

УДК 535.3 : 537.876.23

ББК 22.343

Т 35

Терещенко С. А. **Методы вычислительной томографии.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 320 с. — ISBN 5-9221-0551-5.

В монографии изложен математический аппарат как традиционных методов вычислительной томографии, так и новых методов, развиваемых в области трансмиссионной томографии рассеивающих сред и эмиссионной интегрально-кодовой томографии. Подробно описаны методы, опирающиеся на преобразование Радона и экспоненциальное преобразование Радона, а также алгебраические методы. Изложены подходы к построению томографии рассеивающих сред. Приведены основные приближения нестационарного уравнения переноса излучения в неоднородной среде, на которых могут базироваться алгоритмы томографической реконструкции характеристик рассеивающих сред. Особое внимание уделено нестационарной осевой модели, позволяющей осуществить непрерывный переход от томографии чисто поглощающих сред к томографии рассеивающих сред. Дано систематическое изложение современного состояния интегрально-кодовой эмиссионной томографии, основывающейся на применении плоских кодирующих коллиматоров. Описаны способы построения кодирующих коллиматоров, методы их исследования и алгоритмы томографической реконструкции пространственного распределения источников излучения.

Предназначено для научных работников, инженеров и аспирантов, специализирующихся в области вычислительной томографии.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Традиционные методы вычислительной томографии . . .	11
1.1. Трансмиссионная вычислительная томография и преобразование Радона	14
1.2. Эмиссионная вычислительная томография и экспоненциальное преобразование Радона	34
1.3. Алгебраические методы вычислительной томографии	50
Глава 2. Трансмиссионная томография рассеивающих сред	63
2.1. Нестационарное уравнение переноса излучения в неоднородных средах. Основные приближения	65
2.2. Модели томографической реконструкции пространственных распределений характеристик рассеивающих сред	81
2.3. Нестационарная осевая модель переноса излучения	87
2.4. Экспериментальная проверка адекватности нестационарной осевой модели переноса излучения	95
2.5. Томография СРС на основе нестационарной осевой модели переноса излучения	107
Глава 3. Интегрально-кодовые системы измерений в эмиссионной томографии	116
3.1. Пространственная модуляция излучения	118
3.2. Исследование аппаратных функций ИКСИ	142
3.3. Обобщённые псевдослучайные последовательности	179
3.4. Оптимизация ИКСИ на базе статистических критериев оптимальности	192
3.5. Восстановление трёхмерных распределений источников излучения методом фокусных плоскостей	206
Заключение	221

Приложение 1. Отдельные свойства дельта-функции Дирака, функции Хевисайда и некоторых специальных функций	225
П1.1. δ -функция Дирака	225
П1.2. Ступенчатая функция Хевисайда	225
П1.3. Поверхностная δ_2 -функция	225
П1.4. Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя целого порядка	226
П1.5. Нормальные эллиптические интегралы в форме Лежандра	226
П1.6. Полные нормальные эллиптические интегралы в форме Лежандра	227
П1.7. Многочлены Чебышёва	227
 Приложение 2. Псевдослучайные последовательности	 229
 Приложение 3. Троичные последовательности	 266
 Список литературы	 303
 Список сокращений	 319

ВВЕДЕНИЕ

Томографические методы реконструкции пространственно неоднородных физических характеристик поглощающих и излучающих сред за последние 30 лет получили большое распространение в самых разных областях, в том числе в такой социально значимой, как медицинская диагностика. В настоящее время вычислительная томография является вполне сформировавшейся областью науки со своим кругом задач и методов их решения. Все виды томографии по свойствам изучаемых объектов можно разделить на два больших класса: трансмиссионную вычислительную томографию (ТВТ) и эмиссионную вычислительную томографию (ЭВТ). В трансмиссионной томографии внешнее излучение зондирует пассивный (неизлучающий) объект, частично поглощаясь им. В эмиссионной томографии активный (излучающий) объект представляет собой пространственное (двумерное или трёхмерное) распределение источников излучения, при этом выходящее вдоль какого-либо направления излучение является суперпозицией излучений всех источников, лежащих на линии проецирования.

В трансмиссионной томографии, в частности в рентгеновской компьютерной томографии, реконструкции подлежит пространственное распределение коэффициента ослабления излучения. Определяющее значение для развития и распространения томографических методов имела разработка эффективных методов обращения интегрального преобразования Радона, введённого И. Радонем в 1917 г. Физической основой преобразования Радона служит экспоненциальный закон ослабления излучения, который справедлив в случае чисто поглощающих сред и представляет собой вполне очевидное обобщение на неоднородные среды закона Бугёра–Ламберта–Бэра.

В эмиссионной томографии реконструкции подлежит пространственное распределение источников излучения. При этом ослабление излучения вследствие поглощения в веществе является внешним мешающим фактором. Существенный прогресс в этой области был достигнут после разработки методов обращения экспоненциального преобразования Радона, выполняющегося для источников излучения, погружённых в однородную поглощающую среду.

Предлагаемая вниманию читателей книга посвящена методам вычислительной томографии, причём под методами понимается, прежде всего, используемый математический аппарат. Поэтому совершенно опущены не только технические детали и особенности измерений и обработки данных в многочисленных направлениях

вычислительной томографии, но и сами эти направления в целом, несмотря на их важность и законченность. Хорошим примером может служить позитронная эмиссионная (двухфотонная) томография, математический аппарат которой сводится к обычному преобразованию Радона, характерному для трансмиссионной томографии. Поэтому в книге рассмотрены методы уже в некотором смысле завершённые и называемые поэтому традиционными, а также некоторые новые методы, находящиеся в процессе развития, но отличающиеся тем, что они привлекают новые математические средства. Естественно, описаны методы, к развитию которых автор имел отношение, и поэтому другие важные и интересные направления остались за пределами изложения.

Автор старался избегать излишних обобщений, характерных для математических работ, и излагать материал на так называемом физическом уровне строгости, что, по его мнению, увеличит круг лиц, для которых книга будет интересна.

В первой главе дан обзор методов традиционной вычислительной томографии, основанных на обращении преобразования Радона в поперечной трансмиссионной томографии и экспоненциального преобразования Радона в поперечной эмиссионной томографии. Хотя формула обращения Радона и до настоящего времени не потеряла своего теоретического и прикладного значения, были разработаны другие, более эффективные методы для применения в коммерческих томографах и решения специальных томографических задач. В частности, в первой главе подробно рассмотрены метод ро-фильтрации, метод фурье-синтеза, метод фильтрованных обратных проекций и метод А. Кормака.

В поперечной эмиссионной вычислительной томографии поглощение излучения в среде представляет собой дополнительный мешающий фактор. Однако в случае однородной среды с известным коэффициентом ослабления задача сводится к обобщению преобразования Радона — экспоненциальному преобразованию Радона. Соответственно рассмотрены обобщения методов обращения преобразования Радона на экспоненциальное преобразование Радона, в частности обобщения методов ро-фильтрации, фурье-синтеза и фильтрованных обратных проекций.

Кроме того, в первой главе рассмотрены алгебраические методы вычислительной томографии, сводящиеся к решению системы линейных алгебраических уравнений большого порядка и требующие применения итерационных алгоритмов. Описан и метод одновременного нахождения пространственных распределений источников излучения и коэффициента ослабления излучения, сводящийся к решению системы нелинейных уравнений.

Изложение традиционных методов вычислительной томографии проведено весьма подробно, что позволяет использовать материал первой главы для первоначального ознакомления студентов и аспирантов с математическим аппаратом вычислительной томографии.

Во второй главе рассмотрено новое, находящееся в стадии активного развития направление в вычислительной томографии — томография рассеивающих сред на примере трансмиссионной оптической томографии биологических объектов.

Если в диапазоне рентгеновского излучения экспоненциальный закон ослабления хорошо выполняется, то в диапазоне оптического излучения взаимодействие излучения со средой носит существенно более сложный характер из-за наличия процессов рассеяния излучения. Вследствие этого исчезает физическая база для применения преобразования Радона. Кроме того, вместо одной неизвестной функции пространственной переменной — распределения коэффициента ослабления излучения — появляется, как минимум, ещё одна неизвестная функция — пространственное распределение индикатрисы рассеяния излучения. Таким образом, появляется необходимость одновременного восстановления двух неизвестных функций, для чего в случае традиционной схемы измерений принципиально недостаточно информации.

Одним из путей преодоления указанных трудностей может служить более подробное рассмотрение процесса взаимодействия излучения с веществом на основе уравнения переноса излучения, адекватно описывающего рассеяние излучения. При этом дополнительная информация может быть получена за счёт использования импульсного излучения вместо непрерывного и регистрации временного распределения излучения, прошедшего через среду. Естественно, что в этом случае необходимо рассматривать нестационарное уравнение переноса излучения. Однако аналитическое решение нестационарного уравнения переноса излучения в общем случае невозможно. Можно указать два основных направления решения томографической задачи. Первое направление связано с одновременным рассмотрением всех измеренных данных в совокупности и восстановлением не только интересующих нас физических характеристик среды, но и вспомогательной промежуточной величины — плотности потока излучения во всех точках исследуемой пространственной области. Принципиальными трудностями при этом являются не только резкий рост размерности решаемой задачи, но главным образом её нелинейность, что, по-видимому, делает маловероятным существенное продвижение в этом направлении. Второе направление связано с использованием более простых приближений уравнения переноса, позволяющих развить новые алгоритмы томографической реконструкции по проекционным данным. Основной трудностью в этом направлении является то, что известные приближения уравнения переноса не учитывают специфику обратной задачи и, следовательно, не позволяют осуществить эффективный переход к томографическим алгоритмам.

Таким образом, новым математическим аппаратом, необходимо привлекаемым для решения этой томографической задачи, являются интегро-дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных. В главе рассмотрены основные способы

упрощения уравнения переноса излучения с учётом неоднородности среды, которые можно положить в основу решения обратной задачи — реконструкции физических характеристик рассеивающих сред.

В начале второй главы сделан обзор основных приближений нестационарного УПИ с учётом неоднородности среды. Затем изложены некоторые подходы к построению томографических алгоритмов, опирающихся на УПИ. Основное содержание главы посвящено описанию нестационарной осевой (двухпотоковой) модели, которая основана на приближении “рассеяние прямо назад” и по существу не является приближением самого УПИ, а представляет собой точное описание взаимодействия излучения с рассеивающей средой, обладающей специальными свойствами, т.е. в которой рассеяние сводится к обратному рассеянию. В варианте пропорциональной рассеивающей среды это единственная известная в настоящее время модель, которая так же, как и в случае рентгеновской томографии, на основе только предположения о свойствах индикатрисы рассеяния позволяет получить точное решение задачи томографической реконструкции.

Третья глава посвящена развитию методов эмиссионной вычислительной томографии в случае, когда невозможно наблюдать объект со всех направлений. При этом возникает фундаментальная проблема реконструкции объекта по неполным проекционным данным. Хотя этой проблеме посвящено большое количество работ, она не может считаться решённой до конца и к настоящему времени. Такая проблема особенно остро стоит для объектов, наблюдения которых для всех направлений принципиально невозможно, например при экологическом мониторинге радиоактивного загрязнения приповерхностного слоя почвы. В то же время уже довольно давно существует другой подход, так называемая продольная томография, в котором изначально не предполагается движение системы измерений вокруг объекта, если же движение и происходит, то система измерений всё время находится с одной стороны от объекта. Такой подход является естественным развитием методов получения проекционных изображений с помощью многоканального или однопинхольного коллиматоров. В случае трёхмерного объекта основной задачей продольной томографии является получение изображения выбранной (фокусной) плоскости объекта, параллельной плоскости детектора, более или менее свободного от вклада остальных (внефокусных) плоскостей. Если при этом удастся каким-либо способом увеличить вклад фокусной плоскости по сравнению с обычным суперпозиционным изображением, то уже говорят о продольной томограмме. Так как однопинхольный коллиматор и многоканальный коллиматор с параллельными каналами в принципе не способны справиться с такой задачей, развитие продольной томографии пошло в направлении усложнения коллимирующих устройств — так называемых кодирующих коллиматоров. Поскольку такой коллиматор осуществляет пространственную модуляцию или кодирование излучения, падающего на детектор, такие системы получили название систем с модуляци-

ей или кодированием излучения. Подчёркивая интегральный характер формирования общего изображения на детекторе, можно назвать их интегрально-кодовыми системами измерений (ИКСИ).

Наиболее перспективными среди кодирующих коллиматоров являются многопинхолевые коллиматоры, расположение пинхолов в которых определяется сложными, весьма нетривиальными правилами. Главными проблемами применения таких коллиматоров являются невозможность аналитического предсказания их фокусирующих свойств и невозможность их построения для произвольно заданных размерности и среднего пропускания. Кроме того, до конца не решена задача точной реконструкции трёхмерного распределения источников излучения, т.е. задача исключения из сфокусированных изображений вклада внефокусных источников излучения.

Описанное направление эмиссионной томографии в целом относится к алгебраическим методам томографии. Развитие математического аппарата вычислительной томографии в данном случае заключается в дополнительном использовании свойств исключительно интересного объекта комбинаторной математики — так называемых (v, k, λ) -матриц.

В главе подробно рассмотрены вопросы применения ИКСИ в эмиссионной томографии. Вводится понятие аппаратной функции ИКСИ, являющейся эффективным инструментом для сравнения различных кодирующих коллиматоров друг с другом. Описан новый широкий класс возможных двумерных кодирующих коллиматоров, включающий в себя как большинство известных, так и предложенных впервые коллиматоров, и базирующийся на новом классе обобщённых бинарных одномерных последовательностей. Последний включает в себя в качестве небольшого подмножества известные одномерные последовательности, используемые для построения двумерных кодирующих коллиматоров. Описаны также двумерные коллиматоры, построенные на основе тричных $(-1, 0, 1)$ -последовательностей, обладающих идеальной периодической автокорреляционной функцией с нулевой корреляцией. Кроме того, описана методика оптимизации среднего пропускания кодирующего коллиматора на основе статистических критериев оптимальности математической теории планирования эксперимента, использующих характеристики ковариационной матрицы оценок. Отличительной особенностью при этом является учёт не только статистических свойств помех, накладывающихся на измерения, но и статистических свойств самих искомых величин, так называемой “статистики эффекта”. Подробно изложен метод фокусных плоскостей, предназначенный для решения задачи исключения вклада внефокусных источников излучения из реконструированных изображений.

Автор далёк от мысли, что настоящая книга свободна от недостатков, поэтому все замечания будут с благодарностью приняты.

Появление этой монографии было бы невозможно без помощи сотрудников кафедры БМС Московского института электронной техники, кафедры №1 Московского инженерно-физического института и

лаборатории пикосекундных лазеров Института общей физики РАН, которым автор приносит свою искреннюю благодарность. В особенности автор признателен соавторам его научных работ Н.С. Воробьёву, А.М. Дмитриеву, В.М. Подгаецкому, С.В. Селищеву, А.В. Смирнову и Г.А. Фёдорову.

2004 г.

С.А. Терещенко

Глава 1

ТРАДИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Вычислительная (компьютерная) реконструктивная томография представляет собой яркий пример взрывного развития нового научного направления, проникающего практически во все области науки и техники, в которых применяются или могут быть применены какие-либо виды излучений.

Хронология развития вычислительной томографии:

- 1895 г. — открытие рентгеновских лучей;
- 1917 г. — преобразование Радона;
- 1920 г. — рентгенограмма в медицине;
- 1930 г. — линейная томография, вращательная томография;
- 1942 г. — РВТ в радиоастрономии;
- 1961 г. — свёрточный алгоритм;
- 1964 г. — алгоритм РВТ А. Кормака;
- 1972 г. — серийный томограф Г. Хаунсфилда;
- 1977 г. — учебный курс по вычислительной томографии
в университете штата Нью-Йорк (г. Буффало);
- 1979 г. — Нобелевская премия А. Кормаку и Г. Хаунсфилду.

Методы реконструктивной томографии начали активно развиваться в 60-х годах прошлого века, хотя математическая база была, по существу, создана И. Радонем в 1917 г. [1]. Однако работа И. Радона, опубликованная в трудах Саксонской академии наук, не попала в поле зрения исследователей и была незаслуженно забыта. В настоящее время предложенные Радонем методы широко используются, а его общая формула обращения не потеряла своего теоретического и прикладного значения.

Реконструктивная томография в медицине стала использоваться после публикации работ А. Кормака в 1963–1964 гг. [12, 13].

Первый серийный рентгеновский томограф был разработан Г. Хаунсфилдом в 1972 г. и выпущен фирмой ЕМІ (Великобритания) [14]. Хотя в современных томографах алгоритмы Кормака и Хаунсфилда не применяются, в 1979 г. им обоим была присуждена Нобелевская премия по физиологии и медицине. В современных коммерческих то-

мографрах, как правило, реализованы различные разновидности более эффективного свёрточного метода. Этот метод в 1961 г. разработала группа математиков, программистов и инженеров для обнаружения неисправностей в атомных реакторах [15]. Позднее было обнаружено, что эта группа повторно открыла метод, разработанный И. Радонем.

Следует различать вычислительную томографию, осуществляющую точное восстановление исследуемой физической характеристики, и классическую томографию, используемую в медицинской практике и дающую всего лишь сфокусированное изображение выделенной плоскости в объекте с помощью линейного или вращательного движения регистратора и объекта относительно друг друга [16, 17]. По существу, различие между ними заключается в том, что в вычислительной томографии используется сложная дополнительная математическая обработка, представляющая собой, как правило, решение так называемой обратной задачи.

Можно указать следующие виды вычислительной томографии, уже развитые в большей или меньшей степени:

- 1) рентгеновская томография;
- 2) радионуклидная томография;
- 3) ЯМР-томография;
- 4) ультразвуковая томография;
- 5) оптическая томография;
- 6) протонно-ионная томография;
- 7) томография в радиодиапазоне;
- 8) ЭПР-томография.

Как уже отмечалось, все виды томографии можно разделить на трансмиссионную вычислительную томографию и эмиссионную вычислительную томографию. Кроме того, по способу формирования исходных (проекционных) данных различают параллельные и веерные проекции, а геометрию измерений подразделяют на круговую (полную и неполную) и планарную.

Математически задача реконструктивной вычислительной томографии сводится к восстановлению функции нескольких (не менее двух) переменных по известным интегралам от неё вдоль некоторых многообразий (как правило, вдоль прямых). Хотя принципиально эта задача была решена И. Радонем в 1917 г., указавшим способ обращения интегрального преобразования, получившего его имя (преобразование Радона), значительные усилия большого числа исследователей были сосредоточены на разработке достаточно эффективных в вычислительном плане алгоритмов восстановления изображений и на преодолении трудностей, возникающих при исследовании реальных объектов. Из таких трудностей упомянем три, имеющие весьма общий характер. Первая трудность возникает, например, в трансмиссионной рентгеновской томографии и связана с немонахроматичностью зондирующего рентгеновского излучения [18]. Учёт этого обстоятельства приводит к значительному усложнению задачи томографического восстановления.

Ещё большая трудность возникает в эмиссионной томографии при учёте поглощения (самопоглощения) излучения внутри самосветящегося объекта. Даже самый простой случай постоянного внутри объекта и заранее известного коэффициента поглощения излучения приводит к возникновению нового интегрального преобразования, так называемого экспоненциального преобразования Радона, методы обращения которого были разработаны только в 1979–1981 гг. почти одновременно в Италии [8] и в США: в Чикагском университете и университете Дрекселя [9], а также в Калифорнийском университете и Лоуренсовской лаборатории в Беркли [10].

Третья трудность заключается в следующем. При использовании методов обращения преобразования Радона предполагается возможность наблюдения (зондирования) объекта во всех направлениях. Если это предположение не выполняется, возникает фундаментальная проблема реконструкции объекта по неполным проекционным данным, решению которой посвящено большое количество работ, но не решённой до конца и к настоящему времени. Такая проблема возникает для всех объектов, наблюдение которых для всех углов невозможно, например при экологическом мониторинге радиоактивного загрязнения приповерхностного слоя почвы.

Проблемой томографической реконструкции объектов при неполных проекционных данных занимаются учёные нескольких научных центров мира:

- в США в Оптическом центре и на кафедре радиологии Аризонского университета группа Х.Х. Барретта [19]; в Лоуренсовской лаборатории в Беркли, в Исследовательском центре компании General Electric в Скенектади и на кафедре радиологии Калифорнийского университета группа К.Ч. Тама [20–24]; в Институте радио и астрономии Станфордского университета [25];
- в Японии в Токийском технологическом институте группа Т. Сато [26–28]; в Исследовательском центре компании Toshiba [29];
- в ФРГ в Исследовательской лаборатории фирмы Philips [30, 31]; в Институте вычислительной и прикладной математики Мюнстерского университета в Гамбурге [32];
- на Тайване на кафедре электротехники Национального университета [33].

Методы реконструкции, применяемые в вычислительной томографии, можно разделить на интегральные и алгебраические. В интегральных методах всё рассмотрение проводится в непрерывной форме, а дискретизация производится на конечном этапе непосредственной реализации алгоритма восстановления. При этом основным математическим инструментом в трансмиссионной томографии является аппарат обращения преобразования Радона, а в эмиссионной томографии — экспоненциального преобразования Радона [11, 34].

В алгебраических методах вычислительной томографии, в отличие от интегральных, дискретизация осуществляется уже в начале рас-

смотрения, и дальнейшее описание проводится только в дискретной форме. При этом задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [35] или реже к системе нелинейных уравнений [36]. Для решения получающихся систем используются, как правило, итерационные алгоритмы, как известные в вычислительной математике, типа простой итерации и метода скорейшего спуска [37–40], так и специально разработанные для целей вычислительной томографии [41–45].

Особую группу образуют методы, использующие пространственную и временную модуляцию (кодирование) излучения [11, 46].

1.1. Трансмиссионная вычислительная томография и преобразование Радона

1.1.1. Ослабление излучения в среде. Трансмиссионная вычислительная томография (ТВТ), по существу, является математической надстройкой над физическим процессом ослабления излучения в веществе. Напомним основные соотношения, описывающие процесс ослабления излучения в веществе. Пусть тонкий (“карандашный”) пучок, например γ -излучения, с интенсивностью I_0 падает на слой вещества с распределением линейного коэффициента поглощения (ослабления) $\mu(x)$ вдоль распространения пучка (рис. 1.1). При этом феноменологически $\mu(x)$ определяют через вероятность $dP(x)$ поглощения γ -кванта при прохождении элементарного пути dx соотношением $dP(x) = \mu(x)dx$.

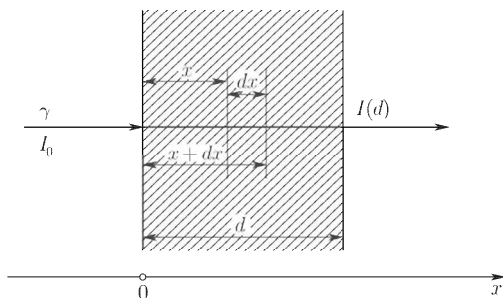


Рис. 1.1. Ослабление излучения в среде

Стационарное уравнение переноса излучения в чисто поглощающей неоднородной среде, описывающее процесс ослабления излучения в веществе, представляет собой баланс частиц или энергии и выглядит следующим образом:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu(x)I(x). \quad (1.1)$$

Решением уравнения (1.1) будет закон экспоненциального ослабления излучения, обобщающий закон Бугера–Ламберта–Бэра для однородной среды:

$$I(x) = I_0 \exp \left\{ - \int_0^x \mu(x) dx \right\}. \quad (1.2)$$

1.1.2. Круговая геометрия измерений в ТВТ. Рассмотрим задачу восстановления двумерного распределения коэффициента ослабления излучения $\mu(x, y)$ (рис. 1.2). Процесс измерений выглядит следующим образом. Источник излучения, формирующий “карандашный”

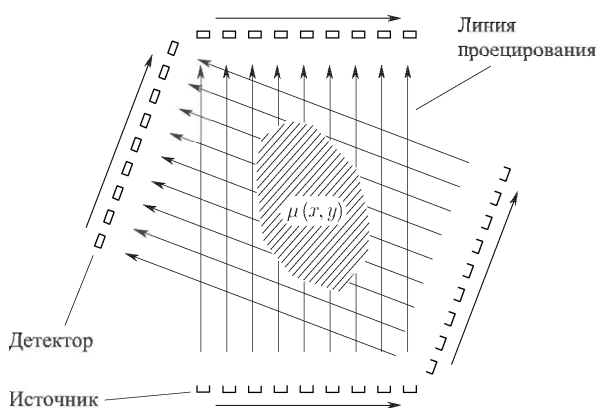


Рис. 1.2. Круговая геометрия измерений с параллельными проекциями

пучок, проходит дискретно вдоль объекта. Синхронно с источником с другой стороны объекта движется детектор излучения. Набор отсчётов, полученный таким образом, определяет одномерную функцию, называемую проекцией. Затем система “Источник–Детектор” поворачивается относительно объекта на некоторый угол ϑ , и снимается новый набор отсчётов, определяющий следующую проекцию.

Такие измерения повторяются, пока система “Источник–Детектор” не повернётся на угол 2π . Строго говоря, достаточно поворота на угол π , т. к. затем результаты измерений станут повторяться. По полученному набору одномерных проекций необходимо восстановить двумерное распределение $\mu(x, y)$. Поскольку система “Источник–Детектор” вращается вокруг объекта, такую схему измерений называют круговой геометрией измерений, а т. к. для получения следующего отсчёта в проекции пучок смещается параллельно предыдущему положению, проекции называют параллельными проекциями.

Для математического описания связи проекций с искомым распределением $\mu(x, y)$ наряду с неподвижной системой координат (x, y)

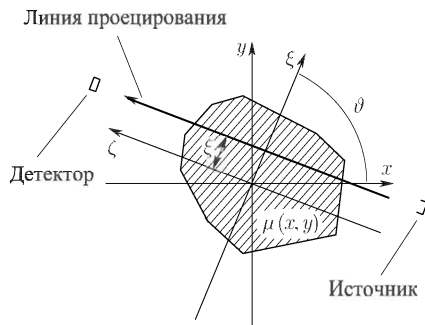


Рис. 1.3. Неподвижная (x, y) и вращающаяся (ξ, ζ) системы координат

введём вращающуюся систему координат (ξ, ζ) (рис. 1.3):

$$\begin{cases} x = \xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta \\ y = \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta \end{cases}, \quad \begin{cases} \xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ \zeta = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \end{cases}. \quad (1.3)$$

Обозначим через $\mu_{\vartheta}(\xi, \zeta)$ распределение линейного коэффициента ослабления в системе координат (ξ, ζ) , поворнутой относительно неподвижной системы координат (x, y) на угол ϑ :

$$\begin{aligned} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) &= \mu(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = \\ &= \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (1.4)$$

В частности, $\mu_{\vartheta=0}(\xi, \zeta) = \mu(x, y)$.

Для интенсивности $I(\xi, \vartheta)$ излучения, прошедшего через объект вдоль оси ζ , в соответствии с (1.2) получим

$$I(\xi, \vartheta) = I_0 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta \right\}. \quad (1.5)$$

При этом было учтено, что за пределами объекта $\mu(x, y) \equiv 0$. Проекцией $p(\xi, \vartheta)$ называют такую величину

$$p(\xi, \vartheta) = - \ln \frac{I(\xi, \vartheta)}{I_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta. \quad (1.6)$$

Таким образом, получим следующее выражение для проекции:

$$\begin{aligned} p(\xi, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta) d\zeta. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) называется преобразованием Радона двумерной функции $\mu(x, y)$. В дальнейшем нам понадобится другое представление для преобразования Радона, использующее свойства δ -функции Дирака:

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, y) \delta(\xi - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) dx dy. \quad (1.8)$$

Происхождение представления (1.8) становится понятным, если вспомнить, что δ -функция будет равна нулю везде, кроме прямой $\xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$.

1.1.3. Метод двумерной фильтрации (метод ро-фильтрации).

Задачей вычислительной томографии является восстановление неизвестной функции нескольких (не менее двух) переменных по известным интегралам от неё меньшей размерности. В частности, в двумерном случае необходимо восстановить функцию $\mu(x, y)$ по проекциям $p(\xi, \vartheta)$, связанным с искомой функцией $\mu(x, y)$ преобразованием Радона (1.7) или (1.8). С математической точки зрения необходимо указать метод обращения интегрального преобразования (1.7) или (1.8). Рассмотрение начнём с метода, получившего название метода ρ -фильтрации или метода двумерной фильтрации [47–48].

Метод ρ -фильтрации состоит из двух этапов. На первом этапе с помощью операции обратного проецирования получают так называемое суммарное изображение. На втором этапе суммарное изображение подвергается двумерной фильтрации, результатом которой является оценка искомого изображения, например двумерного распределения коэффициента ослабления излучения в объекте. Суть операции обратного проецирования заключается в получении двумерной функции, называемой суммарным изображением, исходя из набора одномерных проекций.

При обратном проецировании для каждой проекции $p(\xi, \vartheta)$ находится так называемая обратная проекция $b(x, y, \vartheta)$:

$$b(x, y, \vartheta) = p(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta). \quad (1.9)$$

Смысл обратной проекции заключается в том, что одномерная проекция $p(\xi, \vartheta)$ как бы “размазывается” на всю двумерную плоскость перпендикулярно оси ξ (рис. 1.4).

Таким образом, значение отсчёта $p(\xi, \vartheta)$ приписывается всем точкам, лежащим на прямой $\xi = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta$ (в неподвижной системе координат). Суммарное изображение $g(x, y)$ получается суперпозицией

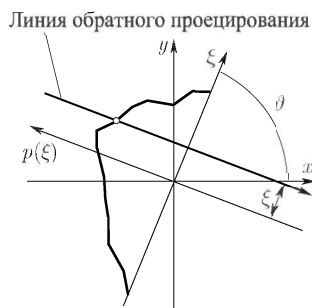


Рис. 1.4. Получение обратной проекции

всех обратных проекций:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(x, y, \vartheta) d\vartheta. \quad (1.10)$$

Для нахождения связи суммарного изображения $g(x, y)$ с искомой функцией $\mu(x, y)$ подставим в (1.10) определение обратной проекции (1.9) и проекции (1.8):

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \times \\ \times \int_0^{2\pi} \delta((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) d\vartheta. \quad (1.11)$$

Чтобы вычислить интеграл по ϑ , нужно использовать свойство δ -функции от сложного аргумента:

$$\left. \begin{aligned} \delta(f(\vartheta)) &= \sum_i \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_i)}{|df(\vartheta)/d\vartheta|_{\vartheta=\vartheta_i}}, \\ f(\vartheta_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

В нашем случае

$$f(\vartheta) = (x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{x - x_0}{y - y_0}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \arctg \left(-\frac{x - x_0}{y - y_0} \right), \\ \vartheta_2 &= \pi + \vartheta_1 = \pi + \arctg \left(-\frac{x - x_0}{y - y_0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

$$\left| \frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} \right| = \frac{|-(x - x_0) \operatorname{tg} \vartheta + (y - y_0)|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}}, \quad (1.16)$$

$$\left| \frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_1} = \left| \frac{df(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (1.17)$$

Следовательно,

$$\delta((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) = \frac{\delta(\vartheta - \vartheta_1) + \delta(\vartheta - \vartheta_2)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \quad (1.18)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_0, y_0) \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} dx_0 dy_0. \quad (1.19)$$

Таким образом, суммарное изображение $g(x, y)$ является двумерной свёрткой искомой функции $\mu(x, y)$ с некоторым ядром $h_2(x, y)$, а именно

$$h_2(x, y) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.20)$$

$$g(x, y) = \mu(x, y) \otimes \otimes h_2(x, y), \quad (1.21)$$

где $\otimes \otimes$ — знак двумерной свёртки.

Теперь становится понятной необходимость дополнительной операции фильтрации суммарного изображения, т.е. решения свёртки с известным ядром $h_2(x, y)$, либо ещё одной свёртки $g(x, y)$ с некоторым другим ядром $n_2(x, y)$, что, как мы увидим, является одним и тем же.

Для решения свёртки (1.21) воспользуемся теоремой о (двумерной) свёртке:

$$\mathfrak{F}_2 \{g(x, y)\} = 2\pi \mathfrak{F}_2 \{\mu(x, y)\} \mathfrak{F}_2 \{h_2(x, y)\}, \quad (1.22)$$

где $\mathfrak{F}_2 \{ \cdot \}$ — двумерное преобразование Фурье.

Тогда получим

$$\hat{\mu}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{F}_2 \{g(x, y)\}}{\mathfrak{F}_2 \{h_2(x, y)\}} \right\}, \quad (1.23)$$

где $\mathfrak{F}_2^{-1} \{ \cdot \}$ — обратное двумерное преобразование Фурье.

В формуле (1.23) мы записали оценку $\hat{\mu}(x, y)$ вместо истинного изображения $\mu(x, y)$ по следующей причине. При измерениях проекции фиксируются с некоторой ошибкой измерений, следовательно, суммарное изображение $g(x, y)$ и восстановленное по формуле (1.23) изображение будут получены с некоторой ошибкой. Кроме того, если фурье-образ ядра $h_2(x, y)$ будет иметь близкие к нулю значения, то мы можем получить оценку $\hat{\mu}(x, y)$, сколь угодно сильно отличающуюся от истинного изображения $\mu(x, y)$, что является отражением общей некорректности задачи решения интегральных уравнений первого рода, к которым относится свёртка [49].

При реальных вычислениях вводят аподизирующую функцию (функцию окна) $A_2(u, v)$ в фурье-пространстве (u, v — декартовы координаты в фурье-пространстве). Аподизирующая функция учитывает априорную информацию об исходной функции и регуляризует некорректную задачу решения свёртки. С помощью аподизирующей функции, например, можно исключить нежелательное влияние близких к нулю значений фурье-образа ядра свёртки $\mathfrak{F}_2 \{h_2(x, y)\}$, что обеспечит большую близость оценки к истинному изображению. Таким образом, регуляризованная оценка искомого изображения вычисляется по следующей формуле:

$$\hat{\mu}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{F}_2 \{g(x, y)\}}{\mathfrak{F}_2 \{h_2(x, y)\}} A_2(u, v) \right\}. \quad (1.24)$$

Запишем выражение для $\hat{\mu}(x, y)$ в виде

$$\hat{\mu}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{S}_2 \{g(x, y)\} [\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}]^*}{|\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2} A_2(u, v) \right\}, \quad (1.25)$$

где $*$ — знак комплексного сопряжения. Тогда, например, можно взять следующую аподизирующую функцию:

$$A_2(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2 > R_0^2, \\ \frac{|\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2}{R_0^2}, & \text{при } |\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2 \leq R_0^2, \end{cases} \quad (1.26)$$

т.е. если модуль фурье-образа ядра $h_2(x, y)$ больше некоторой выбранной заранее константы R_0 , то никакой коррекции не производится, в противном случае модуль фурье-образа ядра заменяется этой константой. Тогда

$$\hat{\mu}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{S}_2 \{g(x, y)\} [\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}]^*}{|\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2} \right\}, & \text{при } |\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2 \geq R_0^2, \\ \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{S}_2 \{g(x, y)\} [\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}]^*}{R_0^2} \right\}, & \text{при } |\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}|^2 \leq R_0^2. \end{cases} \quad (1.27)$$

Запишем другое представление решения свёртки:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{S}_2 \{g(x, y)\}}{\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}} A_2(u, v) \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} g(x, y) \otimes \otimes n_2(x, y), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$n_2(x, y) = \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{A_2(u, v)}{\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}} \right\}. \quad (1.29)$$

Таким образом, получаем два представления:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{\mathfrak{S}_2 \{g(x, y)\}}{\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}} A_2(u, v) \right\}, \quad (1.30)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^2} g(x, y) \otimes \otimes \mathfrak{S}_2^{-1} \left\{ \frac{A_2(u, v)}{\mathfrak{S}_2 \{h_2(x, y)\}} \right\}. \quad (1.31)$$

Какое из этих представлений использовать, зависит от того, насколько быстро выполняются реальные вычисления свёртки и преобразования Фурье. Так как фурье-образы от известных функций могут

быть вычислены заранее, то необходимо сопоставить скорость выполнения одной свёртки со скоростью выполнения двух преобразований Фурье и одной операции умножения.

Вычислим фурье-образ $H_2(\rho, \varphi)$ функции ядра $h_2(x, y)$. Вводя полярные координаты

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} u &= \rho \cos \psi \\ v &= \rho \sin \psi \end{aligned} \right\}, \quad (1.32)$$

получим

$$h_2(r) = \frac{1}{\pi r}. \quad (1.33)$$

Тогда по определению

$$\begin{aligned} H_2(\rho, \varphi) &= \mathfrak{F}_2 \{h_2(r)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} h_2(r) e^{-ir\rho \cos(\varphi-\psi)} r dr d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho \cos(\varphi-\psi)} dr d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} J_0(r\rho) dr = \frac{1}{\pi\rho}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя нулевого порядка. При этом мы воспользовались соотношениями

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm ir\rho \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = J_0(r\rho), \quad (1.35)$$

$$\int_0^{+\infty} J_0(x) dx = 1. \quad (1.36)$$

Таким образом, для фурье-образа $H_2(\rho, \varphi) = H_2(\rho)$ ядра $h_2(x, y)$ мы получили следующие выражения:

$$H_2(\rho) = \frac{1}{\pi\rho} \quad \text{или} \quad H_2(u, v) = \frac{1}{\pi\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (1.37)$$

Применение буквы ρ (ро) и дало название всему методу — метод ро-фильтрации.

Поскольку фурье-образ $H_2(\rho)$ ядра $h_2(x, y)$ зависит только от радиуса ρ , естественно и аподизирующую функцию выбирать так, чтобы она зависела только от ρ :

$$A_2(u, v) = A_2(\rho, \psi) = A_2(\rho). \quad (1.38)$$

В качестве аподизирующих функций часто используют следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_2(\rho) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0; \end{cases} \\ A_2(\rho) &= \begin{cases} \cos(\pi\rho/2\rho_0) & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0; \end{cases} \\ A_2(\rho) &= \begin{cases} \frac{\sin(\pi\rho/2\rho_0)}{\pi\rho/2\rho_0} & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0; \end{cases} \\ A_2(\rho) &= \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi\rho/\rho_0) & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0. \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (1.39)$$

В последнем случае должно быть $0 \leq \alpha \leq 1$.

1.1.4. Метод фурье-синтеза. Рассмотрим другой метод обращения преобразования Радона, основанный на так называемой теореме о центральном сечении, устанавливающей связь между одномерным фурье-образом проекции $p(\xi, \vartheta)$ по переменной ξ и двумерным фурье-образом искомого распределения $\mu(x, y)$ [50].

Запишем выражение для проекции (1.8) в полярных координатах:

$$\begin{aligned} p(\xi, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x, y) \delta(\xi - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) dx dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) \delta(\xi - r \cos(\vartheta - \varphi)) r dr d\varphi, \end{aligned} \quad (1.40)$$

и найдём одномерный фурье-образ проекции по переменной ξ , т. ч.

$$\begin{aligned} P(\chi, \vartheta) &= \mathfrak{F}_1 \{p(\xi, \vartheta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) e^{-i\xi\chi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(r, \varphi) \delta[\xi - r \cos(\vartheta - \varphi)] e^{-i\xi\chi} r dr d\varphi d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) e^{-i\chi r \cos(\vartheta - \varphi)} r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Аналогично найдём двумерный фурье-образ искомого распределения $\mu(r, \varphi)$:

$$\mathfrak{F}_2 \{\mu(r, \varphi)\} = M(\rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) e^{-ir\rho \cos(\psi - \varphi)} r dr d\varphi. \quad (1.42)$$

Очевидно, что если мы заменим χ на ρ , а ϑ на ψ , то получим

$$M(\rho, \psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(\rho, \psi). \quad (1.43)$$

Соотношение (1.43) и является теоремой о центральном сечении, т.е. одномерный фурье-образ проекции, полученной при повороте системы “Источник–Детектор” на угол ϑ , является сечением двумерного фурье-образа искомого двумерного распределения по линии, проходящей через начало координат (центральным сечением) и повёрнутой на угол ϑ . Таким образом, из одномерных фурье-образов проекций можно набрать (синтезировать) двумерный фурье-образ искомого изображения, которое затем можно восстановить с помощью двумерного обратного преобразования Фурье.

Запишем (1.43) в виде

$$\mathfrak{Z}_2\{\mu(x, y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(\rho, \psi) \quad (1.44)$$

или

$$\mu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{Z}_2^{-1}\{P(\rho, \psi)\}. \quad (1.45)$$

Специфика метода фурье-синтеза заключается в том, что отсчёты фурье-образа $M(\rho, \psi)$ искомой функции $\mu(x, y)$ находятся на полярной сетке (рис. 1.5, а), а обратное преобразование Фурье необходимо выполнять на декартовой сетке (рис. 1.5, б) с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ).

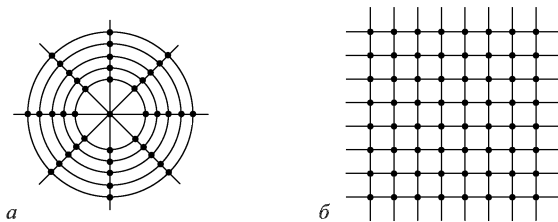


Рис. 1.5. Полярная (а) и декартова (б) сетки отсчётов

Поэтому декартовы отсчёты $M(u, v)$ находят путём интерполяции полярных отсчётов $M(\rho, \psi)$. При этом используется, как правило, линейная интерполяция по ближайшим четырём отсчётам:

$$M_D = \frac{(M_{П1}/d_1) + (M_{П2}/d_2) + (M_{П3}/d_3) + (M_{П4}/d_4)}{(1/d_1) + (1/d_2) + (1/d_3) + (1/d_4)}, \quad (1.46)$$

где M_D — декартов отсчёт; $M_{П1}, \dots, M_{П4}$ — полярные отсчёты; $d_1, \dots, d_4$ — расстояния от декартова отсчёта до соответствующих полярных отсчётов.

Таким образом, метод Фурье-синтеза включает в себя следующую последовательность действий:

$$(\text{БПФ})_1 \rightarrow \text{интерполяция} \rightarrow (\text{ОБПФ})_2,$$

т.е. одномерное быстрое преобразование Фурье каждой проекции и формирование двумерного Фурье-образа на полярной сетке, интерполяция отсчетов двумерного Фурье-образа на полярной сетке для получения отсчетов на декартовой сетке, двумерное обратное быстрое преобразование Фурье для получения конечного изображения.

1.1.5. Метод одномерной фильтрации (метод фильтрованных обратных проекций). Если в методе ро-фильтрации на первом этапе выполнялось обратное проецирование, а затем полученное суммарное изображение подвергалось двумерной фильтрации, результатом которой являлась оценка искомого изображения, то в методе фильтрованных обратных проекций [51, 52] последовательность действий обратная, т.е. сначала осуществляется одномерная фильтрация каждой проекции, после чего производится операция обратного проецирования, результатом которой является оценка искомого изображения. Фактически этот метод оказался наиболее эффективным в вычислительном отношении, вследствие чего во всех коммерческих рентгеновских томографах используются варианты именно этого свёрточного алгоритма.

Запишем выражение для отфильтрованной проекции $f(\xi, \vartheta)$ в следующем виде:

$$f(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_0, \vartheta) h_1(\xi - \xi_0) d\xi_0. \quad (1.47)$$

В этом выражении одномерная функция ядра свёртки $h_1(\xi)$ пока неизвестна и подлежит определению. На втором шаге мы должны произвести операцию обратного проецирования, т.е. найти обратную проекцию $b(x, y, \vartheta)$, т.ч.

$$b(x, y, \vartheta) = f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta), \quad (1.48)$$

и получить суммарное изображение, которое должно сразу же являться оценкой искомого распределения $\mu(x, y)$:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(x, y, \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) d\vartheta. \quad (1.49)$$

Подставляя выражение для обратной проекции (1.48) и для проекции (1.8), получим:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_0, \vartheta) h_1(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi_0) d\xi_0 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi_0) d\xi_0 \times \\
&\times \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_0, y_0) \delta(\xi_0 - x_0 \cos \vartheta - y_0 \sin \vartheta) dx_0 dy_0 \right] = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) d\vartheta \right].
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Теперь видно, что если бы выполнялось соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) d\vartheta = \delta(x) \delta(y), \tag{1.51}$$

то мы получили бы тождество. Таким образом, соотношение (1.51) является определением для функции ядра $h_1(\xi)$. Так как $h_1(\xi)$ является, вообще говоря, обобщённой функцией, попробуем найти фурье-образ $H_1(\chi)$ этой функции. Запишем выражения для $h_1(\xi)$ через обратное одномерное преобразование Фурье от $H_1(\chi)$, а для двумерной δ -функции $\delta(x)\delta(y)$ через обратное двумерное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned}
h_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\chi) e^{i\chi\xi} d\chi, \\
\delta(x)\delta(y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi.
\end{aligned} \tag{1.52}$$

Подставив эти выражения в равенство (1.51), получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\chi) e^{i\chi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} d\vartheta d\chi &= \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Если наложить на искомую функцию условие чётности $H_1(-\chi) = H_1(\chi)$, видно, что получим

$$H_1(\chi) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\chi|. \tag{1.54}$$

Таким образом, функция ядра в фурье-пространстве задаётся формулой (1.54), а для функции ядра в координатном пространстве запишем интегральное представление

$$h_1(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} d\chi. \quad (1.55)$$

Так же, как и в методе ро-фильтрации, введём аподизирующую функцию

$$h_1(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} A_1(\chi) d\chi. \quad (1.56)$$

В качестве аподизирующих часто используют следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} A_1(\chi) &= \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq |\chi| \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } |\chi| > \chi_0; \end{cases} \\ A_1(\chi) &= \begin{cases} \cos(\pi\chi/2\chi_0) & \text{при } 0 \leq |\chi| \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } |\chi| > \chi_0; \end{cases} \\ A_1(\chi) &= \begin{cases} \frac{\sin(\pi\chi/2\chi_0)}{\pi\chi/2\chi_0} & \text{при } 0 \leq |\chi| \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } |\chi| > \chi_0; \end{cases} \\ A_1(\chi) &= \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi\chi/\chi_0) & \text{при } 0 \leq |\chi| \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } |\chi| > \chi_0 \end{cases} \end{aligned} \right\}. \quad (1.57)$$

В последнем случае должно быть $0 \leq \alpha \leq 1$.

Рассмотрим, например, первую из приведённых аподизирующих функций. Подставив её в формулу (1.56), получим

$$\begin{aligned} h_1(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} A_1(\chi) d\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{-\chi_0}^{+\chi_0} |\chi| e^{i\chi\xi} d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\chi_0} \chi \cos(\chi\xi) d\chi = \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\chi_0\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\chi_0\xi}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $\operatorname{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$.

В реальных измерениях проекция $p(\xi, \vartheta)$ получается в виде набора дискретных значений $p(\xi_n, \vartheta) = p(n\Delta\xi, \vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответственно и функция ядра $h_1(\xi_n) = h_1(n\Delta\xi)$. Согласно теореме Котельникова [53], если непрерывная функция $f(x)$ имеет фурье-образ, отличный от нуля только на интервале $[-\chi_0, +\chi_0]$, то она может быть

точно представлена по своим дискретным отсчётам в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\chi_0}\right) \operatorname{sinc}\left[\chi_0\left(x - \frac{n\pi}{\chi_0}\right)\right]. \quad (1.59)$$

Так как использованная аподизирующая функция зануляет фурье-образ $H_1(\chi)$ ядра $h_1(\xi)$ вне интервала $[-\chi_0, +\chi_0]$, то для предотвращения потери информации мы должны снимать отсчёты с дискретностью $\Delta\xi = \pi/\chi_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h_1(n\Delta\xi) &= \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\chi_0 n \Delta\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\chi_0 n \Delta\xi}{2}\right) \right] = \\ &= \begin{cases} \chi_0^2/(4\pi) & (n = 0) \\ 0 & (n = 2k; k = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ -\chi_0^2/(\pi^3 n^2) & (n = 2k + 1; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Полученное выражение для ядра называется фильтром Рамачандрана и Лакшминараянана.

1.1.6. Метод разложения в ряд Фурье (метод А. Кормака). В методе ро-фильтрации используется обратное проецирование проекций для получения суммарного изображения, которое затем подвергается двумерной фильтрации, в результате чего получается искомое изображение. В методе фильтрованных обратных проекций, наоборот, сначала каждая проекция подвергается одномерной фильтрации, а затем используется обратное проецирование отфильтрованных проекций для получения суммарного изображения, которое и является искомым изображением. Рассматривая проекцию $p(\xi, \vartheta)$ как функцию переменной ξ , можно установить связь её одномерного фурье-образа и двумерного фурье-образа искомого изображения, что приводит к методу фурье-синтеза. Последняя оставшаяся возможность — рассмотреть проекцию $p(\xi, \vartheta)$ как функцию переменной ϑ , и, учитывая её ограниченность ($\vartheta \in [0, 2\pi]$), попытаться восстановить искомое изображение, используя разложение проекции в ряд Фурье по переменной ϑ . Именно эта возможность была исследована А. Кормаком в его классических статьях [12, 13] (см. также [54]).

Запишем искомую функцию $\mu(x, y)$ в полярной системе координат $\mu(r, \varphi)$. Тогда по переменной φ , $\varphi \in [0, 2\pi]$, произвольная двумерная функция будет периодической и её можно разложить в ряд Фурье:

$$\mu(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n(r) e^{in\varphi}, \quad (1.61)$$

$$\mu_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (1.62)$$

Аналогично разложим в ряд Фурье по переменной ϑ проекцию $p(\xi, \vartheta)$:

$$p(\xi, \vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(\xi) e^{in\vartheta}, \quad (1.63)$$

$$p_n(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\xi, \vartheta) e^{-in\vartheta} d\vartheta. \quad (1.64)$$

Найдём гармонику $p_n(\xi)$:

$$\begin{aligned} p_n(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) \delta(\xi - r \cos(\varphi - \vartheta)) e^{-in\vartheta} r dr d\varphi d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \delta(\xi - r \cos \psi) e^{in\psi} r dr d\psi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \mu_n(r) \delta(\xi - r \cos \psi) e^{in\psi} r dr d\psi = \int_0^{+\infty} \mu_n(r) C_n(r, \xi) r dr. \end{aligned} \quad (1.65)$$

При этом мы сделали замену $\psi = \varphi - \vartheta$ и обозначили

$$C_n(r, \xi) = \int_0^{2\pi} \delta(\xi - r \cos \psi) e^{in\psi} d\psi. \quad (1.66)$$

Используя свойство δ -функции от сложного аргумента, вычислим функцию $C_n(r, \xi)$:

$$C_n(r, \xi) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \left[e^{in\psi_0^{(1)}} + e^{in\psi_0^{(2)}} \right] \eta(r - |\xi|), \quad (1.67)$$

где $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $\psi_0^{(1)} = \arccos(\xi/r)$ и $\psi_0^{(2)} = 2\pi - \arccos(\xi/r)$. Следовательно,

$$C_n(r, \xi) = \frac{2 \cos(n \arccos(\xi/r))}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|), \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} p_n(\xi) &= \int_0^{+\infty} \mu_n(r) \frac{2 \cos(n \arccos(\xi/r))}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) r dr = \\ &= \int_{|\xi|}^{+\infty} \mu_n(r) \frac{2T_n(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr, \end{aligned} \quad (1.69)$$

где $T_n(\cdot)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода порядка n . Если мы сможем решить получившееся интегральное уравнение относительно гармоник $\mu_n(r)$, то, подставляя её в сумму (1.61), мы сможем вычислить искомую функцию $\mu(r, \varphi)$.

Вычислим для некоторого $z \geq 0$ функцию $g_n(z)$:

$$g_n(z) = \int_z^{+\infty} \frac{z}{\xi} T_n\left(\frac{\xi}{z}\right) \frac{p_n(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} d\xi,$$

$$g_n(z) = \int_z^{+\infty} \frac{z}{\xi} T_n\left(\frac{\xi}{z}\right) \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} d\xi \int_{|\xi|}^{+\infty} 2T_n\left(\frac{\xi}{r}\right) \frac{\mu_n(r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr. \quad (1.70)$$

Поменяв в (1.70) порядок интегрирования (рис. 1.6), получим

$$g_n(z) = \int_z^{+\infty} 2\mu_n(r) dr \int_z^r \frac{rz}{\xi} \frac{T_n(\xi/z)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \frac{T_n(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = \int_z^{+\infty} 2\mu_n(r) I_n(r, z) dr, \quad (1.71)$$

где

$$I_n(r, z) = \int_z^r \frac{rz}{\xi} \frac{T_n(\xi/z)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \frac{T_n(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (1.72)$$

Оказывается, для всех n, r, z величина $I_n(r, z) = \pi/2$. Для того, чтобы доказать это, необходимо убедиться, что $I_0(r, z) = I_1(r, z) = \pi/2$

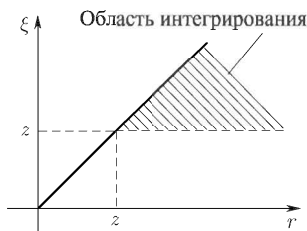


Рис. 1.6. Область интегрирования в (1.70)

и $I_{n+1}(r, z) = I_{n-1}(r, z)$. Хотя в основополагающей работе А. Кормака [12] это доказательство опущено, оно может быть проведено следующим образом:

$$I_0(r, z) = \int_z^r \frac{rz/\xi}{\sqrt{\xi^2 - z^2} \sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2}, \quad (1.73)$$

$$I_1(r, z) = \int_z^r \frac{(rz/\xi)(\xi/z)(\xi/r)}{\sqrt{\xi^2 - z^2} \sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2}. \quad (1.74)$$

Для доказательства равенства $I_{n+1}(r, z) = I_{n-1}(r, z)$ нам понадобятся свойства многочленов Чебышёва, а именно

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (1.75)$$

и

$$\int_a^b \frac{T_{n-1}(x/a)T_n(x/b)}{\sqrt{(b^2 - x^2)(x^2 - a^2)}} dx = \pi \frac{b^{n-1}}{2a^n}. \quad (1.76)$$

Используя эти свойства, получим

$$\begin{aligned} I_{n+1}(r, z) &= \int_z^r \frac{rz}{\xi} \frac{T_{n+1}(\xi/z)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \frac{T_{n+1}(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = I_{n-1}(r, z) - \\ &- \int_z^r \frac{rz}{\xi} 2 \frac{\xi}{z} \frac{T_n(\xi/z)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \frac{T_{n-1}(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi + \int_z^r \frac{rz}{\xi} 2 \frac{\xi}{r} \frac{T_{n+1}(\xi/z)}{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \frac{T_n(\xi/r)}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} d\xi = \\ &= I_{n-1}(r, z) - r\pi \frac{r^{n-1}}{z^n} + z\pi \frac{r^n}{z^{n+1}} = I_{n-1}(r, z). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Таким образом, окончательно

$$g_n(z) = \int_z^{+\infty} 2\mu_n(r) I_n(r, z) dr = \pi \int_z^{+\infty} \mu_n(r) dr. \quad (1.78)$$

Дифференцируя по z , получаем

$$\mu_n(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} g_n(z) \Big|_{z=r} = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{r}{\xi} T_n\left(\frac{\xi}{r}\right) \frac{p_n(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi. \quad (1.79)$$

Итак, зная проекции $p(\xi, \vartheta)$, можно по формуле (1.64) найти гармоники $p_n(\xi)$, затем вычислить гармоники $\mu_n(r)$ по формуле (1.79) и, подставляя их в ряд (1.61), найти искомую функцию $\mu(r, \varphi)$.

Интересная особенность метода А. Кормака заключается в том, что для нахождения искомой функции $\mu(r, \varphi)$ для некоторого значения r необходимо знать значения проекций $p(\xi, \vartheta)$ только при $|\xi| \geq r$, что является решением так называемой внешней задачи, которая возникает при сканировании объекта, имеющего не пропускающее излучение включение [34].

1.1.7. Преобразование Абеля. Для радиально-симметричной функции $\mu(x, y) = \mu(\sqrt{x^2 + y^2}) = \mu(r)$ в полярной системе координат преобразование Радона $p(\xi, \vartheta)$ превращается в частный случай

преобразования Абеля $p(\xi)$:

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \mu(r) \delta(\xi - r \cos \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\mu(r)r}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) dr = \int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{2\mu(r)r}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} dr. \end{aligned} \quad (1.80)$$

История интегрального преобразования Абеля (интегрального уравнения Абеля) восходит к 1823 г., когда Нильс Хенрик Абель обобщил известную задачу о таутохроне. При этом он получил интегральное уравнение вида

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt, \quad (1.81)$$

а также его решение (обратное преобразование):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \quad (1.82)$$

В настоящее время уравнением Абеля (обобщённым уравнением Абеля) принято называть любое уравнение вида

$$g(x) = \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad (1.83)$$

где $0 < \alpha < 1$ и $a > 0$, имеющее решение:

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt. \quad (1.84)$$

Интегрированием по частям можно получить и формулу обращения

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{g(a)}{(x-a)^{1-\alpha}} + \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] dt \right]. \quad (1.85)$$

Часто встречается другая запись, которую можно назвать “внешним” преобразованием Абеля, в отличие от “внутреннего” преобразования Абеля (1.83):

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt, \quad (1.86)$$

имеющую формулу обращения

$$f(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} g(t) dt \quad (1.87)$$

или, после интегрирования по частям,

$$f(x) = -\frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} \left[\frac{d}{dt} g(t) \right] dt. \quad (1.88)$$

Используя общую формулу обращения преобразования Абеля (1.87), можно получить обратное преобразование для (1.80) в виде

$$\mu(r) = -\frac{1}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{\xi p(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi. \quad (1.89)$$

Интегрированием по частям (1.89) приводится к формуле

$$\mu(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \left[\frac{dp(\xi)}{d\xi} \right] d\xi. \quad (1.90)$$

При этом, естественно, считалось выполненным условие регулярности на бесконечности $p(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$.

Заметим, что в методе А. Кормака из (1.79) при $n = 0$ получается формула обращения, отличающаяся от (1.89) и (1.90), а именно

$$\mu(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{+\infty} \frac{rp(\xi)}{\xi \sqrt{\xi^2 - r^2}} d\xi. \quad (1.91)$$

Однако после интегрирования по частям формула (1.91) приводится, как и следовало ожидать, к виду (1.90).

Можно вывести обратное преобразование Абеля непосредственно из обратного преобразования Радона. В качестве исходной возьмём формулу обращения, соответствующую методу фильтрованных обратных проекций:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) h_1(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi) d\xi d\vartheta.$$

Для функции фильтра $h_1(\cdot)$ справедливо интегральное представление (1.55), которое существует в классе обобщённых функций:

$$h(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| e^{i\chi\xi} d\chi = -\frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{\xi^2}, \quad (1.92)$$

где $\wp \frac{1}{\xi^2}$ — обобщённая функция, действующая по правилу

$$\begin{aligned} \left(\wp \frac{1}{\xi^2}, f(\xi) \right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \wp \frac{1}{\xi^2} f(\xi) d\xi \equiv \\ &\equiv \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi^2} d\xi = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(\xi)}{\xi} d\xi, \quad (1.93) \end{aligned}$$

а в.р. — знак интегрирования в смысле главного значения Коши.

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) \left[-\frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)^2} \right] d\xi d\vartheta = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{p(\xi, \vartheta) - p(0, \vartheta)}{(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)^2} \right] d\xi d\vartheta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi} \left[\frac{\partial p(\xi, \vartheta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\vartheta, \quad (1.94) \end{aligned}$$

что представляет собой обратное преобразование Радона в форме Радона, т. е. в той форме, в которой его получил сам И. Радон [1].

В радиально-симметричном случае $p(\xi, \vartheta) = p(\xi)$ и, переходя в полярную систему координат, получим

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r \cos \vartheta - \xi} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi d\vartheta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp(\xi)}{d\xi} \left[\text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos \vartheta - \xi} d\vartheta \right] d\xi. \quad (1.95) \end{aligned}$$

Заметим, что $p(\xi)$ — функция чётная, а $dp(\xi)/d\xi$ — нечётная. Так как

$$\text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r \cos \vartheta - \xi} d\vartheta = \frac{(-2\pi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \text{sign}(\xi), \quad (1.96)$$

где $\text{sign}(\cdot)$ — знаковая функция, получим из обратного преобразования

Радона обратное преобразование Абеля в форме (1.90):

$$\begin{aligned}\mu(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp(\xi)}{d\xi} \left[\frac{(-2\pi)}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta(|\xi| - r) \operatorname{sign}(\xi) \right] d\xi = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (1.97)\end{aligned}$$

1.2. Эмиссионная вычислительная томография и экспоненциальное преобразование Радона

1.2.1. Излучение точечного источника. Перейдём к рассмотрению эмиссионной вычислительной томографии (ЭВТ) [11, 47]. Пусть точечный источник излучает в телесный угол 4π с интенсивностью I_0 в веществе с распределением линейного коэффициента ослабления $\mu(x)$ вдоль прямой, соединяющей источник с небольшой площадкой $\Delta\sigma$, наклонённой под углом φ к этой прямой (рис. 1.7).

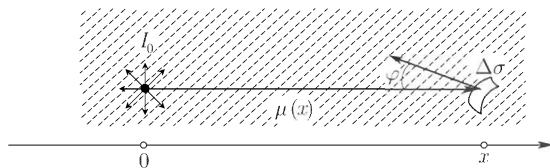


Рис. 1.7. Излучение точечного источника

Тогда для интенсивности $I(x)$, приходящейся на площадку $\Delta\sigma$, напомним

$$I(x) = I_0 \frac{1}{4\pi x^2} \exp \left\{ - \int_0^x \mu(\xi) d\xi \right\} \cos \varphi \Delta\sigma. \quad (1.98)$$

Так как в эмиссионной томографии, в отличие от трансмиссионной, расстояние от источника излучения до детектора является переменным, необходимо в явном виде учесть геометрическое ослабление излучения (фактор $1/x^2$). Кроме того, учтём ослабление излучения веществом среды на пути от источника до детектора, а также наклон площадки детектора излучения (фактор $\cos \varphi$). Таким образом, для вывода основного уравнения ЭВТ необходимо учесть, по крайней мере, четыре основных фактора: пространственное распределение источника излучения, геометрическое ослабление, ослабление излучения в веществе и наклон площадки детектора.

1.2.2. Круговая геометрия измерений в ЭВТ. Рассмотрим задачу восстановления двумерного распределения источников излучения $s(x, y)$. Без ограничения общности можно считать, что область, в

которой распределены источники излучения, целиком расположена в области поглощения излучения, характеризующейся функцией распределения коэффициента ослабления $\mu(x, y)$ (рис. 1.8).

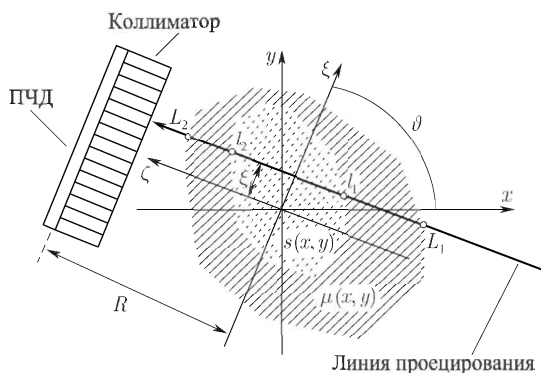


Рис. 1.8. Круговая геометрия измерений в ЭВТ

Процесс измерений выглядит следующим образом. Позиционно-чувствительный детектор (ПЧД) (например, гамма-камера, если регистрируется гамма-излучение), снабжённый многоканальным коллиматором с параллельными каналами, вращается вокруг объекта по окружности радиуса R . При этом за счёт коллиматора каждый элемент ПЧД регистрирует кванты излучения, испущенные источниками, лежащими только на линии проецирования, перпендикулярной детектору и проходящей через этот элемент.

Набор отсчётов, зафиксированных элементами ПЧД, определяет проекцию. Поскольку ПЧД, как правило, является двумерным, берутся либо только отсчёты тех элементов ПЧД, которые лежат в интересующей нас плоскости сечения объекта, либо восстанавливается сразу трёхмерное распределение в наборе независимых параллельных плоскостей, тогда используются все отсчёты ПЧД. Затем система “Коллиматор–Детектор” поворачивается относительно объекта на некоторый угол ϑ , и снимается новый набор отсчётов, определяющий следующую проекцию. Такие измерения повторяются, пока система “Коллиматор–Детектор” не повернётся на угол 2π . По полученному набору одномерных проекций (для одной секущей плоскости в объекте) необходимо восстановить двумерное распределение источников излучения $s(x, y)$.

Поскольку система “Коллиматор–Детектор” вращается вокруг объекта, такая схема измерений, как и в ТВТ, называется круговой геометрией измерений, а т. к. используется коллиматор с параллельными каналами, обеспечивающий параллельность линий проецирования, проекции называют параллельными проекциями.

Обозначим через $s_{\vartheta}(\xi, \zeta)$ распределение источников излучения в системе координат (ξ, ζ) , повернутой относительно неподвижной системы координат (x, y) на угол ϑ , а через $\mu_{\vartheta}(\xi, \zeta)$ — распределение линейного коэффициента ослабления в этой же системе координат:

$$\begin{aligned} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) &= s(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = \\ &= s(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) &= \mu(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) = \\ &= \mu(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (1.100)$$

В частности, $s_{\vartheta=0}(\xi, \zeta) = s(x, y)$ и $\mu_{\vartheta=0}(\xi, \zeta) = \mu(x, y)$. Тогда для интенсивности $p(\xi, \vartheta)$ излучения, прошедшего через объект, т.е. для проекции, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{s_{\vartheta}(\xi, \zeta)}{4\pi(R - \zeta)^2} \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta \right\} d\zeta. \quad (1.101)$$

При этом учтено, что линия проецирования в точках $\ell_1 = \ell_1(\xi, \vartheta)$ и $\ell_2 = \ell_2(\xi, \vartheta)$ пересекает область, в которой распределены источники излучения, а в точках $L_1 = L_1(\xi, \vartheta)$ и $L_2 = L_2(\xi, \vartheta)$ пересекает область, в которой распределено вещество, поглощающее излучение.

Сравним влияние геометрического ослабления и ослабления излучения в веществе. Предположим, что (для данной проекции) $s_{\vartheta}(\xi, \zeta) = C = \text{const}$. Рассмотрим сначала геометрическое ослабление. Тогда, пренебрегая ослаблением излучения в веществе, т.е. полагая $\mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) = 0$, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{C}{4\pi(R - \zeta)^2} d\zeta = \frac{C(\ell_2 - \ell_1)}{4\pi(R - \ell_2)(R - \ell_1)}. \quad (1.102)$$

В то же время, если не учитывать зависимость фактора геометрического ослабления от ζ , получим

$$\tilde{p}(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} \frac{C}{4\pi R^2} d\zeta = \frac{C(\ell_2 - \ell_1)}{4\pi R^2}. \quad (1.103)$$

Примем $R = 25$ см и $(-\ell_1) = \ell_2 = 8$ см (такие размеры характерны для получения томограмм головы человека). Тогда

$$\frac{|p(\xi, \vartheta) - \tilde{p}(\xi, \vartheta)|}{p(\xi, \vartheta)} = \frac{R^2 - (R - \ell_1)(R - \ell_2)}{R^2} \approx 0,102. \quad (1.104)$$

Таким образом, геометрическое ослабление вносит искажения на уровне 10%. Заметим, что задача ЭВТ с учётом геометрического ослаб-

ления в круговой геометрии представляет собой нерешённую задачу в отличие от планарной геометрии измерений и $\mu(x, y) \equiv 0$ [11].

Аналогично, рассматривая ослабление излучения в веществе, положим для простоты $\mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) = \mu = \text{const}$. Пренебрегая геометрическим ослаблением, получим

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} C \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu d\zeta \right\} d\zeta = \frac{C}{\mu} \left[e^{-\mu(L_2 - \ell_2)} - e^{-\mu(L_2 - \ell_1)} \right]. \quad (1.105)$$

Если же не учитывать ослабление излучения в веществе ($\mu = 0$), то

$$\tilde{p}(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} C d\zeta = C(\ell_2 - \ell_1). \quad (1.106)$$

Примем, как и раньше, $(-\ell_1) = \ell_2 = 8$ см и $L_2 = 8$ см, а также $\mu = 0,15$ см⁻¹ (такой коэффициент линейного ослабления соответствует тканям человека и излучению Tc^{99m} с энергией $E_{\gamma} = 140$ кэВ). Тогда

$$\frac{|p(\xi, \vartheta) - \tilde{p}(\xi, \vartheta)|}{p(\xi, \vartheta)} = \frac{|e^{-\mu(L_2 - \ell_2)} - e^{-\mu(L_2 - \ell_1)} - \mu(\ell_2 - \ell_1)|}{e^{-\mu(L_2 - \ell_2)} - e^{-\mu(L_2 - \ell_1)}} \approx 1,637. \quad (1.107)$$

В этом случае получили в 16 раз большее различие. Следовательно, ослаблением излучения в веществе в отличие от геометрического ослабления пренебрегать нельзя.

Возвращаясь к исходному уравнению для проекции (1.101) и пренебрегая геометрическим ослаблением, перепишем его в следующем виде:

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{L_2} \mu_{\vartheta}(\xi, \zeta) d\zeta \right\} d\zeta. \quad (1.108)$$

При этом мы отбросили несущественные постоянные множители. Заметим, что если $\mu(x, y) \equiv 0$, то уравнение (1.108) превращается в преобразование Радона относительно $s(x, y)$, к которому применимы методы, описанные в предыдущем разделе. Если же считать $\mu(x, y)$ неизвестной функцией, которая, так же как и $s(x, y)$, подлежит определению, то в такой постановке эта задача в интегральной форме становится слишком сложной для решения, т.к. нужно по одной двумерной функции $p(\xi, \vartheta)$ восстановить две двумерные функции $\mu(x, y)$ и $s(x, y)$. Тем не менее в обзоре алгебраических методов вычислительной томографии будет рассмотрен один из подходов к решению этой задачи. Другая задача возникает, если считать $\mu(x, y)$ произвольной, но известной функцией. Такой случай возможен, если предварительно определить распределение коэффициента ослабления излучения, например методами трансмиссионной рентгеновской томографии. Решение и этой задачи возможно, по-видимому, только в алгебраической форме.

Рассмотрим промежуточный случай, для которого найдено аналитическое решение. А именно будем считать, что известная функция $\mu(x, y)$ не произвольная, а постоянная, т. е. $\mu(x, y) \equiv \mu = \text{const.}$ Тогда

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{-\mu(L_2 - \zeta)} d\zeta. \quad (1.109)$$

Учитывая, что конфигурация ослабляющей излучение области известна (как правило, этой областью является сам исследуемый объект), можно каждую проекцию скорректировать на постоянный для неё множитель $e^{-\mu L_2}$ и уравнение (1.109) примет вид

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{\ell_1}^{\ell_2} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{\mu \zeta} d\zeta. \quad (1.110)$$

Так как $s_{\vartheta}(\xi, \zeta) = 0$ вне интервала $[\ell_1, \ell_2]$, пределы интегрирования можно продолжить до бесконечности:

$$\begin{aligned} p(\xi, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\vartheta}(\xi, \zeta) e^{\mu \zeta} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} s(x(\xi, \zeta, \vartheta), y(\xi, \zeta, \vartheta)) e^{\mu \zeta} d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(\xi \cos \vartheta - \zeta \sin \vartheta, \xi \sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta) e^{\mu \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Выражение (1.111) называется экспоненциальным преобразованием Радона. С помощью δ -функции Дирака можно, так же как и для преобразования Радона, переписать экспоненциальное преобразование Радона (1.111) в виде

$$p(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) e^{\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} dx dy. \quad (1.112)$$

Исторически сначала были предложены приближенные методы коррекции ослабления излучения для уравнения (1.101), и только впоследствии были разработаны точные методы обращения экспоненциального преобразования Радона. Целью коррекции ослабления излучения является получение из исходных проекций таких скорректированных проекций, которые совпадали бы с проекциями, полученными в отсутствие поглощающей среды [11, 47]. Тогда, применяя к скорректированным проекциям методы, разработанные для обращения преобразования Радона, можно было бы восстанавливать искомое распределение источников излучения, не учитывая ослабление излучения в веществе. Большинство приближенных методов коррекции ослабления излучения

основываются на использовании оппозитных проекций, т.е. проекций $p(\xi, \vartheta)$ и $p(-\xi, \vartheta + \pi)$. Не использующий оппозитных проекций метод корректирующей матрицы даёт, по-видимому, наилучшие результаты среди приближенных методов коррекции ослабления излучения в веществе [61]. Этот метод базируется на итерационном применении алгоритмов ТВТ с коррекцией ослабления излучения в каждой точке получаемых изображений с помощью множителя, полученного в предположении, что существует только один точечный источник в данной точке. Как показали исследования, такой итерационный процесс сходится очень быстро, за 1–2 итерации, правда не к истинному изображению, а к некоторому промежуточному изображению. Кроме того, применение корректирующей матрицы не только компенсирует ослабление излучения в веществе, но и снижает разброс результатов при плохой статистике измерений.

1.2.3. Обратное проецирование в ЭВТ. Приступим к исследованию экспоненциального преобразования Радона (1.112). Попробуем применить к нему идею метода ро-фильтрации. Сначала определим операцию обратного проецирования, чтобы получить суммарное изображение, которое можно было бы подвергнуть двумерной фильтрации и получить в результате оценку искомого изображения — двумерного распределения источников излучения в объекте. Модифицируем определение обратной проекции $b(x, y, \vartheta)$, чтобы, как и в методе ро-фильтрации, можно было получить уравнение свёртки [10]:

$$b(x, y, \vartheta) = p(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)}. \quad (1.113)$$

Физический смысл экспоненциального множителя заключается в частичной компенсации ослабления излучения. Определение суммарного изображения $g(x, y)$ оставим без изменения:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(x, y, \vartheta) d\vartheta. \quad (1.114)$$

Для нахождения связи суммарного изображения $g(x, y)$ с искомой функцией $s(x, y)$ подставим в его определение обратную проекцию (1.113) и проекцию (1.112):

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 dy_0 \int_0^{2\pi} \delta((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) \times \\ &\quad \times e^{-\mu[-(x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta]} d\vartheta. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Используя свойство δ -функции от сложного аргумента, получим

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x_0, y_0) \frac{\text{ch} [\mu \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]}{\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} dx_0 dy_0, \quad (1.116)$$

где $\text{ch}(\cdot)$ — косинус гиперболический.

Таким образом, суммарное изображение $g(x, y)$ является двумерной свёрткой искомой функции $s(x, y)$ с ядром $h_2^\mu(x, y)$:

$$h_2^\mu(x, y) = \frac{\text{ch} [\mu \sqrt{x^2 + y^2}]}{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.117)$$

$$g(x, y) = s(x, y) \otimes \otimes h_2^\mu(x, y). \quad (1.118)$$

Однако для решения свёртки (1.118) нельзя воспользоваться теоремой о свёртке, т. к. преобразования Фурье ядра (1.117) не существует, потому что функция $h_2^\mu(x, y)$ слишком быстро возрастает. Это обстоятельство является следствием замены конечных пределов интегрирования в (1.110) бесконечными.

Таким образом, реализовать метод ро-фильтрации для ЭВТ не удастся. Тем не менее другие методы допускают обобщение на ЭВТ.

1.2.4. Метод фурье-синтеза для ЭВТ. Обобщим метод фурье-синтеза на экспоненциальное преобразование Радона [8]. Запишем выражение для проекции (1.112) в полярных координатах:

$$\begin{aligned} p(\xi, \vartheta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x, y) \delta(\xi - x \cos \vartheta - y \sin \vartheta) e^{\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} dx dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r, \varphi) \delta[\xi - r \cos(\varphi - \vartheta)] e^{\mu r \sin(\varphi - \vartheta)} r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Теперь найдём одномерный фурье-образ $P(\chi, \vartheta, \mu)$ проекции $p(\xi, \vartheta)$ по переменной ξ , указывая при этом в явном виде зависимость от коэффициента ослабления μ , т. к. нас интересует зависимость между $P(\chi, \vartheta, \mu)$ и $P(\chi, \vartheta, \mu = 0)$:

$$\begin{aligned} P(\chi, \vartheta, \mu) &= \mathfrak{F}_1 \{p(\xi, \vartheta)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) e^{-i\xi\chi} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r, \varphi) \delta[\xi - r \cos(\varphi - \vartheta)] e^{\mu r \sin(\varphi - \vartheta)} e^{-i\xi\chi} r dr d\varphi d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r, \varphi) e^{\mu r \sin(\varphi - \vartheta)} e^{-i\chi r \cos(\varphi - \vartheta)} r dr d\varphi. \end{aligned} \quad (1.120)$$

Аналогично

$$P(\chi, \vartheta, \mu = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r, \varphi) e^{-i\xi r \cos(\varphi - \vartheta)} r dr d\varphi. \quad (1.121)$$

Определим такие значения аргументов $\chi'(\chi, \vartheta)$ и $\vartheta'(\chi, \vartheta)$, чтобы выполнялось равенство

$$P(\chi', \vartheta', \mu) = P(\chi, \vartheta, \mu = 0). \quad (1.122)$$

Будем искать функции $\chi'(\chi, \vartheta)$ и $\vartheta'(\chi, \vartheta)$ среди комплекснозначных функций, т. ч.

$$\left. \begin{aligned} \chi'(\chi, \vartheta) &= \chi'_1(\chi, \vartheta) + i\chi'_2(\chi, \vartheta) \\ \vartheta'(\chi, \vartheta) &= \vartheta'_1(\chi, \vartheta) + i\vartheta'_2(\chi, \vartheta) \end{aligned} \right\}, \quad (1.123)$$

где $\chi'_1, \chi'_2, \vartheta'_1, \vartheta'_2$ — вещественные функции вещественных аргументов. Заметим, что мы будем искать не все удовлетворяющие равенству (1.122) функции, а хотя бы один набор таких функций.

Для выполнения равенства (1.122) необходимо выполнение соотношения

$$\mu r \sin(\varphi - \vartheta') - i\chi' r \cos(\varphi - \vartheta') = -i\chi r \cos(\varphi - \vartheta) \quad (1.124)$$

или, более подробно,

$$\begin{aligned} \mu r \sin[\varphi - (\vartheta'_1 + i\vartheta'_2)] - i(\chi'_1 + i\chi'_2) r \cos[\varphi - (\vartheta'_1 + i\vartheta'_2)] = \\ = -i\chi r \cos(\varphi - \vartheta). \end{aligned} \quad (1.125)$$

Используя соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sin(\vartheta_1 + i\vartheta_2) &= \sin \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 + i \cos \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_2 \\ \cos(\vartheta_1 + i\vartheta_2) &= \cos \vartheta_1 \operatorname{ch} \vartheta_2 - i \sin \vartheta_1 \operatorname{sh} \vartheta_2 \end{aligned} \right\}, \quad (1.126)$$

разделим действительную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} \mu \sin(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{ch} \vartheta'_2 + \chi'_2 \cos(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{ch} \vartheta'_2 + \chi'_1 \sin(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{sh} \vartheta'_2 &= 0 \\ -\mu \cos(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{sh} \vartheta'_2 + \chi'_2 \sin(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{sh} \vartheta'_2 - \\ - \chi'_1 \cos(\varphi - \vartheta'_1) \operatorname{ch} \vartheta'_2 &= -\chi \cos(\varphi - \vartheta) \end{aligned} \right\}. \quad (1.127)$$

Из первого равенства получим

$$[\mu \operatorname{ch} \vartheta'_2 + \chi'_1 \operatorname{sh} \vartheta'_2] \sin(\varphi - \vartheta'_1) = [-\chi'_2 \operatorname{ch} \vartheta'_2] \cos(\varphi - \vartheta'_1). \quad (1.128)$$

Так как φ может быть произвольным, то для выполнения первого равенства необходимо выполнение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} \chi'_2 \operatorname{ch} \vartheta'_2 &= 0 \\ \chi'_1 \operatorname{sh} \vartheta'_2 + \mu \operatorname{ch} \vartheta'_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.129)$$

Следовательно, $\chi'_2 = 0$, а $\mu = -\chi_1 \operatorname{sh} \vartheta'_2 / \operatorname{ch} \vartheta'_2$, и из второго равенства получаем

$$-\chi'_1 \cos(\varphi - \vartheta'_1) = -\chi \cos(\varphi - \vartheta) \operatorname{ch} \vartheta'_2. \quad (1.130)$$

Чтобы исключить из полученного соотношения φ , которое может быть произвольным, достаточно положить $\vartheta'_1 = \vartheta$. Тогда получим следующее решение:

$$\left. \begin{array}{l} \chi'_1 = \sqrt{\chi^2 + \mu^2} \\ \chi'_2 = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \vartheta'_1 = \vartheta \\ \vartheta'_2 = -\operatorname{arsh}(\mu/\chi) \end{array} \right\}, \quad (1.131)$$

где $\operatorname{arsh}(\cdot)$ — арксинус гиперболический (ареасинус).

Таким образом, мы показали, что

$$P(\sqrt{\chi^2 + \mu^2}, \vartheta - i \operatorname{arsh}(\mu/\chi), \mu) = P(\chi, \vartheta, \mu = 0). \quad (1.132)$$

Соотношение (1.132) является основным функциональным уравнением в методе фурье-синтеза для ЭВТ. Теперь, используя теорему о центральном сечении в методе фурье-синтеза для ТВТ, получим

$$s(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \mathfrak{F}_2^{-1} \left\{ P(\sqrt{\rho^2 + \mu^2}, \psi - i \operatorname{arsh}(\mu/\rho), \mu) \right\}. \quad (1.133)$$

Напомним, что ρ и ψ — полярные координаты в двумерном фурье-пространстве.

Таким образом, метод фурье-синтеза после соответствующей модификации позволяет обратить экспоненциальное преобразование Радона. При реализации этого метода некоторое затруднение может вызвать получение значений $P(\chi, \vartheta, \mu)$ при комплексных значениях аргумента ϑ . Решается эта проблема с помощью аналитического продолжения. Например, можно поступить следующим образом. Рассмотрим аналитическую функцию $Q(\vartheta) = P(\chi, \vartheta, \mu)$ при фиксированных значениях χ и μ . Так как $Q(\vartheta)$ — периодическая функция с периодом 2π , её можно разложить в ряд Фурье:

$$Q(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k e^{ik\vartheta}, \quad (1.134)$$

где

$$q_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta. \quad (1.135)$$

Тогда при комплексных значениях $\vartheta = \vartheta_1 + i\vartheta_2$

$$Q(\vartheta_1 + i\vartheta_2) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k e^{-k\vartheta_2} e^{ik\vartheta_1} \quad (1.136)$$

и, следовательно,

$$P[\sqrt{\rho^2 + \mu^2}, \psi - i \operatorname{arsh}(\mu/\rho), \mu] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{ik\psi}. \quad (1.137)$$

Заметим, что если $k > 0$, то при суммировании встретятся слагаемые с большими значениями первого экспоненциального множителя, что может привести к чрезмерным вычислительным погрешностям. Однако физическая природа проекций помогает решить эту проблему.

Так как в отсутствие ослабления излучения справедливо равенство

$$p(\xi, \vartheta) = p(-\xi, \vartheta + \pi), \quad (1.138)$$

можно записать

$$P(\chi, \vartheta, \mu = 0) = P(-\chi, \vartheta + \pi, \mu = 0). \quad (1.139)$$

С другой стороны,

$$P(-\chi, \vartheta + \pi, \mu = 0) = P^*(\chi, \vartheta + \pi, \mu = 0), \quad (1.140)$$

где $*$ — знак комплексного сопряжения. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} P(\rho, \psi, \mu = 0) &= P[\sqrt{\rho^2 + \mu^2}, \psi - i \operatorname{arsh}(\mu/\rho), \mu] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{ik\psi}, \end{aligned} \quad (1.141)$$

$$\begin{aligned} P^*(\rho, \psi + \pi, \mu = 0) &= P^*[\sqrt{\rho^2 + \mu^2}, \psi - i \operatorname{arsh}(\mu/\rho) + \pi, \mu] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k^* e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{-ik(\psi + \pi)} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k q_k^* e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{-ik\psi}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

Сравнивая полученные выражения, можно сделать вывод, что

$$q_k e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} = (-1)^k q_{-k}^* e^{-k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)}. \quad (1.143)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P[\sqrt{\rho^2 + \mu^2}, \psi - i \operatorname{arsh}(\mu/\rho), \mu] &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} q_k e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{ik\psi} = \\ &= q_0 + \sum_{k=1}^{k=+\infty} q_k e^{k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{ik\psi} + \sum_{k=1}^{k=+\infty} q_{-k} e^{-k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{-ik\psi} = \\ &= q_0 + \sum_{k=1}^{k=+\infty} (-1)^k q_{-k}^* e^{-k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{ik\psi} + \sum_{k=1}^{k=+\infty} q_{-k} e^{-k \operatorname{arsh}(\mu/\rho)} e^{-ik\psi}. \end{aligned} \quad (1.144)$$

Теперь ряд можно просуммировать без больших вычислительных погрешностей.

1.2.5. Метод одномерной фильтрации (метод фильтрованных обратных проекций) для ЭВТ. Рассмотрим обобщение метода одномерной фильтрации на экспоненциальное преобразование Радона [9,10]. Запишем выражение для фильтрованной проекции $f(\xi, \vartheta)$ в следующем виде:

$$f(\xi, \vartheta) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi_0, \vartheta) h_1^\mu(\xi - \xi_0) d\xi_0. \quad (1.145)$$

В этом выражении одномерная функция ядра свёртки $h_1^\mu(\xi)$ пока неизвестна и подлежит определению. На втором шаге мы должны произвести операцию обратного проецирования, т.е. найти обратную проекцию $b(x, y, \vartheta)$, модифицированную аналогично (1.113), т.ч.

$$b(x, y, \vartheta) = f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)}, \quad (1.146)$$

и получить суммарное изображение, которое и должно быть оценкой искомого распределения $s(x, y)$:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(x, y, \vartheta) d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Подставляя выражение для обратной проекции $b(x, y, \vartheta)$ и для проекции $f(\xi, \vartheta)$, получим

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu((x - x_0) \cos \vartheta + (y - y_0) \sin \vartheta) e^{-\mu(-(x - x_0) \sin \vartheta + (y - y_0) \cos \vartheta)} d\vartheta, \end{aligned} \quad (1.148)$$

т.е. должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta = \delta(x) \delta(y). \quad (1.149)$$

Как и в ТВТ, попробуем найти фурье-образ $H_1^\mu(x)$ этой функции. Запишем выражения для $h_1^\mu(\xi)$ через обратное одномерное преобра-

зование Фурье от $H_1^\mu(\chi)$, а для $\delta(x)\delta(y)$ через обратное двумерное преобразование Фурье:

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^\mu(\chi) e^{i\chi\xi} d\chi, \quad (1.150)$$

$$\delta(x)\delta(y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi. \quad (1.151)$$

Подставим полученные выражения в равенство (1.149), одновременно предположив, что $H_1^\mu(-\chi) = H_1^\mu(\chi)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} H_1^\mu(\chi) e^{i\chi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\chi d\vartheta = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho(x \cos \psi + y \sin \psi)} \rho d\rho d\psi. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Перейдём от декартовых координат (x, y) к полярным координатам (r, φ) :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} H_1^\mu(\chi) e^{i\mu r \sin(\vartheta - \varphi) + i\chi r \cos(\vartheta - \varphi)} d\chi d\vartheta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\psi - \varphi)} \rho d\rho d\psi, \end{aligned} \quad (1.153)$$

и проинтегрируем по ϑ и ψ , воспользовавшись связью между модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка $I_0(x)$ и функцией Бесселя нулевого порядка $J_0(x)$:

$$I_0(x) = J_0(ix), \quad (1.154)$$

а также известным соотношением

$$\int_0^{2\pi} e^{a \sin x + ib \cos x} dx = 2\pi I_0(\sqrt{a^2 - b^2}). \quad (1.155)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^\mu H_1^\mu(\chi) I_0(r\sqrt{\mu^2 - \chi^2}) d\chi + \right. \\ \left. + \int_\mu^{+\infty} H_1^\mu(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi \right] = \int_0^{+\infty} J_0(r\rho) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Для выполнения полученного равенства достаточно взять $H_1^\mu(\chi)$ в виде (рис. 1.9)

$$H_1^\mu(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\chi| < \mu \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\chi| & \text{при } |\chi| \geq \mu. \end{cases} \quad (1.157)$$

Тогда первое слагаемое в левой части равенства исчезнет, а второе после замены переменных совпадёт с правой частью.

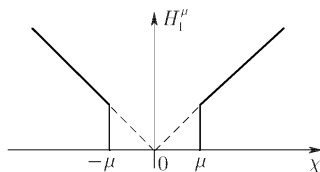


Рис. 1.9. Фурье-образ функции фильтра в методе одномерной фильтрации для ЭВТ

Таким образом, функция ядра в фурье-пространстве даётся формулой (1.157), а для функции ядра в координатном пространстве можно дать интегральное представление:

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1^\mu(\chi) e^{i\chi\xi} d\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi \cos(\chi\xi) d\chi. \quad (1.158)$$

Так же, как и в ТВТ, можно ввести аподизирующую функцию:

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi \cos(\chi\xi) A_1(\chi) d\chi. \quad (1.159)$$

Рассмотрим, например, аналог фильтра Рамачандрана и Лакшминараянана с аподизирующей функцией

$$A_1(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \chi \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } \chi > \chi_0. \end{cases} \quad (1.160)$$

Подставляя эту функцию в выражение для фильтра, получим

$$h_1^\mu(\xi) = \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\chi_0\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\chi_0\xi}{2}\right) \right] - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\mu\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\mu\xi}{2}\right) \right]. \quad (1.161)$$

Теперь найдём дискретное представление фильтра. Дискретным значениям $p(\xi_n, \vartheta) = p(n\Delta\xi, \vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, соответствуют дискретные отсчёты $h_1^\mu(\xi_n) = h_1^\mu(n\Delta\xi)$. По теореме Котельникова для предотвращения потери информации мы должны снимать отсчёты с

дискретностью $\Delta\xi = \pi/\chi_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} h_1^\mu(n\Delta\xi) &= \frac{\chi_0^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\chi_0 n \Delta\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\chi_0 n \Delta\xi}{2}\right) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\text{sinc}(\mu n \Delta\xi) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\mu n \Delta\xi}{2}\right) \right] = \\ &= \begin{cases} \frac{\chi_0^2 - \mu^2}{4\pi}, & n = 0, \\ -a_{2k}, & n = 2k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots, \\ -\frac{\chi_0^2}{\pi^3 n^2} - a_{2k+1}, & n = 2k + 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.162)$$

$$\text{где } a_n = \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\text{sinc}\left(\frac{n\pi\mu}{\chi_0}\right) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{n\pi\mu}{2\chi_0}\right) \right].$$

В отличие от ТВТ дискретное представление этого фильтра имеет более сложный вид.

1.2.6. Аппаратная функция. При исследовании и сравнении методов вычислительной томографии часто используют аппаратную функцию (PSF — point spread function), представляющую собой изображение точечного источника. Если не учитывать искажающие свойства реальной измерительной системы и использовать метод, обеспечивающий точное восстановление, то аппаратная функция, естественно, будет представлять собой δ -функцию Дирака. Тем не менее для реализации любого метода необходимо, как минимум, вводить аподизирующую функцию. С учётом этого обстоятельства аппаратная функция уже не будет иметь идеальную форму δ -функции. Более того, получающаяся форма аппаратной функции может служить основанием для выбора аподизирующей функции.

Найдём связь аппаратной функции $\varepsilon(x, y)$ с аподизирующей функцией $A_1(\chi)$. Из выражения (1.148) по определению аппаратной функции получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{+\infty} \chi e^{i\chi(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta)} A_1(\chi) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\chi d\vartheta. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Повторяя выкладки, сделанные при выводе выражения для функции фильтра, получим

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\mu}^{+\infty} \chi A_1(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} z A_1(\sqrt{z^2 + \mu^2}) J_0(rz) dz, \quad (1.164)$$

т. е. аппаратная функция представляет собой преобразование Ханкеля от аподизирующей функции.

Для простейшей аподизирующей функции

$$A_1(\chi) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \chi \leq \chi_0 \\ 0 & \text{при } \chi \geq \chi_0 \end{cases} \quad (1.165)$$

можно найти явный вид аппаратной функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{+\infty} \chi A_1(\chi) J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mu}^{\chi_0} \chi J_0(r\sqrt{\chi^2 - \mu^2}) d\chi = \frac{\sqrt{\chi_0^2 - \mu^2}}{2\pi r} J_1(r\sqrt{\chi_0^2 - \mu^2}). \end{aligned} \quad (1.166)$$

Наоборот, задавая вид аппаратной функции, можно найти соответствующую аподизирующую функцию. Например, гауссовой аппаратной функции

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-r^2/(2\sigma^2)} \quad (1.167)$$

соответствует аподизирующая функция

$$A_1(\chi) = \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-\sigma^2(\chi^2 - \mu^2)/2}. \quad (1.168)$$

1.2.7. Экспоненциальное преобразование Абеля. Для радиально-симметричной функции $s(x, y) = s(\sqrt{x^2 + y^2}) = s(r)$ экспоненциальное преобразование Радона $p(\xi, \vartheta)$ превращается в экспоненциальное преобразование Абеля $p(\xi)$:

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} s(r) \delta(\xi - r \cos \varphi) e^{\mu r \sin \varphi} r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2s(r) \operatorname{ch}(\mu\sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} \eta(r - |\xi|) r dr = \int_{|\xi|}^{+\infty} \frac{2s(r) \operatorname{ch}(\mu\sqrt{r^2 - \xi^2})}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} r dr. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Выведем обратное экспоненциальное преобразование Абеля непосредственно из обратного экспоненциального преобразования Радона.

В соответствии с методом фильтрованных обратных проекций

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) h_1^\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi) e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\xi d\vartheta. \quad (1.170)$$

Функцию фильтра $h_1^\mu(\cdot)$, так же как и в ТВТ, можно записать через обобщённые функции, используя её интегральное представление (1.158):

$$\begin{aligned} h_1^\mu(\xi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi| [1 - \eta(\mu - |\chi|)] e^{i\chi\xi} d\chi = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{\xi^2} - \frac{\mu^2}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}(\mu\xi) - \frac{1}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\mu\xi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Тогда обратное экспоненциальное преобразование Радона можно записать в форме Радона как

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \vartheta) \left\{ -\frac{1}{2\pi} \wp \frac{1}{(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu^2}{2\pi} \operatorname{sinc}[\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu^2}{4\pi} \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)}{2}\right] \right\} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} d\xi d\vartheta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\mu(x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi)]}{x \cos \vartheta + y \sin \vartheta - \xi} e^{-\mu(-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\partial p(\xi, \vartheta)}{\partial \xi} \right] d\xi d\vartheta. \end{aligned} \quad (1.172)$$

В радиально-симметричном случае $p(\xi, \vartheta) = p(\xi)$ и, переходя в полярную систему координат, получим

$$\begin{aligned} s(r) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\mu(r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi d\vartheta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{\cos[\mu(r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} d\vartheta \right] \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.173)$$

Можно показать, что

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_0^{2\pi} \frac{\cos [\mu (r \cos \vartheta - \xi)]}{r \cos \vartheta - \xi} e^{\mu r \sin \vartheta} d\vartheta = \\ = \frac{(-2\pi) \cos (\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta (|\xi| - r) \operatorname{sign} (\xi). \quad (1.174) \end{aligned}$$

Тогда окончательно получим обратное экспоненциальное преобразование Абея в виде

$$\begin{aligned} s(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\cos (\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \eta (|\xi| - r) \operatorname{sign} (\xi) \right] \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{\cos (\mu \sqrt{\xi^2 - r^2})}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (1.175) \end{aligned}$$

1.3. Алгебраические методы вычислительной томографии

1.3.1. Задача вычислительной томографии в дискретной форме. В отличие от интегральных методов, в которых дискретизация производится только на конечной стадии при численной реализации алгоритма, полученного в непрерывной форме, в алгебраических методах дискретизация осуществляется уже в начале рассмотрения, и дальнейшее описание проводится только в дискретной форме [35]. При этом задача вычислительной томографии сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или реже к системе нелинейных уравнений.

Рассмотрим дискретную форму на примере ЭВТ (рис. 1.10). Пространственная область, в которой находится искомое двумерное распределение источников излучения $s(x, y)$, покрывается сеткой из элементарных ячеек, пронумерованных в произвольном порядке. Хотя на форму элементарных ячеек не накладывается никаких ограничений, обычно их полагают квадратными.

Как и раньше, будем считать, что область, в которой распределены источники излучения, целиком расположена в области поглощения излучения, характеризующейся коэффициентом ослабления μ . Определению в алгебраических методах подлежит вектор-столбец $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дискретная версия искомого распределения:

$$x_i = \iint_{\Omega_i} s(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.176)$$

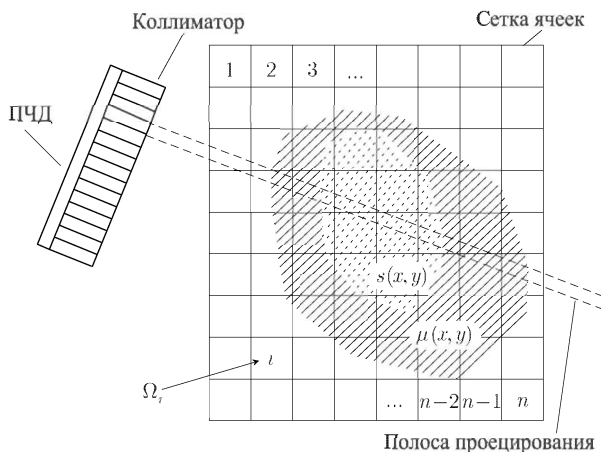


Рис. 1.10. Геометрия измерений при использовании алгебраических методов в ЭВТ

где интегрирование ведётся по i -й элементарной ячейке Ω_i . Обычно полагают, что источник излучения, характеризующийся величиной x_i , расположен в центре элементарной ячейки, либо распределён равномерно по ячейке. Очевидно, чем меньше размеры элементарной ячейки, тем точнее дискретная версия $\vec{x}$ описывает искомое распределение $s(x, y)$. Однако при этом возрастает количество элементарных ячеек, что приводит к возрастанию вычислительных затрат.

Таким образом, задача вычислительной томографии в дискретной форме может быть записана в следующем виде:

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y} + \vec{e}, \quad (1.177)$$

где $\vec{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ — вектор результатов измерений (отсчёты проекций); $\vec{e}^T = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ — вектор погрешностей измерений; $\hat{A} = (a_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ — матрица, элемент a_{ij} которой описывает вклад j -й компоненты x_j в i -е измерение y_i . Часто полагают $\vec{e} \equiv \vec{0}$.

В первом приближении для элементов матрицы $\hat{A}$ можно записать

$$a_{ij} = \frac{\Delta}{4\pi l_{ij}^2} e^{-\mu l_{ij}} b_{ij}, \quad (1.178)$$

где l_{ij} — расстояние от j -й элементарной ячейки до детектора в i -м измерении; Δ — площадь элементарной ячейки детектора; b_{ij} принимает значения 0 или 1 в зависимости от того, попадает ли j -я элементарная ячейка в поле зрения ячейки детектора, соответствующей i -му измерению. Сразу же отметим, что и геометрическое ослабление, и физическое ослабление в алгебраической схеме учитываются почти тривиально.

Погрешность измерений $\vec{\epsilon}$ содержит как систематическую часть, определяемую адекватностью дискретной версии $\vec{x}$ искомому распределению $s(x, y)$ и точностью определения элементов матрицы $\hat{A}$, так и случайную, зависящую от вероятностного характера процессов испускания квантов излучения и их регистрации, а также от случайных помех, накладывающихся на каждое измерение.

В томографии неприменимы прямые методы решения СЛАУ (1.177) по следующим причинам:

1) большая размерность системы (матрица $\hat{A}$ содержит $10^8 \div 10^{10}$ элементов, хотя элементов, отличных от нуля, менее 1%);

2) плохая обусловленность матрицы системы, что делает процедуру обращения матрицы $\hat{A}$ неустойчивой — отражение общей некорректности задачи томографической реконструкции;

3) погрешности в определении элементов матрицы $\hat{A}$ и в измеренных данных, приводящие к недопустимым отклонениям точного решения от истинного;

4) использование неквадратных матриц системы, как переопределённых, так и недоопределённых;

5) трудность учёта в прямых методах априорной информации, такой как неотрицательность и максимальное значение компонент искомого вектора $\vec{x}$, пространственные границы распределения $s(x, y)$ и др.

Таким образом, в томографии применяют, как правило, итерационные методы решения СЛАУ [17, 44]. Хотя интегральные методы значительно превосходят итерационные методы по скорости обработки и вычислительным затратам, алгебраические методы позволяют учесть любые геометрии измерений, различные физические процессы и априорную информацию. При этом часто используются и не всегда очевидные искусственные приёмы, такие как многократная нормировка приближений, селективное сглаживание, вариация релаксационного множителя, изменение порядка следования уравнения в системе, выбор начального приближения и т. д.

Многие итерационные схемы объединяются следующей формулой:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau_k \hat{H}_k [\vec{y} - \hat{A}\vec{x}^{(k)}], \quad (1.179)$$

где $\vec{x}^{(k)}$ — k -е приближение к решению СЛАУ; $\vec{x}^{(k+1)}$ — $(k+1)$ -е приближение к решению СЛАУ; τ_k — последовательность вещественных чисел (релаксационных множителей); $\hat{H}_k$ — последовательность невырожденных матриц.

На каждой итерации необходимо учитывать априорные ограничения на искомое решение. Вводя оператор априорных ограничений $C\{\cdot\}$, можно записать [73]:

$$\vec{x}^{(k)} = C\{\vec{x}^{(k)}\}. \quad (1.180)$$

Хотя для некоторых видов ограничений оператор $C\{\cdot\}$ выразить аналитически бывает сложно, алгоритмически все виды априорной инфор-

мации и эвристические “трюки” реализуются, как правило, достаточно просто.

Подставляя (1.180) в (1.179), получим

$$\vec{x}^{(k+1)} = C\{\vec{x}^{(k)}\} + \tau_k \hat{H}_k \left[\vec{y} - \hat{A}C\{\vec{x}^{(k)}\} \right], \quad (1.181)$$

или, более коротко,

$$\vec{x}^{(k+1)} = F\{\vec{x}^{(k)}\}, \quad (1.182)$$

где $F\{\cdot\}$ — итерационный оператор.

Будем считать, что решение $\vec{x}$, а также все промежуточные приближения $\vec{x}^{(k)}$, принадлежат полному нормированному линейному пространству с нормой, определяемой выражением

$$|\vec{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (1.183)$$

Если для всех $\vec{V}$ и $\vec{W}$, принадлежащих некоторому замкнутому подпространству пространства решений

$$\left| F\{\vec{V}\} - F\{\vec{W}\} \right| \leq r \left| \vec{V} - \vec{W} \right| \quad (1.184)$$

и

$$0 \leq r < 1, \quad (1.185)$$

то оператор $F\{\cdot\}$ называется сжимающим оператором, для которого известна теорема [74] о том, что существует, и притом только одна, точка $\vec{x}$, называемая неподвижной, для которой

$$F\{\vec{x}\} = \vec{x}. \quad (1.186)$$

Из (1.184) следует

$$\left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| \leq \frac{r^{k+1}}{1-r} \left| \vec{x} - \vec{x}^{(0)} \right|, \quad (1.187)$$

т.е. последовательность итераций сходится со скоростью геометрической прогрессии к единственному решению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \vec{x} - \vec{x}^{(k)} \right| = 0. \quad (1.188)$$

Релаксационный множитель в (1.181) используют для того, чтобы оператор $F\{\cdot\}$ стал сжимающим, а также для оптимизации скорости сходимости.

Рассмотренная ситуация является идеальной. При учёте вектора погрешностей $\vec{\epsilon}$ для недоопределённых, для переопределённых и несовместных СЛАУ усложняются само понятие решения системы, определение итерационного процесса и его сходимости.

Для решения томографических СЛАУ использовались как методы, разработанные ранее в вычислительной математике, так и методы,

разработанные непосредственно в томографических целях, в которых учитывается специфика получения проекционных данных. В качестве примера алгоритмов первой группы можно упомянуть широко известный метод простой итерации [39] и метод скорейшего спуска [37], а в качестве примера алгоритмов второй группы — метод ART (algebraic reconstruction technique) [43, 44]; SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique) [45] и ILST (iterative least square technique) [75]. Существует также целая группа алгоритмов, основанная на формуле апостериорной вероятности Байеса [45, 76].

1.3.2. Метод простой итерации. В методе простой итерации [39] релаксационные множители τ_k и матрицы $\hat{H}_k$ не зависят от номера итерации k , причём матрицу $\hat{H}$ часто берут в виде единичной диагональной матрицы. Тогда

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau \hat{H} \left[\vec{y} - \hat{A} \vec{x}^{(k)} \right]. \quad (1.189)$$

Для релаксационного множителя τ подбирается оптимальное значение. Если известны границы для собственных значений λ_i матрицы $\hat{A}$

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}, \quad (1.190)$$

то оптимальное значение τ_{opt} равно

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}. \quad (1.191)$$

В более сложном случае можно считать, что итерации проводят циклами по l итераций в каждом, причём внутри цикла каждая итерация характеризуется своим релаксационным множителем τ_k ($k = 0, 1, \dots, l-1$). Оптимизация внутри одного цикла приводит к методу Ричардсона:

$$\vec{x}^{(lj+k+1)} = \vec{x}^{(lj+k)} + \tau_k \left[\vec{y} - \hat{A} \vec{x}^{(lj+k)} \right], \quad (1.192)$$

где $j = 0, 1, 2, \dots$ — номер цикла. Значения τ_k определяются с помощью многочленов Чебышёва:

$$\tau_k = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max} + (\lambda_{\min} - \lambda_{\max}) \cos(\pi(2k-1)/2l)}. \quad (1.193)$$

Для уменьшения неустойчивости метода Ричардсона применяют приём “перемешивания”, т.е. в каждом следующем цикле изменяют порядок использования множителей τ_k . Недостатком описанных методов является необходимость знания границ $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$.

Для переопределённых СЛАУ можно перейти к симметризованной системе

$$\hat{A}^T \hat{A} \vec{x} = \hat{A}^T \vec{y}, \quad (1.194)$$

что соответствует выбору $\hat{H} = \hat{A}^T$ в (1.189).

1.3.3. Метод скорейшего спуска. Иногда итерационный процесс строят на минимизации некоторого функционала, минимум которого достигается на решении исходной СЛАУ. В методе скорейшего спуска [37] минимизируется квадратичный функционал $\Phi(\vec{x}) = (\vec{y} - \hat{A}\vec{x})^T(\vec{y} - \hat{A}\vec{x})$. Очевидно, что если $\vec{x}$ является решением системы (1.177) при $\vec{e} \equiv 0$, то $\Phi(\vec{x}) = 0$. Так как $\Phi(\vec{x}) \geq 0$, то уменьшая значение квадратичного функционала, мы приближаемся к решению системы (1.177). Рассматривая квадратичный функционал как скалярную функцию в n -мерном пространстве, можно двигаться в направлении её наибольшего убывания, т.е. в направлении $-\text{grad}(\Phi(\vec{x}))$. При этом итерации можно начинать с произвольного вектора $\vec{x}^{(0)}$, а величину смещения α_k на каждом шаге можно находить из условия минимума квадратичного функционала. Таким образом

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha_k \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})). \quad (1.195)$$

Вычислим $\text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))$:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})) &= \text{grad}((\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T(\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})) = \\ &= \text{grad}((\vec{x}^{(k)})^T \hat{A}^T \hat{A} \vec{x}^{(k)} - \vec{y}^T \hat{A} \vec{x}^{(k)} - (\vec{x}^{(k)})^T \hat{A}^T \vec{y} + \vec{y}^T \vec{y}) = \\ &= \hat{A}^T \hat{A} \vec{x}^{(k)} + ((\vec{x}^{(k)})^T \hat{A}^T \hat{A})^T - (\vec{y}^T \hat{A})^T - \hat{A}^T \vec{y} = 2\hat{A}^T(\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (1.196)$$

Рассматривая $\Phi(\vec{x}^{(k+1)})$ как функцию от α_k , можно найти значение α_k , минимизирующее $\Phi(\vec{x}^{(k+1)})$:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}^{(k+1)}) &= (\hat{A}\vec{x}^{(k+1)} - \vec{y})^T(\hat{A}\vec{x}^{(k+1)} - \vec{y}) = \\ &= \alpha_k^2 [\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})) - \\ &- \alpha_k \{ [\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y}) - (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})) \} + \\ &+ (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (1.197)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha_k} [\Phi(\vec{x}^{(k+1)})] &= 2\alpha_k [\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})) - \\ &- [\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y}) - (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)})) = 0, \end{aligned} \quad (1.198)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{[\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y}) + (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))}{2[\hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))]^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))} = \\ &= \frac{(\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T \hat{A} \hat{A}^T (\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})}{2(\hat{A}\vec{x}^{(k)} - \vec{y})^T \hat{A} \hat{A}^T \hat{A} \text{grad}(\Phi(\vec{x}^{(k)}))}. \end{aligned} \quad (1.199)$$

Окончательно получаем следующую итерационную схему:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \frac{[\vec{r}^{(k)}]^T \hat{A} \hat{A}^T \vec{r}^{(k)}}{[\vec{r}^{(k)}]^T \hat{A} \hat{A}^T \hat{A} \hat{A}^T \vec{r}^{(k)}} \hat{A}^T \vec{r}^{(k)}, \quad (1.200)$$

где $\vec{r}^{(k)}$ — вектор невязки, т. ч. $\vec{r}^{(k)} = \vec{y} - \hat{A} \vec{x}^{(k)}$.

Достоинством метода скорейшего спуска является то, что не нужно что-либо знать о собственных значениях матрицы $\hat{A}$. Как и метод простой итерации, метод скорейшего спуска сходится со скоростью геометрической прогрессии, хотя для плохо обусловленных матриц эта сходимость может быть очень медленной. Для ускорения сходимости иногда второе слагаемое в (1.200) умножают на релаксационный множитель, величину которого, близкую к единице, подбирают из других, как правило эмпирических, соображений.

1.3.4. Метод ART. Среди специфически томографических методов одним из наиболее популярных является метод ART (algebraic reconstruction technique), для которого разработано много модификаций [43]. В первоначальном варианте метода ART вычисления проводят по формуле

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \tau_k \frac{y_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k)}}{\vec{a}_i^T \vec{a}_i} \vec{a}_i, \quad (1.201)$$

где $\vec{a}_i^T = [(a_i)_1, (a_i)_2, \dots, (a_i)_n]$ — i -я строка матрицы $\hat{A}$, записанная в виде вектора (столбца) $(a_i)_j \equiv a_{ij}$, а τ_k — релаксационный множитель, находящийся в диапазоне $0 < \tau_k < 2$.

Одна итерация метода ART состоит из двух вложенных циклов, при этом для каждого проекционного значения y_i корректируются все те компоненты вектора $\vec{x}$, которые участвовали в образовании именно этого значения y_i . Поскольку матрица $\hat{A}$ является сильно разреженной, просмотр только линии (полосы) проецирования значительно сокращает количество выполняемых операций.

В методе ART различают частично ограниченный и полностью ограниченный варианты. В частично ограниченном варианте учитывают информацию о неотрицательности значений искомого вектора. Для этого выбирают

$$x_j^{(k+1)} = \max \left\{ 0, x_j^{(k)} + \tau_k \frac{y_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k)}}{\vec{a}_i^T \vec{a}_i} \vec{a}_{ij} \right\}. \quad (1.202)$$

В полностью ограниченном варианте дополнительно учитывают и информацию о максимальном значении Q , которое не может превысить ни одна из компонент искомого вектора:

$$x_j^{(k+1)} = \min \left\{ Q, \max \left\{ 0, x_j^{(k)} + \tau_k \frac{y_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k)}}{\vec{a}_i^T \vec{a}_i} \vec{a}_{ij} \right\} \right\}. \quad (1.203)$$

Геометрически схема метода ART соответствует последовательному ортогональному проецированию на гиперплоскости, определяемые каж-

дым из уравнений решаемой СЛАУ [44]. Замечено, что ограничения на каждой итерации замедляют скорость сходимости итерационного процесса. Поэтому в модификации метода, получившей обозначение ART2 [43], вводится промежуточная оценка $\vec{\xi}^{(k+1)}$, т. ч.

$$\vec{\xi}^{(k+1)} = \vec{\xi}^{(k)} + \tau_k \frac{y_i - \vec{a}_i^T \vec{x}^{(k)}}{\vec{a}_i^T \vec{a}_i} \vec{a}_i, \quad (1.204)$$

по которой определяется очередное приближение $\vec{x}^{(k+1)}$ в частично ограниченном варианте:

$$x_j^{(k+1)} = \max \{0, \xi_j^{(k+1)}\}, \quad (1.205)$$

в полностью ограниченном варианте:

$$x_j^{(k+1)} = \min \{Q, \max \{0, \xi_j^{(k+1)}\}\}. \quad (1.206)$$

Среди других модификаций метода ART интересен мультипликативный вариант MART [44]. При этом все компоненты начального приближения $\vec{x}^{(0)}$ равны единице, а итерации имеют следующий вид:

$$x_j^{(k+1)} = \left(\frac{y_i}{\vec{a}_i^T \vec{x}^{(k)}} \right)^{a_{ij}} x_j^{(k)}. \quad (1.207)$$

Мультипликативный вариант ART обладает тем полезным свойством, что если какая-либо компонента вектора $\vec{x}^{(k)}$ стала равна нулю, то она останется нулевой на всех последующих итерациях. Это свойство позволяет эффективно использовать информацию о границах исследуемого объекта.

Другим замечательным свойством этого алгоритма является то, что он максимизирует энтропию

$$\varepsilon(\vec{x}) = - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n\bar{x}} \ln \left(\frac{x_j}{n\bar{x}} \right), \quad (1.208)$$

где $\bar{x}$ — среднее значение искомого распределения при условии (1.177). Другой вариант мультипликативного алгоритма приведён в [78].

1.3.5. Метод SIRT. Метод SIRT (simultaneous iterative reconstruction technique) был предложен для двух целей [44]. Первая — уменьшить влияние погрешностей измерений, что достигается участием в каждой итерации одновременно всех измеренных величин. Вторая — уменьшить влияние неадекватности определения элементов матрицы СЛАУ простым для реализации способом.

Введём матрицу $\hat{A}^{(0)}$, точно соответствующую условиям измерения. Тогда заданные результаты измерений $\vec{y}$ связаны с искомым вектором $\vec{x}$ точным соотношением

$$\hat{A}^{(0)} \vec{x} = \vec{y}. \quad (1.209)$$

В то же время мы пытаемся решить несколько отличную систему уравнений

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y}, \quad (1.210)$$

в которой матрица $\hat{A}$ заранее определена, но не обязательно совпадает с матрицей $\hat{A}^{(0)}$ или из-за невозможности определить точные значения элементов этой матрицы, или вследствие сознательно сделанных приближений и предположений для облегчения вычисления значений этих элементов, например, по формуле (1.178).

Идея метода SIRT заключается в том, чтобы, модифицировав систему (1.210), приблизить её к системе (1.209). Для этого перейдём в (1.210) к симметричной системе (1.194) и умножим каждый элемент вектора $\hat{A}^T \vec{y}$ на поправочный коэффициент:

$$\hat{A}^T \hat{A}\vec{x} = \hat{D} \hat{A}^T \vec{y}, \quad (1.211)$$

где $\hat{D} = (d_{ij} \delta_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ — диагональная матрица поправочных коэффициентов, δ_{ij} — символ Кронекера. Поправочный коэффициент выбирают таким образом, чтобы для некоторого вектора специального вида компенсация отличия матрицы $\hat{A}$ от матрицы $\hat{A}^{(0)}$ была точной, а в остальных случаях это отличие уменьшалось. Если в качестве такого специального вектора выбрать вектор, все компоненты которого равны единице, то для поправочных коэффициентов d_{ii} получим следующее выражение:

$$d_{ii} = \frac{\sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^n a_{jk}}{\sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(0)}}, \quad (1.212)$$

где a_{ij} и $a_{ij}^{(0)}$ — элементы матриц $\hat{A}$ и $\hat{A}^{(0)}$ соответственно.

Для нахождения поправочных коэффициентов нужно иметь не все элементы $a_{ij}^{(0)}$, а только соответствующие суммы или достаточно точные их оценки. Такие оценки можно получить аналитически, зная форму и физические характеристики среды, в которой распределён радионуклид, или по результатам независимых измерений.

Систему уравнений (1.211) можно решать любым итерационным способом. В [44] описан следующий подход. Запишем систему (1.211) в эквивалентном виде

$$\hat{D}^{(0)} (\hat{D}^{(1)})^{-1} \hat{A}^T \hat{A}\vec{x} = \hat{A}^T \vec{y}, \quad (1.213)$$

где элементы $d_{ij}^{(0)}$ и $d_{ij}^{(1)}$ матриц $\hat{D}^{(0)}$ и $\hat{D}^{(1)}$ соответственно определяются следующим образом:

$$d_{ij}^{(0)} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^n a_{jk}^{(0)} \delta_{ij}, \quad (1.214)$$

$$d_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{k=1}^n a_{jk} \delta_{ij}. \quad (1.215)$$

С учётом введенных матриц $\hat{D}^{(0)}$ и $\hat{D}^{(1)}$ итерационная схема выглядит следующим образом:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + (\hat{D}^{(0)})^{-1} \hat{A}^T \vec{y} - (\hat{D}^{(1)})^{-1} \hat{A}^T \hat{A} \vec{x}^{(k)}, \quad (1.216)$$

что, по существу, соответствует методу простой итерации.

1.3.6. Метод CSP. Наиболее адекватная постановка задачи определения пространственного распределения источников излучения предполагает одновременное определение пространственного распределения коэффициента ослабления излучения в веществе [36]. Полагая, что пространственное распределение коэффициента ослабления излучения $\mu(x, y)$ описывается вектором $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, и сохраняя прежние обозначения, перепишем систему (1.177) с учётом поглощения излучения в виде

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n c_{ijk} \mu_k \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.217)$$

где коэффициенты c_{ijk} характеризуют вклад k -й элементарной ячейки в процесс ослабления излучения от j -го компонента искомого распределения радионуклида в i -м измерении.

Если считать неизвестными и вектор $\vec{x}$ и вектор $\vec{\mu}$, то (1.217) является системой нелинейных уравнений. С учётом погрешности систему нелинейных уравнений (1.217) можно переписать в виде

$$y_i - \varepsilon_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n c_{ijk} \mu_k \right\} \leq y_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.218)$$

где погрешности ε_i являются заданными числами, полученными из независимых оценок.

Введём комбинированный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})$, т. ч.

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= \ln(x_i/x_0), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \xi_i &= \mu_{i-n}, \quad i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{aligned} \right\},$$

где x_0 — произвольная положительная фиксированная константа, и определим функционалы $F_i\{\vec{\xi}\}$ и $G_i\{\vec{\xi}\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$):

$$F_i\{\vec{\xi}\} = -y_i - \varepsilon_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_0 \exp \left\{ \xi_j - \sum_{k=n+1}^{2n} c_{ij(k-n)} \xi_k \right\}, \quad (1.219)$$

$$G_i\{\vec{\xi}\} = -y_i + \varepsilon_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_0 \exp \left\{ \xi_j - \sum_{k=n+1}^{2n} c_{ij(k-n)} \xi_k \right\}. \quad (1.220)$$

Тогда система неравенств запишется в виде

$$\left. \begin{array}{l} F_i \leq 0 \\ G_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1.221)$$

Для решения этой системы был предложен итерационный метод CSP (cyclic subgradient projection) [36]. В соответствии с методом CSP итерации осуществляются в два этапа. На первом этапе вычисляют промежуточный вектор $\tilde{\xi}^{(k+0.5)}$:

$$\tilde{\xi}^{(k+0.5)} = \begin{cases} \tilde{\xi}^{(k)}, & F_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k)} \} \leq 0, \\ \tilde{\xi}^{(k)} - \tau_k \frac{F_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k)} \}}{[\tilde{p}^{(k)}]^T \tilde{p}^{(k)}} \tilde{p}^{(k)}, & F_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k)} \} > 0. \end{cases} \quad (1.222)$$

На втором этапе вычисляют очередное приближение $\tilde{\xi}^{(k+1)}$:

$$\tilde{\xi}^{(k+1)} = \begin{cases} \tilde{\xi}^{(k+0.5)}, & G_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k+0.5)} \} \geq 0, \\ \tilde{\xi}^{(k+0.5)} - \tau_k \frac{G_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k+0.5)} \}}{[\tilde{q}^{(k)}]^T \tilde{q}^{(k)}} \tilde{q}^{(k)}, & G_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k+0.5)} \} < 0. \end{cases} \quad (1.223)$$

Здесь $i_k \equiv k(\bmod m) + 1$ и

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{p}^{(k)} = \text{grad}(F_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k)} \}) \\ \tilde{q}^{(k)} = \text{grad}(G_{i_k} \{ \tilde{\xi}^{(k+0.5)} \}) \end{array} \right\}. \quad (1.224)$$

Релаксационный множитель τ_k подбирается эмпирически, но так, чтобы $0 < \tau_k < 2$.

Исследования показали, что применение метода CSP требует дополнительных “трюков”, без которых сходимость итерационного процесса становится проблематичной. В частности были использованы весовые коэффициенты, позволившие по-разному учитывать компоненты градиентов функционалов $F_i \{ \xi \}$ и $G_i \{ \xi \}$ для распределения источников излучения и для распределения линейного коэффициента ослабления излучения. Кроме того, ограничивались максимально возможные приращения на каждой итерации, что особенно важно в области малых значений восстанавливаемого распределения источников излучения.

Большое значение имеет также выбор начального приближения, в котором желательно максимально использовать априорную информацию, в особенности о пространственном распределении поглощающей среды. В практических применениях, например в медицинской радионуклидной диагностике, такая информация, как правило, имеется, причём иногда довольно подробная. В целом этот подход ещё далёк от завершения, т.к. вследствие нелинейности итерационный процесс неустойчив.

1.3.7. Сравнение алгоритмов. Итерационные методы использовались с момента зарождения вычислительной томографии. Например, в первом непромышленном томографе Г. Хаунсфилда был применён итерационный метод. Однако впоследствии интегральные свёрточные методы практически полностью вытеснили алгебраические в коммерческих томографах. Объясняется это в основном двумя преимуществами свёрточных методов: высокой скоростью обработки и, как правило, лучшим качеством восстановленных изображений. Однако с ростом вычислительной мощности ЭВМ преимущества свёрточных методов уменьшаются, а алгебраические методы становятся конкурентоспособными. При этом становятся более очевидными недостатки свёрточных методов: негибкость в применении к новым физическим ситуациям и геометрия измерений и чувствительность к полноте исходных данных и их зашумлённости. Сравнения итерационных методов друг с другом и со свёрточными алгоритмами посвящены обзоры [35, 44] и специальные исследования [41, 45].

Основным вопросом при оценке разных методов восстановления является выбор критериев, по которым производится сравнение. Наиболее часто используются критерии, оценивающие точность восстановления, и критерии, оценивающие скорость обработки или затраты на обработку.

В качестве меры близости восстановленного изображения $\vec{\tilde{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ к истинному $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно использовать, например, три метрики — среднеквадратичную, абсолютную и максимальную, соответственно:

$$\left. \begin{aligned} D &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x}_i)^2 \right)^{1/2} \\ R &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i| \\ E &= \max_{i \in [1, n]} |x_i - \tilde{x}_i| \end{aligned} \right\}. \quad (1.225)$$

Кроме количественных критериев используются и качественные критерии: устойчивость к систематическим и случайным погрешностям, гибкость при более точном учёте физического процесса измерения исходных данных, лёгкость учёта априорной информации и различных ограничений и т. д. Именно по таким качественным критериям наиболее ярко проявляются преимущества алгебраических методов.

В качестве критериев, оценивающих скорость обработки, часто берут либо время процессора, либо стоимость машинного времени. Иногда дополнительно учитывают требуемую машинную память. Суммируя, можно заключить следующее. При достаточно полных исходных данных, не искажённых шумами, свёрточные методы работают значительно быстрее и дают изображения лучшего качества, чем ите-

рационные методы, за исключением высококонтрастных объектов, для которых свёрточные методы работают плохо из-за чрезмерного сглаживания изображений. Все итерационные методы работают лучше свёрточных при неполных исходных данных, измерениях в ограниченном телесном угле и при малом числе проекций. Сходимость итерационных методов, очень быстрая на первых итерациях, на последующих итерациях сильно замедляется, причём алгоритмы типа ART сходятся значительно быстрее алгоритмов типа SIRT. Алгоритмы квадратичной оптимизации типа ILST занимают по скорости сходимости промежуточное место. Алгоритмы типа SIRT наиболее устойчивы к зашумлённости исходных данных и удовлетворительно работают в тех случаях, когда другие методы дают недопустимые искажения. Алгоритмы типа ART хорошо работают даже при большой недоопределённости исходной СЛАУ ($m < n/3$), а также для высококонтрастных объектов. При этом большое значение имеет использование априорной информации, которую практически невозможно “встроить” в свёрточные алгоритмы.

По-видимому, самым большим преимуществом итерационных методов по сравнению со свёрточными является их удивительная гибкость применительно к новым физическим ситуациям. Если переход от геометрии с параллельными проекциями к геометрии с веерными проекциями потребовал многолетних усилий по развитию математического аппарата свёрточных алгоритмов, в алгебраических методах такой переход осуществляется почти тривиально. Аналогичная ситуация наблюдается и при учёте поглощения излучения в среде. Для применения свёрточных алгоритмов понадобилось развить теорию экспоненциального преобразования Радона, в то время как в алгебраических методах достаточно очевидным образом модифицировать определение элементов матрицы СЛАУ. Метод CSP даёт ещё один пример ситуации, в которой не видно путей для использования свёрточных методов.

Таким образом, алгебраический подход в настоящее время является наиболее универсальным и гибким, особенно в нестандартных случаях. Нет сомнения, что с развитием вычислительной техники алгебраические методы станут ещё более привлекательными, что, в свою очередь, приведёт к дальнейшему их совершенствованию как в плане теоретического обоснования эффективности применяющихся эвристических “трюков”, так и в плане практической реализации.

Глава 2

ТРАНСМИССИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ РАССЕИВАЮЩИХ СРЕД

В последнее время появилось большое количество оригинальных работ [4, 7], а также обзоров [79–83] в области исследования возможности применения томографических подходов к восстановлению внутренних структур в сильнорассеивающих (мутных) биологических средах (СРС). При этом, как правило, под внутренними структурами понимается пространственное распределение макроскопических характеристик СРС, например коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния излучения. Такой интерес обусловлен как практической значимостью оптической томографии СРС, так и научной сложностью самой задачи, поскольку хорошо разработанный математический аппарат традиционной вычислительной томографии, опирающийся на преобразование Радона (см. гл. 1), не работает, если учитывать не только поглощение, но и рассеяние излучения в СРС. Поэтому при разработке томографических подходов приходится начинать с описания прохождения излучения через СРС, что является сложной задачей. В результате такое описание превратилось практически в самостоятельное направление, в котором переход к томографии только подразумевается. В большинстве работ, посвящённых этой теме, практически не обсуждается принципиальный вопрос выбора подлежащих восстановлению параметров СРС. Между тем ответ на этот вопрос в значительной мере зависит от математической модели, используемой для описания прохождения оптического излучения через СРС.

Наиболее общим способом описания взаимодействия оптического излучения с веществом, как известно, являются уравнения Максвелла. Однако непосредственный переход от уравнений Максвелла к томографии в настоящее время вряд ли возможен. Поэтому необходима промежуточная более простая математическая модель, не обязательно самая точная, но обязательно позволяющая осуществить переход к томографии. Использование статистического подхода и аппарата корреляционных функций [84] позволяет получить уравнения Дайсона для средних значений поля и Бете–Солпитера для вторых моментов. Хотя практически эти уравнения бесполезны из-за невозможности их решения, они дают возможность обоснования уравнения переноса излучения (УПИ) [85], являющегося наиболее популярным инструментом как при описании прохождения излучения через СРС, так и в качестве основы для перехода к томографии. Вместе с тем, как правило, урав-

нение переноса излучения выводится из рассмотрения баланса частиц или энергии [86]. При этом считается, что УПИ не описывает чисто волновые свойства излучения. В то же время некоторые существенно волновые свойства, такие как дифракция, всё-таки в какой-то мере содержатся в УПИ, а другие, такие как поляризация, могут быть описаны путём модификации УПИ [87, 88].

Задачу оптической томографии СРС на базе УПИ можно описать следующим образом. Облучая исследуемый объект лучами лазера под разными ракурсами и измеряя выходящее из объекта излучение, описываемое уравнением переноса, необходимо восстановить пространственные характеристики рассеивающей среды, которые входят как феноменологические параметры в уравнение переноса излучения — так называемая обратная задача. Важнейшими характеристиками рассеивающей среды, входящими в уравнение переноса, являются коэффициент поглощения излучения $\mu_a(\vec{r})$ и дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (пространственно неоднородная индикатриса рассеяния) $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$, где $\vec{r}$ — точка среды, $\vec{\Omega}'$ и $\vec{\Omega}$ — направления фотона до рассеяния и после рассеяния соответственно. Таким образом, в наиболее общей постановке задачи можно говорить о восстановлении двух независимых функций, зависящих от трёх ($\mu_a(\vec{r})$) и семи ($\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$) переменных. Так как в такой постановке задача становится слишком трудной не только для решения, но и для интерпретации результатов восстановления, то рассматриваются, как правило, более простые модели и, соответственно, более простые объекты восстановления. Например, с большой степенью обоснованности рассеяние в биологических средах можно считать симметричным относительно первоначального направления, т. е. функция $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ на самом деле зависит не от двух векторов $\vec{\Omega}$ и $\vec{\Omega}'$, а только от их скалярного произведения ($\vec{\Omega}'\vec{\Omega}$), т. е. от угла между этими векторами $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega})$. Таким образом, получим зависимость дифференциального коэффициента рассеяния от четырёх переменных. Часто делается предположение, что $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r})p(\vec{\Omega}'\vec{\Omega})$, при этом $\mu_s(\vec{r})$ называют коэффициентом рассеяния, а $p(\vec{\Omega}'\vec{\Omega})$ — фазовой функцией (индикатрисой рассеяния), однако в применении к томографическим исследованиям пространственно неоднородных объектов такое предположение вряд ли всегда оправдано, т. к. угловые характеристики рассеяния могут существенно различаться для разных точек объекта. Отметим, что даже при использовании моделей, не опирающихся на УПИ, как правило, имеют в виду макроскопические феноменологические характеристики СРС, входящие в УПИ, такие как коэффициенты поглощения и рассеяния, а также величины, производные от них, например средняя длина пробега между рассеяниями и др. К таким моделям можно отнести модель случайного блуждания на трёхмерной решётке [89–91], описание с помощью марковской цепи [92], а также двухпотокую модель Кубелки–Мунка [87, 93] и её обобщение — се-

мипотоковую модель [94]. Подчеркнём ещё раз, что объект восстановления определяется теоретической моделью, выбранной для описания взаимодействия излучения со средой.

Так как в общем случае УПИ аналитического решения не имеет, особую важность приобретают методы упрощения УПИ при дополнительных предположениях, некоторые из которых будут описаны ниже. В большинстве литературных источников аппроксимации УПИ излагаются либо на примере стационарного УПИ, либо для однородной среды. Поэтому в рассмотренных подходах будут учитываться, по возможности, как зависимость источников излучения от времени, так и зависимость характеристик среды от пространственных переменных. Заметим, что численное решение УПИ [95], а также моделирование прохождения излучения через СРС методом Монте-Карло [96, 97], самостоятельного значения не имеют. Эти методы используются, как правило, для верификации аналитических моделей.

2.1. Нестационарное уравнение переноса излучения в неоднородных средах. Основные приближения

Уравнение переноса излучения в односкоростном приближении можно записать в следующем виде [86, 87]:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \oint_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (2.1)$$

где v — скорость света в среде, $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ — плотность потока фотонов в точке $\vec{r}$ в момент времени t , движущихся в направлении $\vec{\Omega}$, $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ — дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (индикатриса рассеяния), причём естественно считать, что $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')$, $\mu_a(\vec{r})$ — коэффициент поглощения излучения, $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ — функция распределения источников излучения и $\mu(\vec{r})$ — коэффициент ослабления (экстинкции), т. ч.

$$\mu(\vec{r}) = \mu_a(\vec{r}) + \oint_{4\pi} \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') d\Omega'. \quad (2.2)$$

При этом считается, что уравнение (2.1) описывает процесс прохождения излучения через СРС в некоторой замкнутой области Γ , на границе $\partial\Gamma$ которой известны результаты измерений $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Gamma}$.

2.1.1. Разложение по кратностям рассеяния. Разделяя фотоны, находящиеся в окрестности точки $\vec{r}$ и движущиеся в направлении $\vec{\Omega}$, на группы, соответствующие количеству рассеяний, испытанных

ими за время t , получим так называемое разложение по кратностям рассеяния [86]:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (2.3)$$

где индекс n соответствует кратности рассеяния. Полагая в (2.1) $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = 0$, получим уравнение для нерассеянных фотонов:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu(\vec{r}) \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (2.4)$$

решение которого имеет вид [86, 98]

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = & \Phi_0(\vec{r} - vt\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, 0) \exp \left[- \int_0^t v \mu \left(\vec{r} - v(t - \tau)\vec{\Omega} \right) d\tau \right] + \\ & + \int_0^t v S \left(\vec{r} - v(t - \tau)\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, \tau \right) \exp \left[- \int_{\tau}^t v \mu \left(\vec{r} - v(t - \tau')\vec{\Omega} \right) d\tau' \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как в начальный момент времени никаких фотонов нет, т.е. $\Phi_0(\vec{r} - vt\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, 0) = 0$, то, обозначая $R' = v(t - \tau')$ и $R = v(t - \tau)$, получим

$$\Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \int_0^{vt} S \left(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}, t - R/v \right) \exp \left[- \int_0^R \mu \left(\vec{r} - R'\vec{\Omega} \right) dR' \right] dR. \quad (2.6)$$

Физический смысл формулы (2.6) совершенно очевиден. В момент времени t в точке $\vec{r}$ в направлении $\vec{\Omega}$ могут двигаться только те фотоны, которые испущены в направлении $\vec{\Omega}$ источниками, лежащими на расстоянии R от точки $\vec{r}$, на линии, проходящей через точку $\vec{r}$. Причём $R \leq vt$. Величину

$$\tau = \exp \left[- \int_0^R \mu \left(\vec{r} - R'\vec{\Omega} \right) dR' \right] \quad (2.7)$$

называют оптическим расстоянием.

Для фотонов, испытавших хотя бы одно рассеяние, справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} \Phi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu(\vec{r}) \Phi_n(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - \\ - \oint\!\!\!\oint_{4\pi} \Phi_{n-1}(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Распространение световых импульсов в однородной рассеивающей среде в приближении одно- и двукратного рассеяния изучалось в работе [99].

2.1.2. Приближение малых углов и приближение Фоккера–Планка. Считая индикатрису рассеяния такой, что в каждом рассеянии направление фотона изменяется мало, получим так называемое приближение малых углов или малоугловое приближение [86–88]. Будем считать, что индикатриса рассеяния $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega})$. Тогда в сферической системе координат скалярное произведение векторов $\vec{\Omega} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ и $\vec{\Omega}' = (\sin \vartheta' \cos \varphi', \sin \vartheta' \sin \varphi', \cos \vartheta')$ можно записать в виде

$$\vec{\Omega}\vec{\Omega}' = \cos \psi = \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta', \quad (2.9)$$

где $\varphi, \vartheta, \varphi', \vartheta'$ — стандартные полярный и азимутальный углы в нештрихованной и штрихованной системах координат соответственно, причём угол ψ мал. Если первоначальные фотоны испущены вдоль оси z , то и угол ϑ , и угол ϑ' так же малы. Тогда с точностью до второго порядка малости

$$\vec{\Omega}\vec{\Omega}' = \cos \psi = 1 - \frac{\psi^2}{2} = \vartheta \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + 1 - \frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta'^2}{2}, \quad (2.10)$$

или

$$\psi = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 2\vartheta\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (2.11)$$

Обозначим $\vec{s} = (\vartheta \cos \varphi, \vartheta \sin \varphi)$ и $\vec{s}' = (\vartheta' \cos \varphi', \vartheta' \sin \varphi')$ — двумерные векторы в плоскостях x – y и x' – y' соответственно. Нетрудно видеть, что по форме $\vartheta, \vartheta', \varphi, \varphi'$ совпадают с полярным углом и полярным радиусом в некоторой полярной системе координат (соответственно нештрихованной и штрихованной). Тогда

$$\psi = \sqrt{\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 2\vartheta\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')} = |\vec{s} - \vec{s}'|, \quad (2.12)$$

следовательно, $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r}, \cos \psi) = \mu_s(\vec{r}, \psi) = \mu_s(\vec{r}, |\vec{s} - \vec{s}'|)$. Интеграл столкновений в (2.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \oint\limits_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' &\approx \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \Phi(\vec{r}, \vec{s}', t) \mu_s(\vec{r}, |\vec{s} - \vec{s}'|) \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \approx \\ &\approx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{-\infty} \Phi(\vec{r}, \vec{s}', t) \mu_s(\vec{r}, |\vec{s} - \vec{s}'|) d\sigma'_s, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $d\sigma'_s = ds'_x ds'_y = \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ — элемент площади, при этом учтено, что для малых ϑ' справедливо $\sin \vartheta' \approx \vartheta'$. Кроме того, т. к. для больших ϑ' индикатриса рассеяния пренебрежимо мала по исходному предположению, можно предел интегрирования по ϑ' продлить до бесконечности.

Градиентный член в уравнении (2.1) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) &= \vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \vec{\Omega} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \\
 &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \approx \\
 &\approx \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi(\vec{r}, \vec{s}, t) + \vartheta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\vec{r}, \vec{s}, t) + \vartheta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \Phi(\vec{r}, \vec{s}, t) = \\
 &= \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \vec{s} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t), \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

где вектором $\vec{\rho} = (x, y)$ обозначен двумерный вектор с проекциями x, y , а $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ и $\vec{\nabla}_{\vec{\rho}}$ — трёхмерный и двумерный операторы Гамильтона соответственно.

Таким образом, в приближении малых углов УПИ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \vec{s} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \\
 + \mu(z, \vec{\rho}) \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}', t) \mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s} - \vec{s}'|) d\sigma'_s = \\
 = S(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t). \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Предполагая дополнительно, что $\Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}', t)$ изменяется медленнее, чем $\mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s} - \vec{s}'|)$, можно получить так называемое приближение Фоккера–Планка. Делая замену переменных $\vec{s}'' = \vec{s} - \vec{s}'$ и раскладывая $\Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s} - \vec{s}'', t)$ в ряд Тейлора вблизи точки $\vec{s}$ с точностью до второго порядка малости, т. ч.

$$\begin{aligned}
 \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s} - \vec{s}'', t) &= \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) - s''_x \frac{\partial}{\partial s_x} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) - s''_y \frac{\partial}{\partial s_y} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \\
 &+ \frac{s''_x{}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s_x^2} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \frac{s''_y{}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s_y^2} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + s''_x s''_y \frac{\partial^2}{\partial s_x \partial s_y} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t), \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

вычислим интеграл столкновений:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s} - \vec{s}'', t) \mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s}''|) d\sigma''_s &= \mu_s(z, \vec{\rho}) \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \\
 &+ \mu_s(z, \vec{\rho}) \overline{s^2}(z, \vec{\rho}) \left[\frac{\partial^2}{\partial s_x^2} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \frac{\partial^2}{\partial s_y^2} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) \right] = \\
 &= \mu_s(z, \vec{\rho}) \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \frac{1}{4} \mu_s(z, \vec{\rho}) \overline{s^2}(z, \vec{\rho}) \Delta_{\vec{s}} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t). \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{\vec{s}}\Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) = \frac{\partial^2}{\partial s_x^2}\Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \frac{\partial^2}{\partial s_y^2}\Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t)$ — двумерный оператор Лапласа и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} \mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s}''|) d\sigma_s'' = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \mu_s(z, \vec{\rho}, \vartheta'') \vartheta'' d\vartheta'' d\varphi'' = \mu_s(z, \vec{\rho}), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} s_x''^2 \mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s}''|) d\sigma_s'' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} s_y''^2 \mu_s(z, \vec{\rho}, |\vec{s}''|) d\sigma_s'' = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \vartheta''^2 \mu_s(z, \vec{\rho}, \vartheta'') \vartheta'' d\vartheta'' = \frac{1}{2} \mu_s(z, \vec{\rho}) \overline{s''^2}(z, \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Остальные слагаемые в разложении (2.16) при интегрировании по φ'' обратятся в нуль. Величину $\overline{s''^2}(z, \vec{\rho})$ называют средним квадратом угла рассеяния. Окончательно в приближении Фоккера–Планка УПИ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \vec{s} \vec{\nabla}_{\vec{\rho}} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) + \\ + \mu_a(z, \vec{\rho}) \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) - \frac{1}{4} \mu_s(z, \vec{\rho}) \overline{s''^2}(z, \vec{\rho}) \Delta_{\vec{s}} \Phi(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t) = S(z, \vec{\rho}, \vec{s}, t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Иногда для упрощения в (2.20) пренебрегают величиной ϑ^2 .

Решение однородного стационарного УПИ в приближении малых углов для однородной среды, но при произвольной фазовой функции, приведено в [100]. Распространение узкого стационарного пучка света в приближении Фоккера–Планка при тех же условиях рассмотрено в работе [101]. Приближение малых углов для широкого импульсного пучка в однородной среде, но для разных фазовых функций, использовано в работе [102]. Интересная комбинация для описания обратного рассеяния импульсного пучка предложена в работе [103]. Фотоны, движущиеся вперёд, описываются в малоугловом приближении, затем изменение движения на обратное описывается в приближении однократного рассеяния, и, наконец, фотоны, движущиеся назад, так же описываются в малоугловом приближении.

2.1.3. Разложение по сферическим гармоникам (P_N -приближение). Плотность потока $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \Phi(\vec{r}, \vartheta, \varphi, t)$ как функцию угловых переменных ($\vartheta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) всегда можно разложить в ряд по полной системе ортонормированных сферических функций (гармоник) [104, 105]:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} \Phi_{jm}(\vec{r}, t) Y_{jm}(\vec{\Omega}), \quad (2.21)$$

$$\Phi_{jm}(\vec{r}, t) = \oint\limits_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) Y_{jm}^*(\vec{\Omega}) d\Omega, \quad (2.22)$$

$$\oint\limits_{4\pi} Y_{jm}(\vec{\Omega}) Y_{j'm'}^*(\vec{\Omega}) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \quad (2.23)$$

где $Y_{jm}(\vec{\Omega}) = Y_{jm}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2j+1}{2} \frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!}} P_j^{|m|}(\cos \vartheta)$ — сферические функции, $P_j^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x)$ — присоединённые функции Лежандра, $P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2-1)^j$ — многочлены Лежандра, $j = 0, 1, 2, \dots$, $m = -j, -j+1, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, j-1, j$, δ_{ij} — символ Кронекера, * — знак комплексного сопряжения [106, 107]. Поэтому можно от уравнения (2.1) относительно $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ перейти к системе уравнений относительно коэффициентов $\Phi_{jm}(\vec{r}, t)$ разложения функции $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ в ряд (2.21) [86, 108]. Сначала преобразуем интеграл столкновений. Так как индикатриса рассеяния $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}'\vec{\Omega}) = \mu_s(\vec{r}, \cos \psi)$, то её можно разложить в ряд по полиномам Лежандра:

$$\mu_s(\vec{r}, \cos \psi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{2} \mu_s^{(j)}(\vec{r}) P_j(\cos \psi), \quad (2.24)$$

$$\mu_s^{(j)}(\vec{r}) = \int_0^{\pi} \mu_s(\vec{r}, \cos \psi) P_j(\cos \psi) \sin \psi d\psi. \quad (2.25)$$

Учитывая (2.9), теорему сложения для полиномов Лежандра [105, 106]

$$\begin{aligned} P_j(\cos \psi) &= P_j(\cos \vartheta) P_j(\cos \vartheta') + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\cos \vartheta) P_j^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi') = \\ &= \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^{+j} Y_{jm}(\vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') \end{aligned} \quad (2.26)$$

и соотношение ортогональности (2.23), интеграл столкновений можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \oint\limits_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' &= \oint\limits_{4\pi} \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{+j'} \Phi_{j'm'}(\vec{r}, t) Y_{j'm'}(\vec{\Omega}') \times \\ &\times 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} \mu_s^{(j)}(\vec{r}) Y_{jm}(\vartheta, \varphi) Y_{jm}^*(\vartheta', \varphi') d\vec{\Omega}' = \end{aligned}$$

$$= 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{+j} \Phi_{jm}(\vec{r}, t) \mu_s^{(j)}(\vec{r}) Y_{jm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.27)$$

Используя свойства присоединённых функций Лежандра [106, 107], т. е.

$$\sqrt{1-x^2} P_j^m(x) = \frac{1}{2j+1} [P_{j+1}^{m+1}(x) - P_{j-1}^{m+1}(x)], \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} P_j^m(x) = \frac{1}{2j+1} [(j+m-1)(j+m) P_{j-1}^{m-1}(x) - \\ - (j-m+1)(j-m+2) P_{j+1}^{m-1}(x)], \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\int_{-1}^1 P_j^m(x) P_{j'}^m(x) dx = \frac{2}{2j+1} \frac{(j+m)!}{(j-m)!} \delta_{jj'}, \quad (2.30)$$

можно показать, что для сферических функций справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \oint_{4\pi} Y_{jm}^*(\vec{\Omega}) Y_{j'm'}(\vec{\Omega}) \sin \vartheta \cos \varphi d\Omega = (a_{x1} \delta_{j-1,j'} - a_{x2} \delta_{j+1,j'}) \delta_{m-1,m'} - \\ - (a_{x3} \delta_{j-1,j'} - a_{x4} \delta_{j+1,j'}) \delta_{m+1,m'}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \oint_{4\pi} Y_{jm}^*(\vec{\Omega}) Y_{j'm'}(\vec{\Omega}) \sin \vartheta \sin \varphi d\Omega = (a_{y1} \delta_{j-1,j'} - a_{y2} \delta_{j+1,j'}) \delta_{m-1,m'} + \\ + (a_{y3} \delta_{j-1,j'} - a_{y4} \delta_{j+1,j'}) \delta_{m+1,m'}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\oint_{4\pi} Y_{jm}^*(\vec{\Omega}) Y_{j'm'}(\vec{\Omega}) \cos \vartheta d\Omega = [a_{z1} \delta_{j-1,j'} + a_{z2} \delta_{j+1,j'}] \delta_{mm'}, \quad (2.33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{x1} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(j+m-1)(j+m)}{4j^2-1}} \operatorname{sign}\left(m - \frac{1}{2}\right) \\ a_{x2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(j-m+1)(j-m+2)}{4(j+1)^2-1}} \operatorname{sign}\left(m - \frac{1}{2}\right) \\ a_{x3} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(j-m-1)(j-m)}{4j^2-1}} \operatorname{sign}\left(m + \frac{1}{2}\right) \\ a_{x4} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(j+m+1)(j+m+2)}{4(j+1)^2-1}} \operatorname{sign}\left(m + \frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\}, \quad (2.34)$$

$$a_{y1} = -ia_{x1}, \quad a_{y2} = -ia_{x2}, \quad a_{y3} = -ia_{x3}, \quad a_{y4} = -ia_{x4}, \quad (2.35)$$

$$a_{z1} = \sqrt{\frac{j^2-m^2}{4j^2-1}}, \quad a_{z2} = \sqrt{\frac{(j+1)^2-m^2}{4(j+1)^2-1}}, \quad (2.36)$$

а $\text{sign}(\cdot)$ — знаковая функция: $\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. В выражении (2.34) $\pm 1/2$ введены для правильного выбора знаков при $m = 0$.

Подставляя (2.21) и (2.27) в (2.1), умножая обе части получившегося равенства на $Y_{jm}^*(\vec{\Omega})$, интегрируя по полному телесному углу и используя (2.31)–(2.36), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{jm}(\vec{r}, t) + \vec{A}_1 \text{grad} \Phi_{j-1, m-1}(\vec{r}, t) + \vec{A}_2 \text{grad} \Phi_{j+1, m-1}(\vec{r}, t) + \\ & + \vec{A}_3 \text{grad} \Phi_{j-1, m+1}(\vec{r}, t) + \vec{A}_4 \text{grad} \Phi_{j+1, m+1}(\vec{r}, t) + \vec{A}_5 \text{grad} \Phi_{j-1, m}(\vec{r}, t) + \\ & + \vec{A}_6 \text{grad} \Phi_{j+1, m}(\vec{r}, t) + [\mu(\vec{r}) - 2\pi\mu_s^{(j)}(\vec{r})] \Phi_{jm}(\vec{r}, t) = S_{jm}(\vec{r}, t), \\ & j = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -j, -j+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, j-1, j, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \begin{pmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -a_{x2} \\ -a_{y2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -a_{x3} \\ a_{y3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{A}_4 &= \begin{pmatrix} a_{x4} \\ -a_{y4} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{z1} \end{pmatrix}, \quad \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{z2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$S_{jm}(\vec{r}, t) = \oint\limits_{4\pi} S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) Y_{jm}^*(\vec{\Omega}) d\Omega. \quad (2.39)$$

Так как система (2.37) бесконечна, её ограничивают некоторым значением $j = N$, при этом считают, что $\Phi_{jm}(\vec{r}, t) = 0$, $S_{jm}(\vec{r}, t) = 0$, $\mu_s^{(j)}(\vec{r}) = 0$ для всех $j > N$. Такое приближение получило название P_N -приближения. При этом целесообразно предварительно выделить из $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ так называемую когерентную составляющую $\Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$, которая является решением уравнения (2.1) при $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = 0$. Чтобы учесть такое выделение, достаточно в (2.39) заменить $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ на $\oint\limits_{4\pi} \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega'$. Так как с ростом N резко возрастает

объём вычислений, необходимых для решения системы (2.37), наибольшее внимание привлекают аппроксимации с малым значением N , чаще всего P_1 -приближение. Иногда используют аппроксимации более высокого порядка, например P_3 -приближение [109], в основном с целью оценки точности других моделей.

2.1.4. P_1 -приближение. P_1 -приближение, следуя [87], можно получить менее громоздким способом [110]. В P_1 -приближении удерживаются первые четыре слагаемых ряда (2.21), которые можно представить в виде одной скалярной величины $\Phi_d(\vec{r}, t)$ и одной векторной

$\vec{F}_d(\vec{r}, t)$. Кроме того, выделим когерентную составляющую $\Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$, без чего P_1 -приближение будет заведомо плохо описывать плотность потока, особенно для анизотропных источников. Таким образом, плотность потока имеет следующий вид:

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \Phi_d(\vec{r}, t) + (\vec{F}_d(\vec{r}, t)\vec{\Omega}). \quad (2.40)$$

Здесь $\Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu(\vec{r}) \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (2.41)$$

решение которого даётся формулой (2.5), а $\Phi_d(\vec{r}, t)$ и $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$ — соотношениям:

$$\Phi_d(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{4\pi} [\Phi_d(\vec{r}, t) + (\vec{F}_d(\vec{r}, t)\vec{\Omega})] d\Omega, \quad (2.42)$$

$$\vec{F}_d(\vec{r}, t) = \frac{3}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{4\pi} [\Phi_d(\vec{r}, t) + (\vec{F}_d(\vec{r}, t)\vec{\Omega})] \vec{\Omega} d\Omega. \quad (2.43)$$

Подставляя (2.40) в (2.1) и интегрируя по телесному углу, получим скалярное уравнение, а умножая обе части уравнения перед интегрированием на $\vec{\Omega}$, получим векторное уравнение. Они образуют следующую основную систему уравнений для $\Phi_d(\vec{r}, t)$ и $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(\vec{r}, t) + \frac{1}{3} \text{div} \vec{F}_d(\vec{r}, t) + \mu_a(\vec{r}) \Phi_d(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}, t) \\ \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}_d(\vec{r}, t) + \text{grad} \Phi_d(\vec{r}, t) + [\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r})] \vec{F}_d(\vec{r}, t) = \vec{S}_1(\vec{r}, t), \end{cases} \quad (2.44)$$

где

$$S_0(\vec{r}, t) = \frac{\mu_s(\vec{r})}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{4\pi} \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) d\Omega', \quad (2.45)$$

$$\vec{S}_1(\vec{r}, t) = \frac{3\mu_s(\vec{r})}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{4\pi} \Phi_c(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \vec{\Omega}' d\Omega', \quad (2.46)$$

$$\mu_1(\vec{r}) = \oint\!\!\!\oint_{4\pi} \vec{\Omega}' \vec{\Omega}' \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega'. \quad (2.47)$$

Необходимо обратить внимание на то, что характеристики рассеивающей среды входят и в правые части уравнений (2.44).

Рассматривая векторное уравнение системы (2.44) как дифференциальное по переменной t относительно неизвестной функции $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$,

найдем его решение

$$\vec{F}_d(\vec{r}, t) = v e^{-k(\vec{r})t} \vec{F}_d(\vec{r}, 0) + v \int_0^t [e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\vec{S}_1(\vec{r}, \tau) - \text{grad} \Phi_d(\vec{r}, \tau))] d\tau, \quad (2.48)$$

где $k(\vec{r}) = v(\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r}))$. Исключая $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$ из системы (2.44), получим скалярное уравнение для $\Phi_d(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(\vec{r}, t) - \frac{1}{3} \int_0^t e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\tau - t) \Delta \Phi_d(\vec{r}, t) d\tau - \\ - \frac{1}{3} \text{grad}(k(\vec{r})) \int_0^t e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\tau - t) \text{grad} \Phi_d(\vec{r}, \tau) d\tau + \mu_a(\vec{r}) \Phi_d(\vec{r}, t) = \\ = - \frac{1}{3} \int_0^t e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\tau - t) \text{div} \vec{S}_1(\vec{r}, \tau) d\tau - \\ - \frac{1}{3} \text{grad}(k(\vec{r})) \int_0^t e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\tau - t) \vec{S}_1(\vec{r}, \tau) d\tau + S_0(\vec{r}, t) - \\ - \frac{1}{3} \text{grad}(k(\vec{r})) \int_0^t e^{k(\vec{r})(\tau-t)} (\tau - t) \vec{S}_1(\vec{r}, \tau) d\tau + S_0(\vec{r}, t) - \\ - \frac{1}{3} e^{-k(\vec{r})t} [\text{div} \vec{F}_d(\vec{r}, 0) - t \vec{F}_d(\vec{r}, 0) \text{grad}(k(\vec{r}))]. \quad (2.49) \end{aligned}$$

Таким образом, для решения УПИ в P_1 -приближении необходимо решить дифференциальное уравнение (2.41), интегро-дифференциальное уравнение (2.49) и воспользоваться затем формулами (2.48) и (2.40).

Для однородной (но с неизотропным рассеянием) среды, т.е. при $\mu_a(\vec{r}) = \mu_a = \text{const}$, $\mu_s(\vec{r}) = \mu_s = \text{const}$, $\mu_1(\vec{r}) = \mu_1 = \text{const}$, $D = (3(\mu - \mu_1))^{-1}$, вместо (2.49) можно получить уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{3D}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_d(\vec{r}, t) + \frac{1}{v} (1 + 3\mu_a D) \frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(\vec{r}, t) - D \Delta \Phi_d(\vec{r}, t) + \mu_a \Phi_d(\vec{r}, t) = \\ = \frac{3D}{v} \frac{\partial}{\partial t} S_0(\vec{r}, t) + S_0(\vec{r}, t) - D \text{div} \vec{S}_1(\vec{r}, t). \quad (2.50) \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (2.50) представляет собой уравнение гиперболического типа, а не нестационарное уравнение диффузии, которое является уравнением параболического типа. Указанное обстоятельство уже неоднократно отмечалось в литературе [111, 115].

2.1.5. Диффузионное приближение. В стационарном случае, исключая из системы (2.44) $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$, получим уравнение диффузионного типа:

$$\mu_a(\vec{r})\Phi_d(\vec{r}) - \operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \Phi_d(\vec{r})}{3[\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r})]} = S_0(\vec{r}) - \operatorname{div} \frac{\vec{S}_1(\vec{r})}{3[\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r})]}. \quad (2.51)$$

Выражение $D(\vec{r}) = [3(\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r}))]^{-1}$ обычно называют коэффициентом диффузии.

В нестационарном случае из системы (2.44) без дополнительных допущений нельзя получить нестационарное уравнение диффузии. Таким дополнительным допущением может быть, например, следующее:

$$\left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \vec{F}_d(\vec{r}, t) \right| \ll \left| \operatorname{grad} \Phi_d(\vec{r}, t) + [\mu(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r})] \vec{F}_d(\vec{r}, t) \right|. \quad (2.52)$$

Исключая $\vec{F}_d(\vec{r}, t)$ из системы (2.44), можно получить уже собственно диффузионное уравнение для $\Phi_d(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(\vec{r}, t) - \operatorname{div} (D(\vec{r}) \operatorname{grad} \Phi_d(\vec{r}, t)) + \mu_a(\vec{r}) \Phi_d(\vec{r}, t) = \\ = S_0(\vec{r}, t) - \operatorname{div} (D(\vec{r}) \vec{S}_1(\vec{r}, t)). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Для однородной среды, как и в общем случае, вместо (2.53) можно получить более простое уравнение

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(\vec{r}, t) - D \Delta \Phi_d(\vec{r}, t) + \mu_a \Phi_d(\vec{r}, t) = S_0(\vec{r}, t) - D \operatorname{div} \vec{S}_1(\vec{r}, t), \quad (2.54)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Ряд работ был посвящён исследованию точности диффузионного приближения. На основе сравнения решения диффузионного уравнения с результатами моделирования методом Монте-Карло [95] был сделан следующий вывод: диффузионное приближение может дать решение на несколько порядков отличающееся от истинного, при этом влияние неоднородности среды гораздо сильнее анизотропности рассеяния. Последнее обстоятельство особенно существенно, если иметь в виду томографические исследования.

В работе [116] предложено новое, независящее от $\mu_a(\vec{r})$, определение коэффициента диффузии:

$$D(\vec{r}) = \frac{1}{3(\mu_s(\vec{r}) - \mu_1(\vec{r}))}, \quad (2.55)$$

которое в ряде случаев даёт существенно лучшее приближение к истинным значениям решения уравнения переноса излучения. Новое определение коэффициента диффузии основано на следующем. Если коэффициент поглощения μ_a не зависит от $\vec{r}$, а источник является импульсным $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \delta(t) S_0(\vec{r}, \vec{\Omega})$, то уравнение (2.1) после замены $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \exp(-\mu_a vt) \Phi_0(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ приводится к уравнению, которое в

точности совпадает с уравнением (2.1), но с заменой μ на μ_s , что и приводит к определению коэффициента диффузии в виде (2.55). Однако при сохранении зависимости μ_a от $\vec{r}$ уравнение не воспроизводится, и ценность такого переопределения снижается. Разные определения коэффициента диффузии породили определённую дискуссию [115], что, впрочем, не очень существенно, т.к. ясно, что диффузионная модель является довольно грубым приближением УПИ из-за многочисленных и не очень обоснованных предположений, сделанных при выводе диффузионного уравнения.

В большинстве работ, посвящённых диффузионной модели, рассматривается однородная среда как в стационарном [95, 111–113, 116–119], так и в нестационарном варианте для случая бесконечной [109, 111–113, 120–123] и полубесконечной среды [120, 124, 125], также для слоя [91, 120, 126–130] и для двухслойной среды [131].

2.1.6. Волны плотности фотонов. Используя высокочастотную модуляцию источников излучения и регистрацию прошедшего через СРС излучения на этой же частоте модуляции, можно временную зависимость перевести в частотную область. По существу, такой подход соответствует разложению решения и правой части уравнения переноса излучения в интеграл Фурье, что сводит задачу к анализу частотной фурье-компоненты. Запишем функцию источника $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ и плотность потока излучения $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ через обратное преобразование Фурье:

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.56)$$

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.57)$$

где

$$\tilde{S}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.58)$$

$$\tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.59)$$

Подставляя эти выражения в УПИ (2.1), получим

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \text{grad} \tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) + \left(\mu(\vec{r}) + \frac{i\omega}{v} \right) \tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega) - \\ - \oint\!\!\!\oint_{4\pi} \tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}', \omega) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega' = \tilde{S}(\vec{r}, \vec{\Omega}), \end{aligned} \quad (2.60)$$

что существенно проще исходного УПИ. Функцию $\tilde{\Phi}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \omega)$ при этом

называют волной плотности фотонов. Аналогичную операцию можно осуществить и в любой аппроксимации УПИ, например в диффузионном уравнении (2.53):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(D(\vec{r}) \operatorname{grad} \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega)) + \left(\mu_a(\vec{r}) + \frac{i\omega}{v} \right) \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) = \\ = \tilde{S}_0(\vec{r}, \omega) - \operatorname{div}(D(\vec{r}) \tilde{S}_1(\vec{r}, \omega)), \end{aligned} \quad (2.61)$$

где

$$\Phi_d(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.62)$$

$$S_0(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_0(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2.63)$$

$$\vec{S}_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\vec{S}}_1(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.64)$$

Соответственно и функцию $\tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega)$ называют диффузной волной плотности фотонов (ДВПФ). Если когерентная компонента, удовлетворяющая уравнению (2.41), не выделяется, то соответственно изменяются определения (2.45), (2.46). При измерениях, как правило, следят за изменениями амплитуды (или глубины модуляции) и фазы прошедшей через СРС волны. Граничные условия для ДВПФ были исследованы в работе [132]. В работе [133] было показано, что отклонение экспериментальных данных от теоретических предсказаний может быть скомпенсировано введением эффективного источника. Характеристики СРС можно определить при измерениях глубины модуляции и фазы прошедшей волны, используя разные частоты модуляции [134]. Изучалась также возможность восстановления оптических характеристик однородного цилиндрического объекта, погружённого в бесконечную однородную СРС [135].

2.1.7. Интегралы по траекториям. За последние несколько лет появился целый ряд работ, использующих для описания прохождения фотонов через СРС формализм интегралов по траекториям [136–140], и примыкающих к ним работ по наиболее вероятным траекториям фотонов в рассеивающей среде [141–145]. Понятие интеграла по траекториям или континуального интеграла возникло в 1920-х годах как обобщение понятия интеграла в пространстве конечной размерности на функциональные бесконечномерные пространства и связано с именами П. Даниэля и Н. Винера [146–148]. Однако в физику оно проникло только после работ Р. Фейнмана в 1940-х годах [149, 150] (см. также [151, 152]). По существу, интеграл по траекториям представляет собой наглядный способ записи решений некоторых дифференциальных урав-

нений в частных производных. В то же время нахождение интегралов по траекториям пока ещё не проще традиционного решения таких уравнений. В связи с этим не удивительно, что применение формализма интегралов по траекториям не дало какие-нибудь новые результаты, не известные ранее. Тем не менее не исключено, что совершенствование математического аппарата континуального интегрирования позволит и на этом пути получить нетривиальные результаты.

Рассмотрим простейшее уравнение параболического типа — уравнение диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(x, t) - vD \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_d(x, t) = \delta(x - x_0) \delta(t). \quad (2.65)$$

При соответствующей нормировке $\Phi_d(x, t)$ можно считать плотностью вероятности нахождения фотона в момент времени t в точке x , если в момент времени $t = 0$ фотон находился в точке x_0 . Как известно [104], решением этого уравнения (функцией Грина) будет

$$\Phi_d(x, t) = \eta(t) \frac{1}{2\sqrt{\pi v D t}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0)^2}{4v D t} \right\}, \quad (2.66)$$

где $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Зададимся вопросом, какова будет вероятность нахождения фотона в момент времени t_1 в интервале $[x_1, x_1 + dx_1]$, в момент времени t_2 в интервале $[x_2, x_2 + dx_2]$, ..., в момент времени t_n в интервале $[x_n, x_n + dx_n]$, где $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$? Естественно, ответ выглядит следующим образом:

$$\frac{\exp \left\{ -\frac{(x_1 - x_0)^2}{4v D t_1} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{4v D (t_2 - t_1)} - \dots - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{4v D (t_n - t_{n-1})} \right\}}{2^n \sqrt{(\pi v D)^n t_1 (t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.67)$$

По существу, выражение (2.67) при $n \rightarrow \infty$ задаёт так называемую меру Винера в пространстве всех функций $-\infty < x(t) < +\infty$ [146]. Рассмотрим некоторый функционал $F[x(\tau)]$, заданный на траекториях $x(\tau)$. Тогда, считая $t_1 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1} = \Delta t$, можно записать для математического ожидания его конечномерной аппроксимации $F(x(0), x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) = F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \exp \left\{ -\frac{1}{4v D} \sum_{j=1}^n \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta t} \right)^2 \Delta t \right\} \times \\ \times \frac{\prod_{j=1}^n dx_j}{2^n \sqrt{(\pi v D \Delta t)^n}}. \quad (2.68)$$

При $n \rightarrow \infty$ предел выражения (2.68) символически можно записать в виде

$$\int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}x(\tau). \quad (2.69)$$

Как уже отмечалось, вычисление интегралов по траекториям представляет собой весьма сложную задачу. Хотя некоторые континуальные интегралы удаётся вычислить, например для функционала $F[x(\tau)] = \exp \left\{ \lambda \int_0^t x^2(\tau) d\tau \right\}$ можно получить [146]

$$\begin{aligned} \int_{x(\tau)} \exp \left\{ \lambda \int_0^t x^2(\tau) d\tau \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}x(\tau) = \\ = \sqrt{\sec(t\sqrt{4vD\lambda})}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

однако сколько-нибудь регулярных способов их вычисления не разработано. В этой ситуации особенно актуальными становятся методы приближённого вычисления интегралов по траекториям [153].

Рассмотрим вместо уравнения (2.65) более сложное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_d(x, t) - vD \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_d(x, t) + v\mu_a(x) \Phi_d(x, t) = \delta(x - x_0) \delta(t). \quad (2.71)$$

Можно показать [146], что ему соответствует континуальный интеграл вида

$$\int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\int_0^t \left[\frac{1}{4vD} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + v\mu_a(x(\tau)) \right] d\tau \right\} \mathcal{D}x(\tau). \quad (2.72)$$

В то же время неизвестно, можно ли произвольному дифференциальному уравнению в частных производных поставить в соответствие континуальный интеграл.

Если в формуле (2.68) зафиксировать переменную $x = X$ и не проводить по ней интегрирование, то при $F[x(\tau)] \equiv 1$ мы получим вероятность перехода фотона из точки x_0 в момент времени $t = 0$ в точку X в момент времени t . Для произвольного функционала такой континуальный интеграл будем отмечать символом $\mathcal{D}^*x(\tau)$ вместо $\mathcal{D}x(\tau)$:

$$\int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}^*x(\tau). \quad (2.73)$$

Ясно, что полное математическое ожидание функционала вычисляется с помощью дополнительной квадратуры:

$$\begin{aligned}
& \int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}x(\tau) = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}^*x(\tau) \right\} dX. \quad (2.74)
\end{aligned}$$

Если нормировать выражение (2.73), т. е.

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\pi vD(t-t_0)} \exp \left\{ +\frac{(X-x_0)^2}{4vD(t-t_0)} \right\} \times \\
& \times \int_{x(\tau)} F[x(\tau)] \exp \left\{ -\frac{1}{4vD} \int_0^t \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau \right\} \mathcal{D}^*x(\tau), \quad (2.75)
\end{aligned}$$

то получим условное математическое ожидание функционала только по тем траекториям, которые начинаются в точке x_0 и заканчиваются в точке X [146].

Аналогично для вероятности перехода фотона из точки x_0 в момент времени $t=0$ в точку X в момент времени t в случае уравнения (2.71) можно записать

$$\int_{x(\tau)} \exp \left\{ -\int_0^t \left[\frac{1}{4vD} \left(\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + v\mu_a(x(\tau)) \right] d\tau \right\} \mathcal{D}^*x(\tau). \quad (2.76)$$

Как записать интеграл по траекториям, соответствующий общему уравнению диффузии (2.53), а тем более УПИ (2.1), пока неизвестно. Попытки дать описание процесса прохождения света через СРС на языке интегралов по траекториям сводятся либо к тривиальным вариантам, описанным выше, либо к выражениям с неясной пока степенью обоснованности ввиду многочисленности предположений, сделанных при их выводе. Например, в работе [139] для вероятности $P(\vec{r}_s, \vec{r}_f, T)$ перехода фотона за время T из точки $\vec{r}_s$ в точку $\vec{r}_f$ получено выражение (скорость света считается равной единице)

$$P(\vec{r}_s, \vec{r}_f, T) = \int_{\vec{r}(\tau)} J[\vec{r}(t)] \exp \left\{ -\int_0^T \left[\frac{1}{2\mu_s(1-g)} \left(\frac{d^2x(\tau)}{d\tau^2} \right)^2 \right] d\tau \right\} \mathcal{D}^*\vec{r}(\tau), \quad (2.77)$$

где

$$J[\vec{r}(t)] = \int_{\Omega(\tau)} \exp \left\{ -\int_0^T \left[i\mu_s\Omega(\tau) \left(\left(\frac{d}{d\tau}\vec{r}(\tau) \right)^2 - 1 \right) \right] d\tau \right\} \mathcal{D}^*\Omega(\tau). \quad (2.78)$$

2.2. Модели томографической реконструкции пространственных распределений характеристик рассеивающих сред

2.2.1. Модель чисто поглощающей среды. Простейшая модель чисто поглощающей среды является физической основой традиционной вычислительной томографии, опирающейся на преобразование Радона. В этом случае считается, что среда может только поглощать, но не рассеивать фотоны, т. е. на индикатрису рассеяния накладывается условие $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = 0$. Тогда в стационарном случае получим уравнение:

$$\vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \mu_a(\vec{r}) \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = S(\vec{r}, \vec{\Omega}), \quad (2.79)$$

решением которого является [98]

$$\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int_0^\infty S(\vec{r} - R\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) \exp \left\{ - \int_0^R \mu_a(\vec{r} - R'\vec{\Omega}) dR' \right\} dR. \quad (2.80)$$

Вводя поверхностную (двумерную) дельта-функцию $\delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0)$ [98]:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0), \quad (2.81)$$

$$\begin{cases} \delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0) = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \\ \delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0) = 0, \quad \vec{\Omega} \neq \vec{\Omega}_0, \\ \iint_{\Gamma(\vec{\Omega})} f(\vec{\Omega}) \delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_0) d\Omega = f(\vec{\Omega}_0), \quad \vec{\Omega}_0 \in \Gamma(\vec{\Omega}), \end{cases} \quad (2.82)$$

где $\vec{r} = r\vec{\Omega} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = r_0\vec{\Omega}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, (x, y, z) — декартовы координаты, (r, ϑ, φ) — сферические координаты, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ — обычная трёхмерная дельта-функция, $\delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \delta(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2})$ — обычная одномерная дельта-функция, соотношение (2.80) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \\ &= \oint \int_0^\infty \delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_R) S(\vec{r} - R\vec{\Omega}_R, \vec{\Omega}_R) \exp \left\{ - \int_0^R \mu_a(\vec{r} - R'\vec{\Omega}_R) dR' \right\} dR d\Omega_R = \\ &= \iiint_{V_R} \frac{\delta_2(\vec{\Omega}\vec{\Omega}_R)}{R^2} S(\vec{r} - R\vec{\Omega}_R, \vec{\Omega}_R) \exp \left\{ - \int_0^R \mu_a(\vec{r} - R'\vec{\Omega}_R) dR' \right\} dV_R. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Соотношение (2.80), или эквивалентное ему (2.83), является физическим фундаментом всей вычислительной томографии. Если ищем пространственное распределение коэффициента поглощения излучения

$\mu_a(\vec{r})$ при известном $S(\vec{r}, \vec{\Omega})$, то приходим к хорошо известному закону экспоненциального ослабления, позволяющему использовать преобразование Радона в рентгеновской трансмиссионной томографии. Если же ищем пространственное распределение изотропных источников излучения $S(\vec{r})$ при известном $\mu_a(\vec{r})$, то приходим к экспоненциальному преобразованию Радона в радионуклидной эмиссионной томографии (см. гл. 1). Заметим, что рассматривать нестационарный случай нет необходимости, т. к. использование импульсного излучения в данном случае не приводит к увеличению исходной информации.

При переходе к томографии рассеивающих сред естественно в качестве нулевого приближения использовать уже разработанный математический аппарат, опирающийся на преобразование Радона. Ряд исследователей действительно пошёл по этому пути [154, 155]. Однако при таком подходе все особенности, связанные с новым физическим процессом рассеяния излучения, игнорируются, что и проявилось в неудовлетворительности полученных результатов. Некоторым усовершенствованием этого подхода является модификация фильтрующих ядер в стандартных алгоритмах обращения преобразования Радона. При этом либо получают эффективную аппаратную функцию, используя тестовые объекты [156], либо производится аналитическая модификация, основанная на некоторых полуэмпирических соображениях [157].

2.2.2. Модель теории возмущений. Дифракционная томография. Модель теории возмущений объединяет целый ряд подходов, основанных на использовании функции Грина для однородной изотропной среды с характеристиками $\mu_a(\vec{r}) = \mu_a^{(0)}$, $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \mu_s^{(0)}$ и $\mu^{(0)} = \mu_a^{(0)} + 4\pi\mu_s^{(0)}$. Тогда уравнение переноса излучения (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu^{(0)} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \\ = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - [\mu(\vec{r}) - \mu^{(0)}] \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \oint\limits_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega'. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Фундаментальным решением или функцией Грина $G(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ дифференциального оператора, стоящего в левой части уравнения (2.84), называется решение уравнения

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \vec{\Omega} \text{grad} G(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + \mu^{(0)} G(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t) \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0). \quad (2.85)$$

Для произвольной правой части уравнения (2.8) решение уравнения (2.8) можно записать в виде свёртки этой правой части с функцией

Грина. Следовательно, формально можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = & \int_0^\infty \iiint_{V_0} \oint_{4\pi} \left\{ S(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, t_0) - [\mu(\vec{r}_0) - \mu^{(0)}] \Phi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, t_0) + \right. \\ & \left. + \oint_{4\pi} \Phi(\vec{r}_0, \vec{\Omega}', t_0) \mu_s(\vec{r}_0, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}_0) d\Omega' \right\} G(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0, t - t_0) dt_0 dV_0 d\Omega_0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Если бы неизвестная функция $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ не входила в подынтегральное выражение, то (2.86) было бы искомым решением. В нашем случае это просто другая форма записи уравнения (2.1), которая без дальнейших упрощений практически бесполезна. Один из возможных подходов состоит в нахождении последовательных приближений с помощью следующей итерационной процедуры. Для получения нулевого приближения $\Phi^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ на первом шаге все вхождения $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ в подынтегральное выражение в (2.86) заменяются на нуль:

$$\Phi^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \int_0^\infty \iiint_{V_0} \oint_{4\pi} S(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, t_0) G(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0, t - t_0) dt_0 dV_0 d\Omega_0. \quad (2.87)$$

На втором шаге все вхождения $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ в подынтегральное выражение в (2.86) заменяются на $\Phi^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = & \int_0^\infty \iiint_{V_0} \oint_{4\pi} S(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, t_0) G(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0, t - t_0) dt_0 dV_0 d\Omega_0 + \\ & + \int_0^\infty \iiint_{V_0} \oint_{4\pi} \left\{ - [\mu(\vec{r}_0) - \mu^{(0)}] \Phi^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{\Omega}_0, t_0) + \right. \\ & \left. + \oint_{4\pi} \Phi^{(0)}(\vec{r}_0, \vec{\Omega}', t_0) \mu_s(\vec{r}_0, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}_0) d\Omega' \right\} G(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{\Omega} \vec{\Omega}_0, t - t_0) dt_0 dV_0 d\Omega_0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

На следующем шаге все вхождения $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ в подынтегральное выражение в (2.86) заменяются на $\Phi^{(1)}(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ и т. д.

Основной недостаток этого процесса заключается в том, что получающаяся последовательность функций может расходиться. Кроме этого, как правило, используют функцию Грина, полученную для бесконечной или, в лучшем случае, полубесконечной среды. В то же время ясно, что для ограниченных объектов такое предположение заведомо неверно.

Получение же функции Грина для ограниченной области само по себе является трудной задачей. Описанная процедура вполне аналогична теории возмущений квантовой механики, что оправдывает название этой модели. Различие подходов в такой модели определяется выбором исходного приближения УПИ вместо самого УПИ (2.1), а также дальнейшими упрощениями. Чаще всего используется диффузионное приближение [158–160] либо во временной области для уравнения (2.53), либо в частотной области для уравнения (2.61). Дальнейшее упрощение, как правило, состоит в том, что берётся либо нулевое, либо первое приближение в итерационной процедуре (2.87), (2.88). Ещё одна модификация заключается в замене аддитивной добавки в первом приближении (приближение Борна) мультипликативной добавкой (приближение Рытова) [161].

Рассмотрим более подробно этот подход на примере уравнения для волн плотности фотонов (2.61), заимствовавший [162] название дифракционной томографии из более ранних работ по акустической томографии [163–168]. Пусть $D^{(0)}$ и $\mu_a^{(0)}$ — некоторые константы, $D(\vec{r}) = D^{(0)} + D^{(1)}(\vec{r})$ и $\mu_a(\vec{r}) = \mu_a^{(0)} + \mu_a^{(1)}(\vec{r})$. Тогда уравнение (2.61) можно записать в виде

$$\Delta \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) + [k^{(0)}]^2 \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) = \tilde{S}_2(\vec{r}, \omega), \quad (2.89)$$

где

$$[k^{(0)}]^2 = -\frac{\mu_a^{(0)} + i\omega/v}{D^{(0)}}, \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_2(\vec{r}, \omega) = & -\frac{1}{D^{(0)}} \left[\tilde{S}_0(\vec{r}, \omega) - \operatorname{div} \left(D(\vec{r}) \tilde{S}_1(\vec{r}, \omega) \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{div} \left(D^{(1)}(\vec{r}) \operatorname{grad} \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) \right) - \mu_a^{(1)}(\vec{r}) \tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Так как фундаментальное решение (функция Грина) $G(\vec{r}, \omega)$ оператора Гельмгольца в бесконечном трёхмерном пространстве есть [104]

$$G(\vec{r}, \omega) = -\frac{\exp(\pm i k^{(0)} |\vec{r}|)}{4\pi |\vec{r}|}, \quad (2.92)$$

то решение уравнения (2.89) можно выразить в виде свёртки правой части с функцией Грина:

$$\tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega) = \iiint G(\vec{r} - \vec{r}', \omega) \tilde{S}_2(\vec{r}', \omega) dV'. \quad (2.93)$$

Сложность оперирования с выражением (2.93) заключается в том, что неизвестная функция $\tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega)$ входит и в интеграл свёртки. Второе обстоятельство состоит в том, что функция $\tilde{\Phi}_d(\vec{r}, \omega)$ нужна нам не сама по себе, а как инструмент для нахождения тоже неизвестных функций

$D(\vec{r})$ и $\mu_a(\vec{r})$. Поэтому в качестве нулевого приближения $\tilde{\Phi}_d^{(0)}(\vec{r}, \omega)$ можно взять

$$\tilde{\Phi}_d^{(0)}(\vec{r}, \omega) = \iiint \frac{G(\vec{r} - \vec{r}')}{D^{(0)}} \left[-\tilde{S}_0(\vec{r}', \omega) + \operatorname{div}(D(\vec{r}') \tilde{S}_1(\vec{r}', \omega)) \right] dV' \quad (2.94)$$

и находить $D(\vec{r})$ из нулевого приближения, либо взять

$$\tilde{\Phi}_d^{(0)}(\vec{r}, \omega) = \iiint \frac{G(\vec{r} - \vec{r}')}{D^{(0)}} \left[-\tilde{S}_0(\vec{r}', \omega) + D^{(0)} \operatorname{div}(\tilde{S}_1(\vec{r}', \omega)) \right] dV' \quad (2.95)$$

и находить $D(\vec{r})$ и $\mu_a(\vec{r})$ из первого приближения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_d^{(1)}(\vec{r}, \omega) = & \iiint \frac{G(\vec{r} - \vec{r}')}{D^{(0)}} \left[-\tilde{S}_0(\vec{r}', \omega) + \operatorname{div}(D(\vec{r}') \tilde{S}_1(\vec{r}', \omega)) + \right. \\ & \left. + \operatorname{div}(D^{(1)}(\vec{r}') \operatorname{grad} \tilde{\Phi}_d^{(0)}(\vec{r}', \omega)) - \mu_a^{(1)}(\vec{r}') \tilde{\Phi}_d^{(0)}(\vec{r}', \omega) \right] dV'. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Большое количество возможных вариантов, начиная с выбора размерности пространства, на котором производится рассмотрение задачи, конкретного вида функции Грина для всего пространства, полупространства, слоя и т. д., многочисленные приближения, сделанные на разных этапах, обуславливают многообразие путей и результатов, полученных на этом направлении. Вместе с тем упомянутые обстоятельства делают ещё более неопределённым ответ на вопрос о том, что же именно реконструируется с помощью подобных алгоритмов.

2.2.3. Операторная модель. Обычно рассматривается геометрическая схема измерений, в которой и облучение и съём информации происходят в одной и той же выделенной плоскости. При этом, как правило, облучение производят тонким лучом лазера, а регистрируется прошедшее через СРС излучение на оси зондирующего луча. Реже используется регистрация обратно рассеянного излучения.

При этом предполагается, что остальные части объекта не вносят вклад в измеряемые величины, хотя при учёте рассеяния это уже не столь оправдано, как в случае рентгеновской томографии. Один из случаев, когда плоскости падения зондирующего излучения и регистрации прошедшего излучения различны, рассмотрен в [169] в предположении однократного рассеяния.

Более общий подход заключается в регистрации излучения на всей границе $\partial\Gamma$ исследуемой области. При этом наиболее корректно рассматривать зависимость результатов измерений непосредственно от подлежащих восстановлению характеристик СРС [170–172]. При обычном рассмотрении по результатам измерений $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Gamma}$ ищется функция $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)|_{\vec{r} \in \Gamma}$ во всей области Γ , причём иско-

мая функция связана с результатами измерений линейным оператором $L\{\cdot\}$, т. ч.

$$L\left\{\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t); \mu_a(\vec{r}), \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\right\} = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Gamma}, \quad (2.97)$$

а характеристики СРС $\mu_a(\vec{r})$ и $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ являются параметрами. Аналогично можно записать для зависимости результатов непосредственно от характеристик СРС, что

$$G\left\{\mu_a(\vec{r}), \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})\right\} = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)|_{\vec{r} \in \partial\Gamma}. \quad (2.98)$$

Однако оператор $G\{\cdot\}$, в отличие от $L\{\cdot\}$, является нелинейным, что, учитывая огромную размерность задачи, делает реализацию этого подхода практически невозможной.

Один из подходов к линеаризации этой задачи заключается в следующем. Введём вектор параметров (характеристик СРС) $\vec{p}(\vec{r})$, каждая компонента которого является одной из характеристик СРС, например $p_1(\vec{r}) = \mu_a(\vec{r})$ и т. д. Тогда нелинейный оператор $G\{\vec{p}(\vec{r})\}$ в пространстве параметров можно разложить в ряд Тейлора вблизи некоторой точки $\vec{p}_0 = \vec{p}(\vec{r}_0)$:

$$\begin{aligned} G\{\vec{p}(\vec{r})\} = \\ = G\{\vec{p}_0\} + (\vec{G}'\{\vec{p}_0\})^T(\vec{p} - \vec{p}_0) + (\vec{p} - \vec{p}_0)^T \widehat{G}''\{\vec{p}_0\}(\vec{p} - \vec{p}_0) + \dots, \end{aligned} \quad (2.99)$$

где $\vec{G}'\{\vec{p}_0\}$ — вектор первой производной и $\widehat{G}''\{\vec{p}_0\}$ — матрица второй производной оператора $G\{\vec{p}(\vec{r})\}$ в точке $\vec{p}_0$. Ограничиваясь первыми двумя слагаемыми в (2.99) и находя $\vec{G}'\{\vec{p}_0\}$, получим линейную задачу, которую уже можно решить тем или иным способом. В [173–175] описано применение метода конечных элементов в данном подходе. Тем не менее задача остаётся тяжёлой в вычислительном плане, что оправдывает поиск более простых моделей.

Заметим, что по существу операторная модель объединяет в себе целый класс моделей в зависимости от определения основных операторов. Как правило, в основу кладутся те или иные приближения УПИ (см. п. 2.2), чаще всего диффузионное приближение. При этом возможны три варианта: стационарный, частотный и нестационарный, использующие соответственно непрерывное излучение, непрерывное излучение с высокочастотной модуляцией и импульсное излучение. В последнем случае регистрация временного распределения прошедшего излучения приводит к существенному увеличению исходной для томографического восстановления информации. Применение метода конечных элементов в частотном варианте описано в [176], а использование интегральных преобразований, в частности преобразований Меллина и Лапласа, в нестационарном варианте см. в [177].

2.3. Нестационарная осевая модель переноса излучения

2.3.1. Основные соотношения. Приведённый выше обзор моделей, используемых как для описания процесса переноса излучения в СРС, так и для построения томографических алгоритмов, показал необходимость разработки новых моделей, достаточно простых для перехода к вычислительной томографии, но вместе с тем достаточно точных для описания основных закономерностей распространения излучения в рассеивающих средах. На рис. 2.1 схематически показано поведение фотонов, испущенных лазером (1), при прохождении слоя рассеивающей среды. На выходе из среды можно выделить так называемые баллистические фотоны (2), которые не испытали ни поглощения, ни рассеяния, внеосевые фотоны (3), при выходе из среды движущиеся под различными углами, приосевые фотоны, при прохождении среды рассеянные под малыми (4) и большими (5) углами. Кроме того, существуют обратно рассеянные фотоны (6), вышедшие из среды в обратном направлении под различными углами.

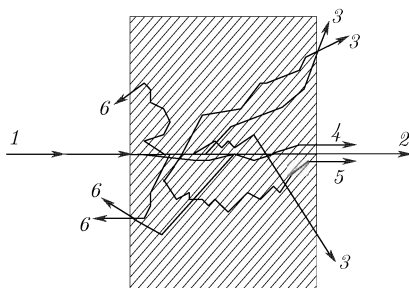


Рис. 2.1. Прохождение фотонов через слой рассеивающей среды

Нестационарная осевая двухпоточковая модель переноса излучения в СРС [178, 179] основана на приближении УПИ “рассеяние прямо назад”. При этом считается, что СРС обладает свойством в каждом рассеянии менять направление движения фотона на противоположное. Таким образом, сохраняется основное понятие рентгеновской томографии — линия проецирования. Если функция источника излучения соответствует точечному мононаправленному источнику, то все фотоны, как испущенные источником, так и рассеянные, будут двигаться вдоль одной и той же прямой линии и разделяться на два потока, а именно на фотоны, движущиеся в прямом направлении, и на фотоны, движущиеся в обратном направлении, что оправдывает название двухпоточковой модели.

Для непрерывного оптического излучения в однородной мутной среде часто используют стационарную двухпоточковую модель Кубелки и Мунка, основанную на представлении о двух световых потоках, рас-

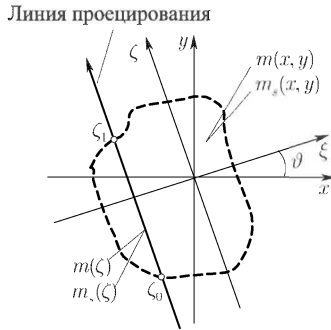


Рис. 2.2. Неподвижная (x, y) и вращающаяся (ξ, ζ) системы координат в геометрической схеме измерений с параллельными проекциями

координат (ξ, ζ, z) . Рассмотрение будем проводить в фиксированной плоскости $z = z_0$. На линии проецирования, т.к. ξ и z_0 фиксированы, $m(\vec{r}) = m(x(\xi, \zeta), y(\xi, \zeta), z_0) = m(\zeta)$ и $m_s(\vec{r}) = m_s(x(\xi, \zeta), y(\xi, \zeta), z_0) = m_s(\zeta)$. Для короткого импульса лазерного излучения, испущенного в момент времени $t = 0$ из точки $\vec{r}_0 = (\xi_0, \zeta_0, z_0)$ в направлении $\vec{\Omega}_0$, можно записать

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = U_0 \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) \delta(t) \delta(\xi - \xi_0) \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(z - z_0).$$

Поскольку в соответствии с моделью “рассеяние прямо назад” (2.100) вне оси луча никаких фотонов нет, то для плотности потока фотонов можно записать

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) &= F_+(\zeta, t) \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) \delta(\xi - \xi_0) \delta(z - z_0) \\ \Phi(\vec{r}, -\vec{\Omega}, t) &= F_-(\zeta, t) \delta_2(-\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) \delta(\xi - \xi_0) \delta(z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

с начальными и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} F_+(\zeta_0, t) &= U_0 \delta(t) \\ F_-(\zeta_1) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} F_+(\zeta, 0) &= 0 \\ F_-(\zeta, 0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.104)$$

где ζ_0 — точка входа луча в исследуемую область, ζ_1 — точка выхода луча из исследуемой области.

Из системы (2.102) можно получить одно дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа относительно $F_+(\zeta, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_+(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F_+(\zeta, t) + \frac{1}{v} \left[2m(\zeta) + \frac{m'_s(\zeta)}{m_s(\zeta)} \right] \frac{\partial}{\partial t} F_+(\zeta, t) + \\ & + \frac{m'_s(\zeta)}{m_s(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} F_+(\zeta, t) + \left[m^2(\zeta) - m_s^2(\zeta) + m(\zeta) \frac{m'_s(\zeta)}{m_s(\zeta)} - m'(\zeta) \right] F_+(\zeta, t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{v} U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta'(t) - U_0 \delta'(\zeta - \zeta_0) \delta(t) + \\ + \left[m(\zeta) + \frac{m'_s(\zeta)}{m_s(\zeta)} \right] U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(t), \quad (2.105)$$

где $\delta'(\cdot)$ — производная дельта-функции Дирака, с начальными и граничными условиями

$$\begin{cases} F_+(\zeta, 0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F_+(\zeta, t) \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

$$\begin{cases} F_+(\zeta_0, t) = U_0 \delta(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} F_+(\zeta_1, t) + v \frac{\partial}{\partial \zeta} F_+(\zeta, t) \Big|_{\zeta=\zeta_1} + v m(\zeta_1) F_+(\zeta_1, t) = 0. \end{cases}$$

Отметим необычность граничного условия при $\zeta = \zeta_1$, включающего не только производную по координате, но также и производную по времени.

2.3.2. Однородная полубесконечная среда. Рассмотрим уравнение (2.105) для однородной полубесконечной среды при $m(\vec{r}) = m = \text{const}$ и $m_s(\vec{r}) = m_s = \text{const}$. В этом случае оно приобретает более простой вид:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F_+(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} F_+(\zeta, t) + \frac{2m}{v} \frac{\partial}{\partial t} F_+(\zeta, t) + (m^2 - m_s^2) F_+(\zeta, t) = \\ = m U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(t) + \frac{1}{v} U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta'(t) - U_0 \delta'(\zeta - \zeta_0) \delta(t). \quad (2.107)$$

Начальные условия оставим прежние, а граничное условие при $\zeta = \zeta_1$ заменим более простым условием регулярности на бесконечности, в соответствии с полубесконечностью среды:

$$\begin{cases} F_+(\zeta, 0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} F_+(\zeta, t) \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} F_+(\zeta_0, t) = U_0 \delta(t) \\ F_+(\zeta \rightarrow +\infty, t) = 0 \end{cases}. \quad (2.108)$$

Для связи с экспериментом по прохождению излучения через слой конечной толщины будем считать, что прошедшее через слой с левой границей $\zeta = \zeta_0$ и правой границей $\zeta = \zeta_1$ излучение описывается сечением решения $F_+(\zeta, t)$ для полупространства при $\zeta = \zeta_1$.

Сначала найдём решение для бесконечной среды. Сделаем в уравнении (2.107) замену переменных $F_+(\zeta, t) = f(\zeta, t) \exp(-mvt)$, т. ч.

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} f(\zeta, t) - m_s^2 f(\zeta, t) = m U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(t) \exp(mvt) + \\ + \frac{1}{v} U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta'(t) \exp(mvt) - U_0 \delta'(\zeta - \zeta_0) \delta(t) \exp(mvt). \quad (2.109)$$

Воспользовавшись свойствами дельта-функции и её производной

$$\begin{cases} \varphi(x)\delta(x-x_0) = \varphi(x_0)\delta(x-x_0) \\ \varphi(x)\delta'(x-x_0) = -\varphi'(x_0)\delta(x-x_0) + \varphi(x_0)\delta'(x-x_0) \\ \delta(x_0-|x|) = \delta(x_0-x) + \delta(x_0+x) \end{cases}, \quad (2.110)$$

можно упростить правую часть уравнения (2.109):

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} f(\zeta, t) - m_s^2 f(\zeta, t) = \\ = \frac{1}{v} U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta'(t) - U_0 \delta'(\zeta - \zeta_0) \delta(t), \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$f(\zeta, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\zeta, t) \right|_{t=0} = 0; \quad f(\zeta_0, t) = U_0 \delta(t). \quad (2.112)$$

Заметим, что уравнение (2.111) можно рассматривать и как однородное [104]. При этом правая часть первоначального уравнения должна быть учтена в начальных условиях:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} f(\zeta, t) - m_s^2 f(\zeta, t) = 0, \quad (2.113)$$

$$\begin{cases} f(\zeta, 0) = v U_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\zeta, t) \right|_{t=0} = -v U_0 \delta'(\zeta - \zeta_0) \\ f(\zeta_0, t) = U_0 \delta(t) \end{cases}. \quad (2.114)$$

Фундаментальным решением (функцией Грина) $G(\zeta, t)$ уравнений (2.111) и (2.113) является [104]

$$G(\zeta, t) = \frac{1}{2v} \eta(vt - |\zeta|) I_0(m_s \sqrt{(vt)^2 - \zeta^2}), \quad (2.115)$$

где $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя 1 рода 0 порядка. Следовательно, решение задачи Коши для уравнения (2.111) можно получить, находя свёртку правой части с фундаментальным решением:

$$\begin{aligned} f(\zeta, t) = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G(\zeta - \zeta', t - t') U_0 v^2 \left[\frac{1}{v} \delta(\zeta' - \zeta_0) \delta'(t') - \delta'(\zeta' - \zeta_0) \delta(t') \right] d\zeta' dt' = \\ = U_0 v \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2v} \eta(vt - |\zeta - \zeta_0|) I_0 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) \right] - \\ - U_0 v^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{2v} \eta(vt - |\zeta - \zeta_0|) I_0 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U_0 v}{2} \delta(vt - |\zeta - \zeta_0|) + \\
&+ \frac{U_0 v^2}{2} \eta(vt - |\zeta - \zeta_0|) \frac{m_s t}{\sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) - \\
&- \frac{U_0 v}{2} [\delta(vt + (\zeta - \zeta_0)) - \delta(vt - (\zeta - \zeta_0))] + \\
&+ \frac{U_0 v^2}{2} \eta(vt - |\zeta - \zeta_0|) \frac{m_s (\zeta - \zeta_0)}{\sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) = \\
&= U_0 v \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)) + \\
&+ \frac{U_0 v m_s}{2} \eta(vt - |\zeta - \zeta_0|) \sqrt{\frac{vt + (\zeta - \zeta_0)}{vt - (\zeta - \zeta_0)}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.116}$$

При этом дополнительно к свойствам дельта-функции (2.110) были использованы свойства функции Хевисайда:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \eta(x_0 - |x|) = \delta(x_0 + x) - \delta(x_0 - x) \\ \frac{d}{dx} [\varphi(x) \eta(x - x_0)] = \varphi(x_0) \delta(x - x_0) + \varphi'(x) \eta(x - x_0) \end{cases} \tag{2.117}$$

и модифицированной функции Бесселя:

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x), \tag{2.118}$$

где $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя 1 рода 1 порядка.

Для нахождения решения в полубесконечной среде, т. е. для удовлетворения граничного условия при $\zeta = \zeta_0$, сначала сделаем в уравнении (2.113) замену переменных $f(\zeta, t) = U_0 \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)) + f_1(\zeta, t)$, что приведёт к однородным начальным и граничным условиям:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_1(\zeta, t) - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} f_1(\zeta, t) - m_s^2 f_1(\zeta, t) = U_0 m_s^2 \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)), \tag{2.119}$$

$$f_1(\zeta, 0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial t} f_1(\zeta, t) \Big|_{t=0} = 0; \quad f_1(\zeta_0, t) = 0. \tag{2.120}$$

Теперь достаточно перейти к нечётному продолжению правой части в уравнении (2.119) по ζ относительно точки ζ_0 [104], которое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
U_0 m_s^2 \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)) &\rightarrow \eta(\zeta - \zeta_0) U_0 m_s^2 \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)) - \\
&- \eta(\zeta_0 - \zeta) U_0 m_s^2 \delta(vt + (\zeta - \zeta_0)).
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Находя свёртку правой части (2.121) с фундаментальным решени-

ем (2.115), получаем:

$$\begin{aligned}
 f_1(\zeta, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} G(\zeta - \zeta', t - t') U_0 m_s^2 v^2 \times \\
 &\times [\eta(\zeta' - \zeta_0) \delta(vt' - (\zeta' - \zeta_0)) - \eta(\zeta_0 - \zeta') \delta(vt' + (\zeta' - \zeta_0))] d\zeta' dt' = \\
 &= \frac{U_0 m_s^2 v}{2} \int_{\zeta_0}^{+\infty} \left[\eta(vt - (\zeta' - \zeta_0) - |\zeta' - \zeta|) \times \right. \\
 &\times I_0 \left(m_s \sqrt{(vt - (\zeta' - \zeta_0))^2 - (\zeta' - \zeta)^2} \right) \Big] d\zeta' - \\
 &- \frac{U_0 m_s^2 v}{2} \int_{-\infty}^{\zeta_0} \left[\eta(vt + (\zeta' - \zeta_0) - |\zeta' - \zeta|) \times \right. \\
 &\times I_0 \left(m_s \sqrt{(vt + (\zeta' - \zeta_0))^2 - (\zeta' - \zeta)^2} \right) \Big] d\zeta' = \\
 &= \frac{U_0 v}{2} \left[\frac{\eta(vt - (\zeta - \zeta_0))}{vt - (\zeta - \zeta_0)} - \frac{\eta(vt - (\zeta - \zeta_0))}{vt + (\zeta - \zeta_0)} \right] \int_{\zeta_0}^{m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} z I_0(z) dz = \\
 &= U_0 v \eta(vt - (\zeta - \zeta_0)) \frac{m_s (\zeta - \zeta_0)}{\sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Таким образом, решение уравнения (2.107) для $\zeta \geq \zeta_0$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 F_+(\zeta, t) &= U_0 v \delta(vt - (\zeta - \zeta_0)) \exp(-mvt) + \\
 &+ U_0 v \frac{m_s (\zeta - \zeta_0)}{\sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) \exp(-mvt) = \\
 &= U_0 m v \delta(mvt - m(\zeta - \zeta_0)) \exp(-m(\zeta - \zeta_0)) + \\
 &+ \frac{U_0 m_s v (\zeta - \zeta_0)}{\sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1 \left(m_s \sqrt{(vt)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2} \right) \exp(-mvt). \tag{2.123}
 \end{aligned}$$

Из качественного физического рассмотрения следует, что временное распределение прошедшего через однородный рассеивающий слой излучения имеет вид, показанный на рис. 2.3.

Вертикальная линия 1 соответствует баллистическим фотонам, а временное распределение рассеянных фотонов меняется от вида 2' для малых значений толщины до вида 2'' для больших значений

толщины. Формула (2.123) хорошо согласуется с таким качественным рассмотрением. Первое слагаемое описывает баллистические фотоны,

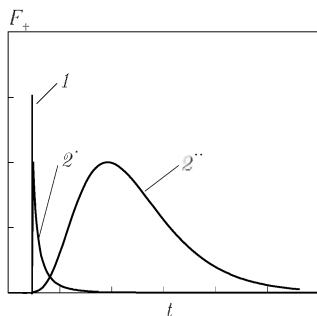


Рис. 2.3. Типичное временное распределение короткого оптического импульса после прохождения однородного рассеивающего слоя: 1 — баллистическая компонента; 2 — рассеянная компонента (2' — тонкий рассеивающий слой; 2'' — толстый рассеивающий слой)

подчиняющиеся, как и следовало ожидать, закону экспоненциального ослабления, а второе слагаемое описывает рассеянные фотоны.

Общую энергию нерассеянной (баллистической) ($U_+^{(b)}$) и рассеянной ($U_+^{(s)}$) компонент можно найти, проинтегрировав по времени каждое слагаемое в (2.123) в отдельности:

$$U_+^{(b)}(\zeta) = \int_0^\infty U_0 m v \delta(m v t - m(\zeta - \zeta_0)) e^{-m(\zeta - \zeta_0)} dt = U_0 e^{-m(\zeta - \zeta_0)}, \quad (2.124)$$

$$U_+^{(s)}(\zeta) = \int_{(\zeta - \zeta_0)/v}^\infty \frac{U_0 m_s v (\zeta - \zeta_0)}{\sqrt{(v t)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}} I_1(m_s \sqrt{(v t)^2 - (\zeta - \zeta_0)^2}) e^{-m v t} dt = \\ = U_0 \left[e^{-(\zeta - \zeta_0) \sqrt{m^2 - m_s^2}} - e^{-(\zeta - \zeta_0) m} \right]. \quad (2.125)$$

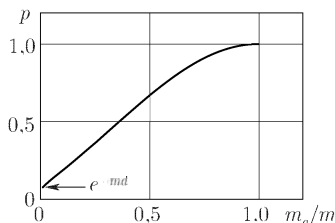


Рис. 2.4. Зависимость доли p баллистических фотонов в прошедшем через СРС излучении от отношения коэффициента поглощения m_a к коэффициенту экстинкции m СРС ($md = m(\zeta - \zeta_0) = 3$)

Для относительной доли p баллистических фотонов в прошедшем через СРС излучении получим

$$p = \frac{U_+^{(b)}}{U_+^{(b)} + U_+^{(s)}} = \exp \left\{ -m(\zeta - \zeta_0) \left(1 - \sqrt{\frac{m_a}{m} \left(2 - \frac{m_a}{m} \right)} \right) \right\}. \quad (2.126)$$

Рисунок 2.4 иллюстрирует зависимость p от коэффициентов рассеяния и поглощения СРС.

2.4. Экспериментальная проверка адекватности нестационарной осевой модели переноса излучения

2.4.1. Определение характеристик однородной СРС. Для экспериментальной проверки адекватности нестационарной двухпотоковой модели переноса излучения в однородной СРС был проведён ряд экспериментов с короткими импульсами лазерного излучения [180]. В качестве источника оптического излучения был использован импульсный лазер на YAG:Nd. Длительность отдельного импульса составляла 10 пс. Модельная рассеивающая среда представляла собой раствор сухого молока в воде, помещённый в стеклянные прямоугольные кюветы различной толщины. Для временных измерений была использована электронно-оптическая камера, предельное временное разрешение которой равнялось 2 пс.

Схема эксперимента представлена на рисунке 2.5. Излучение лазера (1) направлялось с помощью системы зеркал (2) на кювету (3), перед входом и выходом которой располагались ограничивающие диафрагмы (4). Изменение размеров выходной диафрагмы не влияло на вид наблюдаемых импульсов, варьируя только интенсивность рассеянного излучения. Роль входной диафрагмы сводилась к устранению попадания лазерного луча на боковые стенки кюветы.

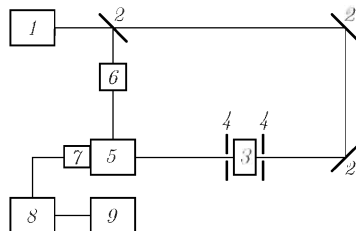


Рис. 2.5. Схема эксперимента с пикосекундным лазером

Излучение, прошедшее через кювету, попадало на входную щель электронно-оптической камеры (5). Запуск камеры осуществлялся лавинным фотодиодом (6), на который подавалась часть лазерного излучения. Съём и обработка изображения с экрана камеры производились с помощью видикона (7) и временного анализатора (8). Усреднение

по 10 импульсам излучения выполнялось на персональном компьютере (9).

Уже первые эксперименты показали, что даже решение, соответствующее полубесконечной среде (2.123), хорошо описывает основные особенности временного распределения прошедшего через СРС импульса. Поэтому результаты экспериментов во всех случаях сравнивались с результатами расчёта по формуле (2.123). На рис. 2.6 показаны

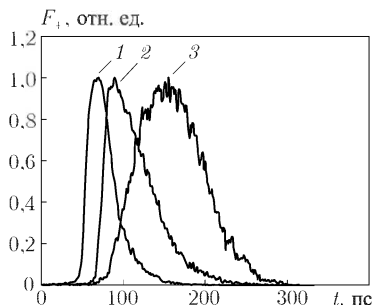


Рис. 2.6. Экспериментальные временные распределения рассеянного излучения при прохождении лазерного импульса через рассеивающую среду толщиной 3 мм (кривая 1), 5 мм (кривая 2) и 10 мм (кривая 3)

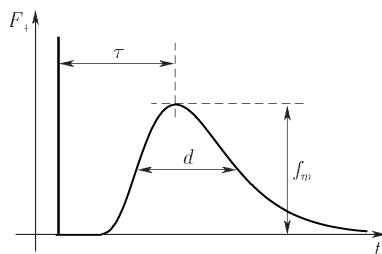


Рис. 2.7. Основные параметры временного распределения излучения в случае ультракороткого лазерного импульса, прошедшего через СРС: смещение τ , полуширина d и максимум f_m

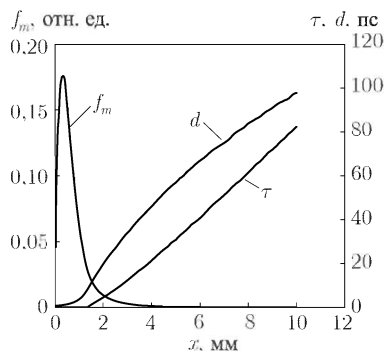


Рис. 2.8. Зависимость смещения τ , полуширины d , максимума f_m потока рассеянного излучения от толщины среды x

экспериментальные (нормированные) кривые временных распределений рассеянного излучения при прохождении лазерного импульса через рассеивающую среду разной толщины.

Основными характеристиками временного распределения являются смещение τ максимума рассеянной компоненты относительно баллистической компоненты, полуширина d и величина наибольшего значения f_m рассеянной компоненты (рис. 2.7). Зависимости этих характеристик от толщины рассеивающей среды x даны на рисунке 2.8. В области малых значений толщины $\tau \equiv 0$, что соответствует типу 2' на рисунке 2.3. При больших x смещение τ меняется практически линейно. Положение максимума величины f_m определяет значение

толщины среды, оптимальное для наблюдения рассеянной компоненты. Обращает на себя внимание то, что вслед за достижением величиной f_m максимума заметно возрастает угол наклона кривой для полуширины d .

На рисунках 2.9, 2.10 и 2.11 приведены соответственно зависимости смещения, полуширины и максимума рассеянного излучения от коэффициентов поглощения и рассеяния рассеивающей среды для достаточно большой толщины среды ($x = 10$ мм), при которой $\tau > 0$.

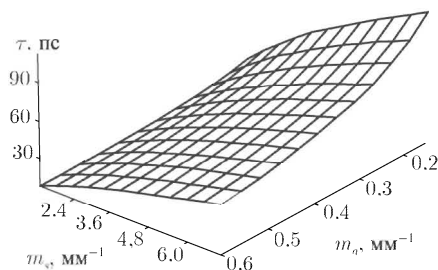


Рис. 2.9. Зависимость смещения τ от коэффициентов поглощения m_a и рассеяния m_s рассеивающей среды (толщина среды равна 10 мм)

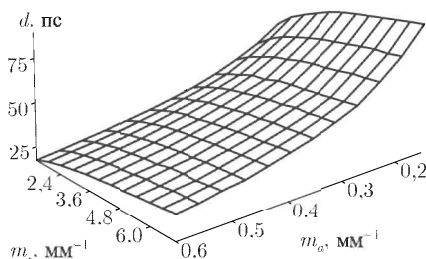


Рис. 2.10. Зависимость полуширины d от коэффициентов поглощения m_a и рассеяния m_s рассеивающей среды (толщина среды равна 10 мм)

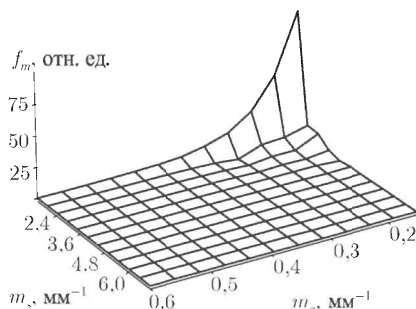


Рис. 2.11. Зависимость максимума f_m от коэффициентов поглощения m_a и рассеяния m_s рассеивающей среды (толщина среды равна 10 мм)

Приведённые на рисунках 2.9 и 2.10 зависимости могут быть использованы для определения характеристик рассеивающей среды m_a и m_s по измеренным значениям смещения τ и полуширины d .

Коэффициенты поглощения и рассеяния для конкретной среды находятся по точке пересечения A линий уровня для τ и d на плоскости (m_a, m_s) , полученных для одного и того же значения толщины среды, как это показано на рисунке 2.12. Аналогично эти коэффициенты

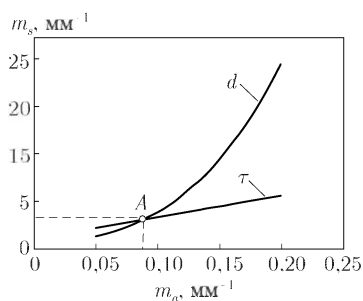


Рис. 2.12. Определение коэффициентов поглощения m_a и рассеяния m_s рассеивающей среды по измеренным значениям смещения τ и полуширины d ($\tau = 83$ пс; $d = 99$ пс)

можно найти по точке пересечения линий уровня только одной из величин (либо τ , либо d), но взятых для разных значений толщины среды.

Для определения характеристик рассеивающей среды, для которой были получены временные распределения на рисунке 2.6, были использованы экспериментальные значения полуширины d при разных значениях толщины среды x . Экспериментальные значения полуширины d корректировались на величину собственной полуширины лазерных импульсов ~ 10 пс. Результаты расчётов для каждой пары значений толщины среды x_1 и x_2 сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1

№ п/п	x_1 , мм	x_2 , мм	d_1 , пс	d_2 , пс	m_a , 1/мм	m_s , 1/мм
1	3	5	35	58	0,086	3,1
2	3	10	35	99	0,089	3,2
3	5	10	58	99	0,086	3,0

На рисунке 2.13 показаны теоретические кривые временных распределений рассеянного излучения при прохождении лазерного импульса через рассеивающую среду той же толщины, рассчитанные по формуле (2.123). Для расчёта были взяты усреднённые значения $m_a = 0,09$ мм⁻¹ и $m_s = 3,1$ мм⁻¹. При сравнении рисунков 2.6 и 2.13 можно сделать вывод, что теоретические зависимости достаточно

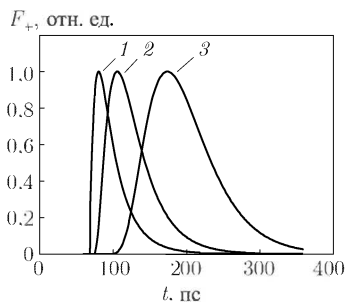


Рис. 2.13. Теоретические временные распределения рассеянного излучения при прохождении лазерного импульса через рассеивающую среду толщиной 3 мм (кривая 1), 5 мм (кривая 2) и 10 мм (кривая 3)

адекватны опытным данным, т. к. хорошо описывают не одну экспериментальную кривую, а весь набор таких кривых для разных значений толщины СРС, но с одними и теми же значениями коэффициентов поглощения и рассеяния.

2.4.2. Исследование бимодальности временного распределения излучения при прохождении лазерного импульса через СРС.

В проведённой серии экспериментов было обнаружено отсутствие такого временного распределения прошедшего через СРС излучения, в котором наблюдались бы раздельно баллистический и рассеянный пики. Такое распределение соответствует типу 2'' (рис. 2.3) и должно было бы наблюдаться всегда, когда толщина рассеивающего слоя достаточно велика.

Факт ненаблюдения баллистических фотонов одновременно с рассеянными фотонами можно объяснить следующим образом. С учётом собственной длительности исходного импульса идеальное временное распределение (рис. 2.3) приобретает вид, показанный на рисунке 2.14.

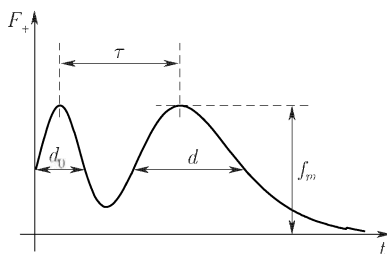


Рис. 2.14. Общий вид временного распределения оптического импульса с длительностью d_0 после прохождения однородного рассеивающего слоя

При малой толщине среды, когда амплитуда баллистического пика ещё достаточно велика, смещение пика рассеянных фотонов по отношению к пику баллистических фотонов незначительно (распределение типа 2')

на рис. 2.3), и оба пика сливаются в один. При большей толщине среды, когда расстояние между двумя пиками достаточно для их раздельного наблюдения, амплитуда баллистического пика становится пренебрежимо малой, и снова остаётся только один пик рассеянных фотонов.

Положение пика баллистических фотонов определяется временем прохождения светом расстояния от источника до детектора. Количество баллистических фотонов определяется известным законом экспоненциального ослабления, а их временное распределение повторяет форму импульса исходного излучения. Форма и положение пика рассеянных фотонов, в частности смещение пика рассеянных фотонов относительно баллистического пика, зависят от параметров СРС и характера миграции фотонов в среде. Количество же рассеянных фотонов можно определить на базе нестационарной осевой модели прохождения излучения. Таким образом, желательно получить количественные оценки, подтверждающие вышеприведённое объяснение ненаблюдения бимодального временного распределения прошедшего через СРС импульсного лазерного излучения, а также выяснить условия, необходимые для одновременного наблюдения баллистических и рассеянных фотонов [181].

Для решения вопроса об одновременном наблюдении баллистических и рассеянных фотонов необходимо учесть форму исходного лазерного импульса. Будем считать для простоты, что форма импульса $F_0(t, x)$ описывается гауссовой функцией:

$$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (2.127)$$

при этом общая энергия импульса учтена в (2.123). Дисперсия σ_0 связана с полушириной (длительностью) исходного импульса d_0 соотношением $d_0 = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma_0$.

Находя свёртку первого слагаемого в (2.123) с $F_0(t)$, получим распределение баллистических фотонов $F_b(t, x)$ в виде

$$F_b(t, x) = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_0^2} - mx\right), \quad (2.128)$$

где $t_0 = x/v$ — время прохождения светом расстояния x . Очевидно, что полуширина распределения (2.128) совпадает с d_0 .

Аналогично можно найти распределение по времени $F_s(t, x)$, численно выполняя свёртку второго слагаемого в (2.123) с $F_0(t)$, после чего можно найти смещение τ , полуширину d и наибольшее значение f_m для рассеянных фотонов с учётом формы исходного импульса.

Условиями одновременного наблюдения разделяющихся пиков баллистических и рассеянных фотонов являются, с одной стороны, достаточно высокая амплитуда меньшего пика относительно большего

пика, а с другой стороны, достаточное смещение пиков относительно друг друга. Поэтому в качестве условий разделения можно выбрать следующие:

$$F_b(t_0, x) \geq 0,1 f_m, \quad (2.129)$$

$$f_m \geq 0,1 F_b(t_0, x), \quad (2.130)$$

$$\min_{t \in [t_0, t_m]} \{F_b(t, x) + F_s(t, x)\} < 0,9 \min \{F_b(t_0, x) + F_s(t_0, x), f_m\}, \quad (2.131)$$

где t_m — время максимума рассеянного пика, т.ч. $f_m = F_s(t_m, x)$. Отметим, что f_m является функцией d_0 . Условие (2.131) является некоторым аналогом критерия Рэлея.

Подбирая d_0 так, чтобы удовлетворялись соотношения (2.129)–(2.131), можно найти максимальную длительность исходного импульса, позволяющую одновременно наблюдать и пик баллистических фотонов, и пик рассеянных фотонов. При большей длительности исходного импульса рассеянный и баллистический пики будут сливаться, даже если сами по себе они и разделяются.

На рисунке 2.15 показана расчётная зависимость d_0 от коэффициентов рассеяния и поглощения СРС. Увеличение максимальной дли-

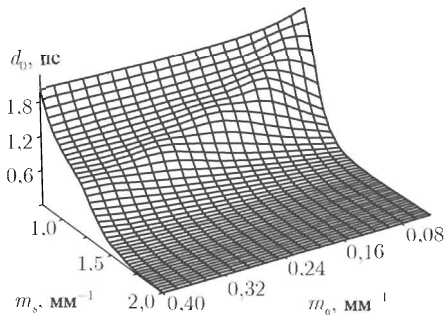


Рис. 2.15. Зависимость максимальной длительности d_0 исходного импульса, обеспечивающей одновременное наблюдение баллистического и рассеянного пиков, от коэффициентов рассеяния m_s и поглощения m_a (толщина слоя СРС равна 10 мм)

тельности исходного импульса, обеспечивающей разделение баллистической и рассеянной компонент, происходит при уменьшении m_s и увеличении m_a . Для временного разделения баллистической и рассеянной компонент в условиях вышеописанных экспериментов длительность исходного импульса должна была быть соответственно менее 300, 5 и 1 фс для толщины слоя СРС, равной 3, 5 и 10 мм, в то время как для использованного лазера $d_0 \sim 10$ пс. Таким образом, неудивительно, что бимодальное распределение не наблюдалось.

На рисунках 2.16 показаны теоретические временные распределения интенсивности излучения, прошедшего через СРС, для различных

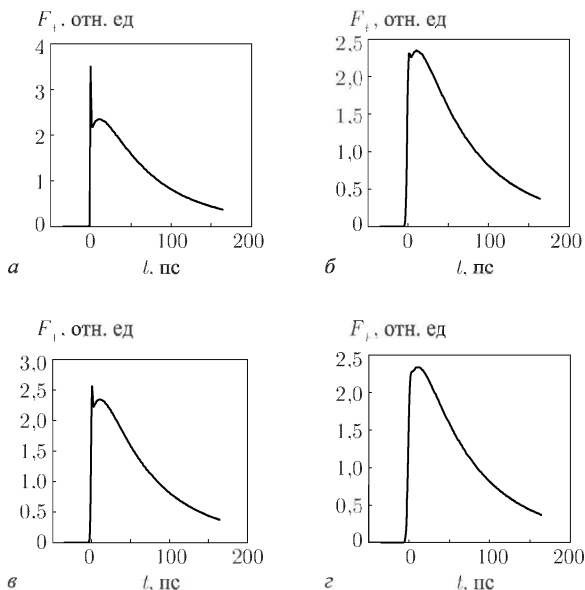


Рис. 2.16. Временные распределения излучения, прошедшего через слой СРС толщиной 10 мм ($m_a = 0,02 \text{ мм}^{-1}$, $m_s = 0,5 \text{ мм}^{-1}$), для различных значений длительности исходного импульса d_0 (а: $d_0 = 1,2$ пс; б: $d_0 = 2,4$ пс; в: $d_0 = 3,6$ пс; г: $d_0 = 4,8$ пс)

значений d_0 . Видно, что разделение баллистического и рассеянного пиков очень чувствительно к длительности исходного импульса. Изменение формы временных распределений для различных сочетаний длительности исходного импульса, коэффициента рассеяния и толщины СРС иллюстрируется рисунками 2.17 и 2.18. Во всех случаях расчёта взят коэффициент поглощения $m_a = 0,02 \text{ мм}^{-1}$, что соответствует величине этого параметра для излучения неодимовых лазеров ($\lambda = 1,06 \text{ мкм}$) в воде.

Из рисунков 2.17 и 2.18 видно, что разделение баллистического и рассеянного пиков не только чрезвычайно чувствительно к длительности исходного импульса, но и существует в очень узком диапазоне значений коэффициента рассеяния m_s (произведения $m_s h$). Разделения пиков вне этого диапазона не происходит.

Результаты расчёта [182] зависимостей максимальной длительности импульса τ_m , позволяющей одновременно наблюдать пики различного вида фотонов, от коэффициента рассеяния m_s для различных значений толщины рассеивающего слоя h показаны на рисунке 2.19, а. Кривые 1–5 разделяют области существования бимодальной формы импульсов и доминирования рассеянных фотонов. Интересно отметить, что кривые 1–5 состоят из двух почти прямолинейных участков. Весь

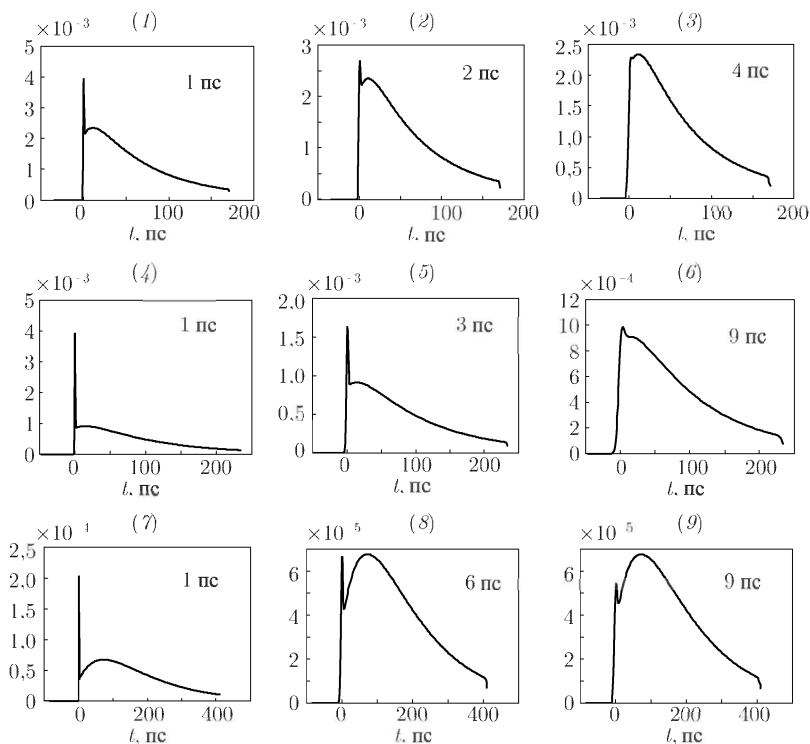


Рис. 2.17. Временные распределения интенсивности импульса излучения, прошедшего через рассеивающий слой толщины h с коэффициентом рассеяния m_s (коэффициент поглощения $m_a = 0,02 \text{ мм}^{-1}$; длительность исходного лазерного импульса τ указана на рисунке), где 1, 2, 3: $h = 10 \text{ мм}$, $m_s = 0,5 \text{ мм}^{-1}$; 4, 5, 6: $h = 20 \text{ мм}$, $m_s = 0,25 \text{ мм}^{-1}$; 7, 8, 9: $h = 50 \text{ мм}$, $m_s = 0,15 \text{ мм}^{-1}$

диапазон бимодальной формы импульсов сверху ограничен огибающей кривой 6. Аналогичные зависимости от толщины рассеивающего слоя h при различных коэффициентах рассеяния m_s показаны на рисунке 2.19, б.

Таким образом, нестационарная осевая модель взаимодействия лазерного пучка с рассеивающей средой позволяет определить условия разделения баллистических и рассеянных фотонов, прошедших через рассеивающую среду.

Так как теоретическое исследование вопроса о разделении баллистической и рассеянной компонент прошедшего через СРС лазерного импульса показало необходимость существенно меньшей длительности исходного импульса, в дальнейших экспериментах [183–184] вместо лазера с импульсами пикосекундной длительности ($\sim 10 \text{ пс}$) был использован лазер с импульсами фемтосекундной длительности

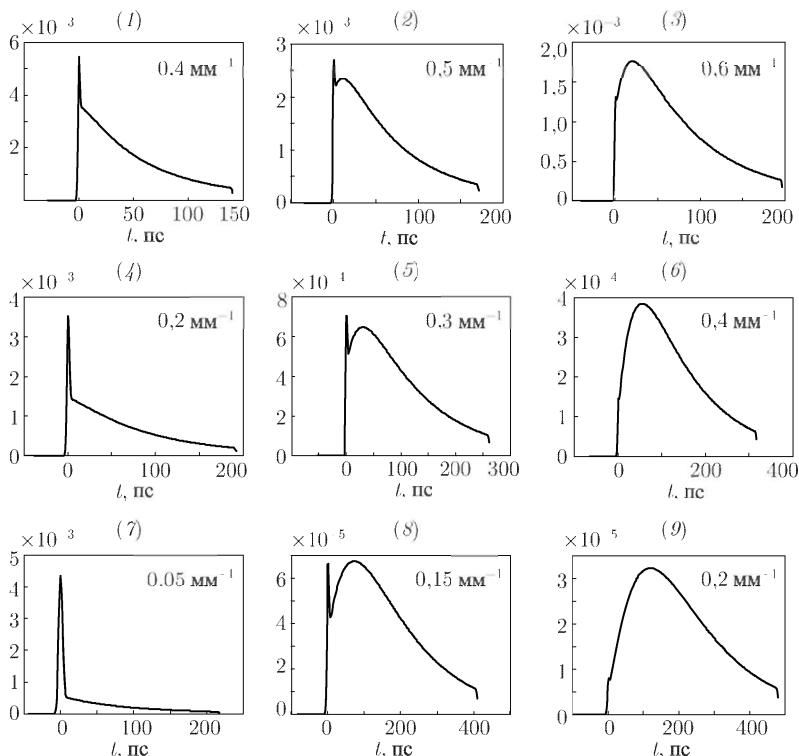


Рис. 2.18. Временные распределения интенсивности импульса излучения с исходной длительностью τ , прошедшего через рассеивающий слой толщины h (коэффициент поглощения $m_a = 0,02$ мм $^{-1}$; коэффициент рассеяния m_s указан на рисунке), где 1, 2, 3: $h = 10$ мм, $\tau = 2$ пс; 4, 5, 6: $h = 20$ мм, $\tau = 3$ пс; 7, 8, 9: $h = 50$ мм, $\tau = 6$ пс

(~ 100 фс), и разделение пиков ограничивалось, по существу, только разрешением электронно-оптической камеры (~ 2 пс). Предварительно рассчитанный узкий диапазон коэффициентов поглощения и рассеяния и толщины рассеивающего слоя, в котором существует область бимодальной формы временного распределения, обеспечил нахождение нужного сочетания всех параметров при проведении экспериментов.

В экспериментах был использован лазер на титанате сапфира. Прошедшее через кювету излучение, как и раньше, регистрировалось электронно-оптической камерой. Для осуществления временной привязки регистрируемого излучения в оптической схеме эксперимента было предусмотрено создание реперного импульса.

В качестве модельной СРС использовался раствор свежего молока в воде, который помещался в прямоугольную стеклянную кювету переменной толщины h (от 2 до 50 мм).

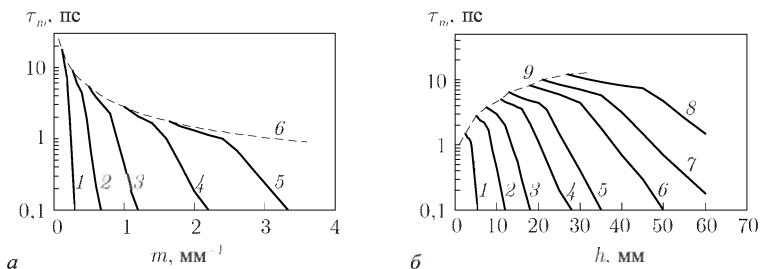


Рис. 2.19. Зависимости максимальной длительности исходного лазерного импульса τ_m , позволяющей одновременно наблюдать баллистический и рассеянный пики: а) от коэффициента рассеяния m_s для различных значений толщины рассеивающего слоя $h = 50, 20, 10, 5, 3, 2, 1$ мм для кривых 1, 2, 3, 4, 5 соответственно; кривая 6 — огибающая; б) от толщины рассеивающего слоя h при различных коэффициентах рассеяния $m_s = 2, 1, 0,7, 0,5, 0,4, 0,3, 0,25, 0,2$ мм $^{-1}$ для кривых 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соответственно, кривая 9 — огибающая. Коэффициент поглощения во всех случаях $m_a = 0,02$ мм $^{-1}$

На рисунке 2.20 показана схема эксперимента: 1 — источник лазерного излучения; 2, 5 — поворотные зеркала; 8 — кювета переменной толщины с раствором молока; 11 — электронно-оптическая камера; 12 — система считывания; 3, 10 — стеклянные пластинки; 4 — оптическая линия задержки; 6 — блок фильтров; 7, 9 — входная и выходная диафрагмы.

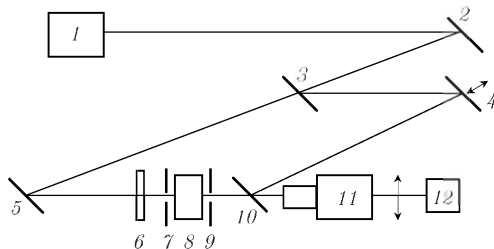


Рис. 2.20. Схема эксперимента с фемтосекундным лазером

Первым шагом эксперимента явилось определение диапазона значений коэффициента экстинкции m в области разделения баллистического и рассеянного пиков для фиксированной толщины кюветы h , в соответствии с данными расчёта (рис. 2.19). Следует отметить, что для выбора этой области за величину τ_m была взята не длительность лазерного импульса (120 фс), а предельное временное разрешение электронно-оптической камеры (2 пс), т. к. ширина временного распределения баллистического пика определялась этим параметром.

Экспериментальные и соответствующие им теоретические кривые временных распределений прошедшего через рассеивающую среду ла-

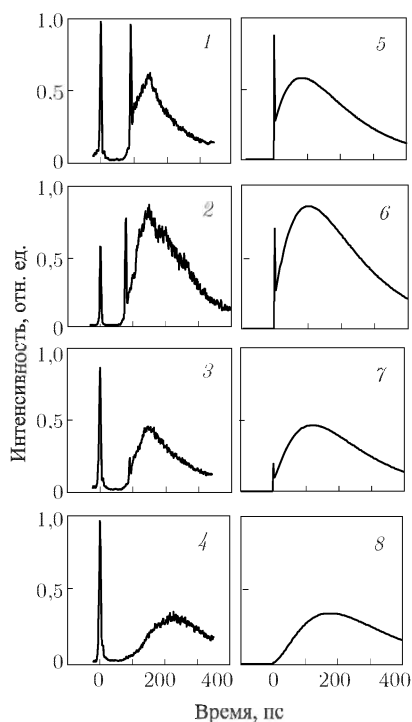


Рис. 2.21. Временные профили интенсивности прошедшего через рассеивающую среду толщиной 50 мм лазерного импульса, полученные экспериментально для $\tilde{m} = 0,14; 0,16; 0,18; 0,25 \text{ мм}^{-1}$ (кривые 1, 2, 3, 4; крайний левый пик — реперный импульс) и рассчитанные теоретически для $m = 0,16, 0,18, 0,20, 0,27 \text{ мм}^{-1}$ (кривые 5, 6, 7, 8)

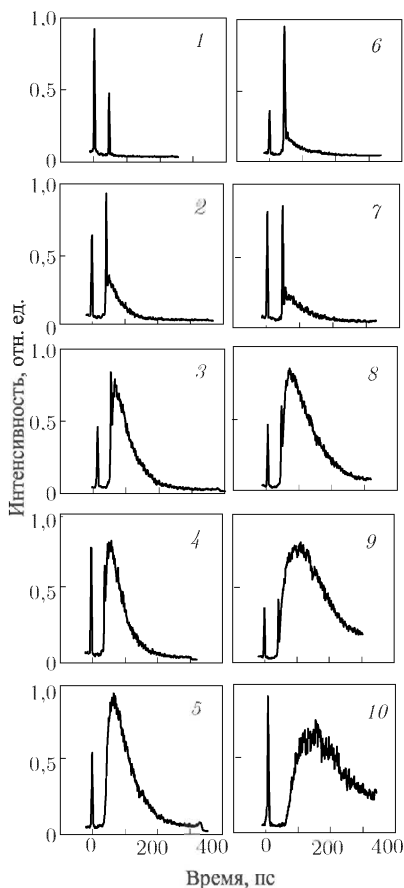


Рис. 2.22. Экспериментально полученные временные профили интенсивности лазерного импульса, прошедшего через слои СРС толщиной $h = 4, 6, 6,5, 7, 8 \text{ мм}$ с коэффициентом экстинкции $\tilde{m} = 1,4 \text{ мм}^{-1}$ (кривые 1, 2, 3, 4, 5) и $h = 10, 11, 13, 14, 20 \text{ мм}$ с коэффициентом экстинкции $\tilde{m} = 0,7 \text{ мм}^{-1}$ (кривые 6, 7, 8, 9, 10). Крайний левый пик — реперный импульс

зерного импульса показаны на рисунке 2.21. Экспериментальные значения коэффициента экстинкции $\tilde{m}$ определялись по баллистической компоненте для меньших толщин СРС с той же концентрацией молока в воде.

Аналогичная процедура нахождения области разделения баллистических и рассеянных пиков была осуществлена при заданных концентрациях. На рисунке 2.22 показаны экспериментальные профили прошедшего излучения для двух значений коэффициента $\tilde{m}$ при различных значениях толщины модельного раствора h . При этом значения h , для которых наблюдалось бимодальное распределение, соответствуют данным рисунка 2.19, б.

Хорошее соответствие полученных экспериментально и теоретически подобранных коэффициентов $\tilde{m}$ и m ещё раз свидетельствует об эффективности нестационарной осевой модели переноса излучения.

Таким образом, нестационарная осевая модель переноса излучения позволяет по форме временного распределения (полуширине рассеянного пика и его смещению относительно баллистического пика) определить параметры СРС, зная которые можно не только описать всё данное временное распределение, но и временные распределения, соответствующие любой другой толщине рассеивающего слоя, т.е. целое семейство временных распределений. Кроме того, в данной модели можно эффективно учесть длительность исходного импульса и разрешение детектирующей системы, что позволяет предсказать возможность наблюдения бимодальной формы временного распределения излучения, прошедшего через СРС, а также определить условия, обеспечивающие такое наблюдение.

2.5. Томография СРС на основе нестационарной осевой модели переноса излучения

2.5.1. Одновременное определение пространственных распределений коэффициентов поглощения и рассеяния. Главной особенностью томографии СРС является необходимость одновременного определения двух пространственных функций — коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния СРС. Поэтому при использовании обычной томографической схемы регистрации проекционных данных для применения интегральных преобразований типа Радона в стационарном случае не хватает исходных данных. Эта ситуация аналогична случаю эмиссионной томографии в поглощающих средах, когда необходима одновременная реконструкция пространственных распределений не только источников излучения, но и коэффициента поглощения. Делая предположение о пространственной постоянности коэффициента поглощения и известности его величины, можно прийти к экспоненциальному преобразованию Радона. В случае трансмиссионной томографии рассеивающих сред ситуация ещё более сложная, но регистрация временного распределения прошедшего излучения предоставляет боль-

ше возможностей для реконструкции пространственных распределений неизвестных характеристик СРС [178, 179].

Так как баллистическая компонента присутствует и при прохождении излучения через неоднородную СРС, её выделение из прошедшего излучения обеспечивает восстановление коэффициента экстинкции $m(x, y)$ в обычной томографической схеме с использованием обратного преобразования Радона. Возможность такого выделения при использовании достаточно коротких лазерных импульсов и достаточно быстродействующих систем регистрации была показана в предыдущем разделе. Прошедшее излучение в нестационарной осевой модели переноса излучения в неоднородной среде описывается уравнением (2.105). Для баллистической компоненты $F_+^{(b)}(\zeta, t)$ в неоднородной среде можно записать

$$F_+^{(b)}(\zeta, t) = U_0 \delta\left(t - \frac{\zeta - \zeta_0}{v}\right) \exp\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta} m(\chi) d\chi\right\}. \quad (2.132)$$

Заметим, что функция (2.132) автоматически удовлетворяет граничным условиям (2.106).

Проинтегрировав уравнение (2.105) по времени, можно найти уравнение для общей энергии прошедшего через рассеивающую среду импульса:

$$U_+''(\zeta) - \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)} U_+'(\zeta) - \left[m^2(\zeta) - m_s^2(\zeta) + m(\zeta) \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)} - m'(\zeta)\right] U_+(\zeta) = 0, \quad (2.133)$$

где $U_+(\zeta) = \int_0^\infty F_+(\zeta, t) dt$. А граничные условия можно найти из граничных условий (2.106):

$$\begin{cases} U_+(\zeta_0) = U_0 \\ \left. \frac{d}{d\zeta} U_+(\zeta) \right|_{\zeta=\zeta_1} + m(\zeta_1) U_+(\zeta_1) = 0 \end{cases}. \quad (2.134)$$

Общая энергия состоит из суммы энергий баллистической $U_+^{(b)}(\zeta)$ и рассеянной $U_+^{(s)}(\zeta)$ компонент, т. е. $U_+(\zeta) = U_+^{(b)}(\zeta) + U_+^{(s)}(\zeta)$. Уравнение для энергии баллистической компоненты имеет следующий вид:

$$\left[U_+^{(b)}(\zeta)\right]'' - \left[m^2(\zeta) - m'(\zeta)\right] U_+^{(b)}(\zeta) = 0. \quad (2.135)$$

Решением [185, 186] уравнения (2.135), как и следовало ожидать из формулы (2.132), является закон экспоненциального ослабления:

$$U_+^{(b)}(\zeta) = U_0 \exp\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta} m(\chi) d\chi\right\}, \quad (2.136)$$

причём оно автоматически удовлетворяет граничным условиям (2.134).

Как известно (см. гл. 1), закон (2.136) и, следовательно, уравнение (2.135) в задаче томографического восстановления двумерной функции $m(x, y)$ приводят к преобразованию Радона. Тогда, применяя обратное преобразование Радона $\mathfrak{R}^{-1}\{\cdot\}$ к проекциям $p_+^{(b)}(\xi, \vartheta) = -\ln(U_+^{(b)}(\zeta_1)/U_0)$, где ϑ — угол поворота вращающейся системы координат (ξ, ζ) относительно неподвижной системы координат (x, y) , а $\zeta_1 = \zeta_1(\xi, \vartheta)$ — точка выхода луча из среды (рис. 2.2), получим восстановленное изображение искомой функции $m(x, y)$. Подчеркнём ещё раз, что исходными данными служат измерения только баллистической компоненты.

Однако в случае рассеивающей среды необходимо одновременно восстановить ещё одну двумерную функцию $m_s(x, y)$. Можно предложить следующий приближённый способ. Будем считать, что в каждом измерении регистрируется временное распределение прошедших фотонов. Тогда из него можно выделить часть, соответствующую баллистическим фотонам, описываемую уравнением (2.135). Используя обратное преобразование Радона, получим одну из искоемых функций $m(x, y)$, т. е.

$$m(x, y) = \mathfrak{R}^{-1} \left\{ p_+^{(b)}(\xi, \vartheta) \right\}. \quad (2.137)$$

Для нахождения второй неизвестной функции $m_s(x, y)$ поступим следующим образом. Учитывая, что решение $U_+(\zeta)$ уравнения (2.133) является неотрицательной функцией, его можно записать в экспоненциальной форме с некоторой функцией $M(\zeta)$:

$$U_+(\zeta) = U_0 \exp \left(- \int_{\zeta_0}^{\zeta} M(\chi) d\chi \right). \quad (2.138)$$

Применяя к проекциям $p_+(\xi, \vartheta) = -\ln(U_+(\zeta_1)/U_0)$ обратное преобразование Радона, получим введённую функцию $M(x, y)$, т. е.

$$M(x, y) = \mathfrak{R}^{-1} \{ p_+(\xi, \vartheta) \}. \quad (2.139)$$

Для нахождения связи между функциями $m(x, y)$, $m_s(x, y)$ и $M(x, y)$ подставим выражение (2.138) в уравнение (2.133):

$$m'_s(\zeta) = \frac{m_s^3(\zeta)}{m(\zeta) - M(\zeta)} + \frac{M^2(\zeta) - M'(\zeta) - m^2(\zeta) + m'(\zeta)}{m(\zeta) - M(\zeta)} m_s(\zeta). \quad (2.140)$$

Так как функция $m(x, y)$ уже известна, то для каждой линии проецирования можно найти $m_s(\zeta)$, решая нелинейное дифференциальное уравнение (2.140) относительно $m_s(\zeta)$. Уравнение (2.140) является уравнением Абеля, а также уравнением Бернулли, которое можно ре-

шить в квадратурах [185]:

$$m_s(\zeta) = \frac{\exp\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} f_1(\chi) d\chi\right)}{\sqrt{C - 2 \int_{\zeta_0}^{\zeta} f_3(\chi) \exp\left(2 \int_{\zeta_0}^{\chi} f_1(\chi_1) d\chi_1\right) d\chi}}, \quad (2.141)$$

где

$$f_1(\zeta) = \frac{M^2(\zeta) - M'(\zeta) - m^2(\zeta) + m'(\zeta)}{m(\zeta) - M(\zeta)}, \quad (2.142)$$

$$f_3(\zeta) = \frac{1}{m(\zeta) - M(\zeta)}, \quad (2.143)$$

$$C = \frac{1}{m^2(\zeta_0) - M^2(\zeta_0)}. \quad (2.144)$$

Для полного восстановления функции $m_s(x, y)$ достаточно вычислить значения $m_s(\zeta)$ по формуле (2.152) по всем линиям проецирования при каком-либо одном значении угла поворота ϑ . Вследствие приближённости этого подхода разумно усреднить результат по всем углам поворота.

2.5.2. Томография пропорциональных рассеивающих сред.

Переход к нестационарным моделям и импульсному излучению обусловлен двумя основными факторами. Первый фактор заключается в том, что, выделяя из временного распределения баллистическую компоненту и учитывая справедливость для неё закона экспоненциального ослабления, можно восстановить пространственное распределение коэффициента экстинкции, используя стандартную томографическую схему измерений и алгоритмы, опирающиеся на преобразование Радона. Второй фактор связан с тем обстоятельством, что в рассеивающих средах подлежат восстановлению уже две неизвестные функции, т.е. к коэффициенту поглощения добавляется коэффициент рассеяния. Такая задача уже в принципе неразрешима в рамках преобразования Радона вследствие недостаточности исходной информации в стационарном случае. Выход во временную область позволяет резко увеличить количество исходной информации.

Однако существует важный частный случай, сокращающий число неизвестных функций [187]. При этом постулируется, что и коэффициент поглощения, и коэффициент рассеяния, являясь пространственно неоднородными величинами, пропорциональны друг другу. Такое предположение естественно следует из представления о поглощающих и рассеивающих центрах, каждый из которых может с некоторой вероятностью как поглотить, так и рассеять налетающий фотон. Тогда макроскопические характеристики должны быть пропорциональны плотности таких центров, которая может быть пространственно неодно-

родна. С учётом сделанного предположения задача сводится к определению единственной неизвестной функции — плотности поглощающих и рассеивающих центров или, что то же самое, любого коэффициента (поглощения, рассеяния или экстинкции). Будем называть такие СРС пропорциональными средами. В пропорциональных средах появляется возможность использования традиционного томографического подхода, использующего преобразование Радона. При этом нет необходимости использовать выход во временную область и можно ограничиться стационарным случаем. Для пропорциональных сред, таким образом, дополнительно к соотношению $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = m_s(\vec{r})\delta_2(-\vec{\Omega}'\vec{\Omega})$ можно записать $m_a(\zeta) = (1 - \beta)m(\zeta)$ или $m_s(\zeta) = \beta m(\zeta)$, где β — не зависящий от координат коэффициент. Тогда уравнение (2.133) упрощается:

$$U_+''(\zeta) - \frac{m'(\zeta)}{m(\zeta)}U_+'(\zeta) - m^2(\zeta)(1 - \beta^2)U_+(\zeta) = 0. \quad (2.145)$$

Граничные условия будут иметь вид

$$\begin{cases} U_+(\zeta_0) = U_0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial \zeta} U_+(\zeta) \right|_{\zeta=\zeta_1} + m(\zeta_1)U_+(\zeta_1) = 0 \end{cases}. \quad (2.146)$$

Уравнение (2.145) является одним из немногих обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с произвольными функциями в коэффициентах, которые решаются в квадратурах [185]. Общим решением этого уравнения является

$$U_+(\zeta) = C_1 \exp \left\{ - \int \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\} + C_2 \exp \left\{ \int \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\}. \quad (2.147)$$

Для граничных условий (2.146) решение имеет вид

$$\begin{aligned} U_+(\zeta) = \\ = U_0 \frac{\exp \left\{ \int_{\zeta}^{\zeta_1} \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\} - \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \exp \left\{ - \int_{\zeta}^{\zeta_1} \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\}}{\exp \left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\} - \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \exp \left\{ - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{1 - \beta^2} m(\zeta) d\zeta \right\}}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Решение (2.148) не является законом экспоненциального ослабления. Это обстоятельство и является одной из причин неприменимости к СРС стандартных алгоритмов обратного преобразования Радона. Другими словами, в СРС необходимо учитывать граничные условия не только в точке входа луча в СРС, но и в точке выхода из СРС.

Рассмотрим точное решение (2.148). Найдём $U_+(\zeta_1)$:

$$U_+(\zeta_1) = \frac{\frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}}}{\exp\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{1-\beta^2} m(\zeta) d\zeta\right\} - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \exp\left\{-\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{1-\beta^2} m(\zeta) d\zeta\right\}}. \quad (2.149)$$

Тогда

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \sqrt{1-\beta^2} m(\zeta) d\zeta = -\ln \left[\frac{-\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{1-\beta^2 + \beta^2 \left(\frac{U_+(\zeta_1)}{U_0}\right)^2}}{\frac{U_+(\zeta_1)}{U_0} (1-\sqrt{1-\beta^2})} \right] \quad (2.150)$$

и, следовательно, точным выражением для проекции $p(\xi, \vartheta)$ является

$$p(\xi, \vartheta) = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln \left(\frac{-\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{1-\beta^2 + \beta^2 \left(\frac{U_+(\zeta_1)}{U_0}\right)^2}}{\frac{U_+(\zeta_1)}{U_0} (1-\sqrt{1-\beta^2})} \right). \quad (2.151)$$

Применяя к проекциям обратное преобразование Радона, получим пространственное распределение коэффициента экстинкции:

$$m(x, y) = \mathfrak{R}^{-1} \{p(\xi, \vartheta)\}. \quad (2.152)$$

Заметим, что, как и в случае чисто поглощающей среды, решение томографической задачи для пропорциональной среды является точным. При уменьшении рассеивающих свойств среды и приближении её к чисто поглощающей среде, т.е. при $\beta \rightarrow 0$, выражение для прошедшего излучения (2.148) непрерывно стремится к закону экспоненциального ослабления, а выражение для проекций (2.151) стремится к аналогичному выражению рентгеновской томографии. Другие приближения, например часто используемое диффузионное приближение, не обеспечивают такой переход. Поэтому случай пропорциональной среды можно назвать ближайшим обобщением чисто поглощающей среды на рассеивающие среды.

Другим следствием решения для пропорциональной среды является то, что оно может служить критерием точности для любых других подходов, претендующих на применимость к произвольной рассеивающей среде, а следовательно, и к пропорциональной среде.

Необходимость учёта ограниченности рассеивающего слоя, проходящего зондирующим лучом, по-видимому, является одним из принци-

пиальных отличий томографии рассеивающих сред от томографии чисто поглощающих сред. Исследуем более подробно это влияние на примере конкретного распределения $m(x, y)$, а именно возьмём распределение коэффициента экстинкции в виде константы внутри круга радиуса R :

$$m(x, y) = m\eta(R - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (2.153)$$

где $m = \text{const}$, $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда (рис. 2.23). Используя найденное выражение (2.149), получим

$$U_+(\zeta_1) = \frac{U_0 k}{k \text{ch}(k(\zeta_1 - \zeta_0)) + m \text{sh}(k(\zeta_1 - \zeta_0))}, \quad (2.154)$$

где $k = m\sqrt{1 - \beta^2}$, $\zeta_0 = -\sqrt{R^2 - \xi^2}$, $\zeta_1 = \sqrt{R^2 - \xi^2}$, а $\text{ch}(\cdot)$ и $\text{sh}(\cdot)$ — косинус гиперболический и синус гиперболический соответственно.

Проекции, определяемые так же, как в рентгеновской томографии, имеют следующий вид:

$$p(\xi, \vartheta) = \eta(R - |\xi|) \ln \left[\text{ch} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right) + \frac{m}{k} \text{sh} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right) \right]. \quad (2.155)$$

Так как для радиально-симметричной исходной функции $m(x, y) = m(\sqrt{x^2 + y^2}) = m(r)$ проекции от ϑ не зависят, т. е. $p(\xi, \vartheta) = p(\xi)$, то преобразование Радона сводится к преобразованию Абеля относительно $m^*(r) = \sqrt{1 - \beta^2} m(r)$. Следовательно, оценку $\tilde{m}^*(r)$ можно получить, применяя к проекциям (2.155) обратное преобразование Абеля, а оценку $\tilde{m}(x, y)$ искомого распределения коэффициента экстинкции найдём по формуле $\tilde{m}(x, y) = (1 - \beta^2)^{-1/2} \tilde{m}^*(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \tilde{m}^*(r) &= -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}} \frac{dp(\xi)}{d\xi} d\xi = \\ &= \frac{2k}{\pi} \int_r^R \frac{k \text{sh} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right) + m \text{ch} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right)}{k \text{ch} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right) + m \text{sh} \left(2k\sqrt{R^2 - \xi^2} \right)} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - r^2)(R^2 - \xi^2)}} = \\ &= \frac{2k}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\alpha \cos \varphi} + \gamma}{e^{\alpha \cos \varphi} - \gamma} d\varphi, \quad (2.156) \end{aligned}$$

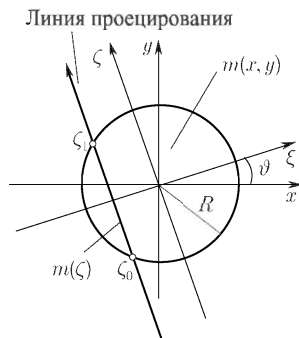


Рис. 2.23. Схема получения проекций в пропорциональной СРС с постоянным распределением коэффициента экстинкции внутри круга радиуса R

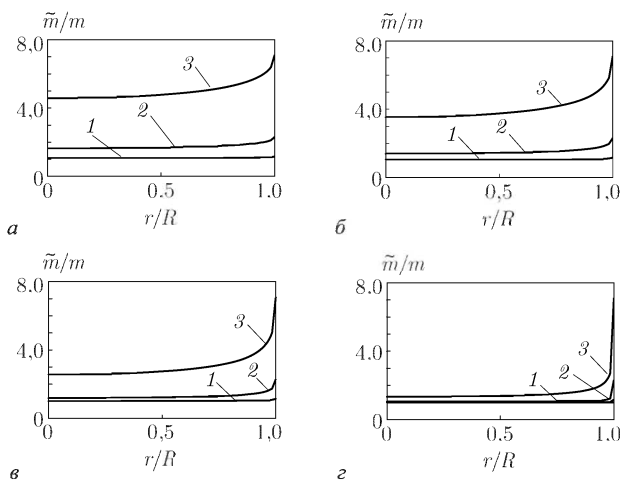


Рис. 2.24. Зависимости отношения $\tilde{m}(r)/m$ от r/R для $mR = 0,5$ (а), $1,0$ (б), $2,0$ (в) и $10,0$ (г) и $\beta = 0,5$ (1), $0,9$ (2) и $0,99$ (3)

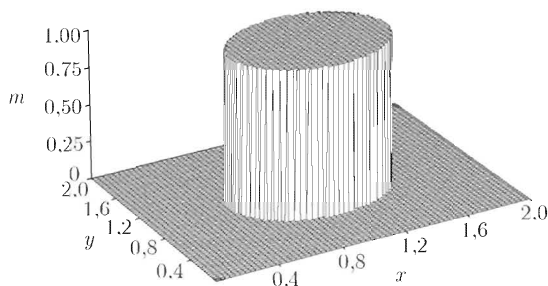


Рис. 2.25. Заданное пространственное распределение коэффициента экстинкции без учёта ограниченности рассеивающей среды ($\beta = 0,99$ и $mR = 1,0$)

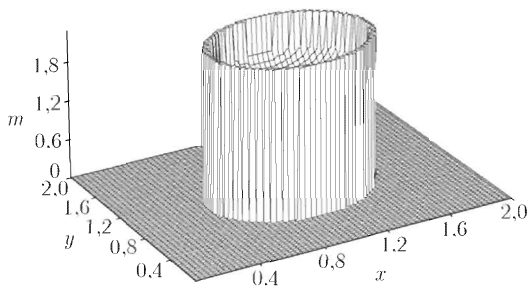


Рис. 2.26. Восстановленное пространственное распределение коэффициента экстинкции без учёта ограниченности рассеивающей среды ($\beta = 0,99$ и $mR = 1,0$)

где $\alpha = 4k\sqrt{R^2 - r^2}$, а $\gamma = \frac{m-k}{m+k} = \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}}$ — число, близкое к единице для сильнона рассеивающих сред.

При $r = R$ имеем $\tilde{m}^*(r) = m$, т. е. $\tilde{m}(r) = (1 - \beta^2)^{-1/2}m$. Рассмотрим два крайних случая: $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Первый случай реализуется при $k = m\sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow 0$, а также при $r \rightarrow R$. Второй случай реализуется при $k = m\sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow \infty$, а также при $R \rightarrow \infty$.

В первом случае получим

$$\begin{aligned}\tilde{m}^*(r) &= \frac{2k}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\alpha \cos \varphi} + \gamma}{e^{\alpha \cos \varphi} - \gamma} d\varphi \approx \frac{2k}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{2\alpha\gamma}{(1-\gamma)^2} \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= m - \frac{4\beta^2 m^2}{\pi} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (2.157)\end{aligned}$$

а во втором случае

$$\begin{aligned}\tilde{m}^*(r) &= \frac{2k}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\alpha \cos \varphi} + \gamma}{e^{\alpha \cos \varphi} - \gamma} d\varphi \approx \frac{2k}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 + 2\gamma e^{-\alpha \cos \varphi}) d\varphi = \\ &= k + 2k\gamma [I_0(\alpha) - L_0(\alpha)] \approx k + \frac{4k\gamma}{\alpha} = k + \frac{\gamma}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (2.158)\end{aligned}$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, а $L_0(\cdot)$ — модифицированная функция Струве нулевого порядка [107].

Таким образом, для малых mR существенные искажения есть при всех значениях r , и даже для больших mR $\tilde{m}(R) = (1 - \beta^2)^{-1/2}m$ и $\tilde{m}(0) \approx m$, т. е. на периферии круга искажения могут быть весьма велики. Например, для $m_a \sim 0,01 \text{ мм}^{-1}$ и $m_s \sim 1 \text{ мм}^{-1}$ имеем $\gamma \sim \sim 0,75$, $(1 - \beta^2)^{-1/2} \sim 7$. Более подробно эти искажения показаны на рисунке 2.24, на котором приведены графики функции $\lambda(\beta, mR, r/R) = \tilde{m}(r)/m$, т. ч.

$$\lambda(\beta, mR, r/R) = \frac{\tilde{m}(r)}{m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{4mR \cos \varphi \sqrt{(1-\beta^2)(1-(r/R)^2)}} + \gamma}{e^{4mR \cos \varphi \sqrt{(1-\beta^2)(1-(r/R)^2)}} - \gamma} d\varphi. \quad (2.159)$$

Общий вид пространственного распределения коэффициента экстинкции показан на рисунке 2.25 (заданное распределение) и рисунке 2.26 (восстановленное распределение).

Глава 3

ИНТЕГРАЛЬНО-КОДОВЫЕ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЙ В ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Как уже отмечалось, при использовании методов обращения преобразования Радона или экспоненциального преобразования Радона предполагается возможность наблюдения (зондирования) объекта во всех направлениях. Эта группа методов относится к так называемой поперечной томографии. Если это предположение не выполняется, то в поперечной томографии возникает фундаментальная, не решённая до конца проблема реконструкции объекта по неполным проекционным данным. В то же время существует другой подход (так называемая продольная томография), в котором изначально не предполагается движение системы измерений вокруг объекта. Если же какое-то движение и происходит, то при этом система измерений всё время находится с одной стороны от объекта. Такой подход является естественным развитием методов получения проекционных изображений двумерных или трёхмерных объектов с помощью многоканального и однопинхольного коллиматоров (рис. 3.1) [188–190]. При этом изображение явля-

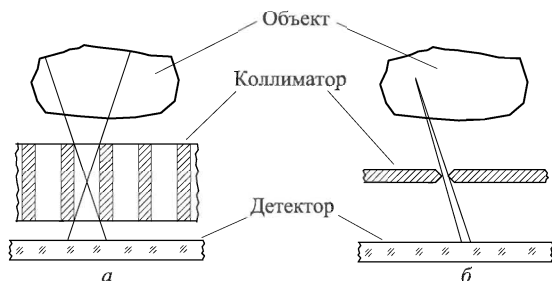


Рис. 3.1. Проекционное изображение с помощью многоканального (а) и однопинхольного (б) коллиматоров

ется копией двумерного объекта с возможным изменением масштаба и суперпозицией всех плоскостей трёхмерного объекта, параллельных плоскости детектора или экрана.

В случае трёхмерного объекта основной задачей продольной томографии является получение изображения выбранной (фокусной) плоскости объекта, параллельной плоскости детектора, более или менее свободного от вклада остальных (внефокусных) плоскостей. Если при

этом удаётся каким-либо способом увеличить вклад фокусной плоскости по сравнению с обычным суперпозиционным изображением, то говорят о продольной томограмме, что напоминает линейную или вращательную томограмму в классической нереконструктивной медицинской томографии [17]. Ясно, что многоканальный коллиматор с параллельными каналами и однопинхольный коллиматор в принципе не способны справиться с такой задачей.

Развитие продольной томографии пошло в направлении усложнения систем измерений, в частности коллимирующих устройств [11, 46, 191]. При этом в сравнительно тонком (аналогично однопинхольному) коллиматоре формируется сложная (в отличие от точечного пинхола) картина прозрачных для излучения участков. Тогда каждую точку в плоскости коллиматора можно рассматривать как идеальный точечный пинхол, формирующий изображение на детекторе. Общее изображение на позиционно-чувствительном детекторе (ПЧД) будет представлять собой суперпозицию изображений от каждой точки коллиматора

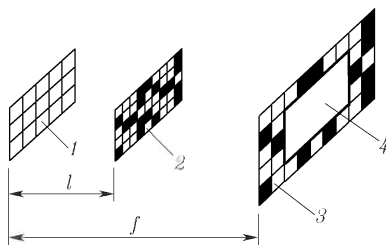


Рис. 3.2. Схема интегрально-кодовой системы измерений (ИКСИ): 1 — источник, 2 — кодирующий коллиматор, 3 — кодирующая маска, 4 — детектор (обычный или ПЧД)

(рис. 3.2). Таким образом, на детекторе образуется изображение, которое даже для плоского источника не будет иметь никакого сходства с объектом. Это обстоятельство делает необходимой дополнительную операцию по декодированию изображения на детекторе. Поскольку такой сложный коллиматор осуществляет пространственную модуляцию или кодирование излучения, падающего на детектор, такие системы получили название систем с модуляцией или кодированием излучения. Подчеркивая интегральный характер формирования общего изображения на детекторе, будем называть их интегрально-кодовыми системами измерений (ИКСИ). Сочетание дополнительной кодирующей маски и детектора, не являющегося позиционно-чувствительным, позволяет реализовать ПЧД средствами модуляции излучения.

Наибольшее распространение среди кодирующих коллиматоров для ИКСИ получили коллиматоры в виде зонной пластинки Френеля (ЗПФ) [192–196] и многопинхольные коллиматоры с регулярным [197–198], минимально избыточным [199–200], случайным [201–202] и псевдослучайным [203–208] расположениями пинхолов. Для декодиро-

вания изображений, полученных с помощью ЗПФ, использовались как оптические аналоговые [209–210], так и численные [211–213] методы. Для декодирования результатов, полученных при использовании многопинхольных коллиматоров, в большинстве случаев использовались численные методы, хотя иногда применялось и оптическое аналоговое декодирование [212]. Сравнение различных многопинхольных коллиматоров [11, 198] позволяет сделать категорический вывод о преимуществе псевдослучайного расположения пинхолов.

Следует отметить также имеющее большое значение предложение строить многопинхольный коллиматор на основе двумерной мозаики некоторой базовой части [214], что делает матрицу, описывающую процесс кодирования, циклической — матрицей-циркулянтотом [215]. Различные варианты построения ИКСИ рассмотрены в [216].

Кроме перечисленных использовались и другие кодирующие коллиматоры, исследованные, однако, сравнительно мало. Известны коллиматоры в виде нефренелевских зонных пластинок [217–219], одномерные и двумерные щелевые коллиматоры с размерами щелей, промодулированными по ЗПФ [220], коллиматоры в виде двух перпендикулярных решёток [221], в виде тонкой кольцевой щели [222–223], в виде фурье-апертуры [224–225] и различные модификации ЗПФ, а именно инверсная ЗПФ с увеличивающейся при удалении от центра шириной зон, спиральная ЗПФ и модифицированный растр Жирара (гиперболическая зонная пластинка) [226].

Конечно, интегрально-кодовые (или, как их ещё называют, мультиплексные) системы измерений нашли применение не только при получении изображений в радиационной интроскопии, но и во многих других областях: космической связи, радарной технике, радио, гамма- и рентгеновской астрономии, спектрометрии нейтронов по времени пролёта, оптике и др. [227–228]. Если первоначальной мотивацией их использования были исключительные помехоподавляющие и шумоподавляющие свойства, т.е. резкое снижение вклада систематической и статистической погрешности внешних помех, то в радиационной интроскопии эти преимущества незначительны или полностью отсутствуют, особенно при учёте собственной статистики измеряемых величин [11]. В то же время на первый план выходят томографические (фокусирующие) свойства ИКСИ. Поэтому особенно важной задачей является расширение класса возможных ИКСИ, а также исследование и оптимизация их характеристик, существенных для вычислительной томографии.

3.1. Пространственная модуляция излучения

3.1.1. Получение изображений при пространственной модуляции излучения. Общий принцип получения изображения радиоактивного объекта в планарной (продольной) томографии показан на рисунке 3.3.

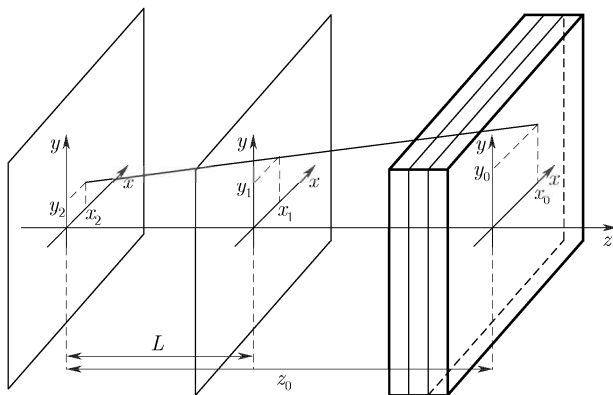


Рис. 3.3. Геометрия измерений при использовании плоских кодирующих коллиматоров (детектор расположен в плоскости $z = 0$, коллиматор — в плоскости $z = L$)

Плоский ПЧД располагается перпендикулярно оси z в точке $z = 0$. Параллельно ПЧД в точке $z = L$ располагается кодирующий коллиматор с функцией пропускания $h(x, y)$. Функция пропускания при практических измерениях действительна и имеет значения 0 и 1. Идеальному однопинховому коллиматору, расположенному в точке (x_{ph}, y_{ph}) , соответствует $h(x, y) = \delta(x - x_{ph})\delta(y - y_{ph})$, где $\delta(\cdot)$ — δ -функция Дирака. Пусть трёхмерное распределение радионуклида в объёме V характеризуется функцией $f(x, y, z)$, определяющей число γ -квантов, испущенных из единицы объёма около точки (x, y, z) за время измерений в телесный угол 4π . Тогда для числа γ -квантов $g(x_2, y_2)$, падающих на единицу площади детектора около точки (x_2, y_2) , получим

$$g(x_2, y_2) = \iiint_V \frac{f(x_0, y_0, z_0)h_n(x_1, y_1) \cos \vartheta \, dx_0 \, dy_0 \, dz_0}{4\pi[(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + z_0^2]}, \quad (3.1)$$

где

$$\cos \vartheta = \frac{z_0}{\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 + z_0^2}}, \quad (3.2)$$

$$x_1 = x_2 - \frac{L(x_2 - x_0)}{z_0}, \quad y_1 = y_2 - \frac{L(y_2 - y_0)}{z_0}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай пространственной модуляции излучения. На первоначальном этапе рассмотрения будем пренебрегать статистическими флуктуациями измеряемых величин, поглощением γ -квантов в среде и наклонным падением γ -квантов на детектор (фактор $\cos^3 \vartheta$). Тогда двумерному (плоскому) распределению источников излучения в области S , расположенной в плоскости $z = z_p$, соответствует $f(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_0, y_0) \delta(z_0 - z_p)$, и уравнение (3.1) превращается в

уравнение типа свёртки:

$$g(x_2, y_2) = \frac{1}{4\pi z_p^2} \iint_S \varphi(x_0, y_0) h(x_3, y_3) dx_0 dy_0, \quad (3.4)$$

где

$$x_3 = x_2 - \frac{L(x_2 - x_0)}{z_p}, \quad y_3 = y_2 - \frac{L(y_2 - y_0)}{z_p}. \quad (3.5)$$

Находя от обеих частей уравнения (3.4) двумерные преобразования Фурье, получим

$$G(u, v) = \frac{1}{2(z_p - L)^2} \Phi\left(-\frac{uL}{z_p - L}, -\frac{vL}{z_p - L}\right) H\left(\frac{uz_p}{z_p - L}, \frac{vz_p}{z_p - L}\right), \quad (3.6)$$

где $G(u, v)$, $\Phi(u, v)$, $H(u, v)$ — соответственно фурье-образы функций $g(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $h(x, y)$:

$$G(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (3.7)$$

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (3.8)$$

$$H(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy. \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.6) можно найти оценку $\tilde{\varphi}(x, y)$ искомого плоского распределения:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{(z_p - L)^2}{\pi} \iint \frac{G(-u(z_p - L)/L, -v(z_p - L)/L)}{H(-uz_p/L, -vz_p/L)} e^{i(ux+vy)} du dv. \quad (3.10)$$

При этом можно ограничиться одним измерением с любым достаточно “хорошим” кодирующим коллиматором, а именно с коллиматором, функция пропускания которого имеет модуль фурье-образа достаточно гладкий и без близких к нулю значений. Как правило, кодирующие коллиматоры удовлетворяют этому условию.

Обобщая (3.10) на произвольные значения z вместо фиксированного z_p , определим оценку $f(x, y, z)$ всей трёхмерной функции распределения $f(x, y, z)$:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \frac{(z - L)^2}{\pi} \iint \frac{G(-u(z - L)/L, -v(z - L)/L)}{H(-uz/L, -vz/L)} e^{i(ux+vy)} du dv, \quad (3.11)$$

которая при $z = z_p$ совпадает с (3.10).

Определим аппаратную функцию (АФ) $\mathcal{E}(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \mathcal{E}(\vec{r}, \vec{r}_0)$ как полученное по формуле (3.11) изображение точечного источника, расположенного в точке $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Взяв исходное распределение в виде $f(x, y, z) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$, получим:

$$\mathcal{E}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(z-L)^2}{(z_0-L)^2} \iint \frac{H\left(-u \frac{z_0(z-L)}{L(z_0-L)}, -v \frac{z_0(z-L)}{L(z_0-L)}\right)}{H(-uz/L, -vz/L)} \times \\ \times \exp\left\{i\left[(ux + vy) - (ux_0 + vy_0) \frac{z-L}{z_0-L}\right]\right\} du dv. \quad (3.12)$$

Очевидно, что $\mathcal{E}(x, y, z_0, x_0, y_0, z_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$, и аппаратная функция может служить критерием томографических качеств ИКСИ, при этом чем ближе АФ к трёхмерной δ -функции, тем лучше томографические качества кодирующего коллиматора. К примеру, АФ традиционного однопинхольного коллиматора с функцией пропускания $h(x, y) = \delta(x - x_{\text{ph}}) \delta(y - y_{\text{ph}})$ имеет вид:

$$\mathcal{E}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{(z-L)^2}{(z_0-L)^2} \delta\left(x - x_0 \frac{z-L}{z_0-L} - x_{\text{ph}} \frac{z-z_0}{z_0-L}\right) \times \\ \times \delta\left(y - y_0 \frac{z-L}{z_0-L} - y_{\text{ph}} \frac{z-z_0}{z_0-L}\right), \quad (3.13)$$

т. е. однопинхольный коллиматор вообще не обладает томографическими свойствами.

Так как в плоскости $z \neq z_0$ истинное изображение точечного источника, расположенного в плоскости $z = z_0$, равно тождественно нулю, целесообразно ввести максимальное отклонение АФ от нуля:

$$\mathcal{E}_1(z, x_0, y_0, z_0) = \max_{x, y} \{|\mathcal{E}(x, y, z_0, x_0, y_0, z_0)|\}. \quad (3.14)$$

Тогда томографические качества ИКСИ для произвольного расположения точечного источника можно характеризовать с помощью верхней $\mathcal{E}_1^{(u)}(z, z_0)$ и нижней $\mathcal{E}_1^{(d)}(z, z_0)$ граничных аппаратных функций, выражаемых формулами

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1^{(u)}(z, z_0) &= \max_{x_0, y_0} \{\mathcal{E}_1(z, x_0, y_0, z_0)\} \\ \mathcal{E}_1^{(d)}(z, z_0) &= \min_{x_0, y_0} \{\mathcal{E}_1(z, x_0, y_0, z_0)\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.15)$$

При этом для источника, расположенного в любой точке (x_0, y_0, z_0) , справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_1^{(d)}(z, z_0) \leq \mathcal{E}_1(z, x_0, y_0, z_0) \leq \mathcal{E}_1^{(u)}(z, z_0). \quad (3.16)$$

Кроме граничных аппаратных функций естественно ввести усреднённую аппаратную функцию

$$\mathcal{E}_1^{(m)}(z, z_0) = \frac{1}{S} \iint_S \mathcal{E}_1(z, x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0. \quad (3.17)$$

При разумном выборе функции пропускания кодирующего устройства (КУ) величина фонового сигнала или помехи (систематическая погрешность) и дисперсия, обусловленная ими (статистическая погрешность), уменьшаются в αk раз, где k — среднее пропускание КУ, α — множитель, величина которого зависит от вида КУ и размерности используемого кода. Вид функции пропускания определяет и вклад в дисперсию измерений, обусловленный статистическими флуктуациями самих измеряемых величин при регистрации ионизирующих излучений. Вследствие этого выводы и рекомендации традиционного планирования экспериментов (без учёта статистики эффекта) [229–231] имеют ограниченную применимость для радиационно-физических экспериментов [11].

3.1.2. Дискретное представление аппаратной функции в методе фокусных плоскостей. Хотя в соответствии с формулой (3.11) по двумерным результатам одного измерения можно сделать оценку всего распределения радионуклида $f(x, y, z)$, очевидно, что для сколько-нибудь сложного трёхмерного распределения эта оценка будет невысокого качества вследствие недостаточности исходной информации. Среди других недостатков таких томографических ИКСИ следует отметить разный масштаб декодированного изображения для разных плоскостей объекта, параллельных плоскости ПЧД, а также невозможность применения мозаичных коллиматоров и, как следствие этого, необходимость использования ПЧД большего размера, чем в традиционных системах измерений. Перечисленные недостатки, вероятно, стали одной из основных причин, по которым метод пространственной модуляции излучения не нашёл широкого практического применения в серийных медицинских гамма-камерах. Отмеченных недостатков во многом лишён так называемый метод фокусных плоскостей (МФП), обеспечивающий одинаковый масштаб изображения для всех плоскостей объекта при использовании мозаичных кодирующих коллиматоров и ПЧД стандартных размеров [11].

Введём понятие фокусной плоскости. Рассмотрим одну из идеальных геометрических схем (рис. 3.4, а). Будем считать, что ПЧД состоит из набора квадратных элементарных ячеек со стороной D , а кодирующий коллиматор представляет собой сетку квадратных ячеек со стороной d , причём в центре каждой ячейки коллиматора может находиться точечный пинхол. Тогда из условия, что изображения на детекторе плоского источника излучения, даваемые двумя точечными пинхолами, расположенными в центрах соседних ячеек коллиматора,

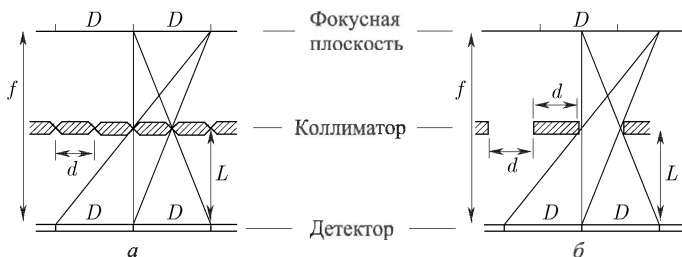


Рис. 3.4. Геометрические соотношения в методе фокусных плоскостей (D — размер ячейки детектора, d — размер ячейки кодирующего коллиматора, Δ — размер ячейки источника)

сдвинуты ровно на одну ячейку детектора, получим следующие соотношения:

$$f = \frac{LD}{D-d}, \quad (3.18)$$

$$\Delta = \frac{dD}{D-d}, \quad (3.19)$$

где f и L — расстояния от источника до детектора и от коллиматора до детектора соответственно, а Δ — сторона элементарных ячеек в плоскости источника, на которые он условно разбивается.

В такой идеальной геометрической схеме нужно считать, что источник состоит из точечных источников, каждый из которых расположен в центре элементарной ячейки. Точно такие же соотношения выполняются в другой идеальной геометрической схеме, в которой пинхол занимает всю элементарную ячейку коллиматора со стороной d (рис. 3.4, б). Теперь уже нужно считать, что источник состоит из элементарных ячеек с той же стороной Δ , но в пределах элементарной ячейки распределение источников излучения равномерное. Если в первой идеальной геометрической схеме более точно описывается точечный пинхол, то во второй идеальной геометрической схеме более точно описывается дискретизация реального пространственного распределения источников излучения. На самом деле и пинхол имеет конечные размеры, и распределение источников в пределах элементарной ячейки нельзя считать строго равномерным. Обоснованность таких идеальных схем будет детально исследована ниже.

Будем называть плоскость в трёхмерном источнике, параллельную плоскости детектора и находящуюся на расстоянии f от детектора, фокусной плоскостью, а расстояние f — фокусным расстоянием.

Поскольку любое трёхмерное распределение радионуклида можно представлять в виде набора условных плоскостей с двумерным распределением, будем считать, что при таком разбиении образовалось M плоскостей, каждой из которых присвоен свой номер i ($i = 1, 2, \dots, M$). Если некоторая плоскость i находится в фокусе, то для неё дискретный

аналог соотношения (3.4) может быть записан в виде

$$\vec{\zeta}_f^{(i)} = \hat{A} \vec{\xi}^{(i)}, \quad (3.20)$$

где $(\vec{\xi}^{(i)})^T = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_v^{(i)})$ — дискретный аналог распределения источников излучения в фокусной плоскости, $(\vec{\zeta}_f^{(i)})^T = ((\zeta_f^{(i)})_1, (\zeta_f^{(i)})_2, \dots, (\zeta_f^{(i)})_v)$ — вектор измерений, учитывающий только излучение от фокусной плоскости, $\hat{A} = (a_{jj'}, j, j' = 1, 2, \dots, v)$ — матрица, элементы которой $a_{jj'}$ описывают излучение от j' -го элементарного участка источника, зарегистрированное j -м элементом детектора.

В идеальном случае элементы матрицы $\hat{A}$ можно считать равными 1 или 0 в зависимости от того, проходит ли излучение через элементарную ячейку коллиматора, в которой расположен или не расположен пинхол (открыт или закрыт пинхол). Такую матрицу будем называть образующей матрицей. В то же время если учитывать всевозможные отклонения от идеальной схемы (конечность размеров пинхола, распределение источников излучения в пределах элементарной ячейки, фактор наклонного падения излучения и т. д.), то необходимо каждый элемент матрицы $\hat{A}$, равный 1 или 0, умножить на некоторый коэффициент, более точно учитывающий условия измерений ($a_{jj'} \rightarrow \beta_{jj'} a_{jj'}$). Однако во всех случаях томографическое (сфокусированное) изображение получается при умножении результатов измерений на матрицу $\hat{A}^{-1}$, обратную образующей матрице, состоящей из единиц и нулей:

$$\vec{\zeta}^{(i)} = \hat{A}^{-1} \vec{\zeta}_f^{(i)}. \quad (3.21)$$

В отсутствие других плоскостей в источнике и искажающих факторов формула (3.21) даст точное решение для дискретной версии изображения плоского распределения источников излучения.

В случае трёхмерного распределения в соответствии с методом фокусных плоскостей производится M измерений, в каждом из которых в фокусе последовательно находится одна из плоскостей, параллельных плоскости детектора, на которые условно разбивается трёхмерное распределение источников излучения. Таким образом, объект сканируется в направлении, перпендикулярном плоскости детектора. Осуществляя M последовательных перемещений измерительной системы относительно объекта (либо объекта относительно измерительной системы), вдоль оси z можно получить M двумерных результатов измерений, в которых каждая из условных плоскостей ровно один раз будет находиться в фокусе. Тогда с информационной точки зрения будет соблюдено равенство количества неизвестных количеству экспериментальных данных. Однако т. к. при каждом измерении на его результат влияют излучения не только фокусной плоскости, но и всех внефокусных плос-

костей, система уравнений, описывающая метод фокусных плоскостей, примет более сложный вид:

$$\vec{\zeta}^{(i)} = \hat{A} \vec{\xi}^{(i)} + \sum_{\substack{i'=1, \\ i' \neq i}}^M \hat{B}^{(ii')} \vec{\xi}^{(i')}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.22)$$

Здесь $(\vec{\zeta}^{(i)})^T = ((\zeta_1^{(i)}), (\zeta_2^{(i)}), \dots, (\zeta_v^{(i)}))$ — вектор измерений, учитывающий излучение от всех плоскостей, $\hat{B}^{(ii')} = (b_{jj'}^{(ii')}, j, j' = 1, 2, \dots, v)$ — матрица, определяющая вклад i' -й внефокусной плоскости в i -е измерение, причём элементы этой матрицы определяются чисто геометрически из исходной матрицы $\hat{A}$.

В соответствии с МФП сфокусированные (томографические) изображения $\vec{\xi}^{(i)}$ каждой фокусной плоскости, так же как и в (3.21), получаются умножением результатов измерений на матрицу $\hat{A}^{-1}$, обратную образующей матрице, причём эта обратная матрица при использовании ИКСИ известна заранее:

$$\vec{\xi}^{(i)} = \hat{A}^{-1} \vec{\zeta}^{(i)}. \quad (3.23)$$

Естественно, что на “истинное” изображение накладывается некоторый фон, обусловленный вкладом внефокусных плоскостей, структура которого в значительной степени определяется используемым кодирующим коллиматором.

К принципиальному преимуществу МФП можно отнести возможность дальнейшего улучшения полученных изображений, вплоть до полного решения системы уравнений (3.22), что является следствием информационной достаточности опытных данных. Другим достоинством МФП является, как уже было отмечено, пространственное выравнивание по всем фокусным плоскостям, на которые разбивается трёхмерное распределение.

Ранее было определено непрерывное представление АФ. Дискретное представление $\mathcal{E}(j, i, j_0, i_0)$ АФ можно определить следующим образом. Пусть точечный источник располагается в i_0 -й плоскости в j_0 -й точке: $\vec{\xi}^{(i)} = \delta_{i i_0} \vec{\xi}_{j_0}$ ($i, i_0 = 1, 2, \dots, M$) и $\vec{\xi}_{j_0} = ((\xi_{j_0})_1, (\xi_{j_0})_2, \dots, (\xi_{j_0})_v)$ $(\xi_{j_0})_j = \delta_{j j_0}$ ($j = 1, 2, \dots, v$), где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда для результатов измерений можно записать

$$\vec{\zeta}^{(i)} = [\delta_{i i_0} \hat{A} + (1 - \delta_{i i_0}) \hat{B}^{(i i_0)}] \vec{\xi}_{j_0}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.24)$$

а для восстановленного изображения

$$\vec{\xi}^{(i)} = A^{-1} \vec{\zeta}^{(i)} = \delta_{i i_0} \vec{\xi}_{j_0} + (1 - \delta_{i i_0}) \hat{A}^{-1} \hat{B}^{(i i_0)} \vec{\xi}_{j_0}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.25)$$

По определению дискретное представление $\mathbf{A}\Phi$ есть

$$\mathcal{E}(j, i, j_0, i_0) = \tilde{\xi}_j^{(i)} = \delta_{ii_0} \delta_{jj_0} + (1 - \delta_{ii_0}) \sum_{j'=1}^v a_{jj'}^{-1} b_{j'j_0}^{(ii_0)}, \quad (3.26)$$

$$i, i_0 = 1, 2, \dots, M; \quad j, j_0 = 1, 2, \dots, v.$$

Заметим, что индексы j и j_0 задают двумерные координаты элементарной ячейки в плоскостях восстановленного изображения и исходного источника соответственно.

Так как фокусное расстояние в процессе измерений по методу фокусных плоскостей остаётся неизменным, аппаратная функция $\mathcal{E}(j, i, j_0, i_0)$ фактически будет зависеть от разности $(i - i_0)$. Считая, что сканирование в перпендикулярном к плоскости детектора направлении происходит с равным шагом h , можно записать

$$\mathcal{E}(j, i, j_0, i_0) = \mathcal{E}(j, j_0, \Delta z), \quad (3.27)$$

где $\Delta z = h(i - i_0)$ — расстояние между плоскостью восстановленного изображения и плоскостью исходного источника.

Так как в плоскости $i \neq i_0$ истинное изображение точечного источника, расположенного в плоскости $i = i_0$, равно тождественно нулю, так же как и в непрерывном случае, целесообразно ввести максимальное отклонение $\mathbf{A}\Phi$ от нуля:

$$\mathcal{E}_1(j_0, \Delta z) = \max_j \{|\mathcal{E}(j, j_0, \Delta z)|\}. \quad (3.28)$$

Тогда томографические качества ИКСИ для произвольного расположения точечного источника можно характеризовать с помощью граничных верхней $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$ и нижней $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$ аппаратных функций, выражаемых формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z) &= \max_{j_0} \{\mathcal{E}_1(j_0, \Delta z)\} \\ \mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z) &= \min_{j_0} \{\mathcal{E}_1(j_0, \Delta z)\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.29)$$

При этом для источника, расположенного в любой точке, справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z) \geq \mathcal{E}_1(j_0, \Delta z) \geq \mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z). \quad (3.30)$$

Кроме граничных аппаратных функций имеет смысл ввести среднюю аппаратную функцию

$$\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z) = \frac{1}{v} \sum_{j_0=1}^v \mathcal{E}_1(j_0, \Delta z). \quad (3.31)$$

Приведённые выражения для $\mathbf{A}\Phi$ являются идеальными и соответствуют точечному источнику, находящемуся в центре элементарной ячейки, и пинхолу, занимающему всю элементарную ячейку коллима-

тора. Как уже отмечалось, для источника, равномерно распределённого по элементарной ячейке, и пинхолов меньших размеров показания детектора, естественно, будут отличаться от выражения (3.20), что отразится на виде АФ.

3.1.3. Построение двумерных кодирующих устройств Кодирующие устройства многопинхольных ИКСИ строятся на основе двумерных $(0, 1)$ -, $(-1, 1)$ - и $(-1, 0, 1)$ -кодов (кодовых таблиц), элементами которых являются 0 и 1; -1 и 1 ; $-1, 0$ и 1 [216]. При этом единица соответствует открытому пинхолу, а ноль — закрытому. Проведение двух измерений и последующее вычитание одного измерения из другого позволяет реализовать -1 в кодовой таблице.

В свою очередь двумерные коды (таблицы) строятся, как правило, из элементов одномерных кодов (последовательностей). Особый интерес среди них представляют одномерные псевдослучайные $(0, 1)$ -последовательности (ПСП), обладающие двухуровневой автокорреляционной функцией. Любая ПСП является строкой (v, k, λ) -матрицы-циркулянта [215], имеющей некоторые экстремальные свойства на классе $(0, 1)$ -матриц и удобное аналитическое выражение для обратной матрицы. Двумерные таблицы, построенные из одномерных ПСП, принято называть псевдослучайными таблицами (ПСТ).

На основе двумерных кодовых таблиц строятся двумерные плоские мозаичные многопинхольные коллиматоры. Известны три способа построения прямоугольных двумерных ПСТ и соответствующих им мозаик из одномерных ПСП: построчный (рис. 3.5) [232], диагональный (рис. 3.6) [233] и самоподдерживающийся (PNP-таблицы) (рис. 3.7) [234].

a

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

b

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

c

1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	10	11	12	13	14
11	12	13	14	15	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	7	8	9	10	11	12	13	14

Рис. 3.5. Построчный способ построения кодирующего коллиматора (показаны номера элементов последовательности): а — исходная одномерная ПСП, б — двумерная ПСТ, в — мозаичная кодовая таблица

При этом первые два способа образуют двумерное КУ размерности $m \times n$ из одной ПСП длины $v = m \times n$, а третий способ — двумерное

<i>a</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

<i>б</i>	1	7	13	4	10
	11	2	8	14	5
	6	12	3	9	15

<i>в</i>	1	7	13	4	10	1	7	13	4
	11	2	8	14	5	11	2	8	14
	6	12	3	9	15	6	12	3	9
	1	7	13	4	10	1	7	13	4
	11	2	8	14	5	11	2	8	14

Рис. 3.6. Диагональный способ построения кодирующего коллиматора (показаны номера элементов последовательности): *a* — исходная одномерная ПСП, *б* — двумерная ПСТ, *в* — мозаичная кодовая таблица

	1	2	3	4	5	6	7

a

<i>б</i>	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7

<i>в</i>	1×1	1×2	1×3	1×4	1×5	1×6	1×7
	2×1	2×2	2×3	2×4	2×5	2×6	2×7
	3×1	3×2	3×3	3×4	3×5	3×6	3×7
	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5	4×6	4×7
	5×1	5×2	5×3	5×4	5×5	5×6	5×7
	6×1	6×2	6×3	6×4	6×5	6×6	6×7
	7×1	7×2	7×3	7×4	7×5	7×6	7×7

Рис. 3.7. Самоподдерживающийся способ построения кодирующего коллиматора (показаны номера элементов последовательностей): *a* — первая исходная одномерная ПСП, *б* — вторая исходная одномерная ПСП, *в* — двумерная ПСТ (мозаика строится так же, как на рис. 3.6, в)

КУ из двух ПСП с длинами $v_1 = m$ и $v_2 = n$. В первом способе мозаика строится со сдвигом, а в остальных двух способах — без сдвига.

Функционирование мозаичного коллиматора, построенного на основе одномерной последовательности построочных и диагональным способами, описывается матрицей-циркулянтном — образующей матрицей $\hat{A}$ в соотношении (3.20), одной из строк которой является эта последовательность. В случае самоподдерживающегося способа образующая матрица является блочным циркулянтном.

Из каждой ПСП можно построить дополнительную к ней инверсную ПСП заменой нулей на единицы и единиц на нули. Кроме того, можно построить также разностную ПСП заменой 0 на -1 . Как уже отмечалось, -1 могут быть реализованы путём двух измерений с

прямой и инверсной ПСП и последующего вычитания из результатов первого измерения результатов второго измерения. Тем не менее существенным ограничением при проведении эксперимента с применением КУ является небольшое число известных ПСП с пригодными для построения двумерных ПСТ длинами и небольшой выбор значений среднего пропускания КУ. Это обстоятельство стимулировало поиск новых классов КУ. Результатом таких поисков стали геометрические коды [235–236], которые сразу были предложены в двумерном виде

0	1	1	1	...	1	1
1	0	0	0	...	0	0
1	0	0	0	...	0	0
1	0	0	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
1	0	0	0	...	0	0
1	0	0	0	...	0	0

a

0	1	1	1	...	1	1
1	0	0	0	...	0	1
1	0	0	0	...	1	0
1	0	0	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
1	0	1	0	...	0	0
1	1	0	0	...	0	0

б

0	1	1	1	...	1	1
1	1	0	0	...	0	1
1	0	1	0	...	1	0
1	0	0	1	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...
1	0	1	0	...	1	0
1	1	0	0	...	0	1

в

Рис. 3.8. Двумерные кодовые таблицы на основе геометрических кодов: *a* — геометрический код типа 1, *б* — геометрический код типа 2, *в* — геометрический код типа 3 (мозаика строится так же, как на рис. 3.6, *в*)

(рис. 3.8). Мозаика для геометрических кодов строится без сдвига, как для диагональных и самоподдерживающихся ПСТ.

Коллиматорам на основе геометрических кодов можно поставить в соответствие образующую матрицу блочно-циркулянтного вида. Интерес также представляют квадратные мозаичные КУ [237], отличные от перечисленных выше. Однако их среднее пропускание не допускает варьирования и составляет около 50%. Недавно был предложен ещё один класс двумерных КУ, построенных на основе троичных $(-1, 0, 1)$ -последовательностей, обладающих идеальной периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) с нулевой корреляцией [238]. В зависимости от длины троичных последовательностей для построения двумерных кодовых таблиц на их основе можно использовать построчный, диагональный и самоподдерживающийся способы с соот-

ветствующими мозаиками. Общим недостатком $(-1, 1)$ - и $(-1, 0, 1)$ -кодов является усложнение эксперимента. Специфический класс образуют гексагональные мозаичные таблицы из 1 и 0 [237, 239]. Кодированные устройства на их основе, имеющие гексагональную форму, лучше согласуются с круглыми позиционно-чувствительными детекторами (ПЧД), однако это же является и их недостатком, т. к. гексагональные ячейки коллиматора проецируются на квадратные ячейки оцифровки ПЧД, что приводит к дополнительным искажениям. Гексагональные КУ так же имеют весьма ограниченный набор возможных размерностей и значений среднего пропускания.

Приведённый краткий обзор позволяет сделать вывод, что поиск новых типов кодирующих устройств достаточно актуален и представляет как практический, так и теоретический интерес.

3.1.4. Образующие матрицы ИКСИ. Рассмотрим свойства образующих матриц ИКСИ. Начнём с образующих матриц, соответствующих кодирующим коллимамторам, построенным на основе ПСП построчным и диагональным способом, т. е. с (v, k, λ) -матриц-циркулянтов [215]. Циркулянт называется квадратная матрица $\hat{C}$, полученная циклической перестановкой первой строки:

$$\hat{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_v \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_v & a_1 & \dots & a_{v-1} \end{vmatrix}. \quad (3.32)$$

(v, k, λ) -матрицей называется квадратная $(0, 1)$ -матрица $\hat{A}$ порядка v , удовлетворяющая условию

$$\hat{A}\hat{A}^T = (k - \lambda)\hat{I} + \lambda\hat{J}, \quad (3.33)$$

где T — знак транспонирования матрицы, $\hat{I}$ — единичная диагональная матрица, $\hat{J}$ — квадратная матрица, состоящая только из единиц порядка v . Из определения следует, что k и λ являются целыми числами, причём k равно количеству единиц в каждой строке (v, k, λ) -матрицы, а $(v - k)$ — количеству нулей в каждой строке и в каждом столбце. Можно доказать, что для (v, k, λ) -матрицы должно выполняться необходимое условие существования:

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{v-1}. \quad (3.34)$$

Условие (3.34) сильно ограничивает количество возможных (v, k, λ) -матриц. Ещё одно ограничение на существование (v, k, λ) -матриц накладывается теорема Брука–Райзера–Човла.

Теорема (Брук, Райзер, Човла) [240]. Если существует (v, k, λ) -матрица, то при v чётном $(k - \lambda)$ есть точный квадрат, а при v нечётном — уравнение

$$z^2 = (k - \lambda)x^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda y^2 \quad (3.35)$$

имеет решение в целых числах x, y, z , не равных одновременно 0.

Влияние этого ограничения было изучено ранее [241] с помощью вычисления символа норменного вычета Гильберта [240]. Хотя условия (3.34), (3.35) являются всего лишь необходимыми условиями существования (v, k, λ) -матриц, есть предположение, что в совокупности они являются также и достаточными [240]. По крайней мере в настоящее время не известно ни одного набора целых чисел (v, k, λ) , для которого было бы доказано, что они удовлетворяют условиям (3.34), (3.35), но (v, k, λ) -матрицы с такими параметрами не существует. Правда, для многих наборов (v, k, λ) , удовлетворяющих условиям (3.34), (3.35), явный вид (v, k, λ) -матриц не известен.

Обратная (декодирующая) матрица $\hat{A}^{-1}$ имеет вид

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{k(k - \lambda)}(k\hat{A}^T - \lambda\hat{J}). \quad (3.36)$$

Кроме того, $\hat{A}\hat{A}^T = \hat{A}^T\hat{A}$, собственными значениями L_j матрицы $\hat{A}\hat{A}^T$ являются

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= k + \lambda(v - 1) = k^2 \\ L_j &= k - \lambda, \quad j = 2, 3, \dots, v \end{aligned} \right\}, \quad (3.37)$$

а определитель равен

$$\det(\hat{A}\hat{A}^T) = k^2(k - \lambda)^{v-1}. \quad (3.38)$$

Заметим также, что $(0, 1)$ -матрицы-циркулянты с одной или $(v - 1)$ единицей в каждой строке всегда являются (v, k, λ) -матрицами.

Класс (v, k, λ) -матриц привлекателен прежде всего наличием аналитического выражения для обратной матрицы (3.36), но он обладает ещё и рядом экстремальных свойств на всём классе $(0, 1)$ -матриц. Например, известна теорема Райзера.

Теорема (Райзер) [242]. Пусть $\hat{A}$ — $(0, 1)$ -матрица порядка v , содержащая всего τ единиц. Определим $k = \tau/v$ и $\lambda = = k(k - 1)/(v - 1)$. Тогда для $0 < \lambda < k < v - 1$ имеем

$$\det(\hat{A}\hat{A}^T) \leq k^2(k - \lambda)^{v-1}. \quad (3.39)$$

Таким образом, (v, k, λ) -матрицы достигают верхней границы (3.39).

Если (v, k, λ) -матрица является одновременно и циркулянтом, то любая её строка называется псевдослучайной последовательностью. В литературе часто говорят не о ПСП, а о совершенных разностных множествах, т.к. матрица инцидентности совершенного разностного множества является (v, k, λ) -матрицей. При этом нужно помнить, что ПСП соответствует именно циклическим совершенным разностным

множествам. Например, $(16,6,2)$ -матрица существует, но ПСП с длиной, равной 16, нет. Требование цикличности (v, k, λ) -матрицы накладывает дополнительные ограничения на существование ПСП [243].

Ассоциированной с любой (v, k, λ) -матрицей является инверсная матрица, в которой единицы заменены на нули, а нули на единицы. При этом все свойства первоначальной матрицы для получившейся (v', k', λ') -матрицы сохраняются с учётом замены параметров: $v' = v$, $k' = v - k$, $\lambda' = (v - k)(v - k - 1)/(v - 1)$. Поэтому при перечислении ПСП нет необходимости выписывать ПСП с $k > v/2$. Однако в приложениях ПСП с k единицами и с $v - k$ единицами могут иметь существенно различные свойства. Известные ПСП объединяют в семейства (типы). Существуют разные классификации таких семейств [240, 243–245]. Перечислим [243] некоторые семейства, придерживаясь классификации М. Холла [240].

1. Тип S (зингеровские). Строятся на основе гиперплоскостей в конечной проективной геометрии $PG(n, q)$, где n — натуральное число, $q = p^r$, p — простое число, r — натуральное число. Параметры

$$v = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}; \quad k = \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad \lambda = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}. \quad (3.40)$$

При $q = 2$ зингеровские ПСП называют m -последовательностями или последовательностями максимальной длины.

2. Тип Q (лежандровские или квадратичные). Строятся на основе квадратичных вычетов в поле Галуа $GF(p)$, где p — простое число, причём $p \equiv 3 \pmod{4}$. Параметры

$$v = p = 4t - 1; \quad k = 2t - 1; \quad \lambda = t - 1. \quad (3.41)$$

3. Тип B (биквадратичные). Строятся на основе биквадратичных вычетов в поле Галуа $GF(p)$, где p — простое число, причём $p = 4x^2 + 1$ и x — нечётно. Параметры

$$v = p = 4x^2 + 1; \quad k = x^2; \quad \lambda = \frac{x^2 - 1}{4}. \quad (3.42)$$

4. Тип B_0 (биквадратичные и нуль). Строятся на основе биквадратичных вычетов и нуля в поле Галуа $GF(p)$, где p — простое число, причём $p = 4x^2 + 9$ и x — нечётно. Параметры

$$v = p = 4x^2 + 9; \quad k = x^2 + 3; \quad \lambda = \frac{x^2 + 3}{4}. \quad (3.43)$$

5. Тип O (восьмеричные). Строятся на основе восьмеричных вычетов в поле Галуа $GF(p)$, где p — простое число, причём $p = 8x^2 + 1 = 64y^2 + 9$ и x, y — нечётны. Параметры

$$v = p = 8x^2 + 1 = 64y^2 + 9; \quad k = x^2; \quad \lambda = y^2. \quad (3.44)$$

Кроме набора $(73, 9, 1)$ следующее наименьшее значение $v > 10^{10}$.

6. Тип O_0 (восьмеричные и нуль). Строятся на основе восьмеричных вычетов и нуля в поле Галуа $GF(p)$, где p — простое число, причём $p = 8x^2 + 49 = 64y^2 + 441$ и x — нечётно, y — чётно. Параметры

$$v = p = 8x^2 + 49 = 64y^2 + 441; \quad k = x^2 + 7; \quad \lambda = y^2 + 7. \quad (3.45)$$

Кроме набора (26041, 3256, 407) следующее наименьшее значение $v > 10^{10}$.

7. Тип T (простые числа-близнецы). Строятся на основе квадратичных вычетов в поле Галуа $GF(p)$ и $GF(q)$, где p, q — простые числа, причём $q = p + 2$. Параметры

$$v = pq; \quad k = \frac{pq - 1}{2}; \quad \lambda = \frac{pq - 3}{4}. \quad (3.46)$$

8. Тип W_4 (обобщённые простые числа-близнецы). Строятся на основе квадратичных вычетов в поле Галуа $GF(p)$ и $GF(q)$, где p, q — простые числа, причём $q = 3p + 2$, $\text{НОД}(p - 1, q - 1) = 4$ и $(pq - 1)/4$ — нечётный квадрат. Параметры

$$v = pq; \quad k = \frac{pq - 1}{4}; \quad \lambda = \frac{pq - 5}{16}. \quad (3.47)$$

Кроме набора (901, 225, 56) следующее наименьшее значение $v = 6575588101$. Дальнейшее обобщение этого типа позволило получить неклассифицированную ПСП (133, 33, 8).

Известные другие семейства ПСП, например H_6 [240] и H_{10} [243], не содержат новые наборы (v, k, λ) по сравнению с перечисленными выше, хотя и могут содержать в некотором смысле неизоморфные ПСП с этим же набором (v, k, λ) . Однако в физических приложениях различие между такими неизоморфными ПСП проявляется редко.

В таблице 3.1 приведены все известные наборы (v, k, λ) , для которых существуют ПСП, при $v \leq 1000$, а также наборы (v, k, λ) , для которых v является составным числом, при $1000 \leq v \leq 5183$. Ввиду существования инверсных ПСП приведены только те наборы, для которых $k \leq v/2$.

Явный вид ПСП для не очень больших v приведён в [246] (см. также [11] и приложение 2).

Примером образующих $(-1, 1)$ -матриц являются (v, k, λ) -матрицы, в которых все нули заменены на -1 . Свойства таких матриц легко выводятся из свойств первоначальных (v, k, λ) -матриц.

Был предложен [238] класс кодирующих устройств, построенных на основе троичных последовательностей (ТП), обладающих периодической автокорреляционной функцией (ПАКФ) с нулевой корреляцией [247–252]. Одним из возможных путей использования троичных кодирующих таблиц, так же как и для $(-1, 1)$ -последовательностей, является изготовление двух КУ, в одном из которых положение открытых ячеек задаётся $+1$, а в другом -1 . С такими КУ производят два измерения, и результаты второго измерения вычитают из резуль-

Таблица 3.1. Наборы (v, k, λ) , для которых известны ПСП

v	k	λ	Тип ПСП	v	k	λ	Тип ПСП
7	3	1	S, Q	167	83	41	Q
11	5	2	Q	179	89	44	Q
13	4	1	S, B ₀	183 = 3 · 61	14	1	S
15 = 3 · 5	7	3	S, T	191	95	47	Q
19	9	4	Q	197	49	12	B
21 = 3 · 7	5	1	S	199	99	49	Q
23	11	5	Q	211	105	52	Q
31	6	1	S	223	111	55	Q
31	15	7	S, Q	227	113	56	Q
35 = 5 · 7	17	8	T	239	119	59	Q
37	9	2	B	251	125	62	Q
40 = 2 ³ · 5	13	4	S	255 = 3 · 5 · 17	127	63	S
43	21	10	Q	263	131	65	Q
47	23	11	Q	271	135	67	Q
57 = 3 · 19	8	1	S	273 = 3 · 7 · 13	17	1	S
59	29	14	Q	283	141	70	Q
63 = 3 ² · 7	31	15	S	307	18	1	S
67	33	16	Q	307	153	76	Q
71	35	17	Q	311	155	77	Q
73	9	1	S, Q	323 = 17 · 19	161	80	T
79	39	19	Q	331	165	82	Q
85 = 5 · 17	21	5	S	341 = 11 · 31	85	21	S
91 = 7 · 13	10	1	S	347	173	86	Q
101	25	6	B	359	179	89	Q
103	51	25	Q	364 = 2 ² · 7 · 13	121	40	S
107	53	26	Q	379	189	94	Q
109	28	7	B ₀	381 = 3 · 127	20	1	S
121 = 11 ²	40	13	S	383	191	95	Q
127	63	31	S, Q	400 = 20 ²	57	8	S
131	65	32	Q	419	209	104	Q
133 = 7 · 19	12	1	S	431	215	107	Q
133 = 7 · 19	33	8	–	439	219	109	Q
139	69	34	Q	443	221	110	Q
143 = 11 · 13	71	35	T	463	231	115	Q
151	75	37	Q	467	233	116	Q
156 = 2 ² · 3 · 13	31	6	S	479	239	119	Q
163	81	40	Q	487	243	121	Q

Таблица 3.1. Окончание...

v	k	λ	Тип ПСП	v	k	λ	Тип ПСП
491	245	122	Q	871	30	1	S
499	249	124	Q	883	441	220	Q
503	251	125	Q	887	443	221	Q
$511 = 7 \cdot 73$	255	127	S	$899 = 29 \cdot 31$	449	224	T
523	261	130	Q	$901 = 17 \cdot 53$	225	56	W ₄
547	273	136	Q	907	453	226	Q
$553 = 7 \cdot 79$	24	1	S	911	455	227	Q
563	281	140	Q	919	459	229	Q
571	285	142	Q	947	473	236	Q
$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$	73	9	S	967	483	241	Q
587	293	146	Q	971	485	242	Q
599	299	149	Q	983	491	245	Q
607	303	151	Q	991	495	247	Q
619	309	154	Q	$993 = 3 \cdot 331$	32	1	S
631	315	157	Q	$1023 = 3 \cdot 11 \cdot 31$	511	255	S
643	321	160	Q	$1057 = 7 \cdot 151$	33	1	S
647	323	161	Q	$1365 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	341	85	S
$651 = 3 \cdot 7 \cdot 31$	26	1	S	$1407 = 3 \cdot 7 \cdot 67$	38	1	S
659	329	164	Q	$1464 = 2^3 \cdot 3 \cdot 61$	133	12	S
677	169	42	B	$1763 = 41 \cdot 43$	881	440	T
683	341	170	Q	$1893 = 3 \cdot 631$	44	1	S
691	345	172	Q	$2047 = 23 \cdot 89$	1023	511	S
719	359	179	Q	$2257 = 37 \cdot 61$	47	1	S
727	363	181	Q	$2380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$	183	14	S
739	369	184	Q	$2451 = 3 \cdot 19 \cdot 41$	50	1	S
743	371	185	Q	$2863 = 7 \cdot 409$	54	1	S
751	375	187	Q	$3280 = 2^3 \cdot 3 \cdot 137$	1093	364	S
757	28	11	S	$3599 = 59 \cdot 61$	1799	899	T
$781 = 11 \cdot 71$	156	31	S	$3783 = 3 \cdot 13 \cdot 97$	62	1	S
787	393	196	Q	$3906 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$	781	156	S
811	405	202	Q	$4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	2047	1023	S
$820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$	91	10	S	$4161 = 3 \cdot 19 \cdot 73$	65	1	S
823	411	205	Q	$4369 = 17 \cdot 257$	273	17	S
827	413	206	Q	$4557 = 3 \cdot 7^2 \cdot 31$	68	1	S
839	419	209	Q	$4681 = 31 \cdot 151$	585	73	S
859	429	214	Q	$5183 = 71 \cdot 73$	2591	1295	T
863	431	215	Q				

татов первого. При этом число измерений удваивается по сравнению с использованием КУ, построенных на основе бинарных $(0, 1)$ -таблиц.

На основе ТП могут быть построены построчные, диагональные и самоподдерживающиеся кодирующие троичные таблицы. Практическая трудность при построении двумерных КУ построчным и диагональным способами состоит в том, что длина ТП часто не разлагается на близкие по величине множители. Исключение составляют только ТП с длинами $v = 121 = 11 \times 11$ и $v = 484 = 22 \times 22$, позволяющие сконструировать двумерные квадратные таблицы построчным способом.

Существует также ТП с длиной $v = 399 = 19 \times 21$, из которой можно построить близкую к квадратной таблицу диагональным способом. Однако все ТП можно использовать для построения кодовых таблиц самоподдерживающимся способом.

Образующая матрица, описывающая функционирование ИКСИ с КУ, построенным на основе ТП построчным и диагональным способами, представляет собой матрицу-циркулянт порядка v , первой строкой которой является ТП. Кроме того, эта матрица ортогональна, т. е.

$$\widehat{A}\widehat{A}^T = k\widehat{I}, \quad (3.48)$$

где $k = k_+ + k_-$, k_+ — число $+1$ и k_- — число -1 в ТП. Таким образом, соответствующая ТП образующая матрица является (v, k, λ) -матрицей с $\lambda = 0$. Однако есть важное отличие — элементы этой матрицы не 0 и 1, а -1 , 0 и $+1$.

Обратная (декодирующая) матрица $\widehat{A}^{-1}$ имеет вид

$$\widehat{A}^{-1} = \frac{1}{k}\widehat{A}^T. \quad (3.49)$$

Собственными значениями L_j матрицы $\widehat{A}\widehat{A}^T$ являются $L_j = k$, $j = 1, 2, \dots, v$, а определитель равен

$$\det(\widehat{A}\widehat{A}^T) = k^v. \quad (3.50)$$

В таблице 3.2 приведены значения v , k_+ и k_- существующих ТП длины $v \leq 1911$, а также значения пик-фактора, равного отношению $v/(k_+ + k_-) = v/k$ или величине, обратной среднему пропуску k/v кодирующего коллиматора. В таблицу включены, во-первых, единственная известная бинарная последовательность с идеальной ПАКФ $\{-1, 1, 1, 1\}$, которую можно считать вырожденной ТП без нулевых элементов; во-вторых, ТП, построенные на основе полей Галуа $GF(p^w)$, с параметрами

$$v = \frac{p^{w(2l+1)} - 1}{p^w - 1}; \quad k_+ = \frac{p^{2wl} + p^w}{2}; \quad k_- = \frac{p^{2wl} - p^w}{2}, \quad (3.51)$$

где p — простое, w, l — натуральные [251, 252]; в-третьих, составные ТП, полученные посимвольным перемножением двух ТП взаимно простых периодов с параметрами $(v^{(1)}, k_+^{(1)}, k_-^{(1)})$ и $(v^{(2)}, k_+^{(2)}, k_-^{(2)})$

Таблица 3.2. Значения (v, k_+, k_-) троичных последовательностей

v	k_+	k_-	v/k	v	k_+	k_-	v/k	v	k_+	k_-	v/k
4	3	1	1,00	341	136	120	1,33	1057	528	496	1,03
7	3	1	1,75	364	171	153	1,12	1092	528	496	1,07
13	6	3	1,44	364	78	66	2,53	1092	300	276	1,90
21	10	6	1,31	381	190	171	1,06	1093	378	351	1,50
28	10	6	1,75	399	105	91	2,04	1228	595	561	1,06
31	15	10	1,24	403	120	105	1,79	1281	351	325	1,89
31	10	6	1,94	403	78	66	2,80	1364	528	496	1,33
52	21	15	1,44	484	171	153	1,49	1407	703	666	1,03
57	28	21	1,16	508	136	120	1,98	1524	741	703	1,06
73	36	28	1,14	511	136	120	2,00	1533	528	496	1,50
84	36	28	1,31	532	253	231	1,10	1573	378	351	2,16
91	21	15	2,53	553	276	253	1,05	1596	406	378	2,04
91	45	36	1,12	651	136	120	2,54	1612	465	435	1,79
121	45	36	1,49	651	325	300	1,04	1612	300	276	2,80
124	55	45	1,24	651	210	190	1,63	1651	300	276	2,87
124	36	28	1,94	732	351	325	1,08	1723	861	820	1,02
127	36	28	1,98	741	231	210	1,68	1729	561	528	1,59
133	66	55	1,10	757	378	351	1,04	1767	630	595	1,44
183	91	78	1,08	781	325	300	1,25	1767	406	378	2,25
217	55	45	2,17	847	171	153	2,61	1893	946	903	1,02
217	36	28	3,39	868	136	120	3,39	2044	528	496	2,00
228	105	91	1,16	868	210	190	2,17	2047	528	496	2,00
273	78	66	1,90	871	435	406	1,04	2149	595	561	1,86
273	136	120	1,07	889	136	120	3,47	2212	1081	1035	1,05
292	136	120	1,14	949	300	276	1,65	2257	1128	1081	1,02
307	153	136	1,06	993	496	465	1,03	2263	820	780	1,41

[249, 252]. Для параметров (v, k_+, k_-) составной последовательности имеют место соотношения

$$\begin{aligned} v &= v^{(1)}v^{(2)}; \quad k_+ = k_+^{(1)}k_+^{(2)} + k_-^{(1)}k_-^{(2)}; \\ k_- &= k_+^{(1)}k_-^{(2)} + k_-^{(1)}k_+^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Существует также класс троичных последовательностей для всех чётных значений v с $k_+ = 3$ и $k_- = 1$ вида $\{-1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0\}$, которые образуются из последовательности $\{-1, 1, 1, 1\}$ вставлением n нулей в её середину и в конец ($n = 1, 2, \dots$). Пик-фактор таких последовательностей равен $v/4$.

Характеристики описанных трёх классов образующих матриц для $(0, 1)$ -ПСП, $(-1, 1)$ -ПСП и ТП сведены в таблицу 3.3.

Самоподдерживающаяся кодовая двумерная таблица строится из двух ПСП с параметрами (v_1, k_1, λ_1) и (v_2, k_2, λ_2) с элементами a_i , $i = 1, 2, \dots, v_1$, и b_j , $j = 1, 2, \dots, v_2$. При этом для элемента c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, v_1$; $j = 1, 2, \dots, v_2$, кодовой таблицы выполняется соотношение

$$c_{ij} = a_i b_j, \quad i = 1, 2, \dots, v_1; \quad j = 1, 2, \dots, v_2. \quad (3.53)$$

Авторы работы [234], предложившие самоподдерживающийся способ, строили таблицы со средним пропуском около 25% только из ПСП с $k_1 = (v_1 + 1)/2$ и $k_2 = (v_2 + 1)/2$, причём способ построения декодирующей таблицы, предложенный ими, существенно зависел от этих частных значений k_1 и k_2 . Однако можно значительно расширить класс таблиц, если использовать для их построения произвольные ПСП [11]. Образующая матрица $\hat{A}$, из первой строки которой строится самоподдерживающаяся таблица, является прямым произведением образующей (v_1, k_1, λ_1) -матрицы $\hat{A}_1$ и образующей (v_2, k_2, λ_2) -матрицы $\hat{A}_2$, соответствующих исходным ПСП ($\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$), которое можно записать в виде блочной матрицы-циркулянта с первой строкой, состоящей из блоков $(a_1 \hat{A}_2, a_2 \hat{A}_2, \dots, a_{v_1} \hat{A}_2)$ или $(b_1 \hat{A}_1, b_2 \hat{A}_1, \dots, b_{v_2} \hat{A}_1)$:

$$\hat{A} = \left\| \begin{array}{cccc} a_1 \hat{A}_2 & a_2 \hat{A}_2 & \dots & a_{v_1} \hat{A}_2 \\ a_2 \hat{A}_2 & a_3 \hat{A}_2 & \dots & a_1 \hat{A}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{v_1} \hat{A}_2 & a_1 \hat{A}_2 & \dots & a_{v_1-1} \hat{A}_2 \end{array} \right\| \quad (3.54)$$

или

$$\hat{A} = \left\| \begin{array}{cccc} b_1 \hat{A}_1 & b_2 \hat{A}_1 & \dots & b_{v_2} \hat{A}_1 \\ b_2 \hat{A}_1 & b_3 \hat{A}_1 & \dots & b_1 \hat{A}_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{v_2} \hat{A}_1 & b_1 \hat{A}_1 & \dots & b_{v_2-1} \hat{A}_1 \end{array} \right\|. \quad (3.55)$$

Таблица 3.3. Параметры образующих матриц

Параметр	Тип матрицы		
	$(0, 1)-(v, k, \lambda)$ -матрица	$(-1, 1)-(v, k, \lambda)$ -матрица	$(-1, 0, 1)$ -троячная матрица
Количество +1 в каждой строке	k	k	k_+
Количество -1 в каждой строке	0	$v - k$	k_-
Суммарное количество +1 и -1 в каждой строке	k	v	$k_- + k_+$
Количество нулей в каждой строке	$v - k$	0	$v - k_+ - k_-$
$\hat{A}^{-1}$	$\frac{1}{k(k-\lambda)}(k\hat{A}^T - \lambda\hat{J})$	$\frac{(v-2k)\hat{A}^T - (4k-4\lambda-v)\hat{J}}{4(k-\lambda)(v-2k)}$	$\frac{1}{k}\hat{A}^T$
$\hat{A}\hat{A}^T$	$(k-\lambda)\hat{I} + \lambda\hat{J}$	$4(k-\lambda)\hat{I} + (v-4k+4\lambda)\hat{J}$	$k\hat{I}$
$(\hat{A}\hat{A}^T)^{-1}$	$\frac{1}{k^2(k-\lambda)}(k^2\hat{I} - \lambda\hat{J})$	$\frac{(v-2k)^2\hat{I} - (4k-4\lambda-v)\hat{J}}{4(k-\lambda)(v-2k)^2}$	$\frac{1}{k}\hat{I}$
$\det(\hat{A}\hat{A}^T)$	$k^2(k-\lambda)^{v-1}$	$(v-2k)^2(4k-4\lambda)^{v-1}$	k^v
Собственное значение матрицы $\hat{A}\hat{A}^T$, (кратность)	$k^2, (1); k-\lambda, (v-1)$	$\frac{(v-2k)^2}{4(k-\lambda)}, (1);$ $4(k-\lambda), (v-1)$	$k, (v)$

Свойство (3.33) модифицируется следующим образом:

$$\widehat{A}\widehat{A}^T = \left\| \begin{array}{cccc} k_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & \dots & \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T \\ \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & k_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & \dots & \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & \lambda_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T & \dots & k_1 \widehat{A}_2 \widehat{A}_2^T \end{array} \right\| \quad (3.56)$$

или

$$\widehat{A}\widehat{A}^T = \left\| \begin{array}{cccc} k_2 A_1 A_1^T & \lambda_2 A_1 A_1^T & \dots & \lambda_2 A_1 A_1^T \\ \lambda_2 A_1 A_1^T & k_2 A_1 A_1^T & \dots & \lambda_2 A_1 A_1^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_2 A_1 A_1^T & \lambda_2 A_1 A_1^T & \dots & k_2 A_1 A_1^T \end{array} \right\| \quad (3.57)$$

Обратная матрица является прямым произведением матриц, обратных к исходным (v_1, k_1, λ_1) - и (v_2, k_2, λ_2) -матрицам, а декодирующая таблица является прямым произведением первых строк этих обратных матриц. Самоподдерживающиеся таблицы могут быть как квадратными, так и прямоугольными. Мозаика из них строится так же, как для диагональных ПСТ.

Следует отметить, что к классу (v, k, λ) -матриц-циркулянтов относятся $(0, 1)$ -матрицы-циркулянты с $k = 1$ и $k = v - 1$. Первая — это единичная диагональная матрица $\widehat{I}$, которая одновременно является вырожденной $(v, 1, 0)$ -матрицей-циркулянтом. Такая матрица описывает традиционный эксперимент (например, поэлементное сканирование объекта или гамма-камеру с однопинхольным коллиматором). Вторая — это матрица $(\widehat{J} - \widehat{I})$, которая также является вырожденной $(v, v - 1, v - 2)$ -матрицей-циркулянтом. Такие матрицы не используются для КУ из-за плохой дисперсии получаемых результатов. Этот пример показывает, что объяснение помехоподавляющих свойств КУ нельзя объяснить только степенью их открытости. Однако для РНР-таблиц в качестве одной из ПСП может быть использована ПСП с $k = 1$ или с $k = v - 1$. Например, для построения самоподдерживающейся таблицы размерностью 7×7 можно взять ПСП длины 7 с $k = 1, 3, 4, 6$ и получить пропускание $k = k_1 k_2 = 1, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 18, 24, 36$. Таким образом, для самоподдерживающихся таблиц имеется более широкая возможность выбора как размеров, так и оптимального значения среднего пропускания.

Аналогично строятся и описываются самоподдерживающиеся КУ, если в качестве исходных берутся образующие $(-1, 1)$ -матрицы, полученные из (v, k, λ) -матриц, в которых все нули заменены на -1 , а также образующие $(-1, 0, 1)$ -матрицы-циркулянты, первой строкой которых служат троичные $(-1, 0, 1)$ -последовательности, обладающие идеальной ПАКФ с нулевой корреляцией. Характеристики этих трёх классов образующих матриц сведены в таблицу 3.4.

Таблица 3.4. Параметры образующих матриц блочного типа

Параметр	Тип исходных матриц		
	$(0, 1) \cdot (v_1, k_1, \lambda_1)$ $(0, 1) \cdot (v_2, k_2, \lambda_2)$	$(-1, 1) \cdot (v_1, k_1, \lambda_1)$ $(-1, 1) \cdot (v_2, k_2, \lambda_2)$	троичная (v_1, k_1^+, k_1^-) троичная (v_2, k_2^+, k_2^-)
Количество +1 в каждой строке	$k_1 k_2$	$k_1 k_2 + (v_1 - k_1)(v_2 - k_2)$	$k_1^+ k_2^+ + k_1^- k_2^-$
Количество -1 в каждой строке	0	$k_1(v_2 - k_2) + k_2(v_1 - k_1)$	$k_1^+ k_2^- + k_1^- k_2^+$
Суммарное количество +1 и -1 в каждой строке	$k_1 k_2$	$v_1 v_2$	$(k_1^+ + k_1^-)(k_2^- + k_2^+)$
Количество нулей в каждой строке	$v_1 v_2 - k_1 k_2$	0	$v_1 v_2 - (k_1^+ + k_1^-) \times (k_2^- + k_2^+)$
$\hat{A}^{-1}$	$\hat{A}_1^{-1} \otimes \hat{A}_2^{-1}$	$\hat{A}_1^{-1} \otimes \hat{A}_2^{-1}$	$\hat{A}_1^{-1} \otimes \hat{A}_2^{-1}$
$\hat{A} \hat{A}^T$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T) \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T) \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T) \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)$
$(\hat{A} \hat{A}^T)^{-1}$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)^{-1}$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)^{-1}$	$(\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \otimes (\hat{A}_2 \hat{A}_2^T)^{-1}$
$\det(\hat{A} \hat{A}^T)$	$k_1^{2v_2} k_2^{2v_1} (k_1 - \lambda_1)^{(v_1-1)v_2} \times (k_2 - \lambda_2)^{(v_2-1)v_1}$	$(v_1 - 2k_1)^{2v_2} (k_1 - \lambda_1)^{(v_1-1)v_2} \times (v_2 - 2k_2)^{2v_1} (k_2 - \lambda_2)^{(v_2-1)v_1}$ $4^{v_1+v_2-2v_1v_2}$	$(k_1 k_2)^{v_1 v_2}$
Собственное значение матрицы $\hat{A} \hat{A}^T$, (кратность)	$k_1^2 k_2^2, (1); k_1^2 (k_2 - \lambda_2), (v_2 - 1); k_2^2 (k_1 - \lambda_1), (v_1 - 1); (k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2), (v_1 v_2 - v_1 - v_2 + 1)$	$(v_1 - 2k_1)^2 (v_2 - 2k_2)^2, (1); 4(v_1 - 2k_1)^2 (k_2 - \lambda_2), (v_2 - 1); 4(v_2 - 2k_2)^2 (k_1 - \lambda_1), (v_1 - 1); 16(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2), (v_1 v_2 - v_1 - v_2 + 1)$	$k_1 k_2, (v_1 v_2)$

3.2. Исследование аппаратных функций ИКСИ

3.2.1. Основные характеристики АФ ИКСИ. Аппаратные функции ИКСИ практически невозможно рассчитать аналитически, поэтому все изложенные ниже результаты были получены путём компьютерного моделирования [253, 254]. Были исследованы АФ кодирующих коллиматоров, построенных на основе бинарных $(0, 1)$ -ПСП, а также инверсных $(0, 1)$ - и разностных $(-1, 1)$ -ПСП, полученных из основных ПСП. Кроме того, исследованы АФ кодирующих коллиматоров, построенных на основе троичных $(-1, 0, 1)$ -последовательностей. Размерности двумерных таблиц варьировались от 7×7 до 41×43 включительно. Объектом исследований было влияние на АФ типа кодирующей таблицы и вида используемой для её построения ПСП, размерности и среднего пропускания кодирующего коллиматора. При моделировании учитывался фактор геометрического ослабления $(1/4\pi f^2)$. В то же время не принимались во внимание статистические флуктуации, поглощение излучения в среде и собственное разрешение ПЧД. Вариации размеров пинхолов коллиматора, распределение источников излучения внутри элементарной ячейки и наклонное падение γ -квантов на ПЧД были исследованы отдельно.

При расчёте АФ определяли вклад в плоскость фокуса каждого из точечных источников в отдельности, расположенных в центрах условных ячеек плоскостей объекта, представляющего собой параллелепипед с размерами $mD \times nD \times h$, где h — высота (толщина) объекта, при следующих геометрических размерах: сторона ячейки детектора $D = 8$ мм, сторона ячейки коллиматора $d = 4$ мм, расстояние между коллиматором и детектором $L = 10$ см, фокусное расстояние $f = 20$ см. Таким образом, фокусная плоскость располагалась на расстоянии 10 см от коллиматора, и толщина h объекта не могла превышать 10 см. Заметим, что все полученные результаты справедливы и для любых других конкретных размеров. Требуется только масштабный пересчёт в соответствии с основными соотношениями метода фокусных плоскостей (3.18), (3.19).

Далее используются обозначения ПСТ $m \times n$ -П, ПСТ $m \times n$ -Д и ПСТ $v_1 \times v_2$ -С для кодирующих коллиматоров, построенных на базе двумерных $(0, 1)$ -псевдослучайных таблиц построчным, диагональным и самоподдерживающимся способами, соответственно. Аналогичные обозначения используются для инверсных (ПСТ $m \times n$ -ПИ, ПСТ $m \times n$ -ДИ, ПСТ $v_1 \times v_2$ -СИ), разностных (ПСТ $m \times n$ -ПР, ПСТ $m \times n$ -ДР, ПСТ $v_1 \times v_2$ -СР) и троичных (ПСТ $m \times n$ -ТП, ПСТ $m \times n$ -ТД и ПСТ $v_1 \times v_2$ -ТС) таблиц.

Типичная форма АФ приведена на рисунке 3.9. Для характеристики томографических (фокусирующих) свойств ИКСИ целесообразно ввести такие параметры, как глубинное разрешение δ_z , равное ширине АФ на половине высоты около плоскости фокуса, и максимальная амплитуда ложных пиков t_z , вычисляемая как отношение максимального

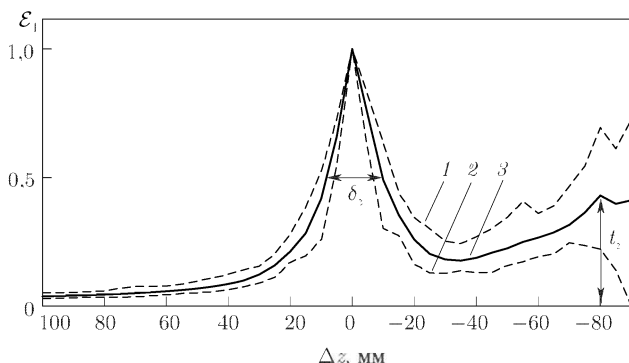


Рис. 3.9. АФ ИКСИ при использовании многопинхольного плоского кодирующего коллиматора на основе ПСТ20×20-П (δ_z — глубинное разрешение, t_z — максимальная амплитуда ложных пиков): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

значения АФ в области ложных пиков к значению АФ при $\Delta z = 0$. Нетрудно видеть, что параметр t_z характеризует максимальный вклад внефокусных плоскостей в плоскость фокуса. Параметры δ_z и t_z рассчитывались отдельно для верхних, нижних и средних аппаратных функций ИКСИ (соответственно $\delta_z^{(u)}$, $t_z^{(u)}$, $\delta_z^{(d)}$, $t_z^{(d)}$, $\delta_z^{(m)}$, $t_z^{(m)}$).

Рисунки 3.10 и 3.11 иллюстрируют “хорошую” и “плохую” формы АФ, обусловленные типом кодирующей таблицы.

Инверсные таблицы дают АФ, совпадающие с АФ для основных таблиц, несмотря на то, что количество открытых пинхолов или среднее пропускание коллиматоров могут резко отличаться. Например, для ПСТ20×20-П $k = 57$, а для инверсной ПСТ20×20-ПИ $k = 343$.

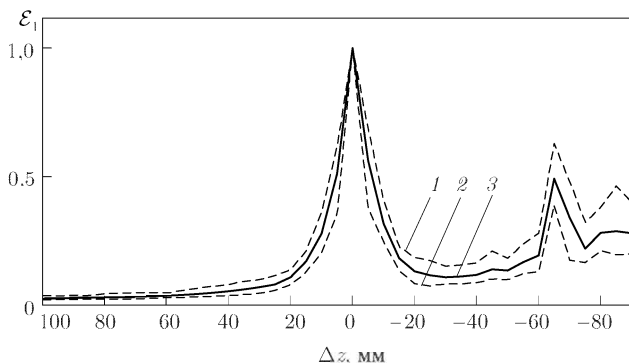


Рис. 3.10. АФ ИКСИ при использовании многопинхольного плоского кодирующего коллиматора на основе ПСТ33×31-Д: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

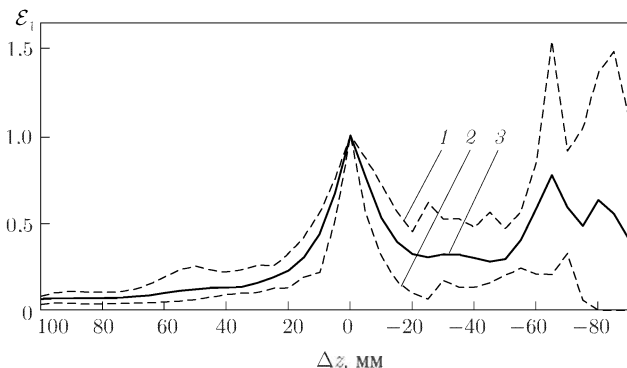


Рис. 3.11. АФ ИКСИ при использовании многопинхольного плоского кодирующего коллиматора на основе ПСТ21×21-С: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

Аналогичная ситуация и для разностных таблиц. Они дают АФ, совпадающие с АФ для основных таблиц, поэтому АФ, соответствующие инверсным и разностным таблицам, не приводятся.

На рисунке 3.12 показаны АФ, соответствующие ИКСИ, построенным на основе троичных последовательностей построочным, диагональным и самоподдерживающимся способами.

Дополнительно к уже введённым характеристикам целесообразно добавить параметр разброса, определяемый как максимальная разность: $\max_{\Delta z} \left\{ \mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z) - \mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z) \right\}$, характеризующая узость границ, в которых может колебаться АФ. Основные результаты исследования приведены в таблице 3.5, в которой приведены также расчётные значения $\delta_z^{(t)}$ глубинного разрешения, вычисленные в предположении, что оно определяется расстоянием между плоскостями источника, для которых проекции коллиматора от точечного источника различаются на одну ячейку ПЧД по сравнению с фокусной плоскостью [11].

Формула для расчёта $\delta_z^{(t)}$ имеет вид:

$$\delta_z^{(t)} = \frac{4dD(m+n)L}{(D-d)^2(m+n)^2 - 4D^2} \approx \frac{4dDL}{(D-d)^2(m+n)}. \quad (3.58)$$

Рисунок 3.13 показывает, что формула (3.58) достаточно хорошо описывает глубинное разрешение $\delta_z^{(t)}$, определённое по усреднённой АФ $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$.

Полученные результаты (см. табл. 3.5) подтверждают некоторые прогнозируемые и позволяют сделать менее очевидные выводы. Глубинное разрешение ИКСИ улучшается с увеличением размерности ($m \times n$), в то же время изменение параметра t_z не наблюдается. К ИКСИ с хорошей или удовлетворительной АФ можно ориентировочно отнести

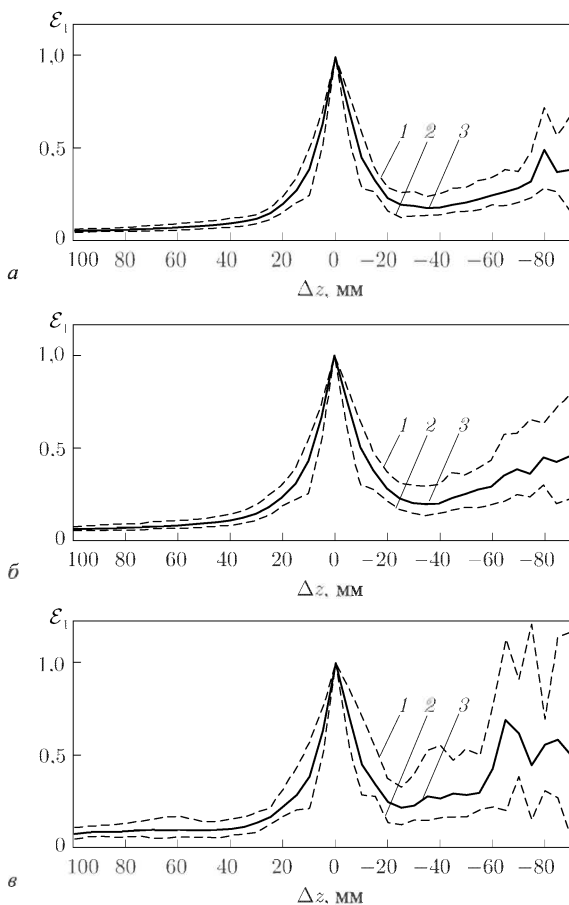


Рис. 3.12. АФ ИКСИ при использовании многопинхольного плоского кодирующего коллиматора на основе троичных последовательностей построчным — ПСТ22×22-ТП (а), диагональным — ПСТ19×21-ТД (б) и самоподдерживающимся — ПСТ21×21-ТС (в) способами: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

Таблица 3.5. Основные характеристики ИКСИ с многопиксельными коллиматорами

№ п/п	Размерность ПСТ $v = m \times n$	Кол-во пикс- лов k	Тип ПСТ	Тип ПСП	Глубинное разрешение, мм				Разброс АФ	Амплитуда ложных пиков		
					$\delta_z^{(u)}$	$\delta_z^{(d)}$	$\delta_z^{(m)}$	$\delta_z^{(t)}$		$t_z^{(u)}$	$t_z^{(d)}$	$t_z^{(m)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	$49 = 7 \times 7$	9	C	Q, Q	–	34,9	–	57,1	1,44	1,56	0,59	0,77
2	$49 = 7 \times 7$	16	ТС	ТП, ТП	–	33,4	–	57,1	3,31	3,31	0,50	1,06
3	$63 = 9 \times 7$	31	П	S	–	31,3	46,4	50,0	0,91	1,15	0,56	0,82
4	$63 = 9 \times 7$	31	Д	S	–	29,3	46,9	50,0	0,90	1,04	0,46	0,70
5	$121 = 11 \times 11$	40	П	S	45,5	20,8	32,5	36,4	0,92	1,07	0,34	0,62
6	$121 = 11 \times 11$	25	C	Q, Q	–	22,1	37,5	36,4	1,20	1,78	0,61	0,94
7	$121 = 11 \times 11$	81	ТП	ТП	46,9	21,5	32,2	36,4	1,01	1,00	0,30	0,65
8	$143 = 11 \times 13$	71	П	T	40,4	20,6	30,4	33,3	0,82	0,92	0,46	0,64
9	$143 = 11 \times 13$	71	Д	T	51,1	20,5	34,3	33,3	1,08	1,43	0,35	0,80
10	$143 = 11 \times 13$	20	C	Q, S	56,1	21,2	33,6	33,3	1,48	1,48	0,32	0,79
11	$156 = 13 \times 12$	31	П	S	39,8	19,2	29,0	32,0	1,05	1,05	0,32	0,60
12	$156 = 13 \times 12$	31	Д	S	44,9	17,8	27,7	32,0	0,89	0,89	0,26	0,54
13	$169 = 13 \times 13$	16	C	S, S	45,3	20,2	31,3	30,8	1,38	1,23	0,37	0,75
14	$169 = 13 \times 13$	81	ТС	ТП, ТП	–	15,5	24,6	30,8	1,63	1,72	0,55	0,74
15	$195 = 15 \times 13$	28	C	T, S	47,2	17,5	25,8	28,6	1,26	1,26	0,39	0,66
16	$225 = 15 \times 15$	49	C	T, T	60,3	15,6	22,5	26,7	1,11	1,28	0,43	0,67

Таблица 3.5. Продолжение...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
17	255 = 17 × 15	127	П	S	31,7	15,4	22,2	25,0	0,62	0,79	0,39	0,56
18	255 = 17 × 15	127	Д	S	31,6	15,4	22,5	25,0	0,67	0,76	0,38	0,56
19	323 = 19 × 17	161	П	T	25,4	13,8	20,2	22,2	0,40	0,73	0,34	0,51
20	323 = 19 × 17	161	Д	T	27,8	13,1	20,0	22,2	0,98	1,19	0,32	0,57
21	361 = 19 × 19	81	C	Q, Q	29,7	11,9	17,7	21,0	0,83	1,00	0,33	0,58
22	399 = 21 × 19	45	C	S, Q	29,7	11,6	18,5	20,0	1,17	1,17	0,23	0,60
23	399 = 21 × 19	196	ТП	ТП	24,1	12,3	17,6	20,0	0,40	0,60	0,28	0,41
24	399 = 21 × 19	196	ТД	ТП	24,9	11,9	18,1	20,0	0,57	0,78	0,28	0,44
25	400 = 20 × 20	57	П	S	24,5	12,6	18,1	20,0	0,73	0,70	0,25	0,43
26	441 = 21 × 21	25	C	S, S	29,9	11,2	19,6	19,0	1,48	1,54	0,33	0,77
27	441 = 21 × 21	256	ТС	ТП, ТП	28,8	11,0	16,6	19,0	1,12	1,21	0,38	0,69
28	483 = 23 × 21	55	C	Q, S	27,8	10,8	17,0	18,2	1,03	1,25	0,29	0,69
29	484 = 22 × 22	324	ТП	ТП	21,8	11,2	16,5	18,2	0,53	0,72	0,27	0,48
30	529 = 23 × 23	121	C	Q, Q	26,0	10,4	15,3	17,4	0,73	1,02	0,33	0,61
31	784 = 28 × 28	256	ТС	ТП, ТП	23,6	7,6	12,7	17,4	0,88	0,99	0,26	0,50
32	868 = 28 × 31	256	ТС	ТП, ТП1	19,7	7,5	12,1	17,4	0,98	1,10	0,22	0,46
33	868 = 28 × 31	400	ТС	ТП, ТП2	21,7	7,4	12,0	17,4	0,85	1,06	0,21	0,52
34	899 = 31 × 29	449	П	T	15,7	8,4	12,6	13,3	0,34	0,61	0,27	0,40

Таблица 3.5. Окончание...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
35	899 = 31 × 29	449	Д	Т	16,9	8,1	12,3	13,3	0,67	0,93	0,26	0,50
36	961 = 31 × 31	36	С	С, S	20,9	6,9	12,8	12,9	1,40	0,83	0,18	0,41
37	961 = 31 × 31	80	С	С, S	18,3	7,4	12,9	12,9	0,96	0,66	0,21	0,40
38	961 = 31 × 31	80	С	С, Q	18,7	7,3	12,3	12,9	1,11	0,78	0,25	0,38
39	961 = 31 × 31	225	С	С, S	16,3	8,2	13,0	12,9	0,51	0,75	0,28	0,55
40	961 = 31 × 31	225	С	Q, Q	16,9	7,8	11,8	12,9	0,71	0,78	0,40	0,51
41	961 = 31 × 31	225	С	С, Q	16,6	8,0	12,4	12,9	0,61	0,69	0,34	0,53
42	961 = 31 × 31	256	ТС	ТП1, ТП1	17,4	7,4	11,5	12,9	1,05	1,23	0,20	0,50
43	961 = 31 × 31	400	ТС	ТП1, ТП2	18,7	7,3	11,4	12,9	0,87	1,06	0,19	0,48
44	961 = 31 × 31	625	ТС	ТП2, ТП2	20,5	7,2	11,3	12,9	1,08	1,28	0,20	0,55
45	1023 = 33 × 31	511	П	С	15,2	7,9	11,6	12,5	0,30	0,60	0,38	0,49
46	1023 = 33 × 31	511	Д	С	15,7	7,9	11,5	12,5	0,31	0,63	0,39	0,49
47	1225 = 35 × 35	289	С	Т, Т	16,5	6,9	10,6	11,4	0,87	1,26	0,39	0,59
48	1295 = 37 × 35	153	С	В, Т	17,2	6,8	10,5	11,1	0,76	0,89	0,20	0,43
49	1369 = 37 × 37	81	С	В, Т	17,7	6,8	10,4	10,8	0,95	0,68	0,18	0,37
50	1600 = 40 × 40	169	С	С, S	14,2	6,7	8,7	10,0	0,91	1,02	0,18	0,52
51	1763 = 41 × 43	881	П	Т	11,3	6,7	8,7	9,5	0,33	0,59	0,26	0,40
52	1763 = 41 × 43	881	Д	Т	12,9	6,7	8,7	9,5	0,44	0,70	0,26	0,44

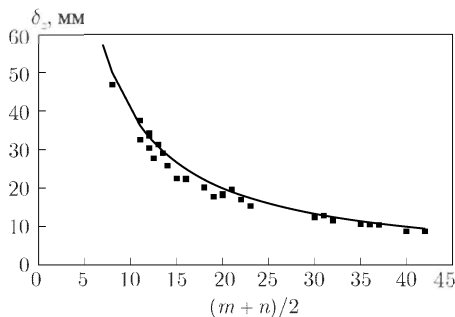


Рис. 3.13. Глубинное разрешение $\delta_z^{(m)}$, определённое по усреднённой АФ (■) и по формуле (3.58) (сплошная линия)

такие, для которых $t_z^{(u)} \leq 0,75$ и $t_z^{(m)} \leq 0,55$. Лучшую АФ (меньшие $t_z^{(u)}$ и $t_z^{(m)}$) обеспечивает использование ПСТ-П, примерно такую же АФ имеют ИКСИ с коллиматором на основе ПСТ-Д, если последние построены из ПСП типа *S*. Аппаратные функции хуже у ПСТ-Д по сравнению с ПСТ-П, если они построены из ПСП типа *T*.

Рисунки 3.14 и 3.15 показывают различие АФ коллиматоров, построенных из одной и той же ПСП близкими способами сворачивания одномерной ПСП в двумерную ПСТ, а именно построчным и диагональным способами, для бинарных и троичных последовательностей соответственно.

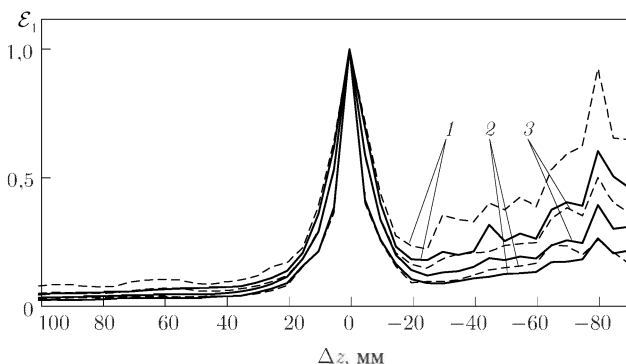


Рис. 3.14. АФ ИКСИ для коллиматора на основе ПСТ29 × 31-П (сплошные линии) и ПСТ29 × 31-Д (пунктирные линии): 1 — $\varepsilon_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\varepsilon_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\varepsilon_1^{(m)}(\Delta z)$

Степень различия АФ часто определяется типом исходной ПСП, что хорошо видно на рисунке 3.16, соответствующего коллиматорам одной и той же размерности, построенным одним и тем же способом, но из существенно разных последовательностей.

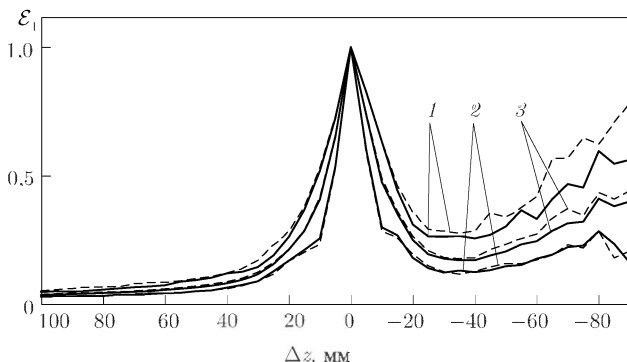


Рис. 3.15. АФ ИКСИ для коллиматора на основе ПСТ19 × 21-ТП (сплошные линии) и ПСТ19 × 21-ТД (пунктирные линии): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

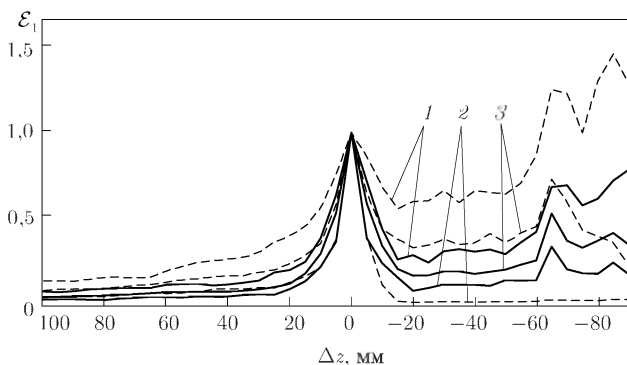


Рис. 3.16. АФ ИКСИ для коллиматора на основе ПСТ31 × 31-С типа S_2Q (сплошные линии) и В30 S_2 (пунктирные линии): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

Кодирующие таблицы типа РНР (ПСТ-С), приведённые в таблице 3.5, построены из основных ПСП и не охватывают все возможные комбинации ПСП, пригодных для построения самоподдерживающихся таблиц. В таблице 3.6 приведён полный набор 36 возможных комбинаций размерности $m \times n = 31 \times 31$ и параметров ИКСИ на их основе с целью исследования зависимости АФ от среднего пропускания k/v ($v = m \times n$), которое изменяется от 1/961 до 900/961. Помимо возможного влияния на форму АФ среднее пропускание является важным параметром ИКСИ, определяя случайную погрешность результатов, и может быть оптимизировано с целью уменьшения этой погрешности.

При построении самоподдерживающихся таблиц, приведённых в таблице 3.6, были использованы две ПСП типа S (S_1, S_2) с параметрами

Таблица 3.6. Основные параметры ИКСИ с коллиматором размерности 31×31

№ п/п	Кол-во пинхолов k	Тип ПСП	Глубинное разрешение, мм			Разброс АФ	Амплитуда ложных пиков		
			$\delta_z^{(u)}$	$\delta_z^{(d)}$	$\delta_z^{(m)}$		$t_z^{(u)}$	$t_z^{(d)}$	$t_z^{(m)}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	B1,B1	–	8,21	87,86	3,31	–	–	1,00
2	30	B1,B30	–	8,16	87,71	2,97	2,97	–	0,99
3	6	B1,S1	–	7,45	15,41	2,15	–	–	–
4	25	B1,S1И	–	7,44	15,41	1,92	1,38	–	0,61
5	15	B1,S2	–	8,18	15,25	1,52	1,28	–	0,74
6	16	B1,S2И	–	8,18	15,22	1,50	1,50	–	0,74
7	15	B1,Q	–	8,00	14,78	1,71	1,41	–	0,72
8	16	B1,QИ	–	8,01	14,79	1,70	1,40	–	0,72
9	900	B30,B30	–	8,14	87,51	2,91	2,93	0,02	0,98
10	180	B30,S1	–	7,41	15,41	1,83	1,35	0,03	0,60
11	750	B30,S1И	–	7,41	15,41	1,63	1,32	0,02	0,60
12	450	B30,S2	–	8,13	15,25	1,43	1,46	0,03	0,73
13	480	B30,S2И	–	8,13	15,23	1,44	1,47	0,03	0,72
14	450	B30,Q	–	7,96	14,78	1,42	1,35	0,03	0,71
15	480	B30,QИ	–	7,97	14,79	1,43	1,34	0,03	0,71
16	36	S1,S1	20,88	6,91	12,75	1,40	0,83	0,18	0,41

Таблица 3.6. Окончание...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
17	150	S1,S1I	20,94	6,91	12,75	1,25	0,81	0,20	0,41
18	90	S1,S2	18,25	7,42	12,85	0,99	0,66	0,21	0,40
19	96	S1,S2I	18,26	7,43	12,85	0,94	0,65	0,21	0,40
20	90	S1,Q	18,68	7,30	12,28	1,11	0,78	0,25	0,38
21	96	S1,QI	18,71	7,31	12,28	1,11	0,77	0,24	0,38
22	625	S1I,S1I	21,00	6,90	12,75	1,10	0,80	0,22	0,40
23	375	S1I,S2	18,29	7,43	12,85	0,85	0,64	0,22	0,40
24	400	S1I,S2I	18,31	7,42	12,85	0,81	0,63	0,23	0,40
25	375	S2,Q	18,74	7,30	12,28	0,96	0,76	0,26	0,38
26	400	S2,QI	18,78	7,31	12,28	0,96	0,76	0,25	0,38
27	225	S2,S2	16,28	8,16	12,95	0,51	0,75	0,28	0,55
28	240	S2,S2I	16,29	8,16	12,94	0,51	0,74	0,29	0,54
29	225	S2,Q	16,57	7,98	12,40	0,61	0,69	0,34	0,53
30	240	S2,QI	16,60	7,99	12,40	0,61	0,70	0,33	0,53
31	256	S2I,S2I	16,32	8,16	12,93	0,52	0,74	0,30	0,54
32	240	S2I,Q	16,58	7,98	12,40	0,56	0,71	0,35	0,53
33	256	S2I,QI	16,63	7,98	12,40	0,57	0,69	0,33	0,53
34	225	Q,Q	16,89	7,82	11,80	0,71	0,78	0,40	0,51
35	240	Q,QI	16,91	7,83	11,80	0,72	0,77	0,39	0,51
36	256	QI,QI	16,94	7,83	11,81	0,72	0,77	0,37	0,52

$(v, k, \lambda) = (31, 15, 7)$ и $(31, 6, 1)$, две инверсные ПСП типа S (S_1 И, S_2 И) с параметрами $(v, k, \lambda) = (31, 16, 8)$ и $(31, 25, 20)$, одна ПСП типа Q с параметрами $(v, k, \lambda) = (31, 15, 7)$, одна инверсная ПСП типа Q (QИ) с параметрами $(v, k, \lambda) = (31, 16, 8)$ и две вырожденные ПСП (B1) и (B30) с параметрами $(v, k, \lambda) = (31, 1, 0)$ и $(31, 30, 29)$. Данные таблицы 3.6 позволяют исследовать не только влияние среднего пропуска на форму АФ, но и сравнить её с АФ при использовании ПСТ-П и ПСТ-Д, имеющих близкие размерности $m \times n = 29 \times 31$ и $m \times n = 31 \times 33$, построенных из ПСП типа T и S соответственно.

Все семь АФ из таблицы 3.6 для коллиматоров, при построении которых использовалась хотя бы одна ПСП типа S_2 , имеют $t_z^{(u)} \leq \leq 0,75$. Двадцать АФ имеют $t_z^{(m)} \leq 0,55$. К лучшим по совокупности параметров АФ можно отнести ПСТ-С с $k = k_1 k_2 = 225, 240$ и 256, т.е. $k_1 = (v_1 \pm 1)/2$ и $k_2 = (v_2 \pm 1)/2$. Удовлетворительные параметры у АФ при $k = 375$ и 400, если для построения коллиматоров ИКСИ использованы ПСП типа S. Все АФ ИКСИ, для построения коллиматоров которых были использованы вырожденные ПСП, имеют плохие значения параметров (рис. 3.16). В целом предпочтение следует отдать ИКСИ, коллиматоры которых построены с использованием ПСП типа S.

Данные таблицы 3.6 подтверждают, что глубинное разрешение практически не зависит от среднего пропуска кодирующего коллиматора, кроме нескольких исключений при использовании вырожденных ПСП, и тем самым подтверждается корректность формулы (3.58) для оценки глубинного разрешения. С другой стороны, достаточно неожиданный разброс (более, чем в два раза) значений глубинного разрешения, обусловленный позициями точечного источника в исследуемом объёме, перекрывает их различие, связанное с видом кодирующей таблицы. Поэтому для выбора кодирующей таблицы требуемой размерности, вероятно, следует использовать более чувствительные параметры АФ, а именно разброс значений и амплитуды ложных пиков.

Выполненные исследования детально характеризуют АФ ИКСИ с многопинхолистыми коллиматорами трёх типов и дают основу для определения параметров ИКСИ, а также для сравнения и выбора наиболее предпочтительного коллиматора. Более “случайный” характер расположения пинхолов у коллиматоров на основе ПСТ-П обеспечивает более гладкую АФ в области ложных пиков. Для построения коллиматора на основе ПСТ-Д можно рекомендовать ПСП типа S. Этим же последовательностям следует отдать предпочтение при использовании самоподдерживающихся таблиц, причём желательно выбирать $k/v \approx \approx 0,25$.

3.2.2. Влияние дискретизации источника и коллиматора на АФ ИКСИ. Ранее предполагалось, что любая плоскость в источнике, параллельная плоскости детектора, разбивается условной сеткой квадратных ячеек со стороной Δ , в центре каждой из которых находится

точный источник с неизвестной активностью. Вместе с тем, очевидно, что более адекватной дискретизацией непрерывного распределения будет его представление в виде равномерного распределения внутри элементарной ячейки. Аналогично и для коллиматора вводится сетка квадратных ячеек со стороной d . При этом размеры и даже форма пинхола, находящегося в элементарной ячейке коллиматора, могут не совпадать с размерами и формой этой ячейки. Так как детектор считается состоящим из квадратных ячеек со стороной D , идеальными будут только две схемы дискретизации: точечный источник и пинхол, совпадающий с элементарной ячейкой коллиматора, либо точечный пинхол и источник, равномерно распределённый внутри элементарной ячейки источника (рис. 3.4). Поскольку реальная ситуация, т.е. распределённый элементарный источник и пинхол с конечными размерами $d_p \leq d$, не совпадает ни с какой из этих схем, АФ будет содержать дополнительные искажения.

Равномерно распределённый по элементарной ячейке источник моделировался равномерным размещением в пределах этой ячейки 81 точечного источника равной активности. Контрольное увеличение количества точечных источников в ячейке до 1600 практически не меняло вида АФ, но существенно увеличивало время расчётов.

Уменьшение размеров пинхола d_p приближает ситуацию ко второй идеальной схеме, а именно распределённый элементарный источник и точечный пинхол. При моделировании этому условию соответствовал квадратный пинхол со стороной $d_p = 0,1$ мм. Контрольное уменьшение размеров пинхола до $d_p = 0,01$ мм практически не меняло вид АФ. Хотя пинхолы столь малых размеров при регистрации γ -излучения не представляют практический интерес как из-за ничтожной светосилы, так и вследствие самоэкранирования каналов при наклонном падении γ -квантов из-за конечной толщины коллиматора, сравнение АФ для двух идеальных схем представляет теоретический и практический интерес. Действительно, сравнение “хорошей” (рис. 3.17, а) и “плохой” (рис. 3.17, б) АФ для двух идеальных схем показывает, что хотя они и не идентичны, особенно при нахождении внефокусного источника вблизи коллиматора, около фокусной плоскости, как и следовало ожидать, АФ с большой точностью совпадают. Следовательно, совпадают такие существенные характеристики, как глубинное разрешение и амплитуда основного пика. Совпадают также и основные особенности АФ: наличие ложных пиков, их примерные позиции и амплитуды, обусловленные типом коллиматора. В то же время в случае распределённого элементарного источника вклад внефокусных источников, расположенных вблизи коллиматора, в плоскость фокуса несколько меньше, чем в случае точечного элементарного источника.

Практическая ценность этих результатов в том, что они позволяют использовать полученные ранее АФ с точечными источниками для сравнения и выбора кодирующих коллиматоров при реальных условиях измерений. Однако для этих целей могут быть использованы только

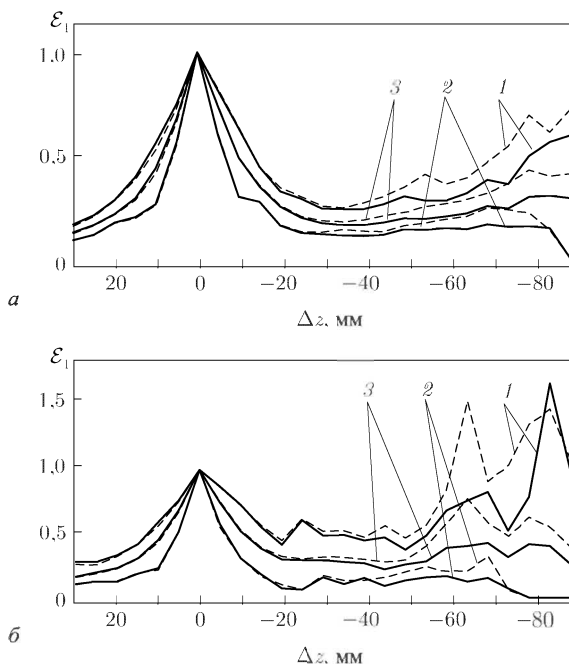


Рис. 3.17. Аппаратные функции ИКСИ при использовании коллиматора на основе ПСТ-20 $\times$ 20П (а) и ПСТ-21 $\times$ 21С (б) для точечного источника и $d_p = 4$ мм (пунктирные кривые) и распределённого источника и $d_p = 0,1$ мм (сплошные кривые): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

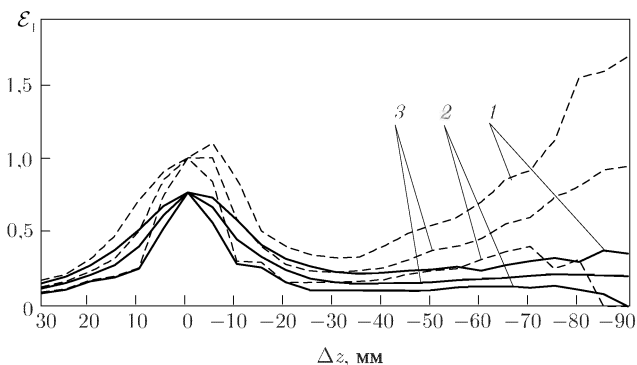


Рис. 3.18. Аппаратные функции ИКСИ при использовании коллиматора на основе ПСТ-20 $\times$ 20П для точечного источника и $d_p = 2$ мм (пунктирные кривые) и распределённого источника и $d_p = 2$ мм (сплошные кривые): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

результаты, полученные при условии $d_p = d$. Как показали модельные расчёты, при $d_p < d$ АФ точечных и распределённых элементарных источников сильно различаются (рис. 3.18). Выбор оптимальных размеров пинхола по АФ с точечным элементарным источником становится невозможным, т. к. с уменьшением размеров пинхола ухудшается глубинное разрешение и существенно возрастает вклад внефокусных источников в плоскость фокуса даже для достаточно “хороших” коллиматоров.

Поскольку распределённость элементарного источника ухудшает АФ при $d_p = d$, практический интерес представляет сравнение АФ с распределённым элементарным источником для разных размеров пинхолов и разных типов кодирующих коллиматоров. Аппаратные функции (верхние границы) ИКСИ при использовании многопинхольного коллиматора на основе ПСТ-21 $\times$ 21С для распределённого источника показаны на рисунке 3.19. Аналогично ведут себя АФ для коллима-

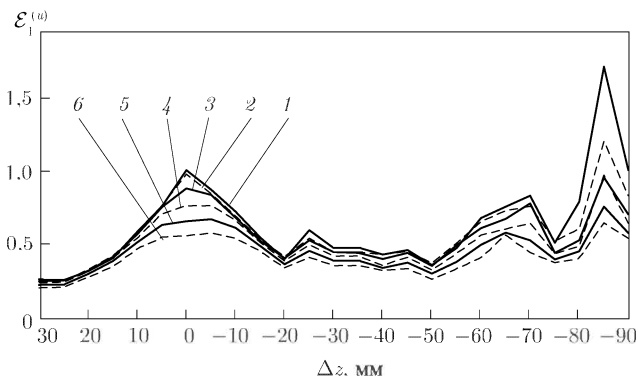


Рис. 3.19. Аппаратные функции (верхние границы) ИКСИ при использовании ПСТ-21 $\times$ 21С для распределённого источника: 1 — $d_p = 0,1$ мм; 2 — $d_p = 0,5$ мм; 3 — $d_p = 1$ мм; 4 — $d_p = 2$ мм; 5 — $d_p = 3$ мм; 6 — $d_p = 4$ мм

торов других типов. Результаты расчётов основных параметров АФ для коллиматоров 9 типов приведены в таблице 3.7. В целом полученные данные (разброс глубинных разрешений, обусловленный позицией источника в плоскости, характер ложных пиков или их отсутствие в зависимости от типа коллиматора) хорошо согласуются с данными предыдущего раздела, полученными для точечного источника и $d_p = d$.

Отметим два следствия замены точечного элементарного источника распределённым: 1) связанное с меньшим вкладом внефокусных источников в плоскость фокуса (благоприятное), 2) обусловленное ухудшением пространственного разрешения (неблагоприятное). Второе следствие было хорошо прогнозируемым, т. к. выбор размеров пинхола всегда является некоторым компромиссом между пространственным разрешением и светосилой коллиматора.

Таблица 3.7. Основные параметры АФ ИКСИ для распределённого элементарного источника

Тип и размерность ПСТ	Диаметр пинголов d_p , мм	Амплитуда главного пика				Глубинное разрешение, мм				Амплитуда ложного пика			
		$C_z^{(u)}$	$C_z^{(d)}$	$C_z^{(m)}$		$\delta_z^{(u)}$	$\delta_z^{(d)}$	$\delta_z^{(m)}$		$t_z^{(u)}$	$t_z^{(d)}$	$t_z^{(m)}$	
1	2	3	4	5		6	7	8		9	10	11	
17×19 -Д	0,1	1,0	1,0	1,0		28,5	13,1	19,9		0,78	0,24	0,46	
	0,5	0,98	0,98	0,98		28,7	13,6	20,5		0,64	0,21	0,35	
	1,0	0,88	0,88	0,88		31,9	15,0	32,5		0,58	0,19	0,33	
	2,0	0,77	0,76	0,77		35,7	16,6	27,0		0,53	0,18	0,30	
	3,0	0,67	0,66	0,66		51,9	17,9	30,4		0,47	0,16	0,26	
	4,0	0,58	0,56	0,57		56,6	20,0	33,9		0,58	0,14	0,24	
17×19 -Д	0,1	1,0	1,0	1,0		25,8	13,8	20,2		0,64	0,27	0,40	
	0,5	0,97	0,97	0,97		26,3	14,2	20,8		0,48	0,25	0,33	
	1,0	0,88	0,88	0,88		29,0	15,6	23,4		0,44	0,19	0,28	
	2,0	0,77	0,77	0,77		32,4	17,0	26,3		0,38	0,16	0,24	
	3,0	0,66	0,66	0,66		36,0	18,3	29,4		0,32	0,14	0,21	
	4,0	0,57	0,56	0,57		40,4	20,2	32,6		0,33	0,12	0,19	
19×21 -С	0,1	1,0	1,0	1,0		30,1	11,7	18,5		1,17	0,16	0,41	
	0,5	0,97	0,97	0,97		30,8	12,1	19,0		0,91	0,17	0,34	
	1,0	0,88	0,88	0,88		33,4	13,6	21,8		0,73	0,17	0,33	
	2,0	0,77	0,77	0,77		54,5	15,3	25,3		0,70	0,16	0,30	
	3,0	0,66	0,66	0,66		57,4	16,7	28,9		0,67	0,15	0,28	
	4,0	0,57	0,57	0,57		62,7	18,2	32,4		0,58	0,14	0,26	

Таблица 3.7. Продолжение...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
19 × 21-ТД	0,1	1,0	1,0	1,0	25,2	11,8	18,2	0,59	0,15	0,28
	0,5	0,97	0,97	0,97	25,8	12,3	18,6	0,46	0,14	0,25
	1,0	0,88	0,88	0,88	28,5	13,7	21,0	0,40	0,13	0,24
	2,0	0,77	0,77	0,77	32,0	15,2	23,9	0,37	0,13	0,23
	3,0	0,66	0,66	0,66	35,2	16,5	26,8	0,36	0,12	0,22
	4,0	0,57	0,57	0,57	38,6	17,7	30,0	0,57	0,12	0,20
19 × 21-ТП	0,1	1,0	1,0	1,0	24,5	12,3	17,7	0,44	0,14	0,26
	0,5	0,97	0,97	0,97	25,0	12,7	18,1	0,37	0,14	0,24
	1,0	0,88	0,88	0,88	27,4	14,2	20,2	0,39	0,13	0,22
	2,0	0,77	0,77	0,77	30,4	15,6	23,1	0,37	0,13	0,21
	3,0	0,66	0,66	0,66	33,5	17,0	26,2	0,35	0,12	0,19
	4,0	0,57	0,57	0,57	36,8	18,2	29,2	0,32	0,11	0,18
20 × 20-П	0,1	1,0	1,0	1,0	25,1	12,6	18,3	0,58	0,16	0,30
	0,5	0,97	0,97	0,97	25,4	13,0	18,6	0,46	0,14	0,26
	1,0	0,88	0,88	0,88	28,0	14,5	20,9	0,44	0,14	0,24
	2,0	0,77	0,77	0,77	31,5	15,9	23,7	0,38	0,14	0,22
	3,0	0,66	0,66	0,66	34,9	17,1	26,5	0,34	0,13	0,20
	4,0	0,57	0,56	0,56	38,4	18,4	29,5	0,32	0,12	0,18

Таблица 3.7. Окончание...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
21 × 21-С	0,1	1,0	1,0	1,0	29,6	11,7	19,7	1,68	0,17	0,43
	0,5	0,97	0,97	0,97	30,8	11,8	20,2	1,19	0,17	0,41
	1,0	0,88	0,88	0,88	33,7	13,5	22,7	0,95	0,17	0,40
	2,0	0,77	0,77	0,77	56,1	15,3	25,7	0,97	0,16	0,38
	3,0	0,66	0,66	0,66	68,2	16,8	29,0	0,76	0,15	0,36
	4,0	0,57	0,57	0,57	70,8	18,3	32,6	0,65	0,13	0,33
21 × 21-ТС	0,1	1,0	1,0	1,0	28,7	11,0	16,7	0,91	0,22	0,39
	0,5	0,98	0,97	0,97	29,5	11,5	17,1	0,81	0,20	0,38
	1,0	0,88	0,88	0,88	32,3	13,0	18,7	0,72	0,19	0,37
	2,0	0,78	0,77	0,77	35,3	14,5	21,2	0,67	0,19	0,35
	3,0	0,67	0,66	0,66	37,9	15,9	24,4	0,68	0,17	0,33
	4,0	0,58	0,57	0,57	41,0	17,3	28,0	0,59	0,15	0,31
22 × 22-ТП	0,1	1,0	1,0	1,0	22,0	11,2	16,6	0,44	0,15	0,26
	0,5	0,97	0,97	0,97	22,6	11,6	17,0	0,41	0,15	0,24
	1,0	0,88	0,88	0,88	25,1	13,2	18,6	0,36	0,13	0,23
	2,0	0,77	0,77	0,77	27,6	14,7	20,9	0,35	0,12	0,21
	3,0	0,66	0,66	0,66	30,2	16,1	23,5	0,35	0,11	0,19
	4,0	0,57	0,56	0,57	33,4	17,4	26,5	0,35	0,11	0,18

Если пренебречь собственным пространственным разрешением позиционно-чувствительного детектора, глубинное разрешение с учётом размеров пинхола достаточно хорошо описывается формулой

$$\delta_z^{(t)} = \frac{4dDL\sqrt{d^2 + d_p^2}}{(D - d)^2(m + n)d}. \quad (3.59)$$

В таблице 3.8 приведены некоторые значения глубинного разрешения $\delta_z^{(t)}$, рассчитанные по формуле (3.59), и $\langle \delta_z^{(m)} \rangle$, полученные при численном моделировании и усреднённые по коллиматорам четырёх типов из таблицы 3.7 с $m + n = 40$. Различие во всех случаях не превышает 10%.

Таблица 3.8. Усреднённое глубинное разрешение ИКСИ ($m + n = 40$)

Диаметр пинхолов d_p , мм	Глубинное разрешение, мм		Отклонение $\frac{\langle \delta_z^{(m)} \rangle - \delta_z^{(t)}}{\delta_z^{(t)}}$, %
	$\langle \delta_z^{(m)} \rangle$	$\delta_z^{(d)}$	
0,1	18,2	20,0	−9,0
0,5	18,6	20,1	−7,5
1,0	21,0	20,6	1,9
2,0	24,0	22,3	7,6
3,0	27,1	25,0	8,4
4,0	30,3	28,3	7,1

В целом при учёте, а тем более при компенсации фактора наклона падения γ -квантов, можно рекомендовать использование пинхолов с размерами, меньшими размеров ячейки коллиматора. С другой стороны, следует отметить, что для сложных распределений источников излучения влияние размеров пинхолов на результаты весьма незначительное. При этом результаты восстановления для точечного элементарного источника и $d_p = d$ мало отличаются от результатов восстановления для распределённого элементарного источника и $d_p \leq d$ (рис. 3.20). Приведённые результаты являются типичными и принципиально не отличаются от результатов, полученных для ИКСИ с коллиматорами других типов, в том числе построенных на основе трюичных последовательностей.

Следует отметить форму представления высококонтрастных изображений с малой дискретностью. Наиболее часто используются два способа представления двумерных изображений: в виде поверхности в трёхмерном пространстве и в виде двумерного полутонового изображения в серой палитре и в псевдоцветах. Однако из-за высокой контрастности первый способ непригоден абсолютно, а второй малоинформативен для изображений с небольшой дискретностью, когда желательно иметь количественную информацию об искажениях в каждой

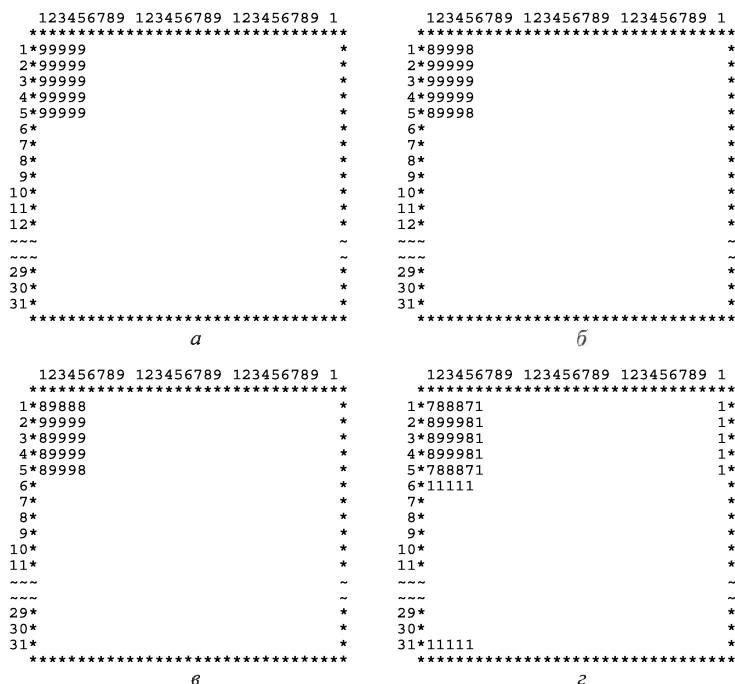


Рис. 3.20. Результаты восстановления плоского источника в виде квадрата на крае поля изображения (ИКСИ на основе ПСТ-31 $\times$ 31-С): а) исходное распределение; элементарный источник — точечный и $d_p = 4$ мм; элементарный источник — распределённый и $d_p = 1$ мм; (все три совпадают); б) элементарный источник — распределённый и $d_p = 2$ мм; в) элементарный источник — распределённый и $d_p = 3$ мм; г) элементарный источник — распределённый и $d_p = 4$ мм

точке. Поэтому представляется более удачным представление таких изображений в виде так называемого “цифрового портрета” с градацией на 10 уровней. При этом каждая точка представлена в виде цифры n ($n = 1, 2, \dots, 9$), соответствующей уровню яркости от 0,1 n до 0,1($n + 1$) от максимальной. Наименьшему уровню яркости соответствует пробел. Точность в 10% вполне достаточна для того, чтобы можно было судить о характере искажений.

Выполненные исследования подтверждают правомерность сравнения АФ ИКСИ, полученных для точечного элементарного источника и $d_p = d$, а также позволяют скорректировать их для распределённого элементарного источника и $d_p \leq d$.

3.2.3. Наклонное падение излучения на детектор. Аппаратная функция существенно зависит не только от типа выбранной ИКСИ, но и от большого количества разнообразных факторов, сопутствующих измерениям, часть из которых была исследована выше. Однако до сих

пор вне поля зрения оставался фактор, оказывающий, по-видимому, наибольшее влияние на качество восстановленных изображений, т. к. он нарушает главные соотношения, лежащие в основе большинства методов, используемых в данной области. Речь идёт о факторе наклонного падения γ -квантов на поверхность детектора, который делает невозможным применение интегралов типа свёртки для описания процесса измерений. Данный раздел содержит результаты о влиянии фактора наклонного падения излучения как на характеристики АФ, так и на свойства восстановленных изображений сложных пространственных распределений источников излучения [255].

Известно, что число γ -квантов, падающих на единицу площади детектора от точечного источника, пропорционально $\cos^3 \vartheta$, где ϑ — угол между нормалью к плоскости детектора и прямой, соединяющей точку источника и точку детектора. Вследствие этого элементы матрицы $\hat{A}$ в выражении (3.22) перестают принимать только значения 0 или 1 и могут быть любыми от 0 до 1. Ситуация здесь в чём-то аналогична рассмотренной в предыдущем разделе при переходе от точечного элементарного источника к распределённому. Однако есть и существенное отличие, обусловленное геометрической зависимостью, т. к. искажения будут тем больше, чем больше размеры детектора и коллиматора и чем меньше расстояние от детектора до источника. При этом следует отметить возможность самоэкранирования пинхолов при наклонном падении излучения из-за конечной толщины коллиматора. Влияние этого фактора увеличивается при перечисленных выше условиях, а также при увеличении отношения толщины коллиматора d_c к линейному размеру пинхола d_p . Коэффициент, который следует учитывать при расчёте показаний детектора, равен

$$\eta = 1 - \frac{d_c}{d_p} \operatorname{tg} \vartheta. \quad (3.60)$$

Естественно, при $d_c = 0$ или $\vartheta = 0$ значение $\eta = 1$.

Ещё больше становится влияние фактора наклонного падения для объёмных источников из-за самопоглощения излучения в веществе источника. Для учёта этого эффекта в первом приближении элементы матрицы $\hat{A}$ должны быть умножены на коэффициент

$$\exp \left[- \int_0^{l_i(\vartheta_{jj'})} \mu(l) dl \right]. \quad (3.61)$$

Здесь $\mu(l)$ — пространственно неоднородный коэффициент линейного ослабления, $\vartheta_{jj'}$ — угол между прямой, соединяющей центр j -го элементарного источника с центром j' -го элемента ПЧД, и нормалью к плоскости детектора, а $l_i(\vartheta_{jj'})$ — путь, проходимый излучением в веществе от j -го элементарного источника до j' -го элемента ПЧД в i -м измерении. Аналогично изменяются элементы матрицы $\hat{B}^{(ii')}$.

Таким образом, влияние фактора наклонного падения излучения связано по крайней мере с тремя эффектами, причём для всех них оно возрастает при увеличении угла ϑ . Тем не менее это влияние можно скорректировать или хотя бы уменьшить с помощью каких-либо алгоритмов компенсации, некоторые из которых будут рассмотрены ниже.

Численное моделирование производилось при условии $d_c = 0$ и $\mu = 0$, однако полученные закономерности и методы компенсации влияния наклонного падения излучения применимы и для учёта остальных эффектов, искажающих вид матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в (3.22). Возможны несколько путей уменьшения влияния фактора $\cos^3 \vartheta$:

1) учёт наклонного падения излучения при составлении системы уравнений (3.22);

2) выбор такой геометрии измерений, в которой искажения элементов матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в (3.22) незначительны;

3) разработка приближённых, но практически работающих методов коррекции влияния этого фактора на этапе декодирования.

Первый путь более универсален, однако его реализация целесообразна при разработке специализированных итерационных алгоритмов решения системы уравнений (3.22), не использующих явного вида обратной матрицы $\hat{A}^{-1}$. В этом случае сфокусированное (“томографическое”) решение в виде (3.23) становится невозможным, т. к. явный вид матрицы $\hat{A}^{-1}$ становится неизвестным.

Второй путь, по существу, связан с исследованием характера влияния наклонного падения излучения в зависимости от геометрических условий. Однако эффективность выбора специальных геометрических условий имеет принципиальные ограничения, т. к. увеличение фокусного расстояния и уменьшение общих размеров коллиматора и детектора, уменьшающие влияние фактора $\cos^3 \vartheta$, одновременно приводят к ухудшению глубинного разрешения. Для оценки качества восстановления пространственных распределений источников излучения были использованы три критерия, которые характеризуют среднеквадратичное, абсолютное и максимальное отклонение восстановленного изображения от истинного, соответственно, в каждой фокусной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} D_i &= \sqrt{\frac{1}{v} \sum_{j=1}^v (\tilde{\xi}_j^{(i)} - \xi_j^{(i)})^2} \\ R_i &= \frac{1}{v} \sum_{j=1}^v |\tilde{\xi}_j^{(i)} - \xi_j^{(i)}| \\ E_i &= \max_{j \in [1, v]} \left\{ |\tilde{\xi}_j^{(i)} - \xi_j^{(i)}| \right\} \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (3.62)$$

а также в целом по трёхмерному распределению:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_i \\ R_0 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M R_i \\ E_0 &= \max_{i \in [1, M]} \{E_i\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.63)$$

Для двухуровневых пространственных распределений, когда ненулевые элементы равны, информативным является также отношение (критерий $F = t'_{\max} t''_{\min}$) максимума восстановленного изображения в точках с нулевой исходной активностью $t'_{\max} = \max_{j \in [1, v]} \{\tilde{\xi}_j |_{\xi_j=0}\}$ к минимуму восстановленного изображения в точках с ненулевой исходной активностью $t''_{\min} = \min_{j \in [1, v]} \{\tilde{\xi}_j |_{\xi_j \neq 0}\}$. Кроме того, т. к. количественные критерии (3.62), (3.63) не отражают всех особенностей рассматриваемых эффектов, дополнительно производилось и качественное визуальное сравнение истинного и восстановленного изображений.

Третий путь компенсации фактора наклонного падения излучения связан с его коррекцией на стадии декодирования. При этом целесообразно использовать как априорную информацию о распределении радионуклидов, прежде всего о его неотрицательности, так и восстановленное изображение до коррекции. Были предложены и исследованы четыре метода коррекции. В каждом из них на первой стадии вычислялись сфокусированные изображения в соответствии с формулой (3.23). Затем для каждого элемента источника вычислялся весовой множитель $\alpha_j^{(i)} = \xi_j^{(i)} / \tilde{\xi}_{\max}^{(i)}$, где $\tilde{\xi}_{\max}^{(i)} = \max_{j \in [1, v]} \{\tilde{\xi}_j^{(i)}\}$.

В первом методе коррекции на второй стадии скорректированное изображение $\tilde{\xi}^{(i)} = (\tilde{\xi}_j^{(i)}, j = 1, 2, \dots, v)$ вычислялось по формуле

$$\tilde{\xi}_j^{(i)} = \sum_{j'=1}^v \alpha_j^{(i)} \frac{a_{jj'}^{-1} \zeta_{j'}^{(i)}}{\cos^3 \vartheta_{j_0 j'}}, \quad j = 1, 2, \dots, v, \quad (3.64)$$

где $\vartheta_{j_0 j'}$ имеет тот же смысл, что и в формуле (3.61), а j_0 соответствует элементу источника, расположенному в центре поля изображения, т. е. фактор $\cos^3 \vartheta$ учитывается усреднённо для всех элементов восстановленного изображения. Нетрудно видеть, что точная компенсация происходит только для единственного точечного источника, расположенного в позиции j_0 .

Во втором методе коррекции отрицательные весовые множители $\alpha_j^{(i)}$ заменялись нулями.

В третьем методе коррекции формула (3.61) была модифицирована следующим образом:

$$\tilde{\xi}_j^{(i)} = \sum_{j'=1}^v \alpha_j^{(i)} \frac{a_{jj'}^{-1} \zeta_{jj'}^{(i)}}{\cos^3 \vartheta_{jj'}}, \quad j = 1, 2, \dots, v, \quad (3.65)$$

что соответствует более точному учёту фактора $\cos^3 \vartheta$. При этом точная компенсация происходит для точечного источника, расположенного в произвольной позиции.

В четвёртом методе коррекции отрицательные весовые множители $\alpha_j^{(i)}$, как и во втором методе, заменялись нулями.

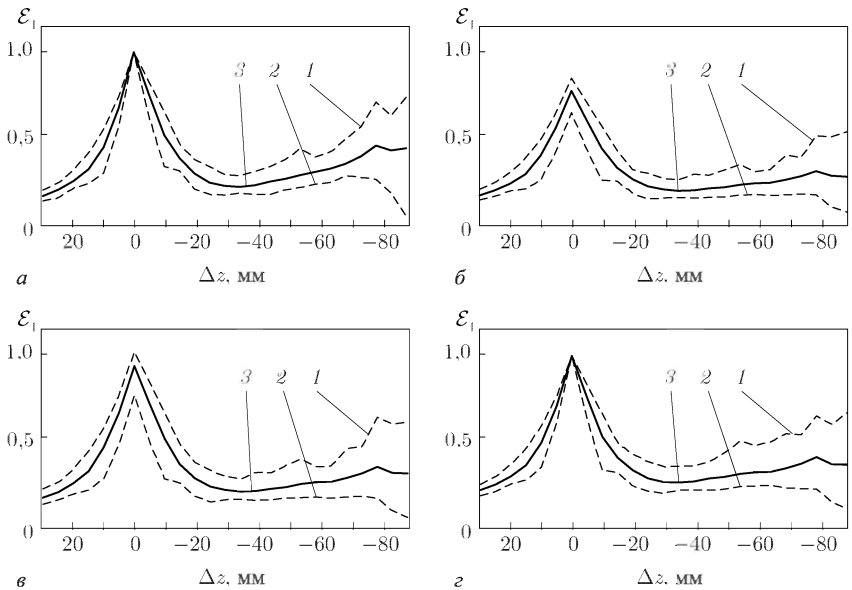


Рис. 3.21. Аппаратные функции ИКСИ при использовании коллиматора на основе ПСТ-20 × 20П: а) без учёта фактора $\cos^3 \vartheta$; б) с учётом фактора $\cos^3 \vartheta$; в) с учётом фактора $\cos^3 \vartheta$ и компенсацией по методу 1; г) с учётом фактора $\cos^3 \vartheta$ и компенсацией по методу 3: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

На рисунке 3.21 приведены АФ для точечных источников с использованием многопинхового коллиматора на основе ПСТ-20 × 20П без учёта (рис. 3.21, а) и с учётом (рис. 3.21, б) фактора $\cos^3 \vartheta$. В целом фактор наклонного падения γ -квантов приводит к уменьшению значений всех АФ. Применение первого метода коррекции улучшает вид АФ (рис. 3.21, в), в частности верхняя граничная АФ в плоскости фокуса достигает значения 1. Применение же третьего метода коррекции практически исключает влияние фактора $\cos^3 \vartheta$ (рис. 3.21, г). Результаты применения второго и четвёртого методов коррекции слабо

отличаются от результатов применения первого и третьего методов соответственно.

Аппаратные функции для коллиматоров на основе инверсной ПСТ-20 $\times$ 20ПИ и разностной ПСТ-20 $\times$ 20ПР и при учёте фактора $\cos^3 \vartheta$ практически совпадают с АФ основной ПСТ-20 $\times$ 20П, что обусловлено сохранением внутренней структуры кодовых таблиц. Аналогичные результаты для АФ были получены для коллиматоров и других размерностей.

Хотя приведённые результаты по АФ и позволяют в определённой степени судить о влиянии исследуемого фактора и возможности его компенсации, для сложных пространственных распределений источников излучения этой информации недостаточно вследствие неаддитивности действия фактора $\cos^3 \vartheta$. Как показали дальнейшие исследования, хотя АФ для ПСТ-20 $\times$ 20П совпадают с АФ для инверсной и разностной таблиц, для сложных источников влияние фактора $\cos^3 \vartheta$ для этих таблиц существенно различно.

В целом результаты численного моделирования, как и следовало ожидать, показали уменьшение критериев различия (3.62), (3.63) с ростом размерности кодовых таблиц $v = m \times n$, однако при учёте фактора $\cos^3 \vartheta$ это уменьшение существенно замедляется. Это объясняется тем, что увеличение размеров коллиматора и детектора приводит к усилению влияния фактора наклонного падения γ -квантов.

Иногда наблюдался эффект улучшения качества восстановленного изображения при учёте фактора $\cos^3 \vartheta$, как это имело место для коллиматора на основе ПСТ-20 $\times$ 20П. Этот эффект, по-видимому, объясняется случайной компенсацией искажений, обусловленных вкладом внефокусных плоскостей, и искажений, обусловленных влиянием фактора наклонного падения излучения.

Различие между способами построения двумерных кодовых таблиц проявилось в том, что самоподдерживающиеся таблицы оказались менее чувствительны к фактору $\cos^3 \vartheta$, чем построчные и диагональные, однако и применение алгоритмов компенсации этого фактора практически не улучшало качество восстановленных изображений. В то же время построчные и диагональные таблицы, более чувствительные к фактору $\cos^3 \vartheta$, показали существенное улучшение качества восстановленных изображений при использовании алгоритмов компенсации. Наихудшие результаты были получены для геометрических кодов, что, впрочем, и следовало ожидать ещё из рассмотрения их АФ.

При численном исследовании использовались несколько типов пространственных распределений источников излучения. В каждом из них были взяты три параллельные детектору плоскости на расстоянии 3,2 см друг от друга. В первом типе пространственного распределения источники располагались только в средней плоскости и образовывали узор в виде квадрата 5×5 элементарных ячеек, расположенного в углу поля изображения.

Второй тип пространственного распределения отличался от первого тем, что источники в средней плоскости образовывали узор в виде 8 лучей через каждые 45° , пересекающих всё поле изображения.

В третьем типе пространственного распределения точечные источники располагались во всех трёх плоскостях, причём в каждой плоскости источники последовательно образовывали узор в виде арабских цифр “1”, “2” и “3”, расположенных по центру поля изображения.

Четвёртый тип пространственного распределения отличался от третьего тем, что цифры располагались “по диагонали”: цифра “1” находилась в левом верхнем углу поля изображения первой плоскости, цифра “2” — в центре поля изображения второй плоскости, цифра “3” — в правом нижнем углу поля изображения третьей плоскости.

При варьировании фокусного расстояния для коллиматоров на основе ПСТ-41 $\times$ 43П, ПСТ-41 $\times$ 43Д и ПСТ-43 $\times$ 43С и пространственного распределения первого типа (“цифры”) было найдено, что хорошее качество восстановления по всем плоскостям объекта может быть получено при $f \sim 30$ см. При этом оптимальное значение фокусного расстояния увеличивается, если алгоритмы компенсации фактора $\cos^3 \vartheta$ не применяются, и уменьшается при использовании таких алгоритмов. По-видимому, справедлив вывод, что в определённых пределах изменения фокусного расстояния ухудшение глубинного разрешения при увеличении f менее значимо, чем влияние фактора наклонного падения излучения на качество восстановления.

Для более детального изучения влияния фактора $\cos^3 \vartheta$ на результаты измерений и возможности его компенсации были выполнены пять серий модельных расчётов:

- 1) для пространственного распределения первого типа (“квадрат”) и разных коллиматоров с размерностями около 20×20 ;
- 2) для пространственного распределения второго типа (“лучи”) и разных коллиматоров с размерностями около 20×20 ;
- 3) для пространственного распределения второго типа (“квадрат”) и коллиматоров на основе одной и той же ПСТ-31 $\times$ 31С, но с разным пропусканием;
- 4) для пространственного распределения третьего типа (“цифры”) при расположении каждой из цифр в центре поля изображения и разных коллиматоров с размерностями около 43×43 ;
- 5) для пространственного распределения четвёртого типа (“цифры”) при расположении цифр “по диагонали” и разных коллиматоров с размерностями около 43×43 .

В таблицах 3.9 и 3.10, а также на рисунках 3.22–3.31 представлены некоторые результаты первых двух серий расчётов. Ввиду неинформативности полутоновых изображений приведены оцифрованные на 10 градаций по уровню яркости изображения. При этом исходные изображения состоят только из “девяток”. По сравнению с источниками, расположенными в центре поля изображения, фактор наклонного падения излучения более ощутимо влияет на источники, расположенные

Таблица 3.9. Критерии качества восстановленного изображения в средней (второй) плоскости для распределения источников излучения типа “квадрат” без компенсации фактора наклона падения излучения и с его компенсацией (активность элементарного источника принята за 1)

Вид	Критерий	Тип ПСТ										
		17×19- П	17×19- ПИ	17×19- ПР	17×19- Д	17×19- ДИ	17×19- ДР	19×19- С	19×19- СИ	19×19- СР	19×21- ТП	19×21- ТД
6/к	D	0,223	0,196	0,069	0,207	0,212	0,089	0,115	0,132	0,069	0,092	0,093
	R	0,180	0,164	0,045	0,165	0,172	0,061	0,064	0,094	0,044	0,054	0,051
	E	0,580	0,530	0,301	0,495	0,491	0,366	0,521	0,449	0,269	0,401	0,394
	F	7/6	5/6	1/8	6/8	6/8	1/8	2/6	4/6	1/7	2/8	2/8
1	D	0,162	0,137	0,082	0,100	0,119	0,077	0,150	0,105	0,036	0,063	0,074
	R	0,086	0,061	0,025	0,061	0,072	0,023	0,040	0,029	0,013	0,018	0,021
	E	0,888	0,805	0,451	0,443	0,491	0,463	0,734	0,675	0,283	0,421	0,403
	F	9/6	2/3	0/6	3/6	4/6	0/5	0/2	0/2	0/5	0/6	0/7
2	D	0,156	0,130	0,082	0,084	0,105	0,077	0,150	0,105	0,036	0,063	0,074
	R	0,065	0,043	0,022	0,038	0,049	0,020	0,040	0,029	0,012	0,017	0,019
	E	0,888	0,805	0,451	0,443	0,491	0,463	0,734	0,675	0,283	0,421	0,403
	F	9/5	1/1	0/6	2/5	2/5	0/5	0/2	0/2	0/5	0/6	0/7
3	D	0,130	0,107	0,035	0,087	0,095	0,077	0,083	0,108	0,034	0,021	0,026
	R	0,071	0,058	0,013	0,059	0,063	0,020	0,023	0,036	0,014	0,008	0,009
	E	0,583	0,528	0,218	0,269	0,272	0,463	0,434	0,588	0,228	0,182	0,195
	F	4/4	4/6	0/8	3/8	3/7	0/8	0/5	2/4	0/7	0/8	0/8
4	D	0,122	0,078	0,035	0,066	0,077	0,031	0,083	0,108	0,034	0,021	0,025
	R	0,050	0,029	0,008	0,033	0,039	0,013	0,023	0,036	0,014	0,006	0,007
	E	0,583	0,526	0,218	0,269	0,272	0,195	0,434	0,588	0,228	0,182	0,195
	F	3/3	1/4	0/7	2/7	2/7	0/7	0/5	2/4	0/7	0/8	0/8

Таблица 3.9. Окончание...

Вид	Крите- рий	Тип ПСТ											
		19×21- С	19×21- СИ	19×21- СР	20×20- П	20×20- ПИ	20×20- ПР	21×21- С	21×21- СИ	21×21- СР	21×21- ТС	22×22- ТП	
6/к	D	0,090	0,201	0,113	0,094	0,519	0,237	0,057	0,198	0,135	0,073	0,093	
	R	0,047	0,117	0,056	0,075	0,409	0,180	0,030	0,107	0,058	0,029	0,052	
	E	0,432	0,735	0,462	0,271	0,157	0,795	0,308	0,763	0,579	0,417	0,465	
	F	3/6	9/5	3/7	3/7	9/2	9/6	2/7	8/6	3/7	1/7	2/7	
1	D	0,110	0,190	0,098	0,056	0,416	0,209	0,061	0,190	0,133	0,077	0,077	
	R	0,027	0,062	0,028	0,020	0,252	0,114	0,014	0,061	0,035	0,018	0,020	
	E	0,648	0,894	0,537	0,448	1,580	0,929	0,507	0,869	0,671	0,507	0,523	
	F	0/3	8/1	1/5	1/4	9/3	8/4	0/4	8/2	0/4	0/5	0/5	
2	D	0,110	0,190	0,098	0,054	0,366	0,196	0,061	0,190	0,133	0,077	0,077	
	R	0,027	0,062	0,027	0,015	0,175	0,084	0,014	0,061	0,34	0,018	0,018	
	E	0,648	0,894	0,537	0,418	1,580	0,929	0,507	0,869	0,671	0,507	0,523	
	F	0/3	8/1	0/5	0/4	9/0	7/0	0/4	8/2	0/4	0/5	0/5	
3	D	0,061	0,173	0,051	0,038	0,441	0,171	0,036	0,159	0,059	0,026	0,033	
	R	0,016	0,063	0,018	0,016	0,258	0,101	0,009	0,065	0,020	0,007	0,010	
	E	0,358	1,050	0,303	0,273	2,090	0,785	0,258	0,947	0,348	0,236	0,269	
	F	0/6	9/3	1/7	1/7	9/2	8/5	0/7	9/4	1/7	0/7	0/7	
4	D	0,061	0,173	0,051	0,034	0,445	0,166	0,036	0,159	0,058	0,026	0,033	
	R	0,016	0,063	0,018	0,081	0,225	0,083	0,009	0,065	0,018	0,005	0,008	
	E	0,358	1,050	0,303	0,273	2,090	0,785	0,258	0,947	0,348	0,236	0,269	
	F	0/6	9/3	1/7	0/7	9/0	8/3	0/7	9/4	0/6	0/7	0/7	

Примечание: б/к — без компенсации

Таблица 3.10. Критерии качества восстановленного изображения в средней (второй) плоскости для распределения источников излучения типа “лучи” без компенсации фактора наклонного падения излучения и с его компенсацией (активность элементарного источника принята за 1)

Вид	Критерий	Тип ПСТ										
		17×19- П	17×19- ПР	17×19- Д	17×19- ДР	20×20- П	19×21- С	19×21- ТП	19×21- ТД	21×21- С	21×21- ТС	22×22- ТП
б/к	D	0,198	0,092	0,211	0,114	0,134	0,104	0,106	0,104	0,096	0,109	0,115
	R	0,160	0,074	0,169	0,072	0,105	0,067	0,075	0,068	0,062	0,073	0,079
	E	0,578	0,266	0,717	0,405	0,425	0,536	0,421	0,383	0,359	0,058	0,046
	F	9/5	2/7	4/6	1/7	3/6	2/6	2/6	2/6	1/6	2/6	2/6
1	D	0,168	0,067	0,201	0,144	0,119	0,127	0,128	0,130	0,108	0,126	0,125
	R	0,074	0,031	0,088	0,060	0,050	0,049	0,050	0,051	0,040	0,046	0,047
	E	0,680	0,300	0,789	0,574	0,497	0,632	0,571	0,531	0,573	0,808	0,648
	F	0/3	0/6	0/2	0/3	0/4	0/3	0/4	0/3	0/3	0/4	0/3
2	D	0,168	0,067	0,201	0,144	0,118	0,127	0,128	0,130	0,108	0,126	0,125
	R	0,069	0,031	0,084	0,059	0,047	0,048	0,050	0,051	0,040	0,045	0,045
	E	0,680	0,300	0,789	0,574	0,497	0,632	0,571	0,531	0,537	0,808	0,648
	F	0/3	0/6	0/2	0/3	0/2	0/3	0/3	0/3	0/3	0/4	0/3
3	D	0,198	0,068	0,203	0,142	0,157	0,186	0,104	0,111	0,153	0,105	0,095
	R	0,108	0,032	0,096	0,058	0,073	0,068	0,042	0,043	0,057	0,037	0,037
	E	0,135	0,402	0,771	0,681	0,901	1,380	0,551	0,512	0,818	0,808	0,583
	F	5/1	0/4	1/2	0/3	1/1	0/0	0/4	0/3	0/2	0/3	0/4
4	D	0,184	0,068	0,202	0,141	0,156	0,185	0,104	0,111	0,153	0,105	0,095
	R	0,079	0,031	0,086	0,054	0,060	0,066	0,040	0,041	0,056	0,035	0,033
	E	1,000	0,402	0,711	0,681	0,901	1,380	0,551	0,512	0,818	0,808	0,583
	F	2/0	0/4	0/2	0/2	0/0	0/0	0/4	0/3	0/2	0/3	0/3



ПСТ-17×19Д

Рис. 3.22. Декодированное распределение источников излучения типа “квадрат” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

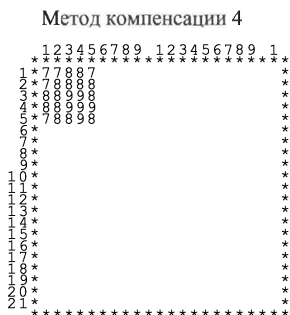


ПСТ-17×19П

Рис. 3.23. Декодированное распределение источников излучения типа “квадрат” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4



ПСТ-20×20П



ПСТ-21×21С

Рис. 3.24. Декодированное распределение источников излучения типа “квадрат” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

Рис. 3.25. Декодированное распределение источников излучения типа “квадрат” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

Без компенсации

```

      123456789 123456789 12
*****
1*77888 1 111112221111 *
2*88888 1 112111211111 1*
3*88888 1 1111111112111*
4*88888 1 1111111112111*
5*88888 1 1111111112111*
6*11111 121111111111111*
7*11111 111112111111111*
8*111111 112112111111111*
9*1 11111 111222222111111*
10*111111111222111111111*
11*111111111122111111111*
12*1112211111221111 111*
13*112111111112111 1 11*
14*1122112222221111 111*
15*111111222222211111211*
16*111111122222221111122*
17*111111112122221111122*
18*11111 111122221111221*
19*1111 1 11111211112221*
20*111 1 111111112112221*
21*11111111 11122111111*
22*111111111 111221111*
*****

```

Метод компенсации 2

```

      123456789 123456789 12
*****
1*55767 *
2*66778 *
3*77978 *
4*68888 *
5*78999 *
6* *
7* *
8* *
9* *
10* *
11* *
12* *
13* *
14* *
15* *
16* *
17* *
18* *
19* *
20* *
21* *
22* *****

```

Метод компенсации 4

```

      123456789 123456789 12
*****
1*77878 *
2*78888 *
3*88888 *
4*89999 *
5*89999 *
6* *
7* *
8* *
9* *
10* *
11* *
12* *
13* *
14* *
15* *
16* *
17* *
18* *
19* *
20* *
21* *
22* *****

```

пст-22×22тп

Без компенсации

```

      123456789 123456789
*****
1*262221 4 11122262*
2*262111 4 122262*
3*2826111 4 11127222*
4*23226111 5 11272233*
5*3322271 5 12723333*
6*3322271 5 12723333*
7*343332271 6 17233333*
8*43433322216 22333343*
9*43433322216 22333343*
10*4444332222233344*
11*4443332277618333344*
12*333327115128333333*
13*33227211512723333*
14*23227111 5 11273333*
15*22261111 5 12227322*
16*2262111 4 11222722*
17*2262111 4 1122262*
*****

```

Метод компенсации 2

```

      123456789 123456789
*****
1* 4 2 *
2* 3 3 *
3* 5 5 *
4* 6 6 *
5* 6 6 *
6* 6 6 *
7* 7 7 *
8* 6957647776 965679778 *
9* 6957647776 965679778 *
10* 6957647776 965679778 *
11* 6957647776 965679778 *
12* 6957647776 965679778 *
13* 6957647776 965679778 *
14* 6957647776 965679778 *
15* 6957647776 965679778 *
16* 6957647776 965679778 *
17* 6957647776 965679778 *
*****

```

Метод компенсации 4

```

      123456789 123456789
*****
1* 4 2 *
2* 3 3 *
3* 5 5 *
4* 6 6 *
5* 6 6 *
6* 6 6 *
7* 7 7 *
8* 7834325556 8444457579 *
9* 7834325556 8444457579 *
10* 7834325556 8444457579 *
11* 7834325556 8444457579 *
12* 7834325556 8444457579 *
13* 7834325556 8444457579 *
14* 7834325556 8444457579 *
15* 7834325556 8444457579 *
16* 7834325556 8444457579 *
17* 7834325556 8444457579 *
*****

```

пст-17×19д

Рис. 3.26. Декодированное распределение источников излучения типа “квадрат” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

Рис. 3.27. Декодированное распределение источников излучения типа “крест” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4



Рис. 3.28. Декодированное распределение источников излучения типа “крест” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

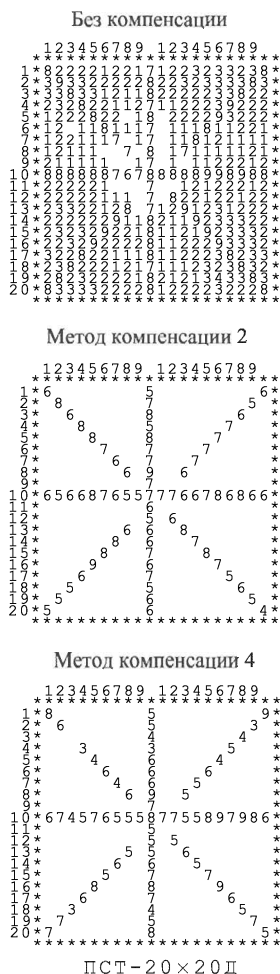
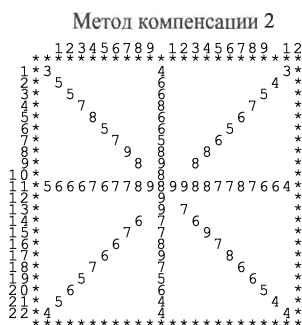


Рис. 3.29. Декодированное распределение источников излучения типа “крест” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4



ПСТ-21×21С



ПСТ-22×22П

Рис. 3.30. Декодированное распределение источников излучения типа “крест” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

Рис. 3.31. Декодированное распределение источников излучения типа “крест” без компенсации и с компенсацией по методам 2 и 4

на краю поля изображения (рис. 3.22–3.26) или равномерно по полю изображения (рис. 3.27–3.31). При этом происходит резкая дифференциация результатов в зависимости от типа ПСТ, на базе которой построен коллиматор ИКСИ.

Фактор $\cos^3 \vartheta$ существенно ухудшает качество восстановленного изображения для ПСТ-17 $\times$ 19П и Д, особенно без использования методов его компенсации, что, вероятно, типично для коллиматоров с большим средним пропусканием (см. также ПСТ-20 $\times$ 20ПИ и ПСТ-21 $\times$ 21СИ). Разностные таблицы дают, как правило, лучшие результаты, чем основные и инверсные таблицы. В то же время результаты зависят не только от среднего пропускания коллиматора, но и от типа используемой для его построения ПСТ. Например, ПСТ-17 $\times$ 19П несколько хуже реагирует на фактор наклонного падения излучения, чем ПСТ-17 $\times$ 19Д. Хорошие результаты характерны для троичных таблиц.

Как и следовало ожидать, фактор $\cos^3 \vartheta$ лучше компенсируется для локализованных источников, даже расположенных на краю поля изображения. Тем не менее наиболее эффективно применение, по-видимому, таких типов ПСТ, которые изначально слабо чувствительны к этому фактору. Хотя для ПСТ, очень чувствительных к фактору $\cos^3 \vartheta$, методы его компенсации, как правило, улучшают качество изображения, тем не менее результаты всё равно хуже, чем для слабо чувствительных ПСТ даже без использования методов компенсации. Достаточно сравнить характеристики ПСТ-17 $\times$ 19П с характеристиками ПСТ-21 $\times$ 21С или ПСТ-21 $\times$ 21ТС.

Для “хороших” ПСТ методы компенсации 2 и 4 дают практически такие же результаты, как и методы 1 и 3 соответственно. Однако в некоторых случаях (ПСТ-17 $\times$ 19Д, табл. 3.9) они более эффективны, уменьшая значения критериев и улучшая контрастность. Следует отметить, что простейший алгоритм компенсации 1 достаточно часто весьма эффективен и даёт лучшие результаты со сложными источниками, занимающими всё поле изображения, чем другие алгоритмы.

В третьей серии расчётов возможность построения ПСТ-31 $\times$ 31С с очень широким набором коэффициентов пропускания k , детально рассмотренная выше, позволила исследовать влияние среднего пропускания коллиматора на результаты измерений при учёте фактора наклонного падения излучения (рис. 3.32).

Как видно из рисунка, если критерий E практически не зависит от k , то критерии D и R заметно ухудшаются, когда среднее пропускание (k/v) превышает примерно 25%. Отметим, что по совокупности параметров лучшие аппаратные функции были получены для $k = 225$, 240 и 256, т.е. как раз для примерно 25%-го пропускания. В этом же диапазоне изменения среднего пропускания достаточно эффективно работают и алгоритмы компенсации фактора $\cos^3 \vartheta$, что хорошо согласуется с результатами моделирования, приведёнными выше. Однако из рассмотрения рисунка 3.32 следует вывод, что если “в среднем”

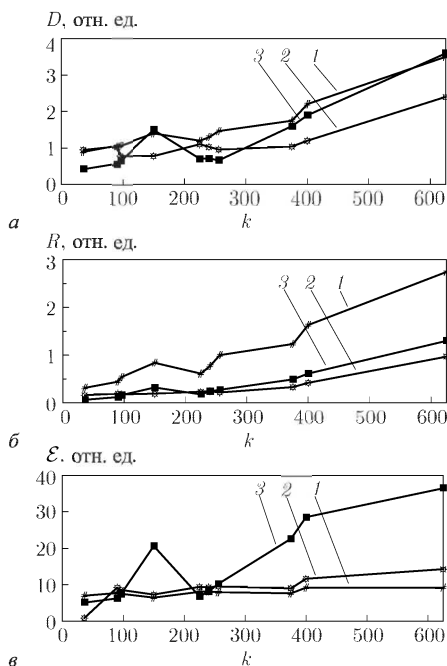


Рис. 3.32. Зависимости критериев D (а), R (б), E (в) от среднего пропуска k для ПСТ-31 $\times$ 31С и распределения источников излучения типа “квадрат” без компенсации (кривая 1) и с компенсацией по методам 2 (кривая 2) и 4 (кривая 3)

алгоритмы компенсации фактора наклонного падения излучения, как правило, улучшают изображение, то отдельные “выбросы” не только не ликвидируются, а даже возрастают.

Следует отметить ещё ряд результатов, полученных из этой серии расчётов. На рисунке 3.32 представлены усреднённые критерии для отдельных значений k , т.к. для них существуют несколько ПСТ с одним и тем же значением коэффициента пропуска. Например, для $k = 240$ есть четыре модификации ПСТ. При этом одна из них, полученная из ПСП типов S_2 и QI , существенно более устойчива к влиянию фактора наклонного падения излучения, чем три другие. К очень “хорошим” ПСТ следует отнести также построенные из ПСП типа S_1 и S_1 с $k = 36$; типа S_1 и S_2 с $k = 96$ и типа S_1 и QI с $k = 96$, что подтверждает как вывод о большей устойчивости к влиянию фактора наклонного падения излучения коллиматоров с небольшим средним пропусканием, так и вывод о значительной зависимости влияния этого фактора от типа ПСП, используемых для построения ПСТ.

Сравнение результатов моделирования при использовании различных типов ПСТ позволяет сделать и другие выводы.

- Диагональные и построчные ПСТ, построенные из ПСП типа S, лучше построенных из ПСП типа T.

- Диагональные и построчные разностные лучше обычных (0,1)-ПСТ, но при условии, что $k \approx v/2$.

- ПСТ, построенные из троичных последовательностей, дают хорошие результаты.

- Самоподдерживающиеся ПСТ с $\sim 25\%$ пропуском лучше диагональных и построчных ПСТ с $\sim 50\%$ пропуском, однако при одинаковом $\sim 50\%$ пропуске ситуация прямо противоположная.

- Хотя томографические свойства ИКСИ улучшаются с увеличением размерности коллиматоров, критерии качества восстановленного изображения для плоского источника, наоборот, ухудшаются из-за влияния фактора наклонного падения излучения. При этом необходимо принимать во внимание также и возможность некоторых исключений вследствие зависимости результатов от типа ПСТ и ПСП, использованных для построения коллиматора.

- Влияние фактора наклонного падения излучения и методов его компенсации практически не изменяется при переходе от идеализированного точечного элементарного источника к равномерно распределённому по ячейке источника элементарному источнику. Аналогичное отсутствие заметного изменения результатов наблюдается и при варьировании размеров пинхолов в ячейке коллиматора. Это свидетельствует об относительной независимости влияния отдельных факторов на результаты измерений.

- Такой универсальный фактор, как наклонное падение излучения, оказывает существенно разное влияние на результаты измерений, полученные для разных типов кодирующих коллиматоров, что даёт основания для классификации коллиматоров на “хорошие” и “плохие”. При этом особый интерес представляют, естественно, ПСТ, хорошие не по одному, а по целому ряду признаков (статистические критерии планирования эксперимента, аппаратные функции, критерии качества изображения и др.).

Данные, полученные в четвёртой и пятой сериях расчётов для коллиматоров большей размерности и объёмных источников, с одной стороны, подтверждают и дополняют выводы, приведённые выше, а с другой стороны, заставляют обратить внимание на то, что небольшое среднее пропускание коллиматора ещё не гарантирует хорошие результаты, что является очевидным следствием противоречия между глубинным разрешением ИКСИ и влиянием фактора наклонного падения излучения.

В целом можно сделать следующие выводы.

1. Влияние фактора наклонного падения излучения можно значительно уменьшить выбором геометрических условий измерений.

2. Так как уменьшение влияния фактора наклонного падения излучения выбором геометрических условий измерений приводит к ухудшению глубинного разрешения ИКСИ, наиболее эффективным является

использование коллиматора, наименее чувствительного к влиянию этого фактора.

3. Предпочтение следует отдавать диагональным, построчным и особенно самоподдерживающимся (0,1)-ПСТ при среднем пропускании, меньшем 50%.

4. Коллиматоры, построенные на основе троичных последовательностей диагональным, построчным и самоподдерживающимся способами, позволяют получить хорошие результаты, однако за счёт усложнения техники измерений.

5. Рассмотренные методы компенсации влияния фактора наклона падения излучения, не являясь универсальными, в большинстве случаев позволяют существенно повысить качество восстановленного изображения. Выбор того или иного метода компенсации следует связать с имеющейся априорной информацией об исследуемом объекте или предварительными оценочными экспериментальными результатами.

3.3. Обобщённые псевдослучайные последовательности

3.3.1. Определение и свойства ОПСП. Существенным ограничением при применении кодирующих коллиматоров является небольшое число известных ПСП с пригодными для построения двумерных ПСТ значениями длины и небольшой выбор значений среднего пропускания кодирующего устройства. Это обстоятельство делает поиск новых типов кодирующих устройств достаточно актуальным и представляющим практический и теоретический интерес.

В данном разделе рассмотрен новый широкий класс возможных двумерных КУ, включающий в себя как большинство известных, так и предложенных впервые, и базирующийся на новом классе обобщённых одномерных последовательностей. Последний включает в себя в качестве небольшого подмножества известные одномерные последовательности, используемые для построения двумерных КУ.

Как уже отмечалось, основным инструментом для построения плоских многопиксельных кодирующих коллиматоров являются псевдослучайные последовательности, которыми служат строки циклических (v, k, λ) -матриц. Рассмотрим обобщение класса (v, k, λ) -матриц [256, 257]. Основным свойством, обеспечивающим эффективность применения (v, k, λ) -матриц, является известный аналитический вид обратной матрицы (3.36). Очевидно, что определяющим при этом является соотношение (3.33), выражающее автокорреляционные свойства (v, k, λ) -матрицы. Поэтому в качестве обобщения может быть взято соотношение

$$\widehat{A}\widehat{B}^T = (k - \lambda)\widehat{I} + \lambda\widehat{J}, \quad (3.66)$$

где $\widehat{A}$ — основная образующая квадратная $(0,1)$ -матрица порядка v , содержащая k_1 единиц в каждой строке, $\widehat{B}$ — вспомогательная квадрат-

ная $(0,1)$ -матрица порядка v , содержащая k_2 единиц в каждой строке, k и λ являются целыми числами.

Легко видеть, что при $\hat{A} = \hat{B}$ соотношение (3.66) переходит в (3.33), и $\hat{A}$ становится обычной (v, k, λ) -матрицей. Таким образом, если соотношение (3.33) выражает автокорреляционные свойства матрицы $\hat{A}$, то соотношение (3.66) выражает кросскорреляционные свойства двух матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Из (3.66) следует, что параметр λ обобщённого класса должен удовлетворять соотношению

$$\lambda = \frac{k_1 k_2 - k}{v - 1}. \quad (3.67)$$

Для любого сочетания (v, k_1, k_2) всегда существует пара (k, λ) , удовлетворяющая соотношению (3.67), и притом только одна. Действительно, учитывая очевидное ограничение $0 \leq k \leq v - 1$, получаем, что целое число $\lambda \in [k_1 k_2 / (v - 1) - 1, k_1 k_2 / (v - 1)]$, т. е. находится в интервале, границы которого отличаются на единицу. Следовательно, уравнение (3.67) относительно неизвестных k и λ всегда имеет единственное решение в целых числах за исключением $k_1 = k_2 = v - 1$. В этом случае имеется два решения, а именно $k = 0$; $\lambda = v - 1$ и $k = v - 1$; $\lambda = v - 2$, и подходящим является второе. Хотя условие (3.67) в отличие от условия (3.34) не накладывает ограничений на существование таких матриц, тем не менее ясно, что последние существуют далеко не для всех наборов (v, k_1, k_2, λ) , удовлетворяющих соотношению (3.67). Например, должны выполняться очевидные неравенства

$$k \leq \min \{k_1, k_2\}, \quad (3.68)$$

$$\lambda \leq \min \{k_1, k_2\}, \quad (3.69)$$

$$k_1 k_2 \geq v - 1 \quad (3.70)$$

и т. д. Кроме того, при $k = \lambda$ правая часть равенства (3.66) представляет собой вырожденную матрицу, что делает невозможным использование обобщённых матриц для построения КУ. Нет сомнений, что существуют и более тонкие ограничения, типа теоремы Брука–Райзера–Човла, на существование обобщённых матриц.

Собственными значениями матрицы $\hat{A}\hat{B}^T$ являются $L_1 = k^2$ и $L_j = k - \lambda$ ($j = 2, 3, \dots, v$). Обратная (декодирующая) матрица $\hat{A}^{-1}$ имеет вид

$$\hat{A}^{-1} = \frac{1}{k_1(k - \lambda)}(k_1 \hat{B}^T - \lambda \hat{J}). \quad (3.71)$$

Другие характеристики по форме совпадают с аналогичными для (v, k, λ) -матриц.

Таким образом, класс (v, k, λ) -матриц с параметрами $k = k_1 = k_2$ является частным случаем введённого класса матриц, которые можно называть обобщёнными (v, k, λ) -матрицами или (v, k, λ) -матрицами, имея в виду всегда пару матриц, удовлетворяющую соотношению (3.66).

Из $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц, так же как из (v, k, λ) -матриц, можно образовать $(-1, 1)$ -матрицы, заменяя 0 на -1 . Свойства таких матриц полностью определяются свойствами первоначальных матриц.

Примером $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц является класс матриц-циркулянтов с параметрами $(v, (v-1)/2, (v+1)/2, (v-1)/2, (v-1)/4)$, строящихся на основе известных последовательностей квадратичных вычетов по модулю v [237]. Такие последовательности существуют для простых v вида $v = 4m + 1$. Для всех остальных простых v , т. е. v вида $v = 4m + 3$, существуют ПСП типа Q по классификации М. Холла [240]. По процедуре построения эти последовательности различаются первым элементом, который у ПСП типа Q равен единице, а у последовательности [237] всегда равен нулю.

Очевидно, что как (v, k, λ) -матрицы типа Q не исчерпывают всего класса (v, k, λ) -матриц, так и вышеупомянутый класс не исчерпывает всего класса $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц. Чтобы продемонстрировать богатство введённого класса, рассмотрим задачу поиска $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц-циркулянтов (табл. 3.11). Как известно [240], существуют (v, k, λ) -матрицы, не являющиеся циркулянтами, что ограничивает количество матриц, пригодных для применения в ИКСИ.

Ранее была рассмотрена задача поиска $(0, 1)$ -матриц-циркулянтов с максимальным по абсолютной величине определителем [241]. Путём полного перебора были найдены такие циркулянты для всех $4 \leq v \leq 20$, а также аналитически решена задача поиска циркулянтов с двумя единицами в строке. Показано, что для $v = 2^m$ определитель такого циркулянта всегда равен нулю, а для v , кратного 3, достигается локальный максимум определителя, равный $2^{v/3}$. Существенным недостатком найденных в [241] циркулянтов является отсутствие аналитического выражения для обратной матрицы. Для $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц эта проблема автоматически решается соотношением (3.71).

В таблице 3.11 приведены найденные полным перебором первые строки $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц, как основных, так и вспомогательных. Известно, что (v, k, λ) -матрицы обладают экстремальными свойствами на всём классе $(0, 1)$ -матриц, в том числе и максимальным по абсолютной величине определителем. Поэтому для обобщённых матриц, найденных полным перебором, величина определителя приводится в качестве одной из характеристик $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц (табл. 3.11). В таблице 3.11 приведены также характеристики и первые строки $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц с одним и тем же набором $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$, но неизоморфных друг другу. При этом изоморфизм определялся по циклической перестановке элементов первой строки, инверсии строки относительно порядка следования элементов, а также замене матрицы $\hat{A}$ матрицей $\hat{B}$ для случая $k_1 = k_2$.

Нетрудно видеть, что при замене нулей на единицы, а единиц на нули, в какой-либо $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матрице изменяются только числовые характеристики, но не её свойства. Поэтому в таблице 3.11 приведены

Таблица 3.11. Характеристики обобщённых псевдослучайных последовательностей

v	k_1	k_2	k	λ	Первая строка матрицы $\hat{A}$	Первая строка матрицы $\hat{B}$	$ \det \hat{A} $	$ \det \hat{B} $
5	2	2	0	1	11000	00101	2	2
7	3	2	0	1	1110000	0001001	3	2
			0	1	1100100	0001010	3	2
			0	1	1010100	0000011	3	2
7	3	3	3	1	1101000	1101000	24	24
8	3	3	2	1	11100000	10100100	3	3
9	4	2	0	1	111100000	000010001	4	2
			0	1	110011000	000000101	4	2
			0	1	101010100	000000011	4	2
10	3	3	0	1	1110000000	0001001001	3	3
11	4	3	2	1	11110000000	10010001000	4	3
			2	1	10101010000	10010010000	4	3
			2	1	11000110000	01010100000	4	3
			2	1	10011001000	00011000010	4	3
			2	1	10100100100	11100000000	4	3
11	5	2	0	1	11111000000	00000100001	5	2
			0	1	11100011000	00000100100	5	2
			0	1	10110100100	00000010001	5	2
			0	1	11001100100	00000001010	5	2
			0	1	10101010100	00000000011	5	2
11	5	5	5	2	11101001000	11101001000	1215	1215
12	5	5	3	2	111110000000	101010010100	5	5
13	4	3	0	1	1111000000000	0000100010001	4	3
			0	1	1010101000000	0001000010010	4	3
			0	1	1100001100000	0000000010101	4	3
			0	1	1001010010000	0000100000110	4	3
			0	1	1100010001000	0000100100100	4	3
			0	1	1001001001000	0000000000111	4	3
13	4	4	4	1	1100101000000	1100101000000	2916	2916
			4	1	1011000100000	1011000100000	2916	2916
13	5	5	1	2	1111100000000	0010010100101	5	5
			1	2	1010101010000	0100100100110	5	5

Таблица 3.11. Продолжение...

v	k_1	k_2	k	λ	Первая строка матрицы $\hat{A}$	Первая строка матрицы $\hat{B}$	$ \det \hat{A} $	$ \det \hat{B} $
			1	2	1110000110000	0100011001100	5	5
13	6	2	0	1	1111110000000	0000001000001	6	2
			0	1	1110001110000	0000000001001	6	2
			0	1	1100110011000	0000000000101	6	2
			0	1	1101100100100	0000001000010	6	2
			0	1	1011010010100	0000000100010	6	2
			0	1	1010101010100	0000000000011	6	2
13	6	6	0	3	1101010110000	0010001001111	4374	4374
14	5	3	2	1	11111000000000	10001000010000	5	3
			2	1	11000110001000	10010010000000	5	3
			2	1	10100100100100	11100000000000	5	3
15	4	4	2	1	111100000000000	100100010001000	4	4
			2	1	110011000000000	100001010000010	4	4
			2	1	101010100000000	100000110000001	4	4
15	7	2	0	1	111111100000000	000000010000001	7	2
			0	1	111100001110000	000000010001000	7	2
			0	1	110011001100100	000000000001010	7	2
			0	1	101010101010100	000000000000011	7	2
15	7	4	0	2	110111011000000	001000100001100	1792	256
			0	2	111100010101000	000001001010010	1792	256
15	7	7	7	3	111011001010000	111011001010000	114688	114688
16	5	3	0	1	1111100000000000	0000010000100001	5	3
			0	1	1100011000010000	0001000000101000	5	3
			0	1	1010100001010000	0000000100100100	5	3
			0	1	1001001001001000	0000000000000111	5	3
16	7	7	4	3	1111111000000000	1010101001010100	7	7
			4	3	1110001100011000	1011001001001001	7	7
17	4	4	0	1	1111000000000000	00001000100010001	4	4
			0	1	1100110000000000	00000010100000101	4	4
			0	1	1100000011000000	00000000001010101	4	4
			0	1	1001010010000000	00100010000011000	4	4
			0	1	1000011000010000	00100000010010001	4	4
			0	1	1001001001000000	00100001000010100	4	4

Таблица 3.11. Окончание...

v	k_1	k_2	k	λ	Первая строка матрицы $\hat{A}$	Первая строка матрицы $\hat{B}$	$ \det \hat{A} $	$ \det \hat{B} $
17	6	3	2	1	1111110000000000	10000100000100000	6	3
			2	1	1010101010100000	10000100001000000	6	3
			2	1	1110000011100000	00100100100000000	6	3
			2	1	1010010100101000	00100010001000000	6	3
			2	1	1100011000011000	01010100000000000	6	3
			2	1	1100110001000100	0100100000010000	6	3
			2	1	1001001100100100	00000011000000010	6	3
			2	1	1010010010010010	1110000000000000	6	3
17	7	5	3	2	1111111000000000	1001001000100100	7	5
			3	2	1111000001110000	10010100001000010	7	5
			3	2	1010101010101000	1001001001001000	7	5
			3	2	1100011100011000	00000111000000110	7	5
			3	2	1100110011000100	0110000110000100	7	5
			3	2	1011010010010010	00110001000100010	7	5
			3	2	1100100110010010	1010101010000000	7	5
			3	2	1010100101001010	1111100000000000	7	5
17	8	2	0	1	1111111100000000	00000000100000001	8	2
			0	1	1111000011110000	00000000000010001	8	2
			0	1	1110001110001100	00000000000100100	8	2
			0	1	1100110011001100	00000000000000101	8	2
			0	1	1011011010010010	00000000010000001	8	2
			0	1	1101100100110010	00000000100001000	8	2
			0	1	1010110101001010	00000000001000001	8	2
			0	1	1010101010101010	00000000000000011	8	2
17	8	8	0	4	1011100111010000	01000110001011011	524288	524288

результаты поиска для $k_1 \leq v/2$ и $k_2 \leq v/2$, т. к. для остальных значений k_1 и k_2 матрицы могут быть получены из приведённых. Отсутствие в таблице 3.11 каких-либо значений $k_1 \leq v/2$ и $k_2 \leq v/2$ показывает, что таких $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц-циркулянтов для данного значения v не существует.

Обозначая через $d_A(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ и $d_B(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ определители основной матрицы $\hat{A}$ и вспомогательной $\hat{B}$ соответственно и

$$k'_1 = v - k_1, \quad k'_2 = v - k_2, \quad (3.72)$$

$$k' = k_1 - k, \quad k'' = k_2 - k, \quad k''' = k - k_1 - k_2 + v, \quad (3.73)$$

$$\lambda' = \frac{k'_1 k_2 - k'}{v - 1}, \quad \lambda'' = \frac{k_1 k'_2 - k''}{v - 1}, \quad \lambda''' = \frac{k'_1 k'_2 - k'''}{v - 1}, \quad (3.74)$$

можно доказать следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} d_A(v, k_1, k_2, k, \lambda) &= d_A(v, k_1, k'_2, k', \lambda') \\ d_B(v, k_1, k_2, k, \lambda) &= d_B(v, k'_1, k_2, k'', \lambda'') \\ d_A(v, k_1, k_2, k, \lambda) &= \frac{k_1}{k'_1} d_A(v, k'_1, k'_2, k''', \lambda''') \\ d_B(v, k_1, k_2, k, \lambda) &= \frac{k_2}{k'_2} d_B(v, k'_1, k'_2, k''', \lambda''') \end{aligned} \right\}. \quad (3.75)$$

Соотношения (3.72)–(3.75) позволяют полностью дополнить таблицу 3.11 для $k_1 > v/2$ и $k_2 > v/2$.

Получение $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матриц-циркулянтов при больших значениях v ограничивается вычислительной мощностью компьютера. При этом переход на более мощную вычислительную технику практически не улучшает положения вследствие так называемого “комбинаторного взрыва”. Это обстоятельство делает актуальным поиск регулярных семейств обобщённых (v, k, λ) -матриц-циркулянтов, аналогичных семействам [237], с неограниченно большими значениями v .

Так как $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матрицы-циркулянты полностью задаются своими первыми строками, которые обобщают понятие ПСП, эти строки можно назвать обобщёнными псевдослучайными последовательностями (ОПСР).

3.3.2. Построение кодирующих коллиматоров из ОПСР. Из ОПСР, так же как из ПСП, можно построить двумерные КУ построчным и диагональным способами. При этом их функционирование полностью описывается образующими $(v, k_1, k_2, k, \lambda)$ -матрицами-циркулянтами. Двумерная кодирующая таблица строится как из ОПСР, соответствующей матрице $\hat{A}$, так и из ОПСР, соответствующей матрице $\hat{B}$. При декодировании необходимо использовать в первом случае матрицу $\hat{B}$, а во втором — матрицу $\hat{A}$.

Из ОПСР также можно построить двумерные КУ самоподдерживающимся способом. При этом их функционирование полностью

Таблица 3.12. Параметры обобщённых образующих матриц блочного типа

Параметр	Тип матрицы	
	$(0, 1) \cdot (v^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k^{(1)}, \lambda^{(1)})$ $(0, 1) \cdot (v^{(2)}, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, k^{(2)}, \lambda^{(2)})$	$(-1, 1) \cdot (v^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, k^{(1)}, \lambda^{(1)})$ $(-1, 1) \cdot (v^{(2)}, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, k^{(2)}, \lambda^{(2)})$
Количество +1 в каждой строке	$k_1^{(1)} k_1^{(2)}, (\hat{A})$ $k_2^{(1)} k_2^{(2)}, (\hat{B})$	$(k_1^{(1)} k_1^{(2)} + (v^{(1)} - k_1^{(1)})(v^{(2)} - k_1^{(2)})), (\hat{A})$ $(k_2^{(1)} k_2^{(2)} + (v^{(1)} - k_2^{(1)})(v^{(2)} - k_2^{(2)})), (\hat{B})$
Количество -1 в каждой строке	0	$(k_1^{(1)}(v^{(1)} - k_1^{(1)} + k_1^{(2)}(v^{(2)} - k_1^{(2)})), (\hat{A})$ $(k_2^{(1)}(v^{(1)} - k_2^{(1)} + k_2^{(2)}(v^{(2)} - k_2^{(2)})), (\hat{B})$
Суммарное количество +1 и -1 в каждой строке	$k_1^{(1)} k_1^{(2)}, (\hat{A})$ $k_2^{(1)} k_2^{(2)}, (\hat{B})$	$v^{(1)} v^{(2)}, (\hat{A})$ $v^{(1)} v^{(2)}, (\hat{B})$
Количество нулей в каждой строке	$(v^{(1)} v^{(2)} - k_1^{(1)} k_1^{(2)}), (\hat{A})$ $(v^{(1)} v^{(2)} - k_2^{(1)} k_2^{(2)}), (\hat{B})$	0
$\hat{A}^{-1}$	$(\hat{A}^{(1)})^{-1} \otimes (\hat{A}^{(2)})^{-1}$	$(\hat{A}^{(1)})^{-1} \otimes (\hat{A}^{(2)})^{-1}$
$\hat{A} \hat{B}^T$	$(\hat{A}^{(1)}(\hat{B}^{(1)})^T) \otimes (\hat{A}^{(2)}(\hat{B}^{(2)})^T)$	$(\hat{A}^{(1)}(\hat{B}^{(1)})^T) \otimes (\hat{A}^{(2)}(\hat{B}^{(2)})^T)$
$(\hat{A} \hat{B}^T)^{-1}$	$(\hat{A}^{(1)}(\hat{B}^{(1)})^T)^{-1} \otimes (\hat{A}^{(2)}(\hat{B}^{(2)})^T)^{-1}$	$(\hat{A}^{(1)}(\hat{B}^{(1)})^T)^{-1} \otimes (\hat{A}^{(2)}(\hat{B}^{(2)})^T)^{-1}$
$\det(\hat{A} \hat{B}^T)$	$(k^{(1)})^{2v^{(2)}} (k^{(2)})^{2v^{(1)}} (k^{(1)} - \lambda^{(1)})(v^{(1)} - 1)v^{(2)} \times$ $\times (k^{(2)} - \lambda^{(2)})(v^{(2)} - 1)v^{(1)}$	$(v^{(1)} - 2k^{(1)})^{2v^{(2)}} (k^{(1)} - \lambda^{(1)})(v^{(1)} - 1)v^{(2)} \times$ $\times \frac{(v^{(2)} - 2k^{(2)})^{2v^{(1)}} (k^{(2)} - \lambda^{(2)})(v^{(2)} - 1)v^{(1)}}{4^{(v^{(1)} - 1)v^{(2)}(v^{(2)} - 1)v^{(1)}}$
Собственное значение матрицы $\hat{A} \hat{B}^T$, (кратность)	$(k^{(1)} k^{(2)})^2, (1);$ $(k^{(1)})^2 (k^{(2)} - \lambda^{(2)}), (v^{(2)} - 1);$ $(k^{(2)})^2 (k^{(1)} - \lambda^{(1)}), (v^{(1)} - 1);$ $(k^{(1)} - \lambda^{(1)})(k^{(2)} - \lambda^{(2)}), (v^{(1)} v^{(2)} - v^{(1)} - v^{(2)} + 1)$	$(v^{(1)} - 2k^{(1)})^2 (v^{(2)} - 2k^{(2)})^2, (1);$ $4(v^{(1)} - 2k^{(1)})^2 (k^{(2)} - \lambda^{(2)}), (v^{(2)} - 1);$ $4(v^{(2)} - 2k^{(2)})^2 (k^{(1)} - \lambda^{(1)}), (v^{(1)} - 1);$ $16(k^{(1)} - \lambda^{(1)})(k^{(2)} - \lambda^{(2)}), (v^{(1)} v^{(2)} - v^{(1)} - v^{(2)} + 1)$

описывается двумя парами образующих $(v^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \lambda^{(1)})$ - и $(v^{(2)}, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \lambda^{(2)})$ -матриц-циркулянтов.

Построение двумерных КУ самоподдерживающимся способом базируется на обобщённых таблицах, образуемых прямым произведением двух ОПСП с параметрами $(v^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \lambda^{(1)})$ и $(v^{(2)}, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \lambda^{(2)})$. Если исходным ОПСП соответствуют образующие матрицы $\hat{A}^{(1)}$ и $\hat{A}^{(2)}$ с параметрами $(v^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \lambda^{(1)})$ и $(v^{(2)}, k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \lambda^{(2)})$ соответственно, то образующей матрицей $\hat{A}$ двумерного КУ будет квадратная матрица порядка $v = v^{(1)}v^{(2)}$, имеющая $k = k_1^{(1)}k_1^{(2)}$ единиц в каждой строке и представляющая собой прямое произведение матриц $\hat{A}^{(1)}$ и $\hat{A}^{(2)}$ ($\hat{A} = \hat{A}^{(1)} \otimes \hat{A}^{(2)}$). Аналогично строятся и описываются самоподдерживающиеся КУ, если в качестве исходных берутся образующие $(-1, 1)$ -матрицы, полученные из матриц $\hat{A}^{(1)}$ и $\hat{A}^{(2)}$, в которых все нули заменены на -1 . Характеристики этих двух классов образующих матриц сведены в таблицу 3.12.

Отметим, что построение двумерных КУ самоподдерживающимся способом возможно для комбинации двух последовательностей из разных классов, а именно из классов $(0, 1)$ -ПСП, $(-1, 1)$ -ПСП, троичных последовательностей, $(0, 1)$ -ОПСП и $(-1, 1)$ -ОПСП.

3.3.3. АФ кодирующих коллиматоров на основе ОПСП. Наличие большого количества ОПСП для одной и той же размерности v , но с разными k_1 и k_2 , а также неизоморфных ОПСП с совпадающими параметрами, позволяет исследовать зависимость АФ от разных характеристик ОПСП, что было весьма затруднительно сделать для классических ПСП вследствие их ограниченного количества.

Аппаратные функции были определены при тех же условиях моделирования, что и ранее: стороны квадратных ячеек позиционно-чувствительного детектора и коллиматора соответственно равны 8 и 4 мм, расстояние между коллиматором и детектором $L = 10$ см, фокусное расстояние $f = 20$ см. Результаты таких исследований приводят к следующим выводам (табл. 3.13). Во-первых, разброс свойств АФ для коллиматоров, построенных на основе неизоморфных ОПСП с совпадающими параметрами, всё-таки весьма велик (рис. 3.33 и 3.34). Во-вторых, прямой зависимости между свойствами АФ и средним пропусканием кодирующего коллиматора нет (для коллиматора, построенного самоподдерживающимся способом, среднее пропускание $\rho = k_1^{(1)}k_1^{(2)}/(v^{(1)}v^{(2)})$). На рисунке 3.35 показаны верхние АФ для коллиматоров с одним и тем же средним пропусканием $\rho = 16/225$. В-третьих, можно установить зависимость свойств АФ от величины модуля определителя образующей матрицы: при увеличении значения модуля определителя образующей матрицы в среднем свойства АФ улучшаются. На рисунке 3.36 приведены верхние АФ для коллиматоров, построенных на основе образующих матриц с существенно разными

Таблица 3.13. Основные характеристики ИКСИ с многоинходными коллиматорами, построенными самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП

№ п/п	Исходная ОПСП	Кол-во пинхолов k_i	Значение модуля определителя	Тип ПСТ	Глубинное разрешение, мм				Разброс АФ	Амплитуда ложных пиков		
					$\delta_z^{(u)}$	$\delta_z^{(d)}$	$\delta_z^{(m)}$	$\delta_z^{(t)}$		$t_z^{(u)}$	$t_z^{(d)}$	$t_z^{(m)}$
1	(15,4,4,2,1)-1А	16	4	С	–	13,5	71,3	26,7	2,91	2,91	0,34	0,72
2	(15,4,4,2,1)-1В	16	4	С	–	13,2	–	26,7	28,50	28,50	13,90	20,30
3	(15,4,4,2,1)-2А	16	4	С	–	11,1	–	26,7	10,30	10,30	0,88	3,40
4	(15,4,4,2,1)-2В	16	4	С	–	11,1	–	26,7	15,30	18,40	5,60	12,30
5	(15,4,4,2,1)-3А	16	4	С	–	10,8	–	26,7	18,60	18,60	1,05	4,89
6	(15,4,4,2,1)-3В	16	4	С	–	9,8	34,8	26,7	13,10	13,10	2,04	4,22
7	(15,7,2,0,1)-1А	49	7	С	–	9,2	27,9	26,7	2,64	2,64	0,36	0,86
8	(15,7,2,0,1)-1В	4	2	С	–	8,9	–	26,7	25,00	25,00	1,56	2,35
9	(15,7,2,0,1)-2А	49	7	С	–	9,2	65,6	26,7	5,37	5,67	2,42	2,81
10	(15,7,2,0,1)-2В	4	2	С	–	7,9	98,5	26,7	11,10	11,10	0,69	1,88
11	(15,7,2,0,1)-3А	49	7	С	–	11,8	–	26,7	5,36	8,16	3,06	4,58
12	(15,7,2,0,1)-3В	4	2	С	–	11,5	–	26,7	14,90	14,90	0,35	1,91
13	(15,7,2,0,1)-4А	49	7	С	–	12,9	–	26,7	2,99	6,09	3,10	4,56
14	(15,7,2,0,1)-4В	4	2	С	–	13,7	52,3	26,7	2,78	2,78	0,00	0,63
15	(15,7,4,0,2)-1А	49	1792	С	–	10,8	96,6	26,7	2,03	2,23	0,76	1,12
16	(15,7,4,0,2)-1В	16	256	С	–	11,1	–	26,7	6,25	6,25	1,56	3,06
17	(15,7,4,0,2)-2А	49	1792	С	–	9,2	–	26,7	2,04	2,04	0,64	1,03
18	(15,7,4,0,2)-2В	16	256	С	–	9,9	–	26,7	4,40	4,41	0,39	1,50
19	(15,7,7,7,3)	49	114688	С	60,3	15,6	22,5	26,7	1,11	1,28	0,43	0,67

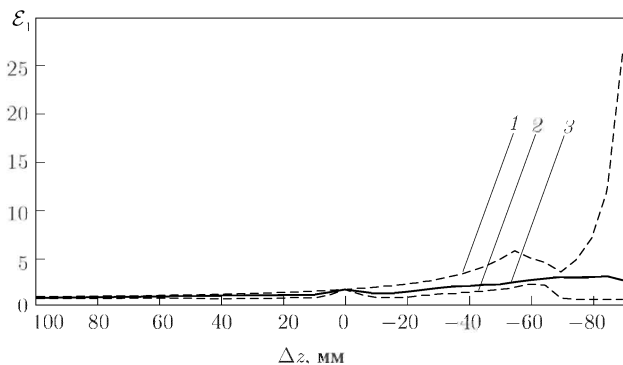


Рис. 3.33. Относительно плохая АФ ИКСИ с кодирующим коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП с параметрами $(v, k_1, k_2, k, \lambda) = (15, 2, 7, 0, 1)$: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

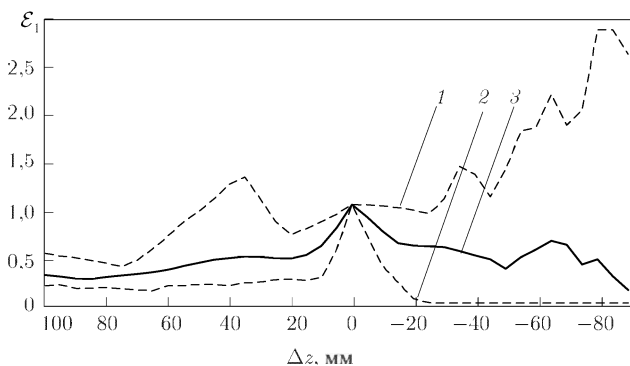


Рис. 3.34. Относительно хорошая АФ ИКСИ с кодирующим коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП с параметрами $(v, k_1, k_2, k, \lambda) = (15, 2, 7, 0, 1)$: 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

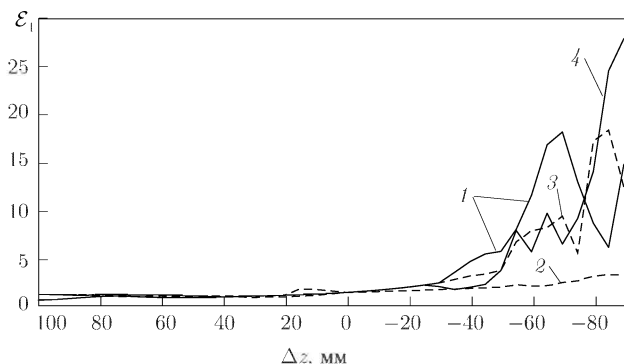


Рис. 3.35. Верхние АФ ИКСИ с кодирующим коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП с параметрами $(v, k_1, k_2, k, \lambda) = (15, 4, 4, 2, 1)$: 1 — 2-я неизоморфная ОПСП (матрица $\hat{B}$), 2 — 1-я неизоморфная ОПСП (матрица $\hat{A}$), 3 — 3-я неизоморфная ОПСП (матрица $\hat{A}$), 4 — 1-я неизоморфная ОПСП (матрица $\hat{B}$)

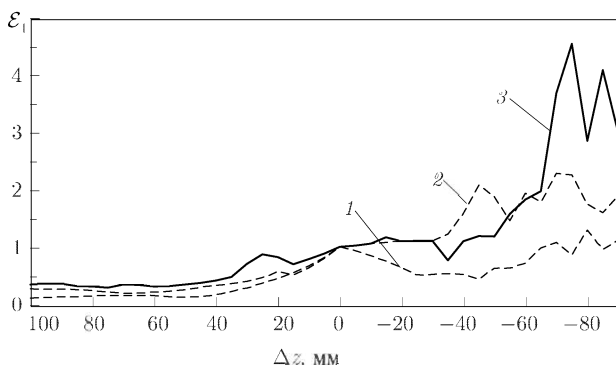


Рис. 3.36. АФ ИКСИ с кодирующим коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП: 1 — ОПСП (ПСП) с параметрами $(v, k_1, k_2, k, \lambda) = (15, 7, 7, 7, 3)$, 2 — 1-я ОПСП с параметрами $(15, 7, 4, 0, 2)$ (матрица $\hat{A}$), 3 — 2-я ОПСП с параметрами $(15, 7, 4, 0, 2)$ (матрица $\hat{B}$)

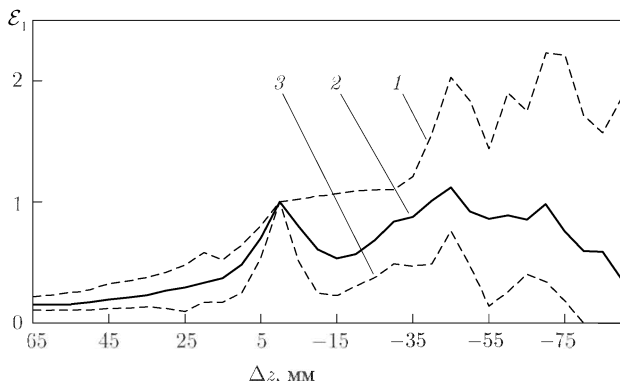


Рис. 3.37. АФ ИКСИ с кодирующим коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом на основе двух одинаковых ОПСП с параметрами (15,7,4,0,2): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

значениями модуля определителя (модуль определителя образующей матрицы равен: 1 — 114688; 2 — 1792; 3 — 256).

На рисунке 3.37 приведены верхняя, нижняя и усреднённая АФ ИКСИ с многопинхольным коллиматором, построенным самоподдерживающимся способом из ОПСП с параметрами $(v, k_1, k_2, k, \lambda) = (15, 7, 4, 0, 2)$. На рисунке 3.38 приведены усреднённые $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$ АФ для разных КУ одной размерности, построенных из одной или двух ОПСП одинаковой размерности.

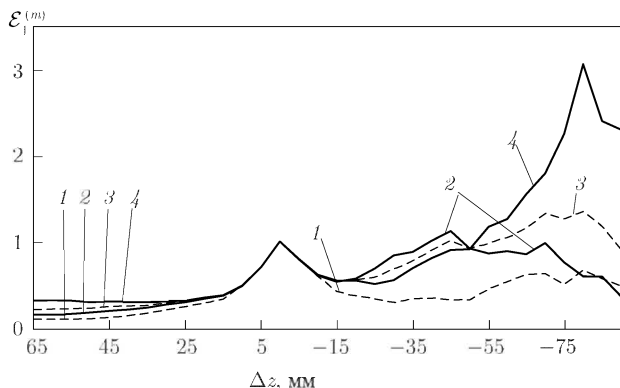


Рис. 3.38. Усреднённые АФ ИКСИ с кодирующими коллиматорами, построенными самоподдерживающимся способом на основе ОПСП: $\left. \begin{matrix} (15, 7, 7, 7, 3) \\ (15, 7, 7, 7, 3) \end{matrix} \right\} -$

$$(1), \left. \begin{matrix} (15, 7, 4, 0, 2) \\ (15, 7, 4, 0, 2) \end{matrix} \right\} - (2), \left. \begin{matrix} (15, 7, 4, 0, 2) \\ (15, 4, 7, 0, 2) \end{matrix} \right\} - (3), \left. \begin{matrix} (15, 4, 7, 0, 2) \\ (15, 4, 7, 0, 2) \end{matrix} \right\} - (4)$$

Таким образом, предложен большой класс возможных двумерных кодирующих устройств, включающий в себя не только многие известные виды, но и значительное количество новых, обладающих сходными полезными свойствами. При этом алгоритм построения двумерных КУ базируется на новом классе обобщённых одномерных последовательностей, включающем в себя в качестве подмножества известные в настоящее время одномерные псевдослучайные последовательности. Новый класс позволяет сконструировать широкий набор ИКСИ, расширить оптимизацию радиационно-физического эксперимента и получить томографическую информацию об излучающем объекте с помощью кодирующих коллиматоров с большим количеством возможных размерностей и свойств.

3.4. Оптимизация ИКСИ на базе статистических критериев оптимальности

3.4.1. Постановка задачи оптимизации. Ранее было отмечено, что первоначальная мотивация использования ИКСИ заключалась в возможности уменьшения погрешности измерений, обусловленной помехами. Однако оценка и минимизация погрешностей измерений, включающих статистическую и систематическую составляющие, представляет при использовании ИКСИ исключительно трудную задачу. Даже при традиционном эксперименте используют целый ряд критериев, на основе которых, например в радиационной интроскопии, выбирают детекторы, коллиматоры, режим измерений и т. п. [190]. Наличие разных критериев связано, в частности, с практической трудностью или невозможностью решить в общем виде задачу минимизации отклонения искомой трёхмерной функции от её оценки, полученной в результате измерений и последующей обработки.

При использовании ИКСИ систематическая погрешность измерений во многом определяется применяемым кодирующим коллиматором, особенно при получении томографических (сфокусированных) изображений трёхмерного объекта — источника излучения. Статистическая погрешность, как и в традиционном (без использования ИКСИ) эксперименте, определяется статистической природой помех, накладывающихся на результаты измерений, и статистической (квантовой) природой самих измеряемых величин (“статистикой эффекта”). При использовании ИКСИ, однако, выражения для расчёта статистических погрешностей и их свойства существенно отличаются от имеющих место при традиционном эксперименте. Объектом оптимизации при использовании ИКСИ может быть выбор типа кодирующего коллиматора или его среднего пропускания ρ , равного отношению количества открытых ячеек коллиматора (пинхолов) k к их общему возможному количеству v ($\rho = k/v$), что при фиксированном v эквивалентно оптимизации количества открытых пинхолов k .

Наиболее общие статистические критерии оптимальности были разработаны в математической теории планирования эксперимента. Это так называемые критерии A -, D - и E -оптимальности [229]. Однако наиболее близкая к нашей задача о взвешивании, рассматривавшаяся в теории планирования эксперимента, не учитывает статистики эффекта, т.е. квантовой природы ионизирующих излучений [230]. Вследствие этого выводы и рекомендации традиционного планирования экспериментов (без учёта статистики эффекта) имеют ограниченную применимость для радиационно-физических экспериментов. С другой стороны, в работах, рассматривавших оптимизацию ИКСИ ионизирующих излучений, в спектрометрии нейтронов по времени пролёта [244, 258], радиационной интроскопии [204, 259–261], радиационной дефектоскопии, а также в оптике [262] использовались критерии оптимальности, не обладающие достаточной общностью для характеристики сложных объектов, а выбранный класс кодирующих устройств был весьма узок.

Здесь принят подход к оптимизации кодирующих устройств на основе общих статистических критериев теории планирования эксперимента с учётом статистических свойств как помех, накладывающихся на измерения, так и самих измеряемых величин [11, 263, 264].

Математически использование многопинхольного КУ для получения изображения в фокусной плоскости при пространственной модуляции излучения, а также при временной модуляции излучения, можно описать системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\hat{A}\vec{x} = \vec{y}, \quad (3.76)$$

где $\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_v)$ — вектор искоемых величин, $\vec{y}^T = (y_1, y_2, \dots, y_v)$ — вектор измеряемых величин, $\hat{A} = (a_{ij}, i = 1, 2, \dots, v; j = 1, 2, \dots, v)$ — образующая матрица или матрица плана эксперимента, определяемая функцией пропускания кодирующего коллиматора, T — знак транспонирования. В случае временной модуляции и отсутствия позиционно-чувствительного детектора (ПЧД) $a_{ij} = 1$, если в i -м измерении j -й пинхол открыт, и $a_{ij} = 0$, если в i -м измерении j -й пинхол закрыт. При пространственной модуляции с использованием ПЧД i -му измерению соответствует i -я ячейка ПЧД.

Выражение (3.76) справедливо, во-первых, если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ являются математическими ожиданиями соответствующих случайных величин и, во-вторых, если пренебречь зависимостью светосилы от угла падения излучения на детектор (фактор $\cos^3 \vartheta$).

Для корректного описания статистических свойств ИКСИ необходимо ввести случайные векторы $\vec{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_v)$, $\vec{\psi}^T = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_v)$ и $\vec{\varphi}^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_v)$ для искоемых величин, измеряемых величин и помех соответственно. Тогда

$$\vec{x} = E[\vec{\xi}]; \quad \vec{y} = E[\vec{\psi}]; \quad \vec{z} = E[\vec{\varphi}], \quad (3.77)$$

где E — знак математического ожидания.

Таким образом, уравнение (3.76) принимает более точный вид:

$$\hat{A}\vec{x} + \vec{z} = \vec{y}. \quad (3.78)$$

Если свойства помех могут быть изучены заранее и учтены при проведении измерений, математическое ожидание помех без ограничения общности можно положить равным нулю, т. е.

$$\vec{z} = \vec{0}, \quad (3.79)$$

что сводит уравнение (3.78) к уравнению (3.76).

Случайные векторы $\vec{\xi}$, $\vec{\psi}$ и $\vec{\varphi}$ характеризуются, соответственно, матрицами вторых моментов (ковариационными матрицами) $\hat{D}_{\vec{\xi}} = ((d_{\vec{\xi}})_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, v)$, $\hat{D}_{\vec{\psi}} = ((d_{\vec{\psi}})_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, v)$, $\hat{D}_{\vec{\varphi}} = ((d_{\vec{\varphi}})_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, v)$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_{\vec{\xi}} &= E[(\vec{\xi} - \vec{x})(\vec{\xi} - \vec{x})^T] \\ \hat{D}_{\vec{\psi}} &= E[(\vec{\psi} - \vec{y})(\vec{\psi} - \vec{y})^T] \\ \hat{D}_{\vec{\varphi}} &= E[(\vec{\varphi} - \vec{z})(\vec{\varphi} - \vec{z})^T] \end{aligned} \right\}. \quad (3.80)$$

Случайный вектор $\vec{\xi}$ характеризует количество γ -квантов, вылетевших из различных областей источника. Поэтому компоненты вектора $\vec{\xi}$ можно считать некоррелированными случайными величинами, что приводит к диагональному виду матрицы $\hat{D}_{\vec{\xi}}$:

$$(d_{\vec{\xi}})_{ij} = \sigma_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, v, \quad (3.81)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Аналогичное предположение может быть сделано и относительно помехи и её ковариационной матрицы $\hat{D}_{\vec{\varphi}}$. Кроме того, т. к. помеха действует на все измерения одинаково, можно положить дисперсии компонент вектора $\vec{\varphi}$ равными:

$$(d_{\vec{\varphi}})_{ij} = \sigma_0^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, v. \quad (3.82)$$

Компоненты вектора $\vec{\psi}$ образованы комбинацией некоррелированных случайных величин, что объясняется или пространственным, или временным различием происхождения соответствующих γ -квантов. Следовательно, можно записать

$$(d_{\vec{\psi}})_{ij} = \left[\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2 \right] \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, v. \quad (3.83)$$

Отметим, что для элементов $(-1, 0, 1)$ -матриц выполняется соотношение $a_{in}^2 = |a_{in}|$, что может привести к неверному истолкованию физического смысла этих элементов.

В соответствии с методом наименьших квадратов [265] наилучшая оценка математического ожидания $\tilde{\vec{x}}$ случайного вектора оценки $\tilde{\xi}$ из уравнения (3.76) определяется следующим выражением:

$$\tilde{\vec{x}} = [\hat{A}^T \hat{D}_{\tilde{\psi}}^{-1} \hat{A}]^{-1} \hat{A}^T \hat{D}_{\tilde{\psi}}^{-1} \vec{y}, \quad (3.84)$$

или (для квадратной матрицы $\hat{A}$)

$$\tilde{\vec{x}} = \hat{A}^{-1} \vec{y}. \quad (3.85)$$

Для случайного вектора оценки $\tilde{\xi}$ матрица вторых моментов $\hat{D}_{\tilde{\xi}} = ((d_{\tilde{\xi}})_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, v)$ равна

$$\hat{D}_{\tilde{\xi}} = [\hat{A}^T \hat{D}_{\tilde{\psi}}^{-1} \hat{A}]^{-1} = \hat{A}^{-1} \hat{D}_{\tilde{\psi}} (\hat{A}^{-1})^T. \quad (3.86)$$

В соответствии с теорией планирования эксперимента [229] оптимальной матрицей планирования $\hat{A}$ является такая матрица, для которой достигается минимум критерия оптимальности на выбранном классе матриц. При этом критерий оптимальности зависит только от характеристик ковариационной матрицы оценок $\hat{D}_{\tilde{\xi}}$. Рассмотрим наиболее часто используемые в теории планирования эксперимента критерии D -, A - и E -оптимальности, представляющие собой соответственно определитель P_D , след P_A и максимальное собственное значение P_E матрицы $\hat{D}_{\tilde{\xi}}$:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \det[\hat{D}_{\tilde{\xi}}] = \prod_{i=1}^v L_i[\hat{D}_{\tilde{\xi}}] = \frac{\det[\hat{D}_{\tilde{\psi}}]}{\det[\hat{A}\hat{A}^T]} = \frac{\prod_{i=1}^v [\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2]}{\det[\hat{A}\hat{A}^T]} \\ P_A &= \text{Tr}[\hat{D}_{\tilde{\xi}}] = \sum_{i=1}^v L_i[\hat{D}_{\tilde{\xi}}] = \sum_{i=1}^v \left[\left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2 \right) \sum_{j=1}^v (a_{ji}^{-1})^2 \right] \\ P_E &= \max_{i=1,2,\dots,v} \left\{ L_i[\hat{D}_{\tilde{\xi}}] \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (3.87)$$

где a_{ij}^{-1} ($i = 1, 2, \dots, v; j = 1, 2, \dots, v$) — элементы матрицы $\hat{A}^{-1}$, $L_i[\hat{D}_{\tilde{\xi}}]$ ($i = 1, 2, \dots, v$) — собственные значения матрицы $\hat{D}_{\tilde{\xi}}$.

Результат оптимизации зависит от класса матриц, описывающих функционирование ИКСИ, на котором производится оптимизация. Естественным классом таких матриц является класс $(0,1)$ -матриц. Однако оптимизация на всём классе $(0,1)$ -матриц является весьма трудной, до конца не решённой к настоящему времени задачей. С другой стороны, эксперимент, в котором производят два измерения с коллиматорами, описываемыми $(0,1)$ -матрицами, и вычитают результаты одного

измерения из результатов другого измерения, описывается матрицами из более широкого класса $(-1, 0, 1)$ -матриц.

3.4.2. Оптимизация на классе $(0,1)$ -матриц. Рассмотрим оптимизацию среднего пропуска кодировующих устройств, построенных на базе $(0,1)$ -матриц. Как уже отмечалось, наиболее интересными с точки зрения практического использования среди $(0,1)$ -матриц являются (v, k, λ) -матрицы. Поэтому рассмотрим сначала оптимизацию кодировующих коллиматоров, построенных из одной ПСП построчным и диагональным способом, а затем коллиматоров, построенных из двух ПСП самоподдерживающимся способом. В первом случае образующей матрицей является сама (v, k, λ) -матрица. Используя свойства (v, k, λ) -матриц (см. раздел 3.1), из выражения (3.87) получим:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{\prod_{i=1}^v \left[\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2 \right]}{k^2 (k - \lambda)^{v-1}} \\ P_A &= \frac{(k^2 - \lambda) \left(v \sigma_0^2 + k \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right)}{k^2 (k - \lambda)} \end{aligned} \right\}. \quad (3.88)$$

Из выражений (3.87) и (3.88) видно, что значения критериев оптимальности зависят от конкретного распределения дисперсий искомых величин, причём эта зависимость наибольшая для P_E -критерия, для которого не удаётся получить более конкретного выражения, чем в (3.87), и наименьшая для P_A -критерия, который зависит фактически только от среднего по распределению значения дисперсии.

Считая k непрерывной величиной, можно получить уравнение для определения оптимальных значений k , минимизирующих критерий A -оптимальности:

$$(v - 2)k^3 + 2[1 + (v - 2)t]k^2 + [(3 + 2v - v^2)t - v]k - 2vt = 0, \quad (3.89)$$

$$\text{где } t = v \sigma_0^2 / \sum_{n=1}^v \sigma_n^2.$$

Оптимальные значения k могут быть получены путём численного решения уравнения (3.89) [263]. При $v \gg 1$ и $v \gg t$ решением (3.89) является $k \approx \sqrt{vt + 1} - t$ [11].

Для дальнейшего анализа P_D -критерия введём распределение дисперсий в следующем виде:

$$\sigma_n^2 = \sigma_p^2(1 - \delta_{nn_0}) + \sigma_g^2 \delta_{nn_0}, \quad n = 1, 2, \dots, v. \quad (3.90)$$

В зависимости от соотношения параметров σ_p^2 и σ_g^2 получим равномерное распределение ($\sigma_p^2 = \sigma_g^2$), распределение типа “горячий очаг” с пиком в точке n_0 ($\sigma_p^2 = 0$) и распределение типа “холодный очаг” с

провалом в точке n_0 ($\sigma_g^2 = 0$), а также промежуточные распределения. Для введённых распределений

$$P_D = \frac{[\sigma_0^2 + (k-1)\sigma_p^2 + \sigma_g^2]^k (\sigma_0^2 + k\sigma_p^2)^{v-k}}{k^2(k-\lambda)^{v-1}}. \quad (3.91)$$

Оптимальные значения k определяются из уравнения:

$$\frac{v(v-2k+1)}{k(v-k)} - \frac{v^2(kv+tv+t\varepsilon+v\varepsilon-k\varepsilon)}{(kv+tv+t\varepsilon)(kv+tv+t\varepsilon+v\varepsilon)} = \ln \left(1 + \frac{v\varepsilon}{kv+tv+t\varepsilon} \right), \quad (3.92)$$

где $\varepsilon = (\sigma_g^2 - \sigma_p^2)/\sigma_p^2$.

Оптимальные значения k для равномерного и δ -образного распределений при $v \gg 1$ и $v \gg t$ определяются, соответственно, выражениями:

$$\left. \begin{aligned} k &= k_p \approx \frac{1}{2}(\sqrt{4vt+4t^2+1} - 2t + 1) \\ k &= k_\delta \approx \frac{\frac{v}{\ln(v/t)} - \frac{v}{\ln^2(v/t)}}{v} \end{aligned} \right\}. \quad (3.93)$$

Для P_E -критерия не удаётся написать общее выражение даже для такого идеализированного класса распределений. Однако для равномерного распределения справедливо следующее выражение:

$$P_E = \frac{(v-1)(\sigma_0^2 + k\sigma_p^2)}{k(v-k)}. \quad (3.94)$$

При этом для оптимальных значений k в случае критерия E -оптимальности получим

$$k = \sqrt{t(v+t)} - t. \quad (3.95)$$

Заметим, что при отсутствии “статистики эффекта” ($t \rightarrow \infty$) все критерии дают примерно одно и то же значение $k \approx v/2$, что соответствует выводам традиционного планирования эксперимента [229]. При $t \rightarrow 0$ имеет место $k \rightarrow 1$, и оптимален традиционный эксперимент с матрицей плана в виде единичной диагональной матрицы или любой матрицы перестановок.

Независимость критерия A -оптимальности от вида распределения, с одной стороны, и невозможность получения критерия E -оптимальности для произвольного распределения дисперсий источника, с другой стороны, обуславливают интерес к использованию дисперсии оценки отдельного элемента источника в качестве критерия оптимальности. В рассматриваемом случае дисперсия $(d_{\xi}^-)_{jj}$ оценки j -го элемента источника имеет вид:

$$(d_{\xi}^-)_{jj} = \frac{(k^2 - \lambda)\sigma_0^2 + k(k-2\lambda)\sigma_j^2 + \lambda k \sum_{n=1}^v \sigma_n^2}{k^2(k-\lambda)}. \quad (3.96)$$

Формула (3.96) позволяет получить оптимальное значение k для любого заданного распределения дисперсий.

Теперь рассмотрим оптимизацию кодирующих коллиматоров, построенных на основе двух ПСП самоподдерживающимся способом. При этом кодовая таблица является прямым произведением ПСП с параметрами (v_1, k_1, λ_1) и (v_2, k_2, λ_2) , а образующая матрица — прямым произведением соответствующих (v_1, k_1, λ_1) - и (v_2, k_2, λ_2) -матриц. Таким образом, если исходным ПСП соответствуют (v, k, λ) -матрицы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, то образующей матрицей — матрицей плана $\hat{A}$ — будет квадратная матрица порядка $v = v_1 v_2$, имеющая $k = k_1 k_2$ единиц в каждой строке и представляющая собой прямое произведение матриц $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, которое можно записать в виде блочной матрицы-циркулянта (см. раздел 3.1).

Для самоподдерживающихся таблиц получим

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{\prod_{i=1}^{v_1 v_2} \left[\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^{v_1 v_2} |a_{in}| \sigma_n^2 \right]}{k_1^{2v_2} k_2^{2v_1} (k_1 - \lambda_1)^{(v_1-1)v_2} (k_2 - \lambda_2)^{(v_2-1)v_1}} \\ P_A &= \frac{(k_1^2 - \lambda_1)(k_2^2 - \lambda_2) \left(v_1 v_2 \sigma_0^2 + k_1 k_2 \sum_{n=1}^{v_1 v_2} \sigma_n^2 \right)}{k_1^2 k_2^2 (k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)} \end{aligned} \right\}. \quad (3.97)$$

Минимизируя P_A -критерий по двум независимым переменным, получим систему уравнений для определения оптимальных значений k_1 и k_2 :

$$\left. \begin{aligned} (v_1 - 2)k_2 k_1^3 + 2[k_2 + (v_1 - 2)t]k_1^2 + \\ + [(3 + 2v_1 - v_1^2)t - k_2 v_1]k_1 - 2v_1 t = 0 \\ (v_2 - 2)k_1 k_2^3 + 2[k_1 + (v_2 - 2)t]k_2^2 + \\ + [(3 + 2v_2 - v_2^2)t - k_1 v_2]k_2 - 2v_2 t = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.98)$$

Некоторые оптимальные значения k_1 и k_2 приведены в таблице 3.14.

Интересно рассмотреть кодирующие коллиматоры с формой, близкой к квадрату. Полагая $k_1 = k_2$ и $v_1 = v_2$, получим

$$(v_1 - 2)k_1^4 + 2k_1^3 + [2(v_1 - 2)t - v_1]k_1^2 + (3 + 2v_1 - v_1^2)tk_1 - 2v_1 t = 0. \quad (3.99)$$

При $v \gg 1$ и $v \gg t$ уравнение (3.99) упрощается:

$$k_1^3 + (2t - 1)k_1 - v_1 t = 0. \quad (3.100)$$

В широком диапазоне изменения t решением (3.100) является $k_1 \approx \sqrt[3]{v_1 t}$.

Выражение для P_D -критерия для распределений (3.90) имеет следующий вид:

$$P_D = \left[\frac{\sigma_0^2}{t(v_1 v_2 + \varepsilon)} \right]^{v_1 v_2} \frac{[f + v_1 v_2 \varepsilon]^{k_1 k_2} f^{v_1 v_2 - k_1 k_2}}{k_1^{2v_2} k_2^{2v_1} (k_1 - \lambda_1)^{(v_1-1)v_2} (k_2 - \lambda_2)^{(v_2-1)v_1}}, \quad (3.101)$$

где $f = tv_1 v_2 + t\varepsilon + v_1 v_2 k_1 k_2$.

Таблица 3.14. Оптимальные значения k_1 и k_2 для критерия А-оптимальности в зависимости от размерностей v_1 и v_2 самоподдерживающейся таблицы

v_1	v_2																	
	10		20		30		40		50		60		70		80		90	
	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
10	3	2	2	3	2	4	2	4	2	5	2	5	2	6	2	6	1	9
20	6	3	5	3	2	4	2	4	2	5	2	5	2	6	2	6	2	7
30	7	3	7	4	6	3	3	4	3	4	3	4	3	5	2	6	2	7
40	9	3	8	4	7	5	7	4	3	4	3	4	3	5	3	5	3	6
50	12	2	9	4	8	5	8	6	7	4	3	4	3	5	3	5	3	6
60	13	2	10	4	9	5	9	6	8	7	8	4	4	4	4	4	3	6
70	14	2	11	4	10	5	9	6	9	7	9	7	8	4	4	4	4	5
80	16	2	13	3	12	4	11	5	10	6	9	7	9	8	9	4	4	5
90	17	2	14	3	13	4	12	5	11	6	10	7	9	8	9	8	9	5
100	18	2	15	3	14	4	12	5	11	6	11	7	11	7	10	8	10	5

Примечание. В правой верхней части таблицы значения даны при $t = 1$, в левой нижней части таблицы — при $t = 10$ (при $v_1 = v_2$ имеем $k_1 = k_2$).

Для определения оптимальных значений k_1 и k_2 получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1 v_2 (v_1 - 2k_1 + 1)}{k_1 (v_1 - k_1)} - \frac{v_1^2 v_2^2 (f + v_1 v_2 \varepsilon - k_1 k_2 \varepsilon) k_2}{f (f + v_1 v_2 \varepsilon)} &= k_2 \ln \left(1 + \frac{v_1 v_2 \varepsilon}{f} \right) \\ \frac{v_1 v_2 (v_2 - 2k_2 + 1)}{k_2 (v_2 - k_2)} - \frac{v_1^2 v_2^2 (f + v_1 v_2 \varepsilon - k_1 k_2 \varepsilon) k_1}{f (f + v_1 v_2 \varepsilon)} &= k_1 \ln \left(1 + \frac{v_1 v_2 \varepsilon}{f} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (3.102)$$

При $v_1 = v_2$ оптимальные значения $k_1 = k_2$ могут быть найдены из уравнения

$$\frac{(v_1^2 - v_1 + 1)(v_1 - 2k_1) + v_1}{k_1 (v_1 - k_1)} - \frac{v_1^4 (g + v_1^2 \varepsilon - k_1^2 \varepsilon)}{g (g + v_1 v_2 \varepsilon)} = k_1 \ln \left(1 + \frac{v_1^2 \varepsilon}{g} \right), \quad (3.103)$$

где $g = tv_1^2 + t\varepsilon + v_1^2 k_1^2$.

Для P_E -критерия в случае равномерного распределения справедливо следующее выражение:

$$P_E = \frac{\sigma_0^2 + k_1 k_2 \sigma_p^2}{(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)}. \quad (3.104)$$

Оптимальные значения k_1 и k_2 могут быть определены из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} k_2 k_1^2 + 2tk_1 - tv_1 &= 0 \\ k_1 k_2^2 + 2tk_2 - tv_2 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.105)$$

При $v_1 = v_2$ и $k_1 = k_2$ оптимальное значение находится из решения кубического уравнения

$$k_1^3 + 2tk_1 - tv_1 = 0. \quad (3.106)$$

При отсутствии “статистики эффекта” ($t \rightarrow \infty$) все критерии в случае $v_1 = v_2$ и $k_1 = k_2$ дают примерно одно и то же значение $k_1 \approx \approx v_1/2$.

Для дисперсии оценки отдельного элемента источника излучения получим

$$(d_{\tilde{\xi}})_{jj} = \frac{\alpha_1 \sigma_0^2 + \alpha_2 \sigma_j^2 + \alpha_3 \sum_{m=1}^{v_1} {}^*(\sigma_{n_m}^2)_{jh} + \alpha_4 \sum_{m=1}^{v_2} {}^*(\sigma_{n_m}^2)_{jp} + \alpha_5 \sum_{n=1}^{v_1 v_2} \sigma_n^2}{k_1^2 (k_1 - \lambda_1) k_2^2 (k_2 - \lambda_2)}. \quad (3.107)$$

Здесь $\sum_{m=1}^{v_1} {}^*(\sigma_{n_m}^2)_{jh}$ означает суммирование по элементам источника, расположенным в горизонтальном ряду, в котором находится j -й элемент источника, а $\sum_{m=1}^{v_2} {}^*(\sigma_{n_m}^2)_{jp}$ означает суммирование по элементам

источника, расположенным в вертикальном ряду, в котором находится j -й элемент источника, и

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= (k_1^2 - \lambda_1)(k_2^2 - \lambda_2), & \alpha_2 &= k_1 k_2 [(k_1 - 2\lambda_1)(k_2 - 2\lambda_2)], \\ \alpha_3 &= k_1 k_2 \lambda_1 (k_2 - 2\lambda_2), & \alpha_4 &= k_1 k_2 \lambda_2 (k_1 - 2\lambda_1), \\ \alpha_5 &= k_1 k_2 \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.108)$$

3.4.3. Оптимизация на классе $(-1, 1)$ -матриц. Так же как и в предыдущем разделе, рассмотрим оптимизацию среднего пропускающих кодирующих устройств, построенных сначала построчным и диагональным способами, а затем построенных самоподдерживающимся способом. При этом за основу возьмём ПСП, в которых нули заменены на -1 , т. е. образующие матрицы принадлежат классу $(-1, 1)$ -матриц (см. раздел 3.1).

В первом случае получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{\left[\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right]^v}{(v - 2k)^2 [4(k - \lambda)]^{v-1}} \\ P_A &= \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right) \left[\frac{1}{(v - 2k)^2} + \frac{v - 1}{4(k - \lambda)} \right] \\ P_E &= \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right) \max \left\{ \frac{1}{(v - 2k)^2}; \frac{1}{4(k - \lambda)} \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.109)$$

Характерной особенностью $(-1, 1)$ -матриц является независимость критериев оптимальности от формы искомым распределений источников излучения. Интересно, что все три критерия дают идентичные выражения для оптимальных значений k , т. е.

$$k = \frac{v \pm \sqrt{v}}{2}, \quad (3.110)$$

причём значения критериев оптимальности при этих значениях k связаны точными равенствами:

$$(P_D)^{1/v} = \frac{1}{v} P_A = P_E = \frac{1}{v} \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right). \quad (3.111)$$

Дисперсия оценки отдельного элемента источника излучения выражается в виде:

$$(d_{\xi}^2)_{jj} = \frac{(v - 2k)^2 + 4(k - \lambda) - v}{4(k - \lambda)(v - 2k)^2} \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right). \quad (3.112)$$

Так как выражение (3.112) не зависит от вида распределения дисперсий, можно найти оптимальное значение k , пригодное для произ-

вольного источника излучения. Нетрудно видеть, что, как и в случае критериев D -, A - и E -оптимальности, оптимальное значение k даётся формулой (3.110).

Перейдём к рассмотрению кодирующих устройств, построенных на основе самоподдерживающихся PNP -таблиц, образуемых прямым произведением двух ПСП с параметрами (v_1, k_1, λ_1) и (v_2, k_2, λ_2) , в которых нули заменены на -1 . Этот класс кодирующих устройств впервые был предложен в [216]. Рассмотрим их свойства и возможность оптимизации (см. раздел 3.1). Произведение AA^T представляет собой блочную матрицу с блоками на главной диагонали, равными $v_1 A_2 A_2^T$, и остальными блоками, равными $[v_1 - 4(k_1 - \lambda_1)] A_2 A_2^T$, где

$$\hat{A}_2 \hat{A}_2^T = 4(k_2 - \lambda_2) \hat{I} + [v_2 - 4(k_2 - \lambda_2)] \hat{J}. \quad (3.113)$$

Собственными значениями матрицы $\hat{A} \hat{A}^T$ являются:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= [v_1^2 - 4(v_1 - 1)(k_1 - \lambda_1)][v_2^2 - 4(v_2 - 1)(k_2 - \lambda_2)] \\ L_j &= 4(k_2 - \lambda_2)[v_1^2 - 4(v_1 - 1)(k_1 - \lambda_1)], \quad j = 2, 3, \dots, v_2 \\ L_j &= 4(k_1 - \lambda_1)[v_2^2 - 4(v_2 - 1)(k_2 - \lambda_2)], \quad j = v_2 + 1, \dots, v_1 + v_2 - 1 \\ L_j &= 16(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2), \quad j = v_1 + v_2, \dots, v_1 v_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.114)$$

Обратная матрица является прямым произведением матриц, обратных к исходным матрицам A_1 и A_2 .

Для критериев оптимальности получим:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{\sigma^2 v_1 v_2 4^{v_1 + v_2 - 2 v_1 v_2}}{(v_1 - 2k_1)^{2v_2} (v_2 - 2k_2)^{2v_1} (k_1 - \lambda_1)^{(v_1 - 1)v_2} (k_2 - \lambda_2)^{(v_2 - 1)v_1}} \\ P_A &= v_1 v_2 \sigma^2 \left[\frac{1}{(v_1 - 2k_1)^2} + \frac{v_1 - 1}{4(k_1 - \lambda_1)} \right] \left[\frac{1}{(v_2 - 2k_2)^2} + \frac{v_2 - 1}{4(k_2 - \lambda_2)} \right] \\ P_E &= \sigma^2 \max \left\{ \frac{1}{(v_1 - 2k_1)^2 (v_1 - 2k_1)^2}; \frac{1}{16(k_1 - \lambda_1)(k_2 - \lambda_2)} \right\} \end{aligned} \right\}, \quad (3.115)$$

где $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sum_{n=1}^{v_1 v_2} \sigma_n^2$. Для оптимальных значений k_1 и k_2 для всех трёх критериев получим:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2} (v_1 \pm \sqrt{v_1}) \\ k_2 &= \frac{1}{2} (v_2 \pm \sqrt{v_2}) \end{aligned} \right\}. \quad (3.116)$$

Дисперсия оценки отдельного элемента источника излучения не зависит от формы распределения дисперсий и выражается следующей

формулой:

$$(d_{\xi}^-)_{jj} = \frac{[(v_1 - 2k_1)^2 + 4(k_1 - \lambda_1) - v_1][(v_2 - 2k_2)^2 + 4(k_2 - \lambda_2) - v_2]}{16(k_1 - \lambda_1)(v_1 - 2k_1)^2(k_2 - \lambda_2)(v_2 - 2k_2)^2} \sigma^2. \quad (3.117)$$

Для оптимального значения k справедливо выражение (3.116).

3.4.4. Оптимизация на классе $(-1, 0, 1)$ -матриц. Рассмотрим оптимизацию кодирующих устройств, созданных на базе ТП построчным и диагональным способами (см. раздел 3.1). Обозначим общее количество ненулевых элементов в ТП через k . Тогда для критериев оптимальности получим:

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{1}{k^v} \prod_{i=1}^v \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2 \right) \\ P_A &= \frac{1}{k} \left(v \sigma_0^2 + k \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right) \\ P_E &= \frac{1}{k} \max_{i=1,2,\dots,v} \left\{ \sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v |a_{in}| \sigma_n^2 \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.118)$$

Минимум P_A -критерия достигается при максимально возможном k . P_D - и P_E -критерии зависят от вида распределения дисперсий источника излучения. Тем не менее в случае равномерного распределения результат для всех трёх критериев будет совпадать. Для более сложных распределений вида (3.90) имеем

$$\left. \begin{aligned} P_D &= \frac{1}{k^v} (\sigma_0^2 + k \sigma_p^2 + \sigma_g^2 - \sigma_p^2)^k (\sigma_0^2 + k \sigma_p^2)^{v-k} \\ P_E &= \frac{1}{k} \max \left\{ (\sigma_0^2 + k \sigma_p^2 + \sigma_g^2 - \sigma_p^2), (\sigma_0^2 + k \sigma_p^2) \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (3.119)$$

Для определения оптимальных значений k в случае P_D -критерия получим следующее уравнение:

$$k \left[\frac{kv}{\varepsilon(t+v) + v(t+k)} + \frac{v(v-k)}{\varepsilon t + v(t+k)} + \ln \left(1 + \frac{v\varepsilon}{tv + t\varepsilon + kv} \right) \right] - v = 0, \quad (3.120)$$

которое может быть решено численно. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеет место равенство $k = v / \ln(1 + v/t)$.

В случае P_E -критерия оптимальным является максимально возможное значение k .

Дисперсия оценки отдельного элемента источника определяется по формуле:

$$(d_{\xi}^-)_{jj} = \frac{1}{k} \left[\sigma_0^2 + \frac{v-k}{v-1} \sigma_j^2 + \frac{k-1}{v-1} \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right]. \quad (3.121)$$

3.4.5. Геометрические коды. Двумерные кодовые таблицы на основе геометрических кодов (ГК) представляют собой квадратные таблицы размерностью $v = n \times n$ с элементами 0 и 1 (см. раздел 3.1). В коде типа 1 единицы расположены в первой строке и в первом столбце, за исключением углового элемента, расположенного на их пересечении. Код типа 2 имеет по сравнению с кодом типа 1 дополнительную диагональ из единиц. В коде типа 3 добавляется ещё одна диагональ, причём код типа 3 существует только для нечётных n . Декодирующие таблицы для кодов всех типов строятся из кодирующих таблиц заменой углового элемента на число α , нулей на число β и оставлением единиц на своих местах. Для ГК типов 1, 2 и 3, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-n^2 + 5n - 5}{n - 2}; & \beta &= \frac{1}{2 - n} \\ \alpha &= \frac{n^2 - 7n + 8}{3 - n}; & \beta &= \frac{2}{3 - n} \\ \alpha &= \frac{n^2 - 9n + 11}{4 - n}; & \beta &= \frac{3}{4 - n} \end{aligned} \right\}. \quad (3.122)$$

Так как кодирующие коллиматоры, построенные на основе ГК, имеют фиксированное пропускание, то оптимизация может заключаться только в выборе одного из трёх типов ГК. Приведём выражения для суммарной дисперсии оценок элементов источника излучения при использовании ГК:

$$\sum_{j=1}^v (d_{\xi}^-)_{jj} = \frac{w_1}{k^2} \left[v\sigma_0^2 + k \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right], \quad (3.123)$$

где для ГК типов 1, 2 и 3, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \alpha^2 + (n-1)^2\beta^2 + 2(n-1); & k &= 2(n-1) \\ w_1 &= \alpha^2 + (n-1)(n-2)\beta^2 + 3(n-1); & k &= 3(n-1) \\ w_1 &= \alpha^2 + (n-1)(n-3)\beta^2 + 4(n-1); & k &= 4(n-1) \end{aligned} \right\}. \quad (3.124)$$

Аналогично для дисперсий оценок отдельных элементов источника излучения имеем

$$(d_{\xi}^-)_{jj} = \frac{1}{k^2} \left[w_1\sigma_0^2 + k\sigma_j^2 + w_2 \sum_1 \sigma_n^2 + w_3 \sum_2 \sigma_n^2 \right], \quad (3.125)$$

где $\sum_1$ и $\sum_2$ — суммы по позициям элементов, в которых расположены соответственно 1 и β в декодирующей таблице; для ГК типов 1, 2 и 3, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= \alpha^2 + 2(n-1)\beta^2 + n - 2; & w_3 &= 2(n-2)\beta^2 + 1 \\ w_2 &= \alpha^2 + 2(n-2)\beta^2 + n; & w_3 &= 3(n-3)\beta^2 + 2 \\ w_2 &= \alpha^2 + 3(n-3)\beta^2 + n + 4; & w_3 &= 4(n-4)\beta^2 + 3 \end{aligned} \right\}. \quad (3.126)$$

В таблице 3.15 приведены числовые характеристики различных кодов, позволяющих построить кодирующие коллиматоры с приблизи-

Таблица 3.15. Дисперсии результатов при использовании различных кодов

№ п.п.	Вид кода	v	k	$a\sigma_{n_0}^2$	$b \sum_{i=1}^v \sigma_i^2$	$c\sigma_0^2$	$d \sum_{i=1}^v \sigma_i^2$	$(1/v)P_A$		
								$t = 100$	$t = 10$	$t = 1$
1	(0,1)-ПСТ	1023	30	32,35	1,95	34,27	2,01	8,71	2,68	2,08
2	(0,1)-ПСТ	1023	88	10,31	2,11	12,41	2,13	4,56	2,38	2,16
3	(0,1)-ПСТ	1023	236	2,97	2,53	5,50	2,54	3,61	2,64	2,55
4	(0,1)-ПСТ	1023	512	0,00	3,91	3,90	3,90	4,67	3,98	3,91
5	(0,1)-PNP	961	6	165,63	2,08	194,44	2,43	42,90	6,47	2,83
6	(0,1)-PNP	961	9	110,05	2,13	121,95	2,28	27,66	4,82	2,54
7	(0,1)-PNP	961	36	26,32	2,92	37,81	2,83	10,70	3,62	2,91
8	(0,1)-PNP	961	225	0,80	7,29	14,67	6,87	9,92	7,17	6,90
9	(-1,1)-ПСТ	1023	496	0,00	1,96	0,98	1,96	2,15	1,97	1,96
10	(-1,1)-ПСТ	1023	512	0,00	3,91	1,95	3,91	4,29	3,94	3,91
11	(-1,1)-PNP	961	169	0,00	2,09	1,04	2,08	2,30	2,11	2,09
12	(-1,1)-PNP	961	256	0,00	7,81	3,90	7,81	8,63	7,89	7,82
13	(-1,0,1)-ТП	993	961	0,03	2,01	1,04	2,01	2,22	2,04	2,02
14	(0,1)-ГК1	961	60	16,70	$226 \sum_1 + 0,58 \sum_2$	235,00	14,60	61,60	19,30	15,10
15	(0,1)-ГК2	961	90	11,10	$93 \sum_1 + 0,79 \sum_2$	102,00	9,52	29,92	11,60	9,75
16	(0,1)-ГК3	961	120	8,33	$48,3 \sum_1 + 0,93 \sum_2$	54,90	6,85	17,83	7,95	6,96
17	(0,1)-I	1023	1	1000,00	0,00	1000,00	1,96	197,46	21,51	3,91

Примечания.

1. Взятая распределение дисперсий источников излучения (3.90) при $(v-1)\sigma_p^2 = \sigma_g^2 = 1000$.2. Дисперсии отдельного элемента приведены для $\sigma_0^2 = 1000$.3. $(d_{\xi}^-)_{n_0 n_0} = a\sigma_{n_0}^2 + b \sum_{i=1}^v \sigma_i^2 + c\sigma_0^2$; $(1/v)P_A = d \sum_{i=1}^v \sigma_i^2 + c\sigma_0^2$.

тельно одинаковыми размерами. Для расчёта значений дисперсии отдельного элемента взято распределение типа (3.90) с $\sigma_0^2 = (v-1)\sigma_p^2 = \sigma_g^2 = 1000$. В то же время значения средней дисперсии $(1/v)P_A$, не зависящие от вида распределений дисперсий источника излучения, приведены для трёх значений отношения дисперсии помехи к средней дисперсии источника излучения ($t = 1, 10$ и 100). В последней строке таблицы для сравнения приведены характеристики традиционного эксперимента (матрица плана — единичная диагональная), являющегося частным случаем ПСП с $k = 1$, и самоподдерживающейся *PNP*-таблицы с $k_1 = k_2 = 1$. Отметим также, что самоподдерживающиеся *PNP*-таблицы с размерностью 31×31 могут быть построены с $k = 1, 6, 15, 16, 25, 30, 36, 90, 96, 150, 180, 225, 240, 256, 375, 400, 480, 625, 750, 900$. Данные таблицы 3.15 позволяют легко сравнить различные коды и выбрать среди них наилучший.

Предложенный подход, использующий общие метрологические критерии математической теории планирования эксперимента и учитывающий статистические свойства измеряемых величин, позволяет выбирать кодирующие устройства при использовании ИКСИ в физическом эксперименте в зависимости от решаемой задачи. В рамках предложенного подхода получены оптимальные значения среднего пропуска кодированных устройств на классе $(0, 1)$ -матриц в зависимости от соотношения статистических характеристик исследуемого распределения источников излучения и помех, накладывающихся на измерения. Оптимальные значения среднего пропуска кодированных устройств на классе $(-1, 1)$ -матриц не зависят от исследуемого распределения источников излучения и помех, накладывающихся на измерения. Сравнение различных кодов в рамках рассмотренного подхода обеспечивает широкие возможности для выбора наилучших кодирующих устройств.

3.5. Восстановление трёхмерных распределений источников излучения методом фокусных плоскостей

Рассмотрим более подробно применение МФП, описываемого системой уравнений (3.22), для восстановления трёхмерных объектов [11, 266]. Для расстояний L_{ij} от детектора до j -й плоскости в i -м измерении, при условии, что плоскости пронумерованы по порядку, начиная с ближайшей к детектору, справедливо выражение

$$L_{ij} = f + (j - i)\Delta L, \quad i, j = 1, 2, \dots, M, \quad (3.127)$$

где ΔL — расстояние между плоскостями.

Учитывая в явном виде геометрическое ослабление, эффект наклона падения излучения на детектор и поглощение излучения в среде,

систему уравнений (3.22) можно переписать в виде

$$\vec{\zeta}^{(i)} = \frac{1}{f^2} \hat{A}^{(i)} \vec{\zeta}^{(i)} + \sum_{\substack{i'=1 \\ i' \neq i}}^M \frac{1}{L_{ii'}^2} \hat{C}^{(ii')} \vec{\zeta}^{(i')}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.128)$$

Элементы матриц $\hat{A}^{(i)}$ и $\hat{C}^{(ii')}$ связаны с элементами матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}^{(ii')}$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} a_{mn}^{(i)} &= a_{mn} \cos^3 \vartheta_{mn} \exp \left(-\frac{\mu(f - l_{\mu}^{(i)})}{\cos \vartheta_{mn}} \right) \\ c_{mn}^{(ii')} &= b_{mn}^{(ii')} \cos^3 \vartheta_{mn}^{(ii')} \exp \left(-\frac{\mu(L_{ii'} - l_{\mu}^{(i)})}{\cos \vartheta_{mn}^{(ii')}} \right) \end{aligned} \right\}, \quad m, n = 1, 2, \dots, v, \quad (3.129)$$

где $\vartheta_{mn}^{(ii')}$ — угол падения гамма-квантов на плоскость детектора в ячейку, соответствующую компоненте m вектора $\vec{\zeta}^{(i)}$, испущенных из ячейки i' -й внефокусной плоскости источника, соответствующей компоненте n вектора $\vec{\zeta}^{(i')}$, в i -м измерении; ϑ_{mn} — аналогичный угол для фокусной плоскости; $l_{\mu}^{(i)} = l_{\mu} - (i - 1)\Delta L$. При этом для простоты считается, что коэффициент ослабления излучения μ постоянен во всём объёме объекта, причём объект дополнен эквивалентным материалом до стандартной формы параллелепипеда с гранью, параллельной плоскости детектора и находящейся на расстоянии l_{μ} от детектора в первом измерении.

Для сфокусированных изображений $\vec{\xi}^{(i)}$ вместо (3.23) можно записать более точное выражение

$$\vec{\xi}^{(i)} = f^2 e^{\mu(f - l_{\mu}^{(i)})} \hat{A}^{-1} \vec{\zeta}^{(i)}. \quad (3.130)$$

Объединяя M векторов $\vec{\zeta}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) порядка v в один вектор $\vec{p} = (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \dots, \xi_v^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_v^{(2)}, \dots, \xi_1^{(M)}, \xi_2^{(M)}, \dots, \xi_v^{(M)})$ порядка Mv , а M векторов $\vec{\zeta}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, M$) порядка v в один вектор $\vec{q} = (\zeta_1^{(1)}, \zeta_2^{(1)}, \dots, \zeta_v^{(1)}, \zeta_1^{(2)}, \zeta_2^{(2)}, \dots, \zeta_v^{(2)}, \dots, \zeta_1^{(M)}, \zeta_2^{(M)}, \dots, \zeta_v^{(M)})$ порядка Mv , систему матричных уравнений (3.128) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\vec{q} = \hat{H} \vec{p}. \quad (3.131)$$

Блочная матрица $\hat{H} = (h_{ii'}, i, i' = 1, 2, \dots, Mv)$ имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} \hat{A}^{(1)} & \frac{1}{L_{12}^2} \hat{B}^{(12)} & \frac{1}{L_{13}^2} \hat{B}^{(13)} & \dots & \frac{1}{L_{1M}^2} \hat{B}^{(1M)} \\ \frac{1}{L_{21}^2} \hat{B}^{(21)} & \frac{1}{f^2} \hat{A}^{(2)} & \frac{1}{L_{23}^2} \hat{B}^{(23)} & \dots & \frac{1}{L_{2M}^2} \hat{B}^{(2M)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{L_{M1}^2} \hat{B}^{(M1)} & \frac{1}{L_{M2}^2} \hat{B}^{(M2)} & \frac{1}{L_{M3}^2} \hat{B}^{(M3)} & \dots & \frac{1}{f^2} \hat{A}^{(M)} \end{pmatrix}. \quad (3.132)$$

Так как матрица $\hat{H}$ имеет очень большой порядок (например, для $v = 41 \times 43$ и $M = 5$ получаем $Mv = 8815$), для решения системы уравнений (3.131) необходимо использовать итерационные алгоритмы, не требующие численного обращения матриц высокого порядка. Например, для метода простой итерации с симметризацией матрицы $\hat{H}$ [37–40] итерации осуществляются по формуле

$$p_i^{(n+1)} = p_i^{(n)} + \alpha_n \frac{\sum_{i'=1}^{Mv} h_{i'i} [q_{i'} - \sum_{i''=1}^{Mv} h_{i'i''} p_{i''}^{(n)}]}{\sum_{i'=1}^{Mv} h_{i'i}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, Mv, \quad (3.133)$$

где $p_i^{(n)}$ — i -я компонента вектора n -го приближения $\vec{p}^{(n)}$, q_i — i -я компонента вектора $\vec{q}$, α_n — коэффициент релаксации. Начальное приближение $\vec{p}^{(0)}$ определяется сфокусированными изображениями (3.130).

Для метода скорейшего спуска (см. гл. 1) итерации выполняются по формуле:

$$\vec{p}^{(k+1)} = \vec{p}^{(k)} + \frac{[\vec{r}^{(k)}]^T \hat{H} \hat{H}^T \vec{r}^{(k)}}{[\vec{r}^{(k)}]^T \hat{H} \hat{H}^T \hat{H} \hat{H}^T \vec{r}^{(k)}} \hat{H}^T \vec{r}^{(k)}, \quad (3.134)$$

где $\vec{r}^{(k)}$ — вектор невязки, т.е. $\vec{r}^{(k)} = \vec{q} - \hat{H} \vec{p}^{(k)}$.

Наконец, для метода направленного расхождения [267] итерационная схема выглядит следующим образом:

$$p_i^{(n+1)} = p_i^{(n)} \frac{\sum_{i'=1}^{Mv} \frac{h_{i'i}}{\sum_{i''=1}^{Mv} h_{i'i''} p_{i''}^{(n)}}}{\sum_{i'=1}^{Mv} \frac{h_{i'i}}{q_{i'}}}, \quad i = 1, 2, \dots, Mv. \quad (3.135)$$

Схема (3.135) минимизирует функционал направленного расхождения [264]:

$$\Xi(\vec{p}) = \sum_{i=1}^{Mv} \lg \left(\frac{\sum_{i'=1}^{Mv} h_{ii'} p_{i'}}{q_i} \right). \quad (3.136)$$

Нетрудно видеть, что минимум функционала (3.136) достигается на решении системы (3.131). При этом существенно используется неотрицательность как элементов матрицы $\hat{H}$, так и компонент вектора $\vec{p}$.

Для сходимости итерационного процесса большое значение имеет вид аппаратной функции кодирующего коллиматора, которая определяет свойства матрицы $\hat{H}$. Чем меньше амплитуда ложных пиков в АФ, тем больше преобладание диагональных элементов матрицы $\hat{H} \hat{H}^T$

над остальными элементами, и следовательно, тем быстрее сходимость итерационного процесса.

Для исследования характеристик МФП был разработан программный комплекс для персональной ЭВМ IBM PC. Сначала для заданного пространственного распределения источников излучения моделируется процесс измерений с кодирующим коллиматором и ПЧД. Полученные данные затем обрабатываются в соответствии с методом фокусных плоскостей. В этом же режиме рассчитываются аппаратные функции ИКСИ. Кроме того, формируются полутоновые изображения в цветной и серой шкале и цифровые портреты с градацией на 10 уровней. В режиме обработки экспериментальных данных вместо смоделированных используются измеренные данные.

Сравним расчётную аппаратную функцию с АФ, полученной в реальном физическом эксперименте. Физические эксперименты проводились с кодирующим коллиматором на основе ПСТ17 $\times$ 19-Д [11]. В качестве ПЧД использовался детектор гамма-камеры *Nuclear Chicago Pho Gamma IV*. Коллиматор представлял собой сэндвич в форме диска, склеенный из листового свинца толщиной 1,2 мм, поглощающего излучение радионуклида, дюралюминия толщиной 1,5 мм и текстолита толщиной 2 мм, практически прозрачных для излучения. Дюралюминий и текстолит обеспечивали крепление узора из свинца и жёсткость конструкции. Для экспериментов использовался короткоживущий радионуклид Tc^{99m} с энергией гамма-квантов $E_\gamma = 140$ кэВ, при этом толщина свинца 1,2 мм обеспечивала поглощение около 97% излучения. Размеры элементарной ячейки коллиматора были выбраны равными $4,6 \times 4,6$ мм, а элементарной ячейки ПЧД $9,5 \times 9,5$ мм в соответствии с невысоким собственным разрешением детектора.

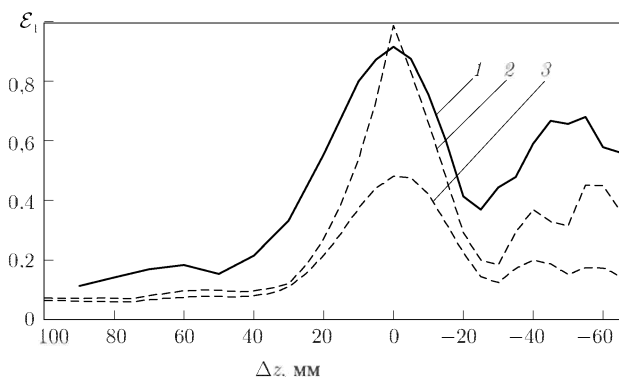


Рис. 3.39. Аппаратные функции для ПСТ17 $\times$ 19-Д, полученные в физическом эксперименте (1), а также в численном эксперименте для точечного элементарного источника без учёта фактора наклонного падения излучения (2) и для распределённого элементарного источника с учётом фактора наклонного падения излучения (3)

Полученная в физическом эксперименте аппаратная функция представлена на рисунке 3.39 вместе с АФ, полученной при численном расчёте в аналогичных условиях. Глубинное разрешение $\delta_z = 35$ мм в физическом эксперименте больше глубинного разрешения $\delta_z = 25$ мм в численном эксперименте за счёт влияния собственного разрешения ПЧД, а также влияния фактора наклонного падения излучения на ПЧД и конечных размеров источника (~ 2 мм). Для сравнения приведена АФ, рассчитанная для распределённого элементарного источника с учётом фактора наклонного падения излучения. На рисунке 3.40

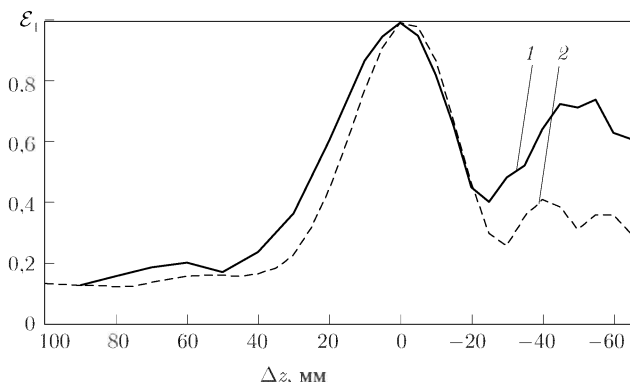


Рис. 3.40. Нормированные аппаратные функции для ПСТ17 × 19-Д, полученные в физическом эксперименте (1) и в численном эксперименте для распределённого элементарного источника с учётом фактора наклонного падения излучения (2)

приведены АФ, нормированные на единицу в фокусной плоскости. Обращает на себя внимание тот факт, что вклад внефокусных плоскостей в физическом эксперименте существенно больше, чем при расчёте. Это, по-видимому, так же обусловлено плохим собственным разрешением ПЧД.

Рассмотрение АФ ИКСИ позволяет предсказывать некоторые результаты восстановления трёхмерных распределений источников излучения. На рисунке 3.41 показаны АФ трёх кодирующих коллиматоров. Анализируя, например, АФ ПСТ40 × 40-С, можно сделать вывод: представление о том, что сфокусированные изображения будут тем ближе к истинным, чем больше расстояние между плоскостями в трёхмерном источнике, не точно. Например, критерии близости (3.62), (3.63) сфокусированных изображений к истинным для распределения типа “цифры” (четвёртый тип, см. раздел 3.2.3) лучше для расстояния между плоскостями 25 мм, чем для расстояния 35 мм (табл. 3.16).

В то же время, сравнивая АФ ПСТ40 × 40-С, ПСТ41 × 43-Д и ПСТ41 × 43-П, можно сделать вывод о предпочтительности ПСТ41 × 43-П. Действительно, критерии близости (3.62), (3.63) сфокусиро-

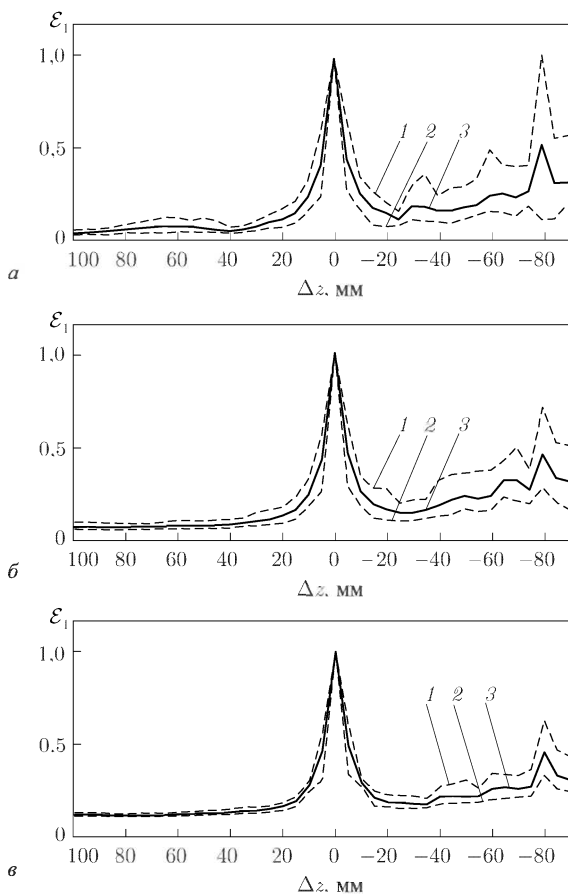


Рис. 3.41. Аппаратные функции для ИКСИ, построенных на основе ПСТ40 $\times$ 40-С (а), ПСТ41 $\times$ 43-Д (б), ПСТ41 $\times$ 43-П (в): 1 — $\mathcal{E}_1^{(u)}(\Delta z)$, 2 — $\mathcal{E}_1^{(d)}(\Delta z)$, 3 — $\mathcal{E}_1^{(m)}(\Delta z)$

ванных изображений к истинным для этих трёх коллиматоров и того же распределения источников излучения с расстоянием между плоскостями 35 мм лучше для ПСТ41 $\times$ 43-П (табл. 3.17). На рисунке 3.42 приведены соответствующие таблицы 3.17 цифровые портреты сфокусированных изображений в третьей плоскости для коллиматоров на основе ПСТ40 $\times$ 40-С, ПСТ41 $\times$ 43-Д и ПСТ41 $\times$ 43-П (с отсечкой на 50% уровне). Как уже отмечалось, наиболее информативно представление высококонтрастных изображений с малой дискретностью именно в виде цифрового портрета с градацией на 10 уровней. При этом каждая точка представлена в виде цифры n ($n = 1, 2, \dots, 9$), соответствующей уровню яркости от $0,1n$ до $0,1(n+1)$ относительно максимальной.

Таблица 3.16. Критерии близости сфокусированных изображений к истинным для ПСТ40 × 40-С

Критерий	Расстояние между плоскостями		
	15 мм	25 мм	35 мм
D_1	0,104	0,095	0,085
R_1	0,070	0,071	0,066
E_1	0,692	0,502	0,376
D_2	0,127	0,137	0,150
R_2	0,082	0,099	0,111
E_2	0,728	0,575	0,709
D_3	0,155	0,186	0,266
R_3	0,114	0,146	0,207
E_3	0,738	0,701	1,160
D_0	0,129	0,139	0,167
R_0	0,089	0,106	0,128
E_0	0,720	0,592	0,749

Таблица 3.17. Критерии близости сфокусированных изображений к истинным для расстояния между плоскостями 35 мм

Критерий	Тип коллиматора		
	ПСТ40 × 40-С	ПСТ41 × 43-Д	ПСТ41 × 43-П
D_1	0,085	0,078	0,80
R_1	0,066	0,062	0,062
E_1	0,376	0,446	0,454
D_2	0,150	0,135	0,129
R_2	0,111	0,102	0,100
E_2	0,709	0,560	0,498
D_3	0,266	0,240	0,234
R_3	0,207	0,176	0,180
E_3	1,160	1,250	0,963
D_0	0,167	0,151	0,148
R_0	0,128	0,113	0,114
E_0	0,749	0,735	0,638

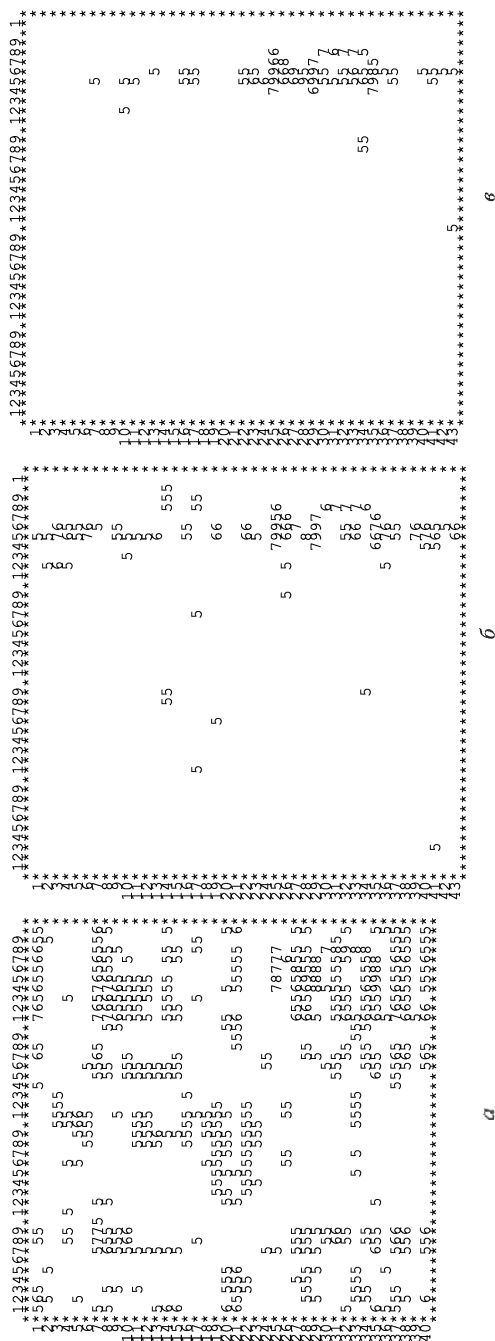


Рис. 3.42. Сфокусированное изображение в третьей плоскости для коллиматоров на основе ПСТ40 × 40-С (а), ПСТ41 × 43-Д (б) и ПСТ41 × 43-П (в)

Отсечка (изображение пробелами) производится либо для наименьшего уровня яркости, либо для заданного уровня.

Исследование эффективности трёх итерационных схем (3.133)–(3.135) показало неперспективность метода простой итерации с симметризацией исходной матрицы, который практически останавливался после нескольких итераций [11]. В то же время метод скорейшего спуска (МСС) и метод направленного расхождения (МНР) продемонстрировали хоть и медленную, но устойчивую сходимость к истинному решению. На рисунке 3.43 показаны зависимости критериев близости

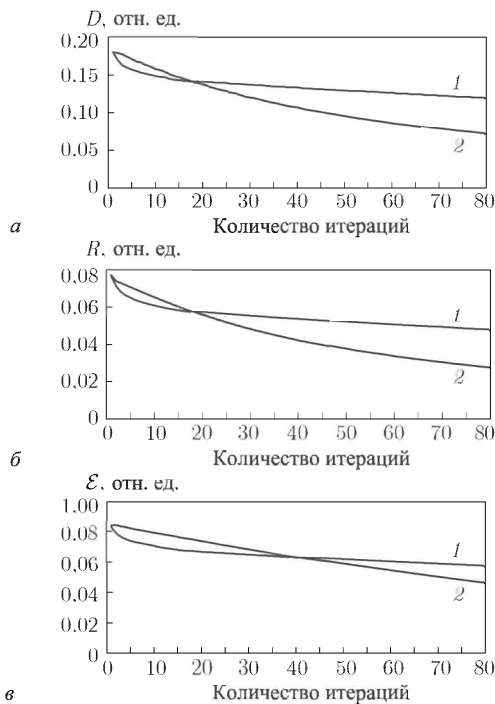


Рис. 3.43. Зависимости критериев близости восстановленных изображений к истинным от количества итераций для метода скорейшего спуска (1) и метода направленного расхождения (2)

восстановленных изображений к истинным (3.63) от количества итераций для ПСТ20 × 20-П. Для восстановления было взято трёхмерное распределение в виде трёх плоскостей, в каждой из которых изображена одна из арабских цифр 1, 2 и 3. Интересно, что на первых 20–40 итерациях МСС работает эффективнее МНР, а затем наоборот. Для иллюстрации на рисунке 3.44 показаны истинные и сфокусированные изображения, а на рисунках 3.45–3.49 — полученные после 5, 10, 20, 40 и 80 итераций изображения.

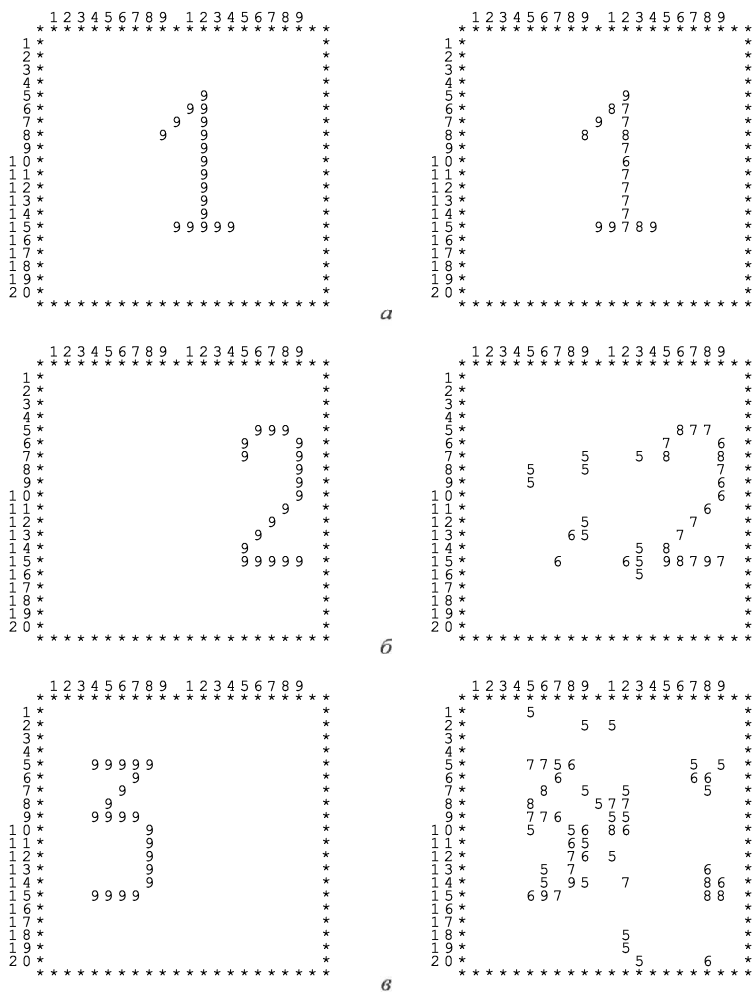


Рис. 3.44. Истинные (слева) и сфокусированные (справа) изображения в первой (а), второй (б) и третьей (в) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

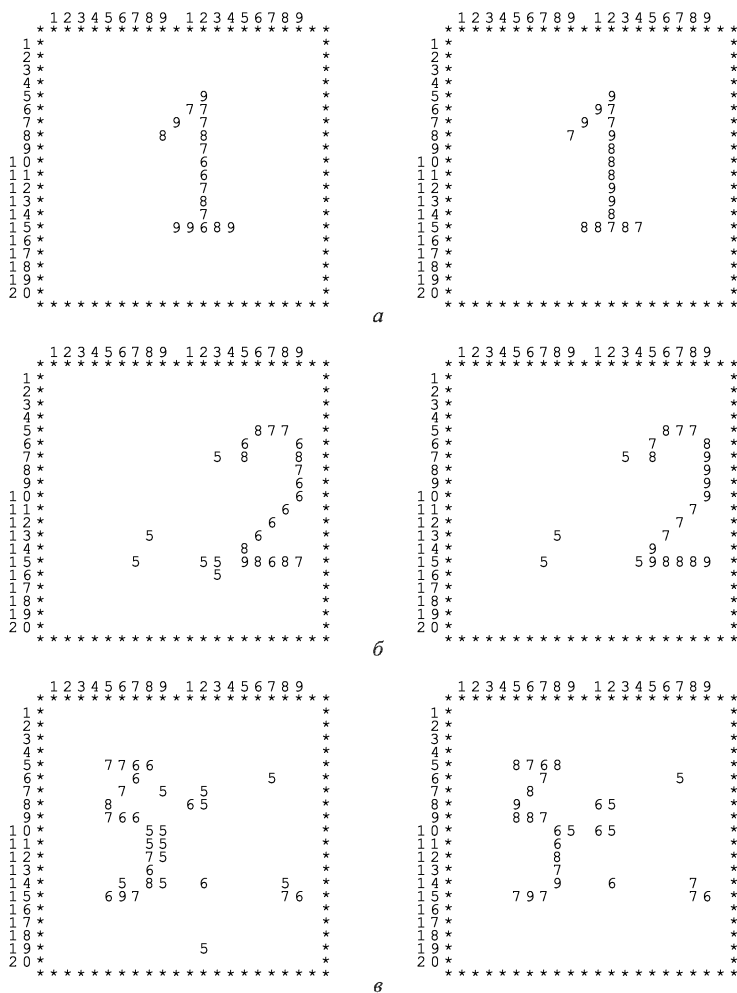


Рис. 3.45. Изображения, полученные после 5 итераций для МСC (слева) и МНР (справа) в первой (а), второй (б) и третьей (в) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

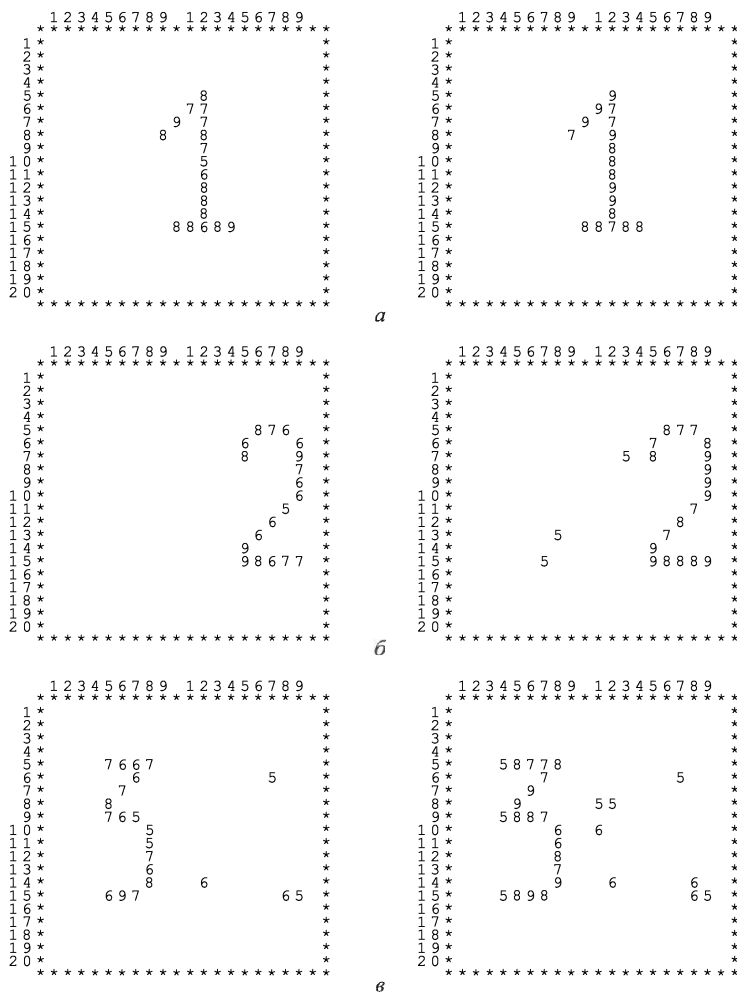


Рис. 3.46. Изображения, полученные после 10 итераций для МСС (слева) и МНР (справа) в первой (*a*), второй (*б*) и третьей (*в*) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

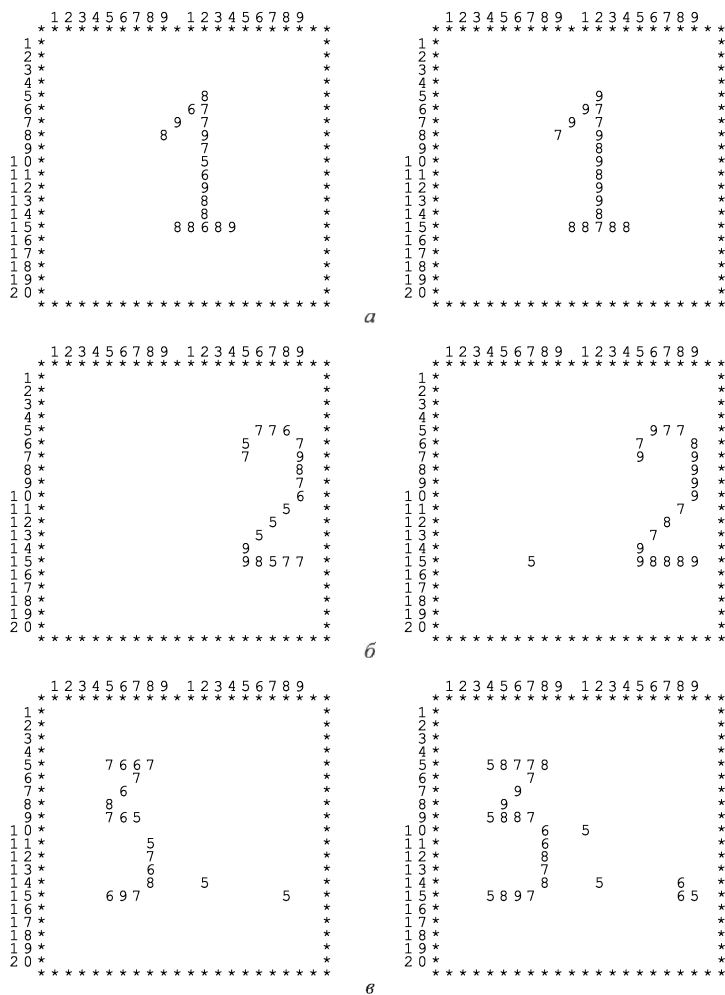


Рис. 3.47. Изображения, полученные после 20 итераций для МСС (слева) и МНР (справа) в первой (а), второй (б) и третьей (в) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

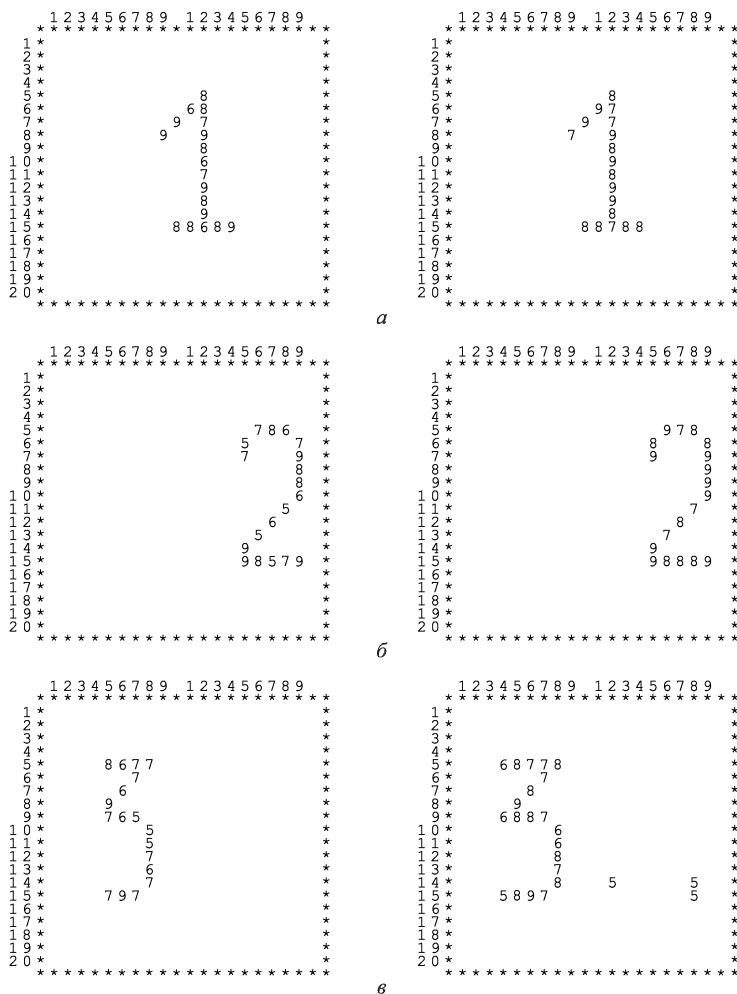


Рис. 3.48. Изображения, полученные после 40 итераций для МСС (слева) и МНР (справа) в первой (а), второй (б) и третьей (в) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

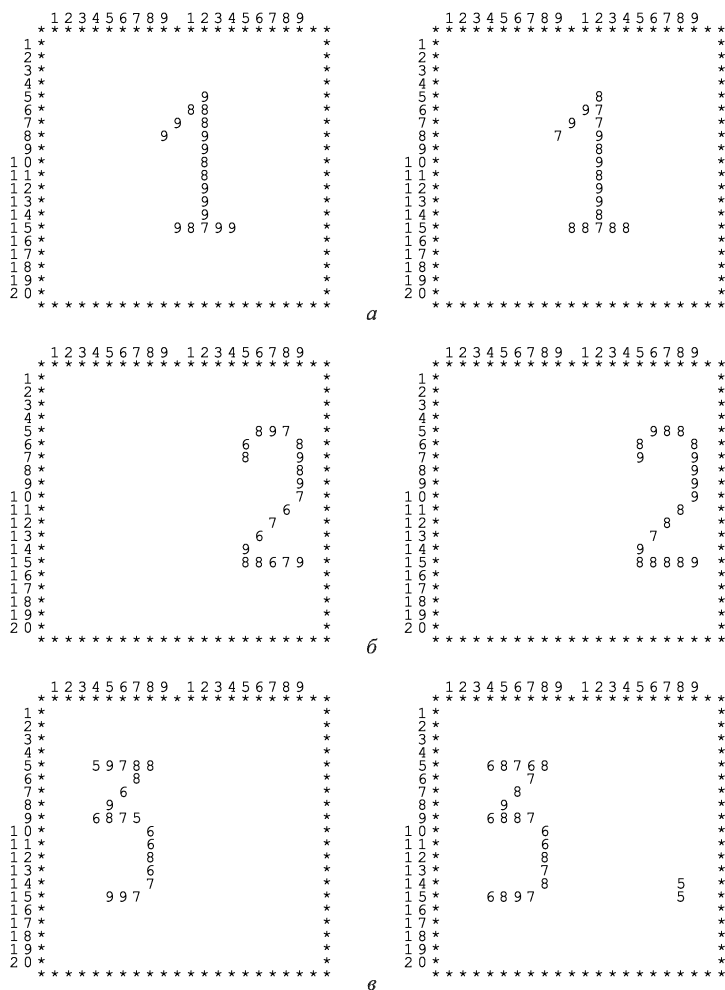


Рис. 3.49. Изображения, полученные после 80 итераций для МСC (слева) и МНР (справа) в первой (а), второй (б) и третьей (в) плоскостях (счёт от детектора) для ПСТ20 × 20-П и расстояния между плоскостями 3,2 см

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Традиционные методы вычислительной томографии, опирающиеся на круговую геометрию измерений, являются хорошо развитым аппаратом восстановления пространственных распределений коэффициента поглощения чисто поглощающих сред или пространственных распределений источников излучения в однородных чисто поглощающих средах. С другой стороны, им присущ и ряд специфических проблем, к настоящему времени не решённых или решённых недостаточно эффективно [11, 17, 18]. Например, в ТВТ одна из проблем связана с немонохроматичностью зондирующего рентгеновского излучения [55, 56]. Поскольку реконструируемый в рентгеновской томографии коэффициент ослабления излучения является функцией энергии падающего излучения, то получаемое в результате восстановления изображение не соответствует ни коэффициенту ослабления, ни тем более плотности вещества объекта. Впрочем для целей медицинской диагностики более важным является не соответствие изображения какой-либо конкретной физической характеристике, а устойчивая воспроизводимость и связь параметров изображения с нормой и патологией организма.

Другая проблема связана с рассеянием излучения в веществе. Если при одиночном тонком зондирующем пучке эта проблема не столь существенна, т. к. рассеивающие свойства среды можно включить в определение коэффициента ослабления, что слабо влияет на практическую значимость томографического подхода, а вероятность регистрации многократно рассеянного излучения незначительна, то в томографах последних поколений с широкими пучками эта вероятность гораздо выше и может привести к заметным искажениям изображения [57].

Заметим, что обе вышеописанные трудности могут быть сведены к нелинейности в описании процессов регистрации и обработки полученных данных [56]. Следующая проблема ТВТ заключается в специфических артефактах в виде полос в местах резкого перепада физических характеристик, например плотности объекта, что приводит к ошибкам при диагностике [57].

Проблемы разной степени трудности возникают при недостатке исходных данных в случае усечённых проекций и полых проекций, а также неполноты данных по углу сканирования [32]. Существуют проблемы, связанные с расходимостью рентгеновского пучка [58]. Кроме того результаты восстановления сильно зависят от дискретизации по ξ и ϑ и уровня квантования отсчётов в проекции [59]. Большое значение

имеет общая некорректность с математической точки зрения задачи восстановления по проекциям [49, 60].

Перечисленные проблемы действуют одновременно и часто усиливают друг друга, что ещё более усложняет задачу качественной томографической реконструкции.

По существу почти все проблемы трансмиссионной томографии в той или иной степени присутствуют и в эмиссионной радионуклидной томографии [11, 18, 47], но есть и специфичные именно для этого вида вычислительной томографии [62–64]. Прежде всего это более сильные статистические флуктуации, искажающие результаты измерений. Связано это как с недостаточностью количества зарегистрированных гамма-квантов, так и с увеличением помех из-за пробоя коллиматора [65].

Так как в ЭВТ, как правило, используются ПЧД, большое значение имеет проблема однородности разрешения и эффективности регистрации по площади детектора [66–68]. Далее, проблемы, связанные с расходимостью поля зрения канала многоканального коллиматора или пинхола, значительно более серьёзны [69].

Как уже отмечалось, до сих пор не решена проблема учёта геометрического ослабления в круговой геометрии. Существуют погрешности, связанные с неточностью определения коэффициента ослабления излучения и, следовательно, с неточностью его коррекции. Поскольку источниками излучения являются инкорпорированные радионуклиды с небольшим периодом полураспада, необходимо учитывать также изменение активности во времени [63, 64]. Так же как и в ТВТ, все эти факторы действуют одновременно, что усложняет анализ их влияния.

При описании традиционных методов вычислительной томографии не были затронуты вопросы, связанные с описанием веерных проекций, как в ТВТ, так и в ЭВТ, поскольку с помощью реорганизации исходных данных веерные проекции сводятся к параллельным проекциям. В то же время детали оперирования непосредственно веерными проекциями достаточно подробно рассмотрены в литературе, включая использование плоских и искривлённых детекторов [70–72].

В области ТВТ развитие происходит, в частности, в направлении разработки методов томографической реконструкции характеристик рассеивающих сред. В томографии рассеивающих сред неприменимы разработанные для случая чисто поглощающих сред методы, опирающиеся на обратное преобразование Радона, прежде всего, из-за отсутствия простых соотношений, описывающих взаимодействие излучения с веществом типа закона экспоненциального ослабления излучения, а также вследствие необходимости одновременной реконструкции нескольких неизвестных пространственных функций. Применение интегро-дифференциального нестационарного уравнения переноса излучения в качестве фундамента для разработки томографии рассеивающих сред можно считать дальнейшим развитием применяемого в томографии математического аппарата. В основу томографических

алгоритмов могут быть положены различные приближения уравнения переноса излучения. Однако до получения достаточно простых и эффективных алгоритмов томографического восстановления пространственно неоднородных характеристик рассеивающих сред ещё далеко.

Среди других подходов к томографическому восстановлению характеристик рассеивающих сред перспективной оказалась нестационарная осевая (двухпотоковая) модель переноса излучения в неоднородной рассеивающей среде. В случае зондирования среды точечным мононаправленным источником излучения, соответствующим геометрической схеме измерений в трансмиссионной томографии, основное уравнение нестационарной двухпотоковой модели имеет вид дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа с соответствующими начальными и граничными условиями. При этом экспериментальная проверка показала достаточную адекватность нестационарной осевой модели процессу переноса излучения импульсного лазера через сильнорассеивающую среду.

В рамках нестационарной осевой модели переноса излучения возможно одновременное восстановление двух пространственно неоднородных характеристик рассеивающей среды — коэффициента поглощения и коэффициента рассеяния, при условии регистрации временного распределения прошедшего через рассеивающую среду импульсного излучения в круговой геометрии измерений с параллельными проекциями. В случае пропорциональной рассеивающей среды можно свести нахождение коэффициентов поглощения и рассеяния к одной характеристике. В настоящее время пропорциональная среда является, по-видимому, единственным примером СРС, для которой есть точное решение задачи томографической реконструкции, обеспечивающее непрерывный переход от чисто поглощающей среды к рассеивающей среде.

В области ЭВТ одним из наиболее интересных направлений является использование ИКСИ, в частности плоских многопинхольных кодирующих коллиматоров. В части развития математического аппарата можно отметить использование современной комбинаторной математики, отдельных теоретико-числовых результатов, (v, k, λ) -матриц и аппарата описания двоичных и троичных одномерных последовательностей и двумерных таблиц. При использовании кодирующих коллиматоров, в отличие от методов эмиссионной вычислительной томографии, опирающихся на круговую геометрию измерений, не обязательно наблюдение излучающего объекта со всех возможных направлений. Поэтому применение кодирующих коллиматоров для некоторых задач является единственно возможным решением.

Однако развитие этого направления сдерживается отсутствием эффективных средств анализа томографических свойств кодирующих коллиматоров, а также трудностями построения двумерных кодирующих устройств произвольной размерности, в частности для наиболее перспективного класса — многопинхольных кодирующих коллимато-

ров. При этом полезными оказываются понятия нижней, верхней и средней аппаратных функций кодирующего коллиматора, помогающие сравнивать различные коллиматоры и оптимизировать их конструкцию. Для оптимизации среднего пропускания кодирующих многопинхольных коллиматоров с учётом статистических характеристик как самих измеряемых величин, так и помех, накладывающихся на результаты измерений, можно также использовать критерии A -, D - и E -оптимальности математической теории оптимального эксперимента.

Кодирующие коллиматоры различных размерностей можно строить на основе обобщённых псевдослучайных последовательностей, включающих в себя все известные бинарные псевдослучайные последовательности.

Метод фокусных плоскостей в совокупности с итерационными алгоритмами позволяет, в принципе, решить задачу полного восстановления трёхмерных распределений источников излучения за счёт исключения вклада внефокусных плоскостей.

Вычислительная томография находится в непрерывном развитии. Совершенствуются алгоритмы реализации уже разработанных видов томографии, используются новые виды излучений для получения исходной информации, включаются в рассмотрение новые физические процессы, происходящие при взаимодействии излучения с веществом, возникают новые постановки математических задач томографической реконструкции характеристик различных физических сред. Практическая важность таких исследований гарантирует получение новых важных результатов.

Приложение 1

ОТДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ ДИРАКА, ФУНКЦИИ ХЕВИСАЙДА И НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

П1.1. δ -функция Дирака

- $$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in [a, b] \\ 0, & x_0 \notin [a, b] \end{cases}.$$
- $$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x).$$
- $$\varphi(x) \delta(x - x_0) = \varphi(x_0) \delta(x - x_0).$$
- $$\delta(x_0 - |x|) = \delta(x_0 - x) + \delta(x_0 + x).$$
- $$\varphi(x) \delta'(x - x_0) = -\varphi'(x_0) \delta(x - x_0) + \varphi(x_0) \delta'(x - x_0).$$
- $$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df(x)/dx|} = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}; f(x_i) = 0.$$

П1.2. Ступенчатая функция Хевисайда

- $$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$
- $$\frac{d}{dx} \eta(x) = \delta(x).$$
- $$\frac{d}{dx} \eta(x_0 - |x|) = \delta(x_0 + x) - \delta(x_0 - x).$$
- $$\frac{d}{dx} [\varphi(x) \eta(x - x_0)] = \varphi(x_0) \delta(x - x_0) + \varphi'(x) \eta(x - x_0).$$

П1.3. Поверхностная δ_2 -функция

Пусть $\vec{r} = |\vec{r}| \vec{\Omega} = (x, y, z)$, $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{\Omega} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$; $\vec{r}_0 = |\vec{r}_0| \vec{\Omega}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $|\vec{r}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, $\vec{\Omega}_0 = (\sin \vartheta_0 \cos \varphi_0, \sin \vartheta_0 \sin \varphi_0, \cos \vartheta_0)$, (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) — декартовы координаты, (r, ϑ, φ) и $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ — сферические координаты, $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$ — обычная трёхмерная

δ -функция, $\delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|) = \delta\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\right)$ — обычная одномерная δ -функция. Тогда:

1.
$$\begin{cases} \iint_{\Gamma(\vec{\Omega})} f(\vec{\Omega}) \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) d\Omega = f(\vec{\Omega}_0), & \vec{\Omega}_0 \in \Gamma(\vec{\Omega}) \\ \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) = 0, & \vec{\Omega} \neq \vec{\Omega}_0; \end{cases}$$
2. $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0);$
3. $\delta_2(\vec{\Omega} \vec{\Omega}_0) = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$

П1.4. Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя целого порядка

1. $J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{ix \cos t} \cos nt \, dt.$
2. $J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm ix \cos t} dt.$
3.
$$\begin{aligned} x J_{n+1}(x) &= 2n J_n(x) - x J_{n-1}(x) = \\ &= n J_n(x) - x \frac{d}{dx} J_n(x) = -x^{n+1} \frac{d}{dx} x^{-n} J_n(x). \end{aligned}$$
4. $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix).$
5. $I_0\left(\sqrt{a^2 - b^2}\right) = J_0\left(\sqrt{b^2 - a^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{a \sin t + ib \cos t} dt.$
6.
$$\begin{aligned} J_1\left(a\sqrt{b^2 - c^2}\right) &= I_1\left(a\sqrt{c^2 - b^2}\right) = \\ &= \frac{2\sqrt{|b^2 - c^2|}}{\pi ac} \int_0^a \operatorname{sh}\left(c\sqrt{a^2 - t^2}\right) \cos(bt) \, dt. \end{aligned}$$

П1.5. Нормальные эллиптические интегралы в форме Лежандра

1. Нормальный эллиптический интеграл 1-го рода

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

2. Нормальный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

3. Нормальный эллиптический интеграл 3-го рода

$$\pi(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + c \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$4. E(\varphi, k) = kE\left(\arcsin(k \sin \varphi), \frac{1}{k}\right) + \frac{1 - k^2}{k} F\left(\arcsin(k \sin \varphi), \frac{1}{k}\right).$$

П1.6. Полные нормальные эллиптические интегралы в форме Лежандра

1. Полный нормальный эллиптический интеграл 1-го рода

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

2. Полный нормальный эллиптический интеграл 2-го рода

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$$3. K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, K(k \rightarrow 1) \rightarrow +\infty, E(1) = 1.$$

$$4. E\left(\arcsin\left(\frac{1}{k}\right), k\right) = kE\left(\frac{1}{k}\right) + \frac{1 - k^2}{k} K(1/k).$$

П1.7. Многочлены Чебышёва

$$1. T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n-1/2}.$$

$$2. T_n(x) = \cos(n \arccos x), \text{ при } |x| \leq 1.$$

$$3. T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

$$4. T_n(1) = 1, T_n(x_m) = 0, x_m = \cos\left(\frac{\pi}{2m}\right),$$

$$m = 1, 2, \dots, n, -1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1.$$

$$5. \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \delta_{nm} \quad (\delta_{nm} - \text{символ Кронекера}).$$

$$6. T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

$$7. (1-x^2) \frac{d}{dx} T_n(x) = -n x T_n(x) + n T_{n-1}(x).$$

$$8. \int_a^b \frac{T_{n-1}(x/b) T_n(x/a)}{\sqrt{(b^2-x^2)(x^2-a^2)}} dx = \pi \frac{b^{n-1}}{2a^n}, \quad b > a > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Приложение 2

ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В таблице приведены параметры и явный вид ПСП для некоторых значений длины v . Ввиду существования инверсных ПСП приведены только те ПСП, для которых $k \leq v/2$. Для $7 \leq v \leq 133$ приведены все ПСП. Для $v > 133$ приведены только те ПСП, для которых v не является простым числом. Для составных значений длины ПСП v дано разложение v на простые множители.

ПСП получены с помощью специальной программы генерации псевдослучайных последовательностей с длиной, не превышающей 10000 (© С.А. Терещенко, 1981–2001).

Явный вид ПСП

$v; k; \lambda;$ тип ПСП	ПСП
7; 3; 1; S,Q	0001101
11; 5; 2; Q	10111000100
13; 4; 1; S, B ₀	1101000001000
15=3 · 5; 7; 3; S, T	000011101100101
19; 9; 4; Q	1001111010100001100
21=3 · 7; 5; 1; S	110010000000001010000
23; 11; 5; Q	11110101100110010100000
31; 6; 1; S	1101000000100010000000000010000
31; 15; 7; S, Q	0000011100100010101111011010011
35=5 · 7; 17; 8; T	11011001010111101100010000011100010
37; 9; 2; B	1000001011010001000000000100000011000
40 =2 ³ · 5; 13; 4; S	1110110010000110010100001010000000100000
43; 21; 10 ; Q	1001010011101111100010111000001000110101100
47; 23; 11; Q	1111011110010101110010011011000101011000010000
57=3 · 19; 8; 1; S	1101000000000100000000000000000001000100000010000000010000

59; 29; 14; Q	1011101010010011101111001111100000110000100 0110110101000100
$63=3^2 \cdot 7$; 31; 15; S	0000001111101111001110101100001011100011011 01001000100110010101
67; 33; 16; Q	1001010011000111101011111100100010111011000 000101000011100110101100
71; 35; 17; Q	1111110111010011011100011010110100011101001 0100111000100110100010000000
73; 9; 1; S	1101000100000001000000000000000100001000000 000000000001000000001000000000
79; 39; 19; Q	1101100111101001011111101100001100010101010 111001111001000000101101000011001000
$85=5 \cdot 17$; 21; 5; S	1110100110000010110000010001100010100000000 100100001001010000000100010000000000000000
91; 10 ; 1; S	110100000100000000000000000000010000000000000 0000001000000100001000000000000000100010000 00000
101; 25; 6; B	10001000000000001001000011000001000011000000 0000000010101010000000001001000000111100100 110001001010000
103; 51; 25; Q	1101001110001111111000101101110111010100100 0010011010011011110110101000100010010111000 00001110001101000
107; 53; 26; Q	1011000011111101001000101010110011111011110 1001110011001100011010000100000110010101011 101101000000111100100
109; 28; 7; B ₀	1010101010000011000011001110000000100100000 01001100000000000000100100000010100101100000 00100000001000000010001
121; 40 ; 13; S	1111011100110001011000100000101000001001000 0001101010000000001000000011100110101000000 10110001010000011000100100100100000
127; 63; 31; S	1111110111110011110101110000110111010011000 10101100000101111000111011011001001001000 01001110010110100010001100110101010000000
127; 63; 31; Q	1101000110101011111011001100011101111100110 1001011010000000111010001111111010010110100 11000001000111001100100000101010011101000
131; 65; 32; Q	1011101010111011000110001011000011110110101 1110110011010011111111000000001101001100100 0010100100001111001011100111001000101010001 00

133; 12; 1; S	110000100000000000000000100000000001000000100 00000001000000001000100000000000000000000000 00100000000000000000000000000000000001000000000 0010
133; 33; 8; —	110000100000000000000000100000000001000000100 00000001000000001000100000000000000000000000 00100000000000000000000000000000000001000000000 0010
$143=11 \cdot 13$; 71; 35; T	1111101111001110101101011111100010001011011 0001011101110110000011100010011011010011111 0000011000101010011010110011100110000100101 01001000010000
$156=2^2 \cdot 3 \cdot 13$; 31; 6; S	1110100000000100000010011000010100100010010 0101000000000001000000000000011000100000000 0011000001011000000000000100000000100010000 000000000010000100000101000
$183=3 \cdot 61$; 14; 1; S	11000000100000000000100000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000001000 001000000000000000000000000000000100010000000010 000100000000001000000000000000000100000000000 00000000010
$255=3 \cdot 5 \cdot 17$; 127; 63; S	111111010001110001000011101001100100111100 0011000111101010000000011010000101101011110 0100010010000010100010111110011010101011100 1010011100111110110100100101011001011000000 100011001100001001101111011111000110110110 0111011000101010010111011101011011100000
$273=3 \cdot 7 \cdot 13$; 17; 1; S	1101000100000001000000000000000100000000000 0000000000000000000001000000000000000000000 000010000000000000000000000000000000000000010 00000001000000000000000000000000000000000000 0000000001000000000000100000000010000000000 000000000000000000010000100000000000000000100 000000000000000
$323=17 \cdot 19$; 161; 80; T	1101100001101010100100100111011100011110111 1001111000001110000001110000100011111010100 011011010101001100111111010111101011110100 1000110011011011011110010000100110011011101 110000100100100010111101101000000100101010 0000010001101110100100101010100010111011010 0011111110011101000011000011000011000100011 0111100101010011110010
$341=11 \cdot 31$; 85; 21; S	1111011100110101000001110011000100000000001 1010100000101100010010000000000001010000001 1100110001000000001011000101100010010000010

	0000010000010000010000011000100000010000011 0101000001010000000100000010100000001100010 1000000110001010000000100100100100000100100 0000000000011000100000010000000010010010000 0000101000000010010000000000100000000000
$364=2^2 \cdot 7 \cdot 13$; 121; 40 ; S	11111011111001110001101101001000000001101001 0001000100010011000010011001010000001110101 1000010000001001000000101110001100001010100 0000000001000000000111000110010101000000001 0110000101100001010000000110010100000011000 0100010010001001000000111100111010110000100 1000100110010101000000100010000000101010000 0010100000001001100001011100011010010001000 00011011010010000000
$381=3 \cdot 127$; 20; 1; S	11000000000000000000000000000000000000000000 00100000000000000000000000000000000000000001 00000000000000000000000000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000000 00000000001000000000000000000000000000000000 100010000000000000000000100000000000010000000 10000001000000000000000000000000000000000000 00000010000000001000000000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000000 00000000000000000000000000000000000000000010
$400=20^2$; 57; 8; S	1110100000101001000010000001000110000010000 0100000000000000000000000000000000000000000 1001010000000100010100000011000000000000000 000000000001001001000000000001011000100100 0000001000000100000010000000000000110000100 000000000100000000000010000000000100000000 000010000000000101000000011000000000000000 000000000001010001000100000000000000000000 000100000000010001000010000000010011000000 0000000010000
$511=7 \cdot 73$; 255; 127; S	111111101111011100111101100011010101001111 0010000101100100011011101011110101001011000 0001001101101101001000000110110010101100110 0111111100111001101011100101101000000010111 0100111000101001101001100001110000010001011 1110010100100100010011111010010100000101010 1011111101011010100001101000100011111100011 0001011011000010100010101110110111100110001 1110100001001001100101111000100001111000000 000111110000100000111010001100110111101101 0110001001011100001100000110010011101010110 11100011100100101010001110110011101110
$553=7 \cdot 79$; 24; 1; S	1100000000100000100000000000000000000000000 0000000000010000100000000000000000000000000

[illegible]

	10100000000010000000101000000010000001000000101 00000000010000000000001000000000101000001000000 1000000000000000010100000000001101010000000000 10000000001000000000100100000011000100000001100 0100000010100000000011010100000000000011000100 1000000010000000000100000100000001001001000000 01100010100000000000010010010010000010010000 0000000000000000100000000011100110101000000101 00000011000100000000000000000000010010000000100 0000010000000010000000000000010000000011000100 00010010000000000010110001000000000100000000 01000000
820= $2^2 \cdot 5 \cdot 41$; 91; 10; S	11101100100001100100000000100000000000000110 0100000000010100000000000000000001000000100000 0000000000000000001100100000000100000011001000 00000010000000010000000010000000000010000010000 000000000000000000000000000000001000001000000000 000000010100000100000000000000010000000000010000 00000000000000000110010000000001000010000001000 0000000110010100000001000000000000000000000000 000100000000001000000011001000000010100000000 0000000010000000001000010000000000010000000010 00000010000000100000000101000000000000001000000 0000000010000101000000000000000001000010000000 00000000000000000001000000100000000100000000000 00000000000000000000000001000000000000000100000 00000000000101000000010000000000000000010000010 1000000000000000000000000001000000100000000000010 000100000100000000001000000000000000000000000100 0000000000000000000000000100000000000100000000000 00001000000000000000000000010000000000000000000 000
899= $29 \cdot 31$; 449; 224; T	1101110101011001110011000111100101011110000 1111011010001000111111001100101010111111011 00010000110000110011111110110100001010011010 11010010110100010011100110100000000001100100 110111001011111101101010100000110100000000010 1010110000111011101101100100100111111001100111 0100110011110110010011011110100100100101011 1100100111010111010111010111001011111001111 0000010000011110011101010000110110000110011 1011000111110100101010111111010111010110110 0111101101011011111100000010010100010001100 1001010001010000001000111101000001110010001 1001110001011111010100011000011111001111001 0110000010110001010000010001011001101100001 0101101001101000011011011001000011000101000 1100111000001101100100000010001111001110101 11111110000111110101010010100001011000000110

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

	0000000000001000001000011010101100100000010 0001001100001101010010110100100100000110000 1001110011011000001000010111000010011000000 0000010001010001000000100011101010010011000 0010000000011000010010100111101011011010010 0100010100001011100000000111000000001100010 01000101000100000000001010000000000100001101 0001000001100010110000010000011000011010001 0000111100000000100011001010011010000000001 1000001000001000111010000000000111000110111 0010010000000011100010010001010001100110010 0000110001001010111010000000011100010010100 1111010110111101101101001101000000101010000 10110001001000000000100010100011001100100000 1000000100000100000100010100001001010010010 0000100011101000000100001011100001001010110 0100001000100000001000011010001000011010100 1001100000100011001100101001111010010011000 0000010100001001100000100001001110011111100 1001000100001011100001001000100000110000010 0001101010110011001000000101000000100000110 001111100000000101010000001000011001010010 0100010100000010001010001000010010101110100 0000000101010000001000111010100101111001001 0000011000110111001011010010011000010011100 1101100000100010000100100010100011001000000 0000011000011010101100100000000011100001001 110010010001010000101100000000000101000100 00111100000000000101010100001011000100100010 0001111000000001110000000000000111000110110 0000000001110001101100000000010100000000100 0011110001001000100001101000000001010101000 0001010101000010111000000001000010110000010 001010000100111001011010111101001001100000 0001100000000000100011101010010010001000001 0101010000001000011110001001010010111100110 1100000000111000000001010000100100000000001 0100010000010001100100000110000000011100000 0000110001011000001000111010000001010100001 0011000001000100001011000101100010010101100 1100101001001100001101010010111100100100010 1000000101000110011101100100000110000000010 0000010001010001100100000010001100111011101 1001000000001100001001000001100011011100101 101011011110
3599=59 · 61; 1799; 899; T	1111111011111001101110111101001111001110110 1111011100011010011101011010010111000111000 1011111101101111000001101100110001111111011 1001011011000001001101110010100101111010101 110010101011111000111000111111110101010010

```

1100011100101101001000011111111101010011011
10000110011011011111001000001001100011011001
0111100001001100100110010101110011101100110
1110010010001100110110101111100101011110100
1000010101110111011110111001000110110000110
1010000101111011000111011111001100011100010
101101110101011111110111001100011111011110
1001000000101100001110011110001011101101001
0000000000010010110100100001111011011010010
0111111110001000111000111100001110000101100
1001000100010101001001010111100101101100100
1110100000110101100000001110010011110011110
0110111111010100000100011011110111000110100
110001000011001101111010011110100010111110
1111111010111000001111001101100000101111000
1000110100000010001110101001101100000010111
00010111110110101010110100001110100001011100
100111100110101101100010011110101110111110
1101011000111100100011111111010001111111000
1001011000010101010110011010010000001011100
1001110111000010010001110100111110111010010
0000000101010100010100100100110011110010010
11001000000101011100110100001011001100001101
0111101011111010111001010110010000101110000
0011011101101010101111011010000011101110001
1100001000010110000101100111001101001100011
1011001101100111011110100110111110011110001
101010011000000000011100111001011010100010
1000111111100001001001010111100011110101001
0011110111111010111100110010010100000110010
00110110011111111100111110010100111101100000
1010000001110100010010100000101000111111100
1100000101011110110000100110010111010101000
1011101010111101100010101101000101011010111
00001101100101101000000001101111010000001
10010101111001100000010101100100001110110
1100111000110100010100100010101001000111011
0101011101101011101001101001100100100011110
1100101010111111001100001010110011111100001
1001001111111101001011001001111000101001010
1110100101010100110001010100010111010101000
1011001101111001000010101111000110010000111
0101111101011011101000111111010111110010000
1001011000101100000000110010011101100111110
1011011001100001000000001000111011010100001
1100001010110110111100000001110100110101001
0111001100001111111111001101010011100001100
00010001010000100001101100110010001110011010
0110001100101111001011010111100011100011001
1111010010000101010100100010011111100000111
1011001010110011010000010100001010011110011

```


[illegible]

[illegible]


```

0000000010010110001110000001000100000000100
000010000001010000110100000001001011000000
001000000010100000000000000000000000000000
0000010010001000011001000000100100000000000
00000001000000000000010100000010010000110010
00000010000000000000001010000110100001100100
01001000000010000000000000010010110110000000
00010001001000000000000001010100001100000001
0100000000100001101011100000000000101010000
000000000000000000001000011000000000100100000
010000001000000000000100100010000000100000000
101000011000000000001010000000000000000000100
00000000000010101000000010010001001000100000
00001000000010010110110000000010100110010000
0000000000000101001100000000001010000000100
0011000000010100000001000100010000001000011
0010000000010000110100000010000000101000011
0001110000000000100001100000000100000000000
1000000100010000000000100000000010010110000
00100010000000010100110001110000000100000000
00000100000000001000000010001000000100010010
0000000101000011010000000000001010000110010
0000000101010000000000010000110100000000000
000000100000000100000001010100000001000000100
0000010000110010000000010010001000011000111
000000010100001100000000000010000000000000001
000100000010000000010100000000000100010010110
000000000001010100000010000000000001010000110
000001000000100010000000000000000000000000000
0010010000001000100010010110000000100010010
0001101000000000100001100000000100001100000
0010001000000101001100011100000000100000000
000010001000000001010011000000001001000011010
000110001110100001100000000000000000000000001
1010111000000100100000000001000011000000000
000000000000000100100000001010000001001000100
00000000010100110000000000010000001000011000
1110100000010001001011000111001111000000000
0100100000000000000000000010101000000001010000
00010010000000000001000011001000100001100000
0001000100000000000010000000000010000110100
00000010000000000001000100001100000010010001
001000000000010000000000100101011000000100
0000000001000011000111010000000100010010001
000000000000010100000000000000100100010001000
01100000010001000011000000000001000100101100
0000000001000000000010000000010101000000000
10000000000100100001100000000100000010100110
000000000100000000010010110001110100000000010
000000100000000000000000000000000000000000001
00100010010000110010000000000100101101100

```

	0111000000000100001100011100000000001010100 110001110011110000000100000001000000000000 001010100000010100000001001000011000000000 0000010101000011000111000000000100100001101 011100111100000010000110001110011110
$4095=3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$; 2047; 1023; S	111111111101111011000101100110000011001111 0010001010101011011100000000000011111000101 100010001010111011110110100110011000111101 010101010111110100111010010110011110000001 110010001000101111100110011001111110010000 1101100010000010101000010010110100111111011 101110111111101101011100010110101001100101 0010011100100000000111100001111111100011000 0101100011001000100110110111101101010100000 1010000000000101110101100010111011010010001 1100000111001100101011001010101010011110011 101001111000110110101000010101111011101100111 0110011001101111101111001000001011100011010 1100111110000111011110001000100011111100000 100101011000010111001110111110101111000001 011010010111111010100100110001010011110111 1000000011000001010110001101100000000110010 0100010110010000011111010101000101011001110 1000111010101011101101101001110110101000000 1100110100110001000011010000110011000011100 011011110001100101010100010001101110100101000 1101011101110101111010001111101000100110010 1101000111100100110100011000011110011111001 0111111001011011101100011010000010010001101 0001010000010000001001111111011000111100010 1110010101101101000110100110101001010100100 0000001110100000101100001001100011100101110 0100011001001100100101010100001101010011101 0110111010000100111101101000100100010010011 0011010111001101111001110000110101101111100 0110100100101101101110111001111011100000100 00101000110001111110100011011011000111100001 1110111110000101011010110010111010000000110 1000111000101111010111110000001010011000110 0010011110010101011100101111010011111001111 1101010110010001011101001000001001100111101 1000001101111110111111001100010001011000011 0110101001000100000111010100011111110000000 01000101101100010100011100110110100101111 001101000000001010100010110001110100110100 0010001110010011000001000110101010110011001 0011101000011011100101001011110110111010100 10111001100111011101101111000101000111101100 1001111100011110011011000010001000011110001 1111011001011111000100100000010111110111000

```

1010010110101111101000000111011000000101101
1010101100000011110100110110001100000011010
101111000101010011100011001110101011110010
0011101000101010001100111110100110010000101
1101111001100000010010111100101100110100010
0000011011101101011000011111011101010110110
0000100111011100101101010111000011100111010
1111110000110011100010101101111000010011100
1100001010000100001100000001010001000010110
0111000001010010000100010100110101101011101
0101001101001010011101111010100110110101101
0011011100111001111001100100011011001000011
1110011011100011000110111000010000100000100
0100101110001001010000001000111101000101110
0001010010100101011010010011110100100110101
0110100000110100111101011001001101100111001
0010000011011011100110001101010001101111100
1110110111000100001001001010111000111101110
1000110010111000000100001110000101101011011
0110011110100000111100101110110000101010010
1000010100111001110001110111110010101111101
100001110101100110110010100110111101110100
001111101100111111000101000011000100011101
1001000111110000011010111111100010000000101
1001010001011010000111011010000001010111001
1111111010010101011000100110100111001010000
1110010101001100001000000000110110011000101
1011100100001001101011110110011011101011010
1010100011101110100111000010010100100011000
0011101110000110001100110010111100001101111
0101101100100101110101000011110101110100010
0010011111010111000001100011101101100001100
1010000011000011010010110111111001111010100
0101111000111010111011001010111010111001001
1100000001000001100101100000101111001111000
1001100001100001001000010101011010100010011
1010100111110111110100100010100010100100101
0011001110011010010000110010000001111110010
0101100101100100100110111011110111001001010
0010010101000000010010011101100010010010001
1110000011110110110010110110011010101001001
0000111010010010010111110101000001110001001
1100010001100110110110101111001001001001111
1100110101000010110111101001011101110001110
0111110110110110111111101110011010110001111
1001001111000010111101111110001110001111111
100001000110001011111101101111010110000011
111110100001011111111010110100010110000000
1110000001100010101111111100101001111111111
001110010110001010101111010101110100110000
0000100110

```

[illegible]

[illegible]


```
0000000000010000000001000001000000010000000
00000000000000000000000001100000000000000000
001010010001000000000000000000000000000000011
000000000000000000000000000001000000000000000001
0000000000001000000000000000010000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000001000000000
000001010000000000000000000000000000000000000000
010010001000001000000001000010000000000001000
00000000000001000000000000000001000000001010
00000000000000000000000000000000000000000000010000000
01000000000000000000000000000000000000000000000010
0000000100000100000000110000000000000000000000
000000000000100000000000000000000000000000000100
000000000000000000000000000000000000000000000010
00000000000000000000000000000100000000000000000100
00000001001000100000000000000000000000000000000
001000000000000000000000000000000000000000000000
00100000100000001001000100001000000000000000000
010000100001000000000000000000000000000010000000
0000000000001000000000000010000000000000000000
000000000000000000010000000000000010010001000
0000000000000000000000000000000100000000000000
000000000000000000000000000000011000000001000000
00100000000000000000000000000000010000000000000
000000000000000000000000000000000000000000001000
00000000000000001000000000001000000000000000001
01000000000000000000000000000000000000000000010000
0000000100000000000000011000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000100000
000100000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000001000000000000000000000001000
0100000000000000000000001000000000000000000000
0001000000001000000000000000000000000000000100000
0000000000000000110000100000001000000000000000
00000000000000000000000100000000000000000000000
000010000000000000000000000000000000000000000000
00000000000000000000000000000000000000000000000
00001000000000001000000000000000000000000000000
0000100000000000100000000000000000000000000010000
000100000000001000000000000000000000000000000000
00100000000010000000001000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000001010000000000010000000000010000000000
100001000000000000000000100000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000
00010000000000000000000000000000000000000000000
000000000011000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000
00000000001011000100000000000001000000000000000
000011000000000000000000000000000000000000000000
00001000000000110000000000000000000000000000000
```

[illegible]

[illegible]

[illegible]


```

1100000000000011000010001100000010000010000
0001000100010000000000110100000000010000000
001100000101000000000000001000001000000000
0000001000000100000000000000000000100001000
0010000010000000000010000000000100000010000
0000000010000000000011000001000000000000100
00001001100000000000000000000000100100001000
00000000000000000001000000000000101000000000
00000000100010010000000000000000000000010000
00000000000000001000000000000000000000000000
00000001001100000000100000100000000000000100
00000100000010000000010100000000000000000000
0000010000001000010000000000000000000000100000
00000010011000000010010000000100000000000000
1000000000000000000010000000001000001000000
00010000100000000001000100000000010000000
0000000000001000000000000000000001000000000
0000000010100000000000000000000001000000000
0000000100000100000000010000010100010000000
000000000000000000000000000000001000001010000
000000000000000000000000000000001100000000001
0000000100100001001101000000000000000000010
01100000000000001000010000000001000101100000
00000100000010000000000100000000100000000001
0000100000110100010000000100000000000000010
00010000000001000100010000000001001000000110
00000000000000000011000000100000001001000001
0000000010000011000000000000101100000000000
00000000100000100000000000101000000101000010
00000000000000100100100100010000100000000000
00000011000000100011010000000000000000000000
00001000111001000100000000000100000000000000
00000001000000000001100000000000000000000010
00100000000000001000110000000010000000000000
10000000000000000010010000110000010010010000
001000000000100100000000000000000000001000000
00010100001000100001000000010100010000000000
00000000000000000000000010001000000000000011
00001001010100000100100011000000000000000001
0000001001000000000000010000000001010000000
000001001000000000000100000010100000010000
0000000000010000000000000100001000000010000
0000000000001000100000011010000101000000000
0000000110000000000001000000000001000000000
000000000000000000001000110000010000000001010
0001000000110000100001101000000001000010000
00000000000000001001001000000000010000000000
00010000000000100001100000000000000000000100
01000000000010000000100000000010010100000000
00100010000000100001000000000000000000000000
0000000000000000000000000000000000000000110000

```

	0011000000010000010000000000001110010100001 0000010001000100001000000100000100000001011 00000000000000000000100000000010000000000 000110000100001000000000000000000000100000 0000010000010010001000000000000001000000000 0100000100000000000000000000000000010010000001 0000001000100000000000000100000000000000000 00001010100001100000000000000000010000000010 0000000010000000000000001000000000000001010 00000000000000001000000010010100000000
5183=71·73; 2591; 1295; T	1111101111011110111101101111100111101111001 01001111111011010011101010001111111010010 00110101101011101010101011110111010010101 0001100100101011111101011101011001100001101 0001111000100011110011001110100011001100100 1111101111110101100101111011100011001100010 0100001011000011010011011000101110111011001 00011110011000101000011111010101011110111 0100001110101101010111010001111010100000101 00000101010011001000110100101111110101110001 1011111010011110101110100010011011000110001 01111100110111001010010100100111110101011101 0110000001011101101100010100101100100100111 0011110010000100010111001101111011110000111 0000001011101110000011110101011001110001000 11011111011011100110011011010111101000111110 0111010000001111100011011010011000110010111 0001000010111111010011101100001010001110011 0101000000110110011000011111010110000100101 001110101100010111111101110011101001000111 1001111111101000110100111011100111011010110 0110100001001001111001110000101101000010110 0111101111100001101000111011010011011000011 1011101011101011111101101110111011110110111 01111000000000000001001111010011010001011000 0011000110000110010110100110100100100111011 0101101010100000110000010011010000110011101 00001101000100111010001110101100010001111110 0000010000001100111111001010100001010101111 1101100100110001111000110101100010010010100 1010001011111011001110001110110001111001011 0100010100111011011100110000000101011101000 011111100111010000000001111101010000001111 0001111011001001110000001101000001101111010 0100011101010100100110101011101001110001101 1100110110100010110001101010110101101011111 0111011000010100010010110111100001101101000 00111110101110011100101100010001110001100010 0000101111001000101000000110011010101111101 011011110110101101011011100001000000101010

```

110000101110111111110001100010011100111010
1111111001110110100101011001011001100101100
01101001100000000111000110010010101001001
1101100000101100011110111010100011001111100
0111101010001110111111010000011111001001010
1101010011111001101011010011011010001001111
1000101110011000101011011101111011101011001
0110111111000101011001011101101101101101011
001111111100000100000001000000000011001001
0111011001101001110011000010111001011000101
0100111000010010110100000011100001110110100
0110100101000100100110001100001111011011011
0011001110001001110110010101010010100001000
0011101011110011000010101111101001010110110
0101000011100010000100110010101001110101011
110110011001010000000110101011111111111001
0100000101100000000000011111010011101010111
0010011011101110101000011011000100010101110
1010011110010011010110110000011011111000000
0111101100011100001011101001000011100100100
1000100001001101111011101101100011110110
1000011111000111001000011111110000010011111
0010010100110110000110101000101001111110010
0111101010001000100110110001010100011010000
011111111111100100111110110000000000001010
1001111111010110011001000010101000110101011
0001011111111000111101011001001010110100000
1010111100110000101000111110110101011011101
0110010001101110001100110010010010000111100
1110011011011100011010011111001000111100011
1111010010110111100011010101110010110001011
0100110001101101100100010110110011111111111
0111111101111100000000110010000100100100100
1101100101011100000010010110010100010000100
0100101011100010001011100000111111010010011
0100101001100000110101001010110110000011101
0100000010001110111000011100000110011101010
0010000111001011111001000100110101010110110
0111100111111110011010011100101100110010110
0101011010000001100000001010001100111011100
11100000000010001011110010101011111010110
00100101001010010001000110101000001010011001
1111101011101100001011110011100111000111011
1001011010110001010000111110100100111100001
0010110110010111100100010000010100101011010
1001110010111010010011000100111000110000010
101001101101010100011101110000100111110100
1111110001101100100001010000111111010100000
0111111111011001100000011110100010101111111
0011000000100011010111010010110000111001001
1110001100100000101110101101011011001100101

```


0011100001110011011001000000111010111101010
1100000011001111110101111000000111011100101
0001110100010111110011110100011001111010011
0111100011111010101001010010001101101101001
1011010110011110011100111110010110010011010
0001101111111111111000010001001001010001000
1001000000101000100000100011110010011010010
0011101001111000001010011001011110100101111
00001000011011011111010011001010010001100010
0011010111101000000001100001110010100011000
1000000001011100101000110101101111001110000
01111001100100110111101010011000111010111100
1000110100000010111101111001011001110011010
0000111000001111110100011000001110100010100
1001100110011001000001001110101000110010101
0000111110001000101111110001111000010000110
1100010111011100110000110001101101100101101
0111001001000101111110010100110101000011010
0101101011000100110000010111001110010011011
101000101000011111000001001100000101000001011
0100111011001101010111110101111101010000111
0110010101000010001111010001000001010101000
0011110101110011000001110110010011000101010
0100110100111100101111011011100110011100010
0001011001010000001100001001100110011101000
1100110000111011100001110100111100110010100
0101001000001011011001110101011010001000001
001010101000101001010011101101010000001001101
0100011010010000000011010110000100001100000
100100001000010000010000

Приложение 3

ТРОИЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В таблице приведены параметры и явный вид ТП для некоторых значений длины v . Для составных значений длины ПСП v дано разложение v на простые множители. В таблицу включены, во-первых, единственная известная бинарная последовательность с идеальной ПАКФ $\{-1, 1, 1, 1\}$, которую можно считать вырожденной ТП без нулевых элементов; во-вторых, ТП, построенные на основе полей Галуа $GF(p^w)$, с параметрами

$$v = \frac{p^{w(2l+1)} - 1}{p^w - 1}; \quad k_+ = \frac{p^{2wl} + p^w}{2}; \quad k_- = \frac{p^{2wl} - p^w}{2},$$

где p — простое, w, l — натуральные; в-третьих, составные ТП, полученные посимвольным перемножением двух ТП взаимно-простых периодов с параметрами $(v^{(1)}, k_+^{(1)}, k_-^{(1)})$ и $(v^{(2)}, k_+^{(2)}, k_-^{(2)})$. Для параметров (v, k_+, k_-) составной последовательности имеют место соотношения

$$v = v^{(1)}v^{(2)}; \quad k_+ = k_+^{(1)}k_+^{(2)} + k_-^{(1)}k_-^{(2)}; \\ k_- = k_+^{(1)}k_-^{(2)} + k_-^{(1)}k_+^{(2)}.$$

В таблицу не включены троичные последовательности, существующие для всех чётных значений $v \geq 6$ с $k_+ = 3$ и $k_- = 1$ вида $\{-1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0\}$, которые образуются из последовательности $\{-1, 1, 1, 1\}$ вставлением n нулей в её середину и в конец ($n = 1, 2, \dots$).

ТП получены с помощью комплекса программ генерации троичных последовательностей (© С.А. Терещенко, 1995–2004).

Явный вид некоторых ТП

$v; k_+; k_-$	ТП
4; 3; 1	111–
7; 3; 1	110100–
13; 6; 3	101001–10––11
21=3·7; 10; 6	11111–1010–11–001–0––
28=2 ² ·7; 10; 6	110–00––10100–1–0100–1101001

31; 15; 10	0010111-0---01-11-01-1-111--111
31; 10; 6	0001011---0-100-1100001-0101001
$52=2^2 \cdot 13$; 21; 15	101001--0---110-001110-11110100--101-11-010 01-10--1-
$57=3 \cdot 19$; 28; 21	100101111---110111---11-1-11111-10-1-0---1- -01-11--110-1-
73; 36; 28	01---1-110-1----1-11---111101-110---1---11- -11110-1-1-1101110100-11-11-11
$84=2^2 \cdot 3 \cdot 7$; 36; 28	111-1-1010--1-001-01-11-11--010111-001-0--1 -11111010-11100110---111--10-0-1--00--0-1
$91=7 \cdot 13$; 21; 15	1000001100-00-010000-0-010001001000--0100-0 00-001-101000010100111000001-0000-110100--1 0-00-
$91=7 \cdot 13$; 45; 36	0101111-01-1-11111-111---01-111--111---11- 11--10-1-11-0---10111-1-1-11-1---0---01-11- -1110
$121=11^2$; 45; 36	-1-110--101---0-1-010-0---01-111100001-1-0- -0--11001--111--1-00111-000-00011-11-01-0-0 -0110-0010-1101001100-100101-011111
$124=2^2 \cdot 31$; 55; 45	001011110--101--1-0--1--11-11110010-11-0--- 01-1--0111-1-1---1100101-1-01--0--11101---1 1---1-100-011--0-1-01111-01-111111-11-
$124=2^2 \cdot 31$; 36; 28	000-0111--01100111000011010-0010001011-1-0- -00--100001-010100100010-1--10-100-1-00001- 0-01001000101----0-100-110000--010100-
127; 36; 28	10--010-1--1110100110000-101000010-00-01101 100-0101011000-00000-00-1-1-001-100100-0001 -00110-111000000---0-01000-01-1000---10-1
$133=7 \cdot 19$; 66; 55	010-11111-1--1011--1111--1-11-1-11--1111-- -10-11-11-111-1-1-1-1-1111-0--1011-1----0-- 11111110-11---0--1---1---01---11-1-111--10- 1110
$183=3 \cdot 61$; 91; 78	010111-111--1110-1----0---1011111-1---11-01 -11-11--11111----1-11-1-1-1----10-1--101110 -1-111---11-1-111---1-11--1-----01-1-11---1 1--1--10-1-1-11--111-1110111--11111-11-1-11 1-0----1110
$217=7 \cdot 31$; 55; 45	000000--00-00--10-0011-010011100000110-001- 00-001010100-1-0100001010010-0-001110000--1 0100-110000-110000101010001-0-00---01000100 1000--0000-1-01001110-00-100100-1-0-0001-01 00--101001-10100-0101001--0100--00-00-110-0 0-

217=7 · 31; 36; 28	000100---000000-01000010000-000000-010-000- 10000-000000010000000000001--0-000-1000001- 010000100000110-001100-000000100-0100000010 1001-001001110000--000000100000-1-0-00-0001 000000-000100100010010010-0000-100000101010 0-
228=2 ² · 3 · 19; 105; 91	100-011-1--1110-11-1-1111-1-111110---0-1-1- 101--1---10---100101-11-1-1101111--1--1--11 1--1011-01--11-01111-111011-10010-1111--1-0 11-----1-11111-1-10-1-0-----0--111-110-1-- 0010111-----101-1--111---11-11--0-110--11-- 01-1---1-0-11
273=3 · 7 · 13; 78; 66	-000001-0--11-0000--10001-00-001-10-010-010 00--01111101000-00---000-00--10---100000110 0-10--01001110-0-110000-0-0--11101000110100 1-0-001-101-0100100001001-11010010101-1-001 00-110--1-101001--00--0-01001--00-0-10-0011 001-1110-0010-0-100100001-10-11010-00-00010 --10100--000111
273=3 · 7 · 13; 136; 120	011---1--111-1111011110-----11---11-1-1--1 1-1-11110-1-1111110--1-1-1-1-1101--1-----1 -1--11---11---11-1---11--111-1-1101--11-110 1-1-1-11110--1--1--1--11--111-111110-1---- -1--1-1---1-1--11-110---11-1----1-1111----- -11-11-110-1---1111--1-1101-11-110-11010011 1-1--111---1111
292=2 ² · 73; 136; 120	01-1-1--10-----11-1-----11101-1-0--11--111- 1111-0-111-1-011-0100-11111--1011--1111011- -1-1--1--1111-01--10-1-1-1-111-11-10---1--1 01-10100-1--111110-----110-1-1--1111-1-11- 10111101--11--1---1-11011-11110-110-00--1-1 --1101--11-1-0-11-----111--1-110--110----- --1---1110-1---1101110100111--1-1-
307; 153; 136	01011111-1-1-111--111-11-----0---1110-1-1-- 11----0---10-1-111-1---11111-11-01-11-1--1- 11-111-----101111--1-1111---11-01-1-1-11---0 ---01-11---1---11--1111---10111-1---1-1--- -1-1-11111-11---01-11-111-0---11---1111---1 1-1--10-1---11-1-11-111--11--1--111-1-11-11 111-1111--11-1-1-111111-11--11-11-0-----01- 1-1110
341=11 · 31; 136; 120	0111-0011101--10-001-10110111-0--1-01-10100 1---1000101-0-1-1-1--101---111-10110-111001 0010-10-0---111010-01110010-000-11--01---11 -0---100110-----111-11--1-0-1-1100--11101-0 10-1-0-01110--1110--000-----11-1111011001-0

	0-111-1100001-0--10-010---1-1----10-10-1--- 11-11-00--1-111010-1-100--1-1-----1-01-1-10 -1111--0-11--10--011-01-1-010--1-1111111
$364=2^2 \cdot 7 \cdot 13$; 171; 153	010-111101---11-11--11-1--0--11---1-1--111- -1---0-1111-0----011--1---1111--10--101--1- --1100101-11-01-11111-1-1-1--1-0111111-11-- --1-1---10-1--1-01--1011111-1111-----0---0 1-1---1-100-011-1-0--1--111--11----101--11- 11111--1--111-1011-1--0-1-10-11---1--1-11-- 01--0--111-11-0010111--0111-1-11111111---01 -1-1---11-1-11111-110---1110--1101-1-111-1- -1-1-0-1-01111-11110
$364=2^2 \cdot 7 \cdot 13$; 78; 66	1000001-00-00-0-0000-0-01000100-0001-0100-0 00-001-101000010-001-100000110000-1101001-1 0100--000001100-00-01000010-0-000-001000-10 100-000-00--10-00001010011-000001-00001110- 00-110-00-1000001100-001010000-0-0100010010 00--01001000100111010000-0100111000001-0000 --10100---0-00-100000-100100-010000-0101000 1001000--0-00-000-001--01000010100-1100000- -0000-1-0100--10-001
$381=3 \cdot 127$; 190; 171	01111-11--1111-1-1-----10-----1-1--1-1-1- -0-111111--11-111--111-1-11-11-1--0----10- --1111111--1-1--1-1--110111-1-11-11111-1-- 11-111-1--1-11111-1111--1--11-1-1-111111-1 11--1--1101--1-1---111-1-1-1---1-11-111-0 1--0-1111--1---1111-01--1-1---110111-11-0 1---1101--11-1-1---111---11-01--11--111--1 1-1--0---1--11-0111--1-11----1-1-1-11----- 11-11-111--111111-1101--10----111-010
$399=3 \cdot 7 \cdot 19$; 105; 91	100100-110-00-0101001110100-110-0011-0-00-- -0100---0100--10000-110-00-1001001-10-00-11 01000-1000011-0000-1-010011-000001101001110 1001--01001110100-0-0-001-10-001110-000-101 00-0101001-10000---0100--1010011001001--0-0 0--10-00-0-0-0001001001--0100-1-0-0011-0100 --10-000--010001-0100-1001000010100---0100- 110-00--10100-1-000010-0-0010101001110-00-0 00000-1-0-000110-00-1-0-00-110100--00-001-0 0-001-100001
$403=13 \cdot 31$; 120; 105	001001--011-0101000--01-11-01000010--1-00-0 01110101-10100-110-0010010001-00--110000111 0-1-1100000-1010---010011001--110-001-00-01 110000-010---0101001--0--100000011001101-01 001110--1--01000-00---0-0-00--100--1-0100-- 10001010100-1-0-111-0100--101111100001-1001 --00-00-010-11110-0010000-11-0-000--0-101-0 -0011-0--0010100-0-0101-10-00---0----101001

	010-10--00001--0-11-101001-100-0110-00-1001-1-00-001-101-11
403=13 · 31; 78; 66	000001--010-100-000000-1010000000000-1--000 000-0-00000-000-00-00010100-100-00-100000-- 0-01000000101011-0-00001-00001-000000-000-0 110-00--001-10000000-0000100010011-00110001 0000001010100000010-----0-00011000001000010 00000100100-0-000-11000011000-00100000-1011 0-1000010000--0101001000-011-0-001000--0000 10010100-0000000-1-01-00-010000100-01001000 -00-1--00100--100001-01000010001010-0001100 11100000-010-001
484=2 ² · 11 ² ; 171; 153	000-000-100--10-001-1011-11010--11-0--01-1- 1100-010-111----1011--1-1000--00-0-0-1----0 100-1-0-011--1001--0110-10--0--1--000010001 1001-10100-110--1-01011110--0--11-1001010 111-1--1-01-1-11-0001-0010-011-11-0-00--10- 0-1-1-00-1-0--0--0--01-1110000100011001--01 0011101--1010-11--0-10-----10010-011-11-1- -0-11----0001-001010111-1-0100111010-11--00 11-01-0110-101---1000010001-00111010011-01- 1110-0-1-1-01-0-11---0010101-1111--011111- -000110010-01---110100-110-0-----0011101-0- 101-0111-10
508=2 ² · 127; 136; 120	10-101011---110-001-0000-10-000010-00-0-101 -00-0101011000-00000100---1-001--00100-0001 -00110-11-000000-1-0-01000-0111000----0-1-0 --010----1-1010011000011010000-0-00-01-0110 0-0-010-1000-00000-00-111-001-100100-0001-0 01101111000000--10-0-000101--0001--10-110-- 0-0-11-11-0100110000--01000010-00101101100- 010101-000100000-00-1--00--1001001000--00- 10--11000000---0-01000-01-1000-1-1011101-01 0-1-11110100-10000-101000010100-0110-100101 0-011000-00000-0011-110011100-00-00011001-0 -1-10000001--0101000-0--1000--110--
511=7 · 73; 136; 120	010-001110-001--0-001--010001-01001-10-00-- -01000-10100-01010000-0100--100001-1010011- 0-001110-00-110100-0-0-001-10-00-110-00--10 000-010000--10-0001-0-00-1001001-101001-101 00--1000011-0-001-1010011-0-0001100000-10-0 0111010011-0100---0-00-1-0-00-100-000--0100 1110-00-10010011101000100-001110100---0100- 0-0-0011-010011101001110-00---01001110100-- 10100-1101001110100-100-00--100001--0100--- 0100-0101001--0-00-1-0100-0-0-00-100100-000 100-1-01001--0-000-10-00--10-00-110000-100- 001--0100-11000011-0100-100000-1-0100-

532= $2^2 \cdot 7 \cdot 19$; 253; 231	0101111-1-11-10-1---1111--1111---111-11-1-- 110--1-1--11--1---1---11-1-01-10-1-11---0-- 1-111-10--1--10-----01--111--11---10- 11-0010-11-11---1011-1111-----1111-1---1- 11-1-10111--1-1-1-111-111-1-11-0--1011----- 10---111-110111-1-0-11--11--101-1-1111-1-1- --0-1-100-0-1-11111---0111-11-1--11-1--1-1-- ---1111--10-11111--11---1---1--11110---0111 1--1-0-1111-1110-111--01-1-1-1-1-011--1--1- -11-110--110010--111--1-1101---1-11-1-1---1- 1111-1111-----0-1--1111111-111-11111--0-11 01--1-1--01-11-111-0-1----0--11--11--0----- 1-111111-1011110
553=7 · 79; 276; 253	0111--1--0---1101111-111--1--111111-01--1-- 1-1--1---10---10---1-11-1-1-11-1-1-11--0-1 11---111---1---1111-1111111111-11-1--11-11- -1-11---1--0-11-----111-01--11-1-1-1111-11- 1--11-1-1-1-111-11111-11-1-1--10---11--11 11-1-1-1111111---11111-----1-111-1-----1-11 -1-110111---11---1-1111-111-11-1101---11-1 ---1-1111--1-111-1-11-1--10-11111--10---1- 11--111-11---11-01----1101--1---1--11--111 --0-1101111111-----1111-1-1---11---1--1-1-- 11--0-----10-11-1-1--1---1--10---1-1-1-1-1 101---1-----11-111--111--1111---11---1-111 1111-1-1-111-1111--11-1--11-1--11-010
651=3 · 7 · 31; 136; 120	000100-1--0-1000100000000-0-001000-00101-01 00010-00001-010100100000-011-0-100-010000-0 01000010001010-010--00--000001-0-0000-00000 1-0110-100110000011000-00-00010-10-00-10001 -00001-0101000000-0011010-100--100001-00010 0-000101--0-0110000100001-010-0010001000-10 01100-1-0000--0-0000000010111-000-001000000 --010100000010-00-101-00-11000001010000-000 1011-1-0-000--00000-10101001000-01-00-00-00 -11000010010-001000-011--100100-1-000001010 100-000001110001000-1100000-0-01000000-011- --0-0001110000-00-0100100010-1-100--0011100 0010000100000000-1---011000-10000110-010010 00000---1001001-10000--010-00-000-0-----0-- 00-0-00000-000-00100010101--000000--0000110 000001
651=3 · 7 · 31; 325; 300	0101111-1---1-11---111-----1111---1---11-0 -----11---11-----01-11-11-0---1--1111-11 1---10-1---111-11--1-1--1-1-11-111-1-11111- 1---11-1-1111-1111--111---1--10-1-1---0--- -10-1--11111-1-1111-1---1111---1-1---111-0- --1---1---11-1-1-1-11---11---1-11101111111 1-1--11110-1---1-11-1--1-11111-111--1-1-----

	--1-1110-1---11--1111---11--1--1-11111-11-1 -11111-1--11-1111--1--11--1---11-11--11-1-1 -1-1---0---11111-1-1-11--11---01-11-111- ---1-111--111-1-1111-0---111--11---111011 1-1-11--11111-111-11-11--10111-0---11---01 -1-11-111101110-1-11-01-1---11111-01-1--1-1 -11-11-11--1--1111111--11-01-1-1-1---1---11 -11--111---11-11--111--1-1--1-11-1-1--1---1 --1110
651=3·7·31; 210; 190	0000-0-10---0--01001--001-01-11001010100--1 00--0101-1-1-10-0-100001-010---01110-0--110 0110--10010-10-01--0001-00--1-11--010-00-00 1-001--01--100011--00-10--00101-10001-0-001 10-11-1111-01000100011011-01-1--010--1-00-- 0-001011--0-0101100-001--111-11010010-00-00 1101-11100-0111-001-00010111100-001--000-0- 1111---1000-01-00010101-11-01010-111001-00- 0111-0-0-0--1-001101-11--1-1000011-00-100-- 11-0--0-0-1-100100-0111-01-000111100--0--1- -11-0010-11100-10-111-0111010---000000-11- 0-1-010-1-000110---11100000-1-000-001-1-01 ---0101-1-000-0--1-0--100-0--0-00--0-1-1110 01010--01000-0---01-111010111-00100---0---0 10101011001-011111100-001010-100110-101-1--1 0-0-11
732=2 ² ·3·61; 351; 325	010-11--11-11110-1-1--01--10111-1-11--1--01 111--1---111----11-1--1---1-1--10-1-1101-10 ---11----1-111111--1111-11--1-0-0-1--1--11 1-11---0-111-1---1-1-101-1---111--1111-1 1-01----1100101-1-1-1---11011--1-0-1-10-111 --1-1-11101--1-1--1-1111----1111-111--1-1 011---011-0-111111--1--1--11-1-1--1-----1- 0111-1-----1-----10-1--111-11--11-011---1- 111111--11--0-1--1-100-011--11--1-10----- 10--1101-11111--111-01-1--111-11-11-1--1111 ---1-----110----101110-1--11-1-1111-1-1--11 -1---11--101--111--1---11-1011-1111-11111 11101111-11-11--1-1111110--1-11-00101111111 1-11-0-11---0----011-11-----1-0--11111-111 1-1--1-1--1-111-11---0-11-10-11011-1-1--11 1---11-----111-1-1--01-1111-1-111-1-110-- -1--1---11--110-11-1111-1-1--1--11-0---1111 0
741=3·13·19; 231; 210	100001-1011-110100-1-0-11-10100--00-10--010 00--0-1-110-0010000-1110-001010-1--10-001-1 0-110-0-00-110101-10-0010-01-001010011-0--0 110-001--01-1110-00---011-1-00001--0--0-101 001010-----01001--01-1-101001--0011-00-00-1 001-1--010011100-0110100--10--1--01001110--

	1-10-0001-0-1-010100--101--1001001-10111100 100-1101--11010010-010---0-0011101111001000 010--11-0-000-1011-1101001-101-0-10000---00 --110-000110-00100100-1-0-01110-001110--111 01001100111--010011-0-0-1-00000-10-1--10000 11-0---1-010011101--0-0-00-010---10000--00 -01110-001-00-----0100--10---100100-1-01101 -01001-00-110000001--01-1010100--10-1111010 0011001--10-00--101-10-0-000-00--1--01001-1 01111-0-001-10-0-1-0-0011-0-111-0100---0001 010100-1100-11-0-00---0--11-0000-0-01---00- 00-110011-
757; 378; 351	010111-10111-11111-1---1--01-11-11-1-1--110 111-1-11111--1111-----1-1----1-11011111 --11--11--1-1-1111-1-1-1---111-11-1111-1--0 1-1111--1-1---11--111111111-11-11--111--1-1 01111-11111-1----1-----11--1-11-----11---1 11--0-----1--11-1-1-1111--01-1--11-1111111 1-----11-11-1-----1111--11-1-111--1-1-- 11111-1101111--111---1-----11-1-----111- 11-1-1-111111-1--11-11--111111-111-----1-0 1-11----11111-1-01-1-0---11-1---11--1--1--1 11-11-1-11--110-1-11--1-01-111-1-110-1-0--- 1--1---111-111---1---11-1--1-1-01-1-1---111 --01-1111--1--111--11-11--1111-11---1111--- 1-11-1--1-1-1--1-10-1--11-1-1111-1---1-111 ---1-01-1-----1-11-11---111--111-11--0---1 111--1-0---1-0---1-1--1--01-1-11--1---1-- 11-111--11111--11-----11-1-11--1---1--11011 1---111---1---111-1-1-1-10
781=11 · 71; 325; 300	000100011001-101--11111-0001-001--0110-101- -1110100111010-111--0-10--11-1-011--1--01-0 -1----1010-111-1--1-1111-00-1-0-1-----0001- 0011-010--11-01---1100101011111-----1110-- 1-01-1-1-----1111-0-----100111010011101--11- 1--1--0111-1-01---1110-001--0111-10011101-0 11--1010111110--01-1-111110---1-11--1--1110 -0-1-----1101--11-0-01---1-0111-10--11-0101 -111-1-0111-1-----1011-11--10-011--1011-110 -1-1-11---111010-111-----0010-011--1--1--0 --1--1-101--11-1101-0111-100--10-111-1001-1 0111110-0-1-----1100-010--11-1---1-001--01-0 -11--10-1-1---11011-1101--1110--01-0-1---11 00--10-0-1---1111--0--0--0--0--1--0110-1-1- 1--1--1-11---0-11-----10001100101011111-0-0- ----0011-01-1-1-1-111-1---11101-0111-1-0-1- --1-01---1-1011-11-11--1-1011111--00-1-0--1 --0--0--1--111110-001--01-1-11-1-01-1-11--1 01111110

$847 = 7 \cdot 11^2; 171;$ 153	0001000110000-010000-010-00010010010-0000-- -00000100100---0-00-1-0-0000100000-00100--0 0000-1000001--000010100000--010011000000000 100--10100-110100-100000-1-0-001-10-0001000 00-110-000110-00100010001000001-100000-1000 011-0-00-1-01001100-0011-000001000000010100 00101001-100001110-0010-0100-000000-1101001 -00100---00001000000-1-0100-00010010-0-0000 10-0010-000001-0-000000000-100100010010001- 0100-0-01000--0-001-10000-0101001--0000--10 -0001-00001010-001010000-0-0-001-0010001-0- 001-00-00-00000000100001100000-100-00-010-0 0--00-0011-0100-010100-1-0-00-1101000000-00 -0-010011-01001110-00---0000--00-00-0-0000- -10000-00010001-000001100001110100-1100000- -0-000010100-110-0010101001-000000010-00--- 0-0000-01000-10-0001100000-10-00--101000010 000-000-00-000100---01000-101001-00-0011001 0001101001--010011-0000--001000110-000100-0 00-001001000100--0010010101000
$868 = 2^2 \cdot 7 \cdot 31;$ 136; 120	000-00-1-0000001010000100001000000-010-000- -0000-0000000100000000000001-10-000-1000001- 0-00001000001-0-001100-000000-00-01000000-0 1001-00100-110000-1000000100000-1-0-001000- 000000-0001001000100100-0-0000--0000010-010 0-0001001--000000-010000-0000-0000001010100 0110000-0000000100000000000011-0-000--00000 1-010000100000-10-001100-000000100101000000 101001-0010011100001-000000-00000-110-00-00 010000001000-00100010010010-000011000001010 100-000100---000000-0-000010000-000000-010- 000-10000-00000001000000000000--0100011000 00110100001000001101001-00-000000100-010000 0010-00110010011-0000--000000100000---0-00- 0001000000-000100-000-001001010000-100000-0 10-00-000100--1000000-01000010000-000000-0- 0-000-1000010000000-000000000001--0-000-10 0000--010000-00000110-00-1001000000100-0-00 000010100--00-001-10000--00000010000011-010 0-0001000000-0001001000100-0010-0000-100000 10101001
$868 = 2^2 \cdot 7 \cdot 31;$ 210; 190	000000-100-00---0-0011-0100-1100000-10-001- 00-00101010011-0-0000101001010-0011100001-1 0-00--10000-1-0000101010001-0100-1-01000100 1000--000011-0-001-10-00-100100-1-0-0001-0- 00-1101001--0100-010100---0-00-100-00-1-0-0 0-0000001-00100-110-00111010011100000110100

	1100-0010-0100-1-01000010-0010-0-0011-0000- -101001110000--1000010-010001-0-001--0-000- 001000-10000-1-0100-110100--00100-110-0001- 01001-10-001110100-0-01001--01001-00100--10 -00-000000--00-001-101001--010011-00000110- 00--001001010100-1101000010100-0-01001-1000 0---0100-110000111000010101000110-00---0100 0100-0001-0000-1101001110-001100-00---0-000 110100--10100--10-00-0101001-10100--00-0011 10100-000000--00-00--10-00-1-0-001-1000001- 0-001-00-00-010-00---010000-010010-0-00-110 000-110100-1-0000-110000-010-000--0-00--101 0001001000--0000---010011-0-00-10010011-010 00--0100---01001-101001010-0011-0100--00-00 -110-001
871=13 · 67; 435; 406	010111-1--10-1-1----10111-1--1111-1---1-1-1 1----111-0---11111---1----11----0----01-111 -1-11--11---11--1-11--1-11---1---10-1-1-111 1-11--1-1-1-1--1-1-1111-111--111111-11--1-- -1-1-1-1--1--1-1-1-1--1-111---01-1-11--1--- --10111--11-111---111111111---11-1--1-1-1- --1---111-0-----11-1-111110-1---1---111-1- --1--1--1011101111111--11---1111--11-1---11 1-01-1--111-1----1--1---1--10-1--11101111-- -1--1-1-11-1--11-11111-1---11--1--1---11111 1---1-11---1---11-1-1---1----1-1---0---1--- -11-11---1-1----11111-1-1-11--1---1-1-1-1-- -111-111-11-11--1111--101111-1-1111--1-1111 111---1111-1111--1--1---11-1-1-1---01-111-- 111--1111111--111-11-1111-11---0---1-111-- 11--10111--111-1-111-1-1-11111---111--11- --1111110-1--1----11110111---1---1-11--11-- 1110-1--10-1-1110-1-11-11-11111--11-01-1-11 -----10-1--1-1-1-111111-11-1---1-11-1--1 111---11-1--11--1-1--1--11-1--1111--111--1- 11--1-11110
889=7 · 127; 136; 120	100-000-10-00-0100000000-00-000000100000001 10000-01010000-000000-00-00--001000010000001 0000-0-01000000000010-01000-00-0000-0-001110 -00-0-0-00-100000-00000001000000-00-00-0100 0001000000000000000-000011-0000-0000000000-0 0-100100000000001-0000000-01000000-000-10000 0100100-110100-100000-010000-0-0000-1001001 010100-000-000000000--100001100100100010001 10-00-0000001--0-000000000-000-00-0-0100101 0-00111000001100001100000010000001101000-00 000-1000000000-0011-0-00--100000-0000000100 00-1000000--0000-000-00110000011001001-0000 01-1010000100000-101000010-00101000000-0100

	011000000000000-1010001-000000-00001000100- 11000000-0-000100000--100001-10-000--0100-- -0100-00010000-000000000000-00100-000000-01 0000100000000-0-000010100-000000--001001110 0000000-00101000001-00001--0000-0-000011-01 0001001000000100000010000-0100-100-00010010 00-0000010001001000-000100-0001-00000-10100 0000-000-0000010101000--0100-
949=13 · 73; 300; 276	00-001110011--0-001--01-111010010-01----010 01-10011-101001-10-00-10-00--10-1--10100--- 0111-10-001-100--110-0011-0----10100---01-1 01010000-0-111-0100-1-01-10-0-00---0-1--101 00111001--10-0011-0--10-0-001-00--0100-00-- 10--01-0-001-00-1---0-00-1-0--1010100-1-011 -110-001-00-11-1000010100111-01001010111-10 000-1-0-111-0-001-001-10-0-00-110111110000- --0-01110100--10---110100---0-0-1-0-00--101 111100001-00111--0100--10-0-1-0-000-100-00- 010011100----0-00011011-1-0100--10-01-10000 ---01-1--01000110-111001001000--11010011-0 -11100100-110-----01000--0-0---0-001--0--11 00100--10--101000011101-1010-00--101---010 011-0--1100-0001-0-1--10-001-101--1-01001-0 000-1101001-0011-1-010011-01--110-001-10-11 100-00-1-0-1-1101001110--011000001101-1-100 00-110--0-10-00111011-110100--1011-1-0-00-1 10--0-101001010-010001001--0-01--010010-011 --10100-110--01-0100-1101111-010010-01--110 1000-001-1-10-000--01--110-00-1-01-1--01001 010--0--0100--101-1110-0011100-11000001--0- 111
993=3 · 331; 496; 465	010-11-1-11-0--111111-111111--1-1--1--111-- 111-111-1---1-1-----1--1--11-111---11-1111- --1-1--1-1-1110-111-----11-1-1--11--1---01- -1--11---1--1-1-11-1---1011---1111-----0--1 111-----11-11--11--111---11111-0--11-01--1- 111-111---0--11---10-11111111-1-1-11-11--1 011-1--1---1-----1-111-1-11---0--111-01--1 1--1-111--1-1110-11---1-1--1---11111-1-1-1 1---1111---0--1---11-111--1111-11--1-11-1- 1-111-11---1-1--1111111111-1-1111-1111---11 ---01---11-----1--1-111-1-11--1---1-1-11--- 0--10-111---11---111-0--1-1-1-11111---1-111 111-11-11---1--1---0--1-1-1---111---1-11 11---1---01---1-111-11-01--10-1111-1-1-1-1 ---1011-11-----0--1---1---111-11--1-11-1111 -1---11-0--111--111-11-----1--111--11----- 11--11-1111111-1-11-111111--1-1111-1-----11 --1-1-1-111-1-11-0--1--10-1111111--1-11--1-

	<pre> -----11--11111-1-1-111-----01---1--1--11-1-1 ---1111-11-111--1-1-11-1-11111--11-1-1111-- 1-1-1111--11-11--1111-----1-1111--11----- 1111-1----1--1110-11-1-11-1--1-11--1-111-1- 1111-11-11-1-1----1--111-1-111-1-11-1-111111 1110 </pre>
1057=7 · 151; 528; 496	<pre> 01---1-11--1-1-111----1--1-111-11011-----1 11--111----11----1---1-1111-1-1----1--1--1-- 11-1111--1-110-111--1---1-1-1-1101-1----111 1111---1---11110-1-1--1---1---1---1-1-11- -1--11----1-1--1--1--1--1-11-----111--11111 1111---11---1-1101-1111-1-----1--1-1--1--11 ---11-111110-11--11-----1--1-1-1-11111-11-- -1--11---1--1111111101-110-111----11-1-1-1- 110-----1--1-1-11--111--1---1-1--1--1--1-111 1----1-1--1---11-1--11-1-11----111-1-110--1 -11---1---1--1-1111--11-1111111-1111101--1 -1--1111-----1--111110111--1-111-11-110--- 1---1--1--1-11---11-1--1-----1111--1--1-11 --1-1-1-11110--1111-1-11011--1-----1--1-1- -11--1--11---1-11111-1--1111-----11--1--11 11-1-1--1----11-1-1-1-1-111111011--111110-- -111-11-----1--111--11--11-111--11110--1-1 -1--11-1-111-110-11-11----11111--1-110-1-1- -11--11----11-1--1----11--111101-1-----1-1-- 1---11---11--1-1-1111--1-----1111-111--1-1 --1-1-1--111-11-111-1111101-1--11-11011-1-1 --11---1-110--11---1-1-1111-----111--1--111 -1-11111111-110111-1-110-1----11--11--1--11 11101--1---1-1-1-110-1-111101110100-111111- 1-111--111-11-1111--1111 </pre>
1092=2 ² · 3 · 7 · 13; 528; 496	<pre> 0111--11-11--11-101-1101---111-1--1--1----1 --1--1110-1--111-10-11-111-11110--11---1-1 ----1-----1--111-----1--11---1101--1-1-0 1---1--1110--11-1-1-1-111-11111111-10-----1 -1-11-11--111--1-1-0--111-----11-1-1111--- 111--1-1-0-11--1-11-11-1-01--1-1-0-1-010011 111---11-1-11-101-----1-1-1-110-1110---1-1 111-----1-111--1-11111-0-11111-1101-1--1-- -1101-----1--111--1--111-1-1111--111-1111 11-1-01-111--10111-11111-0-----11--11-111-1 1--11-11011--1--11-1-----1-111--10-1-1111 --1-1--111-----1-11111--10-----1111-1--1011 11--10--1010011--1-11111--1-110-1--11---11- -1110111-0--1--1--1---111--1-111--11-10---1 1-1110--111-111-1-01-11--1-----1-111-1-111- -1--1-1-111-11--1--1011-111110--1---11-10-1 1-----1--1-1-1-1110-1-1-----111--11-1 1-1111101--1--1-1--11111-1--1--1--11111011- </pre>

	-1111---11110--1111101110-001-1-11-11-----1 11011-1-1-1111111-011-10-1----1--1-1111-11 -1111-1-11011-1-111-0----1---1--1011-1-1--- 11-11-111--1-----1-11--1---1-1-11110---1--1 101-111-1-1101-1-11--11---1---11--111-0-11- --11----1-1-1----1--110----1-11-----11-11-1 ----1-1--110-1-1-11-1----1101-1--110-110100 -11----1-1--1111-
1092= $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$; 300; 276	-00000110---1-0000-110001-00-00--1010101010 00--0111-101000-00--1000100-110-1-100000-10 0110-101001110-0--10000-010---110-000-10100 1-0-00--10--0100100001001--1010010-01---00- 00--10-11-10100---00--0101001--00-0110-0011 001--11010010-0--0010000--101110-0-00-00010 -110100--0001-1-00000--0-111-00001-10001-00 -001-10-010-01000-1011-110-000100-1-000-001 -101--1000001100-101-010011-0-01110000-0-0- 111101000110-00110-001-101-0-0010000-001111 0-001010111-0010011101-1--01001--00--0-0100 1-100-0-101001-00111110-00-0-01100-00001-10 -11010-00-000101-10-00-1000-11-000001-01-11 10000--10001100-001--0-0-0-0-0001-01-111010 00-001--000-00--10---000001100-10--0-001-1 0-0-11000010-01-11-01000110100--0-001--01-0 100-0000100--110100-010--1-00100-110--11101 001-100-10-0-0011-0010-10-00-100--11-0-0010 -0-100100001--0-1-010100-00010--101001-0001 111000001-0--1--0000--000--001001110-010-0 1000--0-111-01000-00--000-00--0--0--11000001 -00--0--0100-11010-1-0000-0-0--1-1010001-01 001-01001110110100100001001-1-010010101-110 0100-1-0----10-0011-001-0-0100--00-0--0-00 11001-1-10-001010-100100001110--1010-001000 -0---0100--00011-
1093; 378; 351	0000010000111001-0-1100101-111-0110100---11 -10-11100010-1011000---10-10-00000--000-11- 0-01101-0---001101-1---01--0100-1011-00--10 --1-001--0-10-1100001-1001010111-1--011--10 -1--000--1-0-1--010--10101-0-1-0010-0-110-1 01-000-00-0-----11000-1-10-0-100-1001-00110 0-1--1-0----0110010--11101-10--0100110111-- --01-001000-1110-010-0-010-1-0100-0011---1- 1-0--1-011--00-1-1--0-1--110---1-010--00101 1-11--1111--1001--0110-10--000011-001-10-10 10000-1100-01-1--001--1-10---10010-01110-0- 0-0-1-1-10-1-1000-1010-00-10---000101-011-0 00-10-0-000-1--0-0--11-11-111111100000-1000 -0010---11010-1--100--01-1010010-111100100 -1111-0100100111111-000010-00110--1--01---1

	00-0-01--1-00---0--10111-0--01011101--0--0- 1111101000--110-1-1-00-1-0--0-01111-0-00101 --11-0--11011-1---11--0-11-1101111--001-01 -100001010011-111-1101110---0-01011-01--10 00--010-1101001--1110--10-01-00-000---0-10 0110011--11-1--111---101-0-0-001-1--101---0 -0-011-1-0-11-01011001---110-0-1-0-10-01000 -0110--0--0111110-000-0--0--11111-100011010 1---1-0-0--01-11100110-11--0011-1-1-11-1-11 11-1100111-11-0111100-00-1-----0--001111-1-0 011-0-1-1010-10-10
$1228=2^2 \cdot 307$; 595; 561	010-111--1---11---1-1-1---1-0-1-11-0-111-- -1--1-0-1-1011-1-1-11--1-11111-01-1--1-11- 1--11---1101-11-11-1-11-1-11101---1--1--10 --101--1--11--111-1111----011--1-1-1-----1 -1---11-11--1--101--1-1-1-01--1-----1111--1 --1-110-----1-1111--11-111-11--11--11111 1-1-1-11-111--1--111-1-1---1--1110--1--0-- 1--1100101-11111-111111-11--111---10--11110 -1---1---10--110---11--1-1-11-11--1-0--11 11---111111---011-1---11-1--111-01-111- 1----0---01-1-----1--111--101111--11 -11---11-11111-1-1---01-1--11--0-1-111--1- 11-1-1111--0-11--1--1--1-1-1--1-----1-1-1 111--111--11-1---1-111-1-111--111-11111-0-- -1-0111-1-100-011-11---1--11-111111-1---0- ---11011-11-111---0---0-1111111--1111-1-1- -01111---1111--11-1--10111---11111-----1-0 --1---111--01--0--111--11--1---1-11-1-10-11 -----1-1-----1--111--111--0--11111110--11 1-1-11-1--111---10-1-1-1111-1--11--1---11 -11--1--1-1-1111111--1--1---11-111111-111- -1-01---101---11-0010111-1-111-1-1---11--1- -1--01--1-10---1-111-1--01--10-1--11-----1 11--11101--1-11-1--1-1-1--1-10-1111-1--1111 --1--0111-1111-1-0-1-01111-1-1-1-111-11-1-- 1101-1-11--111--1--111-1-111111-1-01111--11 -0---1--1111-----1-11-1011--111--1111111- 111-1-111111-1--11-11--1111-1111-11111-11-- 1---1-1--0-1---01-111110
$1281=3 \cdot 7 \cdot 61$; 351; 325	0101001110-00-1001001-00-000110100--010001 -0100---0100---0-00-1-0-00---0-0011-0100-10 0100-1-0-0011-01001-1010011-0-0001-0-001--0 100---000011-0100-1101000110-00-110-0011-01 000--0-00-000000--10100-110-001--0-00-01010 011-0-001010100-1-0100-1-0-00111010011-0-00 0-10-00-110-00-110-00--101001--0-001-10-001 010100--010011-0100--101001110-00-010100-1 10100--1010010-0-00-100100-1-010011100001--

	00001100100--10-00--00-001110-00-110-00--10-00--10-00-0-0-0001100001110-00-1-0-00---0100---0-001-00-00-1-0-001-10-0011-0-001-10100-1001001110100-1-0-00--00-00-110000-1101001-10100---0-001-10100-1-0-00-1-0100--10-00-110-0011-010011-0-001100100-010100--10100110100-1-0-00-1-01001--01001110-00---0-000-10100---0100-1101001-101001110100-1-0-001110000110-00---010011-0-001--0000-110100111000-1-0100-1101001-10100--101001-10-00110010011-01001-10-00-110-001110-001--0000--10-00-1-0100-0-0-00-1-01001110000---0100--10-00-1100001-10100-010100-1-01000-10-000--0100-110-001-10-00111010011101001--0-0011-0-001--00001-101000-101001--01001110-00--10-001--0-0011-01001110-0011001001110-00--10100-1-0100-1-01001110-001--01000100100-110-00-0-0-0010-0-00-1101001--0100--10-001-101001--0100--101001--0100---0000-0-0-00---0100--1010011-0100---0-00--101001-10-001-10-00--10-00-1-0100-110-00-110100--101001--01000
1364=2² · 11 · 31; 528; 496	011--00-110---10-00--10-101-1-01-1-01-10100-----000-01-0-1---1-11011--1-1-1011011110010010--0-01--1-1010-01-100-0-000-1---0-----1-01-1001101---1-11--111-1-0-1--1001-11-01-010---0-01110--1-10-10001---111--111011001-00-11--110000--0-110-010-1-1-----110--0-11--1--1110-11-1-1010-1--00-11-11---11-0--1-0-1-1-11-10-1---10--0-1-0--1-010-11-1-111-101-1-0011101---0-001-10110-11-0--1101--01001--1100010110-111-11-10-----11--0110-11-0010010110-0----110-0-0-110010-000--1--01--111-0-100110---1--1-1-1---110-111100--1-101101011-01011-0---1101-000---1-111111-011001-00-1-1-1-00001-01-1010101--111--1-10110-----1-1--001-1--110-0-111001-1-----1-1-01-1110--1111-0--1---0--011-01-110101-1--111-110-11-0011-01-110-001--011011110---011101001-1-100010--0---1---101--11111101-0-1-100-0010-1010--1111010-011100101000111-101-1-1110---001-0--1---11--1---0---1100---110--010-1-0-01-10-11110--000--1--1-1-11-101-001100--11-100001-0--10-010-----1-1--10-1011--111--1-00--11111010---100--111--1--1101--101111--0111-110-1011101--010--11111-11101111001-1011-1010011101-011--0-11-0--10-0011--1000101-011-111--01-1-11--10-10--1100100-0-10-0-1-11-0101011-0010-000-111-011--1--0-1100-10-1---1111111-11-011-1-00-111101-0-0-110-0-

	1101-11-0--000-1----1-1-110-100--0011111110 000110---0-0-0--11-11----0-10-1-1-11111-00- ---11-01011-100----1-1-----0111-10-11-1--0- 111-101-01--0111-0-0----11-111-
$1407=3 \cdot 7 \cdot 67$; 703; 666	01-1-1-1-11-011--111-11111111-1-1-1111----- -111--1-1-----1-1-1-11--1-1111--111--11-11-- -1-----1--11-1--11-1-111--0-1-1--1-- -11--10--1--1-11----1-1101-1----1111-1---- --11-----1-1-1--11--0--11--11--11-1--11-1 --1--1-1--1--1-11-01-1111-----1111--1-1-- 1-----1101-1111-1--1-1--1--0--1-11--1111-1-- -11--1--11-111-1101-11-11--1-11-111-----1- -11-----1111--11--1--10-1--1111-----1----- -11-111-1--11-111--1111-111--1-1111-----1 --111-11--1-1-11-111111-011--1-11--1111- 111111111-1-1-1-1--1101-1-1-1111--10--10--1 1011--1--1--1--1111-1--1-1--111-1--11--111- 01-1-----11011--1--1101-111-11-1--1--1--111 ----1--1-1--1--11-1-1101-11--1-----11-1-11 111111-1--1-1--11-011-11011--11-1--1-1- ---11-----10--1-111-1-1-----1-11-1-11-11--1 11111111-1-1--1--111-1--11011-11--1--1-111 --11--11111-01-1--111-111-----1-----11-1 -1--11--111--11-11111--1111-11-1101-1--1--1 -1-1--1-1--1-111--111-11-111111-1-1-1-1111 --1-1--11111--10--111--0--1-----11--1-1-11 11-1-1--0--1-1--1--1-----111-111--1-1--1 1111-1--0-1--1-111-11-111-111-111111-1-1-- --11-11-11--1111--1-111-111--111--1--11 1-11--1--111-111-01-11-----111--1--111 11111111--1-11-1--11--11111--11111-----1-1 1-1-11--11-1--1--1--1--1-1-111-11--111-01-1- -111111111-1-1--11111-----11-1-1111-1111-1 --1111-----111--1-1-1-1--1111--111--111- 1-----11--1--1--10-1-1-----1--11-01-11111 1--111--111111111--1-11-111--1-111--10 --1-11011--1-1-1-11111111-010
$1524=2^2 \cdot 3 \cdot 127$; 741; 703	011-1-1--1-11--1-1--0--1-----1-1-1--1- 10-1-111-----1-1-1--11--11111--01-----0- -1111-1111--111--1-1110-11--111111-1-11- 11111111--11-11--1111-1-111--1--111-11-- 11-11--1011-1-----111111-111--1-1--1-1-1-0 ---01111-----111101-1-1-----101-1-1--0 11--1-01-111--1-1--1-1--111-01--1--11-11 1---01--11-111011-----111-----1--111--1 11--1-1-1--111-1-1-01-110-1--1-1-0-001-11- -1--11111-11--110-1--11-11--111-11-0--11 1-1--111--11-111111-1--1111--0--110-1-11-1 11-----1-11-11-11011111-1--11-11--1--11-

	<pre> -1-11-1-1111111---11-1111-11111-11111111-1- 1110---111--1-11--1---1-1--1111--11-01---0-1 1-1--11--1111--011--111--1110-11--1-0-----1 011-1111-11----11-1-11101-111-11111-1111--0 -----1--01-1--11-1-----11-111-1-----1-1111- -11-1111-11--1011-101----11-0100-111111-111 1--1-----1-101---1-1-----1----01111-11-1- 1111111-11--1--1-1--1-10--1-101--1-111-1--1 1-11-1-----1-011--1--1-1-11111---1-1-1-11-1- -111--11-1-----1--1--11-111--11--11-1101- ---1-1--1-1-111-11-----111111101-10-1-11-1- 1-1-11-1-0-----1-11011111-01--1110---1- -1-----11111--1--011-111-11---1--1-10--11-- -1-0-11-1-1--1--1-1--1--1--1--1--111111-1 1-1111110---10---111110100111--111-11-1-111 --1--10---1--111--11-111--0-11-1111--1--11- --1-1-1111--1-11-0-1--10---111-11-1-1---1 11---101-1-1111--111--1-111--11---11111-1- 1-11-11---1-111-1-111-1-1-1-----1-01-11-11- ---11---1-----11-1--11--011-0--1111--11--1- 11-01--11-11--1-011--11101-1-1101--1-111-- 1-11-----1-0---1---1-1---1-11-0-1-1-111-011 11--1111-1--111-1111-1----1-1--11---1-111-- 1101---0--1-11--010 </pre>
1533=3·7·73; 528; 496	<pre> 000-101-10-1-1-010-1-1001-00--110-1-0-01111 001-0011-1-1-0010010000110-11101-1-0-0-0--0 0-101-1---1-1000111000--01111--1-1000--1100 0-0-0100-1--010-10-00--0--0-1--1-0-0---1001 -0-1110--110-0-1-1001-01--1-1101010-00100-- 01-101--110100-1100--0-----11-1010-10100110 1-1--11-10-011--001-00-00-11110-0-01100110- 0-1---110101--001001-10-----0-0---00100-1 1-110-100000--001-0--01-----01011-100110-1- -111-00-0-0-100-10---111-0010--1-001-0-00- 11--101001-100--0011-----0101-1-000-0--0-- -11-0101-1-000101--1101-10100-1-00110-01--- 111000---100--011-1111010100--100-10-1-1111 0-0-011100010000-11-1--010---1001-01-----11 10-0111-00110-0---1-1-010111-00--0-111011-0 000111100--00----1--10-01--1001-01111110--0 101---00--0111111011010-10-000-00111-111100 01---00100-1---1--10-0-11-00--001--1--110-0 -11-001101-1011101000-1--001-0-1--1-1-00101 ---001101-11101110001-11001-01-1110---0-0-0 1-001001-1-11--10101-110001011--1-1--0-0-11 0001-011-1-----10-0-11000--0--01110-00-0--1- 0010011-1-110-0-01-1100-10--1101--10-011-10 0110--110-111010011-00000---11-1-00-011--00 --011-1-111-010-10-00100111---1--010-101001 </pre>

	10-011101000101111000-0111-110110-011--00-1 0--101-1-00-0---100-10--10-1---010-11000010 -111-11010-0--1-00110111-11-1-010-011000101 ----111-010-0--00--00-110100-010-1--001101- -110---0-0--1-00--0--01-110-0-01---00--0--0 -1-111000-10-00--01-1-110--0-0111000-101--1 1--1101001--00-10-1--11-110100-11001-0--101 00110-0--1-00-10-1110-11-0-01111001-0-01-11 01-0101-1-001-0-0-1-1--1010-010001-0---1101 1-010-10100-10-111---1010--1-00-1011-11--- 101011--00100--0100--1010111
$1573=11^2 \cdot 13$; 378; 351	000000010001-101001-10-1-1101001-1001-0-010 010000-0110100-1-0--1-10-000--00-0-00100110 000-110-0011-00011-0100--00101-101000010001 1001000-00--1010-000-00--1-00-00--0-001000 001-1011-010100-1000--0000001--0-10100-0001 00-1--001000--01-0--0100--000010001000--00- 0010100-1100-0-10100-1001---100001010--1--0 -001--0110000-0010-0----100000110010-10-000 -100--0-00000--01-00001000-100--1000001-001 111000001--0110--0-000010-0110100-100---1- 00001100-0-010-00-010011100000-1-00-1-00-00 10-00--1-00000-000-1000-001000--01-010010-0 ---0-000011-00010101001--0110110-00-000-100 10-0011-0101000100-0-011-0001001100-0--00-0 010000-00001001110-00110000--10-0-110-00-0- 0-1-1001000-10-----000011101000100000100-1- 1-0100--1010-1-0-001--0-10-10-001110-000000 001-00-1101000010101-1010-00110010--10-000- 000-1110-00-010-11--0000-000010110-000-001- 10-0-00-100---01000001-0-11-100001000--0010 1000010-01--01000110-10--0-00-1100-01001001 1-01011101000000100100000-1100-00-010001101 10010-00-0-001-0101000000-00010000--0000111 01001-0001111000001-01110000001-10-1---0100 ---00001-0000-010111-000001-00011--00001100 10-100-00---000001000010001-01001000--0--01 00100-0-001-1-01001010--1110-000-101---0000 000101011-01001000--0-00100-000-101-0-00-10 01--1000000000-001-00000-100---10000--1010- -00-00--00-01010100-1-00-11-0-0000100010-01 00---0-00-10000---010011000001101101-0-0000 0000011000010100-1100-0010101-11-0-00-1101- 00101001-1011--0010011-0001-001000-101--010 00010-01---0000-0100110-000011100001000000 010-0100010011-0-010-010001-0111--00000-00- -11-0-001-10-1-0001000-000-1--0-0000-0-0-0- 0-000010101-00100-010-110

$1596=2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$; 406; 378	100-00--10-00-0-0100111010011101001--0-00-- 10100---01001-10000--10-00-1001001-10-00111 0-0001100001110000-1-0100-1-00000-1010011-0 1001--0100-110-00-0-0-001--0-001110-000-10- 00-0101001--0000---01001-10-001-001001-10-0 0--10-0010-01000-001001-10100-1-0-00-1-0-00 -110-000-1010001-01001100-000010100--10100- 110-001-10-00---00001010-001010100-110100-0 00000-110-000110-0011-0100--10100--00-001-0 0-00--100001-00100-1-0-00-010100-110-00--10 -001110-00---01001--0-00-110000-1-0-00-1001 00--10100--101000--000011-000011-0-001--000 001-01001110100---0-001-10100-010-001-10-00 -1101000110100-0-01001-100001--0-00-1101001 1001001--0-001-10100-0-0-0001001001--010011 -01001--0100---0-000--010001-0-00--0010000- 0100---01001110100-110100-11000010-0-00-010 -001-10-00-000000-1-0-000110100--0-00-1-01 00--00-00--0010011100001100100-110-001010-0 01-10100-1-0-0011-0-001--0-00-1-0100--0000 -110-001100-001110-00-1-01000-10000-1-0000- --010011100000110100-110-0011-010011-0100-0 -0-00--101001-10-000--0100-010100--10000-1- 0100---01001100100---0100-110-00-010-000100 100---0-00---0-001110100--10-000--0-000--01 00-10010000101001--0-00--10-00--0100-1-000 0-0-0100101010011-0-00-0000011-01000-10-00 -110-00-1101001-001001100-001--000011001001 110100-01010011-0100-110-00-1-0100-1-0100-- 10100--100001110100--001001--0-00-1101000-1 00001--0000-11010011-00000110-001-101001-10 100111010010-01001110-0011-0-000-101001010- 001110000--10100--10100-100-0011-0-00---0-0 0-0-0-000100-0011-0100-110-0011-01001-10100 01-01000110100-1001000010-00-1-0100-1-0-00- -1010011-000010-0-0010-01001110-001000000-- -0-0001-0-00-1-0-001110-00-100-001-00-001-1 0000-
$1612=2^2 \cdot 13 \cdot 31$; 465; 435	001001-10111010-0001-01111-010000101-1-00-0 01110101110100-1-0-00100-000--001-110000-11 011-1-00000-1010-1-010011001-11101001100-01 11000010101--0-01001--0--100000011001101-0- 001-10-11--01000-001--010-00--100----0100-- -000-010-00---0--11-01001-10-111-00001-1001 -100-00-0-0-1-11010010000111-0-000--0110110 -0011-0--0010100-01010--10100-1-0-1--10100- 010110-100001--0-111101001--00-0110100--001

	11-00-00--10--11001001--011-0101000-101--1- 0-000010-11-00-00-110-01--0100-110-00-00100 01100-11100001-10---1100000-10-0--101001100 1---10-001-00-0-110000-010-1-010100---01-10 000001100110--010011-0-----0-000100-1-0-0-0 01-100--110100--10001010100-110-1-1-0-00-11 01-1110000--1001--00-00-010-11-10-0010000-- 1-010001-0--01-0-00-1-01-00-0100-0-0101110- 00--10--1-10-001010--0--0000---0111--01001- 100-0-10-00-1001---001001110111100100---0-1 -0-01000--01-1--010000-0----001001-10101-10 100111010010010001-00---1000011-0-111100000 11010---0100-100---1-0-001-00-01-10000-0-0- -1010-0011-0-11000000-100-101101001110--11- 01000-00--10-0100-11001-1-01001-100010-0100 -1-0-11--0100---011-11000011100---00-001010 1111-0-0010000-1--0-000-10-101-01001--0-100 1010010-0-01--0-00---0---11010010-0-10--000 011-0--1-10100--100-01-0-00-1001-1100-001-- 01--100-0011-01--0101000--0--11101000010--1 100-0011-010--10-00--10-0010010001-00--1-00 001110-1--100000--0101--0-001-0011-110-00-- 001011-0000-010---0101001-10---0000001-001- 01-0100-1101-1-101000-00---0-0-00---00-11-0 -00-11000101010011-0111110100--10111-100001 --0011-00100-010--1110-00-0000-1110-000--0- 10--0-001110--0010-00-0-0101-10-001--01---- 01001010-101-00001-10-1--10-001110010110-00 1100--1-00-001-101-1-
$1612=2^2 \cdot 13 \cdot 31$; 300; 276	000001-1010110010000000--010000000000-1-1000 000-0-00000-000-00-00010-00--00-00-100000-- 0101000000101011-0-00001-0000--000000100010 110-001-00--10000000-00001000100111001-000- 000000101010000000101---10-00011000001000010 00000100-00-0-000-110000-1000-00-00000-1011 011000010000-1010-001000-011-0-00-0001-0000 10010100-0000000-1101-00-0-0000100101001000 -0011--00100--10000--010000-000-0101000-100 -110000010101001000001--010--00-000000-1010 00000000011--000000-0100000-000-00-00010100 -100-00-1000001-0-01000000-010-1-0100001-00 0011000000-000-0110100-1001110000000-000010 0010011-0011000100000010-0100000010-1---0-0 001100000-00001000000-00100-0100011100001-0 00100100000-10-10--000010000--0101001000-0- 1-01001000-10000100-0100-0000000-1-01-00-01 0000-00-0100-000100---001001-1000011010000 10001010-0001-001-100000-010-00100000---0-0 -100-000000-10-0000000000---000000-0-00000

	-000-001000-0100-100-001100000-10-0-0000001 0101--0-0000--00001-000000-000-0-10-00--001 --0000000100001000100-1-0011000100000010101 000000-0--1--01000-10000010000-000000100100 -0-000--1000011000-001000001101-0-10000-000 0--0-01001000-01--0-001000--0000-0010100100 0000011-0--001010000100-0-001000-00-11-00-0 0-1100001-010000100010-0-000110011-00000-0- 0-0010000011-010-100-00000011010000000000-1 1-00000010-000001000100-000101001100100--00 000--0-0100000010-01110-00001100001-000000- 000-01-0-00--001-1000000-0000-000-001--00- 10001000000-010-00000010---1-0-0001-0000010 000100000010010010-000-1-000011000-00100000 --0110-10000100001-010100-000101110-001000- -000010010-00-0000000---01100-010000100-010 01000-00-1-100100---00001-0-000010001010-00 0110011100000-010-00-
1651=13 · 127; 300; 276	10-0010-01111101001-0000-1000000-0000-01000 000-0-01010000-00000-000100-0001-0010000001 0001100100000000---0-0000000--100000--00--0 --010011-0--01001000000-01000000-0000-10100 000-000-1000-00000000-1-0-0011100-00-0000-0 00-0-1100000000110-00000-010-000-0-00--1011 01001001-10-00110000--00000010-00-0100-1000 0001010000-00000-000-11-001000010010000-001 -00--1000000-1-0101000-00--0001--10-0001-0- 0-1-01000-00--0000-0010000-0-00-00101000-01 01001000100000-00---01001-000000-0001-00100 --10000000-000100000-00-0000-01-0-100000-00 -1-1100000-10000-101000010100-0010010000-01 001000100000-00-001100-110000000000100110-0 01000000--00001000101-10000-1101-10-0000--- 0--101000000001-01000000100101100100-010-01 1000000000100-101000--00010000001100--0-101 00000011-0-010001001-0000-00011001-010-00-- 100-001000000110-000000000100-01100-000-00-0 00-000001001--1-0000100000-0001000-101-1100 00001-0010100000111000---000010-00-0-10-001 0100-10000000-000010-00001-00-00-000001-000 1000000000110-1001010010000001-00000110-0000 0000-0-0-000-010000001110-0100-0101---10100 00100000-000000000100-01001-0010101010000-0 0000-0000---00--100100-000-100100001-000000 -0-000-000101-0000-1-0011100-0001101-110000 0100001101000010-001011010001000-0110000000 00100-0-000010-00100-000--00-10-0100000001- -00000000-0-11000-0010-0-0--00000-110-010001 0000-00-000010000-0--01100001010--000000000

	-0011-10000--00-00-00000001001111000000-010 -0100000--0000--01001-001010-0-001-00001100 00010100001000000-10--00-01000-1000-0000000 0-01--000-000-0010001000010-0--0000000-1000 -00000000100011-100100-100011--01001000-0000 01000000-0-0000000-100101000000000000000000 1110001-1000001000--0001001-10000000-00-010 00-01010001-0-0-1
1723; 861; 820	0101111--1111--11-1--1--11--11--111-1-11--1 -11-1-1---1111---1111---11-1--1---1--111--1 --1-11111--11-11--10-1-11---1-11-----0---- -11-11111-11-11111---1-111111111--1--1---1 -----1-11-11--11--111-1---1---1---11-1-11- 0----11-01-111--11---10111110-1-1111-1---1 1111-1-11--1-111-11---1---11---0---0---1-1 11--111---1-11-11---1-1---1---11-1--11-1- 1--1-11111-111-1---11-1-11-11111---111-- 11--1--1--111-1-11---1-1-1-111-11-01-11111 11110-1-1---101111---1---111-1-1-11---10-1 -111111-11--1-11---1-1110-1-1-111--11--1-- -1-1-1--1-1---11---1---111--11-111-1111--1- 1--1111---1--11111-111-111111111--1111-11 --1111-1-1-11-1--1-1-111-1-111--1-1--111111 1111-1111-1---11-1--1---11-1-1-11-11-1-11 -1-----111-1--1-1-1-1--1--11-1111--1-1-1-11 11--11---11111-1-1-1-11---11-11--111-01-11 -11---111---1-1-1-1--1-1-11-11-0-----1-11 --11---1--1---111--01-11-1-----11---1- 1-----1111--1-1--1-11-1-1-111-1--1-1-1111-- 1111-01-1-1-111---11-----11110-1-1-11-11- --11-01-11--1-1111---1111-----11110111--1- -10111-11--1111---1-11---11-11111--111-1 1-1--1--11---1110-1-11---1--11-1-111-1--1 1--1---1---1--1-1--111-1110-1--1-1---11--1 -111-1--1-1-111---0---11---1--11--111--1- -11111--1--1-111-111-0-----1-11-11---1--11- -1--11---1-1--1110-1-1-1-111---1--1--1--11- -1--1-11-11-11110-1-----1-----1111--11--1-1 -11110111-1-11-111--01-11--1-1-11--1111-- -----1---1-111---11-----11--1-11-1110111- -1----111---11---1-1-11-11-111--11-1-111--- -----11-111111111-1--1-1---1---1-1111-01-1 -1111-1--1--11-11-1-1-111--11-11---11-11--1 1111---1-1-1--1111--11-1---1111111-11-01-1 1-1---1--1-11-0---0---1111--1---1-1---0-- -11-1-11111-1-1--111-1111-11--10-1--10111- --1--111---1-----1-1111-0---1---1-1111-11 111-111---11-1111-1-11111---1---10111--111 110

$1729=7 \cdot 13 \cdot 19$; 561; 528	000001-101---10100--10-1--101001110111110-0 010-0-111-01001110-11-1010001-00-1-10-0001- 0--111000011-001-1-0-00-10011-1101001--0-0- 1100000110--1-10-001--0--11-0-001--01-1--01 00-1-00111-01001--01--1-0-001--0111010-00-1 -0111110100011011-0-0100---0101--01001110-1 -10010000101-1110-00--00-1-110100---0-11-10 -001-101110-01001110-11-10100--10-10--0000- --0110--01001-101-1--000011-0-1--00-001--01 -11-01001-100-0-10100---0-011-010011-0-111- 0-00-110-----000011101-11-0-001110--11-0-00 0-10-1---0-001-10--0-10-0001-011-1-0-00-1-0 -11-1010010-0--0010-001-10-1-1001001-1011-1 -0100--101-1110-0001101-1-10100---01--11010 0-110---1-0-00-110--1110-00-1-0111--0100-01 01111-0-0011-0011110000--10---1-010011-0--1 --0100110-----10100-1101-1-10-001110-11-101 0011001-0110100-1001-1110100--10110--0-0011 -00----0100--101110-01000-00--1110100101011 1110-0011101--110-001--01-0-10-00--101--1-0 -001-1010--1010011-010--101001-00-----0-00- 1-011-010-001110--1--00001-00-0-11010011-00 -1--0100-1-01-1-10100--10-1--10-00--10--1-1 0100---0--1-00-001--011--00-001-10-0-110-00 -110111--0000-1101--110-000110-001001001--0 111010-001-10111-10-001--0--11-0-00--10---1 10-001110-11110-00--00-11--0-00--10--110010 0-1001----0-000--01-1-10100-1101-11001001-1 0-11--0000-110-----0-00---0-1-110100--00--- 110100---01--1-0100-0-0-011-0-00-0-0--11101 001--010--10-00-1-0-1--10-001-101-0-1010010 -0--11-0-000-101-1110-00--10-111-010011-0-0 -1101001-10-11-101001-1001-100100-1-001-110 10010-0-1--00-00-1101101-0-00---0----10-001 00001110100-110---10100-110---1-01001-101 1-1001001--0---1-0-001110---0-0100111011-0- 01001-100111-0-00---01----0100--10-11110-00 --100010-010011101-0110-001--01--11010011-0 --1--01001--0-11110100---01-111000010101--- -00001-10--10-0100-0-0-1--10-0011-0---1-010 0--00--10
$1767=3 \cdot 19 \cdot 31$; 630; 595	0000011-011101011-0-11--1---11100001-0101-1 00--1-0--10-1--00100010----00--0-1-1-0111-1 111-0-100-0-1-10-1-0-111001110010--11-00100 11-011-0---1-01---0-110---00-01-1-01--0---1 00101-11-111100010--1-0-1-01-1--0---0----1- 010010-1100-1-00-01-011-1110--1--00101-1-0- -10011-00-111-011-1--00001-100-0-01---10101

	<pre> -1--1-1-1001011--01-10-1-1100---1----0-1000 0101-0-1101-01-0-1--1-11-1110010-1-0011-0-0 1--0-11-0-11-00100101--10-0-011---0----111- 110-0000--1100-1011-1-0----0010-11100-0101- 01110111--01-1110--10--00-001--011-0011--00 -0-11111-110010---01-101-111001110--1---00 010--1-01-100010-01--1-110-11-0010-1--0---0 10-110-1-----0-111-0010-1--00-001-1-101-0-11 -1111-00101111001-001---0-01111-1-10-001001 0-0--10--10-011-111--111100-00-1101110-1011 011--10--1100001011-10--001---10111111---1 000-0-----010-01-----00111100-011100-0110-0-1 101--1101-1--101--0-0010-0110-11010-1100010 111-1--100101--10-1-01-11-010---0-111--00-0 1---001-01001001-11--1-011100-01-110---0--0 --001-11--0--1100100-11000-01-1110--1011111 -1100-0111-0-010-0--10-10--111111000-000100 ---0-111001--1-111--11001010--0011011-0-01- -11101--10000111101--01-1-101-----11--1-100 100--101100--1-1010---100-01100-0-1100--10- -1--01-1-1-1011-000-0--0-0--101-0--0100-011 -----000011-10--10--11-0--011-011-1-001011- 10-010--00-01-1-----01100-011--0--0111010 -0-1-1-101-100-010--0-0000-11-0-11-011-1--1 0010111-01-00110-1011-01-1-1-110010100-0--- 0-1-1-01-11--1-11-10010-10101010---00--11- 11011-10010111-011-00-1110--111-1--11-00-0- 0-10-1101111101-011-1001010010--1-0---0-111 10--1-11--0-1-00-01--001--0--1010--00101--1 --0010111101--01111-01110-1-01--10000-1110- -001110000-1-1--1-10100-0-11101--01--100110 1--11101-00-0110101-001011-0-1--101-----00- 0-11-0-1-0---010---101-----100-0-10000--011 ---00-1-----1-00101-100-100-11-10111---1- 0-1- </pre>
1767=3 · 19 · 31; 406; 378	<pre> 0001011--101100-1100001110-01001000-0-011101 -001110000010-0000000010----00-10011100001- 0101001000-01-10-0-100-10000000000100-00010 11-110-100111000010010000-00000-1-110-00011 000001-0-0-000000-0-1-1-0-100--10000010-0-0 01000-01101-0-0000110000--000100-000-0-1--- 01100--00000-1010100-000-0-100-0-1001--0000 1-0-01001000101--010100011-00001-0-01001000 0001---01-0001100001-0101001000001-0110--00 --10000100101001000010--1--0-1001-100001-010 -00-000-0-11100110011100001001010010001001- -101100--10000--0-0-00-000-01---10-100--100 001-010-00100010-----101100-1-0000-00-010000 0010-1-0101100-010000-1010100-000101-----0-- </pre>

	0011-000011000-00-000001--0000100---00001-0 -0-00-00010111-00--001-10000--0-0100-000001 0---01-00-010000--0-0-00100010-11010110001- 00001-0-0-000000101-11-001001--0000--010100 000000---110--001-10000--0000001000-010---0 1-0011-000011000100-000-0011--0110011-00000 -010-00100010--1--0--00-110000110-0-00-0001 0----00--000100000-1010000100010-11--0-1000 -10000--0-0100100010-11-00-000-1-00000-010- 0010001011-1-011001--000011010-00000010010- -0--00-100000-10101001000-00--1001-00101000 0--000100000010111110-000---000011010100100 0-0--1-100100---0000110001001000-0110--01-0 0--100001-010-00000010-0-1-01-000-100001001 0100-000101-11-01100-110000--000-00-000-01- 1--011000010000110-01001000-01--1-0-100-0-0 000-10-00001000100--1-00100-11000010010-001 000-011--100-000--00000-010-001000-000-0-0- 1001110000-1010-00100010101-101-001-00000-1 010-0010000011-110-100-1-0000--010100-00010 0-11-01000-1-0000--0100001000-0-1-0-0--00-1 -00001-0-0000-000-0--0-10--00-0-00000-01010 0-00000111110--00-110000010-0-001000101111- 00-00-0000001-0-01001000-0111-10-1001100000 -1010-00-000-0101-100000-1100001-010100-000 1011---0-00010-0000-00-0100100010100-00-100 1-10000110-0100-00010-101-00-00---000011010 000-
1893=3 · 631; 946; 903	010-111--1-1-11--11---1--11----11--111-11-- --1-11-1--1011-01--11---1--1-11-11--1----1- 1-----1----1----1-111-11---1111111-11-1-111 11----1-11-111--1-1-1111-1-11-11-11---1--11 ----111-01--1-111---1--1-1-11111111-01--11- 11-11-1--1-1-1--1-1-11-111111-----11-1-1-111 -----111111-1111011---01----11-11-1--1011- -11111011-11111111-1---0--1111--11-1--11111 1-0--1-11-1-1-1-1111--111---1111-----01--11 111---1-111-0--1-1-1---01--1-1111-11-11---1 --111-1-111--10-11--1-1--1-1--11--1--111-- -1---1-11-1110-11110-111-1--1--1-111--111-- 11---1011-1-1---1--11--11-1---1-11--1-1-111 -11111-1---1111111-1-11--1---1111-11-----1- -111-1-1--1111--11-----11-----1--111-1-- 11-11-1---10-1111111---11---111-11--1-1-1-1 -11111---1---111--1111-----1-1--11--1-1-- 11-1-11-111-111110-11-0--1-111-111-1--11-0- -11---1-11-11--1-111--1111-11-1---1-1-1--- 1111111---111--11-1--1--1-11--11-111---0-- 1-1-1-----1-----1-1--1--11111-1-----11-1-

	<pre> -1----11---11-01-----1011--11-1-111--111-1- ----1-1-1----111--1-1-1-1-111111111-1-1111- -11-1-111-----10-11-1--11--1--1-1-11-----1 -11-11--1-1-11---0--11-1-111--1--1-----10 -111--1--111--1--11-11111111--1----0--111- 11-1-1-11-1-----1-111-1-1111--111-11---0--1 --1----11-111-1-1-1-11-----01--11---111-11 1--1011----1-1111-11-1--11-11111111-11-1--1 11----1--11-11111-1-1--1--1--01----1--1- -1----1111-1-11-1-1--1-111-01-----111-1-- 1--11-0--1-11--1-1-1-11---1-1---11-111-1-111 11---1--1-----11-1--111-111--111--1-1--1- --1-11--1-1--1-11-1-111--1-1111111--111-- -1---1111--1---1-111--111-111-1-11111-111 111-1111--11111-1-11111--1---1-111--1111-1 -1-1-1--11-11110-111-11--1--10-1111-1-11--1 1-11-1-111-1-1-1---111--11-11--11-1-1111-- -----1--1-1-----1-1-1111011-111--111--1-- 1-----1111111--11-0--11-1110-11--11111-1-1 1-----111111-1111011-1-----1--111--1-1- --11-1---1-1-111--1--11--111--1-1--111-- --11--11-111--1111-1-111-111111-1-1-1---11 -11--1-1---1--111-11-1-1-1-1---0--11---1111 0 </pre>
$2044=2^2 \cdot 7 \cdot 73;$ 528; 496	<pre> 0101001-10-001-10-001--010001-0-001110-00-- 101000-101001010-0000-0100---00001-10100-1- 01001-10-00-1-0100-0-0-00--10100--10-00---0 000-0100001-101000--0-00-1001001-10100--10- 00-1100001110-001-10100-1-01000-100000--0-0 01110100-1-0-00-1-0-00-110-00-100-000--0-00 1-10-00-100100111010001001001-10100--10100- 0-0-00-1-0-001-1010011-0-00---0100-110-00-1 10100-1-010011101001100100-1100001-10100--- 01001010-0011-0-00-110100-0-0-001100-00-000 100-1101001--0-000-10100-110-00-1-0000-100- 00--0-00--100001110100-10000011-0-00-010-0 011-0-001--0-00---0-000--01001--0-00---0100 0-10-00-0101000010100--10000--10-001--0-001 1-0-00-11010010-01001110-00-1-0-00--1000010 10000-110-000110-00-100100--10-001110100--- 000011-0-00--10-001--0-0001-00000-10-00-110 -001--0100--10-00-1-0-00110010001-010011-0- 00-100100-110-000-00-0011-0100---010010-010 01--010011-01001110-001--0-001-10100---0100 -110100-110-00--00-00---00001--01001--0-00- 0101001-10-00-1-010010-0100--00100-000100-1 -0100---01000110-00--0-00-110000110010011- 0100-1-000011-01001100000---0100-0-0-001110 -00---010011-010001101001-10-001--0-0001101 </pre>

	00-0-010000-01001-1000011101001110-001110-0 01110-00-0-0-001--0-00-110-001-10000-010000 ---0-0001-0-001100-0011101001--0100--10000- 1-010011101001110-0001100000-101001-1010011 10100---0-0011-0100--00-000-10100110-00110 0-001-101000100-0011101001--0-00-0-0-001110 1001110100-110100-1-010011-0100--101001110- 001-10100-100-00--10000---0-00-1-0100-0-010 01--0-0011-0-00-0-0-00-100100-00010011-0-00 11-0-000--0-00--10-001110000--00-001-10100- 110000-1-0-00--00000-110100-010-00-11010011 -0-001-1010001-0100--10100-1-01000--0100-01 010000-0-00-1100001--010011-0-00-110100--10 100-010-001-10-001110100-110000-0-0000--10- 0001-0100--001001--01001-101001-100001--0-0 01--010011-0-0001100000110-0011-010011-0100 1--0100---0-00-100-000--0100-110100--001001 1-01000100-00-110-00-1-0100-010-0011-0100-1 10-001-10-00--1010011101001-10-00--1010011- 0100-100-001-1000011-0100--10100-010100---0 100---0100-010-00-1001001000-00---01001-10- 000-10-001-10100--10000-100-001--0100111000 01--0100-100000-1-01001
2047=23 · 89; 528; 496	0000001010000000000-1101-0-10-100-01000-010 000--10-11000000-0001000000001-0-01101-0111 1000-01000100-10-0-0-10000101010-00000011-0 00-10110100110-0001010111100000--1001000000 0100001-01-01-10--00--1100-010000100-10001- 0---010000-0-001110--010-01--1-001-1000100 -011-1-01--010100100010001110101100000-0001 ---01-0101100-000101010000110-0-010-10-0001 1-00010-01-00-0-10001---010100000-001110000 0001100-01-01-0100001--100---0--00100001000 -0---01-000001111100--0--00100--00-1--0-011 --0-0010-0100-0-0111000--0001-1--01--10-1-- 1--0010001001001-0000011000010110111-011000 1010010-000001--010-0-10-1---0001--100100-1 0100101--010001100010001-0-00000-101000--01 -00-1-0---1001-0010-001011-10-0-011100-0001 --00-01-10--111010-0011-1---0001-0010010000 0101-1010-1011100-0-0-000-000011100000-1011 ---0110-00010010-000110-0-1100000-0-0-001-0 -1000-1101000-01100-0-01-000-0-1-00010--000 100000-11101110110-00-0-001---0000-1-0100-0 --0-00-110-0-000--001010-0-100--000-1100-10 0110-00--00--00111010000-0----100000011--11 -0--0-1-----1100-111-1-111-0-00-001001000-1 0000110000010--010000000-1-1000000000100110 110-10101---00111-00010011001000001100-1000

	000010-11-0-10-1000-00---100--010-1-1--0-00 0-1--1-1100000100100-01-0-110-0111001--1-00 010000-00101-0000001100010-10-100-10-0-0001 0---1000110-0-00-0--001--0000--110-00--0-1- -1-000010-001001101-100001-001-1--01-00-100 -0011-1010000--00-000-10----0101-0011--1100 0-0-11-111-011-00-001001111-010---0-0010001 1--100001-0100100000001010-110-10--10001000- 0100-10101-0001-00--100--010000-000010-0-10 101-0-0-01000---10001-10-----10111100-0010 -0010000-1000--000000101-00--01-01010000101 0001-101-000--0-0011--0--110000100--1-110-1 0000-00-000101-0101--01--001--00-0-00-100-0 1--00001011100-0--0-01001-000-0-0-0--1101-1 0001-1-1-00101100-00101-100-1000011-1-0-000 000-00-010-10-100001--00---10--00-0--111100 1-000-00-0000-0-1000011011100--01--10010--1 -00-0000-11-1-0-0--0100-0011100--10-0----10 -00---001001110100110000-0001-001-0-1-0--11 01000-0001001110-1-01-10-001----00-010-1--- 1-0-010100100-0101010-110-0101010-001--0001 -1000010000010000001-01100
2149=7 · 307; 595; 561	010100-1-0-00-110-00--10-001-00-00-1001001- 10-0010-0-0011-0100---0100-1-0100--10-0011- 0100-1-0-000110100--101001-10-0011-0-001--0 -0001-010011-0-001-101001-1010011-0-00---0- 0011-0100--10-0001-0100-1-0-00-1-0-00-1-0-0 011-0100---0100--10-00---0100---0100--10-00 -110100---010011-0100-1-0100-1-01001--0-001 1-01000100100--10100-1-01001110-0010-0-00-0 -0-001110-000--0100--101001--0100--10-00111 0100--10-00---0-00-110-0011101001110000--10 1001-00-00--10-00---010011101001100100---01 001--0-00--101001110-00--10-00--00-00---010 0---0100---00001--010011101001-10-001-10100 1110100-1-01001-10-00--10100--10-00--10-001 --0000--10100-01010011-0-00---0100-1-0-000- -01000-10100-1-0-001--00001110-001-10100111 0000-1-0-0011101001--0100-110-00-110-00-1-0 10011-010010-0-001110-001--0100-110-00-0101 001--0-001--01001110100-1-0-00111010010-0-0 01--01001--01001-10-001-10-00-1-01001110-00 1110-00-1-0100--10100111010011101001110-001 1100001--010011100000110100--101001-10100-- -0-001--010011-0-00---0-001-10-00-110100111 0100-1-0100--10-00-1-01001--0000-1-0100-110 -00--00-00--10-000--0000-1-0-001-10-00-110- 000110-001-101001--0-00-110100---0000-1-010 00--01001-101001-10-0011001001110100--10100

	-1-0100-110100--101001110100-1-0-00-110100- 1-0100-1-0-001-00-00-110000-11010011-010011 10-001--0-001-10100--10-001--00001100100-1- 0-00-110100--00-0011-0100--101001-10100---0 -00-1-0-0010101001110-001--0100---01001110- 00-1-0-00-11010011-0-001-10100-110-001--010 0--101001--010011101001110100-0-0-00-1-0-00 1110-00---0-00-1-0-001110100-110-00--10100- 110100---0100--00-001010100-100100-110-00-- 10100-1101001--0000111000011-01001--0-00-0- 0-00--10-00-110-001010100---0-001110-001100 1001-10100---010001-0-00-1-0-001-00-001--0- 00-1-0100---0100-1-0-00--10-0011-0-00-11010 01-00-001110-001-10-00-110-00-1-0-000-10-00 --10100-110-001-10-00--10100-110100-110-001 1-0-00-110-001-10-0010-0-0001-0-00-000000-1 101001110-00-1-01001--0-00-110-00---01001-0 0-000-1010011-0-00-11010001-01001-10100-110 -00-01010011-01001--0100--10100---000010101 001-10-00---01001--0000--10-0011-0-00--1010 0-1-01001010100-1100001110-00-110-00--10-00 11-0-0011-0100-1-010011-010011-0100-110-00- 1-0100--10100-11010011101000--0-00--10100 0
$2212=2^2 \cdot 7 \cdot 79$; 1081; 1035	011---11-0-1-110111--11---11-11-111101-11-- --1-11--110-1-101-----1111-1111---1--1--0-1 1-----11-1-1-1-11-1-1-111-111111-----1-1-- -1111-1-1-10-1----1-11--011-1111-11111--111 1---1-111-111111111-1-1--1----10---1-111-11 -1-111-1-111-1--1111-1--1--1111111--1-1--11 ---1101111--1----11-1-11--11--1-1-01-1-1111 --11-1-11-11-1-1-1111----10-11-11-1-101--11 11-1111111-1--1--011----1011-1-1-1-111-1111 1-0--101-111-1--1--1-11---1-1-111--11-1---- 1---01---110--1-111-----11---0--11-111-111 10-----1-1111111-11--1-11-1--1-----11- 111---1---11--11-1---1-11-1111---1-0-001-1-- ---01--1-011-1-1-1-----1-111--011-1-11-11-1 -1-101--10---11-1--1---1111-1111-10-1-1--11 111--11--1-11--111-111--1111--111--1----111 --11-0--1--1--1-1-0--1--1--11-1-1--1-111- --1---11--11-11--1-111---0--1--1--1-11--1 --111-11-1-11-11-1---11--1-1--1111111-1-0 11-----1--1-1--111111111--1011--1--1-1-1- 1111-1--11--1111---0-1-1111--10-----111-11 --111---1-0----1110--11--11-111-11--0111 0-111-11-1---11111-11--1-----111--1--0- --1-10111--1-11--1-1-110-1-1--1---1101--1 1--1--1--11--1-1--1111----1--11-1-111-1-1

	<pre> 11-1-1-1-11-111----1--1-111-0100-11-11--0-- --101-11--11-11----111-1-0---11-1----11--10- ---0--1-1--1-111-1--1--111-0--11-1-11----- ---111111-111-1-1--1-1-1111-11-1-----0 111-1----11-01----1-111-1-11--1-11-111-111- 1-1-1-111111--1-110-1----1---1111-11111-1 111--1-1111--11-1-1-11-----11--1--101-1--1 11-1--11111--11--111110-----1-11--11111--1 111111-1--1-110--111-----0--11-1--1-1-1-- -111-01--1-1101-----1---1-1--0-110111-1 111---1111--1-----1--11---1-111-10--1--10 -1111-11-1-1--11-101--111-111-1-01-1-1-1-- -1-1-1--11-1111--111-1-1--111-11--1--11 --1111-1111--1-11-11101001111-1-10--1110-1 1111111-1-1111-11-01-----111-----0--110-1 --1111--1--1-111-1--011111--1-1--11--1111 --11-111-11--1-11--1--111-1--1--11--0-111-- -1111101-111--1--111111--1--1--1--11--1 11--1111-11-101--111-1111--1--11-111----- 111----1-1--11-----11-1-1-11110-11-1-111-- --11-1-1-1-1--1101--111-----11-1--11--1 --1-11-101111-1--110-1-1--1--11--1--1-1110 1-1--1-01-11--11--1--11-10-1-011-111----1 -11-1-111--111-1-1-11-11-111-0-1----0-1--1 ---11-----10-----1--1--1011--11--111--11 -11111-11-1--1-111--11111-11111-11111111-- -1--1-111-----1--010 </pre>
2257=37 · 61; 1128; 1081	<pre> 0111---111-1-----1-1--11-1--111-1-1-11-- --1-----111---1111-1-1--1--1-11-----11-1-11 111---1-1-1-11-----1-111--11-1-1-1-111----- 1--1-1111-1-1-11111--11-1-1--1111-110111-11 111---111--0-----1--1-11--1111-1-1-11--1- 1-1111-1--1111--11--11--11-1-1-11-1111111 1111-1-11--111-1--1-11--1--11111--1-1111 --11-1-1-111-1-1-11--1-----111-1111-1111-- --11---1-1111-1-11111111-11111--1--111-- 111-1--1-1-1-11--11-11--1--1101---1--1--11 ---10-11--1111---1---1-1--111-111-1-111-1- 11-1--0-11--1-11-111-11--111-1-1--1-1--1 -1-11--11---1--11-1111--11-11-1-111-----11- -11-1-1-11--0-11-----111---1-1101--0---1-- 111-----111111-1-11-01--1-1-111--11-1--1-- -11111111111--1-1-111-1--111111-1--1-111-- 0-1111-0111-011111--10-1111--11-11-1101--1 -1-1-----1-1-----1-11-01111--1-111-11--1- 1--11111--10-11-1-1-111-11-11-11-0111--1-1 1111--1-1-1111111-111-1-----1-11---11--1 -111--1-11-1111--1-1--1-1--111-1--1-1-1-1 1---1---11-111--111--1--1-11-01111-1--11-1 </pre>

	---111-11-111111----1--1-1--1-111111111-1-- 0-11-1--11--111--111-1---1-111111-1-1-1--1- --10---1-110111---11-11---1-111-----1--1-1 11-0111--0---1-11-1-1-1-1-----10-11---1 ---1-1-1-1-----11--111--111111111---1--1101- -----111-11-11--111-11111--11111---11-1-1- --1-11-11-1-11--1111-1---1-11-11-01-----111 11-----10-----11-1-1-1-11-1-111-01--1-111-1-- 1-1--1-----1-----10---1---1-1111--111--1----- 1-1--1--1--1--1--1-1--1--1-11--10---11-111 11-1--11--111-11-1-11-1-11-1---1-----1--1--1 1-1--1-1--1111-1---1-1-11--1111-110111111 --11011111-1-111-11--11--11-1-1-11-11--111 -1111-1---1---11---11-1-1-1-1--0---11-1111 1-111--111--111111-1-1--1111-1-----1-11--1-1 11-----11-----10-11-11-----110111-1111-11-111 111-----111-11--1-111--11-1-1-1-1--1--1--1-- 1111-1-1-1111--1-111--111---1--1-----1-- -11-11-----1-----1111-111--1101-11--1--1-- 1-11-111-111-1-11-1-11-1---1---1--1-111--1- --1---11-011111111--1--1-11-11-1-1-11--1--1- -1-1-1--0-11-1---11-1-11--1--11--111-1111-0 1---11-11-11111--11-11--11---11-11-----1111- --11--0-11---1--0---1--1-1-111-1---11---1 11-1111-----111--11-01--1-1-----1101111-- 1---1--1111--111--1111--111-----1-11-11----- ---1--11-111--1---10-111-11-11--1---1-1--1- -111-----1-1-111---111-11111-1---11-- -111--1111--1-1--111111--1-111111--1-----11 1-11-----11-----1-111--1--0-1111111-----1-- -1---1--1--11-11--11-010
2263=31 · 73; 820; 780	00-0-1--001-0-1-11011-1111-01-100-0-1-10--1 01-11001111110--10100-01-1-0--00-1-11010--- --1--1100-0111001--0-1-110--11-11--0-100-01 01-00-00--1--0--101--1--110010---0--10--11 -0111-0--1-----00-0111-01-10--10-010100-1-11 1-0000---0--0011--10--11--1--1010010---01 1-0-111-001111-1-01110000-1110-1-00---10--1 0-1-11-1-00-0-11-00-1010--10-1--1---11000- 0-1100--0000-1-01---10111-1-00001--10-1-0-1 -1-0101111011-1-0010--1-0-010---1-01-101001 -1-1001001-10-1-0011-10---1--1-11100-010-1 0-1101---01-011-11-101000000--01--01-0110- ---10--1--0010---0--00--1010---1-11111110 0-0-1--00--00-0010111--110---00100-11011-0 1---101-101-1-0---00-011-10---0---110101-10 100-110010110-011-01-0--0-1---1111-110000-1 10011-0-111101-1-0-11--11001001000--1011110 0-1---11011--001011-10---00--1-0-1-----

	<pre> 10010-1--0--001-0100--1111---01-00101101011 10111110--1-1011-10-0010--1-01--010-110--10 1110-00-00-01-1-0-11011110011-1-1-----0010 01--0011011---0-11-1101--1-0000110-001-0--1 --00--1-1---0-100-01-1-011-01-011010-1-1-11 11-001010--0-1-00-110000--1-1-111000-01-1-0 1-10-11--0-1--1110--1100-01--10-1101-1010-- --101--0100010-1110-0-0-11--00111---111-00 10110-0--00-11-101--1111-0-1-0010011-0-0001 --1-01-0-----111000-0--110-1101-1100--10--- -1--100-011100-1-01-01-00-00-111-1-10010--1 10-010-1---01--1-11--01-0000--1101-0--11-0 -----110-110000011--01--011---01-011--111-1 00-0111-0-1-001---0-11---1--10-0010110-0-0- 0011110111-01-111-100-0---101--0-111-00---1 0-111--0010-11-001-01111001-0-00----1100101 --101--0----10111-----11000100--10111011-1 -010---1--0-01100100-1-0--10101-10111-0-111- 10010--1-0-0-0-01-0-1011-111-1-1100101-1-0- --0100--0--11110-1--10010-1-101-1011---01-0 --1101--100-01---0--00111--00-1-0100111-00- 0101101-1010-110-11111-111110010110101-10-- 1-101-10-1--1110001010010-1-0--10-0-1111101 ----00-01--10---0111100-111--1-1-1100001-11 0-0-01010001---1-1-01--00-010--01110--1-101 -1-01---0--00-0-1110---0011--01-0-110-00-10 010-11001110--1010-1-11-1-1--100101-1-01110 -1-1-0--1-10--11-10010101001--01--1-011-11- 1-0-1-00-0-11101--0101--001-11--1-1--00100- 1101--01-10-0011--111-10100-0-1100-110---1- 0-11-110-111000-0----011-01-0--0111-011-010 0001011--00-10---1-0---1--11-1--001010110-0 10----1011--111011-100101110000101111101011 --11-10-00-0-1--011101-10-01-01--111-110010 110101-101011-0100111---11 </pre>
2263=31 · 73; 528; 496	<pre> 000-01---00--0011-0000--0100001000-01-11-01 -00-100000--000100100010-1-1-0010011-000011 0-0100100010110-10-00011-0000-1010100100010 01--000000--100000-0-01001000-0---1-01-00-1 10000100-0100-000-011-0101100-01000000010-0 0-00010---1-00-001--0000-1010100100000---11 0-100-110000--010000100000111--0-1001--0000 010-0-00-000-011--0011001--00001-0-01000000 10110--0010011100001-010-00-000-0--11-0-100 1110000--000-00-00010-1---0110011100000-000 1001000101-11-0-100---00001-0-01001000100-1 1-01-001-10000--0101001000100---10--0001-00 001-0-0-00-00010-----00100-0-0000-1010-0010 00101---00-10000-000011010100-00010-11110-- </pre>

	001--00000-010000-000-01-1--0-00011-00001-0 100001000-010-110--000-1000011010-0010000101 10110--00-1-0000100101001000101001-01100-10 000011010-00-000-01-11-0-1001110000110-0100 1000001--1-001000100000--0-0100-000-0101-10 1-00-1-00001-010100-000-0-1-110-10011-00000 -010100-00010-1-0-01-00-100000-10-0100-0001 01---001-001-100001-000100-0001010-000-100- -10000-10-01001000-0-1-110-10001-0000-10-0- 00-000100--1-0-100-1000001-010-000000-0-1-0 101-00--100001-0101001000-0--1--01100-0-000 01-0101000000010111--0--00--10000-10-0-00-00 01010-1-00-00---0000--010000-0001011-0-00-0 01110000110-0-000000-0-11--01-00-100000010- 0-001000101101-0--000110000010101001000-0-1 1--011001-10000-1010100-000-0-11110--00-110 000110101000000-01---10-0001-10000--0-0-001 000-011-0-0-1001-1000011010100-000-010---0- 000-1-0000100-0-00100010--1-10--00-1100001- 0-0-00-000-011--00--00-100000100-0100100000 --1-10-0001--0000110-0100000010--1-10110011 10000110-0100100000-1-1-01100---000010010-0 01000-0-1---0--000--0000--0-01001000-0-1-0- 0-0000-10000--000-001000001-111011001-10000 11010-00100010-----00-00--1000010000-00-000 10011110110011-0000--0-0-001000-01011101-00 ---0000010-0-00000000001--0-100-010000--000 100-00010--1--0-000-100000-1010-001000-0-11 --0-100-0000001-010000-000100--1101100---00 00100-0100-000-01111-0-100--100001-00000010 0010110-101100-0-0000--010-00100000-1-01011 0011100001-0-0-00100010010010--001110000--0 10000-00010111110-100--10000--0-0100-00010- 11-10-000-010000110101001000101101-01-00111 00001-000-00000010----10-1000-1000010010000 0000-01---001-001110000-1010100-00010011--0 1-001--00001-010-00100000110-001100-1-0000- 1010100-000-01---101100-010000-1010-0010001 0101-101100-110000--0-01001
2379=3 · 13 · 61; 780; 741	000001110-1-110000-1-001--101001--011-11000 01--0-1-110100-1-01-1-10100-1-0-0-1-01001-0 0-11110-001110--1--010011-011---0100--10111 1-010010-01--110-001110-01110-001-10---1-01 0001-01-11001001--0---1010011-010---00001- 10-1--10-00--10----10100-1-0-111-0-0011-01- 0-10-001-101--110-001--01-11-0-001--0-1---0 000111011-110-00--00-11-10-001--0--0110-001 -101-1-1-10100-0-01111100001-10--1--0100---01 10--01001-101----010011101-1--010011-01--11

	0100---01110-0-000-10011-10100--10-11110-00 --101----0-00---0-1--10-00-1101--1-01001-10 --10101001-10-111-0-00110011-1100000-101-11 -0100011011-0-0-001-10-11--01000--0-111-010 01--0111-10-00111011-1001001010-0-1-0100-11 01--110-001110111--0-001110-----010011-0011 -10100--101-1100100--10---1101001--011--101 001010-11110-0010-011--00-000-10---1-0-00-0 10---110-001-1011-1-0100---011--10-00--00-- 0-10100-1-0-11-10100--0-1-1-0-000--01-1--0 100---0-0-1-0-00-110-11110100-110--1-10-001 -1001---01000-00---110-001-00-1---0-001010- -1-10-0011001-1-10-001-1011--101001110-1--- 0000-110--10-0-0011-0---1-0100-110---10-00 -010-111-0-00-1101-0-1010011-0---11000011-0 --11-0100--1010---01000010--1-101001-101--- -0000--00--11-0-001--0-111-01001-10-1---0-0 0---01---010011-00-11001001--01-1-10100-1- 01-1--0-00-1001--110-0011-01110-0-001--0--1 -101001--0--11101001110-10--0-0010000-11-01 00--10011--0-00-110--1110100--100--110100-- 10-----01001110-11--0-00---0-01110-001-1011 11-0-0011-0-111-0100-1-0-11-10-001--0-1-100 100--101-11-01001-101-1110-00---0---0-0-001 -00-01110100-110-0-1-0-00-1-00-1110-00-1101 01-10-00-110--1--0-001--01--1-0-0001101-011 0000--1011-1101001--01--110-00-1-00--1-0100 --101---10-0011101111101000-101111101001110 --1-00-001-100-0110-0011-0--0-10-0001-0-011 10100-1-0-101-010011-0--11-0-00--10-11-10-0 010-01110101001110-1--10-001-10111-10-00-1- 0101-10100-110111--0000---0-1-110-001010-1- 1101001--01-11-0-00--100010101001--0--10-0- 00-0-01-011010011-0---0101001--0--1110-0011 101--1-0-00--00-1-100100---0-----0100--1011 -1-010011-01101-0-00-1-0-1-1-01001110---10 1001-00----10100--10-11110000-110-001001001 -101-1100100-100111010100---01-1-00-00--101 -1110-00---0-11-10100-1101---101000110--1-- 01001110-1--10100---011-01010011-0---10-00 ---01-1--01001-10--1--010011101--110-00-1-0 --0010100--10111110-00-1-011-10010011101111 -01001110111110100-110---1-0-00-1-0011--000 010-01-11-0-00---0-----0-00-11011--00-001-- 01-1--0-000110-111-0100--100-11-01001--0-11 -10100-1-0--10
2387=7 · 11 · 31; 528; 496	010100011000011000001100100-1-0-00101010000 10-0000000000-101001-101001110-00-100100001 0000110000011100001010100-0-0000-1-00001-10

```

-0011001001--0-00-1-0100--00100-000-00-0100
0011-0-00-100-00-0-00001--0-001110100-000-0
01110-0000001001-10-000--01001--0100-0-0-00
-1-01000--0-00-010-00-000-00---0-0010101000
-1010010-0100-0-00001010100-0-0100-110100-1
10000-100-000-00100011010010-0100--10100---
01000100-00--10100-010-00-1-00000-10100-000
0000-00-00-100000-1100001000-001-00-00-1-0-
0000100001--01001110-000-101000--0100--0000
010-01000--01001-000001--0100-11010001-0000
-1-01000010000-0-01001-101001-10-0011-0-001
11000011-0100-0-0-000--0-001--0100--10100-1
10-001110-001-00100--100001-10100-110000--0
010001-01000010100-0101001-10000-0100001-10
00001-0-00--10-00---01001100100-11000001001
000--01000100000-00000000-010001-0-0010-010
0-100-001-10100---0-00--1000011100000100100
101010011100000000-001110100-01000010001001
110000--00-001010-00--10-00-0-00001--0100--
00-00111000011-000011-0-001-10000--10-00-1-
0000--00000110000--00000--10100-1001000010
1001-10-00--10100-110000--00-00-000-00-0001
0010-0-00--00001-101000110-00-0000000-10-0
01-101000-0010001000001110-001--01001-10000
0--0-00-11010011-0-00-100-00-100-000-10000-
110-00-100-000--0-00--10100-1001000-10100-0
000000--0000-0-0-00---0-001100100111010000-
0100-1000001100-0011-0-00--00-00-0-01001-00
1001100-00--00-000100-00-1101000110-00-1101
00-0-0000-010000--00-0001-000001-0-00001010
011-0-001100-00-110100-0-01000100100-0-0-00
-11010001100000-00000--01001110000-0001001
--0-00--10-0010-0-0000-010001-0100--00000-0
-01000--00001--0100-1100000010000-110100000
0-0011000001--0-001--00000-10-00--10-001-10
100010010000-01001--0-0001-0-0011101000-10-
000--010001-0-000--0-00-110100-1-0000-010-0
01000-00-1001000--0-0011000001--0000-010000
11-0-0001-0-00--1010011100000010-0010-0-00-
010-00-10010000001001010-00--00-000110-001-
-0100-1-010011-01001-101001010-000-001001-1
01001000-001-10-00-100100--00-00--1000001-0
-000-0000011-0-001100100---0100-1-0000--101
000-101001-101001--0-0011-0000-110-00-1-010
01010-0011-010011-0100-1101001000100---0000
01-00000110-0011-010001001001100000--001001
1-01001--0100-010000-100100-0-00001--0100-0
-01000010-000-10-00--01000--0000-0-0-00111
0-001-100001110000-110100-0-0-000110000-110

```

	-0000-0-00-1-0100011000000-0100-10000010-01 000100-0011-0-000-10-001-10-001000-00-11010 0--10000--10-0011-01001100100---0-001-10-00 -1-01001010-001110100-
$2451=3 \cdot 19 \cdot 43;$ 1225; 1176	010111111-1-----111--1-1111---1--11-0-- -11---1-1----10-1-1----11-11-1-1-1-111-11 -11111-1-1-1-1---1--1-1--1-11-11-----1--1-1 1-11-----11--11---1-1-1-11---1-1111-1-1--- -11-1--1---111-111--111-11--11111--111-1111 1-1-111-----1-111-1--10-1-1-11-11-111--1--- 1-111--1---111111-1-111-1-1---11--1111111-- -11----11--1--1-1--1--11--111-1--111--1----- -10111--11-11--111-1--10111---0-----11--- --01-1-111111-111-----1-----111--11111-1-11 -11-111--1-1-111-----1-111111--1111--11111 -11--1--1---0---01-11-1-1110-1--111--1-111 1-11-11--11--1---11--10-1--11--01-1-1---1 1-1--11-11--11--10-1-11-1-11--1---111-11--1 1111---111-1---1-----1-11--11--1-1111-1-1-1- --0---11110-1--1--1-1-11-1--1---11-1-111--1 111-111-1-----1--11111-111101111--11-----01 -111-111-111--1--10111-11--1--1111---1-1-- 1-1111-01-11-----11--1-1--10111-111-11-- --111--111-1---11-1---1-1--1-1--1---11-11 111-1--11-111-1-1-11--11-1--1--1110-1-----11 1-111-1--1--1--11111-1-11--1-1--1111101111- 1111--11---1111111--1111111-1-11---1-1-- -1---1-11-11---1-111-111-----1-11-111---1 1-1-1-1111-1-----1--111--111--11-111- -1111-1-1111---1--1111-11-01-1-1111--11111 111-11---1-11111-1--1-1-1----1-1111-11-1-- -101111--11111-11---111--1---1--111--1--- --11---1111-1-1111--111-1--111--1--11-1-111 -11--1-11-1--11---1---11-11-1-111-----111- -11-111--1-1-11---1111-----0---1-1-----11- --0-----1-1--01-11--1-----11---1--1111--11 1-1-1-----11-1-11-11--111--11--1-11-111--11 -111-0---1-1-111---1-1-1---1-11--10-1-11-1 1-111--11-1-11--1-1-11-1---11-1-11-11111-1 111-11111-11---111111--1-11-1-11--1-1--1-1 1111-111-1-11111---11111-11--11---1---1--11 1-1-1-1-1---1111111--11111--1--111-0--- --11-1--1-111--11-11111---11---1-11-11-- --1-----11--1111-11-01-111--111-11-1--11-1 1-1-1-11--10111111-1---11-11-1---1---1---1 111-0-----1111--1-11--1111-1--1-1-111-1111 111---01-1--1-111-1-11--111-1-111-11----- 1-11-1-11-1-----1-1---11-11-1111111---11- -11-11-11-1-1-1-111-11-11--1111--1-11-01-1-

	--1--11---1---1-1-1110-1-1-1-11111-1--1-1-- 11101111-0---1111--1---1---11-1-----11--11- --1111110111-0---11--1-1-111----0---1-11-1- 1-11---11-11111-1111--11-1---111-1-11-1111- --11-1--11-11-1---1-11-11-----11--1111---1 1-11-11--1--11-----1-----01-11-11--111----1 1111--11111-1-1-11-1-11--1--1--1---111--- --0-----1--11-1--11-01-1--1-1-11-1-1-1-----11 1-1111-1-11-11111-1-1-11--1-1-1-----1--111 -01-111-1-1--1-1-1---1---111-----01-111- -10-1-1--11-----1--1---1-11--11--1---1- 1111--11---11--1-11111---1--1-1-1-1-----111 0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Радон И.* Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий / В кн.: С. Хелгасон. Преобразование Радона: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — С. 134–148.
2. Selected papers on scattering in the atmosphere. — SPIE Milestone, 1989. — V. MS07. — 648 p.
3. Time-resolved spectroscopy and imaging of tissues. — Proc. SPIE, 1991. — V. 1431. — 346 p.
4. Medical optical tomography. — Proc. SPIE, 1993. — V. IS11. — 656 p.
5. Photon migration and imaging in random media and tissues. — Proc. SPIE, 1993. — V. 1888. — 544 p.
6. Selected papers on tissue optics. — SPIE Milestone, 1994. — V. MS102. — 700 p.
7. Theoretical study, mathematical, experimental model for photon transport in scattering media and tissue. — Proc. SPIE, 1994. — V. 2326. — 478 p.
8. *Bellini S., Piacentini M., Cafforio C., Rocca F.* Compensation of tissue absorption in emission tomography // IEEE Tr. on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1979. — V. ASSP-27, No. 3. — P. 213–218.
9. *Tretiak O., Metz C.* The exponential Radon Transform // SIAM J. of Applied Mathematics, 1980. — V. 39, No. 2. — P. 341–354.
10. *Gullberg G.T., Budinger T.F.* The use of filtering methods to compensate for constant attenuation in single-photon emission computed tomography // IEEE Tr. on Biomedical Engineering, 1981. — V. BME-28, No. 2. — P. 142–157.
11. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Вычислительная эмиссионная томография. — М.: Энергоатомиздат, 1990. — 184 с.
12. *Cormack A.M.* Represantation of a function by its line integrals, with some radiological applications // J. of Applied Physics, 1963. — V. 34, No. 9. — P. 2722–2727.
13. *Cormack A.M.* Represantation of a function by its line integrals, with some radiological applications II. // J. of Applied Physics, 1964. — V. 35, No. 10. — P. 2908–2912.
14. *Hounsfield G.N.* Computerized transverse axial scanning tomography: Part I, description of the system // British J. of Radiology, 1973. — V. 46. — P. 1016–1022.
15. *Гордон Р.* Восстановление по проекциям в медицине и астрономии // Построение изображений в астрономии по функциям когерентности: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — С. 306–313.
16. *Сороко Л.М.* Интроскопия. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 134 с.

17. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии.: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 352 с.
18. Реконструктивная вычислительная томография: Тематический вып. // ТИИЭР, 1983. — Т. 71, № 3. — 192 с.
19. *Chiu M.Y., Barrett H.H., Simpson R.G., Chou C., Arendt J.W., Gindi G.R.* Three-dimensional radiographic imaging with a restricted view angle // J. of the Optical Society of America, 1979. — V. 69, No. 10. — P. 1323–1333.
20. *Tam K.-C., Perez-Mendez V., Macdonald B.* 3-D object reconstruction in emission and transmission tomography with limited angular input // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1979. — V. NS-26, No. 2. — P. 2797–2805.
21. *Tam K.-C., Perez-Mendez V., Macdonald B.* Limited angle 3-D reconstructions from continuous and pinhole projections // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1980. — V. NS-27, No. 1. — P. 445–458.
22. *Tam K.-C., Perez-Mendez V.* Limits to image reconstruction from restricted angular input // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1981. — V. NS-28, No. 1. — P. 179–183.
23. *Tam K.-C.* The use of multispectral imaging in limited-angle reconstruction // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1982. — V. NS-29, No. 1. — P. 512–515.
24. *Tam K.-C., Eberhard J.W., Mitchell K.W.* Incomplete-data CT image reconstructions in industrial applications // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1990. — V. NS-37, No. 3. — P. 1490–1499.
25. *Bracewell R.N., Wernecke S.J.* Image reconstruction over a finite field of view // J. of the Optical Society of America, 1975. — V. 65, No. 11. — P. 1342–1346.
26. *Sato T., Norton S.J., Linzer M., Ikeda O., Hiram M.* Tomographic image reconstruction from limited projections using iterative revisions in image and transform spaces // Applied Optics, 1981. — V. 20, No. 3. — P. 395–399.
27. *Sato T., Sasaki K., Nakamura Y., Linzer M., Norton S.J.* Tomographic image reconstruction from limited projections using coherent optical feedback // Applied Optics, 1981. — V. 20, No. 17. — P. 3073–3076.
28. *Sato T., Ikeda O., Yamakoshi Y., Tsubouchi M.* X-ray tomography for microstructural objects // Applied Optics, 1981. — V. 20, No. 22. — P. 3880–3883.
29. *Inouye T.* Image reconstruction with limited angle projection data // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1979. — V. NS-26, No. 2. — P. 2666–2669.
30. *Wagner W.* Reconstructions from restricted region scan data – new means to reduce the patient dose // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1979. — V. NS-26, No. 2. — P. 2866–2869.
31. *Kowalski G., Wagner W.* Generation of pictures by X-ray scanners // Optica Acta, 1977. — V. 24, No. 4. — P. 327–348.
32. *Луис А.К., Намтерер Ф.* Математические проблемы реконструктивной томографии // ТИИЭР, 1983. — Т.71, № 3. — С. 111–125.
33. *Chu T.-H., Lee P.-C.* Projection deconvolution algorithm for image reconstruction from incomplete spectrum data // Applied Optics, 1988. — V. 27, No. 18. — P. 3800–3805.
34. *Намтерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 288 с.

35. Цензор Я. Методы реконструкции изображений, основанные на разложении в конечные ряды // ТИИЭР, 1983. — Т. 71, № 3. — С. 148–160.
36. *Sensor Y., Gustafson D.E., Lent A., Tuyl H.* A new approach to the emission computerized tomography problem: simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1979. — V. NS-26, No. 2. — P. 2775–2779.
37. Бут Э.Д. Численные методы. — М.: ГИФМЛ, 1959. — 240 с.
38. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. II. — М.: ГИФМЛ, 1962. — 640 с.
39. Бахвалов Н.С. Численные методы. — М.: Наука, 1973. — 632 с.
40. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. I. — М.: Наука, 1976. — 304 с.
41. *Herman G.T., Rowland S.W.* Three methods for reconstructing objects from X rays: A comparative study // Computer Graphics and Image Processing, 1973. — V. 2. — P. 151–178.
42. *Oppenheim B.E.* More accurate algorithms for iterative 3-dimensional reconstruction // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1974. — V. NS-21, No. 1. — P. 72–77.
43. *Gordon R.* A tutorial on ART. (Algebraic reconstruction techniques) // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1974. — V. NS-21, No. 1. — P. 78–93.
44. *Herman G.T., Lent A.* Iterative reconstruction algorithms // Computers in Biology and Medicine, 1976. — V. 6. — P. 273–294.
45. *Colsher J.G.* Iterative three-dimensional image reconstruction from tomographic projections study // Computer Graphics and Image Processing, 1977. — V. 6. — P. 513–537.
46. Фёдоров Г.А. Радиационная интроскопия. Кодирование информации и оптимизация эксперимента. — М.: Энергоатомиздат, 1982. — 111 с.
47. Image Reconstruction from Projections: Implementaton and Applications / Ed. G.T. Herman. — Berlin and New York: Springer-Verlag, 1979. — 252 p.
48. Вайнштейн Б.К. Синтез проектирующих функций // ДАН, 1971. — Т. 196, № 5. — С. 1072–1075.
49. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974. — 224 с.
50. Мерсеро Р.М., Оппенхейм А.В. Цифровое восстановление многомерных сигналов по их проекциям // ТИИЭР, 1974. — Т. 62, № 10. — С. 29–51.
51. *Shepp L.A., Logan B.F.* The Fourier reconstruction of a head section // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1974. — V. NS-21, No. 1. — P. 21–43.
52. *Shepp L.A., Logan B.F.* Reconstructing interior head tissue from X-ray transmissions // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1974. — V. NS-21, No. 2. — P. 228–236.
53. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971. — 408 с.
54. *Hansen E.W.* Theory of circular harmonic image reconstruction // J. of Optical Society of America, 1981. — V. 71, No. 3. — P. 304–308.
55. *Macovski A., Alvarez R.E., Chan J.L.-H., Stonestrom J.P., Zatz L.M.* Energy dependent reconstruction in X-ray computerized tomography // Computers in Biology and Medicine, 1976. — V. 6. — P. 325–336.

56. *Маковски А.* Физические проблемы реконструктивной томографии // ТИИЭР, 1983. — Т. 71, № 3. — С. 104–111.
57. *Бейтс Р.Х.Т., Гарден К.Г., Петерс Т.М.* Реконструктивная вычислительная томография: Современные достижения и перспективы развития // ТИИЭР, 1983. — Т. 71, № 3. — С. 84–104.
58. *Peters T.M.* Spatial filtering to improve transverse tomography // IEEE Tr. on Biomedical Engineering, 1974. — V. BME-21, No. 3. — P. 214–219.
59. *Луттл Р.М.* Алгоритмы реконструкции с использованием интегральных преобразований // ТИИЭР, 1983. — Т. 71, № 3. — С.125–147.
60. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.* Математические задачи компьютерной томографии. — М.: Наука, 1987. — 160 с.
61. *Chang L.-T.* A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1978. — V. NS-25, No. 1. — P. 638–643.
62. Физика визуализации изображений в медицине. Т. 1 / Под ред. С. Уэбба. — М.: Мир, 1991. — 408 с.
63. *Jaszczak R.J., Coleman R.E., Lim C.B.* SPECT: Single photon emission computed tomography // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1980. — V. NS-27, No. 3. — P. 1137–1153.
64. *Budinger T.F.* Physical attributes of single-photon tomography // J. of Nuclear Medicine, 1980. — V. 21, No. 6. — P. 579–592.
65. *Lee H.* Edge penetration by radiation through a collimation system // Nuclear Instruments and Methods, 1982. — V. 197, No. 2/3. — P. 411–416.
66. *Knoll G.F., Schrader M.E.* Computer correction of camera nonidealities in gamma ray imaging // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1982. — V. NS-29, No. 4. — P. 1272–1279.
67. *Моди Н.Ф., Пол В., Джой М.Л.Г.* Медицинские гамма-камеры // ТИИЭР, 1970. — Т. 58, № 2. — С. 41–70.
68. *Калашников С.Д.* Физические основы проектирования сцинтилляционных гамма-камер. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 120 с.
69. *Keyes W.I.* Current status of single photon emission computerized tomography // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1979. — V. NS-26, No. 2. — P. 2752–2755.
70. *Beattie J.W.* Tomographic reconstruction from fan beam geometry using Radon's integration method // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1975. — V. NS-22, No. 2. — P. 359–363.
71. *Gullberg G.T.* The reconstruction of fan-beam data by filtering the back-projection // Computer Graphics and Image Processing, 1979. — V. 10. — P. 30–47.
72. *Кэк А.С.* Машинная томография с использованием рентгеновского излучения, радиоактивных изотопов и ультразвука // ТИИЭР, 1979. — Т. 67, № 9. — С. 79–109.
73. *Шафер Р.У., Мерсеро Р.М., Ричардс М.А.* Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений // ТИИЭР, 1981. — Т. 69, № 4. — С. 34–56.
74. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 496 с.

75. *Goitein M.* Three-dimensional density reconstruction from a series of two-dimensional projections // *Nuclear Instruments and Methods*, 1972. — V. 101. — P. 509–518.
76. *Herman G.T., Lent A.* A computer implementation of a bayesian analysis of image reconstruction // *Information and Control*, 1976. — V. 31, No. 4. — P. 364–384.
77. *Herman G.T., Hurwitz H., Lent A., Lung H.-P.* On the bayesian approach to image reconstruction // *Information and Control*, 1979. — V. 42. — P. 60–71.
78. *Kuhl R.Q., Edwards R.Q., Ricci A.R., Reivich M.* Quantitative section scanning using orthogonal tangent correction // *J. of Nuclear Medicine*, 1973. — V. 14, No. 4. — P. 196–200.
79. *Wilson B.C., Seivick E.M., Patterson M.S., Chance B.* Time-dependent optical spectroscopy and imaging for biomedical applications // *Proc. Of the IEEE*, 1992. — V. 80, No. 6. — P. 918–930.
80. *Prahl S.A., Gemert M.J.C. van, Welch A.J.* Determining the optical properties of turbid media by using the adding-doubling method // *Applied Optics*, 1993. — V. 32, No. 4. — P. 559–568.
81. *Tuchin V.V.* Lasers and fiber optics in biomedicine. Part 1 // *Laser Physics*, 1993. — V. 3, No. 4. — P. 767–820.
82. *Tuchin V.V.* Lasers and fiber optics in biomedicine. Part 2 // *Laser Physics*, 1993. — V. 3, No. 5. — P. 925–950.
83. *Тучин В.В.* Исследование биотканей методами светорассеяния // *УФН*, 1997. — Т. 167, № 5. — С. 517–539.
84. *Барабаненков Ю.Н., Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И.* Состояние теории распространения волн в случайно-неоднородной среде // *УФН*, 1970. — Т. 102. — Вып. 1. — С. 3–42.
85. *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Теория переноса излучения. — М.: Наука, 1983. — 216 с.
86. *Кольчужкин А.М., Учайкин В.В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. — М.: Атомиздат, 1978. — 256 с.
87. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайнонеоднородных средах. — М.: Мир, 1981. — Т. 1. — 280 с.
88. *Апресян Л.А., Кравцов Ю.А.* Фотометрия и когерентность: волновые аспекты теории переноса излучения // *УФН*, 1984. — Т. 142. — Вып. 4. — С. 689–711.
89. *Bonner R.F., Nossal R., Halvin S., Weiss G.H.* Model for photon migration in turbid biological media // *J. of the Optical Society of America (A)*, 1987. — V. 4, No. 3. — P. 423–432.
90. *Gandjbakhche A.H., Chernomordik V., Hebden J.C., Nossal R.* Time-dependent contrast function for quantitative imaging in time-resolved transillumination experiments // *Applied Optics*, 1998. — V. 37, No. 10. — P. 1973–1981.
91. *Hebden J.C., Hall D.J., Delpy D.T.* The spatial resolution performance of a time-resolved optical imaging system using temporal extrapolation // *Medical Physics*, 1995. — V. 22, No. 2. — P. 201–208.

92. *Moon J.A., Reinjes J.* Image resolution by use of multiply scattered light // Optics Letters, 1994. — V. 19, No. 8. — P. 521–523.
93. *Noginov M.A., Noginova N., Egarievwe S., Wang J.C., Kokta M.R., Paitz J.* Study of light propagation in scattering powder laser materials // Optical Materials, 1998. — article No. 1701. — P. 1–7.
94. *Yoon G., Welch A.J., Motamedi M., Gemert M.C.J. van* Development and application of three-dimensional light distribution // IEEE J. of Quantum Electronics, 1987. — V. QE-23, No. 10. — P. 1721–1723.
95. *Hielscher A.H., Alcouffe R.E.* Non-diffusive photon migration in homogeneous and heterogeneous tissues // SPIE Proc., 1996. — V. 2925. — P. 22–30.
96. *Hiraoka M., Firbank M., Essenpreis M., Cope M., Arridge S.R., Zee P. van der, Delpy D.T.* A Monte Carlo investigation of optical pathlength in homogeneous tissue and its application to near-infrared spectroscopy // Physics in Medicine and Biology, 1993. — V. 38. — P. 1859–1876.
97. *Pifferi A., Taroni P., Valentini G., Andersson-Engels S.* Real time method for fitting time-resolved reflectance and transmittance measurements with a Monte Carlo model // Applied Optics, 1998. — V. 37, No. 13. — P. 2774–2780.
98. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972. — 386 с.
99. *Белянцев А.М., Долин Л.С., Савельев В.А.* О распространении световых импульсов малой длительности в мутной среде // Известия вузов. Радиофизика, 1967. — Т. X, № 4. — С. 489–497.
100. *Долин Л.С.* О рассеянии светового пучка в слое мутной среды // Известия вузов. Радиофизика, 1964. — Т. VII, № 2. — С. 380–382.
101. *Долин Л.С.* О распространении узкого пучка света в среде с сильно анизотропным рассеянием // Известия вузов. Радиофизика, 1966. — Т. IX, № 1. — С. 61–71.
102. *Kuzovlev A.I., Remizovich V.S.* Angular distribution of multiply scattered laser radiation in weakly absorbing media with large-scale scattering centers // Laser Physics, 1994. — V. 4, No. 4. — P. 788–815.
103. *Cai W., Luo B., Lax M., Alfano R.R.* Time-resolved optical backscattering model in highly scattering media // Optics Letters, 1998. — V. 23, No. 13. — P. 983–985.
104. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
105. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978. — 320 с.
106. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973. — 832 с.
107. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
108. *Гусев Н.Г., Машкович В.П., Суворов А.П.* Защита от ионизирующих излучений. Том 1. Физические основы защиты от излучений. — М.: Атомиздат, 1980. — 461 с.

109. *Boas D.A., Liu H., O'Leary M.A., Chance B., Yodh A.G.* Photon migration within the P_3 approximation // *SPIE Proc.*, 1995. — V. 2389. — P. 240–246.
110. *Терещенко С.А.* О некорректности применения диффузионного приближения нестационарного уравнения переноса излучения к оптической томографии биологических сред // *Известия вузов. Электроника*, 1997. — № 6. — С. 101–104.
111. *Ishimaru A.* Diffusion of a pulse in densely distributed scatterers // *JOSA*, 1978. — V. 68, No. 8. — P. 1045–1050.
112. *Ishimaru A.* Diffusion of light in turbid material // *Applied Optics*, 1989. — V. 28, No. 12. — P. 2210–2215.
113. *Ishimaru A.* Wave propagation and scattering in random media and rough surfaces // *Proc. Of the IEEE*, 1991. — V. 79, No. 10. — P. 1359–1366.
114. *Polishchuk A.Ya., Gutman S., Lax M., Alfano R.R.* Photon-density models beyond the diffusion approximation: scalar wave-diffusion equation // *JOSA A*, 1997. — V. 14, No. 1. — P. 230–234.
115. *Durian D.J.* The diffusion coefficient depends on absorption // *Optics Letters*, 1998. — V. 23, No. 19. — P. 1502–1504.
116. *Yamada Y.* Diffusion coefficient in the photon diffusion equation // *SPIE Proc.*, 1995. — V. 2389. — P. 87–97.
117. *Groenhuys R.A.J., Ferwerda H.A., Bosch J.J.T.* Scattering and absorption of turbid materials determined from reflection measurements. Theory // *Applied Optics*, 1983. — V. 22, No. 16. — P. 2456–2462.
118. *Groenhuys R.A.J., Ferwerda H.A., Bosch J.J.T.* Scattering and absorption of turbid materials determined from reflection measurements. Measuring methods and calibration // *Applied Optics*, 1983. — V. 22, No. 16. — P. 2463–2467.
119. *Karajiannes J.L., Zhang Z., Grossweiner B., Grossweiner L.I.* Applications of the 1-D diffusive approximation to the optics of tissues and tissue phantoms // *Applied Optics*, 1989. — V. 28, No. 12. — P. 2311–2317.
120. *Patterson M.S., Chance B., Wilson B.C.* Time resolved reflectance and transmittance for the non-invasive measurement of tissue optical properties // *Applied Optics*, 1989. — V. 28, No. 12. — P. 2331–2336.
121. *Furutsu K.* Diffusion equation derived from space-time transport equation // *JOSA*, 1980. — V. 70, No. 4. — P. 360–366.
122. *Matcher S.J.* Closed-form expressions for obtaining the absorption and scattering coefficients of a turbid medium with time-resolved spectroscopy // *Applied Optics*, 1997. — V. 36, No. 31. — P. 8298–8302.
123. *Model R., Hünlich R., Orlt M., Walzel M.* NIR imaging in random media using time domain data // *SPIE Proc.*, 1996. — V. 2925. — P. 77–88.
124. *Tualle J.-M., Gélébart B., Tinet E., Avrillier S., Ollivier J.P.* Real time optical coefficients evaluation from time and space resolved reflectance measurements in biological tissues // *Optics Communications*, 1996. — V. 124. — P. 216–221.
125. *Wu J.* Convolution picture of the boundary conditions in photon migration and its applications in time-resolved optical imaging of biological tissues // *JOSA A*, 1997. — V. 14, No. 1. — P. 280–287.

126. *Ito S., Furutsu K.* Theory of light pulse propagation through thick clouds // JOSA, 1980. — V. 70, No. 4. — P. 366–374.
127. *Tsunazawa Y., Oda I., Eda H., Takada M.* A new algorithm to determine absorption and scattering coefficient from time-resolved measurement // SPIE Proc., 1995. — V. 2389. — P. 75–86.
128. *Cubeddu R., Pifferi A., Taroni P., Torricelli A., Valentini G.* Time-resolved imaging on a realistic tissue phantom: μ'_s and μ_a images versus time-integrated images // Applied Optics, 1996. — V. 35, No. 22. — P. 4533–4540.
129. *Contini D., Martelli F., Zaccanti G.* Photon migration through a turbid slab described by a model based on diffusion approximation. Theory // Applied Optics, 1997. — V. 36, No. 19. — P. 4587–4599.
130. *Garg R., Prudhomme R.K., Aksay I.A., Liu F., Alfano R.R.* Optical transmission in highly concentrated dispersions // JOSA A, 1998. — V. 15, No. 4. — P. 932–935.
131. *Kienle A., Glanzmann T., Wagnieres G., Bergh H. Van den.* Investigation of two-layered turbid media with time-resolved reflectance // Applied Optics, 1998. — V. 37, No. 28. — P. 6852–6862.
132. *Aronson R.* Diffusion boundary conditions for photon waves // SPIE Proc., 1997. — V. 2979. — P. 651–656.
133. *Fantini S., Franceschini M.A., Gratton E.* Effective source term in the diffusion equation for photon transport in turbid media // Applied Optics, 1997. — V. 36, No. 1. — P. 156–163.
134. *Tromberg B.J., Svaasand L.O., Tsay T.-T., Haskell R.C.* Properties of photon density waves in multiple-scattering media // Applied Optics, 1993. — V. 32, No. 4. — P. 607–616.
135. *Walker S.A., Boas D.A., Gratton E.* Photon density waves scattered from cylindrical inhomogeneities: theory and experiments // Applied Optics, 1998. — V. 37, No. 10. — P. 1935–1944.
136. *Perelman L.T., Wu J., Itzkan I., Feld M.S.* Photon migration in turbid media using path integrals // Physical Review Letters, 1994. — V. 72, No. 9. — P. 1341–1344.
137. *Perelman L.T., Wu J., Itzkan I., Wang Y., Dasari R.R., Feld M.S.* Optical imaging in turbid media using early arriving photons // SPIE Proc., 1995. — V. 2389. — P. 10–14.
138. *Perelman L.T., Wu J., Itzkan I., Wang Y., Dasari R.R., Feld M.S.* Time-dependent photon migration using path integrals // Physical Review E, 1995. — V. 51, No. 6. — P. 6134–6141.
139. *Perelman L.T., Winn J., Wu J., Dasari R.R., Feld M.S.* Photon migration of near-diffusive photons in turbid media: a Lagrangian-based approach // JOSA A, 1997. — V. 14, No. 1. — P. 224–229.
140. *Jacques S.L., Wang X.* Path integral description of light transport in tissues // SPIE Proc., 1997. — V. 2979. — P. 488–499.
141. *Polishchuk A.Ya., Alfano R.R.* Fermat photons in turbid media: an exact analytic solution for most favorable paths — a step toward optical tomography // Optics Letters, 1995. — V. 20, No. 19. — P. 1937–1939.

142. *Polishchuk A.Ya., Alfano R.R.* Non-Euclidean diffusion and “Fermat” photons in turbid media // SPIE Proc., 1995. — V. 2389. — P. 6–9.
143. *Polishchuk A.Ya., Alfano R.R.* Photon diffusion on the velocity sphere // Optics Letters, 1996. — V. 21, No. 13. — P. 916–918.
144. *Polishchuk A.Ya., Zevallos M., Liu F., Alfano R.R.* Generalization of Fermat’s principle for photons in random media: The least mean square curvature of paths and photon diffusion on the velocity sphere // Physical Review E, 1996. — V. 53, No. 5. — P. 5523–5526.
145. *Polishchuk A.Ya., Dolne J., Liu F., Alfano R.R.* Average and most probable photon paths in random media // Optics Letters, 1997. — V. 22, No. 7. — P. 430–432.
146. *Гельфанд И.М., Яглом А.М.* Интегрирование в функциональных пространствах и его применения в квантовой физике // УМН, 1956. — Т. XI. — Вып. 1. — С. 77–114.
147. *Ковальчик И.М.* Интеграл Винера // УМН, 1963. — Т. XVIII. — Вып. 1. — С. 97–134.
148. *Шилов Г.Е.* Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера // УМН, 1963. — Т. XVIII. — Вып. 2. — С. 99–120.
149. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968. — 384 с.
150. *Фейнман Р.* Статистическая механика. — М.: Мир, 1978. — 408 с.
151. *Березин Ф.А.* Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // УФН, 1980. — Т. 132. — Вып. 3. — С. 497–548.
152. *Попов В.Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976. — 256 с.
153. *Владимиров В.С.* О приближённом вычислении винеровских интегралов // УМН, 1960. — Т. XV. — Вып. 4. — С. 129–135.
154. *Brown C.S., Burns D.H., Spelman F.A., Nelson A.C.* Computed tomography from optical projections for three-dimensional reconstruction of thick objects // Applied Optics, 1992. — V. 31, No. 29. — P. 6247–6254.
155. *Walker S.A., Fantini S., Gratton E.* Image reconstruction by backprojection from frequency-domain optical measurements in highly scattering media // Applied Optics, 1997. — V. 36, No. 1. — P. 170–179.
156. *Colak S.B., Papaioannou D.G., Hooft G.W., Mark M.B. van der.* Optical image reconstruction with deconvolution in light diffusing media // SPIE Proc., 1995. — V. 2626. — P. Colak-1–10.
157. *Fantini S., Franceschini M.A., Walker S.A., Maier J.S., Gratton E.* Photon path distribution in turbid media: applications for imaging // SPIE Proc., 1995. — V. 2389. — P. 340–348.
158. *Любимов В.В.* Оптика волн плотности фотонов в сильнорассеивающих средах и пространственное разрешение при томографии // Оптика и спектроскопия, 1996. — Т. 81, № 2. — С. 330–332.
159. *Lyubimov V.V., Murzin A.G., Volkonsky V.B., Utkin A.B.* Statistical characteristics of photon paths and optimization of the tomography algorithms for the case of strongly scattering media // SPIE Proc., 1996. — V. 2925. — P. 218–226.

160. *Lyubimov V.V., Mironov E.P., Murzin A.G., Volkonsky V.B., Kravtsenyuk O.V.* On the problem of macroinhomogeneity detectability in optical tomography studies of the strongly scattering media // *SPIE Proc.*, 1997. — V. 2979. — P. 710–714.
161. *O'Leary M.A., Boas D.A., Chance B., Yodh A.G.* Simultaneous scattering and absorption images of heterogeneous media using diffusive waves within the Rytov approximation // *SPIE Proc.*, 1995. — V. 2389. — P. 320–326.
162. *Li X.D., Durduran T., Yodh A.G., Chance B., Pattanyak D.N.* Diffraction tomography for biochemical imaging with diffuse-photon density waves // *Optics Letters*, 1997. — V. 22, No. 8. — P. 573–575.
163. *Devaney A.J.* A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography // *Ultrasonic Imaging*, 1982. — V. 4. — P. 336–350.
164. *Beylkin G.* The fundamental identity for iterated spherical means and the inversin formula for diffraction tomography and inverse scattering // *J. of Mathematical Physics*, 1983. — V. 24, No. 6. — P. 1399–1400.
165. *Devaney A.J.* Reconstructive tomography with diffracting wavefields // *Inverse Problems*, 1986. — V. 2. — P. 161–183.
166. *Буров В.А., Рычагов М.Н.* Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Линеаризованный вариант // *Акустический журнал*, 1992. — Т. 38. — Вып. 4. — С. 631–641.
167. *Буров В.А., Рычагов М.Н.* Дифракционная томография как обратная задача рассеяния. Интерполяционный подход. Учёт многократных рассеяний // *Акустический журнал*, 1992. — Т. 38. — Вып. 5. — С. 844–854.
168. *Wedberg T.C., Stamnes J.J., Singer W.* Comparison of the filtered backpropagation and the filtered backprojection algorithms for quantitative tomography // *Applied Optics*, 1995. — V. 34, No. 28. — P. 6575–6581.
169. *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. — М.: Радио и связь, 1989. — 224 с.
170. *Arridge S.R.* The forward and inverse problems in time resolved infra-red imaging // *SPIE Proc.*, 1993. — V. IS11. — P. 35–64.
171. *Arridge S.R.* Photon-measurement density functions. Part 1: Analytical forms // *Applied Optics*, 1995. — V. 34, No. 31. — P. 7395–7409.
172. *Arridge S.R., Schweiger M.* Photon-measurement density functions. Part 2: Finite-element-method calculations // *Applied Optics*, 1995. — V. 34, No. 34. — P. 8026–8037.
173. *Arridge S.R., Zee P. van der, Cope M., Delpy D.T.* Reconstruction methods for infra-red absorption images // *SPIE Proc.*, 1991. — V. 1431. — P. 204–215.
174. *Arridge S.R., Schweiger M., Delpy D.T.* Iterative reconstruction of near infra-red absorption images // *SPIE Proc.*, 1992. — V. 1767. — P. 312–323.
175. *Arridge S.R., Schweiger M., Hiraoka M., Delpy D.T.* A finite element approach for modelling photon transport in tissue // *Medical Physics*, 1993. — V. 20, No. 2. — P. 299–309.
176. *Jiang H., Paulsen K.D., Osterberg U.L., Pogue B.W., Patterson M.S.* Simultaneous reconstruction of optical absorption and scattering maps in turbid media from near-infrared frequency-domain data // *Optics Letters*, 1995. — V. 20, No. 20. — P. 2128–2130.

177. *Schweiger M., Arridge S.R.* Direct calculation with a finite-element method of the Laplace transform of the distribution of photon time of flight in tissue // *Applied Optics*, 1997. — V. 36, No. 34. — P. 9042–9048.
178. *Селищев С.В., Терещенко С.А.* Томография рассеивающих сред в двух-поточковой модели переноса излучения // Письма в Журнал технической физики, 1995. — Т. 21. — Вып. 12. — С. 24–27.
179. *Селищев С.В., Терещенко С.А.* Нестационарная двухпоточковая модель переноса излучения для томографии рассеивающих сред // Журнал технической физики, 1997. — Т. 67, № 5. — С. 61–65.
180. *Терещенко С.А., Подгаецкий В.М., Воробьев Н.С., Смирнов А.В.* Условия прохождения коротких оптических импульсов через сильнорассеивающую среду // *Квантовая электроника*, 1996. — Т. 23, № 3. — С. 265–268.
181. *Терещенко С.А., Подгаецкий В.М., Воробьев Н.С., Смирнов А.В.* Раздельное наблюдение баллистических и рассеянных фотонов при распространении коротких лазерных импульсов в сильнорассеивающей среде // *Квантовая электроника*, 1998. — Т. 25, № 9. — С. 853–856.
182. *Подгаецкий В.М., Терещенко С.А.* Количественное определение условий разделения баллистических и рассеянных фотонов в лазерном ультракоротком импульсе, прошедшем через сильнорассеивающую среду // *ДАН*, 1999. — Т. 366, № 1. — С. 39–42.
183. *Воробьев Н.С., Подгаецкий В.М., Смирнов А.В., Терещенко С.А.* Наблюдение временного разделения фотонов в лазерном УКИ, прошедшем через рассеивающую среду // *Квантовая электроника*, 1999. — Т. 28, № 2. — С. 181–182.
184. *Podgaetsky V.M., Tereshchenko S.A., Smirnov A.V., Vorob'ev N.S.* Bimodal temporal distribution of photons in ultrashort laser pulse passed through a turbid medium // *Optics Communications*, 2000. — V. 180. — P. 217–223.
185. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 704 с.
186. *Ельшин М.И.* К проблеме колебаний линейного дифференциального уравнения второго порядка // *ДАН СССР*, 1938. — Т. XVIII, № 3. — С. 141–145.
187. *Терещенко С.А., Селищев С.В.* Решение задачи оптической томографии для ограниченных рассеивающих сред в двухпоточковой модели переноса излучения // Письма в Журнал технической физики, 1997. — Т. 23, № 17. — С. 64–67.
188. *Паркер Р., Смит П., Тейлор Д.* Основы ядерной медицины. Пер. с англ. — М.: Энергоиздат, 1981. — 304 с.
189. *Левкович А.Д., Люцко А.М., Перцев А.Н.* Изотопная биоинтроскопия. — М.: Атомиздат, 1973. — 200 с.
190. Приборы для радионуклидной диагностики в медицине / Л.С. Горн, В.А. Костылев, Б.Я. Наркевич и др. — М.: Атомиздат, 1978. — 296 с.
191. *Элькинд Э.Ю.* Технические методы и средства продольной однофотонной эмиссионной томографии // *Медицинская радиология*, 1984. — № 10. — С. 70–81.
192. *Barrett H.H.* Fresnel zone plate in nuclear medicine // *J. of Nuclear Medicine*, 1972. — V. 13, No. 6. — P. 382–385.

193. *Rogers W.L., Han K.S., Jones L.W., Beierwaltes W.H.* Application of a Fresnel zone plate to gamma-ray imaging // *J. of Nuclear Medicine*, 1972. — V. 13, No. 8. — P. 612–615.
194. *Price L.R.* A study of the image contrast in Fresnel zone plate imaging of extended sources // *Optics Communications*, 1975. — V.14, No. 1. — P. 61–66.
195. *Joy M.L.G., Houle S.* The potential performance of off-axis Fresnel zone plate gamma imaging systems on arbitrary objects // *IEEE Tr. on Nuclear Sciences*, 1975. — V. NS-22, No. 2. — P. 364–368.
196. *Houle S., Joy M.L.G.* Small signal suppression in coded aperture imaging in nuclear medicine // *IEEE Tr. on Nuclear Sciences*, 1975. — V. NS-22, No. 2. — P. 369–373.
197. *Chang L.T., Macdonald B., Perez-Mendez V., Shiraishi L.* Coded aperture imaging of gamma-ray using multiple pinhole arrays and multiwire proportional chamber detector // *IEEE Tr. on Nuclear Sciences*, 1975. — V. NS-22, No. 2. — P. 374–378.
198. *Chang L.T., Macdonald B., Perez-Mendez V.* Comparison of coded aperture imaging using various apertures and decoding methods // *Proc. SPIE*, 1976. — V. 89. — P. 9–16.
199. *Wouters A., Simon K.M., Hirschberg J.G.* Direct method of decoding multiple images // *Applied Optics*, 1973. — V. 12, No. 8. — P. 1871–1873.
200. *Chang L.T., Kaplan S.N., Macdonald B., Perez-Mendez V., Shiraishi L.* A method of tomographical imaging using a multiple pinhole-coded apertures // *J. of Nuclear Medicine*, 1974. — V. 15, No. 11. — P. 1063–1065.
201. *Dicke R.H.* Scatter-hole cameras for X-rays and gamma rays // *The Astrophysical J.*, 1968. — V. 153. — P. L101–L106.
202. *Groh G., Hayat G.S., Stroke G.W.* X-ray and γ -ray imaging with multiple-pinhole cameras using a posteriori image synthesis // *Applied Optics*, 1972. — V. 11, No. 4. — P. 931–933.
203. *Fenimore E.E., Cannon T.M.* Coded aperture imaging with uniformly redundant arrays // *Applied Optics*, 1978. — V. 17, No. 3. — P. 337–347.
204. *Fenimore E.E.* Coded aperture imaging: predicted performance of uniformly redundant arrays // *Applied Optics*, 1978. — V. 17, No. 22. — P. 3562–3570.
205. *Fenimore E.E., Cannon T.M., Van Hulsteyn D.B., Lee P.* Uniformly redundant array imaging of laser driven compressions: preliminary results // *Applied Optics*, 1979. — V. 18, No. 7. — P. 945–947.
206. *Cannon T.M., Fenimore E.E.* Tomographical imaging using uniformly redundant arrays // *Applied Optics*, 1979. — V. 18, No. 7. — P. 1052–1057.
207. *Fenimore E.E.* Coded aperture imaging: The modulation transfer function for uniformly redundant arrays // *Applied Optics*, 1980. — V. 19, No. 14. — P. 2465–2471.
208. *Fenimore E.E., Cannon T.M.* Uniformly redundant arrays: digital reconstruction methods // *Applied Optics*, 1981. — V. 20, No. 10. — P. 1858–1864.
209. *Barrett H.H., Horrigan F.A.* Fresnel zone plate imaging of gamma rays. Theory // *Applied Optics*, 1973. — V. 12, No. 12. — P. 2686–2702.

210. *Henkelman R.M., Bronskill M.J.* Imaging extended objects with a Fresnel-zone-plate aperture // J. of the Optical Society of America, 1974. — V. 64, No. 2. — P. 134–137.
211. *Budinger T.F., Macdonald B.* Reconstruction of the Fresnel-coded gamma camera images by digital computer // J. of Nuclear Medicine, 1975. — V. 16, No. 4. — P. 309–313.
212. *Dance D.R., Wilson B.C., Parker R.P.* Digital reconstruction of point sources images by a zone plate camera // Physics in Medicine and Biology, 1975. — V. 20, No. 5. — P. 747–756.
213. *Wilson B.C., Parker R.P., Dance D.R.* Digital processing of images from a zone plate camera // Physics in Medicine and Biology, 1975. — V. 20, No. 5. — P. 757–770.
214. *Brown C.* Multiplex imaging with multiple-pinhole cameras // J. of Applied Physics, 1974. — V. 45, No. 4. — P. 1806–1811.
215. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств: Пер. с англ. — М.: Наука, 1972. — 232 с.
216. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Коды и кодирующие устройства // Измерительная техника, 1995. — № 11. — С. 49–54.
217. *Steinbach A., Macovski A.* Improved depth resolution in coded-aperture gamma-ray imaging systems // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1976. — V. NS-23, No. 1. — P. 606–612.
218. *Renaud L., Joy M.L.G., Gilday D.* Fourier multiaperture emission tomography (FMET) // J. of Nuclear Medicine, 1979. — V. 20, No. 9. — P. 986–991.
219. *Renaud L., Joy M.L.G., Gilday D.* Fourier multiaperture emission tomography (FMET) // IEEE Tr. on Nuclear Sciences, 1980. — V. NS-27, No. 1. — P. 555–558.
220. *Барпетт Х.Х.* Методы сжатия импульсов в ядерной медицине // ТИИЭР, 1972. — Т. 60, № 6. — С. 85–87.
221. *Oda M.* High resolution X-ray collimator with broad field of view for astronomical use // Applied Optics, 1965. — V. 4, No. 1. — P. 143–145.
222. *Simpson R.G., Barrett H.H., Subach J.A., Fisher H.D.* Digital processing of annular coded-aperture imagery // Optical Engineering, 1975. — V. 14, No. 5. — P. 490–494.
223. *Walton P.W.* An aperture imaging system with instant decoding and tomographic capabilities // J. of Nuclear Medicine, 1973. — V. 14, No. 11. — P. 861–863.
224. *Mertz L.* Applicability of the rotation collimator to nuclear medicine // Optics Communications, 1974. — V. 12. — P. 216–219.
225. *Chiu C., Barrett H.H.* Gamma-ray imaging in Fourier space // Optics Letters, 1978. — V. 3. — P. 187–189.
226. *Barrett H.H., Stoner W.W., Wilson D.T., De Meester G.D.* Coded apertures derived from the Fresnel zone plate // Optical Engineering, 1974. — V. 13, No. 6. — P. 539–549.
227. *Сороко Л.М.* Мультиплексные системы регистрации в физике. — М.: Атомиздат, 1980. — 120 с.
228. *Цифровые методы в космической связи: Пер. с англ. — М.: Связь, 1969.*

229. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. — М.: Наука, 1976. — 224 с.
230. Налимов В.В. Теория эксперимента. — М.: Наука, 1971.
231. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. — М.: Металлургия, 1976. — 128 с.
232. Spann P. Свойство псевдослучайных последовательностей максимальной длины при двумерной корреляции // ТИИЭР, 1965. — Т. 53, № 12. — С. 2363–2364.
233. Макуильямс Ф. Дж., Слоан Н.Дж.А. Псевдослучайные последовательности и таблицы // ТИИЭР, 1976. — Т. 64, № 12. — С. 80–95.
234. Gottesman S.R., Schneid E.J. PNP — a new class of coded aperture arrays // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1986. — V.NS-33, No. 1. — P. 745–749.
235. Gourday A.R., Stephen J.B. Geometric coded aperture masks // Applied Optics, 1983. — V.22, No. 24. — P. 4042–4047.
236. Gourday A.R., Stephen J.B., Young N.G.S. Geometrically designed coded aperture mask arrays // Nuclear Instruments and Methods, 1984. — V. 221. — P. 54.
237. Gottesman S.R., Fenimore E.E. New family of binary arrays for coded aperture imaging // Applied Optics, 1989. — V. 28, No. 20. — P. 4344–4352.
238. Фёдоров Г.А., Терещенко С.А. Новый класс двумерных кодов и кодирующих устройств для интегрально-кодовых систем измерений // Измерительная техника, 1997. — № 10. — С. 49–53.
239. Cook W.R., Finger M., Prince T.A., Stone E.C. Gamma-ray imaging with a rotating hexagonal uniformly redundant array // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1984. — V. NS-31, No. 1. — P. 771–775.
240. Холл М. Комбинаторика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1970. — 424 с.
241. Фёдоров Г.А., Терещенко С.А. Планирование радиационно-физического эксперимента на классе (0,1)-матриц-циркулянтов // Прикладная ядерная спектроскопия. Сб. статей, 1984. — Вып. 13. — С. 48–55.
242. Райзер Г.Дж. Комбинаторная математика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1966. — 120 с.
243. Baumert L.D. Cyclic difference sets. — Berlin–Heidelberg–N.-Y.: Springer-Verlag, 1971. — 166 p.
244. Wilhelmi G., Gompf F. Binary sequences and error analysis for pseudo-statistical neutron modulators with different duty cycles // Nuclear Instruments and Methods, 1970. — V. 81, No. 1. — P. 36–44.
245. Everett D. Periodic digital sequences with pseudonoise properties // General Electric Company J., 1966. — V. 33, No. 3. — P. 115–126.
246. Hossfeld F., Amadori R. On pseudorandom and Markov sequences optimizing correlation time-of-flight spectrometry // Berichte der Kernforschungsanlage, Jul-684-FF (KFA, Julich), 1970. — 62 p.
247. Чанг Дж. Трочная последовательность с нулевой корреляцией // ТИИЭР, 1967. — Т. 55, № 7. — С. 156–158.
248. Ипатов В.П. Трочные последовательности с идеальными автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника, 1979. — Т. 24, № 10. — С. 2053–2058.

249. *Ипатов В.П.* К теории троичных последовательностей с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника, 1980. — Т. 25, № 4. — С. 723–727.
250. *Hoholdt T., Justesen J.* Ternary sequences with perfect periodic autocorrelation // IEEE Tr. on Information Theory, 1983. — V. IT-29, No. 4. — P. 597–600.
251. *Камалетдинов Б.Ж.* Троичные последовательности с идеальными периодическими автокорреляционными свойствами // Радиотехника и электроника, 1987. — Т. 32, № 1. — С. 77–82.
252. *Ипатов В.П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. — М.: Радио и связь, 1992. — 148 с.
253. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Аппаратные функции // Измерительная техника, 1997. — № 2. — С. 44–50.
254. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Аппаратные функции (распределённый элементарный источник) // Измерительная техника, 1998. — № 12. — С. 50–54.
255. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Фактор наклонного падения излучения // Измерительная техника, 1999. — № 5. — С. 48–55.
256. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Использование обобщённых одномерных последовательностей для построения двумерных кодов и кодирующих устройств в интегрально-кодовых системах измерений // Измерительная техника, 1999. — № 2. — С. 55–63.
257. *Терещенко С.А., Фёдоров Г.А.* О псевдослучайных и обобщённых псевдослучайных бинарных последовательностях // Сб. научных трудов Всероссийской конференции “Радиационная безопасность человека и окружающей среды”. — М.: МИФИ, 2002. — С. 162–177.
258. *Weise K.* The optimization problem in time-of-flight spectroscopy // Nuclear Instruments and Methods, 1972. — V. 98, No. 1. — P. 119–124.
259. *Koral K.F., Rogers W.L., Knoll G.F.* Digital tomographic imaging with time-modulated pseudorandom coded aperture and Anger camera // J. of Nuclear Medicine, 1975. — V. 16, No. 5. — P. 402–413.
260. *Knoll G.F., Williams J.J.* Application of a ring pseudorandom aperture for transverse section tomography // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1977. — V. NS-24, No. 1. — P. 581–583.
261. *Rosenfeld D., Macovski A.* Time modulated aperture for tomography in nuclear medicine // IEEE Tr. on Nuclear Science, 1977. — V. NS-24, No. 1. — P. 570–576.
262. *Larson N.M., Crosman R., Talmi Y.* Theoretical comparison of singly multiplexed Hadamard transform spectrometers and scanning spectrometers // Applied Optics, 1974. — V. 13, No. 11. — P. 2662–2668.
263. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Планирование оптимального эксперимента при регистрации излучений // Вопросы дозиметрии и защиты от излучений. — М.: Атомиздат, 1980. — Вып. 19. — С. 26–36.

-
264. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Планирование и оптимизация эксперимента // Измерительная техника, 1996. — № 9. — С. 50–58.
265. Статистические методы в экспериментальной физике: Пер. с англ. — М.: Атомиздат, 1976. — 335 с.
266. *Фёдоров Г.А., Терещенко С.А.* Интегрально-кодовые системы регистрации ионизирующих излучений. Использование итерационных алгоритмов реконструкции изображений в методе фокусных плоскостей // Измерительная техника, 2001. — № 4. — С. 57–60.
267. *Константинов И.Е., Моисеев И.Ф., Тихонов Е.Г., Туровцева Л.С., Турчин В.Ф., Фёдоров Г.А.* Восстановление количественного распределения гамма-нуклидов по глубине фантома из анализа спектра выходящего излучения. — М.: ИПМ АН СССР, препринт № 54, 1973. — 60 с.
268. *Кульбак С.* Теория информации и статистики. — М.: Наука, 1967. — 284 с.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АФ — аппаратная функция

ЗПФ — зонная пластинка Френеля

ИКСИ — интегрально-кодовые системы измерений

КУ — кодирующее устройство

МФП — метод фокусных плоскостей

ПАКФ — периодическая автокорреляционная функция

ПСП — псевдослучайная последовательность

ПСТ — псевдослучайная таблица

ПЧД — позиционно-чувствительный детектор

РВТ — реконструктивная вычислительная томография

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений

СРС — сильно рассеивающая среда

ТВТ — трансмиссионная вычислительная томография

ТП — трюичная последовательность

УПИ — уравнение переноса излучения

ЭВТ — эмиссионная вычислительная томография

ART — algebraic reconstruction technique

CSP — cyclic subgradient projection

ILST — iterative least square technique

SIRT — simultaneous iterative reconstruction technique

Научное издание

ТЕРЕЩЕНКО Сергей Андреевич

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Редактор *Е.Н. Глебова*

Оригинал-макет: *Е.Ю. Морозов*

Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 06.12.04. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 22,0. Заказ № 496

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Московская типография № 6»
115088, Москва, Ж-88, ул. Южнопортовая, 24

ISBN 5-9221-0551-5



9 785922 105514