УДК 519.85
ББК 22.18
К 21

Карманов В.Г. **Математическое программирование**: Учеб. пособие. — 5-е изд., стереотип. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с. — ISBN 5-9221-0170-6.

Рассматривается широкий круг вопросов, связанных с математическим программированием. Изложены теоретические основы возникающих здесь задач линейного, выпуклого и нелинейного программирования и построения численных методов для их решения.

По сравнению с изданием 1986 г. в книгу включены результаты, связанные с исследованиями в области численных методов оптимизации и их применением к решению экстремальных задач, в том числе задач вырожденного типа.

Четвертое издание — 2000 г.

Для студентов высших учебных заведений.

ISBN 5-9221-0170-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга содержит основные положения теории математического программирования и численные методы решения соответствующих экстремальных задач.

Книга написана на основе лекций, которые автор читал в течение ряда лет на механико-математическом факультете и на факультете вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Естественно, что в курсе, предназначенном для первого знакомства с предметом, представлены лишь основные численные методы. В связи с этим настоящая книга не может служить справочником, в котором читатель рассчитывает найти тот самый алгоритм, который ему необходим для решения возникшей перед ним реальной задачи оптимизации.

Глава 1 посвящена предмету математического программирования, его месту в науке об исследовании операций, примерам задач технико-экономического содержания, математическими моделями которых являются задачи математического программирования.

В главе 2 излагается математический аппарат, на который опираются последующие главы книги.

В главе 3 основное место отводится условиям оптимальности — необходимым условиям локального минимума в задачах нелинейного программирования, необходимым и достаточным условиям разрешимости задач выпуклого программирования.

Глава 4 — теория линейного программирования.

Основные методы решения задач линейного программирования изложены в главе 5.

Получивший широкое распространение метод штрафных функций рассмотрен в главе 6.

Важному понятию устойчивости задач математического программирования посвящена глава 7. Здесь изложен метод регуляризации для решения неустойчивых экстремальных задач.

Многократное решение задач одномерной минимизации — непременный этап большинства численных методов математического программирования, в связи с чем и появилась глава 8.

На первый взгляд методы решения задач безусловной оптими-

зации относятся к “численному анализу”, однако эти методы стали неотъемлемой частью математического программирования. Так, экстремальные задачи с ограничениями (условно-экстремальные задачи) методом штрафных функций сводятся к задачам безусловной оптимизации, то же самое относится и к методу регуляризации. Кроме того, идеи многих методов решения условно-экстремальных задач существенно базируются на методах безусловной оптимизации, которым посвящена глава 9. Весьма существенный раздел этой главы посвящен стабилизирующим свойствам методов градиентного типа, позволяющим находить нормальное решение некорректных задач, не прибегая к процедуре регуляризации. Этот раздел дополняют исследования, изложенные в главе 7.

Глава 10 посвящена методам решения экстремальных задач с ограничениями: методам проекции градиента, условного градиента, методу возможных направлений и методам случайного спуска.

Внимание многих специалистов привлечено к методам решения задач математического программирования, основанным на построении модифицированных функций Лагранжа. Эти вопросы рассмотрены в главе 11.

Основное внимание при исследовании методов, излагаемых в настоящей книге, уделяется вопросам сходимости и устойчивости, а также априорным оценкам скорости сходимости — одной из существенных характеристик качества методов.

Относительно численных методов следует сделать одно замечание: при решении реальной задачи самый неудачный, на первый взгляд, метод может оказаться весьма эффективным; в связи с этим автор воздержался от заманчивой перспективы привести некоторые сравнительные характеристики методов, выходящие за рамки оценок скорости сходимости.

При работе над книгой большую помощь автору оказывали сотрудники ВЦ РАН В.А. Березнев, О.А. Брежнева, А.Ф. Измайлов и А.А. Третьяков, совместную многолетнюю работу с которыми автору трудно переоценить.

В.Г. Карманов

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет математического программирования

1.1.1. Содержание предмета. Содержание математического программирования составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). Математическое программирование является одним из разделов науки об исследовании операций.

1.1.2. Области применения. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании, в военном деле и т. д.

Значительное число задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т. е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При том ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное в некотором смысле решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объема информации об изучаемом явлении,— с помощью ряда прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает на современном промышленном предприятии с многосерийным и многономенклатурным производством, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения компьютеров. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения.

1.1.3. Принятие решений. Проблема принятия решений в исследовании операций неразрывно связана с процессом моделирования.

Под понятием, обозначаемом термином *модель*, понимают способ отражать (в том числе и изображать) основное содержание иссле-

дуемого объекта. Таким образом, модель — это образ изучаемого явления (объекта), т. е. его описание тем или иным средством, которым пользуется субъект моделирования (описания), использующий модель в качестве представителя (заместителя) изучаемого объекта.

Первый этап процесса моделирования состоит в построении *качественной модели*, т. е. в выделении факторов, которые представляются наиболее важными, и в установлении закономерностей, которым они подчиняются.

Второй этап — построение *математической модели* рассматриваемой проблемы, т. е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель — это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных — основными параметрами явления (когда явление управляемое — между параметрами управления).

Будем называть математическую модель *точной**) в предположении, что все исходные величины числовых параметров модели являются точными (например, результаты наблюдений). В этом смысле точную модель иногда называют *идеальной*.

В дальнейшем будем предполагать существование *точного решения* математической задачи, соответствующей точной модели, т. е. существование соотношения, отвечающего цели (или целям) построения модели.

В реальной ситуации сведения о входных параметрах носят, как правило, приближенный характер (например, результаты измерений и т. п.), и в этом случае математическую модель и ей соответствующую задачу называют *реальными*, а решение задачи — *реальным решением*. Реальное решение может и не существовать, несмотря на априорное предположение о существовании точного решения. Заметим, что подобную весьма возможную ситуацию следует учитывать при выборе соответствующих численных методов, а именно таких, которые позволяют получать приближения к точному решению, не обращаясь к проблеме существования реальных решений.

Обратим внимание на то, что, поскольку точная модель по предположению (построению) отражает основное содержание (свойства, цели) моделируемого объекта, этому же условию должна (обязана) удовлетворять (с известной степенью точности) и реальная модель. Вновь подчеркнем, что точная модель так же, как и точное решение дает лишь приближенные сведения о моделируемом объекте, завися-

*) Это название не вполне удачно, но оно уже вошло в обиход. Заметим, что иногда точную модель называют идеальной (в смысле идеализированной). Но мы будем придерживаться устоявшегося названия.

щие от степени адекватности точной модели моделируемому объекту; поэтому точность входных данных реальной модели и точность вычислений в процессе решения должны согласовываться со степенью адекватности точной модели. И, что существенно, реальная модель должна обладать свойствами точной модели, обеспечивающими выполнение условий построения выбираемого численного метода.

Этот этап включает также построение *целевой функции*, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимающего решения.

Итак, в результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача.

Второй этап уже требует привлечения математических знаний.

Третий этап — исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических задач, возникающих на втором этапе процесса принятия решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание *математического программирования*.

На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решения соответствующих экстремальных задач. Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения компьютеров, а значит, требует либо создания программ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

Четвертый этап — сопоставление результатов вычислений, полученных на третьем этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации.

Здесь возможны два случая.

1-й случай. Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса: уточняется входная информация о моделируемом объекте и в случае необходимости уточняется постановка задачи (первый этап), уточняется или строится заново математическая модель (второй этап), решается соответствующая математическая задача (третий этап) и, наконец, снова

проводится сопоставление (четвертый этап).

2-й случай. Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации. Предположим, например, что целью моделирования является создание календарных планов производственной деятельности предприятия. Тогда эксплуатация модели включает в себя сбор и обработку информации, ввод обработанной информации в компьютер, расчеты на основе разработанных программ календарных планов и, наконец, выдачу результатов вычислений (в удобном для пользователей виде) для их использования в сфере производственной деятельности.

Подготовка модели к эксплуатации предусматривает разработку специального математического обеспечения, без которого невозможно практическое использование модели: должна быть создана гибкая система программ, обеспечивающая пользователям удобный контакт с компьютером и не требующая при ее эксплуатации высокой математической квалификации пользователей.

В то же время математическое обеспечение (впрочем, так же, как и сама модель) должно допускать модернизацию в связи с новыми требованиями, которые жизнь постоянно предъявляет к производству. Подчеркнем, что именно модернизацию, а не создание каждый раз новой системы программ. Только при этих условиях возможно регулярное использование математических моделей в процессе управления.

1.2. Еще раз о моделях

Поскольку курс математического программирования включает в себя доказательства значительного числа различных теорем и разбор разнообразных методов решения экстремальных задач, может сложиться впечатление, что роль математика в решении прикладных задач ограничивается его участием в третьем этапе процесса моделирования, в то время как на остальных этапах заняты специалисты, знающие неформализованные стороны моделируемого объекта. Действительно, бывает и так, но, как правило, результаты такого разделения труда в процессе моделирования оказываются неудовлетворительными. Дело в том, что модель лишь приближенно отражает рассматриваемые свойства моделируемого объекта, и степень этого приближения должна согласовываться с точностью входной информации о явлении.

Часто появляется желание построить такую математическую модель, в которой учитывалось бы огромное число входных данных. Однако при тщательном анализе оказывается, что влияние многих

из них на решение либо незначительно, либо просто отсутствует из-за невысокой точности входных данных. Кроме того, нельзя не учитывать то обстоятельство, что математическая модель с большим числом параметров приводит к задаче оптимизации функций столь большого числа переменных, что найти ее численное решение с точностью, согласованной с точностью входной информации, оказывается в реальной ситуации делом безнадежным.

Таким образом, целый ряд условий, предъявляемых к математическим моделям, требует участия математиков в решении прикладных задач уже на втором этапе процесса моделирования.

Среди условий, которые предъявляются к математическим моделям, существенное место отводится требованиям, связанным с применением методов решения математических задач, возникающих на основе разрабатываемых моделей. Поскольку эти вопросы на начальных этапах процесса моделирования часто являются проблемами второго плана и к ним обращаются лишь когда дело касается выбора средств решения соответствующих задач, представляется целесообразным определять минимальный набор требований, возникающих при решении задач для моделей наиболее общего вида, широко применяемыми численными методами.

1.3. Вопросы классификации и специфики

1.3.1. Направления. В математическом программировании можно выделить два направления. К первому, уже вполне сложившемуся направлению — собственно математическому программированию — относятся детерминированные задачи — когда вся исходная информация является полностью определенной.

Ко второму направлению — так называемому стохастическому программированию — относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками. Так, планирование производственной деятельности зачастую производится в условиях неполной информации о реальной ситуации, в которой будет выполняться план. Или, скажем, когда экстремальная задача моделирует работу автоматических устройств, которая сопровождается случайными помехами. Заметим, что одна из главных трудностей стохастического программирования состоит в самой постановке задач главным образом из-за сложности анализа исходной информации.

1.3.2. Основные разделы. Традиционно в математическом программировании выделяют следующие основные разделы.

Линейное программирование: целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается систе-

мой линейных равенств и неравенств. В свою очередь в линейном программировании существуют классы задач, структура которых позволяет создать специальные методы их решения, выгодно отличающиеся от методов решения задач общего характера. Так в линейном программировании появился раздел *транспортных задач*.

Нелинейное программирование: нелинейны целевая функция и ограничения. Нелинейное программирование принято подразделять следующим образом.

Выпуклое программирование: когда выпукла целевая функция (если рассматривается задача ее минимизации) и выпукло множество, на котором решается экстремальная задача.

Квадратичное программирование: когда целевая функция квадратична, а ограничения — линейные равенства и неравенства.

Многоэкстремальные задачи: здесь обычно выделяют специализированные классы задач, часто встречающихся в приложениях, например, задачи о минимизации на выпуклом множестве вогнутых функций.

Важным разделом математического программирования является *целочисленное программирование* — когда на переменные накладываются условия целочисленности.

1.3.3. Специфика. В чем состоит специфика задач математического программирования?

Во-первых, к задачам математического программирования неприменимы, как правило, методы классического анализа для отыскания условных экстремумов, так как даже в наиболее простых задачах — линейных — экстремум достигается в угловых точках границы множества условий, т. е. в точках, где нарушается дифференцируемость. И наиболее сильный метод решения экстремальных задач в классическом анализе — метод множителей Лагранжа — разработан для случая, когда множество условий задается системой уравнений, а не системой неравенств.

Другой специфической особенностью является то, что в практических задачах число переменных и ограничений столь велико, что если просто перебирать все точки, “подозреваемые в экстремальности”, например, все угловые точки множества условий, то никакая современная вычислительная система будет не в состоянии справиться с этой задачей в мало-мальски разумные сроки.

В связи со сказанным целью математического программирования является создание, где это возможно, аналитических методов определения решения, а при отсутствии таких методов — создание эффективных вычислительных способов получения приближенного решения.

Наконец, заметим, что название “математическое программиро-

вание” связано с тем, что целью решения задач является выбор программы действий.

1.4. Примеры математических моделей

1.4.1. Теория математических моделей является предметом специального курса и требует от читателя в первую очередь знакомства с той областью знаний, которой принадлежит моделируемый объект.

В настоящей книге приводятся традиционные примеры, иллюстрирующие применение метода математического моделирования в задачах экономического содержания.

1.4.2. Задача о рационе. По заданному ассортименту продуктов при известном содержании в каждом из них питательных веществ и известной стоимости продуктов составить рацион, удовлетворяющий необходимым потребностям с минимальными денежными затратами.

Пусть имеется n различных продуктов и m питательных веществ (например, жиров, белков, углеводов, витаминов и др.). Обозначим через a_{ij} содержание (в единицах массы) j-го питательного вещества в единице массы i-го продукта; через b_j обозначим минимальную (в единицах массы) суточную потребность в j-м питательном веществе. Наконец, через x_i обозначим искомое суточное потребление i-го продукта. Очевидно, что $x_i \geqslant 0$.

Величина $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i$ есть общее содержание j-го питательного вещества в рационе, которое не должно быть меньше минимальной потребности b_j:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Если c_i — стоимость единицы массы i-то продукта, то стоимость всего рациона определяет линейная форма $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Итак, математическая формулировка *задачи выбора рациона* состоит в следующем:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \geqslant b_j, \quad j = \overline{1,m},$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Эта задача является одной из типичных задач *линейного программирования.*

В постановке задачи вовсе не обязательно было указывать, что это задача о рационе. Достаточно ясно, что таким же образом могут быть сформулированы многочисленные задачи об оптимальных смесях (слово “смесь” здесь следует понимать в обобщенном смысле: это и собственно смесь, и сплав, и рацион, и т. д.).

1.4.3. Транспортная задача. Другим типичным примером задачи линейного программирования является транспортная задача. Требуется составить план перевозок однородного груза таким образом, чтобы общая стоимость перевозок была минимальной.

Исходная информация:

a_i — количество единиц груза в i-м пункте отправления ($i = \overline{1,m}$);

b_j — потребность в j-м пункте назначения ($j = \overline{1,n}$) в единицах груза;

c_{ij} — стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта в j-й.

Обозначим через x_{ij} планируемое количество единиц груза для перевозки из i-го пункта в j-й.

В принятых обозначениях:

$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ — общая (суммарная) стоимость перевозок;

$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}$ — количество груза, вывозимого из i-го пункта;

$\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}$ — количество груза, доставляемого в j-й пункт.

В простейшем случае должны выполняться следующие очевидные условия:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Таким образом, математической формулировкой *транспортной задачи* будет:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$
$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Эта задача носит название *замкнутой транспортной модели.*

Заметим, что условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

является естественным условием разрешимости замкнутой транспортной задачи.

Более общей транспортной задачей является так называемая *открытая транспортная модель*:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$
$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Ясно, что в этой задаче не предполагается, что весь груз, накопленный в i-м пункте, должен быть вывезен.

В схему транспортной задачи укладываются и некоторые другие задачи технико-экономического содержания, например, так называемая *задача о выборе*: задача о наиболее экономном (в смысле суммарных затрат времени) распределении n работ между n исполнителями при известном времени, затрачиваемом каждым исполнителем на каждой работе. Эта задача является частной моделью замкнутой транспортной задачи при $m = n$ и $a_i = b_j = 1$.

Заметим, что решения транспортных задач обладают свойствами целочисленности при целочисленных значениях величин a_i, b_j, и поэтому эти задачи относят к задачам *линейного программирования.*

1.4.4. Задача о режиме работы энергосистемы. В качестве примера задачи выпуклого программирования рассмотрим простейшую среди задач об оптимальном ведении режима работы энергосистемы.

Рассматривается изолированная энергосистема, состоящая из теплоэлектростанций, связанных линиями передач с узлом, в котором сосредоточена нагрузка. Ставится задача распределения активных мощностей между электростанциями в заданный момент времени. Распределение осуществляется по критерию минимизации суммарных топливных затрат на генерацию активной мощности.

Обозначим через x_i активную мощность, генерируемую на i-й станции. Мощности x_i заключены в пределах α_i и β_i, определяемых техническими условиями: $\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i$. Кроме того, должно соблюдаться условие баланса мощностей, т. е. генерируемая общая мощность должна соответствовать потребляемой мощности P с учетом общих потерь π в линиях передач:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi.$$

Топливные затраты на генерацию мощности x_i представляют собой функцию $T_i(x_i)$, выпуклую на отрезке $[\alpha_i, \beta_i]$.

Таким образом, задача принимает вид:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m} T_i(x_i)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = P + \pi,$$

$$\alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Построенная модель является типичной *задачей выпуклого программирования с линейными ограничениями.* Решение этой задачи дает весьма грубое приближение к действительно оптимальному режиму работы энергосистемы. В реальной ситуации нельзя считать всю нагрузку сосредоточенной в одном узле, а следует рассматривать n узлов. Кроме того, потери в системе, естественно, не являются константой, а зависят от величин передаваемых мощностей и параметров линий передач.

В качестве следующего приближения можно рассматривать задачу, в которой π является билинейной функцией x_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$), где параметры управления x_{ij} означают количество активной мощности, передаваемое из i-й станции в j-й узел.

Очевидно, что в этой новой модели условия будут содержать нелинейности ($\pi(x_{ij})$ в уравнении баланса).

Эта задача также является *задачей выпуклого программирования*, но более сложного типа, чем предыдущая.

Примером многоэкстремальной задачи является простейшая задача о размещении.

1.4.5. Задача о размещении. Даны m пунктов потребления $(1, 2, ..., j, ..., m)$ с заданным объемом потребления b_j в каждом пункте. Имеются n возможных пунктов производства $(1, 2, ..., i, ..., n)$, причем для каждого i-го пункта известна зависимость стоимости производства f_i от объема производства x_i. (Предполагается, что в стоимость производства $f_i(x_i)$ включены капитальные затраты.) Наконец, задана матрица транспортных расходов a_{ij} (a_{ij} — стоимость перевозки единицы продукции из i-го пункта производства в j-й пункт потребления). Требуется найти такие объемы перевозок x_{ij} из i-го в j-й пункт и такие объемы производства $x_i = \sum\limits_j x_{ij}$, которые минимизируют суммарные расходы; иначе говоря, ищется

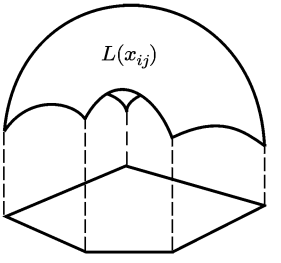

Рис. 1.1

$$\min \left[L(x_{ij}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} + \sum_i f_i(x_i) \right]$$

при условиях

$$\sum_i x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} \geqslant 0.$$

Поскольку себестоимость единицы продукции обычно убывает при увеличении объема производства, то функции $f_i(x_i)$, как правило, монотонно возрастают и выпуклы вверх. Множество значений x_{ij}, удовлетворяющих ограничениям задачи, образует выпуклый многогранник, вершины которого являются точками локальных минимумов функции $L(x_{ij})$ (рис. 1.1). Отсюда и название подобных задач — *многоэкстремальные.*

1.5. Основные обозначения

E_n — n-мерное евклидово пространство.

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ — вектор-столбец.

$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ — вектор-строка.

$\mathbf{x} \in R$ — $\mathbf{x}$ принадлежит R.

$\mathbf{x} \notin R$ — $\mathbf{x}$ не принадлежит R.

$R \subset S$ — R включено в S (теоретико-множественное включение).

$R \cap S$ — теоретико-множественное пересечение множеств R и S.

$\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ — теоретико-множественное пересечение множеств R_λ по индексу λ ($\lambda \in \Lambda$).

$R \cup S$ — теоретико-множественное объединение множеств R и S.

$\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ — теоретико-множественное объединение множеств R_λ по индексу λ.

$\varnothing$ — пустое множество.

$G(R)$ — граница множества R.

$\{\mathbf{x}\colon Q\}$ — множество всех элементов $\mathbf{x} \in E_n$, обладающих свойством Q.

$\{\mathbf{x} \in Y : Q\}$ — множество всех элементов $\mathbf{x} \in Y$, обладающих свойством Q.

$R \backslash S$ — теоретико-множественная разность, т. е. множество $\{x : x \in R,\ x \notin S\}$.

$\operatorname{int} R = R \backslash G(R)$ — внутренность множества R.

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$\|\mathbf{x}\| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2}$ — евклидова норма вектора $\mathbf{x}$.

$\{\mathbf{x}_k\}$ — последовательность точек $\mathbf{x}_k$.

$\{\alpha_k\}$ — последовательность чисел α_k.

$A = [a_{ij}]$ — матрица размерности $m \times n$.

$i = \overline{1, n}$ — i пробегает все целые значения от 1 до n.

A^T — матрица, транспонированная к матрице A: $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$, где

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, n}; \quad A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_n^T \end{bmatrix}.$$

AB — произведение матриц A и B:

$$C = [c_{ij}] = AB = \Big[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\Big].$$

B^{-1} — матрица, обратная к квадратной матрице B.

$(A\mathbf{x})_i$ — i-я компонента вектора $A\mathbf{x}$.

$\det B$ — определитель квадратной матрицы B.

$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ — полуупорядочение в E_n, означающее, что $x_i \geqslant y_i$ $(i = \overline{1, n})$.

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ — $x_i > y_i$ $(i = \overline{1, n})$.

$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ — $x_i \neq y_i$ хотя бы для одного номера i.

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ — отрезок с концами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, т. е. множество $\{\mathbf{z}\colon\ \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{z}\colon\ \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ \ 0 < \alpha < 1\}$ — интервал.

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \{\mathbf{z}\colon\ \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ \ 0 \leqslant \alpha < 1\}$ — полуинтервал.

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{z}\colon\ \mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y},\ \ 0 < \alpha \leqslant 1\}$ — полуинтервал.

$$\min\{\alpha, \beta\} = \begin{cases} \alpha, & \text{если} \quad \alpha \leqslant \beta, \\ \beta, & \text{если} \quad \alpha > \beta. \end{cases}$$

$\min\limits_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x})$ — запись задачи о минимизации скалярной функции $\varphi(x)$ на множестве X.

$\triangleq$ — символ определения и обозначения. ($y \triangleq f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ означает, что через y обозначена сумма $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$).

$\varphi'(\mathbf{x})$ — градиент функции $\varphi(x)$ в точке $\mathbf{x}$: $\varphi'(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\varphi(x) = \nabla\varphi(\mathbf{x})$.

$\operatorname{diam} X \triangleq \sup\limits_{\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X} \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$.

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha \geqslant 0, \\ -1, & \text{если} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

$P\{Q\}$ — вероятность того, что выполняется свойство Q.

$P\{Q|R\}$ — вероятность того, что выполняется свойство Q при условии R.

$\triangle$ — символ, означающий конец доказательства.

$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}$ — точка, в которой достигается минимум функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

$X^* = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}$ — совокупность всех точек, в которых достигается минимум функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

$E_n^+ = \{\mathbf{x} \in E_n,\ \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ — множество всех неотрицательных точек пространства E_n.

$:=$ — символ присваивания. ($\alpha := \beta$ означает, что α присваивают значение β).

ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА

2.1. Евклидово пространство. Выпуклые множества

2.1.1. Мы будем иметь дело с функциями, определенными на множествах конечномерного евклидова пространства E_n.

Совокупность всех наборов $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n вещественных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *евклидовым пространством* размерности n, если выполняются следующие условия. Пусть $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{y} \in \mathrm{E}$ и α — вещественное число. Тогда

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ (сложение),

$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ (умножение на число),

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ (скалярное произведение).

Наборы $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *точками* (*векторами*), а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — их *координатами.*

В евклидовом пространстве введено понятие *евклидовой нормы* (длины вектора)

$$||\mathbf{x}|| = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle^{1/2},$$

для которой справедливы следующие соотношения:

$$||\mathbf{x}|| \geqslant 0,$$

причем $||\mathbf{x}|| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

$$||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| ||\mathbf{x}||;$$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leqslant ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Евклидова норма и скалярное произведение связаны между собой неравенством Коши–Буняковского

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Евклидова норма порождает в E_n сходимость. Будем говорить, что *последовательность* $\{\mathbf{x}_m\}$ точек из E_n *сходится к точке* $\mathbf{x}$ при $m \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$, если

$$\lim_{m\to\infty} ||\mathbf{x}_m - \mathbf{x}|| = 0.$$

Точка $\mathbf{x}$ называется *предельной точкой* последовательности.

Приведем еще несколько определений.

2.1.2. Множество

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}\colon \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\}$$

будем называть *ε-окрестностью* точки $\mathbf{x}$.

2.1.3. Множество $X \subseteq E_n$ называют *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. такие точки, что любой окрестности каждой из них принадлежит бесконечно много точек из X.

2.1.4. Точка $\mathbf{x} \in X$ называется *внутренней точкой* множества X, если существует такая ее окрестность, все точки которой принадлежат множеству X.

2.1.5. Точка $\mathbf{x} \in X$ называется *граничной точкой* множества X, если в любой ее окрестности содержатся как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, не принадлежащие этому множеству. Множество $G(X)$, состоящее из всех граничных точек множества X, называется *границей* множества X.

2.1.6. Множество X n-мерного евклидова пространства E_n называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ ему принадлежит и соединяющий их отрезок $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

Выпуклость множества X означает, что из $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ следует $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in X$ для всех $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В E_2, например, выпуклы отрезок, полупрямая, прямая, круг, треугольник, полуплоскость и вся плоскость.

Легко видеть, что если множество X задается системой линейных равенств и неравенств:

$$X = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{a},\ \ B\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

где A, B — матрицы, то оно выпукло и замкнуто (последнее в силу линейности и, следовательно, непрерывности преобразований A и B).

Читателю предоставляется возможность самостоятельно убедиться в том, что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло.

2.1.7. Точка $\mathbf{z}$ называется *выпуклой комбинацией* точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, если $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 1$.

2.1.8. *Выпуклое множество X содержит все выпуклые комбинации своих точек.*

Доказательство (по индукции). В соответствии с определением 2.1.6 множество X содержит выпуклую комбинацию любых двух своих точек. Предположим, что X содержит выпуклые комбинации любых $m-1$ $(m > 1)$ своих точек. Рассмотрим выпуклую комбинацию $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m$ любых m точек из X. Очевидно, что существует хотя бы один номер i такой, что $\alpha_i < 1$. Не умаляя общности, можно полагать, что $\alpha_1 < 1$. Тогда $\mathbf{y} = \beta_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{x}_m$

при $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_1}$ является выпуклой комбинацией точек $\mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$, и по индуктивному предположению $\mathbf{y} \in X$. Поскольку $\mathbf{z} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + (1-\alpha_1)\mathbf{y}$ и $\alpha_1 \in [0,1]$, то по п. 2.1.6 из выпуклости X следует, что $\mathbf{x} \in X$. $\triangle$

2.2. Проекция. Теоремы отделимости

2.2.1. *Проекцией* точки $\mathbf{v}$ на множество X называют такую точку $P_X(\mathbf{v}) \triangleq \mathbf{p} \in X$, что

$$\|\mathbf{p}-\mathbf{v}\| = \inf_{\mathbf{x}\in X} \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\| \triangleq \rho(\mathbf{v}, X) = \rho. \tag{2.1}$$

При этом $\rho = \rho(\mathbf{v}, X)$ называют *расстоянием* от точки $\mathbf{v}$ до множества X.

2.2.2. *Для любого замкнутого множества X и любой точки $\mathbf{v}$ существует точка $\mathbf{p} \in X$, являющаяся проекцией $\mathbf{v}$ на X. Если, кроме того, множество X выпуклое, то точка $\mathbf{p}$ единственная.*

Доказательство. Если $\mathbf{v} \in X$, то очевидно, что $\mathbf{p} = \mathbf{v}$ и $\rho = 0$. Пусть точка $\mathbf{v}$ внешняя относительно X: $\mathbf{v} \notin X$. Согласно определению нижней грани существует последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, $\mathbf{x}_k \in X$, такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{v}\| = \rho.$$

Так как $\{\mathbf{x}_k\}$ ограничена, то существует подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_i}\}$ такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_{k_i} = \mathbf{p}.$$

Поскольку множество X замкнутое, то $\mathbf{p} \in X$. И окончательно получаем $\|\mathbf{p}-\mathbf{v}\| = \rho$.

Для доказательства единственности предположим, что существуют точки $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' \in X$, $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}''$, такие, что

$$\|\mathbf{p}'-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{p}''-\mathbf{v}\| = \rho.$$

Поскольку множество X выпуклое, то точка $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{p}' + \frac{1}{2}\mathbf{p}''$ принадлежит X. Точки $\mathbf{v}, \mathbf{p}', \mathbf{p}''$ и $\mathbf{z}$ лежат в одной плоскости, и из равнобедренности треугольника с вершиной в точке $\mathbf{v}$, основанием $[\mathbf{p}', \mathbf{p}'']$ и высотой $[\mathbf{v}, \mathbf{z}]$ следует $\|\mathbf{z}-\mathbf{v}\| < \rho$, что противоречит определению ρ. $\triangle$

2.2.3. Теорема. *Для того чтобы точка $\mathbf{p} \in X$ была проекцией точки $\mathbf{v}$ на выпуклое замкнутое множество X, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\mathbf{x} \in X$ выполнялось неравенство*

$$\langle \mathbf{x}-\mathbf{p}, \mathbf{v}-\mathbf{p} \rangle \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}$ — проекция точки $\mathbf{v}$ на X. Возьмем произвольную точку $\mathbf{x} \in X$ и рассмотрим $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{p}$. В силу выпуклости X для любого $\alpha \in [0,1]$ точка $\mathbf{z}$ принадлежит X. Так как

$$\|\mathbf{z}-\mathbf{v}\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2 + 2\alpha\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{p}-\mathbf{v}\|^2,$$
$$\|\mathbf{z}-\mathbf{v}\|^2 \geqslant \|\mathbf{p}-\mathbf{v}\|^2,$$

то

$$\alpha^2\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2 + 2\alpha\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{v}\rangle \geqslant 0.$$

Поскольку это неравенство справедливо для всех $\alpha \in [0,1]$, то

$$\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{v}\rangle \geqslant 0,$$

откуда следует (2.2).

Пусть теперь справедливо (2.2). Тогда для любого $\mathbf{x} \in X$ будет

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + (\mathbf{p}-\mathbf{v})\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2 + 2\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{p}-\mathbf{v}\|^2 \geqslant \|\mathbf{p}-\mathbf{v}\|^2,$$

т. е. $\mathbf{p}$ является проекцией $\mathbf{v}$ на X. $\triangle$

2.2.4. 1) Для любого $\mathbf{x} \in X$ выполняются соотношения

$$(\mathbf{x}-\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{p}) = (\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{x}-\mathbf{p}) + (\mathbf{p}-\mathbf{v},\mathbf{x}-\mathbf{p}) \geqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2$$

и

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|;$$

2) для любых $\mathbf{y},\mathbf{z} \in E_n$ справедливо неравенство

$$\|P_X(\mathbf{y}) + P_X(\mathbf{z})\| \leqslant \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|.$$

Действительно, 1) вытекает из того, что

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + (\mathbf{p}-\mathbf{v})\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2 + 2\langle\mathbf{x}-\mathbf{p},\mathbf{p}-\mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{p}-\mathbf{v}\|^2 \geqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^2.$$

Далее, из (2.2) следует $\langle P_X(\mathbf{y})-\mathbf{y}, P_X(\mathbf{z})-P_X(\mathbf{y})\rangle \geqslant 0$ и $\langle P_X(\mathbf{z})-\mathbf{z}, P_X(\mathbf{y})-P_X(\mathbf{z})\rangle \geqslant 0$. Суммируя эти неравенства, получаем $\langle P_X(\mathbf{y}) - \mathbf{y} - P_X(\mathbf{z}) + \mathbf{z}, P_X(\mathbf{z})-P_X(\mathbf{y})\rangle \geqslant 0$, откуда, пользуясь неравенством Коши–Буняковского, получаем условие 2):

$$\|P_X(\mathbf{y})-P_X(\mathbf{z})\|^2 \leqslant \langle P_X(\mathbf{z})-P_X(\mathbf{y}),\mathbf{z}-\mathbf{y}\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|P_X(\mathbf{z})-P_X(\mathbf{y})\|\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|. \ \triangle$$

2.2.5. *Гиперплоскостью* в E_n называют множество вида

$$\Pi = \{\mathbf{x}\colon \langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle = \lambda\},$$

где $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. В пространстве E_n гиперплоскость определяет два полупространства:

$$\{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leqslant \lambda\}, \quad \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \geqslant \lambda\}.$$

2.2.6. Теорема отделимости. *Для любого выпуклого и замкнутого множества X и любой точки $\mathbf{v}$, не принадлежащей множеству X, существует такая гиперплоскость Π, что*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle = \lambda \tag{2.3}$$

и для всех $\mathbf{x} \in X$

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle < \lambda. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}$ — проекция точки $\mathbf{v}$ на X. Рассмотрим гиперплоскость

$$\Pi = \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle = \lambda,\ \mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{p},\ \lambda = \langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle\},$$

для которой выполняется (2.3). Из неравенства (2.2) следует

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} - \mathbf{p}\rangle \leqslant \langle \mathbf{p}, \mathbf{v} - \mathbf{p}\rangle < \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{p}\rangle, \quad \mathbf{x} \in X.$$

Правое неравенство следует из (2.1) и из того, что $\rho > 0$. И, окончательно,

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle < \langle \mathbf{v} - \mathbf{p}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle = \lambda,$$

т. е. имеет место (2.4). $\triangle$

Замечание. Очевиден геометрический смысл теоремы: существует проходящая через точку $\mathbf{v}$ гиперплоскость Π такая, что X лежит в одном из полупространств, определяемых Π (рис. 2.1).

2.2.7. Теорема об опорной гиперплоскости. *В любой граничной точке $\mathbf{x}^0$ выпуклого множества X существует опорная гиперплоскость, т. е. существуют $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ и λ такие, что $\Pi = \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle = \lambda\}$, $\lambda = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0\rangle$ и для всех $\mathbf{x} \in X$ $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle \leqslant \lambda$.*

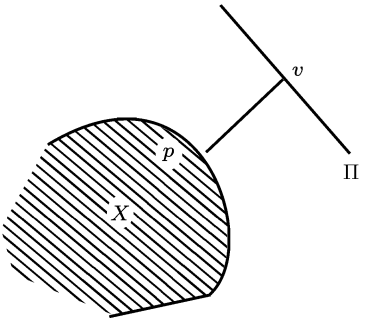

Рис. 2.1

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{\mathbf{v}_k\}$, внешних относительно $\overline{X}$ (замыкания X) и таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{v}_k = \mathbf{x}^0.$$

По теореме 2.2.6 для каждой $\mathbf{v}_k$ существует

$$\Pi_k = \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{x}\rangle = \lambda_k\},$$

где $\lambda_k = \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{v}_k\rangle$ и $\langle \mathbf{c}_k, \mathbf{x}\rangle < \lambda_k$ для всех $\mathbf{x} \in \overline{X}$. Не умаляя общности, можно полагать $\|\mathbf{c}_k\| = 1$. Не меняя обозначений, будем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{c}_k = \mathbf{c}.$$

Переходя к пределу в соотношениях, определяющих Π_k, получим

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \mathbf{c}_k, \mathbf{v}_k \rangle \triangleq \lambda$$

и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leqslant \lambda$ для всех $\mathbf{x} \in X$.

Итак, гиперплоскость

$$\Pi = \{\mathbf{x}\colon\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \lambda\}$$

опорная. $\triangle$

Замечание. Легко убедиться, что если в точке $\mathbf{x}^0$ существует касательная гиперплоскость, то она совпадает с опорной (рис. 2.2), и в этом случае опорная гиперплоскость единственна. Однако понятие опорной гиперплоскости значительно шире понятия касательной гиперплоскости. На рис. 2.3 изображен случай, когда в точке $\mathbf{x}^0$ не

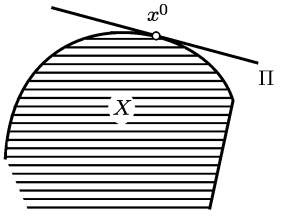

Рис. 2.2

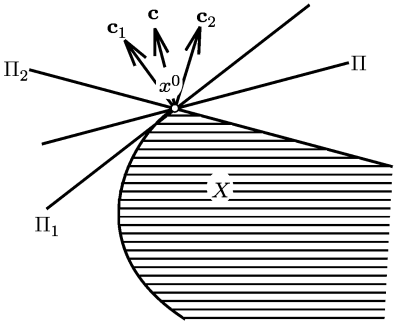

Рис. 2.3

существует касательной и в то же время в ней существуют опорные прямые, причем в качестве вектора $\mathbf{c}$ здесь может быть выбран любой вектор, лежащий "между" $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$.

2.2.8. Теорема о разделяющей гиперплоскости. *Если множество X_0 внутренних точек выпуклого множества X непусто и не пересекается с выпуклым множеством Y $(X_0 \cap Y = \varnothing)$, то для множеств X и Y существует разделяющая гиперплоскость Π, т. е. существует вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такой, что*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{y} \rangle \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

для всех $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{x} \in X$.

Доказательство. Множество

$$Z = \{\mathbf{z}\colon\ \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x},\ \ \mathbf{y} \in Y,\ \ \mathbf{x} \in X_0\}$$

выпукло, и $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ не является его внутренней точкой. Тогда из теорем 2.2.6 и 2.2.7 следует существование $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такого, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{0} \rangle = 0$$

для всех $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{x} \in X_0$. Это неравенство остается справедливым и для всех $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{x} \in X$, поскольку предельный переход не нарушает нестрогих неравенств. $\triangle$

Замечание. Обратим внимание на то, что требование непустоты множества X_0 существенно, поскольку в формулировке теоремы имеется в виду внутренность множества относительно пространства E_n. Так, например, очевидно, что в трехмерном пространстве ось z и плоскость $z = 0$ неразделимы в указанном выше смысле, хотя и не имеют общих внутренних точек.

2.2.9. Определение. Точка $\mathbf{x}$ множества X называется *угловой* (или *крайней*) точкой, если в X не существует таких точек $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$, что

$$\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}' + (1 - \alpha) \mathbf{x}''$$

при некотором $\alpha \in (0, 1)$.

Например, для круга любая точка ограничивающей его окружности является угловой. Угловыми точками являются все вершины выпуклого многогранника.

2.2.10. Теорема (о представлении). *Любая точка $\mathbf{x}^0$ выпуклого, замкнутого, ограниченного множества X может быть представлена в виде выпуклой комбинации конечного числа угловых точек этого множества.*

Доказательство (по индукции наименьшей размерности n пространства E_n, содержащего множество X).

Если $n = 1$, то X является отрезком, и утверждение теоремы очевидно.

Предположим, что для $n = k - 1$ теорема справедлива. Пусть теперь $X \subset E_k$. Рассмотрим два случая.

1) $\mathbf{x}^0$ — граничная точка X. Построим в этой точке гиперплоскость, опорную к X:

$$\pi = \{\mathbf{x} \colon \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle\}.$$

Множество $X_0 = X \cap \pi$ как пересечение выпуклого, замкнутого, ограниченного множества X с выпуклым, замкнутым множеством π само выпукло, замкнуто и ограничено и, кроме того, существует $(k - 1)$-мерное подпространство, содержащее X_0 (поскольку $X_0 \subset \pi$). По предположению индукции для $\mathbf{x}^0 \in X_0$ найдутся $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N$ — угловые точки множества X_0 такие, что

$$\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Покажем, что $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$ являются угловыми точками и для X. Предположим противное, т. е. что для некоторой точки $\mathbf{x}_i$ найдутся $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$, и $\alpha \in (0,1)$ такие, что

$$\mathbf{x}_i = \alpha \mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}''.$$

Так как $\mathbf{x}_i \in X_0 \subset \pi$, то

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle,$$

и поскольку гиперплоскость π опорная к X, то

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle, \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Из того, что $0 < \alpha < 1$, следует

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle = \frac{1}{\alpha}\left[\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle - (1-\alpha)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}'' \rangle\right] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\alpha} \geqslant \left[\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle - (1-\alpha)\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle\right] = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Последние условия показывают, что $\mathbf{x}' \in \pi$ (так как $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^0 \rangle$); но $\mathbf{x}' \in X$, следовательно, $\mathbf{x}' \in X_0 = X \cap \pi$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{x}'' \in X_0$. А тогда наше предположение противоречит тому, что $\mathbf{x}_i$ — угловая точка X_0.

2) Пусть теперь $\mathbf{x}^0$ — внутренняя точка множества X. Проведем через $\mathbf{x}^0$ прямую l. Пересечение $l \cap X$ является отрезком с концами $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{x}}}$, принадлежащими границе множества X, и поскольку $\mathbf{x}^0$ — внутренняя точка для X, то существует $\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$\mathbf{x}^0 = \alpha \overline{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\overline{\overline{\mathbf{x}}}.$$

Поскольку для граничных точек $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\overline{\mathbf{x}}}$ теорема верна, то она верна и для $\mathbf{x}^0$. Действительно, для граничных точек имеют место соотношения

$$\overline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i \mathbf{y}_i, \quad \sum_{i=1}^{N_1} \beta_i = 1, \quad \beta_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N_1},$$
$$\overline{\overline{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i \mathbf{z}_i, \quad \sum_{i=1}^{N_2} \gamma_i = 1, \quad \gamma_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N_2},$$

где все $\mathbf{y}_i$ и $\mathbf{z}_i$ — угловые точки множества X. Тогда

$$\mathbf{x}^0 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha\beta_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^{N_2} (1-\alpha)\gamma_i \mathbf{z}_i,$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\triangle$

2.3. Конус. Теорема Фаркаша

В теории математического программирования важную роль играет теорема Фаркаша, которая будет доказана в конце этого параграфа. Предварительно мы установим некоторые вспомогательные понятия и факты, имеющие, впрочем, и самостоятельное значение.

2.3.1. Множество K называется *конусом*, если из $\mathbf{x} \in K$ следует $\lambda\mathbf{x} \in K$ для всех $\lambda > 0$. Например, все пространство E_n, как и всякое подпространство, является конусом. Неотрицательный ортант $\{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ — также конус. Очевидно, что конусами являются множества

$$\{\mathbf{x}\colon A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\}, \quad \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Следующий факт будет использован при доказательстве теоремы Фаркаша.

2.3.2. Теорема. *Множество*

$$Y = \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$$

замкнуто.

Доказательство. Пусть $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m]$. Докажем утверждение индукцией по числу m. При $m = 1$ множество Y является полупрямой, и, следовательно, оно замкнуто. Предположим, что для $m = k - 1$ конус $\overline{Y}$, порожденный векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{k-1}$, замкнут.

1) Если конусу Y принадлежат векторы $-\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_2, ..., -\mathbf{a}_k$, то он является подпространством размерности, не превышающей k, и, следовательно, замкнутым множеством.

2) Предположим, что хотя бы один из векторов $-\mathbf{a}_k \notin Y$. Всякий $\mathbf{y} \in Y$ представи́м в виде $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}} + \alpha\mathbf{a}_k$, $\alpha \geqslant 0$, где $\overline{\mathbf{y}} \in \overline{Y}$. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{y}_n\}$, сходящуюся к $\mathbf{y}$. В силу предыдущего $\mathbf{y}_n = \overline{\mathbf{y}}_n + \alpha_n\mathbf{a}_k$, $\alpha_n \geqslant 0$, для всех номеров n. Если последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, то, не умаляя общности, можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ и, следовательно, $\mathbf{y} - \alpha\mathbf{a}_k = \lim\limits_{n\to\infty} (\mathbf{y}_n - \alpha_n\mathbf{a}_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mathbf{y}}_n \triangleq \overline{\mathbf{y}}_n \in \overline{Y}$ в силу замкнутости $\overline{Y}$. Значит, $\mathbf{y} = \overline{\mathbf{y}} + \alpha\mathbf{a}_k \in Y$. Итак, если последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, то множество Y замкнуто.

Предположим теперь, что $\alpha_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда $\dfrac{1}{\alpha_n}\mathbf{y}_n = \dfrac{1}{\alpha_n}\overline{\mathbf{y}}_n + \mathbf{a}_k$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\alpha_n}\mathbf{y}_n = \mathbf{0}$, то $\overline{\mathbf{y}}_n \triangleq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\alpha_n}\overline{\mathbf{y}}_n = -\mathbf{a}_k$. Но $\overline{\mathbf{y}}_n \in \overline{Y}$ в силу замкнутости последнего, и, следовательно, $-\mathbf{a}_k \in \overline{Y}$. Противоречие. $\triangle$

2.3.3. Пусть заданы матрица B размерности $m \times n$ и вектор $\mathbf{v} \in E_n$.

Теорема Фаркаша. *Неравенство* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \leqslant 0$ *выполняется для всех* $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\}$ *в том и только том случае, если существует такой вектор* $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, *что* $\mathbf{v} = B^T\mathbf{u}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняются соотношения $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{v} = B^T\mathbf{u}$. Тогда для любого $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\}$ будет $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle B^T\mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{u}, B\mathbf{x}\rangle \leqslant 0$.

Необходимость. Пусть для всех $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\}$ справедливо $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle \leqslant 0$.

Рассмотрим конус

$$Y = \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} = B^T\mathbf{u},\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Если $\mathbf{v} \in Y$, то теорема доказана. Предположим, что $\mathbf{v} \notin Y$. Множество Y выпукло (см. 2.1.6) и замкнуто (см. 2.3.2), поэтому по теореме 2.2.6 существует вектор $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ такой, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle \tag{2.5}$$

для всех $\mathbf{y} \in Y$.

Так как $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $\lambda \geqslant 0$, то из (2.5) получаем, что $\lambda\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle < \langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle$ при всех $\lambda \geqslant 0$. А значит, $\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle \leqslant 0$. Но

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{c}, B^T\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, B\mathbf{c}\rangle \leqslant 0.$$

И так как это имеет место для всех $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, то

$$B\mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}. \tag{2.6}$$

Но $\mathbf{y} = \mathbf{0} \in Y$, поэтому из (2.5) следует

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{v}\rangle > 0. \tag{2.7}$$

Взяв $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, из (2.6) и (2.7) получаем противоречие условиям теоремы. $\triangle$

Полезно будет привести геометрическое истолкование теоремы Фаркаша. Пусть

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix}$$

и $K = \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\}$.

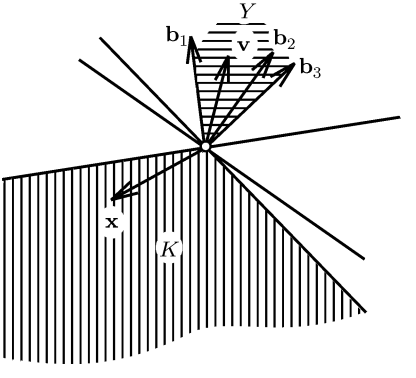

Рис. 2.4

Конус K есть совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, которые образуют с каждым из векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ неострые углы (на рис. 2.4 конус K заштрихован вертикальными линиями, конус $Y = \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} = B^T\mathbf{u},\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}\}$ — горизонтальными линиями).

Теперь очевиден геометрический смысл теоремы: чтобы для любого $\mathbf{x} \in K$ угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{x}$ был неострым, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{v}$ принадлежал конусу Y.

2.3.4. Следствие. *Для любой матрицы B и любого вектора $\mathbf{v}$ имеет место следующая альтернатива: либо имеет решение система*

$$B\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle < 0, \tag{2.8}$$

либо имеет решение система

$$\mathbf{v} = B^T\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Если справедливо (2.9), то из теоремы Фаркаша вытекает, что для любого $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ будет $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, и, следовательно, система (2.8) неразрешима. Предположим теперь, что система (2.9) неразрешима. Тогда по теореме Фаркаша для всех $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ не будет выполняться условие $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$, а следовательно, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle < 0$ для некоторого $\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. $\triangle$

2.3.5. Доказанное следствие допускает простую модификацию, полезную для ряда приложений.

Следствие. *Для любой матрицы B и любого вектора $\mathbf{v}$ имеет место следующая альтернатива: либо имеет решение система*

$$B\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle < 0, \tag{2.10}$$

либо имеет решение система

$$\mathbf{v} \geqslant B^T\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Запишем систему (2.10) в виде (2.8):

$$\overline{B}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle < 0.$$

Здесь $\overline{B} = \begin{bmatrix} B \\ E \end{bmatrix}$, E — единичная матрица. Утверждение следствия с очевидностью вытекает из применения следствия 2.3.4 к матрице B. $\triangle$

2.3.6. Теорема о представлении. Рассмотрим конус $S = \{\mathbf{x}\colon B\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. Вектор $\mathbf{x}$ конуса S назовем *ребром*, если в S не существует таких $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}''$, что при некоторых $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ будет выполняться равенство $\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}' + \lambda_2\mathbf{x}''$.

Теперь рассмотрим гиперплоскость

$$L = \left\{\mathbf{x}\colon \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ x_i \geqslant 0, \ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Очевидно, что множество $Q = S \cap L$ выпукло и ограничено.

Если $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_k^*$ — угловые точки множества Q, то векторы $\alpha_1\mathbf{x}_1^*, \alpha_2\mathbf{x}_2^*, \ldots, \alpha_k\mathbf{x}_k^*$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,k})$, являются ребрами конуса S.

Действительно, если $\mathbf{z} = \alpha_j \mathbf{x}_j^*$ не является ребром, то найдутся такие $\mathbf{x}' \in S$, $\mathbf{x}'' \in S$, что $\mathbf{z} = \lambda_1 \mathbf{x}' + \lambda_2 \mathbf{x}''$ при некоторых $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Из определения множества Q следует, что найдутся такие $\beta_1, \beta_2 > 0$, при которых $\mathbf{y}' = \beta_1 \mathbf{x}' \in Q$, $\mathbf{y}'' = \beta_2 \mathbf{x}'' \in Q$. Но

$$\mathbf{x}_j^* = \frac{1}{\alpha_j}\mathbf{z} = \gamma_1 \mathbf{y}' + \gamma_2 \mathbf{y}'', \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_1}{\alpha_j \beta_1}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\alpha_j \beta_2},$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_j} z_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} y_i' = 1, \quad \sum_{i=1}^{k} y_i'' = 1;$$

поэтому $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, что противоречит предположению о том, что точка $\mathbf{x}_j^*$ угловая для множества Q.

Доказанное утверждение и теорема 2.2.10 позволяют сформулировать теорему о представлении.

Теорема. *Любой вектор* $\mathbf{x}$, *принадлежащий конусу* S, *может быть представлен в виде положительной комбинации его ребер, т. е. найдутся такие числа* $\lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0, ..., \lambda_k \geqslant 0$, *что* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i^*$.

2.4. Выпуклые функции

2.4.1. Определение. Функцию $\varphi(\mathbf{x})$, определенную на выпуклом множестве X, называют *выпуклой*, если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и всех $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$\varphi(\alpha \mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leqslant \alpha \varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}). \tag{2.12}$$

На рис. 2.5 изображена выпуклая функция. Очевидно, что каждая

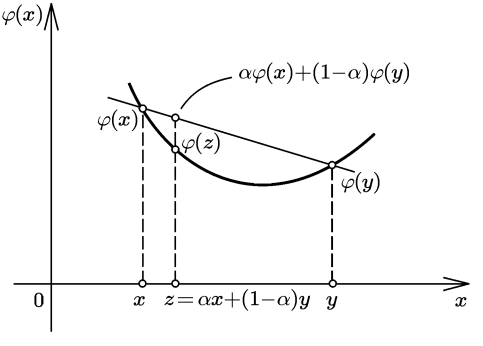

Рис. 2.5

точка любой хорды графика функции φ либо лежит над графиком, либо принадлежит ему.

2.4.2. *Вогнутой функцией* называют такую функцию $\varphi(\mathbf{x})$, для которой функция $-\varphi(\mathbf{x})$ выпукла. Таким образом, если

$$\varphi(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \geqslant \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}) \tag{2.13}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и всех $\alpha \in [0,1]$, то $\varphi(\mathbf{x})$ — вогнутая функция.

2.4.3. Если для любого $\alpha \in (0,1)$ неравенство (2.12) строгое, то функцию $\varphi(\mathbf{x})$ называют *строго выпуклой.*

2.4.4. Примером выпуклой функции служит квадратичная функция с положительно определенной матрицей.

Поскольку этим свойством квадратичных функций мы будем пользоваться в дальнейших рассмотрениях, докажем его как самостоятельный результат.

Теорема. *Для того чтобы квадратичная функция*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle$$

была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы симметрическая матрица B была положительно определенной.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) &= \alpha^2\langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + 2\alpha(1-\alpha)\langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle + \\ &+ (1-\alpha)^2\langle \mathbf{y}, B\mathbf{y}\rangle + \alpha\langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle + (1-\alpha)\langle \mathbf{p}, \mathbf{y}\rangle = \\ &= \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, B(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle\end{aligned}$$

и при $\alpha \in (0,1)$ будет

$$\alpha(1-\alpha)\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, B(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle \geqslant 0$$

в том и только том случае, когда B положительно определена. Отсюда и из определения выпуклости следует утверждение теоремы. $\triangle$

Замечание. Очевидно, что для строгой выпуклости квадратичной функции $\varphi(\mathbf{x})$ необходима и достаточна строгая положительная определенность матрицы B.

Рассмотрим ряд свойств выпуклых функций.

2.4.5. Теорема. *Для любой выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$, определенной на выпуклом множестве X, и любого числа λ множество $Z = \{\mathbf{x} \in X\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \lambda\}$ выпукло.*

Доказательство. В соответствии с определением 2.1.6 достаточно показать, что из $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z$ следует $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \in Z$ для всех $\alpha \in [0,1]$. Из выпуклости множества X следует, что $\mathbf{z} \in X$. Воспользовавшись неравенством (2.12), получаем

$$\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leqslant \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}) \leqslant \alpha\lambda + (1-\alpha)\lambda = \lambda. \ \triangle$$

Замечание. Очевидно, что если $\varphi(\mathbf{x})$ — вогнутая функция, то множество $Z = \{\mathbf{x} \in X\colon \varphi(\mathbf{x}) \geqslant \lambda\}$ выпукло.

2.4.6. Неравенство Иенсена. *Если $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла на выпуклом множестве X и*

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,$$
$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \mathbf{x}_i \in X, \quad i = \overline{1, m},$$

то

$$\varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i). \tag{2.14}$$

Доказательство (по индукции). При $m = 1$ неравенство (2.14) очевидно. Предположим, что (2.14) справедливо для $m - 1$, $m > 1$. Из 2.1.8 следует, что $\mathbf{z} \in X$. Если $\alpha_m = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{m-1} = 0$, и в (2.14) будет равенство. Если $0 \leqslant \alpha_m < 1$, то из выпуклости и индуктивного предположения следует

$$\varphi(\mathbf{z}) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i\Big) = \varphi\Big((1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} \mathbf{x}_i + \alpha_m \mathbf{x}_m\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \alpha_m)\, \varphi\Big(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} \mathbf{x}_i\Big) + \alpha_m \varphi(\mathbf{x}_m) \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \alpha_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_m} \varphi(\mathbf{x}_i) + \alpha_m \varphi(\mathbf{x}_m) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi(\mathbf{x}_i). \quad \triangle$$

2.4.7. Приведем (без доказательства) следующее важное свойство выпуклых функций.

Выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом множестве X, непрерывна в каждой внутренней точке этого множества и имеет в каждой внутренней точке производную по любому направлению $\mathbf{s}$ ($\|\mathbf{s}\| = 1$):

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{s}} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{\varphi(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x})}{\lambda}.$$

2.4.8. В методе штрафных функций находят применение следующие два свойства выпуклых функций.

Если $\varkappa(\mathbf{x})$ выпукла на выпуклом множестве X, то выпукла на X и функция

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max\{\varkappa(\mathbf{x}), 0\}.$$

В самом деле, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$

$$\varphi(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}) = \max\{\varkappa(\alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha)\mathbf{y}), 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\alpha \varkappa(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)\varkappa(\mathbf{y}), 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \max\{\varkappa(\mathbf{x}), 0\} + (1 - \alpha) \max\{\varkappa(\mathbf{y}), 0\} = \alpha \varphi(\mathbf{x}) + (1 - \alpha)\varphi(\mathbf{y}). \quad \triangle$$

Если $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла и неотрицательна на выпуклом множестве X, то будет выпукла на X и функция $\varphi^2(\mathbf{x})$.

Действительно, в силу выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ и ее неотрицательности имеем

$$\begin{aligned}\varphi^2(\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}) \leqslant \\ \leqslant \alpha^2\varphi^2(\mathbf{x})+2\alpha(1-\alpha)\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})+(1-\alpha)^2\varphi^2(\mathbf{y}) = \\ = \alpha\varphi^2(\mathbf{x})+(1-\alpha)\varphi^2(\mathbf{y})-\alpha(1-\alpha)(\varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{y}))^2 \leqslant \\ \leqslant \alpha\varphi^2(\mathbf{x})+(1-\alpha)\varphi^2(\mathbf{y}). \quad \triangle\end{aligned}$$

2.4.9. Важное свойство выпуклых дифференцируемых функций, которым мы будем часто пользоваться, устанавливает следующее утверждение.

Функция $\varphi(\mathbf{x})$, дифференцируемая на выпуклом множестве X, выпукла в том и только том случае, если для любых $\mathbf{x}\in X$ и $\mathbf{y}\in X$ будет

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}),\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}). \tag{2.15}$$

Для вогнутой функции

$$\langle\varphi'(x),\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle \geqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла. Тогда для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$, $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, и всех α таких, что $0<\alpha\leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}+\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \leqslant \varphi(x)+\alpha[\varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x})],$$

откуда

$$\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\frac{\varphi(\mathbf{x}+\beta\mathbf{s})-\varphi(\mathbf{x})}{\beta} \leqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{s}=\dfrac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|}$, а $\beta=\alpha\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$.

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $\beta\to 0$, получим

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{s}}\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \leqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}),$$

т. е.

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}),\mathbf{s}\rangle\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \langle\varphi'(\mathbf{x}),\mathbf{y}-\mathbf{x}\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}).$$

Пусть теперь выполняется условие (2.15). Рассмотрим точку $\mathbf{z}=\alpha\mathbf{x}+(1-\alpha)\mathbf{y}$ при $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Так как $\mathbf{z}\in X$, то

$$\begin{aligned}\langle\varphi'(\mathbf{z}),\mathbf{x}-\mathbf{z}\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{x})-\varphi(\mathbf{z}),\\ \langle\varphi'(\mathbf{z}),\mathbf{y}-\mathbf{z}\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Умножив первое неравенство на α, второе — на $(1-\alpha)$ и сложив полученные неравенства, имеем

$$0=\langle\varphi'(\mathbf{z}),\mathbf{0}\rangle \leqslant \alpha\varphi(\mathbf{x})+(1-\alpha)\varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{z}). \quad \triangle$$

2.4.10. Экстремальные свойства. Рассмотрим задачу отыскания точки $\mathbf{x}^*$ выпуклого множества X, в которой выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x})$, определенная на X, достигает минимального значения,— задачу отыскания оптимальной точки $\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$.

2.4.11. Теорема. *Если выпуклы функция $\varphi(\mathbf{x})$ и множество X, то любая точка $\mathbf{x}^* \in X$, являющаяся точкой локального минимума, будет оптимальной для задачи минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{x}^*$ не является оптимальной точкой, т. е. найдется точка $\mathbf{x}' \in X$ такая, что

$$\varphi(\mathbf{x}') < \varphi(\mathbf{x}^*).$$

Рассмотрим точки вида

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}^*, \quad \alpha \in [0,1].$$

Так как множество X выпукло, то $\mathbf{x} \in X$. Далее, из выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ и из предположения об $\mathbf{x}'$ следует

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}^*) \leqslant \alpha\varphi(\mathbf{x}') + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{x}^*) < \\ < \alpha\varphi(\mathbf{x}^*) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{x}^*) = \varphi(\mathbf{x}^*),$$

т. е.

$$\varphi(\mathbf{x}) < \varphi(\mathbf{x}^*).$$

Но это противоречит условию, что $\mathbf{x}^*$ — точка локального минимума, поскольку при малых α точка $\mathbf{x}$ находится в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}^*$. $\triangle$

2.4.12. Теорема. *Если выпуклы функция $\varphi(\mathbf{x})$ и множество X, то множество оптимальных точек*

$$X^* = \left\{\mathbf{x}^* \in X\colon \varphi(\mathbf{x}^*) = \mu = \min_{\mathbf{x}\in X}\varphi(\mathbf{x})\right\} = \operatorname{Arg\,min}\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$$

выпукло.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in X^*$. Поскольку $X^* \subseteq X$ и X — выпуклое множество, то для любого $\lambda \in [0,1]$ будет

$$\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'' \in X,$$

а в силу выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ имеем

$$\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\lambda\mathbf{x}' + (1-\lambda)\mathbf{x}'') \leqslant \lambda\varphi(\mathbf{x}') + (1-\lambda)\varphi(\mathbf{x}'') = \\ = \lambda\mu + (1-\lambda)\mu = \mu.$$

Кроме того, $\varphi(\mathbf{z}) \geqslant \mu$, поэтому $\varphi(\mathbf{z}) = \mu$, т. е. $\mathbf{z} \in X^*$. $\triangle$

2.4.13. *Если $\varphi(\mathbf{x})$ строго выпукла на выпуклом множестве X и точка $\mathbf{x}^* \in X$ оптимальна, т. е.*

$$\mu = \varphi(x^*) = \min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

то для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ будет

$$\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{x}^*),$$

и, значит, точка $\mathbf{x}^*$ единственна.

Доказательство. Предположим, что найдется точка $\mathbf{x}' \in X$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^*$, такая, что

$$\varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x}^*) = \mu.$$

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1]$ точка $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}^*$ принадлежит множеству X, и в силу строгой выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ будет

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}^*) < \alpha\varphi(\mathbf{x}') + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{x}^*) = \\ = \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \mu,$$

что противоречит оптимальности точки $\mathbf{x}^*$. $\triangle$

2.4.14. Одно свойство вогнутых функций. *Если $\varphi(\mathbf{x})$ — вогнутая функция и $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{y})$, то для любой точки $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ такой, что $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{z}) > \varphi(\mathbf{y})$, справедливо неравенство*

$$\frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} \geqslant \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}.$$

Доказательство. Предположим, что найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}$ будет

$$\frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} < \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}.$$

Так как $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$, то

$$\frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} = \frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|}\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) < \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|},$$

откуда $(1-\alpha)[\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})] < \alpha[\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{z})]$. Таким образом, приходим к неравенству

$$\varphi(\mathbf{z}) < \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}),$$

противоречащему вогнутости функции $\varphi(\mathbf{x})$. $\triangle$

2.4.15. Теорема. *Если множество X выпукло, замкнуто и неограничено, то существует такое направление $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\| = 1$, что $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s} \in X$ для всех $\lambda \geqslant 0$ и всех $\mathbf{x} \in X$.*

Доказательство. Так как множество X неограничено, то найдется последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$, $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, $k \to \infty$. Рассмотрим фиксированную точку $\mathbf{x} \in X \backslash \{\mathbf{x}_k\}$ и направление $\mathbf{s}_k = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x})$. Очевидно существование такой подпоследовательности $\{\mathbf{s}_{k_i}\}$, что $\lim\limits_{i\to\infty} \mathbf{s}_{k_i} = \mathbf{s}$. Для любого фиксированного $\lambda > 0$ найдется такой номер k_0, что для всех $k_i \geqslant k_0$ будет $0 < \dfrac{\lambda}{\|\mathbf{x}_{k_i} - \mathbf{x}\|} < 1$.

Так как

$$\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s}_{k_i} = \frac{\lambda}{\|\mathbf{x}_{k_i} - \mathbf{x}\|}\mathbf{x}_k + \left(1 - \frac{\lambda}{\|\mathbf{x}_{k_i} - \mathbf{x}\|}\right)\mathbf{x} \in X$$

для всех $k_i \geqslant k_0$, то $\lim\limits_{i\to\infty}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s}_{k_i}) = \mathbf{x} + \lambda \mathbf{s}$ принадлежит X в силу замкнутости множества X.

Далее, пусть $\mathbf{y}$ — произвольный фиксированный элемент из X. Так как $\mathbf{v}_k = \mathbf{x} + \lambda_k \lambda \mathbf{s} \in X$ для всех $\lambda \geqslant 1$, $\lambda_k > 1$, то

$$\frac{1}{\lambda_k}\mathbf{v}_k + \left(1 - \frac{1}{\lambda_k}\right)\mathbf{y} = \frac{1}{\lambda_k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y} + \lambda \mathbf{s} \in X,$$

и при $\lambda_k \to \infty$, в силу замкнутости множества X получаем $\mathbf{y} + \lambda \mathbf{s} \in X$. $\triangle$

2.4.16. Теорема. *Если функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и непрерывна на выпуклом замкнутом множестве X, то для ограниченности множества*

$$X(\beta) = \{\mathbf{x} \in X\colon\ f(\mathbf{x}) \leqslant \beta\}$$

при любом β необходимо и достаточно существования числа α, при котором множество $X(\alpha) = \{\mathbf{x} \in X\colon\ f(\mathbf{x}) \leqslant \alpha\}$ непусто и ограничено.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть для некоторого α множество $X(\alpha)$ ограничено. Если $\beta \leqslant \alpha$, то $X(\beta) \subset X(\alpha)$; следовательно, $X(\beta)$ — ограниченное множество.

Предположим, что найдется такое $\beta > \alpha$, что множество $X(\beta)$ неограничено. Тогда в фиксированной точке $\mathbf{x} \in X(\alpha) \subset X(\beta)$ существует такое направление $\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\| = 1$, что $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s} \in X(\beta)$ при всех $\lambda \geqslant 0$. Поскольку множество $X(\alpha)$ ограничено, то найдется такое $\lambda_0 > \operatorname{diam} X(\alpha)$, что $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{s} \notin X(\alpha)$ при всех $\lambda \geqslant \lambda_0$. Итак, для $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda_0 \mathbf{s}$ будет $f(\mathbf{x}) \leqslant \alpha < f(\mathbf{z}) \leqslant \beta$, а для $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda) = \mathbf{x} + \lambda\lambda_0 \mathbf{s}$ при всех $\lambda > 0$ будет $f(\mathbf{v}) \leqslant \beta$. Так как $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \lambda_0 \mathbf{s} = \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{v} + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right)\mathbf{x}$, то при $\lambda \geqslant 1$ из выпуклости функции $f(\mathbf{x})$ на выпуклом замкнутом множестве $X(\beta)$ следует неравенство $f(\mathbf{z}) \leqslant \dfrac{1}{\lambda} f(\mathbf{v}) + \left(1 - \dfrac{1}{\lambda}\right) f(\mathbf{x})$, откуда $f(\mathbf{v}) \geqslant \lambda(f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})$. Но $f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})$ — фиксированное положительное число, вследствие чего $f(\mathbf{v}) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$, что противоречит условию $f(\mathbf{v}) \leqslant \beta$ при всех $\lambda > 0$. $\triangle$

2.5. Сильная выпуклость функций

2.5.1. Мы видели, что если для выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ существует точка локального минимума на выпуклом и замкнутом множестве X, то она является оптимальной, а для строго выпуклой функции эта точка вдобавок и единственна. Подчеркнем, что эти утверждения справедливы лишь в предположении существования точки локального минимума.

Рассмотрим теперь класс функций, для которых на любом непустом замкнутом множестве всегда существует точка минимума, и если вдобавок это множество выпукло, то эта точка единственна.

2.5.2. Определение. Функцию $\varphi(\mathbf{x})$, определенную на некотором множестве X, будем называть *сильно выпуклой*, если существует константа $\rho > 0$ такая, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ таких, что $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$, и для любого $\alpha \in [0, 1]$ будет выполняться неравенство

$$\varphi(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) \leqslant \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)\rho\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2.$$

Величину ρ в дальнейшем будем называть *параметром* сильной выпуклости.

2.5.3. Пример сильно выпуклой функции. Рассмотрим квадратичную функцию

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x}\rangle,$$

где B — строго положительно определенная матрица. Сильная выпуклость следует из соотношения

$$\varphi(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \alpha\varphi(\mathbf{x}) + (1-\alpha)\varphi(\mathbf{y}) - \alpha(1-\alpha)\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, B(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle,$$

поскольку

$$\langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, B(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle \geqslant \lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2,$$

где λ — наименьшее собственное число матрицы B.

Укажем на некоторые свойства сильно выпуклых функций.

2.5.4. Теорема. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла и непрерывна на выпуклом и замкнутом множестве X, то для любой точки $\mathbf{y} \in X$ множество*

$$X_0 = \{\mathbf{x} \in X\colon\ \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{y})\}$$

ограничено и существует единственная точка

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\mathbf{y} \in X$. В силу непрерывности функции $\varphi(\mathbf{x})$ для $\rho > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leqslant \rho$ при всех $\mathbf{x} \in U = \{\mathbf{x} \in X\colon\ \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon\}$. Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{y}) - \rho$ при всех $\mathbf{x} \in U$.

Пусть $\mathbf{x} \in X \backslash U$. Тогда $\alpha = \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{-1} < 1$. Из 2.5.2 получаем $\alpha\varphi(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - (1 - \alpha)\varphi(\mathbf{y}) + \alpha(1 - \alpha)\rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$. Но $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in U$, поскольку $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leqslant \varepsilon$, и, следовательно, $\varphi(\mathbf{y} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \varphi(\mathbf{y}) \geqslant -\rho$. Поэтому

$$\alpha\varphi(\mathbf{x}) \geqslant -\rho + \alpha\varphi(\mathbf{y}) + \alpha(1 - \alpha)\rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2,$$

или

$$\varphi(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{y}) + (1 - \alpha)\rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \frac{\rho}{\alpha} = \\ = \varphi(\mathbf{y}) - \rho\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Таким образом, если множество X неограничено, то при $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ будет $\varphi(\mathbf{x}) \to +\infty$. Теперь нетрудно убедиться, что множество X_0 ограничено. В самом деле, если это не так, то найдется последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset X_0$ такая, что $\|\mathbf{x}_k\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Но тогда найдется номер $k_0 = k_0(\mathbf{y})$, начиная с которого будет $\varphi(\mathbf{x}_k) > \varphi(\mathbf{y})$, $k \geqslant k_0$, и, следовательно, $\mathbf{x}_k \notin X_0$ при $k \geqslant k_0$.

Существование $\mathbf{x}^*$ очевидно, так как из непрерывности $\varphi(\mathbf{x})$ на ограниченном и замкнутом множестве X_0 и из определения X_0 следует, что

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X_0\} = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}.$$

Единственность же точки $\mathbf{x}^*$ следует из того, что сильно выпуклая функция является в то же время строго выпуклой. $\triangle$

2.5.5. Теорема. *Если $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла на выпуклом и замкнутом множестве X, то*:

а) *для всех $\mathbf{x} \in X$ справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}^*)).$$

Если при этом $\varphi(\mathbf{x}) \in C^1(X)$, то:

б) *для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ будет $\langle \varphi(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle \geqslant \rho\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$*;

в) $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leqslant \dfrac{1}{\rho}\|\varphi'(\mathbf{x})\|$;

г) $0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \dfrac{1}{\rho}\|\varphi'(\mathbf{x})\|^2$.

Доказательство. а) Из определения сильной выпуклости следует

$$\varphi\Big(\frac{1}{2}\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\Big) \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\,\varphi(\mathbf{x}^*) - \frac{1}{4}\,\rho\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2,$$

и в силу неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{2}\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\Big)$$

соотношение п. а) становится справедливым.

б) Так как функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, то

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle.$$

Отсюда и из определения 2.5.2 получаем

$$\frac{1}{4}\rho\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big[\varphi(\mathbf{x}) - \varphi\Big(\frac{1}{2}\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{y}\Big)\Big] + \frac{1}{2}\Big[\varphi(\mathbf{y}) - \varphi\Big(\frac{1}{2}\,\mathbf{x} + \frac{1}{2}\,\mathbf{y}\Big)\Big] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \frac{1}{4}\langle \varphi'(\mathbf{y}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{4}\langle \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle.$$

в) В точке $\mathbf{x}^*$ минимума $\varphi(\mathbf{x})$ на X выполняется для всех $\mathbf{x} \in X$ неравенство (см. п. 3.4.7)

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geqslant 0,$$

поэтому из п. б) получаем

$$\rho\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x})\|\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|,$$

т. е. неравенство п. в).

г) Из выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ и из п. в) имеем

$$0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x})\|\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leqslant \frac{1}{\rho}\|\varphi'(\mathbf{x})\|^2. \quad \triangle$$

ГЛАВА 3

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этой главе будут рассмотрены условия существования локальных экстремумов дифференцируемых функций на допустимых множествах весьма общего вида, а также условия существования глобальных экстремумов (минимумов) в задачах выпуклого программирования.

3.1. Задачи математического программирования

3.1.1. Основная задача математического программирования. Рассмотрим множество

$$X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}, \tag{3.1}$$

где $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ — заданные скалярные функции. Пусть скалярная функция $\varphi(\mathbf{x})$ определена на множестве X.

Задачу минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X будем называть *основной задачей математического программирования.*

3.1.2. Форма записи. Условимся, что запись

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x} \in X, \tag{3.2}$$

или, ей эквивалентные,

$$\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}, \quad \min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

будут означать, что ставится задача:

1) либо найти оптимальную точку $\mathbf{x}^* \in X$:

$$\varphi(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x});$$

2) либо, если не существует такой точки $\mathbf{x}^*$, найти

$$\varphi^* = \inf_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x});$$

3) либо убедиться, что $\varphi(\mathbf{x})$ — неограниченная снизу на множестве X функция;

4) либо убедиться в том, что $X = \varnothing$.

3.1.3. Если множество X выпукло и выпукла функция $\varphi(\mathbf{x})$, то задачу (3.2) называют *задачей выпуклого программирования.*

3.1.4. Основная задача выпуклого программирования. Из пп. 2.4.5 и 2.1.6 вытекает, что для выпуклости множества X (см. (3.1)) достаточно, чтобы функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ были вогнутыми. Если в задаче выпуклого программирования (3.2) все функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнуты, а $\varphi(\mathbf{x})$ выпукло, то будем называть ее *основной задачей выпуклого программирования.*

3.1.5. Терминология. Множество X в задаче (3.2) называют *допустимым множеством*, точки этого множества — *допустимыми точками*, а неравенства $f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$, определяющие допустимое множество,— *ограничениями.* Точку $\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$ называют *решением* или *оптимальной точкой*, а иногда *точкой глобального минимума.* Наконец, точку $\mathbf{x}$, в которой выполняются необходимые условия локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X, будем называть *стационарной.*

3.2. Возможные направления

3.2.1. Возможные направления. Понятие возможного направления занимает важное место в математическом программировании. В этой главе возможные направления играют вспомогательную роль, однако в дальнейшем они приобретут самостоятельное значение.

Определение. Направление $-\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ в точке $\mathbf{x} \in X$ называется *возможным*, если существует такое число $\overline{\beta} > 0$, что $\mathbf{x} - \beta\mathbf{s} \in X$ для всех $\beta \in [0, \overline{\beta}]$.

Например, если $X = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \geqslant 0\}$, то в точке $\mathbf{x} = 0$ любой вектор $-\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, задает возможное направление, а в точке

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 > 0 \\ \dots \\ x_n > 0 \end{bmatrix}$$

возможным является любое направление $-\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \leqslant 0 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{bmatrix},$$

где $s_2, s_3, \dots, s_n$ — произвольные числа, $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$.

Очевидно, если $\mathbf{x}$ — внутренняя точка множества X, то любое направление $-\mathbf{s}$ в этой точке является возможным.

В следующих разделах будут выяснены условия существования возможных направлений.

3.2.2. Активные ограничения. Очевидно, что на экстремальные свойства целевой функции $\varphi(\mathbf{x})$ в некоторой достаточно малой окрестности фиксированной точки $\mathbf{x} \in X$ влияют лишь те ограничения $f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$, для которых в этой точке выполняются равенства $f_i(\mathbf{x}) = 0$. В связи с этим вводится следующее определение.

Ограничение $f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ называется *активным* в фиксированной точке $\mathbf{x} \in X$, если $f_i(\mathbf{x}) = 0$.

3.2.3. В дальнейшем нам понадобится совокупность индексов активных ограничений в точке $\mathbf{x} \in X$

$$I(\mathbf{x}) = \{i\colon\ f_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

3.2.4. Предположения. Всюду в этой главе будем предполагать функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемыми.

3.2.5. Пусть $\mathbf{s}$ — некоторый n-мерный вектор, а σ — некоторая скалярная величина.

Для фиксированного $\mathbf{x} \in X$ рассмотрим следующую систему неравенств относительно переменных $\mathbf{s}$ и σ:

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

При определенных условиях решения этой системы определяют возможные направления в точке $\mathbf{x}$.

3.2.6. *Если* $\mathbf{s}$ $(\|\mathbf{s}\| \neq 0)$ *удовлетворяет системе* (3.3) *при некотором* $\sigma > 0$, *то направление* $-\mathbf{s}$ *является возможным в точке* $\mathbf{x} \in X$.

Доказательство. Естественно предполагать, что $I(\mathbf{x}) \neq \varnothing$, поскольку в противном случае точка $\mathbf{x}$ является внутренней точкой множества X, и поэтому любое направление $-\mathbf{s}$ является возможным. Если $i \notin I(\mathbf{x})$, то $f_i(\mathbf{x}) > 0$, и малое перемещение из точки $\mathbf{x}$ по любому направлению, в частности, по направлению $-\mathbf{s}$, не нарушит этого неравенства. Пусть $i \in I(\mathbf{x})$. Предположим, что $f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}) < 0$ для любого сколь угодно малого $\beta > 0$, т. е. направление $-\mathbf{s}$ не является возможным. Так как $f_i(\mathbf{x}) = 0$, то для любого $\beta > 0$ будет

$$\frac{1}{\beta}[f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s})] > 0,$$

а значит (см. (2.4.7)),

$$\lim_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta}[f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s})] = \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \geqslant 0,$$

что противоречит условию (3.3) при $\sigma > 0$. $\triangle$

3.2.7. *Если направление* $-\mathbf{s}$ *в точке* $\mathbf{s} \in X$ *является возможным, то существует такое* $\sigma \geqslant 0$, *что пара* $\mathbf{s}$, σ *удовлетворяет системе* (3.3).

Доказательство. Предположим, что найдется хотя бы один такой номер $i \in I(\mathbf{x})$, для которого $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle > 0$. Так как $-f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}) = f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}) = \beta\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + o(\beta)$, то $f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}) < 0$ при достаточно малых значениях $\beta > 0$, т. е. $\mathbf{x} - \beta\mathbf{s} \notin X$, что противоречит предположению о том, что направление $-\mathbf{s}$ возможное. $\triangle$

3.2.8. *Если множество* X *задается системой линейных неравенств*:

$$X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(x) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}\},$$

то условия

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s}\rangle \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}),$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы направление $-\mathbf{s}$ *было возможным в точке* $\mathbf{x} \in X$.

Доказательство. Нужно выяснить условия, при которых точка $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \beta\mathbf{s}$ хотя бы для достаточно малых $\beta > 0$ будет принадлежать множеству X:

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}\rangle - b_i = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i - \beta\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s}\rangle.$$

Если $i \notin I(\mathbf{x})$, то $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i > 0$, и при достаточно малых β будет $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}\rangle - b_i \geqslant 0$.

Если $i \in I(\mathbf{x})$, то $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}\rangle - b_i = -\beta\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s}\rangle$, и для выполнения неравенства $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}\rangle - b_i \geqslant 0$ при $\beta > 0$ необходимо и достаточно, чтобы было $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s}\rangle \leqslant 0$. $\triangle$

3.3. Экстремальные свойства

В последующих параграфах этой главы рассматриваются основы теории математического программирования: доказываются теоремы существования локальных экстремумов и теоремы существования решений задач математического программирования.

В этом параграфе рассматриваются условия существования стационарных точек основной задачи математического программирования, т. е. (в соответствии с принятой терминологией) необходимые условия существования локальных минимумов.

Еще раз подчеркнем, что остаются в силе предположения 3.2.4 о непрерывной дифференцируемости функций $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$.

3.3.1. Следующая система линейных неравенств относительно переменных $\mathbf{s}$ и σ играет важную роль в дальнейших рассмотрениях:

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}), \tag{3.4}$$

$$-\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0. \tag{3.5}$$

3.3.2. Теорема. *Для того чтобы точка* $\mathbf{x} \in X$ *являлась точкой локального минимума функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *на множестве* X, *необходимо, чтобы в каждой паре* $\mathbf{s}$, σ, *удовлетворяющей системе* (3.4), (3.5), *было*

$$\sigma \leqslant 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}$ — точка локального минимума. Предположим, что найдется такая пара $\mathbf{s}$, σ, удовлетворяющая системе (3.4), (3.5), что $\sigma > 0$. Согласно 3.2.6 направление $-\mathbf{s}$ является возможным в точке $\mathbf{x}$. В силу непрерывности $\varphi'(\mathbf{x})$ и предположения, что $\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \geqslant \sigma > 0$, для достаточно малого $\beta > 0$ будет $\langle \varphi'(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}), \mathbf{s}\rangle > 0$ и $\mathbf{x} - \beta\mathbf{s} \in X$. Но по теореме о среднем

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}) = \beta\langle \varphi'(\mathbf{x} - \theta\beta\mathbf{s}), \mathbf{s}\rangle > 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Таким образом, в локальной окрестности точки локального минимума $\mathbf{x}$ нашлась точка $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \beta\mathbf{s}$ такая, что $\varphi(\mathbf{y}) < \varphi(\mathbf{x})$. Противоречие. $\triangle$

3.3.3. Следуя принятой терминологии (см. 3.1.5), теорему 3.3.2 можно переформулировать следующим образом: если в каждой паре $\mathbf{s}$, σ, удовлетворяющей системе (3.4), (3.5), выполняется условие (3.6), то $\mathbf{x}$ является стационарной точкой основной задачи математического программирования.

3.3.4. Следствие. *Если точка* $\mathbf{x} \in X$ *локального минимума функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *на множестве* X *такова, что* $I(\mathbf{x}) = \varnothing$, *то*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Предположим, что $\varphi'(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Заметим, что $\mathbf{x}$ — внутренняя точка множества X. Так как $I(\mathbf{x}) = \varnothing$, то в системе (3.4), (3.5) остается лишь одно неравенство (3.5). Пара $\mathbf{s} = \varphi'(\mathbf{x})$, $\sigma = \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}\rangle > 0$ удовлетворяет условию (3.5), но при этом нарушается условие (3.6) теоремы 3.3.2. Противоречие. $\triangle$

3.3.5. Теорема. *Если в точке* $\mathbf{x} \in X$ *локального минимума функции* $\varphi(\mathbf{x})$ *на множестве* X *система векторов* $f_i'(\mathbf{x})$, $i \in I(\mathbf{x})$, *линейно независима, то найдутся такие числа* $u_i \geqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, *что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i f_i'(\mathbf{x}). \tag{3.7}$$

Доказательство. Согласно теореме 3.3.2 выполняются условия (3.4), (3.5), (3.6). Условие (3.6) формально запишем так:

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{s}\rangle + 1 \cdot \sigma \leqslant 0, \tag{3.8}$$

и применим к системе (3.4), (3.5), (3.8) теорему Фаркаша: найдутся такие $v_i \geqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, и $v_0 \geqslant 0$, что

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} v_i f_i'(\mathbf{x}) - v_0 \varphi'(\mathbf{x}), \tag{3.9}$$

$$1 = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} v_i + v_0. \tag{3.10}$$

Поскольку предположение $v_0 = 0$ противоречит линейной независимости векторов $f_i'(\mathbf{x})$, $i \in I(\mathbf{x})$ (в силу (3.9) и (3.10)), то $v_0 > 0$, и, следовательно, при $u_i = \dfrac{1}{v_0} v_i$, $i \in I(\mathbf{x})$, из условия (3.9) получаем (3.7). $\triangle$

3.3.6. Замечание. Иногда теорему 3.3.5 формулируют следующим образом: если найдутся такие числа $u_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m})$, что

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i'(\mathbf{x}), \quad \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) = 0,$$

то $\mathbf{x}$ является стационарной точкой основной задачи математического программирования.

Справедливость этих условий очевидна: достаточно положить $u_i = 0$ при $i \notin I(\mathbf{x})$.

3.3.7. Геометрическая интерпретация. Условиям (3.7) можно дать следующее геометрическое истолкование. Заметив, что векторы $-f_i'(\mathbf{x})$, $i \in I(\mathbf{x})$, являются внешними нормалями в точке $\mathbf{x}$ к граничным поверхностям $f_i(\mathbf{x}) = 0$, и переписав условие (3.7) в виде

$$-\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i[-f_i'(\mathbf{x})], \quad u_i \geqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}),$$

можем сказать: условие (3.7) означает, что антиградиент можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами внешних нормалей к ограничениям в точке $\mathbf{x}$. Другими словами, антиградиент принадлежит конусу, натянутому на внешние нормали к ограничениям в точке $\mathbf{x}$.

3.4. Экстремальные свойства на выпуклых множествах

3.4.1. Условие регулярности. В случае выпуклости множества $X = \{\mathbf{x} : f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, i = \overline{1, m}\}$ условия линейной независимости векторов $f_i'(\mathbf{x})$, соответствующих активным ограничениям, в предыдущей теореме можно заменить более просто проверяемым, а именно так называемым *условием регулярности*. Существуют различные условия регулярности ограничений; здесь будут рассмотрены следующие условия.

3.4.2. Условие регулярности. Если для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ существует такая точка $\mathbf{x}_i \in X$, что

$$f_i(\mathbf{x}_i) > 0, \tag{3.11}$$

то говорят, что множество X удовлетворяет *условию регулярности.*

3.4.3. Условие регулярности Слейтера. Существует такая точка $\mathbf{x} \in X$, что для всех $i = \overline{1,m}$ будет

$$f_i(\mathbf{x}_i) > 0. \tag{3.12}$$

Легко доказывается эквивалентность условий (3.11) и (3.12). Очевидно, что из (3.12) следует (3.11).

Пусть теперь выполняется (3.11). Выберем

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Тогда (3.12) вытекает из неравенства Иенсена 2.4.6 для вогнутых функций $f_i(\mathbf{x})$.

3.4.4. Теорема. *Если функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнуты, множество $X = \{\mathbf{x}\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ регулярно по Слейтеру, а точка $\mathbf{x} \in X$ является точкой локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X, то найдутся такие числа $u_i \geqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i f_i'(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 3.3.5, приходим к соотношениям

$$v_i \geqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}), \quad v_0 \geqslant 0,$$

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} v_i f_i'(\mathbf{x}) - v_0 \varphi'(\mathbf{x}), \tag{3.13}$$

$$1 = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} v_i + v_0. \tag{3.14}$$

Для завершения доказательства осталось убедиться в том, что $v_0 > 0$. Предположим, что $v_0 = 0$. Из (3.14) в этом случае следует, что хотя бы одно $v_l > 0$, $l \in I(\mathbf{x})$. Из регулярности множества X вытекает существование такой точки $\mathbf{z} \in X$, что $f_i(\mathbf{z}) > 0$ $(i = \overline{1,m})$. Тогда направление $-\mathbf{s} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ будет возможным. Так как $f_l(\mathbf{x})$ — вогнутая функция, то из 2.4.9 получаем

$$-\langle f_l'(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle \geqslant f_l(\mathbf{z}) - f_l(\mathbf{x}) > 0.$$

Умножим равенство (3.13) скалярно на $-\mathbf{s}$:

$$0 = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} v_i \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle. \tag{3.15}$$

Поскольку $-\mathbf{s}$ — возможное направление в точке $\mathbf{x}$, то из теоремы 3.2.7 следует, что $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$. Итак, все слагаемые в правой части равенства (3.15) одного знака, а одно из них, а именно l-е, заведомо отлично от нуля: $-v_l\langle f_l'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle > 0$, что противоречит равенству нулю всей суммы. $\triangle$

Замечание. В случае выпуклости функций $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ требование регулярности становится излишним.

Действительно, *если функции $f_i(\mathbf{x})$ выпуклы, то равенство*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i f_i'(\mathbf{x}), \quad u_i \geqslant 0,$$

является необходимым условием того, что $\mathbf{x}$ является точкой локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

Справедливость этого утверждения будет следовать из теоремы Фаркаша, если мы покажем, что для любого $\mathbf{u} \in E_n$ такого, что

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{u}\rangle \geqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}),$$

имеет место неравенство

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{u}\rangle \geqslant 0.$$

Поскольку длина вектора $\mathbf{u}$ не влияет на выполнение указанного неравенства, то достаточно установить справедливость последнего неравенства для векторов достаточно малой длины. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ лежит в такой достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}$, что $f_j(\mathbf{z}) > 0$, $j \in \{1, ..., n\} \backslash I(\mathbf{x})$. Точка $\mathbf{z}$ принадлежит X, поскольку

$$f_i(\mathbf{z}) = f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{x}) \geqslant \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{z} - \mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}).$$

Если $\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{z} - \mathbf{x}\rangle < 0$, то по формуле Тейлора получим

$$\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{x}) = \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{z} - \mathbf{x}\rangle + o(\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|) < 0,$$

так как по предположению величина $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$ достаточно мала. Последнее противоречит условию, что $\mathbf{x}$ является точкой локального минимума.

3.4.5. Теорема. *Если функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнуты, замкнутое множество $X = \{\mathbf{x}\colon \varphi_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ регулярно по Слейтеру, а точка $\mathbf{x} \in X$ является точкой локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X, то*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}(\mathbf{x} - \varphi'(\mathbf{x})).$$

Здесь $\mathbf{p}(\mathbf{v})$ означает проекцию точки $\mathbf{v}$ на множество X.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}$ — произвольная точка множества X. Направление $-\mathbf{s} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ является возможным в точке $\mathbf{x}$. Из теоремы 3.4.4 получаем, что

$$\langle (\mathbf{x} - \varphi'(\mathbf{x})) - \mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x}\rangle = \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0.$$

По теореме 2.2.3 отсюда следует, что $\mathbf{x}$ является проекцией точки $\mathbf{x} - \varphi'(\mathbf{x})$ на множество X. $\triangle$

3.4.6. Случай линейных ограничений. Если ограничения, задающие допустимое множество, линейны, то предыдущая теорема справедлива без предположения регулярности множества X.

Теорема. *Если функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ линейны, а точка*

$$\mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}\}$$

является точкой локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X, то найдутся такие числа $u_i \geqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, что

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I(\mathbf{x})} u_i \mathbf{a}_i.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — столь малое положительное число, что для всех точек, принадлежащих окрестности

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X\colon\ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\}$$

точки $\mathbf{x}$, будет

$$\varphi(\mathbf{y}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}).$$

Рассмотрим произвольную точку $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ множества X. В силу выпуклости множества X будет $\mathbf{x} - \beta(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \in U_\varepsilon(\mathbf{x})$ для всех $\beta \in (0, \overline{\beta}]$ при

$$\overline{\beta} = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|}\right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{\beta \to +0} \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} - \beta(\mathbf{x} - \mathbf{z}))}{\beta} = \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{z}\rangle \leqslant 0.$$

Если положить $\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$, то направление $-\mathbf{s}$ будет возможным в точке $\mathbf{x}$, и последнее неравенство примет вид

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0. \tag{3.16}$$

Поскольку $-\mathbf{s}$ — любое возможное направление в точке $\mathbf{x}$, то из теоремы 3.2.8 следует, что неравенство (3.16) должно выполняться для всех $\mathbf{s}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{s}\rangle \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}). \tag{3.17}$$

Применяя к условиям (3.16) и (3.17) теорему 2.3.3, сразу же получаем утверждение теоремы. $\triangle$

3.4.7. Поскольку при выводе условия (3.16) мы пользовались лишь свойством выпуклости множества X, то можно сформулировать следующее условие стационарности точки $\mathbf{x}$ в задаче выпуклого программирования: *для того чтобы точка $\mathbf{x}$ выпуклого множества X*

являлась точкой локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ *на множестве* X, *необходимо, чтобы в этой точке производные по всем возможным направлениям были неотрицательными*:

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial(-\mathbf{s})} \geqslant 0.$$

3.5. Достаточные условия оптимальности

3.5.1. Теорема. *Для того чтобы точка* $\mathbf{x} \in X$ *была точкой глобального минимума основной задачи выпуклого программирования* 3.1.4, *достаточно существования таких чисел* $u_i \geqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, *что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i\in I(\mathbf{x})} u_i f_i'(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Вследствие выпуклости множества X направление $-\mathbf{s} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ является возможным в точке $\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{y} \in X$. Из теоремы 3.2.7 следует, что $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0$, $i \in I(\mathbf{x})$, и поскольку функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, то, пользуясь (2.15), получаем соотношение

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) \leqslant \langle\varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = \langle\varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle = \\ = \Big\langle \sum_{i\in I(\mathbf{x})} u_i f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\Big\rangle = \sum_{i\in I(\mathbf{x})} u_i\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0,$$

справедливое для любого $\mathbf{y} \in X$. $\triangle$

3.5.2. Теоремы 3.4.4 и 3.5.1 можно объединить в одну теорему о критерии оптимальности.

Теорема Куна–Таккера (дифференцируемый случай). *Если функции* $f_i(\mathbf{x})$ *вогнуты, функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *выпукла, множество* $X = \{\mathbf{x}\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ *регулярно по Слейтеру, то для оптимальности точки* $\mathbf{x} \in X$ *необходимо и достаточно существования таких чисел* $u_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$, *что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i'(\mathbf{x}), \qquad \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) = 0.$$

Для того чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно вспомнить, что точка локального минимума выпуклой функции является оптимальной (теорема 2.4.11). $\triangle$

3.5.3. Часто в допустимом множестве X выделяют ограничения неотрицательности допустимых точек:

$$X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}.$$

В этом случае теорему Куна – Таккера формулируют следующим образом: *если функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнуты, функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, множество X регулярно по Слейтеру, то для оптимальности точки $\mathbf{x} \in X$ необходимо и достаточно существования таких чисел $u_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$ и $v_j \geqslant 0$ $(j = \overline{1,n})$, что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i f'(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{e}_j,$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} v_j x_j = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$ $(j = \overline{1,n})$ — j-й координатный вектор: $\mathbf{e}_j^T = (0, ..., 1, ..., 0)$, единица стоит на j-м месте.

3.5.4. Случай линейных ограничений (критерий оптимальности). Теоремы 3.4.6 и 3.5.1 можно также объединить в одну теорему о критерии оптимальности: *для того чтобы точка $\mathbf{x}$ была точкой глобального минимума выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве $X = \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа $u_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$, что*

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} u_i \mathbf{a}_i, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i(\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle - b_i) = 0.$$

3.5.5. Теорема. *Для того чтобы точка $\mathbf{x} \in X$ была точкой глобального минимума основной задачи выпуклого программирования* 3.1.4, *достаточно, чтобы для всех $\mathbf{s}$, удовлетворяющих системе*

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}), \tag{3.18}$$

выполнялось условие

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant 0. \tag{3.19}$$

Доказательство. Применяя к условиям (3.18) и (3.19) теорему 2.3.3 (Фаркаша), сразу же приходим к условиям теоремы 3.5.1. △

3.6. Функция Лагранжа. Условия оптимальности

3.6.1. Седловая точка. Рассмотрим n-мерный вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий некоторому выпуклому множеству Γ, и m-мерный неотрицательный вектор $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$. Пусть функция $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$ на множестве Γ и вогнута по $\mathbf{y}$ на неотрицательном ортанте.

Определение. Пара $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ называется *седловой точкой* функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на множестве всех $\mathbf{x} \in \Gamma$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, если

$$\mathbf{x}^* \in \Gamma, \quad \mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0},$$

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \tag{3.20}$$

для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$.

Соотношение (3.20) можно записать также следующим образом:

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} \max_{\mathbf{y}\geqslant 0} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{y}\geqslant 0} \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3.6.2. Условия существования седловой точки. Для дальнейших целей нам достаточно рассмотреть случаи, когда $\Gamma = E_n^+ = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ и $\Gamma = E_n$.

Пусть функция $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, вогнута по $\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ и непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и по $\mathbf{y}$.

Теорема. *Для того чтобы пара* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ ($\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$) *была седловой точкой функции* $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *в области* $\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$, *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.21}$$

$$\left\langle \mathbf{x}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = 0, \tag{3.22}$$

$$\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} \leqslant \mathbf{0}, \tag{3.24}$$

$$\left\langle \mathbf{y}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} \right\rangle = 0, \tag{3.25}$$

$$\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.26}$$

где

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \triangleq \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} \triangleq \frac{\partial L(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}^* \\ \mathbf{y}=\mathbf{y}^*}}.$$

Доказательство. Запишем условия (3.21)–(3.26) в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x_i} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.21$'$}$$

$$x_i^* \frac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.22$'$}$$

$$x_i^* \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3.23$'$}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial y_j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.24$'$}$$

$$y_j^* \frac{\partial L^*}{\partial y_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.25$'$}$$

$$y_j^* \geqslant 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{3.26$'$}$$

Необходимость. Пусть выполняются условия (3.20) при $\Gamma = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. В частности, отсюда следует $L(x_i, \mathbf{y}^*) \triangleq L(x_1^*, ..., x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, ..., x_n^*, \mathbf{y}^*) \geqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ для всех $x_i \geqslant 0$, т. е. точка x_i^* является точкой минимума выпуклой функции одного переменного $L(x_i, \mathbf{y}^*)$ на полупрямой $x_i \geqslant 0$. Условия (3.21′)–(3.23′) и являются необходимыми условиями минимума (в частности, локального минимума) при $x_i \geqslant 0$ для функции одного переменного $\Big($поскольку либо x_i^* — внутренняя точка полуоси $x_i \geqslant 0$, и тогда $\dfrac{\partial L^*}{\partial x_i} = 0$, либо $x_i^* = 0$, и тогда $\dfrac{\partial L^*}{\partial x_i} \geqslant 0\Big)$. Аналогично, пользуясь вогнутостью функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по $\mathbf{y}$, легко доказать справедливость условий (3.24′)–(3.26′).

Достаточность. Пусть выполняются условия (3.21)–(3.26). Поскольку $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$ при $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, то, пользуясь неравенством из 2.4.9, получаем

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \Big\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \Big\rangle.$$

Отсюда и из (3.21)–(3.23) получаем

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leqslant L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*), \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Аналогично доказывается и левое неравенство в (3.20). △

3.6.3. Если $\Gamma = E_n$, то аналогичными рассуждениями нетрудно убедиться, что седловая точка будет определяться условием

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

и соотношениями (3.24)–(3.26).

3.6.4. Функция Лагранжа. Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — m-мерный вектор $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$. Рассмотрим следующую задачу выпуклого программирования:

$$\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}, \quad X = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant 0\}. \tag{3.27}$$

Здесь Γ — выпуклое и замкнутое множество, $\varphi(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, а все функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнутые. Заметим, что при $\Gamma = E_n$ задача (3.27) является (согласно принятой терминологии) основной задачей выпуклого программирования.

Определение. Функцию

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle, \tag{3.28}$$

определенную при всех $\mathbf{x} \in E_n$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, называют *функцией Лагранжа* для задачи выпуклого программирования (3.27).

3.6.5. В задачах классического анализа об условном экстремуме (задачах, в которых допустимое множество задается системой уравнений) важную роль играет метод множителей Лагранжа: решение исходной задачи ищется среди стационарных точек функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}.$$

В задачах выпуклого (и, в частности, линейного) программирования функции Лагранжа также отводится важное место: при весьма общих предположениях задача выпуклого программирования сводится к отысканию седловых точек функции Лагранжа.

3.6.6. Достаточные условия оптимальности.

Теорема. *Если пара* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *является седловой точкой функции Лагранжа* (3.28) *на множестве* $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, *то* $\mathbf{x}^*$ *— оптимальная точка задачи выпуклого программирования* (3.27).

Доказательство. Из (3.28) и определения седловой точки (3.20) получаем неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}^*) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{x}^*) - \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle, \tag{3.29}$$

справедливые для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$. Из левого неравенства следует

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle \geqslant \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle, \tag{3.30}$$

а поскольку $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$ и это неравенство справедливо для любого $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \geqslant \mathbf{0}$.

В частности, (3.30) имеет место и для $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, поэтому

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle \leqslant 0,$$

а следовательно (так как $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}$),

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle = 0. \tag{3.31}$$

Если $\mathbf{x} \in X$, то из (3.27) следует, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}$, и поэтому для $\mathbf{x} \in X$ будет

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle \geqslant 0. \tag{3.32}$$

Так как неравенство (3.29) выполняется для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$ и, в частности, для $\mathbf{x} \in X$, то из правого неравенства (3.29) и из (3.31) и (3.32) получаем для всех $\mathbf{x} \in X$ неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle \leqslant \varphi(\mathbf{x}).$$

Но $\mathbf{x}^* \in X$ (так как $\mathbf{x}^* \in \Gamma$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \geqslant \mathbf{0}$), и, следовательно, $\mathbf{x}^*$ — оптимальная точка. $\triangle$

Замечание. При доказательстве теоремы нигде не использовались ни свойства выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ и множества Γ, ни вогнутость функций $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$, ни какие-либо свойства гладкости. Таким образом, наличие седловой точки $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ функции Лагранжа определяет оптимальность точки $\mathbf{x}^*$ для общей задачи математического программирования. Сразу же подчеркнем: обратное утверждение, что из оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ следует существование седловой точки $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ функции Лагранжа, справедливо лишь для задачи выпуклого программирования и вдобавок при условии регулярности допустимого множества. Это и есть известная теорема Куна–Таккера. Ниже эта теорема будет доказана в предположении непрерывной дифференцируемости функций $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$ как очевидное следствие теорем 3.5.2 и 3.6.2.

3.6.7. Теорема Куна – Таккера. Пусть допустимое множество задачи выпуклого программирования имеет вид

$$X=\{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=\overline{1,m},\ \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\}.$$

Будем предполагать, что выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x})$ и вогнутые функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы.

Теорема Куна–Таккера. *Если в задаче выпуклого программирования*

$$\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x}\in X\},\quad X=\{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x})\geqslant 0,\ i=\overline{1,m},\ \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\},$$

множество X обладает свойством регулярности 3.4.2, *то необходимым и достаточным условием оптимальности точки $\mathbf{x}^*\in X$ является существование такого $\mathbf{y}^*\geqslant\mathbf{0}$, чтобы пара $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ являлась седловой точкой функции Лагранжа*

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi(\mathbf{x})-\langle\mathbf{y},\mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle$$

на множестве $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$, $\mathbf{y}\geqslant\mathbf{0}$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 3.6.6 при $\Gamma=\{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\}$.

Необходимость. Докажем эквивалентность условий теоремы 3.5.3:

$$\varphi'(\mathbf{x}^*)=\sum_{i=1}^{m}y_i^*f_i'(\mathbf{x}^*)+\sum_{j=1}^{n}v_j^*\mathbf{e}_j,\tag{3.33}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_i^*f_i(\mathbf{x}^*)=0,\tag{3.34}$$

$$y_i^*\geqslant 0,\quad i=\overline{1,m},\tag{3.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n}v_j^*x_j^*=0,\tag{3.36}$$

$$v_j^*\geqslant 0,\quad j=\overline{1,n},\tag{3.37}$$

и условий теоремы 3.6.2, определяющих седловую точку функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.38}$$

$$\left\langle \mathbf{x}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle = 0, \tag{3.39}$$

$$\mathbf{x}^* \geqslant \mathbf{0}, \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} \leqslant \mathbf{0}, \tag{3.41}$$

$$\left\langle \mathbf{y}^*, \frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} \right\rangle = 0, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}. \tag{3.43}$$

Эквивалентность будем обозначать символом $\sim$.

Пусть $\mathbf{v}^T = (v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*)$ и $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$. Заметим, что

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \mathbf{f}_i'(\mathbf{x}^*) \triangleq \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{y}} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^*).$$

Очевидно,

$$(3.38) \sim (3.37),$$
$$(3.39) \sim (3.36),$$
$$(3.42) \sim (3.34),$$
$$(3.43) \sim (3.35).$$

Условия (3.40) и (3.41) означают, что $\mathbf{x}^* \in X$. $\triangle$

3.6.8. Для основной задачи выпуклого программирования 3.1.4 теорема Куна–Таккера формулируется следующим образом: *если в основной задаче выпуклого программирования множество* $X = \{\mathbf{x}\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ *обладает свойством регулярности* 3.4.2, *то необходимым и достаточным условием оптимальности точки* $\mathbf{x}^* \in X$ *является существование такого* $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$, *чтобы пара* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *являлась седловой точкой функции Лагранжа на множестве* $\mathbf{x} \in E_n$ *и* $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$.

Справедливость этой теоремы следует из пп. 3.5.2 и 3.6.3.

3.6.9. Случай линейных ограничений. *Если функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *выпукла, а допустимое множество задается линейными ограничениями,*

$$X = \{\mathbf{x}\colon \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle - b_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,m},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},$$

то для оптимальности точки $\mathbf{x}^* \in X$ *необходимо и достаточно существование такого* $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$, *чтобы пара* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *являлась седловой точкой функции Лагранжа на множестве* $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$.

Справедливость этой теоремы следует из пп. 3.5.4 и 3.6.2. △

3.6.10. Существуют различные варианты теоремы Куна–Таккера, различные ее обобщения и применения в теории экстремальных задач. Эта теорема лежит в основе теории двойственности математического программирования.

Теорема Куна–Таккера находит также применение в численных методах решения задач математического программирования. Она позволяет исходную задачу заменить задачей отыскания седловой точки функции Лагранжа, т. е. задачей вида

$$\min_{\mathbf{x}\in\Gamma} \max_{\mathbf{y}\geqslant 0} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

"Простые" ограничения этой задачи позволяют применять для ее решения методы, во многом схожие с численными методами безусловной оптимизации, достаточно хорошо изученные и апробированные.

Замечание. Теорема Куна–Таккера перестает быть содержательной в случае вырожденности, например, когда

$$\varphi'(\mathbf{x}^*) \equiv \mathbf{0}, \quad f_i'(\mathbf{x}^*) \equiv 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

В то же время существует широкий класс задач такого рода. В добавлении (см. Д.3) приводятся необходимые и достаточные условия оптимальности в вырожденных задачах.

3.6.11. Двойственность. Введем функцию $g(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{y}\geqslant 0} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Очевидно, что основная задача математического программирования может быть записана в виде

$$g(\mathbf{x}) \to \min, \quad \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\},$$

поскольку $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$, если $\mathbf{x} \in X$. Эту задачу принято называть *прямой*.

Обозначим $h(\mathbf{y}) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Задачу

$$h(\mathbf{y}) \to \max, \quad \mathbf{y} \in E_m^+ = \{\mathbf{y}\colon \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\},$$

называют *двойственной*, а переменные $y_1, y_2, ..., y_m$ — *двойственными переменными*.

3.6.12. Теорема. 1) $\varphi(\mathbf{x}) \geqslant h(\mathbf{y})$ *для всех* $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in E_m^+$.

2) *Если выполняются условия теоремы Куна–Таккера* (*п.* 3.6.7), *а пара* $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ *является седловой точкой функции Лагранжа, то*

$$\mathbf{y}^* = \arg\max\{h(\mathbf{y})\colon \mathbf{y} \in E_m^+\} \quad \textit{и} \quad \varphi(\mathbf{x}^*) = h(\mathbf{y}^*).$$

3) *Если* $\varphi(\mathbf{x}^*) = h(\mathbf{y}^*)$ *для любых* $\mathbf{x}^* \in X$, $\mathbf{y}^* \in E_m^+$, *то*

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}, \quad \mathbf{y}^* = \arg\max\{h(\mathbf{y})\colon\ \mathbf{y} \in E_m^+\}.$$

Доказательство. 1) Так как $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, то

$$\varphi(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle = L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant \inf_{\mathbf{x}\in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{y}).$$

2) Для всех $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ справедливо соотношение

$$h(\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x}\in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geqslant L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geqslant \inf_{\mathbf{x}\in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{y}),$$

поэтому $\mathbf{y}^*$ — решение двойственной задачи. Но $L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \varphi(\mathbf{x}^*)$, так как $\langle \mathbf{y}^*, f(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$ (см. п. 3.31), поэтому $\varphi(\mathbf{x}^*) = h(\mathbf{y}^*)$.

3) В силу 1)

$$\varphi(\mathbf{x}) \geqslant h(\mathbf{y}^*) = \varphi(\mathbf{x}^*) \geqslant h(\mathbf{y})$$

для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in E_m^+$, следовательно, $\mathbf{x}^*$ — решение прямой задачи, а $\mathbf{y}^*$ — двойственной.

Определение. Точку $\mathbf{v}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$, удовлетворяющую условиям

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m} y_i^* \nabla f_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad y_i^* \geqslant 0, \quad y_i^* f_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

будем называть *точкой Куна–Таккера.*

ГЛАВА 4

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Основные понятия

4.1.1. Основная задача. Следующую экстремальную задачу будем называть *основной задачей линейного программирования*:

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in R_1}\langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle,\\ R_1=\{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x}\geqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0}\}.\end{gathered}\tag{4.1}$$

Несколько позже будет показано, что любая задача линейного программирования может быть приведена к виду (4.1). Поэтому основные теоремы линейного программирования будут рассмотрены применительно к задаче (4.1), что никак не снижает общности рассмотрений.

4.1.2. Двойственность. Задачей, двойственной к основной задаче линейного программирования, будем называть задачу

$$\begin{gathered}\max_{\mathbf{y}\in Q_1}\langle \mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,\\ Q_1=\{\mathbf{y}A^T\mathbf{y}\leqslant \mathbf{c},\ \mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}\}.\end{gathered}\tag{4.2}$$

4.1.3. Эквивалентность. Две экстремальные задачи будем называть *эквивалентными*, если либо множества их решений совпадают, либо обе задачи не имеют решений.

Легко убедиться, что задача (4.1) будет двойственной к задаче (4.2). Для этого достаточно рассмотреть задачу, эквивалентную задаче (4.2):

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{y}\in Q_1}\langle -\mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,\\ Q_1=\{\mathbf{y}\colon\ -A^T\mathbf{y}\geqslant -\mathbf{c},\ \mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}\},\end{gathered}$$

и построить, в соответствии с определением, к ней двойственную:

$$\begin{gathered}\max_{\mathbf{x}\in R_1}\langle -\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle,\\ R_1=\{\mathbf{x}\colon\ -A\mathbf{x}\leqslant -\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0}\}.\end{gathered}$$

А это и есть задача (4.1).

Таким образом, задачи (4.1) и (4.2) взаимно двойственны.

4.1.4. Терминология. Всюду в настоящей книге будем придерживаться уже введенной терминологии (целевая функция, допустимое множество, допустимая точка, оптимальная точка и т. д.).

Однако следует сказать, что терминология линейного программирования неоднозначна. В значительной степени это связано с экономическими приложениями, термины которых часто сохраняют и для задач линейного программирования.

Матрицу $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$ называют *матрицей условий* задачи (4.1).

Ее столбцы $\mathbf{a}_i$ $(i = \overline{1,n})$ называют *векторами условий* задачи (4.1).

Вектор $\mathbf{b}$ называют *вектором ограничений* задачи (4.1).

Допустимую точку $\mathbf{x} \in R_1$ называют также *планом*. Иногда угловую точку множества R_1 называют *опорным планом*, а решение задачи линейного программирования (оптимальную точку) называют *оптимальным планом*.

4.1.5. Геометрическая интерпретация. В пространстве E_n множество R_1 можно рассматривать как пересечение полупространств (при $n = 2$ — полуплоскостей):

$$(A\mathbf{x})_i \geqslant b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \lambda$$

— семейство параллельных гиперплоскостей (при $n = 2$ — параллельных прямых). Вектор $-\mathbf{c}$ направлен в сторону убывания целевой функции. На рис. 4.1 изображен случай, когда множество ограничено, т.е. многоугольник.

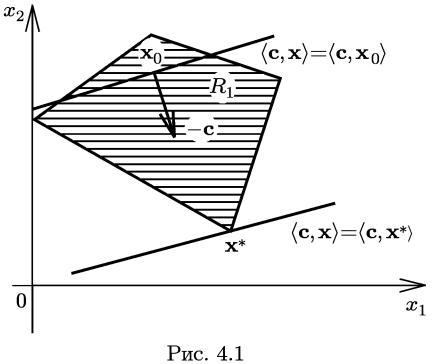

Рис. 4.1

Рассмотрим некоторую точку $\mathbf{x}_0 \in R_1$. Ей соответствует значение целевой функции

$$\lambda_0 = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_0 \rangle.$$

Теперь будем перемещать прямую

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \lambda$$

в направлении $-\mathbf{c}$, т. е. в направлении убывания величины λ, до тех пор, пока не придем в такую точку $\mathbf{x}^* \in R_1$, для которой значение λ минимально. Геометрический смысл задачи здесь очевиден.

Легко изобразить на чертеже, когда R_1 неограничено, но решение существует; когда решение существует, но не единственно; и, наконец, когда R_1 неограничено и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ неограничена на R_1.

4.2. Основные теоремы

4.2.1. Сформулируем, во-первых, теорему, которая является частным случаем теоремы 3.6.9 (когда $\varphi(\mathbf{x})$ линейна) и поэтому в отдельном доказательстве не нуждается.

Будем обозначать функцию Лагранжа для задачи (4.1) так:

$$L_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} - A\mathbf{x} \rangle. \tag{4.3}$$

Теорема. *Для того чтобы точка $\mathbf{x}^* \in R_1$ была оптимальной для основной задачи линейного программирования, необходимо и достаточно существования $\mathbf{y}^* \geqslant \mathbf{0}$ такого, чтобы пара $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ была седловой точкой функции Лагранжа $L_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в области $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$, т.е.*

$$L_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leqslant L_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leqslant L_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*). \tag{4.4}$$

4.2.2. Из соотношения (3.33) следует, что необходимым и достаточным условием оптимальности $\mathbf{x}^*$ для задачи (4.1) является следующее представление вектора $\mathbf{c}$:

$$-\mathbf{c} = -\sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} y_i^* \mathbf{a}_i - \sum_{j \in J(\mathbf{x}^*)} v_i^* \mathbf{e}_j, \quad y_i^* \geqslant 0, \quad v_j^* \geqslant 0, \tag{4.5}$$

где

$$I(\mathbf{x}^*) = \{i \colon (A\mathbf{x}^*)_i = b_i\}, \quad J(\mathbf{x}^*) = \{j \colon x_j^* = 0\}.$$

Из теорем 3.6.2 и 4.2.1 следует, что для $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} x_i^*(\mathbf{c} - A^T\mathbf{y}^*)_i &= 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ y_j^*(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^*)_j &= 0, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.2.3. Теоремы двойственности.

Первая теорема двойственности. *Прямая и двойственная задачи либо обе имеют оптимальные точки $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, причем*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}^* \rangle, \tag{4.7}$$

либо обе их не имеют.

Доказательство. Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи (4.2). Для этого запишем эту задачу в виде основной задачи линейного программирования, т. е. в виде (4.1).

Ясно, что задача

$$\max_{\mathbf{y}\in Q_1}\langle \mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,$$
$$Q_1=\{\mathbf{y}\colon\ A^T\mathbf{y}\leqslant \mathbf{c},\ \mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}\},$$

эквивалентна задаче

$$\min_{\mathbf{y}\in Q_1}\langle -\mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,$$
$$Q_1=\{\mathbf{y}\colon\ -A^T\mathbf{y}\geqslant -\mathbf{c},\ \mathbf{y}\geqslant \mathbf{0}\}.$$

А для этой задачи, поскольку она записана в виде основной задачи, функцией Лагранжа будет

$$L_2(\mathbf{y},\mathbf{x})=-\langle -\mathbf{b},\mathbf{y}\rangle+\langle \mathbf{x},-\mathbf{c}+A^T\mathbf{y}\rangle. \tag{4.8}$$

Седловой точкой для $L_2(\mathbf{y},\mathbf{x})$ в области $\mathbf{y}\geqslant\mathbf{0}$, $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$ будет пара $\mathbf{y}'$, $\mathbf{x}'$ такая, что

$$L_2(\mathbf{y}',\mathbf{x})\leqslant L_2(\mathbf{y}',\mathbf{x}')\leqslant L_2(\mathbf{y},\mathbf{x}'). \tag{4.9}$$

Сравнивая (4.8) и (4.3), получим

$$L_2(\mathbf{y},\mathbf{x})=-[\langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle+\langle \mathbf{y},\mathbf{b}-A\mathbf{x}\rangle]=-L_1(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{4.10}$$

Из (4.10), (4.9) и (4.4) следует, что если $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — седловая точка для $L_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$, то $\mathbf{y}^*$, $\mathbf{x}^*$ — седловая точка для $L_2(\mathbf{y},\mathbf{x})$, а значит, либо $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ оптимальны соответственно для задач (4.1) и (4.2), либо, когда седловая точка не существует, и задача (4.1), и задача (4.2) не имеют решений.

Наконец, равенство (4.7) следует из формул (4.6). $\triangle$

Определения. Назовем условия в задачах (4.1) и (4.2)

$$(A\mathbf{x})_j\geqslant b_j,\quad y_j\geqslant 0,\quad j=\overline{1,m},$$

парой двойственных условий.

Аналогично условия

$$x_i\geqslant 0,\quad (A^T\mathbf{y})_i\leqslant c_i,\quad i=\overline{1,n},$$

также являются парой двойственных условий.

Любое из условий называется *свободным*, если оно выполняется как строгое неравенство хотя бы для одного оптимального вектора.

Условие называется *закрепленным*, если оно выполняется как равенство для всех оптимальных векторов.

Вторая теорема двойственности. *Если прямая (а значит, и двойственная) задача разрешима, то в каждой паре двойственных условий одно является свободным, другое закрепленным.*

Доказательство. Утверждение, что свободному условию соответствует двойственное закрепленное, следует сразу из формул (4.6).

Покажем, что закрепленному условию соответствует двойственное свободное. Пусть, например, условие $x_l \geqslant 0$ закрепленное: $x_l^* = 0$ для всех $\mathbf{x}^* \in X^*$, где X^* — множество решений задачи (4.1). Построим решение $\overline{\mathbf{y}}$ задачи (4.2), для которого $(A^T\overline{\mathbf{y}})_l < c_l$. Воспользуемся индукцией по числу n.

При $n = 1$ в прямой задаче

$$\min \langle c_1, x_1 \rangle, \quad c_1 \neq 0,$$
$$Ax_1 \geqslant \mathbf{b}, \quad x_1 \geqslant 0$$
$$(A \text{ — одностолбцовая матрица}),$$

если $x_1^* = 0$, то $c_1 > 0$; в двойственной задаче

$$\max \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$A^T\mathbf{y} \leqslant c_1,$$
$$\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$$

$\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ является решением и $(A^T\overline{\mathbf{y}})_1 \equiv A^T\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0} < c_1$.

Предположим, что для $n-1$ теорема верна. Построим $\overline{\mathbf{y}}$ для размерности n. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{x} \in R_1(\varepsilon)} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle, \\ R_1(\varepsilon) = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ x_l \geqslant \varepsilon > 0\}. \end{gathered} \tag{A}$$

1. Если $R_1(\varepsilon) = \varnothing$ при всех $\varepsilon > 0$, то $x_l = 0$ при всех $x \in R_1$, следовательно, задача (4.1) имеет размерность $n-1$, для которой теорема верна по предположению индукции.

2. Пусть $R_1(\varepsilon) \neq \varnothing$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку условие $x_l \geqslant 0$ закрепленное, а $R_1(\varepsilon) \subseteq R_1 = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$, то

$$\min_{\mathbf{x} \in R_1(\varepsilon)} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \varphi_\varepsilon^* > \varphi^* = \min_{\mathbf{x} \in R_1} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$$

(если предположить, что $\varphi_\varepsilon^* = \varphi^*$, то найдется $x_l^* \geqslant \varepsilon > 0$, что противоречит условию закрепленности).

Построим задачу, двойственную к (A):

$$\begin{gathered} \max_{\mathbf{y} \in Q} (\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle + \varepsilon y_{m+1}), \\ Q = \{\mathbf{y}\colon\ A^T\mathbf{y} + e_l y_{m+1} \leqslant \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}, \quad y_{m+1} \geqslant 0\}. \end{gathered} \tag{B}$$

Пусть точка $\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}}(\varepsilon) \\ \overline{\mathbf{y}}_{m+1}(\varepsilon) \end{bmatrix}$ является решением задачи (B). Покажем, что точка $\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ будет решением задачи (4.2). Не ограничивая общности, считаем, что активными будут ограничения

$$(A^T\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon))_i = c_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad i \neq l, \quad k \leqslant n,$$
$$(A^T\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon))_l + \overline{\mathbf{y}}_{m+1}(\varepsilon) = c_l,$$
$$\overline{\mathbf{y}}_j(\varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1,p}, \quad j \neq m+1, \quad p \leqslant m.$$

По теореме Куна–Таккера (3.5.1) в решении $\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{y}}(\varepsilon) \\ \overline{\mathbf{y}}_{m+1}(\varepsilon) \end{bmatrix}$ будет

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \sum_{\substack{i=\overline{1,k} \\ i\neq l}} \lambda_i \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_l \begin{bmatrix} \mathbf{a}_l \\ 1 \end{bmatrix} - \sum_{j=\overline{1,p}} u_j \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,k}, \quad i \neq l, \quad \lambda_l > 0, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

При $\varepsilon \to +0$ будет $\lambda_l \to +0$. Поэтому по теореме о замкнутости конуса (2.3.2) существуют такие неотрицательные числа $\lambda_i^* \geqslant 0$, $(i = \overline{1,k},\ i \neq l)$, λ_l^*, $u_j^* \geqslant 0$ $(j = \overline{1,p},\ j \neq m+1)$, что

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{\substack{i=\overline{1,k} \\ i\neq l}} \lambda_i^* \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_l^* \begin{bmatrix} \mathbf{a}_l \\ 1 \end{bmatrix} - \sum_{j=\overline{1,p}} u_j^* \begin{bmatrix} \mathbf{e}_j \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (C)$$

причем $\lambda_l^* = 0$. В свою очередь в точках $\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ будет $(A^T\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon))_l + \overline{y}_{m+1}(\varepsilon) = c_l$, а поскольку $\overline{y}_{m+1}(\varepsilon) > 0$, то $(A^T\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon))_l < c_l$. Поэтому для задачи (4.2) в точках $\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ активными будут только ограничения

$$(A^T\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon))_i = c_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad i \neq l, \quad \overline{y}_j(\varepsilon) = 0, \quad j = \overline{1,p}.$$

Переписав (C) в виде

$$\mathbf{b} = \sum_{\substack{i=\overline{1,k} \\ i\neq l}} \lambda_i^* \mathbf{a}_i - \sum_{j=\overline{1,p}} u_j^* \mathbf{e}_j$$

и учитывая предыдущее замечание, мы сразу попадаем в условия теоремы (3.5.1), откуда следует, что $\overline{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ — решение задачи (4.2) при $\varepsilon > 0$ достаточно малых. $\triangle$

4.2.4. Теорема. *Для любых допустимых* $\mathbf{x} \in R_1$ *и* $\mathbf{y} \in Q_1$ *выполняется неравенство*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle. \qquad (4.11)$$

Доказательство. Из неравенств, определяющих R_1 и Q_1, следует

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle A^T\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, A\mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle. \quad \triangle$$

4.2.5. Теорема. *Если* $\mathbf{x}^* \in R_1$ *и* $\mathbf{y}^* \in Q_1$, *а*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}^* \rangle,$$

то $\mathbf{x}^*$ *и* $\mathbf{y}^*$ *оптимальны соответственно для задач* (4.1) *и* (4.2), *и обратно.*

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in R_1$ в силу (4.11) и условия теоремы будет

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle,$$

т. е. $\mathbf{x}^*$ оптимален. Аналогично доказывается оптимальность $\mathbf{y}^*$. Обратное утверждение теоремы содержится в теореме двойственности 4.2.3. $\triangle$

4.2.6. Теорема. *Если* $\inf\limits_{\mathbf{x} \in R_1} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = M > -\infty$, *то существует точка*

$$\mathbf{x}^* = \arg\min \{\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \colon \mathbf{x} \in R_1\}.$$

Доказательство. Предположим, что такой точки нет. Тогда система неравенств

$$\begin{gathered} A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b}, \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leqslant M, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{gathered} \tag{4.12}$$

не имеет решения. Пусть

$$B = \begin{bmatrix} -A \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ M \end{bmatrix}.$$

Систему (4.12) перепишем в виде

$$\begin{gathered} B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{gathered}$$

Поскольку эта система не имеет решения, то согласно модификации теоремы Фаркаша (см. 2.3.5) будет разрешимой следующая система:

$$B^T \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}, \tag{4.13}$$

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{u} \rangle < 0, \tag{4.14}$$

$$\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}. \tag{4.15}$$

Если в неравенстве (4.14):

$$-\sum_{i=1}^{m} b_i u_i + M u_{m+1} < 0,$$

увеличить число M на достаточно малую величину $\varepsilon > 0$, то система

$$\begin{gathered} B^T \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}, \\ -\sum_{i=1}^{m} b_i u_i + (M + \varepsilon) u_{m+1} < 0, \\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0} \end{gathered}$$

будет разрешимой. В силу модификации теоремы Фаркаша не будет иметь решения система

$$\begin{gathered} B\mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}_\varepsilon, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{gathered}$$

где $\mathbf{d}_\varepsilon = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ M+\varepsilon \end{bmatrix}$. В прежних обозначениях эта система имеет вид

$$A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b},$$
$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leqslant M + \varepsilon,$$
$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.$$

Однако утверждение, что эта система неразрешима, противоречит определению числа M как точной нижней грани функции $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ на множестве R_1. $\triangle$

4.2.7. Следует обратить внимание на то, что теорема справедлива, вообще говоря, лишь для задач линейного программирования.

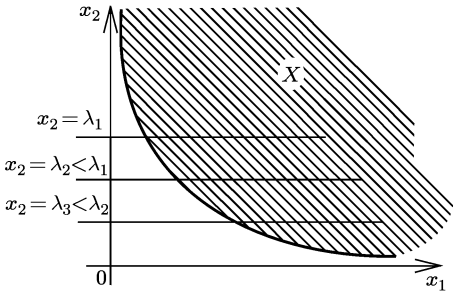

Рис. 4.2

Рассмотрим, например, следующую задачу: минимизировать x_2 на множестве

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 \cdot x_2 \geqslant 1, \quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \right\}.$$

Очевидно, что X выпукло и замкнуто,

$$\inf_{x_2 \in X} x_2 = 0,$$

но в X нет точки, где достигается $\inf\limits_X x_2$ (рис. 4.2).

4.2.8. Теорема. *Для существования решения одной из двойственных задач (и, следовательно, обеих) необходимо и достаточно, чтобы*

$$R_1 \neq \varnothing \quad \text{и} \quad Q_1 \neq \varnothing.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $\mathbf{y} \in Q_1$. Тогда для любого $\mathbf{x} \in R_1$ имеет место (4.11):

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle,$$

а тогда по теореме 4.2.6 задача (4.1) имеет решение и, значит, имеет решение и задача (4.2) (в силу теоремы 4.2.3). $\triangle$

4.2.9. Следствие. *Если**) $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ ($\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$) *неограничена снизу на* R_1 (*сверху на* Q_1), *то*

$$Q_1 = \varnothing \quad (R_1 = \varnothing).$$

*) В скобках приводится двойственное утверждение.

4.2.10. Следствие. *Если* $Q_1 = \varnothing$ $(R_1 = \varnothing)$, *а* $R_1 \neq \varnothing$ $(Q_1 \neq \varnothing)$, *то* $R_1(Q_1)$ *неограничено и* $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ *неограничена снизу на* R_1 $(\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$ *неограничена сверху на* $Q_1)$.

4.2.11. Теорема. *Если*

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \min_{R_1} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle,$$

и если существуют $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ *такие, что*:

а) $\mathbf{x}_i \in R_1, \quad i = \overline{1, M}$;

б) $\mathbf{x}^* = \sum\limits_{i=1}^{M} \alpha_i \mathbf{x}_i$, *где* $\sum\limits_{i=1}^{M} \alpha_i = 1 \quad (\alpha_i > 0,\ i = \overline{1, M})$;

то

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle = ... = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_M \rangle.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle \leqslant ... \leqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_M \rangle. \tag{4.16}$$

Тогда

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \Big\langle \mathbf{c}, \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mathbf{x}_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle \geqslant \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle.$$

Учитывая (4.16), получаем

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle.$$

Сделаем индуктивное предположение:

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle = ... = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_k \rangle, \quad k < M,$$

и докажем, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle.$$

Действительно,

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle + \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_i \rangle \geqslant$$

$$\geqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle \sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i.$$

Отсюда

$$\Big(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\Big) \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle \geqslant \Big(\sum_{i=k+1}^{M} \alpha_i \Big) \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle = \Big(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\Big) \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle.$$

И так как $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i < 1$ (поскольку $k < M$), то

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle \geqslant \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle.$$

А тогда (см. (4.16))

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_{k+1} \rangle. \quad \triangle$$

4.2.12. Теорема. *Если задача* (4.1) *имеет решение* $\mathbf{x}^*$, *то существует угловая точка* $\overline{\mathbf{x}}$ *такая, что*

$$\langle \mathbf{c}, \overline{\mathbf{x}} \rangle = \min_{\mathbf{x} \in R_1} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle.$$

Доказательство. 1) Если R_1 ограничено, то из теоремы 2.2.10 следует, что существуют такие угловые точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$ множества R_1, что для любого $\mathbf{x} \in R_1$ и, в частности, для $\mathbf{x}^*$ будет

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Вычеркнем из системы точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_N$ те, которым соответствуют $\alpha_i = 0$. Не ограничивая общности, можем полагать, что это точки $\mathbf{x}_{M+1}, \mathbf{x}_{M+2}, ..., \mathbf{x}_N$. Тогда

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, M},$$

т. е. выполняются условия теоремы 4.2.11, откуда и следует утверждение теоремы.

2) Пусть R_1 неограничено, а $\mathbf{x}^*$ оптимален. Очевидно, что для достаточно большого числа $\mu > 0$ множество

$$L = \left\{ \mathbf{x} \colon \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \mu, \ x_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n} \right\}$$

таково, что

$$\mathbf{x}^* \in R_1 \cap L \quad \text{и} \quad \mathbf{x}^* \not\equiv l = \left\{ \mathbf{x} \colon \sum_{i=1}^{n} x_i = \mu, \ x_i \geqslant 0, \ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Так как пересечение “ортанта” $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ с множеством L ограничено, то и $R_1 \cap L$ ограничено, и, следовательно (см. пп. 2.2.10 и 4.2.11), существуют угловые точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M$ множества $R_1 \cap L$ такие, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_1 \rangle = ... = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_M \rangle.$$

Если хотя бы одна точка $\mathbf{x}_i$ не принадлежит l, то теорема доказана, поскольку тогда $\mathbf{x}_i$ будет угловой точкой множества R_1. Если все $\mathbf{x}_i$ принадлежат l $(i = \overline{1, M})$, то из представления

$$\mathbf{x}^* = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, M},$$

следует $\mathbf{x}^* \in l$, что противоречит выбору числа $\mu > 0$ при построении множества L. $\triangle$

4.3. Алгебраическая характеристика угловой точки

4.3.1. Ранее было введено геометрическое определение угловой точки. Однако для того чтобы уметь находить (вычислять) угловую точку, необходима ее алгебраическая характеристика. Пусть, как и прежде,

$$I(\mathbf{x}) = \{i\colon (A\mathbf{x})_i = b_i\}, \quad J(\mathbf{x}) = \{j\colon x_j = 0\},$$
$$J = \{j = 1, 2, ..., n\}.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$(A\mathbf{z})_i = b_i, \quad i \in I(\mathbf{x}), \quad z_j = 0, \quad j \in J(\mathbf{x}). \tag{4.17}$$

Не умаляя общности, можно полагать

$$I(\mathbf{x}) = \{i\colon i = 1, 2, ..., r\},$$
$$J(\mathbf{x}) = \{j\colon j = k+1, k+2, ..., n\},$$

и тогда при $r = k$ система (4.17) будет квадратной.

4.3.2. Теорема. *Для того чтобы точка $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ являлась угловой точкой множества R_1, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{x}$ удовлетворял неособенной квадратной системе уравнений* (4.17).

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathbf{x} \in R_1$ и существует матрица

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & ... & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad \det B \neq 0, \tag{4.18}$$

такая, что

$$B\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}. \tag{4.19}$$

Здесь

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_k \end{bmatrix}, \quad x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = 0,$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Предположим, что $\mathbf{x}$ не угловая точка, т. е. существуют $\mathbf{x}' \in R_1$, $\mathbf{x}'' \in R_1$, $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}'' \neq \mathbf{x}$, такие, что

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}'', \quad \alpha \in (0,1).$$

Для $j > k$

$$x_j = \alpha x'_j + (1-\alpha)x''_j = 0.$$

И так как $\alpha > 0$, $(1-\alpha) > 0$, $x'_j \geqslant 0$, $x''_j \geqslant 0$, то

$$x'_j = x''_j = 0, \quad j = \overline{k+1, n}.$$

Далее,

$$B\overline{\mathbf{x}}' \geqslant \overline{\mathbf{b}}, \quad B\overline{\mathbf{x}}'' \geqslant \overline{\mathbf{b}}, \quad \alpha B\overline{\mathbf{x}}' + (1-\alpha)B\overline{\mathbf{x}}'' = \overline{\mathbf{b}},$$

поэтому

$$B\overline{\mathbf{x}}' = B\overline{\mathbf{x}}'' = \overline{\mathbf{b}},$$

и поскольку $\det B \neq 0$, то $\overline{\mathbf{x}}' = \overline{\mathbf{x}}''$; следовательно, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$, что противоречит предположению.

Необходимость. Пусть $\mathbf{x}$ — угловая точка множества R_1.

1) Покажем, что хотя бы для одного i будет

$$(A\mathbf{x})_i = b_i.$$

Предположим, что такого номера i не существует. Так как $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то найдется такое j, что $x_j > 0$. Рассмотрим

$$(\mathbf{x}')^T = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j + \varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_n) \geqslant \mathbf{0}$$

и

$$(\mathbf{x}'')^T = (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_j - \varepsilon, x_{j+1}, \dots, x_n) \geqslant \mathbf{0}.$$

Из предположения, что $A\mathbf{x} > \mathbf{b}$, для достаточно малого ε следует

$$A\mathbf{x}' \geqslant \mathbf{b}, \quad A\mathbf{x}'' \geqslant \mathbf{b},$$

т. е. $\mathbf{x}' \in R_1$, $\mathbf{x}'' \in R_1$. Но

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}' + \frac{1}{2}\mathbf{x}'',$$

что противоречит предположению (точка $\mathbf{x}$ по предположению угловая).

2) Пусть $(A\mathbf{x})_i = b_i$ для $i = \overline{1, r}$ и $x_j = 0$ для $j = \overline{k+1, n}$. Обозначим

$$\overline{\mathbf{a}}_p = \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \dots \\ a_{rp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_r \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = [\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \dots, \overline{\mathbf{a}}_k].$$

В этих обозначениях $\overline{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}'$ и $\overline{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$.

Докажем, что $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, ..., \overline{\mathbf{a}}_k$ линейно независимы (в этом случае $k \leqslant r$).

Предположим противное, т. е. что существует $\overline{\mathbf{x}}' \neq \mathbf{0}$ такой, что $\overline{A}\overline{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$. Возьмем

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} + \varepsilon\overline{\mathbf{x}}' \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} - \varepsilon\overline{\mathbf{x}}' \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{x}_1 \in R_1$, $\mathbf{x}_2 \in R_1$ при малых ε. Но

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\,\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}\,\mathbf{x}_2,$$

что противоречит предположению. Итак, $k \leqslant r$.

Вычеркнув $r - k$ строк из $\overline{A}$, получим матрицу B, для которой выполняются (4.18)–(4.20). △

4.3.3. Следствие. *Число угловых точек множества R_1 конечно.*

Это утверждение очевидно, поскольку число неособенных квадратных клеток (подматриц) матрицы условий конечно. △

4.3.4. Базис. Если точка $\mathbf{x}^T = (\overline{\mathbf{x}}^T, 0, ..., 0)$, $\overline{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$, угловая, то систему линейно независимых векторов $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, ..., \overline{\mathbf{a}}_k$ в представлении

$$\overline{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{k} x_i\overline{\mathbf{a}}_i, \quad x_i > 0, \quad i = \overline{1,k},$$

называют *базисом* угловой точки, а матрицу

$$B = [\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, ..., \overline{\mathbf{a}}_k]$$

— *матрицей базиса* угловой точки.

4.4. Двойственные задачи со смешанными ограничениями

4.4.1. Задачи линейного программирования наиболее общего вида — это задачи со смешанными ограничениями, когда допустимое множество задается системой равенств и неравенств, а часть переменных (или все переменные) может быть свободна от ограничений.

Введем обозначения:

$$I = \{i\colon\ i = 1, 2, ..., m\}, \quad J = \{j\colon\ j = 1, 2, ..., n\}.$$

Пусть I_1 означает часть совокупности индексов I, т. е. $I_1 \subseteq I$, а $I_2 = I \setminus I_1$. Аналогично, $J_1 \subseteq J$, $J_2 = J \setminus J_1$.

Пару задач

$$\begin{gathered}\min\langle\mathbf{c},\mathbf{x}\rangle,\\ (A\mathbf{x})_i \geqslant b_i, \quad i\in I_1,\\ (A\mathbf{x})_i = b_i, \quad i\in I_2,\\ x_j \geqslant 0, \quad j\in J_1,\end{gathered} \tag{4.21}$$

и

$$\begin{gathered}\max\langle\mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,\\ (A^T\mathbf{y})_j \leqslant c_j, \quad j\in J_1,\\ (A^T\mathbf{y})_j = c_j, \quad j\in J_2,\\ y_i \geqslant 0, \quad i\in I_1,\end{gathered} \tag{4.22}$$

называют *двойственными задачами со смешанными ограничениями.* Таким же образом, как и в случае задач (4.1) и (4.2), легко убедиться во взаимной двойственности задач (4.21) и (4.22).

4.4.2. Приведение к эквивалентным задачам основного вида. Запишем задачи (4.21) и (4.22) в следующей форме:

$$\begin{gathered}\min\left[\langle\mathbf{c}_1,\mathbf{x}_1\rangle+\langle\mathbf{c}_2,\mathbf{x}_2\rangle\right],\\ A_{11}\mathbf{x}_1 + A_{12}\mathbf{x}_2 \geqslant \mathbf{b}_1,\\ A_{21}\mathbf{x}_1 + A_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2,\\ \mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{0},\end{gathered} \tag{4.23}$$

$$\begin{gathered}\max\left[\langle\mathbf{b}_1,\mathbf{y}_1\rangle+\langle\mathbf{b}_2,\mathbf{y}_2\rangle\right],\\ A_{11}^T\mathbf{y}_1 + A_{21}^T\mathbf{y}_2 \leqslant \mathbf{c}_1,\\ A_{12}^T\mathbf{y}_1 + A_{22}^T\mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2,\\ \mathbf{y}_1 \geqslant \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Обозначения $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, A_{11} и т. д. естественны; например, $\mathbf{x}_1$ — вектор, составленный из тех компонент x_j вектора $\mathbf{x}$, для которых $j\in J_1$; этому $\mathbf{x}_1$ соответствует $\mathbf{c}_1$, и т. д.

Понятны и обозначения клеток матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}.$$

Для приведения будем каждое равенство (например, $\varphi = 0$) заменять двумя неравенствами ($\varphi \geqslant 0$ и $-\varphi \geqslant 0$ или $\varphi \leqslant 0$ и $-\varphi \leqslant 0$), а вместо переменной u, на которую не наложены условия неотрицательности, будем вводить неотрицательные переменные $\overline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ следующим образом: $u = \overline{u} - \overline{\overline{u}}$, где

$$\overline{u} = \max\{u,0\} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \overline{\overline{u}} = \max\{-u,0\} \geqslant 0.$$

Итак, сделаем следующие замены переменных:

$$\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{x}}}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \overline{\mathbf{y}}_2 - \overline{\overline{\mathbf{y}}}_2,$$

$$\overline{x}_{j2} = \max\{x_{j2},0\}, \quad j\in J_2, \quad \overline{y}_{i2} = \max\{y_{i2},0\}, \quad i\in I_2,$$

$$\overline{\overline{x}}_{j2} = \max\{-x_{j2},0\}, \quad j\in J_2, \quad \overline{\overline{y}}_{i2} = \max\{-y_{i2},0\}, \quad i\in I_2.$$

Вводя эти переменные и заменяя равенства соответствующими системами неравенств, приведем задачи (4.23) и (4.24) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\min\,[\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{x}_1\rangle + \langle \mathbf{c}_2, \overline{\mathbf{x}}_2\rangle - \langle \mathbf{c}_2, \overline{\overline{\mathbf{x}}}_2\rangle],\\ A_{11}\mathbf{x}_1 + A_{12}\overline{\mathbf{x}}_2 - A_{12}\overline{\overline{\mathbf{x}}}_2 \geqslant \mathbf{b}_1,\\ A_{21}\mathbf{x}_1 + A_{22}\overline{\mathbf{x}}_2 - A_{22}\overline{\overline{\mathbf{x}}}_2 \geqslant \mathbf{b}_2,\\ -A_{21}\mathbf{x}_1 - A_{22}\overline{\mathbf{x}}_2 + A_{22}\overline{\overline{\mathbf{x}}}_2 \geqslant -\mathbf{b}_2,\\ \mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{x}}_2 \geqslant \mathbf{0}, \quad \overline{\overline{\mathbf{x}}}_2 \geqslant \mathbf{0},\end{gathered} \tag{4.25}$$

$$\begin{gathered}\max\,[\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{y}_1\rangle + \langle \mathbf{b}_2, \overline{\mathbf{y}}_2\rangle - \langle \mathbf{b}_2, \overline{\overline{\mathbf{y}}}_2\rangle],\\ A_{11}^T\mathbf{y}_1 + A_{21}^T\overline{\mathbf{y}}_2 - A_{21}^T\overline{\overline{\mathbf{y}}}_2 \leqslant \mathbf{c}_1,\\ A_{21}^T\mathbf{y}_1 + A_{22}^T\overline{\mathbf{y}}_2 - A_{22}^T\overline{\overline{\mathbf{y}}}_2 \leqslant \mathbf{c}_2,\\ -A_{21}^T\mathbf{y}_1 - A_{22}^T\overline{\mathbf{y}}_2 + A_{22}^T\overline{\overline{\mathbf{y}}}_2 \leqslant -\mathbf{c}_2,\\ \mathbf{y}_1 \geqslant \mathbf{0}, \quad \overline{\mathbf{y}}_2 \geqslant \mathbf{0}, \quad \overline{\overline{\mathbf{y}}}_2 \geqslant \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Ясно, что (4.25) и (4.26) образуют двойственную пару задач линейного программирования основного вида.

4.4.3. Нетрудно убедиться, что задачи (4.23) и (4.24) эквивалентны задачам (4.25) и (4.26), а именно:

1) если

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}$$

оптимальны для (4.23) и (4.24), то

$$\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \overline{\mathbf{x}}_2\\ \overline{\overline{\mathbf{x}}}_2\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \overline{\mathbf{y}}_2\\ \overline{\overline{\mathbf{y}}}_2\end{bmatrix}$$

оптимальны для (4.25) и (4.26), и обратно;

2) если допустимое множество для (4.23) пусто, то пусто допустимое множество для (4.25), и обратно;

3) если целевая функция задачи (4.23) неограничена снизу на допустимом множестве, то неограничена снизу и целевая функция задачи (4.25), и обратно.

Утверждения 1)–3) обосновываются элементарными рассуждениями, которые (в случае необходимости) читатель может провести самостоятельно.

Из эквивалентности этих задач вытекает, что все теоремы, доказанные для задач (4.25) и (4.26), остаются справедливыми и для задач (4.23) и (4.24).

4.5. Канонический вид задачи линейного программирования

4.5.1. Задачу

$$\min_{\mathbf{x}\in R_0} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle,$$
$$R_0 = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},$$

будем называть *задачей линейного программирования в каноническом виде.*

Эта задача представляет собой частный случай (когда $I_1 = \varnothing$ и $J_2 = \varnothing$) задачи со смешанными ограничениями (4.23), и, следовательно, все доказанные теоремы и утверждения остаются в силе и для канонической задачи.

4.5.2. Приведение основной задачи к каноническому виду осуществляется путем введения дополнительных переменных:

для основной задачи

$$\min\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle,$$
$$A\mathbf{x} \geqslant \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},$$

эквивалентной ей канонической задачей будет

$$\min\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle,$$
$$A\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$$

(эквивалентность здесь понимается так же, как и в задачах со смешанными ограничениями).

Если заметить, что двойственной к обеим задачам будет задача

$$\max\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle,$$
$$A^T\mathbf{y} \leqslant \mathbf{c},$$
$$\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0},$$

т. е. задача (4.2), то доказательство эквивалентности становится тривиальным.

4.5.3. В дальнейшем относительно канонической задачи будем всегда предполагать $m < n$. Это предположение несколько упрощает изложение. С другой стороны, в реальных ситуациях всегда вводят дополнительные переменные (так называемый *искусственный базис*), увеличивая тем самым число переменных задачи с n до $n + m$.

4.5.4. Невырожденная угловая точка. Угловую точку множества R_0 будем называть *невырожденной*, если матрица ее базиса

имеет размерность $m \times m$. Таким образом, у невырожденной угловой точки $\mathbf{x}$ число положительных компонент равно m. Если для простоты будем считать, что для угловой точки $\mathbf{x}$ положительными будут первые m компонент, то матрицей базиса этой невырожденной угловой точки будет

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}.$$

Если, как и прежде, мы запишем угловую точку $\mathbf{x}$ в следующем виде:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

то

$$A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{a}_i = B\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}.$$

4.5.5. Пример. Пусть множество R_0 задается в виде

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

Таким образом, R_0 есть отрезок, соединяющий точки

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Обе они будут угловыми, но невырожденной из них является лишь первая, т. е. $\mathbf{x}_1$.

ГЛАВА 5

КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В этой главе будут изложены идеи и принципиальные соображения, лежащие в основе методов решения задач линейного программирования. Читатель не найдет здесь подробного разбора алгоритмов. Следующие соображения служат этому оправданием. Знание основ метода позволяет читателю без особого труда самостоятельно разобрать тот или иной алгоритм. Подробное изложение алгоритмов содержится во многих книгах по линейному программированию. Наконец (а это, может быть, и есть самое главное), в тщательном разборе алгоритмов нуждаются в первую очередь те, кто имеет отношение к реализации алгоритмов в компьютерных программах. А в этом случае самым полезным будет "покопаться" в специальных статьях и книгах самостоятельно.

5.1. Симплексный метод *)

5.1.1. Идея метода. По существу *симплексный метод* представляет собой последовательный перебор угловых точек, при котором значение целевой функции убывает от итерации к итерации (от одной угловой точки к другой).

Будем рассматривать каноническую задачу линейного программирования

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in R_0}\langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle,\\ R_0=\{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x}=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\}.\end{gathered}\tag{5.1}$$

Предполагается, что *задача* (5.1) *невырожденная*, т. е. невырождена каждая угловая точка множества R_0.

Итерационный шаг метода состоит в переходе от угловой точки $\mathbf{x}$ к угловой точке $\mathbf{x}'$, при котором значение целевой функции убывает:

$$\langle \mathbf{c},\mathbf{x}'\rangle<\langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle.$$

*) Симплексный метод иногда называют "методом последовательного улучшения плана".

Пусть известна угловая точка $\mathbf{x}$. Не ограничивая общности, можно считать, что базис B этой угловой точки образуют первые m столбцов матрицы A. Будем записывать матрицу A следующим образом:

$$A = [B, D],$$

где

$$B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m], \quad D = [\mathbf{a}_{m+1}, \mathbf{a}_{m+2}, ..., \mathbf{a}_n].$$

Соответствующим образом запишутся векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_D^T), \quad \mathbf{c}^T = (\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_D^T),$$
$$\mathbf{x}_B^T = (x_1, x_2, ..., x_m), \quad \mathbf{x}_D^T = (x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n),$$
$$\mathbf{c}_B^T = (c_1, c_2, ..., c_m), \quad \mathbf{c}_D^T = (c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_n).$$

Компоненты вектора $\mathbf{x}_B$ иногда называют *базисными*, а вектора $\mathbf{x}_D$ — *внебазисными*.

Заметим, что если хоть одна компонента вектора $\mathbf{x}_B$ нулевая, то угловая точка $\mathbf{x}$ вырожденная. В самом деле, если, например, $x_m = 0$, то, вычеркивая из матрицы B последние строку и столбец, получаем, что $\mathbf{x}$ удовлетворяет квадратной неособенной системе уравнений порядка $m-1$, т. е. угловая точка $\mathbf{x}$ будет вырожденной.

5.1.2. Выбор столбца для ввода в базис. Итак, известна угловая точка $\mathbf{x}$. При этом

$$\mathbf{x}_B > \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_D = \mathbf{0}, \quad \det B \neq 0, \quad B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}.$$

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B - \lambda B^{-1}\mathbf{a}_k \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{m+1, n}, \tag{5.2}$$

где λ является k-й компонентой вектора $\mathbf{x}$.

Во-первых, заметим, что поскольку $\mathbf{x}_B > 0$, то при малых $\lambda > 0$ будет $\mathbf{x}_k \geqslant \mathbf{0}$. Далее, так как

$$A\mathbf{x}_k = \sum_{i-1}^{m} [x_i - \lambda(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i]\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_k =$$
$$= B\mathbf{x}_B - \lambda BB^{-1}\mathbf{a}_k + \lambda\mathbf{a}_k = B\mathbf{x}_B = \mathbf{b}, \tag{5.3}$$

то $\mathbf{x}_k \in R_0$ при малых $\lambda > 0$. Кроме того,

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{c}_B, \mathbf{x}_B \rangle - \lambda \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_k \rangle + \lambda c_k = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \lambda[\langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_k \rangle - c_k].$$

Обозначим

$$\Delta_k = \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_k \rangle - c_k. \tag{5.4}$$

Величина Δ_k определена для любого $k = \overline{1,n}$, причем при $k = \overline{1,m}$, поскольку $B^{-1}\mathbf{a}_k = \mathbf{e}_k$ ($\mathbf{e}_k$ — k-й координатный вектор), имеем

$$\Delta_k = \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_k \rangle - c_k = \langle \mathbf{c}_B, \mathbf{e}_k \rangle - c_k = c_k - c_k = 0.$$

Окончательно получаем соотношение

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \lambda \Delta_k, \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.5}$$

5.1.3. Выбор столбца для вывода из базиса. В зависимости от знаков величин Δ_k и $(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i$ возникают три случая.

I. Если для любого $k = \overline{1,n}$ будет $\Delta_k \leqslant 0$, то точка $\mathbf{x}$ оптимальная.

Действительно, обозначим

$$\overline{\mathbf{y}} = (B^{-1})^T \mathbf{c}_B.$$

Тогда условие $\Delta_k \leqslant 0$ запишется так:

$$\Delta_k = \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_k \rangle - c_k = \langle (B^{-1})^T \mathbf{c}_B, \mathbf{a}_k \rangle - c_k = \\ = \langle \overline{\mathbf{y}}, \mathbf{a}_k \rangle - c_k \leqslant 0, \quad k = \overline{1,n},$$

или, что то же самое,

$$A^T \overline{\mathbf{y}} \leqslant \mathbf{c}.$$

Поскольку двойственной к задаче (5.1) является задача

$$\begin{gathered} \max_{\mathbf{y} \in Q_0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle, \\ Q_0 = \{\mathbf{y} \colon A^T \mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}\}, \end{gathered} \tag{5.6}$$

то $\overline{\mathbf{y}} \in Q_0$. И так как

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{c}_B, \mathbf{x}_B \rangle = \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{b} \rangle = \langle (B^{-1})^T \mathbf{c}_B, \mathbf{b} \rangle = \langle \overline{\mathbf{y}}, \mathbf{b} \rangle,$$

то из теоремы 4.2.5 следует оптимальность точки $\mathbf{x}$.

II. Если найдется номер $k \geqslant m+1$ такой, что

$$\Delta_k > 0 \quad \text{и} \quad B^{-1}\mathbf{a}_k \leqslant \mathbf{0},$$

то множество R_0 неограничено и функция $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ неограничена снизу на R_0.

Действительно, из (5.2) следует, что при любом $\lambda > 0$ будет

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\lambda) \geqslant \mathbf{0}.$$

Отсюда и из (5.3) получаем, что $\mathbf{x}_k(\lambda) \in R_0$. А из (5.5) следует, что

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_k(\lambda) \rangle \to -\infty$$

при $\lambda \to +\infty$.

III. Пусть найдутся такие $k \geqslant m+1$ и $i \leqslant m$, что*)

$$\Delta_k > 0 \quad \text{и} \quad (B^{-1}\mathbf{a}_k)_i > 0.$$

В этом случае делается итерационный шаг. Обозначим

$$I_k = \{i \colon (B^{-1}\mathbf{a}_k)_i > 0\}$$

*) Напомним, что запись $(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i$ означает i-ю компоненту вектора $B^{-1}\mathbf{a}_k$.

и выберем

$$\lambda = \lambda_0 = \min_{i \in I_k} \frac{(B^{-1}\mathbf{b})_i}{(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i} = \frac{(B^{-1}\mathbf{b})_s}{(B^{-1}\mathbf{a}_k)_s}. \tag{5.7}$$

Заметим, что $\lambda_0 > 0$, поскольку

$$(B^{-1}\mathbf{b})_i = x_i > 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При таком выборе величины λ_0 точка $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\lambda_0)$ становится допустимой точкой множества R_0 (см. (5.2) и (5.3)). Номер s, для которого достигается минимум в (5.7), единствен в силу невырожденности задачи (5.1). В самом деле, если бы минимум достигался более чем для одного номера, то из (5.3) следовало бы, что вектор $\mathbf{b}$ выражается линейно с положительными коэффициентами менее чем через m векторов $\mathbf{a}_i$ матрицы A, т. е. точка $\mathbf{x}_k$ удовлетворяла бы системе уравнений размерности, меньшей m, и, следовательно, точка $\mathbf{x}_k$ была бы вырожденной угловой точкой. А это противоречит предположению о невырожденности. То, что $\mathbf{x}_k$ — угловая точка, проверить нетрудно. Для этого достаточно показать, что система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_k$ линейно независима. Предположим противное, т. е. что найдутся такие числа $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, ..., \beta_m, \beta_k$, не все равные нулю, что

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} \beta_i \mathbf{a}_i + \beta_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{5.8}$$

Обозначим

$$z_{ik} = (B^{-1}\mathbf{a}_k)_i. \tag{5.9}$$

Тогда тождество $BB^{-1}\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k \equiv \mathbf{0}$ запишется так:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik}\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_k \equiv \mathbf{0}.$$

Умножая это тождество на β_k и складывая с (5.8), получаем

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} (\beta_i + \beta_k z_{ik})\mathbf{a}_i + \beta_k z_{sk}\mathbf{a}_s = \mathbf{0}.$$

Так как $\det B \neq 0$, то это равенство возможно лишь при всех нулевых коэффициентах:

$$\beta_i + \beta_k z_{ik} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq s, \quad \beta_k z_{sk} = 0.$$

Но

$$z_{sk} = (B^{-1}\mathbf{a}_k)_s > 0,$$

поскольку $s \in I_k$, и, следовательно, $\beta_k = 0$, а тогда и все $\beta_i = 0$, что противоречит предположению о числах $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, ..., \beta_m, \beta_k$.

5.1.4. Конечность метода. Итак, $\mathbf{x}_k$ — новая угловая точка, причем

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \lambda_0 \Delta_k < \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle. \tag{5.10}$$

Из изложенного выше следует, что итерационный шаг симплексного метода состоит в таком переходе от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m$ к базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_k$, при котором целевая функция убывает, а значит, симплексный метод приводит к угловой точке $\mathbf{x}^*$, в которой достигается минимум, за конечное число итераций.

5.2. Рекуррентные соотношения алгоритма симплексного метода (связь между параметрами последовательных итераций)

5.2.1. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}, \quad z_{ik} = (B^{-1}\mathbf{a}_k)_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{0,n},$$
$$z_{oj} = \Delta_j, \quad j = \overline{1,n}, \quad z_{00} = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle.$$

Таким образом, параметрами, соответствующими угловой точке $\mathbf{x}$, являются числа z_{ij} $(i = \overline{0,m},\ j = \overline{0,n})$, а параметрами новой угловой точки $\mathbf{v} \triangleq x_k(\lambda_0)$ будут числа v_{ij}. Связь между этими параметрами устанавливается следующими формулами:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}, \quad i = \overline{0,m}, \quad i \neq s, \quad j = \overline{0,n}, \\ v_{kj} &= \frac{z_{sj}}{z_{sk}}, \qquad\qquad\qquad\quad j = \overline{0,n}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Действительно,

$$\mathbf{a}_k = B(B^{-1}\mathbf{a}_k) = \sum_{i=1}^{m} z_{ik}\mathbf{a}_i,$$

и так как по условию $z_{sk} = (B^{-1}\mathbf{a}_k)_s > 0$, то

$$\mathbf{a}_s = \frac{1}{z_{sk}}\mathbf{a}_k - \sum_i{}' \frac{z_{ik}}{z_{sk}}\mathbf{a}_i,$$

где

$$\sum_i{}' \triangleq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m}.$$

Далее, поскольку

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}\mathbf{a}_i, \quad j = \overline{0,n},$$

то

$$\mathbf{a}_j = \sum_i{}' z_{ij}\mathbf{a}_i + z_{sj}\mathbf{a}_s = \sum_i{}' z_{ij}\mathbf{a}_i + z_{sj}\Big(\frac{1}{z_{sk}}\,\mathbf{a}_k - \sum_i{}' \frac{z_{ik}}{z_{sk}}\,\mathbf{a}_i\Big) =$$
$$= \sum_i{}' \Big(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\Big)\mathbf{a}_i + \frac{z_{sj}}{z_{sk}}\,\mathbf{a}_k.$$

Сравнивая это представление вектора $\mathbf{a}_j$ с соотношениями

$$\mathbf{a}_j = \sum_i{}' v_{ij}\mathbf{a}_i + v_{kj}\mathbf{a}_k,$$

определяющими параметры v_{ij}, получаем формулы (5.11) при $j = \overline{0,n}$ и $i = \overline{1,m}$.

Для $i = 0$ и $j = \overline{1,n}$ имеем

$$z_{0j} = \langle \mathbf{c}_B, B^{-1}\mathbf{a}_j\rangle - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i z_{ij} - c_j.$$

Поэтому

$$v_{0j} = \sum_i{}' c_i v_{ij} + c_k v_{kj} - c_j = \sum_i{}' c_i\Big(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\Big) - c_j + c_k\frac{z_{sj}}{z_{sk}} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} c_i\Big(z_{ij} - z_{ik}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}\Big) - c_j + c_k\frac{z_{sj}}{z_{sk}} =$$
$$= z_{0j} - \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i z_{ik} - c_k\Big)\frac{z_{sj}}{z_{sk}} = z_{0j} - z_{0k}\frac{z_{sj}}{z_{sk}}.$$

Наконец, из (5.10) и (5.7) получаем

$$v_{00} = z_{00} - \lambda_0\Delta_k = z_{00} - \frac{z_{s0}}{z_{sk}}z_{0k}.$$

Таким образом, доказана справедливость формул (5.11).

5.3. Методы отыскания исходной угловой точки

5.3.1. Наиболее распространенными являются так называемые *методы искусственного базиса*, суть которых состоит в следующем: строится такая вспомогательная каноническая задача линейного программирования с заранее известной угловой точкой, по решению которой тривиально строится либо угловая точка, либо оптимальная точка задачи (5.1). Таким образом, процесс отыскания исходной угловой точки связан с решением новой задачи линейного программирования, и поэтому он, вообще говоря, столь же трудоемок, как и процесс отыскания решения задачи (5.1) при известной исходной угловой точке.

5.3.2. Метод искусственного базиса. Рассматривается задача отыскания угловой точки множества

$$R_0 = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Не умаляя общности, можно предполагать, что $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$. Построим сле-

дующую вспомогательную задачу в пространстве E_{n+m}:

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}\in W} \sum_{i=1}^{m} u_i,$$
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} : A\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0} \right\}, \tag{5.12}$$

с заранее известной угловой точкой

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

множества W. Применяя симплексный метод, находим $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix}$ — решение задачи (5.12). Обозначим

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} u_i^*.$$

5.3.3. Теорема. *Если $\mu = 0$, то $\mathbf{x}^*$ — угловая точка множества R_0. Если $\mu > 0$, то $R_0 = \varnothing$.*

Доказательство. Во-первых, ясно, что задача (5.12) разрешима, поскольку $W \neq \varnothing$, а целевая функция $\sum_{i=1}^{m} u_i$ ограничена снизу нулем.

Если $\mu = 0$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

— оптимальная угловая точка задачи (5.12), поскольку эта задача решается симплексным методом, который осуществляет перебор угловых точек. Очевидно, что $\mathbf{x}^*$ — угловая точка множества R_0. Пусть теперь $\mu > 0$. Предположим, что $R_0 \neq \varnothing$, т. е. найдется $\mathbf{x} \in R_0$. Но тогда

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

будет решением задачи (5.12), что противоречит предположению о положительности величины μ. $\triangle$

Заметим, что метод искусственного базиса является составной частью большинства стандартных компьютерных программ симплексного метода решения задач линейного программирования.

Применение метода искусственного базиса приводит к тому, что задачу (5.1) приходится решать в два этапа: вначале решать вспомогательную задачу (5.12), а затем собственно задачу (5.1). Следующий метод позволяет объединить оба этапа.

5.3.4. M-метод. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}\in W} \left[\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + M \sum_{i=1}^{m} u_i \right],$$
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} : A\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0} \right\}. \tag{5.13}$$

5.3.5. Теорема. *Если разрешима задача* (5.1), *то найдется такое число* M_0, *что для всех* $M > M_0$ *в любом решении* $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix}$ *задачи* (5.13) *точка* $\mathbf{x}^*$ *будет оптимальной для задачи* (5.1).

Доказательство. По условию задача (5.1) разрешима, т. е. существует оптимальная точка $\mathbf{x}^*$. Но тогда разрешима и двойственная задача

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}^* \rangle = \max_{\mathbf{y} \in Q_0} \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$Q_0 = \{\mathbf{y} \colon A^T \mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}\}.$$

По теореме 4.2.5 $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ будут удовлетворять следующей системе:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad A^T \mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}, \quad \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle. \tag{5.14}$$

Поскольку задача

$$\max_{\mathbf{y} \in P} \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$P = \{\mathbf{y} \colon A^T \mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}, \quad y_i \leqslant M, \quad i = \overline{1, m}\}$$

является двойственной к (5.13), то необходимым и достаточным условием существования решения задачи (5.13) (а следовательно, и двойственной к ней) будет существование решения следующей системы неравенств:

$$\begin{gathered} A\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}, \quad y_i \leqslant M, \quad i = \overline{1, m}, \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + M \sum_{i=1}^{m} u_i = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle. \end{gathered} \tag{5.15}$$

Поскольку $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ удовлетворяют системе (5.14), то $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ будут удовлетворять системе (5.15) для всех

$$M \geqslant M_0 = \max\{y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\}.$$

Тот факт, что при $M > M_0$ в любом решении $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$ задачи (5.13) будет $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$, и, следовательно, $\mathbf{x}^*$ является решением задачи (5.1), является следствием условий (4.6). △

5.3.6. Обсуждение. Очевидно, что при $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$ точка

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

является угловой точкой множества W. Именно эту точку и выбирают в качестве исходной для применения симплексного алгоритма.

На практике нет нужды определять число M_0. В качестве M обыч-

но выбирают достаточно большое число, например

$$M > \max_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} \{|a_{ij}|, |c_i|, |b_j|\}.$$

Наконец заметим, что если M-задача (5.13) имеет решение, то существует решение системы неравенств (5.15), а следовательно, $Q_0 \neq \neq \varnothing$. В силу этого из теоремы 4.2.8 получаем, что если $R_0 \neq \varnothing$ и существует решение M-задачи, то существует решение исходной задачи (5.1). Поэтому теорема 5.3.5 справедлива в условиях существования решения M-задачи и непустоты множества R_0. Отсюда приходим к следующему выводу: если существуют сколь угодно большие значения M такие, что в решении $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \mathbf{u}^* \end{bmatrix}$ задачи (5.13) будет

$$\max_{i=\overline{1,m}} u_i^* > 0,$$

то исходная задача (5.1) неразрешима.

5.4. Вырожденность. Метод возмущений

5.4.1. Зацикливание. В случае когда угловая точка $\mathbf{x}$ множества R_0 вырождена, число ее положительных компонент будет меньшим m. Тогда может оказаться, что $\lambda_0 = 0$ (см. (5.7)), и, следовательно, при переходе в симплексном методе от вырожденной угловой точки $\mathbf{x}$ к следующей угловой точке значение целевой функции может не убывать (см. (5.10)). Кроме того, как мы видели, вырожденность может повлечь за собой неоднозначность выбора вектора, исключаемого из базиса при переходе от угловой точки $\mathbf{x}$ к вырожденной угловой точке $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\lambda_0)$.

Эти обстоятельства теоретически могут привести к явлению зацикливания, когда через некоторое число итераций процедура симплексного метода приводит к прежней угловой точке. Для преодоления явления зацикливания существует правило выбора вектора, исключаемого из базиса, основанное на так называемом методе возмущений.

5.4.2. Метод возмущений. Предположим, что угловой точке $\mathbf{x}$ множества R_0 соответствует такая линейно независимая система m векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$, что $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$ (в отличие от невырожденного случая, когда $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$), где $B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m]$.

Рассмотрим “возмущенный” вектор

$$\mathbf{b}(\varepsilon) = \mathbf{b} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \mathbf{a}_j,$$

где ε — достаточно малое положительное число ($\varepsilon > 0$), а ε^j означает j-ю степень числа ε. Обозначив, как и прежде, $z_{ij} = (B^{-1}\mathbf{a}_j)_i$, получаем

$$\mathbf{b} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(x_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \varepsilon^j \Big) \mathbf{a}_i.$$

Так как

$$z_{ij} = \begin{cases} z_{ij}, & j = \overline{m+1, n}, \\ 0, & j \neq i,\ j = \overline{1, m}, \\ 1, & j = i,\ j = \overline{1, m}, \end{cases}$$

то

$$x_i(\varepsilon) \triangleq x_i + \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \varepsilon^j = x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} z_{ij} \varepsilon^j, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.16}$$

5.4.3. ε-задача. Рассмотрим наряду с задачей

$$\min_{\mathbf{x} \in R_0} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle,$$
$$R_0 = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},$$

так называемую *ε-задачу*

$$\begin{gathered} \min_{\mathbf{x}(\varepsilon) \in R_0(\varepsilon)} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}(\varepsilon) \rangle, \\ R_0(\varepsilon) = \{\mathbf{x}(\varepsilon)\colon\ A\mathbf{x}(\varepsilon) = \mathbf{b}(\varepsilon),\ \mathbf{x}(\varepsilon) \geqslant \mathbf{0}\} \end{gathered} \tag{5.17}$$

и покажем, что для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ эта задача невырождена.

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$ — произвольная линейно независимая система векторов матрицы A. Так как функции $x_i(\varepsilon)$ ($i = \overline{1, m}$) представляют собой многочлены относительно ε, не равные тождественно нулю (см. (5.16)), то каждый из них имеет не более n корней и, следовательно, не более n положительных корней.

Пусть η — наименьший положительный корень среди всех положительных корней m многочленов $x_i(\varepsilon)$ ($i = \overline{1, m}$) (если положительных корней нет ни у одного из этих многочленов, то полагаем $\eta = \infty$). Величина η определяется выбранной системой линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$, и поскольку число линейно независимых систем векторов матрицы A конечно, то конечно и число соответствующих наименьших положительных корней η.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ — наименьшее из всех чисел η (т. е. наименьший положительный корень всех многочленов $x_i(\varepsilon)$, построенных по всевозможным линейно независимым системам векторов матрицы A).

Ясно, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ ни один из многочленов вида (5.16) не обращается в нуль ($\varepsilon > 0$), а следовательно, всякая угловая точка ε-задачи содержит m положительных компонент, т. е. невырождена.

Можно доказать, что для малых ε угловым точкам $\mathbf{x} \in R_0$ и $\mathbf{x}(\varepsilon) \in \in R_0(\varepsilon)$ соответствует один и тот же базис, поэтому для однозначного выбора индекса $s \in I_k$, на котором достигается минимум отношения $\dfrac{(B^{-1}\mathbf{b})_i}{(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i}$ (см. (5.7)) при симплексной процедуре решения задачи (5.1), целесообразно обратиться к ε-задаче. Таким образом, в качестве номера s вектора $\mathbf{a}_s$, исключаемого из базиса, следует выбрать тот номер (единственный в силу невырожденности ε-задачи), для которого достигается минимум отношения

$$\frac{x_s(\varepsilon)}{(B^{-1}\mathbf{a}_k)_s} = \min_{i \in I_k} \frac{(B^{-1}\mathbf{b}(\varepsilon))_i}{(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i} = \min_{i \in I_k} \left[\frac{x_i}{z_{ik}} + \varepsilon \frac{z_{i1}}{z_{ik}} + \varepsilon^2 \frac{z_{i2}}{z_{ik}} + \ldots + \varepsilon^n \frac{z_{in}}{z_{ik}} \right].$$

5.4.4. На практике нет нужды переходить к ε-задаче. Из предыдущей формулы ясно, что выбор номера s можно осуществить следующим путем.

Обозначим через $I_{k0}(s_k)$ совокупность индексов $s_k \in I_k$, для которых достигается минимум отношения

$$\frac{x_{s_k}}{z_{s_k k}} = \min_{i \in I_k} \frac{x_i}{z_{ik}}, \quad s_k \in I_{k0}(s_k).$$

Если $I_{k0}(s_k)$ состоит более чем из одного элемента, то вычисляют

$$\frac{z_{s_l 1}}{z_{s_l k}} = \min_{s_k \in I_{k0}(s_k)} \frac{z_{s_k 1}}{z_{s_k k}}, \quad s_l \in I_{k1}(s_l).$$

Если $I_{k1}(s_l)$ состоит из одного элемента, то s_l и есть искомый номер.

Если $I_{k1}(s_l)$ содержит два и более элементов, то вычисляют

$$\frac{z_{sp2}}{z_{spk}} = \min_{s_l \in I_{k1}(s_l)} \frac{z_{s_l 2}}{z_{s_l k}}$$

и т. д. Ясно, что такой процесс конечен и приводит к однозначному выбору искомого номера.

5.4.5. Опыт применения симплексного метода показал что для исключения зацикливания достаточно выбрать любой регулярный способ однозначного выбора номера s, например, в качестве s можно выбрать первый (в порядке установленной нумерации) номер, для которого достигается минимум отношения (5.7). При этом естественно, что номер k также должен выбираться (если он не единствен) регулярным способом; например, среди всех k таких, что $\Delta_k > 0$ и $(B^{-1}\mathbf{a}_k)_i > 0$, можно выбирать тот, для которого величина Δ_k наименьшая.

5.5. Замечание о применении симплексного метода для решения специальных классов задач линейного программирования

5.5.1. Поскольку любая задача линейного программирования, в какой бы форме она ни была записана, может быть приведена к эквивалентной канонической задаче, то симплексный метод является в определенном смысле универсальным методом в линейном программировании.

Однако, как мы видели, приведение к каноническому виду, как правило, сопряжено с сильным увеличением размеров матрицы условий. Это в свою очередь требует, во-первых, большого объема оперативной памяти компьютеров и, во-вторых, сильно увеличивает число итераций для получения решения задачи.

Все это привело к необходимости выделять классы часто встречающихся типичных задач и разрабатывать для них специальные варианты симплексного метода.

К таким классам задач относятся в первую очередь задачи с двусторонними ограничениями на переменные, когда допустимое множество задается условиями вида $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{d}_1 \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}_2$.

5.6. О модифицированном симплексном методе *)

5.6.1. В обычном симплексном методе на каждой итерации все элементы матрицы A преобразуются по формулам (5.11). В модифицированном методе на каждом шаге вычисляют матрицу B^{-1} и затем, пользуясь ею, вычисляют

$$\overline{\mathbf{y}} = (B^{-1})^T \mathbf{c}_B, \quad \Delta_k = \langle \overline{\mathbf{y}}, \mathbf{a}_k \rangle - c_k, \quad B^{-1}\mathbf{b}$$

и т. д. После этого, пользуясь простыми рекуррентными формулами, переходят от матрицы

$$B^{-1} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_s, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m]^{-1}$$

к матрице

$$\overline{B}^{-1} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m]^{-1},$$

соответствующей новой угловой точке.

Таким образом, на одной итерации преобразуются и хранятся в памяти компьютера лишь элементы матрицы B^{-1}. При этом объем текущей запоминаемой информации, как правило, сокращается. Кроме того, если матрица A содержит большое число нулевых элементов,

*) Установившегося названия метода нет. Иногда его называют “методом обратной матрицы”, иногда “вторым алгоритмом симплексного метода”.

то в модифицированном симплексном методе вычислительная схема может быть составлена так, чтобы в вычислениях на каждом шаге скалярных произведений участвовали лишь ненулевые элементы матрицы A. Это существенно сокращает объем вычислений и позволяет компактно разместить ненулевые элементы матрицы A в памяти компьютера.

5.6.2. Рекуррентные соотношения модифицированного симплексного метода можно получить из формул перехода от матрицы B^{-1} к матрице $\overline{B}^{-1}$.

Обозначим элементы матрицы B^{-1} через a_{ij}^{-1}, а матрицы $\overline{B}^{-1}$ через $\bar{a}_{ij}^{-1}$:

$$B^{-1} = [a_{ij}^{-1}], \quad \overline{B}^{-1} = [\bar{a}_{ij}^{-1}].$$

Тогда

$$\bar{a}_{ij}^{-1} = a_{ij}^{-1} - z_{ik}\frac{a_{sj}^{-1}}{z_{sk}}, \quad i \neq s,$$

$$\bar{a}_{sj}^{-1} = \frac{a_{sj}^{-1}}{z_{sk}}.$$

Справедливость этих формул проверяется умножением матрицы $\overline{B}$ на матрицу $\overline{B}^{-1}$, в результате которого получается единичная матрица.

5.7. Мультипликативное представление обратной матрицы

5.7.1. Мультипликаторы. Для уменьшения количества информации, подлежащей запоминанию, в модифицированном симплексном методе часто пользуются следующим мультипликативным представлением обратной матрицы.

Назовем *элементарной* матрицу вида

$$G_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & w_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & w_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{sk} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_{mk} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$w_{ik} = -\frac{z_{ik}}{z_{sk}}, \quad i \neq s, \quad w_{sk} = \frac{1}{z_{sk}}$$

(индекс s означает, что столбец элементов w_{jk} стоит на s-м месте). Легко проверить, что

$$G_s B^{-1} = \overline{B}^{-1}.$$

Процедура модифицированного симплексного метода начинается, как правило, с единичного базиса, которому соответствует единичная матрица G. Пусть на первом шаге в базис вместо $\mathbf{e}_{s_1}$ вводится вектор $\mathbf{a}_{k_1}$. Тогда матрицей B_1^{-1}, обратной к матрице нового базиса, будет

$$B_1^{-1} = G_{s_1} G,$$

а на p-м шаге —

$$B_p^{-1} = G_{s_p} G_{s_{p-1}} ... G_{s_1} G.$$

Поскольку каждая матрица G_s определяется $m+1$ величинами $s, w_{1k}, w_{2k}, ..., w_{mk}$, то мультипликативная форма записи обратной матрицы меньше загружает память компьютера, чем обычная.

5.8. Двойственный симплексный метод *)

5.8.1. Идея метода. Как мы видели, симплексный метод позволяет наряду с получением решения прямой задачи получать и решение

$$\overline{\mathbf{y}} = (B^{-1})^T \mathbf{c}_B$$

двойственной задачи (случай I симплексного метода). Этот результат и лежит в основе двойственного симплексного метода решения задачи (5.1).

Суть метода состоит в таком последовательном переборе угловых точек допустимого множества Q_0 двойственной задачи (5.6), при котором значение целевой функции $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$ возрастает, т. е. в применении симплексного метода к решению двойственной задачи. Поскольку двойственный симплексный метод нас интересует как метод решения задачи (5.1), выясним, что означают для задачи (5.1) преобразования каждого итерационного шага симплексного метода, примененного к задаче (5.6).

Будем предполагать, что задача (5.6) невырождена, т. е. каждой угловой точке множества Q_0 соответствует квадратная неособенная (невырожденная) система уравнений размерности m, матрицу которой называют *двойственным базисом прямой задачи* (5.1).

5.8.2. Итерация метода. Пусть известна угловая точка $\mathbf{y}$ множества Q_0. Это означает, что известен такой двойственный базис

$$B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m],$$

*) Наряду с названием “двойственный симплексный метод” принято название “метод последовательного уточнения оценок”, смысл которого будет выяснен в п. 5.9.

что точка $\mathbf{y} = (B^{-1})^T \mathbf{c}_B$ удовлетворяет неравенству

$$\Delta = A^T \mathbf{y} - \mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}$$

и что

$$\Delta_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_i \rangle - c_i = (A^T \mathbf{y})_i - c_i = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = \overline{1,m}, \\ \Delta_i < 0 & \text{при} \quad i = \overline{m+1,n}. \end{cases}$$

Обозначим, как и прежде,

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}, \quad z_{ik} = (B^{-1}\mathbf{a}_k)_i$$

и, кроме того,

$$B^{-1} \triangleq [\mathbf{a}_1^{-1}, \mathbf{a}_2^{-1}, ..., \mathbf{a}_m^{-1}],$$

т. е. через $\mathbf{a}_i^{-1}$ обозначена i-я строка матрицы B^{-1}.

Рассмотрим векторы

$$\mathbf{y}_s \triangleq \mathbf{y}_s(\theta) = \mathbf{y} - \theta \mathbf{a}_s^{-1}, \quad s = \overline{1,m}.$$

Поскольку

$$\langle \mathbf{a}_s^{-1}, \mathbf{a}_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = \overline{1,m}, \quad i \neq s, \\ 1 & \text{при} \quad i = s, \\ z_{si} & \text{при} \quad i = \overline{m+1,n}, \end{cases}$$

то

$$(A^T \mathbf{y}_s)_i = \langle \mathbf{y}_s, \mathbf{a}_i \rangle = \\ = \begin{cases} c_i & \text{при} \quad i = \overline{1,m}, \quad i \neq s, \\ c_s - \theta & \text{при} \quad i = s, \\ \langle \mathbf{y}, \mathbf{a}_i \rangle - \theta z_{si} = \Delta_i - \theta z_{si} + c_i & \text{при} \quad i = \overline{m+1,n}. \end{cases} \tag{5.18}$$

В зависимости от знаков величин x_j и z_{ij} возникают три случая.

I. Если $\mathbf{x}_B \geqslant \mathbf{0}$, то

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} \in R_0,$$

и, следовательно, точка $\mathbf{x}$ оптимальная (см. случай I симплексного метода).

II. Если найдется номер $s \leqslant m$ такой, что $x_s < 0$ и $z_{si} \geqslant 0$ для всех $i = \overline{m+1,n}$, то $\mathbf{y}_s \in Q_0$ для любого $\theta > 0$, и, следовательно, множество Q_0 неограничено и

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_s \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \theta \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_s^{-1} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \theta x_s \to +\infty$$

при $\theta \to +\infty$, т. е. множество R_0 пусто (см. п. 4.2.9).

III. Пусть найдутся такие $s \leqslant m$ и $i \geqslant m+1$, что $x_s < 0$ и $z_{si} < 0$. В этом случае делается итерационный шаг. Обозначим $I_s = \{i\colon z_{si} < 0\}$ и выберем

$$\theta = \theta_0 = \max_{i \in I_s} \frac{\Delta_i}{z_{si}} > 0.$$

Пусть

$$\theta_0 = \frac{\Delta_k}{z_{sk}}, \quad k \in I_s. \tag{5.19}$$

Номер k, для которого достигается величина θ_0, единствен в силу невырожденности задачи (5.6) *).

Покажем, что

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{y}_s(\theta_0) = \mathbf{y} - \theta_0 \mathbf{a}_s^{-1} \in Q_0.$$

Действительно, из (5.18) и (5.19) следует

$$(A^T \mathbf{y}_s)_i \begin{cases} = c_i & \text{при} \quad i = \overline{1,m}, \quad i \neq s, \\ < c_s & \text{при} \quad i = s, \\ < c_i & \text{при} \quad i = \overline{m+1,n}, \quad i \neq k, \\ = c_k & \text{при} \quad i = k. \end{cases}$$

Наконец,

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_s \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \theta_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_s^{-1} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle - \theta_0 x_s > \langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle.$$

Таким образом, при переходе от точки $\mathbf{y}$ к точке $\mathbf{y}_s$ значение целевой функции задачи (5.6) возрастает.

5.8.3. Обсуждение. Итак, итерационный шаг двойственного симплексного метода состоит в том, что из двойственного базиса выводится вектор $\mathbf{a}_s$ и вводится на его место $\mathbf{a}_k$; при этом значение целевой функции возрастает. Осталось доказать, что новая система векторов $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{s-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{s+1}, ..., \mathbf{a}_m$ линейно независима, т. е. образует новый двойственный базис. Читатель в этом без труда убедится, если проведет рассуждения, аналогичные тем, которые имели место в случае III симплексного метода.

Поскольку число угловых точек множества Q_0 конечно и при каждой итерации (при переходе от одной угловой точки к другой) значение целевой функции возрастает, то за конечное число итераций метод приведет к решению $\mathbf{y}^*$ двойственной задачи, а значит, и к решению $\mathbf{x}^*$ прямой задачи.

Рекуррентные соотношения алгоритма двойственного симплексного метода нетрудно получить из формул перехода от матрицы B^{-1} к матрице $\overline{B}^{-1}$ (см. п. 5.6).

*) Доказательство этого утверждения аналогично доказательству подобного утверждения в случае III симплексного метода.

Если задача вырождена, то так же, как и в случае простого симплексного метода, для двойственного метода на основе метода возмущений созданы правила однозначного выбора номера k для величины θ_0, т. е. правила выбора вектора, вводимого в двойственный базис.

5.9. Решения двойственной задачи как оценки влияния

5.9.1. Покажем, что при некоторых изменениях компонент вектора ограничений $\mathbf{b}$ в задаче (5.1) компоненты решения двойственной задачи (5.6) могут быть интерпретированы как оценки влияния этих изменений на величину минимума целевой функции задачи (5.1).

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in R_0(\mathbf{z})} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle, \\ R_0(\mathbf{z}) = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} = \mathbf{z},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},\end{gathered} \tag{5.20}$$

и двойственную к ней

$$\begin{gathered}\max_{\mathbf{y}\in Q_0} \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}\rangle, \\ Q_0 = \{\mathbf{y}\colon\ A^T\mathbf{y} \leqslant \mathbf{c}\}.\end{gathered} \tag{5.21}$$

В предположении, что задача (5.20) разрешима при некотором $\mathbf{z}$, обозначим

$$\mu(\mathbf{z}) = \min_{\mathbf{x}\in R_0(\mathbf{z})} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle.$$

Пусть при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$ существует решение $\mathbf{x}^*$ задачи (5.20) и, следовательно, существует $\mathbf{y}^*$ — решение задачи (5.21).

5.9.2. Теорема. *Если задача* (5.20) *невырождена, то существует такая окрестность* $U(\mathbf{z}^*)$ *точки* $\mathbf{z}^*$, *что для всех* $\mathbf{z} \in U(\mathbf{z}^*)$ *будет*

$$\mu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y}^*\rangle.$$

Доказательство. Так как при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$ задача (5.20) разрешима, то согласно теореме 4.2.12 существует оптимальная угловая точка $\mathbf{x}^*$. Пусть $\mathbf{x}^*$ имеет вид

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{x}_B^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_m^* \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

Ей соответствует базис $B = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m]$, $\det B \neq 0$, и $\mathbf{x}_B^* = B^{-1}\mathbf{z}^*$. Обозначим

$$\alpha = \min_{i=\overline{1,m}} x_i^*.$$

Выберем следующую окрестность:

$$U(\mathbf{z}^*) = \left\{\mathbf{z}\colon \|\mathbf{z} - \mathbf{z}^*\| \leqslant \frac{\alpha}{\|B^{-1}\|}\right\}.$$

Покажем, что точка

$$\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B^T, 0, ..., 0),$$

где $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{z}$, будет оптимальной для задачи (5.20) при любом $\mathbf{z} \in$ $\in U(\mathbf{z}^*)$. Действительно,

$$\|\mathbf{x}_B^* - \mathbf{x}_B\| = \|B^{-1}(\mathbf{z}^* - \mathbf{z})\| \leqslant \|B^{-1}\|\|\mathbf{z}^* - \mathbf{z}\| \leqslant \alpha,$$

где норма выбрана следующим образом:

$$\|\mathbf{x}_B^* - \mathbf{x}_B\| = \max_{i=\overline{1,m}} |x_i^* - x_i|.$$

Получаем, что

$$x_i^* - x_i \leqslant \alpha, \quad i = \overline{1,m},$$

т. е.

$$x_j \geqslant x_j^* - \alpha = x_j^* - \min_{i=\overline{1,m}} x_i^* \geqslant 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Таким образом, $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Кроме того, по построению $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$, т. е. $\mathbf{x} \in R_0(\mathbf{z})$.

Докажем, что $\mathbf{x}$ оптимален для задачи (5.20). Из условий (4.6) следует, что каждому $x_i^* > 0$ $(i = \overline{1,m})$ соответствует

$$(A^T\mathbf{y}^*)_i = c_i.$$

Тогда

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle = \sum_{i=1}^m c_i x_i = \sum_{i=1}^m (A^T\mathbf{y}^*)_i x_i = \sum_{i=1}^m \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{y}^*\rangle x_i =$$
$$= \left\langle \mathbf{y}^*, \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i x_i \right\rangle = \langle \mathbf{y}^*, B\mathbf{x}_B\rangle = \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{z}\rangle.$$

И так как $\mathbf{x} \in R(\mathbf{z})$, а $\mathbf{y}^* \in Q_0$, то из теоремы 4.2.5 вытекает оптимальность точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}^*$ и

$$\mu(\mathbf{z}) = \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{z}\rangle. \quad \triangle$$

5.9.3. Очевидно, что

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{z})}{\partial z_i} = y_i^*,$$

поэтому увеличение z_i приводит к увеличению или уменьшению величины $\mu(\mathbf{z})$ в зависимости от знака y_i^*. При этом скорость изменения $\mu(\mathbf{z})$ определяется величиной $|y_i^*|$.

Двойственный симплексный метод называют также *методом последовательного уточнения оценок*, поскольку угловые точки задачи (5.6), возникающие при итерациях, можно рассматривать как приближенные значения точной оценки $\mathbf{y}^*$, т. е. как приближенные оценки влияния условий задачи (5.1) на величину минимума целевой функции.

5.10. О применении двойственного симплексного метода к задачам с возрастающим количеством условий

5.10.1. Пусть найдены оптимальные угловые точки $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ задач (5.1) и (5.6) соответственно. Предположим, что к системе условий, определяющих допустимое множество R_0, добавлено еще одно неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqslant b_{m+1}.$$

Если

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* \geqslant b_{m+1},$$

то $\mathbf{x}^*$ будет оптимальным и для новой задачи, поскольку добавление условий может только увеличить величину минимума целевой функции. В случае

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^* < b_{m+1}$$

выясним, как, зная оптимальные угловые точки $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, получить решение новой задачи.

Запишем новую задачу в каноническом виде, введя дополнительную переменную x_{n+1}. Обозначим

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} A \\ \boldsymbol{\alpha}^T \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ b_{m+1} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ y_{m+1} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{e}_{m+1}$ — $(m+1)$-й единичный координатный вектор. Новая задача примет вид

$$\begin{gathered} \min \langle \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{x}} \rangle, \\ [\overline{A}, -\mathbf{e}_{m+1}]\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{b}}, \quad \overline{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}. \end{gathered} \tag{5.22}$$

Согласно правилам (4.23)–(4.24) двойственной к (5.22) будет задача

$$\begin{gathered}\max\,[\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle + b_{m+1}y_{m+1}],\\ A^T\mathbf{y} + \boldsymbol{\alpha} y_{m+1} \leqslant \mathbf{c},\\ y_{m+1} \geqslant 0.\end{gathered} \tag{5.23}$$

Так как точка $\mathbf{y}^*$ — угловая для задачи (5.6), то

$$\overline{\mathbf{y}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

будет угловой точкой для задачи (5.23), поскольку из линейной независимости системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$ — базиса угловой точки $\mathbf{y}^*$ — следует линейная независимость системы векторов

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad ..., \quad \begin{bmatrix} \mathbf{a}_m \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Теперь естественно, принимая $\mathbf{y}^*$ за исходную угловую точку, решать задачу (5.22) двойственным симплексным методом. Как правило, для получения решения задачи (5.22) требуется небольшое число итераций.

Очевидно, что все, сказанное в этом пункте, остается в силе, если к неравенствам, определяющим множество R_0, добавляется не одно, а несколько новых.

5.11. Метод одновременного решения прямой и двойственной задач *)

5.11.1. Рассмотренные выше методы состояли из двух этапов. На первом этапе требовалось определить угловую точку допустимого множества, после чего на втором этапе, исходя из найденной угловой точки, строился процесс отыскания оптимальной точки. Оба этих этапа, вообще говоря, одинаково трудоемки. Итерационный процесс метода одновременного решения прямой и двойственной задач начинается с любой допустимой (не обязательно угловой) точки двойственной задачи, отыскать которую в реальных случаях часто не представляет труда. Например, если $\mathbf{c} \geqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ принадлежит множеству Q_0.

*) Этот метод часто называют *“методом последовательного сокращения невязок”*.

Итак, рассмотрим прямую каноническую задачу

$$\min_{\mathbf{x}\in R_0}\langle \mathbf{c},\mathbf{x}\rangle,$$
$$R_0=\Big\{\mathbf{x}\colon \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{a}_i=\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{b}\geqslant \mathbf{0}\Big\}, \tag{5.1}$$

и двойственную к ней:

$$\max_{\mathbf{y}\in Q_0}\langle \mathbf{b},\mathbf{y}\rangle,$$
$$Q_0=\{\mathbf{y}\colon \langle \mathbf{a}_j,\mathbf{y}\rangle\leqslant c_j,\ j=\overline{1,n}\}. \tag{5.6}$$

Предположим, что известна точка $\mathbf{y}_0\in Q_0$. Обозначим

$$J=\{j\colon j=\overline{1,n}\},\quad J(\mathbf{y}_0)=\{j\colon \langle \mathbf{a}_j,\mathbf{y}_0\rangle=c_j,\ j\in J\}$$

и рассмотрим так называемую *расширенную задачу*

$$\min\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{a}_j+\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{b}, \tag{5.24}$$
$$\mathbf{x}\geqslant \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\varepsilon}\geqslant \mathbf{0},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}^T=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_m\}$, и “укоротим” ее следующим образом:

$$\min\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i,$$
$$\sum_{j\in J(\mathbf{y}_0)} z_j\mathbf{a}_j+\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{b}, \tag{5.25}$$
$$z_j\geqslant 0,\quad j\in J(\mathbf{y}_0),\quad \boldsymbol{\varepsilon}\geqslant \mathbf{0}.$$

Следующая теорема лежит в основе рассматриваемого метода.

5.11.2. Теорема. *Если в решении* $\mathbf{z}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ *задачи* (5.25) $\boldsymbol{\varepsilon}^*=\mathbf{0}$, *то точка* $\mathbf{x}^*$ *такая, что*

$$x_j^*=\begin{cases} z_j^*, & j\in J(\mathbf{y}_0),\\ 0, & j\in J\backslash J(\mathbf{y}_0),\end{cases}$$

будет оптимальной для задачи (5.1), *а точка* $\mathbf{y}_0$ *будет оптимальной для задачи* (5.6).

Доказательство. Очевидно, что $\mathbf{x}^*\in R_0$. Из того, что точка $\mathbf{y}_0$ допустима для задачи (5.6), а $\boldsymbol{\varepsilon}^*=\mathbf{0}$, получаем

$$\langle \mathbf{c},\mathbf{x}^*\rangle=\sum_{j\in J(\mathbf{y}_0)} c_jx_j^*+\sum_{j\in J\backslash J(\mathbf{y}_0)} c_jx_j^*=\sum_{j\in J(\mathbf{y}_0)} c_jz_j^*=$$
$$=\sum_{j\in J(\mathbf{y}_0)}\langle \mathbf{a}_j,\mathbf{y}_0\rangle z_j^*=\Big\langle \mathbf{y}_0,\sum_{j\in J(\mathbf{y}_0)} z_j^*\mathbf{a}_j\Big\rangle=\langle \mathbf{y}_0,\mathbf{b}\rangle.$$

В силу того, что $\mathbf{x}^* \in R_0$, $\mathbf{y}_0 \in Q_0$ и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}^* \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle$, на основании теоремы 4.2.5 следует оптимальность $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}_0$. $\triangle$

5.11.3. Итерация метода. Построим задачу, двойственную к (5.25):

$$\begin{gathered} \max\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle, \\ \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u} \rangle \leqslant 0, \quad j \in J(\mathbf{y}_0), \\ u_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, m}. \end{gathered} \tag{5.26}$$

Задачи (5.25) и (5.26) разрешимы. Действительно, так как $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$, то $z_j = 0$, $j \in J(\mathbf{y}_0)$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}$ допустимы для (5.25), а $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ — допустимая точка для (5.26), и по теореме 4.2.8 обе задачи разрешимы.

Пусть $\mathbf{u}^*$ — решение задачи (5.26). Обозначим

$$\boldsymbol{\Delta}^0 = A^T \mathbf{y}_0 - \mathbf{c}, \quad \boldsymbol{\delta}^* = A^T \mathbf{u}^*.$$

Векторы $\boldsymbol{\Delta}^0$ и $\boldsymbol{\delta}^*$ часто называют *векторами невязок.*

В зависимости от характера величин ε_i^* $(i = \overline{1, m})$ и δ_j^*, $j \in J$, различают три случая.

I. Если

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* = 0,$$

то на основании теоремы 5.11.2 точка $\mathbf{x}^*$ является решением задачи (5.1).

II. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0$$

и найдется такой номер $j \in J \backslash J(\mathbf{y}_0)$, для которого $\delta_j^* > 0$. В этом случае будем строить новую точку $\mathbf{y} \in Q_0$, которой соответствует большее значение целевой функции задачи (5.6). Выберем

$$\mathbf{y} \triangleq \mathbf{y}(\mu) = \mathbf{y}_0 - \mu \mathbf{u}^*.$$

Тогда

$$\boldsymbol{\Delta} \triangleq A^T \mathbf{y} - \mathbf{c} = A^T \mathbf{y}_0 - \mu A^T \mathbf{u}^* - \mathbf{c} = \boldsymbol{\Delta}^0 - \mu \boldsymbol{\delta}^*. \tag{5.27}$$

Заметим, что

$$\Delta_j^0 = \begin{cases} 0, & j \in J(\mathbf{y}_0), \\ \Delta_j^0 < 0, & j \in J \backslash J(\mathbf{y}_0), \end{cases}$$

$$\delta_j^* = \begin{cases} \delta_j^* \leqslant 0, & j \in J(\mathbf{y}_0), \\ \delta_j^*, & j \in J \backslash J(\mathbf{y}_0). \end{cases} \tag{5.28}$$

Выбирая

$$\mu_0 = \frac{\Delta_k^0}{\delta_k^*} = \max_{\delta_j^* > 0} \frac{\Delta_j^0}{\delta_j^*} < \mathbf{0}, \tag{5.29}$$

получаем, что

$$\boldsymbol{\Delta}^0 - \mu_0 \boldsymbol{\delta}^* \leqslant \mathbf{0},$$

а значит, в силу (5.27) $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mu_0) \in Q_0$. Поскольку $\mathbf{z}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ — решение задачи (5.25), а $\mathbf{u}^*$ — решение двойственной к ней задачи (5.26), то

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{u}^* \rangle = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^*$$

(теорема 4.2.3). Вследствие этого

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle - \mu_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}^* \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle - \mu_0 \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^* > \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle,$$

так как $\mu_0 < 0$, а $\sum\limits_{i=1}^m \varepsilon_i^* > 0$.

Итак, итерационный шаг метода состоит в том, что решается укороченная задача (5.25), вычисляется величина μ_0 и строится новая точка $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mu_0)$. При этом на первом итерационном шаге в качестве исходной угловой точки задачи (5.25) выбирают точку с компонентами $z_j = 0$, $j \in J(\mathbf{y}_0)$, и $\varepsilon_i = b_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$ и затем применяют симплексный метод.

5.11.4. На следующем итерационном шаге строят новую укороченную задачу

$$\begin{gathered} \min \sum_{i=1}^m \varepsilon_i, \\ \sum_{j \in J(\mathbf{y})} z_j \mathbf{a}_j + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}, \\ z_j \geqslant 0, \quad j \in J(\mathbf{y}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} \geqslant \mathbf{0}, \end{gathered} \tag{5.30}$$

и далее процесс повторяется. При этом в качестве исходной угловой точки задачи (5.30) выбирают точку, ненулевыми координатами которой являются положительные компоненты оптимальной угловой точки $\mathbf{z}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ задачи (5.25), поскольку

$$\{j \colon z_j^* > 0\} \subseteq J(\mathbf{y}).$$

Это включение следует из того, что значениям $z_j^* > 0$ соответствуют значения

$$\delta_j^* = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{u}^* \rangle = 0$$

(из соотношения вида (4.6) в применении к решениям задач (5.25) и (5.26)) и, следовательно (см. (5.27) и (5.28)),

$$\Delta_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \rangle - c_j = \Delta_j^0 - \mu_0 \delta_j^* = 0.$$

Но по построению

$$J(\mathbf{y}) = \{j\colon \Delta_j = \langle \mathbf{a}_j, \mathbf{y} \rangle - c_j = 0\},$$

что и требовалось доказать.

Процесс решения задачи (5.30) начинается с введения в базис вектора $\mathbf{a}_k$ (номер k выбирают из (5.29)). Заметим, что $k \in J(\mathbf{y})$, поскольку $\Delta_k = 0$ (см. (5.29)). В результате этой процедуры величина $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ становится меньшей, чем $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$. В самом деле, значения

$$x_j^* = \begin{cases} z_j^*, & j \in J(\mathbf{y}_0), \\ 0, & j \in J \backslash J(\mathbf{y}_0), \end{cases} \qquad \text{и} \quad \varepsilon_i^*, \quad i = \overline{1, m},$$

образуют угловую точку допустимого множества задачи (5.24). Введению $\mathbf{a}_k$ в базис задачи (5.30) соответствует обычный итерационный шаг симплексного метода решения задачи (5.24) (см. (5.29)). Но при каждом итерационном шаге симплексного метода в случае невырожденности задачи (5.24) значение целевой функции убывает, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ становится меньше $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i^*$. Отсюда следует, что на каждом шаге метода одновременного решения прямой и двойственной задач оптимальное значение целевой функции $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i$ убывает по сравнению с оптимальным ее значением в предыдущей укороченной задаче. Из этого вытекает конечность метода. Заметим также, что поскольку для каждой задачи вида (5.30) имеется исходная угловая точка, а множество индексов $J(\mathbf{y})$ от шага к шагу меняется незначительно, то число итераций симплексного метода решения задачи (5.30) невелико.

III. Если $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* > 0$ и $\boldsymbol{\delta}^* \leqslant \mathbf{0}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mu) = \mathbf{y}_0 - \mu \mathbf{u}^* \in Q_0$ для любого $\mu < 0$, так как

$$\boldsymbol{\Delta} = A^T \mathbf{y} - \mathbf{c} = \boldsymbol{\Delta}^0 - \mu \boldsymbol{\delta}^* \leqslant \boldsymbol{\Delta}^0 = A^T \mathbf{y}_0 - \mathbf{c} \leqslant \mathbf{0}.$$

Но

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle - \mu \langle \mathbf{b}, \mathbf{u}^* \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle - \mu \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^* \to +\infty$$

при $\mu \to -\infty$, т. е. $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle$ неограничена на Q_0, а следовательно, $R_0 = \varnothing$ (см. 4.2.9).

Итак, метод одновременного решения прямой и двойственной задач состоит в построении последовательности решений укороченных задач до тех пор, пока не возникнет случай I (и будет найдено решение) либо случай III, обнаруживающий, что $R_0 = \varnothing$.

5.12. Метод декомпозиции

5.12.1. Как правило, практические задачи линейного программирования содержат большое количество неизвестных и ограничений. С точки зрения реализации методов решения таких задач с помощью компьютера представляется выгодным свести решение задачи большого объема к решению нескольких задач меньшего объема. Одним из этой группы методов является метод декомпозиции.

5.12.2. Блочная задача. Введем обозначения.

Векторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_j^T &= (c_{j1}, c_{j2}, ..., c_{jn_j}), \\ \mathbf{x}_j^T &= (x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jn_j}), \\ \mathbf{b}_0^T &= (b_{01}, b_{02}, ..., b_{0m}), \\ \mathbf{b}_j^T &= (b_{j1}, b_{j2}, ..., b_{jm_j}). \end{aligned}$$

Матрицы:

$$A_j \text{ — порядка } m \times n_j,$$
$$B_j \text{ — порядка } m_j \times n_j.$$

Здесь и далее всюду $j = 1, 2, ..., n$.

Назовем *блочной* следующую задачу:

найти

$$\min \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{x}_j \rangle \tag{5.31}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_0, \tag{5.32}$$

$$B_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j, \tag{5.33}$$

$$\mathbf{x}_j \geqslant \mathbf{0}. \tag{5.34}$$

5.12.3. Экстремальная задача. Рассмотрим следующие множества:

$$S_j = \{\mathbf{x}_j \colon B_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j,\ \mathbf{x}_j \geqslant \mathbf{0}\}. \tag{5.35}$$

Вначале будем предполагать, что все множества S_j ограничены.

Обозначим через W_j множество угловых точек $\mathbf{x}_j^k$ выпуклого многогранника S_j:

$$W_j = \{\mathbf{x}_j^1, \mathbf{x}_j^2, ..., \mathbf{x}_j^{k_j}\},$$

и обозначим

$$\mathbf{p}_j^k = A_j \mathbf{x}_j^k, \quad \mathbf{c}_j^k = \langle \mathbf{c}_j, \mathbf{x}_j^k \rangle, \quad k = \overline{1, k_j}. \tag{5.36}$$

Теперь сведем задачу (5.31)–(5.34) к так называемой *экстремальной задаче на угловых точках*. Согласно теореме 2.2.10 всякая точка $\mathbf{x}_j \in S_j$ может быть представлена в виде выпуклой комбинации угловых точек:

$$\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{k_j} \mathbf{x}_j^k v_{jk}, \quad \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} = 1, \quad v_{jk} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, k_j}. \tag{5.37}$$

В результате подстановки $\mathbf{x}_j$ из (5.37) в (5.31)–(5.34) и в силу обозначений (5.36) получается *экстремальная задача*:

найти

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} \mathbf{c}_j^k v_{jk} \tag{5.38}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} \mathbf{p}_j^k v_{jk} = \mathbf{b}_0, \tag{5.39}$$

$$\sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{5.40}$$

$$v_{jk} \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, k_j. \tag{5.41}$$

Очевидно, что если v_{jk} — решение задачи (5.38)–(5.41), то векторы $\mathbf{x}_j = \sum_{k=1}^{k_j} \mathbf{x}_j^k v_{jk}$ являются решением задачи (5.31)–(5.34) (вспомним обозначения (5.36) и условие $B_j \mathbf{x}_j^k = \mathbf{b}_j$, поскольку $\mathbf{x}_j^k \in S_j$).

Заметим, что в блочной задаче было $m + \sum_{j=1}^{n} m_j$ уравнений и $\sum_{j=1}^{n} n_j$ неизвестных. В экстремальной задаче число уравнений сократилось до $m + n$, в то время как число неизвестных значительно возросло — их стало $\sum_{j=1}^{n} k_j$, т. е. столько, сколько всего угловых точек у всех многогранников S_j.

5.12.4. Алгоритм. Алгоритм решения экстремальной задачи позволяет на активном участке работы использовать лишь незначительное число величин из $\sum_{j=1}^{n} k_j$, не вычисляя заранее всех элементов задачи (5.38)–(5.41).

Задачу (5.38)–(5.41) будем решать модифицированным симплексным методом. Пусть известна матрица начального базиса P экстремальной задачи, состоящая из $m+n$ векторов вида $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^l \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix}$, известны соответствующие этому базису величины в условиях (5.39), (5.40) и векторы

$$(\mathbf{y}^T, \overline{\mathbf{y}}^T) = (P^{-1})^T \overline{\mathbf{c}},$$

где $\overline{\mathbf{c}}^T = (\dots c_{il} \dots)$.

Обычный итерационный шаг модифицированного симплексного метода решения задачи (5.38)–(5.41) состоит в отыскании таких индексов (j,k), для которых выполняется неравенство

$$\Delta_{jk} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{p}_j^k \rangle + \langle \overline{\mathbf{y}}, \mathbf{e}_j \rangle - c_j^k = \overline{y}_j + \langle \mathbf{y}, \mathbf{p}_j^k \rangle - c_j^k > 0,$$

во введении в базис P вектора $\begin{bmatrix} \mathbf{p}_j^k \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$ и в выведении такого вектора, чтобы новая система составляла базис. Процесс заканчивается, когда все $\Delta_{jk} \leqslant 0$. Однако для того чтобы выяснить знаки величин Δ_{jk} стандартным способом, потребовалось бы перебрать колоссальное их количество $\Big(\sum_{j=1}^{n} k_j - (m+n)\Big)$, при этом следует знать все $\mathbf{p}_j^k$ и, значит, все угловые точки $\mathbf{x}_j^k$.

Алгоритм предусматривает такой способ выбора Δ_{jk}, при котором на каждом шаге следует решать n задач линейного программирования небольшого объема. Следуя этому предложению, среди всех возможных Δ_{jk} находят наибольшее Δ^*, и если $\Delta^* \leqslant 0$, то процесс заканчивается — найдено оптимальное решение. Если $\Delta^* > 0$, то делается следующий шаг.

Для того чтобы найти Δ^*, следует в каждом многограннике S_j найти ту угловую точку $\mathbf{x}_j^{r_j}$, в которой

$$\Delta_{jr_j} = \max_{W_j} \Delta_{jk},$$

а затем среди всех Δ_{jr_j} выбрать наибольшее, т. е. Δ^*.

Из построения множеств S_j, W_j и из того, что

$$\Delta_{jk} = \overline{\mathbf{y}}_j + \langle \mathbf{y}, \mathbf{p}_j^k \rangle - c_j^k = \overline{y}_j + \langle A_j^T \mathbf{y} - \mathbf{c}_j, \mathbf{x}_j^k \rangle,$$

следует

$$\Delta_{jr_j} = \max_{W_j} \Delta_{jk} = \max_{S_j} (\overline{y}_j + \langle A_j^T \mathbf{y} - \mathbf{c}_j, \mathbf{x}_j \rangle).$$

Итак, итерационный шаг состоит в следующем.

Для каждого номера j решается *вспомогательная задача*:

найти

$$\max \langle A_j^T \mathbf{y} - \mathbf{c}_j, \mathbf{x}_j \rangle \tag{5.42}$$

при условиях

$$B_j \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j, \quad \mathbf{x}_j \geqslant \mathbf{0}.$$

Через $\mathbf{x}_j^{r_j}$ обозначается решение этой задачи. Таким образом, получают набор решений $\mathbf{x}_1^{r_1}, \mathbf{x}_2^{r_2}, ..., \mathbf{x}_n^{r_n}$.

Затем вычисляют все $\Delta_{jr_j}(\mathbf{x}_j^{r_j})$ $(j = \overline{1,n})$ и находят тот номер i, для которого достигается

$$\max_{j=\overline{1,n}} \Delta_{jr_j}(\mathbf{x}_j^{r_j}) = \Delta_{ir_i}(\mathbf{x}_i^{r_i}) = \Delta^*.$$

Если $\Delta^* \leqslant 0$, то поиск решения заканчивается.

Если $\Delta^* > 0$, то вводят в базис P экстремальной задачи вектор $\begin{pmatrix} A_i \mathbf{x}_i^{r_i} \\ \mathbf{e}_i \end{pmatrix}$ и выводят столбец по правилам модифицированного симплексного метода.

5.12.5. Начало алгоритма. Для того чтобы найти матрицу начального базиса задачи (5.38)–(5.41), применяется метод искусственного базиса (см. п. 5.3.2). Вводят $m+n$ искусственных переменных $u_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, m+n})$ и решают задачу:

найти

$$\min \sum_{i=1}^{m+n} u_i$$

при условиях

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{k_j} \mathbf{p}_j^k v_{jk} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i u_i = \mathbf{b}_0, \\ \sum_{k=1}^{k_j} v_{jk} + u_{m+j} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \\ v_{jk} \geqslant 0, \quad u_l \geqslant 0, \quad j = \overline{1,n}; \quad k = \overline{1,k_j}; \quad l = \overline{1,m+n}. \end{gathered} \tag{5.43}$$

При $\mathbf{b}_0 \geqslant \mathbf{0}$ (что не ограничивает общности задачи) матрицей исходного базиса является единичная матрица размерности $m \times n$, которой соответствуют значения $(u_1, u_2, ..., u_{m+n}) = (\mathbf{b}_0^T, 1, 1, ..., 1)$ базисных переменных.

Далее задачу решают, пользуясь изложенной в предыдущем пункте процедурой.

5.12.6. Распространение метода на случай неограниченного множества S_j. В предположении, что S_j — ограниченные множества, изложенный алгоритм, как мы видели, приводит к двум возможным ситуациям, а именно, когда $\Delta^* \leqslant 0$, т. е. найдено решение задачи, или когда $\Delta^* > 0$, и в этом случае делают очередной итерационный шаг.

Если отказаться от предположения ограниченности множеств S_j, возможен случай, когда на очередном шаге симплексного метода обнаруживается, что целевая функция неограничена сверху на неограниченном допустимом множестве (см. случай II в п. 5.1.3).

Для вывода соотношений, которые указывают на неограниченность сверху целевой функции задачи (5.42), вспомним, что итерационный шаг симплексного метода (в обозначениях пп. 5.1.2 и 5.1.3) состоит в переходе от уже известной угловой точки $\overline{\mathbf{x}}$ с базисом B к новой точке $\mathbf{x}$ по формуле $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \lambda\mathbf{z}$, где

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} B^{-1}\mathbf{a}_k \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если возникает случай II (см. п. 5.1.3), то при любом $\lambda > 0$ точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ будет допустимой, и $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}(\lambda)\rangle \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Поскольку $\mathbf{x}$ — допустимая точка, то $A\mathbf{x} = A\overline{\mathbf{x}} - \lambda A\mathbf{z} = \mathbf{b}$, и так как $A\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, то $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$.

Переходя к обозначениям задачи (5.42), мы получаем систему соотношений

$$B_j\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}, \tag{5.44}$$

$$\langle A_j^T\mathbf{y} - \mathbf{c}_j, \mathbf{z}\rangle > 0. \tag{5.45}$$

Процедура итерационного шага решения экстремальной задачи в этом случае состоит в следующем: в базис задачи (5.38)–(5.41) вводится вектор $\begin{bmatrix} A_j\mathbf{z} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$. Подчеркнем: в базис вводится $\begin{bmatrix} A_j\mathbf{z} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$, а не $\begin{bmatrix} A_j\mathbf{z} \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$, поскольку в этом случае не выполняется соответствующее условие (5.40), так как множество $\{\mathbf{x}\colon B_j\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ является конусом, любой элемент которого представляется в виде положительной комбинации его ребер (см. п. 2.3.6).

ГЛАВА 6

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. Описание метода

6.1.1. Как правило, численные методы решения задач безусловной минимизации и методы решения задач математического программирования имеют качественное различие с точки зрения их трудоемкости. Так, например, вдобавок к трудностям, возникающим в методе градиентного спуска (гл. 9, п. 9.5.1) решения задачи отыскания безусловного минимума, в методе условного градиента (гл. 10, п. 10.3.1) решения задачи математического программирования на каждом итерационном шаге приходится еще решать задачу линейного программирования. В связи с этим весьма перспективными могут оказаться попытки свести задачу математического программирования к последовательности задач безусловной минимизации.

6.1.2. Идея *метода штрафных функций* состоит в следующем. Исходную задачу математического программирования

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}) = m \tag{6.1}$$

заменяют задачей о безусловной минимизации однопараметрической функции

$$M(\mathbf{x}, \beta) = \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{x})$$

либо задачей минимизации функции $M(\mathbf{x}, \beta)$ на некотором множестве Γ более простой структуры (с точки зрения численных методов минимизации), чем исходное множество X. При этом функцию $\psi(\mathbf{x})$ выбирают таким образом, чтобы решение задачи

$$\min_{\mathbf{x}\in\Gamma} M(\mathbf{x}, \beta) = m(\beta) \tag{6.2}$$

сходилось при $\beta \to 0$ к решению исходной задачи или, если это обеспечить не удается, то по крайней мере, чтобы $m(\beta) \to m$ при $\beta \to 0$.

Итак, метод штрафных функций состоит в построении функции $M(\mathbf{x}, \beta)$, в выборе последовательности $\{\beta_k\}$ и в решении соответствующих этой последовательности задач вида (6.2).

6.1.3. Рассмотрим следующий вид задания множества X:

$$X = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\},$$

где

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})),$$

а множество Γ обладает, как об этом говорилось выше, простой структурой. Как правило, $\Gamma = E_n$, и тогда либо (6.2) является задачей безусловной минимизации, либо $\Gamma = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$, либо $\Gamma = \{\mathbf{x}\colon\ \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}\}$. В обоих последних случаях задания множества Γ сложность многих численных методов решения задачи (6.2) примерно такая же, что и в случае, когда $\Gamma = E_n$.

6.1.4. Определение. Непрерывную функцию

$$\frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{x}),$$

определенную для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$ и $\beta > 0$, будем называть *штрафом*, если $\psi(\mathbf{x})$ такова, что

$$\begin{aligned} &\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in X, \\ &\psi(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \Gamma \setminus X. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Весьма широкое применение находит следующий выбор функции $\psi(\mathbf{x})$:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p, \quad p > 0. \tag{6.4}$$

Условия (6.3) при таком выборе функции $\psi(\mathbf{x})$ с очевидностью выполняются.

Можно следующим образом наглядно проиллюстрировать метод штрафных функций. Пусть

$$X = \{x \in E_1\colon\ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Тогда

$$\psi(x) = [\min\{b - x, 0\}]^p + [\min\{x - a, 0\}]^p, \quad p = 2.$$

На рис. 6.1 изображена функция $\dfrac{1}{\beta}\,\psi(x)$ для двух различных значений $\beta\colon\ \beta_1 > \beta_2 > 0$.

Пусть функция $\varphi(x)$ линейна. На рис. 6.2 изображены функции $M(x, \beta_1)$ и $M(x, \beta_2)$. Точки y_{β_1} и y_{β_2} являются решениями соответствующих задач вида (6.2), т. е. точками абсолютных минимумов функций $M(x, \beta_1)$ и $M(x, \beta_2)$. Через y обозначено решение исходной задачи (6.1), т. е. точка минимума линейной функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Из рис. 6.2 видно, что при $\beta_k \to 0$ соответствующие точки y_{β_k} стремятся к точке y.

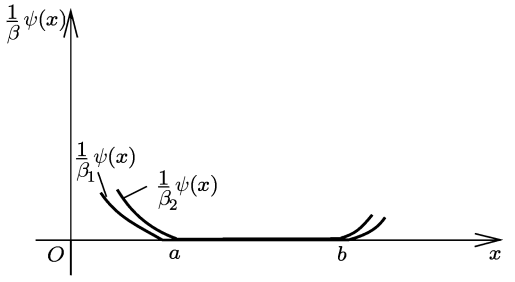

Рис. 6.1

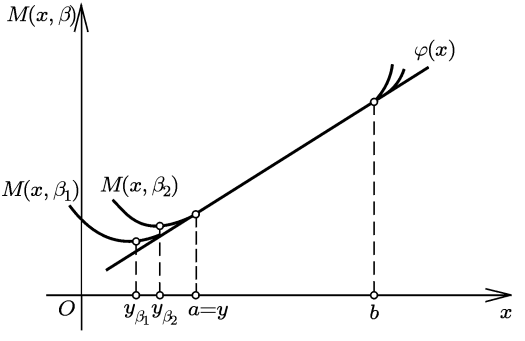

Рис. 6.2

Другим примером выбора $\psi(\mathbf{x})$ является функция

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p\Big\} - 1, \quad p > 0.$$

6.1.5. Если задача (6.1) является задачей выпуклого программирования, т. е. функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, функции $f_i(\mathbf{x})$ вогнуты, а множество Γ выпукло, то функция $\psi(\mathbf{x})$, определенная формулой (6.4), будет выпуклой при $p \geqslant 1$ на множестве Γ, и задача (6.2) становится задачей о поиске минимума выпуклой функции $M(\mathbf{x}, \beta)$ на выпуклом множестве Γ.

6.1.6. Иногда задачу

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

где

$$X = \{\mathbf{x} \in E_n\colon\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\},$$

заменяют эквивалентной задачей о минимизации $\varphi(\mathbf{x})$ при условиях $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$, а в качестве штрафа выбирают квадратичную функцию

$$\frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\beta}\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}\|^2.$$

Тогда (6.2) становится задачей о минимизации функции

$$M(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \beta) = \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

на множестве $\mathbf{x} \in E_n$, $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$.

6.1.7. Выбор штрафа следует согласовать с методами минимизации функции $M(\mathbf{x}, \beta)$, а значит, как мы увидим из дальнейших глав, следует учитывать гладкость штрафа, простоту вычисления значений функции $M(\mathbf{x}, \beta)$ и ее производных, свойства выпуклости и т. д.

Заметим, что при $p = 1$ у функции, определенной формулой (6.4), может произойти потеря гладкости по сравнению со случаем, когда $p = 2$. Так, для приведенного в п. 6.1.4 примера нетрудно убедиться, что функция

$$\psi(x) = |\min\{b - x, 0\}| + |\min\{x - a, 0\}|$$

недифференцируема в точках a и b.

6.1.8. Наконец, о названии метода. Термин "метод штрафных функций" является весьма естественным, поскольку он поясняет суть метода: за нарушение ограничений, т. е. когда $\mathbf{x} \in \Gamma \backslash X$, функция $\varphi(\mathbf{x})$ "штрафуется" на величину $\dfrac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{x})$.

6.2. Теоремы о сходимости

6.2.1. Функцию

$$\Psi(\mathbf{x}, \beta) = \beta\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}),$$

определенную для всех $\beta > 0$ на множестве Γ, будем называть *штрафной функцией* задачи (6.1), если $\psi(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям (6.3). Очевидно, что

$$\Psi(\mathbf{x}, \beta) = \beta M(\mathbf{x}, \beta).$$

Заметим, что такой вид штрафной функции несколько затушевывает ее физический смысл — штрафование за нарушение ограничений, однако из дальнейшего станет ясно, что при численной реализации методов минимизации функции $\Psi(\mathbf{x}, \beta)$ такой ее вид обладает в ряде случаев преимуществом по сравнению с $M(\mathbf{x}, \beta)$.

Пусть

$$\mathbf{y}_\beta = \arg\min\{\Psi(\mathbf{x}, \beta) | \mathbf{x} \in \Gamma\}, \qquad Y_\beta = \{\mathbf{y}_\beta\},$$
$$\mathbf{y} = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}, \qquad Y = \{\mathbf{y}\}.$$

Утверждение. *Если* $\mathbf{y}_\beta \in X$, *то* $\mathbf{y}_\beta \in Y$.

Действительно, так как $\mathbf{y}_\beta \in X$, то

$$\min_{\mathbf{x}\in\Gamma} M(\mathbf{x},\beta) = M(\mathbf{y}_\beta,\beta) = \varphi(\mathbf{y}_\beta) \leqslant \varphi(\mathbf{y}) + \frac{1}{\beta}\psi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_\beta),$$

следовательно, $\varphi(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}_\beta)$, а значит, $\mathbf{y} \in Y$. $\triangle$

6.2.2. Теорема. *Если существуют* $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{y}_\beta$, *то*

$$\lim_{\beta\to 0} \Psi(\mathbf{y}_\beta,\beta) = 0, \tag{6.5}$$

$$\lim_{\beta\to 0} \psi(\mathbf{y}_\beta) = 0. \tag{6.6}$$

Доказательство. 1. Покажем, что при $\beta_1 \geqslant \beta_2 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\beta_1}\,\Psi(\mathbf{y}_{\beta_1},\beta_1) \leqslant \frac{1}{\beta_2}\,\Psi(\mathbf{y}_{\beta_2},\beta_2). \tag{6.7}$$

Из того, что

$$\Psi(\mathbf{y}_{\beta_1},\beta_1) = \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} \Psi(\mathbf{x},\beta_1) \leqslant \Psi(\mathbf{y}_{\beta_2},\beta_1),$$

и из неравенства

$$\frac{1}{\beta_1}\,\psi(\mathbf{y}_{\beta_2}) \leqslant \frac{1}{\beta_2}\,\psi(\mathbf{y}_{\beta_2})$$

следует

$$\frac{1}{\beta_1}\,\Psi(\mathbf{y}_{\beta_1},\beta_1) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}) + \frac{1}{\beta_1}\,\psi(\mathbf{y}_{\beta_2}) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}) + \frac{1}{\beta_2}\,\psi(\mathbf{y}_{\beta_2}) = \frac{1}{\beta_2}\,\Psi(\mathbf{y}_{\beta_2},\beta_2)$$

Далее, так как $\psi(\mathbf{y}) = 0$, то

$$\Psi(\mathbf{y}_\beta,\beta) \leqslant \Psi(\mathbf{y},\beta) = \beta\varphi(\mathbf{y}) + \psi(\mathbf{y}) = \beta\varphi(\mathbf{y}),$$

т. е.

$$\frac{1}{\beta_1}\,\Psi(\mathbf{y}_\beta,\beta) \leqslant \varphi(\mathbf{y}).$$

Отсюда и из (6.7) (т. е. из монотонности по β функции $\dfrac{1}{\beta_1}\,\Psi(\mathbf{y}_\beta,\beta)$) следует существование конечной величины

$$\Psi^* = \lim_{\beta\to 0} \frac{1}{\beta}\,\Psi(\mathbf{y}_\beta,\beta),$$

а значит, и справедливость утверждения (6.5).

2. Покажем сначала, что при $\beta_1 > \beta_2 > 0$

$$\varphi(\mathbf{y}_{\beta_1}) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}). \tag{6.8}$$

Из неравенств

$$\Psi(\mathbf{y}_{\beta_1},\beta_1) \leqslant \Psi(\mathbf{y}_{\beta_2},\beta_1),$$

$$\Psi(\mathbf{y}_{\beta_2},\beta_2) \leqslant \Psi(\mathbf{y}_{\beta_1},\beta_2)$$

следует

$$\beta_1\varphi(\mathbf{y}_{\beta_1}) + \psi(\mathbf{y}_{\beta_1}) \leqslant \beta_1\varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}) + \psi(\mathbf{y}_{\beta_2}),$$
$$\beta_2\varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}) + \psi(\mathbf{y}_{\beta_2}) \leqslant \beta_2\varphi(\mathbf{y}_{\beta_1}) + \psi(\mathbf{y}_{\beta_1}).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$(\beta_1 - \beta_2)[\varphi(\mathbf{y}_{\beta_1}) - \varphi(\mathbf{y}_{\beta_2})] \leqslant 0,$$

и так как $\beta_1 - \beta_2 > 0$, то

$$\varphi(\mathbf{y}_{\beta_1}) - \varphi(\mathbf{y}_{\beta_2}) \leqslant 0,$$

т. е. имеет место (6.8).

Далее, так как $\psi(\mathbf{x}) \geqslant 0$, то

$$\varphi(\mathbf{y}_\beta) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_\beta) + \frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{y}_\beta) = \frac{1}{\beta}\,\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta) \leqslant \Psi^*.$$

Отсюда и из (6.8) (т. е. из монотонности $\varphi(\mathbf{y}_\beta)$) следует существование конечной величины

$$\varphi^* = \lim_{\beta\to 0} \varphi(\mathbf{y}_\beta).$$

А значит (см. (6.5)),

$$\lim_{\beta\to 0} \psi(\mathbf{y}_\beta) = \lim_{\beta\to 0} [\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta) - \beta\varphi(\mathbf{y}_\beta)] = 0. \quad \triangle$$

Теперь ясно, что для вычисления значений штрафной функции удобен вид

$$\Psi(\mathbf{x}, \beta) = \beta\varphi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}),$$

поскольку $\beta\varphi(\mathbf{y}_\beta) \to 0$ и $\psi(\mathbf{y}_\beta) \to 0$ и при вычислении значений $\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta)$ суммируются близкие величины.

При численной реализации метода штрафных функций возникают проблемы выбора начального значения β_0 параметра β и способа изменения β_k. Сложность здесь состоит в следующем. Выбор достаточно малого β_0 дает возможность надеяться, что $\mathbf{y}_{\beta_0}$ будет близким к $\mathbf{y}$. Однако скорость сходимости градиентных методов вычисления точек минимума функции $\Psi(\mathbf{x}, \beta)$, как правило, падает с убыванием величины β. Выбор же большого β_0 ведет к обратной картине.

6.2.3. В дальнейшем мы будем предусматривать возможность приближенного вычисления точки $\mathbf{y}_\beta$. Обозначим $\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta) = \Psi^*(\beta)$ и будем предполагать, что для каждого значения параметра $\beta > 0$ определена точка $\widetilde{\mathbf{y}}_\beta \in \Gamma$ такая, что

$$\Psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, \beta) \leqslant \Psi^*(\beta) + \zeta(\beta), \quad \zeta(\beta) > 0.$$

6.2.4. Теорема. *Если существуют* $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}_\beta$ *и* $\zeta(\beta) \to 0$ *при* $\beta \to 0$, *то*

$$\lim_{\beta\to 0} \Psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, \beta) = 0. \tag{6.9}$$

Если, кроме того, функция $\varphi(\mathbf{x})$ *ограничена снизу на множестве* $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\}$ *для всех достаточно малых* $\beta > 0$, *то*

$$\lim_{\beta\to 0} \psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta) = 0. \tag{6.10}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы, очевидно, следует из неравенства

$$\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta) \leqslant \Psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, \beta) \leqslant \Psi(y_\beta, \beta) + \zeta(\beta)$$

и соотношения (6.5).

Поскольку

$$0 \leqslant \psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta) = \Psi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, \beta) - \beta\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta),$$

то из (6.9) и из ограниченности снизу функции $\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta)$ следует (6.10). $\triangle$

6.2.5. Теорема. *Если*:

а) $\varphi(\mathbf{x})$, $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ *и* $\psi(\mathbf{x})$ *непрерывны на* Γ;

б) *существуют* $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{y}_\beta$ *для всех* $\beta > 0$;

в) *существует замкнутое и ограниченное множество* $G \subseteq \Gamma$ *такое, что* $\widetilde{\mathbf{y}}_\beta \in G$ *для всех достаточно малых* $\beta > 0$;

г) $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\zeta(\beta)}{\beta} = 0$;

то

$$\lim_{\beta\to 0} \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta) = \varphi(\mathbf{y}), \quad \lim_{\beta\to 0} \rho(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, Y) = 0.$$

Здесь, как и ранее, $Y = \operatorname{Arg\,min}\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существуют такое число $\delta > 0$ и такая последовательность $\{\beta_k\} \to 0$ при $k \to \infty$, что для всех $k = 0, 1, \ldots$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}) - \varphi(\mathbf{y})| \geqslant \delta.$$

Так как $\psi(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$, а $\psi(\mathbf{y}) = 0$, то

$$\begin{aligned}\beta_k\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}) &\leqslant \beta_k\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}) + \psi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}) = \Psi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}, \beta_k) \leqslant \\ &\leqslant \Psi(\mathbf{y}_{\beta_k}, \beta_k) + \zeta(\beta_k) \leqslant \Psi(\mathbf{y}, \beta_k) + \zeta(\beta_k) = \beta_k\varphi(\mathbf{y}) + \zeta(\beta_k).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Поскольку $\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k} \in G$, то, не изменяя нумерации, будем полагать, что

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k} = \widetilde{\mathbf{y}}.$$

Тогда из (6.11) и из условия г) получаем, что

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}) \leqslant \varphi(\mathbf{y}).$$

Но непрерывная функция $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве G (см. условие в)) для достаточно малых $\beta_k > 0$, поэтому, в силу теоремы 6.2.4

$$\psi(\widetilde{\mathbf{y}}) = \lim_{k\to\infty} \psi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}) = 0,$$

и, следовательно, $\widetilde{\mathbf{y}} \in X$, откуда приходим к равенству

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}) = \varphi(\mathbf{y}),$$

противоречащему предположению.

Из предыдущего очевидно, что любая предельная точка из семейства $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\}$ принадлежит множеству Y.

Предположим, что утверждение $\rho(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, Y) \to 0$ $(\beta \to 0)$ неверно. Тогда найдутся такое число $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\{\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}\} \subset \subset \{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\}$, что $\rho(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}, Y) > \varepsilon$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ В силу условия в), не умаляя общности, можно считать последовательность $\{\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}\}$ сходящейся к некоторой точке $\widetilde{\mathbf{y}}$. Но, как мы видели, $\widetilde{\mathbf{y}} \in Y$, и, значит, справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}, Y) = \lim\limits_{k\to\infty} \rho(\widetilde{\mathbf{y}}_{\beta_k}, \widetilde{\mathbf{y}}) = 0$, противоречащее предположению. $\triangle$

Следствие 1. *Если $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\} \in \Gamma \setminus X$, то любая предельная точка $\widetilde{\mathbf{y}}$ принадлежит пересечению границы $G(Y)$ множества Y и границы $G(X)$ множества X.*

Действительно, поскольку $\rho(\widetilde{\mathbf{y}}_\beta, Y) \to 0$, $\beta \to 0$, то любая предельная точка $\widetilde{\mathbf{y}}$ семейства $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\}$ принадлежит множеству Y. Но $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\beta\} \notin Y$, следовательно, $\widetilde{\mathbf{y}}$ не принадлежит внутренности множества Y, и поэтому $\widetilde{\mathbf{y}} \in G(Y)$. Аналогично показывается, что $\widetilde{\mathbf{y}} \in G(X)$. $\triangle$

Следствие 2. *Если $Y \subset \operatorname{int} X$, то найдется такой номер l, что $\mathbf{y}_{\beta_l} \in Y$.*

Действительно, если это не так, то (см. п. 6.2.1) $\{\mathbf{y}_{\beta_k}\} \subset \Gamma \setminus X$, и любая предельная точка $\overline{\mathbf{y}} \in G(Y) \cap G(X)$; значит, $G(Y) \cap G(X) \neq \varnothing$. Противоречие. $\triangle$

Замечание. Если $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ выпуклы и $Y \subset \operatorname{int} X$, то при любом $\beta > 0$ будет $\mathbf{y}_\beta \in Y$, поскольку из выпуклости $M(\mathbf{x}, \beta)$ и из условия $Y \subset \operatorname{int} X$ следует, что $Y = \operatorname{Arg\,min}\{M(\mathbf{x}, \beta) \colon \mathbf{x} \in \Gamma\}$.

6.2.6. О скорости сходимости метода штрафных функций. Обозначим $f(\mathbf{x}) = \min\limits_{i=\overline{1,m}} f_i(\mathbf{x})$. Пусть:

а) $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ непрерывны на выпуклом и замкнутом множестве Γ;

б) существуют $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}_\beta$ для всех $\beta > 0$;

в) существует такой компакт $G \subset \Gamma$, что $\mathbf{y}_\beta \in G$ для достаточно малых значений $\beta > 0$;

г) $\psi(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p, \quad p > 0;$

д) $|\varphi(\mathbf{x}_1) - \varphi(\mathbf{x}_2)| \leqslant L\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Gamma$;

е) существуют числа $\delta > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \in U_\delta(X)\backslash X$ будет $|f(\mathbf{x})| \geqslant \alpha\rho(\mathbf{x}, X)$, где $U_\delta(X) = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon \rho(\mathbf{x}, X) \leqslant \delta\}$.

Обозначим $\Delta(\beta) = \varphi(\mathbf{y}) - \dfrac{1}{\beta}\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta)$.

6.2.7. Теорема. *Если выполняются условия* а)–е), *то при* $p \leqslant 1$ *найдется такое достаточно малое значение* $\beta = \overline{\beta}$, *что для всех* $\beta \in (0, \overline{\beta}]$ *будет* $\Delta(\beta) = 0$, *а при* $p > 1$ *будет справедлива оценка*

$$0 \leqslant \Delta(\beta) \leqslant C\beta^{1/(p-1)}, \qquad C = L\Big(\frac{L}{p\alpha^p}\Big)^{1/(p-1)}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

при всех достаточно малых $\beta > 0$.

Доказательство. Если $\mathbf{y}_\beta \in X$, то (см. п. 6.2.1) $\mathbf{y}_\beta \in Y$, в силу чего $\Delta(\beta) = 0$.

Пусть $\mathbf{y}_\beta \in \Gamma \setminus X$. Так как $\mathbf{y}_\beta \in G$ и G — компакт, то из теоремы 6.2.5 следует $\rho(\mathbf{y}_\beta, X) \to 0$, $\beta \to 0$ (см. п. 6.2.5, следствие 1). Поэтому для достаточно малых значений β будет $\mathbf{y}_\beta \in U_\delta(X)\backslash X$. По предположению для этих значений $\mathbf{y}_\beta$ выполняется условие е).

Обозначим через $\mathbf{v}_\beta$ проекцию точки $\mathbf{y}_\beta$ на множество X: $\rho(\mathbf{y}_\beta, X) = \rho(\mathbf{y}_\beta, \mathbf{v}_\beta)$. Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{y}_\beta), 0\}|^p \geqslant \Big|\min_{i=\overline{1,m}} f_i(\mathbf{y}_\beta)\Big|^p = |f(\mathbf{y}_\beta)|^p.$$

Далее,

$$\frac{1}{\beta}\Psi(\mathbf{y}_\beta, \beta) = \varphi(\mathbf{y}_\beta) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{y}_\beta), 0\}|^p \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(\mathbf{v}_\beta) - |\varphi(\mathbf{v}_\beta) - \varphi(\mathbf{y}_\beta)| + \frac{1}{\beta}|f(\mathbf{y}_\beta)|^p \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(\mathbf{y}) - L\rho(\mathbf{y}_\beta, \mathbf{v}_\beta) + \frac{\alpha^p}{\beta}[\rho(\mathbf{y}_\beta, X)]^p = \varphi(\mathbf{y}) - L\rho + \frac{\alpha^p}{\beta}\rho^p.$$

Здесь $\rho \triangleq \rho(\mathbf{y}_\beta, X)$. Итак, $\Delta(\beta) \leqslant \rho\Big(L - \dfrac{\alpha^p}{\beta}\rho^{p-1}\Big)$.

При $0 < p < 1$ (поскольку $\rho \to 0$ при $\beta \to 0$; см. теорему 6.2.5), $\rho^{p-1} \to +\infty$, и, следовательно, найдется такое, вообще говоря, достаточно малое значение $\overline{\beta}$, что для любых $\beta \in (0, \overline{\beta}]$ будет $\Delta(\beta) \leqslant 0$ и, значит, $\Delta(\beta) = 0$.

Если $p = 1$, то $\Delta(\beta) \leqslant \rho(L - \alpha/\beta)$, и при $\beta \leqslant \alpha/L$ будет $\Delta(\beta) = 0$. Наконец, при $p > 1$ выполняется неравенство

$$\Delta(\beta) \leqslant \max_{\rho \geqslant 0}\Big(L\rho - \frac{\alpha^p}{\beta}\rho^p\Big) = C\beta^{1/(p-1)},$$

так как максимум достигается при $\rho = \Big(\dfrac{L}{p\alpha^p}\beta\Big)^{1/(p-1)}$. $\triangle$

Замечание. Если в качестве $\psi(\mathbf{x})$ выбрана экспоненциальная функция

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp\Big\{\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p\Big\} - 1,$$

то из неравенства $e^y \geqslant 1 + y$ следует справедливость теоремы 6.2.7 и в этом случае.

6.2.8. Практика показывает, что в случае применения весьма распространенных штрафов вида (6.4) с уменьшением величины β сходимость существенно замедляется и, кроме того, усиливается влияние ошибок округления на каждом шаге безусловной минимизации.

Подобная ситуация возникает в силу целого ряда причин, например, из-за того, что штраф вида (6.4) не учитывает особенности структуры допустимого множества, из-за овражного вида функции $M(\mathbf{x}, \beta)$ и др.

Как правило, приемы, в какой-то степени исправляющие положение, т. е. позволяющие ускорить процесс получения точки $\mathbf{y}$ с заданной степенью точности, носят эвристический характер и опираются на опыт и интуицию специалистов. Делаются также попытки предложить стандартные приемы, улучшающие некоторые характеристики метода.

Следующий выбор штрафной функции гарантирует конечность метода при любом $p > 0$:

$$F(\mathbf{x}, \beta) = \\ = \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^{1/p}. \quad (6.12)$$

Из доказательства теоремы 6.2.7 следует, что

$$0 \leqslant \Delta(\beta) = \varphi(\mathbf{y}) - F(\mathbf{y}_\beta, \beta) \leqslant \rho\Big[L - \frac{1}{\beta}(\alpha^p \rho^{p-1} + \alpha^{1/p}\rho^{1/p-1})\Big].$$

При $p = 1$ будет $\Delta(\beta) \leqslant \rho\Big(L - \dfrac{2\alpha}{\beta}\Big)$ и, следовательно, $\Delta(\beta) = 0$ для достаточно малых значений β.

Очевидно, что при $p \neq 1$ будет

$$\frac{1}{\beta}(\alpha^p \rho^{p-1} + \alpha^{1/p}\rho^{1/p-1}) \to +\infty \quad \text{при} \quad \beta \to 0.$$

И поскольку $\rho \to 0$ при $\beta \to 0$, то при малых β мы опять приходим к ситуации $\Delta(\beta) = 0$.

Итак, для любого $p > 0$ найдется такое значение $\overline{\beta}$, что при всех $\beta \in (0, \overline{\beta}]$ будет $\Delta(\beta) = 0$. При этом следует ожидать, что чем дальше отстоит p от 1 (либо в сторону нуля, либо в сторону $+\infty$), тем раньше наступит ситуация $\Delta(\beta) = 0$.

Однако для того, чтобы исследовать глубже этот вопрос, необходимы более тонкие оценки, для вывода которых требуется учитывать вид функции $f_i(\mathbf{x})$ и принадлежность точки $\mathbf{v}_\beta$ соответствующим ограничениям $f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$.

6.2.9. γ-мажорируемость. Как было сказано в п. 6.2.7, на сходимость метода штрафных функций существенное влияние оказывают свойства функций $f_i(\mathbf{x})$. При выводе оценки величины $\Delta(\beta)$ в п. 6.2.7 существенно использовалось свойство е). Осталось неясным, как проверить, выполняется ли условие е) для конкретного множества X. Покажем, что в ряде случаев это условие заведомо выполняется.

Если функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ вогнуты и непрерывны на выпуклом, замкнутом и ограниченном множестве Γ, а множество $X = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ регулярно по Слейтеру, то найдутся такие числа δ, $\alpha > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(X)\backslash X$ будет

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| = \Big|\min_{i=\overline{1,m}} f_i(\mathbf{x})\Big| \geqslant \alpha\rho(\mathbf{x}, X).$$

Доказательство. Поскольку множество X регулярно по Слейтеру (см. п. 3.4.3), то существуют такая точка $\widetilde{\mathbf{x}} \in X$ и такое число $\lambda > 0$, что $f_i(\widetilde{\mathbf{x}}) \geqslant \lambda$ $(i = \overline{1,m})$. Пусть $\mathbf{x} \in \Gamma\backslash X$, т. е. $f(\mathbf{x}) = \min\limits_{i=\overline{1,m}} f_i(\mathbf{x}) < 0$. На отрезке $[\widetilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}]$ найдется точка $\mathbf{z}$ такая, что $f(\mathbf{z}) = 0$. Для вогнутой функции $f(\mathbf{x})$ справедливо неравенство (см. п. 2.4.14)

$$\frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|} \geqslant \frac{f(\widetilde{\mathbf{x}}) - f(\mathbf{z})}{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|},$$

и так как $\|\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{x}}\| \leqslant r = \operatorname{diam}\Gamma < +\infty$, то

$$f(\mathbf{x}) \leqslant -\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|}{\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|} f(\widetilde{\mathbf{x}}) \leqslant -\frac{\lambda}{r}\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leqslant -\frac{\lambda}{r}\rho(\mathbf{x}, X).$$

Таким образом, условие е) выполняется при $\alpha = \lambda/r$.

Нетрудно также доказать, что условие е) выполняется в случае, когда $f_i(\mathbf{x})$ — линейные функции. Здесь уже регулярность множества X не требуется.

Нередки случаи, когда неравенство $|f(\mathbf{x})| \geqslant \alpha\rho(\mathbf{x}, X)$ не выполняется, но справедливо соотношение $|f(\mathbf{x})| \geqslant \alpha[\rho(\mathbf{x}, X)]^\gamma$ при некотором $\gamma > 0$.

Определение. Множество $X = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0,\ i = \overline{1,m}\}$ будем называть *γ-мажорируемым*, если выполняется условие

$$|f(\mathbf{x})| \geqslant \alpha[\rho(\mathbf{x}, X)]^\gamma, \quad \alpha > 0, \quad \gamma > 0,$$

для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(X)\backslash X$.

Например, если $n = 1$, $m = 2$, $f_1(x) = -x^3$, $f_2(x) = (x+1)^3$, то допустимое множество $X = [-1, 0]$ будет γ-мажорируемо при $\gamma = 3$.

Если для конкретного множества X известна величина γ, то при выборе штрафа вида (6.4) оценка погрешности $\Delta(\beta)$ будет, очевидно, выглядеть следующим образом:

$$0 \leqslant \Delta(\beta) \leqslant \begin{cases} \delta_1(\beta) = C\beta^{1/(\gamma p-1)} & \text{при} \quad \gamma p > 1, \\ 0 & \text{при} \quad \gamma p \leqslant 1, \end{cases} \tag{6.13}$$

причем в случае $\gamma p \leqslant 1$ существенно условие компактности множества Γ. Ясно, что, например, при $\gamma = 2$, $p = 1$ применение штрафа вида (6.4) не гарантирует конечности процесса. Лишь при $0 < p \leqslant 1/2$, т. е. при использовании штрафа с дробным показателем, число шагов по β будет конечным.

Если мы применим штраф с дробным показателем $1/p$, $p > 1$, то для величины $\Delta(\beta)$ будет справедлива оценка

$$0 \leqslant \Delta(\beta) \leqslant \begin{cases} \delta_2(\beta) = C\beta^{p/(\gamma-p)} & \text{при} \quad \gamma > p > 1, \\ 0 & \text{при} \quad \gamma \leqslant p. \end{cases}$$

Заметим, что δ_1, δ_2 связывает следующее соотношение:

$$\delta_2 = \delta_1^{p(\gamma p-1)/(\gamma-p)},$$

и при $\gamma > p > 1$ величина

$$\zeta = \frac{p(\gamma p - 1)}{\gamma - p}$$

будет больше единицы. Таким образом, зависимость $\delta_2 = \delta_1^{\zeta}$, $\zeta > 1$, характеризует скорость убывания величины $\Delta(\beta)$ при $\gamma > p > 1$ в пользу выбора штрафа с дробным показателем. В то же время применение такого штрафа приводит к потере выпуклости функции $\Psi(\mathbf{x}, \beta)$ и может противоречить предположению о существовании точек $\mathbf{y}_\beta$. Например, при $\gamma = 1$, $p = 1/2$ оценка

$$\Delta(\beta) \leqslant \sup_{\rho>0} \left(L\rho - \frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha\rho} \right) = +\infty$$

не дает содержательной информации, и, в частности, если решается одномерная задача $\min(-x)$ при условии $-x \geqslant 0$, то

$$M(x, \beta) = -x + \frac{1}{\beta}\sqrt{|\min\{-x, 0\}|} \quad \text{и} \quad \inf M(x, \beta) = -\infty.$$

Мы видим, что применение штрафа вида (6.4) как при $p > 1$, так и при $0 < p \leqslant 1$ в общем случае γ-мажорируемости часто бывает неоправданным. В силу этого имеет смысл применять комбинацию этих штрафов вида (6.12), обладающую в определенном смысле свойством универсальности, а именно сохраняются достоинства обоих штрафов

и устраняются некоторые их недостатки. Можно доказать, что при достаточно общих предположениях (γ-мажорируемость, вогнутость $f_i(\mathbf{x})$ и др.) функция $F(\mathbf{x},\beta)$ при малых β унимодальна.

Следует сказать, что найти величину γ в общем случае практически не удается, в силу чего даже применение штрафа (6.12) не гарантирует конечности метода по β, что видно из неравенства

$$0 \leqslant \Delta(\beta) \leqslant \rho\Big[L - \frac{1}{\beta}(\alpha^p \rho^{\gamma p-1} + \alpha^{1/p}\rho^{\gamma/p-1})\Big], \quad p > 1.$$

6.2.10. Теорема. *Если функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ выпуклы на всем пространстве E_n, а множество $Y = \operatorname{Arg\,min}\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$ непусто и ограничено, то существует такое достаточно малое $\beta_0 > 0$, что множество $Y_\beta = \operatorname{Arg\,min}\{M(\mathbf{x},\beta)\colon \mathbf{x} \in E_n\}$ ограничено в совокупности при всех $\beta \in (0,\beta_0]$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую точку $\mathbf{y} \in Y$ и погрузим множество Y в шар H конечного радиуса r с центром в точке $\mathbf{y}$ так, чтобы $Y \subset \operatorname{int} H$. Обозначим через G границу множества H.

Если мы докажем, что $M(\mathbf{z},\beta) > M(\mathbf{y},\beta) = \varphi(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{z} \in G$, $\beta \in (0,\beta_0]$, то из выпуклости функции $M(\mathbf{x},\beta)$ будет следовать неравенство $M(\mathbf{x},\beta) > M(\mathbf{y},\beta)$ для всех $\mathbf{x} \notin H$, поскольку если предположить существование такого $\mathbf{x} \notin H$, что $M(\mathbf{x},\beta) \leqslant M(\mathbf{y},\beta)$, то отрезку $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ будет принадлежать некоторая точка $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in G$ $(0 < \lambda < 1)$, и мы приходим к соотношению $M(\mathbf{z},\beta) \leqslant \lambda M(\mathbf{x},\beta) + (1-\lambda)M(\mathbf{y},\beta) \leqslant M(\mathbf{y},\beta)$, противоречащему условию $M(\mathbf{z},\beta) > M(\mathbf{y},\beta)$. Из того, что $M(\mathbf{x},\beta) > \mathrm{M}(\mathbf{y},\beta) \quad \forall\, \mathbf{x} \notin H$, следует включение $Y_\beta \subset H$, так как $M(\mathbf{y}_\beta,\beta) \leqslant M(\mathbf{y},\beta)$ (см п. 6.2.2). Существование $\mathbf{y}_\beta$ для всех $\beta \in (0,\beta_0]$ очевидно, поскольку функция $M(\mathbf{x},\beta)$ достигает минимума в некоторой точке $\mathbf{y}_\beta$ на замкнутом и ограниченном множестве H, а вне этого множества выполняется неравенство $M(\mathbf{x},\beta) > \varphi(\mathbf{y}) = M(\mathbf{y},\beta) \geqslant M(\mathbf{y}_\beta,\beta)$. Итак, следует доказать, что $M(\mathbf{z},\beta) > M(\mathbf{y},\beta) \quad \forall\, \mathbf{z} \in G$, $\beta \in (0,\beta_0]$.

1. Предположим, что множество X ограничено, а величина радиуса r сферы G такова, что $X \subset \operatorname{int} H$. Обозначим $\mu = \min\limits_{\mathbf{z}\in G} \varphi(\mathbf{z})$ и $\nu = \min\limits_{\mathbf{z}\in G} \psi(\mathbf{z})$. Так как $\nu > 0$, то найдется такое $\beta_0 > 0$, что для всех $\mathbf{z} \in G$ и $\beta \in (0,\beta_0]$ будет

$$\frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{z}) \geqslant \frac{1}{\beta_0}\,\psi(\mathbf{z}) \geqslant \frac{1}{\beta_0}\,\nu > \varphi(\mathbf{y}) - \mu,$$

а значит,

$$M(\mathbf{z},\beta) = \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{\beta}\,\psi(\mathbf{z}) > \mu + \varphi(\mathbf{y}) - \mu = M(\mathbf{y},\beta).$$

2. Пусть множество X неограничено. Из ограниченности множества Y следует, что $\varphi(\mathbf{z}) \geqslant \varphi(\mathbf{y}) + \Delta \quad \forall\, \mathbf{z} \in G \cap X$, где $0 < \Delta \leqslant \min\limits_{\mathbf{z}\in G\cap X} \varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y})$.

Обозначим

$$U_\delta(X) = \{\mathbf{x}\colon\ \rho(\mathbf{x}, X) \leqslant \delta\}, \quad G_1 = G \cap U_\delta(X), \quad G_2 = G \backslash U_\delta(X);$$

тогда $G = G_1 \cup G_2$. Выберем $\delta = \delta(\Delta) > 0$ таким, чтобы $\varphi(\mathbf{z}) > \varphi(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\Delta \ \ \forall\, \mathbf{z} \in G_1$. Это возможно в силу непрерывности выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ на E_n. Таким образом, для всех $\mathbf{z} \in G_1$ будет

$$M(\mathbf{z}, \beta) = \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{\beta}\psi(\mathbf{z}) \geqslant \varphi(\mathbf{y}) + \frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{\beta}\psi(\mathbf{z}) > \varphi(\mathbf{y}) = M(\mathbf{y}, \beta).$$

Далее, обозначив $\mu = \min\limits_{\mathbf{z} \in G_2} \varphi(\mathbf{z})$ и $\nu = \min\limits_{\mathbf{z} \in G_2} \psi(\mathbf{z}) > 0$ и повторив рассуждения п. 1, получим

$$M(\mathbf{z}, \beta) > M(\mathbf{y}, \beta) \quad \forall\, \mathbf{z} \in G_2,\ \beta \in (0, \beta_0]. \quad \triangle$$

6.2.11. Теорема. *Если функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ выпуклы и дифференцируемы на всем пространстве E_n, а множество $Y = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}$ непусто и ограничено, то найдется такое достаточно малое $\beta_0 > 0$, что*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \beta_0 = \beta_0(\varepsilon) > 0, \quad \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$
$$\forall\, \mathbf{x} \in X \backslash U_\varepsilon(Y) = \{\mathbf{x} \in X\colon\ \rho(\mathbf{x}, Y) \leqslant \varepsilon\}, \quad \beta \in (0, \beta_0]\colon\ \|\nabla M(\mathbf{x}, \beta)\| \geqslant \delta.$$

Доказательство. Поскольку множества Y_β ограничены в совокупности при $\beta \in (0, \beta_0]$, то утверждение теоремы следует из теоремы 6.2.10 и п. 9.2.7. $\triangle$

6.2.12. Теорема. *Если*:

1) *функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ выпуклы и дифференцируемы на E_n*;
2) *множество $Y = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}$ непусто и ограничено*;
3) *последовательность $\{\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(\beta)\}$ такова, что*

$$\|\nabla M(\mathbf{x}_k, \beta)\| \leqslant \varepsilon_k;$$

то $\rho(\mathbf{x}_k, Y) \to 0$ при $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$ и $\beta \to 0$.

Доказательство. Вначале докажем ограниченность последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$. По теореме 6.2.10 существует такое $\beta_0 > 0$, что множества Y_β ограничены в совокупности при всех $\beta \in (0, \beta_0]$. По теореме 6.2.11, если в качестве $U_\varepsilon(Y)$ взять шар H с границей G такого радиуса ε, что $Y_\beta \subset \operatorname{int} H$ для всех $\beta \in (0, \beta_0]$, то $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall\, \mathbf{x} \notin H\colon\ \|\nabla M(\mathbf{x}, \beta)\| > \delta$. Если предположить неограниченность $\{\mathbf{x}_k\}$, то $\|\mathbf{x}_k\| \to \infty$, $k \to \infty$, и, следовательно, найдется такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $\mathbf{x}_k \notin H$ и $\|\nabla M(\mathbf{x}_k, \beta)\| \geqslant \delta$. Противоречие условию 3).

Предположим теперь, что теорема неверна, т. е. существуют такое число $\Delta > 0$ и такая последовательность $\{\beta_k\} \to 0$, $k \to \infty$, что для всех $k = 0, 1, \ldots$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{y})| \geqslant \Delta \quad \text{для любого} \quad \mathbf{y} \in Y.$$

Так как $\psi(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $\mathbf{x}$, а $\psi(\mathbf{y}) = 0$, то в силу ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ будет $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_{\beta_k}\| \leqslant \eta < \infty$, и, пользуясь выпуклостью функции $M(\mathbf{x}, \beta)$, получаем

$$\varphi(\mathbf{x}_k) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{\beta_k}\psi(\mathbf{x}_k) = M(\mathbf{x}_k, \beta_k) \leqslant$$
$$\leqslant M(\mathbf{y}_{\beta_k}, \beta_k) + \langle \nabla M(\mathbf{x}_k, \beta_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_{\beta_k}\rangle \leqslant M(\mathbf{y}_{\beta_k}, \beta_k) + \eta\varepsilon_k \leqslant$$
$$\leqslant M(\mathbf{y}, \beta_k) + \eta\varepsilon_k = \varphi(\mathbf{y}) + \eta\varepsilon_k.$$

Поскольку $\{\mathbf{x}_k\}$ — ограниченная последовательность, то, не изменяя нумерации, будем полагать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \widetilde{\mathbf{x}}$. Поэтому $\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) \leqslant \varphi(\mathbf{y})$. Из п. 6.2.4 следует $\psi(\widetilde{\mathbf{x}}) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi(\mathbf{x}_k) = 0$, т. е. имеет место включение $\widetilde{\mathbf{x}} \in Y$, противоречащее предположению $|\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\widetilde{\mathbf{x}})| \geqslant \Delta$. $\triangle$

6.2.13. Теорема. *Если выполняются следующие условия*:

а) $\varphi(\mathbf{x})$ — *выпуклая и дифференцируемая функция на* E_n;

б) $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ — *вогнутые и дифференцируемые функции на* E_n;

в) *множество* $Y = \operatorname{Arg\,min}\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$ *непусто и ограничено*;

г) $\psi(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|^p, \quad p > 1$;

д) $|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{v})| \leqslant L\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *для любых* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *из* E_n;

е) $\exists\, \delta > 0, \alpha > 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in U_\delta(X)\backslash X\colon |f(\mathbf{x})| \geqslant \alpha\rho(\mathbf{x}, X)$, *где* $f(\mathbf{x}) = \min\limits_{i=\overline{1,m}} f_i(\mathbf{x})$, $U_\delta(X) = \{\mathbf{x}\colon \rho(\mathbf{x}, X) \leqslant \delta\}$;

ж) $\|\nabla M(\mathbf{x}_k, \beta)\| \leqslant \varepsilon_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ *для достаточно малых* $\beta > 0$; *то*

$$|\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_k, \beta)| \leqslant \gamma(\beta^{1/(p-1)} + \varepsilon_k), \quad \gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Доказательство. Из теоремы 6.2.10 следует, что для достаточно малых $\beta > 0$ существуют точки

$$\mathbf{y}_\beta \in Y_\beta = \operatorname{Arg\,min}\{M(\mathbf{x}, \beta)\colon \mathbf{x} \in E_n\}.$$

Поскольку $\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta) \geqslant 0$ (см. п. 6.2.2) и $M(\mathbf{x}_k, \beta) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta) \geqslant 0$, то

$$|\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{x}_k, \beta)| \leqslant |\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta)| + |M(\mathbf{y}_\beta, \beta) - M(\mathbf{x}_k, \beta)| =$$
$$= (\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta)) + (M(\mathbf{x}_k, \beta) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta)).$$

Из того, что выполняются условия теоремы 6.2.7, справедлива оценка

$$\varphi(\mathbf{y}) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta) \leqslant C\beta^{1/(p-1)},$$

а из условия ж) получаем неравенство

$$M(\mathbf{x}_k, \beta) - M(\mathbf{y}_\beta, \beta) \leqslant \langle \nabla M(\mathbf{x}_k, \beta), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_\beta\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|\nabla M(\mathbf{x}_k, \beta)\|\,\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_\beta\| \leqslant \eta\varepsilon_k,$$

откуда и следует утверждение теоремы при $\gamma = \max\{C, \eta\}$. $\triangle$

Вычислительный аспект. Последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\{\beta_k\}$ и $\{\mathbf{x}_k\}$ будем строить следующим образом.

Пусть известны числа ε_k, β_k и точка $\mathbf{x}_{k-1}$. Заметим, что в качестве ε_0, β_0 и $\mathbf{x}_0$ могут быть выбраны, вообще говоря, произвольные величины, хотя предпочтительнее выбирать их, учитывая известную информацию о функциях $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$. Точку $\mathbf{x}_k$ построим таким образом, чтобы выполнилось условие $\|\nabla M(\mathbf{x}_k, \beta_k)\| \leqslant \varepsilon_k$. Затем выберем $\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$ и $\beta_{k+1} < \beta_k$ такими, чтобы обеспечить условия $\varepsilon_k \to 0$ и $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Для нахождения точки $\mathbf{x}_k$ строим релаксационную последовательность $\{\mathbf{y}_i(k)\}$, начиная с точки $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_{k-1}$, до тех пор, пока не будет вычислена такая точка $\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j(k)$, что $\|\nabla M(\mathbf{y}_j, \beta_k)\| \leqslant \varepsilon_k$, т. е. $f = \min\{i\colon \|M(\mathbf{y}_i, \beta_k)\| \leqslant \varepsilon_k, \quad i = 1, 2, \ldots\}$. После этого положим $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_j$.

Заметим, что при построении релаксационной последовательности $\{\mathbf{y}_i\}$ методом градиентного спуска (см. п.п. 9.5.1–9.5.7) величину $\nabla M(\mathbf{y}_i, \beta_k)$ вычисляют на каждой итерации, в силу чего оценка величины $\|\nabla M(\mathbf{y}_i, \beta_k)\|$ не потребует громоздких дополнительных вычислений.

Сходимость указанного метода доказана в теореме 6.2.13.

Достаточно широкое применение находит *итеративный метод штрафных функций*. Основная идея этого метода состоит в таком согласовании параметров α_k и β_k, чтобы при каждом значении β_k, делая только один шаг градиентного метода

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla M(\mathbf{x}_k, \beta_k), \quad \alpha_k > 0,$$

получить сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к решению задачи.

Следующие условия гарантируют указанную сходимость:

$\varphi(\mathbf{x})$ — *сильно выпуклая и дифференцируемая на* E_n *функция*;
$f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ — *вогнутые и дифференцируемые на* E_n *функции*;
$\psi(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} [\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}]^2$;
$\mathbf{x}_0$ — *любая точка*;
$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1/\beta_{k+1} - 1/\beta_k}{\alpha_k} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\alpha_k}{\beta_k^2} = 0$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [4].

ГЛАВА 7

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

7.1. Корректные и некорректные задачи

7.1.1. У значительного числа практических задач, математическими моделями которых являются задачи математического программирования, исходная информация носит приближенный характер. В связи с этим возникает проблема выделения таких классов задач и численных методов минимизации, для которых малые возмущения исходной информации несущественны, т. е. не оказывают сильного влияния на решение.

7.1.2. Точная задача. Рассмотрим задачу отыскания таких элементов $\mathbf{y} \in X$, что

$$\varphi(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

где

$$X = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\},$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ — векторная функция,

$$\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})),$$

а $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ — заданные непрерывные скалярные функции.

7.1.3. Исходная информация. На практике информация о $\varphi(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ носит приближенный характер, т. е. вместо $\varphi(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ известны такие функции $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})$, определенные на множестве Γ, что

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) \in P_\varepsilon(\varphi, \mathbf{f}) = \\ = \{\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})\colon\ |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,\ \ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})\| \leqslant \varepsilon,\ \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

При этом выбор функций φ_ε и $\mathbf{f}_\varepsilon$ из множества P_ε не зависит от нашего желания. Таким образом, о решении $\mathbf{y}$ исходной задачи судят по решению $\mathbf{y}_\varepsilon$ приближенной задачи.

7.1.4. Приближенная задача. $\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) = \min\limits_{\mathbf{x} \in X_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$, где

$$X_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Gamma\colon\ \mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant \mathbf{0}\}.$$

Пусть

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in X \colon \varphi(\mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}) \right\} \neq \varnothing,$$
$$Y_\varepsilon = \left\{ \mathbf{y}_\varepsilon \in X_\varepsilon \colon \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) = \min_{\mathbf{x} \in X_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \right\} \neq \varnothing.$$

7.1.5. Корректность. Назовем задачу 7.1.2 *слабо корректной*, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mathbf{y}_\varepsilon \in Y_\varepsilon} \inf_{\mathbf{y} \in Y} \|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}\| = 0. \tag{7.1}$$

Задачу 7.1.2 будем называть *корректной*, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\mathbf{z}', \mathbf{z}'' \in Z} \|\mathbf{z}' - \mathbf{z}''\| = 0, \tag{7.2}$$

где $Z = Y_\varepsilon \cup Y$.

Поясним эти определения. Предельное соотношение (7.1) означает, что семейство множеств Y_ε стягивается при $\varepsilon \to 0$ к множеству, принадлежащему Y. На языке "ε, δ" это значит, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $\mathbf{y}_\varepsilon \in Y_\varepsilon$ найдется такой $\mathbf{y} \in Y$, что $\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}\| \leqslant \delta$. Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\varphi_\varepsilon \in P_\varepsilon$ будет

$$|\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) - \varphi(\mathbf{y})| \leqslant \delta.$$

(Читателям предоставляется возможность самостоятельно убедиться в справедливости этого утверждения.) Таким образом, слабая корректность по сути дела означает корректность по функционалу:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) = \varphi(\mathbf{y}).$$

Условие (7.2) означает, что семейство множеств Y_ε стягивается при $\varepsilon \to 0$ к множеству Y, состоящему из единственного элемента $\mathbf{y}$. Таким образом, для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и любого $\mathbf{y}_\varepsilon \in Y_\varepsilon$ будет

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}\| \leqslant \delta.$$

Очевидно, что корректная задача всегда является слабо корректной, но не наоборот.

Будем говорить, что задача 7.1.2 *некорректна*, если нарушается условие (7.2).

В случае некорректности задачи 7.1.2 при заданном $\varepsilon > 0$ всегда найдутся такие пары φ_ε, $\mathbf{f}_\varepsilon$ и $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$, $\widetilde{\mathbf{f}}_\varepsilon$, принадлежащие множеству $P_\varepsilon(\varphi, \mathbf{f})$, для которых решения $\mathbf{y}_\varepsilon$ и $\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon$ соответствующих задач вида 7.1.4 существенно различны и поэтому не несут в себе достаточной информации о решении исходной задачи.

7.1.6. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим в E_2 пару задач:

$$\begin{gathered}\min(-x_1 - x_2),\\ x_1 + x_2 \leqslant 1,\\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0,\end{gathered} \tag{7.3}$$

и

$$\begin{gathered}\min(-x_1 - x_2),\\ (1 + |\varepsilon| + \varepsilon)x_1 + (1 + |\varepsilon| - \varepsilon)x_2 \leqslant 1,\\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Очевидно, что задача (7.3) является слабо корректной и в то же время некорректной.

Пример 2.

$$\begin{gathered}\min x_2,\\ x_1 + x_2 = 1,\\ (1 + |\varepsilon| + \varepsilon)x_1 + (1 + |\varepsilon| - \varepsilon)x_2 = 1,\\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Очевидно, что задача (7.4) при $\varepsilon = 0$ будет некорректной и, более того, она не будет слабо корректной.

Основные методы решения задач математического программирования создавались в предположении, что задача корректна. Например, процедуру симплексного метода решения задачи линейного программирования

$$\min_{\mathbf{x} \in R_0} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle,$$
$$R_0 = \{\mathbf{x}\colon\ A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},$$

можно интерпретировать следующим образом: на каждом итерационном шаге метода элементы матрицы A и компоненты векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ преобразуются в A', $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{c}'$ по формулам полного исключения Жордана–Гаусса и в результате возникает новая задача

$$\min_{\mathbf{x} \in R'_0} \langle \mathbf{c}', \mathbf{x} \rangle,$$
$$R'_0 = \{\mathbf{x}\colon\ A'\mathbf{x} = \mathbf{b}',\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\},$$

эквивалентная исходной. На практике при вычислениях производят округления, поэтому в реальных случаях итерационный шаг приводит не к эквивалентной задаче, а к новой приближенной задаче. Понятно, что при некорректности решение приближенной задачи может существенно отличаться от решения исходной задачи. В последние годы математики обратились к разработке методов решения некорректных задач. Одним из основных представителей этих методов является так называемый *метод регуляризации*, в основе которого лежит идея аппроксимации некорректных задач корректными. В связи с этим возникает необходимость выделения классов корректных задач.

7.2. Один класс корректных задач

7.2.1. Рассмотрим задачу 7.1.2 и задачу

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Обратим внимание на то, что, в отличие от задачи 7.1.4, в рассматриваемой задаче допустимое множество то же, что и в точной задаче, поэтому здесь

$$Y_\varepsilon = \Big\{\mathbf{y}_\varepsilon \in X\colon\ \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) = \min_{\mathbf{x}\in X} \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\Big\}.$$

7.2.2. Естественно, что точность вычисления точки

$$\mathbf{y}_\varepsilon = \arg\min\{\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x}\in X\}$$

следует согласовывать с точностью задания целевой функции $\varphi(\mathbf{x})$, т. е. с величиной ε. Мы будем предполагать, что для каждого $\varepsilon > 0$ определена точка $\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon \in X$ такая, что

$$\varphi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) \leqslant \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \zeta(\varepsilon) > 0.$$

7.2.3. Теорема. *Если*:

а) *функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *сильно выпукла и непрерывна на выпуклом и замкнутом множестве* X;

б) $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ *непрерывна на* X *и*

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \in P_\varepsilon(\varphi) = \{\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\colon\ |\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,\ \ \mathbf{x}\in X\};$$

в) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \zeta(\varepsilon) = 0$;

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon = \mathbf{y},$$

а следовательно, задача 7.1.2 *корректна.*

Доказательство. Так как $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}) - \varepsilon$ и при $\|\mathbf{x}\| \to \infty$, $\mathbf{x}\in X$ имеем $\varphi(\mathbf{x}) \to +\infty$, то $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \to +\infty$; поэтому найдется такое $C = \mathrm{const}$, что непустое множество $\{\mathbf{x}\in X\colon\ \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant C\}$ ограничено, вследствие чего $Y_\varepsilon \neq \varnothing$.

Поскольку $\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) \leqslant \varphi_\varepsilon(\mathbf{y})$, то

$$\begin{aligned}\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi(\mathbf{y}) &= [\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon)] + [\varphi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi(\mathbf{y})] \leqslant \\ &\leqslant [\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon)] + [\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\varepsilon) - \varphi(\mathbf{y})] + \zeta(\varepsilon) \leqslant \\ &\leqslant [\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon)] + [\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y})] + \zeta(\varepsilon) \leqslant 2\varepsilon + \zeta(\varepsilon).\end{aligned}$$

Но в силу сильной выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ справедливо неравенство (см. 2.5.5)

$$\|\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{y}\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}[\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon) - \varphi(\mathbf{y})],$$

следовательно,

$$\|\widetilde{\mathbf{y}}_\varepsilon - \mathbf{y}\|^2 \leqslant \frac{4\varepsilon + 2\zeta(\varepsilon)}{\rho}. \quad \triangle$$

7.3. Задачи с точными ограничениями. Метод регуляризации

7.3.1. Для решения линейных некорректных задач А.Н. Тихоновым был предложен метод регуляризации. В настоящем разделе этот метод рассматривается применительно к задачам нелинейного программирования.

Большинство реальных задач, которые формализуются как задачи математического программирования, содержат дополнительную информацию, позволяющую выбирать из множества решений Y задачи 7.1.2 тот элемент, который удовлетворял бы еще некоторым дополнительным условиям; например, был бы ближайшим к некоторой фиксированной точке $\mathbf{x}^0$. В задачах оперативного планирования, где $\mathbf{y}$ является оптимальным планом, элемент $\mathbf{x}^0$ обычно характеризует план предшествующего периода, существенное отклонение от которого может быть связано с организационными и технологическими перестройками и, следовательно, сопряжено с дополнительными затратами.

7.3.2. Нормальное решение. Возникает естественная постановка задачи:

для заданного $\mathbf{x}^0 \in \Gamma$ найти $\mathbf{y}^0 \in Y$ такой, что

$$\|\mathbf{y}^0 - \mathbf{x}^0\|^2 = \min_{\mathbf{y}\in Y} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|^2. \tag{7.5}$$

Элемент $\mathbf{y}^0$ называют *нормальным решением* задачи 7.1.2, а саму задачу (7.5) — задачей *о нормальном решении.*

7.3.3. Регуляризация. Процедура регуляризации отыскания нормального решения задачи 7.1.2 для частного случая, когда возмущена лишь целевая функция (информация о множестве X предполагается точной), состоит в следующем.

Вводится регуляризующая функция

$$N_\alpha(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \alpha\Omega(\mathbf{x}), \quad \alpha > 0,$$

где

$$\Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2,$$

и рассматривается задача отыскания элемента

$$\mathbf{y}_\alpha = \arg\min\{N_\alpha(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}.$$

7.3.4. В дальнейшем мы будем предусматривать возможность приближенного вычисления точки $\mathbf{y}_\alpha$.

Обозначим $N_\alpha^* = N_\alpha(\mathbf{y}_\alpha)$ и будем предполагать, что для каждого значения параметра $\alpha > 0$ определена точка $\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha \in X$ такая, что

$$N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha) \leqslant N_\alpha^* + \xi(\alpha), \quad \xi(\alpha) > 0.$$

7.4. Сходимость

7.4.1. Теорема. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ непрерывна на замкнутом множестве X, а множество Y непусто, то при условии, что*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\xi(\alpha)}{\alpha}=0,$$

будет

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)=\varphi(\mathbf{y}) \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha\to 0}\rho(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha, Y)=0.$$

Если, кроме того, $\varphi(\mathbf{x})$ и множество X выпуклы, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha=\mathbf{y}^0.$$

Доказательство. Так как $\varphi(\mathbf{x})\geqslant\varphi(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x}\in X$, то при $\|\mathbf{x}\|\to\infty$ $(\mathbf{x}\in X)$ будет $N_\alpha(\mathbf{x})\to+\infty$, а следовательно, непустое замкнутое множество $\{\mathbf{x}\in X\colon N_\alpha(\mathbf{x})\leqslant C\}$ ограничено и в силу непрерывности функции $N_\alpha(\mathbf{x})$ существует $\mathbf{y}_\alpha$. Так как

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{y}^0)\leqslant\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)\leqslant\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)+\alpha\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)\leqslant N_\alpha^*+\xi(\alpha)=\\ =\varphi(\mathbf{y}_\alpha)+\alpha\Omega(\mathbf{y}_\alpha)+\xi(\alpha)\leqslant\varphi(\mathbf{y}^0)+\alpha\Omega(\mathbf{y}^0)+\xi(\alpha)\leqslant\\ \leqslant\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)+\alpha\Omega(\mathbf{y}^0)+\xi(\alpha),\end{aligned}$$

то

$$\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)\leqslant\Omega(\mathbf{y}^0)+\frac{\xi(\alpha)}{\alpha}, \tag{7.6}$$

$$\varphi(\mathbf{y}^0)\leqslant\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)\leqslant\varphi(\mathbf{y}^0)+\alpha\Omega(\mathbf{y}^0)+\xi(\alpha).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\alpha\to 0$, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha)=\varphi(\mathbf{y}^0).$$

Поскольку из (7.6) следует, что $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha\}$ — компакт при всех достаточно малых α, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\rho(\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha, Y)=0.$$

Наконец, предположим, что выпуклы $\varphi(\mathbf{x})$ и X; тогда выпукло и множество Y. Пусть $\overline{\mathbf{y}}$ — произвольная предельная точка семейства $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha\}$:

$$\overline{\mathbf{y}}=\lim_{k\to\infty}\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha_k}.$$

По доказанному

$$\lim_{k\to\infty}\varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha_k})=\varphi(\mathbf{y}^0)=\varphi(\overline{\mathbf{y}}),$$

поэтому $\overline{\mathbf{y}} \in Y$. Из (7.6) следует

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha_k}) = \Omega(\overline{\mathbf{y}}) \leqslant \Omega(\mathbf{y}^0),$$

т. е.

$$\min_{\mathbf{y}\in Y} \Omega(\mathbf{y}) = \Omega(\mathbf{y}^0) = \Omega(\overline{\mathbf{y}}).$$

Но сильно выпуклая функция $\Omega(\mathbf{x})$ на выпуклом и замкнутом множестве Y достигает минимума в единственной точке, а значит, $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^0$. Таким образом, доказано, что $\{\widetilde{\mathbf{y}}_\alpha\}$ при $\alpha \to 0$ имеет единственную предельную точку:

$$\lim_{\alpha\to 0} \widetilde{\mathbf{y}}_\alpha = \mathbf{y}^0. \quad \triangle$$

7.4.2. Замечание. Получить априорные оценки скорости приближения $\mathbf{y}_\alpha$ к $\mathbf{y}^0$ в общем случае нельзя. Простые примеры показывают, что скорость приближения $\mathbf{y}_\alpha$ к $\mathbf{y}^0$ при $\alpha \to 0$ может быть весьма малой. Так, для одномерной задачи

$$\min_{\mathbf{x}\in E_1} x^{2k}, \quad k \geqslant 1,$$

выбирая $x^0 \neq 0$, а $\Omega(x) = (x - x^0)^2$, получаем, что y_α стремится к $y^0 = 0$ при $\alpha \to 0$ со скоростью $O\Big(\alpha^{1/(2k-1)}\Big)$.

В конце настоящей главы мы увидим, что это обстоятельство может оказать существенное влияние на сходимость процесса регуляризации в задачах, когда возмущению подвергается и допустимое множество.

7.4.3. Теорема. *Если множество X выпукло и замкнуто, функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла и непрерывна, функции $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ непрерывны,*

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \in P_\varepsilon(\varphi) = \{\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})\colon\ |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon,\ \ \mathbf{x} \in X\},$$

множество Y непусто, то задача минимизации функции $N_\alpha(\mathbf{x})$ на множестве X корректна при любом фиксированном $\alpha > 0$.

Доказательство. Обозначим

$$N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) + \alpha\Omega(\mathbf{x}).$$

Так как $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}) - \varepsilon \geqslant \varphi(\mathbf{y}) - \varepsilon = \mathrm{const}$ для всех $\mathbf{x} \in X$, то замкнутое множество $\{\mathbf{x} \in X\colon N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}) \leqslant \mathrm{const}\}$ ограничено, поскольку $N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}) \geqslant \mathrm{const} + \alpha\Omega(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ $(\mathbf{x} \in X)$, и, следовательно, существует

$$\mathbf{y}_{\alpha\varepsilon} = \arg\min\{N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}.$$

Легко убедиться, что функции $N_\alpha(\mathbf{x})$ и $N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям теоремы 7.2.3, откуда и следует корректность. $\triangle$

7.5. Метод регуляризации (общий случай)

7.5.1. В предыдущем разделе был рассмотрен метод регуляризации для задач с точными ограничениями, когда возмущению подвергалась лишь целевая функция. Ниже рассматриваются задачи вида 7.1.4, т. е. тот общий случай, когда о задаче 7.1.2 известна лишь ε-информация, а именно известны функции $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})$ из множества $P_\varepsilon(\varphi, \mathbf{f})$. Для получения приближенных значений нормального решения задачи 7.1.2 используется следующая методика.

7.5.2. Регуляризация. Вводят параметрическую функцию

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(X) = \beta[\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) + \alpha\Omega(\mathbf{x})] + \psi_\varepsilon(\mathbf{x}),$$

где $\beta > 0$ и

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} |\min\{f_{\varepsilon i}(\mathbf{x}), 0\}|^p, \quad p > 0,$$

и вычисляют

$$\mathbf{y}_{\alpha\beta\varepsilon} = \arg\min\{\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in \Gamma\}.$$

Обратим внимание на то, что $\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\mathbf{x})$ является штрафной функцией для задачи минимизации регуляризующей функции

$$N_{\alpha\varepsilon}(\mathbf{x}) = \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) + \alpha\Omega(\mathbf{x})$$

на множестве X_ε.

7.6. Сходимость метода регуляризации (общий случай)

7.6.1. Предположения.

а) Множество Γ выпукло и замкнуто;

б) функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла и непрерывна на Γ;

в) функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ вогнуты и непрерывны на Γ;

г) непрерывные на Γ функции $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}_\varepsilon(\mathbf{x})$ принадлежат множеству $P_\varepsilon(\varphi, \mathbf{f})$;

д) $Y = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\} \neq \varnothing$;

е) $\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|, \quad \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} |\min\{f_{\varepsilon i}(\mathbf{x}), 0\}|.$

7.6.2. Утверждение 1. *Для любого* $\mathbf{x} \in \Gamma$ *справедливо неравенство*

$$|\psi(\mathbf{x}) - \psi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon m.$$

Доказательство. Элементарно доказывается, что

$$||\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}| - |\min\{f_{\varepsilon i}(\mathbf{x}), 0\}|| \leqslant |f_i(\mathbf{x}) - f_{\varepsilon i}(\mathbf{x})|$$

(для этого достаточно рассмотреть случаи, когда $f_i(\mathbf{x})$ и $f_{\varepsilon i}(\mathbf{x})$ одного знака и когда разных). Далее,

$$|\psi(\mathbf{x}) - \psi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} ||\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}| - |\min\{f_{\varepsilon i}(\mathbf{x}), 0\}|| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |f_i(\mathbf{x}) - f_{\varepsilon i}(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon m. \triangle$$

7.6.3. Утверждение 2. *Для любых* $\mathbf{x} \in \Gamma$, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0 < \infty$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 < \infty$ *и для любого фиксированного* $\alpha > 0$ *существует*

$$\Psi^* = \inf_{\mathbf{x}\in\Gamma} \Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\mathbf{x}) > -\infty.$$

Доказательство. Так как функция

$$N_\alpha(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \alpha\Omega(\mathbf{x}), \quad \alpha > 0,$$

сильно выпукла на Γ, то существует

$$N^{**} = \min_{\mathbf{x}\in\Gamma} N_\alpha(\mathbf{x}) > -\infty.$$

Учитывая неравенство (см. условие г))

$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}) - \varepsilon,$$

получаем соотношение

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\mathbf{x}) \geqslant \beta[\varphi(\mathbf{x}) - \varepsilon] + \beta\alpha\Omega(\mathbf{x}) = \beta N_\alpha(\mathbf{x}) - \beta\varepsilon \geqslant \beta N^{**} - \beta\varepsilon > -\infty. \triangle$$

7.6.4. Предположим, что $\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon} \in \Gamma$ удовлетворяет условию

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \Psi^* + \eta(\varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) > 0.$$

Как и прежде, обозначим

$$\mathbf{y}^0 = \arg\min\{\Omega(\mathbf{y})\colon \mathbf{y} \in Y\},$$
$$\mathbf{y}_\alpha = \arg\min\{N_\alpha(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}, \quad N_\alpha(\mathbf{y}_\alpha) = N^*.$$

7.6.5. Теорема. *Если выполняются предположения* 7.6.1 *и если*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \beta(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta(\varepsilon)} = 0,$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon} = \mathbf{y}^0.$$

Доказательство. Из условий

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant 0,$$
$$\varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon,$$
$$\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}) + \varepsilon,$$

справедливых для всех $\mathbf{x} \in \Gamma$, а также из условия

$$\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \Psi^* + \eta(\varepsilon)$$

получаем

$$N^{**} \leqslant N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\,\psi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) =$$
$$= \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\,\psi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant$$
$$\leqslant \varphi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\,\psi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \varepsilon = \frac{1}{\beta}\,\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\beta}\,(\Psi^* + \eta(\varepsilon)) + \varepsilon \leqslant \frac{1}{\beta}\,\Psi_{\alpha\beta\varepsilon}(\mathbf{y}_\alpha) + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + \varepsilon =$$
$$= \varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\alpha) + \alpha\Omega(\mathbf{y}_\alpha) + \frac{1}{\beta}\,\psi_\varepsilon(\mathbf{y}_\alpha) + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{y}_\alpha \in X$, то из утверждения 7.6.2 следует

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{y}_\alpha) \leqslant \varepsilon m;$$

поэтому, учитывая, что $\varphi_\varepsilon(\mathbf{y}_\alpha) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_\alpha) + \varepsilon$, получаем

$$N^{**} \leqslant N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant \varphi(\mathbf{y}_\alpha) + \alpha\Omega(\mathbf{y}_\alpha) + \frac{\varepsilon m}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon =$$
$$= N^* + \frac{\varepsilon m}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon m/\beta \leqslant \mathrm{const}$ и $\eta(\varepsilon)/\beta \leqslant \mathrm{const}$, то величина

$$N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) = \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \alpha\Omega(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon})$$

ограничена, и поскольку функция $N_\alpha(\mathbf{x})$ сильно выпукла на Γ при любом $\alpha > 0$, а множество Y_β ограничено в совокупности при всех $\beta \in (0, \beta_0]$ (см. теорему 6.2.10), то $\{\mathbf{y}_{\alpha\beta\varepsilon}\}$ — компакт. Пусть $\widetilde{\mathbf{y}}$ — предельная точка:

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \lim_{k\to\infty} \widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}.$$

Из неравенства

$$N^{**} \leqslant N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) + \frac{1}{\beta}\,\psi_\varepsilon(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}) \leqslant N^* + \frac{\varepsilon m}{\beta} + \frac{\eta(\varepsilon)}{\beta} + 2\varepsilon \tag{7.7}$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{\varepsilon_k}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) = 0.$$

Из утверждения 7.6.2 получаем

$$\psi(\widetilde{\mathbf{y}}) = \lim_{k\to\infty} \psi(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) \leqslant \lim_{k\to\infty} [\psi_{\varepsilon_k}(\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta_k\varepsilon_k}) + \varepsilon_k m] = 0,$$

вследствие чего $\widetilde{\mathbf{y}} \in X$. Переходя к пределу в (7.7) при $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, получаем

$$N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}) \leqslant N^* = \min_{\mathbf{x}\in X} N_\alpha(\mathbf{x}) = N_\alpha(\mathbf{y}_\alpha),$$

а значит,

$$N_\alpha(\widetilde{\mathbf{y}}) = N_\alpha(\mathbf{y}_\alpha).$$

Из единственности точки минимума $\mathbf{y}_\alpha$ сильно выпуклой функции $N_\alpha(\mathbf{x})$ на выпуклом множестве X следует $\widetilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_\alpha$. Итак, любая предельная при $\varepsilon \to 0$ точка компакта $\{\widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon}\}$ есть $\widetilde{\mathbf{y}}$, и, значит,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon} = \mathbf{y}_\alpha.$$

Из теоремы 7.4.1 следует, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbf{y}_\alpha = \mathbf{y}^0;$$

поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{\mathbf{y}}_{\alpha\beta\varepsilon} = \mathbf{y}^0. \quad \triangle$$

7.6.6. Замечание. Предыдущая теорема остается справедливой, если выбирается гладкий штраф

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} [\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}]^2,$$
$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} [\min\{f_{\varepsilon i}(\mathbf{x}), 0\}]^2;$$

при этом условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)} = 0$$

заменяется условием

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^2}{\beta(\varepsilon)} = 0.$$

Доказательство проводится по той же схеме. Отличие состоит в том, что изменяется утверждение 7.6.2, а именно для любого $\mathbf{x} \in \Gamma$ будет

$$|\psi(\mathbf{x}) - \psi_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant m\varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{m}(1 + \psi_\varepsilon(\mathbf{x})).$$

7.6.7. Так как в реальных ситуациях величина ε часто бывает неулучшаемой (не уменьшаемой), то она определяет и ту точность, выше которой вычислять точку минимума не имеет смысла (см. п. 7.6.4 и условие $\eta(\varepsilon)/\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$). Величина ε лимитирует также и выбор параметра $\beta = \beta(\varepsilon)$. Условие

$$\frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

говорит о зависимости выбора величины $\beta(\varepsilon)$ от известной величины ε.

В процессе регуляризации возникает целый ряд трудностей. Рассмотрим лишь одну из них, а именно вопрос о выборе α_0 и β_0 — начальных значений параметров регуляризации. Будем предполагать ε достаточно малой величиной. Поскольку процесс регуляризации может сходиться очень медленно (см. замечание 7.4.2), то выбор сравнительно большой величины α_0 может оказаться весьма невыгодным с точки зрения общих затрат времени на получение достаточно хорошего приближения к нормальному решению.

С другой стороны, для нахождения точки $\mathbf{y}_{\alpha_0\beta_0\varepsilon}$, как правило, используются релаксационные методы минимизации, на скорость сходимости которых существенное влияние оказывает величина параметра сильной выпуклости минимизируемой функции $\Psi_{\alpha_0\beta_0\varepsilon}(\mathbf{x})$, т. е. величина произведения $\alpha_0\beta_0$. Известно, что при убывании $\alpha\beta$ скорость сходимости релаксационных процессов понижается. Вследствие этого выбор малых значений α_0 и β_0 опять-таки может увеличить общие затраты времени на получение необходимого приближения к нормальному решению и, кроме того, может быть не оправдан с точки зрения согласования с величиной ε.

В заключение отметим, что в этой главе рассматривались вопросы устойчивости задач математического программирования. Вместе с тем важным является также вопрос устойчивости численных методов минимизации к возможным ошибкам, возникающим в процессе счета. Анализ этого читатель может найти в последующих главах настоящей книги.

Наконец, следует отметить, что параметрическая процедура регуляризации это не единственный способ отыскания нормального решения некорректных задач. Существуют и другие подходы, среди которых в первую очередь следует указать методы градиентного типа, которые позволяют, не прибегая к введению параметрического стабилизатора $\alpha\Omega$, решать исходную задачу градиентным методом, который гарантирует сходимость итерационной последовательности к нормальному решению линейной некорректной задачи.

О градиентном методе см. пп. 9.5.2–9.5.7.

ГЛАВА 8

МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

8.1. О задачах одномерной минимизации

8.1.1. Минимизация функции одного переменного является, как правило, необходимым элементом многих методов минимизации многомерных функций.

На первый взгляд кажется, что задача минимизации функции одного переменного является довольно элементарной. По-видимому, это мнение создается после первого знакомства с началами математического анализа. В самом деле, если функция $\varphi(x)$, которую нужно минимизировать на отрезке $[a, b]$, дифференцируема, то достаточно найти нули производной, присоединить к ним концы отрезка, выделить из этих точек локальные минимумы и, наконец, среди последних найти ту точку, в которой достигается абсолютный минимум.

Однако для широкого класса функций эта задача не так уж проста. Во-первых, задача решения уравнения $\varphi'(x) = 0$ может оказаться, как это и бывает в реальных ситуациях, весьма сложной. С другой стороны, в практических задачах часто не известно, является ли $\varphi(x)$ дифференцируемой функцией.

В силу этого существенное значение приобретают методы минимизации, не требующие вычисления производной.

8.1.2. Если о минимизируемой функции $\varphi(x)$ известно лишь, что она непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для определения точки минимума по сути дела требуется исследование поведения функции во всех точках отрезка. Поскольку нас интересует приближенное определение точки минимума, то для этого исследуют поведение функции в конечном числе точек, способами выбора которых различаются методы одномерной минимизации. Большинство детерминированных методов состоит в построении последовательности отрезков $[a_n, b_n]$, стягивающихся к точке $x^* = \arg\min\{\varphi(x)\colon x \in [a, b]\}$. Однако всегда можно указать такую непрерывную функцию $\varphi(x)$, что для любого конечного номера $n > 0$ отрезок $[a_n, b_n]$, построенный любым детерминированным методом, не будет содержать точку x^*, даже если известен отрезок $[a_0, b_0]$, которому принадлежит x^*. В связи с этим гаранти-

ровать принадлежность точки x^* отрезку $[a_n, b_n]$ можно лишь для определенных классов минимизируемых функций. В дальнейшем мы ограничимся классом строго унимодальных функций, а в некоторых случаях и более узким классом.

8.1.3. Строго унимодальные функции. Непрерывную функцию $\varphi(x)$ будем называть *строго унимодальной*, если существует единственная точка ее минимума x^* и

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1) > \varphi(x_2) \quad \text{для любых} \quad x_1 < x_2 \leqslant x^*, \\ &\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \quad \text{для любых} \quad x^* \leqslant x_1 < x_2. \end{aligned}$$

Таким образом, с возрастанием x функция $\varphi(x)$ слева от точки минимума монотонно убывает, а справа от этой точки монотонно возрастает.

8.1.4. Прежде чем приступить к процедуре минимизации, следует установить принадлежность целевой функции "подходящему" классу, т. е. классу, для которого гарантирована сходимость процесса. Это вовсе не означает, что попытки применения детерминированных методов для минимизации функций, принадлежность которых к "подходящему" классу либо не установлена, либо отсутствует, заведомо обречены на неудачу. Однако во многих случаях существует дополнительная информация, позволяющая установить необходимую принадлежность. Часто такая информация связана с "физическим" содержанием той реальной задачи, для которой построена исследуемая математическая модель. Заметим, что предположение о строгой унимодальности функции в окрестности точки x^*, вообще говоря, весьма естественно, вследствие чего получение информации о таком промежутке является важным предварительным этапом процедуры минимизации.

В дальнейшем нам понадобится понятие удачной тройки чисел.

8.1.5. Удачная тройка чисел. Будем обозначать $\varphi(x_i) = \varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Тройку чисел $x_1 < x_2 < x_3$ назовем *удачной*, если

$$\varphi_2 \leqslant \min\{\varphi_1, \varphi_3\}$$

и

$$\varphi_2 < \max\{\varphi_1, \varphi_3\}.$$

Последнее условие означает, что точки (x_1, φ_1), (x_2, φ_2), (x_3, φ_3) не лежат на прямой, параллельной оси абсцисс (естественно, что для строго унимодальной функции эта ситуация исключена). Таким образом, удачная тройка чисел такова, что отрезку $[x_1, x_3]$ заведомо принадлежит внутренняя его точка x^* минимума строго унимодальной функции.

8.1.6. О выборе удачной тройки чисел. В детерминированных методах минимизации обычно в результате каждого цикла появляются точки (x_1, φ_1), (x_2, φ_2), (x_3, φ_3), (x_4, φ_4) такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4,$$
$$\varphi_2 \leqslant \min\{\varphi_1, \varphi_4\}, \quad \varphi_3 \leqslant \min\{\varphi_1, \varphi_4\}.$$

Возникает вопрос о выборе удачной тройки. В силу строгой унимодальности минимизируемой функции очевидно, что при $\varphi_2 < \varphi_3$ удачной будет тройка x_1, x_2, x_3, а при $\varphi_2 > \varphi_3$ удачную тройку образуют числа x_2, x_3, x_4. Если же $\varphi_2 = \varphi_3$, то $x^* \in [x_2, x_3]$, и любая из троек x_1, x_2, x_3 и x_2, x_3, x_4 будет удачной. Целесообразно из них выбрать ту, которой соответствует наименьший из двух отрезков $[x_1, x_3]$ и $[x_2, x_4]$. Но можно поступить и иначе: одним из методов одномерной минимизации, например, делением отрезка пополам, вычислить на отрезке $[x_2, x_3]$ точку x_5. Тройка x_2, x_5, x_3 будет заведомо удачной.

Так как при численной реализации вычисления лимитируются определенной точностью, то мы можем лишь утверждать, что равенство значений φ_2 и φ_3 осуществляется с ε-точностью, т. е. $|\varphi_2 - \varphi_3| \leqslant \varepsilon$. В этом случае каждая из троек x_1, x_2, x_3 и x_2, x_3, x_4 может оказаться удачной. Тогда для соответствующего выбора целесообразно вычислить в точке $x_5 = (x_2 + x_3)/2$ значение φ_5. Если φ_5 совпадает с φ_2 и φ_3 с точностью до ε, то поиск заканчивают, полагая $x^* \sim x_5$. В противном случае удачной будет тройка x_2, x_5, x_3.

8.2. Поиск отрезка, содержащего точку минимума

8.2.1. Поиск заключается в том, что осуществляются возрастающие по величине шаги до тех пор, пока не будет пройдена точка минимума функции $\varphi(x)$.

8.2.2. Шаг 1 (нестандартный). Выбирают точку x_0 и определяют направление убывания функции $\varphi(x)$. Для этого выбирают число h и вычисляют $\varphi(x_0 + h)$. Если $\varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$, то полагают $x_1 = x_0 + h$ и переходят к шагу 2 при $k = 1$. Если $\varphi(x_0 + h) \geqslant \varphi(x_0)$, то полагают $h = -h$ и вычисляют $\varphi(x_0 + h)$. Если $\varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0)$, то полагают $x_1 = x_0 + h$ и переходят к шагу 2 при $k = 1$. Если $\varphi(x_0 + h) \geqslant \varphi(x_0)$, то полагают $h = h/2$ и повторяют процедуру предварительного шага. В результате шага 1 получают число h и точки $x_0, x_1 = x_0 + h$ такие, что $\varphi(x_1) < \varphi(x_0)$.

Шаг 2. Удваивают h и вычисляют $x_{k+1} = x_k + h$.

Шаг 3. Вычисляют φ_{k+1}. Если $\varphi_{k+1} < \varphi_k$, то полагают $k = k + 1$ и переходят к шагу 2. Если $\varphi_{k+1} \geqslant \varphi_k$, то поиск останавливают и в качестве отрезка, содержащего точку минимума, выбирают $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

8.3. Методы Фибоначчи и золотого сечения*)

8.3.1. Часто в вычислительных процедурах существенные трудности возникают в связи с вычислениями значений функций $\varphi(x)$, например, если значения $\varphi(x)$ получают в результате того или иного эксперимента либо если $\varphi(x)$ задается аналитически, но достаточно сложной для вычислений формулой. К методам, в которых при ограничениях на количество вычислений значений $\varphi(x)$ достигается в определенном смысле наилучшая точность, относятся метод Фибоначчи и метод золотого сечения.

Эти методы состоят в построении последовательности отрезков $[a_k, b_k]$, стягивающихся к точке x^* минимума функции $\varphi(x)$ на исходном отрезке $[a_0, b_0]$.

8.3.2. Схема метода. Оба метода строятся по единой схеме и различаются способами выбора параметра λ.

Шаг 1 (нестандартный). Выбирают отрезок $[a_0, b_0]$, содержащий точку x^* минимума функции $\varphi(x)$; задают точность ε, с которой желают определить точку x^*; вычисляют $\Delta_0 = b_0 - a_0$, $\Delta_1 = \lambda\Delta_0$, $1/2 < \lambda < 1$, $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1$, $y_0 = a_0 + \Delta_2$, $z_0 = b_0 - \Delta_2$, $\varphi(y_0)$, $\varphi(z_0)$ и полагают $k = 1$.

Шаг 2. а) Если $\varphi(y_{k-1}) \leqslant \varphi(z_{k-1})$, то полагают $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$, вычисляют $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $y_k = a_k + \Delta_{k+2}$, $\varphi(y_k)$ и переходят к шагу 3.

б) Если $\varphi(y_{k-1}) > \varphi(z_{k-1})$, то полагают $a_k = y_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$, $y_k = z_{k-1}$, вычисляют $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $z_k = b_k - \Delta_{k+2}$, $\varphi(z_k)$ и переходят к шагу 3.

Шаг 3. Если $\Delta_k \leqslant \varepsilon$, то полагают $x^* \sim x_k = \arg\min\{\varphi(y_k), \varphi(z_k)\}$. Если $\Delta_k > \varepsilon$, то полагают $k = k + 1$ и переходят к шагу 2.

8.3.3. Обратим внимание на то, что на каждом шаге, за исключением первого, производится только одно вычисление значения функции $\varphi(x)$.

8.3.4. Анализ метода. Выясним, каким условиям должно удовлетворять число λ, чтобы каждый отрезок $[a_k, b_k]$ содержал точку x^*, чтобы $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$ и, наконец, чтобы с возрастанием числа k эти отрезки стягивались к точке x^*.

Из условий

$$\Delta_0,\ \Delta_1 = \lambda\Delta_0,\ \Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}, \quad k = 0, 1, ..., \tag{8.1}$$

и из изложенной схемы следует

8.3.5. *Если* $\Delta_k > 0$ *для всех* $k = 0, 1, ...,$ *то*

$$\Delta_k = b_k - a_k.$$

*) Идею предлагаемого ниже изложения высказал А.Г. Тетерев в докладе на семинаре кафедры исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета.

Действительно, для $k = 0$ это следует из определения числа Δ_0. Сделаем индуктивное предположение, что $\Delta_{k-1} = b_{k-1} - a_{k-1}$. По построению $\Delta_{k+1} = b_{k-1} - z_{k-1} = y_{k-1} - a_{k-1}$. Но $\Delta_k = \Delta_{k-1} - \Delta_{k+1}$, следовательно,

$$\Delta_k = (b_{k-1} - a_{k-1}) - (b_{k-1} - z_{k-1}) = z_{k-1} - a_{k-1},$$

т. е.

$$\Delta_k = (b_{k-1} - a_{k-1}) - (y_{k-1} - a_{k-1}) = b_{k-1} - y_{k-1}.$$

Если имеет место п. а) шага 2, то $b_k = z_{k-1}$, и $a_k = a_{k-1}$; поэтому $\Delta_k = b_k - a_k$. Если же имеет место п. б), то $b_k = b_{k-1}$, $a_k = y_{k-1}$, вследствие чего $\Delta_k = b_k - a_k$. $\triangle$

8.3.6. Если $\Delta_m = 0$, то $\Delta_{m-1} = \Delta_{m-2}$, и, следовательно, $y_{m-3} = z_{m-3}$, вследствие чего процесс построения отрезков $[a_k, b_k]$ останавливают при $k = m - 2$.

8.3.7. Из (8.1) по индукции легко получить

$$\Delta_k = \Delta_k(\lambda) = (-1)^{k-1}(F_k\lambda - F_{k-1})\Delta_0, \quad k = 2, 3, ..., \tag{8.2}$$

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 2, 3, ... \tag{8.3}$$

8.3.8. Числа F_k, удовлетворяющие условиям (8.3), называются *числами Фибоначчи.* Приведем первые из них: $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$, $F_{11} = 89$, $F_{12} = 144$ и т. д. Для дальнейших рассмотрений нам понадобятся некоторые сведения о свойствах чисел Фибоначчи.

8.3.9. Имеет место *формула Бинэ*

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right], \quad k = 1, 2, ...$$

(см. [6]).

8.3.10. Справедливо соотношение

$$F_{k+1}^2 = F_k F_{k+2} + (-1)^k, \quad k = 1, 2, ..., \tag{8.4}$$

которое легко доказывается индукцией по k.

8.3.11. Пусть $\lambda_{k+1} = F_k/F_{k+1}$ $(k = 1, 2, ...)$. Используя формулу Бинэ, получаем

$$\lambda_{k+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\frac{1 + (-1)^k\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{1 + (-1)^{k+1}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}},$$

откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

8.3.12. Из определения числа λ_k и формулы (8.4) имеем

$$\lambda_k - \lambda_{k+1} = \frac{F_{k-1}F_{k+1} - F_k^2}{F_k F_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}, \quad k = 2, 3, ...$$

8.3.13. В силу этого

$$\lambda_{2m+2} < \lambda_{2m}, \quad m = 1, 2, ..., \quad \text{и} \quad \lambda_{2m+1} > \lambda_{2m-1}, \quad m = 1, 2, ...$$

8.3.14. *Пусть* $k \leqslant n$. *Тогда* $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$, *если* $\lambda_n = F_{n-1}/F_n$, *и*

$$\begin{aligned} &\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}, \quad \textit{если } n \textit{ нечетное}, \\ &\lambda_{n+1} < \lambda < \lambda_n, \quad \textit{если } n \textit{ четное}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Действительно, из схемы метода и из 8.3.5 следует, что условие $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}]$ эквивалентно условию

$$0 < \Delta_k(\lambda) < \Delta_{k-1}(\lambda). \tag{8.6}$$

Если k нечетное, то из (8.2) получаем: для того чтобы $\Delta_k(\lambda) > 0$, должно выполняться неравенство $\lambda > \lambda_k$, а для того чтобы $\Delta_k(\lambda) < \Delta_{k-1}(\lambda)$, должно быть $\lambda < \lambda_{k+1}$. При четном k аналогично получаем $\lambda_{k+1} < \lambda < \lambda_k$. Итак, следующие неравенства гарантируют справедливость условия (8.6):

$$\begin{aligned} &\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}, \quad \text{если } k \text{ нечетное}, \quad k \leqslant n, \\ &\lambda_{k+1} < \lambda < \lambda_k, \quad \text{если } k \text{ четное}, \quad k \leqslant n. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Из пп. 8.3.13 и 8.3.11 следует, что при $m \to \infty$ $\lambda_{2m+1} \uparrow \overline{\lambda}$, $\lambda_{2m} \downarrow \overline{\lambda}$, $\overline{\lambda} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; поэтому, если выполняются условия (8.5), то выполняются и условия (8.7), а значит, и (8.6). Из схемы метода видно, что каждый из отрезков $[a_k, b_k]$ содержит точку x^*. $\triangle$

8.3.15. Справедливо следующее утверждение: *при* $\lambda = \overline{\lambda}$ *изложенный метод порождает бесконечную последовательность вложенных отрезков* $[a_k, b_k]$, *стягивающихся к точке* x^*.

Действительно, так как $\overline{\lambda}^2 = 1 - \overline{\lambda}$, то индукцией по n из (8.1) получаем

$$\Delta_n(\overline{\lambda}) = \overline{\lambda}^n \Delta_0 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \Delta_0 < 0{,}7^n \Delta_0.$$

Поэтому $\Delta_n(\overline{\lambda}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Наконец, из принадлежности точки x^* всем отрезкам $[a_n, b_n]$ вытекает заключительная часть утверждения. $\triangle$

8.3.16. Метод золотого сечения. Изложенный выше метод при $\lambda = \overline{\lambda}$ называется *методом золотого сечения.* Поясним название. Говорят, что точка y_k *осуществляет золотое сечение отрезка* $[a_k, b_k]$, если

$$\frac{b_k - a_k}{b_k - y_k} = \frac{b_k - y_k}{y_k - a_k}.$$

Нетрудно показать (проверьте), что при $\lambda = \overline{\lambda}$ каждая из точек y_k и z_k, построенных по схеме метода, осуществляет золотое сечение:

$$\frac{b_k - a_k}{b_k - y_k} = \frac{b_k - y_k}{y_k - a_k} = \frac{b_k - a_k}{z_k - a_k} = \frac{z_k - a_k}{b_k - z_k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

8.3.17. Поставим теперь следующий вопрос: при каких значениях параметра λ через конечное число шагов мы получим отрезок $[a_k, b_k]$ наименьшей длины?

Утверждение. *Если* $\lambda = \lambda_n$, *то для любых* λ, *удовлетворяющих условиям* (8.5), *выполняются неравенства*

$$0 < \Delta_{n-2}(\lambda_n) < \Delta_{n-2}(\lambda).$$

Действительно, из (8.2) получаем

$$\Delta_{n-2}(\lambda_n) - \Delta_{n-2}(\lambda) = (-1)^{n-3} F_{n-2}(\lambda_n - \lambda)\Delta_0.$$

Если n нечетно, то из (8.5) следует, что $\lambda_n < \lambda$, т. е. $\Delta_{n-2}(\lambda_n) - \Delta_{n-2}(\lambda_n) < 0$. А так как при четном n в силу (8.5) будет $\lambda_n > \lambda$, то $\Delta_{n-2}(\lambda_n) - \Delta_{n-2}(\lambda) < 0$. $\triangle$

8.3.18. Делать больше чем $n - 2$ шагов при $\lambda = \lambda_n$ не имеет смысла. Поскольку $\Delta_n(\lambda_n) = 0$, $\Delta_{n-1}(\lambda_n) = \Delta_{n-2}(\lambda_n)$, то $y_{n-1} = z_{n-1}$, вследствие чего процесс останавливают на $(n-2)$-м шаге.

8.3.19. Оптимальность метода Фибоначчи. Этот метод, когда $\lambda = \lambda_n$, называют *методом Фибоначчи.* В смысле утверждения п. 8.3.17 он является оптимальным.

8.3.20. Чувствительность метода к ошибкам. Численная реализация обоих методов обладает существенным недостатком. Дело в том, что приближенные значения чисел $\overline{\lambda}$ и λ_n порождают такое накопление ошибок, которое довольно быстро может привести к нарушению условий вложенности отрезков $[a_k, b_k]$ и тем самым к расходимости процесса. В самом деле, пусть $\widehat{\lambda}$ удовлетворяет условиям (8.5). Рассмотрим $\lambda = \widehat{\lambda} + \delta$. Из (8.2) имеем

$$\Delta_k(\lambda) = (-1)^{k-1}(F_k\lambda - F_{k-1})\Delta_0 = \Delta_k(\widehat{\lambda}) + (-1)^{k-1}\delta F_k \Delta_0. \qquad (8.8)$$

Поскольку выполняются неравенства $0 < \Delta_k(\widehat{\lambda}) < \Delta_{k-1}(\widehat{\lambda})$, то последовательность $\{\Delta_k(\widehat{\lambda})\}$ сходится при $k \to \infty$. В то же время $F_k \to +\infty$, поэтому $|\Delta_k(\lambda)| \to +\infty$.

Известно, что числа Фибоначчи растут со скоростью геометрической прогрессии, знаменателем которой является число $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1{,}618$. Вследствие этого при фиксированной точности "раскачка" процесса наступает довольно быстро.

8.3.21. Выбор числа n. Определим по заданному ε число n, необходимое для того, чтобы гарантировать неравенство $\Delta_{n-2} \leqslant \varepsilon$.

Для этого вначале докажем справедливость формулы

$$\Delta_k(\lambda_n) = \frac{F_{n-k}}{F_n}\,\Delta_0, \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{8.9}$$

Пусть $k = n - l \quad (l = \overline{1, n-1})$. Покажем, что

$$\Delta_{n-l}(\lambda_n) = \frac{F_l}{F_n}\,\Delta_0, \quad l = \overline{1, n-1}. \tag{8.10}$$

Из (8.2), воспользовавшись соотношением (8.4), получаем

$$\Delta_{n-l}(\lambda_n) = (-1)^{n-2}\frac{F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2}}{F_n}\,\Delta_0 = \frac{1}{F_n}\,\Delta_0 = \frac{F_1}{F_n}\,\Delta_0.$$

Поскольку $\Delta_n(\lambda_n) = 0$, то из (8.1) следует $\Delta_{n-2}(\lambda_n) = \Delta_{n-1}(\lambda_n) = \dfrac{1}{F_n}\,\Delta_0 = \dfrac{F_2}{F_n}\,\Delta_0$. Из той же формулы (8.1) имеем $\Delta_{n-l} = \Delta_{n-l+1} + \Delta_{n-l+2}$. Отсюда индукцией по l убеждаемся в справедливости равенства (8.10), а значит, и (8.9). $\triangle$

Таким образом, для достижения ε-точности результата число n следует выбирать из соотношения

$$\Delta_{n-2}(\lambda_n) = \frac{1}{F_n}\Delta_0 \leqslant \varepsilon.$$

8.3.22. О согласовании точности в методе Фибоначчи. Теперь обратимся к естественной ситуации, когда число λ_n определяется приближенно: $\lambda = \lambda_n + \delta$.

Из (8.8) и (8.9) получаем

$$\Delta_k(\lambda) = \frac{F_{n-k}}{F_n}\,\Delta_0 + (-1)^{k-1}\delta F_k \Delta_0. \tag{8.11}$$

Отсюда ясно, что для достижения желаемого результата точность δ вычисления величины λ_n следует согласовывать с заданной точностью ε определения длины отрезка $[a_{n-2}, b_{n-2}]$. А именно, если n выбирается таким образом, чтобы было

$$\frac{1}{F_n}\,\Delta_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

то для гарантированности неравенства $\Delta_{n-2}(\lambda) \leqslant \varepsilon$ должно быть

$$|\delta| \leqslant \frac{\varepsilon}{2F_{n-2}\Delta_0}.$$

8.3.23. О согласовании точности в методе золотого сечения. Рассмотрим случай, когда $\lambda = \overline{\lambda} + \delta$, $\overline{\lambda} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Из п. 8.3.15 имеем

$$\Delta_k(\overline{\lambda}) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k \Delta_0. \tag{8.12}$$

Отсюда и из (8.8) следует

$$\Delta_k(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k \Delta_0 + (-1)^{k-1}\delta F_k \Delta_0, \tag{8.13}$$

и при

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^k \Delta_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |\delta| \leqslant \frac{\varepsilon}{2F_k\Delta_0}$$

будет $\Delta_k(\lambda) \leqslant \varepsilon$.

8.3.24. Еще раз о неустойчивости. Очевидно, что при ограниченных возможностях точности вычислений число n невелико, и ожидаемая ε-точность результата может не быть достигнута, если пользоваться предложенной схемой. В этом смысле *оба метода не являются устойчивыми по отношению к ошибкам в определении допустимых значений параметра* λ.

8.3.25. Модификация метода. В случае если величина δ, определяющая точность вычисления λ_n, задана и при этом условия согласованности ε и δ (см. пп. 8.3.22 и 8.3.23) не выполняются, можно таким образом модифицировать метод, чтобы процесс стал устойчивым.

Как мы уже видели (см. п. 8.3.14), условия $0 < \Delta_{k+1}(\lambda) < \Delta_k(\lambda)$ гарантируют соотношение $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Из (8.11) следует

$$\Delta_k(\lambda) - \Delta_{k+1}(\lambda) = \frac{F_{n-k-2}}{F_n}\Delta_0 + (-1)^{k-1}\delta F_{k+2}\Delta_0,$$

и при $k = n-3$ получаем, что $\Delta_{n-2}(\lambda) < \Delta_{n-3}(\lambda)$, если

$$|\delta| < \frac{1}{F_n F_{n-1}}. \tag{8.14}$$

Таким образом, условие (8.14) обеспечивает соотношения

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k], \quad k = \overline{0, n-3}.$$

Выберем

$$n = \arg\max\left\{k\colon\ |\delta| < \frac{1}{F_k F_{k-1}}\right\} \tag{8.15}$$

и осуществим $n-2$ шагов по схеме метода. Затем положим $n-2=0$ и перейдем к шагу 1. Таким образом, после $n-2$ шагов мы осуществляем обновление процесса, т. е. полагаем $a_{n-2}=a_0$, $b_{n-2}=b_0$, вычисляем $\Delta_0=b_0-a_0$, $\Delta_1=\lambda\Delta_0$, $\Delta_2=\Delta_0-\Delta_1$, y_0, z_0, $\varphi(y_0)$, $\varphi(z_0)$ и переходим к шагу 2. После каждого такого цикла, состоящего из $n-2$ шагов, мы получаем, учитывая (8.11) и (8.15),

$$\Delta_{n-2}(\lambda)=\frac{F_2}{F_n}\Delta_0+(-1)^{n-3}\delta F_{n-2}\Delta_0\leqslant\frac{\Delta_0}{F_n}+|\delta|F_{n-2}\Delta_0<$$
$$<\frac{\Delta_0}{F_n}+\frac{F_{n-2}}{F_nF_{n-1}}\Delta_0=\frac{\Delta_0}{F_n}\Big(1+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\Big)\leqslant\frac{2}{F_n}\Delta_0;$$

после p циклов будет

$$\Delta_{p(n-2)}(\lambda)<\Big(\frac{2}{F_n}\Big)^p\Delta_0.$$

Очевидно, что $\Delta_{p(n-2)}(\lambda)\to 0$ при $p\to\infty$, если $n\geqslant 3$.

Заметим, что на каждом цикле вычисляют $n-1$ значений минимизируемой функции; поэтому общее число таких вычислений составит $pn-p$, в то время как в “идеальной” схеме метода 8.3.2 на $p(n-2)$ шагах происходит $pn-2p-1$ вычислений.

8.3.26. Для метода золотого сечения при $\lambda=\overline{\lambda}+\delta$ получаем из (8.13)

$$\Delta_k(\lambda)-\Delta_{k+1}(\lambda)=\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{k+2}\Delta_0+(-1)^{k-1}\delta F_{k+2}\Delta_0,$$

и при

$$|\delta|<\frac{1}{F_{k+2}}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{k+2}\tag{8.16}$$

будет $[a_{i+1},b_{i+1}]\subset[a_i,b_i]\quad(i=\overline{0,k})$.

Выберем

$$n=\arg\max\Big\{k\colon\ |\delta|<\frac{1}{F_{k+1}}\Big(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big)^{k+2}\Big\}\tag{8.17}$$

и осуществим n шагов по схеме метода. Затем положим $n=0$ и перейдем к шагу 1. Очевидно, что аналогично предыдущему пункту будет $\Delta_{pn}(\lambda)\to 0$ при $p\to\infty$.

8.3.27. Однако накопление ошибок может привести к очень медленному убыванию величины Δ_k даже при выборе числа n из условий (8.15) и (8.17). Поэтому может наступить момент, когда продолжение процесса становится “нерентабельным”.

Выясним скорость убывания величины Δ_k в идеальной схеме. Из (8.9) следует, что

$$\Delta_{k+1}(\lambda_n)=\lambda_{n-k}\Delta_k(\lambda_n).$$

В частности,

$$\begin{aligned}
&\Delta_{n-2}(\lambda_n) = 0{,}5\,\Delta_{n-3}(\lambda_n),\\
&\Delta_{n-3}(\lambda_n) \sim 0{,}67\,\Delta_{n-4}(\lambda_n),\\
&\Delta_{n-4}(\lambda_n) = 0{,}6\,\Delta_{n-5}(\lambda_n),\\
&\Delta_{n-5}(\lambda_n) \sim 0{,}62\,\Delta_{n-6}(\lambda_n),\\
&\Delta_{n-6}(\lambda_n) \sim 0{,}62\,\Delta_{n-7}(\lambda_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Из (8.12) следует

$$\Delta_{k+1}(\overline{\lambda}) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\Delta_k(\overline{\lambda}) \sim 0{,}62\,\Delta_k(\overline{\lambda}).$$

В связи с этим целесообразно выбрать число $0{,}62 < \lambda < 1$, например, $\alpha = 0{,}8$, и до тех пор, пока $\Delta_{k+1} \leqslant \alpha\Delta_k$, процесс продолжать. При $\Delta_{k+1} > \alpha\Delta_k$ цикл закончить и произвести обновление, т. е. положить $k = 0$ и перейти к шагу 1.

8.3.28. Модифицированный алгоритм золотого сечения.

Шаг 1. Выбрать отрезок $[a_0, b_0]$, задать точность ε определения точки x^*, выбрать число $\alpha \in [0{,}7;\ 0{,}9]$.

Шаг 2. Вычислить $\Delta_0 = b_0 - a_0$, $\Delta_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\Delta_0$, $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1$, $y_0 = a_0 + \Delta_2$, $z_0 = b_0 - \Delta_2$, $\varphi(y_0)$, $\varphi(z_0)$ и положить $k = 1$.

Шаг 3. а) Если $\varphi(y_{k-1}) \leqslant \varphi(z_{k-1})$, положить $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_{k-1}$, $z_k = y_{k-1}$, вычислить $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $y_k = a_k + \Delta_{k+2}$. При $y_k < z_k$ вычислить $\varphi(y_k)$ и перейти к шагу 4. При $y_k \geqslant z_k$ положить $a_0 = a_k$, $b_0 = b_k$ и перейти к шагу 2.

б) Если $\varphi(y_{k-1}) > \varphi(z_{k-1})$, положить $a_k = y_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$, $y_k = z_{k-1}$, вычислить $\Delta_{k+2} = \Delta_k - \Delta_{k+1}$, $z_k = b_k - \Delta_{k+2}$. При $z_k > y_k$ вычислить $\varphi(z_k)$ и перейти к шагу 4. При $z_k \leqslant y_k$ положить $a_0 = a_k$, $b_0 = b_k$ и перейти к шагу 2.

Шаг 4. а) Если $\Delta_k \leqslant \varepsilon$, закончить поиск, положив

$$x^* \sim x_k = \arg\min\{\varphi(y_k), \varphi(z_k)\}.$$

б) Если $\varepsilon < \Delta_k \leqslant \alpha\Delta_{k-1}$, перейти к шагу 3 при $k = k + 1$.

в) Если $\Delta_k > \varepsilon$ и $\Delta_k > \alpha\Delta_{k-1}$, положить $a_0 = a_k$, $b_0 = b_k$ и перейти к шагу 2.

8.4. Метод парабол

8.4.1. Идея метода весьма прозрачна: если на отрезке $[a, b]$ с внутренней точкой $x^* = \arg\min\{\varphi(x)\colon x \in [a, b]\}$ функция $\varphi(x)$ достаточно хорошо аппроксимируется многочленом второй степени, то за приближенное значение x^* целесообразно взять точку минимума этого многочлена. Естественно, что высказанное предположение должно подкрепляться разумными доводами. В случае когда функция гладкая и

строго унимодальная, можно предполагать, что в окрестности точки x^* она, вообще говоря, весьма близка к параболе. В силу этого метод парабол целесообразно применять после того, как найден отрезок достаточно малой длины, содержащий x^*, например, после того, как найдены $[a_k, b_k]$ и $x_k = \arg\min\{\varphi(y_k), \varphi(z_k)\}$ в результате k шагов по методу золотого сечения.

8.4.2. Пусть известна удачная тройка чисел (в смысле определения 8.1.5) x_1, x_2, x_3. Многочлен второго порядка, график которого проходит через точки (x_1, φ_1), (x_2, φ_2), (x_3, φ_3), достигает минимального значения в точке

$$\widetilde{x} = x_2 - \frac{1}{2}\frac{(x_2 - x_1)^2(\varphi_2 - \varphi_3) - (x_3 - x_2)^2(\varphi_2 - \varphi_1)}{(x_2 - x_1)(\varphi_2 - \varphi_3) - (x_3 - x_2)(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{8.18}$$

В этом можно элементарно убедиться, если построить по упомянутым трем точкам интерполяционный многочлен и найти его точку минимума. Также несложно показать, что $\widetilde{x} \in [x_1, x_3]$, проверив соотношение

$$|\widetilde{x} - x_2| \leqslant \frac{1}{2}\max\{x_2 - x_1, x_3 - x_2\}.$$

8.4.3. Схема метода. Предполагается, что известны удачная тройка чисел x_1, x_2, x_3, соответствующие ей значения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и задана точность ε определения интервала, содержащего точку x^*.

Шаг 1. Вычислить $\widetilde{x}$ по формуле (8.18).

Шаг 2. Если $|\widetilde{x} - x_2| \leqslant \varepsilon$, закончить поиск, положив $x^* \sim \widetilde{x}$. Если $|\widetilde{x} - x_2| > \varepsilon$, то вычислить $\varphi(\widetilde{x})$.

Шаг 3. Пользуясь способом п. 8.1.6, из чисел x_1, x_2, x_3 и $\widetilde{x}$ выбрать удачную тройку и перейти к шагу 1.

8.5. Метод кубической аппроксимации

8.5.1. Метод используется для минимизации дифференцируемой функции $\varphi(x)$, когда есть основания полагать, что $\varphi(x)$ достаточно хорошо аппроксимируется на заданном отрезке $[a, b]$ многочленом третьей степени. В этом случае производная аппроксимирующей функции является многочленом второго порядка, и, следовательно, задача сводится к нахождению корня квадратного трехчлена, принадлежащего отрезку $[a, b]$.

8.5.2. Пусть известен отрезок $[a, b]$, содержащий точку минимума $\varphi(x)$, причем $\varphi(x) \sim P_3(x)$ на $[a, b]$. Предположим, что $P_3'(x) = P_2(x) \sim \varphi'(x)$ на рассматриваемом отрезке. Легко проверить, что $P_2(x)$ обращается в нуль в точке

$$\widetilde{x} = b - \frac{(z + \varphi'(b) - w)\lambda}{\varphi'(b) + 2z + \varphi'(a)}, \tag{8.19}$$

где

$$\lambda = b - a, \quad z = \frac{3[\varphi(a) - \varphi(b)]}{\lambda} + \varphi'(a) + \varphi'(b),$$
$$w = \sqrt{z^2 - \varphi'(a)\varphi'(b)}.$$

8.5.3. Схема метода. Предполагается, что известны значения $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi'(a)$ и $\varphi'(b)$, причем $\varphi'(a) < 0$, $\varphi'(b) > 0$. Пусть также заданы числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Шаг 1. Если $\lambda \leqslant \varepsilon_1$, то полагают $x^* \sim b$ и заканчивают поиск. В противном случае вычисляют $\widetilde{x}$ по формуле (8.19).

Шаг 2. Вычисляют $\varphi(\widetilde{x})$ и $\varphi'(\widetilde{x})$. Если $|\varphi'(\widetilde{x})| \leqslant \varepsilon_2$, то полагают $x^* \sim \widetilde{x}$ и заканчивают поиск. В противном случае переходят к шагу 3.

Шаг 3. Если $\varphi'(\widetilde{x}) < -\varepsilon_2$, то полагают $a = \widetilde{x}$, $\varphi(a) = \varphi(\widetilde{x})$, $\varphi'(a) = \varphi'(\widetilde{x})$ и переходят к шагу 1. Если $\varphi'(\widetilde{x}) > \varepsilon_2$, то полагают $b = \widetilde{x}$, $\varphi(b) = \varphi(\widetilde{x})$, $\varphi'(b) = \varphi'(\widetilde{x})$ и переходят к шагу 1.

8.6. Метод касательных

8.6.1. Идея метода. Этот метод может оказаться весьма эффективным для минимизации выпуклых функций.

Будем предполагать, что функция $\varphi(x)$ выпукла и непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Обозначим через $\varphi_l(x, y)$ следующую линейную по x функцию, определенную в точке y:

$$\varphi_l(x, y) = \varphi(y) + \varphi'(y)(x - y).$$

Метод состоит в следующем. Выбирают произвольную точку $x_0 \in [a, b]$ и строят функцию $\varphi_l(x, x_0)$. Для вычисления точки x_1 решают следующую задачу:

$$\min \xi$$

при условиях

$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_0),$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Обозначим через ξ_1, x_1 решение этой задачи. Для отыскания точки x_2 строят функцию $\varphi(x, x_1)$ и вычисляют ξ_2, x_2 — решение задачи:

$$\min \xi$$

при условиях

$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_0),$$
$$\xi \geqslant \varphi_l(x, x_1),$$
$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть вычислены точки $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$. Для того чтобы найти x_k, решают задачу:

$$\min \xi \tag{8.20}$$

при условиях

$$\begin{gathered} \xi \geqslant \varphi_l(x, x_0), \\ \xi \geqslant \varphi_l(x, x_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi \geqslant \varphi_l(x, x_{k-1}), \\ a \leqslant x \leqslant b. \end{gathered} \tag{8.21}$$

Пусть

$$\psi_{k-1}(x) = \max\{\varphi_l(x, x_0), \varphi_l(x, x_1), ..., \varphi_l(x, x_{k-1})\}, \tag{8.22}$$

или, что то же самое,

$$\psi_{k-1}(x) = \max\{\psi_{k-2}(x), \varphi_l(x, x_{k-1})\}. \tag{8.23}$$

Нетрудно убедиться, что при $\varphi'(x_{k-1}) \neq 0$ задача (8.20), (8.21) эквивалентна задаче отыскания такой точки $x_k \in [a, b]$, что

$$\psi_{k-1}(x_k) = \min_{x \in [a,b]} \psi_{k-1}(x). \tag{8.24}$$

Из рис. 8.1 видно, что для вычисления каждой точки x_k достаточно найти на каждом шаге две новые вершины ломаной $\psi_{k-1}(x)$ (на рисунке ломаная ACB изображает график функции $\psi_1(x)$, а ломаная $ADEB$ — график функции $\psi_2(x)$).

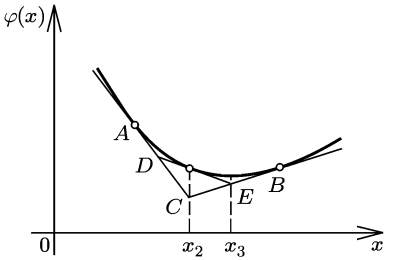

Рис. 8.1

8.6.2. Свойства функции $\psi_{k-1}(x)$. Из выпуклости функции $\varphi(x)$ следует, что

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(y) + \varphi'(y)(x - y),$$

вследствие чего получаем неравенство

$$\varphi_l(x, x_i) \leqslant \varphi(x)$$

для всех $i = 0, 1, ..., k-1$ и любого $x \in [a, b]$. Поэтому

$$\varphi(x) \geqslant \max\{\varphi_l(x, x_0), \varphi_l(x, x_1), ..., \varphi_l(x, x_{k-1})\},$$

и, значит, в силу (8.22) для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\psi_{k-1}(x) \leqslant \varphi(x). \tag{8.25}$$

Отсюда, а также из определения функции $\varphi_l(x, y)$ и соотношения (8.22) следует, что

$$\varphi(x_i) = \varphi_l(x_i, x_i) \leqslant \psi_{k-1}(x_i) \leqslant \varphi(x_i),$$

т. е.

$$\psi_{k-1}(x_i) = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, k-1}. \tag{8.26}$$

8.6.3. Обоснование сходимости метода. Будем предполагать, что $\varphi'(x_k) \neq 0$ при всех $k = 0, 1, ...$, поскольку в противном случае x_k является точкой минимума, и процесс на этом шаге оканчивается.

Теорема. *Для выпуклой и непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $\varphi(x)$ метод касательных сходится*:

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x_{k+1}) = \varphi(x^*) = \min_{x\in[a,b]} \varphi(x).$$

Если точка минимума x^* единственна, то

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

Доказательство. Из (8.23)–(8.25) имеем

$$\psi_{k-1}(x_k) = \min_{x\in[a,b]} \psi_{k-1}(x) \leqslant \psi_{k-1}(x_{k+1}) \leqslant \psi_k(x_{k+1}) =$$
$$= \min_{x\in[a,b]} \psi_k(x) \leqslant \psi_k(x^*) \leqslant \varphi(x^*).$$

Таким образом, последовательность $\{\psi_k(x_{k+1})\}$ монотонно возрастающая и ограниченная сверху, вследствие чего существует

$$\psi^* = \lim_{k\to\infty} \psi_k(x_{k+1}).$$

Из предыдущего неравенства следует, что

$$\psi^* \leqslant \varphi(x^*). \tag{8.27}$$

Докажем, что $\psi^* = \varphi(x^*)$. Пусть

$$L = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|.$$

Заметим, что в силу выпуклости функции $\varphi(x)$ будет

$$L = \max\{|\varphi'(a)|, |\varphi'(b)|\},$$

и ломаная $\psi_k(x)$ будет удовлетворять условию Липшица на отрезке $[a, b]$ с константой Липшица L.

Так как $x_k \in [a, b]$ $(k = 0, 1, ...)$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$:

$$\overline{x} = \lim_{i\to\infty} x_{k_i}.$$

Из того, что

$$\psi_{k_i-1}(x_{k_i}) = \min_{x\in[a,b]} \psi_{k_i-1}(x) \leqslant \psi_{k_i-1}(x_{k_i-1}),$$

в силу условия Липшица для функции $\psi_{k_i-1}(x)$ получаем

$$0 \leqslant \psi_{k_i-1}(x_{k_i-1}) - \psi_{k_i-1}(x_{k_i}) \leqslant L|x_{k_i-1} - x_{k_i}|.$$

Можно считать, что $k_1 < k_2 < ... < k_i < ...$ Тогда $k_{i-1} \leqslant k_i - 1$ и, значит (см. (8.26)),

$$\psi_{k_i-1}(xk_{i-1}) = \varphi(xk_{i-1}).$$

Поэтому

$$0 \leqslant \varphi(xk_{i-1}) - \psi_{k_i-1}(x_{k_i}) \leqslant L|xk_{i-1} - x_{k_i}|.$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$, приходим к неравенству

$$0 \leqslant \varphi(\overline{x}) - \psi^* \leqslant 0,$$

откуда и следует $\varphi(\overline{x}) = \psi^*$. Но $\varphi(x^*) \leqslant \varphi(\overline{x})$, поэтому $\varphi(x^*) \leqslant \psi^*$. Таким образом, в силу неравенства (8.27)

$$\psi^* = \varphi(x^*).$$

Первая часть теоремы доказана. Второе утверждение теоремы является очевидным следствием того, что любая предельная точка $\overline{x}$ последовательности $\{x_k\}$ такова, что

$$\varphi(\overline{x}) = \varphi(x^*) = \min_{x\in[a,b]} \varphi(x). \quad \triangle$$

8.6.4. Негладкий случай. Метод касательных применим и для одномерной минимизации выпуклых функций, свободных от требований непрерывной дифференцируемости. Поскольку выпуклая функция $\varphi(x)$ имеет в каждой внутренней точке y отрезка $[a,b]$ левостороннюю производную $\varphi'(y-0)$ и правостороннюю производную $\varphi'(y+0)$, то метод касательных может быть следующим образом приспособлен и для этого случая. В качестве линейной функции $\varphi_l(x, x_i)$ будем выбирать следующую функцию:

$$\varphi_l(x, x_i) = \varphi(x_i) + \gamma_i(x - x_i),$$

где γ_i — любое число из отрезка $[\varphi'(x_i-0), \varphi'(x_i+0)]$. В частности, γ_i можно выбирать из условия

$$|\gamma_i| = \min\{|\varphi'(x_i-0)|, |\varphi'(x_i+0)|\}.$$

Дальнейшая конструкция метода остается прежней. Теорема о сходимости остается справедливой и в этом случае.

8.6.5. Схема метода. Алгоритм позволяет найти точку минимума выпуклой и дифференцируемой функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заранее заданной точностью ε.

Шаг 1 (нестандартный). Положить $a_1 = a$, $b_1 = b$, вычислить $\varphi(a_1)$, $\varphi(b_1)$, $\varphi'(a_1)$, $\varphi'(b_1)$ и перейти к шагу 2 при $k = 1$.

Шаг 2. Если $(b_k - a_k)/2 \leqslant \varepsilon$, то поиск окончить и положить $x^* \sim \sim \arg\min\{\varphi(a_k), \varphi(b_k)\}$.

Если $(b_k - a_k)/2 > \varepsilon$, то вычислить *)

$$x_k = \frac{[\varphi'(b_k)b_k - \varphi'(a_k)a_k] - [\varphi(b_k) - \varphi(a_k)]}{\varphi'(b_k) - \varphi'(a_k)},$$

$\varphi(x_k), \varphi'(x_k)$. Если $\varphi'(x_k) = 0$, то $x^* = x_k$. Поиск окончен. Если $\varphi'(x_k) < < 0$, то положить $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$. Если $\varphi'(x_k) > 0$, то положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$.

*) Легко видеть, что x_k является точкой пересечения прямых $y = \varphi(a_k) + + \varphi'(a_k)(x - a_k)$ и $y = \varphi(b_k) + \varphi'(b_k)(x - b_k)$.

ГЛАВА 9

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

9.1. Вопросы сходимости и устойчивости. Релаксационные процессы

9.1.1. Прежде чем приступить к решению конкретной экстремальной задачи, следует выяснить вопрос, какому из методов минимизации отдать предпочтение в данном случае. Для этого необходимо уметь сравнивать методы. Один путь — сравнивать на основании опыта и достаточного числа экспериментов — путь, без которого не обходится ни один специалист, использующий современную вычислительную технику для решения прикладных задач. Другой путь, никак не исключающий первый, — сравнивать качество методов на определенных классах задач. И здесь обнаруживается важная роль априорных характеристик методов. Эти характеристики должны учитывать многие факторы, в том числе трудоемкость вычислений, скорость сходимости, устойчивость метода к ошибкам в вычислениях, время (продолжительность) счета и ряд других. Пока еще не поставлена задача об исчерпывающей характеристике метода, но ясно, что одной из важных ее компонент явится вопрос о сходимости.

9.1.2. О скорости сходимости. Термин “скорость сходимости” всюду в этой книге понимается в классическом смысле, т. е. как сравнение отклонения m-го приближения от точного решения с некоторой функцией числа m. Предположим, что для определенного класса задач некоторый метод A обеспечивает более быструю сходимость последовательных приближений, чем метод B. Тогда для того, чтобы убедиться, что это имеет место и для конкретной экстремальной задачи, необходимо установить ее принадлежность соответствующему классу. Но и это в реальных ситуациях — дело весьма непростое. Оказывается, что экстремальные задачи имеют своей целью дать возможность проникнуть в сущность того или иного явления и принять в определенном смысле наилучшее решение для управления самим явлением. Однако, как правило, информация об изучаемом явлении

неполна и, следовательно, неполна информация об исходных величинах — параметрах соответствующей математической модели. И все-таки, во-первых, определенная информация о задаче содержится в самой ее постановке в силу наших знаний о "физической" стороне изучаемого явления и благодаря имеющимся сведениям об оценках точности входных данных. Во-вторых, в процессе решения экстремальной задачи наши сведения о ней все более пополняются; таким образом, все более проясняется ее принадлежность определенному классу. Стало быть, накапливаемая информация и априорные характеристики позволяют своевременно оценить достоинства и недостатки определенного метода в применении к конкретной задаче и, следовательно, внести элементы управления в процедуру поиска решения.

Заметим, что оценки скорости сходимости, как правило, удается получить лишь для вполне определенных классов минимизируемых функций. Однако эти оценки несут в себе существенную информацию о методах и являются путеводителем для экспериментальной их проверки в применении к другим классам функций.

9.1.3. Предположения. Ниже рассматриваются различные методы решения экстремальных задач и исследуются вопросы их сходимости и устойчивости для достаточно гладких функций, принадлежащих классу $C^{1,1}(X)$, т. е. функций, градиенты которых удовлетворяют условию Липшица. Оценки скорости сходимости изучаемых методов устанавливаются при дополнительном предположении, а именно предположении о выпуклости минимизируемой функции и допустимого множества.

9.1.4. Об устойчивости методов минимизации. Если для некоторого метода существуют априорные оценки, устанавливающие порядок скорости сходимости, например, сравнивающие величину отклонения m-го приближения от точного решения с величиной $O(1/m^{\alpha})$ (здесь число α определяет порядок сходимости), то метод назовем *устойчивым по отношению к выбору направления спуска и величины шага* в том случае, если метод допускает приближенное определение этих параметров, не меняющее порядка сходимости. Если установлен факт сходимости метода, но оценки скорости отсутствуют, устойчивым по отношению к выбору направления спуска и величины шага будем называть метод, допускающий приближенное определение этих параметров, не нарушающее сходимости процесса минимизации. Из дальнейшего будет ясно, что методы скорейшего спуска, проекции градиента, условного градиента, возможных направлений являются устойчивыми.

9.1.5. Понятие о релаксационном процессе. Рассматривается задача минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на некотором множестве X. Процесс построения последовательности точек $\{\mathbf{x}_k\}$ будем называть

релаксационным, если

$$\mathbf{x}_k \in X \quad \text{и} \quad \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Всюду дальше будем предполагать, что множество решений исходной задачи непусто. При исследовании сходимости релаксационных процессов будем также предполагать, что последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ бесконечна и, следовательно, все ее точки лежат вне множества решений.

9.2. Вспомогательный аппарат

9.2.1. Рассмотрим несколько вспомогательных утверждений в качестве необходимого аппарата для исследований сходимости релаксационных процессов минимизации. Лемма 9.2.3 в настоящем курсе является основной при всех исследованиях сходимости процессов минимизации функций, принадлежащих классу $C^{1,1}(X)$. Материал, излагаемый в пп. 9.2.4–9.2.10, потребуется для установления факта сходимости релаксационных последовательностей к множеству точек, в которых выполняются необходимые условия минимума, а на последующий материал (леммы 9.2.14 и 9.2.15) опираются выводы оценок скорости сходимости.

Заметим, что содержание настоящего параграфа в равной степени относится к изучению как методов безусловной минимизации, так и методов минимизации функций с ограничениями.

9.2.2. Определение класса функций $C^{1,1}(X)$. Функция $\varphi(\mathbf{x})$, определенная и дифференцируемая на некотором множестве X, принадлежит классу $C^{1,1}(X)$, если существует такая константа $L > 0$, что для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ таких, что $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$, выполняется неравенство

$$\|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y})\| \leqslant L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

9.2.3. Лемма. *Если $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$, то для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$ таких, что $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$, справедливо неравенство*

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) \geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle - \frac{L}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

Доказательство. Используя условие $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$ и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \varphi'(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \, d\tau =$$

$$= \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \int_0^1 \langle \varphi'(\mathbf{y} + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle - \int\limits_0^1 \|\varphi'(\mathbf{y}+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{y})) - \varphi'(\mathbf{x})\|\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle - L\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 \int\limits_0^1 (1-\tau)\,d\tau =$$

$$= \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle - \frac{L}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2. \ \triangle$$

9.2.4. Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве*) некоторые множества X и Y такие, что $Y \subset X$ и $X \setminus Y \neq \varnothing$.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$, определенная на множестве X, такова, что

$$f(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{y} \in Y. \tag{9.1}$$

Рассмотрим любую последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ такую, что

$$f(\mathbf{x}_k) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{9.2}$$

Для некоторого числа $\varepsilon > 0$ определим множество

$$U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in X\colon \rho(\mathbf{x}, Y) \leqslant \varepsilon\},$$

где $\rho(\mathbf{x}, Y)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до множества Y:

$$\rho(\mathbf{x}, Y) = \inf_{\mathbf{y}\in Y} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

9.2.5. Теорема. *Если выполняются условия* (9.1), (9.2) *и, кроме того, для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$f(\mathbf{x}_k) \geqslant \delta \quad \textit{для всех} \quad \mathbf{x}_k \in X \setminus U_\varepsilon, \tag{9.3}$$

то

$$\rho(\mathbf{x}_k, Y) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{9.4}$$

Доказательство. Предположим, что найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такая подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_i}\} \subset \mathbf{x}_k$, все элементы которой лежат вне множества U_ε: $\{\mathbf{x}_{k_i}\} \subset X \setminus U_\varepsilon$. Тогда согласно условию (9.3) будет выполняться неравенство $f\{\mathbf{x}_{k_i}\} \geqslant \delta \quad (i = 0, 1, \ldots)$, противоречащее условию (9.2). $\triangle$

Обсуждение. Обратимся к вопросу о применении теоремы 9.2.5 для исследования сходимости релаксационных процессов минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на некотором множестве X.

*) Все сказанное ниже справедливо для произвольного метрического пространства.

Рассмотрим множество $X_0 = \{\mathbf{x} \in X\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$ и множество $X^* \subset X_0$ точек, в которых выполняются необходимые условия локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$. Предположим, что известна функция $f(\mathbf{x})$ такая, что

$$f(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in X_0 \setminus X^*,$$
$$f(\mathbf{x}^*) > 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x}^* \in X^*,$$

и пусть для всех точек $\mathbf{x}_k \in X_0 \setminus X^*$ выполняется неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant f(\mathbf{x}_k).$$

Тогда из монотонности и ограниченности последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ следует, что $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \to 0$ при $k \to \infty$; значит, $f(\mathbf{x}_k) \to 0$, $k \to \infty$. Если для $f(\mathbf{x})$ выполняются условия (9.3): для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in X_0 \setminus U_\varepsilon$ будет $f(\mathbf{x}) \geqslant \delta$ (здесь $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in X_0 \setminus X^*\colon \rho(\mathbf{x}, X^*) \leqslant \varepsilon\}$), то на основании теоремы 9.2.5 приходим к соотношению $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X^*) = 0$.

В методах безусловной минимизации гладких функций обычно выполняется неравенство $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2$. Выбирая $f(\mathbf{x}) = \|\varphi'(\mathbf{x})\|^2$ и применяя теорему 9.2.5, получаем сходимость последовательных приближений к множеству X^*.

9.2.6. Теорема. *Если*:

1) *выпуклая функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(E_n)$;

2) $X^* = \{\mathbf{x}^*\colon \varphi'(\mathbf{x}^*) = 0\} \neq \varnothing$;

3) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \geqslant \delta$ *для всех* $\mathbf{x}$ *таких, что*

$$\rho(\mathbf{x}, X^*) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}^*\| \geqslant \varepsilon;$$

то для любой последовательности

$$\{\mathbf{x}_k\} \subset X_0 = \{\mathbf{x}\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$$

будет

$$\rho(\mathbf{x}_k, X^*) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\| \leqslant \eta < \infty, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Обозначим $\varphi^* = \min \varphi(\mathbf{x})$, $C < \varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi^*$. Тогда $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi^* \leqslant C < \infty$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и для всех номеров k таких, что $\rho(\mathbf{x}_k, X^*) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\| \geqslant \varepsilon$, рассмотрим

$$\mathbf{y}_k = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}\mathbf{x}_k + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}\right)\mathbf{p}_k^*.$$

Так как $\mathbf{p}_k^*$ является проекцией точки $\mathbf{x}_k$ на выпуклое и замкнутое множество X^* точек минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$, а $\mathbf{y}_k \in [\mathbf{p}_k^*, \mathbf{x}_k]$, то

$\rho(\mathbf{y}_k, X^*) = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{p}_k^*\| = \varepsilon$, и, в силу предположения 3) $\|\varphi'(\mathbf{y}_k)\| \geqslant \delta$.

Пользуясь леммой 9.2.3, получаем

$$\text{A)}\ \varphi(\mathbf{y}_k) - \varphi^* \geqslant \varphi(\mathbf{y}_k) - \varphi\Big(\mathbf{y}_k - \frac{\delta}{L}\frac{\varphi'(\mathbf{y}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{y}_k)\|}\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\delta}{L}\Big\langle \varphi'(\mathbf{y}_k), \frac{\varphi'(\mathbf{y}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{y}_k)\|}\Big\rangle - \frac{1}{2}L\frac{\delta^2}{L^2} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L} > 0.$$

Предположим, что теорема неверна, т. е. найдется такая последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, для которой будет

$$\text{B)}\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\| \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Из выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ и равенства $\varphi^* = \varphi(\mathbf{p}_k^*)$ следует

$$\varphi(\mathbf{y}_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}\varphi(\mathbf{x}_k) + \Big(1 - \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}\Big)\varphi^* =$$
$$= \varphi^* + \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi^*) \leqslant \varphi^* + \frac{C\cdot\varepsilon}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|}.$$

Учитывая предположение B), приходим к соотношению $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(\mathbf{y}_k) = \varphi^*$, противоречащему неравенству A). $\triangle$

Доказанная теорема играет важную роль при обосновании оценок скорости сходимости методов минимизации выпуклых функций, поскольку эти оценки существенно опираются на условие ограниченности $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|$.

9.2.7. Исследуем теперь свойства множеств X, Y и функции $f(\mathbf{x})$, которые гарантируют выполнение условия (9.3).

Теорема. *Если множество X ограничено и замкнуто, а непрерывная на множестве X функция $f(\mathbf{x})$ такова, что*

$$f(\mathbf{y}) = 0 \quad \textit{для всех} \quad \mathbf{y} \in Y,$$
$$f(\mathbf{x}) > 0 \quad \textit{для всех} \quad \mathbf{x} \in X \setminus Y \neq \varnothing,$$

то выполняется условие (9.3).

Доказательство. Предположим, что найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такая последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset X \setminus U_\varepsilon$, что $f(\mathbf{x}_k) \to 0$, $k \to \infty$. В силу ограниченности множества X из последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_i}\}$; при этом $\lim\limits_{i\to\infty}\mathbf{x}_{k_i} = \mathbf{x} \in X \setminus Y$. Но $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, следовательно, $\mathbf{x} \in Y$. Противоречие. $\triangle$

Замечание. В случае неограниченности множества X условие (9.3) может нарушаться. На рис. 9.1 изображен график одномер-

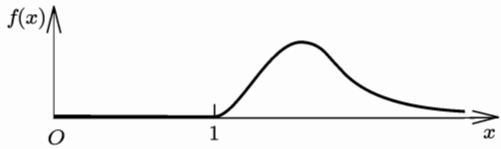

Рис. 9.1

ной функции, определенной на полуоси $x \geqslant 0$ (множество X) и обращающейся в нуль на отрезке $[0,1]$ (множество Y), для которой условие (9.3) нарушается.

9.2.8. Наконец, укажем еще одно свойство, которое в дальнейшем будет использоваться как для исследования существования точек глобального минимума, так и для проверки условия (9.3).

Пусть $\mathbf{z}$ — произвольная точка некоторого множества X.

Если функция $f(\mathbf{x})$, определенная на неограниченном множестве X, обладает свойством $f(\mathbf{x}_k) \to +\infty$, $k \to \infty$, для любой последовательности $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ такой, что $\|\mathbf{x}\|_k \to \infty$, $k \to \infty$, то множество $X(\mathbf{z}) = \{\mathbf{x} \in X\colon f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{z})\}$ ограничено.

9.2.9. В заключение выясним условия, при которых из сходимости последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к некоторому множеству следует ее сходимость к некоторой точке этого множества.

Теорема. *Если множество Y $(Y \subset X)$ предельных точек последовательности $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ конечно $(Y = \{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\})$, $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, Y) = 0$, то эта последовательность сходится.*

Доказательство. Обозначим $U_\delta(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} \in X\colon \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \delta\}$. Если $m = 1$, то утверждение тривиально.

Пусть $m > 1$. Обозначим $\delta = \min\limits_{i \neq j} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| > 0 \quad (i, j = 1, ..., m)$. Из условий теоремы следует, что найдется такое $k_0 \geqslant 0$, что $\mathbf{x}_k \in \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{\delta/4}(\mathbf{y}_i)$ и $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| \leqslant \delta/4$ для всех $k \geqslant k_0$. Если $\mathbf{x}_{k_1} \in U_{\delta/4}(\mathbf{y}_1)$ при некотором $k_1 \geqslant k_0$, то для любого $i \geqslant 2$ будет

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_{k_i+1}\| = \|(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_1) + (\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{k_i}) + (\mathbf{x}_{k_i} - \mathbf{x}_{k_i+1})\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_1\| - (\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{k_i}\| + \|\mathbf{x}_{k_i} - \mathbf{x}_{k_i+1}\|) \geqslant \delta - 2(\delta/4) = \delta/2,$$

т. е. $\mathbf{x}_{k_i+1}$ не принадлежит ни одной из окрестностей точек $\mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_m$, а значит, $\mathbf{x}_{k_i+1} \in U_{\delta/4}(\mathbf{y}_1)$. По индукции следует, что $\mathbf{x}_k \in U_{\delta/4}(\mathbf{y}_1)$ при всех $k \geqslant k_1$. Так как $\rho(\mathbf{x}_k, Y) \to 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{y}_1$. Таким образом, вся последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится к одной из точек конечного множества Y. $\triangle$

9.2.10. Теорема. *Если функция $f(\mathbf{x})$ выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве X, а множество $Y = \operatorname{Argmin}\{f(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$ ограничено, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon \quad \forall \mathbf{x} \in X \setminus U_\varepsilon(Y) \quad \|\nabla f(\mathbf{x})\| \geqslant \delta,$$

где $U_\varepsilon(Y) = \{\mathbf{x}\colon \rho(\mathbf{x}, Y) \leqslant \varepsilon\}$.

Доказательство. Обозначим через G границу множества $U_\varepsilon(Y)$. Множество $G_1 = G \cap X$ ограничено и замкнуто. Очевидно, что для любого фиксированного $\mathbf{y} \in Y$ будет $\zeta = \min\limits_{\mathbf{z} \in G_1} (f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y})) > 0$. Пусть $\mathbf{x}$ — любая точка множества $X \setminus U_\varepsilon(Y)$, а $\mathbf{y} \in Y$. Очевидно, что на отрезке $[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$ найдется точка $\mathbf{z} \in G$, и при этом $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = \eta < \infty$, поскольку множество $X \cap U_\varepsilon(Y)$ ограничено.

Для выпуклой функции одной переменной $F(\lambda) = f(\mathbf{z} + \lambda(\mathbf{z} - \mathbf{y}))$ справедливо соотношение $F'(0) \leqslant F'(\lambda)$ для всех $\lambda \geqslant 0$, и, следовательно, $\langle \nabla f(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle \leqslant \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle$. Так как

$$\zeta \leqslant f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) \leqslant \langle \nabla f(\mathbf{z}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle \leqslant \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle \leqslant \\ \leqslant \|\nabla f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leqslant \eta \|\nabla f(\mathbf{x})\|$$

для любого $\mathbf{x} \in X \setminus U_\varepsilon(Y)$, то при $\delta = \zeta/\eta$ получаем утверждение теоремы. $\triangle$

Обсуждение. Предположим, что для некоторого релаксационного процесса минимизации (см. теорему 9.2.6) доказано, что $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(\mathbf{x}_k, X^*) = 0$. Если множество X^* точек локальных минимумов функции $\varphi(\mathbf{x})$ конечно и выполняется условие $\lim\limits_{k \to \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| = 0$, то из теоремы 9.2.9 следует, что вся последовательность сходится к некоторой точке $\mathbf{x}^*$ локального минимума. Естественно, что эта предельная точка минимизирующей последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ зависит от выбора начальной точки $\mathbf{x}_0$. Заметим, что соотношение $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| \to 0$, $k \to \infty$, выполняется для многих релаксационных процессов минимизации. Ниже рассматриваются условия, гарантирующие выполнение этого соотношения.

9.2.11. Линейно непостоянные функции. Функцию $\varphi(\mathbf{x})$ будем называть *линейно непостоянной* на множестве X, если не существует двух таких различных точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in X$, что $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$ и $\varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y}]$.

В качестве примера линейно непостоянных функций можно привести строго выпуклые функции, а также функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi(\mathbf{z}) < \max\{\varphi(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{y})\} \quad \forall \mathbf{z} \in (\mathbf{x}, \mathbf{y}],$$

— так называемые *строго квазивыпуклые* функции.

9.2.12. Сильно понижающие последовательности. Для функции $\varphi(\mathbf{x})$, определенной на множестве X, последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset$

$\subset X$ будем называть *сильно понижающей*, если

$$[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}] \subset X \quad \text{и} \quad \varphi(\mathbf{x}_k) \geqslant \varphi(\mathbf{z}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \quad \forall \mathbf{z} \in [\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}].$$

Большинство методов минимизации, которым посвящены последующие параграфы, строят последовательности, обладающие указанным свойством.

9.2.13. Теорема. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ непрерывна и линейно непостоянна на замкнутом и ограниченном множестве X, то любая сильно понижающая последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1}\| = 0.$$

Доказательство. Предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{k_i}\}$, что

$$\|\mathbf{x}_{k_i+1} - \mathbf{x}_{k_i}\| \geqslant \varepsilon > 0 \quad \forall i \geqslant 0.$$

Поскольку $\{\mathbf{x}_{k_i}\}$ ограничена, то, не меняя обозначений, будем считать, что

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_{k_i} = \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \mathbf{x}_{k_i+1} = \mathbf{y}.$$

Тогда $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geqslant \varepsilon > 0$, и из замкнутости множества X и условия $[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}] \subset X$ следует $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset X$. Из монотонности и ограниченности последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} (\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})) = 0,$$

следовательно, $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$, откуда в силу условия $\varphi(\mathbf{x}_k) \geqslant \varphi(\mathbf{z}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_{k+1})$ приходим к соотношению

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{z}) = \varphi(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}],$$

противоречащему предположению о том, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ линейно непостоянная. $\triangle$

Доказанная теорема, если учесть сказанное в предыдущем пункте, утверждает, что многие методы минимизации порождают последовательности стягивающихся отрезков $[\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}]$.

9.2.14. Лемма. *Если числовая последовательность $\{\mu_k\}$ такова, что*

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geqslant \tau_k \mu_k^2, \quad \mu_k > 0, \quad \tau_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то

$$\mu_m \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right]^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \geqslant 1 + \tau_k \frac{\mu_k^2}{\mu_{k+1}} \geqslant 1.$$

В силу этого

$$\frac{1}{\mu_{k+1}} - \frac{1}{\mu_k} = \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_k \mu_{k+1}} \geqslant \tau_k \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} \geqslant \tau_k.$$

Суммируя это неравенство по k, получим

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{1}{\mu_{k+1}} - \frac{1}{\mu_k}\right] = \frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_0} \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k,$$

откуда и следует искомая оценка. △

9.2.15. Лемма. *Если числовая последовательность* $\{\mu_k\}$ *такова, что*

$$\mu_k - \mu_{k+1} \geqslant \tau_k \mu_k, \quad \mu_k > 0, \quad \tau_k \geqslant 0, \quad k = 0, 1, ...,$$

то

$$\mu_m \leqslant \mu_0 \exp\left\{-\sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right\}, \quad m = 1, 2, ...$$

Доказательство с очевидностью следует из условия $\mu_k > 0$, поскольку $0 < 1 - \tau_k \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\mu_m \leqslant (1 - \tau_{m-1})\mu_{m-1} \leqslant \mu_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 - \tau_k) =$$
$$= \mu_0 \exp\left\{\sum_{k=0}^{m-1} \ln(1 - \tau_k)\right\} \leqslant \mu_0 \exp\left\{-\sum_{k=0}^{m-1} \tau_k\right\}. \ \triangle$$

9.2.16. Теорема. *Пусть функция* $f(\mathbf{x})$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом множестве* X, *а множество* $Y = \operatorname{Argmin}\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ *ограничено. Если последовательность* $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ *такова, что* $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \to 0$ $(k \to \infty)$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, Y) = 0$.

Доказательство. Вначале докажем, что последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ ограничена. Предположим, что $\|\mathbf{x}_k\| \to \infty$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $X \setminus U_\varepsilon(Y)$ непусто, и такой номер k_0, что $\mathbf{x}_k \in X \setminus U_\varepsilon(Y)$ для всех $k \geqslant k_0$. По теореме 9.2.10 в этом случае существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > \mathbf{0}$, что $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \geqslant \delta$ при всех $k \geqslant k_0$. Пришли к противоречию.

Обозначим через $\mathbf{p}_k$ проекцию точки $\mathbf{x}_k$ на множество Y. В силу ограниченности множества Y и последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ существует такое число $\eta > 0$, что $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\| \leqslant \eta \leqslant \infty$. Так как $f(\mathbf{x})$ выпукла, то

$$\mathbf{0} \leqslant f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{p}_k) \leqslant \langle \nabla f(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\| \leqslant \eta \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|.$$

Из соотношения $f(\mathbf{x}_k) \to f(\mathbf{y})$ $(k \to \infty)$ и ограниченности последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ следует $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, Y) = 0$. $\triangle$

9.3. Теоремы об оценках

9.3.1. В этом параграфе рассматриваются оценки скорости сходимости релаксационных процессов минимизации общего вида независимо от конкретных реализаций этих процессов. Существенно, что эти оценки справедливы лишь для задач выпуклого программирования.

Итак, всюду в этом параграфе будем предполагать, что минимизируемая функция $\varphi(\mathbf{x})$ и допустимое множество X выпуклы.

Обозначим

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}, \quad X^* = \{\mathbf{x}^* \in X\},$$
$$\varphi^* = \varphi(\mathbf{x}^*), \quad \mu_k = \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi^*, \quad \rho(\mathbf{x}_k, X^*) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\|,$$

$\mathbf{p}_k^*$ — проекция точки $\mathbf{x}_k$ на множество X^*.

Из выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ следует неравенство

$$0 < \mu_k \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle, \tag{9.5}$$

справедливое для всех точек $\mathbf{x}_k$, в силу предположения

$$\varphi(\mathbf{x}_k) \neq \varphi^*.$$

В основе большинства дальнейших исследований скорости сходимости релаксационных методов минимизации лежит следующая теорема об оценке.

9.3.2. Теорема. *Если*:

1) *функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом и замкнутом множестве* X;

2) *множество* X^* *непусто*;

3) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *релаксационна*;

то имеет место оценка

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2} \right]^{-1}. \tag{9.6}$$

Доказательство. Так как (см. (9.5))

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) =$$
$$= \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2} \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2 \geqslant \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2} \mu_k^2.$$

то, применяя к этому неравенству лемму 9.2.14, приходим к оценке (9.6). $\triangle$

Бросается в глаза неконструктивный характер оценки (9.6), поскольку в правой ее части присутствуют неизвестные величины $\mathbf{p}_k^*$. Однако установление оценок скорости сходимости конкретных методов решения задач выпуклого программирования существенно опирается на доказанную теорему.

Очевидно, что если при $m \to \infty$ ряд, стоящий в правой части неравенства (9.6), расходится, то имеет место слабая сходимость (т. е. $\varphi(\mathbf{x}_m) \to \varphi^*$ — сходимость по функционалу) релаксационного процесса. Сильная же выпуклость функции $\varphi(\mathbf{x})$ гарантирует в этом случае (см. п. 2.5.5) сильную сходимость процесса (т. е. сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к решению $\mathbf{x}^*$). Таким образом, для исследования сходимости релаксационных процессов при помощи формулы (9.6) следует уметь оценивать снизу величину

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2}.$$

Заметим, что $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2 \to 0$ при $\varphi(\mathbf{x}_k) \to \varphi^*$.

Это обстоятельство для определенных классов релаксационных методов позволяет находить такую величину $C > 0$, не зависящую от числа итераций k, что

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2} \geqslant C,$$

и, следовательно, получать оценки вида $\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \asymp O(1/m)$.

9.3.3. Теорема. *Если*:

1) $X = E_n$;

2) *выпуклая функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *дифференцируема*;

3) *множество* $X_0 = \{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$ *ограничено*: $\operatorname{diam} X_0 = \eta(\mathbf{x}_0) = \eta < \infty$;

4) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *релаксационна*;

то справедлива оценка

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \frac{1}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \right]^{-1}, \qquad (9.7)$$

$$m = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_0 = \varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi^*$.

Доказательство есть очевидное следствие оценки (9.6), поскольку

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^* \rangle^2 \leqslant \eta^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2. \quad \triangle$$

Замечание. Если существует такой номер m_0, что $\varphi(\mathbf{x}_{m_0}) >$

$> \varphi(\mathbf{x}_{m_0+1})$, то из (9.7) следует неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* < \eta^2 \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \right]^{-1}, \quad m = m_0 + 1, m_0 + 2, ... \tag{9.8}$$

Для выпуклых функций из класса $C^{1,1}(E_n)$ требование ограниченности множества X_0 можно ослабить, заменив его условиями теоремы 9.2.6.

9.3.4. Теорема. *Если*:

1) $X = E_n$;

2) *выпуклая функция принадлежит классу* $C^{1,1}(E_n)$;

3) $X^* \neq \varnothing$;

4) *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \geqslant \delta$ *для всех* $\mathbf{x}$ *таких, что*

$$\rho(\mathbf{x}, X^*) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}^*\| \geqslant \varepsilon;$$

5) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *релаксационна*;

то справедлива оценка (9.7).

Доказательство. Условия 1)–4) суть условия теоремы 9.2.6, из которой следует неравенство $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k^*\| \leqslant \eta < \infty$, на которое опирается оценка (9.7). △

9.3.5. Теорема. *Если* $X = E_n$, *функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *сильно выпукла и дифференцируема, а последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *релаксационна, то справедливы неравенства*

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 \exp\left\{ -\rho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \right\}, \quad m = 1, 2, ..., \tag{9.9}$$

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho} \mu_0 \exp\left\{ -\rho \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \right\}, \quad m = 1, 2, ..., \tag{9.10}$$

где ρ — *параметр сильной выпуклости.*

Доказательство с очевидностью следует из свойств сильной выпуклости (см. п. 2.5.5):

$$\mu_k \leqslant \frac{1}{\rho} \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2,$$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho} [\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*)],$$

и из леммы 9.2.15:

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}\,\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \geqslant \rho\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}\,\mu_k.$$

9.3.6. Оценки (9.8)–(9.10) позволяют в процессе вычислений накапливать информацию о скорости приближения $\varphi(\mathbf{x}_m)$ к φ^*, а в случае сильной выпуклости — о скорости приближения $\mathbf{x}_m$ к $\mathbf{x}^*$. Заметим, что до тех пор, пока порядок величины

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}$$

не ниже, чем $O(1/k)$, релаксационный процесс минимизации остается сходящимся. В реальных ситуациях используют следующий прием. Выбирают величину $\varepsilon > 0$ (например, выбранную на данном этапе точностью вычислений) и продолжают процесс до тех пор, пока не нарушится неравенство

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \geqslant \varepsilon.$$

Но как только начинает устанавливаться ситуация

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} < \varepsilon$$

и дальнейшее применение выбранного алгоритма минимизации не сулит ее изменения, итерации останавливают. Продолжение процесса минимизации связано либо с изменением параметров алгоритма (например, с повышением точности вычислений), либо с переходом к другому, более эффективному в данном случае методу.

9.4. Методы спуска

9.4.1. Общая схема. Все методы спуска решения задачи безусловной минимизации различаются либо выбором направления спуска, либо способом движения вдоль направлений спуска. Это позволяет выписать общую схему методов спуска и исследовать для нее вопросы сходимости и устойчивости.

Итак, решается задача минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на всем пространстве E_n. Методы спуска состоят в следующей процедуре построения последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$. В качестве начального приближения выбирается, вообще говоря, любая точка $\mathbf{x}_0 \in E_n$. Последовательные приближения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ строятся по следующей схеме:

1) в точке $\mathbf{x}_k$ выбирают направление спуска $-\mathbf{s}_k$;

2) находят $(k+1)$-е приближение по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k. \tag{9.11}$$

9.4.2. Выбор направления. Как уже говорилось, методы различаются, в первую очередь, выбором направления спуска, но всегда в релаксационных методах направление $-\mathbf{s}_k$ выбирают таким образом, чтобы обеспечить неравенство $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k)$ по крайней мере для малых значений величины β_k. Поскольку в реальных задачах, как правило, имеется информация лишь о поведении функции $\varphi(\mathbf{x})$ в локальной окрестности точки $\mathbf{x}_k$, то гарантирует убывание функции при перемещении из точки $\mathbf{x}_k$ вдоль направления $-\mathbf{s}_k$ соотношение

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle > 0.$$

В большинстве методов спуска выбор направления связан с вычислением градиента минимизируемой функции в точке $\mathbf{x}_k$ (исключение составляют, например, методы покоординатного спуска и многие методы случайного спуска). Процедура вычисления $\varphi'(\mathbf{x}_k)$ весьма трудоемка. На практике градиент обычно приходится определять приближенно, например, пользуясь разностными схемами, что требует вычислений значения функции $\varphi(\mathbf{x})$ по крайней мере в $n+1$ точках на каждой итерации. Заметим, что вычисления значений функции $\varphi(\mathbf{x})$ в большинстве случаев сопряжено со значительными трудностями, особенно если эти значения определяются в результате некоторого эксперимента.

На вопрос, какому из способов выбора направления спуска следует отдать предпочтение при решении конкретной задачи, однозначного ответа нет, если только она не является хорошо известной тестовой задачей. Дело в том, что "идеальным" направлением в точке $\mathbf{x}_0$ является направление в точку $\mathbf{x}^*$: $\mathbf{s} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*$. И в этом смысле все другие направления хуже. Предположим, что мы обладаем определенной информацией о виде минимизируемой функции; скажем, нам известно, что эта функция выпуклая и достаточно гладкая. Но и в этом случае ответ на поставленный вопрос весьма затруднителен. Дело в том, что у многих методов спуска априорные оценки скорости сходимости имеют вид $\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \asymp O(1/m)$, вследствие чего эти оценки не позволяют отдать предпочтение тому или иному методу. Именно на этом этапе приобретает важное значение накопленный опыт. Так, на начальной стадии минимизации отдают предпочтение методам, связанным с незначительными затратами усилий на вычисления направлений спуска, например методам покоординатного спуска. Когда процесс минимизации $\varphi(\mathbf{x})$ существенно замедляется, переходят к методам, связанным с вычислениями градиента, — к так называемым методам градиентного спуска. В дальнейшем, если последовательные приближения привели нас в окрестность точки минимума, но точ-

ность нас еще не устраивает, вступают в силу дополнительные соображения. Так, если поведение выпуклой функции в окрестности точки минимума носит характер поведения квадратичной функции, то предпочитают выбирать один из методов сопряженных направлений, поскольку известно, что эти методы минимизируют квадратичные функции за конечное число итераций.

Сказанное выше следует рассматривать лишь как пример, как нечто вроде передачи опыта, но не как "руководящее указание" для способа выбора направлений. Пока еще опыт, интуиция, искусство при численном решении реальных задач играют весьма существенную роль. Отсутствие регулярного способа выбора направлений безусловно затрудняет процедуру решения экстремальных задач. Утешением может служить лишь то, что это "белое пятно" оставляет широкое поле для дальнейших исследований.

9.4.3. Выбор длины шага. Число β_k с точностью до множителя $\|s_k\|$ определяет расстояние от точки $\mathbf{x}_k$ до точки $\mathbf{x}_{k+1}$. Мы будем здесь придерживаться принятой терминологии и называть это число *длиной шага* или просто *шагом*.

Основная задача при выборе величины β_k в релаксационных процессах минимизации — это обеспечить выполнение неравенства $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k)$.

Естественно, что трудоемкость вычислений величины β_k следует согласовывать с трудоемкостью вычислений направления $-\mathbf{s}_k$. Если на выбор направления затрачивается малый труд, то, как правило, это же должно относится и к задаче выбора β_k. Одним из элементарных способов, реализованных в значительном числе стандартных программ методов минимизации, является способ удвоения.

9.4.4. Способ удвоения для выбора длины шага $\boldsymbol{\beta_k}$. Выбирают $\beta_k = \beta_{k-1}$. Если при этом $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k)$, то либо переходят к следующей, $(k+2)$-й итерации, либо выбирают $\beta_k = 2\beta_{k-1}$. Если значение $\varphi(\mathbf{x})$ меньше предыдущего значения, то процесс удвоения можно продолжать до тех пор, пока убывание не прекратится. Если $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k)$, то выбирают $\beta_k = \dfrac{1}{2}\,\beta_{k-1}$. Если $\varphi\Big(\mathbf{x}_k - \dfrac{1}{2}\,\beta_{k-1}\mathbf{s}_k\Big) < \varphi(\mathbf{x}_k)$, то полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \dfrac{1}{2}\,\beta_{k-1}\mathbf{s}_k$ и переходят к следующей, $(k+2)$-й итерации. Если же $\varphi\Big(\mathbf{x}_k - \dfrac{1}{2}\,\beta_{k-1}\mathbf{s}_k\Big) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k)$, то выбирают $\beta_k = \beta_{k-1}/4$ и т. д.

9.4.5. Выбор длины шага $\boldsymbol{\beta_k}$ методами одномерной минимизации. Если на вычисление $\mathbf{s}_k$ затрачиваются значительные усилия, то β_k обычно вычисляют одним из методов одномерной минимизации функции $\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)$ (см. гл. 8). При этом точность вычисления точки минимума функции $\psi(\beta)$ следует согласовывать с точностью вычислений значений функции $\varphi(\mathbf{x})$. Кроме того, точ-

ность вычисления одномерного минимума определяется числом вычислений значений функции $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль направления $-\mathbf{s}_k$, т. е. числом, выбор которого связан со способом выбора направления спуска. Так, представляется малооправданным, чтобы на определение величины $\mathbf{s}_k$ затрачивалось $n+1$ вычислений значений функции $\varphi(\mathbf{x})$, а точка одномерного минимума определялась в результате вычислений значений $\varphi(\mathbf{x})$, число которых на порядок отличалось бы от числа $n+1$. Хотя это утверждение не бесспорно, нетрудно построить пример с "идеальным" способом выбора шага, никак не согласующимся с точностью определения точки одномерного минимума. Во всяком случае, в результате процедуры одномерной минимизации величина β_k должна быть определена так, чтобы заведомо выполнялось неравенство $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k)$. Выпишем основное соотношение, гарантирующее убывание функции $\varphi(\mathbf{x})$, которому должна удовлетворять величина β_k, вычисленная в результате процедуры одномерной минимизации:

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \leqslant (1-\lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k. \tag{9.12}$$

Здесь

$$\omega_k = \inf_{\beta \geqslant 0} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k),$$

а число $\lambda_k \leqslant \dfrac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k} \in (0,1]$ характеризует точность вычисления точки одномерного минимума функции $\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k)$. Из (9.12) следует, что

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k).$$

Отсюда и из оценки (9.7) получаем

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}\right]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0}{\eta^2} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}\right]^{-1}.$$

Эти оценки показывают, что до тех пор, пока отношение

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}$$

остается сравнительно большим, число вычислений значений $\varphi(\mathbf{x})$ можно сократить, понизив точность одномерной минимизации, т. е. уменьшив допустимую величину λ_k.

Часто в процессе счета, несмотря на то, что априорные оценки свидетельствуют о сходимости метода со скоростью, скажем, $O(1/m)$,

обнаруживается, что с увеличением числа итераций либо уменьшается скорость сходимости, либо процесс вообще перестает сходиться. Одной из причин этого может оказаться потеря точности при вычислении одномерного минимума. Из приведенных выше оценок видно, что неблагоприятная ситуация, когда

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} < \varepsilon,$$

может иногда быть исправлена за счет повышения точности одномерной минимизации, т. е. за счет такого допустимого увеличения параметра λ_k, при котором будет выполняться неравенство

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \geqslant \varepsilon.$$

Необходимость повышения точности одномерной минимизации обычно возникает в окрестности точки минимума и при попадании точки $\mathbf{x}_k$ в так называемый *овраг*, т. е. когда по некоторым направлениям производная близка к нулю.

9.4.6. Численно реализуемые условия выбора величины β_k без процедуры одномерной минимизации. В качестве $\beta_k > 0$ будем выбирать $\beta_k = \beta_k^*$ — наибольшее из чисел β, удовлетворяющих неравенству

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k) \geqslant q\beta\|\mathbf{s}_k\| \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}, \quad q > 0. \tag{9.13}$$

В то время как условие (9.12) не является конструктивным для определения длины шага, неравенство (9.13) позволяет воспользоваться одним из элементарных методов для вычисления величины β_k, например, методом удвоения (см. п. 9.4.4). Заметим, что поскольку выбор $\mathbf{s}_k$ гарантирует локальное убывание функции $\varphi(\mathbf{x})$ при перемещении из точки $\mathbf{x}_k$ вдоль направления $-\mathbf{s}_k$, то

$$\|\mathbf{s}_k\| \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k} = \langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle > 0.$$

Покажем, что существует положительное число $|\overline{\beta}_k|$, удовлетворяющее неравенству (9.13). Действительно, если выбрать

$$\overline{\beta}_k = 2(1-q)\frac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle}{L\|\mathbf{s}_k\|^2},$$

то, пользуясь леммой 9.2.3, получаем

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \overline{\beta}_k\mathbf{s}_k) &\geqslant \overline{\beta}_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle - \frac{L}{2}\overline{\beta}_k^2\|\mathbf{s}_k\|^2 = \\ &= \overline{\beta}_k\Big(\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle - \frac{L}{2}\overline{\beta}_k\|\mathbf{s}_k\|^2\Big) = q\overline{\beta}_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle = q\overline{\beta}_k\|\mathbf{s}_k\| \frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k};\end{aligned} \tag{9.14}$$

при $0 < q < 1$ будет $\overline{\beta}_k > 0$. Поскольку задача о нахождении наибольшего числа, удовлетворяющего неравенству (9.13), решается приближенно, то можно выписать соотношение, которому удовлетворяет найденное значение β_k в качестве наибольшей величины при некотором значении параметра $q_k \in (0, 1)$,

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \geqslant q_k \beta_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle. \tag{9.15}$$

Замечание. В добавлении (см. Д.1) доказывается, что число удвоений для выбора на каждой итерации величины β_k из условия (9.15) конечно.

9.4.7. Обозначим через α_k величину косинуса угла между направлением антиградиента $-\varphi'(\mathbf{x}_k)$ (т. е. направлением наискорейшего убывания функции $\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_k$) и направлением спуска $-\mathbf{s}_k$ из этой же точки:

$$\alpha_k = \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{s}_k\|}. \tag{9.16}$$

Очевидно, что $\alpha_k > 0$, так как это является непременным условием выбора направления. Теоремы о скорости сходимости методов безусловной минимизации будем доказывать в предположениях, что последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ строится по формуле (9.11), $\alpha_k > 0$, а β_k удовлетворяет либо условию (9.12), либо условию (9.15).

9.4.8. Лемма. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C^{1,1}(E_n)$, а последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ строится по формуле* (9.11) *и удовлетворяет условию* (9.12), *то справедливо неравенство*

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L} \lambda_k \alpha_k^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2.$$

Доказательство. Из (9.12) для любых значений параметра $\beta \geqslant 0$ справедливо

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k (\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega) \geqslant \lambda_k (\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k)).$$

Отсюда, пользуясь леммой 9.2.3 и определением величины α_k, приходим к неравенству

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k \Big(\beta \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle - \frac{1}{2} L \beta^2 \|\mathbf{s}_k\|^2 \Big) =$$
$$= \lambda_k \Big(\beta \alpha_k \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{s}_k\| - \frac{1}{2} L \beta^2 \|\mathbf{s}_k\|^2 \Big),$$

справедливому для любых значений β. Правая часть этого неравенства является квадратичной функцией параметра β, достигающей своего максимума при

$$\beta = \frac{\alpha_k}{L} \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k\|}{\|\mathbf{s}_k\|}.$$

Таким образом, подставляя это значение, мы получаем

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2L}\,\lambda_k \alpha_k^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2. \quad \triangle$$

9.4.9. Лемма. *Если ограниченная снизу функция $\varphi(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C^{1,1}(E_n)$, а последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ строится по формуле* (9.11) *и удовлетворяет условию* (9.15), *то справедливо неравенство*

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{L}\,\gamma_k \alpha_k^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2, \quad \gamma_k = 2q_k(1-q_k).$$

Доказательство. Поскольку β_k — наибольшее из чисел, удовлетворяющих неравенству (9.15), а

$$\overline{\beta}_k = 2(1-q_k)\frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle}{L\|\mathbf{s}_k\|^2},$$

как мы видели (см. (9.14)), удовлетворяет этому неравенству, то $\beta_k \geqslant \overline{\beta}_k$, и из (9.15), учитывая определение α_k, имеем

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \geqslant q_k \beta_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle \geqslant$$

$$\geqslant q_k \overline{\beta}_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle = 2q_k(1-q_k)\frac{1}{L}\frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle^2}{\|\mathbf{s}_k\|^2} = \frac{1}{L}\,\gamma_k \alpha_k^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2. \quad \triangle$$

9.4.10. Ниже будут доказаны теоремы о сходимости релаксационных процессов минимизации. Прежде чем приступить к формальным доказательствам, следует высказать ряд соображений. Для гладких невыпуклых функций будет доказано, что релаксационные последовательности сходятся к множеству $\{\mathbf{x}^* \in X\colon \varphi'(\mathbf{x}^*) = 0\}$. Поскольку последовательность $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ монотонно убывающая, то релаксационный процесс никогда не приведет нас к точке локального максимума (естественно предполагать, что $\varphi'(\mathbf{x}_0) \neq 0$). Далее, представляется маловероятным, чтобы процесс привел и к точкам седлового типа (это подтверждается накопленным опытом применения релаксационных методов минимизации). Таким образом, в реальных ситуациях имеет место сходимость к множеству локальных минимумов, а в большинстве случаев — к некоторой точке локального минимума, тем более, что при решении конкретных прикладных задач обычно из тех или иных "физических" соображений бывает известна некоторая окрестность искомой точки $\mathbf{x}^*$, где и выбирают исходную точку $\mathbf{x}_0$. И хотя при наших формальных рассмотрениях из множества стационарных точек мы не можем исключить эти точки, сказанное выше следует учитывать, анализируя теоремы о сходимости.

9.4.11. Множество стационарных точек. Для задач безусловной минимизации гладких функций множество

$$X^* = \{\mathbf{x}^*\colon \varphi'(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

будем называть *множеством стационарных точек*. Определим также множества $X_0 = \{\mathbf{x}\colon \varphi'(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$ и $X_0^* = X^* \cap X_0$.

9.4.12. Условие, гарантирующее сходимость. Для некоторого числа $\varepsilon > 0$ определим множество

$$U_\varepsilon = \{\mathbf{x}\colon \rho(\mathbf{x}, X_0^*) \leqslant \varepsilon\},$$

где

$$\rho(\mathbf{x}, X_0^*) = \inf_{\mathbf{x}^* \in X_0^*} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Условие, гарантирующее сходимость релаксационной последовательности, состоит в следующем: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $\mathbf{x}_k \in X_0^* \setminus U_\varepsilon$ *будет* $\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| \geqslant \delta$.

9.4.13. Для функций, ограниченных снизу на множестве X_0 (а именно для таких функций и будет исследоваться сходимость), легко построить пример, когда отсутствие условия 9.4.12 исключит заведомую сходимость релаксационной последовательности к множеству X^* (рис. 9.2). Условие 9.4.12 выполняется для достаточно широко-

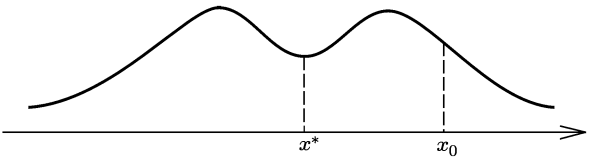

Рис. 9.2

го класса функций. Так, если $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$, а множество X_0 ограничено, то справедливость условия 9.4.12 вытекает из теоремы 9.2.7.

9.4.14. Предположения. Относительно функции $\varphi(\mathbf{x})$ будем предполагать, что:

1) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$;
2) $X_0^* \neq \varnothing$;
3) $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве X_0.

Относительно последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ будем предполагать, что:

4) $\mathbf{x}_0$ — любая точка;
5) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \quad k = 0, 1, \ldots$;
6) $\alpha_k \geqslant \alpha > 0, \quad k = 0, 1, \ldots$;
7) выполняется либо условие

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k$$

при $0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$ либо условие

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \geqslant q_k \beta_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle$$

при $0 < \varepsilon \leqslant q_k \leqslant 1 - \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \varepsilon < 1/2$.

9.4.15. Теорема. *Если выполняются предположения* 9.4.14 *и условие* 9.4.12, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0. \tag{9.17}$$

Доказательство. Из предположения 7) и лемм 9.4.8 и 9.4.9 следует, что $0 < \gamma = 2\varepsilon^2 \leqslant \gamma_k \leqslant 1/2$ и

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2$$

при $C = \dfrac{1}{L}\,\alpha^2 \min\left\{\dfrac{1}{2}\,\lambda, \gamma\right\}$. Последовательность $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ монотонна и ограничена снизу, поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

$$f(\mathbf{x}_k) \equiv \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

В справедливости соотношения (9.17) убеждаемся на основании теоремы 9.2.5 при $X \equiv X_0$ и $Y \equiv X_0^*$. $\triangle$

9.4.16. Обсуждение. Из доказанной теоремы видна важная роль выбора начальной точки $\mathbf{x}_0$. Если эта точка выбрана удачно (например, так, что множество X_0 содержит единственную стационарную точку — точку глобального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$), то из соотношения (9.17) следует, что $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}^*$ при $k \to \infty$. Для выпуклых функций очевидна сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к множеству точек глобального минимума, а для строго выпуклых функций — сходимость к единственной точке $\mathbf{x}^*$. Причем в обоих этих случаях факт сходимости не зависит от выбора точки $\mathbf{x}_0$, хотя неудачный ее выбор может существенно замедлить весь процесс минимизации.

9.4.17. О нарушениях релаксационности. На практике в процессе минимизации часто возникает ситуация нарушения релаксационности, т. е. монотонного убывания последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$. Иногда такие нарушения делают сознательно, с целью избежать замедления процесса минимизации. Обычно в таких случаях прибегают к тем или иным эвристическим приемам, которые позволяют через конечное число этапов восстановить релаксационность. Очевидно, что теорема о сходимости остается справедливой, однако уже не для всей последовательности, а для той ее части, которая остается после вычеркивания всех точек нарушения релаксационности.

9.4.18. Перейдем к выводу оценок скорости сходимости методов спуска для решения задач безусловной минимизации выпуклых и сильно выпуклых функций. Эти оценки для выпуклых функций удается построить при довольно жестком условии ограниченности множества X_0. Заметим, что в этом случае выполняются предположения 2) и 3) из п. 9.4.14 и условие 9.4.12, которые играли существенную роль при доказательстве предыдущей теоремы.

9.4.19. Теорема. *Пусть*:
1) *выпуклая функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(E_n)$;
2) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;
3) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *строится по формуле* (9.11);
4) $\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, ...$

Если выполняется условие (9.12), *то*

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2\right]^{-1}, \quad m = 1, 2, ..., \tag{9.18}$$

для любого $0 < C \leqslant \dfrac{1}{2L\eta^2}$. *Если же выполняется условие* (9.15), *то*

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \alpha_k^2\right]^{-1}, \quad m = 1, 2, ..., \tag{9.19}$$

для любого $0 < C \leqslant \dfrac{1}{L\eta^2}$.

Доказательство с очевидностью следует из лемм 9.4.8 и 9.4.9 и теоремы 9.3.3. $\triangle$

9.4.20. Замечание. Условие 2) теоремы 9.4.19 можно заменить условиями 3) и 4) теоремы 9.3.4: $X^* \neq \varnothing$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \geqslant \delta$ для всех $\mathbf{x}$ таких, что $\rho(\mathbf{x}, X^*) \geqslant \varepsilon$. При этом теорема 9.4.19 остается справедливой. Доказательство ее опирается на леммы 9.4.8, 9.4.9 и теорему 9.3.4.

9.4.21. Теорема. *Пусть*:
1) *сильно выпуклая функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(E_n)$;
2) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *строится по формулам* (9.11);
3) $\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, ...$

Если выполняется условие (9.12), *то*

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\Big\{-\frac{\rho}{2L} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2\Big\}, \quad m = 1, 2, ...,$$

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\Big\{-\frac{\rho}{2L} \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \alpha_k^2\Big\}, \quad m = 1, 2, ...$$

Если же выполняется условие (9.15), *то*

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\Big\{-\frac{\rho}{L} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \alpha_k^2\Big\}, \quad m = 1, 2, ...,$$

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\Big\{-\frac{\rho}{L} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \alpha_k^2\Big\}, \quad m = 1, 2, ...$$

Доказательство с очевидностью следует из лемм 9.4.8 и 9.4.9 и теоремы 9.3.5. △

9.4.22. Обсуждение. Очевидно, что в смысле соотношений (9.18), (9.19) наиболее благоприятные оценки возникают при α_k и λ_k, близких к единице, и γ_k, близком к $1/2$. Однако это требует высокой точности вычисления градиента функции $\varphi(\mathbf{x})$ в точках $\mathbf{x}_k$, высокой точности одномерной минимизации, а также высокой точности в определении наибольшего значения β_k из соотношения (9.13), что часто снижает эффективность выбранного процесса минимизации.

Предположим теперь, что при выборе направления спуска выполняется условие $\alpha_k \geqslant \alpha > 0$, а точность вычисления β_k такова, что $0 < \lambda \leqslant \lambda_k < 1$ либо $0 < \varepsilon \leqslant q_k \leqslant 1 - \varepsilon$. В этом случае из соотношений (9.18) и (9.19) следует оценка вида

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) < C\frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, ...,$$

а из теоремы 9.4.21 —

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\{-Cm\}, \quad m = 1, 2, ...,$$
$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\{-Cm\}, \quad m = 1, 2, ...,$$

где в качестве C фигурируют константы, не зависящие от номера m и величины μ_0.

9.4.23. Вопросы классификации. Выбор способа построения последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ существенно зависит от свойств минимизируемой функции, от информации, которой пользуются на каждой итерации, а также от тех технических средств, которыми мы располагаем для осуществления вычислительных процедур.

Методы можно подразделить на три группы:

— *методы нулевого порядка*, использующие только значения минимизируемой функции;

— *методы первого порядка*, использующие, кроме того, первые производные;

— *методы второго порядка*, использующие также и вторые производные.

9.5. Методы первого и второго порядков

9.5.1. Метод градиентного спуска. Одним из наиболее распространенных релаксационных методов минимизации, связанных с вычислением градиента, является метод спуска по направлению антиградиента минимизируемой функции. В пользу такого выбора направления спуска можно привести следующие соображения.

Поскольку антиградиент, т. е. $-\varphi'(\mathbf{x}_k)$, в точке $\mathbf{x}_k$ указывает направление наискорейшего убывания функции, то естественным представляется сместиться из точки $\mathbf{x}_k$ по этому направлению.

Метод спуска, в котором $\mathbf{s}_k = \varphi'(\mathbf{x}_k)$, называют методом *градиентного спуска.*

Величина β_k в методе градиентного спуска традиционно вычисляется путем применения одного из методов одномерной минимизации функции $\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\varphi'(\mathbf{x}_k))$.

9.5.2. Высокую эффективность градиентный метод приобретает в сочетании градиентного спуска с выбором величины шага, удовлетворяющей условиям вида (9.15):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\varphi'(\mathbf{x}_k), \tag{9.20}$$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k\varphi'(\mathbf{x}_k)) \geqslant \frac{1}{2}\,\beta_k\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2. \tag{9.21}$$

Такой выбор шага гарантирует построение последовательности точек $\{\mathbf{x}_k\}$, обладающей свойством монотонного убывания относительно любого элемента $\mathbf{y} \in X^*$.

9.5.3. Теорема. *Для выпуклой дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{x})$ такой, что $X^* \neq \varnothing$, последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, удовлетворяющая соотношениям* (9.20), (9.21), *такова, что для любого фиксированного элемента $y \in X^*$ справедливы неравенства*

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|, \quad k = 0, 1, ..., \tag{9.22}$$

и существует

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \triangleq \widetilde{\mathbf{y}} \in X^*.$$

Доказательство. Из выпуклости $\varphi(\mathbf{x})$ и условия 9.21 следует

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}\rangle \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{y}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}\,\beta_k\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2,$$

поэтому $-2\rho_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}\rangle + \beta_k^2\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \leqslant 0$, и, следовательно, получаем

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|^2 - 2\beta_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}\rangle + \beta_k^2\|\varphi'(\mathbf{x})\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|^2, \quad k = 0, 1, ...$$

Из монотонности и ограниченности последовательности $\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|\}$ и ограниченности $\{\|\mathbf{x}_k\|\}$ следует существование $\widetilde{\mathbf{y}} = \lim\limits_{j\to\infty} \mathbf{x}_{k_j} \in X^*$, так как $\varphi'(\widetilde{\mathbf{y}}) = 0$. $\triangle$

Замечание 1. Из предыдущего неравенства следует, что равенство в последовательности (9.22) достигается лишь при $\varphi'(\mathbf{x}_k) = 0$.

Замечание 2. Очевидно, что теорема об оценках (9.4.19) при

выборе шага из условия (9.21) остается справедливой, если условие $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$ заменить условием $X^* \neq \varnothing$.

9.5.4. Градиентная саморегуляция. В классической постановке метод регуляризации рассматривался применительно к линейной алгебраической задаче о решении системы $A\mathbf{x} - b = 0$, где множество решений представляло собой линейное многообразие — так называемая некорректная задача (см. гл. 7).

Напомним, что в методе регуляризации введение параметрического стабилизатора $\alpha\Omega$ позволяло получать при $\alpha \to 0$ приближенные значения нормального решения, т. е. решения, ближайшего к заданной точке $\mathbf{x}_0$.

В отличие от указанного способа, свойство (9.22) гарантирует сходимость $\{\mathbf{x}_k\}$ к нормальному решению, не прибегая к приему регуляризации. Важнейшей особенностью градиентного метода при выборке шага из условия (9.21) является его стабилизирующие свойства, которые можно назвать свойствами саморегуляции.

Действительно, для некорректных линейных алгебраических уравнений вида $A\mathbf{x} - b = 0$ множество X^* минимумов функции $\varphi(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - b\|^2$ удовлетворяет требованиям теоремы (9.5.3), и поэтому последовательность точек $\{\mathbf{x}_k\}$, построенная методом (9.20), (9.21), обладает свойством проекционной сходимости (9.22). А именно, расстояния каждой из этих точек до нормального решения относительно $\mathbf{x}_0$, т. е. до проекции ее на X^* $\mathbf{p}_0 = P_{X^*}(\mathbf{x}_0)$ монотонно сокращается: $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_0) \downarrow 0$, $k \to \infty$.

9.5.5. Теорема. *Пусть $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ такова, что для любого $\mathbf{y}$, принадлежащего линейному многообразию $Y \subset X$, справедливы соотношения $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{y} \in Y$, $k \in \{\mathbf{x}_k\}$ и $\exists \widetilde{\mathbf{y}} = \lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$.*

Тогда $\widetilde{\mathbf{y}} = P_Y(\mathbf{x}_k) \triangleq \mathbf{p}_k, \quad k = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Так как $\mathbf{p}_k$ — ортогональная проекция точки $\mathbf{x}_k$ на Y и $\widetilde{\mathbf{y}} \in Y$, то $\langle \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{p}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle = \|\mathbf{p}_k - \widetilde{\mathbf{y}}\|^2$, и, учитывая монотонность $\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|\}$ относительно любой точки из Y, в том числе и точки $v(\alpha) = \widetilde{\mathbf{y}} + \alpha(\mathbf{p}_k - \widetilde{\mathbf{y}})$ при фиксированном числе $\alpha > 0$, имеем $\|v(\alpha) - \widetilde{\mathbf{y}}\| \leqslant \|v(\alpha) - \mathbf{x}_k\|$. Поэтому

$$\|v(\alpha) - \widetilde{\mathbf{y}}\|^2 = \|v(\alpha) - \mathbf{x}_k\|^2 - 2\langle v(\alpha) - \mathbf{x}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle + \|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|v(\alpha) - \widetilde{\mathbf{y}}\|^2 - 2\langle v(\alpha) - \mathbf{x}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle + \|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2,$$

откуда

$$\|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2 \leqslant 2\langle v(\alpha) - \mathbf{x}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle = 2\langle \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k, \widetilde{\mathbf{y}} + \alpha(\mathbf{p}_k - \widetilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{x}_k \rangle =$$
$$= 2\|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2 - 2\alpha\langle (\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{p}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle,$$

или

$$\|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2 \geqslant 2\alpha\langle \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{p}_k, \widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k \rangle = 2\alpha\|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{p}_k\|^2.$$

Следовательно, $\|\mathbf{p}_k - \widetilde{\mathbf{y}}\|^2 \leqslant \dfrac{1}{2\alpha}\|\widetilde{\mathbf{y}} - \mathbf{x}_k\|^2$ для любого α, откуда $\mathbf{p}_k = \widetilde{\mathbf{y}}$ при любом фиксированном k. $\triangle$

Следствие. Все точки $\mathbf{x}_k$ лежат на сферах семейства с центром в точке $\widetilde{\mathbf{y}}$, принадлежащих ортогональному дополнению $Y^{\perp}$ к множеству Y. Заметим, что если Y принадлежит E^n и имеет размерность $n-j$, то все точки $\mathbf{x}_k$ лежат в гиперплоскости размерности j, проходящей через $j+1$ линейно независимых элементов последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$. Это свойство следует учитывать при решении экстремальных задач, где Y является множеством решений.

9.5.6. Принцип δ-расширения. Для задач с приближенной информацией, а именно о минимизации $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \widetilde{b}\|^2$, где $\|A - \widetilde{A}\| \leqslant \delta$, $\|b - \widetilde{b}\| \leqslant \delta$, широко применяется так называемый принцип *δ-расширения.*

Схема метода:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \widetilde{\varphi}'(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, ...; \tag{9.20}$$

$$\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}_k) - \widetilde{\varphi}(\mathbf{x}_k - \beta_k \widetilde{\varphi}'(x_k)) \geqslant \frac{1}{2}\beta_k \|\widetilde{\varphi}'(\mathbf{x}_k)\|^2; \tag{9.21}$$

$$\text{если} \quad \widetilde{\varphi}(\mathbf{x}_k) > \delta, \quad \text{то вычисляется точка} \quad \mathbf{x}_{k+1}; \tag{9.23}$$

если $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}_k) \leqslant \delta$, то процесс минимизации заканчивается.

Указанный процесс можно записать в следующем виде: найти точку $\widetilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{Y} = \operatorname{Argmin}(\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) - \delta)_+$, где $\mathbf{z}_+$ означает положительную часть вектора $\mathbf{z}$, т. е. $(\mathbf{z}_+)_i = \max\{z_i, 0\}$, $i = \overline{1,n}$.

Лемма 1. *Существует такое $\widetilde{\delta} > 0$, что $\mathbf{p}_0 \in \widetilde{Y}$ для всех $\delta \in (0, \widetilde{\delta}]$.*

Доказательство. Положим $\widetilde{\delta} = (\|\mathbf{p}_0\| + 1)^{-2}$. Тогда для всех $\delta \in (0, \widetilde{\delta}]$ справедливы соотношения

$$\|\widetilde{A}\mathbf{p}_0 - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2 = \|\widetilde{A}\mathbf{p}_0 - A\mathbf{p}_0 + \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2 \leqslant (\|(\widetilde{A} - A)\mathbf{p}_0\| + \|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\|\widetilde{A} - A\|\|\mathbf{p}_0\| + \|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\|)^2 \leqslant (\delta\|\mathbf{p}_0\| + \delta)^2 = \delta^2(\|\mathbf{p}_0\| + 1)^2 \leqslant \delta. \quad \triangle$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ — базис в пространстве E_n, $L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1})$ — подпространство, порожденное векторами $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1})$.

Лемма 2. *Пусть $A\mathbf{p}_0 = \mathbf{u}$, $\|A - \widetilde{A}\| \leqslant \delta$, $\|u - \widetilde{u}\| \leqslant \delta$ и для любого $\mathbf{v} \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1})$, $r > 1$, выполняется неравенство $\|\widetilde{A}\mathbf{v}\| \geqslant \varkappa\|\mathbf{v}\|$, где $\varkappa > 0$ — некоторая константа.*

Тогда для достаточно малых $\delta > 0$

$$\operatorname{diam} M_\delta \leqslant C_1 \delta^{1/2}, \quad C_1 > 0, \quad C_1 = \text{const},$$

где

$$M_\delta = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v},\ \mathbf{v} \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1}),\ \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2 \leqslant \delta\}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\mathbf{v} \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1})$ такого, что $\mathbf{x} \in M_\delta$, справедливы соотношения

$$\sqrt{\delta} \geqslant \|\widetilde{A}(\mathbf{p}_0 + \mathbf{v}) - \widetilde{\mathbf{u}}\| = \|(\widetilde{A} - A)\mathbf{p}_0 + \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}} + \widetilde{A}\mathbf{v}\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\widetilde{A}\mathbf{v}\| - \|(\widetilde{A} - A)\mathbf{p}_0 + \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\| \geqslant \|\widetilde{A}\mathbf{v}\| - C_2\delta \geqslant \varkappa\|\mathbf{v}\| - C_2\delta,$$
$$C_2 = \|\mathbf{p}_0\| + 1.$$

Следовательно, $\|\mathbf{v}\| \leqslant \dfrac{1}{\varkappa}(\delta^{1/2} + C_2\delta)$, т. е. $\operatorname{diam} M_\delta \leqslant C_1\delta^{1/2}$. $\triangle$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ — базис подпространства $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in E_n, A\mathbf{x} = 0\}$, а $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{r-1}\}$ — базис $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ — ортогонального дополнения к ядру матрицы A.

Теорема. *Для достаточно малых $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_0\| \leqslant C_3\delta^{1/2}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$ справедливо неравенство $\|A\mathbf{x}\| \geqslant \varkappa\|\mathbf{x}\|$, где $\varkappa$ — некоторая положительная константа, не зависящая от x. Тогда при достаточно малых $\delta > 0$ для возмущенной матрицы $\widetilde{A}$ будет выполняться неравенство

$$\|\widetilde{A}\mathbf{x}\| \geqslant \frac{\varkappa}{2}\|\mathbf{x}\| \tag{9.24}$$

для любого $\mathbf{x} \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$.

Заметим, что при малых возмущениях δ для всех $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, ..., r-1)$ из (9.24) следует неравенство $\|A\mathbf{e}_i\| \geqslant \varkappa/2 > 0$, т. е. базисные векторы $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ остаются в $(\operatorname{Ker} \widetilde{A})^\perp$. Относительно векторов $\{\mathbf{e}_r, ..., \mathbf{e}_n\}$ возможны две ситуации:

а) $\widetilde{A}\mathbf{e}_{r+i} = 0$ для всех $i \in \{0, 1, ..., n-r\}$;

б) $\widetilde{A}\mathbf{e}_{r+i} \neq 0$ для некоторых $i \in \{0, 1, ..., n-r\}$.

В случае а) $\widetilde{\mathbf{x}} \in M_\delta = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in L(e_1, ..., e_{r-1}), \ \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2 \leqslant \delta\}$. По лемме 2 $\operatorname{diam} M_\delta \leqslant C_1\delta^{1/2}$. Следовательно, $\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_0\| \leqslant C_1\delta^{1/2}$.

В случае б) пусть для определенности $\widetilde{A}\mathbf{e}_r \neq 0$ и $\widetilde{A}\mathbf{e}_{r+i} = 0$ для $i = 1, ..., n-r$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{M}_\delta = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_r), \quad \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2 \leqslant \delta\}.$$

Пусть $\mathbf{q}$ — ортогональная проекция точки $\widetilde{\mathbf{x}}$ на прямую $P_r = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + \gamma\mathbf{e}_r, \ \gamma \in E_1\}$. Тогда $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + \gamma_q\mathbf{e}_r$. Пусть для определенности $\gamma_q \geqslant 0$. Рассмотрим точку $\mathbf{z} = \mathbf{p}_0 - C_4\delta^{-1/2}\mathbf{e}_r$. Так как $\|\widetilde{A}\mathbf{e}_r\| = \|(A - \widetilde{A})\mathbf{e}_r\| \leqslant \delta$, то

$$\|\widetilde{A}\mathbf{p}_0 - \widetilde{\mathbf{u}} - A\mathbf{p}_0 + \mathbf{u} - C_4\delta^{-1/2}\widetilde{A}\mathbf{e}_r\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A - \widetilde{A}\|\|\mathbf{p}_0\| + \|\mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}}\| + C_4\delta^{1/2} \leqslant \delta(\|\mathbf{p}_0\| + 1) + C_4\delta^{1/2}.$$

Следовательно, $\|\widetilde{A}\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{u}}\| \leqslant \delta^{1/2}$ при достаточно малых δ и $0 \leqslant C_4 < < 1/2$, т. е. $\mathbf{z} \in \widetilde{Y}$.

Вектор $\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{q}$ принадлежит M_δ и ортогонален $\mathbf{e}_r$. Поскольку по лемме 2 $\operatorname{diam} M_\delta \leqslant C_1\delta^{1/2}$, то

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{q}\| \leqslant C_1\delta^{1/2}. \tag{9.25}$$

В силу монотонности минимизирующей последовательности для $\mathbf{z}$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\| > \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|. \tag{9.26}$$

Так как вектор $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{x}_0)$ ортогонален $\mathbf{e}_r$, то

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_0\|^2 + 2\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\rangle + \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\|^2 = \\ = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_0\|^2 + \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\|^2,$$

т. е.

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\| - \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\| = \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_0\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}_0\|^2}{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\|} \leqslant C_5\delta^{1/2}. \tag{9.27}$$

Из определения точки $\mathbf{q}$ и того, что $\mathbf{z} \in P_r$, следует, что $\|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| < < \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{z}\|$. Таким образом, учитывая 9.26 и 9.27, получаем

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| < \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}\| \leqslant \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\| + C_5\delta^{1/2}.$$

Поскольку точки $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{z}$ лежат на одной прямой P_r, то в силу выбора $\mathbf{z}$ справедливо равенство

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{z}\| = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}_0\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{p}_0\|,$$

поэтому

$$\|\mathbf{q} - \mathbf{p}_0\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{p}_0\| < \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{z}\| + C_5\delta^{1/2},$$

т. е. $\|\mathbf{q} - \mathbf{p}_0\| < C_5\delta^{1/2}$. С учетом 9.25 получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_0\| \leqslant \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{q}\| + \|\mathbf{q} - \mathbf{p}_0\| \leqslant C_3\delta^{1/2}, \\ C_3 = C_1 + C_5. \quad \triangle$$

В заключение заметим, что последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, минимизирующая градиентным методом по предложенной схеме функцию $\widetilde{\varphi}(x) = \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \widetilde{\mathbf{u}}\|^2$, принадлежит множеству $M = \mathbf{x}_0 + (\operatorname{Ker} \widetilde{A}^T\widetilde{A})^\perp$, являющемуся сдвигом подпространства $(\operatorname{Ker} \widetilde{A}^T\widetilde{A})^\perp$ на вектор $\mathbf{x}_0$, где квадратичная функция $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \|\widetilde{A}\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2$ сильно выпукла. Поэтому для $\widetilde{\varphi}(\mathbf{x})$ справедлива оценка скорости сходимости (см. п. 9.5.8)

$$\|\mathbf{x}_k - \widetilde{\mathbf{x}}\|^2 \leqslant \lambda^{-1}\exp(-Ck), \quad C = \text{const} > 0,$$

где λ — минимальное из отличных от нуля собственных значений матрицы $\widetilde{A}^T\widetilde{A}$, а $\widetilde{\mathbf{x}} = \operatorname{argmin}\widetilde{\varphi}(\mathbf{x})$. Следовательно,

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_0\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \widetilde{\mathbf{x}}\| + \|\widetilde{\mathbf{x}} - \mathbf{p}_0\| \leqslant \lambda^{-1/2}\exp\Big(-\frac{Ck}{2}\Big) + C_3\delta^{1/2}.$$

Таким образом, градиентный метод со специальным способом выбора шага обладает саморегуляризующим свойством. Очевидно, что число шагов k, необходимое для достижения точности $O(\delta^{1/2})$, должно быть порядка $|\ln\delta|$.

Замечание. Очевидно, что все вычисления в процессе минимизации проводить с точностью, превышающей порядок величины $\sqrt{\delta}$, бессмысленно.

9.5.7. Как контролировать сходимость процесса градиентной минимизации. Монотонное стремление к нулю последовательности $\{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\}$ является весьма полезным свойством для решения вопроса о целесообразности продолжения либо прекращения процесса градиентного спуска. Для этого, во-первых, следует убедиться в существовании совместного решения неравенств $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \geqslant \frac{1}{2}\beta_k\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2$ и $\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1})\| \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|$. Из леммы 9.3.2 получаем

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \beta\Big(1 - \frac{1}{2}L\beta\Big)\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2,$$

и, следовательно, первое неравенство выполняется при $\beta \in \Big(0, \frac{1}{L}\Big]$. Для исследования второго неравенства воспользуемся свойством (см. [4, с. 175])

$$L\langle\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y}),\ \mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle \geqslant \|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y})\|^2 \quad \forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in E_n, \tag{9.28}$$

справедливым для выпуклых функций из класса $C^{1,1}(E_n)$.

Таким образом, при любых $\beta_k \geqslant \mathbf{0}$ выполняется неравенство

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}\|^2 - (2 - \beta_k L)\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}), \varphi'(\mathbf{x}_k)\rangle + (1 - \beta_k L)\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \leqslant 0.$$

Предположение, что $\beta_k \in \Big(0, \frac{2}{L}\Big]$, позволяет воспользоваться неравенством Коши–Буняковского, которое приводит к соотношению

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}\|^2 - (2 - \beta_k L)\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1})\|\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| + (1 - \beta_k L)\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \leqslant 0.$$

Переписав это неравенство в более наглядном для нашей цели виде

$$\beta_k L\Big(\frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1})\|} - 1\Big) \geqslant \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1})\|}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|} + \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+1})\|} - 2 \geqslant 0,$$

справедливом для $\beta_k \in \Big(0, \frac{2}{L}\Big]$ и тем более для $\beta \in \Big(0, \frac{1}{L}\Big)$, убеждаемся в существовании совместных решений обоих неравенств.

9.5.8. Обобщенный метод градиентного спуска. Часто бывает целесообразным выбирать в качестве направления спуска не антиградиент функции $\varphi(\mathbf{x})$, а

$$-\mathbf{s}_k = -A_k\varphi'(\mathbf{x}_k),$$

где матрицы A_k симметрические и положительно определенные для всех $k = 0, 1, ...$ Существуют различные способы выбора матриц A_k. Ниже будут изложены некоторые из них, но вначале исследуем сходимость процесса.

Итак, последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ будем строить по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k A_k\varphi'(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, ...,$$

а числа β_k выбирать таким образом, чтобы они удовлетворяли либо условию (9.12), либо (9.15).

Сходимость. Предположим, что норма матриц A_k равномерно ограничена сверху: $\|A_k\| \leqslant \zeta$ $(k = 0, 1, ...)$, а все собственные числа этих матриц ограничены снизу числом $\nu > 0$. Тогда для любых $\mathbf{x}$ будет *)

$$\langle A_k\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geqslant \nu_k\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geqslant \nu\|\mathbf{x}\|^2, \quad k = 0, 1, ...,$$

где ν_k — наименьшее собственное число матрицы A_k. В силу этого

$$\alpha_k = \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), A_k\varphi'(\mathbf{x}_k)\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\|A_k\varphi'(\mathbf{x}_k)\|} \geqslant \frac{\nu\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\|A_k\|\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|} \geqslant \frac{\nu}{\zeta} > 0.$$

Из теоремы 9.4.15 с очевидностью следует сходимость процесса, а из теорем 9.4.19 и 9.4.21 — оценки скорости сходимости.

9.5.9. Метод наискорейшего спуска. Это традиционное название метода градиентного спуска, когда величина шага вычисляется путем одномерной минимизации:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\varphi'(\mathbf{x}_k),$$

$$\beta_k = \arg\min\{\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)\colon\ \beta \geqslant 0\}.$$

9.5.10. Метод изменения масштабов. Рассмотрим простой пример. Пусть

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2, \quad \alpha_i > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Если числа α_i существенно различны, то поверхности уровня функции $\varphi(\mathbf{x})$ вытянуты по тем координатным направлениям $\mathbf{e}_i$, которым соответствуют малые значения α_i. В этих случаях обычно говорят,

*) Это так называемое *условие устойчивости*, широко используемое в исследовании приближенных схем (уравнений).

что функция $\varphi(\mathbf{x})$ имеет овражный вид с пологими склонами, соответствующими малым значениям α_i, и с крутыми склонами, соответствующими большим значениям α_i. Если точка $\mathbf{x}_k$ расположена на крутом склоне вблизи "дна оврага", то спуск вдоль антиградиента часто приводит к тому, что точка $\mathbf{x}_{k+1}$ попадает на противоположный склон. И поскольку антиградиент почти перпендикулярен дну оврага, то сходимость процесса минимизации будет существенно замедляться. Заменой переменных можно добиться того, чтобы поверхности уровня стали иметь сферический вид, гарантирующий высокую скорость сходимости градиентного (например, наискорейшего) спуска. В нашем примере для этого нужно взять $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{x}$, где

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\alpha_n} \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\varphi'(\mathbf{y}) = A\varphi'(A\mathbf{y}) = A\varphi'(\mathbf{x})$, то, если спуск ранее происходил по формуле $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\varphi'(\mathbf{x}_k)$, теперь он будет осуществляться по формуле

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k - \beta_k A\varphi'(\mathbf{y}_k).$$

Если $\varphi(\mathbf{x})$ — гладкая выпуклая функция, выбирают

$$\alpha_i = \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}$$

в точке $\mathbf{x}$ одномерного минимума вдоль направления $\mathbf{e}_i$, и хотя это преобразование не превратит поверхности уровня в сферы, но уменьшит их вытянутость и тем самым облегчит применение градиентных методов минимизации.

Величины $\dfrac{\partial^2\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}$ вычисляют приближенно, пользуясь их конечно-разностной аппроксимацией. Последовательные приближения величин масштабных множителей α_i обычно получают в результате применения метода циклического покоординатного спуска (см. п. 9.7.8).

Итак, метод изменения масштабов в сочетании с методом спуска вдоль антиградиента можно интерпретировать как обобщенный метод градиентного спуска, где в качестве A_k выбирается диагональная матрица A вторых производных.

9.5.11. Метод Давидона–Флетчера–Пауэлла. В этом методе итерации осуществляются по следующей схеме:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k A_k\varphi'(\mathbf{x}_k),$$

$$A_{k+1} = A_k + \frac{\mathbf{r}_k\mathbf{r}_k^T}{\langle\mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k\rangle} - \frac{(A_k\mathbf{q}_k)(A_k\mathbf{q}_k)^T}{\langle A_k\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k\rangle}, \quad A_0 = E,$$

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{q}_k = \varphi'(\mathbf{x}_{k+1}) - \varphi'(\mathbf{x}_k),$$
$$\beta_k = \arg\min\{\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta A_k \varphi'(\mathbf{x}_k)) \colon \beta \geqslant 0\},$$
$$k = 0, 1, \ldots$$

Этим методом задача минимизации строго выпуклой квадратичной функции решается за конечное число итераций, не превосходящее числа n — размерности пространства E_n. Поскольку часто бывает естественным предположение, что в окрестности точки минимума поведение функции $\varphi(\mathbf{x})$ близко к поведению строго выпуклой квадратичной функции, то применение метода Давидона–Флетчера–Пауэлла, как и других методов, обладающих указанным свойством конечности, оказывается удачным на последнем этапе процесса минимизации.

Как правило, в методе осуществляют обновление (иногда говорят — восстановление) матрицы A_k через конечное число итераций: для некоторого номера k_0 полагают $A_{k_0} = A_0$.

Метод Давидона–Флетчера–Пауэлла можно рассматривать как один из вариантов метода сопряженных направлений.

9.5.12. Сходимость. Будем предполагать, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ из класса $C^{1,1}(E_n)$ обладает следующим свойством:

А) $\langle \varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$

Заметим, что указанным свойством обладают сильно выпуклые функции.

Очевидно, что матрицы A_k симметрические (легко доказывается по индукции). Докажем, что матрица A_{k+1} положительно определенная, при индуктивном предположении симметричности и положительной определенности матрицы A_k.

Выберем любой $\mathbf{x} \neq 0$ и, учитывая существование симметрической матрицы $A_k^{1/2}$, обозначим $\mathbf{y} = A_k^{1/2}\mathbf{x}$, $\mathbf{z} = A_k^{1/2}\mathbf{q}_k$. Тогда

$$\langle A_k \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A_k^{1/2} A_k^{1/2} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A_k^{1/2}\mathbf{x}, A_k^{1/2}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle,$$
$$\langle A_k \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k \rangle = \langle A_k^{1/2}\mathbf{q}_k, A_k^{1/2}\mathbf{q}_k \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle,$$
$$\langle A_k \mathbf{q}_k, \mathbf{x} \rangle = \langle A_k^{1/2}\mathbf{q}_k, A_k^{1/2}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle.$$

Далее,

$$\text{В)}\ \langle A_{k+1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A_k \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \frac{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{x} \rangle^2}{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k \rangle} - \frac{\langle A_k \mathbf{q}_k, \mathbf{x} \rangle^2}{\langle A_k \mathbf{q}_k, \mathbf{q}_k \rangle} =$$
$$= \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{x} \rangle^2}{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k \rangle} = \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{x} \rangle^2}{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k \rangle}.$$

Из неравенства Коши–Буняковского

$$|\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{z}\| \|\mathbf{y}\|$$

следует

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle^2 \geqslant 0,$$

причем равенство достигается лишь, если $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{z}$. Но в этом случае $A_k^{1/2}\mathbf{x} = \alpha A_k^{1/2}\mathbf{q}_k$, и в силу невырожденности матрицы $A_k^{1/2}$ будет $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{q}_k$. Заметим, что $\alpha \neq 0$, так как $\mathbf{x} \neq 0$. Из условия А) получаем $\langle \mathbf{q}_k, \mathbf{r}_k \rangle > 0$, вследствие чего $\langle \mathbf{r}_k \mathbf{x} \rangle = \alpha \langle \mathbf{r}_k \mathbf{q}_k \rangle > 0$, и для последнего слагаемого правой части соотношения В) имеем

$$\frac{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{x} \rangle^2}{\langle \mathbf{r}_k, \mathbf{q}_k \rangle} > 0.$$

И окончательно из В) получаем, что $\langle A_{k+1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$, т. е. положительную определенность матрицы A_{k+1}.

Если итерационный процесс осуществляется с обновлением, то для сильно выпуклой дважды дифференцируемой функции можно доказать, что

$$\|A_k\| \leqslant \zeta \text{ и } \langle A_k \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant \nu \|\mathbf{x}\|^2, \quad \nu > 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Поэтому из теоремы 9.4.21 (см. также п. 9.5.3) следует, что

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho} \exp\{-Cm\}.$$

9.5.13. Метод Ньютона. Если функция $\varphi(x)$ строго выпуклая и достаточно гладкая в окрестности U точки $\mathbf{x}^*$, то для $\mathbf{x}_k \in U$ функция

$$\psi\langle \mathbf{x} \rangle = \varphi(\mathbf{x}_k) + \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi''(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \rangle$$

будет с достаточно высокой степенью точности аппроксимировать $\varphi(\mathbf{x})$. Минимум функции $\psi(\mathbf{x})$ (речь идет о локальном минимуме в окрестности U) достигается в точке

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_k - (\varphi''(\mathbf{x}_k))^{-1} \varphi'(\mathbf{x}_k),$$

поскольку $\psi'(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}_k) + \varphi''(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$. Таким образом, в качестве направления спуска целесообразно выбирать

$$-\mathbf{s}_k = -(\varphi''(\mathbf{x}_k))^{-1} \varphi'(\mathbf{x}_k).$$

По сути дела, в методе градиентного спуска мы ограничивались линейной аппроксимацией функции $\varphi(\mathbf{x})$ и в качестве направления спуска выбирали направление убывания линейной функции $\psi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_k) + \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \rangle$, т. е. $-\psi'(\mathbf{x}) = -\varphi'(\mathbf{x}_k) = -\mathbf{s}_k$. В методе Ньютона мы прибегаем к квадратичной аппроксимации функции $\varphi(\mathbf{x})$, и поэтому можно надеяться, что в случае, если точка $\mathbf{x}_k$ расположена в достаточно малой окрестности точки $\mathbf{x}^*$, направление $-\mathbf{s}_k =$

$= -(\varphi''(\mathbf{x}_k))^{-1}\varphi'(\mathbf{x}_k)$ обеспечит более высокую скорость сходимости итерационного процесса.

Для вывода оценки скорости сходимости будем дополнительно предполагать, что матрица $\varphi''(\mathbf{x})$ невырождена для всех $\mathbf{x} \in U$.

Обозначим $F(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x})$. В методе Ньютона для решения уравнения $F(\mathbf{x}) = 0$ рекуррентное соотношение записывается следующим образом:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (F'(\mathbf{x}_k))^{-1}F(\mathbf{x}_k).$$

Сделаем преобразования:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* - (F'(\mathbf{x}_k))^{-1}F(\mathbf{x}_k) = \\ = (F'(\mathbf{x}_k))^{-1}(F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - F(\mathbf{x}_k)) = \\ = (F'(\mathbf{x}_k))^{-1}(F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - (F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*))).\end{aligned}$$

Поскольку $F'(\mathbf{x})$ и $F''(\mathbf{x})$ непрерывны в окрестности точки x^* и, значит, ограничены, то

$$F'(\mathbf{x}_k) = F'(\mathbf{x}^*) + \omega(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*), \quad \|\omega(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*\| \leqslant C_1\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|,$$
$$F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) = F'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + \varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*),$$
$$\|\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*)\| \leqslant C_2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|F(\mathbf{x}_k) - F(\mathbf{x}^*) - F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)\| = \|F'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + \\ + \varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*) - F'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) - \omega(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*)\| \leqslant \\ \leqslant \|\varepsilon(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*)\| + \|\omega(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}^*)\|\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leqslant C_3\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2.\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leqslant C\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

9.5.14. Модификация метода Ньютона. Поскольку процесс вычисления на каждой итерации матрицы Гессе $\varphi''(\mathbf{x}_k)$ и ее обращения требует значительных вычислительных затрат, обычно пользуются различными модификациями метода. Простейшая из них заключается в следующем. Задают число $m \geqslant 1$, определяющее цикл, состоящий из m итераций. На каждом l-м цикле все итерации осуществляют с постоянной матрицей $(\varphi''(\mathbf{x}))^{-1}$:

$$\mathbf{x}_{lm+i+1} = \mathbf{x}_{lm+i} - \beta_{lm+i}(\varphi''(\mathbf{x}_{lm}))^{-1}\varphi'(\mathbf{x}_{lm+i}),$$
$$i = \overline{0, m-1},$$

после чего переходят к следующему циклу с матрицей $(\varphi''(\mathbf{x}_{l(m+1)}))^{-1}$. Скорость сходимости при этом снижается, но общие вычислительные затраты на каждой итерации существенно сокращаются.

9.5.15. Ускоренный метод Ньютона. В методе Ньютона по точке $\mathbf{x}$ из достаточно малой окрестности U точки $\mathbf{x}^*$ строится точка $\mathbf{y} = \mathbf{x} - (\varphi''(\mathbf{x}))^{-1}\varphi'(\mathbf{x})$, для которой справедливо соотношение

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| \leqslant C\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Ниже рассматривается метод получения точки $\mathbf{y}_p$ $(p \geqslant 1)$, для которой выполняется соотношение

$$\|\mathbf{y}_p - \mathbf{x}^*\| \leqslant C\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^{p+1}. \tag{9.29}$$

Как и в п. 9.5.13, будем предполагать, что функция $\varphi(\mathbf{x})$ строго выпуклая и достаточно гладкая в окрестности U точки $\mathbf{x}^*$.

Проиллюстрируем метод на примере случая $p = 2$. Рассмотрим уравнение

$$F(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x}) = 0. \tag{9.30}$$

Воспользовавшись формулой Тейлора

$$F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F'(\mathbf{x})[\mathbf{y} - \mathbf{x}] + \frac{1}{2}F''(\mathbf{x})[\mathbf{y} - \mathbf{x}]^2 + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где $\|\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)$, будем выбирать в качестве $\mathbf{y}$ приближенное решение системы нелинейных уравнений

$$F(\mathbf{x}) + F'(\mathbf{x})[\mathbf{y} - \mathbf{x}] + \frac{1}{2}\,F''(\mathbf{x})[\mathbf{y} - \mathbf{x}]^2 = 0. \tag{9.31}$$

Для отыскания элемента $\mathbf{y}$ линеаризуем систему (9.31) следующим образом: в третье слагаемое вместо неизвестной величины $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ подставим вектор $-(F'(\mathbf{x}))^{-1}F(\mathbf{x})$ из классического метода Ньютона. Таким образом, получаем линейную систему уравнений относительно $\mathbf{y}$:

$$F(\mathbf{x}) + F'(\mathbf{x})[\mathbf{y} - \mathbf{x}] - \frac{1}{2}\,F''(\mathbf{x})\{(F'(\mathbf{x}))^{-1}F(\mathbf{x})\}[\mathbf{y} - \mathbf{x}]^2 = 0,$$

решением которой является

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \left\{F'(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\,F''(\mathbf{x})\{(F'(\mathbf{x}))^{-1}F(\mathbf{x})\}\right\}^{-1} F(\mathbf{x}).$$

Возвращаясь к функции $\varphi(\mathbf{x})$, получаем формулу для вычисления очередного приближения

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \left\{\varphi''(\mathbf{x}_k) - \frac{1}{2}\,\varphi'''(\mathbf{x}_k)\{(\varphi''(\mathbf{x}_k))^{-1}\varphi'(\mathbf{x}_k)\}\right\}^{-1} \varphi'(\mathbf{x}_k). \tag{9.32}$$

В этом случае также оказывается справедливой оценка

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leqslant C\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^3.$$

Перейдем к описанию метода для общего случая $p \geqslant 2$. Рассмотрим матрицы $P_k(\mathbf{x})$ и элементы $g_k(\mathbf{x})$, удовлетворяющие рекуррентным соотношениям

$$P_1(\mathbf{x}) = F'(\mathbf{x}), \quad g_1(\mathbf{x}) = (P_1(\mathbf{x}))^{-1}F(\mathbf{x}),$$
$$P_m(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}F^{(k)}(\mathbf{x})[g_{m-1}(\mathbf{x})]^{k-1},$$
$$g_m(\mathbf{x}) = -(P_m(\mathbf{x}))^{-1}F(\mathbf{x}), \quad m = \overline{1,p}.$$

Будем предполагать, что в окрестности U точки $\mathbf{x}^*$ производные $F^{(k)}(\mathbf{x})$, $k = \overline{1,m}$, ограничены в совокупности, а матрица $F'(\mathbf{x}^*)$ невырождена.

Теорема. *Для всех точек* $\mathbf{x}$, *достаточно близких к* $\mathbf{x}^*$, *матрицы* $P_k(\mathbf{x})$ *невырождены и выполняется условие*

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + g_k(\mathbf{x}) + \omega_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}), \tag{9.33}$$

где $\|\omega_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^{k+1}$ $(k = \overline{1,p})$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу k. При $k = 1$ вследствие невырожденности матрицы $F'(\mathbf{x})$ условие (9.33) есть оценка скорости сходимости метода Ньютона.

Предположим, что для всех $k \leqslant m-1$ матрицы $P_k(\mathbf{x})$ невырождены и выполняется соотношение (9.33). Пусть $k = m \leqslant p$. Из формулы Тейлора и определения $P_m(\mathbf{x})$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = F(\mathbf{x}^*) &= F(\mathbf{x}) + P_1(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}] + \\ &+ \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^k + \nu(\mathbf{x}^*\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + P_m(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}] + \\ &+ \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\{F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^k - F^{(k)}(\mathbf{x})[g_{m-1}(\mathbf{x})]^{k-1}[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]\} + \nu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}), \end{aligned} \tag{9.34}$$

где $\|\nu(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})\| \leqslant \dfrac{1}{(m+1)!} \max\limits_{\xi \in [\mathbf{x}^*, \mathbf{x}]} \|F^{(m+1)}(\zeta)\| \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^{m+1}$.

По предположению индукции

$$g_{m-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* - \mathbf{x} - \omega_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}), \ \|\omega_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^m,$$

поэтому

$$\begin{aligned} F^{(k)}(\mathbf{x})[g_{m-1}(\mathbf{x})]^{k-1}[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}] &= \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\}^{k-i}[\omega_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})]^i = \\ &= F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^k + \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^i F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^{k-i}[\omega_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})]^i. \end{aligned}$$

Значит,

$$\left\| \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \{F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^k - F^{(k)}(\mathbf{x})[g_{m-1}(\mathbf{x})]^{k-1}[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]\} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k-1} C_{k-1}^{i} F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}]^{k-i} [\omega_{m-1}(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})]^i \right\|. \quad (9.35)$$

Так как в силу предположений теоремы производные $F^{(k)}(\mathbf{x})$ непрерывны в окрестности точки $\mathbf{x}^*$, то

$$\|F^{(k)}(\mathbf{x})[\mathbf{z}]^{k-p}[\mathbf{v}]^p\| \leqslant N\|\mathbf{z}\|^{k-p}\|\mathbf{v}\|^p, \quad N > 0,$$

для любых $\mathbf{z}$, $\mathbf{v}$ и $p = \overline{0, k}$. Поэтому правая часть неравенства (9.35) не превосходит величины $C\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^{m+1}$, где $C > 0$ — некоторая ограниченная константа.

Таким образом, соотношение (9.34) записывается в виде

$$F(\mathbf{x}) + P_m(\mathbf{x})[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}] + \delta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) = 0,$$

где

$$\|\delta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})\| \leqslant C\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^{m+1};$$

кроме того, поскольку $P_m(\mathbf{x}^*) = F'(\mathbf{x}^*)$, а по предположению индукции $\|g_{m-1}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| + o(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^{m-1})$, то из определения $P_m(\mathbf{x})$ следует, что $P_m(\mathbf{x})$ с точностью до величины порядка $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|$ совпадает с $F'(\mathbf{x}^*)$. Значит, при всех $\mathbf{x}$, достаточно близких к $\mathbf{x}^*$, матрицы $P_m(\mathbf{x})$ невырождены и условие (9.34) влечет равенство

$$\mathbf{x}^* - \mathbf{x} = g_m(\mathbf{x}) - P_m^{-1}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}),$$

которое и доказывает утверждение. Полагая $\mathbf{y}_p = \mathbf{x} + g_p(\mathbf{x})$, получаем неравенство $\|\mathbf{y}_p - \mathbf{x}^*\| \leqslant C\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^{p+1}$. $\triangle$

Заметим, что при $p = 1$ метод построения точки $\mathbf{y}_p$ совпадает с обычным методом Ньютона.

Рассмотренный метод имеет при $p > 1$ в ряде случаев определенные преимущества по сравнению с обычным методом Ньютона; в частности, если производные $F^{(k)}(\mathbf{x})$ имеют малое число ненулевых элементов, то трудоемкость предложенного метода будет того же порядка, что и в методе Ньютона. Кроме того, существуют задачи, в которых старшие производные функции $F(\mathbf{x})$ вычисляются существенно проще, нежели значения $F(\mathbf{x})$ и $F'(\mathbf{x})$. Так обстоит дело, например, в традиционной задаче алгебры — нахождении корней многочленов высоких степеней.

9.5.16. В высокой скорости сходимости заключается видимое преимущество метода Ньютона перед другими итерационными методами. Однако трудоемкость одной итерации метода Ньютона, перехода от $\mathbf{x}_k$ к $\mathbf{x}_{k+1}$, связана с вычислением и обращением матрицы вторых производных $\varphi''(x_k)$ и может оказаться столь высокой, что никак

не будет компенсировать достижение значения $\varphi(\mathbf{x}_{k+1})$ несколькими итерациями другого, менее трудоемкого метода. Таким образом, вопрос о целесообразности применения метода Ньютона неразрывно связан с проблемой эффективности всего итерационного процесса, т. е. с общим количеством вычислений, затрачиваемых на решение задачи с определенной точностью. Именно в силу этих известных соображений возникла необходимость создания методов, менее трудоемких, но обладающих скоростью сходимости, близкой к скорости метода Ньютона. Так возникли методы квазиньютоновского типа. Методом Ньютона задача минимизации строго выпуклой квадратичной функции решается за одну итерацию. В методах квазиньютоновского типа матрицы A_k строят по рекуррентным соотношениям таким образом, чтобы последовательные приближения $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k A_k \varphi'(\mathbf{x}_k)$ минимизировали строго выпуклую квадратичную функцию за конечное число итераций. Изложенный в п. 9.5.11 метод — типичный метод квазиньютоновского типа.

В следующем параграфе рассматриваются методы, также обладающие свойством конечности для задач квадратичной минимизации, и с этой точки зрения их следует отнести к методам квазиньютоновского типа.

9.6. Метод сопряженных направлений

9.6.1. Схема метода.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \quad k = 0, 1, ...,$$

$$\mathbf{s}_0 = \varphi'(\mathbf{x}_0), s_k = \varphi'(\mathbf{x}_k) - \xi_k \mathbf{s}_{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{9.36}$$

$$\beta_k = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k) : \beta \geqslant 0\}, \quad k = 0, 1, ... \tag{9.37}$$

Различные варианты метода сопряженных направлений отличаются способами выбора параметра ξ_k. Заметим, что при $\xi_k = 0$ метод вырождается в метод наискорейшего спуска.

Условие (9.37) выбора величины β_k определяет следующие две особенности последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$.

9.6.2. Лемма. *Для дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{x})$ последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, построенная по схеме* (9.11), (9.36), (9.37), *такова, что выполняются следующие соотношения*:

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{s}_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, ..., \tag{9.38}$$

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle = \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2, \quad k = 0, 1, ... \tag{9.39}$$

Доказательство. Из условия (9.37) следует, что при $\beta_k > 0$ будет

$$\frac{d}{d\beta} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k)|_{\beta = \beta_k} = 0,$$

а при $\beta_k = 0$ будет

$$\frac{d}{d\beta}\,\varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)|_{\beta=0} \geqslant 0.$$

Если $\beta_k > 0$, то

$$0 = \frac{d}{d\beta}\,\varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)|_{\beta=\beta_k} - \langle\varphi'(\mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k), \mathbf{s}_k\rangle = -\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{s}_k\rangle.$$

Доказательство того, что соотношение (9.38) справедливо и для $\beta_k = 0$, будем проводить по индукции. Если $\beta_0 = 0$, то из $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{s}_0 = \varphi'(\mathbf{x}_0)$ получаем

$$0 \leqslant \frac{d}{d\beta}\,\varphi(\mathbf{x}_0 - \beta\mathbf{s}_0)|_{\beta=0} - \langle\varphi'(\mathbf{x}_1), \mathbf{s}_0\rangle = -\|\varphi'(\mathbf{x}_0)\|^2,$$

откуда следует равенство

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_1), \mathbf{s}_0\rangle = 0.$$

Пусть справедливо соотношение $\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_{k-1}\rangle = 0$. Докажем, что

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{s}_k\rangle = 0$$

при $\beta_k = 0$. Так как $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, то из (9.36) получаем

$$0 \leqslant \frac{d}{d\beta}\,\varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)|_{\beta=0} = -\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+1}), \mathbf{s}_k\rangle = -\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle =$$
$$= -\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \varphi'(\mathbf{x}_k) - \xi_k\mathbf{s}_{k-1}\rangle = -\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2,$$

откуда и следует (9.38).

Наконец, соотношение (9.39) является очевидным следствием равенств (9.36) и (9.38). $\triangle$

9.6.3. Лемма. *Если*

$$|\xi_k| \leqslant C\,\frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}{\|\mathbf{s}_{k-1}\|}, \quad k = 1, 2, ..., \tag{9.40}$$

для некоторого $C > 0$, *то*

$$\alpha_k = \frac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\|\mathbf{s}_k\|} \geqslant \frac{1}{1+C}. \tag{9.41}$$

Доказательство, очевидно, следует из соотношений (9.38) и (9.39). $\triangle$

9.6.4. Сходимость. Из теоремы 9.4.15 с очевидностью следует сходимость процесса, а из теорем 9.4.19 и 9.4.21 — оценка скорости сходимости.

В качестве примеров реализации метода сопряженных направлений рассмотрим два способа выбора параметров ξ_k, обеспечивающих конечность метода в квадратичном случае.

9.6.5. Способ 1.

$$\xi_k = -\frac{1}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2}\,\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\rangle.$$

Покажем, что для сильно выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ из класса $C^{1,1}(E_n)$ выполняется условие (9.28). Из предположения о сильной выпуклости имеем (см. п. 2.2.5)

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\rangle \geqslant \rho\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|^2,$$

откуда, учитывая (9.11), (9.38) и (9.39), получаем неравенство

$$\rho\beta_{k-1}^2\|\mathbf{s}_{k-1}\|^2 \leqslant -\beta_{k-1}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{s}_{k-1}\rangle = \\ = \beta_{k-1}\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k-1}), \mathbf{s}_{k-1}\rangle = \beta_{k-1}\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2.$$

Так как мы всегда предполагаем, что для всех $k = 0, 1, \ldots$ будет $\varphi'(\mathbf{x}_k) \neq 0$, то из доказательства леммы 9.6.2 вытекает, что $\beta_k > 0$, поскольку из $\beta_{k-1} = 0$ следует $\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\| = 0$. Итак,

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2 \geqslant \rho\beta_{k-1}\|\mathbf{s}_{k-1}\|^2.$$

Учитывая это и условие

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\| \leqslant L\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|,$$

оценим величину ξ_k:

$$|\xi_k| = \frac{1}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2}\,|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\rangle| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2}\,\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2}\,\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|L\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| = \\ = \frac{L}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2}\,\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\beta_{k-1}\|\mathbf{s}_{k-1}\| \leqslant \\ \leqslant \frac{L}{\rho\beta_{k-1}\|\mathbf{s}_{k-1}\|^2}\,\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\beta_{k-1}\|\,\mathbf{s}_{k-1} = \frac{L}{\rho}\frac{\|\varphi(\mathbf{x}_k)\|}{\|\mathbf{s}_{k-1}\|}.$$

Таким образом, выполняется условие (9.40), и поэтому из теоремы 9.4.21 получаем оценки

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\{-C_1 m\},$$
$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\,\mu_0 \exp\{-C_1 m\},$$

где $0 < C_1 \leqslant \dfrac{\rho^3}{2L(\rho+L)^2}$.

9.6.6. Способ 2.

$$\xi_k = -\frac{\langle \varphi''(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_{k-1}, \varphi'(\mathbf{x}_k)\rangle}{\langle \varphi''(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}\rangle}.$$

Хотя в этом способе выбора параметра ξ_k приходится на каждой итерации вычислять матрицу вторых производных, но, в отличие от метода Ньютона, не требуется обращать эту матрицу. Заметим, что число умножений при обращении матрицы n-го порядка пропорционально n^3.

Элементарный анализ сходимости полезен своей методической стороной, поскольку аналогичная методика приемлема для оценок скорости сходимости методов квазиньютоновского типа, многочисленные варианты которых содержатся в различных статьях и не перестают появляться в математической литературе до последнего времени. Предположим, что сильно выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема с равномерно ограниченной нормой матрицы $\varphi''(\mathbf{x})$ на ограниченном множестве $X_0 = \{\mathbf{x}\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$:

$$\|\varphi''(\mathbf{x})\| \leqslant \nu < \infty.$$

Так как

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{y}) - \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \varepsilon\langle \varphi''(\mathbf{x}+\varepsilon\theta\mathbf{y})\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

то, учитывая свойство сильной выпуклости (2.5.5), получаем, что $\langle \varphi''(\mathbf{x}+\varepsilon\theta\mathbf{y})\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \geqslant \rho\|\mathbf{y}\|^2$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к соотношению

$$\langle \varphi''(\mathbf{x})\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \geqslant \rho\|\mathbf{y}\|^2, \tag{9.42}$$

справедливому для любого $\mathbf{y} \in E_n$. Вследствие этого имеет место неравенство

$$|\xi_k| = \frac{|\langle \varphi''(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_{k-1}, \varphi'(\mathbf{x}_k)\rangle|}{|\langle \varphi''(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{s}_{k-1}\rangle|} \leqslant \frac{\|\varphi''(\mathbf{x}_k)\|\|\mathbf{s}_{k-1}\|\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}{\rho\|\mathbf{s}_{k-1}\|^2} \leqslant \frac{\nu}{\rho}\frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}{\|\mathbf{s}_{k-1}\|},$$

и поэтому из теоремы 9.4.21 получаем оценки

$$\varphi(\mathbf{x}_m - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\{-C_2 m\},$$
$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\{-C_2 m\},$$

где

$$0 < C_2 \leqslant \frac{\rho^3}{2L(\rho+\nu)^2}.$$

9.6.7. Обсуждение. Хотя приведенные оценки справедливы для всех $m = 1, 2, \ldots$ и гарантируют определенную скорость сходимости метода сопряженных направлений, как уже говорилось, они не выявляют следующего преимущества метода: для строго выпуклой квадратичной функции $\varphi(\mathbf{x})$ каждый из приведенных способов определения величины ξ_k приводит к тому, что метод дает решение задачи за конечное число шагов, не превосходящее величины n — размерности пространства E_n. Этот факт играет существенную роль в использовании метода для решения задач минимизации неквадратичных функций. А именно, по методу сопряженных направлений делают n итераций, после чего производят так называемое *обновление* метода, полагая $\xi_n = 0$, т. е. осуществляют градиентный спуск. Таким образом, схема метода в этом случае будет выглядеть так:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \quad \mathbf{s}_k = \varphi'(\mathbf{x}_k) - \overline{\xi}_k \mathbf{s}_{k-1},$$

$$\overline{\xi}_k = \begin{cases} \xi_k, & k \in I_1, \\ 0, & k \in I_2 = \{0, n, 2n, 3n, \ldots\}, \end{cases}$$

$$I_1 \cup I_2 = \{0, 1, \ldots\}, \quad \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) = \min_{\beta \geqslant 0} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k),$$

а величина ξ_k определяется из соображений конечности метода в квадратичном случае, например одним из приведенных выше способов. Это так называемая *n-шаговая схема.*

Наконец, следует отметить, что метод сопряженных направлений весьма чувствителен к ошибкам, возникающим в процессе счета, поскольку при $\lambda_k \neq 1$ в (9.12) нарушается свойство ортогональности (9.38) и тем самым нарушается свойство конечности метода в квадратичном случае.

9.6.8. О сопряженных направлениях. Рассмотрим симметрическую положительно определенную матрицу A. Векторы $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_1$, ..., $\mathbf{s}_{n-1}$ называются *сопряженными относительно матрицы* A, если

$$\langle \mathbf{s}_i, A\mathbf{s}_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

Можно доказать, что для задачи минимизации квадратичной функции $\varphi(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ с симметрической и положительно определенной матрицей A векторы $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_1$, ..., $\mathbf{s}_{n-1}$, построенные методом сопряженных направлений, являются сопряженными относительно матрицы A. То же самое касается и векторов $\mathbf{s}_0$, $\mathbf{s}_1$, ..., $\mathbf{s}_{n-1}$, вырабатываемых в методе переменной метрики, и в этом смысле его можно рассматривать как метод сопряженных направлений.

9.7. Методы нулевого порядка

9.7.1. Покоординатный спуск. По-видимому, наиболее простым из детерминированных способов определения направления спуска является выбор в качестве $\mathbf{s}_k$ одного из координатных векторов

$\pm\mathbf{e}_1, \pm\mathbf{e}_2, ..., \pm\mathbf{e}_n$, вследствие чего у $\mathbf{x}_k$ на каждой итерации изменяется лишь одна из компонент.

Существуют многочисленные варианты покоординатного спуска, из которых лишь некоторые будут рассмотрены в этом параграфе. Сразу отметим, что в любом из этих методов выбирают в качестве $-\mathbf{s}_k$ то из двух направлений $+\mathbf{e}_j$, $-\mathbf{e}_j$, которому соответствует неравенство

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle > 0.$$

Если $\dfrac{\partial \varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_j} = 0$, полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ и переходят к следующей итерации. Для простоты изложения этот случай мы исключим из рассмотрения, поскольку существа дела он не меняет, тем более, что мы предполагаем $\varphi'(\mathbf{x}_k) \neq 0$ $(k = 0, 1, ...)$.

9.7.2. Покоординатный спуск с удвоением шага (первый вариант). Опишем первый цикл метода, состоящий из n итераций.

В произвольной точке $\mathbf{x}_0$ выбирают $\mathbf{s}_0 = \pm\mathbf{e}_1$ и определяют величину β_0 способом удвоения (см. 9.4.4) так, чтобы было $\varphi(\mathbf{x}_1) = \varphi(\mathbf{x}_0 - \beta_0\mathbf{s}_0) < \varphi(\mathbf{x}_0)$. Затем выбирают $\mathbf{s}_1 = \pm\mathbf{e}_2$ и, полагая $\beta = \beta_0$, удвоением вычисляют β_1 и т. д. При этом на каждой итерации стремятся определение величины шага методом удвоения осуществлять с наименьшим числом вычислений значений функции $\varphi(\mathbf{x})$. Цикл заканчивается при $k = n - 1$, после чего начинают следующий цикл, полагая $\mathbf{s}_n = \pm\mathbf{e}_1$, и т. д.

9.7.3. Покоординатный спуск с удвоением шага (второй вариант). Каждый цикл метода характеризуется тем, что величина шага в течение всех n итераций цикла остается постоянной. Цикл состоит в вычислении точек $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, ..., \mathbf{x}_{k+n-1}$. Предполагается, что в результате завершения предыдущего цикла получена величина $\beta = \beta_{k-1}$.

$(i+1)$-я итерация цикла $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Если

A) $\varphi(\mathbf{x}_{k+i} - \beta\mathbf{e}_{i+1}) < \varphi(\mathbf{x}_{k+i})$,

то полагают $\mathbf{x}_{k+i+1} = \mathbf{x}_{k+i} - \beta\mathbf{e}_{i+1}$ и переходят к следующей итерации.

Если

B) $\varphi(\mathbf{x}_{k+i} - \beta\mathbf{e}_{i+1}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_{k+i})$,

то вычисляют $\varphi(\mathbf{x}_{k+i} + \beta\mathbf{e}_{i+1})$.

Если

C) $\varphi(\mathbf{x}_{k+i} + \beta\mathbf{e}_{i+1}) < \varphi(\mathbf{x}_{k+i})$,

то полагают $\mathbf{x}_{k+i+1} = \mathbf{x}_{k+i} + \beta\mathbf{e}_{i+1}$ и переходят к следующей итерации.

Если же

D) $\varphi(\mathbf{x}_{k+i} + \beta\mathbf{e}_{i+1}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_{k+i})$,

то полагают $\mathbf{x}_{k+i+1} = \mathbf{x}_{k+i}$ и переходят к следующей итерации.

Если неравенства B) и D) имеют место для всех $0 \leqslant i \leqslant \leqslant n-1$, то уменьшают величину β, как правило, полагая $\beta = \beta_{k-1}/2$, и переходят к следующему циклу, т. е. повторяют все процедуры предыдущего цикла, но уже с вдвое меньшим шагом.

9.7.4. Предположения. При исследовании сходимости метода 9.7.3 будем предполагать, что:

1) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$;

2) X_0 — ограниченное множество.

9.7.5. Сходимость. Вначале докажем, что $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Если это не так, то найдется номер k_0 такой, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $\beta_k = \beta > 0$ и, следовательно, $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k) \quad \forall k \geqslant k_0$. Поскольку $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| = \beta > 0 \quad \forall k \geqslant k_0$, то число точек, попадающих в ограниченное множество X_0, конечно, и найдется такой номер $k_1 > k_0$, начиная с которого наступит ситуация $\mathbf{x}_k \notin X_0 \quad \forall k \geqslant k_1$, противоречащая определению множества X_0. $\triangle$

Рассмотрим все циклы, для которых одновременно выполняются неравенства B) и D) при всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Так как длина шага стремится к нулю при $k \to \infty$, то число таких циклов бесконечно. Перенумеруем эти циклы таким образом, чтобы было

$$\varphi(\mathbf{x}_m + \beta_m \mathbf{e}_{i+1}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_m), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad m = 0, 1, ...,$$

$$\varphi(\mathbf{x}_m - \beta_m \mathbf{e}_{i+1}) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_m), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad m = 0, 1, ...$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{x}_m + \beta_m \mathbf{e}_{i+1}) - \varphi(\mathbf{x}_m) = \beta_m \langle \varphi'(\mathbf{x}_m + \theta_1 \beta_m \mathbf{e}_{i+1}), \mathbf{e}_{i+1} \rangle \geqslant 0,$$
$$i = \overline{0, n-1}, \quad m = 0, 1, ...,$$
$$\varphi(\mathbf{x}_m - \beta_m \mathbf{e}_{i+1}) - \varphi(\mathbf{x}_m) = \beta_m \langle \varphi'(\mathbf{x}_m - \theta_2 \beta_m \mathbf{e}_{i+1}), -\mathbf{e}_{i+1} \rangle \geqslant 0,$$
$$i = \overline{0, n-1}, \quad m = 0, 1, ...$$

Из последовательности $\{\mathbf{x}_m\}$ (вспомним, что она принадлежит ограниченному множеству X_0) выберем сходящуюся подпоследовательность $\lim\limits_{j \to \infty} \mathbf{x}_{m_j} = \overline{\mathbf{x}}$. Поскольку $\lim\limits_{j \to \infty} \beta_{m_j} = 0$, а функция $\varphi'(\mathbf{x})$ непрерывна, то из последних неравенств в результате предельного перехода получаем соотношения

$$\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \mathbf{e}_{i+1} \rangle \geqslant 0, \quad \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), -\mathbf{e}_{i+1} \rangle \geqslant 0, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Таким образом, $\varphi'(\mathbf{x}) = 0$ в любой предельной точке последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, откуда следует

$$\lim_{k \to \infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0. \ \triangle$$

9.7.6. Классическая схема. В этом разделе приводится схема метода покоординатного спуска, не обладающая достоинством независимости выбора направления спуска от градиента функции, но

зато имеющая оценки, гарантирующие для выпуклых функций сходимость процесса минимизации со скоростью порядка $O(1/m)$. Эти оценки интересны тем, что они существенно зависят от числа n — размерности пространства E_n.

Пусть $\mathbf{x}_k$ уже известен; обозначим

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} \left|\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j}\right|.$$

Можно считать, что

$$\left|\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j}\right| > 0,$$

так как в противном случае $\varphi'(\mathbf{x}_k) = 0$ и процесс минимизации оканчивается.

В формуле $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k$ в качестве направления спуска $-\mathbf{s}_k$ выбирается то из направлений $\mathbf{e}_j$ либо $-\mathbf{e}_j$, вдоль которого функция $\varphi(\mathbf{x})$ локально убывает.

Относительно величины β_k будем предполагать, что выполняется либо условие (9.12) при $0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad k = 0, 1, \ldots$, либо условие (9.15) при $0 < \varepsilon \leqslant \lambda_k \leqslant 1 - \varepsilon, \quad k = 0, 1, \ldots$ Оценим величину α_k^2:

$$\alpha_k^2 = \frac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2\|\mathbf{s}_k\|^2} = \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j}\right)^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j}\right)^2}{n \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}\left(\dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i}\right)^2} = \frac{1}{n}.$$

9.7.7. Сходимость. Если выполняются условия 1)–4) из предположений 9.4.14 (условия 5)–7) того же пункта выполняются в силу предыдущего) и условие 9.4.12, то из теоремы 9.4.15 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0.$$

Для выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ из класса $C^{1,1}(E_n)$ при условии, что $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$, из теоремы 9.4.19 (см. (9.18) и (9.19)) следуют оценки:

если выполняется (9.12), то

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0\left(1 + C\mu_0\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0(1 + C\mu_0\gamma m)^{-1} < \frac{1}{C\lambda}\frac{n}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots;$$

если же выполняется условие (9.15), то

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0\left(1 + C\mu_0\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_k\right)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0\left(1 + C\mu_0\,\frac{\gamma}{n}\,m\right)^{-1} < \frac{1}{C\gamma}\frac{n}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad 0 < C \leqslant \frac{2}{L\eta^2}.$$

Остается в силе и замечание 9.4.20, ослабляющее условие ограниченности множества X_0.

Обратим внимание на то, что постоянный множитель при величине $1/m$ в оценках скорости сходимости этого метода в n раз больше соответствующего множителя в оценках метода градиентного спуска.

В случае сильной выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ из 9.4.21 следуют оценки вида

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \mu_0 \exp\Big\{ - C\frac{m}{n}\Big\},$$
$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\Big\{ - C\frac{m}{n}\Big\}$$

при соответствующем выборе константы C в зависимости от условий (9.12) и (9.15).

9.7.8. Циклический покоординатный спуск. В этом методе выбор направления спуска осуществляется так же, как и в покоординатном спуске с удвоением шага:

$$\mathbf{s}_k = \pm\mathbf{e}_{j(k)}, \quad j(k) = k(\bmod n) + 1, \quad k = 0, 1, ...$$

Выбор величины β_k осуществляется либо путем одномерной минимизации, и в этом случае предполагается, что выполняется неравенство (9.12), либо способом, изложенным в п. 9.4.6, и тогда предполагается справедливость соотношения (9.15).

9.7.9. Предположения*). Сходимость метода циклического покоординатного спуска будем доказывать, предполагая относительно функции $\varphi(\mathbf{x})$, что:

1) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$;

2) $X_0^* \neq \varnothing$ (см. (9.16));

3) $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве X_0.

Относительно последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ будем предполагать, что:

4) $\mathbf{x}_0$ — любая точка;

5) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k$, $\mathbf{s}_k = \pm\mathbf{e}_{j(k)}$, $j(k) = k(\bmod n) + 1$, $k = 0, 1, ...$;

6) выполняется либо условие (9.12) при $1 \geqslant \lambda_k \geqslant \lambda > 0$, либо условие (9.15) при $1/2 \geqslant \lambda_k \geqslant \lambda > 0$;

7) $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| = 0$.

Теорема. *Если выполняются предположения* 9.7.9 *и условие* 9.4.12, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0. \tag{9.17}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 9.2.3 и определением β_k, получаем (аналогично тому, как это делалось в п. 9.7.6)

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C\Big(\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial x_j}\Big)^2 = C\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{e}_j\rangle^2.$$

*) Ср. с предположениями 9.4.14.

Вследствие монотонности и ограниченности последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{e}_{j(k)}\rangle=0.$$

Для заданного $\varepsilon>0$ выберем номер k_0 так, чтобы

$$|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{e}_{j(k)}\rangle|\leqslant L\varepsilon \text{ и } \|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k\|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}\quad\forall k\geqslant k_0.$$

Тогда

$$\|\mathbf{x}_{k+i}-\mathbf{x}_k\|\leqslant\|\mathbf{x}_{k+i}-\mathbf{x}_{k+i-1}\|+...+\|\mathbf{x}_{k+1}-\mathbf{x}_k\|\leqslant\frac{\varepsilon}{n}i\leqslant\varepsilon$$

при $i\leqslant n$.

Из условия $\varphi(\mathbf{x})\in C^{1,1}(E_n)$ получаем

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_{k+i})-\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\leqslant L\varepsilon,\quad i=1,2,...,n.$$

Далее,

$$|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{e}_{k+i}\rangle|=|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k)-\varphi'(\mathbf{x}_{k+i}),\mathbf{e}_{k+i}\rangle\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+i}),\mathbf{e}_{k+i}\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant\|\varphi'(\mathbf{x}_k)-\varphi'(\mathbf{x}_{k+i})\|+|\langle\varphi'(\mathbf{x}_{k+i}),\mathbf{e}_{k+i}\rangle|\leqslant 2L\varepsilon,$$
$$i=1,2,...,n,$$

и, следовательно,

$$\max_{i=1,2,...,n}|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{e}_{k+i}\rangle|\leqslant 2L\varepsilon.$$

Поэтому

$$\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|\leqslant\sqrt{n}\max_{i=1,2,...,n}|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{e}_{k+i}\rangle|\leqslant 2\sqrt{n}L\varepsilon,$$

откуда и вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi'(\mathbf{x}_k)=0$.

В справедливости соотношения (9.17) убеждаемся на основании теоремы 9.2.5 при $X\equiv X_0$ и $Y\equiv X_0^*$. $\triangle$

Обсуждение. Здесь уместно вспомнить теорему 9.2.13 об условиях, гарантирующих выполнение предположения 7), а именно условие линейного непостоянства функции $\varphi(\mathbf{x})$ на ограниченном множестве X_0 (замкнутость его очевидна) и условие, что последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ является сильно понижающей. Заметим, что при этих условиях предыдущая теорема остается справедливой, но уже без предположений 2), 3), 7) и 9.4.12. Наконец укажем, что если множество X_0^* состоит из конечного числа стационарных точек, то теорема 9.2.9 обосновывает сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к точке множества X_0^*.

Замечание. В добавлении (см. Д.2) доказывается, что метод циклического покоординатного спуска с выбором шага из условия (9.15) обладает линейной по функционалу скоростью сходимости:

$$\varphi(\mathbf{x}_m)-\varphi(\mathbf{x}^*)\leqslant\frac{C}{m},$$

где $C>0$ зависит от $\mathbf{x}_0$ и от размерности n пространства E_n.

ГЛАВА 10

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

10.1. Характеристика методов

10.1.1. В этой главе рассматриваются методы спуска для решения задачи минимизации гладкой функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

Первые два метода, метод проекции и метод условного градиента, применимы лишь для задач минимизации на выпуклых множествах, причем в случае невыпуклой функции цели сходимость последовательных приближений можно гарантировать лишь к множеству стационарных точек — точек, в которых выполняются необходимые условия локального минимума. Если исходная задача является задачей выпуклого программирования, то для обоих методов существуют априорные оценки скорости сходимости, т. е. определенная характеристика качества методов.

В методах безусловной минимизации мы не встречались с принципиальными трудностями в отыскании направления спуска. Наиболее трудоемкой частью было вычисление градиента целевой функции. В задачах с ограничениями при выборе направления спуска приходится учитывать два обстоятельства: направление должно быть возможным и должно гарантировать убывание минимизируемой функции. При этом выбор направления спуска связан с вычислением величины $\varphi'(\mathbf{x})$, а в ряде методов и величин $f_i'(\mathbf{x})$, и с решением на каждом шаге некоторой экстремальной задачи. Последнее обстоятельство приводит к тому, что метод условного градиента применяют лишь для множеств, задаваемых линейными ограничениями, поскольку в этих случаях для выбора направления спуска достаточно решить задачу линейного программирования, а метод проекции градиента применяют для множеств X такого вида, что задача отыскания проекции некоторой точки на это множество является достаточно простой с точки зрения ее численной реализации, так как решение этой задачи и определяет направление спуска.

Третий метод, метод возможных направлений, характерен тем, что для выбора направления спуска решают задачу линейного про-

граммирования либо простую задачу квадратичного программирования с небольшим, вообще говоря, числом ограничений, и с этой точки зрения методу можно было бы отдать предпочтение, однако отсутствие априорных оценок скорости сходимости для выпуклых задач затрудняет сравнение метода с ранее упомянутыми.

10.1.2. Условия экстремальности. Изложим здесь условия оптимальности в виде, удобном для рассмотрения методов условного градиента и проекции градиента.

Будем предполагать, что множество X является выпуклым и замкнутым. Из п. 3.4.7 следует, что условие

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X \tag{10.1}$$

является необходимым для того, чтобы точка $\mathbf{x}^*$ была локальным минимумом функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, то условие (10.1) *является необходимым и достаточным для того, чтобы* $\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}$.

Действительность, необходимость следует из предыдущего, а достаточность вытекает из условия выпуклости: $\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}^*) \geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geqslant 0$. $\triangle$

Далее, пусть $\mathbf{p}^*$ является проекцией точки $\mathbf{v}^* = \mathbf{x}^* - \nu\varphi'(\mathbf{x}^*)$, $\nu > 0$, на множество X. Условие

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^* \tag{10.2}$$

является необходимым для того, чтобы точка $\mathbf{x}^*$ была локальным минимумом функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X. Действительно, из (10.1) следует $-\nu\langle \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant 0$. Но $-\nu\varphi'(\mathbf{x}^*) = \mathbf{v}^* - \mathbf{x}^*$, следовательно, $\langle \mathbf{v}^* - \mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant 0$, т. е. $\mathbf{x}^*$ в силу теоремы 2.2.3 есть проекция точки $\mathbf{v}^*$ на X: $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$. $\triangle$

Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, то условие (10.2) *является необходимым и достаточным для того, чтобы*

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in X\}.$$

Необходимость следует из предыдущего.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$. Из теоремы 2.2.3 получаем

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^* - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X.$$

И так как $\mathbf{v}^* = \mathbf{x}^* - \nu\varphi'(\mathbf{x}^*)$ и $\nu > 0$, то, следовательно, $\langle \varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle \geqslant 0$, т. е. $\mathbf{x}^*$ — точка минимума. $\triangle$

10.2. Метод проекции градиента

10.2.1. Идея метода. Как уже говорилось, в случае задач безусловной минимизации весьма распространенным релаксационным методом является метод градиентного спуска. Однако для задач с

ограничениями направление вдоль антиградиента не обязательно является возможным. Если множество X выпукло, то для отыскания направления в точке $\mathbf{x}_k$ напрашивается мысль спроектировать точку $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \nu_k \varphi'(\mathbf{x}_k)$ (ν_k — некоторое фиксированное положительное число) на множество X и в качестве направления спуска взять $-\mathbf{s}_k = \mathbf{p}_k - \mathbf{x}_k$, где $\mathbf{p}_k = P_X(\mathbf{v}_k)$ — проекция $\mathbf{v}_k$ на X, после чего осуществлять спуск вдоль этого направления. При этом выпуклость множества X гарантирует, что направление $\mathbf{p}_k - \mathbf{x}_k$ будет возможным.

Итак, метод проекции градиента состоит в вычислении проекции $\mathbf{p}_k$ точки $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \nu_k \varphi'(\mathbf{x}_k)$ на множество X и в выборе числа β_k таким образом, чтобы в точке $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k)$ было $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) < \varphi(\mathbf{x}_k)$.

Для отыскания направления $\mathbf{s}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k$ следует решить задачу минимизации квадратичной функции $\|\mathbf{v}_k - \mathbf{x}\|^2$ на множестве X. В общем случае эта задача того же порядка сложности, что и исходная, однако для задач, когда допустимое множество имеет простую геометрическую структуру (например, является многомерным параллелепипедом), отыскание $\mathbf{p}_k$ осуществляется путем сравнения n чисел.

В методе проекции градиента точку $\mathbf{p}_k$ можно вычислять приближенно, т. е. вместо $\mathbf{p}_k$ находить некоторую точку $\mathbf{y}_k$ и строить $\mathbf{x}_{k+1}$ по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k), \tag{10.3}$$

но при этом должны выполняться следующие условия:

$$\mathbf{y}_k \in X, \tag{10.4}$$

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k)) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k, \tag{10.5}$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \tag{10.6}$$

где

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0,1]} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k)).$$

Подчеркнем, что при построении последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ выбор β_k и $\mathbf{y}_k$ достаточно произволен, лишь бы выполнялись требования (10.4)–(10.6).

10.2.2. Множество стационарных точек. Рассмотрим множество

$$X^* = \{\mathbf{x}^* \in X \colon \|\mathbf{x}^* - \mathbf{p}^*\| = 0\}$$

стационарных точек функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X, т. е. точек, в которых выполняются необходимые условия локального минимума. Определим также множества $X_0 = \{\mathbf{x} \in X \colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$ и $X_0^* = X^* \cap X_0$.

10.2.3. Условие, гарантирующее сходимость. Для некоторого числа $\varepsilon > 0$ определим множество $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in X : \rho(\mathbf{x}, X_0^*) \leqslant \varepsilon\}$, где

$$\rho(\mathbf{x}, X_0^*) = \inf_{\mathbf{x}^* \in X_0^*} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\|^2.$$

Условие, гарантирующее сходимость релаксационной последовательности, состоит в следующем: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $\mathbf{x} \in X_0 \setminus U_\varepsilon$ *будет* $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \geqslant \delta$ *при* $\nu > 0$.

10.2.4. Предположения. Относительно функции $\varphi(\mathbf{x})$ будем предполагать, что:

1) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$;

2) $X_0^* \neq \varnothing$;

3) $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве X_0.

Относительно последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ будем предполагать, что:

4) $\mathbf{x}_0$ — любая точка из X;

5) выполняются условия (10.3)–(10.6) при $0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < \infty$.

Теорема. *Если выполняются предположения* 10.2.4 *и условие* 10.2.3, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0$.

Доказательство. Из леммы 9.2.3 и условия (10.5) получаем для любого $\beta \in [0, 1]$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k))) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k\Big(\beta\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle - \frac{L\beta^2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2}{2}\Big).$$

Из п. 2.2.4 следует, что для любого $\nu_k > 0$ справедливо неравенство

$$\nu_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle \geqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2. \tag{10.7}$$

Поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k\Big(\frac{\beta}{\nu_k} - \frac{L\beta^2}{2}\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2. \tag{10.8}$$

Выбирая $\beta = \min\{1, 1/\nu_k L\}$, получаем при $\beta = 1$ (с учетом того, что в этом случае $L \leqslant 1/\nu_k$)

$$\frac{1}{\nu_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2 = \frac{1}{\nu_k} - \frac{1}{2}L \geqslant \frac{1}{2\nu_k} \geqslant \frac{1}{2\nu''}.$$

Если же $\beta = 1/\nu_k L \leqslant 1$, то

$$\frac{1}{\nu_k}\beta - \frac{1}{2}L\beta^2 = \frac{1}{2\nu_k^2 L} \geqslant \frac{1}{2(\nu'')^2 L}.$$

И окончательно приходим к неравенству

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda\Delta\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2, \tag{10.9}$$

где $\Delta = \dfrac{1}{2\nu''} \min\left\{1, \dfrac{1}{\nu'' L}\right\}$.

Последовательность $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ монотонная и ограниченная снизу, поэтому $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \to 0$ при $k \to \infty$, $f(\mathbf{x}_k) \equiv \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 \to 0$ при $k \to \infty$.

В справедливости теоремы убеждаемся на основании теоремы 9.2.4 при $X \equiv X_0$ и $Y = X_0^*$. $\triangle$

Замечание. Естественно, что выбор параметров β_k и ν_k определяет поведение последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$. В следующей теореме сформулированы условия выбора, при которых эта последовательность обладает свойством так называемой *проекционной сходимости.*

10.2.5. Теорема. *Если множество X выпукло и замкнуто, функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла и дифференцируема, последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ строится по формуле*

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k),$$

то при любых $\nu_k > 0$ и $\beta_k \in (0, 1]$, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle - \frac{1}{\nu_k}\Big(1 - \frac{1}{2}\beta_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2, \tag{10.10}$$

справедливы неравенства

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \quad \forall \mathbf{x}^* \in X^* \quad k = 0, 1, \ldots$$

Доказательство. Из соотношений $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \nu_k\varphi'(\mathbf{x}_k)$ и $\langle \mathbf{v}_k - \mathbf{p}_k, \mathbf{x} - \mathbf{p}_k\rangle \leqslant 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X$ следует при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$

$$\langle \mathbf{p}_k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle \geqslant \nu_k\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_k - \mathbf{x}^*\rangle.$$

И так как $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\rangle \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*) \geqslant \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})$, то

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle - \frac{1}{2}\beta_k\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 = \\
&\qquad = \Big(1 - \frac{1}{2}\beta_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 + \langle \mathbf{p}_k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle \geqslant \\
&\qquad \geqslant \Big(1 - \frac{1}{2}\beta_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 + \nu_k\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_k - \mathbf{x}^*\rangle = \\
&= \Big(1 - \frac{1}{2}\beta_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 + \nu_k\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_k - \mathbf{x}_k\rangle + \nu_k\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\rangle \geqslant \\
&\geqslant \Big(1 - \frac{1}{2}\beta_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 + \nu_k\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_k - \mathbf{x}_k\rangle + \nu_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})).
\end{aligned}$$

Отсюда и из равенства

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - 2\beta_k\langle \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle + \beta_k^2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2$$

получаем, что условия (10.10) гарантируют справедливость доказываемых неравенств. $\triangle$

Замечание. Существование решений неравенства (10.10) легко получить для $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$, если выбрать

$$\beta_k = \beta = 1, \quad \nu_k = \nu \in \left(0, \frac{1}{L}\right].$$

10.2.6. Теорема. *Если*:

а) *функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *выпукла и дифференцируема на выпуклом и замкнутом множестве* X;

б) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

в) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *релаксационна*;

то имеет место оценка

$$f(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 \left[1 + C\mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2}\right]^{-1}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{10.11}$$

Доказательство. Вначале сделаем следующие тождественные преобразования:

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \rangle = \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k \rangle + \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{p}_k - \mathbf{x}^* \rangle =$$
$$= \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k \rangle + \frac{1}{\nu_k} \langle \mathbf{v}_k - \mathbf{p}_k, \mathbf{x}^* - \mathbf{p}_k \rangle - \frac{1}{\nu_k} \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k, \mathbf{x}^* - \mathbf{p}_k \rangle.$$

Отсюда и из условия, что $\langle \mathbf{v}_k - \mathbf{p}_k, \mathbf{x}^* - \mathbf{p}_k \rangle \leqslant 0$, получаем

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k \rangle - \frac{1}{\nu_k} \langle \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k, \mathbf{x}^* - \mathbf{p}_k \rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| + \frac{1}{\nu_k} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{p}_k\|\right) \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| + \frac{1}{\nu_k} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| + \frac{1}{\nu_k} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|\right) \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|.$$

Но из (10.8) следует неравенство $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|/\nu_k \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|$. Учитывая, что $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k\| \leqslant \eta$ и $\|\varphi'(\mathbf{x}_k\| \leqslant \gamma < \infty$, получаем окончательно неравенства

$$0 \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* \rangle \leqslant \left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu_k}\right) \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|,$$

справедливые для любой точки $\mathbf{x}^* \in X^*$, в частности, для $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_k)$ — проекции точки $\mathbf{x}_k$ на множество X^*. Отсюда и из оценки (см. теорему 9.3.2)

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 \left[1 + \mu_0 \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}^*(\mathbf{x}_k) \rangle^2}\right]^{-1}$$

следует (10.11) при $0 < C \leqslant (2\gamma + \eta/\nu')^{-2}$. $\triangle$

Замечание. Обратим внимание на то, что в теоремах в п. 10.2.4. и 10.2.6 принадлежность $\varphi(\mathbf{x})$ классу $C^{1,1}$ не требуется.

10.2.7. Оценка скорости сходимости в выпуклом случае. Теорема. *Если на выпуклом и замкнутом множестве* X:

а) *выпуклая функция* $\varphi(\mathbf{x})$ *принадлежит классу* $C^{1,1}(X)$;

б) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

в) *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *определяется условиями* (10.3)–(10.6) *при* $0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu''$;

то справедлива оценка

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0[1 + \mu_0 C m]^{-1}, \quad m = 1, 2, ..., \tag{10.12}$$

при любом

$$0 < C \leqslant \frac{\lambda}{2\nu''}\left(2\gamma + \frac{\eta}{\nu'}\right)^{-2} \min\left\{1, \frac{1}{\nu'' L}\right\},$$

где $\gamma = \sup\limits_{\mathbf{x}\in X_0} \|\varphi'(\mathbf{x})\|$.

Доказательство следует из неравенств (10.10) и (10.11). △

10.2.8. О способах выбора длины шага. Многое из того, что сказано о выборе длины шага в пп. 9.4.3, 9.4.4 и 9.4.5, остается в силе, но с учетом того, что $\beta_k \in [0, 1]$. Итак, для вычисления величины β_k обычно пользуются одним из методов одномерной минимизации. Существенно упростить процедуру выбора β_k может знание величины L — константы Липшица в неравенстве $\|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{y})\| \leqslant \leqslant L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. В этом случае в качестве β_k может быть выбрано любое из чисел, удовлетворяющих условию $0 < \overline{\beta} \leqslant \beta_k \leqslant 1$, но при этом величина ν_k должна удовлетворять неравенствам $0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < 2/L$. Тогда из (10.9) получаем $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1} \geqslant \overline{\beta}\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{2}L\right)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2$ и сходимость (в силу п. 10.2.5), и оценка скорости сходимости (в силу п. 10.2.6) сохраняются. Существуют и другие способы определения величины β_k, использующие знание константы L. Например, $\beta_k = \min\{1, \rho_k/\nu_k\}$, где $< \varepsilon_1 \leqslant \rho_k \leqslant (2 - \varepsilon_2)/L$ и $0 < \nu' \leqslant \nu_k \leqslant \nu'' < \infty$. Легко видеть, что и в этом случае и сходимость, и оценка ее скорости сохраняются.

10.2.9. Численно реализуемые условия выбора величины β_k без процедуры одномерной минимизации. В качестве β_k будем выбирать $\beta_k = \beta_k^*$ — наибольшее из чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{gathered}\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k)) \geqslant \frac{1}{2\nu_k}\beta_k\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2, \\ 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1.\end{gathered} \tag{10.13}$$

Покажем, что существует $\beta_k \in [0, 1]$, удовлетворяющее неравенству (10.13). Действительно, если выбрать $\overline{\beta}_k = \min\{1, 1/\nu_k L\}$, то (см.

вывод соотношения (10.10))

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \overline{\beta}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k)) \geqslant \overline{\beta}_k\Big(\frac{1}{\nu_k} - \frac{1}{2}L\overline{\beta}_k\Big)\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2\nu_k}\min\Big\{1, \frac{1}{\nu_k L}\Big\}\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 = \frac{1}{2\nu_k}\overline{\beta}_k\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2.$$

Поскольку задача о нахождении наибольшего числа, удовлетворяющего неравенству (10.13), решается приближенно, то можно выписать соотношения, которым удовлетворяет найденное значение β_k в качестве наибольшей величины при некотором значении параметра $q_k \in (0, 1/2]$:

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k)) \geqslant \frac{q_k}{\nu_k}\beta_k\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2,$$
$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1.$$

Очевидно, что сходимость и оценка ее скорости и в этом случае сохраняются.

10.2.10. О контроле. Для того чтобы в процессе счета по методу проекции градиента контролировать сходимость, целесообразно на каждой итерации вычислять величину $(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}))/\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2$. Оценка (10.11) показывает, что до тех пор, пока сохраняется ситуация $(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}))/\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 \geqslant \varepsilon$, где величина ε определяется принятой точностью вычислений, процесс в выпуклом случае сходится со скоростью, порядок которой не ниже $O(1/m)$.

Кроме этого, весьма действенным является контроль монотонности убывания последовательности $\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|\} \downarrow 0$. Для обоснования этого докажем существование совместных решений неравенств (10.7) и

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{p}_{k+1}\| \leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|. \tag{10.14}$$

Поскольку любая фиксированная пара $\beta_k = \beta = 1$ и $\nu_k = \nu \in \Big(0, \dfrac{1}{L}\Big]$ удовлетворяют условию (10.7), то достаточно исследовать монотонность $\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|\}$. Для этого воспользуемся неравенством (9.28) и тем, что из условия $\beta_k = 1$ следует, что $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{p}_k = P_X(\mathbf{v}_k) = P_X(\mathbf{x}_k - -\nu\varphi'(\mathbf{x}_k)$. Итак,

$$\|p_k - \mathbf{x}_k\|^2 = \|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\|^2 = \|(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) - \nu(\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|^2 - 2\nu\langle\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}, \varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\rangle +$$
$$+ \nu^2\|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|^2 - 2\frac{\nu}{L}\|\varphi'(\mathbf{x}_k - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2 + \nu^2\|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1}\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|^2 - \nu(\frac{2}{L} - \nu)\|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_{k-1})\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|^2 = \|\mathbf{p}_{k-1} - \mathbf{x}_{k-1}\|^2.$$

Таким образом, для обеспечения исследуемой монотонности следует находить совместное решение неравенств (10.7) и (10.14).

10.3. Метод условного градиента

10.3.1. Идея метода. В этом методе выбор направления спуска состоит в следующем: в точке $\mathbf{x}_k$ линеаризуют функцию $\varphi(\mathbf{x})$, строя линейную функцию $\varphi_L(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_k) + \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x} - \mathbf{x}_k \rangle$, и затем, минимизируя $\varphi_L(\mathbf{x})$ на множестве X, находят точку $\mathbf{y}_k$. После этого полагают $-\mathbf{s}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k$ и далее вдоль этого направления осуществляют спуск. Таким образом, для отыскания направления $-\mathbf{s}_k$ следует решить задачу минимизации линейной функции на множестве X. В общем случае это задача того же порядка сложности, что и исходная, однако, когда допустимое множество задается линейными ограничениями, она становится задачей линейного программирования, конечномерные методы решения которой рассматривались в гл. 5.

Напомним, что множество X предполагается выпуклым и замкнутым, а функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$.

10.3.2. Схема метода. В качестве $\mathbf{x}_0$ выбирается любая точка из множества X. Точку $\mathbf{x}_{k+1}$ $(k = 1, 2, ...)$ строят по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k). \tag{10.3}$$

При этом $\mathbf{y}_k$ выбираются таким образом, что

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle \geqslant \min\{\sigma_k \sup_{\mathbf{x} \in X} \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x} \rangle, \alpha_k\}, \tag{10.15}$$

где α_k — заданные числа такие, что $\alpha_k \geqslant \alpha > 0$, а числа σ_k удовлетворяют соотношению $0 < \sigma \leqslant \sigma_k \leqslant 1$. И, кроме того,

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| \leqslant \varkappa < \infty. \tag{10.16}$$

Числа β_k выбирают, минимизируя функцию $\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k) - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k))$ на отрезке $[0, 1]$.

Будем предполагать, что β_k удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k)) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k,$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant 1,$$

где

$$\omega_k = \min_{\beta \in [0,1]} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k)). \tag{10.17}$$

10.3.3. Обсуждение. Условия выбора $\mathbf{y}_k$ из соотношения (10.15) можно проиллюстрировать следующим примером. Если множество X задается линейными ограничениями, то задача отыскания $\mathbf{y}_k$

становится задачей линейного программирования — задачей максимизации линейной функции $\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}\rangle$ на многогранном множестве X. При решении этой задачи условия (10.15) допускают возможность ограничиться несколькими симплексными шагами в сторону возрастания функции $\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}\rangle$.

Кроме того, множество X может оказаться неограниченным. При этом, несмотря на то, что исходная задача имеет решение, задача выбора направления может и не иметь решения, т. е. возможна ситуация, когда для некоторого номера k будет $\sup\limits_{\mathbf{x}\in X}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}\rangle = +\infty$. Условие (10.15) и в этом случае позволяет находить точку $\mathbf{y}_k$. Заметим, что выбор чисел α_k и появление чисел σ_k лимитируются условием (10.16). Условие, гарантирующее сходимость, остается тем же, что и в методе проекции градиента (см. п. 10.2.3).

10.3.4. Предположения. Относительно функции $\varphi(\mathbf{x})$ будем предполагать, что:

1) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(X)$;

2) $X_0^* \neq \varnothing$;

3) $\varphi(\mathbf{x})$ ограничена снизу на множестве X_0.

Относительно последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ будем предполагать, что:

4) $\mathbf{x}_0$ — любая точка из X;

5) выполняются условия (10.3), (10.5), (10.6), (10.15), (10.16).

10.3.5. Теорема. *Если выполняются предположения* 10.3.4 *и условие* 10.2.3, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X_0^*) = 0.$$

Доказательство. Из леммы 9.2.3 и условия (10.5) получаем для любого $\beta \in [0, 1]$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k))) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k\Big(\beta\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle - \frac{L\beta^2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2}{2}\Big).$$

Выбирая

$$\beta = \min\Big\{1, \frac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle}{L\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2}\Big\},$$

получаем, что при $\beta = 1 \leqslant \dfrac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle}{L\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2}$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{\lambda\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle}{2}, \tag{10.18}$$

а при $\beta = \dfrac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle}{L\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2}$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1} \geqslant \frac{1}{2L}\frac{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle^2}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2} \geqslant \frac{\lambda}{2L\varkappa^2}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle^2. \tag{10.19}$$

Пусть $\mathbf{p}_k$ означает проекцию точки $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \varphi'(\mathbf{x}_k)$ на множество X. Тогда в силу (10.8) $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k \rangle \geqslant \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2$, и, учитывая, что $\sigma_k \geqslant \sigma > 0$ и $\alpha_k \geqslant \alpha > 0$, получаем (см. (10.15))

$$\begin{aligned}\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle &\geqslant \min\{\sigma_k \sup_{\mathbf{x}\in X} \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{x}\rangle, \alpha_k\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{\sigma_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\rangle, \alpha_k\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{\sigma_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2, \alpha_k\} \geqslant \min\{\sigma \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2, \alpha\}. \qquad (10.20)\end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ монотонная и ограниченная снизу, то $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, из (10.18), (10.19) и последнего неравенства получаем, что $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, найдется такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $\sigma \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 < \min\{1, \alpha\}$, и поэтому из (10.18)–(10.20) приходим к неравенству

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant C \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_k\|^2 \qquad \forall k \geqslant k_0,$$

где $C = \dfrac{\lambda}{2} \sigma \min\left\{1, \dfrac{\sigma}{L\varkappa^2}\right\}$.

В справедливости теоремы убеждаемся на основании теоремы 9.2.5 при $X = X_0$, $Y = X_0^*$. $\triangle$

10.3.6. Оценка скорости сходимости в выпуклом случае. Теорема. *Если на выпуклом и замкнутом множестве X:*

а) *выпуклая функция принадлежит классу $C^{1,1}(X)$;*

б) $\operatorname{diam} X_0 = \eta < \infty$;

в) *последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ определяется условиями* (10.3), (10.5), (10.6), (10.15), (10.16);

то справедлива оценка

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \mu_0 [1 + \mu_0 C m]^{-1}, \quad m = 1, 2, ..., \qquad (10.21)$$

при любом

$$0 < C \leqslant \frac{\lambda}{2\varkappa} \min\left\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{L}\right\} \left[\min\left\{\sigma, \frac{\alpha}{\gamma\eta}\right]\right\}^2.$$

Доказательство. Так как $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle > 0$ (если $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle = 0$, то $\mathbf{x}_k = \mathbf{p}_k$, и $\mathbf{x}_k$ является точкой минимума) и $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\| \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| \leqslant \gamma\varkappa$, где $\gamma = \sup\limits_{\mathbf{x}\in X_0} \|\varphi'(\mathbf{x})\|$, то из (10.18) получаем, что

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{\lambda}{2\gamma\varkappa} \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle^2,$$

и в силу (10.19) приходим к неравенству

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C_1 \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k \rangle^2 \qquad (10.22)$$

при $C_1 = \dfrac{\lambda}{2\varkappa} \min\left\{\dfrac{1}{\gamma}, \dfrac{1}{L\varkappa}\right\}$.

Если $\sigma_k \sup\limits_{\mathbf{x}\in X}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\rangle \leqslant \alpha_k$, то из (10.15) следует неравенство

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\rangle \geqslant \sigma_k\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\rangle \geqslant \sigma\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\rangle.$$

Если же $\sigma_k \sup\limits_{\mathbf{x}\in X}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}\rangle > \alpha_k$, то

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\rangle \geqslant \alpha_k \geqslant \frac{\alpha_k}{\gamma\eta}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\rangle \geqslant \frac{\alpha}{\gamma\eta}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\rangle.$$

Пусть $C_2=\min\{\sigma,\dfrac{\alpha}{\gamma\eta}\}$, тогда $\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\rangle \geqslant C_2\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-$ $-\mathbf{x}^*\rangle$. Окончательно отсюда и из (10.22) получаем неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_k)-\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{x}^*\rangle^2, \quad C=C_1C_2^2, \tag{10.23}$$

справедливое для любой точки $\mathbf{x}^*\in X^*$, в частности для $\mathbf{x}^*=\mathbf{p}^*(\mathbf{x}_k)$ — проекции точки $\mathbf{x}_k$ на множество X^*. Из (10.23) и из оценки (см. теорему 9.3.2)

$$\varphi(\mathbf{x}_m)-\varphi^* \leqslant \mu_0\Big[1+\mu_0\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\varphi(\mathbf{x}_k)-\varphi(\mathbf{x}_{k+1})}{\langle\varphi'(\mathbf{x}_k),\mathbf{x}_k-\mathbf{p}^*(\mathbf{x}_k)\rangle^2}\Big]^{-1}$$

следует (10.21). $\triangle$

10.3.7. Обсуждение. Ясно, что с уменьшением величины C ухудшается априорная оценка сходимости этого метода. Для того чтобы выяснить вопрос выбора α_k, оценим величину C: при некоторых естественных предположениях справедливо неравенство $C\leqslant\overline{C}\alpha^2/\varkappa^2$, где $\overline{C}=\mathrm{const}>0$. Поскольку величина $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\|$ зависит от выбора α и, следовательно, $\varkappa$ зависит от α, то соотношения, оценивающие величину C, показывают, что α_k целесообразно выбирать таким, чтобы отношение $\alpha_k^2/\|\mathbf{x}_k-\mathbf{y}_k\|$ не убывало с увеличением числа k.

10.4. Метод возможных направлений

10.4.1. Идея метода. Для отыскания точек локальных минимумов общей задачи нелинейного программирования реально применимы те из релаксационных методов, в которых при вычислении направления спуска из некоторой точки $\mathbf{x}$ учитываются локальные свойства минимизируемой функции и локальные свойства множества X в окрестности точки $\mathbf{x}$. Из известных методов таким условиям удовлетворяет метод возможных направлений. Направление спуска в этом методе находят следующим образом: строят в точке $\mathbf{x}$ конус возможных направлений, который задается системой линейных

неравенств, и выбирают в этом конусе вектор конечной длины, составляющий острый угол с антиградиентом целевой функции. Таким образом, метод возможных направлений можно рассматривать как естественное распространение метода градиентного спуска на задачи минимизации с ограничениями. В отличие от двух предыдущих методов, метод возможных направлений обладает тем преимуществом, что для отыскания направления спуска достаточно решить задачу линейного программирования с небольшим числом ограничений либо простейшую задачу квадратичного программирования.

Итак, рассматривается задача

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \min$$

на множестве $X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}\}$.

Релаксационную последовательность $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ будем строить по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{10.24}$$

10.4.2. Задача выбора направления спуска. Рассмотрим задачу отыскания такого числа σ и такого вектора $\mathbf{s}$, что

$$\begin{gathered} \sigma \to \max, \\ \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I, \\ -\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \\ \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}\rangle \leqslant 1. \end{gathered} \tag{10.25}$$

Последнее нелинейное ограничение избавляет от неограниченности решения задачи (10.25). Иногда это ограничение заменяют следующим: $-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1,n}$, и тогда задача (10.25) становится задачей линейного программирования. В дальнейших рассмотрениях мы ограничимся задачей (10.25), однако все сказанное выше остается в силе и для задачи (10.25) с линейными ограничениями.

Обозначим через $\overline{\sigma}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\overline{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ решение задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{i : 0 \leqslant f_i(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon\}$, где ε — некоторое положительное число, а $\overline{\sigma}(\mathbf{x}, 0)$ и $\overline{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, 0)$ — решения задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, 0) = \{i\colon\ f_i(\mathbf{x}) = 0\}$.

Для того чтобы направление $-\mathbf{s}$, $\|\mathbf{s}\| = 1$, *в точке* $\mathbf{x} \in X$ *было возможным, достаточно, чтобы* $\sigma > 0$ *и* $\mathbf{s}$ *удовлетворяли неравенствам* $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0$ *для всех* $i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *и хотя бы для одного* $\varepsilon > 0$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 3.2.6. Таким образом, первые ограничения в задаче (10.25) гарантируют, что направление $-\mathbf{s}$ является возможным в точке $\mathbf{x}$, а второе обеспечивает убывание $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль этого направления.

10.4.3. Расстояние до границы. Определим величину ζ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до ближайшей по направлению $-\mathbf{s}$ граничной точки множества X. Если $-\mathbf{s}$ — направление, возможное в точке $\mathbf{x}$, то

существует число $\overline{\beta} > 0$ такое, что $\mathbf{x} - \beta\mathbf{s} \in X$ для всех $\beta \in [0, \overline{\beta}]$. Величина $\zeta = \sup \overline{\beta}$ (если она конечна) означает длину наибольшего отрезка $[\mathbf{x}, \mathbf{x} - \zeta\mathbf{s}]$, целиком принадлежащего множеству X. При этом $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \zeta\mathbf{s}$ является граничной точкой множества X. Если $\zeta = +\infty$, множеству X принадлежит луч $\mathbf{x} - \beta\mathbf{s}$, $\beta \geqslant 0$. При $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}_k$ будем обозначать $\zeta = \zeta_k$.

10.4.4. Схема метода. В качестве начального приближения $\mathbf{x}_0$ может быть выбрана любая точка множества X, а ε_0 выбирают из полуинтервала $(0, 1]$. Пусть в результате k-й итерации вычислены $\mathbf{x}_k$ и ε_k. Опишем $(k+1)$-ю итерацию.

Шаг А. Решая задачу (10.25) при $I = I(\mathbf{x}_k, \varepsilon_k)$, вычисляют допустимые σ_k и $\mathbf{s}_k$, $\|\mathbf{s}_k\| = 1$, такие, что $\sigma_k \geqslant \xi_k \overline{\sigma}(\mathbf{x}_k, \varepsilon_k)$, где $0 < \xi \leqslant \leqslant \xi_k \leqslant 1$.

Шаг Б. Если $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k$, то переходят к вычислению величины β_k. Обычно β_k вычисляют, решая задачу одномерной минимизации функции $\psi(\beta) = \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)$ при $0 \leqslant \beta \leqslant \zeta_k$. Величина β_k при этом должна удовлетворять условиям

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k\omega_k,$$

$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \inf_{0 \leqslant \beta \leqslant \zeta_k} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k). \tag{10.26}$$

Числа β_k можно выбирать также следующим образом. Пусть $\overline{\beta_k}$ — наибольшее из чисел, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k) \geqslant \frac{1}{2}\beta_k\sigma_k, \quad 0 \leqslant \beta_k \leqslant \zeta_k. \tag{10.27}$$

В качестве β_k можно взять любое число, удовлетворяющее неравенствам (10.27) и условию $\beta_k \geqslant \alpha\overline{\beta}_k$ при любом $\alpha \in (0, 1]$.

Наконец, вычисляют $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k$, полагают $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ и переходят к шагу А.

Шаг В. Если $0 < \sigma_k < \varepsilon_k$, то полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, $\varepsilon_{k+1} = \gamma_k\varepsilon_k$, где $0 < \gamma_k \leqslant \gamma < 1$, и переходят к шагу А. Если $\sigma_k = 0$, то вычисляют $\overline{\sigma}(\mathbf{x}_k, 0)$, решая задачу (10.25) при $I = I(\mathbf{x}_k, 0)$. Если $\overline{\sigma}(\mathbf{x}_k, 0) = 0$, то процесс останавливают. В противном случае полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, $\varepsilon_{k+1} = \gamma_k\varepsilon_k$, где $0 < \gamma_k \leqslant \gamma < 1$, и переходят к шагу А.

10.4.5. Обсуждение. Шаг А позволяет задачу (10.25) при $I = = I(\mathbf{x}_k, \varepsilon_k)$ решать приближенно, ограничиваясь несколькими итерационными шагами в сторону возрастания величины σ. Условия (10.27) позволяют воспользоваться для вычисления β_k известным способом удвоения.

Сходимость метода будем исследовать лишь для случая, когда β_k удовлетворяет условиям (10.26). Ознакомившись с доказательством сходимости, читатель в случае необходимости без труда сможет исследовать сходимость для случая (10.27).

10.4.6. Предположения.

1) Функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$ принадлежат классу $C^{1,1}(X)$;

2) существует такое число $M>0$, что $\|f_i'(\mathbf{x})\| \leqslant M$ для всех $\mathbf{x} \in X_0 = \{\mathbf{x} \in X\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$;

3) $X^* = \{\mathbf{x}^* \in X\colon \overline{\sigma}(\mathbf{x}^*, 0) = 0\} \neq \varnothing$;

4) $\inf\limits_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}) > -\infty$;

5) последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ ограничена.

10.4.7. Условия экстремальности. Поясним условие 3). В силу теоремы 3.3.2 условие, что в каждой паре σ и $\mathbf{s}$, удовлетворяющей системе

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}, 0), \quad -\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0,$$

будет $\sigma \leqslant 0$, является необходимым условием того, что $\mathbf{x}$ есть точка локального минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве X.

Если же функция $\varphi(\mathbf{x})$ выпукла, функции $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$ вогнуты, а множество X вдобавок регулярно по Слейтеру (см. п. 3.4.3), то сформулированные выше условия являются достаточными для оптимальности точки $\mathbf{x}$. Доказательство этого утверждения состоит в следующем. Повторяя выкладки доказательства теоремы 3.4.4 (см. также п. 3.3.5), переходим к соотношению

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \sum_{i\in I(\mathbf{x},0)} u_i f_i'(\mathbf{x}), \quad u_i \geqslant 0, \quad i \in I(\mathbf{x}, 0),$$

которое по теореме 3.5.1 и определяет оптимальность точки $\mathbf{x}$.

Обратимся теперь к условию $X^* \neq \varnothing$. Поскольку пара $\sigma = 0$, $\mathbf{s} = 0$ является допустимой для задачи (10.25), то в ее решении $\overline{\sigma}(\mathbf{x}, 0) \geqslant 0$, и, следовательно, X^* — это множество точек, в которых выполняются необходимые условия локального минимума. Заметим, что к этим точкам добавляется и ряд других, например, точки, в которых не существует возможных направлений.

10.4.8. Лемма. *Для всех σ и $\mathbf{s}$, удовлетворяющих условиям*

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0,$$

$$i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon), \ \mathbf{x} \in X, \ \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}\rangle \leqslant 1, \ \sigma \geqslant \varepsilon \geqslant 0, \tag{10.28}$$

справедливо неравенство

$$\zeta \geqslant C_1 \varepsilon, \tag{10.29}$$

где $C_1 = \min\{1/M, 1/L\}$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $\zeta < +\infty$. Так как точка $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \zeta\mathbf{s}$ является граничной (согласно определению числа ζ), то найдется такой номер i, что $f_i(\mathbf{y}) = 0$. Если в точке $\mathbf{x}$ будет $f_i(\mathbf{x}) > \varepsilon$, то $\varepsilon < f_i(\mathbf{x}) = |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})| \leqslant M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = M\zeta$, откуда

$$\zeta > \varepsilon/M. \tag{10.30}$$

Пусть в точке $\mathbf{x}$ будет $0 \leqslant f_i(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon$, т. е. $i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Обозначим $\psi(\beta) = f_i(\mathbf{x} - \beta\mathbf{s})$ и заметим, что $\psi(\beta) \geqslant 0$ при $\beta \in [0, \zeta]$ и $\psi(\zeta) = 0$. Легко видеть, что

$$\frac{d\psi(\beta}{d\beta}\Big|_{\beta=\zeta} \leqslant 0,$$

а значит, $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \geqslant 0$. Из условия $i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и условия, что σ и $\mathbf{s}$ удовлетворяют системе (10.28), имеем $\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant -\sigma$; поэтому

$$\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant -\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant \langle f_i'(\mathbf{y}), \mathbf{s}\rangle - \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle \leqslant \\ \leqslant \|f_i'(\mathbf{y}) - f_i'(\mathbf{x})\|\|\mathbf{s}\| \leqslant L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = L\zeta,$$

откуда

$$\zeta \geqslant \varepsilon/L. \tag{10.31}$$

Из (10.30) и (10.31) получаем $\zeta \geqslant \varepsilon \min\{1/M, 1/L\}$, т. е. неравенство (10.29). $\triangle$

10.4.9. Лемма. *Если точка $\mathbf{x}_{k+1}$ построена по схеме метода и при этом $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k \geqslant 0$, то справедливо неравенство*

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant C_2\varepsilon_k^2, \quad C_2 = \lambda C_1/2. \tag{10.32}$$

Доказательство. Из леммы 9.2.3, условия (10.26) и неравенства $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle \geqslant \sigma_k$ (последнее имеет место, поскольку σ_k и $\mathbf{s}_k$ допустимы для задачи (10.25)) получаем для любого $\beta \in [0, \zeta_k]$

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)) \geqslant \\ \geqslant \lambda_k\Big(\beta\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle - \frac{1}{2}L\beta^2\|\mathbf{s}_k\|^2\Big) \geqslant \lambda_k\Big(\beta\sigma_k - \frac{1}{2}L\beta^2\Big).$$

При $\beta = \min\{\zeta_k, \sigma_k/L\}$ отсюда получаем неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2}\lambda_k\sigma_k \min\Big\{\zeta_k, \frac{\sigma_k}{L}\Big\} \geqslant \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_k \min\Big\{\zeta_k, \frac{\varepsilon_k}{L}\Big\}. \tag{10.33}$$

И в силу леммы 10.4.8 приходим к соотношению (10.32) при $C_2 = \lambda C_1/2$. $\triangle$

10.4.10. Лемма. *Для любой точки $\overline{\mathbf{x}} \in X$ найдутся такие числа $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}(\overline{\mathbf{x}}) > 0$ и $\delta = \delta(\overline{\varepsilon})$, что при всех $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ и $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X\colon \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta\}$ будет $I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$.*

Доказательство. Обозначим $J = \{i = 1, 2, ..., m\}$ и выберем $\overline{\varepsilon} = \min\limits_{i \in J \setminus I(\overline{\mathbf{x}}, 0)} \{f_i(\overline{\mathbf{x}})\}/2$. Заметим, что $\overline{\varepsilon} > 0$, поскольку для $i \in J \setminus I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ будет $f_i(\overline{\mathbf{x}}) > 0$.

В силу непрерывности функций $f_i(\mathbf{x})$ и конечности числа номеров i, $i \leqslant m$ найдется такое число $\delta(\overline{\varepsilon}) > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и всех $i \in J$ будет $|f_i(\overline{\mathbf{x}}) - f_i(\mathbf{x})| \leqslant \overline{\varepsilon}$. Так как $f_i(\overline{\mathbf{x}}) \geqslant 2\overline{\varepsilon}$, $i \in J \setminus I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$, то $f_i(\mathbf{x}) \geqslant \varepsilon$ для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и всех $i \in J \setminus I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$. Таким образом, при

$\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ для любого $i \in J \setminus I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ будет $i \in J \setminus I(\mathbf{x}, \varepsilon)$, а следовательно, справедливо включение $I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$. $\triangle$

Пусть $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\overline{\mathbf{x}}, 0)$, $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{s}}(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$ и $I = I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$.

10.4.11. Лемма. *Если $I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ и $\overline{\sigma} > 0$, то существует такое число $\delta = \delta(\overline{\sigma}) > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ будет $\sigma(\mathbf{x}, \varepsilon) \geqslant \overline{\sigma}/2$.*

Доказательство. Так как $\varphi'(\mathbf{x})$ и $f_i'(\mathbf{x})$ $(i = 1, 2, ..., m)$ непрерывны, то существует такое число $\delta(\overline{\sigma}) > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ будет $\|\varphi'(\overline{\mathbf{x}} - \varphi'(\mathbf{x})\| \leqslant \overline{\sigma}/2$ и $\|f_i'(\mathbf{x}) - f_i'(\overline{\mathbf{x}})\| \leqslant \overline{\sigma}/2$, $i \in I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$. Для любого $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и любого $i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$

$$0 \geqslant \langle f_i'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \overline{\sigma} = \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \overline{\sigma} + \langle f_i'(\overline{\mathbf{x}}) - f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}} \rangle \geqslant$$
$$\geqslant \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \overline{\sigma} - \|f_i'(\overline{\mathbf{x}}) - f_i'(\mathbf{x})\| \|\overline{\mathbf{s}}\| \geqslant \langle f_i'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \overline{\sigma}/2$$

и, аналогично, $0 \geqslant -\langle \varphi'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \overline{\sigma}/2$.

Таким образом, $\sigma = \overline{\sigma}/2$ и $\mathbf{s} = \overline{\mathbf{s}}$ для любого $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ удовлетворяют ограничениям задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Но так как $\sigma(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ являются решением задачи максимизации величины σ при тех же ограничениях, то $\sigma(\mathbf{x}, \varepsilon) \geqslant \overline{\sigma}/2$. $\triangle$

10.4.12. Теорема. *Если выполнены предположения* 1)–5), *то*

$$\lim_{k \to \infty} \rho(\mathbf{x}_k, X^*) = \lim_{k \to \infty} \lim_{\mathbf{x}^* \in X^*} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| = 0.$$

Доказательство. Обозначим через K совокупность всех индексов последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$: $K = \{k = 0, 1, ...\}$. Предположим, что $\varepsilon_k \geqslant \varepsilon > \mathbf{0}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех $k \in K$. Тогда в соответствии со схемой метода найдется такой номер $k_0 \in K$, что $\sigma_k \geqslant \varepsilon_k \geqslant \varepsilon > 0$ для всех $k \geqslant k_0$. Из (10.29) имеем $\zeta_k \geqslant C_1 \varepsilon_k \geqslant C_1 \varepsilon$, и тогда в силу (10.32) получаем $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1} \geqslant C_2 \varepsilon^2$ для всех $k \geqslant k_0$. Но последовательность $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$, сходящаяся (в силу монотонности и ограниченности), чему противоречит предыдущее неравенство. Итак, $\varepsilon_k \to 0$, $k \to \infty$. Согласно схеме метода найдется набор индексов $K_1 \subset K$ такой, что $\sigma_k \to 0$, $k \in K_1$, $k \to \infty$.

Теперь докажем, что все предельные точки последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ принадлежит множеству X^*. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\overline{\mathbf{x}}$ — единственная предельная точка, т. е. $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}_k = \overline{\mathbf{x}} \in X$. Предположим, что $\overline{\mathbf{x}} \in X \setminus X^*$. Тогда $\overline{\sigma}(\overline{\mathbf{x}}, 0) = \overline{\sigma} > 0$, и, следовательно, по лемме 10.4.10 найдутся такие числа $\overline{\varepsilon} > 0$ и $\delta(\overline{\varepsilon}) > 0$, что $I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ при всех $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$ и $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$. Так как $\varepsilon_k \to 0$ и $\mathbf{x}_k \to \overline{\mathbf{x}}$, $k \to \infty$, то найдется такой номер k_0, что $\mathbf{x}_k \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и $\varepsilon_k < \overline{\varepsilon})$ для всех $k \geqslant k_0$ и, значит, $I(\mathbf{x}_k, \varepsilon_k) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$. Но тогда согласно лемме 10.4.11 для $k \geqslant k_0$ становится справедливым неравенство $\overline{\sigma}(\mathbf{x}_k, \varepsilon_k) \geqslant \overline{\sigma}/2$, противоречащее тому, что $\sigma_k \to 0$, $k \in K_1$, $k \to \infty$.

Случай 2. Пусть существует предельная точка $\widetilde{\mathbf{x}} \in X$ последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, отличная от $\overline{\mathbf{x}}$: $\widetilde{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{x}}$. Будем по-прежнему предполагать, что $\overline{\mathbf{x}} \in X \setminus X^*$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $\widetilde{\mathbf{x}} \in X \setminus U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$.

В силу того, что $\overline{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{x}}$ — две различные предельные точки нашей последовательности, для любого натурального N найдется такой номер $k \geqslant N$ и такое число $m \geqslant 1$, что $\mathbf{x}_k \in U_{\delta/2}(\overline{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x}_{k+1} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, $i = 0, 1, ..., m-1$, $\mathbf{x}_{k+m} \in X \setminus U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$.

Теперь воспользуемся неравенством (10.33):

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+m}) = \sum_{i=k}^{k+m-1} \varphi(\mathbf{x}_i) - \varphi(\mathbf{x}_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2}\alpha\lambda \sum_{i=k}^{k+m-1} \sigma_i \min\left\{\zeta_i, \frac{\sigma_i}{L}\right\},$$

и поскольку $\mathbf{x}_i \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, $i = k, k+1, ..., k+m-1$, то $\sigma_i \geqslant \overline{\sigma}/2$, $i = k, k+1, ..., k+m-1$. Кроме того, $\zeta_i \geqslant \beta_i$ для всех номеров i; поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+m}) \geqslant \frac{1}{4}\alpha\lambda\overline{\sigma} \sum_{i=k}^{k+m-1} \min\left\{\beta_i, \frac{\overline{\sigma}}{2L}\right\}.$$

Заметим, что

$$\Sigma \triangleq \sum_{i=k}^{k+m-1} \min\left\{\beta_i, \frac{\overline{\sigma}}{2L}\right\} \geqslant \min\left\{\sum_{i=k}^{k+m-1} \beta_i, \frac{\overline{\sigma}}{2L}\right\}.$$

Действительно, если все $\beta_i \leqslant \dfrac{\overline{\sigma}}{2L}$, то $\Sigma = \displaystyle\sum_{i=k}^{k+m-1} \beta_i$. Если же хотя бы для одного номера j будет $\beta_j > \dfrac{\overline{\sigma}}{2L}$, то $\Sigma > \dfrac{\overline{\sigma}}{2L}$. Поскольку $\|\mathbf{x}_{k+m} - \mathbf{x}_k\| \geqslant \dfrac{\delta}{2}$, то $\displaystyle\sum_{i=k}^{k+m-1} \beta_i \geqslant \frac{\delta}{2}$, и поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+m}) \geqslant \frac{1}{4}\alpha\lambda\overline{\sigma} \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\overline{\sigma}}{2L}\right\} = \text{const} > 0.$$

Последнее неравенство противоречит сходимости последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$.

Итак, любая предельная точка последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ принадлежит множеству X^*. В силу компактности $\{\mathbf{x}_k\}$ отсюда следует $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\mathbf{x}_k, X^*) = 0$. $\triangle$

10.4.13. Случай присутствия линейных ограничений. Если некоторые ограничения, определяющие множество X, линейны, то целесообразно разбить ограничения на две группы — линейные и нелинейные:

$$\begin{gathered} X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i \in I_1, \quad \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2\}, \\ I_1 \cup I_2 = \{1, 2, ..., m\}. \end{gathered} \tag{10.34}$$

В этом случае задача выбора направления спуска приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered}\max\sigma,\\ \langle f_i'(\mathbf{x}_k),\mathbf{s}\rangle+\sigma\leqslant 0,\quad i\in I_1(\mathbf{x}_k,\varepsilon_k),\\ \langle a_i,\mathbf{s}\rangle\leqslant 0,\quad i\in I_2(\mathbf{x}_k,\varepsilon_k),\\ -\langle\varphi'(\mathbf{x}_k,\mathbf{s})\rangle+\sigma\leqslant 0,\\ \langle\mathbf{s},\mathbf{s}\rangle\leqslant 1,\end{gathered}\tag{10.35}$$

где

$$I_1(\mathbf{x}_k,\varepsilon_k)=\{i\in I_1\colon\ 0\leqslant f_i(\mathbf{x}_k)\leqslant\varepsilon\},$$
$$I_2(\mathbf{x}_k,\varepsilon_k)=\{i\in I_2\colon\ 0\leqslant\langle a_i,\mathbf{x}_k\rangle-b_i\leqslant\varepsilon_k\}.$$

Естественно, что схема метода в этом случае остается прежней. Остаются прежними и все рассуждения при доказательстве сходимости метода. При этом требование регулярности в нашем случае можно ослабить по сравнению с тем, которое было введено раньше. А именно, множество X, определенное соотношениями (10.34), будем называть *регулярным*, если для всех $i\in I_1$ найдется такой $\mathbf{x}\in X$, что $f_i(\mathbf{x})>0$ $(i\in I_1)$. Таким образом, свойство регулярности относится лишь к нелинейным ограничениям.

10.4.14. О решении задачи выбора направления. В случае когда последнее ограничение задачи (10.35) имеет вид $-1\leqslant s_j\leqslant 1$, $j=\overline{1,n}$, задача выбора направления является задачей линейного программирования, и, следовательно, для ее решения применимы конечные алгоритмы. Если же $\langle\mathbf{s},\mathbf{s}\rangle\leqslant 1$, то задача (10.25) имеет нелинейное ограничение. Покажем, что эта задача в определенном смысле эквивалентна задаче квадратичного программирования специального вида.

Запишем задачу (10.25) следующим образом:

$$\begin{gathered}\max\sigma,\\ Q\mathbf{s}+\sigma\mathbf{I}\leqslant 0,\\ \langle\mathbf{s},\mathbf{s}\rangle\leqslant 1.\end{gathered}\tag{10.36}$$

Здесь Q — матрица, строками которой являются векторы $[f_i'(\mathbf{x})]^T$ при $i\in I(\mathbf{x},\varepsilon)$ и $[-\varphi'(\mathbf{x})]^T$. Во избежание громоздкости индекс k — номер итерации — здесь опущен. Через $\mathbf{I}$ обозначен вектор $\mathbf{I}^T=(1,1,...,1)$.

Заметим, что поскольку $\sigma=0$, $\mathbf{s}=0$ являются допустимой парой, а допустимое множество задачи (10.36) ограничено и замкнуто, то эта задача всегда разрешима.

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\min\langle\mathbf{s},\mathbf{s}\rangle,\\ Q\mathbf{s}+\mathbf{I}\leqslant 0.\end{gathered}\tag{10.37}$$

Очевидно, что если множество $\{\mathbf{s}\colon Q\mathbf{s}+\mathbf{I}\leqslant 0\}$ непусто, то решение этой задачи существует. Обозначим его через $\mathbf{s}_1$. Заметим, что $\mathbf{s}_1\neq 0$, так как $\mathbf{s}=0$ не является допустимой точкой задачи.

10.4.15. Теорема. 1) *Пара* $\sigma^*=1/\|\mathbf{s}_1\|$, $\mathbf{s}^*=\mathbf{s}_1/\|\mathbf{s}_1\|$ *является решением задачи* (10.36).

2) *Если множество* $\{\mathbf{s}\colon Q\mathbf{s}+\mathbf{I}\leqslant 0\}$ *пусто, то оптимальное значение* σ *в задаче* (10.36) *равно нулю.*

Доказательство. Так как

$$Q\mathbf{s}^*+\sigma^*\mathbf{I}=(Q\mathbf{s}_1+\mathbf{I})/\|\mathbf{s}_1\|\leqslant 0 \quad \text{и} \quad \langle\mathbf{s}^*,\mathbf{s}^*\rangle=1,$$

то пара σ^*, $\mathbf{s}^*$ допустима для задачи (10.36). Предположим, что найдется пара $\overline{\sigma}$, $\overline{\mathbf{s}}$, удовлетворяющая ограничениям задачи (10.36), такая, что $\overline{\sigma}>\sigma^*>0$. Тогда точка $\overline{\mathbf{s}}/\overline{\sigma}$ будет допустимой для задачи (10.37):

$$Q\frac{1}{\overline{\sigma}}\overline{\mathbf{s}}+\mathbf{I}=\frac{1}{\overline{\sigma}}(Q\overline{\mathbf{s}}+\overline{\sigma}\mathbf{I})\leqslant 0,$$

поэтому $\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_1\rangle\leqslant\left\langle\frac{1}{\overline{\sigma}}\overline{\mathbf{s}},\overline{\sigma\mathbf{s}}\right\rangle=\frac{1}{\overline{\sigma}^2}\langle\overline{\mathbf{s}},\overline{\mathbf{s}}\rangle<\left(\frac{1}{\sigma^*}\right)^2\langle\overline{\mathbf{s}},\overline{\mathbf{s}}=\langle\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_1\rangle\langle\overline{\mathbf{s}},\overline{\mathbf{s}}\rangle$, откуда получаем неравенство $\langle\overline{\mathbf{s}},\overline{\mathbf{s}}\rangle>1$, противоречащее допустимости точки $\overline{\mathbf{s}}$ для (10.36). Вторая часть теоремы является очевидным следствием ее первой части. $\triangle$

10.4.16. Для решения задачи (10.37) удобно воспользоваться следующими соображениями. Функция

$$L(\mathbf{s},\mathbf{u})=\|\mathbf{s}\|^2+\langle\mathbf{u},Q\mathbf{s}+\mathbf{I}\rangle,\quad \mathbf{s}\in E_n,\quad \mathbf{u}\geqslant 0,$$

является функцией Лагранжа для задачи (10.37). Ее седловая точка $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{u}^*$ определяется соотношением

$$L(\mathbf{s}^*,\mathbf{u}^*)=\min_{\mathbf{s}}\min_{\mathbf{u}\geqslant 0}L(\mathbf{s},\mathbf{u}).$$

Поскольку по $\mathbf{s}$ функция $L(\mathbf{s},\mathbf{u})$ строго выпукла и квадратична, то ее минимум по $\mathbf{s}$ достигается в точке $\mathbf{s}(\mathbf{u})=-Q^T\mathbf{u}/2$. Тогда $L(\mathbf{s}(\mathbf{u}),\mathbf{u})$ примет вид $L(\mathbf{s}(\mathbf{u}),\mathbf{u})=-\|Q^T\mathbf{u}\|^2/4+\langle\mathbf{I},\mathbf{u}\rangle$. Таким образом, для отыскания $\mathbf{s}^*$ надо решить задачу

$$\max_{\mathbf{u}\geqslant 0}L(\mathbf{x}(\mathbf{u}),\mathbf{u}).$$

Это — задача минимизации квадратичной функции на множестве простой структуры, $\mathbf{u}\geqslant 0$. Хорошие результаты при решении этой задачи дает метод проектирования сопряженных градиентов. Этот метод отличается от изложенного ранее метода проекции градиента тем, что на множество $\mathbf{u}\geqslant 0$ проектируют не градиенты минимизируемой функции, а сопряженные градиенты.

10.5. Способы отыскания допустимой точки

10.5.1. Во всех рассмотренных релаксационных методах решения задач математического программирования предполагалась известной начальная точка $\mathbf{x}_0 \in X$. Ниже излагаются три способа отыскания точки $\mathbf{x}$, принадлежащей множеству

$$X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i \in I_1, \quad \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2\}.$$

Для отыскания точки x, удовлетворяющей линейным ограничениям $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant b_i$, $i \in I_2$, применим любой из методов, рассмотренных в линейном программировании (см. методы отыскания исходной угловой точки). Заметим, что эти методы конечны.

Итак, будем предполагать, что нам известна точка $\mathbf{x}_0 \in E_n$ такая, что $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}_0\rangle \geqslant b_i$, $i \in I_2$. Обозначим

$$h_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -f_i(\mathbf{x}), & i \in I_1, \\ b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle, & i \in I_2. \end{cases}$$

10.5.2. Способ 1. Пусть

$$\rho_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}_0) \leqslant 0, \quad i \in I_1, \\ 1, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}_0) > 0, \quad i \in I_2. \end{cases}$$

Для отыскания допустимой точки множества X будем решать следующую задачу:

$$\begin{gathered} \xi \to \inf, \\ f_i(\mathbf{x}) + \rho_i \xi \geqslant 0, \quad i \in I_1, \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}\rangle \geqslant b_i, \quad i \in I_2. \end{gathered} \tag{10.38}$$

Исходной допустимой парой $\mathbf{x}_0$, ξ_0 для этой задачи будет $\mathbf{x}_0$ и $\xi_0 = \max\limits_{i \in I_1, \rho_i = 1} h_i(\mathbf{x}_0)$. Обозначим через $\mathbf{x}^*$, ξ^* решение задачи (10.38). Заметим, что так как $\xi^* = \inf \xi$, то такое обозначение предусматривает, вообще говоря, и случай, когда $\xi^* = -\infty$.

10.5.3. Теорема. *Если для задачи* (10.38) *найдется такая допустимая пара* $\mathbf{x}$, ξ, *что* $\xi \leqslant 0$, *то точка* $\mathbf{x}$ *будет принадлежать множеству* X. *Если же в решении* $\mathbf{x}^*$, ξ^* *задачи* (10.38) *будет* $\xi^* > 0$, *то множество* X *пусто.*

В самом деле, если $X \neq \varnothing$, то существует такая точка $\mathbf{x}$, что $h_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$ для всех $i \in I_1 \cup I_2$. Тогда, взяв $\xi = \max\limits_{i \in I_1} h_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, получаем, что пара $\mathbf{x}$, ξ допустима и при этом справедливо неравенство $\xi < \xi^*$, противоречащее предположению о минимальности величины ξ^*. $\triangle$

Решать задачу (10.38) можно, применяя любой сходящийся релаксационный процесс.

10.5.4. Теорема. *Если множество* X *непусто и обладает свойством регулярности относительно нелинейных ограничений, то*

любой слабо сходящийся релаксационный процесс приводит к допустимой паре $\mathbf{x}$, $\xi \leqslant 0$ *задачи* (10.38) *за конечное число итераций.*

Доказательство. Если $\xi_0 \leqslant 0$, то $\mathbf{x}_0 \in X$. Предположим, что $\xi_0 > 0$. Так как множество X регулярно, то найдется точка $\overline{\mathbf{x}} \in X$ такая, что $h_i(\overline{\mathbf{x}}) < 0$ для всех $i \in I_1$ и $\langle \mathbf{a}_i, \overline{\mathbf{x}} \rangle \geqslant b_i$ для всех $i \in I_2$. Вследствие этого пара $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\xi} = \max\limits_{i \in I_1, \rho_i = 1} h_i(\overline{\mathbf{x}})$ будет удовлетворять ограничениям задачи (10.38), и, значит, $\lim\limits_{m \to \infty} \xi_m = \xi^* \leqslant \overline{\xi} < 0$. Но исходное значение ξ_0 положительно ($\xi_0 > 0$), поэтому из свойств сходящейся последовательности $\{\xi_m\}$ вытекает существование такого номера m_0, начиная с которого все $\xi_m \leqslant 0, \quad m = m_0, m_0 + 1, \ldots$

Таким образом, любой слабо сходящийся релаксационный процесс за конечное число m_0 итераций приводит к паре $\mathbf{x}_{m_0}, \xi_{m_0} \leqslant 0$. $\triangle$

10.5.5. Способ 2. Пусть $\mathbf{x}_0$ — фиксированная точка из E_n. Обозначим

$$\rho_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}_0) \leqslant 0, \quad i \in I_1 \cup I_2, \\ 1, & \text{если} \quad h_i(\mathbf{x}_0) > 0, \quad i \in I_1 \cup I_2. \end{cases}$$

Для отыскания допустимой точки множества X будем решать следующую задачу:

$$\begin{gathered} \xi \to \min, \\ f_i(\mathbf{x}) + \rho_i \xi \geqslant 0, \quad i \in I_1, \\ \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle + \rho_i \xi \geqslant b_i, \quad i \in I_2. \end{gathered} \tag{10.39}$$

Исходной допустимой парой $\mathbf{x}_0$, ξ_0 для этой задачи будет $\mathbf{x}_0$ и $\xi_0 = \max\limits_{i, \rho_i = 1} h_i(\mathbf{x}_0)$.

Ясно, что если найдется такая допустимая пара $\mathbf{x}$, ξ, что $\xi = 0$, то точка $\mathbf{x}$ будет принадлежать множеству X. Если же в решении $\mathbf{x}^*$, ξ^* задачи (10.39) будет $\xi^* > 0$, то множество X пусто.

В отличие от предыдущего способа, здесь отыскание допустимой точки множества X происходит в один этап (не надо отдельно решать задачу отыскания точки, удовлетворяющей линейным ограничениям), гарантировать же конечность релаксационного процесса в способе 2 можно лишь в случае $\xi^* < 0$, например, если множество X регулярно относительно линейных и нелинейных ограничений.

10.5.6. Способ 3. Рассмотрим основную задачу выпуклого программирования

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \min$$

при условиях

$$X = \{\mathbf{x} \in \Gamma \colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}\}, \quad \Gamma = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \geqslant 0\}.$$

Третий способ представляет собой обобщение M-метода решения задачи линейного программирования на нелинейный (выпуклый) случай.

Определим для фиксированной точки $\mathbf{x}_0 \geqslant 0$ величину

$$\rho_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad f_i(\mathbf{x}_0) \geqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad f_i(\mathbf{x}_0) < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{x}) + M\xi \to \min, \\ f_i(\mathbf{x}) + \rho_i \xi \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ \mathbf{x} \geqslant 0, \quad \xi \geqslant 0. \end{gathered} \tag{10.40}$$

Здесь M — некоторое число, о выборе которого речь пойдет ниже.

Пара $\mathbf{x}_0$, $\xi_0 = \max\limits_{i,\rho_i=1}(-f_i(\mathbf{x}_0))$ будет допустимой для задачи (10.40). Мы покажем, что при определенных условиях решение $\mathbf{x}^*$, ξ^* этой задачи таково, что точка $\mathbf{x}^*$ является оптимальной точкой основной задачи.

Пусть выполняются все условия, при которых справедлива теорема 3.6.7, а именно множество X основной задачи выпуклого программирования обладает свойством регулярности 3.4.2, а функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на множестве Γ. В этих предположениях справедлива следующая теорема.

10.5.7. Теорема. *Если разрешима основная задача выпуклого программирования, то найдется такое число M_0, что для всех $M \geqslant M_0$ в любом решении $\mathbf{x}^*$, ξ^* задачи* (10.40) *точка $\mathbf{x}^*$ будет оптимальной для основной задачи.*

Доказательство. По условию существует точка

$$\mathbf{x}^* = \arg\min\{\varphi(\mathbf{x})\colon\ \mathbf{x} \in X\}.$$

Функция $L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle$, где $\mathbf{f}^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, является функцией Лагранжа основной задачи выпуклого программирования. В силу теоремы 3.6.7 пара $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ является седловой точкой функции $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ на множестве $\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{y} \geqslant 0$ и $L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \varphi^*$, так как (см. (3.34) в п. 3.6.7) $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\rangle = 0$. Обозначим $\boldsymbol{\rho}^T = (\rho_1, ..., \rho_m)$ и выпишем функцию Лагранжа для задачи (10.40):

$$L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + M\xi - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}\xi\rangle,$$

$$\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0}(\varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle + \xi(M - \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}\rangle)) =$$

$$= \begin{cases} \inf\limits_{\mathbf{x}\geqslant 0}(\varphi(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, \mathbf{f}(\mathbf{x})\rangle) & \text{при } M - \langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}\rangle \geqslant 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, если $M \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^* \equiv M_0$, то

$$\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{x}\geqslant 0} L(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) = L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \varphi^*.$$

С другой стороны,

$$\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0}\sup_{\mathbf{y}\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) \geqslant \sup_{\mathbf{y}\geqslant 0}\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{x}^*) = \varphi^*.$$

Обозначим $Z = \{\mathbf{x},\xi:\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}\xi \geqslant 0,\quad \mathbf{x} \geqslant 0,\quad \xi \geqslant 0\}$. Поскольку $L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y})$ является функцией Лагранжа для задачи (10.40), то

$$\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0}\sup_{\mathbf{y}\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) = \inf_{(\mathbf{x},\xi)\in Z}(\varphi(\mathbf{x}) + M\xi) \leqslant \varphi^*,$$

причем правое неравенство выполняется в силу того, что для всякого $\mathbf{x} \in X$ будет $(\mathbf{x},0) \in Z$. Таким образом,

$$\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0}\sup_{\mathbf{y}\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{y}\geqslant 0}\inf_{\mathbf{x}\geqslant 0,\xi\geqslant 0} L_1(\mathbf{x},\xi,\mathbf{y}) =$$

$$= L_1(\mathbf{x}^*,0,\mathbf{y}^*) = L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \varphi^*,$$

откуда и следует справедливость теоремы. △

10.5.8. Следствие. *Если найдется такое большое M, что в решении $\mathbf{x}^*$, ξ^* M-задачи* (10.40) *будет $\xi^* > 0$, то основная задача выпуклого программирования неразрешима.*

Действительно, если основная задача разрешима, то для $M > M_0$ в любом решении M-задачи будет $\xi^* = 0$. Противоречие и доказывает утверждение следствия. △

10.5.9. Обсуждение.

1. Естественно, что величина M_0 практически нам неизвестна. В силу этого в качестве M выбирают некоторое достаточно большое число. При этом следует иметь в виду, что выбор слишком большого M может привести к потере точности вычислений.

2. Если в множестве X выделены линейные ограничения, т. е.

$$X = \{\mathbf{x}:\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0;\ i \in I_1,\ \langle \mathbf{a}_i,\mathbf{x}\rangle \geqslant b_i,\ i \in I_2,\ \mathbf{x} \geqslant 0\},$$

то теорема 10.5.7 сохраняет силу и при условии регулярности множества X относительно лишь нелинейных ограничений.

3. Наконец, укажем на одну возможность применения M-метода. Предположим, что в результате некоторого процесса минимизации получена точка X_0, близкая к $\mathbf{x}^*$, но не принадлежащая множеству X. В этом случае применение способа 3 может оказаться весьма перспективным для уточнения приближенного решения X_0.

10.6. Методы случайного спуска

10.6.1. Эти методы характеризуются тем, что в качестве направления $\mathbf{s}_k$ в формуле $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k$ $(k = 0,1,...)$ выбирается некоторая реализация n-мерной случайной величины $\mathbf{s}$ с известным законом распределения. Трудно сказать что-нибудь определенное об

эффективности методов случайного спуска, однако благодаря использованию быстродействующих компьютеров эти методы оказываются практически полезными.

10.6.2. Обозначения и определения.

$P\{A|\xi_{k-1},...,\xi_0\}$ — условная вероятность осуществления события A относительно случайных величин $\xi_{k-1},...,\xi_0$.

$M\{\xi_k|\xi_{k-1},...,\xi_0\}$ — условное математическое ожидание случайной величины ξ_k относительно случайных величин $\xi_{k-1},...,\xi_0$.

Запись $\xi_k \underset{P}{\to} \xi$, $k \to \infty$ означает, что последовательность случайных величин $\{\xi_k\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ $P\{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \to 0$, $k \to \infty$.

Запись $\xi_k \underset{\text{п.н}}{\to} \xi$, $k \to \infty$ означает, что последовательность случайных величин $\{\mathbf{x}_k\}$ сходится почти наверное (с вероятностью 1) к случайной величине ξ, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ $P\{\sup\limits_{m \geqslant k} |\xi_m - \xi| > \varepsilon\} \to 0$, $k \to \infty$.

10.6.3. Процедура случайного поиска при решении задач безусловной минимизации. В качестве $\mathbf{s}_k$ выбирают случайный вектор единичной длины и затем проверяют, делая малый шаг по направлению $-\mathbf{s}_k$, будет ли функция $\varphi(\mathbf{x})$ убывать в окрестности точки $\mathbf{x}_k$ вдоль этого направления. По сути дела таким образом проверяют знак величины $\alpha_k = \langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle / \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|$ (напомним, что $\|\mathbf{s}_k\| = 1$).

Если $\alpha_k > 0$, то осуществляют спуск по формуле

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \tag{10.41}$$

в которой β_k выбирают таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k,$$
$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \inf_{\beta \geqslant 0} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k). \tag{10.42}$$

Если $\alpha_k < 0$, то полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, $-\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k$ и осуществляют спуск. При $\alpha_k = 0$ полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ и вычисляют новое случайное направление.

10.6.4. Предположения. Относительно случайных векторов $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, ...$ предполагаем, что они независимы и таковы, что выполняется условие

$$P\{\alpha_k^2 \geqslant \alpha^2 | \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0\} \geqslant p > 0, \quad k = 0, 1, ..., \tag{10.43}$$

для некоторого $\alpha \in (0, 1)$.

Заметим, что случайные величины α_k^2, вообще говоря, зависимы.

Примеры реализации случайных векторов $\mathbf{s}_k$, удовлетворяющих условию (10.43), рассмотрены в п. 10.6.10.

Относительно минимизируемой функции $\varphi(\mathbf{x})$ предполагаем, что множество ее стационарных точек непусто: $X^* = \{\mathbf{x}^*\colon \varphi'(\mathbf{x}^*) = 0\} \neq \varnothing$.

10.6.5. Теорема. *Если*:

а) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$;

б) $\inf \varphi(\mathbf{x}) > -\infty$;

в) *для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что* $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \geqslant \delta$ *для всех* $\mathbf{x}$ *таких, что* $\rho(\mathbf{x}, X^*) \geqslant \varepsilon$;

то $\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \underset{P}{\to} 0$, $k \to \infty$.

Доказательство. В силу леммы 9.4.8 справедливо неравенство $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant h\alpha_k^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2$ $(k = 0, 1, ...)$ при $h = \lambda/(2L)$. Поскольку при фиксированных $\mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0$ величина $\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2$ является константой, которую можно вынести за знак условного математического ожидания, то с учетом условия (10.43) из предыдущего неравенства получаем

$$M(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})|\mathbf{x}_k ..., \mathbf{x}_0) \geqslant h\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 M(\alpha_k^2|\mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0) \geqslant$$
$$\geqslant h\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 p\alpha^2, \quad k = 0, 1, ...$$

Из курса теории вероятностей *) следует, что $M\xi = M(M(\xi/\eta))$, где $M(\xi/\eta)$ является условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно случайной величины η. Учитывая последнее неравенство, получаем для $j = \overline{1, k}$

$$M(\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_0) = M(M(\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0)|\mathbf{x}_0) = ...$$
$$... = M(...M(M(\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_j, ..., \mathbf{x}_0)|\mathbf{x}_{j-1}, ..., \mathbf{x}_0)...)|\mathbf{x}_0) \geqslant$$
$$\geqslant hp\alpha^2 M(...M(M(\|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2|\mathbf{x}_{j-1}, ..., \mathbf{x}_0)|\mathbf{x}_{j-2}, ..., \mathbf{x}_0)...|\mathbf{x}_0) =$$
$$= hp\alpha^2 M(\|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2|\mathbf{x}_0).$$

Поэтому

$$M(\varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1})|\mathbf{x}_0) =$$
$$= M\left(\sum_{j=0}^{k} \varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_0\right) = \sum_{j=0}^{k} M(\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_0) =$$
$$= M(\varphi(\mathbf{x}_0) - \varphi(\mathbf{x}_1)|\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{k} M(\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})|\mathbf{x}_0) \geqslant$$
$$\geqslant hp\alpha^2\|\varphi'(\mathbf{x}_0)\|^2 + hp\alpha^2 \sum_{j=1}^{k} M(\|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2|\mathbf{x}_0), \quad k = 1, 2, ...,$$

и так как $\mathbf{x}_0$ — фиксированная точка, то все условные математические ожидания, фигурирующие здесь, совпадают с безусловными и,

*) См.: *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1976. — С. 89.

следовательно, для $M\varphi(\mathbf{x}_{k+1})$ справедлива оценка

$$M\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0) - hp\alpha^2 \sum_{j=0}^{k} M\|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2, \quad k = 0, 1, ...$$

В силу условия б) последовательность $\{M\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ ограничена снизу, и поскольку предыдущая оценка справедлива для всех номеров k, то $M\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \to 0$ при $k \to \infty$, а значит, вследствие условия в) для всякого $\varepsilon > 0$ будет $\lim\limits_{k\to\infty} P\{\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \geqslant \varepsilon\} = 0$. $\triangle$

10.6.6. Следствие. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, кроме того, является выпуклой, то*

$$\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \underset{\text{п.н}}{\to} 0, \quad k \to \infty.$$

Действительно, как было доказано, последовательность $\{\rho(\mathbf{x}_k, X^*)\}$ сходится по вероятности к нулю, а следовательно, и последовательность $\{\mu_k\}$, где $\mu_k = \varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*)$. Поскольку существует некоторая подпоследовательность $\{\mu_{k_j}\}$, сходящаяся к нулю почти наверное, то в силу монотонного невозрастания последовательности $\{\mu_k\}$ будет справедливо соотношение $\mu_k \underset{\text{п.н}}{\to} 0$, $k \to \infty$ и, следовательно, в силу условия в) и теоремы 9.2.5 получаем $\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \underset{\text{п.н}}{\to} 0$, $k \to \infty$, где X^* — множество минимумов функции $\varphi(\mathbf{x})$. $\triangle$

10.6.7. Для того чтобы оценить скорость сходимости нашего процесса минимизации, понадобится следующая

Лемма. *Для последовательности случайных величин $\{\alpha_k^2\}$ выполняется соотношение*

$$P\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2 \geqslant \frac{1}{2}\,\alpha^2 pk\right\} \geqslant 1 - \frac{4}{\alpha^4 p^2 k}, \quad k = 1, 2, ...$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную последовательность независимых случайных величин $\{\xi_k\}$ таких, что $P\{\xi_k = \alpha^2\} = p$ и $P\{\xi_k = 0\} = 1 - p$. Здесь α и p — константы, фигурирующие в соотношении (10.43). Покажем, что для всех номеров $k = 1, 2, ...$ и для любого $C \in (-\infty, +\infty)$ будет

$$P\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2 \geqslant Ck\right\} \geqslant P\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \xi_j \geqslant Ck\right\}. \tag{10.44}$$

Пусть $k = 1$. Из (10.43) получаем

$$P\{\alpha_0^2 \geqslant C\} \geqslant \begin{cases} 0 & \text{при} \quad C > \alpha^2, \\ p & \text{при} \quad 0 < C \leqslant \alpha^2, \\ 1 & \text{при} \quad C \leqslant 0, \end{cases}$$

следовательно, $P\{\alpha_0^2 \geqslant C\} \geqslant P\{\xi_0 \geqslant C\}$.

Сделаем индуктивное предположение, что (10.44) справедливо для всех $k \leqslant m$.

Пусть $k = m+1$. Обозначим $S_k \equiv \sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2$. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned}
P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1)\} &= P\{\alpha_m^2 + S_m \geqslant C(m+1)\} = \\
&= P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1) | S_m \geqslant C(m+1)\} P\{S_m \geqslant C(m+1)\} + \\
&+ P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1) | C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\} \times \\
&\times P\{C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\} + \\
&+ P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1) | S_m < C(m+1) - \alpha^2\} \times \\
&\times P\{S_m < C(m+1) - \alpha^2\}.
\end{aligned}$$

Так как случайные величины α_k^2 неотрицательны, то

$$P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1) | S_m \geqslant C(m+1)\} = 1.$$

Кроме того, условие (10.43) означает, что

$$\begin{aligned}
P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1) | C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\} &\geqslant \\
\geqslant P\{\alpha_m^2 \geqslant \alpha^2 | C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\} &\geqslant p.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1)\} P\{S_m \geqslant C(m+1)\} &= \\
= pP\{C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\}&.
\end{aligned}$$

Поскольку из формулы сложения вероятностей следует

$$\begin{aligned}
P\{C(m+1) - \alpha^2 \leqslant S_m < C(m+1)\} &= \\
= P\{S_m \geqslant C(m+1) - \alpha^2\} - P\{S_m \geqslant C(m+1)\}&,
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1)\} &\geqslant \\
\geqslant (1-p) P\{S_m \geqslant C(m+1)\} + pP\{S_m \geqslant C(m+1) - \alpha^2\} &= \\
= (1-p) P\{S_m \geqslant C_1 m\} + pP\{S_m \geqslant C_2 m\}&, \qquad (10.45)
\end{aligned}$$

где $C_1 = C\dfrac{m+1}{m}$, $C_2 = +\dfrac{C - \alpha^2}{m}$.

Для независимых случайных величин ξ_k обозначим $R_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \xi_j$.

Тогда

$$P\{R_{m+1} \geqslant C(m+1)\} =$$
$$= P\{\xi_m = 0,\ R_m \geqslant C(m+1)\} + P(\xi_m) = \alpha^2,\ R_m \geqslant C(m+1) - \alpha^2\} =$$
$$= (1-p)P\{R_m \geqslant C(m+1)\} + pP\{R_m \geqslant C(m+1) - \alpha^2\} =$$
$$= (1-p)P\{R_m \geqslant C_1 m\} + pP\{R_m \geqslant C_2 m\}. \quad (10.46)$$

По индуктивному предположению условие (10.44) выполняется для $k = m$ и любого $C \in (-\infty, +\infty)$ и, в частности, для $C = C_1$ и $C = C_2$. Поэтому из (10.45) получаем

$$P\{S_{m+1} \geqslant C(m+1)\} \geqslant (1-p)P\{R_m \geqslant C_1 m\} + pP\{R_m \geqslant C_2 m\}.$$

Отсюда и из (10.46) следует справедливость (10.44).

Для R_k очевидно равенство

$$P\Big\{R_k \leqslant \frac{1}{2}\,\alpha^2 pk\Big\} = P\Big\{\sum_{j=0}^{k-1}(\xi_j - \alpha^2 p) \leqslant -\frac{1}{2}\,\alpha^2 pk\Big\}.$$

По неравенству Колмогорова последняя вероятность не превосходит величины $4/(\alpha^4 p^2 k)$. Остается в условии (10.44) положить $C = \alpha^2 p/2$, чтобы получить утверждение леммы. $\triangle$

10.6.8. Оценка скорости сходимости.

Теорема. *Если для выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ выполняются условия*:

а) $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$;

б) $X^* \neq \varnothing$;

в) *для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\|\varphi'(\mathbf{x})\| \geqslant \delta$ для всех $\mathbf{x}$ таких, что $\rho(\mathbf{x}, X^*) \geqslant \varepsilon$*;

то

$$P\Big\{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \frac{C_1}{k}\Big\} \geqslant 1 - \frac{C_2}{k}, \quad k = 1, 2, ..., \quad (10.47)$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — некоторые положительные константы.

Доказательство. Из теоремы 9.3.4 следует оценка

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \eta^2 \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2}\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, ...,$$

а на основании леммы 9.4.8 имеем

$$\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1}) \geqslant h\alpha_j^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_j)\|^2, \quad h = \lambda/(2L).$$

Поэтому $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \dfrac{\eta^2}{h}\left(\sum\limits_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2\right)^{-1}$, $k = 1, 2, ...$ Лемма 10.6.7 приводит к соотношению

$$P\Big\{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \frac{\eta^2}{h}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2\right)^{-1} \leqslant \frac{2\eta^2}{h\alpha^2 pk}\Big\} \geqslant 1 - \frac{4}{\alpha^4 p^2 k}, \quad (10.48)$$

а это в свою очередь доказывает справедливость теоремы при $C_1 = 2\eta^2/(h\alpha^2 p)$ и $C_2 = 4/(\alpha^4 p^2)$. $\triangle$

10.6.9. Следствие. *Если функция $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпуклая, принадлежащая классу $C^{1,1}(E_n)$, то*

$$P\Big\{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\,\mu_0 \exp\{-C_3 k\}\Big\} \geqslant 1 - \frac{C_2}{k}, \quad C_3 > 0, \tag{10.49}$$

где ρ — константа сильной выпуклости.

Действительно, пользуясь теоремой 9.3.5 и предыдущей оценкой разности $\varphi(\mathbf{x}_j) - \varphi(\mathbf{x}_{j+1})$, приходим к неравенству

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\mu_0 \exp\Big\{-\rho h \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^2\Big\}, \quad k = 1, 2, ...$$

Воспользовавшись леммой 10.6.7, приходим к (10.48) при $C_3 = \rho h \alpha p/2$. $\triangle$

10.6.10. Примеры реализации случайных векторов $\mathbf{s}_k$ ($k = 0, 1, ...$).

1. Случайный и покоординатный спуск. Пусть $\mathbf{s}_k = \mathbf{e}_{j(k)}$, где $\mathbf{e}_{j(k)}$ — j-й координатный вектор. Номер $j = j(k)$ выбирается случайным образом из n чисел $\{1, 2, ..., n\}$ таким образом, что $P\{j(k) = i\} = 1/n$ $(i = \overline{1, n})$. В этом случае, как нетрудно видеть,

$$P\Big\{\alpha_k^2 \geqslant \frac{1}{n}\Big\} = P\Big\{\frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2 \|\mathbf{s}_k\|^2} \geqslant \frac{1}{n}\Big\}.$$

Учитывая, что $\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \rho_k\rangle^2 = (\varphi'_{j(k)}(\mathbf{x}_k))^2$, $\|\mathbf{s}_k\| = 1$, можем записать

$$P\Big\{\alpha_k^2 \geqslant \frac{1}{n}\Big\} = P\Big\{(\mathbf{g}'_{j(k)}(\mathbf{x}_k))^2 \Big(\sum_{i=1}^{n} (\varphi'_i(\mathbf{x}_k))^2\Big)^{-1} \geqslant \frac{1}{n}\Big\} \geqslant$$

$$\geqslant P\Big\{(\varphi'_{j(k)}(\mathbf{x}_k))^2 \geqslant \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2}{n}\Big\} \geqslant P\{(\varphi'_{j(k)}(\mathbf{x}_k))^2 =$$

$$= \max_{i=\overline{1,n}} (\varphi'_i(\mathbf{x}_k))^2\} = \frac{1}{n}.$$

На практике метод случайного покоординатного спуска применяется в совокупности с некоторыми эвристическими приемами с целью ускорения процесса минимизации. Так, при выборе направления спуска исключают из рассмотрения “неперспективные” направления, например, при выборе номера $j(k)$ направление $-\mathbf{s}_k = -\mathbf{s}_{k-1}$ себя уже исчерпало на предыдущем шаге. Таким образом, номер $j(k)$ выбирают из $n-1$ чисел $\{1, 2, ..., j(k-1) - 1, j(k-1) + 1, ..., n\}$.

В результате ряда испытаний некоторые направления могут быть отвергнуты, по крайней мере временно, как неперспективные, ввиду чего выбор номера $j(k)$ производят из меньшего набора чисел.

Наконец, метод случайного покоординатного спуска часто используют в сочетании с другими приемами, образуя так называемые *гибридные методы*. Например, задав из тех или иных соображений, появляющихся в результате накапливающейся в процессе счета информации, некоторое число $p \leqslant n$, после построения точек $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_p$ в качестве направления спуска $-\mathbf{s}_{p+1}$ выбирают направление $\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_0$, после чего повторяют процесс случайного покоординатного спуска.

2. Метод случайного спуска. Пусть $\mathbf{s}_k$ — случайная точка, подчиняющаяся на сфере $S = \{\mathbf{s} \in E_n : \|\mathbf{s}\| - 1\}$ равномерному распределению.

Определение. Случайная точка $\mathbf{s} \in E_n$ называется *равномерно распределенной* на квадрируемой поверхности S, если для всякого измеримого подмножества $S'(S' \subseteq S)$ $P\{\mathbf{s} \in S'\} = \operatorname{mes} S' / \operatorname{mes} S$. Здесь символ mes означает площадь.

Из этого определения следует, что плотность распределения вектора $\mathbf{s}$ будет величиной постоянной и равной $1/\operatorname{mes} S$.

Поскольку $\mathbf{s}_k$ — независимые случайные векторы, равномерно распределенные на сфере S и, следовательно, обладающие постоянной плотностью распределения, то для некоторого $p > 0$, зависящего от n-размерности пространства E_n, будет

$$P\left\{\left\|\mathbf{s}_k - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\| \leqslant \frac{1}{2}\right\} \geqslant p > 0.$$

Но если

$$\left\|\mathbf{s}_k - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\| \leqslant \frac{1}{2},$$

то

$$\alpha_k^2 = \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|^2} = \left(1 - \left\langle \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}, -\mathbf{s}_k + \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\rangle\right)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \left\|\mathbf{s}_k - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\|\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Итак,

$$P\left\{\left(1 - \left\|\mathbf{s}_k - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\|\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}\right\} \geqslant p > 0,$$

но

$$P\left\{\alpha_k^2 \geqslant \left(1 - \left\|\mathbf{s}_k - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_k)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|}\right\|\right)^2\right\} = 1,$$

следовательно, $P\left\{\alpha_k^2 \geqslant \frac{1}{4}\middle|\mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0\right\} \geqslant p > 0$.

Таким образом, выполняется условие (10.43) для $\alpha = 1/2$ и некоторого $p > 0$.

3. В качестве примера использования зависимых случайных векторов рассмотрим так называемый метод *случайного поиска с*

обучением. Направление $\mathbf{s}_k$ на каждой итерации будем определять формулой

$$\mathbf{s}_k = \frac{1}{\|\mathbf{v}_k + \mathbf{w}_k\|}(\mathbf{v}_k - \mathbf{w}_k), \quad \|\mathbf{w}_k\| \leqslant c < 1, \quad k = 0, 1, ...,$$

где $\{\mathbf{v}_k\}$ — последовательность независимых случайных векторов, равномерно распределенных на единичной сфере с центром в начале координат, $\mathbf{w}_k$ — обучающий вектор, выбор которого производится с учетом информации о минимизируемой функции и множестве X, накопленной в результате предыдущих итераций.

Покажем, что для любого фиксированного $\overline{\mathbf{s}}\,(\|\overline{\mathbf{s}}\| = 1)$ и любого $\alpha \in (0, 1)$ будет $P\{\langle \mathbf{s}_k, \overline{\mathbf{s}}\rangle \geqslant \alpha | \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0\} \geqslant p > 0, \quad k = 0, 1, ...,$ т. е. выполняются условия (10.43) при $\overline{\mathbf{s}} = \varphi'(\mathbf{x}_k)/\|\varphi'(\mathbf{x}_k)\|$.

В дальнейших рассмотрениях индекс k во избежание громоздкости опущен. Рассмотрим вектор $\mathbf{y} = -\mathbf{w} + (\delta + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle)\overline{\mathbf{s}}$, где

$$\delta = \sqrt{1 + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle^2 - \|\mathbf{w}\|^2}.$$

Легко убедиться, что

$$\|\mathbf{y}\| = 1 \text{ и } \delta + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle \geqslant \sqrt{1 - c^2 + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle^2} + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle > 0.$$

Поэтому

$$\langle \mathbf{y} + \mathbf{w}, \overline{\mathbf{s}}\rangle = \delta + \langle \overline{\mathbf{s}}, \mathbf{w}\rangle = \|\mathbf{y} + \mathbf{w}\|.$$

Выберем $\varepsilon = (1 - \alpha)^2(1 - c)^2/8$ и предположим, что осуществилось событие $\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle \geqslant 1 - \varepsilon$. Заметим, что

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|^2 = 2(1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle) \leqslant 2\varepsilon,$$

$$\langle \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}\rangle = \frac{1}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}(\langle \mathbf{y} + \mathbf{w}, \overline{\mathbf{s}}\rangle + \langle \mathbf{v} - \mathbf{y}, \overline{\mathbf{s}}\rangle) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}(\|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| - \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\|) \geqslant \frac{1}{\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|}(\|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| - \sqrt{2\varepsilon}) > 0.$$

Так как $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| + \sqrt{2\varepsilon}$, то

$$\langle \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}\rangle \geqslant \frac{\|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| - \sqrt{2\varepsilon}}{\|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| + \sqrt{2\varepsilon}} = 1 - \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{\|\mathbf{y} + \mathbf{w}\| + \sqrt{2\varepsilon}} > 1 - \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{w}\|} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{1 - c} = \alpha.$$

Поскольку $\{\mathbf{v}_k\}$ — последовательность независимых, равномерно распределенных случайных векторов единичной длины, то для любого единичного вектора $\mathbf{a}$ $(\|\mathbf{a}\| = 1)$ и любого числа $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое число $p = p(\varepsilon) \in (0, 1)$, не зависящее ни от номера k, ни от вектора $\mathbf{a}$, что $P\{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{a}\rangle \geqslant 1 - \varepsilon\} = p$. В силу этого

$$P\{\langle \mathbf{s}_k, \overline{\mathbf{s}}\rangle \geqslant \alpha | \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0\} \geqslant P\{\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{y}_k\rangle \geqslant 1 - \varepsilon\} = p, \quad k = 0, 1, ...$$

10.6.11. Метод случайного спуска для отыскания стационарных точек общей задачи нелинейного программирования. Для задачи минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на множестве $X = \{\mathbf{x}\colon f_i(\mathbf{x}) \geqslant \geqslant 0,\ i = \overline{1, m}\}$ метод случайного спуска представляет собой процесс построения последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$, элементы которой удовлетворяют следующим соотношениям: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k$, $\beta_k \geqslant 0$, $[\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k] \subset X$, $\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_k)$. Здесь $\mathbf{s}_k$ — некоторый случайный вектор единичной длины. Различные варианты метода отличаются способами выбора направления $\mathbf{s}_k$ и шага β_k.

С вычислительной стороны метод весьма прост, поскольку элементарно находится направление $\mathbf{s}_k$ с помощью того или иного датчика случайных чисел. Однако, в отличие от соответствующего метода в задачах безусловной минимизации, здесь приходится затрачивать усилия на проверку того, является ли направление $-\mathbf{s}_k$ возможным в точке $\mathbf{x}_k$, для чего выясняют, принадлежит ли при достаточно малом β точка $\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k$ множеству X, и лишь затем, если $-\mathbf{s}_k$ — возможное направление, проверяют, убывает ли функция $\varphi(\mathbf{x})$ вдоль этого направления. И только после положительного ответа осуществляется спуск.

Как и в п. 10.4.3, обозначим через ζ_k расстояние от точки $\mathbf{x}_k$ до ближайшей по направлению $-\mathbf{s}_k$ граничной точки множества X.

10.6.12. Схема метода. В качестве начального приближения может быть выбрана любая точка $\mathbf{x}_0$ множества X. Пусть в результате k-й итерации вычислен $\mathbf{x}_n \in X$. Опишем $(k+1)$-ю итерацию.

1. Находят случайное направление $\mathbf{s}_k$ и проверяют, является ли направление $-\mathbf{s}_k$ возможным в точке $\mathbf{x}_k$.

2. Если направление $-\mathbf{s}_k$ не является возможным, то полагают $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ и переходят к п. 1 при $k = k + 1$.

3. Если $-\mathbf{s}_k$ — возможное направление, то в качестве β_k выбирают любое число β, принадлежащее отрезку $[0, \zeta_k]$ и удовлетворяющее условию

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \leqslant (1 - \lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k,$$
$$0 < \lambda \leqslant \lambda_k \leqslant 1, \quad \omega_k = \inf_{0 \leqslant \beta \leqslant \zeta_k} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k).$$

Наконец полагают $\mathbf{x}_k + 1 = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k$ и переходят к п. 1 при $k = k + 1$.

Замечание. В п. 3 предусмотрен и тот случай, когда $\varphi(\mathbf{x}_k) \leqslant \leqslant \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k)$ при всех $\beta \in [0, \zeta_k]$. В этом случае $\beta_k = 0$ и $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$.

10.6.13. Множество стационарных точек. Рассмотрим вспомогательную задачу (см. п. 10.4.2) отыскания такого числа σ и такого вектора $\mathbf{s}$, что

$$\sigma \to \max,$$

$$\begin{gathered}\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0, \quad i \in I,\\ -\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle + \sigma \leqslant 0,\\ \langle \mathbf{s}, \mathbf{s}\rangle \leqslant 1.\end{gathered} \tag{10.25}$$

Как и в п. 10.4.2, введем следующие обозначения. Пусть $\varepsilon > 0$;

$$I(\mathbf{x}, \varepsilon) = \{i\colon 0 \leqslant f_i(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon\}; \quad I(\mathbf{x}, 0) = \{i\colon f_i(\mathbf{x}) = 0\};$$

$\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\widetilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ — решение задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, \varepsilon)$; $\widetilde{\sigma}(\mathbf{x}, 0)$, $\widetilde{\mathbf{s}}(\mathbf{x}, 0)$ — решение задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, 0)$; $X_0 = \{\mathbf{x} \in X\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$; $X^* = \{\mathbf{x}^* \in X_0\colon \widetilde{\sigma}(\mathbf{x}^*, 0) - 0\}$. В соответствии с п. 10.4.7 множество X^* является множеством стационарных точек — точек, в которых выполняются необходимые условия локального минимума.

Предположения. Сходимость метода будем обосновывать при следующих предположениях:

1) векторы $\mathbf{s}_k$ являются случайными, независимыми и равномерно распределенными на сфере $S = \{\mathbf{s}\colon \|\mathbf{s}\| = 1\}$;

2) функции $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1, m})$ принадлежат классу $C^{1,1}(X)$;

3) множество X_0 ограничено.

Заметим, что при исследовании сходимости мы будем существенно использовать материал § 10.4. При этом из предположения об ограниченности множества X_0 следует, что выполняются условия 2)–4) п. 10.4.6: $\|f_i'(\mathbf{x})\| \leqslant M$ для всех $\mathbf{x} \in X_0$, $X^* \neq \varnothing$ и $\inf\limits_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}) > -\infty$.

Обозначим через $\overline{\sigma}$, $\overline{\mathbf{s}}$ решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}$ и $I = I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$.

10.6.14. Лемма. *Если $\overline{\sigma} > 0$, то существуют числа $\overline{\varepsilon} > 0$, $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ такие, что для любых $\varepsilon \in [0, \overline{\varepsilon}]$, $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X|$ $\|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta\}$ и любого направления $\mathbf{s}$ $(\|\mathbf{s}\| = 1)$, удовлетворяющего условию $\langle \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}}\rangle \geqslant 1 - \alpha$, будут выполняться ограничения задачи* (10.25) *при $\sigma = \overline{\sigma}/4$ и $I = I(\mathbf{x}, \varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\varepsilon}$ и δ таковы, что выполняются неравенства $\|\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi'(\overline{\mathbf{x}})\| \leqslant \overline{\sigma}/2$, $\|f_i'(\mathbf{x}) - f_i'(\overline{\mathbf{x}})\| \leqslant \overline{\sigma}/2$ $(i = \overline{1, m})$. Для любого $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и любого $i \in I(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset I(\overline{\mathbf{x}}, 0)$ будет

$$\begin{aligned}0 \geqslant \langle f_i'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \overline{\sigma} = \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \overline{\sigma} + \langle f_i'(\overline{\mathbf{x}}) - f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle \geqslant\\ \geqslant \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \overline{\sigma} - \|f_i'(\overline{\mathbf{x}}) - f_i'(\mathbf{x})\| \geqslant \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \overline{\sigma}/2\end{aligned} \tag{10.50}$$

и, аналогично,

$$0 \geqslant -\langle \varphi'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \overline{\sigma}/2. \tag{10.51}$$

Пусть

$$\alpha = \overline{\sigma}^2/(32M_1^2), \quad M_1 = \max\{\max_{\mathbf{x} \in X_0} \|\varphi'(\mathbf{x})\|, M\}.$$

Заметим, что $\overline{\sigma}/2 \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x})\| \leqslant M_1$. Далее,

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s}\rangle = \langle f_i'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}}\rangle + \langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}}\rangle.$$

Но

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}} \rangle \leqslant M_1 \|\mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}}\| \leqslant M_1 \sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 - 2\langle \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}} \rangle + \|\overline{\mathbf{s}}\|^2} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \sqrt{2 - 2(1-\alpha)} = \overline{\sigma}/4.$$

Отсюда, учитывая (10.50) и предыдущее неравенство, получаем

$$\langle f_i'(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle \leqslant -\overline{\sigma}/2 + \overline{\sigma}/4 = -\overline{\sigma}/4$$

и, аналогично,

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s} \rangle = \langle \varphi'(\mathbf{x}), \overline{\mathbf{s}} \rangle + \langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}} \rangle \leqslant \overline{\sigma}/2 - M_1 \|\mathbf{s} - \overline{\mathbf{s}}\| \geqslant \overline{\sigma}/4. \quad \triangle$$

10.6.15. Лемма. *Для любого $\gamma \geqslant 0$ существуют числа $\sigma_\gamma > 0$ и $\zeta_\gamma > 0$ такие, что для всех $\overline{\mathbf{x}} \in X_0 \setminus U_\gamma(X^*)$ и $\beta \in [0, \zeta_\gamma]$ будет $\overline{\sigma} > \sigma_\gamma > 0$ и $\overline{\mathbf{x}} - \beta\overline{\mathbf{s}} \in X$. Здесь $U_\gamma(X^*) = \{\mathbf{x} \in X_0 | \rho(\mathbf{x}, X^*) \leqslant \gamma\}$.*

Доказательство. Сначала докажем существование величины $\sigma_\gamma > 0$ для любого $\gamma > 0$. Предположим противное: пусть $\overline{\sigma}_k \to 0$, $k \to \infty$, для некоторой последовательности $\{\mathbf{y}_k\}$, где пара $\overline{\sigma}$, $\overline{\mathbf{s}}_k$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \mathbf{y}_k$, $I = I(\mathbf{y}_k, 0)$ и $\mathbf{y}_k \in X_0 \setminus U_\gamma(X^*)$ для некоторого $\gamma > 0$.

Так как множество X_0 ограничено, то, не умаляя общности, можно считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$, причем $\rho(\mathbf{y}, X^* \geqslant \gamma$. Пусть $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\mathbf{s}}$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и $I = I(\mathbf{y}, 0)$. Поскольку $\mathbf{y} \notin X^*$, то $\widetilde{\sigma} > 0$. В силу леммы 10.6.14 существуют такие числа $\widetilde{\varepsilon} > 0$ и $\widetilde{\delta} > 0$, что для всех $\mathbf{x} \in U_{\widetilde{\delta}}(\mathbf{y})$ пара $\sigma = \widetilde{\sigma}/4$, $\mathbf{s} = \widetilde{\mathbf{s}}$ будет удовлетворять ограничениям задачи (10.25) при $I = I(\mathbf{x}, \widetilde{\varepsilon})$. Так как $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}$ при $k \to \infty$, то для всех достаточно больших номеров k будет $\mathbf{y}_k = U_{\widetilde{\delta}}(\mathbf{y})$, а значит, в силу той же леммы в паре $\overline{\sigma}_k$, $\overline{\mathbf{s}}_k$ будет $\overline{\sigma}_k \geqslant \widetilde{\sigma}/4 > 0$, поскольку $\overline{\sigma}_k$ как компонента решения задачи (10.25) есть величина максимальная. Полученное противоречие доказывает существование величины $\sigma_\gamma > 0$ для любого $\gamma > 0$.

Докажем теперь существование величины $\zeta_\gamma > 0$. Предположим противное: для некоторой последовательности $\{\mathbf{y}_k\}$, $\mathbf{y}_k \in X_0 \setminus U_\gamma(X^*)$, будет $\overline{\zeta}_k \to 0$, $k \to \infty$. Здесь $\gamma > 0$, $\overline{\zeta}_k$ — расстояние от точки $\mathbf{y}_k$ до границы множества X вдоль направления $-\overline{\mathbf{s}_k}$, пара $\overline{\sigma}_k$, $\overline{\mathbf{s}}_k$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \mathbf{y}_k$, $I = I(\mathbf{y}_k, 0)$. Как и выше, будем предполагать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$ и $\rho(\mathbf{y}, X^*) \geqslant \gamma$. В силу леммы 10.4.10 существуют такие числа $\overline{\varepsilon} > 0$ и $\delta > 0$, что при всех $\mathbf{y}_k \in U_\delta(\mathbf{y})$ имеет место включение $I(\mathbf{y}_k, \overline{\varepsilon}) \subset I(\mathbf{y}, 0)$. Тогда из леммы 10.6.14 следует, что ограничения задачи (10.25) будут выполняться при $\sigma = \dfrac{1}{4}\widetilde{\sigma}$, $\mathbf{s} = \widetilde{\mathbf{s}}$, где пара $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\mathbf{s}}$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $I = I(\mathbf{y}_k, \overline{\varepsilon})$. По лемме 10.4.8 из (10.30) и (10.31) получаем, что $\overline{\zeta}_k \geqslant \min\{\overline{\varepsilon}/\mu, \sigma_\gamma/L\} > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\triangle$

10.6.16. Теорема. *Последовательность случайных точек* $\{\mathbf{x}_k\}$ *сходится по вероятности к множеству* X^*.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\gamma > 0$ и докажем, что $P\{\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \geqslant \gamma\} \to 0$, $k \to \infty$. Предположим, что $\mathbf{x}_k \in X_0 \setminus U_\gamma(X^*)$. Тогда по лемме 10.6.15 найдутся такие числа $\sigma_\gamma > 0$ и $\zeta_\gamma > 0$, для которых $\overline{\sigma}_k \geqslant \sigma_\gamma$ и $\overline{\zeta}_k \geqslant \zeta_\gamma$. Здесь $\overline{\sigma}_k$, $\overline{\mathbf{s}}_k$ — решение задачи (10.25) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ и $I = I(\mathbf{x}_k, 0)$. Так как $\overline{\sigma}_k > 0$, то по лемме 10.6.14 существует число $\overline{\varepsilon}_k > 0$ такое, что всякий вектор $\mathbf{s}_k$, удовлетворяющий условию $\langle \mathbf{s}_k, \overline{\mathbf{s}}_k \rangle \geqslant 1 - \alpha$, будет удовлетворять ограничениям задачи (10.25) при $\sigma = \dfrac{1}{4}\overline{\sigma}_k$ и $I = I(\mathbf{x}_k, \overline{\varepsilon}_k)$. В силу выбора числа β_k (см. условия (10.26)) имеем для всех $\beta \in [0, \overline{\zeta}_k]$ $\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k \in X_0$ и (см. п. 10.4.9)

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda(\varphi(\mathbf{x}_k) - \omega_k) \geqslant \lambda(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda\Big(\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle \beta - \frac{1}{2}L\beta^2\|\mathbf{s}_k\|^2\Big) \geqslant \lambda\Big(\beta\sigma - \frac{1}{2}\beta^2 L\Big).$$

Выбирая $\beta = \min\Big\{\overline{\zeta}_k, \dfrac{\sigma}{L}\Big\}$, получаем с учетом того, что $\overline{\zeta}_k \geqslant \zeta_\gamma$ и $\sigma \geqslant \dfrac{1}{4}\sigma_\gamma$, при всех $\mathbf{s}_k$ таких, что $\langle \mathbf{s}, \overline{\mathbf{s}} \rangle \geqslant 1 - \alpha$, соотношение

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k\mathbf{s}_k) \geqslant \varkappa, \tag{10.52}$$

где $\varkappa = \min\Big\{\xi_\gamma, \dfrac{1}{8}\dfrac{\delta_\gamma}{L}\Big\}$.

Пусть ξ_k — случайные величины такие, что

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \mathbf{x}_k \in X_0 \setminus U_\delta(X^*), \\ 0, & \text{если} \quad \mathbf{x}_k \in U_\delta(X^*). \end{cases}$$

Поскольку точки $\mathbf{s}_k$ равномерно распределены на сфере $S = \{\mathbf{s}\colon \|\mathbf{s}\| = 1\}$, то из (10.52) следует

$$P\{\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \varkappa | \xi_k = 1\} \geqslant P\{\langle \mathbf{s}_k, \overline{\mathbf{s}}_k \rangle \geqslant 1 - \alpha\} \geqslant$$
$$\geqslant P\{\|\mathbf{s}_k - \overline{\mathbf{s}}_k\|^2 \leqslant 2\alpha\} \geqslant p > 0.$$

Отсюда $M(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) | \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{x}_0)) \geqslant \varkappa p \xi_k$. Из этого неравенства, аналогично тому, как это делалось в п. 10.6.5, легко получить условие

$$M\varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0) - \varkappa p \sum_{j=0}^{k} M\xi_j.$$

Поскольку множество X_0 по предположению ограничено, то ограничена и функция $\varphi(\mathbf{x})$ на X_0 и, следовательно, $M\xi_k \to 0$, $k \to \infty$, а значит, $P\{\rho(\mathbf{x}_k, X^*) \geqslant \gamma\} \to 0$, $k \to \infty$. $\triangle$

10.6.17. О сходимости метода в случае задач выпуклого программирования. В задачах безусловной минимизации из

сходимости по вероятности последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к множеству стационарных точек следовала в выпуклом случае сходимость почти наверное последовательности $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ к $\varphi^* = \min \varphi(\mathbf{x})$, а значит, и сходимость почти наверное последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ к множеству решений. В задачах с ограничениями условия выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ и множества X еще не гарантируют аналогичного утверждения. Для доказательства того, что

$$\varphi(\mathbf{x}_k) \underset{\text{п.н}}{\to} \varphi^*, \quad k \to \infty, \quad \rho(\mathbf{x}_k, X^*) \underset{\text{п.н}}{\to} 0, \quad k \to \infty,$$

необходимо дополнительное требование регулярности по Слейтеру множества X.

10.6.18. Предположения.

1) Векторы $\mathbf{s}_k$ являются случайными, независимыми и равномерно распределенными на сфере $S = \{\mathbf{s}\colon \|\mathbf{s}\| = 1\}$;

2) выпуклое и замкнутое множество X регулярно, т. е. существует шар R радиуса r с центром в некоторой точке $\mathbf{w}$, целиком принадлежащий множеству X: $R = \{\mathbf{x}\colon \rho(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leqslant r\} \subset X$;

3) выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x})$ принадлежит классу $C^{1,1}(X)$;

4) множество X_0 ограничено.

Замечание. Нетрудно убедиться, что условие регулярности 2) эквивалентно условию регулярности, введенному в пп. 3.4.2 и 3.4.3.

Для обоснования сходимости процедуры случайного спуска необходимо рассмотреть ряд свойств.

10.6.19. Свойство А. *Если точка $\mathbf{x} \in X$ не является оптимальной, то найдется такой вектор $\overline{\mathbf{y}} \in X$, для которого справедливо неравенство*

$$\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle = \eta > 0.$$

Доказательство. Пусть $\overline{\mathbf{y}}$ является проекцией точки $\mathbf{z} = \overline{\mathbf{x}} - \varphi'(\overline{\mathbf{x}})$ на множество X. В силу свойств проектирования имеет место соотношение

$$\langle \overline{\mathbf{x}} - \mathbf{z}, \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle \geqslant \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|^2,$$

т. е.

$$\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle \geqslant \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|^2.$$

Отсюда и следует свойство А, поскольку равенство $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$ является необходимым и достаточным условием оптимальности $\overline{\mathbf{x}}$ (п. 10.1.2). $\triangle$

Всюду ниже через $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ обозначены точки, удовлетворяющие свойству А.

10.6.20. Свойство В. *Найдется такое число $\delta > 0$, что множества*

$$U_\delta(\overline{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in X\colon \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\| \leqslant \delta\}, \quad U_\delta(\overline{\mathbf{y}}) = \{\mathbf{y} \in X\colon \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\| \leqslant \delta\}$$

не пересекаются, и существуют такие n-мерные сферы R_1 и R_2 радиусов r_1 и r_2, что $R_1 \subset U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и $R_2 \subset U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$.

Доказательство вытекает из свойства A (так как $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{y}}$) и предположения 2) *). $\triangle$

10.6.21. Свойство C. *Для* $\eta = \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всех* $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ *и* $y \in U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$ *будет выполняться неравенство*

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \geqslant \frac{1}{2}\eta.$$

Доказательство. Обозначим $\gamma = \max\limits_{\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})} \|\varphi'(\mathbf{x})\|$. Предположение 3) гарантирует, что $\gamma < +\infty$. Выберем

$$\delta \leqslant \frac{\eta}{2(L\|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\| + 2\gamma)}.$$

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}$; тогда

$$\begin{aligned}\langle \varphi'(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle + \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geqslant \\ \geqslant \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle - |\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle|.\end{aligned}$$

Далее,

$$|\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle| \leqslant |\varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u})| \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leqslant \gamma(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|) \leqslant 2\gamma\delta.$$

Но в силу предположения 3) и свойства A получаем

$$\begin{aligned}\langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle = \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} + \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) - \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle \geqslant \\ \geqslant \langle \varphi'(\overline{\mathbf{x}}), \overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} \rangle - \|\varphi'(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) - \varphi'(\overline{\mathbf{x}})\| \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\| \geqslant \\ \geqslant \eta - L\|\mathbf{u}\| \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\| \geqslant L\delta\|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\|.\end{aligned}$$

Три последних соотношения и выбор величины δ доказывают справедливость свойства C. $\triangle$

10.6.22. Определение. Мы скажем, что *осуществилось событие* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$, если найдется такое $\widetilde{\beta} > 0$, что $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \widetilde{\beta}\mathbf{s} \in U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$, где $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, а $-\mathbf{s}$ — возможное направление, выбранное методом случайного поиска.

10.6.23. Свойство D. *Если наступает событие* $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k)$, *то существует такое* $\varkappa > 0$, *что*

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \varkappa.$$

---

*) Легко показать, что если точка $\mathbf{w}$ — центр сферы R (радиуса r), принадлежащей регулярному множеству X, то можно взять $r_1 = \dfrac{r\delta}{\|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{w}\| + r}$, причем центром сферы R_1 будет точка $w_1 = \dfrac{r_1}{r}(\mathbf{w} - \overline{\mathbf{x}})$. Аналогично и для R_2.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_k \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, а $\mathbf{y}_k$ — любая точка из пересечения луча $\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k$ с множеством $U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$. Так как $\omega_k = \inf\limits_{0\leqslant\beta\leqslant\zeta_0} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)$, то для всех $\beta \in [0,1]$ справедливо неравенство $\omega_k \leqslant \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k))$. Отсюда и из леммы 9.2.3 получаем неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k(\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta(\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k))) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_k\Big(\beta\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\rangle - \frac{1}{2}L\beta^2\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|^2\Big).$$

Но $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| \leqslant 2\delta + \|\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}\| \equiv \theta$, поэтому из свойства C получаем, что для всех $\beta \in [0,1]$ будет

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \lambda_k\Big(\frac{1}{2}\beta\eta - \frac{1}{2}L\beta^2\theta^2\Big).$$

Пусть $\beta = \min\Big\{1, \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta}{L\theta^2}\Big\}$. Если $\beta = 1$, то $L\theta^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\eta$ и

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \frac{1}{4}\lambda_k\eta.$$

Если $\beta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta}{L\theta^2}$, то $\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_{k+1}) \geqslant \dfrac{1}{8}\lambda_k\dfrac{\eta^2}{L\theta^2}$. И так как $\lambda_k \geqslant \lambda > 0$, то при $\varkappa = \dfrac{1}{4}\lambda\eta\min\Big\{1, \dfrac{1}{2}\dfrac{\eta}{L\theta^2}\Big\}$ свойство D становится справедливым. $\triangle$

10.6.24. Свойство E. *Если последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *такова, что* $\mathbf{x}_k \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, *то* $P\Big\{\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\mathfrak{M}_k\Big\} = 1$.

Доказательство. Из свойств A и B следует, что

$$\inf_{\mathbf{x}\in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})} P\{\mathfrak{M}|\mathbf{x}\} = p > 0.$$

При фиксированных $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ соответствующие события $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \ldots$ взаимно независимы, так как взаимно независимы случайные величины $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots$ Следовательно,

$$P\Big\{\bigcap_{k=0}^{m}\overline{\mathfrak{M}}_k|\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\Big\} = \prod_{k=0}^{m} P\{\overline{\mathfrak{M}}_k|\mathbf{x}_k\} =$$
$$= \prod_{k=0}^{m}(1 - P\{\mathfrak{M}_k|\mathbf{x}_k\}) \leqslant (1-p)^m \to 0, \quad m \to \infty.$$

Здесь $\overline{\mathfrak{M}}_k$ означает событие, дополнительное к событию $\mathfrak{M}_k$, т. е. $\overline{\mathfrak{M}}_k$ означает, что событие $\mathfrak{M}_k$ не происходит. Поэтому согласно закону “нуля или единицы”

$$P\Big\{\bigcap_{k=0}^{m}\overline{\mathfrak{M}}_k|\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots\Big\} = 0, \quad \text{т. е.} \quad P\Big\{\bigcup_{k=0}^{m}\overline{\mathfrak{M}}_k|\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots\Big\} = 1.$$

Это и означает, что $P\Big\{\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\overline{\mathfrak{M}}_k\Big\}=1$. $\triangle$

10.6.25. Теорема. $P\{\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(\mathbf{x}_k)=\varphi^*\}=1$.

Доказательство. В силу предложений процедуры последовательность случайных величин $\{\varphi(\mathbf{x}_k)\}$ монотонна: $\varphi(\mathbf{x}_{k+1})\leqslant\varphi(\mathbf{x}_k)$ $(k=0,1,...)$, и ограничена: $\varphi(\mathbf{x}_k)\geqslant\varphi^*$ $(k=0,1,...)$, и, следовательно, существует $\varphi=\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(\mathbf{x}_k)$. А значит, с вероятностью, равной единице, найдется такой номер k_0, что для всех $k=k_0+1,\ k_0+2,...$ будет выполняться неравенство

$$\varphi(\mathbf{x}_k)-\varphi(\mathbf{x}_{k+1})<\varkappa. \tag{10.53}$$

Если для любого сколь угодно малого $\delta_1>0$ найдется такая последовательность $\{\mathbf{x}_{k_i}\}$, что

$$\mathbf{x}_{k_i}\in U_{\delta_1}(X^*)=\{\mathbf{x}\in X\colon\ \rho(\mathbf{x},X^*)\leqslant\delta_1\},$$

то с вероятностью, равной единице, $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi(\mathbf{x}_k)=\varphi^*$.

Предположим, что существует такое число $\delta_1>0$, что в окрестности $U_{\delta_1}(X^*)$ попадает лишь конечное число точек последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$. Не ограничивая общности, можно полагать, что все $\mathbf{x}_k\notin$ $\notin U_{\delta_1}(X^*)$. Тогда с вероятностью, равной единице, найдется такой случайный номер $k\geqslant k_0$, что осуществится событие $\mathfrak{M}_k$, а следовательно, будет

$$\varphi(\mathbf{x}_k)-\varphi(\mathbf{x}_{k+1})>\varkappa.$$

Это противоречит условию (10.53). Теорема доказана. $\triangle$

Следствие. $\rho(\mathbf{x}_k,X^*)\underset{\text{п.н}}{\to}0,\ k\to\infty$.

Это соотношение с очевидностью следует из непрерывности функции $\varphi(\mathbf{x})$, ограниченности множества X_0 и утверждения теоремы 10.6.25. $\triangle$

10.6.26. Метод проектирования случайного направления. Изложенный в предыдущих разделах метод минимизации может оказаться неэффективным. Дело в следующем. С ростом числа n — размерности пространства E_n — убывает вероятность того, что направление является возможным. Скорость этого убывания характеризует простой пример, когда $X=\{\mathbf{x}\colon\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=\overline{1,n}\}$, а точка $\mathbf{x}_k=0$. В этом случае вероятность того, что случайное направление $-\mathbf{s}_k$ будет возможным, очевидно, равна 2^{-n}. Поэтому для получения возможного направления требуется при больших n на каждой итерации, вообще говоря, большое число испытаний, причем каждое испытание связано с проверкой, будет ли для достаточно малого β точка $\mathbf{x}_k-\beta\mathbf{s}_k$ принадлежать множеству X.

В методе, которому посвящен настоящий раздел, случайное направление становится возможным в результате проектирования на допустимое множество.

Обозначим через $\mathbf{z}_k$ проекцию точки $\mathbf{x}_k - \Delta_k \mathbf{r}_k$ на множество X. Здесь $\Delta_k = \operatorname{sign}\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{r}_k\rangle$, а $\mathbf{r}_k$ — случайный вектор, равномерно распределенный на n-мерной сфере единичного радиуса.

10.6.27. Схема метода.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k, \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{z}_k.$$

В качестве β_k выбирают любое из чисел, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \leqslant (1-\lambda_k)\varphi(\mathbf{x}_k) + \lambda_k \omega_k,$$
$$0 \leqslant \beta_k \leqslant 1, \quad 0 < \lambda_k \leqslant \lambda_k \leqslant 1,$$

где $\omega_k = \min\limits_{\beta\in[0,1]} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta \mathbf{s}_k)$.

10.6.28. Сходимость метода будем доказывать в предположениях п. 10.6.18, но при этом требование регулярности излишне. Для обоснования сходимости метода проектирования применима та же методика, что и в пп. 10.6.19–10.6.26.

Рассмотрим множество*) $V_\delta(\overline{\mathbf{y}}) = \{\mathbf{y} \in E_n : \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\| \leqslant \delta\}$. Заметим, что $U_\delta(\overline{\mathbf{y}}) = \{\mathbf{y} \in X : \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\| \leqslant \delta\} \subseteq V_\delta(\overline{\mathbf{y}})$. Будем говорить, что *осуществилось событие* $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$, если найдется такое $\alpha > 0$, что $\mathbf{x} - \alpha\mathbf{r} \in V_\delta(\overline{\mathbf{y}})$, где $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$, а $\mathbf{r}$ — направление, выбраннное методом случайного поиска. Определение события $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ остается прежним, но при этом $\mathbf{s} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

10.6.29. Свойство F. *Если осуществилось событие* $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{N}(\mathbf{x}_k, \mathbf{r}_k)$, *то осуществится и событие* $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{M}(\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}_k = \mathbf{x}_k - \alpha\mathbf{r}_k \in V_\delta(\overline{\mathbf{y}})$, а $\mathbf{y}_k$ — проекция точки $\mathbf{v}_k$ на множество X. Из свойств проекции следует, что $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{v}_k - \mathbf{x}\|$ при любом $\mathbf{x} \in X$ и, в частности, $\|\mathbf{y}_k - \overline{\mathbf{y}}\| \leqslant \|\mathbf{v}_k - \overline{\mathbf{y}}\|$, т. е. $\mathbf{y}_k \in U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$. $\triangle$

Наконец, очевидно, что для всех $\mathbf{x} \in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ будет

$$P\{\mathfrak{M}|\mathbf{x}\} \geqslant P\{\mathfrak{N}|\mathbf{x}\} \geqslant \inf_{\mathbf{x}\in U_\delta(\overline{\mathbf{x}})} P\{\mathfrak{N}|\mathbf{x}\} = p > 0.$$

Обосновать сходимость процесса минимизации теперь не представляет труда, если повторить рассуждения, которые использовались при доказательстве теоремы 10.6.25.

*) Здесь $\overline{\mathbf{y}}$, $U_\delta(\overline{\mathbf{x}})$ и $U_\delta(\overline{\mathbf{y}})$ те же, что и в п. 10.6.20.

ГЛАВА 11

МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА

11.1. Метод множителей Лагранжа

11.1.1. Метод состоит в процедуре отыскания седловой точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на $E_n \times E_m^+$ (см. п. 3.6). Построение итерационных процессов существенно опирается на соотношение

$$L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \max_{\mathbf{y} \in E_m^+} \min_{\mathbf{x} \in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{x} \in E_n} \max_{\mathbf{y} \in E_m^+} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

11.1.2. Первый вариант метода. Этот метод, предложенный Эрроу и Гурвицем, состоит в построении последовательности $\{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k\}$ по формулам

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta \frac{\partial}{\partial x} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k),$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = P_{E_m^+}\Big(\mathbf{y}_k + \beta \frac{\partial}{\partial y} L(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)\Big),$$

где $P_{E_m^+}(\mathbf{v})$ означает проекцию точки $\mathbf{v}$ на E_m^+. Таким образом, точки $\mathbf{x}_k$ строятся методом градиентного спуска для решения задачи безусловной минимизации функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по переменной $\mathbf{x}$, а точки $\mathbf{y}_k$ строятся вариантом метода проекции градиента для решения задачи максимизации функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по переменной $\mathbf{y}$ на множестве $E_m^+ = \{\mathbf{y} \in E_m \colon \mathbf{y} \geqslant 0\}$.

Указанный процесс привлекает своей простотой, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi'(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{y}, f'(\mathbf{x}) \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{x}), \quad f^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x})),$$

а проектирование на E_m^+ осуществляется элементарно.

К сожалению, этот метод не обеспечивает заведомой сходимости даже в тех случаях, когда гарантирована сходимость как метода градиентного спуска, так и метода проекции градиента. Известный элементарный пример задачи одномерной минимизации $\mathbf{x}$ на положительной полуоси $\mathbf{x} \geqslant 0$ служит тому подтверждением.

11.1.3. Второй вариант метода. Этот вариант отличается от предыдущего тем, что на каждой итерации очередную точку $\mathbf{x}_{k+1}$ предлагается получать в результате полной минимизации функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k)$ по переменной $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \arg\min_{\mathbf{x}\in E_n} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k),$$
$$\mathbf{y}_{k+1} = P_{E_n^+}(\mathbf{y}_k - \beta f(\mathbf{x}_k)).$$

В этом варианте сходимость имеет место в условиях, при которых доказывались теоремы 10.2.5, 10.2.6 о сходимости проекции градиента.

11.2. Метод модифицированных функций Лагранжа

11.2.1. За последнее десятилетие появилось большое количество работ, посвященных численным методам решения задач математического программирования, основанным на построении модифицированных функций Лагранжа. Метод модифицированных функций Лагранжа позволяет расширить область применения метода множителей Лагранжа и имеет своей целью повысить эффективность вычислительных процессов отыскания седловых точек.

Построение модифицированной функции Лагранжа основывается на следующих соображениях. Для задачи минимизации функции $\varphi(\mathbf{x})$ на некотором множестве X построим функцию

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

определенную в пространстве E_{n+m}.

Условия, которым должна удовлетворять функция $\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определяются следующей теоремой.

11.2.2. Теорема. *Если существуют* $\mathbf{x}^* \in X$ *и* $\mathbf{y}^* \in E_m$ *такие, что*:

1) $\mathbf{x}^* \in X(\mathbf{y}^*) = \operatorname{Argmin}\{N(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \colon \mathbf{x} \in E_n\}$;

2) $\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \geqslant \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in X$;

то $\mathbf{x}^* \in X^* = \operatorname{Argmin}\{\varphi(\mathbf{x})\mathbf{x} \in X\} = X \cap X(\mathbf{y}^*)$.

Доказательство. Так как $\mathbf{x}^* \in X \cap X(\mathbf{y}^*)$, то для всех $\mathbf{x} \in E_n$ будет

$$N(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \varphi(\mathbf{x}^*) - \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x}) - \overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*).$$

В частности, при $\mathbf{x} \in X$ получаем, в силу условия (2), что $\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x} \in X$; следовательно, $\mathbf{x}^* \in X^*$. Поэтому $X \cap X(\mathbf{y}^*) \subset X^*$.

Теперь покажем, что $X^* \setminus (X \cap X(\mathbf{y}^*)) = \varnothing$, чем и завершим доказательство теоремы.

Предположим, что найдется $\overline{\mathbf{x}} \in X^*$ такой, что $\overline{\mathbf{x}} \notin X \cap X(\mathbf{y}^*)$. Поскольку $\overline{\mathbf{x}} \in X^* \subset X$, то в силу предположения будет $\overline{\mathbf{x}} \in X(\mathbf{y}^*)$, и,

следовательно,

$$N(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \varphi(\mathbf{x}^*) - \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) < \varphi(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\gamma}(\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^*) \leqslant \varphi(\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*).$$

Таким образом, получаем неравенство $\varphi(\mathbf{x}^*) < \varphi(\overline{\mathbf{x}})$, противоречащее предположению. $\triangle$

11.2.3. Модифицированная функция Лагранжа. Рассмотрим основную задачу математического программирования

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{x}) \to \min, \\ \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x}\colon\ f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,m}\}. \end{gathered} \tag{11.1}$$

Как известно, функция

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} y_i f_i(\mathbf{x}), \tag{11.2}$$

определенная для всех $\mathbf{x} \in E_n$ и $\mathbf{y} \in E_m^+ = \{\mathbf{y}\colon\ \mathbf{y} \geqslant 0\}$, является функцией Лагранжа для задачи (11.1).

Рассмотрим функцию

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} \gamma(f_i(\mathbf{x}), y_i) \tag{11.3}$$

и обозначим

$$\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \gamma(f_i(\mathbf{x}), y_i).$$

Если $\gamma(f_i(\mathbf{x}), y_i)$ $(i = \overline{1,m})$ подобрана так, чтобы выполнялись условия теоремы 11.2.2, то функцию $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будем называть модифицированной функцией Лагранжа. Итак, если функция

$$\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} \gamma(f_i(\mathbf{x}), y_i)$$

такова, что существуют $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \mathbf{x}^* \in X \cap X(\mathbf{y}^*), \\ \overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leqslant \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad \forall \mathbf{x} \in X, \end{gathered} \tag{11.4}$$

то $\mathbf{x}^* \in X$, и $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет модифицированной функцией Лагранжа для задачи (11.1).

11.2.4. Построение модифицированной функции Лагранжа. Как известно, соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} y_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = 0 \tag{11.5}$$

определяет точку $\mathbf{x}$, в которой выполняются необходимые условия минимума по $\mathbf{x}$ функции $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Для $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ необходимым условием

минимума по x будет соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x}N(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial f_i}\gamma(f_i(\mathbf{x}),y_i)\nabla f_i(\mathbf{x}) = 0. \tag{11.6}$$

Сравнение (11.5) с (11.6) натолкнуло на мысль ввести систему уравнений

$$y_i = \frac{\partial}{\partial f_i}\gamma(f_i(\mathbf{x}),y_i), \quad i=\overline{1,m}, \tag{11.7}$$

и потребовать ее разрешимости при дополнительных требованиях

$$f_i(\mathbf{x})y_i = 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad \forall\mathbf{x}\in X. \tag{11.8}$$

11.2.5. Условия существования функции $N(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Рассмотрим условия, позволяющие построить модифицированную функцию Лагранжа при достаточно общих предположениях относительно вида функций $f_i(\mathbf{x})$ $(i=\overline{1,m})$.

A) Если $f_i(\mathbf{x}) < 0$ для некоторого номера i, то i-е уравнение системы (11.7) не имеет решения, и, следовательно, множество решений системы (11.7) пусто;

если $f_i(\mathbf{x}) > 0$ для некоторого номера i, то единственным решением i-го уравнения системы (11.7) будет $y_i = 0$;

если $f_i(\mathbf{x}) = 0$ для некоторого номера i, то любое $y_i \geqslant 0$ будет решением i-го уравнения системы (11.7).

B) Если для некоторой пары $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* \geqslant 0$ выполняются условия (11.8), то

$$\sum_{i=1}^{m}\gamma(f_i(\mathbf{x}),y_i^*) \geqslant \sum_{i=1}^{m}\gamma(f_i(\mathbf{x}^*),y_i^*) \quad \forall\mathbf{x}\in X.$$

11.2.6. Теорема. *Если функции $\gamma(f_i(\mathbf{x}),y_i)$ $(i=\overline{1,m})$ таковы, что:*

выполняются условия A);

существуют $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{y}^*) \in X(\mathbf{y}^*)$ и $\mathbf{y}^* \geqslant 0$ такие, что

$$\frac{\partial}{\partial f_i}\gamma(f_i(\mathbf{x}^*),y_i^*) = y_i^*, \quad i=\overline{1,m};$$

выполняются для $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{y}^*)$ и $\mathbf{y}^* \geqslant 0$ условия B);

то $\mathbf{x}^* \in X^*$.

Если, кроме того, функция $N(\mathbf{x},\mathbf{y}^*)$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^*$ и для любых $f_i(\mathbf{x})$ и $y_i \geqslant 0$ будет

$$\frac{\partial}{\partial f_i}\gamma(f_i(\mathbf{x}),y_i) \leqslant 0, \quad i=\overline{1,m}, \tag{11.9}$$

то пара $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ является точкой Куна–Таккера.

Доказательство. Из условий теоремы получаем, что найдутся такие $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, что

$$f_i(\mathbf{x}^*) \geqslant 0, \quad y_i^* \geqslant 0, \quad f_i(\mathbf{x}^*)y_i^* = 0, \quad i=\overline{1,m},$$

и выполняется неравенство (11.4). Следовательно, выполняются все условия теоремы 11.2.2, и, значит, $\mathbf{x}^* \in X^*$.

Учитывая (11.7), (11.9), получаем, что пара $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ — точка Куна–Таккера. $\triangle$

11.2.7. Два примера функции $\gamma(f_i(\mathbf{x}), y_i)$:

$$\gamma_1(f_i(\mathbf{x}), y_i) = -\frac{1}{2}[\min\{f_i(\mathbf{x}) - y_i, 0\}]^2,$$
$$\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = \frac{1}{2}y_i^2 - \frac{1}{2}[\min\{f_i(\mathbf{x}) - y_i, 0\}]^2.$$

Легко проверить, что функция $-\gamma_1$ выпукла по $\mathbf{x}$, если $f_i(\mathbf{x})$ вогнута и выпукла по $\mathbf{y}$ (см. п. 2.4.8). Функция $-\gamma_2$ выпукла по $\mathbf{x}$ и вогнута по $\mathbf{y}$. Последнее следует из того, что при $f_i(\mathbf{x}) - y_i < 0$ она линейна по $\mathbf{y}$:

$$-\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = -\frac{1}{2}y_i^2 + \frac{1}{2}(f_i(\mathbf{x}) - y_i)^2 = f_i(\mathbf{x})y_i + \frac{1}{2}f_i^2(\mathbf{x}),$$

а при $f_i(\mathbf{x}) - y_i \geqslant 0$ строго вогнута:

$$-\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = -\frac{1}{2}y_i^2.$$

Достаточно проверить выполнение свойств A), C) для $\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i)$:

$$\frac{\partial}{\partial f_i}\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = \begin{cases} y_i - f_i(x), & \text{если} \quad y_i \geqslant f_i(\mathbf{x}), \\ 0, & \text{если} \quad y_i < f_i(\mathbf{x}). \end{cases}$$

A) Если $f_i(\mathbf{x}) < 0$ и $y_i \geqslant f_i(\mathbf{x})$, то из (11.7) имеем $y_i - f_i(\mathbf{x}) = y_i$ и, следовательно, $f_i(\mathbf{x}) = 0$. Противоречие указывает на неразрешимость системы (11.7). Если $f_i(\mathbf{x}) > y_i$, то $y_i < 0$, но $\dfrac{\partial}{\partial f_i}\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = 0$; поэтому из (11.7) получаем, что $y_i = 0$. Противоречие.

Если $f_i(\mathbf{x}) > 0$ и $y_i \geqslant f_i(\mathbf{x})$, опять приходим к противоречию. Если $f_i(\mathbf{x}) > y_i$, то $\dfrac{\partial}{\partial f_i}\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = 0$, и, следовательно, единственным решением i-го уравнения будет $y_i = 0$. Если $f_i(\mathbf{x}) = 0$ и $y_i \geqslant f_i(\mathbf{x})$, то $y_i \geqslant 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial f_i}\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i) = y_i$, поэтому i-му уравнению системы (11.7) удовлетворяет любое $y_i \geqslant 0$. Случай $y_i < f_i(\mathbf{x}) = 0$ противоречив, так как из (11.7) следует, что $y_i = 0$.

C) Если $f_i(\mathbf{x}_i) - y_i^* \geqslant 0$, то $\gamma_2(f_i(\mathbf{x}), y_i^*) = \dfrac{1}{2}(y_i^*)^2 \geqslant \gamma_2(f_i(\mathbf{x}^*), y_i^*)$. Если $f_i(\mathbf{x}) - y_i^* < 0$, $\mathbf{x} \in X$, то $y_i^* > f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ и $f_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Так как $-2y_i^* f_i(\mathbf{x}) + (f_i(\mathbf{x}))^2 < 0$ и $y_i^* f_i(\mathbf{x}^*) = 0$, то

$$[\min\{f_i(\mathbf{x}) - y_i^*, 0\}]^2 = (f_i(\mathbf{x}) - y_i^*)^2 = (y_i^*)^2 - 2y_i^* f_i(\mathbf{x}) + (f_i(\mathbf{x}))^2 <$$
$$< (y_i^*)^2 = (y_i^* - f_i(\mathbf{x}^*))^2 = [\min\{f_i(\mathbf{x}^*) - y_i^*; 0\}]^2$$

и, следовательно, $\gamma_2(\varphi_i(\mathbf{x}), y_i^*) \geqslant \gamma_2(f_i(\mathbf{x}^*), y_i^*)$.

11.2.8. Обсуждение. В условиях теоремы 11.2.2 пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ может не являться точкой Куна–Таккера. Так, например, решение задачи (11.1) методом штрафных функций со штрафом

$$\frac{1}{\beta}\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m} |\min\{f_i(\mathbf{x}), 0\}|$$

при $\beta \in (0, \beta_0]$ достаточно малом дает соотношение

$$\min_{\mathbf{x}\in X} \varphi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}\in E_n} \Big(\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\psi(\mathbf{x})\Big),$$

если $\varphi(\mathbf{x})$ сильно выпукла, а $f_i(\mathbf{x})$ 1-мажорируемы ($\gamma = 1$) и непрерывно дифференцируемы (см. п. 6.2.7). Если положить $y_i = 1/\beta$ $(i = \overline{1, m})$, а $\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\dfrac{1}{\beta}\psi(\mathbf{x})$, то в точке решения $\mathbf{x}^*$ выполнены условия 1), 2) теоремы 11.2.2 при $\mathbf{y}^* = (1/\beta^*, ..., 1/\beta^*)$, где $\beta^* \in (0, \beta_0]$. Однако в общем случае задания функции $f_i(\mathbf{x})$ равенство всех компонент вектора $\mathbf{y}^*$ для точек Куна–Таккера заведомо не выполняется.

Гарантию того, что пара $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ является точкой Куна–Таккера, дают условия теоремы 11.2.6. В то же время сама функция $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может и не иметь седловых точек, несмотря на то, что исходная основная задача математического программирования является выпуклой. Так, функция $N(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) - \overline{\gamma}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет всем условиям теоремы 11.2.6, но седловой точки не имеет. Естественным условием, обеспечивающим существование седловой точки функции $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, является неравенство $\overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geqslant \overline{\gamma}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ для всех $\mathbf{y} \in E_m$. Этим свойством обладает, например, функция $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_2(f_i(\mathbf{x}), \mathbf{y}_i)$.

Численная реализация. Путь первый — искать точку $\mathbf{x}^*$, решая систему уравнений (11.6), (11.7), например, следующим итерационным процессом:

$$\mathbf{x}_k \in X(\mathbf{y}_k) = \operatorname{Argmin}\{N(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \colon \mathbf{x} \in E_n\},$$
$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\partial}{\partial f}\overline{\gamma}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k).$$

Применение градиентных методов для решения системы (11.6), (11.7) связано с вычислением вторых производных функции $\overline{\gamma}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Однако даже в условиях дважды дифференцируемости функций $\varphi(\mathbf{x})$ и $f_i(\mathbf{x})$ вторые производные для многих известных модифицированных функций Лагранжа не определены всюду, как это требует применение градиентных методов для решения уравнений (11.7). В обоих рассмотренных выше примерах ситуация именно такова. И здесь

уже следует прибегать к методам минимизации недифференцируемых функций *).

Путь второй. Вычислять точку $\mathbf{x}^*$ методами отыскания седловых точек функции $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, естественно, при условии существования таковых.

В этом случае становятся применимыми методы первого порядка, например, аналог метода Эрроу–Гурвица:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \beta \frac{\partial}{\partial x} N(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k),$$
$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k - \beta \frac{\partial}{\partial y} N(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k).$$

11.3. Взаимосвязь методов множителей Лагранжа и штрафных функций

11.3.1. Как мы видели, основная идея метода модифицированных функций Лагранжа и метода штрафных функций состоит в сведении задач оптимизации с ограничениями к задачам без ограничений. В теореме 11.2.6 были установлены условия, при которых решение задачи методом модифицированных функций Лагранжа является точкой Куна–Таккера. Оказывается, метод штрафных функций обладает также этим свойством, если в качестве двойственных переменных взять частные производные штрафа по функциям-ограничениям.

Выясним условия, при которых метод штрафных функций приводит также к точке Куна–Таккера. Тем самым будет установлена связь метода модифицированных функций Лагранжа с методом штрафных функций.

11.3.2. Рассмотрим основную задачу математического программирования:

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{x}) \to \min, \\ \mathbf{x} \in X = \{\mathbf{x}\colon\ f(\mathbf{x}) \geqslant 0\}, \end{gathered} \tag{11.10}$$

где $f^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$.

Штрафную функцию запишем в следующем виде:

$$M(x, \beta) = \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\psi(f(\mathbf{x})), \quad \beta > 0,$$

где:

$(\psi(f(\mathbf{x})) = 0$, если $f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$ для всех $i \in I = \{1, 2, ..., m\}$;

$\psi(f(\mathbf{x})) > 0$, если $f_i(\mathbf{x}) < 0$ хотя бы для одного $i \in I$.

*) См., например, монографию: *Демьянов В.Ф.*, *Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.– М.: Наука, 1981.

Обозначения. $L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{u}, f(\mathbf{x})\rangle$; $\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, ..., u_m) \leqslant \leqslant 0$ — функция Лагранжа для задачи (11.1); $Y = \operatorname{Argmin}\{\varphi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in \in X\}$;

$$Y_\beta = \\ = \Big\{\mathbf{x} : \frac{\partial}{\partial x} M(\mathbf{x},\beta) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial}{\partial f_i}\psi(f(\mathbf{x}))\nabla f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \beta > 0\Big)\Big\}$$

— множество стационарных точек штрафной функции;

$$K = \Big\{(\mathbf{x},\mathbf{u})\colon \\ \frac{\partial}{\partial x} L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \nabla\varphi(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = 0; \quad u_i f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{u} \leqslant 0\Big\}$$

— множество точек Куна–Таккера;

$$u_i(\beta) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial f_i}\psi(f(\mathbf{y}_\beta)); \quad i = \overline{1,m}, \quad \mathbf{y}_\beta \in Y_\beta, \quad \mathbf{v}(\beta) = (\mathbf{y}_\beta, \mathbf{u}(\beta));$$

$$\mathbf{u}^T(\beta) = (u_1(\beta), u_2(\beta), ..., u_m(\beta)), \quad I(\mathbf{x}) = \{i\colon f_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

11.3.3. Предположения.

1) $\varphi(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, $f_i(\mathbf{x})$, $(i = \overline{1,m})$, — вогнутые функции, $\psi(f(\mathbf{x}))$ — выпуклая функция;

2) множество X регулярно по Слейтеру;

3) множество Y непусто и ограничено;

4) $\psi(f(\mathbf{x})) \in C^1(E_n)$;

5) $\dfrac{\partial}{\partial f_i}\psi(f(\mathbf{x})) \leqslant 0, \quad i = \overline{1,m}$;

6) $\dfrac{\partial}{\partial f_i}\psi(f(\mathbf{x})) = 0$, если $0 < f_i(\mathbf{x}) \leqslant \mu < \infty$.

11.3.4. Теорема. *Если выполняются условия* 1)–6), *то*

$$\lim_{\beta\to 0} \rho(\mathbf{v}(\beta), K) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_\beta \in Y_\beta$; тогда

$$\nabla\varphi(\mathbf{y}_\beta) = \sum_{i=1}^{m} -u_i(\beta)\nabla f_i(\mathbf{y}_\beta).$$

Если будет доказана равномерная ограниченность по β семейства $\{\mathbf{v}(\beta)\}$, то для любой предельной точки $\mathbf{v}^* = (\mathbf{y}^*, \mathbf{u}^*)$ справедливо соотношение $\nabla\varphi(\mathbf{y}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla f_i(\mathbf{y}^*) = 0$, и, кроме того, в силу условия 6) $u_i^* f_i(\mathbf{y}^*) = 0$. Таким образом, любая предельная точка $\mathbf{v}^*$ будет принадлежать множеству K, и, следовательно, $\rho(\mathbf{v}(\beta), K) \to 0$ $(\beta \to 0)$.

Предположим, что семейство $\{\mathbf{u}(\beta)\}$ не является равномерно ограниченным по β. Тогда найдется такая последовательность $\{\beta_k\}$, что $-u_i(\beta_k) \to +\infty, \quad \beta_k \to 0$, хотя бы для одного номера i. Из предположения ограниченности множества Y следует ограниченность в совокупности множеств Y_β для всех β (см. теорему 1 из Д.4). Из этой теоремы следует, что любая предельная точка $\mathbf{y}^*$ семейства $\{\mathbf{y}_\beta\}$ принадлежит множеству Y.

Не умаляя общности, можем предполагать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{y}_{\beta_k} = \mathbf{y}^*$. По условию 2) найдется такая точка $\mathbf{z} \in X$, что $f_i(\mathbf{z}) > 0$ $(i = \overline{1,m})$. Из выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ следует

$$\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_\beta) \geqslant \langle \nabla\varphi(\mathbf{y}_\beta), \mathbf{z} - \mathbf{y}_\beta\rangle = \sum_{i=1}^{m} -u_i(\beta)\langle \nabla f_i(\mathbf{y}_\beta), \mathbf{z} - \mathbf{y}_\beta\rangle.$$

Так как $f_i(\mathbf{x})$ — вогнутые функции, то $f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{y}_\beta) \leqslant \langle \nabla f_i(\mathbf{y}_\beta), \mathbf{z} - \mathbf{y}_\beta\rangle$, и, учитывая, что $-u_i(\beta) \geqslant 0$ $(i = \overline{1,m})$, получаем

$$\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_\beta) \geqslant \sum_{i=1}^{m} -u_i(\beta)(f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{y}_\beta)).$$

Предположим, что $I(\mathbf{y}^*) \neq \varnothing$. Тогда найдется такой номер $j \in I(\mathbf{y}^*)$, что $f_j(\mathbf{y}^*) = 0$, и для достаточно малых $\beta_k > 0$ будет $f_j(\mathbf{y}_{\beta_k}) < \frac{1}{2} f_j(\mathbf{z})$. Итак, $f_j(\mathbf{z}) - f_j(\mathbf{y}_{\beta_k}) \leqslant \frac{1}{2} f_j(\mathbf{z})$ для $j \in I(\mathbf{y}^*)$ и достаточно больших номеров k. Из условий 5), 6) получаем, что найдется такой номер k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $u_i(\beta_k) = 0$ $\forall i \in I \backslash I(\mathbf{y}^*)$. Последнее следует из того, что $f_i(\mathbf{y}^*) > 0$ для $i \in I \setminus I(\mathbf{y}^*)$, и поскольку $\mathbf{y}_{\beta_k} \to \mathbf{y}^*$, то $f_i(\mathbf{y}_{\beta_k}) > 0$ для $k \geqslant k_0$.

Далее,

$$\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_{\beta_k}) \geqslant \sum_{i=1}^{m} -u_i(\beta_k)(f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{y}_{\beta_k})) =$$
$$= \sum_{i\in I(\mathbf{y}^*)} -u_i(\beta_k)(f_i(\mathbf{z}) - f_i(\mathbf{y}_{\beta_k})) > \frac{1}{2} \sum_{i\in I(\mathbf{y}^*)} -u_i(\beta_k) f_i(\mathbf{z});$$

поэтому

$$\sum_{i\in I(\mathbf{y}^*)} -u_i(\beta_k) \leqslant 2\frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_{\beta_k})}{\min\limits_{i\in I(\mathbf{y}^*)} f_i(\mathbf{z})} \leqslant 2\frac{\varphi(\mathbf{z}) - \varphi(\mathbf{y}_{\beta_{k_0}})}{\min\limits_{i\in I(\mathbf{y}^*)} f_i(\mathbf{z})} = \text{const}.$$

Правое неравенство следует из того, что последовательность $\{\varphi(\mathbf{y}_{\beta_k})\}$ монотонно возрастающая (см. (6.8) в п. 6.2.2).

Таким образом, мы пришли к соотношению, противоречащему предположению о неограниченности последовательности $\{-u_i(\beta_k)\}$.

Наконец, случай, когда $I(\mathbf{y}^*) = \varnothing$, в силу условия 6) тривиален. $\triangle$

ДОБАВЛЕНИЯ

Д.1. О конечности численно реализуемого метода выбора шага из условия (9.15)

Можно утверждать, что для функций из класса $C^{1,1}(E_n)$ выбор коэффициента β_k из условия (9.15) осуществляется за конечное число удвоений (или дроблений) величины шага.

Итак, полагаем $\beta_k = \dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}2^i$ $(i = 0, \pm1, \pm2, ...)$, $\|\mathbf{s}_k\| = 1$, и проверяем выполнение соотношения (9.15). Величина i изменяется до тех пор, пока не будет выполнено неравенство (9.15). Пусть (9.15) выполняется впервые при $i = i_0(k)$. Тогда полагаем $\beta_k = \dfrac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}2^{i_0(k)}$.

Покажем, что величина $i_0(k)$ ограничена в совокупности, т. е. $|i_0(k)| \leqslant M$ $(k = 0, 1, ...)$. Действительно, при $i \leqslant N = [-\log_2 L] - -1$ будет $(1 - L2^{i-1}) \geqslant 1/2$ (здесь $[a]$ означает целую часть числа a), откуда

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi\Big(\mathbf{x}_k - 2^i\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}\mathbf{s}_k\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \langle\varphi'(\mathbf{x}_k), 2^i\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle\mathbf{s}_k\rangle - \frac{L2^{2i}}{2}\|\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle\|^2 =$$

$$= (2^i - L2^{2i-1})\Big\|\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}\Big\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)2^i}{\partial\mathbf{s}_k}\Big\|\frac{\partial\varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{s}_k}\Big\|,$$

$$k \in I = \{0, 1, 2, ...\}.$$

Это в свою очередь означает, что для $\beta_k = 2^{N-1}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle$ неравенство (9.15) также имеет место. Значит, тот номер $i_0(k)$, при котором выполнится неравенство (9.15), не превосходит $M = |N - 1|$, а коэффициент $\beta_k = 2^{i_0(k)}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle$ удовлетворяет (9.15). Заметим, что β_k можно представить как

$$\beta_k = \frac{C_k}{L}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle,$$

где $L2^{-|1-N|} \leqslant C_k \leqslant L2^{|N-1|}$. Поэтому неравенство (9.15) будет выполнено не более чем за конечное число удвоений равномерно по всем

итерациям.

Для сильно выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$ выбор коэффициента β_k из условия

$$\beta_k = \arg\min_{\beta \geqslant 0}(\mathbf{x} - \beta \mathbf{s}_k)$$

можно заменить следующей оценкой этого коэффициента снизу и сверху:

$$\frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle}{L} \leqslant \beta_k \leqslant \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle}{\rho}, \tag{1}$$

где ρ — константа сильной выпуклости. Действительно,

$$\rho \beta_k^2 \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \beta_k \mathbf{s}_k \rangle = \beta_k \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle$$

и, следовательно, $\beta_k \leqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle / \rho$. С другой стороны,

$$\langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle = \\ = \langle \varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k), \mathbf{s}_k \rangle \leqslant \|\varphi'(\mathbf{x}_k) - \varphi'(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k)\| \leqslant L \beta_k$$

и, значит, $\beta_k \geqslant \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k \rangle / L$, что вместе с предыдущим неравенством дает соотношение (1).

Д.2. Оценка скорости сходимости циклического метода покоординатного спуска с удвоением шага

В этом методе направление спуска такое же, как и в случае 9.7.8, а величину шага β_k будем выбирать способом удвоения по схеме, описанной в 9.4.6, т. е. из условия выполнения неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}_k) - \varphi(\mathbf{x}_k - \beta_k \mathbf{s}_k) \geqslant \frac{\beta_k}{2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{s}_k}.$$

Покажем, что для этого метода будет справедлива линейная скорость сходимости по функционалу.

Лемма. *Для любого вектора* $\mathbf{h} \in E_n$, $\|\mathbf{h}\| = 1$, *существует такой индекс* $i \in \{k, ..., k - n - 1\}$, *что*

$$|\langle \mathbf{h}, \mathbf{s}_i \rangle| \geqslant 1/\sqrt{n}, \quad k = 0, 1, ... \tag{1}$$

Доказательство. Из (1) следует, что найдется хотя бы одна компонента вектора $\mathbf{h}$ такая, что $|h_j| \geqslant 1/\sqrt{n}$, а значит, для вектора $\mathbf{s}_i = \mathbf{e}_j$ будет выполнено неравенство (1). $\triangle$

Следствие. *Для любого* $\mathbf{h} \in E_n$ *и* $\|\mathbf{h}\| = 1$ *существует окрестность* $U_\delta(\mathbf{h}) = \{\mathbf{x}\colon \rho(\mathbf{x}, \mathbf{h}) \leqslant \delta\}$ *такая, что* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i \rangle \leqslant 1/(2\sqrt{n})$ *для всех* $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{h})$, $\delta \leqslant 1/(2\sqrt{n})$, *и некоторого* $i \in \{k, ..., k + n - 1\}$, $k = 0, 1, ...$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in U_\delta(\mathbf{h})$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{h} + \mathbf{y}$, где $\|\mathbf{y}\| \leqslant 1/(2\sqrt{n})$, и, значит, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{s}_i \rangle = \langle \mathbf{h}, \mathbf{s}_i \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{s}_i \rangle \geqslant 1/(2\sqrt{n})$. $\triangle$

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *строится по схеме* 9.7.8 *и* $\beta_k = \langle \varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle / L$. *Тогда для любого номера* p *и хотя бы для одного номера* $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ *будет справедливо неравенство*

$$\alpha_{p+i} = \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+i}), \mathbf{s}_{p+i}\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \geqslant \frac{1}{4n\sqrt{n}}. \tag{2}$$

Доказательство. Из следствия получаем, что для любого $p = 0, 1, ...$ существует $\mathbf{s}_{p+i_0}$ такой, что

$$\langle \mathbf{x}, s_{p+i_0}\rangle \geqslant \frac{1}{(2\sqrt{n})}, \quad \mathbf{x} \in \frac{U_\delta(\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|)},$$

где $\delta = 1/(2\sqrt{n})$, $i_0 < n$. Для любого $i \in \{0, ..., n-1\}$ будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \right\| &= \left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})\|} + \right. \\ &\left. + \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+2})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+2})\|} + ... + \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i-1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i-1})\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+1})\|} \right\| + ... + \left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i-1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i-1})\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \right\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Оценим j-е слагаемое в правой части неравенства (3):

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} \right\| &= \\ &= \left\| \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j}) - \|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\,\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|} \right\|. \end{aligned}$$

Добавим в числитель правой части последнего равенства

$$\pm\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1});$$

получим

$$\begin{aligned}&\left\| \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j}) - \|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\,\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1}) - \|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\,\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} \right\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left\| \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j}) - \varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1}))}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\,\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{(\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\| - \|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|)\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|\,\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} \right\|. \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$, получаем

$$\left\| \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|} - \frac{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j+1})\|} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+j}), \mathbf{s}_{p+j}\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|L} + \frac{L\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+j}), \mathbf{s}_{p+j}\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|L} \leqslant 2\frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+j}), \mathbf{s}_{p+j}\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|}.$$

Предположим, что теорема неверна, т. е. для всех $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ будет

$$\frac{2\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+j}), \mathbf{s}_{p+j}\rangle}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+j})\|} < \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Тогда, возвращаясь к (3), получаем

$$\left\| \frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|} - \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \right\| \leqslant n\frac{1}{2n\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Поэтому при всех $i \in \{0, ..., n-1\}$ будет

$$\frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|} \in U_\delta\Big(\frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|}\Big),$$
$$\delta = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad p \in I = \{0, 1, ...\},$$

и, значит,

$$\frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i_0})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i_0})\|} \in U_\delta\Big(\frac{\varphi'(\mathbf{x}_p)}{\|\varphi'(\mathbf{x}_p)\|}\Big),$$

т. е. согласно следствию справедливо неравенство

$$\Big\langle \frac{\varphi'(\mathbf{x}_{p+i_0})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i_0})\|}, \mathbf{s}_{p+i_0} \Big\rangle \geqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} > \frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

Мы пришли к противоречию с предположением о невыполнении неравенства (2). $\triangle$

Теорема 2. *Пусть множество* $X_0 = \{\mathbf{x}\colon \varphi(\mathbf{x}) \leqslant \varphi(\mathbf{x}_0)\}$ *ограничено,* $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_n)$, *последовательность* $\{\mathbf{x}_k\}$ *строится по формулам* (9.7.9), (9.13).

Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \delta n^4/m, \quad m \in I,$$

где $\delta > 0$ — *некоторая константа, не зависящая от размерности пространства* E_n.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что при любом $p \in I$ среди последовательности величин α_{p+i}^2 $(i = 0, 1, ..., n-1)$,

$$\alpha_{p+i}^2 = \frac{\langle \varphi'(\mathbf{x}_{p+i}), \mathbf{s}_{p+i}\rangle^2}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|^2},$$

найдется хотя бы один такой, что $\alpha_{p+i}^2 \geqslant 1/(16n^3)$. Поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}_{p+i}) - \varphi(\mathbf{x}_{p+i+1}) \geqslant \frac{1}{L}\alpha_{p+i}^2 \|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|^2 \geqslant \frac{1}{16}\frac{1}{L}\frac{1}{n^3}\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|^2,$$

и, значит,

$$\frac{\varphi(\mathbf{x}_{p+i}) - \varphi(\mathbf{x}_{p+i+1})}{\|\varphi'(\mathbf{x}_{p+i})\|^2} \geqslant \frac{1}{16Ln^3}.$$

Таким образом, из теоремы 9.3.3 имеем

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \eta\left[\sum_{i=0}^{[m/n]} \frac{1}{16Ln^3}\right]^{-1} \leqslant \eta\frac{Ln^4 16}{m} = \frac{\delta n^4}{m}.$$

Осталось заметить, что величина β_k (согласно Д.1) имеет вид $\beta_k = \frac{C_k}{L}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle$, где $L2^{-1|N-1|} \leqslant C_k \leqslant L2^{|N-1|}$, что обеспечивает конечность ее выбора методом удвоений. Если всюду выше величину β_k заменить на $\widetilde{\beta}_k = \frac{C_k}{L}\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle$, то результаты теоремы 1 и теоремы 2 сохраняются. $\triangle$

В случае сильной выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x})$ и выбора коэффициента β_k из условия

$$\beta_k = \arg\min_{\beta \geqslant 0} \varphi(\mathbf{x}_k - \beta\mathbf{s}_k)$$

будет справедливо соотношение

$$\langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle/L \leqslant \beta_k \leqslant \langle\varphi'(\mathbf{x}_k), \mathbf{s}_k\rangle/\rho,$$

поэтому предыдущие результаты справедливы и для этого способа выбора шага. Оценка в этом случае имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}_m) - \varphi^* \leqslant \exp\left[-\rho\delta_1\frac{m}{n^4}\right], \quad m = 0, 1, ...,$$
$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\exp\left[-\rho\delta_2\frac{m}{n^4}\right], \quad m = 0, 1, ...,$$

где $\delta_1, \delta_2 > 0$ — некоторые константы, не зависящие от n и m. $\triangle$

Д.3. Вырожденность в экстремальных задачах

Изложенный в гл. 3 материал давался в предположении, что ограничения $f_i(\mathbf{x})$ $(i = \overline{1,m})$ и целевая функция $\varphi(\mathbf{x})$ не вырождены, т. е. $\varphi'(\mathbf{x}^*) \not\equiv 0$, $f_i'(\mathbf{x}^*) \not\equiv 0$ $(i = \overline{1,m})$. В случае вырожденности теорема Куна–Таккера становится несодержательной, так как

$$f_i'(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

$$\varphi'(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{2}$$

В настоящем добавлении изложены критерии оптимальности для вырожденных задач математического программирования. Чтобы не усложнять изложений, рассмотрим только случай активных ограничений, т. е. $f_i(\mathbf{x}) = 0$ $(i = \overline{1,m})$. Считаем, как и раньше, $f^T(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$ и формализуем нашу задачу с вырождением следующим образом:

$$\begin{gathered} \varphi(\mathbf{x}) \to \min_X, \\ X = \{\mathbf{x} \in E_n \colon \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0\}, \end{gathered} \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\varphi^{(q)}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad q = \overline{1, p-1}, \\ &f_i^{(q)}(\mathbf{x}^*) = 0, \quad q = \overline{1, p-1}, \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{4}$$

Через $\varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)$ обозначим производную p-го порядка функции $\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$. Например, $\varphi'(\mathbf{x}_0)$ — это градиент функции $\varphi(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$, $\varphi^{(2)}(\mathbf{x}_0) = \varphi''(\mathbf{x}_0)$ — матрица вторых производных и т. д. Действие производной $\varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)$ определено на произведении пространств $\underbrace{E_n \times ... \times E_n}_{p}$ следующим образом. Пусть $\mathbf{y}^{(1)}, ..., \mathbf{y}^{(p)}$ — элементы из E_n. Тогда

$$\begin{aligned} &\varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{y}^{(1)}, ..., \mathbf{y}^{(p)}] \triangleq \\ &\quad \triangleq \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1^{(1)} + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n^{(1)}\Big) ... \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1^{(p)} + ... + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n^{(p)}\Big) \varphi(\mathbf{x}_0) \triangleq \\ &\quad\quad \triangleq \sum_{i_1 + ... + i_n = p} \frac{p!}{i_1! ... i_n!} \frac{\partial \varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}} y_1^{(1)} ... y_{i_1}^{(1)} ... y_1^{(p)} ... y_{i_n}^{(p)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Например, в случае $\mathbf{y}^{(1)} = ... \mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{h}$ будет

$$\varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\underbrace{\mathbf{h}, ..., \mathbf{h}}_{p}] \triangleq \varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}]^p \triangleq \sum_{i_1 + ... + i_n = p} \frac{p!}{i_1! ... i_n!} \frac{\partial \varphi^{(p)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1^{i_1} ... \partial x_n^{i_n}} h_1^{i_1} ... h_n^{i_n}. \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} \operatorname{Im} f^{(p)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{y} \in E_m \colon f_i^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{x}]^p = y_i, \ i = \overline{1,m}, \ \mathbf{x} \in E_n\}, \\ \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in E_n \colon f_i^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{x}]^p = 0, \ i = \overline{1,m}\}. \end{gathered}$$

I. Условие p-регулярности ограничений.

Определение. Будем говорить, что отображение $\mathbf{f}\colon E_n \to E_m$ *p-регулярно в точке* $\mathbf{x}_0$, если для любых $\mathbf{h} \in \operatorname{Ker} \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ выполнено соотношение

$$f^{(p)}(\mathbf{x}^0)[\mathbf{h}]^{p-1} E_n = E_m$$

(здесь запись $f^{(p)}(\mathbf{x}_0)[\mathbf{h}]^{p-1} E_n$ означает, что оператор $f^{(p)}(\mathbf{x}^0)[\mathbf{h}]^{p-1}$ применяется ко всем элементам $\mathbf{z}$ из пространства E_n).

В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$ $(i = \overline{1, m})$.

Пусть M — некоторое подмножество E_n. Вектор $\mathbf{x} \in E_n$ называется касательным к множеству M в точке $\mathbf{x}_0 \in M$, если существует такое число $\varepsilon > 0$ и отображение $t \to \mathbf{r}(t)$ отрезка $[0, \varepsilon]$ в E_n, что $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \in M$ при всех $t \in [0, \varepsilon]$, $\|\mathbf{r}(t)\|/t \to 0$, $t \to 0$. Совокупность векторов, касательных к множеству M в точке $\mathbf{x}_0$, называется *касательным конусом к множеству* M в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается $TM(\mathbf{x}_0)$.

II. Основные теоремы. Для доказательства условий оптимальности понадобится несколько классических результатов из курса математического анализа.

Теорема (обобщенный принцип сжимающихся отображений). *Пусть в некотором шаре $U(\mathbf{z}_0, r_1) = \{\mathbf{z} | \rho(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) < r_1\}$ $(r_1 > 0)$ определено отображение $\Phi\colon U(\mathbf{z}_0, r_1) \to E_n$, причем множество $\Phi(\mathbf{z})$ не пусто для всякого $\mathbf{z} \in U(\mathbf{z}_0, r_1)$. Предположим, далее, что существует число θ $(0 < \theta < 1)$ такое, что:*

а) $h(\Phi(\mathbf{z}_1), \Phi(\mathbf{z}_2)) \leqslant \theta \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ *для любых* $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in U(\mathbf{z}_0, r_1)$;

б) $\rho(\mathbf{z}_0, \Phi(\mathbf{z}_0)) < (1 - \theta) r_1$.

Тогда для всякого числа r_2, удовлетворяющего неравенству

$$\rho(\mathbf{z}_0, \Phi(\mathbf{z}_0)) < r_2 < (1 - \theta) r_1,$$

существует такой элемент $\mathbf{z} \in U(\mathbf{z}_0, r_2/(1 - \theta))$, что $\mathbf{z} \in \Phi(\mathbf{z})$. Более того, среди точек $\mathbf{z}$, удовлетворяющих этим условиям, найдется такая, что

$$\rho(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \leqslant \frac{2}{1 - \theta} \rho(\mathbf{z}_0, \Phi(\mathbf{z}_0)).$$

Здесь $h(A, B) = \max\left\{\sup\limits_{\mathbf{z} \in A} \rho(\mathbf{z}, B), \sup\limits_{\mathbf{z} \in B} \rho(\mathbf{z}, A)\right\}$ — хаусдорфово расстояние между множествами A и B.

Теорема Банаха об открытом линейном отображении. *Пусть Λ — линейный оператор, действующий на $E_n \to E_m$. Положим*

$$C(\Lambda) = \sup_{y \in E_m} \left(\|y\|^{-1} \inf\{\|\mathbf{x}\| \,|\, \mathbf{x} \in E_n, \Lambda \mathbf{x} = \mathbf{y}\}\right).$$

Тогда если $\operatorname{Im} \Lambda = E_m$, то $C(\Lambda) < \infty$.

Теорема о среднем значении. *Пусть U — открытое множество в E_n и отображение $F\colon U \to E_m$ дифференцируемо в каждой точке отрезка $[\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{h}] \subset U$. Тогда**)

$$\|F(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{x})\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|F'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\| \, \|\mathbf{h}\|.$$

III. Обобщенная теорема Люстерника.

Теорема 1 (обобщенная теорема Люстерника)**). *Пусть U — окрестность точки $\mathbf{0}$, $\mathbf{f}$ — дифференцируемое до p-го порядка включительно отображение множества U в E_m, удовлетворяющее условию* (4). *Предположим, что $\mathbf{f}$ является p-регулярным в точке $\mathbf{0}$ и его p-я производная непрерывна.*

Тогда касательный конус к множеству $M(\mathbf{0}) = \{\mathbf{x} \in U | \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ в точке $\mathbf{0}$ совпадает с ядром оператора $f^{(p)}(\mathbf{0})$:

$$TM(\mathbf{0}) = \mathrm{Ker} f^{(p)}(\mathbf{0}). \tag{7}$$

Более того, если $\sup\limits_{\|\mathbf{h}\|=1} \|\{f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^{p-1}\}^{-1}\| \leqslant k$, то существуют окрестность $U' \subset U$ точки $\mathbf{0}$, число $\delta > 0$ и отображение $\mathbf{y} \to \mathbf{x}(\mathbf{y})$ множества U' в E_n такие, что $\mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}(\mathbf{y})) = \mathbf{f}(\mathbf{0})$ и $\|\mathbf{x}(\mathbf{y})\| \leqslant \leqslant \delta \|\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{0})\|^{1/p} \quad \forall \mathbf{y} \in U'$.

Доказательство. Пусть вектор $\mathbf{x}$ принадлежит $TM(\mathbf{0})$.

Докажем, что $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker} f^{(p)}(\mathbf{0})$. Действительно, $t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t) \in M(\mathbf{0})$, $\|\mathbf{r}(t)\|/t \to 0$ при $t \to 0$, или

$$\mathbf{f}(t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{0}). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\mathbf{f}(t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \ldots + \frac{f^{(p)}(\mathbf{0})}{p!}[t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)]^p + \omega(t), \tag{9}$$

$$\|\omega(t)\|/t^p \to 0.$$

Приравнивая правые части (8) и (9), имеем

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \frac{f^{(p)}(\mathbf{0})[t\mathbf{x} + \mathbf{r}(t)]^p}{p!} + \omega(t),$$

или

$$\frac{t^p}{p!} f^{(p)}(\mathbf{0}) \left[\mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}(t)}{t}\right]^p + \omega(t) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

*) Читатель может найти эти теоремы в книге А.Д. Иоффе и В.М. Тихомирова “Теория экстремальных задач” (М., Наука, 1973).

**) Теорема впервые сформулирована и доказана в ИПК АН СССР А.А. Третьяковым.

Сокращая (10) на t^p, получаем

$$\frac{1}{p!}f^{(p)}(\mathbf{0})\left[\mathbf{x}+\frac{\mathbf{r}(t)}{t}\right]^p+\frac{\omega(t)}{t^p}=\mathbf{0}. \tag{11}$$

Но левая часть выражения (11) есть

$$f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{x}]^p+C_p^1 f^{(p)}(\mathbf{0})\left[\frac{\mathbf{r}(t)}{t},\overbrace{\mathbf{x},\ldots,\mathbf{x}}^{p-1}\right]+\ldots$$
$$\ldots+f^{(p)}(\mathbf{0})\left[\frac{\mathbf{r}(t)}{t}\right]^p+\frac{\omega(t)}{t^p}p!=\mathbf{0}. \tag{12}$$

Исходя из непрерывности $f^{(p)}(\mathbf{0})$ и условия (4), получаем из (12) при $t\to+\infty$, что $f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{x}]^p=\mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x}\in\operatorname{Ker}f^{(p)}(\mathbf{0})$ или $TM(\mathbf{0})\subset\subset\operatorname{Ker}f^{(p)}(\mathbf{0})$.

Пусть теперь $\mathbf{h}\in\operatorname{Ker}f^{(p)}(\mathbf{0})$, т. е. $f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^p=\mathbf{0}$. Не ограничивая общности, считаем, что $\|\mathbf{h}\|=1$. Положим $x_\alpha=\alpha\mathbf{h}$, $\alpha>0$. Обозначим через $U_d(\mathbf{x})=\{\mathbf{y}\in E_n|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\leqslant d\}$ окрестность точки $\mathbf{x}$ радиуса d. Рассмотрим многозначное отображение

$$\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{x})=\mathbf{x}-(p-1)!\{f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{x}_\alpha]^{p-1}\}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha+\mathbf{x}),$$

где $f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{x}_\alpha]^{p-1}$ — непрерывный линейный оператор при каждом фиксированном $\alpha>0$.

Покажем, что при каждом достаточно малом $\alpha>0$ для оператора $\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{x})$ выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered}h(\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{x}_1),\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{x}_2))\leqslant\gamma\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|,\\ \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in U_{d(\alpha)}(\mathbf{0}),\quad\gamma\in(0,1);\end{gathered} \tag{13а}$$

$$\rho(\mathbf{0},\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{0}))<d(\alpha)(1-\gamma). \tag{13б}$$

В свою очередь, это будет означать, что для оператора $\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{x})$ выполнены условия обобщенного принципа сжимающих отображений и, значит, существует такая точка $\mathbf{z}(\alpha)$, что

$$\mathbf{z}(\alpha)\in\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{z}(\alpha)),\quad\rho(\mathbf{z}(\alpha),\mathbf{0})\leqslant\frac{2\rho(\mathbf{0},\Phi_{\mathbf{x}\alpha}(\mathbf{0}))}{1-\gamma}.$$

Докажем сначала, что

$$\rho(\mathbf{0},\Phi_{\mathbf{X}_\alpha}(\mathbf{0}))=o(\alpha) \tag{14}$$

при достаточно малом $\alpha>0$. Согласно теореме Банаха об открытом линейном отображении

$$m=\sup_{\mathbf{y}\in E_m}(\|\mathbf{y}\|^{-1}\inf\{\|\mathbf{x}\|\,|\mathbf{x}\in E_n,\,f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x}=\mathbf{y}\})<\infty,$$

и поэтому

$$m_\alpha = \sup_{\mathbf{y}\in E_m} (\|\mathbf{y}\|^{-1} \inf\{\|\mathbf{x}\| \,|\mathbf{x}\in E_n,\, f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x}=\mathbf{y}\}) = \frac{m}{\alpha^{p-1}},$$

где $f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x} = \alpha^{p-1}f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x}$. Так как $\mathbf{h}\in \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{0})$, то

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{0},\Phi_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathbf{0})) &= \|(p-1)!\{f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\}^{-1}\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h})\| \leqslant \\ &\leqslant (p-1)!m\|\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h})\|\alpha^{1-p} = (p-1)!m\alpha^{1-p}\Big\|\mathbf{f}(\mathbf{0})+\mathbf{f}'(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]+\ldots \\ &\ldots+\frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^p+\omega(\alpha\mathbf{h})\Big\| = (p-1)!\alpha^{1-p}m\|\omega(\alpha\mathbf{h})\|,\end{aligned}$$

где $\|\omega(\alpha\mathbf{h})\| = o(\alpha^p)$. Значит,

$$\rho(\mathbf{0},\Phi_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathbf{0})) \leqslant (p-1)!\alpha^{1-p}\|\omega(\alpha\mathbf{h})\| = (p-1)!mo(\alpha) \tag{15}$$

и выполнено соотношение (14).

Докажем теперь справедливость условия (13а), т. е. что при любом достаточно малом $\alpha>0$ оператор $\Phi_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathbf{x})$ будет сжимающим в шаре с центром в точке $\mathbf{0}$ и с радиусом $d(\alpha)$ (причем ниже будет показано, что $d(\alpha)=\alpha/R$, $R>1$ — некоторая константа, постоянная для всех достаточно малых $\alpha>0$). В свою очередь, в совокупности с (15) это будет означать справедливость условия (13б). Имеем

$$\begin{aligned}h(\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_1),\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_2)) &= \inf\{\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\| \,|\mathbf{z}_i\in\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_i),\, i=1,2\} = \\ &= \inf\Big\{\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\| \,\Big|\, \frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{z}_i = \\ &= \frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x}_i - \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_i),\, i=1,2\Big\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{m}{\alpha^{p-1}}\Big\|\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_2)-\frac{1}{(p-1)}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\Big\|.\end{aligned}$$

По теореме о среднем значении

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_2)\| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]}\|f'(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1+\theta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))\|\,\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1)-\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_2)-\frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)\Big\| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]}\Big\|f'(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1+\theta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1))-\frac{1}{(p-1)!}f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\Big\|\,\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|.\end{aligned} \tag{16}$$

Считаем, что $\|\mathbf{x}_1\| \leqslant \alpha/R$, $\|\mathbf{x}_2\| \leqslant \alpha/R$, $R > 1$, где величина R выбирается из условия выполнения соотношения (13а) одновременно для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Ниже будет показано, что это сделать можно, и значение R будет определено. Раскладывая $f'(\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))$ по формуле Тейлора в нуле, имеем

$$f'(\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) = f'(\mathbf{0}) + f^{(2)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{p-1} + \varepsilon(\alpha), \quad (17)$$

где $\|\varepsilon(\alpha)\| = o(\alpha^{p-1})$, так как $\|\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\| \leqslant 4\alpha$. Первые $p-1$ слагаемых в (17) равны нулю, поэтому

$$f'(\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^{p-1} + \varepsilon(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1} +$$
$$+ \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-1}^i f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1-i}[\mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^i + \varepsilon(\alpha). \quad (18)$$

Теперь оценим значение величины $R > 1$ ($\|\mathbf{x}_1\| \leqslant \alpha/R$, $\|\mathbf{x}_2\| \leqslant \alpha/R$) таким образом, чтобы норма второго слагаемого в правой части (18) была меньше $\alpha^{p-1}/(4m)$. Это сделать возможно, так как

$$\left\| \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-1}^i f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1-i}[\mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^i \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(p-1)!} \|f^{(p)}(\mathbf{0})\| \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-1}^i \alpha^{p-1-i} \|\mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\|^i \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{(p-1)!} \|f^{(p)}(\mathbf{0})\| \sum_{i=1}^{p-1} \frac{C_{p-1}^i \alpha^{p-1-i}}{R^i} \leqslant \frac{1}{(p-1)!} 4\alpha^{p-1} \|f^{(p)}(\mathbf{0})\| \sum_{i=1}^{p-1} \frac{C_{p-1}^i}{R}.$$

Полагая $R \geqslant 2^{p+3} \|f^{(p)}(\mathbf{0})\| m/(p-1)!$, получаем

$$\left\| \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-1}^i f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1-i}[\mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]^i \right\| \leqslant \frac{\alpha^{p-1}}{4m}. \quad (19)$$

Оценим, основываясь на (18) и (19), правую часть по формуле (16):

$$\sup_{\theta \in [0,1]} \left\| f'(\alpha\mathbf{h} + \mathbf{x}_1 + \theta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) - \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1} \right\| \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\theta\in[0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} \sum_{i=1}^{p-1} C_{p-1}^{i} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1-i}[\mathbf{x}_1+\theta(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)]^i + \right.$$

$$\left. + \varepsilon(\alpha) \right\| \|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\| \leqslant \frac{1}{4}\frac{\alpha^{p-1}}{m}\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\| + \|\varepsilon(\alpha)\|\,\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\frac{\alpha^{p-1}\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|}{m} \qquad (20)$$

для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Это в свою очередь означает, что

$$h(\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_1), \Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_2)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m}{\alpha^{p-1}} \left\| \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_2) - \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|,$$

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U_{d(\alpha)}(\mathbf{0}),$$

т. е. выполнено условие (13а) с $\gamma = 1/2$ и

$$R = 2^{p+3}\|f^{(p)}(\mathbf{0})\|m/(p-1)!.$$

Таким образом, справедливость условий (13) доказана, поэтому для любого достаточно малого $\alpha > 0$ существует точка

$$\mathbf{z}(\alpha) \in \Phi_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathbf{z}(\alpha)) \qquad (21)$$

такая, что

$$\rho(\mathbf{z}(\alpha), \mathbf{0}) = \|\mathbf{z}(\alpha)\| \leqslant 4\rho(\mathbf{0}, \Phi_{\mathbf{x}_\alpha}(\mathbf{0})) = o(\alpha), \qquad (22)$$

и из (21) следует, что $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{z}(\alpha)) = \mathbf{0}$, или $\alpha\mathbf{h}+\mathbf{z}(\alpha) \in M(\mathbf{0})$. В совокупности с (19) это означает, что $\mathbf{h} \in TM(\mathbf{0})$, и тем самым доказано, что $\operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{0}) \subset TM(\mathbf{0})$.

Докажем теперь последнее утверждение теоремы. Из теоремы Банаха и условия об ограниченности оператора $\{f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^{p-1}\}^{-1}$ следует

$$\sup_{\|\mathbf{h}\|=1} \sup_{\mathbf{y}\in E_m} \left(\|\mathbf{y}\|^{-1} \inf\left\{ \|\mathbf{x}\| \,\middle|\, \mathbf{x} \in E_n,\ f^{(p)}(\mathbf{0})[\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x} = \mathbf{y} \right\} \right) = M < \infty.$$

Зафиксируем произвольное $\mathbf{h}$, $\|\mathbf{h}\| = 1$. Тогда для любого отображения $\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ имеет место соотношение

$$\mathbf{h}(\Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_1), \Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_2)) = \inf\{\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\| \,|\, \mathbf{z}_i \in \Phi_{\alpha\mathbf{h}}(\mathbf{x}_i),\ i=1,2\} =$$

$$= \inf\{\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\| \,|\, f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{z}_i =$$

$$= f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}\mathbf{x}_i - \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_i),\ i=1,2\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\alpha^{p-1}} \left\| \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\alpha\mathbf{h}+\mathbf{x}_2) - \frac{1}{(p-1)!} f^{(p)}(\mathbf{0})[\alpha\mathbf{h}]^{p-1}(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1) \right\|.$$

Из последнего неравенства автоматически получаем аналогично (16)–(20), что для всех $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, принадлежащих окрестности нуля u' достаточно малого радиуса r, и любого $\mathbf{y} \in u'$ имеет место соотношение

$$h(\Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_1), \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_2)) \leqslant \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|/2. \tag{23}$$

Далее, в силу (15)

$$\rho(\mathbf{0}, \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{0})) \leqslant M\|\mathbf{f}(\mathbf{y})\|^{1/p} \leqslant r/2. \tag{24}$$

Соотношения (23) и (24) показывают, что для любого $\mathbf{y} \in u'$ отображения $\Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям обобщенного принципа сжимающих отображений. Поэтому существует такой вектор $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$, что $\mathbf{x}(\mathbf{y}) \in \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, и, следовательно, $\mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}(\mathbf{y})) = \mathbf{0}$. С другой стороны,

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{y})\| \leqslant \delta_1 \rho(\mathbf{0}, \Phi_{\mathbf{y}}(\mathbf{0})) \leqslant \delta \|\mathbf{f}(\mathbf{y})\|^{1/p},$$

где δ_1, δ — положительные, не зависящие от $\mathbf{y}$ константы. Теорема доказана. $\triangle$

IV. Необходимые и достаточные условия оптимальности p-го порядка.

Теорема 2. *Пусть U — открытое множество в E_n, функция φ: $U \to R$ и отображение $\mathbf{f}$: $E_n \to E_m$ строго дифференцируемы в точке $\mathbf{x}^* \in U$ до p-го порядка включительно. Если $\mathbf{x}^*$ доставляет локальный минимум в задаче* (3), (4) *и если $\mathbf{f}$ — регулярное отображение p-го порядка в точке $\mathbf{x}^*$, то*

$$\varphi^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}^p] \geqslant 0 \quad \forall\, h \in \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{x}^*). \tag{25}$$

Если же $\sup\limits_{\|h\|=1} \|\{f^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}]^{p-1}\}^{-1}\| \leqslant k$ и для некоторого $\alpha > 0$ будет выполнено неравенство

$$\varphi^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}^p] \geqslant \alpha\|\mathbf{h}\|^p, \quad \mathbf{h} \in \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{x}^*)\backslash\{\mathbf{0}\}, \tag{26}$$

то $\mathbf{x}^*$ — точка локального минимума.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbf{x}^*$ — решение задачи (3) и $\mathbf{h} \in \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{x}^*)$. Согласно теореме 1 $\mathbf{h} \in TM(\mathbf{x}^*)$, где $M(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in E_n | \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, т. е. существует отображение $r(\cdot)$: $[-\varepsilon, \varepsilon] \to$ $\to M(\mathbf{x}^*)$ такое, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)) = \mathbf{0}, \quad \|\mathbf{r}(t)\|/t \to 0, \quad t \to 0.$$

Значит, $\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)$ — допустимый элемент в задаче при $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, и, следовательно,

$$\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)).$$

Поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}^*) \leqslant \varphi(\mathbf{x}^* + t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)) = \varphi(\mathbf{x}^*) =$$
$$= \varphi(\mathbf{x}^*) + \varphi'(\mathbf{x}^*)[t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)] + \ldots + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\mathbf{x}^*)[t\mathbf{h} + \mathbf{r}(t)]^p + o(t^p) =$$
$$= \varphi(\mathbf{x}^*) + \frac{t^p}{p!}\varphi^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}]^p + o(t^p).$$

Отсюда непосредственно следует (25).

Достаточность. Считаем, что $\varphi(\mathbf{x}^*) = 0$. Обозначим через $B(\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_p)$ полилинейную форму $(p!)^{-1}\varphi^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_p]$. Очевидно, что $B(\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_p)$ — непрерывная симметричная полилинейная форма. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы

$$\gamma(\varepsilon) = \Big(\frac{\alpha}{p!}(1-\varepsilon)^p - C_p^1\|B\|(1+\varepsilon)^{p-1}\varepsilon - ... \\ ... - C_p^k\|B\|(1+\varepsilon)^{p-k}\varepsilon^k - ... - C_p^p\|B\|\varepsilon^p\Big) - \frac{\alpha}{2p!} > 0.$$

(Поскольку $\gamma(0) = \alpha/(2p!) > 0$, это заведомо можно сделать.) Функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ по условию имеют в точке $\mathbf{x}^*$ производные p-го порядка по $\mathbf{x}$. Пользуясь формулой Тейлора и учитывая условие (3), получаем, что $\varphi^i(\mathbf{x}^*) = 0$ $(i = \overline{1, p-1})$, и, значит, найдется такое число $\delta > 0$, что при $\|\mathbf{h}\| \leqslant \delta$

$$|\varphi(\mathbf{x}^*) - B[\mathbf{h}]^p| < \frac{\alpha}{2p!}\|\mathbf{h}\|^p.$$

Теперь пусть $\|\mathbf{h}\| < \delta$ и $\mathbf{x}^* + \mathbf{h}$ — допустимый элемент в задаче, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = 0$. Тогда, применяя к функционалу $F(\mathbf{x}) = f^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h} + \mathbf{x}]^p$ обобщенную теорему Люстерника при $p = 1$, получаем существование элемента $\widetilde{h}$ такого, что

$$\begin{gathered} f^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}}]^p = 0, \\ \|\widetilde{\mathbf{h}}\| \leqslant k_1 \frac{\|f^{(p)}(\mathbf{x}^*)[\mathbf{h}]^p\|}{\|\mathbf{h}\|^{p-1}} = o(\|\mathbf{h}\|). \end{gathered} \tag{27}$$

Значит, $\mathbf{h} + \overline{\mathbf{h}} \in \operatorname{Ker} f^{(p)}(\mathbf{x}^*)$, причем $\|\mathbf{h} - (\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}})\| = \|\widetilde{\mathbf{h}}\| \leqslant \varepsilon\|\mathbf{h}\|$, как это следует из (27). Отсюда $(1-\varepsilon)\|\mathbf{h}\| \leqslant \|\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}}\| \leqslant (1+\varepsilon)\|\mathbf{h}\|$, и в итоге получаем

$$\varphi(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{x}^*) \geqslant B[\mathbf{h}]^p - \frac{\alpha}{2p!}\|\mathbf{h}\|^p = B[\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}} - \widetilde{\mathbf{h}}] - \frac{\alpha}{2p!}\|\mathbf{h}\|^p \geqslant \\ \geqslant B[\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}}]^p - C_p^1\|B\|\,\|\mathbf{h} + \widetilde{\mathbf{h}}\|^{p-1}\|\widetilde{\mathbf{h}}\| - ... - \|B\|\,\|\widetilde{\mathbf{h}}\|^p - \frac{\alpha}{2p!}\|\mathbf{h}\|^p \geqslant \\ \geqslant \Big(\frac{1}{p!}\Big(\alpha(1-\varepsilon)^p - C_p^1\|B\|(1+\varepsilon)^{p-1}\varepsilon - ... - \|B\|\varepsilon^p - \frac{\alpha}{p!}\Big)\|\mathbf{h}\|^p\Big) > 0,$$

т. е. $\mathbf{x}^*$ — решение задачи (3), (4). Теорема доказана. $\triangle$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашманов С.А.* Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
2. *Бахвалов Н.И.* Численные методы, т. I. — М.: Наука, 1975.
3. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980.
4. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.
5. *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974.
6. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1978.
7. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.,* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972.
8. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
9. *Еремин И.И., Астафьев И.Н.* Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1976.
10. *Ильин В.А , Позняк Э.Г.* Основы магматического анализа, ч. I. — М.: Наука, 1971.
11. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
12. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978.
13. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
14. *Полак Э.* Численные методы оптимизации. — М.: Мир, 1974.
15. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. — М.: Наука, 1983.
16. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1973.
17. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.
18. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. — М.: Наука, 1975.
19. *Рокафеллер Р.* Выпуклый анализ. — М.: Наука, 1973.
20. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986.
21. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ГЛАВА 1. **ВВЕДЕНИЕ** 5

1.1. Предмет математического программирования 5
1.2. Еще раз о моделях 8
1.3. Вопросы классификации и специфики 9
1.4. Примеры математических моделей 11
1.5. Основные обозначения 15

ГЛАВА 2. **ЭЛЕМЕНТЫ ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА** 18

2.1. Евклидово пространство. Выпуклые множества 18
2.2. Проекция. Теоремы отделимости 20
2.3. Конус. Теорема Фаркаша 26
2.4. Выпуклые функции 29
2.5. Сильная выпуклость функций 36

ГЛАВА 3. **ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ** 39

3.1. Задачи математического программирования 39
3.2. Возможные направления 40
3.3. Экстремальные свойства 42
3.4. Экстремальные свойства на выпуклых множествах 44
3.5. Достаточные условия оптимальности 48
3.6. Функция Лагранжа. Условия оптимальности 49

ГЛАВА 4. **ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ** . . . 57

4.1. Основные понятия 57
4.2. Основные теоремы 59
4.3. Алгебраическая характеристика угловой точки 67
4.4. Двойственные задачи со смешанными ограничениями 69
4.5. Канонический вид задачи линейного программирования . . . 72

ГЛАВА 5. **КОНЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ** 74

5.1. Симплексный метод 74
5.2. Рекуррентные соотношения алгоритма симплексного метода (связь между параметрами последовательных итераций) . . 78

5.3. Методы отыскания исходной угловой точки 79
5.4. Вырожденность. Метод возмущений 82
5.5. Замечание о применении симплексного метода для решения специальных классов задач линейного программирования . . 85
5.6. О модифицированном симплексном методе 85
5.7. Мультипликативное представление обратной матрицы 86
5.8. Двойственный симплексный метод 87
5.9. Решения двойственной задачи как оценки влияния 90
5.10. О применении двойственного симплексного метода к задачам с возрастающим количеством условий 92
5.11. Метод одновременного решения прямой и двойственной задач 93
5.12. Метод декомпозиции 98

ГЛАВА 6. **МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ** 103

6.1. Описание метода 103
6.2. Теоремы о сходимости 106

ГЛАВА 7. **ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ** 119

7.1. Корректные и некорректные задачи 119
7.2. Один класс корректных задач 122
7.3. Задачи с точными ограничениями. Метод регуляризации . . 123
7.4. Сходимость 124
7.5. Метод регуляризации (общий случай) 126
7.6. Сходимость метода регуляризации (общий случай) 126

ГЛАВА 8. **МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ** 131

8.1. О задачах одномерной минимизации 131
8.2. Поиск отрезка, содержащего точку минимума 133
8.3. Методы Фибоначчи и золотого сечения 134
8.4. Метод парабол 141
8.5. Метод кубической аппроксимации 142
8.6. Метод касательных 143

ГЛАВА 9. **РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ. МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ** 148

9.1. Вопросы сходимости и устойчивости. Релаксационные процессы 148
9.2. Вспомогательный аппарат 150
9.3. Теоремы об оценках 158
9.4. Методы спуска 161
9.5. Методы первого и второго порядков 171
9.6. Метод сопряженных направлений 186
9.7. Методы нулевого порядка 190

ГЛАВА 10. **РЕЛАКСАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ** 196

10.1. Характеристика методов 196
10.2. Метод проекции градиента 197
10.3. Метод условного градиента 204
10.4. Метод возможных направлений 207
10.5. Способы отыскания допустимой точки 216
10.6. Методы случайного спуска 219

ГЛАВА 11. **МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАГРАНЖА** 237

11.1. Метод множителей Лагранжа 237
11.2. Метод модифицированных функций Лагранжа 238
11.3. Взаимосвязь методов множителей Лагранжа и штрафных функций 243

ДОБАВЛЕНИЯ 246

Д.1. О конечности численно реализуемого метода выбора шага из условия (9.15) 246
Д.2. Оценка скорости сходимости циклического метода покоординатного спуска с удвоением шага 247
Д.3. Вырожденность в экстремальных задачах 250

Список литературы 260

Учебное издание

КАРМАНОВ Владимир Георгиевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 30.08.01.
Формат 60×90/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,5. Уч.-изд. л. 18,7. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9231-0170-X

9 785923 101706