение задает двумерное компактное подмногообразие.

Например, в нашем случае, при $n = 1$ имеем

$$w^2 - z = 0, \quad \left(\frac{x^2}{x^3}\right)^2 - \frac{x^1}{x^3} = 0, \quad (x^2)^2 - x^1 x^3 = 0.$$

Пересечение $\tilde{\Gamma}$ с бесконечно удаленной сферой S^2 — одна точка, имеющая в карте $A_1 = \{\lambda(x^1, x^2, x^3), x^1 \neq 0\}$ координаты $\alpha = x^2/x^1 = 0, \beta = x^3/x^1 = 0$. В окрестности этой точки сделаем замену $\alpha = x^2/x^1, \beta = x^3/x^1$, что дает

$$[(x^2)^2 - x^1 x^3 = 0] = [\alpha^2 - \beta = 0].$$

Ясно, что это уравнение определяет гладкое подмногообразие в окрестности точки $\alpha = \beta = 0$, что и доказывает гладкость поверхности $\tilde{\Gamma}$ в бесконечно удаленной точке.

Изучим точки ветвления функции $w = \sqrt{P_n(z)}$, определенной уже на всей сфере $S^2 = \mathbf{CP}^1$.

Предложение 2. Пусть $w^2 - P_n(z) = 0$, где $P_n(z)$ имеет только простые корни a_1, \dots, a_n . Тогда все эти точки — точки ветвления $w = \sqrt{P_n(z)}$, расположенные в конечной части плоскости. На сфере S^2 к ним добавляется еще одна точка ветвления — бесконечность, в том случае, когда степень P_n нечетна. Для P_n четной степени точка ∞ не есть точка ветвления. Для других точек ветвления функция $w = \sqrt{P_n(z)}$ не имеет.

Доказательство. Пусть a_k — произвольный корень $P_n(z)$. Рассмотрим малую окружность S^1 с центром в a_k , внутри которой нет других корней полинома, и запишем точку $z \in S^1$ в виде $z =$

$$= a_k + re^{i\varphi}, \text{ где } r \text{ — радиус окружности. Имеем}$$

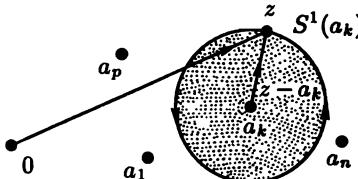


Рис. 4.82

$$w(z) = \sqrt{\prod_{p \neq k} (z - a_p)} \cdot r^{1/2} \cdot e^{i\varphi/2}$$

(рис. 4.82). Так как при обходе вокруг a_k аргумент $(z - a_k)$ меняется на 2π , то $\sqrt{z - a_k}$ меняет знак.

В то же время при обходе вокруг a_k аргументы чисел $z - a_p$, $p \neq k$, не получают приращения на 2π , т. е. все радикалы $\sqrt{z - a_p}$ возвращаются к прежнему значению.

Итак, $\{a_k\}$ — точки ветвления. Рассмотрим ∞ и сделаем замену $u = 1/z$. Тогда $w = g(z)$ примет вид $1/\sqrt{u^n \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - a_k u}}$. Если n четно, то очевидно, что 0 не есть точка ветвления. Если $n = 2p + 1$ нечетно, имеется ветвление. ■

Как мы знаем, поверхность Γ — область однозначности алгебраической функции. Представим Γ как склейку нескольких листов, каждый из которых будет графиком однозначной функции. Начнем с примера.

Рассмотрим функцию $w = \pm\sqrt{z}$, имеющую на сфере две точки ветвления: 0 и ∞ . Соединим их гладкой дугой γ и сделаем вдоль γ разрез от 0 до ∞ . Тогда Γ получается объединением двух подмножеств: Γ_1 — график ветви $\varphi_1 = \sqrt{z}$, определенной на $S^2 \setminus \gamma$, а Γ_2 — график ветви $\varphi_2 = -\sqrt{z}$, определенной на $S^2 \setminus \gamma$. Ясно, что на $S^2 \setminus \gamma$ нельзя перейти с ветви φ_1 на ветвь φ_2 , т. е. каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2 \setminus \gamma$ (рис. 4.83). При проекции $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^1(z)$ каждый из листов Γ_1 и Γ_2 гомеоморфно проектируется на $S^2 \setminus \gamma$. Итак, Γ склеена из двух листов Γ_1 и Γ_2 . Каким образом? Зададим на S^2 ориентацию и отметим один берег разреза знаком «—», а другой — знаком «+». Эти метки возникают на берегах разрезов каждого листа: Γ_1 и Γ_2 . При склейке двух экземпляров $S^2 \setminus \gamma$ нуж-

но согласовать знаки «+» и «-». Так как при обходе вокруг точек ветвления ветви меняются местами, то берег γ_1^+ листа Γ_1 должен склеиться с берегом γ_2^- листа Γ_2 . Соответственно склеиваются и берега γ_1^- и γ_2^+ на листах Γ_1 и Γ_2 (рис. 4.84). Ясно, что эта склейка дает сферу. Итак, нами доказана

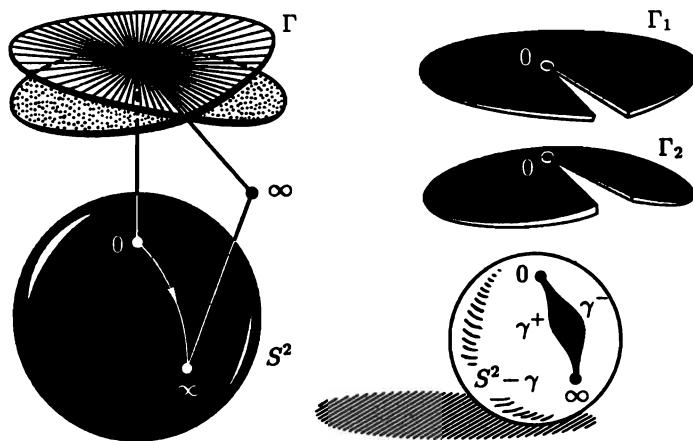


Рис. 4.83

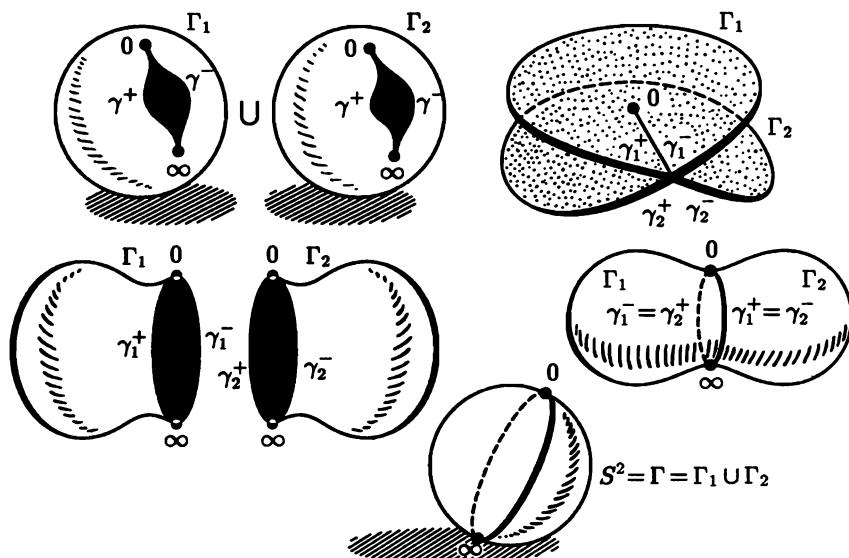


Рис. 4.84

Лемма 2. Компактифицированная риманова поверхность $\tilde{\Gamma}$ алгебраической функции $w = \pm\sqrt{z}$ гомеоморфна сфере S^2 .

Рассмотрим риманову поверхность функции $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$, где $a \neq b$. В силу предложения 2 эта функция имеет ровно две точки ветвления: $z = a$ и $z = b$.

Лемма 3. Компактифицированная риманова поверхность $\tilde{\Gamma}$ алгебраической функции $w = \pm\sqrt{(z-a)(z-b)}$ гомеоморфна двумерной сфере.

Доказательство. Достаточно сделать разрез γ от a до b и повторить рассуждения леммы 2. ■

Теорема 2. Пусть $f(z, w) = w^2 - P_n(z)$, где полином P_n не имеет кратных корней. Тогда компактифицированная риманова поверхность $\tilde{\Gamma}$ алгебраической функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$ гомеоморфна сфере с $[(n-1)/2]$ ручками (через $[,]$ обозначена целая часть).

Доказательство. Пусть $n = 2p + 1$. Тогда в силу предложения 2 точками ветвления являются все корни a_1, \dots, a_n и точка ∞ . Это множество можно разбить на пары, например, $(a_1, a_2), \dots, (a_n, a_{n+1})$, где $a_{n+1} = \infty$. Соединяя точки a_{2k-1} и a_{2k} гладким отрезком γ_k , $1 \leq k \leq p + 1$, получаем сферу S^2 с $p + 1$ разрезами. Тогда на $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{p+1})$ обе ветви, φ_1 и φ_2 , являются однозначными функциями. В самом деле, мы запретили обходы вокруг нечетного числа точек ветвления — при нашей системе разрезов мы можем обойти только вокруг четного числа точек ветвления. Следовательно, при любом обходе получается четное число изменений знака перед радикалами.

Отметим берега каждого разреза знаками «+» и «-». Тогда каждый лист Γ_1 и Γ_2 гомеоморфен $S^2 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{p+1})$.

Следовательно, для восстановления $\tilde{\Gamma}$ следует склеить два листа, отождествив берега разрезов с учетом их знаков (рис. 4.85). Получаем сферу S^2 с $p = [(n-1)/2]$ ручками.

Пусть $n = 2p$. В силу предложения 2 точками ветвления являются все корни a_1, \dots, a_{2p} и только они. Затем дословно повторяем предыдущие рассуждения. ■

Предложение 3. Каждое двумерное гладкое компактное связное замкнутое ориентируемое многообразие рода g (т. е. сфера с r ручками) является комплексно аналитическим многообразием.

Доказательство. Рассмотрим Γ для функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$, где P_n — имеет простые корни. Так как $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$, где задается графиком $w = g(z)$ или графиком $z = \omega(w)$, то имеем две ортогональные проекции $(z, w) \rightarrow \mathbb{C}^1(z)$ и $(z, w) \rightarrow \mathbb{C}^1(w)$. В каждой точке Γ определена по крайней мере одна из проекций, так как $\text{grad}(w^2 - P_n(z)) \neq 0$ (теорема 1). Получаем покрытие Γ локаль-

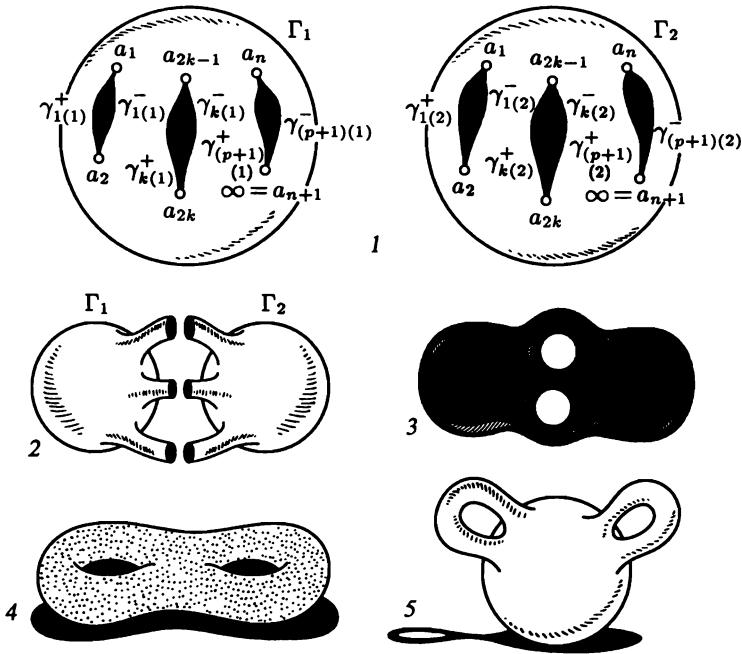


Рис. 4.85

ными дисками. Функции перехода имеют вид либо $w = g(z)$, либо $z = \omega(w)$. Так как функции $g(z)$ или $\omega(w)$ комплексно аналитические (предложение 1), то утверждение доказано. ■

Неориентируемые двумерные многообразия не являются комплексно аналитическими.

Предложение 4. *Каждое двумерное гладкое компактное связное замкнутое ориентируемое многообразие можно снабдить конформной римановой метрикой.*

Доказательство. Метрика конформна, если существуют координаты, в которых она имеет вид: $g_{ij} = \alpha \cdot \delta_{ij}$. Реализуем M_g^2 в дополненном \mathbb{C}^2 как риманову поверхность функции $w = \pm\sqrt{P_n(z)}$. Рассмотрим на M_g^2 координату z . Она обслуживает все M_g^2 , кроме точки 0, в окрестности которой нужно ввести координату w , связанную с z комплексно аналитическим преобразованием $w = g(z)$. Зададим в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ метрику

$$ds^2 = dz d\bar{z} + dw d\bar{w} = \sum (dx^k)^2$$

и рассмотрим ее ограничение на Γ . Имеем

$$ds^2(M_g^2) = (1 + |g'_z(z)|^2) dz d\bar{z},$$

или

$$ds^2(M_g^2) = (1 + u_x^2 + v_x^2)(dx^2 + dy^2),$$

где $z = x + iy$, $g = u + iv$. ■

При комплексно аналитических заменах $z = \eta(\xi)$ полученная выше конформная метрика останется конформной (проверьте!).

Глава 5

Тензорный анализ и риманова геометрия

5.1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ

Рассмотрим гладкое многообразие M^n ; пусть $P \in M^n$ и x^1, \dots, x^n — регулярные координаты в окрестности P . Мы изучим объекты, инвариантные относительно замен координат. Обозначим новые координаты знаком «штрих» — x^1, \dots, x^n .

1) Пусть $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$ — касательный вектор к M^n . Найдем связь между компонентами вектора, вычисленными в разных координатах. Так как $\mathbf{a} = a^i(\partial/\partial x^i) = a^{i'}(\partial/\partial x^{i'})$ и так как $\{\partial/\partial x^{i'}\}$ образуют базис в $T_P(M^n)$, то $a^{i'} = (\partial x^{i'}/\partial x^i)a^i$. Мы видим, что компоненты вектора a^1, \dots, a^n преобразуются с помощью матрицы Якоби $(\partial x^{i'}/\partial x^i) = J$. Это условие мы получили из инвариантности вектора как геометрического объекта при замене координат.

Теперь можно определить вектор как объект, задаваемый в каждой системе координат x^1, \dots, x^n числами a^1, \dots, a^n , преобразующимися при переходе от координат x^1, \dots, x^n к координатам x^1, \dots, x^n по правилу $a^{i'} = (\partial x^{i'}/\partial x^i)a^i$. Ясно, что определенный таким образом объект будет инвариантным.

2) Пусть $f(x)$ — гладкая функция на M^n . Рассмотрим $\text{grad } f = \{\partial f/\partial x^i\}$. Найдем закон преобразования этого набора функций. Имеем

$$\xi_{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

где

$$\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right) = (J^\top)^{-1},$$

т. е. набор (ξ_1, \dots, ξ_n) преобразуется по другому закону, чем компоненты вектора, а именно с помощью матрицы $(J^{-1})^\top$. Тот же закон получится из инвариантности (относительно замен координат) производной функции f по направлению вектора \mathbf{a} . В самом деле:

$$\frac{df}{da} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(\epsilon)) - f(\gamma(0))}{\epsilon},$$

где

$$\gamma(t) \in M^n, \quad \gamma(0) = P, \quad \dot{\gamma}(0) = \mathbf{a} \in T_P(M^n),$$

$$\frac{df}{da} = a^j \frac{\partial f}{\partial x^i} = a^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}},$$

отсюда

$$a^{i'} \xi_{i'} = a^i \xi_i, \quad \xi_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi_i,$$

что и требовалось. ■

3) Рассмотрим $T_P(M^n)$ и сопряженное к нему пространство $T_p^*(M^n)$ вещественных линейных функционалов $l(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$. Как меняются компоненты функционала l при замене координат? Введем в $T_p^*(M^n)$ базис e^1, \dots, e^n из функционалов: $e^k(e_\alpha) = \delta_\alpha^k$, где e_1, \dots, e_n — базис в $T_P(M^n)$. Так как скаляр $l(\mathbf{a})$ не зависит от выбора координат, то $l(\mathbf{a}) = l'(\mathbf{a}')$; отсюда

$$\mathbf{a} = a^i e_i; \quad l(\mathbf{a}) = l_k a^k = l_{k'} a^{k'} = l_{k'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} a^k.$$

Отсюда в силу произвольности \mathbf{a} имеем $l_{k'} = (\partial x^k / \partial x^{k'}) l_k$. Поэтому координаты функционала l преобразуются как координаты $\operatorname{grad} f$. Элементы $T_p^*(M^n)$ называются ковекторами. Итак, $\operatorname{grad} f$ — ковектор.

Вводя в T^* сопряженный базис из ковекторов e^1, \dots, e^n , отождествим T с T^* , положив $\varphi: T \rightarrow T^*$, $\varphi(\mathbf{a}) = l$, где $\mathbf{a} = a^k e_k$, $l = \sum_{k=1}^n a^k e^k$, т. е. считая, что l имеет относительно e^1, \dots, e^n те же координаты, что и \mathbf{a} относительно e_1, \dots, e_n . Этот изоморфизм не инвариантен при замене координат $(x) \rightarrow (x')$, так как компоненты вектора преобразуются матрицей J , а ковекторы — матрицей $(J^{-1})^\top$. Имеются, впрочем, замены, при которых соответствие $\varphi: T \rightarrow T^*$ сохраняется. Это замены, где $J = (J^{-1})^\top$, т. е. задающиеся в точке P ортогональной матрицей Якоби.

4) Пусть C — линейный однородный оператор, преобразующий в себя $T_P(M^n)$; пусть C — матрица оператора, записанная в базисе e_1, \dots, e_n . При замене $(x) \rightarrow (x')$ имеем $C' = JCJ^{-1}$, т. е. $c_{j'}^{i'} = (\partial x^{i'} / \partial x^i)(\partial x^j / \partial x^{i'}) c_j^i$. Закон преобразования матрицы оператора получается из соотношения $\mathbf{b} = C(\mathbf{a})$, инвариантного относительно замен координат.

5) Рассмотрим билинейную симметричную форму B на $T_P(M^n)$: $B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b_{ij} a^i b^j$. Из алгебры известно, что при замене коорди-

нат матрица B формы преобразуется так: $B' = JBJ^T$, т. е. $b_{i'j'} = (\partial x^i / \partial x^{i'})(\partial x^j / \partial x^{j'})b_{ij}$. Как и выше, закон преобразования B получается из требования сохранения скаляра $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ при заменах координат. В самом деле,

$$B(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b_{ij}a^i b^j \equiv b_{i'j'}a^{i'} b^{j'} = b_{i'j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} a^i b^j,$$

т. е.

$$b_{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} b_{ij}.$$

Мы привели простейшие примеры законов преобразования. Различия между ними мы указывали разным положением индексов у компонент объектов: a^i , l_j , c_j^i , b_{ij} . Верхние индексы называются *контравариантными*, нижние — *ковариантными*. Удобно задавать тип подобных объектов парой (p, q) , где q — число ковариантных, p — число контравариантных индексов. Набор координат вектора имеет тип $(1, 0)$, ковектора — $(0, 1)$, оператора — $(1, 1)$, билинейной формы на векторах — $(0, 2)$. Наряду с такой формой существует и форма $B(l, m)$ на ковекторах l, m . Вычисление (по аналогии с $B(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) дает, что $B' = (J^{-1})^T B(J^{-1})$.

Итак, если в каждой системе координат задан набор чисел (функций), преобразующихся по указанным правилам, то они определяют инвариантный объект, который мы изучаем с помощью координатной записи в различных системах координат. Это обстоятельство кладется в основу общего определения тензорного поля на многообразии, т. е. инвариантного геометрического объекта, не зависящего от выбора координат. От координатной системы зависит лишь конкретная запись его компонент.

Определение 1. Гладким тензорным полем типа (p, q) ранга $p + q$ называется объект, задаваемый в каждой системе координат $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ набором гладких функций $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$, преобразующихся при замене координат $(x) \rightarrow (x')$ по закону

$$T_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}.$$

Мы ввели объект, инвариантный относительно замен координат. В самом деле, как известно из курса алгебры, тензор (тензорное поле) можно определить как полилинейное отображение

$$T: \underbrace{T_P \times \dots \times T_P}_q \times \underbrace{T_P^* \times \dots T_P^*}_p \rightarrow \mathbf{R},$$

задаваемое формулой

$$T(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_q; l^1, \dots, l^p) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} a_1^{j_1} \dots a_q^{j_q} l_{i_1}^1 \dots l_{i_p}^p,$$

где $\mathbf{a}_k = a_k^{j_k} \mathbf{e}_{j_k}$; $l^k = l_{i_k}^k e^{i_k}$

Функции $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ являются коэффициентами отображения T . Если фиксированы базисы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и e^1, \dots, e^n , то для $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ возникает полезная формула

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p}).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_q}; e^{i_1}, \dots, e^{i_p}) &= \\ &= T_{\rho_1 \dots \rho_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} (\mathbf{e}_{j_1})^{\rho_1} \dots (\mathbf{e}_{j_q})^{\rho_q} (e^{i_1})_{\alpha_1} \dots (e^{i_p})_{\alpha_p} = \\ &= T_{\rho_1 \dots \rho_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \delta_{j_1}^{\rho_1} \dots \delta_{j_q}^{\rho_q} \delta_{\alpha_1}^{i_1} \dots \delta_{\alpha_p}^{i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \end{aligned}$$

Все объекты в формуле $T: (T_P)^q \otimes (T_P^*)^p \rightarrow \mathbf{R}$, а также свойство полилинейности, инвариантны. От выбора координат зависит лишь конкретная запись коэффициентов $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$.

Мы будем часто работать с координатной записью, так как она полезна при конкретных вычислениях. Для удобства введем так называемые мультииндексы $(i) = (i_1 \dots i_p)$, заменяя целую строку одним индексом. Например, тензорный закон запишется так:

$$T_{(j')}^{(i')} = \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T_{(j)}^{(i)}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Изучим простейшие свойства тензорных полей.

Лемма 1. Пусть $(x) \rightarrow (x')$ — регулярная замена. Тогда тензорный закон $T_{(j')}^{(i')} = (\partial x^{(i')}/\partial x^{(i)}) (\partial x^{(j')}/\partial x^{(j)}) T_{(j)}^{(i)}$ обратим, т. е.

$$T_{(j)}^{(i)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} T_{(j')}^{(i')}.$$

Доказательство следует из тождества $(\partial x^i/\partial x^{k'}) \times (\partial x^{k'}/\partial x^j) = (\partial x^i/\partial x^j) = \delta_j^i$.

Лемма 2. Пусть тензорное поле записано в системе (x) и сделаны замены координат $(x) \rightarrow (z) \rightarrow (y)$ и $(x) \rightarrow (v) \rightarrow (y)$. Тогда запись поля T в системе (y) не зависит от способа перехода от (x) к (y) .

Доказательство следует из формулы дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k}.$$

Напомним свойства тензоров, известные из курса алгебры.

а) Тензоры ранга $p + q$ типа (p, q) (тензоры рассматриваются в точке) образуют линейное пространство H , причем $\dim H = n^{p+q}$. Доказательство следует из представления тензора как полилинейного отображения: линейная комбинация таких отображений снова полилинейна.

б) В пространстве H всех тензоров ранга $p + q$ типа (p, q) имеется аддитивный базис из следующих полилинейных отображений:

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

Число их равно n^{p+q} . Каждое отображение

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

задается формулами

$$e_{i_\alpha}(l) = l_{i_\alpha}, \quad \text{где } l \in T_P^*(M^n);$$

$$e^{j_\alpha}(a) = a^{j_\alpha}, \quad \text{где } a \in T_P M^n;$$

$$(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q})(a_1, \dots, a_q, l^1, \dots, l^p) = \\ = e_{i_1}(l^1) \dots e_{i_p}(l^p) e^{j_1}(a_1) \dots e^{j_q}(a_q) = l_{i_1}^1 \dots l_{i_p}^p a_1^{j_1} \dots a_q^{j_q}.$$

Если $T: (T_P M^n)^q \times (T_P^* M^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольное полилинейное отображение ранга (p, q) , то

$$T(a_1, \dots, a_q, l^1, \dots, l^p) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} a_1^{j_1} \dots a_q^{j_q} l_{i_1}^1 \dots l_{i_p}^p,$$

т. е.

$$T = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}).$$

С помощью мультииндексов это разложение произвольного тензора T по базисным тензорам записывается так: $T = T_{(j)}^{(i)} e_{(i)} \otimes e^{(j)}$.

Напомним закон преобразования базисных тензоров $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$ при замене координат:

$$e_{(i')} \otimes e^{(j')} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} e_{(i)} \otimes e^{(j)}.$$

Все эти свойства и определения переносятся с тензоров в точке на случай гладких тензорных полей на многообразии. Нужно рассматривать линейные комбинации базисных полей типа (p, q) с переменными коэффициентами, что превращает пространство тензорных полей в бесконечномерное пространство.

5.2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

5.2.1. Примеры

1) Гладкое векторное поле $\mathbf{T}(x)$ на многообразии является тензорным полем типа $(1, 0)$. Пространство всех гладких векторных полей бесконечномерно.

2) Гладкое ковекторное поле задается в каждой точке $x \in M^n$ линейным функционалом $l(x) \in T_x^*M^n$, гладко зависящим от точки. В этом бесконечномерном пространстве тензорных полей типа $(0, 1)$ лежит бесконечномерное подпространство потенциальных полей $\text{grad } f(x)$.

3) Пусть на M^n задана риманова метрика $g_{ij}(x)$. Так как $g_{i'j'} = (\partial x^i / \partial x^{i'})(\partial x^j / \partial x^{j'})g_{ij}$, то возникает тензорное поле типа $(0, 2)$. Этот тензор называется *метрическим тензором*.

4) На комплексно аналитическом многообразии в каждом T_xM^{2n} определен оператор I — «умножение на мнимую единицу», $I^2 = -E$. Этот оператор гладко зависит от точки, и мы получаем тензорное поле типа $(1, 1)$.

5) *Тензор моментов инерции.* Рассмотрим в \mathbb{R}^3 твердое тело с закрепленной точкой 0, вращающееся вокруг нее. Пусть тело состоит из конечного числа N материальных точек, жестко скрепленных между собою. Пусть массы точек — m_1, m_2, \dots, m_N , а их координаты — $x_{(1)}^i, \dots, x_{(N)}^i$, $i = 1, 2, 3$. Построим матрицу

$$a^{ij} = - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} x_{(\alpha)}^i x_{(\alpha)}^j + \delta^{ij} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} |\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2.$$

Этот симметричный тензор ранга 2 типа $(0, 2)$ называется тензором моментов инерции твердого тела.

Поясним его роль. Пусть через 0 проведена прямая с единичным направляющим вектором $\mathbf{l} = (l^1, l^2, l^3)$. Найдем сумму $\sum_{ij} a^{ij} l^i l^j = H(\mathbf{l})$. Вычисления дают

$$H(\mathbf{l}) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (|\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2 - (\langle \mathbf{x}_{(\alpha)}, \mathbf{l} \rangle)^2).$$

Величина $|\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2 - \langle \mathbf{x}_{(\alpha)}, \mathbf{l} \rangle^2$ — это квадрат расстояния точки с массой m_{α} до оси \mathbf{l} . Мы получили известное выражение для момента инерции тела относительно оси. Собственные векторы матрицы a^{ij} задают главные оси инерции твердого тела.

6) *Тензор деформаций.* Рассмотрим сплошную среду, заполняющую некоторый объем в пространстве \mathbb{R}^n , отнесенном к декарто-

вым координатам x^1, \dots, x^n . Рассмотрим малую деформацию среды под действием каких-то сил. Смещения точек среды задаются гладкими функциями $u^i(x^1, \dots, x^n)$, зависящими от точки. Координаты смещенной точки \tilde{P} выражаются через координаты исходной точки так: $\tilde{x}^i = x^i + u^i(x^1, \dots, x^n)$. Пусть смещения малы, т. е. малы функции $u^i(x)$.

Как меняются длины гладких кривых при деформации среды? Рассмотрим две близкие точки: $P(x^1, \dots, x^n)$ и $P'(x^{1'}, \dots, x^{n'})$. Пусть $(\Delta l)^2 = \sum_{i=1}^n (x^{i'} - x^i)^2 = \sum_{i=1}^N (\Delta x^i)^2$ — квадрат длины евклидова отрезка, соединяющего P и P' . Найдем квадрат длины $(\Delta l')^2$ отрезка, соединяющего образы точек P и P' после их смещения в новые точки \tilde{P} и \tilde{P}' (рис. 5.1). Имеем

$$\begin{aligned} (\Delta l')^2 &= \sum_{i=1}^n (x^{i'} + u^i(x') - x^i - u^i(x))^2 = \\ &= (\Delta l)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^n (\Delta u^i)^2. \end{aligned}$$

Так как $\Delta u^i = (\partial u^i / \partial x^k) \Delta x^k$, то

$$(\Delta l')^2 - (\Delta l)^2 = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) \Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,k,p} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^p} \Delta x^k \Delta x^p.$$

Итак,

$$(dl')^2 - (dl)^2 = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) dx^i dx^k + \sum_{i,k,p} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^p} dx^k dx^p.$$

Если деформации $u^i(x)$ малы, то можно считать, что

$$(dl')^2 - (dl)^2 \cong \sum_{i,k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) dx^i dx^k.$$

Положим $\eta_{ik}(x) = \partial u^i / \partial x^k + \partial u^k / \partial x^i$; тогда $(dl')^2 - (dl)^2 \cong \eta_{ik} dx_i dx_k$. Набор функций η_{ik} образует тензор второго ранга типа $(0, 2)$, называемый тензором малых деформаций.

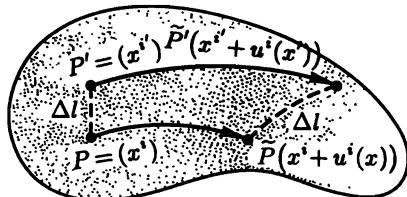


Рис. 5.1

7) *Тензор напряжений.* Рассмотрим деформацию упругого тела. В нем появляются «напряжения». Пусть $d\sigma$ — плоская малая ориентированная площадка в теле, проходящая через точку P . Пусть

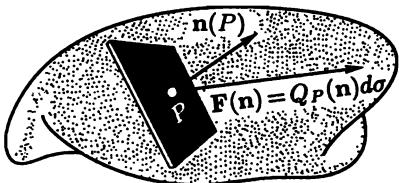


Рис. 5.2

$n(P)$ — нормаль к $d\sigma$ в точке P (рис. 5.2). Вблизи площадки упругое тело разбито ею на две части: одна расположена с положительной стороны площадки, другая — с отрицательной. Считается, что первая из этих частей упругого тела действует на вторую через пло-

щадку $d\sigma$ с силой \mathbf{F} , приложенной в P и пропорциональной площади площадки. Площадь тоже обозначим $d\sigma$. Итак, каждой нормали $n(P)$ в точке P отвечает вектор $\mathbf{F}(n)$; т. е. $\mathbf{F} = \vec{\mathbf{F}}(n)$. Характер зависимости устанавливается в теории упругости на основе экспериментов. Оказывается, часто можно считать зависимость $\mathbf{F}(n)$ линейной, т. е. $\mathbf{F}(n) = Q_P(n)d\sigma$, где $F^i = Q_j^i n^j d\sigma$; $\{n^j\}$ — координаты $n(P)$. Возникает тензорное поле Q_P типа $(1, 1)$. Оно и определяет тензор напряжений.

Из механических соображений следует, что тензор напряжений Q_P симметричен. Его можно определить не только в деформированном упругом теле. Он имеется и в идеальной жидкости. Считается, что здесь силы внутреннего трения отсутствуют, а потому сила напряжения $\mathbf{F}(n)$, действующая на $d\sigma$, направлена по нормали к $d\sigma$. Отсюда следует, что оператор Q_P — диагонален, т. е.

$$Q_j^i = q(P)\delta_j^i, \quad F^i = q(P)n^i(P)d\sigma,$$

где скалярная функция $q(P)$ называется давлением. Оно не зависит от направления n и определяется только самой точкой P . Если среда такова, что $Q_P = q(P) \cdot E$, то говорят, что выполнен закон Паскаля. Он выполняется не всегда. Например, в вязкой жидкости тензор напряжений может иметь более сложный вид.

Между тензорами деформации и напряжения имеется зависимость. В первом приближении считается, что при малых деформациях тензор напряжений линейно зависит от тензора деформаций, т. е. $Q_j^i = \alpha_j^{ikl}\eta_{kl}$, где функции α_j^{ikl} образуют тензор 4-го ранга типа $(3, 1)$. В R^3 тензор α_j^{ikl} имеет 81 компоненту. Указанное линейное соотношение называется законом Гука. Предположим, что среда однородна и изотропна, т. е. вид зависимости $Q = Q(\eta)$, не меняется при ортогональных преобразованиях, т. е.

тензор α_j^{ikl} инвариантен относительно $\text{SO}(3)$. Можно показать, что в этом случае $Q_j^i = Q_{ij} = \mu\eta_{ij} + \lambda \text{spur}(\eta) \cdot \delta_{ij}$, где числа μ и λ называются коэффициентами Ламе. Функция $\sum \eta_{ii} = \text{spur}(\eta)$ имеет простой смысл (мы не различаем верхних и нижних индексов, так как события происходят в \mathbf{R}^3). Рассмотрим перемещение частиц среды под действием малых деформаций. Тогда функции u^i — это компоненты векторного поля деформации. Обозначим его через $\mathbf{v}(P)$. Тогда $\text{spur}(\eta) = \sum (\partial u^i / \partial x^i + \partial u^i / \partial x^i) = 2 \sum \eta_{ii} = \text{spur}(\eta) \sum_i (\partial u^i / \partial x^i) = 2 \operatorname{div}(\mathbf{v})$, т. е. $\text{spur}(\eta)$ — дивергенция поля перемещений. Коэффициент μ для жидкости называется коэффициентом вязкости.

5.2.2. Алгебраические операции над тензорами

1) Сложив два тензорных поля одинакового типа и ранга $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ и $P_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ получаем новое тензорное поле (проверьте!): $C_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + P_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$.

2) Если $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — тензорное поле, а $f(x)$ — гладкая функция на M^n , то $f(x)T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ также тензорное поле. Доказательство очевидно.

3) *Перестановка индексов одного типа.* Рассмотрим, например, тензорное поле $T_{i_1 \dots i_q}$ и построим новое поле по формуле: $P_{i_1 \dots i_s \dots i_\alpha \dots i_q} = T_{i_1 \dots i_\alpha \dots i_s \dots i_q}$; т. е. перенумеруем компоненты тензора. Эта операция — тензорная (проверьте!). Здесь мы поменяли местами два индекса: i_s и i_α . Ясно, что можно было сделать любую перестановку.

ЗАМЕЧАНИЕ. Перестановка ковариантного и контравариантного индексов не является, вообще говоря, тензорной операцией, так как верхние индексы преобразуются с помощью матрицы J , а нижние — с помощью $(J^{-1})^\top$. Рассмотрим, например, поле типа $(1, 1)$, т. е. поле операторов C . Пусть в координатах (x) оператор симметричен, т. е. $C_j^i = C_i^j$. Другими словами, $C = C^\top$. Допустим, что и в любых других координатах $C' = (C')^\top$. Если A — матрица Якоби, то $C' = ACA^{-1}$, $ACA^{-1} = (ACA^{-1})^\top$, т. е. $BC = CB$, где $B = A^\top A$. Ясно, что матрицы B и C не всегда коммутируют. Если матрица Якоби ортогональна, то перестановка индексов i и j является тензорной операцией.

4) *Операция свертки.* Пусть $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ — тензорное поле. Выделим два индекса разного типа — ковариантный j_s и контравариантный i_α . Построим функции: $P_{j_1 \dots j_{s-1} j_s+1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_\alpha+1 \dots i_p} = \sum_i T_{j_1 \dots j_{s-1}, j_s=i, j_{s+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1}, i_\alpha=i, i_{\alpha+1} \dots i_p}$

Эта операция — тензорная (проверьте!). Она переводит тензор типа (p, q) в тензор типа $(p - 1, q - 1)$. Если $p = q$, то для исходного поля $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ можно определить полную свертку, свернув все верхние индексы со всеми нижними. Получится скалярная функция $\text{sprg}(T)$, являющаяся инвариантом поля T , т. е. не меняющаяся при заменах координат.

5) *Тензорное произведение.* Из двух тензорных полей $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ и $P_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ образуем новое поле $C_{j_1 \dots j_q \beta_1 \dots \beta_t}^{i_1 \dots i_p \alpha_1 \dots \alpha_s} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}$. Ясно, что это — тензорное поле типа $(p + s, q + t)$. Оно обозначается так: $C = T \otimes P$. Тензорное умножение, вообще говоря, некоммутативно.

6) *Поднятие и опускание индексов.* Рассмотрим, например, невырожденное тензорное поле a_{ij} типа $(0, 2)$, т. е. матрица $A = (a_{ij})$ невырождена. Коэффициенты обратной матрицы A^{-1} обозначим a^{ij} . Отсюда $a^{ik}a_{kl} = \delta_j^i$. Для произвольного тензорного поля $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ построим поле вида $P_{\alpha j_1 \dots j_q}^{i_2 \dots i_p} = a_{\alpha i_1} T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Аналогично строится поле $C_{j_2 \dots j_q}^{\alpha i_1 \dots i_p} = a^{\alpha j_1} T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$.

Первая операция называется *опусканием индекса*, вторая — *поднятием индекса*. Операции тензорные, так как являются композицией тензорных операций: умножения и свертки тензоров. Операции поднятия и опускания индексов взаимно обратны в силу невырожденности поля a^{ij} . В самом деле: $a_{j_1 \alpha} C_{j_2 \dots j_q}^{\alpha i_1 \dots i_p} = a_{j_1 \alpha} a^{\alpha s} T_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \delta_{j_1}^s T_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Обычно в качестве a_{ij} берется метрический тензор g_{ij} . Если $M^n = \mathbf{R}^n$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то в декартовых координатах нет разницы между верхними и нижними индексами. Например, можно считать все их нижними. Поднятие и опускание индексов в общем случае позволяет канонически отождествить $T_P M^n$ и $T_P^* M^n$. В самом деле, элементами $T_P M^n$ являются векторы, а элементами $T_P^* M^n$ — ковекторы. Построим линейные отображения:

$$A: T \rightarrow T^*, \quad A(\mathbf{a}) = \xi, \quad \text{где } \xi_i = g_{i\alpha} a^\alpha;$$

$$B: T^* \rightarrow T; \quad B(\eta) = \mathbf{b}; \quad b^i = g^{i\alpha} \eta_\alpha.$$

Ясно, что

$$B \circ A: T \rightarrow T, \quad B \circ A = 1_T$$

(тождественное отображение). Аналогично: $A \circ B: T^* \rightarrow T^*$ и $A \circ B = 1_{T^*}$. Это означает, что A и B — изоморфизмы. Такое отождествление T и T^* инвариантно относительно замен координат, поскольку использованные операции — тензорные.

7) Симметрирование. Рассмотрим все индексы одного типа у тензорного поля T (например, нижние). Определим операцию так: $P_{j_1 \dots j_q} = T_{(j_1 \dots j_q)} = 1/q! \sum_{(\sigma)} T_{\sigma(j_1 \dots j_q)}$, где суммирование ведется по всем перестановкам индексов. Операция симметрирования — тензорная (проверьте!).

Определение 1. Поле $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ называется *симметричным*, если оно не меняется при перестановке любых двух индексов одного типа.

Симметрирование симметричного поля очевидно его не меняет.

8) Альтернирование. Рассмотрим все индексы одного типа у тензорного поля T (например, нижние). Определим альтернирование так:

$$P_{j_1 \dots j_q} = T_{[j_1 \dots j_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} (-1)^{\varphi(\sigma)} T_{\sigma(j_1 \dots j_q)}.$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ — четность перестановки σ (иногда пишут $(-1)^\sigma$). Операция альтернирования — тензорная (проверьте!).

Определение 2. Тензорное поле $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ называется *кососимметричным*, если его компоненты меняют знак при транспонировании (перестановке) любых двух соседних индексов одного типа.

Лемма 1. Альтернирование не меняет кососимметричный тензор и обращает симметричный тензор в нуль.

Доказательство очевидно следует из определений.

Понятие симметрии и косой симметрии операторов приобретают инвариантный смысл лишь при наличии римановой метрики (более общо: при наличии невырожденного тензорного поля типа $(0, 2)$ или $(2, 0)$). Риманова метрика g_{ij} порождает в каждом $T_P M^n$ скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_P = g_{ij}(P)a^i b^j$.

Определение 3. Оператор T или операторное поле типа $(1, 1)$ называется *симметричным* (соответственно, *кососимметричным*), если $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv \langle \mathbf{a}, T\mathbf{b} \rangle$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P M^n$; соответственно: $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \equiv -\langle \mathbf{a}, T\mathbf{b} \rangle$ для кососимметричного случая.

Например, для симметричного оператора имеем: $\langle \mathbf{a}, T\mathbf{b} \rangle = (g_{ij} \times T_k^j) a^i b^k = T_{ik} a^i b^k$, где $T_{ik} = g_{ij} T_k^j$. Аналогично: $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = T_{ki} a^i b^k$, где $T_{ki} = g_{ik} T_i^j$. Так как $T_{ik} a^i b^k \equiv T_{ki} a^i b^k$, то $T_{ik} = T_{ki}$. Итак, после опускания индексов у тензора T типа $(1, 1)$ условие симметрии приобретает привычный вид, т. е. T_{ik} не меняются при перестановке индексов. Аналогично рассматривается и кососимметрический случай.

5.2.3. Кососимметричные тензоры

Рассмотрим ковариантные кососимметричные тензоры $T_{i_1 \dots i_k}$.

Лемма 2. Кососимметричный тензор $T_{i_1 \dots i_n}$ максимального ранга n на M^n полностью определяется только одной своей компонентой $T_{12\dots n}$ (существенной компонентой); остальные отличаются от нее только множителем $(-1)^\sigma$, причем

$$T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\dots n}, \quad (i_1, \dots, i_n) = \sigma(1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. В исходных координатах x^1, \dots, x^n имеем: $T_{i_1 \dots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\dots n}$ (см. определение косой симметрии). Сделаем замену: $(x) \rightarrow (x')$. Тогда:

$$\begin{aligned} T_{1' \dots n'} &= \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} T_{1\dots n} = \left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \dots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} \right) T_{12\dots n} = \\ &= (\det J) \cdot T_{12\dots n}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. ■

Для кососимметричных тензоров определена важная операция: *внешнее умножение*. По двум кососимметричным тензорам $T_{i_1 \dots i_k}$ и $P_{j_1 \dots j_q}$ определим новый кососимметричный тензор $R \wedge P$, где

$$R_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k} = T_{[i_1 \dots i_k} P_{j_1 \dots j_q]} = \frac{1}{k!q!} \sum_\sigma (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1 \dots i_k} P_{j_1 \dots j_q]}.$$

Это умножение билинейно. Ранги тензоров суммируются. Рассмотрим интерпретацию на языке внешних дифференциальных форм. Сначала рассмотрим кососимметричные тензоры $T_{i_1 \dots i_k}$ в одной точке M^n . Рассмотрим координаты x^1, \dots, x^n как гладкие функции в окрестности точки P . Тогда определены их дифференциалы dx^1, \dots, dx^n . Для любой гладкой функции $f(x)$ ее дифференциал df есть элемент пространства, сопряженного к T_* , т. е. линейный функционал на T_* . В самом деле, если $\mathbf{a} \in T_*$, то

$$\frac{df}{d\mathbf{a}} = \frac{df(\gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0},$$

где $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{a}$, т. е. $df/d\mathbf{a} = (\partial f / \partial x^k) a^k$. Если $f = x^i$, то $df x^i/d\mathbf{a} = a^i$ и $dx^k = a^k dt$.

Итак, dx^k являются функционалами на T_* , т. е. — элементами T^* . Здесь dt можно рассматривать как коэффициент пропорциональности и опускать его. Если $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in T_*$ — базис в T_* , то в качестве базиса в T^* возьмем dx^1, \dots, dx^n , считая, что $dx^k(\mathbf{e}_\alpha) = \delta_\alpha^k$,

т. е. $dx^k(a) = a^k$. Определим внешнюю алгебру $\Lambda(dx^1, \dots, dx^n)$ с образующими dx^1, \dots, dx^n и с соотношениями: $dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i = 0, i \neq j$. Умножение \wedge билинейно, алгебра Λ аддитивно порождена мономами: $dx^1, \dots, dx^n; dx^i \wedge dx^j, i < j; \dots; dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, i_1 < \dots < i_k; dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Как известно из курса алгебры, между этими мономами нет линейных соотношений с постоянными коэффициентами. Мультиплекативными образующими являются dx^1, \dots, dx^n . Алгебра Λ разлагается в прямую сумму подпространств $\Lambda^k; \Lambda = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k$, где Λ^k порождено мономами $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. При этом, $\Lambda^0 \cong \mathbf{R}$ и порождено единицей 1. Размерность алгебры Λ равна 2^n .

Рассмотрим новую алгебру $\Lambda(M^n)$, элементами которой являются линейные комбинации $\omega^{(k)} = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ и всевозможные линейные комбинации $\sum_{k=0}^n \omega^{(k)}$, где $T_{i_1 \dots i_k}(x)$ — кососимметричное тензорное поле ранга k и индексы $i_1 \dots i_k$ упорядочены в порядке возрастания. Умножение в $\Lambda(M^n)$ определим ниже.

Что происходит с $\omega^{(k)}$ при замене $(x) \rightarrow (x')$?

Лемма 3. Элементы $\omega^{(k)} = T_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ определены инвариантно, в том смысле, что при замене $(x) \rightarrow (x')$ имеем

$$T_{i'_1 \dots i'_2} dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_k} \equiv T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться законами преобразования $T_{i_1 \dots i_k}(x)$ и dx^i . ■

Элементы $\omega^{(k)}$ алгебры $\Lambda(M^n)$ называются *внешними дифференциальными формами*.

Размерность $\Lambda(M^n)$ бесконечна. Каждая внешняя форма $\omega^{(k)}$ определяет компоненты $T_{i_1 \dots i_k}(x)$ кососимметричного тензора. Верно и обратное: любое кососимметрическое тензорное поле однозначно определяет внешнюю форму.

ЗАМЕЧАНИЕ. При определении внешних форм можно рассматривать линейные комбинации вида $A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, где $A_{i_1 \dots i_k}$ — произвольное тензорное поле (не обязательно кососимметрическое), и суммирование ведется по всем неупорядоченным наборам $i_1 \dots i_k$. Но в силу косой симметрии внешнего умножения имеем

$$A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = A_{[i_1 \dots i_k]} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k,$$

т. е. любая комбинация $A_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ порождает некоторую внешнюю дифференциальную форму.

Зададим умножение в $\Lambda(M^n)$. Если $\omega^{(k)} = T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ и $\omega^{(s)} = P_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}$ — две внешние формы, то их

произведение $\omega^{(k+s)} = \omega^{(k)} \wedge \omega^{(s)}$ определим как форму вида

$$\begin{aligned}\omega^{(k+s)} &= (T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \wedge (P_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) = \\ &= T_{i_1 \dots i_k} P_{j_1 \dots j_s} \underset{(i_1 < \dots < i_k)}{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}} \underset{(j_1 < \dots < j_s)}{dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}} = \\ &= T_{[i_1 \dots i_k]} P_{j_1 \dots j_s]} \underset{(i_1 < \dots < i_{k+s})}{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+s}}}.\end{aligned}$$

Ясно, что умножение форм совпадает с внешним умножением соответствующих им тензорных полей. Итак, $\Lambda(M^n)$ является алгеброй с единицей. Умножение ассоциативно, но не коммутативно. Алгебра $\Lambda(M^n)$ распадается в прямую сумму подпространств $\Lambda^k(M^n) = \{T_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\}$. Число k называется степенью формы $\omega^{(k)}$. Элементы $\omega^{(k)}$ называются однородными элементами алгебры $\Lambda(M^n)$. Дифференциальные формы $\omega^{(k)}$ удобно трактовать как полилинейные кососимметрические отображения. Если $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in T_* M^n$, то, считая, что $dx^i(\mathbf{a}) = a^i$, получаем

$$\begin{aligned}\omega^{(k)}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) &= (T_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \\ &= T_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{[i_1}(\mathbf{a}_1) \cdot \dots \cdot dx^{i_k]}(\mathbf{a}_k) = T_{i_1 \dots i_k}(x) a_1^{i_1} \cdot \dots \cdot a_k^{i_k} = \\ &= T_{[i_1 \dots i_k]} a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k} = T_{i_1 \dots i_k} a_1^{i_1} \dots a_k^{i_k}.\end{aligned}$$

Рассмотрим декартовы координаты x^1, \dots, x^n в \mathbf{R}^n . Пусть $\omega^{(n)} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — внешняя форма максимального ранга; $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — векторы в \mathbf{R}^n . Обозначим через $\text{vol } \Pi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ n -мерный объем параллелепипеда $\Pi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, натянутого на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Из курса алгебры известна следующая лемма.

Лемма 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^n \\ \dots & \dots \\ a_1^n & a_n^n \end{pmatrix}$$

— матрица, построенная из координат $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда $\det(A) = \text{vol } \Pi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Вернемся к внешним формам.

Лемма 5. Пусть $\omega^{(n)} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — форма максимального ранга в декартовых координатах в \mathbf{R}^n . Тогда $\omega^{(n)}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{vol } \Pi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Доказательство. Так как $dx^i(\mathbf{a}) = a^i$, то

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &= (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \\ &= a_1^{[i_1} \dots a_n^{i_n]} = \det A.\end{aligned}$$

Итак, объем параллелепипеда (как значение внешней формы) — не скаляр. Он меняет знак при нечетной перестановке векторов. Это «ориентированный объем». Такая точка зрения на объем плодо-творна. Аналогичная интерпретация возможна и для форм меньшей степени. Пусть в \mathbf{R}^n задана форма $\omega^{(k)} = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Найдем значение $(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$, где $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ — векторы в \mathbf{R}^n . Докажите, что $\omega^{(k)}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \text{vol } \Pi(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ — объем k -мерного параллелепипеда в плоскости $\mathbf{R}^k(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$, натянутого на векторы $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$, являющиеся ортогональными проекциями векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ на плоскость $\mathbf{R}^k(\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_k})$ (рис. 5.3).

Если форма $\omega^{(k)}$ есть комбинация вида $\omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, то ее значение на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ будет линейной комбинацией объемов $\text{vol } \Pi(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k)$ с «весами» $\omega_{i_1 \dots i_k}$.

Опишем связь внешних форм с объемом области на риманово многообразии. Мы считаем, что читатель знаком с понятием многомерного (кратного) интеграла Римана. Пусть M^n — риманово многообразие и D — открытая область в M^n , диффеоморфная области U в \mathbf{R}^n , отнесенном к декартовым координатам x^1, \dots, x^n . Пусть $g(x)$ — определитель матрицы $(g_{ij}(x))$.

Определение 4. Объемом области $D \subset M^n$ называется число

$$V(D) = \text{vol}(D) = \int_{U(x)} \int \sqrt{g(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где x^1, \dots, x^n — декартовы координаты в области $U(x) \subset \mathbf{R}^n$.

Если область на многообразии «большая», т. е. не покрывается одной картой, то ее объем определяется при помощи разбиения единицы, ассоциированного с данным гладким атласом.

Определение обосновывается тем, что в простейших случаях оно приводит к тем же значениям объема, какие получаются из других соображений.

1) Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$, $U = D \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область в \mathbf{R}^n , $g_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. $g(x) \equiv 1$, а потому

$$\text{vol}(D) = \int_{U(x)} \int dx^1 \dots dx^n,$$

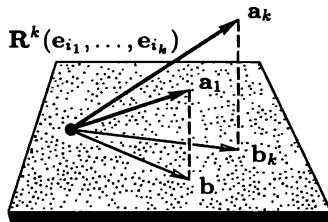


Рис. 5.3

что совпадает с обычным, «евклидовым», определением объема области в \mathbf{R}^n . Если считать dx^1, \dots, dx^n бесконечно малыми величинами, то $d\sigma = dx^1 \cdot \dots \cdot dx^n$ — это объем бесконечно малого параллелепипеда со сторонами dx^1, \dots, dx^n . Итак, объем области $U \subset \mathbf{R}^n$ представляется как «сумма» объемов бесконечно малых параллелепипедов.

2) Пусть M^n — подмногообразие в \mathbf{R}^N и $g_{ij}(x)$ — индуцированная риманова метрика на M^n . Пусть x^1, \dots, x^n — криволинейные координаты в окрестности точки P на M^n . Пусть область D «мала», т. е. содержится в этой окрестности. Тогда можно считать, что объем области D есть «сумма» объемов бесконечно малых параллелепипедов (но уже не прямоугольных) $\{\Pi_k\}$, получающихся разбиением области D криволинейными «координатными плоскостями» $x^i = \text{const}$ (с «бесконечно малым шагом») (рис. 5.4). Так

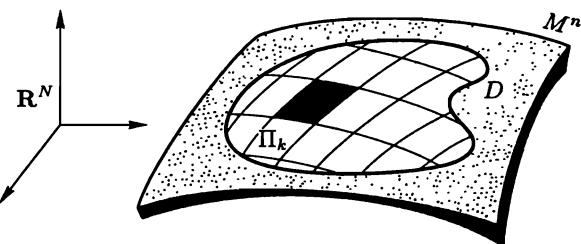


Рис. 5.4

как M^n — гладкое подмногообразие, то Π_k хорошо аппроксимируется «линейным параллелепипедом» $\tilde{\Pi}_k$, содержащимся в $T_P M^n$, где P — вершина Π_k (рис. 5.5). Стороны Π_k направлены вдоль координатных линий $\{x^i\}$, проходящих через P . Пусть a_1, \dots, a_n —

векторы скоростей этих линий. Так как g_{ij} индуцирована евклидовой метрикой, то $\text{vol}(\Pi_k) \cong \cong \text{vol}(\tilde{\Pi}_k)$ совпадает с евклидовым объемом $\tilde{\Pi}_k$ в \mathbf{R}^n . Итак, $\text{vol}(D) \cong \cong \sum_{(i)} \text{vol}(\tilde{\Pi}_k)$. Пусть около точки P наряду с криволинейными координатами x^1, \dots, x^n введены координаты y^1, \dots, y^n , ортогональные в P , т. е. являющиеся декартовыми в $T_P M^n$. Пусть e_1, \dots, e_n — единичные векторы скоростей этих новых координатных линий в точке P . Тогда $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ в точке P . Пусть J —

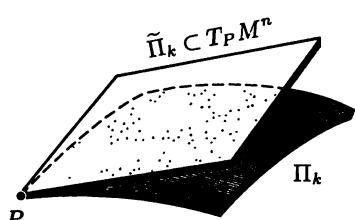


Рис. 5.5

матрица Якоби замены в точке P . Тогда J переводит $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Докажем, что $\text{vol}(\tilde{\Pi}_k) = \sqrt{g(x)} \times \dots \times d\sigma^n$, где $d\sigma^n = dx^1, \dots, dx^n$ — евклидов объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx^1, \dots, dx^n . Рассмотрим параллелепипед Π'_k , натянутый на $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Тогда $\text{vol } \Pi'_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \sqrt{g(x)}$. В самом деле, так как $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$, то $(g_{ij}(x)) = J(g_{ij}(y))J^\top = JJ^\top$, т. е. $\det J = \sqrt{g(x)}$. В силу леммы 4: $\sqrt{g(x)} = \det J = \text{vol } \Pi'_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$. Утверждение доказано.

Так как $\tilde{\Pi}_k$ натянут на $(dx^1)\mathbf{a}_1, \dots, (dx^n)\mathbf{a}_n$ (рис. 5.6), то

$$\text{vol } \tilde{\Pi}_k = \sqrt{g(x)} dx^1 \cdot \dots \cdot dx^n.$$

Так как из объемов $\tilde{\Pi}_k$ (при их суммировании) и набирается объем области D , то $\text{vol}(D) = \int \int_{U(x)} \sqrt{g(x)} dx^1 \cdot \dots \cdot dx^n$, что и требовалось.

3) Пусть $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ — подмногообразие, задаваемое радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$. Тогда для площади области D на M^2 , имеем

$$\text{vol}(D) = \iint_{U(v)} \sqrt{EG - F^2} du dv = \iint_{U(v)} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv,$$

где через $[\ ,]$ обозначено векторное произведение, а через $|[\ ,]|$ — его модуль.

4) Пусть подмногообразие $M^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ задано как график гладкой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Найдем объем ограниченной области $D \subset M^{n-1}$. Можно считать, что $\text{vol}(D) = \Sigma(d\sigma)$, где $d\sigma$ — объем бесконечно малого параллелепипеда. Проектируя его на гиперплоскость $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$, получаем бесконечно малый объем $d\omega = dx^1 \dots dx^{n-1}$, связанный с $d\sigma$ так: $d\sigma = d\omega / \cos \alpha$ (рис. 5.7). Здесь α — угол между нормалью \mathbf{m} к M^{n-1} и вектором \mathbf{e}_n . Ясно, что $\cos \alpha = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{m} \rangle$, где $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$; $\mathbf{m} = (\text{grad } F) / |\text{grad } F|$, где

$$F(x^1, \dots, x^n) = x^n - f(x^1, \dots, x^{n-1}),$$

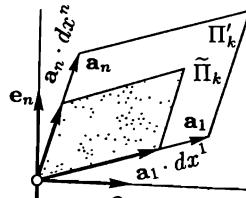


Рис. 5.6

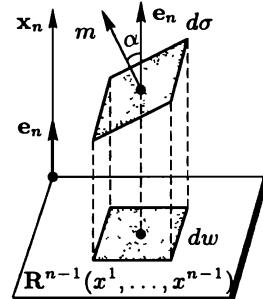


Рис. 5.7

т. е.

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2} dx^1 \cdot \dots \cdot dx^{n-1}.$$

Итак,

$$\text{vol}(D) = \int_{U(x^1, \dots, x^{n-1})} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2} dx^1 \dots dx^{n-1}.$$

Эта формула совпадает с общим определением объема (см. выше). В самом деле, как мы знаем, индуцированная метрики на M^{n-1} имеет вид

$$ds^2 = (1 + (f_{x^i})^2)(dx^i)^2 + 2f_{x^i}f_{x^j}dx^i dx^j,$$

откуда $g(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2$ (проверьте!). Например, если $n = 3$, то $g(x) = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

УПРАЖНЕНИЕ. Найдите площадь круга радиуса r на плоскости Лобачевского и на двумерной сфере.

Итак, мы предъявили несколько обоснований общей формулы для объема области на римановом многообразии

$$\text{vol}(D) = \int_{U(x)} \int \sqrt{g(x)} dx^1 \dots dx^n.$$

В частности, мы доказали, что для $\text{vol}(D)$ существует представление

$$\text{vol}(D) = \int_{U(x)} \int \sqrt{g(x)} \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) (\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n),$$

где $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — касательные векторы скоростей координатных линий $\{x^i\}$ в точке P , а dt^1, \dots, dt^n — величины бесконечно малых смещений из P вдоль этих линий. Эти смещения образуют бесконечно малый параллелепипед $\tilde{\Pi}_k(\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n)$. Поэтому формула для объема и представляется в виде, который мы только что указали. Обычно ее пишут в сокращенном виде: $\int \int_{U(x)} \sqrt{g(x)} \times \times dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, подразумевая развернутое выражение, приведенное выше.

Ясно, что этот интеграл не зависит от выбора локальной системы координат. В самом деле, если дана замена: $(x) \rightarrow (y)$, то

$$\begin{aligned}
\int_{U(y)} \int \sqrt{g(y)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n &= \int_{U(y)} \int (\det J_y) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \\
&= \int_{U(y(x))} \int (\det J_x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \\
&= \int_{U(x)} \int \sqrt{g(x)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.
\end{aligned}$$

5.3. СВЯЗНОСТЬ И КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

5.3.1. Определение и свойства аффинной связности

Необходимость дифференцировать тензорные поля возникает в прикладных задачах. При этом нужно, чтобы дифференцирование было тензорной операцией, т. е. чтобы оно превращало тензор в тензор. Первым кандидатом на эту операцию является обычное дифференцирование компонент тензоров в криволинейных координатах. Возьмем, для простоты, ковариантное поле T_{i_1, \dots, i_k} и рассмотрим функции $P_{\alpha; i_1, \dots, i_k} = \partial T_{i_1, \dots, i_k} / \partial x^\alpha$, т. е. вычислим обычные частные производные. В другой системе координат мы должны взять производные $P_{\alpha'; i'_1, \dots, i'_k} = \partial / \partial x^{\alpha'} T_{i'_1, \dots, i'_k}$. Вопрос: образуют ли эти наборы тензорное поле P ? Другими словами, будут ли они преобразовываться друг в друга при замене координат по тензорному закону? Проверим это. При переходе от (x) к (x') имеем

$$\begin{aligned}
P_{\alpha'; i'_1 \dots i'_k} &= \frac{\partial T_{i'_1 \dots i'_k}}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} T_{i_1 \dots i_k} \right) = \\
&= P_{\alpha; i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + T_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right)
\end{aligned}$$

Итак,

$$P_{\alpha' i'_1 \dots i'_k} = P_{\alpha i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} + S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k}(T, x, x'),$$

где

$$S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k} = T_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}} \right).$$

При замене общего вида $(x) \rightarrow (x')$ выражение $S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k}$, вообще говоря, отлично от нуля, т. е. $P_{\alpha i \dots i_k}$ преобразуются не по тензорному закону. Итак, обычное дифференцирование $\partial/\partial x^i$ – не тензорная операция. Оно будет тензорным лишь в частных случаях, например, при линейных заменах координат, поскольку здесь $S_{\alpha' i'_1 \dots i'_k} \equiv 0$.

Наша цель: научиться инвариантно дифференцировать тензорные поля на многообразиях в произвольных системах координат. Сначала ограничимся евклидовым пространством, где наряду с декартовыми рассматриваются всевозможные криволинейные координаты. Обозначим разыскиваемую нами операцию через ∇ («набла») и потребуем от нее следующего.

1) В декартовых координатах в R^n операция ∇ должна совпадать с обычным дифференцированием $\{\partial/\partial x^i\}$.

2) Операция ∇ должна быть тензорной, т. е. если T – тензорное поле, то и ∇T должно быть тензорным полем.

Начнем с примеров. Рассмотрим в R^n векторное поле T^i . Пусть (x) – декартовы координаты, (x') – криволинейные. Запишем условия (1) и (2), наложенные на ∇ . В системе (x) имеем: $(\nabla T)^i_j = \partial T^i / \partial x^j$. При переходе к (x') должно быть: $(\nabla T)^{i'}_j = (\partial x^{i'}/\partial x^i) \times \times (\partial x^j/\partial x^{j'}) (\nabla T)^{j'}_j$. Найдем явный вид ∇ в криволинейных координатах. Имеем

$$\begin{aligned} (\nabla T)^{i'}_j &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} T^{k'} \right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^j} + \\ &+ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} T^{k'} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) = \delta^{i'}_k \delta^{j'}_j \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{\alpha'}} + T^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}; \\ (\nabla T)^{i'}_j &= \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \Gamma^{i'}_{j' k'}; \quad \Gamma^{i'}_{j' k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \end{aligned}$$

Итак, появились функции $\Gamma^{i'}_{j' k'}$, измеряющие отклонение ∇ от операции обычного дифференцирования.

Рассмотрим теперь в R^n ковекторное поле T_i . Чтобы найти явный вид ∇ на T_i , нужно решить систему уравнений: $(\nabla T)_{ij} = \partial T_i / \partial x_j$; $(\nabla T)_{i' j'} = (\partial x^i / \partial x^{i'}) (\partial x^j / \partial x^{j'}) (\nabla T)_{ij}$. Аналогично предыдущему получаем (проверьте!):

$$(\nabla T)_{i' j'} = \partial T_{i'} / \partial x^{j'} + T_{k'} \tilde{\Gamma}_{i' j'}^{k'},$$

где $\tilde{\Gamma}_{i' j'}^{k'} = (\partial^2 x^{k'}/\partial x^j \partial x^i) (\partial x^i/\partial x^{i'}) (\partial x^j/\partial x^{j'})$. Итак, возникли функции $\tilde{\Gamma}_{i' j'}^{k'}$, измеряющие отклонение ∇ от обычного дифференцирования на ковекторных полях.

Лемма 1. Имеет место равенство $\tilde{\Gamma}_{i'j'}^{k'} = -\Gamma_{i'j'}^{k'}.$

Доказательство. Дифференцируя очевидное тождество $(dx^{i'}/dx^{i''})(dx^{i''}/dx^{k'}) = \delta_{k'}^{i'}$ по x^p , получаем $\Gamma_{p'k'}^{i'} + \tilde{\Gamma}_{p'k'}^{i'} = 0.$ Лемма доказана. ■

Итак, действие ∇ на векторные и ковекторные поля (в криволинейных координатах в \mathbf{R}^n) имеет вид

$$(\nabla T)_{j'}^{i'} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'}, \quad (\nabla T)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} - T_{k'} \Gamma_{i'j'}^{k'}.$$

Теперь рассмотрим действие ∇ на операторных полях, т. е. на полях типа $(1, 1).$ Имеем

$$\begin{aligned} (\nabla T)_{jk}^i &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T_j^i), \\ (\nabla T)_{j'k'}^{i'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} T_{p'}^{\alpha'} \right) = \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} \frac{\partial T_{p'}^{\alpha'}}{\partial x^{q'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} + \\ &\quad + T_{p'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{q'} \partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{q'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^j} + \\ &\quad + T_{p'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{p'}}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^{k'}} (T_{j'}^{i'}) + T_{j'}^{p'} \Gamma_{p'k'}^{i'} - T_{p'}^{i'} \Gamma_{j'k'}^{p'}. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли действие ∇ на $T_j^i.$

Теорема 1. Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$, (x) — декартовы координаты, (x') — криволинейные координаты. Тогда в \mathbf{R}^n существует тензорная операция ∇ , задаваемая на произвольном тензорном поле $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$ формулой

$$(\nabla T)_{j'_1 \dots j'_p; \alpha'}^{i'_1 \dots i'_k} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} (T_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_k}) + \sum_{s=1}^k T_{j'_1 \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_s = q' \dots i'_k} \Gamma_{q' \alpha'}^{i'_s} - \sum_{s=1}^p T_{j'_1 \dots j'_s = q' \dots j'_p}^{i'_1 \dots i'_k} \Gamma_{j'_s \alpha'}^{q'},$$

где функции $\Gamma_{j'q'}^{i'}$ преобразуются при замене $(x') \rightarrow (x'')$ так:

$$\Gamma_{j''k''}^{i''} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{j''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \Gamma_{j'k'}^{i'} + \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{j''} \partial x^{k''}}.$$

Доказательство. Явный вид ∇ на поле $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$ устанавливается дословным повторением проделанных выше вычислений

для случая векторных, ковекторных, и операторных полей, повторенных столько раз, каков ранг поля $T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}$. Выписывание формул оставляем читателю как обязательное упражнение. Изучим закон преобразования $\Gamma_{j'k'}^{i''}$. Имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{k''} T^{i''} &= \frac{\partial T^{i''}}{\partial x^{k''}} + T^{p''} \Gamma_{p''k''}^{i''} = \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial}{\partial x^{k'}} \left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} T^{i'} \right) + \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} T^{p'} \Gamma_{p''k''}^{i''} = \\ &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{i'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{i'}} + T^{p'} \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} \Gamma_{p''k''}^{i''}; \\ \nabla_{k''} T^{i''} &= \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \nabla_{k'} T^{i'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{k'}} + T^{p'} \Gamma_{p'k'}^{i'} \right).\end{aligned}$$

Сравнивая, получаем

$$T^{p'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} \Gamma_{p'k'}^{i'} = T^{p'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}} + T^{p'} \frac{\partial x^{p''}}{\partial x^{p'}} \Gamma_{p''k''}^{i''}.$$

Так как это тождество должно иметь место для любого поля T^i , то

$$\Gamma_{p''k''}^{i''} = \Gamma_{p'k'}^{i'} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}}.$$

В силу леммы 1

$$\frac{\partial^2 x^{i''}}{\partial x^{k'} \partial x^{p'}} \frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p''}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{k''}} = - \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{p''} \partial x^{k''}} \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}.$$

Теорема доказана. ■

Мы доказали существование «тензорного дифференцирования» пока только для случая $M^n = \mathbf{R}^n$, т. е. «в присутствии» декартовых координат. Это позволило нам в явном виде вычислить функции $\Gamma_{j'k'}^{i''}$.

Рассмотрим теперь произвольные гладкие многообразия. Новую операцию ∇ зададим аксиоматически, положив в основу определения тензорные свойства ∇ на \mathbf{R}^n .

Определение 1. Будем говорить, что на гладком многообразии M^n задано ковариантное дифференцирование ∇ , если для каждого гладкого атласа в каждой карте заданы гладкие функции Γ_{jk}^i (называемые символами Кристоффеля), преобразующиеся при замене координат по закону

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Gamma_{jk}^i + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Тогда ∇ задается формулой

$$(\nabla T)_{j_1 \dots j_p; \alpha}^{i_1 \dots i_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_k}) + \sum_{s=1}^k T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_s = q; \dots i_k} \Gamma_{q\alpha}^{i_s} - \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots j_s = q; \dots j_p}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{j_s \alpha}^q.$$

Существование многообразий, где можно ввести ∇ , доказано нами выше: можно взять $M^n = \mathbf{R}^n$. Тогда Γ_{jk}^i задаются полученными выше формулами. Важно, что набор Γ_{jk}^i не образует тензора! Символы Кристоффеля преобразуются как тензор лишь в частных случаях, например, при линейных заменах координат. Иногда говорят, что символы Кристоффеля (или ∇) задают на M^n аффинную связность. Если координаты фиксированы, то ∇ представляется как совокупность операций ∇_k — ковариантных дифференцирований по отдельным координатам.

Определение 2. Тензором кручения аффинной связности Γ_{jk}^i называется тензор, задаваемый в каждой системе координат равенством: $\Omega_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$.

Лемма 2. Набор функций Ω_{jk}^i действительно образует тензор.

Доказательство. Используя закон преобразования символов Кристоффеля и альтернируя $\Gamma_{j'k'}^{i'}$ по нижним индексам, получаем, в силу симметрии «нетензорного добавка» по j' и k' формулу

$$\Omega_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \Omega_{jk}^i.$$

Определение 3. Связность (или ковариантное дифференцирование) ∇ называется *симметричной*, если тензор кручения равен нулю.

Связность, введенная нами в \mathbf{R}^n , была симметричной (проверьте!). Кстати, на произвольном M^n символы Кристоффеля уже не обязаны иметь вид вторых частных производных от координат, как это было в \mathbf{R}^n .

Предложение 1. Ковариантное дифференцирование (связность) ∇ удовлетворяет соотношениям:

- 1) операция $\nabla = \{\nabla_k\}$ — линейна;
- 2) для произвольного тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$ набор функций $\nabla_k T_{(j)}^{(i)} = (\nabla T)_{k;(j)}^{(i)}$ образует тензорное поле;
- 3) если тензорное поле — скалярное (т. е. гладкая функция f на M^n), то

$$\nabla f = \{\nabla_k f\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\} = \operatorname{grad} f;$$

4) *операция ∇ на векторных полях T^i имеет вид*

$$\nabla_k T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma_{\alpha k}^i,$$

операция ∇ на ковекторных полях T_i имеет вид

$$\nabla_k T_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_\alpha \Gamma_{ik}^\alpha;$$

5) *операция ∇ удовлетворяет формуле Лейбница:*

$$\nabla_k \{T_{(j)}^{(i)} \cdot P_{(\beta)}^{(\alpha)}\} = (\nabla_k T_{(j)}^{(i)}) \cdot P_{(\beta)}^{(\alpha)} + T_{(j)}^{(i)} (\nabla_k P_{(\beta)}^{(\alpha)}),$$

где $T_{(j)}^{(i)}$ и $P_{(\beta)}^{(\alpha)}$ — произвольные тензорные поля.

Доказательство. Свойства 1)–4) сразу следуют из определения ∇ . Осталось доказать 5). Рассмотрим простейший случай: одно из полей $T_{(j)}^{(i)}$, $P_{(\beta)}^{(\alpha)}$ — скалярное. Тогда 5) вытекает из формулы Лейбница для скалярных функций. Пусть теперь поля T и P — векторные поля T^i , P^j . Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_k (T^i \cdot P^j) &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T^i \cdot P^j) + T^\alpha P^j \Gamma_{\alpha k}^i + T^i P^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j = \\ &= \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^\alpha \Gamma_{\alpha k}^i \right) P^j + T^i \left(\frac{\partial P^j}{\partial x^k} + P^\alpha \Gamma_{\alpha k}^j \right) = \\ &= (\nabla_k T^i) P^j + T^i (\nabla_k P^j). \end{aligned}$$

Доказательство для произвольных полей P и T аналогично предыдущему после замены индексов i, j на мультииндексы $(i), (j)$. ■

Теорема 2. Пусть на M^n задана операция $\nabla = \{\nabla_k\}$, удовлетворяющая 1)–5) (см. Предложение 1). Тогда для произвольного тензорного поля $T_{(j)}^{(i)}$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} \nabla_k T_{(j)}^{(i)} &= \nabla_k T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} (T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha}) + \sum_{q=1}^{\alpha} T_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q=r \dots i_\alpha} \Gamma_{rk}^{i_q} - \sum_{s=1}^p T_{j_1 \dots j_s \dots j_p}^{i_1 \dots i_\alpha=\omega \dots j_s} \Gamma_{j_s k}^\omega, \end{aligned}$$

т. е. ∇ — ковариантное дифференцирование в смысле нашего определения (см. выше). Свойства 1)–5) однозначно задают операцию ∇ , т. е. ее можно вводить аксиоматически с помощью этих свойств.

Доказательство. Действие ∇ на скалярных функциях и на тензорах ранга 1 задано согласно 1)–4). Осталось найти ∇_k на тензорах произвольного типа. Докажем лемму: любое тензорное поле разлагается в линейную комбинацию (с гладкими коэффициентами) произведений полей первого ранга. В самом деле, любое тензорное поле есть полилинейное отображение,

$$T = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

где $e_{i_\alpha}, e^{i_\alpha}$ — поля 1-го ранга и $a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k}$ — гладкие функции. Пусть $\{T_{i_s}^\alpha\}$ — компоненты тензора e_{i_s} , а $T_\beta^{j_s}$ — компоненты e^{j_s} . Тогда

$$T = T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}} \right) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_1} \otimes \dots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_q}$$

где

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = a_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_k} T_{i_1}^{\alpha_1} \dots T_{i_k}^{\alpha_k} T_{\beta_1}^{j_1} \dots T_{\beta_q}^{j_q}.$$

Вернемся к доказательству теоремы. Для простоты рассмотрим случай 2-го ранга (для произвольного поля выкладки аналогичны). В силу линейности ∇ формулу (5) достаточно проверить на моментах $T_{ij} = \alpha(x) T_i P_j$, где $\alpha(x)$ — гладкая функция. По формуле Лейбница (5) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_k(T_{ij}) &= \nabla_k(\alpha(x) T_i P_j) = \frac{\partial \alpha}{\partial x^k} T_i P_j + \alpha \left(\frac{\partial T_i}{\partial x^k} - T_p \Gamma_{ik}^p \right) P_j + \\ &+ \alpha T_i \left(\frac{\partial P_j}{\partial x^k} - P_q \Gamma_{jk}^q \right) = \frac{\partial}{\partial x^k} (T_{ij}) - \Gamma_{ik}^p T_{pj} - \Gamma_{jk}^q T_{iq}, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Определение 4. Пусть ∇ — аффинная связность на M^n . Локальные координаты x^1, \dots, x^n называются евклидовыми для ∇ , если в них $\Gamma_{jk}^i(x) = 0$.

Такие координаты могут и не существовать, например, если ∇ не симметрична. В этом случае Ω_{jk}^i отличен от нуля. Если бы существовали координаты, в которых $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$, то обратился бы в нуль и Ω_{jk}^i , а тогда он был бы тождественным нулем в любых координатах в силу тензорности.

Общее ковариантное дифференцирование никак не связано с римановой метрикой. Риманова метрика и аффинная связность — это различные структуры на M^n . В частности, евклидовы координаты для аффинной связности и евклидовы координаты для метрики g_{ij} (т. е. такие, в которых $g_{ij} = \delta_{ij}$) — это разные понятия.

Пусть теперь на M^n задана метрика g_{ij} . Тогда среди всех аффинных симметричных связностей выделяется одна (и только одна!) связность, согласованная с этой метрикой и полностью определяемая ею. Такие связности называются римановыми.

5.3.2. Римановы связности

Определение 5. Аффинная симметричная связность $\nabla = \{\Gamma_{jk}^i\}$ на римановом многообразии называется *согласованной с метрикой g_{ij}* (или называется *римановой связностью*), если $\nabla(g_{ij}) \equiv 0$.

В силу тензорности ∇ тождество $\{\nabla_k(g_{ij}) = 0\}$ имеет место в любых координатах. Относительно римановой связности тензор g_{ij} — «постоянен» в том смысле, что его ковариантная производная равна нулю. В частности, для любого тензорного поля $T_{(q)}^{(p)}$ имеем $\nabla_k(g_{ij}T_{(q)}^{(p)}) \equiv g_{ij}\nabla_k(T_{(q)}^{(p)})$, см. формулу Лейбница.

Теорема 3. Пусть g_{ij} — риманова метрика на M^n . Тогда существует и единственная симметричная аффинная связность, согласованная с g_{ij} , причем

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Доказательство. Предположим, что существование доказано. Покажем единственность связности. Согласно определению: $\nabla_k(g_{ij}) = 0$. Достаточно доказать, что отсюда однозначно находятся Γ_{jk}^i как функции g_{ij} . Имеем: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $\partial g_{ij}/\partial x^k = g_{\alpha j}\Gamma_{ik}^\alpha + g_{\alpha i}\Gamma_{kj}^\alpha$. Циклически переставляя индексы, получаем

$$+ \begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk} & (ijk) \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij} & (kij) \\ - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki} & (jki), \end{cases}$$

где $\Gamma_{i;jk} = g_{i\alpha}\Gamma_{kj}^\alpha$. Складывая первые два тождества и вычитая третье, получаем

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 2\Gamma_{i;jk} = 2g_{i\alpha}\Gamma_{jk}^\alpha$$

(напомним: $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$). Далее,

$$\Gamma_{jk}^\alpha = \frac{1}{2}g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right).$$

Мы решали здесь систему вида: $g_{\alpha\beta}T^\alpha = Q_\beta$. Так как $g_{\alpha\beta}$ — невырожденный тензор, то существует обратный тензор $g^{\alpha\beta}$, а потому $T^\alpha = g^{\beta\alpha}Q_\beta$.

Итак, если решение исходной системы существует, то оно единственno. Для доказательства существования определим Γ_{jk}^i с помощью полученных выше формул. Повторяя выкладки в обратном порядке, получаем $\nabla_k(g_{ij}) \equiv 0$. Теорема доказана. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть на M^n существуют координаты, в которых $g_{ij} = \delta_{ij}$. Существование такой системы эквивалентно существованию координат, в которых (g_{ij}) становится постоянной матрицей (не зависящей от точки). Тогда линейной заменой эта матрица приводится (одновременно во всех точках окрестности) к виду δ_{ij} . Поэтому координаты можно называть евклидовыми, если в них метрический тензор постоянен. Вернемся к римановой связности.

Предложение 2. *Система координат евклидова с точки зрения римановой связности, согласованной с g_{ij} , тогда и только тогда, когда эти координаты евклидовые с точки зрения g_{ij} (т. е. g_{ij} локально постоянен).*

Доказательство. В самом деле, если g_{ij} локально постоянен, то в силу теоремы 3 $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$. Обратно: если $\Gamma_{jk}^i = 0$, то в силу теоремы 3: $\partial g_{ij}/\partial x^k = g_{\alpha j}\Gamma_{jk}^\alpha + g_{\alpha i}\Gamma_{jk}^\alpha = 0$, т. е. g_{ij} постоянен в этих координатах, что и требовалось. ■

Рассмотрим гладкую гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, заданную графиком: $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$. Пусть $P_0 \in V^{n-1}$ — точка, в которой $T_{P_0}(V^{n-1})$ параллельна плоскости $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$, т. е. $\partial f(P_0)/\partial x^i = 0$. Мы вычисляли g_{ij} относительно таких координат. Имеем: $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i}f_{x^j}$. Отсюда: $\Gamma_{jk}^i(P_0) = 0$ для связности, согласованной с g_{ij} . В окрестности P_0 функции Γ_{jk}^i могут быть ненулевыми.

Риманова связность позволяет корректно определить дивергенцию потока. Отметим, что понятие дивергенции (изменения бесконечно малого объема) предполагает наличие метрики.

Итак, пусть \mathbf{T} — векторное поле на M^n с римановой связностью. Положим: $\text{div}(\mathbf{T}) = \nabla_i T^i$. Ясно, что $\text{div}(\mathbf{T})$ — скалярная функция.

Предложение 3. *Имеет место формула*

$$\text{div}(\mathbf{T}) = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\ln \sqrt{g}),$$

где g — определитель матрицы (g_{ij}) .

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla_i T^i &= \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \Gamma_{\alpha i}^i = \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + T^\alpha \frac{1}{2} g^{ip} \left(\frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p} \right),\end{aligned}$$

Далее

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \frac{\partial T^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} T^\alpha g^{ip} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha},$$

так как

$$g^{ip} \frac{\partial g_{p\alpha}}{\partial x^i} - g^{ip} \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^p} = 0.$$

Мы утверждаем далее, что

$$g^{ip} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = 2 \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\ln \sqrt{g}).$$

Напомним, что $g^{ip} = \Delta_{ip}/g$, где Δ_{ip} — минор, дополнительный к g_{ip} в матрице (g_{ij}) . Отсюда следует, что достаточно проверить соотношение

$$\sum_{(i,p)} \Delta_{ip} \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g}{\partial x^\alpha}.$$

Определитель g есть сумма однородных мономов степени n . Соберем все члены в сумме g , содержащие g_{ip} . Тогда: $g = \dots + g_{ip} \times R_{ip} + \dots$, где R_{ip} — полином степени $n-1$, уже не содержащий g_{ip} . При этом, $R_{ip} = \Delta_{ip}$. Вычисляя $\partial g / \partial x^\alpha$ видим, что $\partial g_{ip} / \partial x^\alpha$ войдет с множителем Δ_{ip} . В другие слагаемые, т. е. в (A_{ip}) , где $(A_{ip}) = g - g_{ip} \Delta_{ip}$, функция g_{ip} не входит. Следовательно, $\partial g / \partial x^\alpha = \sum_{(i,p)} (\partial g_{ip} / \partial x^\alpha) \Delta_{ip}$, что и требовалось. ■

5.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

5.4.1. Предварительные замечания

Рассмотрим гладкое многообразие (не обязательно риманово). Во многих задачах требуется сравнить касательные векторы, приложенные в различных точках. Для произвольного M^n задача сложна по той причине, что $T_x M^n$ и $T_y M^n$ различны. В случае $M^n = \mathbf{R}^n$ имеется операция параллельного переноса, позволяющая сравнивать векторы в разных точках. Формально ее можно определить так. Рассмотрим пару точек P и Q и пусть \mathbf{a} — вектор в точке P . Рассмо-

трем гладкую кривую $\gamma(t)$, такую, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$. Параллельно перенесем a вдоль $\gamma(t)$ так, чтобы начало вектора скользило по $\gamma(t)$. В результате получаем вдоль γ векторное поле $a(t)$, имеющее постоянные компоненты, равные компонентам a в начальный момент. Производные по t от компонент поля $a(t)$ равны нулю. Вектор $a(1)$, возникший в точке Q , не зависит от выбора кривой γ . В этом смысле параллельный перенос в \mathbf{R}^n не зависит от пути.

При переходе к произвольному M^n эта простая схема разрушается, поскольку в общем случае M нельзя покрыть одной картой, т. е. ввести единую систему координат. Предположим сначала, что M^2 гладко вложено в \mathbf{R}^3 и пусть P, Q — близкие точки на M^2 . Пусть $a \in T_P M^2$ и γ — кривая на поверхности из P в Q . Можно предложить такой «параллельный «перенос» на M^2 . Рассмотрим a как вектор из \mathbf{R}^3 и перенесем его параллельно вдоль γ с точки зрения \mathbf{R}^3 . Получится некоторый вектор b в точке Q . Но b уже не обязан лежать в $T_Q M^2$. Поэтому мы спроектируем b на $T_Q M^2$ и назовем его проекцию πb результатом параллельного переноса из P в Q (рис. 5.8). Эта операция не зависит от пути. Однако она корректно определена лишь в малой окрестности точки P . Если мы захотим перенести a «далеко», то может оказаться, что вектор πb окажется нулевым. Например, так произойдет на S^2 (рис. 5.9),

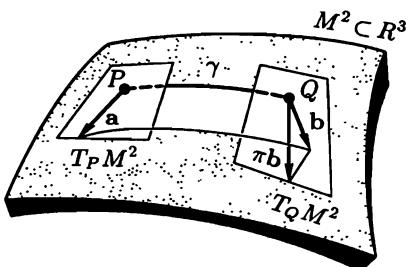


Рис. 5.8

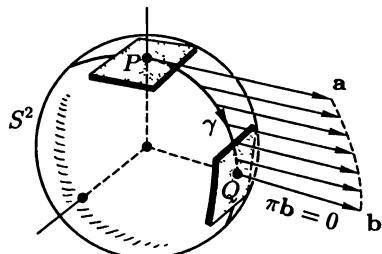


Рис. 5.9

если мы пройдем половину меридиана. «Параллельный перенос», дающий в результате нулевой вектор, следует отвергнуть. Впрочем, можно поступить более аккуратно. Будем двигаться по γ бесконечно малыми шагами и каждый раз ортогонально проектировать получающийся вектор на $T_{\gamma(t)} M^2$. Оказывается, возникает корректный «параллельный перенос» на $M^2 \subset \mathbf{R}^3$. Мы не будем здесь изучать эту операцию детальнее.

Обратим внимание, что при определении параллельного переноса мы вынуждены фиксировать кривую, вдоль которой нужно дви-

гаться. На многообразии общего вида заранее неясно: зависит или нет результат переноса от пути. Может оказаться, что зависит. Пример: параллельный перенос вдоль оси листа Мебиуса (рис. 5.10). В

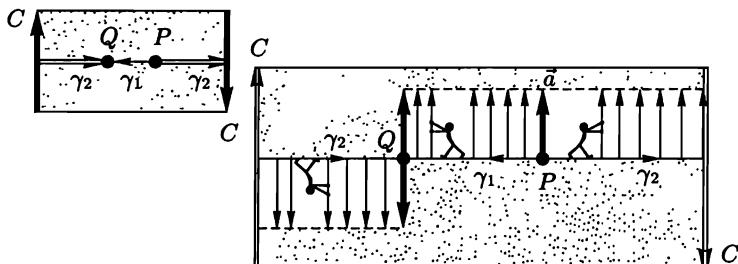


Рис. 5.10

данном случае зависимость переноса от пути есть следствие неориентируемости, однако и на ориентируемом многообразии параллельный перенос будет, вообще говоря, зависеть от пути.

5.4.2. Уравнение параллельного переноса

Положим поэтому в основу понятия параллельного переноса на M^n операцию дифференцирования ∇ .

Пусть P, Q — две точки на M^n , соединенные гладкой или кусочно-гладкой траекторией $\gamma(t)$, такой, что $\gamma(0) = P$ и $\gamma(1) = Q$. Пусть $\dot{\gamma}$ — поле скоростей вдоль $\gamma(t)$. Компоненты этого поля обозначим $\{\xi^k\}$. Пусть на M^n задана аффинная связность $\nabla = \{\nabla_k\}$. Определим ковариантную производную тензорного поля $T = \{T_{(\beta)}^{(\alpha)}\}$ вдоль векторного поля $\dot{\gamma}$ формулой: $\nabla_{\dot{\gamma}}(T) = \{\nabla_{\dot{\gamma}} T_{(\beta)}^{(\alpha)}\}$. Условно будем писать: $\nabla_{\dot{\gamma}} = \xi^k \nabla_k$. Эту операцию назовем *ковариантным дифференцированием вдоль кривой*.

Определение 1. Пусть $\mathbf{T} = \{T^i\}$ — гладкое векторное поле вдоль кривой $\gamma(t)$. Назовем его *параллельным вдоль $\gamma(t)$ относительно связности ∇* , если $\nabla_{\dot{\gamma}}(\mathbf{T}) \equiv 0$.

Другими словами, поле \mathbf{T} , «параллельное вдоль $\gamma(t)$ », имеет ковариантно постоянные компоненты. В этом — аналогия с евклидовым случаем, поскольку общее определение параллельности превращается для $\{\nabla_k = \partial/\partial x^k\}$ в $M^n = \mathbb{R}^n$ в обычный параллельный перенос.

Запишем условие параллельности поля \mathbf{T} в координатах. Имеем

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(T^i) = \xi^k \nabla_k T^i = 0, \quad \xi^k = \frac{dx^k(t)}{dt},$$

$$\frac{dx^k}{dt} \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + T^p \frac{dx^k}{dt} \Gamma_{pk}^i = \frac{dT^i}{dt} + T^p \Gamma_{pk}^i \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Определение 2. Уравнение $dT^i/dt + T^p \Gamma_{pk}^i (dx^k/dt) = 0$ называется *уравнением параллельного переноса вдоль кривой $\gamma(t)$* .

Изменив γ , мы меняем уравнение переноса.

Итак, пусть $\gamma(t)$ — кривая, идущая из P в Q , и

$$\mathbf{a} = \{a^i\} \in T_P M^n$$

— вектор, заданный в P . Наша цель: построить в точке Q вектор $\mathbf{b} \in T_Q M^n$, который естественно назвать «параллельным вектору \mathbf{a} ». Рассмотрим вдоль γ уравнение параллельного переноса. В нем функции Γ_{pk}^i и $dx^i(t)/dt$ известны. Ищем функции $\{T^i(t)\}$ — компоненты параллельного поля $\mathbf{T}(t)$. При этом нужно, чтобы в начальный момент выполнялось условие $T^i(0) = a^i$. Как известно из курса обыкновенных дифференциальных уравнений, решение системы $dT^i/dt + T^p \Gamma_{pk}^i (dx^k/dt) = 0$ существует, единственно и продолжается вплоть до Q .

Определение 3. Вектор $\mathbf{b} = \mathbf{T}(1) \in T_Q M^n$, возникающий в Q , называется *параллельным* вектору $\mathbf{a} \in T_P M^n$ вдоль кривой $\gamma(t)$.

Ясно, что \mathbf{b} зависит, вообще говоря, от γ . В случае $M^n = \mathbf{R}^n$ вектор \mathbf{b} параллелен \mathbf{a} в обычном смысле, если в качестве ∇ взять евклидову связность: $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$.

Рассмотрим свойства параллельного переноса на римановом M^n в римановой связности $\bar{\nabla}$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P M^n$ и $\gamma(t)$ — гладкая кривая из P в Q . Перенесем векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} параллельно вдоль $\gamma(t)$. Тогда скалярное произведение векторов сохраняется, т. е. если $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ — параллельные поля вдоль $\gamma(t)$, $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}$, то $d/dt \langle \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t) \rangle \equiv 0$, где \langle , \rangle — скалярное произведение в $T_{\gamma(t)} M^n$, порожденное g_{ij} .

Доказательство. Включим \mathbf{a} и \mathbf{b} в параллельные поля: $\mathbf{T} = \mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{R} = \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{T}(0) = \mathbf{a}$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{b}$. Рассмотрим функцию $f(t) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{R} \rangle_{\gamma(t)} = (g_{ij} T^i R^j)(t)$, т. е. скалярное произведение вдоль $\gamma(t)$. Дифференцируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \nabla_{\dot{\gamma}} f(t) = \xi^k \nabla_k (g_{ij} T^i R^j) = \\ &= \xi^k g_{ij} \nabla_k (T^i R^j) = g_{ij} R^j (\xi^k \nabla_k T^i) + g_{ij} T^i (\xi^k \nabla_k R^j) \equiv 0, \end{aligned}$$

так как $\nabla_{\dot{\gamma}}(\mathbf{T}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\mathbf{R}) = 0$. ■

Верно и обратное: если на римановом M^n дана симметричная аффинная связность, в которой параллельный перенос вдоль любой

кривой сохраняет скалярное произведение, то эта связность — риманова. В самом деле, обращаясь к доказательству теоремы 1, получаем

$$\xi^k T^i R^j (\nabla_k g_{ij}) \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad \nabla_k g_{ij} \equiv 0.$$

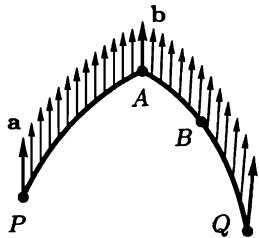


Рис. 5.11

Хотя мы рассматривали гладкие кривые, однако легко определить перенос и вдоль кусочно-гладких кривых. Пусть на $\gamma(t)$ есть изолированная точка излома (рис. 5.11). Пересядя вдоль $\gamma(t)$ вектор a , сначала получим в A вектор b , параллельный a . При-

мем b за начальный вектор нового параллельного поля уже вдоль участка AB и повторим процесс.

5.4.3. Геодезические

Определение 4. Пусть M^n снабжено аффинной связностью (наличие метрики не предполагается). Гладкая кривая $\gamma(t)$ называется *геодезической в данной связности* ∇ , если $\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = 0$, где $\dot{\gamma}$ — векторное поле скорости траектории $\gamma(t)$.

Иными словами, геодезическая — это траектория, поле скоростей которой параллельно вдоль нее, т. е. при параллельном переносе ее вектор скорости переходит в вектор скорости. Выведем уравнение геодезических.

Имеем:

$$0 = \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) \quad \text{и, поскольку} \quad T^i = \frac{dx^i}{dt}, \quad \text{то}$$

$$\frac{dT^i}{dt} + T^\alpha T^k \Gamma_{\alpha k}^i = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha k}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Мы получили *уравнения геодезических*. Их решения — это функции $x^1(t), \dots, x^n(t)$, задающие геодезическую $\gamma(t)$. Это система n уравнений второго порядка в обыкновенных производных. Ее решение однозначно задается начальными данными: $x^i(0) = P^i$ и $dx^i(0)/dt = a^i$, $a \in T_P M^n$. Итого — $2n$ постоянных: n из них определяют точку P , а другие n задают вектор скорости в этой точке. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений сразу следует

Предложение 1. Пусть $P \in M^n$, и $a \in T_P M^n$. Тогда существует и единственна геодезическая $\gamma(t)$, такая, что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = a$.

СЛЕДСТВИЕ. Две геодезические, коснувшиеся друг друга в некоторой точке, совпадают.

Рассмотрим теперь риманово M^n и риманову связность ∇ . Пусть γ — геодезическая, $\dot{\gamma}$ — поле скоростей, T — векторное поле,

параллельное вдоль γ . Тогда в каждой точке $\gamma(t)$ возникает число $\cos \alpha(t) = \langle \mathbf{T}, \dot{\gamma} \rangle / (|\mathbf{T}| \cdot |\dot{\gamma}|)$, где $\alpha(t)$ — угол между векторами \mathbf{T} и $\dot{\gamma}$.

Лемма 1. При параллельном переносе вектора \mathbf{T} вдоль геодезической γ угол α сохраняется: $\alpha(t) \equiv \text{const}$.

Доказательство. В силу теоремы 1 сохраняются скалярные произведения и длины векторов. ■

В двумерном случае сохранение угла однозначно задает параллельный перенос вдоль геодезической. Пусть γ — геодезическая и $\mathbf{a} \in T_P M^2$ (рис. 5.12). Тогда параллельное поле $\mathbf{T}(t)$, такое, что $\mathbf{T}(0) = \mathbf{a}$, образовано векторами, имеющими ту же длину, что и \mathbf{a} , и образующими с вектором $\dot{\gamma}(t)$ один и тот же угол α , равный углу между \mathbf{a} и $\dot{\gamma}(0)$. Теперь можно определить параллельный перенос вдоль любой кусочно-гладкой кривой γ . Апроксимируем γ ломаной геодезической, составленной из малых геодезических отрезков. Затем перенесем вектор вдоль каждого из них, используя постоянство угла. Потом перейдем к пределу, устремляя к нулю длину геодезических отрезков. При параллельном переносе вдоль траектории, не являющейся геодезической, угол, образуемый переносимым вектором с ее вектором скорости, будет, вообще говоря, меняться. Рассмотрим примеры.

1) Если $M^n = \mathbb{R}^n$, то параллельный перенос вдоль кривой совпадает с обычным: параллельное поле имеет постоянные компоненты относительно декартовых координат.

2). Пусть M^2 — прямой круговой конус в \mathbb{R}^3 с углом при вершине, равным θ (рис. 5.13). Мы считаем, что вершина «выколота».

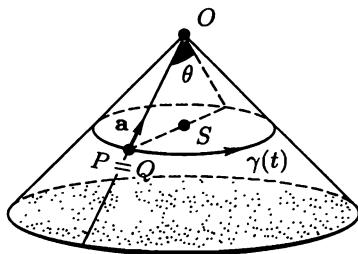


Рис. 5.13

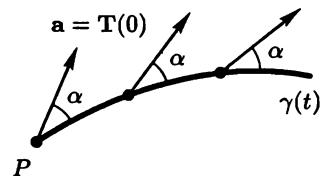


Рис. 5.12

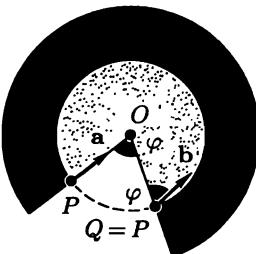


Рис. 5.14

Пусть $\gamma(t)$ — сечение конуса плоскостью, ортогональной оси. Пусть $OP = r$, $\mathbf{a} \in T_P M^2$ направлен в вершину конуса. Перенесем этот

вектор параллельно вдоль $\gamma(t)$ и вернемся в точку P . На какой угол повернется вектор? Используем связность, согласованную с индуцированной метрикой на конусе. Так как она евклидова, то конус можно развернуть на плоскость, разрезав его вдоль образующей. Достаточно найти поворот a при его параллельном переносе на \mathbf{R}^2 вдоль дуги окружности (рис. 5.14). Легко подсчитать, что угол поворота φ равен $2\pi(1 - \sin(\theta/2))$.

Укажем геометрический смысл символов (коэффициентов) Кристоффеля с точки зрения параллельного переноса. Найдем $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$, где ∂_α и ∂_β — координатные векторные поля координат x^1, \dots, x^n на M^n . Тензор $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)$ снова — векторное поле.

Лемма 2. Имеет место тождество $\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma_{\beta\alpha}^k \partial_k$.

Доказательство. Имеем

$$[\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta)]^k = a_\alpha^q \nabla_q(T_\beta^k),$$

где

$$\partial_\alpha = \{a_\alpha^q = \delta_\alpha^q\}; \quad \partial_\beta = \{T_\beta^k = \delta_\beta^k\};$$

$$a_\alpha^q \nabla_q(T_\beta^k) = a_\alpha^q \left(\frac{\partial}{\partial x^q} T_\beta^k + T_\beta^\omega \Gamma_{\omega q}^k \right) = \delta_\alpha^q \delta_\beta^k \Gamma_{\omega q}^k = \Gamma_{\beta\alpha}^k;$$

т. е.

$$\nabla_{\partial_\alpha}(\partial_\beta) = \Gamma_{\beta\alpha}^k \partial_k.$$

Лемма доказана. ■

Это утверждение можно понимать так. Сделаем бесконечно малый перенос ∂_β вектора в направлении ∂_α . При этом ∂_β как-то «повернется», и коэффициенты его разложения по $\partial_1, \dots, \partial_n$ как раз и равны $\Gamma_{\beta\alpha}^k$.

3) Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$ отнесено к декартовым координатам x^1, \dots, x^n . Тогда $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$. Уравнения геодезических имеют вид

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad x^\alpha = a^\alpha t + b^\alpha.$$

Итак, геодезические — прямые линии и только они.

4) Пусть $M^2 = S^2$ со стандартной метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta \times d\varphi^2$ в сферических координатах. Найдем геодезические. Прямой подсчет дает (проверьте!): $\Gamma_{22}^1 = -1/2 \sin 2\theta$; $\Gamma_{12}^2 = \operatorname{ctg} \theta$; $\Gamma_{jk}^i = 0$ для всех остальных наборов индексов (i, j, k). Здесь $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$; $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = \sin^2 \theta$. Отсюда уравнения геодезических имеют вид: $d^2\theta/dt^2 - 1/2 \sin 2\theta (d\varphi/dt)^2 = 0$, $d^2\varphi/dt^2 + \operatorname{ctg} \theta (d\varphi/dt)(d\theta/dt) = 0$. Одно из решений имеет вид: $\varphi = \operatorname{const}$,

$\theta = t$. Это — меридиан, выходящий из северного полюса, отнесенный к параметру $\theta = t$ — длине дуги.

Предложение 2. Пусть S^2 снабжена стандартной метрикой. Тогда геодезическими римановой связности являются все центральные плоские сечения сферы (экваторы) и только они.

Доказательство. Сначала докажем, что любое центральное плоское сечение S^2 — геодезическая (относительно натурального параметра). Для одного меридиана γ_0 это уже доказано. Рассмотрим произвольный «экватор» γ . Очевидно существует вращение, переводящее γ в γ_0 .

Лемма 3. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ — изометрия риманова многообразия M^n и γ — геодезическая римановой связности. Тогда образ γ при изометрии f — также является геодезической.

Изометрия сохраняет риманову связность, а потому сохраняет и уравнения геодезических, т. е. f переводит решение системы снова в решение системы, что и требовалось. ■

Возвращаясь к доказательству предложения 2, получаем, что γ — геодезическая. Обратно: пусть γ — геодезическая на S^2 . Рассмотрим в произвольной точке γ ее вектор скорости $\dot{\gamma}$ и проведем через эту точку в направлении вектора экватор (через любую точку S^2 в любом направлении проходит один и только один экватор) (рис. 5.15). Так как γ и экватор — решения одной и той же системы, то, касаясь, они совпадают. ■

5) Пусть $M^2 = L_2$ — плоскость Лобачевского со стандартной метрикой $ds^2 = d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\varphi^2$. Напомним, что в модели Пуанкаре метрика имеет вид $(1 - r^2)^{-2}(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$. Найдем геодезические.

Предложение 3. Геодезическими плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре являются все дуги окружностей, выходящих на абсолюте под прямым углом (в частности, все диаметры), и только они.

Так как метрика L_2 получается из метрики S^2 заменой тригонометрических функций на гиперболические, то: $\Gamma_{22}^1 = -1/2 \operatorname{sh}(2\chi)$; $\Gamma_{12}^2 = \operatorname{cth} \chi$; $\Gamma_{jk}^i = 0$ для всех остальных индексов (i, j, k); здесь $x^1 = \chi$, $x^2 = \varphi$. Отсюда $d^2 \chi / dt^2 - 1/2 \operatorname{sh}(2\chi)(d\varphi/dt)^2 = 0$, $d^2 \varphi / dt^2 + \operatorname{cth} \chi (d\varphi/dt)(d\chi/dt) = 0$. Одно из решений имеет вид: $\varphi = \text{const}$, $\chi = t$ — прямая, проходящая через точку 0 на плоскости. Так как (χ, φ) «обслуживают» в то же время правую полость гиперболоида — псевдосфера мнимого радиуса, то при стереографической проекции «прямая» с уравнением $\varphi = \varphi_0$, $\chi = t$ перейдет в диа-

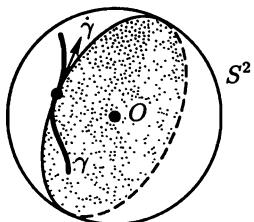


Рис. 5.15

метр единичного круга. Мы доказали, что один из диаметров γ_0 на модели Пуанкаре — геодезическая.

Докажем, что любая дуга окружности, ортогональная абсолюту, — геодезическая. Используем лемму 3. Надо доказать, что любая такая окружность переводится изометрией в γ_0 . Перейдем к модели на верхней полуплоскости с метрикой $(dx^2 + dy^2)/y^2$. Напомним, что существует изометрия (дробно-линейное преобразование), переводящая единичный круг в полуплоскость. При этом граница круга переходит в вещественную ось, а диаметр γ_0 — в прямую, ортогональную вещественной оси (рис. 5.16). Можно считать, что ось

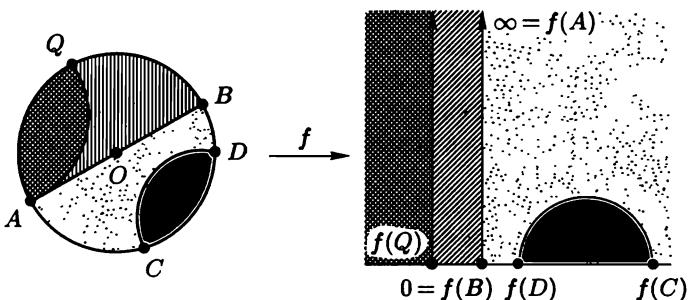


Рис. 5.16

OY на полуплоскости является геодезической, поскольку она — образ диаметра γ_0 при изометрии. Тогда любая прямая, ортогональная вещественной оси, — геодезическая, так как сдвиг $z \rightarrow z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, — изометрия. Отсюда следует, что любая дуга окружности, выходящая под прямым углом на ось OX , — геодезическая, так как переводится в ось OY дробно-линейным преобразованием: сначала сдвиг $z \rightarrow z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, затем $z \rightarrow -z/(z - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Доказано, что все прямые, ортогональные вещественной оси, и все дуги окружностей, встречающих ось OX под прямым углом, — геодезические. Пусть теперь γ — произвольная геодезическая. Докажем, что она совпадает с уже описанными геодезическими. Возьмем на γ точку P и рассмотрим вектор $\dot{\gamma}$. Проведем через P дугу окружности,ирующую абсолют под прямым углом и имеющую тот же вектор скорости (рис. 5.17). Как мы уже знаем, γ совпадает с этой дугой. Доказательство завершено.

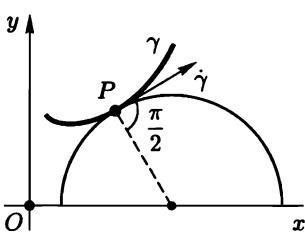


Рис. 5.17

дем через P дугу окружности,ирующую абсолют под прямым углом и имеющую тот же вектор скорости (рис. 5.17). Как мы уже знаем, γ совпадает с этой дугой. Доказательство завершено.

Покажем, как параллельно переносится вектор на плоскости Лобачевского вдоль прямой, параллельной оси Ox . Это — не геодезическая. Аппроксимируем γ ломаной геодезической (рис. 5.18). Качественная картина параллельного переноса a показана на рис. 5.19. Переносимый вектор вращается вокруг своего начала.

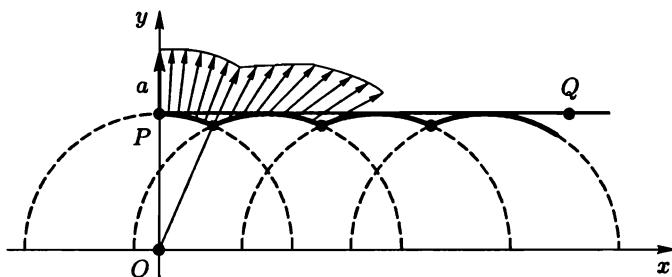


Рис. 5.18

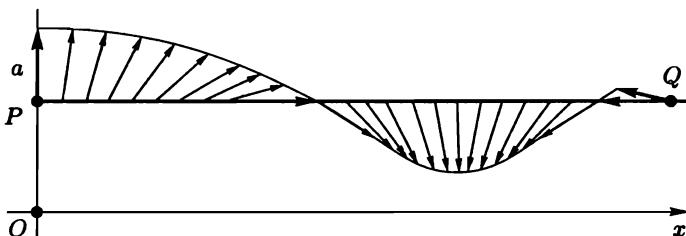


Рис. 5.19

ЗАМЕЧАНИЕ. Геодезические на плоскости Лобачевского можно найти, проинтегрировав уравнения геодезических. Это удобно выполнить на верхней полуплоскости. Символы Кристоффеля имеют вид (проверьте!): $\Gamma_{12}^1 = 1/y$; $\Gamma_{11}^2 = -1/y$; $\Gamma_{22}^2 = 1/y$; остальные равны нулю. Уравнения геодезических $\ddot{x} = 2\dot{x}\dot{y}/y$, $\ddot{y} = (\dot{y}^2 - \dot{x}^2)/y$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{x}^3} = -\frac{1}{y}(y_x'^2 + 1); \\ yy'' + y'^2 &= -1; \quad (yy')' = -1; \\ yy' &= -x + C; \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + Cx + \frac{D}{2}; \\ (x - C)^2 + y^2 &= C^2 + D. \end{aligned}$$

Если $\dot{x} = 0$, то получаем прямые, ортогональные вещественной оси. Если $\dot{x} \neq 0$, то получаем окружности, ортогональные абсолюту.

ЗАМЕЧАНИЕ. Перенести параллельно вектор \mathbf{a} вдоль плоского (не центрального) сечения S^2 (рис. 5.20).

6) Пусть $M^2 = T^2$ — двумерный тор с локально евклидовой метрикой. Рассмотрим на окружностях $S^1(\varphi)$ и $S^1(\psi)$ углы φ и ψ . Они

будут координатами на торе, в которых метрика примет вид: $d\varphi^2 + d\psi^2$. Ее можно представить как индуцированную евклидовой метрикой из \mathbb{R}^4 при вложении T^2 в $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$ по формуле: $f(\varphi, \psi) \rightarrow (e^{i\varphi}, e^{i\psi})$. Так как $ds^2(\mathbb{R}^4) = dz d\bar{z} + dw d\bar{w}$, то $ds^2(T^2) = d\varphi^2 + d\psi^2$.

Поскольку в евклидовой метрике $\Gamma_{jk}^i = 0$, то геодезические на торе — это образы прямых плоскости $\mathbb{R}^2(\varphi, \psi)$ при ее факторизации $h: \mathbb{R}^2(\varphi, \psi) \rightarrow T^2(\varphi, \psi)$, $h(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) \bmod 2\pi$, т. е. $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (рис. 5.21). Других геодезических на торе нет. Геодезические разбиваются на два класса: замкнутые и незамкнутые. Их

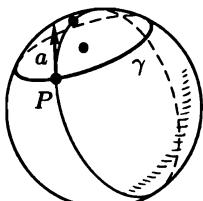


Рис. 5.20

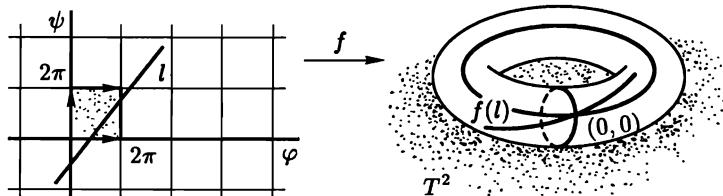


Рис. 5.21

удобно изображать прямыми на $\mathbb{R}^2(\varphi, \psi)$ с отмеченной решеткой $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = (2\pi m, 2\pi n)$; $m, n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим прямые, выходящие из точки 0. Ясно, что соответствующая геодезическая на торе замкнута

тогда и только тогда, когда прямая встречает какую-либо «целую» точку $(2\pi m, 2\pi n)$. Напротив, геодезическая на T^2 незамкнута (гомеоморфна прямой) тогда и только тогда, когда соответствующая прямая не содержит «целых» точек, кроме точки 0. Выразим это в терминах тангенса угла наклона прямой к оси OX . Геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда $\operatorname{tg} \alpha$ (рис. 5.22) — ра-

ционален. Геодезическая незамкнута, если $\operatorname{tg} \alpha$ иррационален. На рис. 5.22 показана прямая, проходящая через точку $(2\pi \cdot 3, 2\pi \cdot 2)$.

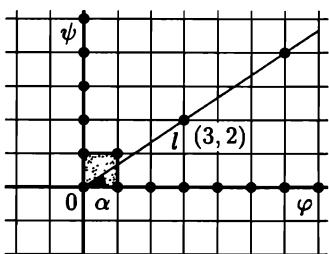


Рис. 5.22

После факторизации мы получим на квадрате $0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ образ этой прямой (рис. 5.23).

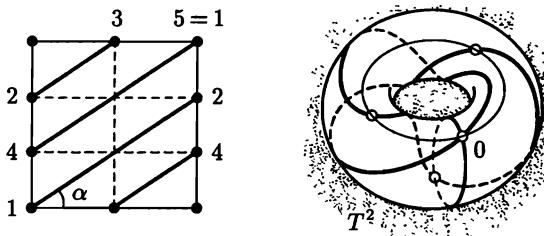


Рис. 5.23

На рис. 5.23 показана также соответствующая геодезическая на торе (окружность). Если тангенс иррационален, то геодезическая порождает «иррациональную обмотку» тора, т. е. ее замыканием является весь тор.

Опишем некоторые применения геодезических.

Теорема 2. Пусть M^2 — одно из следующих многообразий: плоскость \mathbb{R}^2 , сфера S^2 , плоскость Лобачевского L_2 , со стандартными метриками. Пусть $\mathfrak{G} = \text{Iso}(M^2)$ — группа всех изометрий M^2 . Тогда каждое преобразование $g \in \mathfrak{G}$ задается тремя непрерывными параметрами, т. е. $\dim \mathfrak{G} = 3$.

Здесь \mathfrak{G} — полная группа изометрий, т. е. группа диффеоморфизмов, сохраняющих метрику. Группа $\mathfrak{G} = \text{Iso}(M^n)$ определяется для любого гладкого риманова многообразия. Она является топологическим пространством: два преобразования g_1, g_2 считаются близкими, если они близки как диффеоморфизмы M^n , т. е. для всех точек $x \in M^n$ близки точки $g_1(x), g_2(x)$.

Теорема 2 вытекает из общего утверждения, которое мы докажем в частном случае.

Пусть M^n — компактное гладкое риманово связное замкнутое многообразие и $\mathfrak{G} = \text{Iso}(M^n)$. Тогда $\dim \mathfrak{G} \leq n(n+1)/2$, т. е. каждое преобразование $g \in \mathfrak{G}$ задается не более чем $n(n+1)/2$ непрерывными параметрами.

Мы докажем эту теорему только для указанных трех многообразий, хотя большая часть рассуждений верна для многообразий общего вида.

Доказательство. Пусть $x_0 \in M^n$ и $H(x_0) \subset \mathfrak{G}$ — множество изометрий, оставляющих x_0 на месте. Ясно, что $H(x_0)$ — подгруппа. Она называется *стационарной подгруппой точки* x_0 . Пусть $h \in H(x_0)$. Так как $h(x_0) = x_0$, то $dh(x_0) : T_{x_0} M^n \rightarrow T_{x_0} M^n$.

Построим отображение $\lambda: H(x_0) \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$, положив $\lambda(h) = dh(x_0)$. Ясно, что $dh \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$, так как h — диффеоморфизм. Далее, λ отображает $H(x_0)$ в подгруппу $O(n) \subset \text{GL}(n; \mathbb{R})$. В самом деле, можно считать, что в окрестности x_0 выбраны координаты, такие, что $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$; тогда $g_{ij}(x_0)$ определяет в $T_{x_0} M^n$ евклидову метрику. Так как h — изометрия, то $dh(x_0)$ сохраняет евклидово скалярное произведение в $T_{x_0} M^n$. Далее: λ — гомоморфизм $H(x_0)$ в $O(n)$. В самом деле: $\lambda(h_1 \circ h_2) = d(h_1 \circ h_2)(x_0) = dh_1(x_0) \circ dh_2(x_0)$.

Более того, λ — мономорфизм. В самом деле, допустим, что $dh = E$, т. е. тождественно. Надо доказать, что $h(x) = x$ для любого $x \in M^n$. Воспользуемся тем, что M^n — одно из многообразий: S^2, \mathbb{R}^2, L_2 . На каждом из них любая пара точек соединяется геодезической. На плоскости и сфере утверждение очевидно. Если $M^2 = L_2$,

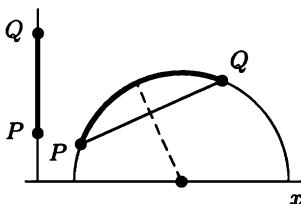


Рис. 5.24

то рассмотрим верхнюю полуплоскость. Построение искомой геодезической см. на рис. 5.24.

Итак, пусть $dh(x_0) = E$. Соединим геодезической $\gamma(t)$ произвольную точку $x \in M^n$ с x_0 . Пусть $\dot{\gamma}(0)$ — ее вектор скорости в точке x_0 . Так как h — изометрия, то образ γ при действии h — геодезическая. Поскольку $dh(x_0) = E$, то геодезическая $\gamma_1 = h(\gamma)$ имеет в x_0 тот же вектор скорости, что и γ . Две касающиеся геодезические совпадают. Так как γ можно отнести к натуральному параметру, то h не меняет его вдоль γ , а потому x остается на γ на прежнем расстоянии от x_0 , т. е. $h(x) = x$, что и требовалось. Итак, $H(x_0)$ — замкнутая подгруппа в $O(n)$. Замкнутость $H(x_0)$ вытекает из того, что изометрия, являющаяся пределом изометрий, сохраняющих x_0 , сама сохраняет x_0 . Итак, для $M^2 = S^2, \mathbb{R}^2, L_2$ имеем: $\dim H(x_0) \leq \dim O(2) = 1$. Для общего M^n можно показать, что $\dim H(x_0) \leq \dim O(n)$, т. е. $\dim H(x_0) \leq n(n - 1)/2$. Рассмотрим теперь группу \mathfrak{G} .

Предложение 4. Любая изометрия $g \in \mathfrak{G}$ определяется образом $g(x_0)$ точки x_0 , и дифференциалом $dg(x_0): T_{x_0} M^n \rightarrow T_{g(x_0)} M^n$.

В самом деле, рассмотрим соответствие: $g \rightarrow (g(x_0); dg(x_0))$ и пусть $(g_1(x_0); dg_1(x_0)) = (g_2(x_0); dg_2(x_0))$. Отсюда $g_1(x_0) = g_2(x_0)$, $dg_1(x_0) = dg_2(x_0)$; тогда рассмотрим $g = (g_1^{-1}) \circ g_2$. Очевидно, что $g \in H(x_0)$. Далее: $dg(x_0) = ((dg_1)^{-1} \circ (dg_2))(x_0) = E$. Отсюда $g \equiv E$ на M^n , т. е. $g_1(x) \equiv g_2(x)$. Так как $g(x_0)$ определяется n параметрами, а $dg(x_0)$ задается не более чем $n(n - 1)/2$ параметрами, то g может быть задано не более чем $n(n + 1)/2$ параметрами. Для

$M^2 = S^2, R^2, L_2$ имеем: $\dim \mathfrak{G} \leqslant 3$. С другой стороны, как было показано в гл. 4, каждая из групп $\text{Iso}(R^2)$, $\text{Iso}(S^2)$, $\text{Iso}(L_2)$ содержит трехмерную подгруппу. Так как эти подгруппы открыты и замкнуты, то для $M^2 = S^2, R^2, L_2$ имеем: $\dim \text{Iso}(M^2) = 3$. Теорема доказана. ■

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\text{Iso}(M^n)_0$ — связная компонента единицы в $\text{Iso}(M^n)$; тогда $\text{Iso}(M^2)_0$ для $M^2 = S^2, R^2, L_2$ совпадает с теми трехмерными группами, которые построены в гл. 4; т. е. $\text{Iso}(S^2)_0 = = \text{SO}(3)$; $\text{Iso}(L_2)_0 = \text{SL}(2; R)/Z_2$; $\text{Iso}(R^2)_0$ совпадает с группой всех линейных изометрий плоскости, сохраняющих ориентацию.

Следующую теорему мы сообщим без доказательства.

Лемма 4. Для каждой точки P_0 на римановом M^n существует окрестность U и число $\varepsilon > 0$, такие, что: (а) каждые две точки из U соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше ε ; (б) эта геодезическая гладко зависит от своих концов и целиком лежит в этой окрестности.

Отсюда несложно вывести следующий факт.

Теорема 3. Любое двумерное гладкое, компактное, связное, замкнутое многообразие триангулируемо.

Доказательство. Снабдим M^2 римановой метрикой (например, вложим M^2 в евклидово пространство). Так как M^2 — компактно и замкнуто, то его можно покрыть конечным числом малых дисков. В силу леммы 4 можно считать, что в каждом из них любая пара точек соединяется единственной геодезической длины, не превосходящей ε . Покрыв M^2 достаточно плотной сетью точек $\{P_i\}$, соединим геодезическими точки, попавшие внутрь какого-либо диска покрытия, и в результате разобьем диски на треугольники, удовлетворяющие требованиям триангуляции. ■

5.5. ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

5.5.1. Предварительные замечания

Рассмотрим M^n (не обязательно риманово) с симметричной аффинной связностью ∇ . Как мы видели, связность определяет параллельный перенос. Как измерить отклонение связности от евклидовой? Как узнать — существуют ли локальные евклидовы координаты? Иными словами, как оценить «искривленность» многообразия? Если связность допускает евклидовы координаты, то в них тензоры дифференцируются обычным образом, поскольку ковариантное дифференцирование совпадает с обычным частным дифференцированием. Из анализа мы знаем важное свойство частных произ-

водных — они коммутируют. Поэтому в евклидовых координатах $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k = 0$. Если же M^n — произвольно, то этот дифференциальный оператор, вообще говоря, отличен от нуля. Оказывается, он хорошо измеряет «искривленность» многообразия.

5.5.2. Координатное определение тензора кривизны

Рассмотрим на M^n локальные координаты x^1, \dots, x^n и оператор $\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k$. Применим его к полю $\mathbf{T} = \{T^i\}$. Связность ∇ симметрична, поэтому:

$$\begin{aligned} \nabla_l T^i &= \frac{\partial T^i}{\partial x^l} + T^p \Gamma_{pl}^i; \\ \nabla_k \nabla_l (T^i) &= \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i + T^p \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{pl}^i) + \nabla_l (T^p) \Gamma_{pk}^i - \\ &- \nabla_p (T^i) \Gamma_{kl}^p = \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial T^p}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i + T^p \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{pl}^i) + \frac{\partial T^p}{\partial x^l} \Gamma_{pk}^i + \\ &+ T^q \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \frac{\partial T^i}{\partial x^p} \Gamma_{kl}^p - T^q \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p; \\ (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i &= T^p \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{pl}^i - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{pk}^i \right] - \\ &- (\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p) \frac{\partial T^i}{\partial x^p} + T^q [\Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i - \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p + \Gamma_{qp}^i \Gamma_{kl}^p]. \end{aligned}$$

Так как $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, то $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) T^i = T^q R_{q,kl}^i$, где

$$R_{q,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i.$$

Лемма 1. Функции $R_{q,kl}^i$ образуют тензор 4-го ранга.

Доказательство. Оно очевидно, так как $\nabla = \{\nabla_k\}$ — тензорная операция. ■

Определение 1. Тензор $R_{q,kl}^i$ называется *тензором кривизны Римана данной связности* ∇ .

Если $M^n = \mathbb{R}^n$, то этот тензор очевидно равен нулю. Напомним, что координаты — евклидовы для данной связности, если в них $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$. Отсюда следует:

Лемма 2. Пусть M^n снабжено симметричной аффинной связностью. Если ее тензор кривизны Римана отличен от нуля (в какой-то системе координат), то на M^n нельзя ввести локально евклидовы координаты.

Если бы такие координаты нашлись, то в них аннулировались бы Γ_{jk}^i , а потому тензор кривизны также обратился бы в нуль.

5.5.3. Инвариантное определение тензора кривизны

Пусть X, Y, Z – произвольные гладкие векторные поля на M^n с симметричной аффинной связностью. Построим «оператор кривизны» R , сопоставляющий тройке X, Y, Z новое векторное поле. Удобно трактовать поля как линейные дифференциальные операторы. Это обстоятельство будем указывать так: вместо X напишем просто X .

Определение 2. Положим: $R(X, Y)(Z) = \nabla_X \nabla_Y(Z) - \nabla_Y \times \nabla_X(Z) - \nabla_{[X, Y]}(Z)$. Тогда R переводит $T_x \times T_x \times T_x$ в T_x .

Теорема 1. Отображение R трилинейно и потому задает тензор четвертого ранга.

Доказательство. Если рассмотреть линейные комбинации полей с постоянными коэффициентами, то трилинейность очевидна. Осталось доказать, что за знак операции R можно выносить гладкую функцию $f(x)$. Начнем со случая: $R(XY)(fZ) = f \times R(X, Y)Z$. Имеем

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y(fZ) - \nabla_Y \nabla_X(fZ) - \nabla_{[X, Y]}(fZ) &= \nabla_X((\nabla_Y f)Z) + \\ &+ \nabla_X(f \nabla_Y Z) - \nabla_Y((\nabla_X f)Z) - \nabla_Y(f \nabla_X Z) - (\nabla_{[X, Y]} f)Z - \\ &- f \nabla_{[X, Y]} Z = (\nabla_X \nabla_Y f)Z + (\nabla_Y f) \nabla_X Z + (\nabla_X f) \nabla_Y Z + \\ &+ f(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y \nabla_X f)Z - (\nabla_X f) \nabla_Y Z - (\nabla_Y f) \nabla_X Z - \\ &- f(\nabla_Y \nabla_X Z) - (\nabla_{[X, Y]} f)Z - f(\nabla_{[X, Y]} Z) = \\ &= \{(X(Yf) - Y(Xf) - (XY - YX)f\}Z + \\ &+ f\{\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z\} = 0 + f \cdot R(X, Y)Z, \end{aligned}$$

так как $\nabla_X f = X(f)$. Теперь проверим, что: $R(fX, Y)Z = f \times R(X, Y)Z$. Имеем

$$R(fX, Y)Z = \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX, Y]} Z.$$

Ясно, что $\nabla_{fX} = f \nabla_X$. Далее

$$[fX, Y] = f(XY) - Y(fX) = f[X, Y] - (Yf)X.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f(\nabla_X \nabla_Y Z) - \nabla_Y(f \nabla_X Z) - \nabla_{[fX, Y]} Z + \nabla_{(Yf)X} Z = \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y f) \nabla_X Z - f(\nabla_Y \nabla_X Z) - f \nabla_{[X, Y]} Z + \\ &+ (Yf) \nabla_X Z = f \cdot R(X, Y)Z, \end{aligned}$$

что и требовалось. Соотношение $R(X, fY)Z = f \cdot R(X, Y)Z$ проверяется аналогично. ■

Связем инвариантное и координатное определения тензора кривизны. Введем базисные поля ∂_i (как дифференциальные операторы). Тогда $X = X^i \partial_i$; $Y = Y^j \partial_j$; $Z = Z^k \partial_k$. Получаем: $R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k \cdot \{R(\partial_i, \partial_j) \partial_k\}$. Далее

$$R(\partial_i, \partial_j)Z = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} Z - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} Z.$$

Ясно, что $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$, т. е. $R(\partial_i, \partial_j)Z = (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)Z - \nabla_{[\partial_i, \partial_j]} Z$. Так как $[\partial_i, \partial_j] = 0$, то $R(\partial_i, \partial_j)Z = (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)Z$, что и требовалось.

5.5.4. Алгебраические свойства тензора кривизны Римана

Теорема 2. Для любых трех гладких полей X, Y, Z на M^n выполняются тождества:

1) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$; $R_{j,kl}^i + R_{j,kl}^i = 0$; т. е. косая симметрия по аргументам X, Y .

2) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$, т. е. тождество Якоби; в координатах: $R_{j,kl}^i + R_{l,jk}^i + R_{kl,j}^i = 0$.

3) Если связность риманова, то $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$ для любых полей X, Y, Z, W ; здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, порожденное метрикой g_{ij} ; в координатах: $R_{ij,kl} + R_{ji,kl} = 0$, где $R_{ij,kl} = g_{ia}R_{j,kl}^a$.

4) Если связность риманова, то $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$, т. е. $R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$.

Доказательство.

1) Первый пункт очевиден.

2) Сначала докажем, что для симметричной связности: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. В самом деле:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y - \nabla_Y X &= X^i \nabla_i Y - Y^i \nabla_i X = \\ &= \left\{ X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} = [X, Y], \end{aligned}$$

так как $Y^i X^p \Gamma_{ip}^k = Y^p X^i \Gamma_{pi}^k$; $\Gamma_{pi}^k = \Gamma_{ip}^k$. Если X и Y коммутируют, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.

В силу теоремы 1 достаточно проверить тождество Якоби только на коммутирующих полях. Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \\ - \nabla_{[Z,X]} Y + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \equiv 0. \end{aligned}$$

3) Достаточно проверить, что $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$. Снова считаем, что $[X, Y] = 0$. Тогда $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle ((\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X)Z, Z) \rangle$.

Рассмотрим функцию $\langle Z, Z \rangle = f$ и вычислим $X(f) = \nabla_X \langle Z, Z \rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z \rangle$. Далее

$$YX(f) = 2\nabla_Y \langle \nabla_X Z, Z \rangle = 2\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle.$$

Аналогично: $XY(f) = 2\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + 2\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle$. Ясно, что $\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle$, что и требовалось.

4) Рассмотрим октаэдр, показанный на рис. 5.25. Четыре его грани заштрихованы, и в каждой вершине поставлено скалярное произведение. Используя доказанные соотношения, легко показать,

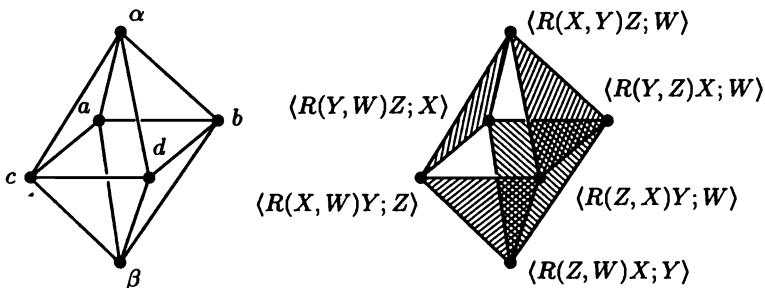


Рис. 5.25

что сумма произведений, расположенных в вершинах каждой заштрихованной грани, равна нулю. Записывая теперь тождество $(a + \alpha + c) + (\alpha + b + d) = 0 = (a + b + \beta) + (c + d + \beta)$, получаем: $2\alpha = 2\beta$, т. е. $\langle R(X, Y)Z; W \rangle = \langle R(Z, W)X; Y \rangle$, что и требовалось. ■

Определение 3. Тензором Риччи римановой связности называется тензор $R_{jl} = R^i_{j,i;l}$, т. е. тензор, полученный сверткой (по паре индексов) тензора Римана. Тензор Риччи симметричен (проверьте!).

Определение 4. Скалярной кривизной R риманова многообразия называется функция $R(x) = g^{kl}R_{kl}$, т. е. полная свертка тензора Риччи с тензором, обратным к метрическому.

Ясно, что R_{kl} — тензор 2-го ранга, а $R(x)$ — скалярная функция. Для многих задач полезно знать выражение тензора Римана через g_{ij} .

Теорема 3. На римановом многообразии имеет место тождество

$$R_{iq,kl} = g_{i\alpha} R^\alpha_{q,kl} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^q \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^q \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g_{mp} (\Gamma_{qk}^m \Gamma_{il}^p - \Gamma_{ql}^m \Gamma_{ik}^p).$$

Доказательство. Из координатной записи тензора Римана имеем

$$R_{q,kl}^i = \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{pl}^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i \right) [k, l],$$

где знаком $[k, l]$ обозначена альтернация по индексам k и l без деления на 2. Далее

$$\begin{aligned} \theta &= g_{si} R_{q,kl}^i = R_{sq,kl} = \\ &= g_{si} \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ql}^p \Gamma_{pk}^i \right) [k, l] = g_{si} \left(\frac{\partial \Gamma_*^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_*^p \right) [k, l], \end{aligned}$$

где знаком * обозначена пара индексов (ql) . Выражение в круглых скобках можно формально понимать как результат ковариантного дифференцирования ∇_k набора Γ_* , где на знак * пока не обращаем внимания. Набор Γ_* не образует тензора, однако в каждой данной системе координат можно рассмотреть и тензор с такими компонентами: Γ_*^i (в других системах этот тензор будет иметь уже какие-то другие компоненты, отличные от Γ_*^i , но для дифференцирования в данной системе это обстоятельство несущественно). Так как g_{si} опускает индекс у «тензора» Γ_*^i , то это можно выполнить и под знаком ковариантного дифференцирования, так как тензор g_{ij} ковариантно постоянен. Отсюда

$$\theta = g_{si} \nabla_k (\Gamma_*^i) [k, l] = \nabla_k (g_{si} \Gamma_*^i) [k, l] = \nabla_k (\Gamma_{s,*}) [k, l],$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{s,*} &= \Gamma_{s,ql} = \\ &= \frac{1}{2} g_{si} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha l}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{\alpha q}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{sq}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{ql}}{\partial x^s} \right). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в исходную формулу для $R_{sq,kl}$, получаем

$$\begin{aligned} R_{sq,kl} &= \nabla_k (\Gamma_{s,*}) [k, l] = \left(\frac{\partial \Gamma_{s,*}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,*} \Gamma_{ks}^\alpha \right) [k, l] = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{s,ql}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha,ql} \Gamma_{ks}^\alpha \right) [k, l] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{sq}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s} \right) [k, l] - \\ &- g_{\alpha p} \Gamma_{ql}^p \Gamma_{ks}^\alpha [k, l] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{sl}}{\partial x^k \partial x^q} + \frac{\partial^2 g_{qk}}{\partial x^l \partial x^s} - \frac{\partial^2 g_{sk}}{\partial x^l \partial x^q} - \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^k \partial x^s} \right) + \\ &+ g_{\alpha p} (\Gamma_{qk}^p \Gamma_{ls}^\alpha - \Gamma_{ql}^p \Gamma_{ks}^\alpha). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если на римановом многообразии тензор кривизны Римана отличен от нуля в какой-то системе координат, то на M^n нельзя ввести локальные евклидовые координаты, т. е. такие, в которых g_{ij} — постоянная матрица (или, что то же: $\Gamma_{jk}^i \equiv 0$).

Доказательство следует из леммы 2. ■

5.5.5. Некоторые приложения тензора кривизны Римана

Теорема 4. На двумерном гладком римановом многообразии имеет место тождество: $R = 2K$, где R — скалярная кривизна, K — гауссова кривизна.

СЛЕДСТВИЕ 2. Так как R полностью определяется заданием g_{ij} , то K также определяется только g_{ij} , в частности, не меняется при изометриях M^2 в \mathbf{R}^3 (при изгибаниях поверхности).

Нетривиальность следствия видна из того, что в определении гауссовой кривизны K участвовала вторая квадратичная форма, не сохраняющаяся, вообще говоря, при изометриях.

Доказательство теоремы. Зададим поверхность M^2 в окрестности точки P в виде графика $z = f(x, y)$, где (x, y) — декартовы координаты в $T_P M^2$. Так как $T_P M^2 = \mathbf{R}^2(x, y)$ — касательная плоскость, то $\text{grad } f(P) = 0$, т. е. $g_{ij}(P) = (\delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j})(P) = \delta_{ij}$. Отсюда: $\Gamma_{jk}^i(P) = 0$, так как $(\partial g_{ij}/\partial x^k)|_P = 0$ (проверьте!). В силу алгебраических симметрий $R_{iq,kl}$ у него в данном случае имеется только одна существенная компонента: $R_{12,12}$. Остальные либо равны нулю, либо отличаются от $R_{12,12}$ только знаком, или совпадают с $R_{12,12}$. Запишем тензор Римана в координатах (x, y) . Из теоремы 3 имеем

$$\begin{aligned} R_{12,12} &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[2(f_x f_y)_{xy} - (f_y^2)_{xx} - (f_x^2)_{yy} \right] = \\ &= (f_{xx} f_y + f_x f_{xy})_y - (f_y f_{xy})_x - (f_x f_{xy})_y = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = K. \end{aligned}$$

Отсюда: $R_{12,12} = K$. Вычислим R .

$$R = g^{kl} R_{kl} = g^{kl} R_{k,\alpha l}^\alpha = g^{kl} g^{\alpha q} R_{qk,\alpha l} = R_{12,12} (\Sigma \pm g^{kl} \cdot g^{\alpha q}),$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma \pm g^{kl} g^{\alpha q} &= g^{22} g^{11} - g^{21} g^{21} + g^{11} g^{22} - g^{12} g^{12} = \\ &= 2(g^{22} g^{11} - (g^{12})^2) = 2 \det(g_{ij})^{-1} = 2/g, \quad \text{где } g = \det(g_{ij}). \end{aligned}$$

Итак: $R = (2/g)R_{12,12}$. Отсюда: $R = 2K$, так как $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$. Но так как R и K — скаляры, то их значения не зависят от выбора координат и потому в любой системе получаем: $R = 2K$. ■

П р и м е ры

1) Для евклидовой метрики $dx^2 + dy^2$ имеем: $R = 2K = 0$, т. е. кривизна равна нулю.

2) Для сферической метрики $dr^2 + (\sin^2(r/r_0)) d\varphi^2$ имеем: $R = 2K = 2/r_0^2$, т. е. кривизна постоянна и положительна.

3) Для метрики плоскости Лобачевского $dr^2 + (\text{sh}^2(r/r_0))^2 d\varphi^2$ имеем: $R = 2K = -2/r_0^2$, т. е. кривизна постоянна и отрицательна.

4) Для конформно-евклидовой метрики $\lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$, где $\lambda(x, y)$ — положительная функция, имеем: $R = 2K = -(1/\lambda)\Delta \ln \lambda$, где Δ — оператор Лапласа. Доказывается прямым вычислением.

В трехмерном случае тензор Римана более сложен. Больше число существенных компонент (их шесть): $R_{12,13}; R_{21,23}; R_{31,32}; R_{12,12}; R_{13,13}; R_{23,23}$; остальные $R_{ij,kl}$ либо равны нулю, либо совпадают с указанными, либо отличаются знаком.

Можно подсчитать, что для M^n число существенных компонент у тензора Римана таково: $N = n^2(n^2 - 1)/12$. Когда $n \rightarrow \infty$, то отношение N к общему числу компонент (т. е. к n^4) стремится к $1/12$.

В геометрии большое значение имеет «*кривизна по двумерному направлению*». Рассмотрим риманово M^n , и пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_P M^n$. Пусть площадь параллелограмма $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, натянутого на них, равна 1 в метрике g_{ij} . Тогда *кривизной* M^n в *двумерном направлении* σ , определяемом векторами \mathbf{X}, \mathbf{Y} , называется число $R(\sigma) = \langle R(X, Y)X; Y \rangle$, где X, Y — любые векторные поля в окрестности P , такие, что $X(P) = \mathbf{X}, Y(P) = \mathbf{Y}$, т. е. совпадающие в P с выбранными векторами \mathbf{X}, \mathbf{Y} .

Лемма 3. Имеет место формула $R(\sigma) = R_{\beta j, kl} X^j X^k Y^l Y^\beta$, где X^α и Y^β — координаты векторов \mathbf{X} и \mathbf{Y} . В частности, $R(\sigma)$ не зависит от способа включения \mathbf{X}, \mathbf{Y} в X, Y

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} R(\sigma) &= g_{\alpha\beta} Y^\beta [R(X, Y)X]^\alpha = \\ &= g_{\alpha\beta} Y^\beta R_{j, kl}^\alpha X^j X^k Y^l = R_{\beta j, kl} X^j X^k Y^l Y^\beta \quad ■ \end{aligned}$$

Определение 5. Риманово многообразие M^n называется *многообразием положительной (отрицательной, нулевой, постоянной и т. д.) кривизны*, если его кривизны по всем двумерным направлениям положительны (отрицательны, нулевые, постоянны и т. д.).

Лемма 4. Рассмотрим риманово M^2 , и пусть $K(P)$ — гауссова кривизна, $R(\sigma)$ — кривизна по двумерному направлению, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sigma$ в точке $P \in M^2$. Тогда $R(\sigma) = K(P) = (1/2)R(P)$.

Доказательство. Рассмотрим координаты (x, y) , координатные линии которых ортогональны в точке P . Скалярное произведение, порождаемое метрикой в $T_P M^2$, можно считать евклидовым. Тогда

$$\begin{aligned} R(\sigma) &= R_{\beta j, kl} X^j X^k X^\beta X^l = \\ &= R_{12,12} (X^2 X^2 Y^1 Y^1 - X^2 X^1 Y^2 Y^1 + X^1 X^1 Y^2 Y^2 - X^1 X^2 Y^1 Y^2) = \\ &= R_{12,12} (X^2 Y^1 - Y^2 X^1)^2 = R_{12,12} \cdot 1 = R_{12,12}, \end{aligned}$$

так как $X^2 Y^1 - Y^2 X^1 = [\text{площадь параллелограмма } \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})]$. Поскольку $R_{12,12} = K(P)$, то $R(\sigma) = K(P)$, что и требовалось. ■

Г л а в а 6

Теория гомологий

До сих пор мы в основном изучали локальные свойства гладких многообразий, т. е. такие свойства, которые можно было определять и вычислять в окрестности каждой точки P многообразия M независимо друг от друга и которые не зависели от того, каким образом M представлено в виде объединения карт. Однако

Во многих же задачах бывает недостаточным знать только локальные свойства многообразия M .

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Пусть $M = S^1$ — окружность, в качестве локальной координаты на которой взят угловой параметр φ . Рассмотрим задачу об отыскании такой гладкой функции f на S^1 , чтобы выполнялось тождество

$$\frac{df}{d\varphi} = g(\varphi), \quad (6.1)$$

где g — некоторая гладкая функция на S^1 . Если решать эту задачу в малой окрестности точки $P \in S^1$ с координатой φ_0 , то решением будет служить любая первообразная функции g : $f(\varphi) = \int g(\varphi) d\varphi$. В целом же на S^1 решение существует не всегда. В самом деле, любую гладкую функцию на S^1 можно отождествить с периодической функцией одной вещественной переменной с периодом 2π . Тогда функция f является решением нашей задачи, если $f(\varphi) = \int g(\varphi) d\varphi$ и функция f является периодической функцией. всякая первообразная функции g выражается через определенный интеграл: $f(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} g(\varphi) d\varphi + C$. Поэтому условие периодичности функции f записывается в виде $\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$, или

$$\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0. \quad (6.2)$$

Например, если $g(\varphi) \equiv 1$, то $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 2\pi \neq 0$. Поэтому в случае $g(\varphi) \equiv 1$ задача (6.1) не имеет решения на S^1 . Условие (6.2) является необходимым и достаточным условием для существования решения задачи (6.1). В рассмотренной задаче видно, что существо-

вание решения существенно зависит от структуры многообразия в целом. В настоящем параграфе будут изучены именно такие свойства многообразий, от которых зависит поведение тех или иных функций и отображений в целом на многообразии.

6.1. ИСЧИСЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ. КОГОМОЛОГИИ

6.1.1. Дифференцирование внешних дифференциальных форм

Для внешних дифференциальных форм дифференциальное исчисление несколько упрощается по сравнению с дифференциальным исчислением произвольных тензорных полей. Если на многообразии фиксирована некоторая связность, то ковариантный градиент кососимметрического тензорного поля не является, вообще говоря, кососимметрическим тензорным полем. Поэтому естественно определить градиент внешней дифференциальной формы как композицию ковариантного градиента и альтернирования по всем индексам тензорного поля. При этом, если связность симметрична, то в формуле для градиента внешней дифференциальной формы вообще не участвуют символы Кристоффеля, т. е. определение градиента внешней дифференциальной формы не зависит от выбора симметрической связности на многообразии M .

Определение 1. Градиентом внешней дифференциальной формы ω называется внешняя дифференциальная форма $d\omega$, компоненты которой в локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) имеют вид

$$(d\omega)_{j_1, \dots, j_{k+1}} = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \omega_{j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_{k+1}}. \quad (6.3)$$

Теорема 1. Градиент внешних дифференциальных форм удовлетворяет следующим условиям:

- $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2;$
- $d(d\omega) = 0.$

Доказательство. Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальная система координат, ω_1, ω_2 — две внешние дифференциальные формы степеней p и q , соответственно. Компоненты произвольной дифференциальной формы ω отличны от нуля только для таких наборов индексов $(i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_q)$, у которых индексы принимают попарно различные значения. Значит для определения компонент формы ω достаточно рассматривать только такие наборы индексов,

значения которых попарно различны и упорядочены по возрастанию. Такие наборы индексов соответствуют подмножествам $I \subset [1, n]$ в отрезке всех целых чисел от 1 до n . Соответствующую компоненту формы ω будем обозначать через ω_I . При таких обозначениях формулы умножения и дифференцирования дифференциальных форм примут более простой вид:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)_K = \sum_{I \cup J = K} (-1)^{|\sigma(I, J)|} \omega_{1,I} \omega_{2,J}, \quad (6.4)$$

$$(d\omega)_K = \sum_{\{i\} \cup J = K} (-1)^{|\sigma(i, J)|} \frac{\partial \omega_J}{\partial x^i}, \quad (6.5)$$

где суммирование производится по всем подходящим разбиениям множества K на два подмножества $I \cup J = K$, состоящим соответственно из p и q элементов, а $\sigma(I, J)$ — такая перестановка, которая переставляет индексы из множества I на первые p места с сохранением порядка. Во второй формуле смысл всех обозначений аналогичен с тем изменением, что множество I состоит из одного индекса i .

Применим формулу (6.5) к (6.4), получим

$$(d(\omega_1 \wedge \omega_2))_K = \sum_{K = \{i\} \cup J \cup I} (-1)^{|\sigma(I, K, i)|} \frac{\partial}{\partial x^i} (\omega_{1,I} \cdot \omega_{2,J}).$$

В последней сумме суммирование производится по всевозможным разбиениям множества K на три непересекающихся подмножества $\{i\}$, I , J , а $\sigma(i, I, J)$ — перестановка, которая переставляет индекс i на первое место, а далее идут множества I и J с сохранением порядка внутри множеств I и J .

Таким образом,

$$\begin{aligned} (d(\omega_1 \wedge \omega_2))_K &= \sum_{K = \{i\} \cup I \cup J} (-1)^{|\sigma(i, I, K)|} \frac{\partial \omega_{1,I}}{\partial x^i} \omega_{2,J} + \\ &+ \sum_{K = \{i\} \cup I \cup J} (-1)^{|\sigma(i, I, K)|} \omega_{1,I} \frac{\partial \omega_{2,J}}{\partial x^i} = \\ &= (d\omega_1 \wedge \omega_2)_K + (-1)^{\deg \omega_1} (\omega_1 \wedge d\omega_2)_K. \end{aligned}$$

Свойство б) достаточно доказать для базисных форм, по которым разлагается любая форма. Без ограничения общности, можно считать, что в локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) форма ω имеет вид: $\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. Заметим, что если свойство (б) выполнено для форм ω_1 и ω_2 , то оно справедливо и

для их внешнего произведения $\omega_1 \wedge \omega_2$. В самом деле,

$$\begin{aligned} dd(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(dw_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_1} \omega_1 \wedge d\omega_2) = \\ &= dd\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\deg(d\omega_1)} d\omega_1 \wedge d\omega_2 + \\ &\quad + (-1)^{\deg \omega_1} d\omega_1 \wedge d\omega_2 + (-1)^{2 \deg \omega_1} \omega_1 \wedge dd\omega_2. \end{aligned}$$

Первое и последнее слагаемые равны нулю по предположению, а два средних одинаковы с противоположными знаками. Таким образом, свойство б) достаточно доказать для произвольной функции f и для формы dx^k . В последнем случае $dd(dx^k) = 0$, поскольку x^k — тоже некоторая функция на многообразии. Итак, покажем, что $d(df) \equiv 0$. Имеем $(df)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, далее

$$(d(df))_{ij} = \frac{\partial(df)_j}{\partial x^i} - \frac{\partial(df)_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \equiv 0.$$

Отметим, что условие б) теоремы 1 основывалось на замечательном свойстве функций многих переменных — независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Свойство б) в некотором смысле является максимальным обобщением этого свойства на случай систем функций, образующих компоненты кососимметрического тензора.

П р и м е р 1. В локальной системе координат всякая внешняя дифференциальная форма согласно определению имеет вид суммы $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Поэтому по теореме 1 градиент формы ω вычисляется по формуле

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} = d(\omega_{i_1, \dots, i_p}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Далее, градиент гладкой функции df в локальной системе координат имеет компоненты $\{\partial f / \partial x^i\}$. Следовательно, $df = \sum \partial f / \partial x^i \times dx^i$. Поэтому $d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{i=1}^n (\partial \omega_{i_1, \dots, i_p} / \partial x^i) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. Последняя формула, очевидно, эквивалентна формуле (6.3). Рассмотрим задачу отыскания такой дифференциальной формы ω , чтобы выполнялось тождество

$$d\omega = \Omega, \tag{6.6}$$

где Ω — фиксированная дифференциальная форма. В каждой локальной системе координат уравнение (6.6) превращается в систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_{s-1}, i_s+1, \dots, i_{k+1}}}{\partial x^{i_s}} = \Omega_{i_1, \dots, i_{k+1}}.$$

По условию б) теоремы 1 решения уравнения (6.6) существуют только тогда, когда $d\Omega = 0$. В самом деле, применив к левой и правой части (6.6) операцию d , получаем: $d\Omega = d(d\omega) = 0$. В частном случае, когда $\deg \Omega = 1$, задача сводится к отысканию такой гладкой функции f на многообразии M , градиент которой равен заданной форме Ω . В локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) форма Ω имеет вид $\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i dx^i$, уравнение (6.6) эквивалентно системе

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \Omega_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.7)$$

Если решение системы (6.7) существует, то, продифференцировав (6.7) по переменным x^j , получаем: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \Omega_i}{\partial x^j}$. Поскольку смешанные частные производные гладкой функции f не зависят от порядка дифференцирования, то

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \Omega_j}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (6.8)$$

Условия (6.8) в бескоординатной записи эквивалентны условию $d\Omega = 0$. Покажем, что условия (6.8) достаточны для того, чтобы система (6.7) имела решение в достаточно малой окрестности любой точки P многообразия M . Для этого решим сначала одно из уравнений системы (6.7), скажем $\partial f / \partial x^1 = \Omega_1$. Имеем

$$f(x^1, \dots, x^n) = \int_{x_0^1}^{x^1} \Omega_1(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 + \varphi_2(x^2, \dots, x^n), \quad (6.9)$$

где $\varphi_2(x^2, \dots, x^n)$ — произвольная гладкая функция от переменных (x^2, \dots, x^n) . Подставим правую часть (6.9) во второе уравнение системы (6.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x^2} &= \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^2}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \dots, x^n) = \\ &= \Omega_2(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Учитывая условие (6.8), получаем

$$\begin{aligned}\Omega_2(x^1, \dots, x^n) &= \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^n) dx^1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \dots, x^n) = \\ &= \Omega_2(x^1, \dots, x^n) - \Omega_2(x_0^1, x^2, \dots, x^n) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \dots, x^n),\end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2}(x^2, \dots, x^n) = \Omega_2(x_0^1, x^2, \dots, x^n). \quad (6.10)$$

Общее решение уравнения (6.10) имеет вид

$$\varphi_2(x^2, \dots, x^n) = \int_{x_0^2}^{x^2} \Omega_2(x_0^1, x^2, \dots, x^n) dx^2 + \varphi_3(x^3, \dots, x^n). \quad (6.11)$$

Подставляя (6.9) и (6.11) в третье уравнение системы (6.7), получаем

$$\begin{aligned}\Omega_3(x^1, \dots, x^n) &= \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x^3}(x^1, \dots, x^n) dx^1 + \\ &\quad + \int_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_2}{\partial x^3}(x_0^1, x^2, \dots, x^n) dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \dots, x^n).\end{aligned}$$

Снова учитывая (6.8), получаем уравнение на функцию φ_3 :

$$\begin{aligned}\Omega_3(x^1, \dots, x^n) &= \int_{x_0^1}^{x^1} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^1}(x^1, \dots, x^n) dx^1 + \\ &\quad + \int_{x_0^2}^{x^2} \frac{\partial \Omega_3}{\partial x^2}(x_0^1, x^2, \dots, x^n) dx^2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \dots, x^n) = \\ &= \Omega_3(x^1, \dots, x^n) - \Omega_3(x_0^1, x^2, \dots, x^n) + \Omega_3(x_0^1, x^2, \dots, x^n) - \\ &\quad - \Omega_3(x_0^1, x_0^2, x^3, \dots, x^n) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \dots, x^n); \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x^3}(x^3, \dots, x^n) &= \Omega_3(x_0^1, x_0^2, x^3, \dots, x^n).\end{aligned}$$

Продолжим этот процесс; получим последовательность функций $\varphi_k(x^k, \dots, x^n)$, определяемых рекуррентно формулами

$$\begin{aligned}\varphi_k(x^k, \dots, x^n) &= \int_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x^k, \dots, x^n) dx^k + \\ &\quad + \varphi_{k+1}(x^{k+1}, \dots, x^n), \quad \varphi_{n+1} \equiv \text{const}, \\ f(x^1, \dots, x^n) &= \sum_{k=1}^n \int_{x_0^k}^{x^k} \Omega_k(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x^k, \dots, x^n) dx^k + \varphi_{n+1}.\end{aligned}$$

Последняя формула дает нам произвольное решение системы (6.7), зависящее от одного числового параметра $\varphi_{n+1} = \text{const}$. Впрочем, неединственность решения системы (6.7) следует из общих алгебраических свойств внешних дифференциальных форм. В самом деле, если f_1 и f_2 — два решения системы (6.7), то $df_1 = \Omega$, $df_2 = \Omega$, т. е. $d(f_1 - f_2) = \Omega - \Omega = 0$. Функция $h = f_1 - f_2$ обладает тем свойством, что ее градиент тождественно равен нулю на многообразии M . Следовательно, h — локально постоянная функция. Если M — связное многообразие, то тогда h — постоянная функция. Таким образом, любые два решения системы (6.7) отличаются на константу, а множество всех решений системы (6.7) или просто, или является одномерным многообразием в пространстве всех гладких функций на многообразии M .

Переходя к общему случаю решений системы (6.6), мы можем сделать следующие заключения:

- а) необходимым условием существования решения системы (6.6) является условие $d\Omega = 0$;
- б) если ω — решение системы (6.6), то всякая форма вида $\omega + dw'$ тоже является решением системы (6.6).

6.1.2. Когомологии гладкого многообразия (когомологии де Рама)

Свойства решений системы (6.6) удобно формулируются в терминах так называемой теории когомологий де Рама.

Определение 2. Внешняя дифференциальная форма ω на гладком многообразии M называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$. Форма ω называется *точной*, если ее можно представить в виде $\omega = dw'$. Факторпространство пространства замкнутых форм степени k по подпространству точных форм называется *группой кого-*

мологий (*de Rama*) размерности k многообразия M и обозначается через $H^k(M)$.

Всякая точная форма ω является замкнутой, поскольку $d\omega = d(dw') = dd(\omega) = 0$. Поэтому пространство всех точных форм является подпространством в пространстве замкнутых форм. Группа когомологий $H^k(M)$ является векторным пространством (вообще говоря бесконечной размерности). В терминах групп когомологий задача о решении уравнения (6.6) формулируется следующим образом. Пусть ω — замкнутая внешняя дифференциальная форма степени k . Обозначим через $[\omega]$ элемент группы когомологий $H^k(M)$, равный классу смежности формы ω по подпространству точных форм. Тогда имеет место

Теорема 2. *Рассмотрим уравнение*

$$d\omega = \Omega, \quad \deg \Omega = k + 1. \quad (6.12)$$

а) *Решение уравнения (6.12) существует тогда и только тогда, когда форма Ω замкнута, а класс когомологий $[\Omega] \in H^{k+1}(M)$ равен нулю.*

б) *Всякие два решения ω и ω' уравнения (6.12) отличаются на замкнутую форму, т. е. $d(\omega - \omega') = 0$. Множество всех решений уравнения является классом смежности формы ω по подпространству всех замкнутых форм степени k .*

в) *Пространство всех замкнутых форм степени k изоморфно прямой сумме пространства точных форм степени k и группы когомологий $H^k(M)$.*

Доказательство. Если ω — решение уравнения (6.12), то Ω — точная форма, значит, согласно определению, $[\Omega] = 0$. Обратно, если $[\Omega] = 0$, то Ω — точная форма, т. е. $\Omega = d\omega$ для некоторой формы ω , которая является решением уравнения (6.12). Пусть ω и ω' — два решения уравнения (6.12), т. е. $d\omega = \Omega$, $d\omega' = \Omega$. Тогда $d(\omega - \omega') = d\omega - d\omega' = \Omega - \Omega = 0$, т. е. $\omega - \omega'$ — замкнутая форма. Следовательно, всякое решение ω' уравнения (6.12) можно получить путем прибавления к форме ω некоторой замкнутой формы. Обозначим через $\Omega_k(M)$ линейное пространство всех внешних дифференциальных форм степени k на многообразии M . Тогда градиент d является линейным отображением

$$d: \Omega_k(M) \rightarrow \Omega_{k+1}(M) \quad (6.13)$$

из пространства форм степени k в пространство форм степени $k+1$. Пространство замкнутых форм степени k совпадает с ядром $\text{Ker } d \subset \Omega_k(M)$ отображения (6.13). Аналогично, градиент d отображает пространство $\Omega_{k-1}(M)$ в $\Omega_k(M)$:

$$d: \Omega_{k-1}(M) \rightarrow \Omega_k(M). \quad (6.14)$$

Тогда пространство точных форм степени k совпадает с образом отображения (6.14): $\text{Im } d = d(\Omega_{k-1}(M)) \subset \text{Ker } d \subset \Omega_k(M)$. Следовательно, группа k -мерных когомологий $H^k(M)$ совпадает с факторпространством $\text{Ker } d / \text{Im } d$. В обозначении последнего пространства мы одной и той же буквой d обозначили два различных отображения (6.13) и (6.14). Однако это не приведет к путанице, поскольку мы рассматриваем подпространства в одном пространстве $\Omega_k(M)$ форм степени k . В линейном пространстве $\text{Ker } d$ рассмотрим алгебраическое дополнение H' к подпространству $\text{Im } d \subset \text{Ker } d$. Тогда пространство $\text{Ker } d$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\text{Ker } d = \text{Im } d \oplus H'$.

Покажем, что пространство H' изоморфно группе когомологий $H^k(M)$. В самом деле, пусть $\varphi: H' \rightarrow H^k(M)$ — отображение, со-поставляющее замкнутой форме $\omega \in H'$ ее класс смежности $[\omega] \in H^k(M)$. Если $\varphi(\omega) = 0$, то $[\omega] = 0$, т. е. ω — точная форма. Это значит, что $\omega \in \text{Im } d$. Поскольку подпространства $\text{Im } d$ и H' пересекаются только по нулевому элементу, то $\omega = 0$. Таким образом, отображение φ является мономорфизмом. Пусть $x \in H^k(M)$ — произвольный элемент. Тогда x является классом смежности некоторой формы $\omega \in \text{Ker } d$ по подпространству $\text{Im } d$, $x = [\omega]$. Поскольку пространство $\text{Ker } d$ разложено в прямую сумму своих подпространств $\text{Im } d$ и H' , то и форма ω разлагается в сумму $\omega = d\Omega + \omega'$, $d\Omega \in \text{Im } d$, $\omega' \in H'$. Тогда $x = [\omega] = [\omega'] = \varphi(\omega')$. Следовательно, φ является эпиморфизмом. Мы доказали, что φ является изоморфизмом. ■

Пример 2. Рассмотрим в качестве многообразия открытый интервал вещественных чисел $M = (a, b)$. Вычислим его группы когомологий. Поскольку многообразие M одномерно, то отличны от нуля только пространства форм степени 0 и 1. Сначала рассмотрим пространство $\Omega_0(M)$ форм степени 0. Всякая форма степени 0 — это гладкая функция на интервале (a, b) . Ее градиент df имеет вид: $df = (df/dx)(x) dx$, где x — декартова координата на интервале (a, b) . Поэтому пространство замкнутых форм степени 0, т. е. $\text{Ker } d$, состоит из всех таких функций, для которых $(df/dx)(x) \equiv 0$, т. е. $\text{Ker } d$ состоит из постоянных функций. Следовательно, пространство $\text{Ker } d$ изоморфно одномерному пространству \mathbf{R}^1 . Точных форм в пространстве $\Omega_0(M)$ нет. Поэтому $H^0(M) = \text{Ker } d = \mathbf{R}^1$. Рассмотрим теперь пространство $\Omega_1(M)$ форм степени 1. Поскольку всякая форма степени 2 на одномерном пространстве равна нулю, то $\text{Ker } d$ совпадает с пространством $\Omega_1(M)$. Вычислим теперь $\text{Im } d$. Пусть $\omega \in \Omega_1(M)$ — произвольная дифференциальная форма степе-

ни 1. В локальной системе координат она имеет вид: $\omega = g(x)dx$. Поэтому если $df = \omega$, то $(df/dx)(x) \equiv g(x)dx$, т. е. $df/dx = g$. Следовательно, функцию f можно определить равенством

$$f(x) = \int_c^x g(x) dx, \quad x \in (a, b), \quad a < c < b. \quad (6.15)$$

Таким образом, всякая форма $\omega \in \Omega_1(M)$ представима в виде $\omega = df$ для подходящей функции f . Это значит, что $\text{Im } d = \Omega_1(M) = \text{Ker } d$. Тогда группа одномерных когомологий $H^1(M)$, определяемая как факторпространство $\text{Ker } d / \text{Im } d$, равна нулю: $H^1(M) = 0$. Для всех других размерностей $k \geq 2$ группы когомологий $H^k(M)$ равны нулю, поскольку уже пространство форм степени k при $k \geq 2$ равны нулю на одномерном многообразии M . Ответ: $H^0(M) = \mathbf{R}^1$, $H^k(M) = 0$ при $k \geq 1$.

Пример 3. Пусть $M = S^1$ — одномерная окружность. Так же как и в примере 1 вычисляется группа нульмерных когомологий $H^0(S^1) = \mathbf{R}^1$, и группы $H^k(S^1) = 0$ при $k \geq 2$. Остается вычислить одномерную группу когомологий $H^1(S^1)$. В силу одномерности S^1 ядро $\text{Ker } d$ совпадает с $\Omega_1(S^1)$. Пусть φ — локальный угловой параметр окружности S^1 . Решим уравнение $df = \omega$ для некоторой формы $\omega = g(\varphi)d\varphi$. Функция $f(\varphi)$ должна быть периодической по параметру φ с периодом 2π . Используя формулу (6.15), получаем, что $f(\varphi) = \int_0^\varphi g(\varphi) d\varphi$ и $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$. Таким образом, не всякая форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ попадает в образ градиента $\text{Im } d$, а только такая форма, для которой выполнено условие: $\int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi = 0$. Покажем, что пространство форм $\Omega^1(S^1)$ разлагается в прямую сумму своих подпространств $\Omega^1(S^1) = \text{Im } d \oplus \mathbf{R}^1$, причем второе слагаемое состоит из форм с постоянным коэффициентом $g(\varphi) \equiv \equiv \text{const}$. В самом деле, пусть $\omega = g(\varphi)d\varphi$ — произвольная форма, $c = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi$. Тогда форма $\omega' = g'(\varphi)d\varphi = (g(\varphi) - c)d\varphi$ уже лежит в $\text{Im } d$, поскольку $\int_0^{2\pi} g'(\varphi) d\varphi = 0$. С другой стороны, любая форма $\omega = g(\varphi)d\varphi$ с постоянным коэффициентом $g(\varphi) \equiv \equiv c = \text{const}$ при $c \neq 0$ не лежит в $\text{Im } d$, ибо $\int_0^{2\pi} cd\varphi = 2\pi c \neq 0$. Тогда факторгруппа $H^1(S^1) = \text{Ker } d / \text{Im } d = \Omega_1(S^1) / \text{Im } d = \mathbf{R}^1$. Ответ: $H^0(S^1) = H^1(S^1) = \mathbf{R}^1$, $H^k(S^1) = 0$ при $k \geq 2$.

6.1.3. Гомотопические свойства групп когомологий

Каждое гладкое отображение многообразий индуцирует отображение внешних дифференциальных форм, направленное в обратную сторону: $f: M_1 \rightarrow M_2$, $f^*: \Omega_k(M_2) \rightarrow \Omega_k(M_1)$.

Определение 3. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение многообразий, $\omega \in \Omega_k(M_2)$ — внешняя дифференциальная форма степени k на многообразии M_2 . Обратным образом $f^*(\omega)$ формы ω называется внешняя дифференциальная форма на многообразии M_1 , задаваемая следующей формулой: $f^*(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega(df(\xi_1), \dots, df(\xi_k))$, где $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_P(M_1)$ — касательные векторы в точке P многообразия M_1 , а $df(\xi_1), \dots, df(\xi_k) \in T_{f(P)}(M_2)$ — их образы при дифференциале отображения f .

Так определенное отображение $f^*: \Omega_k(M_2) \rightarrow \Omega_k(M_1)$ пространств дифференциальных форм является, очевидно, линейным отображением линейных пространств.

Лемма 1. Если в локальных координатах отображение f записывается системой функций $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$, а форма ω записывается в виде $\omega = \sum \omega_{i_1, \dots, i_k}(y^1, \dots, y^m) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$, то

$$f^*(\omega) = \sum \omega_{i_1, \dots, i_k}(f^1, \dots, f^m) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}. \quad (6.16)$$

Соотношение (6.16) является обобщением так называемого свойства инвариантности дифференциала функции, гласящего, что вид дифференциала функции $y = f(x)$ не зависит от того, является переменная x независимой или, в свою очередь, функцией от другой переменной: $dy = (df/dx)(x) dx$. Доказательство леммы основано на непосредственной проверке определений.

Теорема 3. Обратный образ дифференциальных форм удовлетворяет следующим соотношениям:

а) если $f: M_1 \rightarrow M_2$ и $g: M_2 \rightarrow M_3$, то

$$(gf)^* = f^* g^*;$$

б) отображение f^* коммутирует с оператором d , т. е.

$$f^* d = d f^*;$$

в) отображение f^* ядро $\text{Ker } d$ отображает в ядро $\text{Ker } d$, а классы когомологий в классы когомологий: $f: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$.

Доказательство теоремы основано на проверке соотношений в произвольной локальной системе координат и оставляется читателю в качестве упражнения.

Теорема 3 полезна во многих отношениях. Так, например, если два многообразия M_1 и M_2 дiffeоморфны, то их группы когомологий изоморфны. В самом деле, если $f: M_1 \rightarrow M_2$ — тождественный диффеоморфизм, то гомоморфизм $f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$ тоже является тождественным изоморфизмом. Поэтому если $\varphi: M_1 \rightarrow$

$\rightarrow M_2$ — произвольный диффеоморфизм, то, взяв обратный диффеоморфизм $\psi: M_2 \rightarrow M_1$, получаем две возможные композиции $\psi\varphi: M_1 \rightarrow M_1$, $\varphi\psi: M_2 \rightarrow M_2$, причем обе являются тождественными диффеоморфизмами: $\psi\varphi = 1_{M_1}$, $\varphi\psi = 1_{M_2}$. Тогда, применяя теорему 3, получаем $\varphi^*\psi^* = 1_{H^k(M_1)}$, $\psi^*\varphi^* = 1_{H^k(M_2)}$, т. е. гомоморфизмы φ^* и ψ^* взаимно обратны. Следовательно, φ^* (а также и ψ^*) является изоморфизмом групп когомологий.

В действительности, гомоморфизмы когомологий $f^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$, индуцированные гладкими отображениями $f: M_1 \rightarrow M_2$ многообразий, обладают более сильными свойствами.

Определение 4. Пусть X, Y — произвольные топологические пространства, I — единичный отрезок вещественных чисел. Непрерывное отображение $f: X \times I \rightarrow Y$ называется *гомотопией между отображениями* $f_0 = f|_{X \times \{0\}}$ и $f_1 = f|_{X \times \{1\}}$. Если X, Y — гладкие многообразия, а f — гладкое отображение, то f называется *гладкой гомотопией*. При этом отображения f_0 и f_1 называются *гомотопными отображениями*.

Теорема 4. Гомотопные гладкие отображения $f_0, f_1: M_1 \rightarrow M_2$ индуцируют одинаковый гомоморфизм групп когомологий $f_0^* = f_1^*: H^k(M_2) \rightarrow H^k(M_1)$.

Доказательство. Построим такое линейное отображение пространств внешних дифференциальных форм $D: \Omega_k(M_2) \rightarrow \Omega_{k-1}(M_1)$, чтобы выполнялось тождество

$$(f_0^* - f_1^*)(\omega) = (dD \pm Dd)(\omega) \quad (6.17)$$

для любой формы $\omega \in \Omega_k(M_2)$. В самом деле, если ω — замкнутая форма, представляющая класс когомологий $[\omega] \in H^k(M_2)$, то формы $f_0^*(\omega)$ и $f_1^*(\omega)$ тоже замкнуты и представляют классы когомологий $f_0^*([\omega])$ и $f_1^*([\omega])$. В силу же (6.17) разность форм $f_0^*(\omega) - f_1^*(\omega)$ равна $(dD \pm Dd)\omega = d(D\omega) \pm D(d\omega) = d(D\omega)$, поскольку $d\omega = 0$. Поэтому формы $f_0^*(\omega)$ и $f_1^*(\omega)$ лежат в одном классе смежности по подпространству точных форм, т. е. они представляют один класс когомологий $[f_0^*(\omega)] = [f_1^*(\omega)]$. Таким образом, $f_0^*([\omega]) = f_1^*([\omega])$, что и требуется доказать.

Итак, осталось построить отображение D , удовлетворяющее тождеству (6.17). Поскольку отображения f_0 и f_1 гомотопны, то существует такое гладкое отображение $F: M_1 \times I \rightarrow M_2$, что $F(P, 0) = f_0(P)$, $F(P, 1) = f_1(P)$.

Скажем, что форма Ω степени k на многообразии $M_1 \times I$ не зависит от dt , если форма равна нулю на любой системе векторов вида $(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \partial/\partial t)$.

Лемма 2. Всякая внешняя дифференциальная форма Ω степени k на многообразии $M_1 \times I$ однозначно представляется в виде

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt, \quad (6.18)$$

причем формы Ω_1, Ω_2 не зависят от dt .

Доказательство леммы 2 достаточно провести в каждой карте U_α многообразия M_1 . Тогда через Ω_1 обозначим сумму всех слагаемых вида $f(x^1, \dots, x^n, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, а через $\Omega_2 \wedge dt$ сумму всех слагаемых вида $f(x^1, \dots, x^n, t)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k-1}} \wedge dt$. Нетрудно проверить, что указанное разложение на два слагаемых не зависит от выбора локальной системы координат.

Положим далее

$$D(\omega) = \int_0^1 \Omega_{2,M_1}(t) dt,$$

где $\Omega = F^*(\omega)$, $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt$ – разложение по формуле (6.18). Если форма Ω на $M_1 \times I$ не зависит от dt , то ее градиент $d\Omega$ тоже разлагается по формуле (6.18) в сумму $d\Omega = d_x \Omega_{M_1} + \partial \Omega_{M_1} / \partial t \wedge dt$. Здесь d_x обозначает градиент формы Ω_{M_1} на многообразии M_1 . Докажем теперь формулу (6.17). Левая часть (6.17) может быть получена следующим образом. Сначала вычисляется форма $\Omega = F^*(\omega)$, а потом берется ее ограничение на подмногообразия $M_1 \times \{0\}$ и $M_1 \times \{1\}$, при вложении $\varphi_0: M_1 \rightarrow M_1 \times I$ и $\varphi_1: M_1 \rightarrow M_1 \times I$.

Для этого в форме Ω нужно подставить $t = 0$ или 1 и $dt = 0$. Это в точности означает, что

$$f_0^*(\omega) = \Omega_{1,M_1}(0), \quad f_1^*(\omega) = \Omega_{1,M_1}(1). \quad (6.19)$$

Для вычисления правой части (6.17), вычислим последовательно $Dd(\omega)$ и $Dd\omega$. Имеем

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= dF^*(\omega) = d(\Omega_1 + \Omega_2 \wedge dt) = \\ &= d_x \Omega_{1,M_1}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \Omega_{1,M_1}(t) \wedge dt + d_x \Omega_{2,M_1} \wedge dt. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Dd(\omega) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \Omega_{1,M_1}(t) + d_x \Omega_{2,M_1}(t) \right) dt = \\ &= \Omega_{1,M_1}(1) - \Omega_{1,M_1}(0) + d_x \int_0^1 \Omega_{2,M_1}(t) dt. \quad (6.20) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$dD(\omega) = d_x \int_0^1 \Omega_{2,M_1}(t) dt. \quad (6.21)$$

Сравнивая (6.19) и (6.20), (6.21), получаем $f_1^*(\omega) - f_0^*(\omega) = (Dd - dD)(\omega)$, что и требовалось доказать. ■

СЛЕДСТВИЕ. Если $M = \mathbf{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство, то $H^0(M) = \mathbf{R}^1$, $H^k(\mathbf{R}^n) = 0$, $k \geq 1$.

Доказательство. Если $n = 0$, т. е. M состоит из одной точки, то утверждение следствия очевидно, поскольку одноточечное многообразие не имеет нетривиальных форм степени больше нуля. Формы же степени 0 — это функции на M , т. е. попросту вещественные числа. Поэтому $\Omega_0(M) = \mathbf{R}^1$, ядро градиента совпадает с $\Omega_0(M)$, а образ градиента равен нулю. Следовательно, $H_0(M) = \text{Ker } d / \text{Im } d = \Omega_0(M)/0 = \Omega_0(M) = \mathbf{R}^1$. Пусть теперь $n > 0$, $M_0 = \mathbf{R}^0$ — одноточечное многообразие. Рассмотрим два отображения $\varphi: M_0 \rightarrow M$ и $\varphi(M_0) = 0 \in M$, $\psi: M \rightarrow M_0$, $\psi(M) = 0 = M_0$. Таким образом, отображение φ отправляет единственную точку многообразия M_0 в нулевой вектор, а отображение ψ отображает все евклидово пространство $M = \mathbf{R}^n$ в единственную точку M_0 . Рассмотрим две возможные композиции $\psi\varphi: M_0 \rightarrow M_0$, $\varphi\psi: M \rightarrow M$. Композиция $\psi\varphi$ является, очевидно, тождественным отображением одноточечного многообразия M_0 . Композиция $\varphi\psi$ отображает все евклидово пространство M в нулевой вектор. Покажем, что отображение $\varphi\psi$ гомотопно тождественному отображению евклидового пространства. Для этого построим гомотопию в явном виде: $F: M \times I, F(x, t) = tx, x \in M = \mathbf{R}^n, t \in [0; 1] = I$. При $t = 1$ мы получаем тождественное отображение $f_1(x) = x = F(x, 1)$. При $t = 0$ мы получаем композицию $\varphi\psi(x) = 0 = F(x, 0)$. Согласно теореме 4 отображение $\varphi\psi$ и тождественное отображение индуцируют один и тот же гомоморфизм групп когомологий. Таким образом, гомоморфизмы $(\psi\varphi)^*: H^k(M_0) \rightarrow H^k(M_0)$, $(\varphi\psi)^*: H^k(M) \rightarrow H^k(M)$, являются тождественными изоморфизмами групп. Поскольку $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$, то гомоморфизмы φ^* и ψ^* взаимно обратные изоморфизмы групп. Следовательно, у евклидового пространства группы когомологий $H^k(\mathbf{R}^n)$ такие же, как и у одноточечного пространства, т. е. $H^0(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^1$, $H^k(\mathbf{R}^n) = 0$, $k \geq 1$. ■

Приведенное выше следствие имеет следующую формулировку, известную под названием леммы Пуанкаре:

Теорема 5. (Лемма Пуанкаре.) Любая замкнутая форма Ω на многообразии M в достаточно малой окрестности каждой точки $P \in M$ является точной, т. е. $\Omega = dw$.

6.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ ФОРМ

6.2.1. Интеграл дифференциальной формы по многообразию

Рассмотрим произвольное подмножество X в гладком многообразии M . Скажем, что множество $X \subset M$ имеет меру нуль, $\mu(X) = 0$, если для любой карты U_α и координатного гомеоморфизма $\varphi: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbf{R}_+^n$ множество $\varphi(X \cap U_\alpha) \subset \mathbf{R}_+^n$ имеет меру нуль в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n .

Определение множества меры нуль корректно и не зависит от выбора атласа карт.

Для этого достаточно показать, что если $f: V_1 \rightarrow V_2$ гладкий гомеоморфизм области $V_1 \subset \mathbf{R}^n$ на область $V_2 \subset \mathbf{R}^n$, то образ $f(X)$ любого множества $X \subset V_1$ меры нуль является множеством меры нуль.

Множества меры нуль на многообразии удовлетворяют стандартным свойствам, справедливым для множеств евклидового пространства:

$$\text{a)} \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(X_i) = 0;$$

б) образ $f(Y)$ гладкого $(n-1)$ -мерного многообразия Y при гладком отображении $f: Y \rightarrow M$ имеет меру нуль.

Определим теперь интеграл от внешней дифференциальной формы ω степени n на n -мерном ориентированном многообразии M в случае, когда форма ω имеет компактный носитель. Пусть носитель формы ω целиком лежит в одной карте U_α с координатами $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Тогда форма ω в карте U_α имеет вид $\omega = f_\alpha(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n$. Положим

$$\int_M \omega = \int_{U_\alpha} \int f_\alpha(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) dx_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dx_\alpha^n. \quad (6.22)$$

Правая часть формулы (6.22) существует и не зависит от выбора локальной системы координат $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ с сохранением ориентации. Для этого следует применить формулу замены переменных в кратном интеграле и учесть положительность якобиана замены переменных.

В общем случае произвольного компактного носителя формы ω интеграл от формы дается следующим образом:

Определение 1. Пусть M — n -мерное гладкое ориентированное многообразие с краем, ω — внешняя дифференциальная форма степени n с компактным носителем, $\{\varphi_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное атласу карт $\{U_\alpha\}$. Тогда полагаем

$$\int_M \omega = \sum \alpha \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \omega.$$

Определение 1 корректно, т. е. не зависит от выбора разбиения единицы. Оставляем доказательство корректности читателю в качестве упражнения.

Предложение 1.

a) $\int_M (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_M \omega_1 + \lambda_2 \int_M \omega_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^1.$

б) Если M' — противоположная к M ориентация, то $\int_{M'} \omega = -\int_M \omega.$

Доказательство. Свойство а) очевидно. Для доказательства свойства б) заметим, что противоположную ориентацию на многообразии M можно задать, не меняя атласа карт, а изменив только знак у первой координаты в каждом атласе U_α . Тогда нетрудно убедиться, что в определении интеграла от формы тоже поменяется знак в каждом слагаемом. ■

6.2.2. Формула Стокса

Следующая теорема представляет формулу, которая обобщает многочисленные формулы интегрирования из математического анализа.

Теорема 1. Пусть M — n -мерное ориентированное многообразие с краем ∂M , ω — внешняя дифференциальная форма степени $(n-1)$ с компактным носителем. Тогда

$$(-1)^n \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (6.23)$$

Формула (6.23) носит название *общей формулы Стокса*. Прежде чем доказывать теорему 1, рассмотрим некоторые частные случаи этой формулы.

Пример 1. Рассмотрим в плоскости \mathbf{R}^2 гладкую замкнутую кривую Γ без самопересечений, ограничивающую открытую область V в \mathbf{R}^2 . Будем считать, что на кривой Γ введен параметр t , задающий направление обхода и, следовательно, ориентацию Γ как одномерного многообразия. Тогда замыкание \bar{V} является ориентированным двумерным многообразием с краем $\partial V = \Gamma$. Если ориентация области \bar{V} задается линейной системой координат (x^1, x^2) , то ориентация на границе Γ окажется согласован-

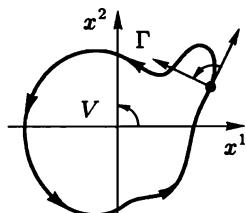


Рис. 6.1

ной с ориентацией в области \bar{V} , если при обходе кривой Γ при увеличении параметра t область \bar{V} остается слева (рис. 6.1). Пусть ω — произвольная форма степени 1 на плоскости \mathbf{R}^2 . Форма ω в координатах (x^1, x^2) имеет вид $\omega = P(x^1, x^2)dx^1 + Q(x^1, x^2)dx^2$. Тогда интеграл от формы ω по кривой Γ совпадает с интегралом второго рода:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega &= \int_{\Gamma} P dx^1 + Q dx^2 = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(P(x^1(t), x^2(t)) \frac{dx^1}{dt} + Q(x^1(t), x^2(t)) \frac{dx^2}{dt} \right) dt.\end{aligned}$$

По формуле (6.23) имеем

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega &= \int_V d\omega = \int_V (dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2) = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \iint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2. \quad (6.24)\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили известную *формулу Грина* на плоскости:

$$\int_{\Gamma} (P dx^1 + Q dx^2) = \iint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2.$$

Пример 2. Аналогично, пусть Γ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 , ограничивающая некоторую двумерную поверхность V . Тогда по формуле (6.23) получаем классическую *формулу Стокса*. Для этого рассмотрим форму ω степени 1 в трехмерном пространстве \mathbf{R}^3 :

$$\omega = P(x^1, x^2, x^3)dx^1 + Q(x^1, x^2, x^3)dx^2 + R(x^1, x^2, x^3)dx^3.$$

Тогда интеграл второго рода по кривой Γ интерпретируется как интеграл от формы ω :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega &= \int_{t_0}^{t_1} \left(P(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^1}{dt} + Q(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^2}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + R(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^3}{dt} \right) dt.\end{aligned}$$

На основании формулы (6.23) имеем

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_V d\omega;$$

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 + dR \wedge dx^3 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл по кривой Γ выражается через интеграл второго рода по поверхности V :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (Pdx^1 + Qdx^2 + Rdx^3) &= \iint_V \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3} \right) dx^2 dx^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1} \right) dx^3 dx^1 \right). \end{aligned}$$

Пример 3. Последняя формула, *формула Гаусса–Остроградского*, тоже является частным случаем формулы (6.23). Пусть Γ — замкнутая поверхность в \mathbf{R}^3 , ограничивающая область V . Пусть ω — внешняя дифференциальная форма степени 2. Форма ω в координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид

$$\omega = Pdx^1 \wedge dx^2 + Qdx^2 \wedge dx^3 + Rdx^3 \wedge dx^1.$$

Тогда интеграл второго рода по поверхности Γ интерпретируется как интеграл формы ω . Применяя формулу (6.23), получаем

$$\int_{\Gamma} \omega = - \int_V d\omega;$$

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dQ \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dR \wedge dx^3 \wedge dx^1 = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} (Pdx^1 dx^2 + Qdx^2 dx^3 + Rdx^3 dx^1) &= \\ &= - \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Мы пришли к формуле Гаусса–Остроградского с обратным знаком. Знак минус связан с тем, что в классической формуле Гаусса–Остроградского ориентация поверхности Γ , задаваемая парой векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в касательном пространстве к поверхности Γ , выбирается так, чтобы третий вектор \mathbf{e}_3 указывал направление вне области V .

Пример 4. Наконец, частным случаем формулы (6.23) можно считать и формулу Ньютона–Лейбница: $\int_a^b (df/dx)(x) dx = f(b) - f(a)$. Левую часть формулы Ньютона–Лейбница интерпретируем как интеграл формы $df = (df/dx)dx$ по отрезку $[a, b]$ вещественных чисел, который является одномерным ориентированным многообразием с краем. Краем отрезка $[a, b]$ является совокупность двух точек $\{a, b\}$, которые мы будем считать нульмерным многообразием. Однако для нульмерных многообразий мы не определяли понятие ориентации, поскольку у них отсутствуют касательные векторы. Поэтому можно поступить следующим образом. Будем считать, что точка края одномерного многообразия M имеет положительную ориентацию, если вектор, указывающий направление внутрь M , дает исходную ориентацию многообразия M , и, наоборот, имеет отрицательную, если вектор, указывающий направление внутрь M , дает противоположную ориентацию многообразия M . Нульмерная форма на многообразии является просто функцией. Поэтому интеграл функции по нульмерному многообразию будем считать суммой значений функции в точках, взятых со знаком, равным ориентации точек на многообразии. В нашем случае правая часть формулы Ньютона–Лейбница будет истолкована как интеграл функции f по краю, состоящему из двух точек $\{a, b\}$. При этом точка a имеет положительную ориентацию, а точка b — отрицательную. Поэтому $\int_{\partial[a,b]} f = f(a) - f(b)$. Формула же (6.23) имеет вид: $\int_{[a,b]} df = (-1)^n \int_{\partial[a,b]} f$.

Доказательство теоремы 1. Левая и правая часть формулы (6.23) линейна относительно формы ω . Поэтому, разлагая форму ω в сумму $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_N$, достаточно доказывать формулу (6.23) для случая, когда носитель формы ω компактен и лежит в одной карте. Более того, достаточно доказать формулу (6.23) для случая формы ω вида

$$\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где f — функция с компактным носителем, определенная в \mathbf{R}_+^n . Тогда $d\omega = (-1)^{k-1} (\partial f / \partial x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Рассмотрим два случая. Пусть $k < n$. Тогда ограничение формы ω на край $\mathbf{R}_0^{n-1} \subset \mathbf{R}_+^n$ рав-

но нулю, поскольку $dx^n = 0$. Поэтому $\int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \omega = 0$. С другой стороны, $\int_{\mathbf{R}_{+^n}} d\omega = \int \int_{\mathbf{R}_{+^n}} (-1)^{k-1} (\partial f / \partial x^k) dx^1 \dots dx^n$. Переходя к повторному интегралу, сначала по переменной x^k , а потом по всем остальным переменным получаем

$$\int_{\mathbf{R}_{+^n}} d\omega = \int_{\mathbf{R}_{+^{n-1}}} \int dx^1 \dots dx^{k-1} dx^{k+1} \dots dx^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k.$$

Внутренний интеграл равен нулю в силу следующих очевидных соотношений: $\int_{-\infty}^{\infty} (\partial f / \partial x^k) dx^k = f(x^1, \dots, x^n)|_{x^k=-\infty}^{x^k=+\infty}$. Поэтому $\int_{\mathbf{R}_{+^n}} d\omega = 0$. Пусть теперь $k = n$. Тогда $\omega = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$,

$$d\omega = (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} (x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge dx^n.$$

Имеем

$$\int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \omega = \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \int f(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1};$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_{+^n}} d\omega &= \int_{\mathbf{R}_{+^n}} \int (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^1 \dots dx^{n-1} dx^n = \\ &= \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \int dx^1 \dots dx^{n-1} \int_0^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n = \\ &= \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \int dx^1 \dots dx^{n-1} \left((-1)^{n-1} f(x^1, \dots, x^n)|_{x^n=0}^{x^n=+\infty} \right) = \\ &= (-1)^n \int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} \int f(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \dots dx^{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\int_{\mathbf{R}_0^{n-1}} = (-1)^n \int_{\mathbf{R}_{+^n}} d\omega$. Таким образом, для завершения доказательства, достаточно разложить форму ω в сумму $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_N$ так, чтобы носитель каждого слагаемого лежал в одной карте многообразия M . Рассмотрим атлас карт $\{U_\alpha\}$ и разбиение единицы $\{\varphi_\alpha\}$, подчиненное атласу $\{U_\alpha\}$. Тогда $1 \equiv \sum \varphi_\alpha$, $\omega = \sum \varphi_\alpha \omega$, $\text{supp } \varphi_\alpha \omega \subset U_\alpha$. ■

6.3. СТЕПЕНЬ ОТОБРАЖЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы опишем один важный геометрический инвариант отображений — степень отображения.

6.3.1. Степень отображения

Определение 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ гладкое отображение компактных, связных, ориентированных замкнутых многообразий, $\dim M_1 = \dim M_2$, $P \in M_2$ — регулярная точка. Для $Q \in f^{-1}(P)$ положим $\varepsilon(Q) = +1$, если детерминант матрицы Якоби отображения f в точке Q положителен, и $\varepsilon(Q) = -1$, если этот же детерминант отрицателен. *Степенью отображения f (относительно регулярной точки P) называется число*

$$\deg_P f = \sum_{Q \in f^{-1}(P)} \varepsilon(Q). \quad (6.25)$$

Определение 1 предполагает по крайней мере существование хотя бы одной регулярной точки. Для этого применим одну теорему из анализа, известную под именем теоремы Сарда.

Теорема 1. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение компактных многообразий. Тогда множество G регулярных точек $Q \in M_2$ отображения f является открытым всюду плотным множеством.

Для того чтобы установить корректность определения 1, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 2. Формула (6.25) не зависит:

- а) от выбора регулярной точки $P \in M_2$;
- б) от выбора отображения f в классе гладко гомотопных отображений.

Доказательство. Пункт а) сводится к пункту б). В самом деле, если P, P' — две регулярные точки, то существует такое непрерывное семейство диффеоморфизмов $\varphi_t: M_2 \rightarrow M_2$, что φ_0 — тождественное отображение, а $\varphi_1(P') = P$. Тогда отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гомотопны и у обоих точка P регулярна. С другой стороны, $\deg_P(\varphi_1 \circ f) = \deg_{P'} f$. Итак, пусть $F: M_1 \times I \rightarrow M_2$ гладкое отображение, точка $P \in M_2$ регулярна для $f_0 = F|_{(M_1 \times \{0\})}$ и для $f_1 = F|_{(M_1 \times \{1\})}$. Тогда для отображения F точка P является регулярной во всех точках края $\partial(M_1 \times I) = (M_1 \times \{0\}) \cup (M_1 \times \{1\})$.

Снова применяем теорему Сарда, но уже для отображения F . Тогда найдется регулярная точка P' , сколь угодно близкая к точке P . Тогда точка P' регулярна и для отображений f_0 и f_1 . Поскольку точ-

ку P' можно выбрать сколь угодно близко к точке P , то для каждого прообраза $Q \in f_0^{-1}(P)$ существует единственный близкий прообраз $Q' \in f_0^{-1}(P')$, причем $\varepsilon(Q) = \varepsilon(Q')$. Значит, $\deg_P f_0 = \deg_{P'} f_0$. Аналогично устанавливаем, что $\deg_P f_1 = \deg_{P'} f_1$. Снова обозначая точку P' через P , получаем, что прообраз $F^{-1}(P)$ является гладким одномерным многообразием с краем, причем, край $\partial F^{-1}(P)$ лежит в $\partial(M_1 \times I)$. Одномерное компактное многообразие всегда является объединением своих связных компонент — окружностей и отрезков (рис. 6.2). Следовательно, и многообразие $F^{-1}(P)$ разлагается в несвязную сумму отрезков I_k и окружностей S_l^1 : $F^{-1}(P) = \bigcup_k I_k \cup \bigcup_l S_l^1$. Каждый отрезок I_k имеет две граничные точки a_k и b_k . Множество всех точек $\{a_k, b_k\}$ образует объединение прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$.

Если пара (a_k, b_k) лежит в одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то $\varepsilon(a_k) = -\varepsilon(b_k)$, а если в различных, то $\varepsilon(a_k) = \varepsilon(b_k)$.

Таким образом, все точки прообразов $f_0^{-1}(P)$ и $f_1^{-1}(P)$ разбиваются на пары точек, причем если пара лежит на одной компоненте края $\partial(M_1 \times I)$, то в сумме (6.25) она дает нулевой вклад. Если же пара лежит на различных компонентах края $\partial(M_1 \times I)$, то она дает в сумме (6.25) одинаковый вклад как для $\deg_P f_0$, так и для $\deg_P f_1$. ■

6.3.2. Основная теорема алгебры

Так называется теорема, гласящая, что *любой многочлен $P(z)$ степени ≥ 1 над полем комплексных чисел имеет хотя бы один комплексный корень*.

Существует много различных доказательств этой теоремы. Одно из них получается применением понятия степени отображения и теоремы 2. Рассмотрим гладкое отображение $P: \mathbf{C}^1 \rightarrow \mathbf{C}^1$ комплексной плоскости, задаваемое формулой

$$\omega = P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Это отображение можно продолжить до отображения двумерной сферы S^2 в себя, считая S^2 комплексной проективной прямой $\mathbf{CP}(1)$. Для этого будем считать, что комплексный параметр z равен

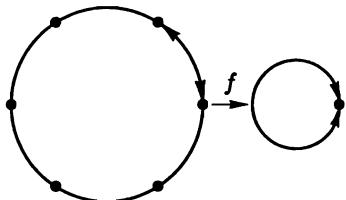


Рис. 6.2

отношению однородных координат на $\mathbf{CP}(1)$: $z = z_1/z_0$ при $z_0 \neq 0$. Аналогично $w = w_1/w_0$ при $w_0 \neq 0$. Поэтому отображение

$$\omega_1 = z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_1z_1z_0^{n-1} + a_0z_0^n, \quad w_0 = z_0^n \quad (6.26)$$

корректно определяет отображение $\mathbf{CP}(1)$ в себя. Отображение (6.26), очевидно, является гладким отображением.

Вычислим его степень. Согласно теореме 2, вместо отображения f можно взять гомотопное ему отображение. Рассмотрим гомотопию по параметру t , $0 \leq t \leq 1$, задаваемую формулой (6.27)

$$\omega_1 = z_1^n + t(a_{n-1}z_1^{n-1}z_0 + \dots + a_0z_0^n), \quad w_0 = z_0^n. \quad (6.27)$$

При $t = 0$ получается простое отображение

$$\omega_1 = z_1^n, \quad w_0 = z_0^n. \quad (6.28)$$

В локальных координатах $w = w_1/w_0$, $z = z_1/z_0$ оно имеет вид: $w = z^n$, и, например, точка $w = 1$ является регулярной. Для этого следует вычислить якобиан отображения (6.28), который равен $n^2|z^{n-1}|^2 > 0$ при $z \neq 0$.

Поскольку уравнение $z^n = 1$ имеет ровно n решений, то степень отображения (6.28), а вместе с ним и (6.26), равна n : $\deg f = n$. Если бы многочлен P не имел корней, то это значило бы, что точка $w = 0$ не принадлежит образу отображения f . Следовательно, отображение $f: \mathbf{CP}(1) \rightarrow \mathbf{CP}(1)$ имело бы регулярную точку ($w = 0$) с пустым прообразом, т. е. степень отображения f равнялась бы нулю. Противоречие доказывает теорему.

6.3.3. Интегрирование форм

Теорема 3. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ — гладкое отображение ориентированных компактных связных многообразий, ω — внешняя дифференциальная форма, $\deg \omega = \dim M_1 = \dim M_2$. Тогда

$$\int_{M_1} f^*(\omega) = \deg f \int_{M_2} \omega. \quad (6.29)$$

Доказательство. Поскольку левая и правая часть формулы (6.29) линейны относительно ω , то ее достаточно доказать для формы ω , носитель которой лежит в малой окрестности U точки $Q \in M_2$. Рассмотрим частный случай, когда вся окрестность U состоит из регулярных точек. Прообраз $f^{-1}(U)$ состоит из объединения конечного числа открытых множеств $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^N V_i$, на

каждом из которых отображение f является диффеоморфизмом. Тогда, поскольку $\text{supp } f^*(\omega) \subset f^{-1}(U)$, то

$$\begin{aligned} \int_{M_1} f^*(\omega) &= \int_{f^{-1}(U_0)} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^N \int_{V_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^N (\text{sign } df|_{V_i}) \int_U \omega = \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (\text{sign } df|_{V_i}) \right] \int_U \omega = \left[\sum_{P \in f^{-1}(Q_0)} \varepsilon(P) \right] \int_U \omega = \deg f \int_{M_2} \omega. \end{aligned}$$

В общем случае, если окрестность U содержит и нерегулярные точки, подберем другую окрестность по теореме Сарда — U_0 , которая уже состоит только из регулярных точек. Без ограничения общности можно считать, что обе окрестности, как U так и U_0 диффеоморфны открытому диску. Тогда существует непрерывное семейство диффеоморфизмов φ_t многообразия M_2 , которое непрерывно переводит окрестность U в окрестность U_0 , т. е.

$$\varphi_0(U) = U, \quad \varphi_1(U_0) = U.$$

Это значит, что формы $\omega = \varphi_0(\omega)$ и $\omega_1 = \varphi_1(\omega)$ гомотопны, т. е. дают одинаковое значение интеграла по формуле Стокса.

6.3.4. Гауссово отображение гиперповерхности

Рассмотрим гиперповерхность M в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $\dim M = n - 1$, задаваемое уравнением $F(x) = 0$, $\text{grad } F \neq 0$. Тогда на многообразии M определены: риманова метрика $\{g_{ij}\}$; форма объема $\sqrt{|g|} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}$, где $|g| = \det(g_{ij})$; гауссова кривизна $K = K(y^1, \dots, y^n)$. Определим новую форму $Kd\sigma = K(y^1, \dots, y^n) \sqrt{|g|} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}$, называемую *формой кривизны гиперповерхности M* . Кроме того, для гиперповерхности M определено гладкое отображение $f: M \rightarrow S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, которое каждой точке P сопоставляет его нормаль. Это отображение называется *сферическим отображением*. Пусть Ω — форма объема на сфере S^{n-1} .

Теорема 4. Для сферического отображения $f: M \rightarrow S^{n-1}$ гиперповерхности M прообраз формы объема Ω на сфере S^{n-1} равен форме кривизны на гиперповерхности M : $f^*\Omega = Kd\sigma$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в окрестности точки $P_0 \in M$ многообразие M является графиком функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$, а в точке $P_0 = (0, \dots, 0)$ нормаль к многообразию M параллельна оси Ox^n . Тогда в точке P_0

риманова метрика имеет вид единичной матрицы: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда гауссова кривизна в точке P_0 имеет вид: $K = \det(\partial^2 f / (\partial x^i \partial x^j))$. На сфере $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ в окрестности точки $f(P_0) = (0, \dots, 0, 1)$ в качестве координат выберем координаты (x^1, \dots, x^{n-1}) . Тогда метрика на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ тоже имеет диагональный вид: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда форма Ω на сфере S^{n-1} в точке $f(P_0)$ равна: $\Omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$. Вычислим теперь сферическое отображение. Касательное пространство к многообразию M порождается касательными векторами

$$\mathbf{r}_k = (1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad f_{x^k}).$$

Тогда нормальный вектор \mathbf{n} имеет координаты

$$\mathbf{n} = \frac{(f_{x^1} \quad f_{x^2} \quad \dots \quad f_{x^{n-1}} \quad -1)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^{n-1}}^2}}.$$

Прообраз формы Ω при сферическом отображении вычисляется путем подстановки вместо dx^i дифференциала координаты нормального вектора \mathbf{n} :

$$f^*(\Omega) = d \frac{f_{x^1}}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^{n-1}}^2}} \wedge \dots \wedge d \frac{f_{x^{n-1}}}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + \dots + f_{x^{n-1}}^2}}.$$

Производя вычисления и учитывая, что в точке в точке P_0 первые частные производные функции f равны нулю, $f_{x^i}(P_0) = 0$, получаем

$$f^*(\Omega) = \det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = K d\sigma.$$

В качестве следствия получается известная *теорема Гаусса–Бонне*:

Теорема 5. Пусть M — замкнутая компактная поверхность в \mathbf{R}^3 . Тогда $\int_M K d\sigma = 4\pi\lambda$, где λ — некоторое целое число.

Доказательство. Применим теоремы 3 и 4:

$$\int_M K d\sigma = \int_M f^*(\Omega) = (\deg f) \int_{S^2} \Omega = 4\pi \deg f.$$

Глава 7

Простейшие вариационные задачи римановой геометрии

7.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛА. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Начнем с общего понятия функционала и его вариации. Например, мы уже знакомы с «функционалом»: каждому отрезку гладкой кривой $\gamma(t)$ сопоставляется его длина $l_a^b(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}| dt$. Это соответствие: $\gamma(t) \rightarrow l_a^b(\gamma(t))$ уже не является «обычной функцией», так как «аргументом» здесь является произвольная гладкая кривая. Соответствие $\gamma \rightarrow l(\gamma)$ является важным примером нелинейного функционала, определенного на пространстве гладких кривых $\gamma(t)$. Обобщим этот пример.

Рассмотрим в \mathbf{R}^k ограниченную область D с гладкой границей ∂D ; пусть u^1, \dots, u^k — декартовы координаты. Рассмотрим на D гладкие вектор-функции $\mathbf{f}(u^1, \dots, u^k) = \mathbf{f}(u^\alpha) = (f^1(u^\alpha), \dots, f^n(u^\alpha))$. Область D называют областью изменения параметров u^1, \dots, u^k . Для любых функций $\{f^i(u^\alpha)\}$ и $\{g^i(u^\alpha)\}$, $1 \leq i \leq n$, и любых чисел a и b определена вектор-функция $a\mathbf{f} + b\mathbf{g} = \{af^i(u^\alpha) + bg^i(u^\alpha)\}$. Все гладкие вектор-функции на D образуют бесконечномерное линейное пространство F . На нем мы и будем рассматривать различные функционалы. Вектор-функции будут «аргументами» функционалов $J[\mathbf{f}]$, $\mathbf{f} \in F$.

Определение 1. Функционалом J на пространстве F (или на его подмножестве), называется непрерывное отображение $J: F \rightarrow \mathbf{R}^1$. Если $J[a\mathbf{f} + b\mathbf{g}] = aJ[\mathbf{f}] + bJ[\mathbf{g}]$, то функционал J называется *линейным*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть D — отрезок на прямой: $u^1 = t$, $\mathbf{f}(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t))$ — вектор-функция. Тогда $\mathbf{f}(t) = \gamma(t)$ определяет кривую в \mathbf{R}^3 . Здесь F — пространство всех таких кривых. Рассмотрим интеграл $J[\mathbf{f}] = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_D |\mathbf{f}(t)| dt$, т. е. длину кривой $\mathbf{f}(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Этот функционал нелинеен.

Пусть $L(u^\beta; p^i; q_\alpha^i)$ — гладкая функция от трех групп переменных: u^β , $1 \leq \beta \leq k$; p^i , $1 \leq i \leq n$; q_α^i , $1 \leq \alpha \leq k$, $1 \leq i \leq n$. Назо-

вем эту функцию *лагранжианом*. Пусть $\mathbf{f} = \{f^i(u^\beta)\}$ — гладкая вектор-функция, определенная на $D \subset \mathbf{R}^k$. Построим функционал

$$J[\mathbf{f}] = \int_D L(u^\beta; f^i(u^\beta); f_{u^\alpha}^i(u^\beta)) d\sigma^k,$$

где кратный интеграл $\int \int_D$ берется по k -мерной области; $d\sigma^k = du^1 \wedge \dots \wedge du^k$ — k -мерный элемент объема, $f_{u^\alpha}^i(u^\beta) = \frac{\partial f^i(u^\beta)}{\partial u^\alpha}$ — частные производные. Сокращенно запишем: $J[\mathbf{f}] = \int_D L(u^\beta, f^i, f_{u^\alpha}^i) d\sigma^k$. Класс таких функционалов включает практически все содержательные примеры функционалов в механике и физике. Рассмотрим функционал длины дуги

$$J[\mathbf{f}] = \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(\gamma(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{dx^j(t)}{dt}} dt,$$

т. е. $\mathbf{f}(t) = \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ — гладкая кривая в n -мерном многообразии с метрикой g_{ij} . Лагранжиан имеет вид

$$L\left(t; x^1, \dots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}\right) = \sqrt{g_{ij}(x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i \dot{x}^j}.$$

Для плоской кривой $\gamma(t)$, заданной уравнением $y = f(u)$, имеем: $L(f_u) = \sqrt{1 + f_u^2}$.

Функционал длины определен на кривых в гладком многообразии M^k . Обычно мы будем рассматривать малую окрестность кривой. Тем самым события переносятся в область k -мерного евклидова пространства с некоторой римановой (вообще говоря, неевклидовой) метрикой. Сложение вектор-функций, задающих кривые, производится локально, лишь в окрестности фиксированной кривой.

Другой пример: функционал площади $J[\mathbf{f}] = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \times \times du dv$. Здесь $\mathbf{f} = (x^1(u, v); x^2(u, v); x^3(u, v))$ — двумерная поверхность в \mathbf{R}^3 с индуцированной метрикой $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$;

$$L(\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v) = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\langle \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_u \rangle \langle \mathbf{f}_v, \mathbf{f}_v \rangle - \langle \mathbf{f}_u, \mathbf{f}_v \rangle^2}.$$

Можно рассмотреть функционал площади в ином виде: $J[\mathbf{f}] = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} du dy$, где D — область в $\mathbf{R}^2(x, y)$; $\mathbf{f}(x, y) = (x, y, z(x, y))$, т. е. вектор-функция \mathbf{f} задана графиком $z = f(x, y)$. Здесь $L(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$.

В первую очередь нас интересуют «критические точки» функционалов $J[f]$. Обратимся к аналогии с обычными функциями. Возьмем функцию одного или двух переменных: $\alpha(t)$ или $\alpha(u, v)$. В большой степени ее поведение определяется количеством и расположением тех точек t_0 (соответственно (u_0, v_0)), в которых $\alpha'(t_0) = 0$ (соответственно $\alpha_u(u_0, v_0) = \alpha_v(u_0, v_0) = 0$), т. е. $\text{grad}(\alpha) = 0$. Такие точки называются *критическими* или *стационарными* точками функции α . Иногда говорят: *экстремальные* точки. Например, для функции $\alpha = \alpha(t)$ такими точками являются точки максимума, минимума и точки перегиба (рис. 7.1). Если $\alpha = \alpha(u, v)$, то среди точек, где $\text{grad}(\alpha) = 0$, содержатся, например, точки максимума, минимума и седловые точки (седла) (рис. 7.2).

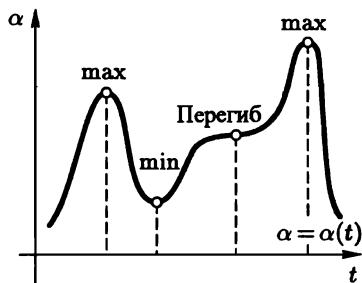


Рис. 7.1

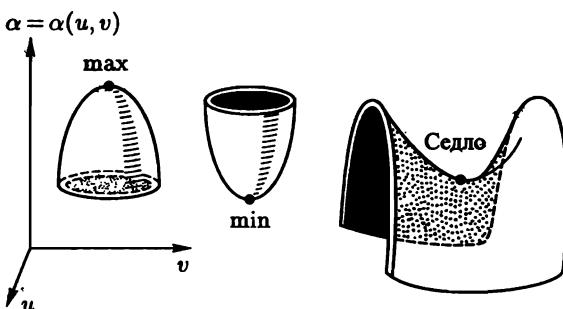


Рис. 7.2

Например, в физике и механике те точки, где потенциальная функция имеет экстремум, отвечают положениям равновесия системы (устойчивым или неустойчивым).

Аналогично, при изучении функционалов большое внимание уделяется поиску тех стационарных вектор-функций f_0 , в которых функционал J достигает минимума, максимума или имеет «седло». Чтобы уточнить задачу, нужно понять — что такое «производная по направлению» от функционала J в некоторой точке $f \in F$. Как было отмечено, для функций $\alpha(u, v)$ все интересующие нас критические точки являются решениями уравнения $\text{grad}(\alpha) = 0$. Если в точке (u, v) задано направление (вектор) $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$, то производная

функции $\alpha(u, v)$ по направлению \mathbf{a} имеет вид

$$\frac{d}{da}\alpha(u, v) = a^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u} + a^2 \frac{\partial \alpha}{\partial v} = \langle \mathbf{a}, \operatorname{grad} \alpha \rangle$$

(рис. 7.3). Отсюда следует, что $\operatorname{grad} \alpha(u_0, v_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $d\alpha(u_0, v_0)/da = 0$ для любого направления \mathbf{a} . Производная по направлению вычисляется так:

$$\frac{d\alpha}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\alpha(u + \varepsilon a^1, v + \varepsilon a^2) - \alpha(u, v)],$$

где $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$, ε — параметр, т. е.

$$\frac{d\alpha}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\alpha(u + \varepsilon \mathbf{a}) - \alpha(u)],$$

где $\mathbf{u} = (u, v)$ — радиус-вектор точки из области G . Именно в такой форме мы и обобщим понятие производной по направлению на случай функционалов $J[f]$.

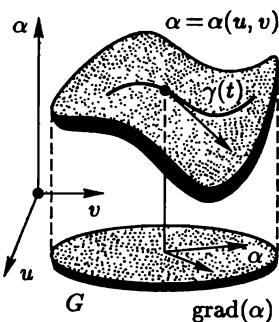


Рис. 7.3

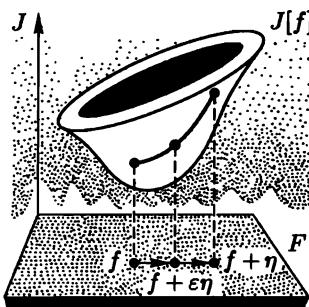


Рис. 7.4

Рассмотрим «точку» $f \in F$ и рассмотрим функцию $\eta \in F$, достаточно малую и такую, что $\eta|_{\partial D} \equiv 0$. Такие функции η будем называть *возмущениями* функции f . Сместимся из точки f в точку $f + \varepsilon\eta$ (рис. 7.4). Функция η задает «направление смещения» из «точки» f . Отличие от обычной функции в том, что теперь этих «направлений» бесконечно много.

Далее, как и для обычных функций, построим следующее выражение: $1/\varepsilon(J[f + \varepsilon\eta] - J[f])$. Переходя к пределу по ε , получаем число, которое обозначим через

$$\frac{d}{d\eta} J[f] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J[f + \varepsilon\eta] - J[f])$$

и которое естественно назвать *производной функционала J в точке f по направлению η*. Развивая аналогию с обычными функциями, дадим еще одно естественное

Определение 2. Функцию $f_0 \in F$ назовем *стационарной (экстремальной, критической) функцией* для функционала $J[f]$, если $\frac{d}{d\eta} J[f_0] = 0$ для любого возмущения η такого, что $\eta|_{\partial D} = 0$.

Удобно представлять функционал J в виде «графика» над F (рис. 7.5). Если точка $f \in F$ фиксирована, то совокупность функций $f + \varepsilon\eta$, где $\eta|_{\partial D} = 0$, можно отождествить с линейным пространством T , на которое мы ограничиваем функционал J . Те «точки» f_0 , где $\frac{d}{d\eta} J[f_0] = 0$ для любого η , являются точками минимума, максимума или «седловыми точками» функционала $J[f]$, ограниченного на подпространство $T \subset F$. Смысл ограничения J на T ясен: мы изучаем поведение J при возмущениях η , не меняющих f на границе ∂D . Например, на рис. 7.6 концы кривой фиксированы в точках A и B : $\eta(A) = \eta(B) = 0$.

Выведем формулу для производной $\frac{d}{d\eta} J[f_0]$. Это выражение называется иногда *первой вариацией J[f]*.

Положим $\delta J = J[f + \varepsilon\eta] - J[f]$. Тогда

$$\delta J = \int_D [L(u^\beta; f^i + \varepsilon\eta^i; f_{u^\alpha}^i + \varepsilon\eta_{u^\alpha}^i) - L(u^\beta; f^i; f_{u^\alpha}^i)] d\sigma^k.$$

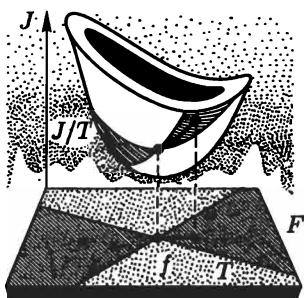


Рис. 7.5

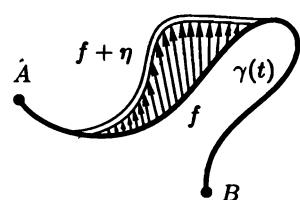


Рис. 7.6

Разлагая подынтегральное выражение в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_D \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial f^i} \varepsilon \eta^i + \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \varepsilon \eta_{u^\alpha}^i + o(\varepsilon) \right] d\sigma^k = \\ &= \varepsilon \int_D \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} \eta^i + \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \eta_{u^\alpha}^i \right] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} d\sigma^k. \end{aligned}$$

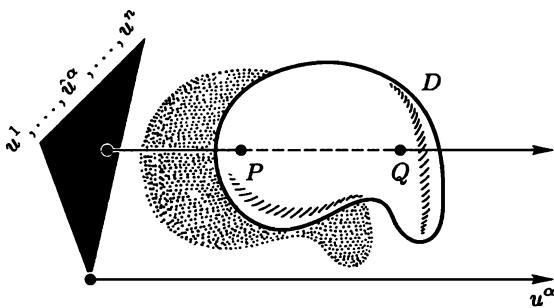


Рис. 7.7

Выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \delta J = \varepsilon \int_D \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma^k + \\ + \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \right) \right) \eta^i d\sigma^k + \int_D o(\varepsilon) d\sigma^k. \end{aligned}$$

Так как все функции предполагались гладкими, то в первом интеграле интегрирование по u^α можно отделить от интегрирования по остальным переменным u^i в силу теоремы о перемене порядка интегрирования, что дает

$$\int_D \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma^k = \int_{u^1 \dots \hat{u}^\alpha \dots u^k} \int_Q \left[\int_{u^1 \dots \hat{u}^\alpha \dots u^k}^P \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \eta^i \right) du^\alpha \right] d\sigma^{k-1}$$

(рис. 7.7). Так как в \int_Q^P переменные $u^1, \dots, \hat{u}^\alpha, \dots, u^n$ (переменная $u^{\alpha l}$ пропущена) можно считать параметрами, то

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \eta^i \right) d\sigma^k = \\ = \int_{u^1 \dots \hat{u}^\alpha \dots u^k} \int_Q^P \left[\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i}(Q) \eta^i(Q) - \frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i}(P) \eta^i(P) \right] d\sigma^{k-1} \equiv 0, \end{aligned}$$

так как $\eta^i(P) = \eta^i(Q) = 0$; $P, Q \in \partial D$. Итак,

$$\delta J = \varepsilon \int_D \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \right) \right] \eta^i d\sigma^k + \int_D o(\varepsilon) d\sigma^k.$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\eta} J[\mathbf{f}] = \int_D \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \right) \right] \eta^i d\sigma^k,$$

так как $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D o(\varepsilon) d\sigma^k = 0$. Пусть f_0 — стационарная функция для J . Тогда для любой функции η (где $\eta|_{\partial D} = 0$) выполняется равенство

$$\int_D \sum_{i=1}^n \eta^i \left[\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \right) \right] d\sigma^k \equiv 0.$$

Как известно из курса анализа, это означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial f^i} - \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{u^\alpha}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта система дифференциальных уравнений называется *уравнениями Эйлера для функционала $J[\mathbf{f}]$* . Тем самым доказана важная

Теорема 1. Функция $f_0 \in F$ является экстремальной (стационарной, критической) для функционала $J[\mathbf{f}]$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям Эйлера.

7.2. ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Мы определили геодезические как траектории, вдоль которых параллельный перенос сохраняет поле скоростей траектории. Оказывается, в римановом случае имеется еще одно важное свойство, которое можно взять за определение геодезической. Оказывается, геодезические — это экстремальные траектории для так называемого функционала действия, «похожего» на функционал длины.

Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой g_{ij} , и x^1, \dots, x^n — локальные координаты. Траектории $\gamma(t)$ задаются так: $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. В качестве области D возьмем отрезок $I = [0, 1]$. Рассмотрим траектории с фиксированными началом и концом: $\gamma(0) = P, \gamma(1) = Q$.

Определение 1. Функционал

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}| dt = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j} dt$$

называется *функционалом длины траектории*. Функционал

$$E(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 dt = \int_0^1 g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j dt$$

называется *функционалом действия траектории* $\gamma(t)$.

Лемма 1. Имеет место неравенство $L^2 \leq E$.

Доказательство. Применяя известное неравенство Шварца

$$\left(\int_0^1 fg dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2 dt \right) \left(\int_0^1 g^2 dt \right)$$

к функциям $f(t) \equiv 1$ и $g(t) = |\dot{\gamma}(t)|$, получаем $(L(\gamma))^2 \leq E(\gamma)$, причем равенство достигается только при постоянной функции $g(t)$, т. е. тогда и только тогда, когда параметр t пропорционален длине дуги. ■

Рассмотрим экстремали функционалов E и L .

Теорема 1. Экстремалими функционала действия $E(\gamma)$ являются геодезические траектории $\gamma(t)$, параметризованные параметром t , пропорциональным длине дуги s . Если наложить начальное условие $|\dot{\gamma}(0)| = 1$ в точке P , то параметр t определяется однозначно и является натуральным, т. е. совпадает с длиной дуги.

Доказательство. Мы рассматриваем здесь параметризованные траектории, т. е. две совпадающие, но параметризованные по-разному кривые считаются различными траекториями. В силу теоремы 1 разд. 7.1 экстремали функционала $E(\gamma)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Лагранжиан выглядит так: $L(x^i, \dot{x}^j) = g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$. Вычисление дает

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = 2g_{kj} \dot{x}^j,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) = 2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^j + 2g_{kj} \ddot{x}^j,$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j = 2 \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j - 2g_{kj} \ddot{x}^j,$$

$$\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0,$$

т. е. $\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{ij}^\alpha \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$. Итак, уравнения Эйлера совпали с уравнениями

ниями геодезических в римановой связности. Теорема доказана. ■

Экстремаль функционала $E(\gamma)$ определяется из уравнений Эйлера как траектория с параметром. Если на геодезической заменить параметр, то эта траектория перестанет, вообще говоря, быть геодезической.

Теорема 2. Экстремальными функционала длины $L(\gamma)$ являются гладкие траектории $\gamma(t)$, получающиеся из геодезических произвольными гладкими заменами параметра на них. Любая экстремаль функционала $E(\gamma)$ (т. е. параметризованная геодезическая) является экстремальной $L(\gamma)$, но не наоборот.

Доказательство. Рассмотрим уравнения Эйлера для $L(\gamma)$. Лагранжиан имеет вид: $L(x, \dot{x}) = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$. Получаем

$$\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) \right) = 0.$$

Пусть $\gamma(t)$ — решение системы. Так как $\gamma(t)$ — гладкая кривая, то на ней можно ввести натуральный параметр $t = s$. Тогда $|\dot{\gamma}(s)| = 1$; следовательно, уравнения Эйлера превращаются в

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) \right) = 0.$$

Эти уравнения совпадают в силу теоремы 1 с уравнениями геодезических. Итак, вводя на произвольной экстремали $L(\gamma)$ натуральный параметр, получаем геодезическую. Обратно, пусть $\gamma(s)$ — произвольная геодезическая на M^n . В силу предыдущего она — экстремаль $L(\gamma)$. Пусть $s = s(t)$ — гладкая замена параметра на $\gamma(s)$. Тогда $L(\gamma(s)) = L(\gamma(s(t)))$, поскольку длина дуги не меняется при заменах параметра. Итак, $\gamma(s(t))$ — снова экстремаль L . Теорема доказана. ■

Локально геодезические являются минимумами обоих функционалов L и E . Иными словами, если рассмотреть малое возмущение η геодезической γ , где носитель η также мал, то новая траектория $\gamma + \eta$ будет иметь длину, не меньшую, чем γ . Сформулируем точнее. Рассмотрим компактное риманово многообразие M^n . В силу результатов, описанных в гл. 5, существует такое $\varepsilon > 0$, что любая пара точек P, Q в шаре D_ε^n радиуса ε , соединяется единственной геодезической, целиком лежащей в этом шаре.

Теорема 3. Пусть D_ε^n — указанный выше шар, и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow M^n$ — геодезическая длины меньше ε , соединяющая две точки шара; пусть $\omega: [0, 1] \rightarrow M^n$ — любой другой гладкий (или кусочно-гладкий) путь, соединяющий эти же точки.

Тогда $L(\omega) \geq L(\gamma)$, причем равенство достигается лишь при совпадении точечных множеств $\gamma[0, 1]$ и $\omega[0, 1]$ (т. е. когда два пути совпадают как гладкие кривые в M^n). В этом смысле геодезическая γ — кратчайший путь, соединяющий точки P и Q .

Доказательство мы опускаем.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\omega: [0, \varepsilon] \rightarrow M^n$ — гладкая траектория, параметризованная натуральным параметром, и пусть ее длина от $P_0 = \omega(0)$ до точки $\omega(\varepsilon)$ не превосходит длины любого другого пути, идущего из P_0 в $\omega(\varepsilon)$. Тогда ω — геодезическая.

Утверждение сразу следует из теоремы 3.

Определение 2. Геодезическая $\gamma: [a, b] \rightarrow M^n$ называется *минимальной*, если она не длиннее никакого гладкого пути, соединяющего ее концы $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$.

Согласно теореме 3, любой достаточно малый отрезок геодезической минимален. В то же время длинная геодезическая может не

быть минимальной. Например, мы доказали, что любой экватор на сфере S^2 — геодезическая. Рассмотрим дугу SNP на рис. 7.8. Ясно, что геодезическая SNP не минимальна, поскольку дуга $P\alpha S$ короче, чем SNP .

Минимальная геодезическая, соединяющая две «далекие» точки P и Q , может

быть неединственна. Например, северный и южный полюсы на сфере соединяются бесконечным числом минимальных геодезических — меридианов.

В качестве следствия из теоремы 3 покажем, как найти все геодезические на сфере S^n (n произвольно), не вычисляя символов Кристоффеля.

СЛЕДСТВИЕ 2. Геодезическими на сфере S^n , снабженной стандартной метрикой, являются всевозможные экваторы (т. е. плоские сечения S^n двумерными плоскостями через ее центр) и только они.

Доказательство. Пусть двумерная плоскость \mathbf{R}^2 пересекает S^n по экватору γ . Пусть g — отражение в \mathbf{R}^n , оставляющее \mathbf{R}^2 на месте. Тогда возникает изометрия $g: S^n \rightarrow S^n$, множество неподвижных точек которой в точности совпадает с экватором γ . Пусть P и Q — две достаточно близкие точки на γ , соединяющиеся единственной минимальной геодезической (см. теорему 3) ω . Так как g — изометрия, то кривая $g(\omega)$, проходящая через

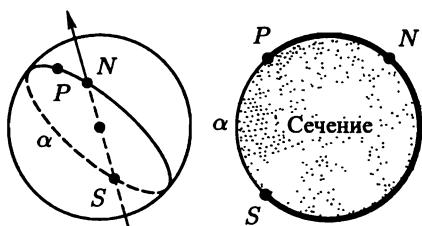


Рис. 7.8

те же точки P и Q , также геодезическая, соединяющая P и Q . Следовательно $\omega = g(\omega)$, т. е. $\omega = \gamma$ — геодезическая. То, что никаких других геодезических нет, доказывается так же, как и в двумерном случае: через любую точку сферы в любом направлении проходит экватор. ■

Аналогично доказывается, что на поверхности вращения любой меридиан является геодезической (но здесь есть и другие геодезические).

Рассмотрим теперь риманово компактное многообразие, и пусть P и Q — две произвольные точки. Обозначим через $\Omega(P, Q)$ пространство всех гладких кривых γ , соединяющих P и Q . На нем определены функционалы E и L (см. выше). Определим расстояние $\rho(P, Q)$ между точками P и Q как нижнюю грань длин гладких кривых, соединяющих эти точки.

Предложение 1. *Пусть P и Q — две достаточно близкие точки многообразия, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Тогда функционал действия $E: \Omega(P, Q) \rightarrow \mathbf{R}$ достигает абсолютно го минимума d^2 в точности на минимальной геодезической, соединяющей точки P и Q .*

Доказательство. Пусть γ — минимальная геодезическая, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. В силу леммы 1 имеем: $E(\gamma) = L^2(\gamma) \leq L^2(\omega) \leq E(\omega)$, где ω — гладкая кривая из P в Q . Равенство $L^2(\omega) = L^2(\gamma)$ имеет место в том и только том случае, когда ω — также минимальная геодезическая (возможно, иначе параметризованная, с точностью до масштабного преобразования). В то же время, равенство $L^2(\omega) = E(\omega)$ достигается, только если параметр пропорционален длине дуги. Отсюда $E(\gamma) < E(\omega)$ во всех тех случаях, когда ω не является минимальной геодезической. Предложение доказано. ■

7.3. МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В гл. 4 мы познакомились с минимальными двумерными поверхностями, т. е. у которых средняя кривизна H равна нулю. Оказывается, они являются экстремумами функционала площади.

Рассмотрим функционал $(n - 1)$ -мерного объема на компактных гиперповерхностях, являющихся графиками гладких функций $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ с областью определения D в $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})$. Пусть D имеет гладкую границу ∂D и ограничена (рис. 7.9). Из гл. 5 мы знаем, что $(n - 1)$ -мерный объем записывается так:

$$\text{vol}(V^{n-1}) = \int_D \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2} dx^1 \dots dx^{n-1},$$

где $f_{x^i} = \partial f / \partial x^i$. Так как лагранжиан L имеет вид

$$L(f_{x^1}, \dots, f_{x^{n-1}}) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2},$$

то уравнение Эйлера записывается так:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 \right)^{-1/2} \right) = 0.$$

Рассмотрим гиперповерхность V^{n-1} , являющуюся экстремумом функционала $(n-1)$ -мерного объема. Поскольку объем является скаляром, не зависящим от выбора координат на поверхности, то мы выберем удобные координаты. Пусть $P \in V^{n-1}$; положим $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1}) = T_P V^{n-1}$, т. е. в качестве координатной плоскости выберем касательную плоскость с декартовыми координатами. Зададим локально V^{n-1} как график функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

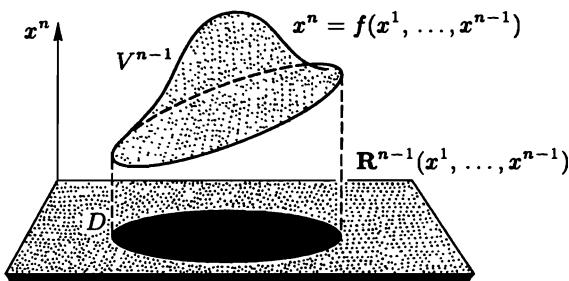


Рис. 7.9

Теорема 1. Гиперповерхность $V^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ экстремальна для функционала $(n-1)$ -мерного объема тогда и только тогда, когда ее средняя кривизна H тождественно равна нулю.

Доказательство. Проведем вычисления для случая $n = 3$, так как вычисления для любого n аналогичны. Для $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем:

$$f_{xx}(1+f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1+f_x^2) = 0.$$

В силу гл. 4, это уравнение совпадает с уравнением $H \equiv 0$.

Рассмотрим поверхности M^2 в \mathbf{R}^3 , заданные в виде $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$. Тогда функционал площади записывается так (см. гл. 5): $S[\mathbf{r}] = \int_{D(u,v)} \sqrt{EG - F^2} du dv$. Пусть (u, v) — конформные параметры, т. е. в них метрика на M^2 имеет вид

$$E = G = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle, \quad F = 0.$$

Тогда

$$S[\mathbf{r}] = \int_D (\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle)^{1/2} du dv.$$

Прямое вычисление показывает, что уравнения Эйлера здесь также: $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \mathbf{r}(u, v) = 0$. Итак, \mathbf{r} — гармоническая вектор-функция относительно координат (u, v) . Поясним, что при варьировании лагранжиана все частные производные рассматриваются как независимые. ■

Рассмотрим бесконечномерное пространство F гладких отображений диска $D^2(u, v)$ в \mathbf{R}^3 . На F определен нелинейный функционал площади $S[\mathbf{r}]$. Его экстремальные «точки» (т. е. радиус-векторы $\mathbf{r}(u, v)$) описывает

Теорема 2. Экстремальными векторами $\mathbf{r}(u, v)$ для $S[\mathbf{r}]$ являются те и только те, для которых средняя кривизна заметаемой ими поверхности равна нулю.

Это вытекает из теоремы 1. Теперь рассмотрим наряду с $S[\mathbf{r}]$ еще один функционал (Дирихле): $D[\mathbf{r}] = 1/2 \int_{D(u,v)} (E + G) du dv$. Сравним экстремальные «точки» функционалов D и S .

Теорема 3. Экстремальными векторами $\mathbf{r}(u, v)$ для функционала Дирихле являются те и только те, которые гармонические относительно (u, v) , т. е. $\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \mathbf{r}(u, v) = 0$.

Доказательство. Уравнения Эйлера имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_v} \right) = 0,$$

где $L = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle = x_u^2 + x_v^2 + y_u^2 + y_v^2 + z_u^2 + z_v^2$, т. е. $\Delta(\mathbf{r}) = 0$,
где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$. Теорема доказана. ■

Координаты (u, v) могут быть гармоническими для некоторого радиус-вектора, но не быть конформными для индуцированной метрики на поверхности, заметаемой этим вектором. Рассмотрим теперь специальные гармонические поверхности, на которых гармонические координаты являются в то же время и конформными, т. е. $E = G, F = 0$. Тогда эти поверхности минимальны.

Сформулируем без доказательства следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ — минимальная поверхность, то есть имеет нулевую среднюю кривизну. Тогда любое гладкое, достаточно малое ее возмущение с достаточно малым носителем не уменьшает площади поверхности.*

7.4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пусть T_*M^n — касательный пучок многообразия M^n , т. е. $2n$ -мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары (x, \mathbf{a}) , где $x \in M^n$, $\mathbf{a} \in T_x M^n$. Пусть $P, Q \in M^n$ и $\Omega(P, Q)$ — пространство всех гладких кривых, соединяющих P и Q . Введем локальные координаты x^1, \dots, x^n и запишем траектории в виде $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = Q$. Рассмотрим функционал $I[\gamma] = \int_0^1 L(x, \dot{x}) dt$, где L — гладкая функция от двух групп переменных, т. е. $L(x, \mathbf{a})$ — функция на T_*M^n .

Определение 1. *Импульсом $p = (p_i)$, $1 \leq i \leq n$, называется вектор с компонентами: $p_i = \partial L / \partial \dot{x}^i$. Энергией E называется функция $E(x, \dot{x}) = \dot{x}^i p_i - L(x, \dot{x})$.*

Энергию можно рассматривать как функцию на T_*M^n , т. е. $E(x, \mathbf{a}) = a^i p_i - L(x, \mathbf{a})$. Важный пример: $L(x, \dot{x}) = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$; отсюда $p_i = \partial L / \partial \dot{x}^i = 2g_{ij} \dot{x}^j$, т. е. p — ковектор, двойственный относительно метрики g_{ij} вектору скорости $\mathbf{a} = \dot{x}$. Энергия E имеет вид

$$E(x, \dot{x}) = \dot{x}^i 2g_{ij} \dot{x}^j - g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

т. е. является «кинетической энергией».

Пусть \mathfrak{G} — группа Ли, гладко действующая на M^n , т. е. каждый ее элемент g представлен диффеоморфизмом M^n . Рассмотрим следующий пример: $\mathfrak{G} = \mathbf{R}^1$ — вещественная прямая (группа по сложению). Это действие порождает на M^n векторное поле:

$X(x_0) = dg_t(x_0)/dt|_{t=0}$, где орбита $\mathfrak{G}(x_0) = g_t(x_0)$; $g_0(x_0) = x_0$. Действие \mathfrak{G} на M^n порождает действие \mathfrak{G} на T_*M^n по формуле $g_* : (x, \mathbf{a}) \rightarrow (g(x), dg_x(\mathbf{a}))$.

Определение 2. Говорят, что лагранжиан $L(x, \mathbf{a})$ *сохраняется при действии \mathfrak{G} (инвариантен относительно \mathfrak{G})*, если при действии \mathfrak{G} на T_*M^n функция $L(x, \mathbf{a})$ переходит в себя, т. е.

$$L(g(x); dg_x(\mathbf{a})) \equiv L(x, \mathbf{a}).$$

Условие сохранения L имеет вид: $dL/dt = 0$. Дифференцируя, получаем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial a^i} \frac{da^i}{dt}, \quad \frac{dx^i}{dt} = X^i(x)$$

(см. выше). Найдем da^i/dt . Рассмотрим \mathbf{a} и касательную траекторию $\varphi(\tau) = (x^i(\tau))$ такую, что $a^i = dx^i/d\tau|_{\tau=0}$. При малом смещении на Δt вдоль $g_t(x)$ функции x^i переходят в функции $x^i + X^i \Delta t$ (мы пренебрегаем малыми порядка выше первого). Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{d\tau} &\rightarrow \frac{dx^i}{d\tau} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Delta t \frac{dx^k}{d\tau}, \quad \text{т. е. } a^i \rightarrow a^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} a^k \delta t, \\ &\text{т. е. } \frac{da^i}{dt} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} a^k. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} g_{\Delta t}(x^i) &= \{x^i + X^i \Delta t + \dots\}, \\ \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{\Delta t}(x^i)) &\cong \left(\delta_k^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \Delta t \right) = J_k^i, \end{aligned}$$

где $J = (J_k^i)$ — матрица Якоби. Отсюда

$$a^j \rightarrow J_k^j a^k = a^j + \frac{\partial X^j}{\partial x^k} a^k \Delta t.$$

Итак,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial L}{\partial a^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} a^k \equiv 0.$$

Мы доказали

Предложение 1. *Аналитическое условие сохранения лагранжиана $L(x, \mathbf{a})$ группой $\mathfrak{G} = \mathbf{R}^1$ имеет вид*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial L}{\partial a^i} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} a^k = 0,$$

где (x, a) — независимые аргументы, а \mathbf{X} — векторное поле скоростей действия группы $\mathfrak{G} = \mathbf{R}^1$.

Выведем закон сохранения проекции импульса вдоль экстремалей функционала J . Рассмотрим $\int_0^1 L(x, \dot{x}) dt = J[\gamma]$, и пусть γ_0 — экстремаль J , т. е. решение системы уравнений Эйлера $\partial L / \partial x^i - d/dt(\partial L / \partial \dot{x}^i) = 0$, где t — время вдоль экстремали. Обозначая точкой дифференцирование по t , перепишем уравнения Эйлера так: $\partial L / \partial x^i = \dot{p}_i$, где p — импульс. Рассмотрим свертку $f(\tau) = (p, \mathbf{X}) = X^i p_i$, где $f(\tau)$ — гладкая функция вдоль $\gamma_0(\tau)$. Здесь $f(\tau)$ можно понимать как значение ковектора p на векторе \mathbf{X} : $f(\tau) = p(\mathbf{X})$.

Теорема 1. Имеет место тождество $(f(\tau)) \equiv 0$, т. е. $(p, \mathbf{X}) \equiv 0$.

Доказательство. Из утверждения 1, имеем

$$\begin{aligned} (X^i p_i) \cdot &= \dot{X}^i p_i + X^i \dot{p}_i = X^i \frac{\partial L}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \frac{dx^k}{d\tau} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i} X^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} a^k = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Рассмотрим наш модельный пример: $L(x, \dot{x}) = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$. Тогда $p_i = 2g_{ij} \dot{x}^j$, т. е. $X^i p_i = 2g_{ij} X^i \dot{x}^j = 2(\mathbf{X}, \dot{\gamma}_0) = \text{const}$ вдоль $\gamma_0(\tau)$. Для этого лагранжиана экстремали являются геодезическими (см. разд. 7.2); в частности $|\dot{\gamma}_0| = \text{const}$ вдоль $\gamma_0(\tau)$. Отсюда $|\mathbf{X}| \times \cos \alpha(\tau) = \text{const}$, где $\alpha(\tau)$ — угол между векторами \mathbf{X} и $\dot{\gamma}_0$ (измеренный в метрике g_{ij}).

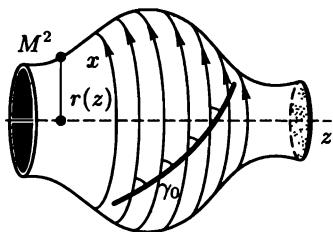


Рис. 7.10

Применим этот результат для нахождения геодезических на поверхности вращения M^2 в \mathbf{R}^3 . Пусть $r(z)$ — гладкая функция, являющаяся образующей поверхности вращения, т. е. кривая $y = r(z)$ вращается вокруг оси Oz (рис. 7.10). Пусть ω — постоянная скорость вращения; тогда на M^2 возникает действие $r\omega t$ группы $\mathfrak{G} = \mathbf{R}^1$.

Тогда поле \mathbf{X} скоростей этого дей-

ствия имеет модуль $|\mathbf{X}| = r\omega$. В силу доказанного выше для любой геодезической $\gamma_0(\tau)$ на M^2 выполняется тождество $r(z) \cos \alpha(z) = c = \text{const}$. Итак, доказано

Предложение 2. На поверхности вращения $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ с образующей $r(z)$ вдоль любой геодезической $\gamma_0(\tau)$ на M^2 выполняется тождество $r(z) \cos \alpha(z) = \text{const}$.

Рассмотрим примеры. Пусть $r(z) = \text{const}$. Тогда поверхность вращения является цилиндром и геодезические являются образами прямых после сворачивания евклидовой плоскости в цилиндр (рис. 7.11).

Пусть $r(z)$ определяет S^2 (рис. 7.12). Геодезические — экваторы.

Условие $r(z) \cos \alpha(z) = \text{const}$ — необходимое условие геодезичности траектории, но не достаточное. В самом деле, если $\gamma(\tau)$ — орбита действия группы \mathfrak{G} , то $\alpha(\tau) = 0$, т. е. $(p, X) = |X| |p| = \text{const}$ (на поверхности вращения), однако далеко не всегда является геодезической. Рассмотрим, например, прямой круговой конус и его

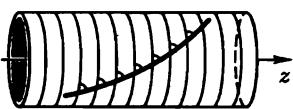


Рис. 7.11

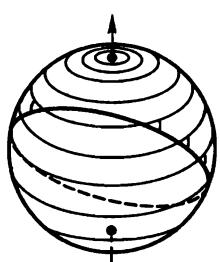


Рис. 7.12

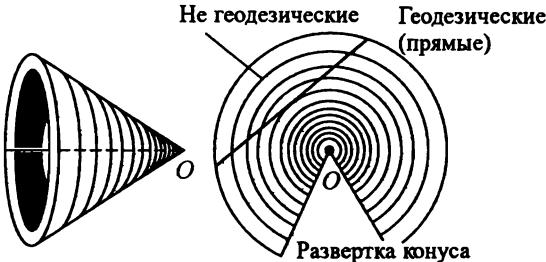


Рис. 7.13

вращения вокруг оси (рис. 7.13). Как мы уже знаем, все геодезические на конусе являются образами прямых при сворачивании куска евклидовой плоскости в конус. Окружности, очевидно, не геодезические на конусе.

Поскольку $dL/dt \equiv 0$ вдоль орбит действия $\mathfrak{G} = \mathbf{R}^1$ (для инвариантного лагранжиана), то локально можно направить вдоль орбит $\mathfrak{G}(x)$ координату x^n . Тогда $(p, X) \equiv 0$, что эквивалентно: $p_n = 0$, где p_n — проекция импульса по координате x^n . Иными словами, можно считать, что импульс p не зависит от координаты x^n . Функция L тоже не зависит от нее.

Докажем закон сохранения энергии вдоль экстремалей. Пусть $L(x, a)$ — лагранжиан, уже не обязательно инвариантный относительно действия какой-либо группы, и пусть $\gamma_0(\tau)$ — экстремаль функционала $J[\gamma] = \int L(x, \dot{x}) d\tau$. Рассмотрим энергию $E = \dot{x}^i p_i - L$; $p_i = \partial L / \partial \dot{x}^i$, пусть $L = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - U(x)$, где функция $U(x)$ называется потенциалом.

Теорема 2. Вдоль экстремалей $\gamma_0(\tau)$ функционала $J[\gamma]$ выполняется тождество: $dE/d\tau \equiv 0$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{dE}{d\tau} &= (p_i a^i - L) \cdot = \dot{p}_i a^i + p_i \dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i - \frac{\partial L}{\partial a^i} \dot{a}^i = \\ &= \frac{\partial L}{\partial x^i} a^i + \frac{\partial L}{\partial a^i} \dot{a}^i - \frac{\partial L}{\partial x^i} a^i - \frac{\partial L}{\partial a^i} \dot{a}^i \equiv 0.\end{aligned}\quad (7.1)$$

так как $\dot{p}_i = \partial L / \partial x^i$ в силу уравнений Эйлера, $p_i = \partial L / \partial a^i$ по определению. Теорема доказана. ■

Введем простейшие понятия гамильтоновой механики на многообразиях.

Пусть $T_* M^n$ — касательный пучок многообразия, снабженный координатами (x, \mathbf{a}) и L — лагранжиан на $T_* M^n$.

Определение 3. Лагранжиан $L(x, \mathbf{a})$ называется *невырожденным*, если уравнение

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L(x, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \quad \left(\text{т. е. } p_i = \frac{\partial L(x, \mathbf{a})}{\partial a^i} \right)$$

имеет для любого $x \in M^n$ единственное решение $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, p)$.

Рассмотрим наряду с $T_* M^n$ также кокасательный пучок $T^* M^n$, т. е. $2n$ -мерное гладкое многообразие, точками которого являются пары (x, p) , где $p \in T_x^* M^n$, т. е. p — ковектор. Рассмотрим энергию

$$E(x, \mathbf{a}) = p_i a^i - L(x, \mathbf{a}) = \frac{\partial L(x, \mathbf{a})}{\partial a^i} a^i - L.$$

Здесь $p = p(x, \mathbf{a})$. Выразим $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, p)$ и подставим в E . Получим $E \rightarrow E(x, \mathbf{a}(x, p))$. Мы получили некоторую функцию $E(x, \mathbf{a}(x, p)) = H(x, p)$, называемую *гамильтонианом*. Она имеет вид $H = p_i a^i(x, p) - L(x, \mathbf{a}(x, p))$, т. е. $L(x, \mathbf{a}(x, p)) = p_i a^i(x, p) - H(x, p)$. Пусть $\gamma(t) \subset M^n$ — гладкая траектория; тогда $(x, \dot{x}) \in T_* M^n$, где $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $x = x(t)$, т. е. $\gamma(t)$ порождает траекторию на $T_* M^n$: $(x(t), \dot{x}(t)) = \Gamma(t)$. Рассмотрим лагранжиан $L(x, \mathbf{a})$ на траекториях в $T_* M^n$.

Отметим, что $T_* M^n$ и $T^* M^n$ диффеоморфны. В самом деле, зададим на M^n метрику g_{ij} . Тогда возникает каноническое отождествление $\varphi: T_* M^n \rightarrow T^* M^n$; $\varphi(\{x^i\}, \{a^\alpha\}) = (\{x^i\}, \{g_{\beta\alpha} a^\alpha\}) \in T^* M^n$. Наряду с этим отождествлением имеется и другое отождествление, возникающее при задании невырожденного лагранжиана $L(x, \mathbf{a})$. В самом деле, уравнение $p = \partial L(x, \mathbf{a}) / \partial a$ имеет единственное решение (при фиксированном x) $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, p)$. Поэтому можно сопоставить паре (x, \mathbf{a}) пару (x, p) , где $p = \partial L(x, \mathbf{a}) / \partial a$. Рассмотрим именно этот диффеоморфизм $T_* M^n$ и $T^* M^n$. В частном слу-

чае, когда $L(x, \mathbf{a}) = g_{ij}a^i a^j$, имеем $p_i = 2g_{ik}a^k$, т. е. отождествление с помощью такого лагранжиана совпадает с «римановым отождествлением», описанным выше (рис. 7.14).

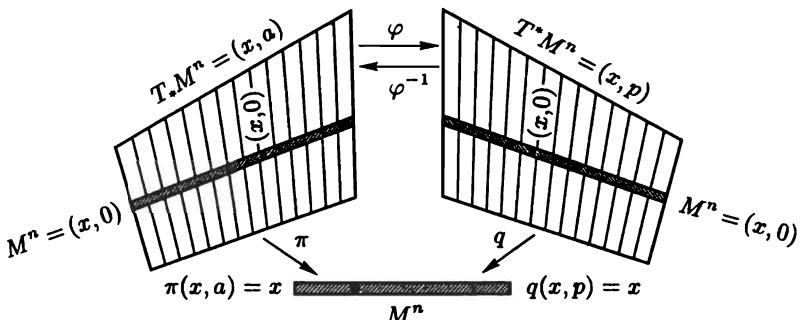


Рис. 7.14

Рассмотрим вариационную задачу поиска экстремалей функционала $I[\alpha] = \int_R^S L(x(t), \mathbf{a}(t)) dt$, где $L(x, \mathbf{a})$ рассматривается на всех гладких траекториях $\alpha(t)$ в T_*M^n , а точки R и S — две фиксированные точки на T_*M^n , т. е. $R(x_0, \mathbf{a}_0)$ и $S(y_0, \mathbf{b}_0)$ (рис. 7.15).

Рассмотрим уравнения Эйлера для этого функционала. Возьмем вариации, не смещающие точек R и S . Уравнения Эйлера на T_*M^n имеют вид $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial a^i} \right)$. Запишем их в терминах T^*M^n , т. е. сделаем замену $(x, p) \rightarrow (x, \mathbf{a})$ с помощью описанного диффеоморфизма, построенного по лагранжиану L . Имеем

$$L(x, \mathbf{a}(x, p)) = p_i a^i(x, p) - H(x, p); \quad p_i = \frac{\partial}{\partial a^i} L(x, \mathbf{a}(x, p)).$$

Отметим, что $\partial L(x, \mathbf{a}(x, p))/\partial p_i = 0$, так как импульс p явно не входит в $L(x, \mathbf{a})$, а при работе с уравнениями Эйлера вариации берутся только по явно входящим в лагранжиан функциям. Итак,

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_i} L(x, \mathbf{a}(x, p)) = a^i(x, p) - \frac{\partial}{\partial p_i} H(x, p),$$

т. е. $a^i(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p_i$. Отсюда

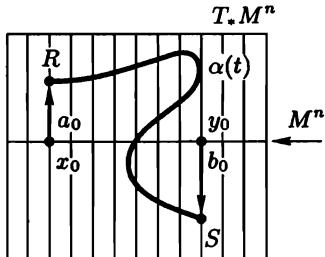


Рис. 7.15

$$\begin{aligned} \int_A^B L(x, \mathbf{a}(x, p)) dt &= \int_A^B [p_i a^i(x, p) - H(x, p)] dt = \\ &= \int_A^B \left[p_i \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i} - H(x, p) \right] dt = J[\omega(t)], \end{aligned}$$

где $\omega(t) \in T^* M^n$, $\omega(t) = (x(t), p(t))$; $\omega(0) = A$, $\omega(1) = B$ (рис. 7.16).

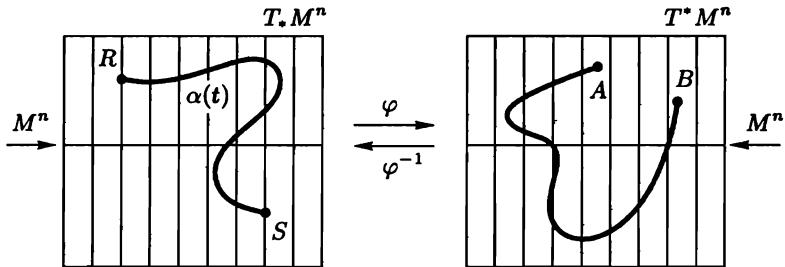


Рис. 7.16

Запишем уравнения Эйлера для функционала $J[\omega(t)]$ на $T^* M^n$. Пусть $\omega_0(t) = (x(t), p(t))$ — экстремаль функционала J . Выше было установлено, что $a^\alpha = \partial H(x, p)/\partial p_\alpha$, но так как $a^\alpha = \dot{x}^\alpha$ (вдоль экстремали), то $\dot{x}^\alpha = \partial H(x, p)/\partial p_\alpha$ (вдоль экстремали). Далее

$$J[\omega] = \int_A^B (p_i a^i - H) dt = \int_A^B L(x, \mathbf{a}(x, p)) dt.$$

Уравнения Эйлера приобретают вид $\partial L/\partial x^i = d(\partial L/\partial a^i)/dt$, но так как $\partial L/\partial a^i = p_i$, то $\dot{p}_i = \partial L/\partial x^i = \partial(a^i p_i - H(x, p))/\partial x^i = -\partial H(x, p)/\partial x^i$, так как $\partial(a^i p_i)/\partial x^i = 0$. Отметим, что координаты x и a рассматриваются как независимые, а потому $\partial a/\partial x = 0$. Так как переменная x^i в сумму $a^i p_i$ явно не входит, то $\partial(a^i p_i)/\partial x^i = 0$. Отсюда $\dot{p}_i = -\partial H(x, p)/\partial x^i$. Итак, на-ми доказана важная

Теорема 3. В координатах (x, p) на касательном пучке $T^* M^n$ уравнения Эйлера для функционала $J[\omega] = \int_A^B L(x, \mathbf{a}(x, p)) dt$ записываются в «гамильтоновой форме»

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x^i} \quad (\text{уравнения Гамильтона}).$$

Изучим уравнения Гамильтона на T^*M^n . Они определяют на T^*M^n гладкое векторное поле $\dot{x}^i = \partial H(x, p)/\partial p_i$, $\dot{p}_i = -\partial H(x, p)/\partial x^i$. Это поле тесно связано с полем $\text{grad } H$, которое является ковекторным полем на M^n . В самом деле, рассмотрим на T^*M^n внешнюю дифференциальную форму степени два $\omega^{(2)} = dp_i \wedge dx^i$. Она определяет кососимметрическое, невырожденное скалярное произведение в $T_{(x,p)}(T^*M^n)$ и в $T_{(x,p)}^*(T^*M^n)$. Оно задает отождествление касательного и ко-касательного пространств $T_{(x,p)}(T^*M^n)$, $T_{(x,p)}^*(T^*M^n)$. Рассмотрим поток $\text{grad } H(x, p)$. Тогда поток, двойственный к нему относительно указанного скалярного произведения, имеет вид $(\partial H(x, p)/\partial p_i, -\partial H(x, p)/\partial x^i)$, т. е. совпадает с гамильтоновым потоком, описанным в теореме 3. Итак, гамильтоново поле можно определить как поток к градиенту гамильтониана $H(x, p)$, двойственный относительно внешней 2-формы, заданной на T^*M^n .

Рассмотрим четномерное многообразие M^{2n} , например многообразие $T^*M^n \cong T_*M^n$. Пусть $\omega^{(2)} = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная внешняя 2-форма на M^{2n} , задающая кососимметрическое скалярное произведение. Тогда для любой гладкой функции $f(x)$ на M^{2n} возникает понятие «кососимметрического градиента» $s\text{grad } f(x)$.

Определение 4. Кососимметрическим градиентом $s\text{grad } f$ гладкой функции f (относительно скалярного произведения ω) называется векторное поле, однозначно определяемое соотношением $\omega(\mathbf{Y}, s\text{grad } f) = \mathbf{Y}(f)$, где \mathbf{Y} пробегает множество всех гладких векторных полей на M^{2n} , а $\mathbf{Y}(f)$ — значение оператора \mathbf{Y} на функции f .

Однозначность определения $s\text{grad } f$ следует из невырожденности ω .

Определение 5. Гладкое многообразие M^{2n} называется *симплектическим*, если на нем задана внешняя дифференциальная 2-форма ω , такая, что:

- 1) ω невырождена;
- 2) $d\omega = 0$, т. е. форма ω замкнута.

Оказывается, что на симплектических многообразиях существует атлас специального вида, в котором форма ω (называемая «симплектической структурой») принимает канонический вид, а именно: для любой точки $P \in M^{2n}$ существуют окрестность $U(P)$ и координаты $\{p^1, \dots, p^n; q^1, \dots, q^n\}$ в ней, в которых ω имеет вид $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$. Эти координаты называются *симплектическими*. Их существование утверждает известная теорема Дарбу, которую мы не будем доказывать.

Важный пример симплектического многообразия: $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n}$, где $p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n$ — декартовы координаты и $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$. Эта форма имеет постоянные коэффициенты $\omega_{ij}^{(2)}$, поэтому $d\omega^{(2)} \equiv 0$, т. е. форма замкнута. Невырожденность ее очевидна. Другим важным примером симплектических многообразий являются гладкие двумерные ориентируемые многообразия. На них можно задать симплектическую структуру, взяв в качестве 2-формы внешнюю форму площади относительно римановой метрики, т. е. форму, задаваемую в локальных координатах (x, y) так: $\omega = \sqrt{g} dx \wedge dy$, где $g = \det(g_{ij})$. Невырожденность ω следует из того, что $\sqrt{g} \neq 0$, а замкнутость ω очевидна.

Определение 6. Гладкое векторное поле X на симплектическом многообразии M^{2n} с формой ω называется *гамильтоновым*, если оно имеет вид $X = \text{sgrad } H$, где H — некоторая гладкая функция на M^{2n} . Функция H называется *гамильтонианом потока*.

Найдем явную формулу для $\text{sgrad } f$. Имеем $\omega(\text{sgrad } f, Y) = \omega_{ij}(\text{sgrad } f)^i Y^j = Y^k (\partial f / \partial x^k)$, откуда $(\text{sgrad } f)^i = \omega^{ij} (\partial f / \partial x^j)$, т. е. вектор $\text{sgrad } f$ сопряжен (относительно скалярного произведения ω) к вектору $\text{grad } f$.

Пусть H — гладкая функция на M^{2n} , отнесенная к симплектическим координатам (p^i, q^i) , т. е. $\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$. Тогда $\text{sgrad } H = (\partial H / \partial q^i; -\partial H / \partial p^i)$.

Гамильтоновы поля допускают важное описание на языке однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной этим полем. Пусть $X = \text{sgrad } H$ — гамильтоново поле и \mathcal{G}_t — соответствующая группа сдвигов вдоль его интегральных траекторий.

Группа действует на форму ω , переводя ее в форму $(\mathcal{G}_t)^* \omega$. Если при этом точка y переходит в точку $x_t(y) = \mathcal{G}_t(y)$, то

$$(\mathcal{G}_t)^* \omega = \omega_{ij}(x_t(y)) dx_t^i(y) \wedge dx_t^j(y) = \omega_{kp}(t, y) dy^k \wedge dy^p,$$

где $\omega_{kp}(t, y) = \omega_{ij}(x_t(y)) (\partial x_t^i(y) / \partial y^k) (\partial x_t^j(y) / \partial y^p)$.

Векторное поле X на симплектическом многообразии может не допускать глобального представления в виде $X = \text{sgrad } H$, однако оно может обладать следующим важным свойством: для любой точки $P \in M^{2n}$ существует такая окрестность $U(P)$ и такая функция H_U , определенная в ней, что $X(v) = \text{sgrad } H_U(v)$, где $v \in U$. Такие поля назовем локально-гамильтоновыми. Локальные гамильтонианы H_U , вообще говоря, не «сшиваются» в единый гамильтониан на всем многообразии. В силу теоремы Дарбу изучение локально-гамильтоновых полей сводится к изучению гамильтоновых полей в \mathbf{R}^{2n} со структурой $\sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$.

Теорема 4. *Векторное поле \mathbf{X} на симплектическом многообразии M^{2n} является локально-гамильтоновым в том и только том случае, когда однопараметрическая группа \mathfrak{G}_t сохраняет симплектическую структуру ω .*

Доказательство. В силу теоремы Дарбу достаточно доказать теорему только для случая, когда M^{2n} есть \mathbb{R}^{2n} со структурой $\omega^{(2)} = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$.

Докажем, что если ω сохраняется при действии \mathfrak{G}_t , то поле \mathbf{X} локально-гамильтоново. То, что ω переходит в себя при действии \mathfrak{G}_t , означает, что производная формы вдоль поля \mathbf{X} равна нулю, т. е. $0 = d\omega(\gamma(t))/dt$, где $\gamma(t)$ — интегральная траектория \mathbf{X} . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n dp^i(t) \wedge dq^i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[d\left(\frac{dp^i(t)}{dt}\right) \wedge dq^i(t) + dp^i(t) \wedge d\left(\frac{dq^i(t)}{dt}\right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n [d(X^i(t)) \wedge dq^i(t) + dp^i(t) \wedge dY^i(t)], \end{aligned}$$

где $\mathbf{X} = (X^i, Y^i)$, $1 \leq i \leq n$. Далее

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(\gamma(t)) &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial X^i}{\partial p^k} + \frac{\partial Y^k}{\partial q^i} \right) dp^k \wedge dq^i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial X^i}{\partial q^k} - \frac{\partial X^k}{\partial q^i} \right) dq^k \wedge_{(k < i)} dq^i + \left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k} - \frac{\partial Y^k}{\partial p^i} \right) dp^i \wedge_{(i < k)} dp^k \right] = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$-\frac{\partial X^i}{\partial p^k} = \frac{\partial Y^k}{\partial q^i}; \quad \frac{\partial X^k}{\partial q^i} = \frac{\partial X^i}{\partial q^k}; \quad \frac{\partial Y^i}{\partial p^k} = \frac{\partial Y^k}{\partial p^i}.$$

Это означает, что 1-форма $\alpha = \sum_{i=1}^n (Y^i dp^i - X^i dq^i)$ является замкнутой. В самом деле

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial Y^i}{\partial p^k} - \frac{\partial Y^k}{\partial p^i} \right) dp^k \wedge_{(k < i)} dp^i + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial Y^i}{\partial q^k} + \frac{\partial X^k}{\partial p^i} \right) dq^k \wedge dp^i + \left(\frac{\partial X^k}{\partial q^i} - \frac{\partial X^i}{\partial q^k} \right) dq^k \wedge dq^i \right] = 0 \end{aligned}$$

в силу полученных выше соотношений. Из замкнутости 1-формы α на \mathbb{R}^{2n} следует, что существует гладкая функция H , градиент которой равен этой форме, т. е. $\alpha = dH$. В самом деле, H можно в

явном виде восстановить по формуле

$$H(x) = \int_{\gamma} \alpha = \int_{\gamma(t)} \sum_{i=1}^n (Y^i dp^i - X^i dq^i) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(Y^i \frac{dp^i}{dt} - X^i \frac{dq^i}{dt} \right) dt,$$

где $\gamma(t)$ — произвольная гладкая траектория, идущая из фиксированной точки в переменную точку с координатами (p^i, q^i) . Число $H(x)$ не зависит от выбора такого пути. Для $n = 2$ мы доказали это в гл. 4. Для $n > 2$ это следует из формулы Стокса. В самом деле, рассмотрим пути: $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, где $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$; $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Тогда

$$\int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = \int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \alpha = \int_{\partial D^2} \alpha = \int_{D^2} d\alpha = 0,$$

где D^2 — произвольный диск, ограниченный этими траекториями (самопересечения допускаются). Построение H закончено. Осталось доказать обратное: если \mathbf{X} — гамильтоново поле в \mathbf{R}^{2n} , то группа \mathfrak{G}_t сохраняет ω , т. е. $\mathbf{X}(\omega) = 0$. Достаточно повторить в обратном порядке все предыдущие выкладки. Теорема доказана. ■

Теперь легко предъявить примеры гамильтоновых потоков. Например, рассмотрим сферу с g ручками, снабженную какой-либо римановой метрикой и симплектической структурой $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy$ (см. выше). Как описать все гамильтоновы потоки на этом симплектическом многообразии? Напомним, что поле \mathbf{X} на M_g^2 имеет нулевую дивергенцию, если площадь произвольной области A не меняется при сдвигах вдоль интегральных траекторий поля.

СЛЕДСТВИЕ 1. Гамильтоновы потоки на M_g^2 — это несжимаемые потоки и только они, т. е. потоки, для которых $\operatorname{div} \mathbf{X} = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 4 мы должны описать все потоки, сохраняющие форму ω . Поскольку в качестве такой формы мы выбрали форму площади: $\omega = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy$, то гамильтонов поток — это поле, сохраняющее форму площади. Как мы знаем из гл. 4, это потоки с нулевой дивергенцией и только они. Следствие доказано. ■

Приведем важный пример гамильтонова потока — динамическую систему, описывающую движение трехмерного твердого тела с одной неподвижной точкой. Для этого следует рассмотреть \mathbf{R}^3 , отождествленное с линейным пространством всех вещественных кососимметрических матриц 3-го порядка; пусть $X \in \mathbf{R}^3$ — такая матрица. Зададим в \mathbf{R}^3 самосопряженный линейный оператор: $\varphi: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, действующий по формуле $\varphi X = XI + IX$, где I —

матрица вида $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, λ_i — вещественные числа. Ясно,

что матрица φX кососимметрическая. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (записанную в матричном виде) $\varphi \dot{X} = [X, \varphi X]$. Из механики известно, что этими уравнениями описывается движение трехмерного твердого тела с закрепленной точкой. Запишем уравнения в координатной форме. При этом удобно в действительности рассматривать сразу n -мерное твердое тело, вращающееся в \mathbf{R}^n вокруг закрепленной точки, и систему вида $\varphi \dot{X} = [X, \varphi X]$, где $\varphi: so(n) \rightarrow so(n)$; $so(n) = \{X : X^T = -X\}$ имеет вид $\varphi X = XI + IX$, $I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Считая, что $X = (x_{ij})$, $x_{ij} = -x_{ji}$, получаем

$$\begin{aligned} (\varphi X)_{ij} &= (\lambda_i + \lambda_j)x_{ij}; \quad (\dot{X})_{ij} = \sum_k (x_{ik}(\varphi X)_{kj} - (\varphi X)_{ik}x_{kj}) = \\ &= (\lambda_j - \lambda_i) \sum_k x_{ik}x_{kj}, \quad \dot{x}_{ij} = \frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_j + \lambda_i} \sum_k x_{ik}x_{kj}. \end{aligned}$$

При $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} x_{13}x_{32}; \quad \dot{x}_{13} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} x_{12}x_{23}; \\ \dot{x}_{23} &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2} x_{21}x_{13}. \end{aligned}$$

Положив $x_{12} = x$, $x_{13} = y$, $x_{23} = z$, получаем систему

$$\dot{x} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} yz; \quad \dot{y} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} xz; \quad \dot{z} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} yx.$$

Этот поток допускает два интеграла: $P = x^2 + y^2 + z^2$; $Q = x^2(\lambda_1 + \lambda_2) + y^2(\lambda_1 + \lambda_3) + z^2(\lambda^2 + \lambda^3)$. В самом деле, эти функции постоянны вдоль интегральных траекторий потока. Найдем производные $\dot{X}(P)$ и $\dot{X}(Q)$. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{X}(P) &= 2xyz \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1} + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3} \right) = \\ &= \frac{2xyz}{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)} [(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_3) + \\ &+ (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3) + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_1)] = 0, \end{aligned}$$

$$\dot{X}(Q) = 2xyz(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \equiv 0,$$

что и требовалось.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ и λ_i попарно различны, то эти два интеграла функционально независимы в точках общего положения (приверите!). Следовательно, интегральные траектории являются линиями пересечения двух семейств поверхностей — сфер $P = \text{const}$ и эллипсоидов $Q = \text{const}$. Поле X удобно изобразить на поверхности уровня $Q = \text{const}$ (рис. 7.17). Теперь зафиксируем какую-либо сферу $P = \text{const}$ и ограничим на нее поток \dot{X} . Мы утверждаем, что этот поток гамильтонов. В самом деле, достаточно доказать, что \dot{X} сохраняет форму площади, т. е. бездивергентен. Достаточно проверить, что поток сохраняет форму объема в объемлющем евклидовом пространстве. Но это очевидно,

так как выражение $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$ тождественно равно нулю (см. явный вид $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$). Как видно на данном при-

мере, большое значение для описания геометрического поведения потока имеют его интегралы; в случае трехмерного твердого тела уравнения движения оказались вполне интегрируемы, т. е. мы указали два интеграла движения.

Рассмотрим вопрос об интегралах гамильтоновых потоков. Полезно ввести новую операцию на пространстве гладких функций на симплектическом многообразии.

Определение 7. Скобкой Пуассона двух гладких функций f, g на симплектическом многообразии M^{2n} называется функция $\{f, g\}$, определяемая формулой

$$\{f, g\} = \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = \omega_{ij} (\text{sgrad } f)^i (\text{sgrad } g)^j.$$

Явная формула для операции $f, g \rightarrow \{f, g\}$ такова:

$$\{f, g\} = \omega^{k\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha},$$

так как $(\text{sgrad } f)^i = \omega^{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$.

Предложение 3. Скобка Пуассона $f, g \rightarrow \{f, g\}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

1) операция $\{f, g\}$ билинейна;

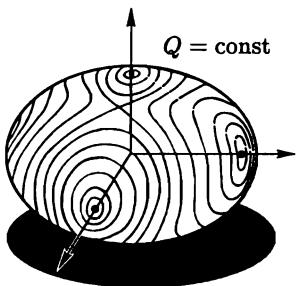


Рис. 7.17

- 2) операция $\{f, g\}$ кососимметрична, т. е. $\{f, g\} = -\{g, f\}$;
 3) имеет место тождество Яаки

$$\{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{f, \{g, h\}\} = 0.$$

Доказательство. Докажем теорему для частного случая $M^{2n} = \mathbf{R}^{2n}$ с канонической симплектической структурой. Свойства (1) и (2) сразу следуют из определений. Докажем (3). Через L_f обозначим дифференцирование вдоль поля $\text{sgrad } f$, т. е. $L_f(h) = (\text{sgrad } f)h$. Мы утверждаем, что выражение, стоящее в левой части (3), есть сумма мономов, в каждый из которых входит вторая частная производная какой-либо из трех функций: f, g, h . В самом деле рассмотрим $\{f, g\}$. Из определения sgrad получаем

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(\text{sgrad } f, \text{sgrad } g) = -(\text{sgrad } g)f = \\ &= -L_g(f) = -(\text{sgrad } g)^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Но $(\text{sgrad } g)^i = -\frac{\partial g}{\partial q^i}$, $(\text{sgrad } g)^j = \frac{\partial g}{\partial p^j}$. Следовательно, $\{f, g\}$ является линейной комбинацией мономов, состоящих из произведений частных производных первого порядка. Отсюда

$$\{h, \{f, g\}\} = -\{\{f, g\}, h\} = -L_{\{f, g\}}(h) = -(\text{sgrad } \{f, g\})^i \frac{\partial h}{\partial x^i},$$

т. е. выражение $\{h, \{f, g\}\}$ есть сумма мономов, каждый из которых содержит вторые частные производные либо от функции f , либо от функции g . Итак, левая часть тождества (3) есть сумма мономов, в каждый из которых множителем входит вторая частная производная. Фиксируем теперь, например, h . Соберем вместе все члены в левой части (3), содержащие вторые производные функции h . Эти члены имеют вид

$$\{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} = L_f L_g h - L_g L_f h = [L_f, L_g]h.$$

С другой стороны, коммутатор двух операторов первого порядка L_f и L_g является оператором первого порядка (а не второго), т. е. выражение $[L_f, L_g]h$ содержит только производные первых порядков от h . Итак, левая часть (3) вообще не содержит вторых производных от h . По тем же причинам левая часть (3) не содержит и вторых производных от f и g , т. е. левая часть (3) равна нулю. Предложение доказано. ■

Линейное пространство с билинейной операцией, удовлетворяющей свойствам (1)–(3), называется *алгеброй Ли*.

СЛЕДСТВИЕ 2. Линейное пространство $F(M^{2n})$ всех гладких функций на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) является алгеброй Ли по отношению к скобке Пуассона $\{f, g\}$.

Это следует из доказанного выше. Алгебра Ли $F(M)$ бесконечномерна. Рассмотрим отображение α алгебры Ли $F(M)$ в алгебру Ли $V(M)$ всех гладких векторных полей на M , определенное формулой $\alpha(f) = \text{sgrad } f$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Отображение $\alpha: f \rightarrow \text{sgrad } f$ является гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. $\alpha\{f, g\} = [\alpha f, \alpha g]$.

Доказательство. Следует доказать, что $\text{sgrad}\{f, g\} = [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g]$. Из тождества Яоби имеем:

$$\begin{aligned} (\text{sgrad}\{f, g\})h &= \omega(\text{sgrad}\{f, g\}, \text{sgrad } h) = -\{h, \{f, g\}\} = \\ &= -\{g, \{f, h\}\} + \{f, \{g, h\}\} = -L_g L_f h + L_f L_g h = [L_f, L_g]h, \\ \text{sgrad}\{f, g\} &= [\text{sgrad } f, \text{sgrad } g], \end{aligned}$$

что и требовалось. ■

Так как α — гомоморфизм алгебр Ли, то образом алгебры Ли $F(M)$ в алгебре Ли $V(M)$ всех гладких полей на M является некоторая подалгебра, которую мы обозначим через $H(M)$. Из определения α следует, что это — алгебра Ли всех гамильтоновых полей на M . Тем самым $\alpha: F(M) \rightarrow H(M)$ — эпиморфизм. Однако α не мономорфизм, так как имеет нетривиальное ядро: ядром α являются локально постоянные функции, а если предположить, что M связно, то ядро α одномерно и состоит из постоянных функций на M . Следовательно, $H(M) \cong F(M)/R^1$. Подалгебра $H(M) \subset V(M)$, $H(M) = H_\omega(M)$ зависит, конечно, от симплектической структуры.

Скобка Пуассона играет роль в изучении интегралов гамильтоновых потоков.

Предложение 4. Пусть $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонов поток на M^{2n} , и пусть $f(x)$ — гладкая функция, коммутирующая с гамильтонианом H , т. е. $\{f, H\} \equiv 0$. Тогда f является интегралом потока v , т. е. функция f постоянна вдоль интегральных траекторий поля v . Обратно: любой интеграл g поля $\text{sgrad } H$ коммутирует с H : $\text{sgrad}\{g, H\} = 0$.

Доказательство. Достаточно найти производную f вдоль поля v , т. е. $(\text{sgrad } H)f$. В силу определения $\text{sgrad } H$, имеем: $(\text{sgrad } H)f = \{H, f\} \equiv 0$, что и требовалось. ■

Учебное издание

*МИЩЕНКО Александр Сергеевич
ФОМЕНКО Анатолий Тимофеевич*

**КРАТКИЙ КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
И ТОПОЛОГИИ**

Редактор *Р.А. Бунатян*
Оригинал-макет: *А.А. Плярнтуу*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 02.02.04.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19. Уч.-изд. л. 18,875. Заказ № 1916

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерperiодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, <http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс: (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru <http://www.vologda/~pfpv>

ISBN 5-9221-0442-X



9 785922 104425

Справочники

- Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П.* Таблицы неопределенных интегралов.
- Воройский Ф.С.* Основы проектирования автоматизированных биб.-инф. систем.
- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.
- Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.
- Купцов А.Х., Жижин Г.Н.* Фурье-спектры комбинационного рассеяния и инфракрасного поглощения полимеров.
- Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики.
- Полянин А.Д., Зайцев В.Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики.
- Полянин А.Д., Манжиров А.В.* Справочник по интегральным уравнениям.
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. В 3 т.

Научно-популярная литература

Афанасьев О.В., Резвецова М.Д., Самохина Т.С. Сравнительная типология английского и русского языков (практикум).

Баврин И.И. Сельский учитель С.А. Рачинский и его задачи для умственного счета.

Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молний и молниезащиты.

Бессараб М.Я. Так говорил Ландау.

Богданкевич О.В. Лекции по экологии.

Бродянский В.М. Вечный двигатель — прежде и теперь. От утопии — к науке, от науки — к утопии.

Воспоминания об академике А.Б. Мигдале.

Делоне Н.Б. Атом в сильном поле лазерного излучения.

Киселев А.П. Арифметика.

Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика (Основные положения, точные результаты и асимптотические приближения).

Колмогоров А.Н. Звуков сердца тихое эхо.

Колмогоров А.Н. Истина — благо.

Колмогоров А.Н. Этих строк бегущая тесьма . . .

Любимов А., Киш Д. Введение в экспериментальную физику частиц.

Сергей Алексеевич Лебедев. К 100-летию со дня рождения основоположника отечественной электронной вычислительной техники.

Стечкин Б.С. Избранные труды: Научные, педагогические, публицистические материалы.

Стечкин Б.С. Избранные труды: Теория тепловых двигателей.

И другие книги

По вопросам приобретения книг обращаться:
Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
тел./факс (095) 334-7421, e-mail: fizmat@maik.ru