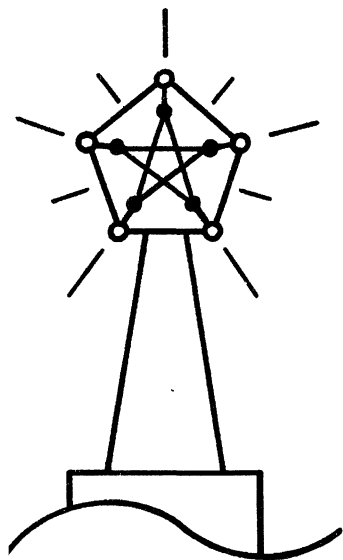


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
Национальная Академия наук Украины



Южный научный центр НАН и МОН Украины



ДОКЛАДЫ ОДЕССКОГО СЕМИНАРА

по дискретной
математике

1

Август 2004

Одесса
«Астропринт»
2004

Этот первый номер ДОСДМ (Доклады Одесского Семинара по дискретной математике) посвящается памятного юбилею профессора **Александра Александровича Костюкова** (1909–1976), который, будучи директором Одесского института инженеров морского флота, сыграл решающую роль в создании семинара и содействовал его дальнейшей успешной работе.

Начиная с 1969 года циклы расширенных заседаний семинара проводятся во вторую (иногда третью) неделю сентября. 26-й цикл состоится 6-10 сентября 2004 года, дальнейшие намечены на 4-10.09.2005, 10-14.09.2006, 9-13.09.2007 и т. д.

ДОСДМ — не периодический, но систематический сборник, выходящий по мере накопления материала; примерный объем каждого номера — 3 печатных листа (48 страниц). В сборник помещаются статьи, доложенные и обсужденные на семинаре, или тезисы доклада (если полный текст публикуется в другом издательстве). Основная тематика: теория графов и гиперграфов, задачи дискретной оптимизации, приложения к структурной химии; рассматриваются также вопросы обоснования теории множеств, алгебры, математической логики и специальной теории относительности.

От автора статьи (или тезисов объемом более 1 страницы) требуется оплата (примерно 4 доллара за страницу), но этот «отрицательный гонорар» будет постепенно снижаться благодаря привлечению спонсоров и за счет выручки от продажи.

Редакционный совет сборника ДОСДМ:

Визинг Вадим Георгиевич — научный редактор,
Зыков Александр Александрович — литературный редактор,
Зыкова Таисия Ефимовна — организационно-технический редактор,
Кузьмин Виктор Евгеньевич — научный редактор,
Любота Владимир Николаевич — научный редактор

Адрес e-mail: aldr@zykov.odessa.ua

Телефон: (38/0482)444602 (А. А. и Т. Е. Зыковы)

Д 1402030000-111 Без объявл.
318-2004

ISBN 966-318-194-X

© Южный научный центр
НАН и МОН Украины, 2004

Содержание

В. Г. Визинг	
О раскраске ребер нагруженного мультиграфа	4
А. А. Зыков	
Краткое изложение теории линейных неравенств в курсе алгебры	7
А. А. Зыков	
Таблица Менделеева в свете правил Ключковского	18
В. Н. Любота	
Применение графов булевых функций для минимизации дизъюнктивной нормальной формы	20
Г. Г. Омельченко, В. А. Перепелица	
Алгоритм выделения совершенных сочетаний на многодольном гиперграфе	26
В. А. Перепелица, Д. А. Тамбиева, Ф. Б. Тебуева, Л. Г. Темирова	
Клеточно-графовый автомат для прогнозирования временных рядов	44
И. Х. Сигал	
Оценки отклонения приближенных решений от оптимального в некоторых задачах дискретной оптимизации (тезисы)	51
И. Х. Сигал	
Параметризация и исследование комбинаторных алгоритмов решения некоторых задач дискретного программирования большой размерности	52

О РАСКРАСКЕ РЕБЕР НАГРУЖЕННОГО МУЛЬТИГРАФА

Пусть $G = (V, E)$ — неориентированный мультиграф без петель [3] с множеством вершин V и множеством ребер E . Будем обозначать через $d(v)$ степень вершины v , а через $\Delta(G)$ — максимальную степень вершины мультиграфа G . Мультиграф G называется нагруженным, если каждой вершине $v \in V$ сопоставлено натуральное число $w(v)$, называемое весом этой вершины.

Раскраска ребер нагруженного мультиграфа называется правильной, если каждой вершине v инцидентно не более $w(v)$ ребер, окрашенных одним и тем же цветом. Через $\chi'(G)$ обозначается хроматический индекс нагруженного мультиграфа G , т. е. наименьшее число цветов, необходимое для правильной раскраски всех его ребер.

Задача минимальной раскраски ребер нагруженного мультиграфа имеет следующую практическую интерпретацию. Будем считать, что цветами являются натуральные числа, представляющие собой дискретные моменты времени. Вершины G будем интерпретировать как пункты коммуникационной сети; ребра G — как сообщения, которыми должны обмениваться пункты, являющиеся концами ребер; вес $w(v)$ вершины v — это пропускная способность пункта v , т. е. максимальное число сообщений, которые пункт может принять или передать в единицу времени. Тогда хроматический индекс — это наименьшее время, необходимое для обмена всеми сообщениями.

Наряду с традиционной раскраской в теории графов изучается и раскраска в предписанные цвета [6]. В применении к рассматриваемой нами задаче соответствующие понятия выглядят так. Пусть каждому ребру $e \in E$ предписано некоторое множество $f(e)$ цветов, допустимых для окраски этого ребра. Наименьшее натуральное t такое, что при любом реберном предписании f , удовлетворяющем для любого $e \in E$ неравенству $|f(e)| \geq t$, существует правильная раскраска всех ребер мультиграфа G , называется списочным хроматическим индексом мультиграфа G и обозначается через $\chi'_L(G)$.

Обозначим: $r(v) = \lfloor d(v)/w(v) \rfloor$; $R(G) = \max_{v \in V} \{r(v)\}$. Очевидно, что $R(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_L(G)$. Для оценки сверху хроматическо-

го индекса нам потребуется процедура расщепления вершин мультиграфа.

Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф. Будем говорить, что мультиграф $H = (U, E)$ с тем же множеством ребер получается из G расщеплением вершин, если: а) каждой вершине $v \in V$ соответствует непустое подмножество $U(v)$ попарно несмежных вершин мультиграфа H , причем множество U разбивается на подмножества $U(v)$ ($v \in V$); б) каждое ребро e , имеющее в G концы v' и v'' , имеет в H концы, принадлежащие $U(v')$ и $U(v'')$. Легко доказываются следующие утверждения.

Лемма 1. Вершины произвольного мультиграфа G можно расщепить так, чтобы для любой вершины $v \in V$ выполнялось равенство $|U(v)| = 2$, и чтобы получившийся в результате расщепления мультиграф H был двудольным с $\Delta(H) = \lceil \Delta(G)/2 \rceil$.

Лемма 2. Пусть $G = (V, E)$ — нагруженный мультиграф. Вершины G можно расщепить так, чтобы получился мультиграф $H = (U, E)$ с $\Delta(H) = R(G)$ и с $|U(v)| = w(v)$ для любой вершины $v \in V$.

Лемма 3. Раскраска ребер нагруженного мультиграфа G , совпадающая с правильной раскраской ребер ненагруженного мультиграфа H , описанного в лемме 2, является правильной.

Воспользовавшись леммой 3, и обобщением теоремы Шеннона [7] на случай раскраски в предписанные цвета [4], получим следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть G — нагруженный мультиграф. Тогда $R(G) \leq \chi'(G) \leq \chi'_L(G) \leq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$.

При любом расщеплении вершин двудольного мультиграфа получается двудольный мультиграф. Из лемм 2, 3 и обобщения теоремы Кёнига, имеющегося в [5], вытекает

Теорема 2. Пусть G — двудольный нагруженный мультиграф. Тогда $\chi'(G) = \chi'_L(G) = R(G)$.

Если нагруженный мультиграф G не содержит кратных ребер, т. е. является обыкновенным графом, то в результате расщепления его вершин получается снова обыкновенный граф. Применяя теорему о раскраске ребер обыкновенного графа [1], получим следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть G — обыкновенный нагруженный граф. Тогда $R(G) \leq \chi'(G) \leq R(G) + 1$.

С помощью леммы 1 и теоремы 2 легко доказывается

Теорема 4. Если G — нагруженный мультиграф, у которого вес каждой вершины — четное число, то $\chi'(G) = \chi'_L(G) = R(G)$.

В заключение отметим, что в работе [2] рассматривался нагруженный мультиграф G , вес каждой вершины которого равен произвольному нечетному числу k . Доказано, что если $\Delta(G) = \Delta$, то списочный хроматический индекс $\chi'_L(G)$ оценивается сверху величинами $\lceil 3\Delta/(3k-1) \rceil$ или $\lceil (3\Delta-1)/(3k-1) \rceil$ в зависимости от того, является ли Δ четным или нечетным числом соответственно, причем эти оценки улучшить нельзя. Однако, вряд ли можно считать исчерпанными возможности уточнения верхних оценок хроматического индекса за счет привлечения дополнительной информации о мультиграфе.

Литература

1. Визинг В. Г. Об оценке хроматического класса p -графа // Дискретный анализ. Сб. науч. тр. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики СОАН СССР, 1964. С. 25–30.
2. Визинг В. Г. Факторная раскраска ребер мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 11, № 2. С. 18–31.
3. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.
4. Borodin O.V., Kostochka A. V., Woodall D.R. List edge and list total colorings of multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1997. V. 71, N2. P. 184–204.
5. Galvin F. The list chromatic index of a bipartite multigraphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1995. V. 63, N1. P. 153–158.
6. Jensen T. R., Toft B. Graph coloring problems. New York: John Wiley & Sons, 1995.
7. Shannon C. A theorem on coloring the lines of a network // J. of Math. and Physics. 1949. V. 28. P. 148 - 151.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Исследуются системы ограничений (неравенств)

$$A \cdot x \geq b, \quad (1)$$

где $A = \|a_{ij}\|_n^m \in M_n^m(P)$ и $b = \|b_i\|_1^m \in M_1^m(P)$ — $m \times n$ и $m \times 1$ -матрицы над упорядоченным полем P (например, действительных чисел), $x = \|x_i\|_n^1 = \|x_1 \dots x_n\| \in M_n^1(P)$ или $x = \|x_1 \dots x_n\| \in M_1^n$ — матрица-строка, соответственно матрица-столбец неизвестных, принимающих значения в P . Элементы поля P обозначаем буквами $a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$ (возможно, с индексами), векторы типа $\|a_1 \dots a_n\|$, $\|c_1 \dots c_n\|$, $\|b_1 \dots b_m\|$ и т. п. (для экономии места векторы-столбцы записываются горизонтально, но с наклонной двойной чертой) считаем элементами линейных пространств $M_n^1 = M_n^1(P)$, $M_1^n = M_1^n(P)$ (они изоморфны друг другу), соответственно M_1^m и т. п., и любое из них будем также обозначать просто через M . Неравенство между матрицами (в частности, векторами) выражает конъюнкцию неравенств между соответственными элементами этих матриц. Общепринятые определения (например, выпуклого множества) не повторяются, а доказательство приводится лишь тогда, когда оно (или сама теорема) существенно отлично от уже известных.

Теорема 1. Если $W \subseteq M$ — выпуклое множество и $\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_k \in W$ ($k \geq 2$), а элементы $\tau_1, \dots, \tau_k \in P$ удовлетворяют условиям $\tau_1, \dots, \tau_k \geq 0$ и $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$, то $\tau_1 \overset{0}{x}_1 + \dots + \tau_k \overset{0}{x}_k \in W$.

Напомним, что пересечение любой системы выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Теорема 2. Множество всех векторов $x \in M_1^n$, удовлетворяющих системе ограничений (1), выпукло (в частности, оно может оказаться пустым).

Лучом (направления l) с вершиной x_0 называется множество векторов пространства M_1^n , задаваемое параметрически:

$$x = x_0 + \lambda l \quad (\lambda \in P)$$

при дополнительном условии $\lambda \geq 0$.

Теорема 3. Если луч $x = x_0 + \lambda l$ ($\lambda \geq 0$) целиком принадлежит множеству W решений системы (1), то при любом $x'_0 \in W$ луч $x = x'_0 + \lambda l$ тоже полностью принадлежит W .

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что на втором луче есть точка $x'_0 + \lambda' l \notin W$ ($\lambda' > 0$). Значит, среди ограничений (1) имеется такое $f(x) \geq b$, что $f(x_0 + \lambda l) = f(x_0) + \lambda f(l) \geq b$ (при всех $\lambda \geq 0$), $f(x'_0) \geq b$ и одновременно $f(x'_0 + \lambda' l) = f(x'_0) + \lambda' f(l) < b$ при каком-то $\lambda' > 0$. Но тогда $\lambda' f(l) < 0$, откуда $f(l) < 0$, и взяв достаточно большое $\lambda > 0$, мы получили бы на первом луче точку, в которой $f(x_0 + \lambda l) < b$.

Примечание. В отличие от теоремы 1, справедливой для произвольного выпуклого множества, здесь существенно, что W — множество решений системы линейных ограничений; без этого предположения теорема 3 теряет силу, как видно из рисунка, где прерывистой линией изображена часть границы выпуклого множества W , не принадлежащая самому W .

Покажем прежде всего, как свести задачу выявления совместности и построения общего решения системы (1) к случаю, когда $\text{rang } A = n$.

Пусть $r = \text{rang } A < n$ (но $r > 0$). Тогда с помощью элементарных операций над столбцами матрицы A (и не трогая строк) можно преобразовать ее в такую A' , у которой последние $n - r$ столбцов — нулевые; это преобразование равносильно умножению A справа на некоторую невырожденную матрицу $C = \|c_{jk}\|_n^n$. Произведя замену неизвестных $x = C \cdot x'$,

где $\mathbf{x}' = \|\mathbf{x}'_k\|_1^n$, и учитывая, что $A \cdot \mathbf{x} = A \cdot (C \cdot \mathbf{x}') = (A \cdot C) \cdot \mathbf{x}' = A' \cdot \mathbf{x}'$, придадим системе (1) вид

$$A' \cdot \mathbf{x}' \geq \mathbf{b} \quad (1')$$

Ясно, что если система (1) совместна и $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}_j\|_1^n$ — любое ее решение, то вектор $\mathbf{x}' = C \cdot \mathbf{x}$ удовлетворяет системе (1'), и наоборот, любой вектор $\|\mathbf{x}'_1 \mathbf{x}'_2 \dots \mathbf{x}'_r\| \in \mathbf{M}'_1$, являющийся решением (1'), после дополнения до n -мерного произвольными координатами $\mathbf{x}'_{r+1}, \dots, \mathbf{x}'_r$ и умножения слева на C^{-1} будет удовлетворять исходной системе (1). Поэтому, располагая общим выражением $\hat{\mathbf{x}}'$ решения (1') в виде линейной комбинации конкретных r -мерных векторов с коэффициентами-параметрами, мы для получения общего решения той же системы, но в пространстве $\mathbf{M}_1^n$, пополним эти векторы $n-r$ нулевыми координатами (сохраняя обозначение $\hat{\mathbf{x}}'$) и введем дополнительные параметры $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-r}$; искомым выражением будет

$$\mathbf{x} = C^{-1} \cdot \mathbf{x}' = C^{-1} \cdot \hat{\mathbf{x}}' + \gamma_1 C^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1 + \dots + \gamma_{n-r} C^{-1} \cdot \mathbf{e}'_{n-r}, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}'_1 = \|0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0\|$ (с единицей на $(r+1)$ -м месте), $\dots, \mathbf{e}'_{n-r} = \|0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1\|$, у всех векторов, из которых составлена комбинация $\hat{\mathbf{x}}'$, нижние $n-r$ координат равны 0, а векторы $C^{-1} \cdot \mathbf{e}'_1, \dots, C^{-1} \cdot \mathbf{e}'_{n-r}$ — не что иное, как последние столбцы матрицы C^{-1} .

Заметим, что если в A квадратная подматрица, образованная первыми r столбцами и строками, — невырожденная (этого всегда можно добиться перенумерованием неизвестных и перестановками ограничений исходной системы), то преобразование $A \rightarrow A'$ удобно осуществлять без изменения самих первых столбцов (т. е. просто аннулируя ими остальные): тогда в преобразующих матрицах C и C^{-1} левыми верхними подматрицами будут единичные E'_r , и векторы, входящие в комбинацию $\hat{\mathbf{x}}'$, от умножения (слева) на C^{-1} не изменятся. Для практического нахождения матрицы C , преобразующей столбцы A , рекомендуется подписать под мат-

рицей A единичную E_n^n , и тогда при операциях над столбцами такой $2n \times n$ -матрицы внизу автоматически сформируется C .

Теперь можно приступить к выводу критерия совместности и к построению общего решения системы (1) в предположении, что $\text{rang } A = n$ и, следовательно, $m \geq n$.

Теорема 4. При $\text{rang } A = n$ никакая прямая не может целиком принадлежать множеству W решений системы (1).

В самом деле, если такая прямая есть, то с помощью невырожденной замены переменных сделаем одну из координатных осей, скажем Ox'_n , параллельной этой прямой, а тогда любое решение $\|x'_i\|_1^n$ преобразованной системы с матрицей A' будет оставаться решением при произвольном изменении значения x'_n , что возможно только когда n -й столбец в A' — нулевой, т. е. $\text{rang } A = \text{rang } A' < n$ вопреки условию.

Теорема 5. Если система (1) с $\text{rang } A = n$ совместна, то существует вектор $\overset{0}{x} \in W$, обращающий в равенства некоторые n ограничений системы (1), соответствующих линейно независимым строкам матрицы A .

Доказательство. Обозначим через P систему $(n-1)$ -мерных плоскостей, уравнения которых получаются из ограничений (1) заменой всех неравенств равенствами, возьмем произвольную точку $x_0 \in W$ и через нее проведем произвольную прямую. В силу теоремы 4 эта прямая пересечет некоторую $\Pi_1 \in P$ в точке x_1 . Через эту точку проведем в Π_1 произвольную прямую, и она должна пересечься с некоторой $\Pi_2 \in P$ в точке x_2 . Через x_2 проводим произвольную прямую в $(n-2)$ -мерной плоскости $\Pi_1 \cap \Pi_2$, и пусть x_3 — точка пересечения прямой с некоторой $\Pi_3 \in P$ и т. д. Точки $x_0, x_1, \dots$ необязательно все различны, но так или иначе мы через n шагов придем в точку x_n «нульмерной плоскости» $\Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_n = \{x_n\}$, причем ни для какого $i = 1, 2, \dots, n-1$ гиперплоскость Π_{i+1} не параллельна $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \dots \cap \Pi_i$, т. е. строка матрицы A , соответствующая Π_{i+1} , не является линейной

комбинацией строк, отвечающих гиперплоскостям $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_i$. Точка x_n — годограф искомого вектора $\overset{0}{x}$.

При $m = n$ система совместна хотя бы уже потому, что в силу теоремы Кронекера-Капелли совместна система уравнений, получаемая из (1) заменой неравенств равенствами.

Теорема 6. Система (1) с $\text{rang } A = n < m$ совместна в том и только том случае, если матрицу Ab^* можно перестановкой строк преобразовать так, чтобы выполнялись условия:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & b_i \end{vmatrix} \leq 0 \quad (i = n+1, \dots, m).$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в книге: С. Н. Черников, Линейные неравенства (М., Наука, 1962), но технически может быть упрощено.

Чтобы установить общий вид решения совместной системы (1) с $\text{rang } A = n$, рассмотрим линейно независимые подсистемы из n строк матрицы A ; каждая подсистема тех же строк расширенной матрицы Ab задает систему n уравнений с n неизвестными, обладающую единственным решением, и если вектор-решение удовлетворяет всем остальным $m - n$ ограничениям (вообще говоря, в виде неравенств) системы (1), то этот вектор, а тем более точку, определяемую им как радиусом-вектором в геометрической интерпретации, естественно называть *вершиной* множества W , в противном случае далее не рассматривать; при отсутствии вершин можно сразу заключить, что система (1) несовместна (обойдясь тем самым без теоремы 6: она интересна в теоретическом плане, но ее непосредственное применение не проще перебора $\binom{m}{n}$ подсистем из (1)).

Пусть $\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_p$ — все вершины W ($1 \leq p \leq \binom{m}{n}$) и $\overset{0}{x}_k$ — вершина, определяемая системой

* Это результат добавления столбца b к матрице A , а не произведение $A \cdot b$.

$$A \langle k \rangle \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \langle k \rangle, \quad (3_k)$$

т. е. $\mathbf{x} = A \langle k \rangle^{-1} \cdot \mathbf{b} \langle k \rangle$, где $A \langle k \rangle$ и $\mathbf{b} \langle k \rangle$ — соответствующие «урезанные» подматрица и вектор после удаления $m - n$ невыбранных строк из матрицы $A\mathbf{b}$ ($k = 1, 2, \dots, p$). Исследуем по отдельности множества $\mathbf{W}_k$ решений каждой из подсистем

$$A \langle k \rangle \cdot \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \langle k \rangle \quad (3'_k)$$

исходной системы ограничений (1). Для нового искомого вектора

$$\mathbf{y} = A \langle k \rangle \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \langle k \rangle \quad (4_k)$$

система $(3'_k)$ преобразуется в $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ с очевидным общим решением $\mathbf{y} \langle k \rangle = \parallel \beta_{k1} \dots \beta_{kn} \parallel$, где β_{kj} — любые неотрицательные элементы поля $\mathbf{P}$. Так как $A \langle k \rangle$ — невырожденная матрица, то преобразование (4_k) обратимо:

$$\mathbf{x} = A \langle k \rangle^{-1} \cdot (\mathbf{b} \langle k \rangle + \mathbf{y}) \quad (4'_k)$$

и общее решение системы $(3'_k)$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \langle k \rangle &= A \langle k \rangle^{-1} \cdot \mathbf{b} \langle k \rangle + A \langle k \rangle^{-1} \cdot \mathbf{y} \langle k \rangle = \\ &= \mathbf{x}_k^0 + A \langle k \rangle^{-1} \cdot \parallel \beta_{k1} \dots \beta_{kn} \parallel \end{aligned} \quad (5_k)$$

имеет весьма наглядный геометрический смысл.

При фиксированном $k \in \{1, \dots, p\}$ каждая из n подсистем $n - 1$ уравнений системы (3_k) задает в пространстве $\mathbf{M}_1^n$ свою прямую $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{ki}$ ($i = 1, \dots, n$), проходящую через точку $\mathbf{x}_k^0$. Часть $\mathbf{p} \cap \mathbf{W}_k^0$ этой прямой не может содержать точек по обе стороны от $\mathbf{x}_k^0$, поскольку выпуклое множество $\mathbf{W}_k$ лежит целиком в одном из полупространств, разделяемых той гиперплоскостью, уравнение которой не включено в подсистему, и пересечение $\mathbf{p} \cap \mathbf{W}_k$, будучи тоже выпуклым и одномерным, представляет собой «граничный луч» множества $\mathbf{W}_k$ — прообраз той координатной «положительной полуоси», в которую переводится это пересечение преобразованием $(4'_k)$. Так как общее решение системы $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ можно записать в виде

$$\mathbf{y} \langle k \rangle = \parallel \beta_{k1} \dots \beta_{kn} \parallel \cdot \parallel \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n \parallel,$$

где $\{e_j\}$ — стандартная база пространства M_1^n , то вторые слагаемые в (5_k) должны иметь вид

$$\|\beta_{k1} \dots \beta_{kn}\| \cdot \|1_1 < k > \dots 1_n < k >\| = \beta_{k1} 1_1 < k > + \dots + \beta_{kn} 1_n < k >;$$

здесь

$$1_j < k > = A < k >^{-1} \cdot e_j = \|A_{1j} < k > \dots A_{nj} < k >\| / \det A < k >, \quad (6)$$

$A_{ij} < k >$ — алгебраические дополнения элементов i -й строки матрицы $A < k >$. Таким образом,

$$x < k > = \overset{0}{x}_k + \beta_{k1} 1_1 < k > + \dots + \beta_{kn} 1_n < k >, \quad$$

т. е. W_k — «выпуклый конус», граничные лучи которого имеют направления $1_k < k >$; эти n векторов, как образы векторов e_j при невырожденном преобразовании, линейно независимы.

Каждая точка $x \in W$ должна, очевидно, принадлежать всем p «конусам» (в частности, каждый из них содержит вершины всех остальных $p-1$ «конусов»). Если $\overset{0}{W} = \bigcap_{k=1}^p W_k$ — множество решений объединенной подсистемы $\bigcup_{k=1}^p (Z'_k)$ исходной (1), то $W \subseteq \overset{0}{W}$ (на самом деле $W = \overset{0}{W}$, но это выяснится впоследствии).

Всякий граничный луч «конуса» W_k либо целиком сохранится и в $\overset{0}{W}$, либо пересечется с каким-то другим «конусом» W_i в точке, которая может быть только вершиной $\overset{0}{x}_i$ последнего, поскольку к $n-1$ уравнениям луча добавится не вытекающее из них уравнение гиперплоскости, а полученная система n независимых уравнений — это ведь некоторая (3_l) ($1 \leq l \leq p$); в силу выпуклости, часть луча, принадлежащая $\overset{0}{W}$ — отрезок с концами $\overset{0}{x}_k$ и $\overset{0}{x}_i$ (возможно, вырожденный, если решения систем (5_k) и (5_i) , различающихся одним уравнением, на самом деле совпадают). Ясно, что множество $\overset{0}{W}$ представляет собой выпуклый «многогранник», который мо-

жет либо занимать ограниченную часть пространства M_1^n , либо «простирается в бесконечность»; «гранями» W^0 служат гиперплоскости, определяемые уравнениями объединенной системы $\bigcup_{k=1}^p (Z_k)$, а «ребрами» — одномерные отрезки, соединяющие пары вершин «многогранника», и лучи, исходящие из его вершин.

Лемма. Каждый вектор $x \in W^0$ можно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^p \alpha_k x_k^0 + \sum_{l=1}^q \beta_l l_l,$$

где $x_1^0, \dots, x_p^0$ — все вершины множества W^0 , $l_1 \dots l_q$ — направления всех его граничных лучей, а $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ — неотрицательные элементы поля P , причем $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$.

Доказательство. Так как $x \in W_k^0$ при всех $k = 1, \dots, p$, то этот вектор допускает p представлений

$$x = x_k^0 + \sum_{j=1}^n \beta_{kj} l_j < k > \quad (7_k)$$

с линейно независимыми векторами $l_1 < k >, \dots, l_n < k >$, из которых первые $p-1$ являются направлениями ребер-отрезков, соединяющих x_k^0 с остальными вершинами W^* , а последние $n-p+1$ — направлениями ребер-лучей, исходящих из x_k^0 . Векторы первого типа коллинеарны $x_j^0 - x_k^0$ ($j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, p$), и порождаемое ими подпространство $M' \subset M_1^n$, будучи

* Допущение, что это именно первые слагаемые, не нарушает общности, ибо при каждом k можно произвести свою перенумерацию векторов $l_j < k >$.

линейной оболочкой системы $\left\{ \overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_k / j, k = 1, \dots, p, j \neq k \right\}$ ранга $p - 1$, не зависит от k , а векторы второго типа принадлежат такому подпространству $\mathbf{M}''$, что $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \{0\}^*$. Беря за $1_j < k >$ векторы $\overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_k$ и понимая уже под $\beta_{kj} \geq 0$ соответственно измененные значения, мы можем записать равенства (7_k) в виде

$$\mathbf{x} = \overset{0}{\mathbf{x}}_k + \mathbf{S} < k > + \mathbf{S}'' < k >, \quad (7'_k)$$

где сумма $\mathbf{S} < k > = \sum_{j=1}^p \beta_{kj} \left(\overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_k \right)^{**}$ является вектором из $\mathbf{M}'$, а $\mathbf{S}'' < k >$ — вектором из $\mathbf{M}''$. Умножая эти равенства на неотрицательные элементы $\alpha_k \in \mathbf{P}$, такие что $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$, в остальном пока произвольные, и складывая, получим

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \overset{0}{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{S} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{S}'' < k >, \quad \text{где}$$

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbf{S} < k > = \sum_{k=1}^p \sum_{j=k+1}^p (\alpha_k \beta_{jk} - \alpha_j \beta_{jk}) \left(\overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_k \right) \in \mathbf{M},$$

а слагаемые третьей суммы уже имеют требуемый вид, поскольку все $\alpha_k \beta_{kj} \geq 0$. Нам надо так распорядиться оставшейся свободой в выборе $\{\alpha_k\}$, чтобы сумма $\mathbf{S}$ обратилась в нулевой вектор.

Если при каком-то k все $\beta_{kj} = 0$, то искомой системой значений служит, например, $\alpha_k = 1$, $\alpha_j = 0$ при $j \neq k$; в противном случае предположим нумерацию вершин такой, что $\beta_{21} \neq 0$ и, пользуясь независимостью подпространства $\mathbf{M}$ от k , выберем в $\mathbf{M}$ базу $\left\{ \overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_1 / j = 2, \dots, p \right\}$. Тогда $\overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_k = \left(\overset{0}{\mathbf{x}}_j - \overset{0}{\mathbf{x}}_1 \right) - \left(\overset{0}{\mathbf{x}}_k - \overset{0}{\mathbf{x}}_1 \right)$

при $k = 2, \dots, p$ и $j = k + 1, \dots, p$, в силу чего

* $\mathbf{M} \otimes \mathbf{M}' = \mathbf{M}_1^n$ — прямая сумма подпространств.

** В ней k -е слагаемое заведомо равно 0 , но мы не хотим усложнять общую запись суммы. Удобно также считать $\beta_{kk} = 0$.

$$\begin{aligned} S < k > &= \sum_{j=1}^p \beta_{kj} \left(\overset{0}{x}_j - \overset{0}{x}_1 \right) - \sum_{j=1}^p \beta_{kj} \left(\overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_1 \right) = \\ &= \sum_{j=2}^p \beta_{kj} \left(\overset{0}{x}_j - \overset{0}{x}_1 \right) - \left(\sum_{j=1}^p \beta_{kj} \right) \left(\overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_1 \right); \end{aligned}$$

в то же время

$$S < 1 > = \sum_{j=2}^p \beta_{1j} \left(\overset{0}{x}_j - \overset{0}{x}_1 \right).$$

Вычитая равенство $(7_1')$ из $(7_k')$ с $k \geq 2$ и учитывая, что сумма $M' \otimes M'' = M_1^n$ — прямая, получаем

$$S < k > - S < 1 > + \left(\overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_1 \right) = 0,$$

или, после расшифровки и группировки по векторам базы,

$$\sum_{j=2}^p (\beta_{kj} - \beta_{1j}) \left(\overset{0}{x}_j - \overset{0}{x}_1 \right) + \left(1 - \sum_{j=1}^p \beta_{kj} \right) \left(\overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_1 \right) = 0,$$

откуда

$$\beta_{kj} = \beta_{1j} \text{ при } k = 1, \dots, p, j = k + 1, \dots, p, \quad (8)$$

и $\sum_{j=1}^p \beta_{kj} = 1 - \beta_{1k}$ при $k = 2, \dots, p$, или, в развернутом виде,

$$\beta_{k1} + \dots + \beta_{k,k-1} + \beta_{k,k+1} + \dots + \beta_{kp} = 1 - \beta_{1k}$$

т. е., благодаря (8), $\beta_{k1} + \sum_{j=1}^p \beta_{1j} = 1$ откуда $\beta_{k1} = 1 - \sum_{j=1}^p \beta_{1j}$ независимо от k ($\neq 1$), значит

$$\beta_{k1} = \beta_{21} > 0 \text{ при } k = 2, \dots, p, \text{ и } \beta_{21} + \sum_{k=1}^p \beta_{1k} = 1. \quad (9)$$

Полагая $\alpha_1 = \beta_{21}$, $\alpha_k = \beta_{1k} \geq 0$ при $k = 2, \dots, p$, будем иметь ввиду (8) и (9), $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$ и при $k = 1, j \geq 2$ (аналогично при $j = 1, k \geq 2$)

$$\alpha_1 \beta_{1j} - \alpha_j \beta_{j1} = \beta_{21} \beta_{1j} - \beta_{1j} \beta_{j1} = 0$$

(ибо $\beta_{j1} = \beta_{21}$), а при всех $k, j = 2, \dots, p$ тоже

$$\alpha_k \beta_{kj} - \alpha_j \beta_{jk} = \beta_{1k} \beta_{kj} - \beta_{1j} \beta_{jk} = \beta_{1k} \beta_{1j} - \beta_{1j} \beta_{1k} = 0,$$

что и требовалось.

Теорема 7. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1^n(\mathbf{P})$ удовлетворяет совместной системе ограничений (2) ранга n тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^p \alpha_k \overset{0}{\mathbf{x}}_k + \sum_{l=1}^q \beta_l \mathbf{l}_l, \quad (10)$$

где $\overset{0}{\mathbf{x}}_1, \dots, \overset{0}{\mathbf{x}}_p$ — все вершины, $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_q$ — направления всех ребер-лучей множества решений $\mathbf{W}$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ — неотрицательные элементы поля $\mathbf{P}$, такие что $\sum_{k=1}^p \alpha_k = 1$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, то тем более $\mathbf{x} \in \overset{0}{\mathbf{W}}$ и по лемме этот вектор допускает требуемое представление. Наоборот, если для вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1^n(\mathbf{P})$ имеет место равенство (10), то

слагаемое $\mathbf{x}_\alpha = \sum_{k=1}^p \alpha_k \overset{0}{\mathbf{x}}_k$ принадлежит $\mathbf{W}$ по теореме 1, а векто-

ры $\mathbf{x}_\alpha + \beta_1 \mathbf{l}_1, (\mathbf{x}_\alpha + \beta_1 \mathbf{l}_1) + \beta_2 \mathbf{l}_2, \dots$ и, наконец, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha + \sum_{l=1}^q \beta_l \mathbf{l}_l$ — по теореме 3.

Теоремами 6 и 7 проблема установления совместности и нахождения общего решения системы (1) полностью решается в случае $\text{rang } A = n$. Если же $\text{rang } A < n$, то формула общего решения получается из (2) подстановкой вместо $\mathbf{x}'$ правой части равенства (10).

В «Лекциях по алгебре» (книга готовится к печати) этот материал, с необходимыми подробностями, примерами и рисунками, занимает 14 страниц (в книге С. Н. Черникова — около 280).

ТАБЛИЦА МЕНДЕЛЕЕВА В СВЕТЕ ПРАВИЛ КЛЕЧКОВСКОГО

t (номер строки) — энергетический уровень,

n — главное квантовое число,

l — азимутальное квантовое число,

$q = n + 1$ — число Клечковского

$$\left. \begin{aligned} [x] &= \min_{z \in Z} \{z / z \geq x\} - \text{верхняя} \\ [x] &= \max_{z \in Z} \{z / z \leq x\} - \text{нижняя} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{целая часть} \\ \text{действительного числа } x \end{array}$$

$u = u(t) = \left[\sqrt{t} \right], v = v(t) = \left[\sqrt{t} - \frac{1}{2} \right]$ — вспомогательные теоретико-числовые функции.

$$\begin{aligned} q &= q(t) = u + v - 1, l = l(t) = uv - t, \\ n &= n(t) = t - (u - 1)(v - 1) = q - l; \quad t = t(q, l) = \left[\left(\frac{q+1}{2} \right)^2 \right] - l. \end{aligned}$$

Z — атомный номер элемента;

$Z(t) = 4 \sum_{i=1}^{t-1} u(i)v(i) - z(t-1)^2$ — номер Z последнего элемента $(t-1)$ -й строки;

$Z(t+1) - Z(t) = 4uv - 4t + 2 = 4l + 2$ — длина t -й строки;

$Z(t, r) = Z(t) + r$ — номер Z элемента t -й строки на r -м месте;

$t(Z) = 1 + \max\{t / Z(t) < Z\} = \min\{t / Z(t) \geq Z\}$ — номер строки, содержащей элемент Z ;

$r(Z) = Z - Z(t(Z) - 1)$ — место элемента Z в своей строке;

$$m = \left\lfloor \frac{r(Z) - 1}{2} \right\rfloor - l$$
 — магнитное квантовое число.

q :

1	2	5	6 ↓	9
3	3 ←	5	6	9
4	4 →	5 ↑	6	9
7	7	7	7 ←	9
8	8 →	8	8	9 ↑

Энергетические уровни (по возрастанию t) заполняются согласно «принципу укладки конфет». Коробка квадратная или прямоугольная. Следующую конфету прикладывают по горизонтали или вертикали к предыдущей так, чтобы скорее образовался квадрат или прямоугольник с разностью сторон 1.

CLASSIFICATION PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

La loi de Mendeleïev sous le jour des règles de Kletchkovski*

(t)	q	n	(l)		0 Nr
1	1	1	s(0)	1 H	2 He
2	2	2	s	3 Li 4 Be	
3	3	2	p(1)	5 B 6 C 7 N 8 O 9 F 10 Ne	
4	3	3	s	11 Na 12 Mg	
5	4	3	p	13 Al 14 Si 15 P 16 S 17 Cl 18 Ar	
6	4	4	s	19 K 20 Ca	
7	5	3	d(2)	21 Sc 22 Ti 23 V 24 Cr 25 Mn 26 Fe 27 Co 28 Ni 29 Cu 30 Zn	
8	5	4	p	31 Ga 32 Ge 33 As 34 Se 35 Br 36 Kr	
9	5	5	s	37 Rb 38 Sr	
10	6	4	d	39 Y 40 Zr 41 Nb 42 Mo 43 Tc 44 Ru 45 Rh 46 Pd 47 Ag 48 Cd	
11	6	5	p	49 In 50 Sn 51 Sb 52 Te 53 I 54 Xe	
12	6	6	s	55 Cs 56 Ba	
13	7	4	f(3)	57 La 58 Ce 59 Pr 60 Nd 61 Pm 62 Sm 63 Eu 64 Gd 65 Tb 66 Dy	
14		5	d	67 Ho 68 Er 69 Tm 70 Yb	
				71 Lu 72 Hf 73 Ta 74 W 75 Re 76 Os 77 Ir 78 Pt 79 Au 80 Hg	
15	7	6	p	81 Tl 82 Pb 83 Bi 84 Po 85 At 86 Rn	
16	7	7	s	87 FR 88 Ra	
17	8	5	f	89 Ac 90 Th 91 Pa 92 U 93 Np 94 Pu 95 Cm 97 Bk 98 Cf 99 Es	
18		6	d	100 Fm 101 Md 102 No	
				103 Lr 104 Ku 105 Ns 106 107 108 109 110 111 112	
19	8	7	p	113 114 115 116 117 118 (Uuo)	
20	8	8	s	119 120	



Paris
01.04.96.

* N. Glinka, Chemie générale I. 1981.

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Задача минимизации булевых функций представляет значительный практический интерес ([1], [2], [3]), ей посвящено большое количество статей. В настоящей работе рассмотрен еще один подход к проблеме.

Рассмотрим граф $GN(X_n, V_n)$, у которого вершины $X_n = \{0, 1, \dots, 2^{N-1}\}$ отвечают упорядоченным наборам длины N из $B = \{0, 1\}$. Две вершины считаем смежными, если соответствующие им наборы различаются лишь в одной позиции. Графы $GN(X_n, V_n)$ хорошо известны как гиперкубы. При $N = 3, 4, 5$ они показаны на рис. 1, 2, 3, соответственно, в реализации математической системы **MAPLE** ([4]).

Пусть булева функция (БФ) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задается набором конstituент единицы. Граф $G_f(X_f, V_f)$, полученный из GN выбрасыванием вершин, двоичный код которых не соответствует наборам, определяющим конstituенты единиц f , а также инцидентных этим вершинам ребер, называется графом БФ f .

Например, если $f \rightarrow \{K_1, K_2, \dots, K_{14}\}$, то $G_f = GN - \{K_0, K_{15}\}$.

Граф G_f изображен на рис. 4.

Определение. Гранью k -го порядка графа G_f называется любой его подграф изоморфный G_k . Грани 0-го порядка суть вершины графа, грани 1-го порядка суть его ребра, грани 2-го порядка — циклы C_4 и т. д.

Склейка (см. [1]) вершин, принадлежащих одной грани, соответствует замене в сумме конstituент единицы для f совокупности слагаемых сопоставляемых грани — элементарной конъюнкцией. Такие склейки позволяют уменьшить сложность БФ (см. [2]). Выделим из графа БФ множество максимальных граней. Задача получения минимальной дизъюнктивной нормальной формы (МДНФ) сводится к задаче минимального покрытия вершин графа максимальными гранями.

Рассмотрим вначале, как выписать все грани графа GN . Предположим $N = 4$, $k = 2$.

Все двумерные грани соответствуют конъюнкциям $x_i \cdot x_j$, $(\sim x_i) \cdot x_j$, $(\sim x_i) \cdot (\sim x_j)$.

Обозначим $\{\alpha \cdot 2^k + \beta \cdot 2^m\} = [a_0, a_1, a_2, a_3]$, где $a_i = \alpha \cdot 2^k + \beta \cdot 2^m$ на наборе (α, β) , дающем двоичное представление числа i ($i = 0, 1, 2, 3$). Далее полагаем $a + [a_0 + a_1 + a_2 + a_3] = [a + a_0, a + a_1, a + a_2, a + a_3]$.

Теорема. Для различных i, j, k, m множества

$$(1) \quad (1 \cdot 2^i + 1 \cdot 2^j) + \{\alpha \cdot 2^k + \beta \cdot 2^m\},$$

$$(2) \quad (0 \cdot 2^i + 1 \cdot 2^j) + \{\alpha \cdot 2^k + \beta \cdot 2^m\},$$

$$(3) \quad (0 \cdot 2^i + 0 \cdot 2^j) + \{\alpha \cdot 2^k + \beta \cdot 2^m\} —$$

совокупность всех граней размерности 2 графа G_4 , при этом (1) соответствуют конъюнкции $x_i \cdot x_j$ в БФ, (2) соответствуют $(\sim x_i) \cdot x_j$ и, наконец, (3) соответствуют $(\sim x_i) \cdot (\sim x_j)$.

Например, построим грани, отвечающие $(x_2) \cdot (\sim x_3)$ и $(\sim x_2) \cdot x_3$ в графе G_4 . При этом используем формулу (2). Получим две грани:

$$(1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1) + \{\alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^0\} = 4 + [0, 1, 8, 9] = [4, 5, 12, 13],$$

$$(0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1) + \{\alpha \cdot 2^3 + \beta \cdot 2^0\} = 2 + [0, 1, 8, 9] = [2, 3, 10, 11].$$

Предположим теперь, что $N = 5$, $k = 2$.

В этом случае элементарные конъюнкции, соответствующие граням размерности 2, содержат три переменные.

Теорема 1 является частным случаем более общего результата, позволяющего получать все грани размерности $k \leq N$ кубического графа GN .

Давать общую формулировку теоремы мы не будем, а покажем на примере, как строится грань.

Пусть $x_1 \cdot x_2 \cdot (\sim x_4)$ — член ДНФ, соответствующий грани размерности 2 в графе G_5 . Тогда

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot (\sim x_4) &\rightarrow (1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^1) + \{a \cdot 2^2 + b \cdot 2^0\} = \\ &= 24 + [0, 1, 4, 5] = [24, 25, 28, 29]. \end{aligned}$$

Очень важно уметь решать и обратную задачу: по известной грани записать соответствующую элементарную конъюнкцию ДНФ. Так как переменные могут входить в конъюнкции

юнкцию без отрицания, либо с отрицанием, то это делается в два этапа.

Пусть $[a_1, a_2, \dots a_n]$ — рассматриваемая грань.

(для примера $[24, 25, 28, 29]$).

Этап 1. 1) Находим $\min \{a_i\} = a^*$

(в примере $\min \{24, 25, 28, 29\} = 24$).

2) Представим a^* в двоичном коде; переменные, соответствующие значению 1, войдут в конъюнкцию без отрицаний

$$(24 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \rightarrow 11000 \rightarrow \{x_1, x_2\}).$$

Этап 2. 1) Рассмотрим $[a_1 - a^*, \dots a_n - a^*]$

(в примере $[24 - 24, 25 - 24, 28 - 24, 29 - 24] = [0, 1, 4, 5]$);

2) находим $\max \{a_i - a^*\} = b^*$

(в примере $\max \{0, 1, 4, 5\} = 5$);

3) представим b^* в двоичном коде

(в примере $5 = 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \rightarrow 00101$).

Переменные, соответствующие значению 0 в представлении числа (за вычетом отобранных на 1-м этапе), — искомые (в примере это переменная x_4).

Искомая конъюнкция $x_1 \cdot x_2 \cdot (\sim x_4)$.

Для получения минимального покрытия вершин графа БФ была составлена программа на языке **VISUAL PROLOG** (см. [5]). Рассматривалась функция

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sim(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \vee (\sim x_1)(\sim x_2)(\sim x_3)(\sim x_4)).$$

Граф этой БФ показан на рис. 4. Он содержит 14 вершин и 12 максимальных граней (все грани размерности 2). Минимизация этой функции подробно описана в книге С. В. Яблонского [2]. Очевидно, что набор конститuent единицы в этой задаче $\{K_1 + K_{14}\}$. Программа за время порядка $2c$ выдавала все минимальные покрытия (их оказалось 6). Полученные МДНФ таковы:

$$f \equiv ((\sim x_1) \cdot x_4 \vee (\sim x_2) x_3 \vee x_2 (\sim x_4) \vee x_1 (\sim x_3))$$

$$f \equiv ((\sim x_1) \cdot x_4 \vee x_3 (\sim x_4) \vee x_2 (\sim x_3) \vee x_1 (\sim x_2))$$

$$f \equiv ((\sim x_2) \cdot x_4 \vee (\sim x_1) x_3 \vee x_2 (\sim x_3) \vee x_1 (\sim x_4))$$

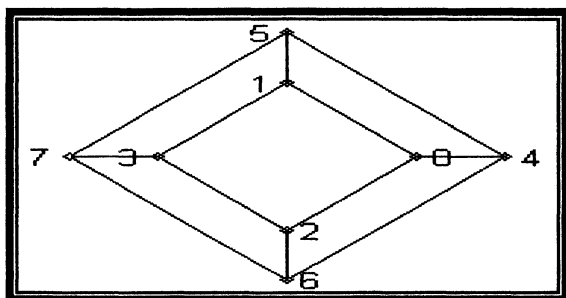
$$f \equiv ((\sim x_2) \cdot x_4 \vee (\sim x_4) x_3 \vee x_2 (\sim x_1) \vee x_1 (\sim x_3))$$

$$f \equiv ((\sim x_3) \cdot x_4 \vee (\sim x_1) x_3 \vee x_2 (\sim x_4) \vee x_1 (\sim x_2))$$

$$f \equiv ((\sim x_3) \cdot x_4 \vee (\sim x_2) x_3 \vee x_2 (\sim x_1) \vee x_1 (\sim x_4))$$

Приводим далее графики, полученные в системе **MAPLE**

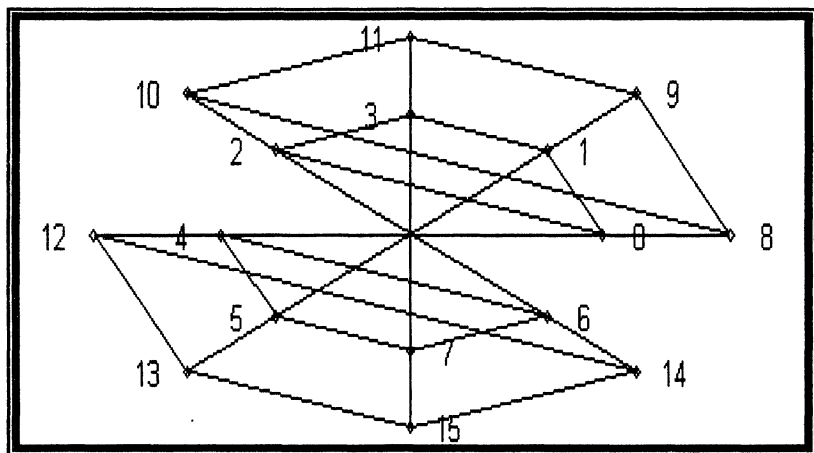
```
with(networks): G3:= cube(3): draw(Concentric([0, 1, 3, 2],
[4,5,7,6]), G3);
```



Граф G_3

Рис. 1

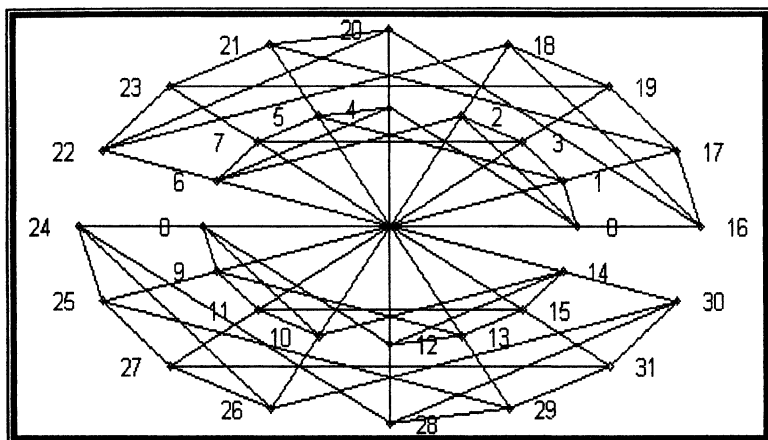
```
G4:= cube(4): draw(Concentric([0, 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6],
[8, 9, 11, 10, 12, 13, 15, 14]), G4);
```



Граф G_4

Рис. 2

$G5 := \text{cube}(5): \text{draw}(\text{Concentric}([0, 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6, 8, 9, 11, 10, 12, 13, 15, 14], [16, 17, 19, 18, 20, 21, 23, 22, 24, 25, 27, 26, 28, 29, 31, 30]), G5);$

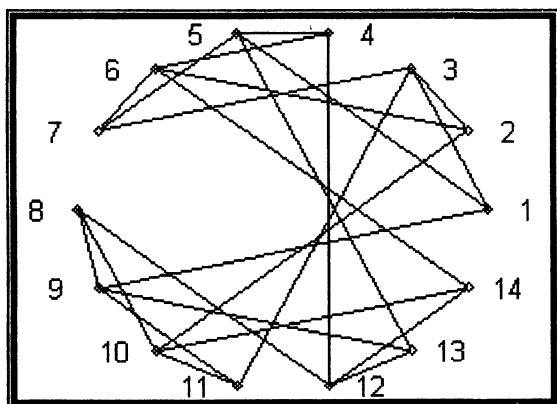


Граф $G5$

Рис. 3

$G4 := \text{cube}(4): \text{draw}(\text{Concentric}([0, 1, 3, 2, 4, 5, 7, 6], [8, 9, 11, 10, 12, 13, 15, 14]), G4);$

$H2 := \text{delete}(\{0, 15\}, G4): \text{draw}(H2);$



Граф $G4 \setminus \{0, 15\}$

Рис. 4

Литература

1. *Чернышев Ю. О.* Методы оптимизации комбинаторных устройств. — М.: Советское радио, 1977.
2. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, Главная редакция физ-мат. литературы, 1979.
3. *Токхейм Р.* Основы цифровой электроники. — М.: Мир, 1988.
4. *Дьяконов В. П.* Математическая система MAPLE V R3/R4/R5 М.: Солон, 1988.
5. *Адаменко А. Н., Кучуков А. М.* Логическое программирование и VISUAL PROLOG. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

АЛГОРИТМ ВЫДЕЛЕНИЯ СОВЕРШЕННЫХ СОЧЕТАНИЙ НА МНОГОДОЛЬНОМ ГИПЕРГРАФЕ

1. Формулировка задачи

Заранее отметим, что недостающие определения терминов теории графов и гиперграфов можно найти в [1,2]. Гиперграф $G = (V, E)$ называется однородным, точнее, ℓ -однородным, если всякое ребро $e \in E$ представляет собой ℓ -вершинное подмножество $\{v_1, \dots, v_s, \dots, v_\ell\}$, которое принято представлять в круглых скобках: $e = (v_1, \dots, v_s, \dots, v_\ell)$.

Если в ℓ -однородном гиперграфе $G = (V, E)$ число вершин $n = |V|$ кратно ℓ , то совершенным сочетанием (ℓ -сочетанием) называется всякий такой его реберный подгиперграф $x = (V, E_x)$, в котором каждая компонента связности пред-

ставляет некоторое ребро $e \in E$, мощность $|E_x| = \frac{n}{\ell} = m$.

В настоящей работе рассматривается проблема нахождения множества всех совершенных сочетаний в ℓ -однородном гиперграфе. Частный случай этой задачи состоит в нахождении какого-либо совершенного сочетания в G . С точки зрения теории вычислительной сложности [3] этот частный случай эквивалентен задаче распознавания, содержит ли данный гиперграф совершенное сочетание. Для $\ell = 2$ этот частный случай является полиномиально разрешимой задачей, называемой задачей о совершенном паросочетании [4]. Для всякого $\ell \geq 3$ задача нахождения в гиперграфе G совершенного сочетания является NP-полной. Обоснование этого факта базируется на примечании о том, что известная задача о трехмерном сочетании (3-C) является NP-полной [3].

В настоящей работе предлагается алгоритм нахождения множества всех совершенных сочетаний в ℓ -дольном ℓ -однородном гиперграфе $G = (V_1, V_2, \dots, V_\ell, E)$.

2. Специальный граф для многодольного гиперграфа

Пусть n кратно ℓ и для пары n, ℓ задан n -вершинный ℓ -дольный ℓ -однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, \dots, V_\ell, E)$, в ко-

тором доли равноможны ($|V_1| = |V_2| = \dots = |V_\ell|$), что является необходимым условием существования в G совершенного сочетания. Для этого гиперграфа через $S = S(G) = (U, R)$ обозначим так называемый "специальный граф". Элементами множества U являются "гипервершины", каждая из которых представляет собой определенное (взаимно однозначным соответствием) ребро исходного гиперграфа G ; $R = \{\rho\}$ — множество ребер графа S . Таким образом, количество вершин специального графа S совпадает с количеством ребер гиперграфа G : $|U| = |E|$. Условимся вершины в U обозначать символами ребер в гиперграфе G , т. е. $U = \{e\}$. Специальный граф S по своему определению является m -дольным, где

$m = \frac{n}{\ell}$ — мощность каждой доли гиперграфа G , k — индекс

нумерации долей в S , т. е. $S = (U_1, \dots, U_k, \dots, U_m, R)$.

Использование специального графа $S = S(G)$ обусловлено самой идеей предлагаемого ниже алгоритма нахождения совершенных сочетаний в гиперграфе G . Суть этой идеи заключается в том, что всякому совершенному сочетанию в гиперграфе G взаимно однозначно соответствует (максимальная) m -вершинная клика в специальном графе S . Вершины, составляющие такую клику, однозначно определяют собой в гиперграфе G множество ребер, образующих совершенное сочетание. Ниже приводится описание процедуры построения специального графа $S = S(G)$.

На рисунках 1 и 2 представлены 12-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$ и соответствующий ему специальный граф $S = S(G) = (U_1, U_2, U_3, U_4, R)$, который, согласно представленному определению, является 10-вершинным (т. к. в исходном гиперграфе G число ребер $|E| = 10$) и 4-дольным (т. к. в гиперграфе мощность первой доли $|V_1| = 4$).

Построение специального графа $S = S(G) = (U, R) = (U_1, \dots, U_k, \dots, U_m, R)$ осуществляется следующим образом. Пусть в гиперграфе G первая доля представляет собой множество $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Множество вершин специального графа $U = \{e\}$ ставится во взаимно однозначное соответствие множеству ребер исходного гиперграфа $E = \{e\}$ так, что всякий элемент $e \in U$ специального графа S представляет собой подмножество вершин $v \in V$ данного гиперграфа $G = (V, E)$, образующих некоторое ребро $e \in E$, т. е. $e \subset V$. Затем множество

U разбивается на m долей таким образом, что доля U_1 состоит из всех таких вершин $e \in U$, каждая из которых содержит вершину v_1 в первой доле исходного гиперграфа G , т. е. $v_1 \in V_1$; доля U_2 состоит из всех таких вершин $e \in U$, каждая из которых содержит вершину v_2 также в первой доле, т. е. $v_2 \in V_1$; ...; доля U_m состоит из всех таких вершин, каждая из которых содержит вершину v_m первой доли гиперграфа G , т. е. $v_m \in V_1$.

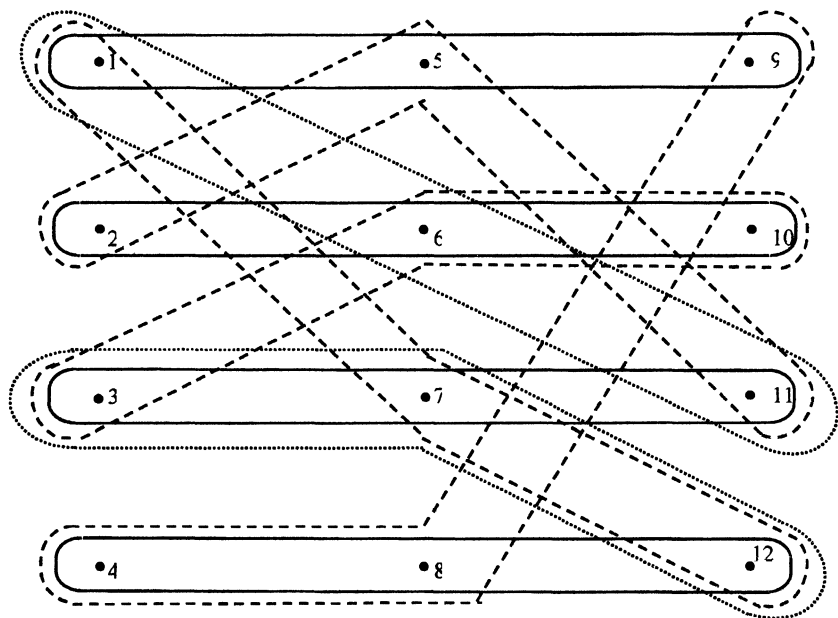


Рис. 1. 12-вершинный 3-дольный 3-однородный гиперграф $G = (V_1, V_2, V_3, E)$
 $e_1 = (1, 5, 9)$ $e_2 = (2, 6, 10)$ $e_3 = (3, 7, 11)$ $e_4 = (4, 8, 12)$ $e_5 = (1, 7, 12)$ $e_6 = (4, 8, 9)$
 $e_7 = (3, 6, 10)$ $e_8 = (2, 5, 11)$ $e_9 = (1, 6, 11)$ $e_{10} = (3, 7, 12)$

На рис. 2 доля U_1 состоит из вершин e_1, e_5, e_9 , каждая из них содержит вершину v_1 гиперграфа G , представленного рис. 1; доля U_2 состоит из вершин e_2, e_8 , каждая из которых содержит вершину v_2 ; доля U_m , $m = 4$ состоит из вершин e_4, e_6 , содержащих вершину v_4 в первой доле гиперграфа G .

Далее определяется множество ребер $R = \{r\}$ специального графа S . Для всякой пары вершин $e', e'' \in U$ ребро $r = (e', e'')$ включается в R тогда и только тогда, когда пересечение этой пары является пустым, т. е. $e' \cap e'' = \emptyset$ (среди

десяти вершин $e_1, e_2, \dots, e_{10}$ специального графа $S = (U, R)$ на рис. 2 двадцать пять пар вида (e_i, e_j) , $1 \leq i < j \leq 10$ имеют пустое пересечение $e_i \cap e_j = \emptyset$, в силу чего мощность $|R| = 25$). Формированием множества ребер R завершается построение специального графа S .

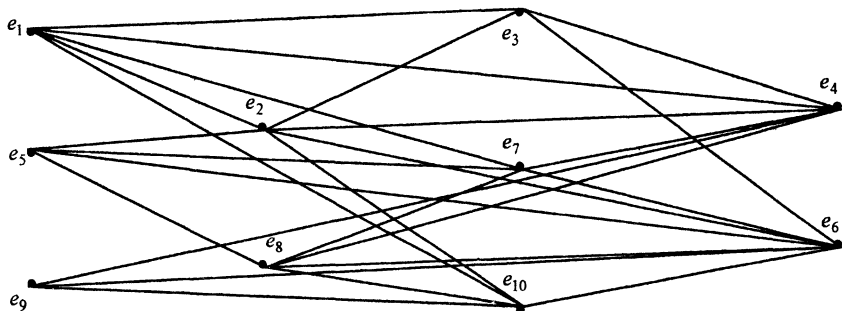


Рис. 2. Специальный граф $S = S(G)$ для гиперграфа G на рис. 1

Алгоритм α нахождения множества всех совершенных сочетаний в ℓ -долном ℓ -однородном гиперграфе G состоит из алгоритма α_1 распознавания существования в многодолном гиперграфе совершенного сочетания и алгоритма α_2 выделения совершенных сочетаний в многодолном гиперграфе.

3. Алгоритм распознавания существования совершенного сочетания в многодолном гиперграфе

Обозначим через α_1 предлагаемый ниже алгоритм распознавания существования совершенного сочетания в ℓ -долном ℓ -однородном гиперграфе G . На вход этого алгоритма подается специальный граф $S = S(G) = (U, R)$, в котором вершины первой доли перенумерованы индексом $q = 1, 2, \dots, L_1$, т. е. $U_1 = \{e^1, \dots, e^q, \dots, e^{L_1}\}$, $L_1 = |U_1|$. Работа алгоритма α_1 состоит из L_1 этапов. Начало очередного q -го этапа состоит в фиксации очередной вершины $e^q \in U_1$. Обозначим через U_k^q подмножество всех вершин, принадлежащих доле U_k и смежных с фиксированной вершиной e^q , $k = 2, 3, \dots, m$. Объединение этих подмножеств вместе с вершиной e^q обозначим

$$U^q = \{e^q\} \cup \bigcup_{k=2}^m U_k^q = \{e^q\} \cup U_2^q \cup \dots \cup U_m^q. \text{ В процессе своей работы}$$

этап q проверяет наличие m -вершинных клик в множестве U^q и в случае их существования выделяет их. Если хотя бы

одно из подмножеств U_k^q , $k = \overline{2, m}$, является пустым, то этап q завершает работу безрезультатно, установив, что множество U^q искомой клики не содержит. Например, в специальном графе на рис. 2 для вершины $e_3 = e_9$ подмножество U_2^3 является пустым, и поэтому этап $q = 3$ завершает работу безрезультатно. В противном случае в начале своей работы этап q объединяет эти подмножества вместе с e^q и образует множество смежности этой вершины $U^q \subset U$.

Например, в специальном графе на рис. 2 для вершины $e^1 = e_1$ это множество имеет вид $U^1 = \{e^1\} \cup \bigcup_{k=2}^4 U_k^1$, где $U_2^1 = \{e_2\}$, $U_3^1 = \{e_3, e_7, e_{10}\}$, $U_4^1 = \{e_4\}$ и таким образом, множество смежности вершины $e^1 = e_1$ представляется как $U^1 = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \{e_3, e_7, e_{10}\} \cup \{e_4\}$. Индуцированный этим множеством в специальном графе S подграф обозначим через $S^q = (U^q, R^q) = (U_1^q, \dots, U_m^q, R^q)$. Отметим, что в специальном графе на рис. 2 индуцированный множеством $U^1 = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \{e_3, e_7, e_{10}\} \cup \{e_4\}$ подграф S^1 представлен на рис. 3.

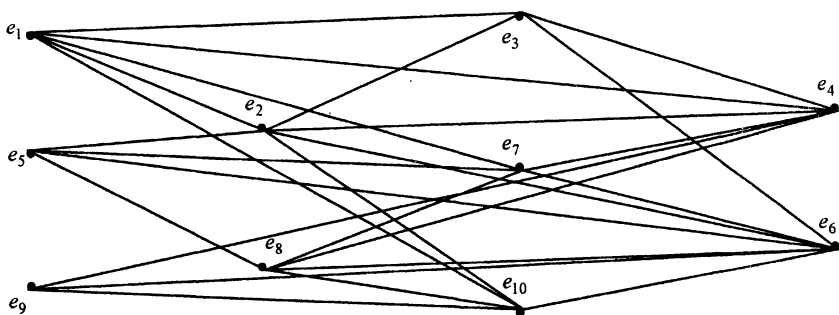


Рис. 3. Подграф S^1 специального графа S на рис. 2

Цель работы этапа q состоит в проверке ряда определенных ниже необходимых условий принадлежности рассматриваемой вершины какой-либо m -вершинной клики в подграфе S^q . Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то этап q завершает свою работу безрезультатно.

Работа этапа q реализуется на базе так называемой таблицы множеств смежности (кратко "таблицы МС") $T^q = \|T_{ik}^q\|$, в которой индекс $k = 1, 2, \dots, m$ представляет собой номера долей подграфа S^q , а индекс $i = 1, 2, \dots, N_q$ представляет собой новую порядковую нумерацию вершин этого подграфа. Более точно, множество U^q представляется в следующем виде: $U^q = \{e_1^q, e_2^q, \dots, e_i^q, \dots, e_{N_q}^q\}$, $N_q = |U^q|$ — мощность множества вершин подграфа S^q . Условимся, что элементы множества U^q нумеруются в порядке исчерпания долей U_k^q , $k = \overline{1, m}$, подграфа S^q .

В таблице T^q клетка T_{ik}^q представляет собой "множество смежности" (МС), более точно, это МС является подмножеством $T_{ik}^q \subseteq U_k^q$, состоящим из всех таких вершин доли U_k^q , каждая из которых смежна с вершиной e_i^q в подграфе S_q . Если вершина e_i^q является элементом доли U_k^q , то согласно этому определению получаем одноэлементное МС $T_{ik}^q = \{e_i^q\}$, считая, что всякая вершина всегда "смежна сама с собой". С учетом дольности подграфа S^q таблица T^q естественным образом разбивается на части T_k^q , $k = 1, 2, \dots, m$, где часть T_k^q состоит из всех таких строк, которые соответствуют вершинам одной и той же доли U_k^q m -дольного подграфа S^q . Число строк N_k^q , составляющих часть T_k^q , равно числу вершин в доле U_k^q : $N_k^q = |U_k^q|$.

В качестве иллюстративного примера построим таблицу МС для подграфа $S^1 = (U^1, R^1)$ на рис. 3, у которого значение индекса $q = 1$ и вершина $e^q = e^1 = e_1$. Элементы множества вершин этого подграфа в новой перенумерации индексом $i = 1, 2, \dots, 6$ получают следующие обозначения: $e_1 = e_1^1$, $e_2 = e_2^1$, $e_3 = e_3^1$, $e_7 = e_4^1$, $e_{10} = e_5^1$, $e_4 = e_6^1$. Т. к. число долей в S^1 равно 4, то таблица МС $T^1 = \|T_{ik}^1\|$ для подграфа S^1 получает размерность $N_1 \times m = 6 \times 4$ (см. таб. 1).

Таблица 1

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$e_1^1 = e_1$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3, e_7, e_{10}\}$	$\{e_4\}$
$e_2^1 = e_2$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3, e_{10}\}$	$\{e_4\}$
$e_3^1 = e_3$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$
$e_4^1 = e_7$	$\{e_1\}$	$\emptyset$	$\{e_7\}$	$\{e_4\}$
$e_5^1 = e_{10}$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_{10}\}$	$\emptyset$
$e_6^1 = e_4$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3, e_7\}$	$\{e_4\}$

С учетом определения понятия " m -вершинная клика" рассуждением от противного легко доказываются следующие ниже леммы о необходимых условиях принадлежности рассматриваемой вершины какой-либо m -вершинной клике в подграфе S^q .

Лемма 1 (Условие 1). Если вершина e_i^q принадлежит какой-либо m -вершинной клике, то в i -ой строке таблицы МС T^q каждая клетка T_{ik} не является пустым множеством: $T_{ik} \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Для рассматриваемого иллюстративного примера таб. 1 в строках $i = 4$ и $i = 5$ содержатся клетки с пустыми множествами. Эти строки соответствуют вершинам e_7 и e_{10} . Т. о. эти вершины можно исключить из рассмотрения и соответствующие им строки в таблице МС вычеркнуть.

Рассмотрим в данной таблице МС размерности $N \times m$ пару строк i, j , соответствующих вершинам e_i, e_j . Условимся, что термин "пересечение МС строк i, j " означает новую строку, состоящую из m множеств $(T_{ik} \cap T_{jk})$, для каждого $k = 1, 2, \dots, m$. Это пересечение называется непустым, если каждое из составляющих его множеств является непустым, т. е. $T_{ik} \cap T_{jk} \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, m$. С учетом этих терминов, а также разбиения таблицы T^q на части T_k^q , $k = \overline{1, m}$, сформулируем следующее необходимое условие.

Лемма 2 (Условие 2). Если вершина e_i^q принадлежит какой-либо m -вершинной клике, то i -я строка таблицы T^q имеет непустое пересечение хотя бы с одной строкой из каждой части T_k^q , $k = \overline{1, m}$, этой таблицы.

Для иллюстрации необходимого условия 2, представленного леммой 2, рассмотрим 5-дольный подграф S' на рис. 4. Соответствующая ему таблица МС представлена в виде таб. 2, в которой каждая клетка T'_{ik} не является пустым множеством, т.е. имеет место выполнение необходимого условия 1, представленного леммой 1, для каждой вершины данного подграфа S' . С учетом представленного разбиения таб. 2 на части T'_k , $k = \overline{1, 5}$, рассмотрим пересечения МС строки 8 и строк 2 и 3, составляющих часть T'_2 . Для этих пересечений имеем следующее невыполнение необходимого условия 2: $T'_{84} \cap T'_{24} = \{e'_5\} \cap \{e'_6\} = \emptyset$ и $T'_{82} \cap T'_{32} = \{e'_2\} \cap \{e'_3\} = \emptyset$. Следовательно, вершина e'_8 не принадлежит никакой 5-вершинной клике в данном 5-дольном подграфе S' . Аналогично необходимое условие 2 не выполняется для строки 7 в таб.2. Поскольку рассмотренная пара вершин составляет всю 5-ю долю данного подграфа S' , то справедливо утверждение о том, что подграф S' на рис. 4 не содержит m -вершинных клик, откуда следует, что соответствующий ему исходный гиперграф не содержит совершенного сочетания, включающего ребро e'_1 .

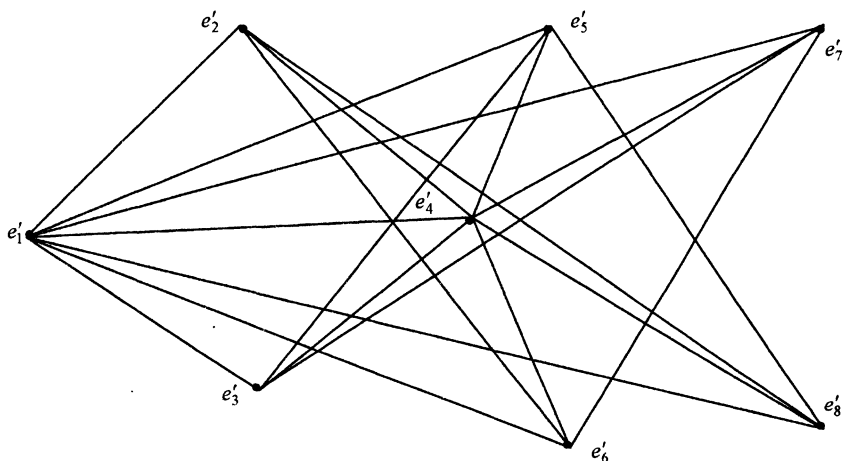


Рис. 4. Подграф S'

Таблица 2

T'_k		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
T'_1	e'_1	$\{e'_1\}$	$\{e'_2, e'_3\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_5, e'_6\}$	$\{e'_7, e'_8\}$
T'_2	e'_2	$\{e'_1\}$	$\{e'_2\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_6\}$	$\{e'_8\}$
	e'_3	$\{e'_1\}$	$\{e'_3\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_5\}$	$\{e'_7\}$
T'_3	e'_4	$\{e'_1\}$	$\{e'_2, e'_3\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_5, e'_6\}$	$\{e'_7, e'_8\}$
T'_4	e'_5	$\{e'_1\}$	$\{e'_3\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_5\}$	$\{e'_8\}$
	e'_6	$\{e'_1\}$	$\{e'_2\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_6\}$	$\{e'_7\}$
T'_5	e'_7	$\{e'_1\}$	$\{e'_3\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_6\}$	$\{e'_7\}$
	e'_8	$\{e'_1\}$	$\{e'_2\}$	$\{e'_4\}$	$\{e'_5\}$	$\{e'_8\}$

Приведем описание работы этапа q алгоритма α_1 . Этап q состоит из подэтапов, перенумерованных индексом $t = 1, 2, \dots, N^q - N_m^q - 1$. На вход подэтапа $t = 1$ подаются подграф $S^q = (U^q, R^q) = (U_1^q, U_2^q, \dots, U_k^q, \dots, U_m^q, R^q)$ и соответствующая ему таблица МС $T^q = \|T_{ik}^q\|$, $i = 1, 2, \dots, N^q$, $k = 1, 2, \dots, m$. Вершины множества $U^q = \{e_1^q, e_2^q, \dots, e_i^q, \dots, e_{N^q}^q\}$ перенумерованы индексом i так, что существует взаимно однозначное соответствие между номерами вершин из U^q и номерами строк таблицы МС T^q . При этом для каждого k существует также взаимно однозначное соответствие между номерами вершин в доле U_k^q и номерами строк части T_k^q в таблице T^q .

На подэтапе $t = 1$ в таблице T^q выделяется строка $i = 2$, которая по определению принадлежит части T_2^q таблицы T^q . Для выделенной строки осуществляется проверка выполнения необходимого условия 2 по отношению к каждой из последующих частей T_k^q , $k = 3, 4, \dots, m$. Если это условие для строки $i = 2$ не выполняется по отношению к некоторой из частей T_k^q , то работа подэтапа $t = 1$ завершается вычеркиванием из таблицы T^q этой строки, а также удалением всех вхождений вершины e_2^q в клетки T_{i2}^q , $i \neq 2$. Наряду с этим в подграфе S^q указанная вершина e_2^q также удаляется вместе

с инцидентными ей ребрами. Оставшиеся части таблицы T^q и подграфа S^q обозначаем соответственно через $T_1^q = \|T_{ik,1}^q\|$, $1 \leq i \leq N_q$, $i \neq 2$, $k = \overline{1, m}$ и $S_1^q = (U_{1,1}^q, \dots, U_{k,1}^q, \dots, U_{m,1}^q, R_1^q)$, причем номера строк в таблице T_1^q остаются без изменения. Если же подэтап $t = 1$ устанавливает выполнение необходимого условия 2, то таблица T^q и подграф S^q остаются без изменения, но при этом получают соответственно новые обозначения T_1^q и S_1^q .

Пусть осуществлено t подэтапов, по завершению которых получены таблица $T_1^q = \|T_{ik,1}^q\|$, $1 \leq i \leq N_q$, $i \neq t$, $k = \overline{1, m}$, состоящая из частей T_t^q , $k = \overline{1, m}$, и подграф $S_1^q = (U_{1,t}^q, \dots, U_{k,t}^q, \dots, U_{m,t}^q, R_t^q)$; в таблице T_t^q сохранена нумерация строк таблицы T^q . Для таблицы T_t^q осуществляется проверка, является ли непустой каждая из ее m частей. Если окажется, что в некоторой части $T_k^{q,t}$ по завершению подэтапа t все ее строки являются вычеркнутыми, то на этом подэтапе заканчивается вся работа этапа q , т. е. его работа оказывается безрезультатной, и далее следует переход к этапу $q + 1$.

Если работа подэтапа $t \geq 1$ оказалась результативной, тогда следует переход к подэтапу $t + 1$, работа которого начинается с выделения в таблице T_t^q строки $i = t + 2$, которой соответствует вершина e_{t+2}^q в подграфе S_t^q . Пусть эта строка принадлежит некоторой части $T_k^{q,t}$, $k \leq m - 1$. Тогда для выделенной строки i осуществляется проверка выполнения необходимого условия 2 по отношению к каждой из остальных частей $T_r^{q,t}$, $r \neq k$, таблицы T_t^q . Если это условие для строки $i = t + 2$ не выполняется по отношению к некоторой из этих частей, то работа подэтапа $t + 1$ завершается вычеркиванием из таблицы T_t^q этой строки, а также удалением всех входящих вершины e_{t+2}^q в клетки $T_r^{q,t}$, $r \neq k$, $1 \leq r \leq m$. Наряду

с этим в подграфе S_t^q указанная вершина e_{t+2}^q также удаляется вместе с инцидентными ей ребрами. Оставшиеся после этого вычеркивания части таблицы T_t^q и подграфа S_t^q обозначаем соответственно через $T_{t+1}^q = \|T_{ik,t+1}^q\|$, $1 \leq i \leq N^q$, $k = \overline{1, m}$ и $S_{t+1}^q = (U_{1,t+1}^q, \dots, U_{k,t+1}^q, \dots, U_{m,t+1}^q, R_{t+1}^q)$. При этом таблица T_{t+1}^q наследует нумерацию строк таблицы T_t^q .

Работа алгоритма α_1 считается результативной, если по завершению подэтапа $t = N^q - N_m^q - 1$ получены такой подграф S_t^q , в котором каждая из m долей $U_{k,t}^q$ не является пустой, и такая таблица МС T_t^q , в которой каждая ее часть $T_k^{q,t}$, $k = \overline{1, m}$ содержит хотя бы одну невычеркнутую строку. При этом каждая клетка $T_{ik,t}^q$ этой таблицы не является пустым множеством. Удовлетворяющие этим условиям подграф $\bar{S}^q = S_t^q$ и таблицу МС $\bar{T}^q = T_t^q$ будем называть терминами "тупиковый подграф" и "тупиковая таблица МС". На рис. 5 представлен тупиковый подграф $\bar{S}^1 = (\bar{U}_1^1, \bar{U}_2^1, \bar{U}_3^1, \bar{U}_4^1, \bar{R}^1)$ специального графа $S(G)$ на рис 2. Соответствующая ему тупиковая таблица МС $\bar{T}^q$ представлена таблицей 3.

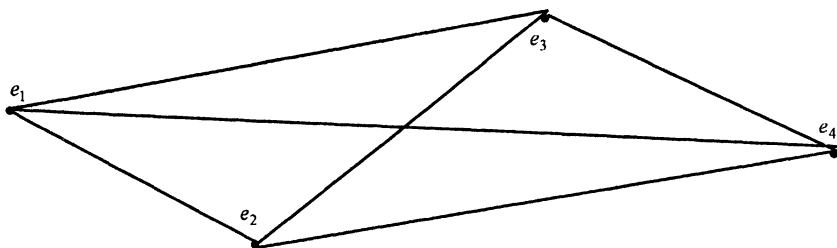


Рис. 5. Тупиковый подграф $\bar{S}^1 : \bar{S}^1 = (\bar{U}_1^1, \bar{U}_2^1, \bar{U}_3^1, \bar{U}_4^1, \bar{R}^1)$

Таблица 3

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$e_1^1 = e_1$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$
$e_2^1 = e_2$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$
$e_3^1 = e_3$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$
$e_4^1 = e_4$	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_3\}$	$\{e_4\}$

Примечание 1. Нетрудно видеть, что трудоемкость алгоритма α_1 ограничена сверху полиномом от размерности подграфа S^q . Поэтому представляют интерес такие свойства тупиковой таблицы $\bar{T}^q$ и тупикового подграфа $\bar{S}^q$, которые определяют собой достаточное условие существования в подграфе S^q m -вершинной клики.

Справедлива

Теорема 1. Если тупиковая таблица $\bar{T}^q$ является квадратной, то тупиковый подграф $\bar{S}^q$ представляет собой m -вершинную клику в подграфе S^q .

Доказательство. По определению таблица $\bar{T}^q$ имеет m столбцов. Следовательно, если согласно условию теоремы она является квадратной, то она состоит из m строк. При этом, по определению, таблица $\bar{T}^q$ состоит из m частей $\bar{T}_k^q$, $k = \overline{1, m}$, значит, каждая часть $\bar{T}_k^q$ состоит из единственной строки. Это означает, что в тупиковом подграфе $\bar{S}^q$ каждая доля $\bar{U}_k^q$ состоит из единственной вершины. Последнее означает, что для каждого столбца $k = 1, 2, \dots, m$ каждая его клетка $\bar{T}_{ik}^q$, $1 \leq i \leq N_q$ содержит один и тот же элемент, а именно единственную вершину, составляющую долю $\bar{U}_k^q$. Эта вершина в силу непустоты клеток в каждой из строк таблицы МС смежна со всеми остальными вершинами, образующими соответствующие доли тупикового подграфа $\bar{S}^q$. Отсюда, удовлетворяющий этому условию подграф является полным m -вершинным графом, т.е. множество его вершин образует клику размерности m .

Теорема 1 доказана.

Из описания работы алгоритма α_1 и необходимых условий 1 и 2 вытекает

Следствие 1. Всякая вершина, принадлежащая некоторой m -вершинной клике, не будет удалена из множеств смежности U^q в процессе работы алгоритма α_1 , в силу чего соответствующая этой вершине строка в таблице МС сохранится до окончания работы алгоритма α_1 , и т. о. тупиковая таблица МС не будет являться пустой, т. е. $\bar{T}^q \neq \emptyset$.

С учетом этого является справедливой

Лемма 3. Если гиперграф G содержит совершенное сочетание, то на выходе алгоритма α_1 получаем непустой тупиковый подграф $\bar{S}$.

Доказательство. Если на подэтапе $(t + 1)$ алгоритма α_1 строка $i = t + 2$ вошла в состав тупиковой таблицы МС $\bar{T}$, то это означает, что в каждой из остальных частей $\bar{T}_k$ для нее существует хотя бы одна строка j , имеющая непустое пересечение МС со строкой i , т. е. $\bar{T}_{ik}^q \cap \bar{T}_{jk}^q \neq \emptyset$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда из этих строк, включая строку i , составим квадратную $m \times m$ -таблицу T^i , которая согласно теореме 1 определяет собой m -вершинную клику.

Лемма 3 доказана.

На основании предыдущих лемм 1–3 можно сформулировать

Примечание 2. Вхождение вершины в тупиковый подграф $\bar{S}^q$ является необходимым условием ее принадлежности хотя бы одной клике размерности m .

Также является справедливой

Лемма 4. Если для гиперграфа G на выходе алгоритма α_1 получаем тупиковый подграф $\bar{S} = \emptyset$, то G не содержит совершенного сочетания.

Доказательство. На подэтапе $(t + 1)$ алгоритма α_1 вершина удаляется из специального подграфа S_t^q по той причине, что она не смежна ни с какой вершиной хотя бы одной доли в S_t^q , а, как известно, m -вершинная клика должна содержать взаимно смежные вершины-представительницы из

каждой доли специального графа S^q . Поэтому, если по завершению всех подэтапов алгоритма α_1 из подграфа S^q удалены все вершины, а из таблицы МС T^q удалены все соответствующие этим вершинам строки, и тупиковая таблица $\bar{T}^q$ оказалась пустой, то из этого следует, что в специальном подграфе S^q нет взаимно смежных вершин-представительниц из каждой доли, а специальный подграф S^q не содержит m -вершинной клики.

Лемма 4 доказана.

Оценим вычислительную сложность $\tau(\alpha_1)$ алгоритма α_1 . Трудоемкость алгоритма α_1 определяется трудоемкостью его работы с таблицами T^q , $q = 1, 2, \dots, L_1$, $L_1 = |U_1|$ — количество вершин первой доли специального графа S . Заметим, что в процессе построения специального графа S для каждой вершины e' формируются ее множества смежности и трудоемкость этого процесса для одной вершины e' не превосходит числа $|U|$ вершин в специальном графе S . В процессе построения таблицы T^q каждое ребро подграфа S^q просматривается по два раза, причем число элементов в какой-либо строке таблицы T^q не превосходит $|U^q|$. Поэтому вычислительная сложность процесса формирования таблицы T^q ограничена сверху величиной $O(|U^q|^2)$. В процессе построения тупиково-

го подграфа $\bar{S}^q$ для каждой строки таблицы осуществляется не более $|U^q|^2$ операций поэлементарного сравнения и вычеркивания в таблице T^q некоторых строк. Причем, при вычеркивании отдельных строк и вычеркивании соответствующих вершин каждая вершина множеств смежности в таблице T^q просматривается конечное число раз. Таким образом, для вычислительной сложности получения тупикового подграфа и тупиковой таблицы справедлива верхняя оценка

$\tau(\alpha_1^q) \leq O(|U^q|^3)$, а верхняя оценка трудоемкости алгоритма α_1 с учетом $|U| = |E|$ составляет

$$\tau(\alpha_1) \leq O(|E|^3). \quad (1)$$

4. Алгоритм выделения совершенных сочетаний в многодольном гиперграфе

Если в результате работы алгоритма α_1 получен непустой тупиковый подграф $\bar{S}(G)$, то для выделения совершенных сочетаний в многодольном гиперграфе используется представленный далее алгоритм α_2 . На вход алгоритма α_2 подается m -дольный тупиковый подграф $\bar{S}(G)$, из которого в ходе работы алгоритма α_2 выделяются m -вершинные клики, каждая из которых однозначно определяет собой некоторое совершенное сочетание в ℓ -дольном ℓ -однородном гиперграфе. На выходе алгоритма α_2 формируется множество клик размерности m , которое определяет собой МДР $X = X(G)$ задачи о совершенных сочетаниях на гиперграфе.

Работа алгоритма α_2 состоит из q этапов, $q = \overline{1, L_1}$. На вход этапа q представляется m -дольный тупиковый подграф $\bar{S}^q = (\bar{U}_1^q, \bar{U}_2^q, \dots, \bar{U}_m^q, \bar{R}^q)$. Работа этапа q состоит из $(m - 2)$ подэтапов. На первом подэтапе в долях $\bar{U}_m^q, \bar{U}_{m-1}^q, \bar{U}_{m-2}^q$ формируется множество $K_3^q = \{\mathfrak{a}^3\}$ всех клик размерности 3 следующим образом. Для каждого ребра $\rho = (e', e'')$, $e' \in \bar{U}_m^q$, $e'' \in \bar{U}_{m-1}^q$ в доле $\bar{U}_{m-2}^q$ отыскиваются вершины e''' , которые смежны с e' и e'' . Всякая такая тройка вершин e', e'', e''' образует некоторую клику $\mathfrak{a}^3$ размерности 3, т. е. тупиковый подграф $\bar{S}^q$ содержит такую клику $\mathfrak{a}^3$ в том случае, когда множество $\bar{R}^q$ содержит тройку ребер $\rho = (e', e'')$, $\rho' = (e', e''')$, $\rho'' = (e'', e''')$.

На рис. 6 изображен 5-дольный тупиковый подграф $\bar{S}^1$. Для него соответствующая тупиковая таблица $\bar{T}^1$ представлена таблицей 4.

В долях $\bar{U}_5^1, \bar{U}_4^1, \bar{U}_3^1$ формируется множество клик размерности 3:

$$K_3^1 = \{\mathfrak{a}_j^3\}, j = \overline{1, 4}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{a}_1^3 = \{e_8, e_6, e_4\},$$

$$\mathfrak{a}_2^3 = \{e_8, e_6, e_5\}, \mathfrak{a}_3^3 = \{e_9, e_7, e_4\}, \mathfrak{a}_4^3 = \{e_9, e_7, e_5\}.$$

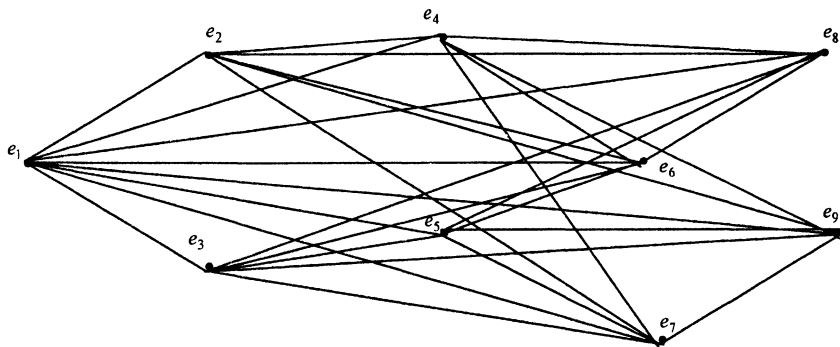


Рис. 6. 5-дольный тупиковый подграф $\bar{S}^1$

Таблица 4

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
e_1	$\{e_1\}$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_4, e_5\}$	$\{e_6, e_7\}$	$\{e_8, e_9\}$
e_2	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_4\}$	$\{e_6, e_7\}$	$\{e_8, e_9\}$
e_3	$\{e_1\}$	$\{e_3\}$	$\{e_5\}$	$\{e_6, e_7\}$	$\{e_8, e_9\}$
e_4	$\{e_1\}$	$\{e_2\}$	$\{e_4\}$	$\{e_6, e_7\}$	$\{e_8, e_9\}$
e_5	$\{e_1\}$	$\{e_3\}$	$\{e_5\}$	$\{e_6, e_7\}$	$\{e_8, e_9\}$
e_6	$\{e_1\}$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_4, e_5\}$	$\{e_6\}$	$\{e_8\}$
e_7	$\{e_1\}$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_4, e_5\}$	$\{e_7\}$	$\{e_9\}$
e_8	$\{e_1\}$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_4, e_5\}$	$\{e_6\}$	$\{e_8\}$
e_9	$\{e_1\}$	$\{e_2, e_3\}$	$\{e_4, e_5\}$	$\{e_7\}$	$\{e_9\}$

Пусть осуществлено s подэтапов, $1 \leq s \leq m-3$, в результате чего сформировано множество $K_{s+2}^q = \{\mathfrak{a}^{s+2}\}$ клик размерности $s+2$. Если это множество является пустым ($K_{s+2}^q = \emptyset$), то подэтап s , а вместе с ним и этап q в целом заканчивают свою работу безрезультатно. В противном случае следует переход к подэтапу $s+1$ следующим образом. Из множества K_{s+2}^q последовательно выбираются клики $\mathfrak{a}^{s+2} = \{e_1^q, \dots, e_r^q, \dots, e_{s+2}^q\}$, в каждой из которых имеется по одному представителю от каждой из последних $(s+2)$ долей, т. е. $e_r^q \in \bar{U}_{m-r+1}^q$, $r = \overline{1, s+2}$.

Затем в доле $\bar{U}_{m-s-2}^q$ выделяются такие вершины e^* , каждая из которых смежна с каждой вершиной этой клики, т. е. в $\bar{R}^q$ находим $(s+2)$ ребер вида $\rho' = (e^*, e_r^q)$, $e_r^q \in \mathfrak{a}^{s+2}$, $r = \overline{1, s+2}$. Тогда, пополняя рассматриваемую клику $\mathfrak{a}^{s+2}$ вершиной e^* , получаем клику $\mathfrak{a}^{s+3} = \{e^*, e_1^q, e_2^q, \dots, e_{s+2}^q\}$ размерности $(s+3)$, их совокупность обозначим через $K_{s+3}^q = \{\mathfrak{a}^{s+3}\}$, что и представляет собой результат работы подэтапа $s+1$. Например, для подграфа на рис. 6 на подэтапе $s=2$ клики $\mathfrak{a}_3^1$ и $\mathfrak{a}_3^3$ пополняются вершиной $e^* = e_2$, а клики $\mathfrak{a}_2^3$ и $\mathfrak{a}_4^3$ пополняются вершиной e_3 , в результате чего получаем множество клик $K_4^q = \{\mathfrak{a}_j^4\}$, $j = \overline{1, 4}$, где $\mathfrak{a}_1^4 = \{e_8, e_6, e_4, e_2\}$, $\mathfrak{a}_2^4 = \{e_9, e_7, e_4, e_2\}$, $\mathfrak{a}_3^4 = \{e_8, e_6, e_5, e_3\}$, $\mathfrak{a}_4^4 = \{e_9, e_7, e_5, e_3\}$. На заключительном этапе $s=3$ каждая из этих клик пополняется одной и той же вершиной $e^q = e_1$, образуя множество клик размерности $m=5$. Последнее определяет собой множество совершенных сочетаний в исходном гиперграфе.

Если каждый из $(m-2)$ подэтапов алгоритма α_2 является результативным, то по завершению этапа q в целом получаем множество K_m^q клик размерности m , каждая из которых однозначно определяет собой некоторое допустимое решение исходной задачи о нахождении множества $X = X(G)$ всех совершенных сочетаний на ℓ -должном ℓ -однородном гиперграфе.

По завершению последнего, т. е. L_1 -го этапа формируется теоретико-множественное объединение $\bigcup_{q=1}^{L_1} K_m^q$, которое определяет собой МДР $X = X(G)$ задачи.

Оценивая вычислительную сложность алгоритма α_2 , заметим, что все клики $\mathfrak{a}^{s+2} \in K_{s+2}^q$, $s = 1, 2, \dots, m-2$ формируются последовательно и неповторно, при этом ребро $\rho \in R$ просматривается не большее число раз, чем количество этих клик. Последнее ограничено числом всех совершенных ℓ -сочетаний в полном ℓ -должном ℓ -однородном n -вершинном

гиперграфе, которое равно $(m!)^{\ell-1}$, где $m = \frac{n}{\ell}$. Отсюда получаем

$$\tau(\alpha_2) \leq O(|R| \cdot (m!)^{\ell-1}), \quad m = \frac{n}{\ell}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) с учетом неравенства $\tau(\alpha_1) \leq \tau(\alpha_2)$ получаем оценку вычислительной сложности алгоритма α выделения совершенных сочетаний в многодольном гиперграфе:

$$\tau(\alpha) \leq O(|R| \cdot (m!)^{\ell-1}), \quad m = \frac{n}{\ell}.$$

Литература

1. Зыков А. А. Гиперграфы // Успехи матем. наук. — Т. 29, вып. 6. — 1974. — С. 89–154.
2. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1999. — 384 с.
3. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 512 с.

КЛЕТОЧНО-ГРАФОВЫЙ АВТОМАТ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

При моделировании и прогнозировании эволюционирующих процессов и систем статистические данные представляются временными рядами (ВР) числовых значений основного показателя (ВР урожайности с/х культур [1], ВР объемов жилищного строительства [2], ВР заболеваний гриппом и ОРЗ [3] и т. д.). В контексте моделирования этих процессов наиболее актуальной задачей является проблема прогнозирования дальнейшего поведения рассматриваемых ВР.

В контексте построения математической модели для прогнозирования вышеуказанного ВР принципиально важным является положительный ответ на вопрос: обладают ли рассматриваемые ВР долговременной памятью [5]. Например, общепризнанным является тот факт, что такой памятью обладают природные ВР [5, 6]. Наличие или отсутствие долговременной памяти в рассматриваемом ВР может быть установлено с помощью алгоритма R/S-анализа [5, 2].

Если данный числовой ВР $Y = y_1, \dots, y_i, \dots, y_n$ обладает долговременной памятью, то преобразуем его в лингвистический временной ряд (ЛВР)

$$u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

путем замены числовых элементов ВР Y лингвистическими переменными из подходящего терм-множества $U = \{u\}$ [7]. Например, для ВР урожайности конкретной сельскохозяйственной культуры терм-множество может состоять из трех элементов: $U = \{H, C, B\}$, где H — низкая, C — средняя, B — высокая урожайности. Описание алгоритма преобразования ВР Y в ЛВР (1) можно найти в [1].

Пусть L — глубина долговременной памяти [5] в данном ВР Y . В [8] сформулировано предложение представлять наличие этой памяти в соответствующем ЛВР в терминах и понятиях клеточного автомата, в частности, линейного клеточного автомата [1]. В этих терминах значение лингвисти-

ческой переменной u_{i+L} в ЛВР (1) определяется, т. е. прогнозируется на базе ℓ -конфигураций

$$u_{i+L-\ell}, u_{i+L-\ell+1}, \dots, u_{i+L}, \ell = \overline{1, L}, \quad (2)$$

т. е. конфигурациями длины ℓ в отрезке этого ряда $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+L}$, $i = \overline{1, n-L+1}$, где через L обозначаем глубину памяти рассматриваемого ряда. Для принятого терм-множества $U = \{H, C, B\}$ теоретически возможное количество различных ℓ -конфигураций, $\ell = 1, 2, \dots, L$, составляет $\sum_{\ell=1}^L 3^\ell = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^L$. Выделим в ЛВР (1) какую-либо фиксированную ℓ -конфигурацию, для которой в дальнейшем используем следующее обозначение:

$$u_1^0 u_2^0 \dots u_j^0 \dots u_\ell^0. \quad (3)$$

Если в ЛВР (1) выделен отрезок $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+j}, \dots, u_{i+\ell}$, совпадающей с (3), т. е. $u_{i+j} = u_j^0$, $j = \overline{1, \ell}$, то по отношению к следующему элементу $u_{i+\ell+1} = u^0 \in U = \{H, C, B\}$ условимся говорить, что ℓ -конфигурация (3) переходит в состояние u^0 , т. е. в лингвистическую переменную $u_{i+\ell+1}$, совпадающую с термом u^0 .

В предлагаемом авторами подходе базовым является следующее теоретическое предположение. Пусть последовательность (1) неограниченно растет, т. е. в ряду u_i , $i = \overline{1, n}$, значение параметра $n \rightarrow \infty$. Если в этой сколь угодно длинной последовательности некоторая конкретная фиксированная конфигурация (3) появляется и при этом всякий раз после нее следует переход в одно и то же состояние $u^0 \in \{H, C, B\}$, то говорим, что конфигурация (3) обладает памятью. Частотная статистика переходов ℓ -конфигурации (3) в определенное состояние $u^0 \in \{H, C, B\}$ формируется следующим образом. Сначала, для каждого значения $\ell \in \{1, 2, 3, \dots, L\}$ рассматриваем множество M_ℓ всех ℓ -конфигураций, встречающихся в ЛВР (1), мощность $|M_\ell| = N_\ell$. Далее, для каждой фиксированной ℓ -конфигурации (3) из M_ℓ подсчитываем число $m_\ell(u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0)$ всех

ее вхождений в ЛВР (1) и число $N_\ell(u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0 \rightarrow u^0)$ всех ее переходов в состояние $u^0 \in \{H, C, B\}$. Наконец, вычисляем эмпирические значения частоты переходов из каждой конкретной ℓ -конфигурации $u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0 \in M_\ell$ в каждое из состояний H, C и B :

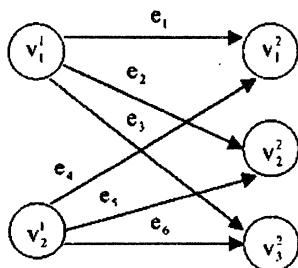
$$w_\ell(u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0 \rightarrow u^0) = \frac{N_\ell(u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0 \rightarrow u^0)}{m(u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0)}, \quad u^0 \in \{H, C, B\}. \quad (4)$$

Прогнозную модель представляем в виде клеточного автомата, память которого состоит из двудольных ориентированных графов переходов (ОГП) $G^\ell = (V_1^\ell, V_2^\ell, E^\ell)$, $\ell = 1, 2, \dots, L$, которые строятся следующим образом. Для фиксированного $\ell \in \{1, 2, \dots, L\}$ элементы множества M_ℓ всех ℓ -конфигураций в ЛВР (1) нумеруем индексом $r = 1, 2, \dots, N_\ell$, $N_\ell = |M_\ell|$, а элементы терм-множества $U = \{u\}$ нумеруем индексом $s = 1, 2, \dots, N_0$, $N_0 = |U|$. Устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между элементами множества M_ℓ и элементами первой доли $V_1^\ell = \{v_r^\ell\}$, нумеруя эти вершины индексом $r = 1, 2, \dots, N_\ell$. Устанавливаем взаимнооднозначное соответствие между элементами терм-множества U и вершинами второй доли $V_2^\ell = \{v_s^\ell\}$, нумеруя эти вершины индексом $s = 1, 2, \dots, N_0$. Множество дуг $E^\ell = \{e\}$ обеспечивает полноту двудольного графа G^ℓ , т. е. для каждой пары (i, j) , $j \in \{1, 2, \dots, N_0\}$, дуга $e = (i, j)$ содержится во множестве E^ℓ . Например, если для $\ell = 2$ множество M_2 всех 2-конфигураций состоит из двух элементов, например $M_2 = \{BC, CH, HC\}$, а терм-множество $U = \{H, C, B\}$, то соответствующий ОГП $G^2 = (V_1^2, V_2^2, E^2)$ представлен на рис. 1, где $V_1^2 = (v_1^1, v_2^1)$, $V_2^2 = (v_1^2, v_2^2, v_3^2)$.

Дуги графа G^ℓ снабжены весами, которые вычисляются с помощью формулы (4) следующим образом. Пусть в (4) ℓ -конфигурации $u_1^0 u_2^0 \dots u_\ell^0$ присвоен номер $r = r^0$, а элементу u^0 терм-множества U — номер $s = s^0$, тогда в ОГП G^ℓ дуге $e_0 = (r_0, s_0)$ присваивается вес

$$w(\ell^0) = w_\ell(u_1^0, u_2^0, \dots, u_\ell^0 \rightarrow u^0), \quad (6)$$

вычисленный согласно (4).



$$E^2 = \{e_1, e_2, \dots, e_6\}, e_1 = (1, 1), e_2 = (1, 2), \\ e_3 = (1, 3), e_4 = (2, 1), e_5 = (2, 2), e_6 = (2, 3)$$

Рис. 1. ОГП $G^2 = (V_1^2, V_2^2, E^2)$

Таким образом, предлагаемая математическая модель в виде клеточного автомата реализуется множеством взвешенных ОГП G^ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, L$. В процессе работы этого автомата в каждом из ОГП G^ℓ рассматриваются подорграфы, каждый из которых индуцирован некоторой одной вершиной $v_r \in V_1^\ell$ и множеством всех вершин второй доли V_2^ℓ . По определению этот подорграф представляет собой звезду с центром в вершине v_r , состоящую из N_0 дуг вида $e = (r, s)$, $s = 1, 2, \dots, N_0$. Определенную таким образом звезду с центром в вершине v_r условимся обозначать символом Z_r^ℓ . Вес этой звезды

$$W(Z_r^\ell) = \sum_{e \in Z_r^\ell} w(e). \quad (7)$$

Рассмотрим ЛВР (1), для которого требуется определить прогнозное лингвистическое значение элемента (терма) u_{n+1} . Алгоритм нахождения u_{n+1} реализуется следующим образом. В заключительном L -элементном отрезке ЛВР (1) рассматриваем следующие ℓ -конфигурации:

$$u_{n-\ell+1}, u_{n-\ell+2}, \dots, u_n, \quad \ell = 1, 2, \dots, L. \quad (8)$$

Во всякой ℓ -конфигурации (8) для фиксированного ℓ в ОГП G^ℓ выделяется звезда $Z_{r_\ell}^\ell$, где r_ℓ — значение индекса r , которым занумерована эта фиксированная ℓ -конфигурация.

Таким образом, множество ℓ -конфигураций (8) однозначно определяет последовательность звезд

$$Z_{r_\ell}^\ell, \ell = 1, 2, \dots, L, \quad (9)$$

выделенных в соответствующих ОГП G^ℓ , $\ell = \overline{1, L}$. Рассматривая последовательность (9), обнаруживаем в ней такое наименьшее значение $\ell = L^0$, для которого звезда $Z_{r_{L^0}}^{L^0}$ имеет лишь одну дугу $e^0 = (r_{L^0}, s^0) \in E^{L^0}$ ненулевого веса $w(e^0) \neq 0$ (остальные $N_0 - 1$ дуг этой звезды имеют нулевой вес). Для фиксированного ℓ звезда $Z_{r_\ell}^\ell$ последовательности (9) состоит из дуг вида $e = (r_\ell, s)$, $s = 1, 2, \dots, N_0$, для весов которых условно использовать обозначение $w(e) = w(r_\ell, s)$.

Далее для каждого индекса $s \in \{1, 2, \dots, N_0\}$ по формуле

$$W_s = \sum_{\ell=1}^{L^0} w(r_\ell, s), \quad s = 1, 2, \dots, N_0, \quad (10)$$

вычисляем суммарный вес дуг, которые в звездах последовательности (9) соединяют центры этих звезд с вершинами, имеющими номер s во вторых долях V_2^ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, L^0$. Численные значения сумм ряда (10) нормируем следующим образом:

$$\mu_s = \frac{W_s}{\sigma(n)}, \quad \sigma(n) = \sum_{s=1}^{N_0} W_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_0. \quad (11)$$

Для каждого фиксированного $s \in \{1, 2, \dots, N_0\}$ вершинам $v_s \in V_2^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, L^0$, ставим во взаимнооднозначное соответствие элемент u_s из терм-множества U .

Результат прогнозирования представляем в виде нечеткого множества (НМ)

$$\bar{u}_{n+1} = \{(u_s, \mu_s)\}, \quad s = \overline{1, N_0}, \quad (12)$$

где значения функции принадлежности μ_s вычислены согласно (11).

Верификация и валидация [4] этой прогнозной модели авторами реализована для конкретных ВР и ЛВР следующим образом. Для каждого фиксированного индекса $m \leq n - 1$ осуществлялось прогнозирование элемента u_{m+1} путем построения НМ $\bar{U}_{m+1} = \{(u_s, \mu_s)\}$, $m = L + 1, L + 2, \dots, n$.

Предложение 1. Пусть в полученном НМ $\bar{U}_{m+1}$ среди чисел μ_s максимальным является то число μ_Δ , $\Delta \in \{1, 2, \dots, N_0\}$, у которого индекс Δ совпадает с элементом u_{m+1} ряда (1). Тогда говорим, что для рассматриваемого индекса m прогнозная нечеткая модель привела к непротиворечивому прогнозу. В противном случае говорим о противоречивом прогнозе для элемента u_{m+1} .

В заключение отметим, что в процессе исследования ЛВР, соответствующих временным рядам урожайности зерновых по Волгоградской области и Ставропольскому краю, авторами получен непротиворечивый прогноз для каждого $m = n - r$, $r = 1, 2, \dots, n - L$, $L = 6$.

Литература

1. Перепелица В. А., Тебуева Ф. Б., Темирова Л. Г., Касаева М. Д. Прогнозная модель урожайности на базе клеточных автоматов и нечетких множеств // Труды III международной конференции "Новые технологии в управлении, бизнесе и праве". НФ ИУБиП г. Невинномысск, 30 мая 2003. — С. 163–167.
2. Перепелица В. А., Тебуева Ф. Б., Узденов Р. Х. Квазициклы временных рядов объемов жилищного строительства // Труды III международной конференции "Новые технологии в управлении, бизнесе и праве". НФ ИУБиП г. Невинномысск, 30 мая 2003. — С. 159–163.
3. Перепелица В. А., Попова Е. В. Математическое моделирование экономических и социально-экологических рисков. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 2001. — 128 с.
4. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Нестационарные структуры, динамический хаос, клеточные автоматы. В сб.: Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. — М.: Наука, 1996. — С. 95–164.
5. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. — М.: Мир, 2000. — 333 с.
6. Перепелица В. А., Попова Е. В. Фрактальный анализ поведения природных временных рядов // Современные аспекты экономики. — 2002. — № 9 (22). — С. 185–200.
7. Алтунин А. Е., Семухин М. В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. — Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2000. — 352 с.

8. *Касаева М. Д., Перепелица В. А.* Прогнозирование природных временных рядов на базе модели клеточного автомата // Современные аспекты экономики. — 2002. — № 9 (22). — С. 201–207.

9. *Лопатников Л. И.* Экономико-математический словарь. — М.: Наука, 1987. — 510 с.

ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОТ ОПТИМАЛЬНОГО В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (тезисы)

Рассматриваются оценки отклонения некоторых приближенных решений от оптимального решения в задачах дискретной оптимизации. Особое внимание уделяется отклонению от оптимума, следующего после оптимального решения задачи. Предложена общая схема получения таких оценок, которая конкретизирована для задач о целочисленном и булевом ранце с одним ограничением и задачи коммивояжера с симметричной матрицей расстояний. Основная особенность полученных результатов состоит в том, что указанные оценки зависят лишь от параметров исходной задачи и некоторых ее решений, для нахождения которых не требуется существенных затрат вычислительных ресурсов.

В работе приводятся результаты вычислительного эксперимента для задачи о булевом ранце с одним ограничением. Основные результаты содержатся в [1].

Литература

1. Сигал И. Х. Оценки отклонения приближенных решений от оптимального в некоторых задачах дискретной оптимизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. (в печати).

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Рассматривается задача дискретного программирования: найти $x^0 \in G$, $f(x^0) = \min f(x)$, $x \in G$, $|G| = N < \infty$. Под задачей большой размерности будем понимать следующую задачу. Пусть S — множество параметров конкретной задачи. Обозначим через $T(S)$ время решения этой задачи на конкретном компьютере с имеющимися операционными, программными, сервисными и другими средствами, $V(S)$ — память, необходимая для решения, T_0 и V_0 , соответственно, — время и память, выделенные для решения задачи. Рассматриваемая задача является *задачей большой размерности*, если не выполнено хотя бы одно из неравенств: $T(S) \leq T_0$, $V(S) \leq V_0$.

Предлагается модель вычислительного процесса для решения задачи большой размерности, с применением комбинаторных методов, которая позволяет выделить некоторые из параметров, характерных для такой задачи. Предполагается, что в процессе решения задачи каким-либо из комбинаторных алгоритмов вычисляется значение функции $f(x)$ для всех $x \in G_0 \subset G$, $|G_0| = N_0$, $|G| = N$, $0 < N_0 < N$. Все точки из множества $G \setminus G_0$ отбракованы по каким-либо правилам отсева. Обозначим через s_0 время, необходимое для вычисления одного значения $f(x)$, через s_1 среднее время реализации отсева одного варианта (точки) $x \in G \setminus G_0$; $T(G_0)$, $T(G \setminus G_0)$ и $T(G)$ — времена для вычисления всех значений $f(x)$, $x \in G_0$, для реализации отсева всех $x \in G \setminus G_0$ и полного перебора соответственно. Тогда $T(G_0) + T(G \setminus G_0) < T(G)$, откуда получаем:

$$s_0 N_0 + s_1 (N_1 - N_0) < s_0 N, \quad 0 < p = \frac{s_1}{s_0} < 1. \quad \text{Последнее условие является условием реализуемости комбинаторного алгоритма для решения задачи.}$$

Введем параметры $\alpha = \frac{T_0}{T(G)}$ и $s = \frac{N_0}{N}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < s < 1$.

Задача большой размерности характеризуется условием

$T(G_0) + T(G \setminus G_0) > T_0$, которое переписывается в виде $s_0 N_0 + s_1(N - N_0) > \alpha s_0 N$. Задача, не являющаяся таковой, характеризуется условием $s_0 N_0 + s_1(N - N_0) \leq \alpha s_0 N$. Из анализа этих условий при $s \leq 0,5$ получаем, что при $\alpha > 0,5$ задача

большой размерности характеризуется условием: $\frac{1}{2} < p < \alpha$, а

задача, не являющаяся таковой, характеризуется условием $0 < p < 2\alpha - 1$. Если $0 < s < \alpha \leq 0,5$, то задача большой размерности характеризуется условием $\alpha < p \leq 0,5$. При дополни-

тельном предположении $s \leq \frac{\alpha}{2}$ для задачи большой размер-

ности получается то же условие, а для задачи другого типа получаем условие $0 < p \leq \alpha/(2 - \alpha)$.

Для непосредственного применения этого подхода предположим, что при решении задачи применяется алгоритм ветвей и границ, в котором отсев реализуется с помощью оценок подмножеств. Если p_0 — отношение времени вычисления оценки к времени вычисления значения функции, то можно показать, что $p < \alpha p_0$. Для задачи большой размерности вы-

полнено $1 + \alpha < p_0 < \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha \leq \alpha_0$ и $1 < p_0 < \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > \alpha_0$,

здесь $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ — золотое сечение. Для задачи другого

типа получаем $0 < p_0 < \frac{1}{2 - \alpha}$ при $\alpha \leq 0,5$ и $0 < p_0 < \frac{2\alpha - 1}{\alpha}$ при $0,5 < \alpha < 1$.

Описанный здесь подход был применен для параметризации двух классических задач дискретного программирования: о ранце и о коммивояжере. Параметр p_0 определялся статистически. Результаты вычислительного эксперимента содержатся в [1].

Разработанный подход модифицирован для параметризации комбинаторного алгоритма нахождения ε -приближенного решения, т. е. решения x , удовлетворяющего условию $(f(x) - f(x^0)) / f(x^0) \leq \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, $f(x^0) \neq 0$. Для этого построена модель вычислительного процесса, введен, аналогично предыдущему, параметр p_0 и описаны области его изменения для

задач обоих типов в зависимости от α и ε . Получены зависимости точности решения задачи ε от ресурса α .

В дальнейшем предполагается развитие общего подхода для параметризации алгоритмов нахождения точного и ε -приближенного решений.

Доказательства всех изложенных выше результатов содержатся в [1, 2].

Литература

1. Сигал И. Х. Параметризация и исследование некоторых задач дискретного программирования большой размерности // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — N 2. — С. 60-69.

2. Сигал И. Х. Параметризация ε -приближенных алгоритмов решения некоторых классов задач дискретной оптимизации большой размерности // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — N 6. — С. 63-72.

Наукове видання

ПІВДЕННИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР НАН І МОН УКРАЇНИ

**ДОПОВІДІ ОДЕСЬКОГО СЕМІНАРУ
З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ**

1

Серпень 2004

Технічний редактор Г. О. Куклева

Здано у виробництво 28.07.2004. Підписано до друку 18.08.2004.
Формат 60×84/16. Папір офсетний. Гарнітура SchoolBook.
Ум. друк. арк. 3,26. Тираж 300 прим. Зам. № 601.

Видавництво і друкарня «Астропринт»
(Свідоцтво ДК № 1373 від 28.05.2003 р.)
65026, м. Одеса, вул. Преображенська, 24
Тел./факс: (0482) 26-98-82, 26-96-82, 37-14-25

www.astroprint.odessa.ua

