

Уравнения в частных производных  
Специальные функции  
Асимптотики

Д.А.Шапиро  
кафедра теоретической физики НГУ

Конспект лекций по математическим методам физики  
Часть I

21 января 2004 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Уравнения в частных производных</b>	<b>4</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	4
1.2	Примеры из физики . . . . .	5
	Колебания струны . . . . .	5
	Гидродинамика идеальной жидкости . . . . .	6
	Уравнения Максвелла . . . . .	7
	Уравнение Шредингера . . . . .	8
	Уравнение теплопроводности . . . . .	8
1.3	Методы решения . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Уравнения первого порядка</b>	<b>12</b>
2.1	Линейные уравнение . . . . .	12
	Однородное уравнение . . . . .	12
	Задача Коши . . . . .	14
	Неоднородное уравнение . . . . .	14
2.2	Квазилинейные уравнения . . . . .	16
	Уравнение Хопфа . . . . .	17
2.3	Нелинейные уравнения . . . . .	19
	Уравнение Гамильтона—Якоби . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Системы линейных уравнений</b>	<b>21</b>
3.1	Характеристики . . . . .	21
3.2	Инварианты Римана . . . . .	23
3.3	Канонический вид . . . . .	24
3.4	Формула Даламбера . . . . .	24
3.5	Неоднородное волновое уравнение . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Метод годографа</b>	<b>27</b>
4.1	Преобразование годографа . . . . .	27
4.2	Потенциал $\chi$ . . . . .	28
4.3	Политропный газ . . . . .	28

<b>5</b>	<b>Канонический вид уравнений 2-го порядка</b>	<b>30</b>
5.1	Случай двух переменных . . . . .	30
5.2	Случай многих переменных . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Автомодельность и бегущие волны</b>	<b>36</b>
6.1	Понятие автомодельности . . . . .	36
6.2	Примеры . . . . .	36
	Линейное уравнение теплопроводности . . . . .	36
	Нелинейное уравнение теплопроводности . . . . .	38
	Уравнение Бюргерса . . . . .	39
	Уравнение Кортевега — де Фриза . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Разделение переменных</b>	<b>42</b>
7.1	Полное разделение переменных . . . . .	42
7.2	Метод Фурье . . . . .	44
<b>8</b>	<b>Цилиндрические функции</b>	<b>49</b>
8.1	Задача о круглой мембране . . . . .	49
8.2	Функции Бесселя . . . . .	51
	Разложение в ряд . . . . .	51
	Рекуррентное соотношение . . . . .	52
	Интегральные представления . . . . .	52
	Соотношение ортогональности . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Сферические функции</b>	<b>56</b>
9.1	Частица в центральном поле . . . . .	56
9.2	Функции Лежандра . . . . .	56
9.3	Сферические функции Бесселя . . . . .	60
<b>10</b>	<b>Аналитическая теория</b>	<b>62</b>
10.1	Канонический вид . . . . .	62
10.2	Обыкновенная точка . . . . .	63
10.3	Особая точка . . . . .	65
10.4	Теорема Фукса . . . . .	67
10.5	Уравнения класса Фукса . . . . .	68
<b>11</b>	<b>Гипергеометрические функции</b>	<b>70</b>
11.1	Функция Гаусса . . . . .	70
11.2	Вырожденная гипергеометрическая функция . . . . .	71
11.3	Примеры . . . . .	72
	Уравнение Лежандра . . . . .	72
	Уравнение Бесселя . . . . .	72
	Линейный осциллятор . . . . .	73
	Атом водорода . . . . .	74

11.4	Полиномы Лагерра . . . . .	75
<b>12</b>	<b>Асимптотические методы</b>	<b>77</b>
12.1	Асимптотическое разложение . . . . .	77
12.2	Интеграл Лапласа . . . . .	78
12.3	Метод стационарной фазы . . . . .	81
<b>13</b>	<b>Метод перевала</b>	<b>84</b>
13.1	Седловая точка . . . . .	84
13.2	Топологический и аналитический этапы . . . . .	85
13.3	Примеры . . . . .	87
<b>14</b>	<b>Метод усреднения</b>	<b>92</b>
14.1	Усредненное уравнение . . . . .	93
14.2	Метод Боголюбова — Крылова . . . . .	96
14.3	Примеры . . . . .	96
<b>15</b>	<b>Явление Стокса</b>	<b>99</b>
15.1	Квазиклассическое приближение . . . . .	99
15.2	Простая точка поворота . . . . .	100
	Свойства матрицы перехода . . . . .	102
15.3	Две простых точки поворота . . . . .	105
<b>А</b>	<b>Сводка формул</b>	<b>108</b>
А.1	Функция Эйлера . . . . .	108
А.2	Гипергеометрические функции . . . . .	108
	Функция Гаусса . . . . .	108
	Функция ${}_1F_1$ . . . . .	109
А.3	Цилиндрические функции . . . . .	109
	Функции $J_\nu$ и $Y_\nu$ . . . . .	109
	Функции Бесселя целого порядка $J_n$ . . . . .	111
	Модифицированная функция Бесселя $I_\nu$ и функция Макдональда $K_\nu$ . . . . .	111
А.4	Ортогональные полиномы . . . . .	112
	Функции $P_l$ и $P_l^m$ . . . . .	112
	Полиномы Эрмита $H_n$ . . . . .	114
	Полиномы Лагерра $L_n^\nu$ . . . . .	115
	<b>Литература</b>	<b>116</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>120</b>

# ЛЕКЦИЯ 1

## Уравнения в частных производных

### 1.1 Основные понятия

**Определение 1.1.** Уравнением в частных производных называется уравнение

$$\mathcal{F} \left( x; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathcal{F}$  — произвольная функция многих переменных, которую мы будем полагать гладкой,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — действительный вектор из  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = u(x)$  — неизвестная функция,<sup>1</sup>  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ .

Мы не будем обсуждать степень гладкости функции  $\mathcal{F}$ , полагая ее дифференцируемой столько раз, сколько нам потребуется. *Порядком* уравнения называется порядок  $m$  старшей производной, входящей в (1.1). Если линейная комбинация двух решений снова является решением, уравнение называют *линейным*. Линейное уравнение можно записать в виде  $\hat{L}u = b(x)$ , где линейный оператор равен сумме

$$\hat{L} = a_0(x) + \sum_{i=1}^n a_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots = 2}} a_2^{k_1 k_2 \dots k_n}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \dots \\ + \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots = m}} a_m^{k_1 k_2 \dots k_n}(x) \frac{\partial^m}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}.$$

Если  $b = 0$ , уравнение называется *однородным*.

*Общим решением* называется решение, зависящее от произвольной функции. Здесь проявляется отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в

---

<sup>1</sup>В примерах мы будем использовать обозначения  $x, y, z$  для координат, а не для векторов.

которых общее решение зависит от произвольных постоянных. Количество произвольных функций в наиболее общем решении совпадает с порядком уравнения  $m$ , а количество переменных каждой функции равно  $n - 1$ . Уравнения математической физики обычно (но не всегда) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Чтобы выделить *частное решение*, требуются начальные или граничные условия. Уравнение вместе с условиями называется *задачей*.

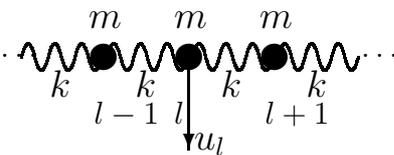
Пример 1.1. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в плоскости  $(x, y)$  имеет общее решение  $u(x, y) = f(y)$ , где  $f$  — произвольная функция. Обыкновенное уравнение имело бы общее решение, равное константе. В данном примере  $m = 1, n = 2$ , поэтому наиболее общее решение дается одной функцией одной переменной. Если к уравнению добавлено начальное условие  $u(0, y) = \sin y$ , то функцию  $f(y) = \sin y$  легко найти и мы получим частное решение.

## 1.2 Примеры из физики

### Колебания струны



Цепочка с одинаковыми грузиками массы  $m$ , соединенными одинаковыми пружинками жесткости  $k$  описывается в классической механике системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1, §7]). Пусть  $u_l$  — малое вертикальное отклонение

$l$ -го грузика от положения равновесия. Тогда уравнение движения грузика будет

$$m \frac{d^2}{dt^2} u_l = -k u_{l-1} + 2k u_l - k u_{l+1}. \quad (1.2)$$

Возвращающая сила равна  $F_l = -T u_l / a$ , где  $a$  — расстояние между соседними грузиками, а  $T$  — сила натяжения, откуда жесткость равна  $k = T/a$ . Чтобы перейти к пределу непрерывной однородной струны, надо вместо массы поставить  $m \rightarrow \rho a$ , где  $\rho$  — линейная плотность. Вместо номера грузика введем его координату вдоль цепочки  $x = la$ , тогда разлагая в ряд Тейлора вблизи  $l$ -го грузика и устремляя  $a \rightarrow 0$  при фиксированных  $T, \rho$ , найдем

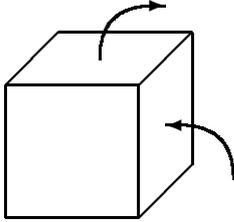
$$u_{l\pm 1} = u_l \pm \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2} + \dots$$

Подставляя разложение в уравнения движения (1.2), получим

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.3)$$

где  $c = \sqrt{T/\rho}$  — скорость распространения возмущения в струне. Получилось линейное уравнение второго порядка, называемое *одномерным волновым* (или *телеграфным*) уравнением.

### Гидродинамика идеальной жидкости



Чтобы вывести уравнения движения идеальной жидкости, введем ее плотность  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и скорость  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  как функции точки наблюдения  $\mathbf{r}$  в данный момент времени  $t$  (координаты Эйлера). Рассмотрим некоторый объем  $V$ . Жидкость может попадать в него и вытекать обратно только через поверхность. Плотность потока равна  $\rho\mathbf{v}$ , поэтому изменение массы в данном объеме равно потоку через его поверхность

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = - \oint \rho\mathbf{v} dS.$$

Здесь  $S$  — элемент поверхности ориентированный вдоль внешней нормали, как принято в математическом анализе. Пользуясь теоремой Гаусса, от интегральной форме можно перейти к дифференциальной. Получится *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (1.4)$$

Аналогично можно рассмотреть поток импульса, втекающий в тот же объем и, пренебрегая вязкостью, вывести *уравнение Эйлера* [2, §2]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}. \quad (1.5)$$

Получилась система уравнений в частных производных, на этот раз первого порядка и нелинейных. Всего у нас 4 уравнения на 5 неизвестных функций. Когда движение идеальной жидкости *изоэнтропическое*, можно записать правую часть уравнения (1.5) как  $-\nabla w$ , где  $w$  — тепловая функция (энтальпия) единицы массы жидкости [2]. Выражение давления  $p = p(\rho, \mathbf{v})$  как функции плотности и скорости (*уравнение состояния*) замыкает систему уравнений гидродинамики.

Система уравнений гидродинамики имеет стационарное решение  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,  $p = p_0 = \text{const}$ ,  $\mathbf{v} = 0$ . Разлагая неизвестные функции в ряд

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{r}, t),$$

считая скорость и поправки к плотности и давлению малыми величинами и ограничиваясь первым порядком малости, получим *линеаризованные уравнения*

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p_1}{\rho_0}.$$

Если теперь продифференцировать первое из уравнений по времени, переставив порядок дифференцирования во втором слагаемом, мы найдем уравнение акустики

$$\square \rho_1 = 0, \quad \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (1.6)$$

трехмерное волновое уравнение, в котором для краткости используют обозначение  $\square$ , оператор *Даламбера*. Скорость распространения возмущений  $c$  находится из уравнения состояния  $c^2 = \partial p / \partial \rho$ . Получилось одно линейное уравнение второго порядка.

## Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла в пустоте [3]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (1.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.8)$$

представляют собой систему 8 линейных уравнений первого порядка для 6 неизвестных функций, компонент векторов электрического и магнитного поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ . Чтобы свести их к уравнениям второго порядка, введем потенциалы  $\phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  так, чтобы

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.9)$$

В выборе потенциалов имеется некоторый произвол, калибровочная инвариантность [3, §18]. Выберем лоренцеву калибровку

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

и подставим поля, выраженные через потенциалы, из (1.9) в (1.7), (1.8). Уравнение (1.7) для  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  превращается в тождество. Уравнение (1.8) для  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ , если воспользоваться формулой векторного анализа  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} + \nabla \operatorname{div} \mathbf{A}$ , превращается в систему трех волновых уравнений

$$\square \mathbf{A} = 0.$$

Точно такое же уравнение получается и для скалярного потенциала  $\phi$ , если продифференцировать по времени калибровочное соотношение. Линейное уравнение с нулем в правой части называется, как и в теории обыкновенных уравнений, *однородным*. Если бы мы учли токи или заряды, они бы появились в правой части уравнения. Уравнение стало бы *неоднородным*.

## Уравнение Шредингера

В квантовой механике состояние частицы описывается волновой функцией  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , квадрат модуля которой имеет смысл плотности вероятности найти частицу в окрестности данной точки  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  [4]. Волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi,$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка. Оператор Гамильтона  $\hat{H}$  для движения частицы в поле  $U(\mathbf{r})$  имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla.$$

Уравнение Шредингера является уравнением в частных производных второго порядка по координатам, но первого порядка по времени. В отличие от волнового уравнения, чтобы выделить частное решение из общего, надо задавать при  $t = 0$  одно начальное условие, а не два.

Если искать решение в виде стационарных состояний  $\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$ , имеющих определенную энергию  $E$ , то время можно исключить и получить стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H} \psi = E \psi. \tag{1.10}$$

Требуется найти не только решение  $\psi$ , но и такие значения энергии  $E$ , при которых эти решения удовлетворяют граничным условиям. Такая постановка называется *спектральной задачей*.

## Уравнение теплопроводности

Плотность внутренней энергии сплошной среды  $c_p T$  ( $c_p$  — теплоемкость,  $T$  — температура) проинтегрируем по объему  $V$ . Получится полная энергия, которая при отсутствии химических реакций с выделением или поглощением тепла может меняться только за счет потока через поверхность

$$\frac{\partial}{\partial t} \int c_p T dV = - \oint \mathbf{Q} dS.$$

Плотность потока тепла, если градиенты температуры малы, дается законом Фурье  $\mathbf{Q} = -\kappa \nabla T$ . Преобразуя уравнение к дифференциальному и считая теплоемкость  $c_p$  и теплопроводность  $\kappa$  не зависящими ни от температуры, ни от координат или времени, получим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \tag{1.11}$$

Таблица 1.1: Основные методы решения уравнений в частных производных.

№	Метод	Применение
1	Метод характеристик	Уравнения первого порядка
2	Разделение переменных	Симметрия
3	Автомодельность	Симметрия
4	Метод Фурье, интегральные преобразования	Линейное уравнение, постоянные коэффициенты
5	Функции Грина	Линейные неоднородные уравнения
6	Численные методы	Низкая размерность

где  $\chi = \kappa/c_p$  называют коэффициентом температуропроводности.

Так же, как и в предыдущем примере, получилось уравнение второго порядка по пространственным переменным, но первого порядка по времени. Такое уравнение называют уравнением *параболического* типа, в отличие от волнового, которое относится к *гиперболическому* типу. Более точные определения типов линейных уравнений второго порядка мы дадим позже, а здесь приведем пример последнего типа — *эллиптического*. К эллиптическому типу относится уравнение Лапласа  $\Delta u = 0$ , которое получается из (1.11) в стационарном случае, когда температура не зависит от времени. Уравнение Лапласа для скалярного потенциала получается в стационарном случае и из уравнений Максвелла (электростатика). Уравнения разных типов требуют разной постановки задачи. В данном конспекте мы рассматриваем методы решения уравнений и будем обсуждать постановки задач по мере изучения разных типов уравнений.

### 1.3 Методы решения

В таблице 1.1 перечислены основные методы решения уравнений в частных производных. Аналитические методы обычно основаны на сведении уравнения в частных производных к обыкновенному или системе обыкновенных. Последние имеют явное решение тоже достаточно редко, но справедливо считаются более простыми. Сама возможность свести к обыкновенным уравнениям встречается очень редко.

Счастливым исключением являются уравнения первого порядка, которые решаются (в том смысле, что сводятся к обыкновенным) методом характеристик. Методом характеристик решаются иногда и линейные уравнения второго порядка гиперболического типа и некоторые системы. Метод характеристик рассмотрен в лекциях 2–5. Для применимости автомодельных подстановок требуется симметрия уравнения относительно масштабных преобразований независимых переменных, см. лекцию 6. Для того, чтобы в уравнении разделялись переменные, необходима высокая геометрическая симметрия самого уравнения и граничных условий. Разделению переменных посвящена лекция 7.

Для линейных уравнений имеются и другие аналитические методы. Метод Фурье, рассмотренный в лекции 7 и проиллюстрированный примерами в лекциях 8 и 9, как и метод интегральных преобразований, применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Фактически тоже требуется симметрия уравнения, в данном методе — трансляционная инвариантность. Иногда уравнение удастся также решить, если коэффициенты не постоянны, а линейны по пространственным переменным. Тогда интегральное преобразование понижает порядок уравнения. Линейные неоднородные уравнения часто удается решить с помощью метода функций Грина.

Если симметрии нет, применяются численные методы. Для численного решения не слишком важно линейное уравнение или нелинейное, какого оно порядка, есть ли симметрия. На первый план выходит вопрос о размерности, не слишком существенный для аналитических методов. Если для решения с необходимой точностью на компьютере нам нужно  $10^3$  точек вдоль каждой оси, то двумерная задача требует  $10^6$  точек, трехмерная  $10^9$ , а четырехмерную невозможно решить даже на самом современном суперкомпьютере. Численные методы разнообразны и хорошо развиты. Они не рассматриваются в данном курсе, но их знание — необходимый элемент современного образования. Наилучшие результаты в науке и технике получаются при удачном сочетании применения аналитических и численных методов.

После разделения переменных в линейных уравнениях математической физики получаются обыкновенные дифференциальные уравнения того же порядка. Коэффициенты последних зависят от независимой переменной и их решение часто сводится не к элементарным, а к специальным функциям. Лекции 9/8 посвящены обыкновенным уравнениям возникающим при разделении переменных в цилиндрических/сферических координатах. Там же выводятся простейшие свойства цилиндрических и сферических функций: разложение в ряд, рекуррентные соотношения, интегральные представления, соотношения ортогональности. Лекции 10, 11 посвящены теории более общих специальных функций — гипергеометрических, которые в частных случаях сводятся к цилиндрическим, сферическим и многим другим специальным и элементарным функциям. Излагать теорию гипергеометрических рядов можно по-разному, мы выбрали подход Фукса на основе аналитической теории обыкновенных уравнений.

Последний раздел — простейшие асимптотические методы состоит из лекций 12, где изложены простейшие методы оценки интегралов (оценка интеграла типа Лапласа и метод стационарной фазы), 13, в которой рассмотрен более сложный и общий метод перевала, и 14, посвященной методу усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Лекция 15 — дополнительная, в программу не входит и посвящена квазиклассическому приближению в комплексной плоскости.

## Рекомендуемая литература

Главная цель обучения студентов-физиков математическим методам — научить их решать разнообразные задачи. Задачи по уравнениям в частных производных, многие из которых снабжены подробными решениями, можно найти в сборнике [5], содержание которого примерно соответствует настоящим лекциям. Для более детального усвоения материала, в том числе разделов, не включенных в нашу программу, можно дополнительно решать задачи из других сборников, например из [6–11]. Подробное, а не конспективное, изложение теории можно найти во многих книгах, среди которых учебник Годунова [12] выделяется удачным компромиссом между строгостью и доступностью изложения. Наиболее полная теория уравнений в частных производных имеется в классических монографиях [13–16]. Учебники [17–21] предназначены для студентов-математиков, поэтому отличаются строгостью. В качестве введения в предмет можно также рекомендовать книги [22, 23], где разобрано много простых примеров. Для более полного изучения можно также обратиться к [24]. Дополнительные ссылки на литературу по отдельным разделам приведены в соответствующих лекциях.

# ЛЕКЦИЯ 2

## Уравнения первого порядка

### 2.1 Линейные уравнение

#### Однородное уравнение

Уравнение вида

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где  $a(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  —  $n$ -мерные векторы, является линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка, если компоненты вектора коэффициентов  $a$  не зависят от неизвестной функции  $u$ .

**Определение 2.1.** Уравнением характеристик называется система обыкновенных уравнений

$$\dot{x} = a(x), \quad (2.2)$$

где точкой обозначена производная по параметру  $\tau$ , который мы искусственно вводим.

Система (2.2) содержит  $n$  уравнений, поэтому имеет  $n$  первых интегралов (функций  $x, \tau$ , которые сохраняются при изменении  $\tau$ ). В том числе имеется  $n - 1$  первых интегралов, не зависящих от параметра  $\tau$ :  $F_1(x) = \text{const}, \dots, F_{n-1}(x) = \text{const}$ . Все множество первых интегралов называют *полным интегралом*. Кривые в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , на которых постоянны функции  $F_i$ , называются *характеристиками*.

Зная первые интегралы  $F_i$ , можно построить *общее решение* или *общий интеграл* уравнения (2.1). Для этого надо взять произвольную гладкую функцию  $g$  этих первых интегралов

$$u(x) = g(F_1(x), \dots, F_{n-1}(x)). \quad (2.3)$$

Параметр  $\tau$  меняется вдоль характеристики, а решение (2.3) сохраняется. Вывести эту формулу можно, подставляя функцию (2.3) в уравнение (2.1), заменяя

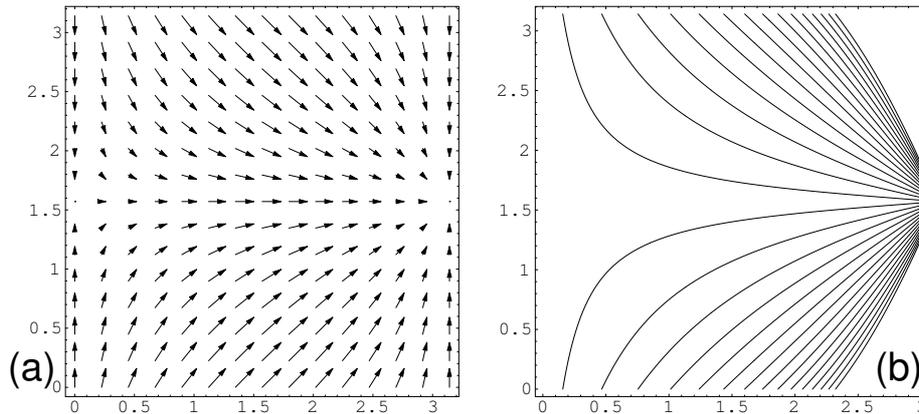


Рис. 2.1: Поле направлений (a) и интегральные кривые (b) для примера 2.1.

$a(x)$  согласно (2.2) и пользуясь постоянством первых интегралов  $F_i$ :

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} x_i \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial F_j} \frac{dF_j}{d\tau} = 0.$$

Теперь, если удастся решить систему обыкновенных уравнений, мы сможем решить и уравнение в частных производных.

Можно было бы вместо вывода формулы воспользоваться наглядными геометрическими соображениями, изложенными, например, в книгах Арнольда [25, 26]. Уравнение (2.1) означает, что равна нулю производная функции  $u(x)$  вдоль направления вектора  $a$ . Значит решение уравнения (2.1) постоянно вдоль “силовых линий” этого поля — характеристик. Чтобы решить уравнение (2.1) методом характеристик, надо восстановить интегральные кривые по полю направлений. В каждой точке имеется одно направление вдоль характеристик (координата  $\tau$ ) и  $n-1$  направление в ортогональном дополнении ( $F_1, \dots, F_{n-1}$ ). Уравнение сводится к виду  $du/d\tau = 0$ , а решение дается формулой (2.3).

**Пример 2.1.** Вектор  $a = (\sin x, \cos y)$  уравнения  $\sin x \cdot u_x + \cos y \cdot u_y = 0$  задает векторное поле в плоскости  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , показанное на рис. 2.1(a). Уравнения характеристик  $\dot{x} = \sin x, \dot{y} = \cos y$  можно проинтегрировать. Однако удобнее сразу найти первый интеграл, не зависящий от параметра, разделив одно уравнение на другое и разделяя переменные:  $F(x, y) = \operatorname{tg}(x/2)[1 - \operatorname{tg}(y/2)]/[1 + \operatorname{tg}(y/2)]$ . Тогда общее решение дается произвольной функцией  $g$  одной переменной  $u(x, y) = g(F)$ , которая постоянна вдоль характеристик — интегральных кривых рисунка 2.1(b).

### Задача Коши

Чтобы из общего решения выбрать частное, надо добавить к уравнению (2.1) начальное условие, которое задается на начальной гиперповерхности  $S$

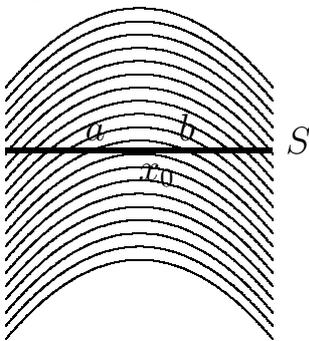
$$u|_S = f(x). \quad (2.4)$$

Гиперповерхность — это многообразие, размерность которого на единицу меньше, чем у всего пространства ( $\dim S = n - 1$ ). Мы будем вместо гиперповерхности говорить просто поверхность. Уравнение (2.1) вместе с начальным условием (2.4) составляют задачу Коши.

Если в общее решение (2.3) подставить начальное условие (2.4), получится функциональное уравнение, которое дает частное решение. Очень трудно, а в общем случае и невозможно, сформулировать условие, при котором это функциональное уравнение глобально разрешимо во всем пространстве. Однако если ограничиться локальной задачей: можно ли продолжить решение в малую окрестность некоторой точки  $x_0$  начальной гиперповерхности, то можно сформулировать сравнительно простое правило.

**Определение 2.2.** Говорят, что кривая *трансверсальна* поверхности, если она пересекает поверхность под ненулевым углом.

**Теорема 2.1.** Решение задачи Коши (2.1), (2.4) в окрестности точки  $x_0 \in S$  существует и единственно, если проходящая через точку  $x_0$  характеристика трансверсальна поверхности  $S$ .



За доказательством теоремы мы отсылаем к математической литературе, например, книге [25]. Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать не одну характеристику, а все семейство характеристик. Пусть характеристика в точке  $x_0$  касается начальной поверхности  $S$ . Тогда соседняя характеристика пересекает  $S$  в двух точках  $a$  и  $b$ . Значит возникает конфликт между значением, заданным в точке  $b$ , и другим значением, которое приносит характеристика из точки  $a$ . Такой конфликт делает задачу, вообще говоря, неразрешимой.

**Упражнение 2.1.** Решить уравнение примера 2.1 с начальным условием  $u(\pi/2, y) = y$ . Почему не удастся решить задачу Коши  $u(0, y) = y$ ?

### Неоднородное уравнение

Неоднородное уравнение

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x) \quad (2.5)$$

отличается от однородного (2.1) функцией  $b(x)$  в правой части. Уравнение характеристик (2.2) дополняется уравнением для функции  $u$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x), \\ \dot{u} &= b(x).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Теперь это система  $n + 1$  обыкновенных уравнений в  $n + 1$ -мерном *расширенном* пространстве. К координатам  $x_1, x_2, \dots, x_n$  добавилась координата  $u$ . Если мы решим систему (2.2), то решение  $x(\tau)$  можно подставить в уравнение (2.6) и проинтегрировать вдоль характеристики. Появится еще одна константа интегрирования  $u(\tau) = \int b(x(\tau)) d\tau + \text{const}$ . Если эту последнюю константу записать как произвольную функцию первых интегралов  $F_i$ , а параметр  $\tau$  выразить через переменные  $x$ , получится общее решение уравнения (2.5) в виде суммы общего решения (2.3) однородного уравнения и частного решения неоднородного

$$u(x) = g(F_1, \dots, F_{n-1}) + \int_{\tau_0}^{\tau} b(x(\tau')) d\tau'.$$

**Пример 2.2.** Чтобы решить неоднородное уравнение

$$\frac{1}{x}u_x - yu_y = y,$$

выпишем уравнения характеристик  $\dot{x} = x^{-1}, \dot{y} = -y, \dot{u} = y$ . Решение системы трех уравнений содержит 3 произвольные константы  $C, C_1, C_2$ :

$$\frac{x^2}{2} = \tau + C_1, \quad y = C_2 e^{-\tau}, \quad u = -C_2 e^{-\tau} + C.$$

Не зависящий от  $\tau$  первый интеграл есть  $F = y \exp(x^2/2) = \text{const}$ , тогда общее решение дается произвольной функциональной связью константы  $C$  и интеграла  $F$ :

$$u(x, y) = -y + g\left(ye^{x^2/2}\right)$$

**Упражнение 2.2.** Нарисуйте характеристики уравнения из примера 2.2 и решите задачу Коши  $u(0, y) = y^2$ . Что мешает поставить задачу Коши при  $y = 0$ ?

Решение неоднородного уравнения не равно константе вдоль характеристики, но необходимость трансверсальности характеристики к начальной гиперповерхности для разрешимости задачи Коши остается в силе. Иногда этим требованием пользуются в качестве определения характеристики. Можно называть характеристикой кривую, на которой нельзя поставить задачу Коши. Другими словами, решение, заданное вдоль характеристики нельзя продолжить даже в малую окрестность характеристики. Такое определение, как будет показано ниже, годится не только для уравнений первого порядка, но и в общем случае.

Другое важное и общее свойство характеристики — инвариантность относительно преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ . После такого преобразования уравнение первого порядка примет вид  $a(\partial y/\partial x)u_y = b$ , тогда уравнение характеристик будет  $\dot{y} = a(\partial y/\partial x)$ . С другой стороны можно преобразовать к новым переменным само уравнение характеристики, получится  $(\partial x/\partial y)\dot{y} = a$ . Уравнения получатся одинаковыми, если преобразование невырожденное, т.е. его якобиан  $J = \det(\partial y_i/\partial x_j)$  не обращается в нуль или бесконечность.

## 2.2 Квазилинейные уравнения

*Квазилинейное уравнение*

$$a(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x, u) \quad (2.7)$$

отличается от линейного неоднородного тем, что его коэффициенты могут зависеть от решения. Термин “квазилинейное” означает, что уравнение по виду похоже на линейное, хотя и является нелинейным (линейная комбинация решений не удовлетворяет уравнению).

Уравнение характеристик остается тем же самым

$$\dot{x} = a(x, u), \quad \dot{u} = b(x, u), \quad (2.8)$$

но последнее уравнение теперь нельзя решать отдельно. Надо рассматривать всю систему уравнений в расширенном пространстве совместно. В данном случае имеется  $n$  первых интегралов, не зависящих от параметра  $\tau$ :

$$F_1(x, u) = \text{const}, \dots, F_n(x, u) = \text{const}.$$

Каждый интеграл задает одно условие, а значит при фиксированном значении константы определяет поверхность в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Общее решение уравнения (2.7) дается произвольной функцией  $n$  переменных

$$G(F_1(x, u), \dots, F_n(x, u)) = 0.$$

Как правило, решение квазилинейного уравнения получается в неявном виде, т.е. последнее соотношение не удастся разрешить относительно  $u$ .

Тем не менее, можно убедиться, что получилось решение. Для этого продифференцируем его по  $x_i$  и найдем

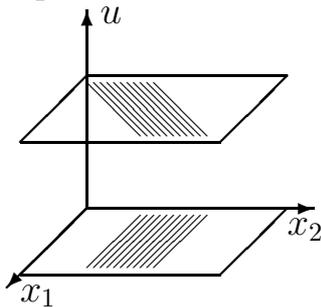
$$\frac{\partial G}{\partial F_k} \left( \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F_k}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = 0,$$

где по повторяющемуся индексу здесь и далее подразумевается суммирование, в данном случае от  $k = 1$  до  $k = n$ . Отсюда мы найдем частные производные  $u_{x_i}$  и

подставим их в уравнение (2.7), представив числитель в виде разности  $\dot{x}_i \partial F_k / \partial x_i = dF_k / d\tau - \dot{u} \partial F_k / \partial u$ ,

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{x}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial G}{\partial F_k} \cdot \frac{\frac{dF_k}{d\tau} - b \frac{\partial F_k}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial u}} = b,$$

так как полная производная  $dF_k / d\tau$  равна нулю по определению первого интеграла.



Уравнение (2.8) является самым общим уравнением характеристик. В простейшем случае линейного однородного уравнения дополнительное уравнение характеристик  $\dot{u} = 0$  имеет простое решение  $u = \text{const}$  и описывает семейство плоскостей, ортогональных оси  $u$  расширенного пространства. В каждой плоскости характеристики — решения уравнений  $\dot{x} = a$  выглядят одинаково, поэтому мы рассматривали их только в одной плоскости  $u = 0$ . Характеристики квазилинейного уравнения могут не быть плоскими кривыми. В частном случае однородного квазилинейного уравнения характеристики плоские, но имеют различный наклон в разных “горизонтальных” плоскостях. Рассмотрим одно важное однородное квазилинейное уравнение.

## Уравнение Хопфа

Квазилинейное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.9}$$

описывает, например, одномерный газ невзаимодействующих частиц, иными словами, это одномерное уравнение динамики (1.5) газа с нулевым давлением. Его уравнения характеристик

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = u, \quad \dot{u} = 0$$

имеет следующие первые интегралы

$$x - ut = F_1(x, t, u) = \text{const}, \quad u = F_2(x, t, u) = \text{const}.$$

Характеристики представляют собой прямые линии, имеющие в каждой плоскости  $u = \text{const}$  разный наклон. Общее решение  $G(x - ut, u) = 0$  можно записать в виде, разрешенном относительно  $u$ :  $u = g(x - ut)$ .

Рассмотрим задачу Коши  $u(x, 0) = \text{arccctg } x$ . Функция  $g$  находится сразу  $g(x) = \text{arccctg } x$ , откуда

$$u = \text{arccctg } (x - ut). \tag{2.10}$$

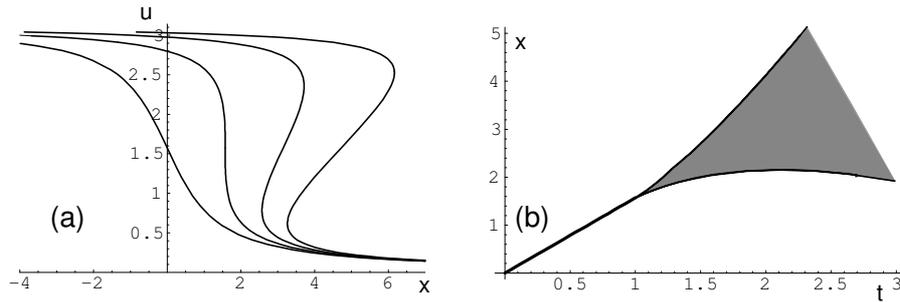


Рис. 2.2: Опрокидывание котангенсоиды (а): слева направо  $t = 0, 1, 2, 3$ . Расширение области неоднозначности (б).

Из графика решения, приведенного на рис. 2.2, видно, что в какой-то момент времени  $t > 0$  производная  $u_x$  может обращаться в бесконечность. После этого момента  $u$  как функция  $x$  перестает быть однозначной. Это явление называется *опрокидыванием* или *градиентной катастрофой*. Производную  $u_x$  можно вычислить, дифференцируя по  $x$  решение (2.10):

$$u_x = -\frac{1}{1 + \xi^2 - t}, \quad \xi = x - ut. \tag{2.11}$$

Знаменатель впервые обращается в нуль при  $t = t^* = 1$ , происходит это при  $u^* = \pi/2$  в точке  $x^* = \pi/2$ .

При  $t > t^*$  производная обращается в бесконечность в двух точках (см. верхнюю кривую на рис. 2.2а). Между этими точками находится область неоднозначности. Закон расширения области неоднозначности в окрестности точки опрокидывания можно найти, разлагая в ряд решение уравнений  $u = \text{arctg} \xi, 1 + \xi^2 - t = 0$  при  $\xi \ll 1$ . Получается  $|x - \pi t/2| \leq (t - 1)^{3/2}, t > 1$ . Область неоднозначности ограничена полукубической параболой. При  $t < t^*$  решение однозначно, а при  $t > t^*$  имеется расширяющаяся область, указанная на рис. 2.2б серым цветом.

В физике причина опрокидывание прозрачна. Если начальный профиль  $u(x, 0)$  имеет участок с отрицательным наклоном  $\partial u(x, 0)/\partial x < 0$ , то на этом интервале быстрые частицы (с большими значениями  $u$ ) догоняют более медленные и крутизна фронта увеличивается. В газовой динамике расширение области неоднозначности обычно не встречается, потому что при приближении к моменту опрокидывания уравнения теряют применимость и формируются ударные волны. Подробности можно найти в книге [27].

С геометрической точки зрения в расширенном пространстве  $(x, t, u)$  имеется поле направлений  $(u, 1, 0)$ , которое задается уравнением характеристик. В каждой горизонтальной плоскости векторы имеют свой наклон. Найти решение задачи Коши для уравнения Хопфа означает провести через данные векторы интегральную поверхность, которая при  $t = 0$  проходит через заданную кривую  $u(x, 0)$ . Интегральная поверхность для рассмотренного выше примера с  $u(x, 0) =$

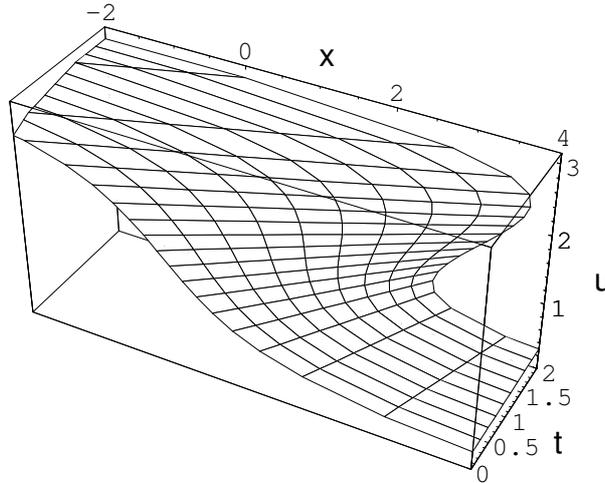


Рис. 2.3: Интегральная поверхность уравнения Хопфа.

$\arcsctg x$  изображена на рисунке 2.3. Вертикальная прямая при  $t < 1$  пересекает интегральную поверхность в одной точке, а при  $t > 1$  может пересекать в трех точках. Вообще говоря, изменение количества корней называется в математике *бифуркацией*. В данном случае точка бифуркации  $(x^*, t^*, u^*) = (\pi/2, 1, \pi/2)$ , где происходит переход от одного корня к трем, называется *точкой сборки*.

## 2.3 Нелинейные уравнения

**Определение 2.3.** *Нелинейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$F(x, p, u) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right). \quad (2.12)$$

Нелинейное уравнение задает поверхность в  $2n + 1$ -мерном расширенном фазовом пространстве ( $n$  координат  $x_i$ ,  $n$  импульсов  $p_i$  и функция  $u$ ).

Сравнивая с определением 1.1, видим, что нелинейное уравнение — это общее уравнение первого порядка. Квазилинейное уравнение (2.7) представляет собой частный случай нелинейного (2.12) с линейной по  $p$  функцией  $F = a(x, u)p - b(x, u)$ .

Чтобы вывести уравнение характеристик, продифференцируем (2.12) по  $x_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_k = 0.$$

Мы воспользовались равенством перекрестных производных во втором слагаемом и определением импульсов в третьем и получили систему квазилинейных

уравнений (2.7), для каждого из которых уравнение характеристик известно

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i, \quad \dot{u} = \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i. \quad (2.13)$$

Последнее уравнение получилось из первого, с учетом определения  $p_i$ , а именно  $\dot{u} = u_x \dot{x}$ . Уравнения характеристик можно переписать в компактном векторном виде

$$\dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p.$$

Общее решение выписывается в виде произвольной связи  $2n$  первых интегралов уравнений (2.13)  $F_1(x, p, u), F_2(x, p, u), \dots, F_{2n}(x, p, u)$ , не зависящих от параметра  $\tau$ :

$$G(F_1, \dots, F_{2n}) = 0. \quad (2.14)$$

К равенству (2.14) надо добавить  $n$  условий  $p_i = \partial u / \partial x_i$  и с их помощью исключить  $p_i$ . Таким образом, решение всегда можно записать, по крайней мере, в неявном параметрическом виде.

### Уравнение Гамильтона—Якоби

Решим одномерное уравнение Гамильтона — Якоби [28] для свободной частицы с начальным условием

$$S_t + \frac{1}{2} S_x^2 = 0, \quad S(x, 0) = x^2.$$

В общем случае (2.12) называется *уравнением Гамильтона — Якоби*, если  $F$  не зависит от  $u$ . Введем импульсы  $p_0 = S_t, p_1 = S_x$ . Функция здесь  $F = p_0 + p_1^2/2 = 0$ , откуда уравнения характеристик

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{x} = p_1, \quad \dot{p}_0 = \dot{p}_1 = 0, \quad \dot{S} = p_0 + p_1^2 \equiv p_1^2/2.$$

Исключая параметр  $\tau$ , и константу  $p_0$  найдем общее решение

$$S - \frac{p^2}{2} t = g(x - pt), \quad p = g'(x - pt); \quad p \equiv p_1.$$

Ответ получился в параметрическом виде, из него еще надо исключить постоянную  $p$ . Функцию  $g = x^2$  найдем из начальных условий, тогда

$$S - \frac{p^2 t}{2} = (x - pt)^2, \quad p = 2(x - pt) \text{ или } p = \frac{2x}{1 + 2t},$$

откуда  $S = x^2/(1 + 2t)$ .

Теория нелинейных уравнений первого порядка изложена в учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, например, [25, 29].

# ЛЕКЦИЯ 3

## Системы линейных уравнений

В нашу задачу входит не столько изложение общей теории, сколько иллюстрация основных идей математической физики на простейших примерах. Поэтому системы линейных (или квазилинейных) уравнений первого порядка мы рассмотрим на примере системы на функции всего двух переменных  $x$  и  $t$ . Особенности многомерного случая мы коротко рассмотрим позже, в лекции 5, в связи с уравнениями второго порядка.

### 3.1 Характеристики

**Определение 3.1.** Системой линейных уравнений первого порядка с двумя переменными называется система

$$A \frac{\partial \psi}{\partial t} + B \frac{\partial \psi}{\partial x} = b, \quad (3.1)$$

где  $A, B$  — действительные матрицы  $m \times m$ , причем матрицу  $A$  мы считаем невырожденной, а  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)^\top, b = (b_1, \dots, b_m)^\top$  — столбцы неизвестных функций и заданных правых частей, соответственно.<sup>1</sup> Если  $A, B, b$  зависят не только от  $x, t$ , но и от решения  $\psi$ , то система естественно является квазилинейной.

Под характеристикой системы будем понимать, как и в предыдущей лекции, кривую в плоскости  $(x, t)$ , с которой решение невозможно продолжить. Пусть начальное условие задано на кривой  $\gamma$ , тогда вдоль нее  $d\psi = \psi_t dt + \psi_x dx$ . Вместе с исходной системой (3.1) получилась система линейных алгебраических уравнений на  $2m$  неизвестных производных  $\psi_t, \psi_x$ . Выпишем ее расширенную матрицу  $2m \times (2m + 1)$

$$\left( \begin{array}{cc|c} A & B & b \\ E dt & E dx & d\psi \end{array} \right). \quad (3.2)$$

Вертикальная черта здесь отделяет матрицу системы от столбца правых частей, а  $E$  — единичную матрицу.

---

<sup>1</sup>Значок  $\top$  обозначает транспонирование.

Таблица 3.1: Классификация систем уравнений по типам.

Собственные значения	Тип
вещественны и различны	гиперболический
совпадают	параболический
мнимые	эллиптический

Можно ли продолжить решение с кривой  $\gamma$ , хотя бы в окрестность точки  $(x_0, t_0)$ ? Если записать разложение  $\psi$  в ряд Тейлора  $\psi(x, t) \approx \psi(x_0, t_0) + \psi_x(x - x_0) + \psi_t(t - t_0)$ , мы увидим, что для продолжения решения надо знать по крайней мере первые производные. Когда определитель системы равен нулю, даже первые производные найти нельзя, поэтому решение продолжить не удастся. Значит уравнением характеристик служит условие равенства нулю определителя системы (матрица системы выписана в (3.2) слева от черты). Это условие можно упростить

$$\begin{vmatrix} A & B \\ E dt & E dx \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left| A \frac{dx}{dt} - B \right| = 0.$$

Мы воспользовались формулой для определителя блочной матрицы:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|,$$

где  $A, B, C, D$  — квадратные матрицы, причем  $A$  и  $C$  перестановочны.

Равенство можно еще более упростить, если ввести матрицу  $C = A^{-1}B$

$$|\lambda E - C| = 0, \quad \lambda = \frac{dx}{dt}. \quad (3.3)$$

Получилось характеристическое уравнение, значит наклоны характеристик равны собственным значениям матрицы  $C$ . В зависимости от собственных значений системы классифицируются по типам, как показано в таблице 3.1. Заметим, что возможен еще один частный случай, когда собственные числа совпадают, но матрица все же приводится к диагональному виду. Тогда система тоже относится к гиперболическому типу.

На характеристике, где определитель (3.3) обращается в нуль, система уравнений (3.2) разрешима при условии совпадения рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A & B \\ E dt & E dx \end{pmatrix} = \text{rang} \left( \begin{array}{cc|c} A & B & b \\ E dt & E dx & d\psi \end{array} \right). \quad (3.4)$$

Полученная система дифференциальных уравнений называется *соотношениями на характеристиках*. Само название подсказывает, что  $dx/dt$  надо подставлять из уравнения характеристик (3.3). Иногда эти соотношения удается проинтегрировать, полученные интегралы называются *инвариантами Римана*.

## 3.2 Инварианты Римана

Система уравнений гидродинамики (1.4), (1.5) является дозвуковой, когда скорость мала по сравнению с  $c = \sqrt{dp/d\rho}$ , поэтому в уравнение состояния не входит скорость:  $p = p(\rho)$ . В одномерной геометрии получится система квазилинейных уравнений на плотность  $\rho(x, t)$  и скорость  $u(x, t)$

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad u_t + \frac{c^2}{\rho}\rho_x + uu_x = 0. \quad (3.5)$$

Введем вектор-функцию  $\psi = (\rho, u)^T$ , тогда  $A$  — единичная матрица,  $B = \begin{pmatrix} u & \rho \\ c^2/\rho & u \end{pmatrix}$ . Собственные значения последней матрицы равны  $\lambda_{1,2} = u \pm c(\rho)$ . Поскольку  $u \ll c$ , получились два семейства характеристик с положительным и отрицательным наклоном.

Чтобы найти соотношение на характеристиках надо вычеркнуть в расширенной матрице один из столбцов, например, третий и найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u & \rho & 0 \\ 0 & 1 & c^2/\rho & u & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & d\rho \\ 0 & dt & 0 & dx & du \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\rho dt & d\rho \\ dx - u dt & du \end{vmatrix}_{x=u \pm c} = 0,$$

откуда  $\rho du = \pm c d\rho$ . Мы снова воспользовались формулой для определителя блочной матрицы. Полученное соотношение можно один раз проинтегрировать, тогда для инвариантов Римана получится формула

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{c(\rho) d\rho}{\rho}. \quad (3.6)$$

Можно умножить первое уравнение системы (3.5) на  $c/\rho$  и сложить со вторым или вычесть из второго. Получится система уравнений на инварианты Римана

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (u + c)\frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial J_-}{\partial t} + (u - c)\frac{\partial J_-}{\partial x} = 0.$$

Впечатление о том, что уравнения расцепились, обманчиво. Чтобы полностью перейти к новым переменным, надо перевыразить  $u, c(\rho)$  через инварианты  $J_{\pm}$ . Тогда станет видно, что, вообще говоря, уравнения можно решить только совместно.

Встречаются задачи, где в из-за граничных условий на бесконечности один из инвариантов не зависит от координаты, тогда в силу уравнений он не зависит и от времени. Приравнивая один из инвариантов константе, мы сведем систему к одному квазилинейному уравнению  $u_t + (u + c)u_x = 0$ , которое решается. Такое решение называют *простой волной Римана*. Имеется также частный случай политропного газа, уравнение состояния которого степенное  $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$ . При определенных дискретных значениях показателя  $\gamma$  можно решить систему одномерной гидродинамики методом годографа (лекция 4).

### 3.3 Канонический вид гиперболической системы

Продолжим общую теорию систем уравнений первого порядка, предполагая ниже матрицу  $C$  — симметричной и не зависящей от решения. Симметричность матрицы  $C$  достаточна, чтобы гарантировать гиперболичность системы

$$\psi_t + C\psi_x = f, \quad (3.7)$$

где  $f(x, t)$  — новый столбец правых частей, получившийся из  $b$  после умножения системы (3.1) слева на матрицу  $A^{-1}$ . Приведем  $C$  к диагональному виду

$$C = T\Lambda T^{-1}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Перейдем к новой неизвестной вектор-функции  $\psi = T\phi$ , тогда, умножив уравнение (3.7) слева на  $T^{-1}$ , мы приведем его к виду

$$\phi_t + \Lambda\phi_x = \tilde{f},$$

называемому *каноническим*. Здесь новая правая часть получается из старой  $\tilde{f} = T^{-1}f - T^{-1}T_t\phi - T^{-1}CT_x\phi$  и зависит от решения, но не содержит его первых производных. На дифференциальные части уравнений в каноническом базисе получаются отдельные уравнения, которые зацепляются только через правые части. Может случиться, что уравнения станут однородными, тогда их можно решать по-отдельности.

### 3.4 Формула Даламбера

Применим общую теорию систем к одномерному однородному волновому уравнению

$$w_{tt} - w_{xx} = 0 \quad (3.8)$$

можно свести к системе, если обозначить  $w_t \equiv u$ ,  $w_x \equiv v$ . Тогда первое уравнение получается из волнового, а второе из равенства перекрестных производных

$$u_t - v_x = 0, \quad v_t - u_x = 0.$$

Матрица  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  приводится к диагональному виду матрицей  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ :  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , откуда канонический вид системы будет  $\alpha_t - \alpha_x = 0$ ,  $\beta_t + \beta_x = 0$ , где  $\alpha = (u + v)/2$ ,  $\beta = (u - v)/2$ . Каноническая система получилась распавшаяся, поэтому можно сразу выписать общие решения каждого уравнения, а затем найти и общее решение волнового уравнения

$$w(x, t) = f(x - t) + g(x + t). \quad (3.9)$$

Решение состоит из двух волн, бегущих во встречных направлениях. Как и положено, наиболее общее решение уравнения второго порядка содержит две произвольные функции. Переменных в уравнении две, поэтому каждая функция получилась от одной переменной.

Рассмотрим задачу Коши для одномерного волнового уравнения (3.8). Задача должна состоять из двух условий, поскольку уравнение имеет второй порядок по времени

$$w(x, 0) = q(x), \quad w_t(x, 0) = h(x). \quad (3.10)$$

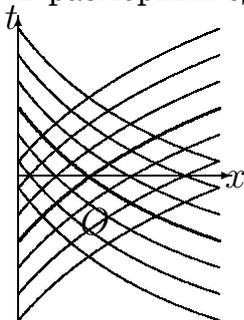
Подставляя начальное условие в общее решение (3.9), получим функциональные уравнения на  $f, g$

$$f(x) + g(x) = q(x), \quad -f'(x) + g'(x) = h(x).$$

Если первое уравнение продифференцировать, система функциональных уравнений решается  $g' = \frac{1}{2}(q' + h)$ ,  $f' = \frac{1}{2}(q' - h)$ . Отсюда получится формула для решения одномерной задачи Коши — *формула Даламбера*

$$w(x, t) = \frac{1}{2} [q(x - t) + q(x + t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(x') dx'. \quad (3.11)$$

В размерных единицах интегрирование происходит от  $x - ct$  до  $x + ct$ .



В общем случае характеристики не прямые, а кривые. Если выбрать какую-нибудь точку  $O$ , проходящие через нее характеристики ограничивают на плоскости две области. При  $t > 0$  характеристики ограничивают *область влияния* точки  $O$ , т.е. те точки, в которых сказываются условия, заданные в точке  $O$ . При  $t < 0$  характеристики ограничивают *область зависимости*, т.е. множество точек, от которых зависит решение в точке  $O$ .

### 3.5 Неоднородное волновое уравнение

Неоднородное одномерное волновое уравнение с начальными условиями

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} = p(x, t), \quad \psi(x, 0) = q(x), \quad \psi_t(x, 0) = h(x) \quad (3.12)$$

можно свести к уже рассмотренным задачам в два шага. Сначала разобьем неоднородную задачу на две задачи Коши, которые называются *полуоднородными*

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \quad w(x, 0) = q(x), \quad w_t(x, 0) = h(x) \quad (3.13)$$

$$v_{tt} - v_{xx} = p(x, t), \quad v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0. \quad (3.14)$$

Одна из задач не имеет правой части уравнения, а во второй использованы нулевые начальные условия. Сумма решений задач (3.13), (3.14)  $\psi = w(x, t) + v(x, t)$  в силу линейности удовлетворяет уравнению (3.12).

Задачу (3.13) мы уже решили, когда выводили формулу Даламбера (3.11). На втором шаге остается решить задачу (3.14), но мы вместо нее рассмотрим вспомогательную задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad u(x, t, \tau)|_{t=\tau} = 0, \quad u_t(x, t, \tau)|_{t=\tau} = p(x, \tau). \quad (3.15)$$

Здесь  $\tau$  — параметр, так что мы рассматриваем целое однопараметрическое семейство вспомогательных задач, начальные условия которых ставятся при  $t = \tau$ . Вспомогательную задачу можно решить с помощью формулы Даламбера (3.11), если заметить, что решение уравнения с постоянными коэффициентами может зависеть только от разности  $t - \tau$ :

$$u(x, t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x', \tau) dx'.$$

Теперь покажем, что интеграл вспомогательной функции  $u$  по параметру  $\tau$

$$v(x, t) = \int_0^t u(x, t, \tau) d\tau$$

дает решение задачи (3.14). Для этого дифференцируя, найдем  $v_t = u(x, t, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_t(x, t, \tau) d\tau$ . Первое слагаемое обращается в нуль в силу первого начального условия (3.15). Можно продифференцировать еще раз  $v_{tt} = u_t(x, t, \tau)|_{\tau=t} + \int_0^t u_{tt} d\tau$ . Первое слагаемое обращается в  $p(x, t)$  в силу второго начального условия (3.15). Остается дифференцирование по  $x$  как по параметру. Применяя одномерный оператор Даламбера, получим

$$\square v \equiv v_{tt} - v_{xx} = \int_0^t \square u(x, t, \tau) d\tau = p(x, t).$$

Утверждение доказано, теперь решение исходной неоднородной задачи (3.12) выписывается явно

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [q(x-t) + q(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(x', t) dx' + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} p(x', \tau) dx'.$$

# ЛЕКЦИЯ 4

## Метод годографа

### 4.1 Преобразование годографа

Система квазилинейных уравнений одномерной газовой динамики (3.5) сводится к системе линейных уравнений с помощью метода, хорошо известного из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: надо поменять местами неизвестные функции и независимые переменные. Чтобы перейти от переменных  $(t, x)$  к переменным  $(\rho, u)$ , продифференцируем  $\rho$  и  $u$  по новым переменным, считая их функциями от  $(x, t)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial \rho} = 1 &= \rho_t \frac{\partial t}{\partial \rho} + \rho_x \frac{\partial x}{\partial \rho}, & \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 &= u_t \frac{\partial t}{\partial \rho} + u_x \frac{\partial x}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0 &= \rho_t \frac{\partial t}{\partial u} + \rho_x \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial u}{\partial u} = 1 &= u_t \frac{\partial t}{\partial u} + u_x \frac{\partial x}{\partial u}.\end{aligned}$$

На частные производные по  $t, x$  мы получили две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым определителем — якобианом преобразования годографа

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(t, x)}{\partial(\rho, u)}.$$

Если  $J \neq 0, \infty$ , частные производные находятся

$$\rho_t = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \rho_x = -\frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial u}, \quad u_t = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \rho}, \quad u_x = \frac{1}{J} \frac{\partial t}{\partial \rho}.$$

Подставляя эти выражения в систему, видим, что якобиан сокращается и получается система линейных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial u} - u \frac{\partial t}{\partial u} + \rho \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0, \quad -\frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial t}{\partial u} + u \frac{\partial t}{\partial \rho} = 0. \quad (4.1)$$

Преобразование годографа закончилось удачно, потому что в исходной системе коэффициенты не зависели от переменных  $t, x$ . Теперь от системы мы перейдем к одному уравнению второго порядка. Для этого нам понадобится ввести новый потенциал.

## 4.2 Потенциал $\chi$

Сначала введем потенциал скорости  $\phi$ , чтобы скорость была его градиентом  $u = \phi_x$ . Введем еще и энтальпию  $w$  так, чтобы  $dw = c^2(\rho) d\rho/\rho$ . Тогда уравнение Эйлера удастся один раз проинтегрировать и получится

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2}{2} + w = 0. \quad (4.2)$$

Константа интегрирования определяет начало отсчета энтальпии, поэтому несущественна. Мы полагаем ее для простоты равной нулю. Отсюда получается дифференциал потенциала скорости

$$d\phi \equiv \phi_t dt + \phi_x dx = - \left( \frac{u^2}{2} + w \right) dt + u dx.$$

Потенциал  $\phi$  зависит от старых переменных  $t, x$ , поэтому нам удобнее перейти от него к новому потенциалу  $\chi$  от переменных  $\rho, u$ . Удобнее также вместо  $\rho$  использовать функцию  $w(\rho)$ . Переход к новым переменным в потенциале осуществляется с помощью преобразования Лежандра, как это делается в термодинамике [30]:

$$\chi(w, u) = \phi + \left( \frac{u^2}{2} + w \right) t - ux, \quad d\chi = t dw - (x - ut) d,$$

откуда

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial w}, \quad x - ut = -\frac{\partial \chi}{\partial u}.$$

Подставляя эти выражение в уравнения (4.1) и переходя к дифференцированию по  $w$  ( $\partial/\partial\rho = (c^2/\rho)\partial/\partial w$ ) убедимся, что уравнение Эйлера станет тождеством. Мы для этого выбрали потенциал, сразу удовлетворяющий уравнению (4.2). Уравнение непрерывности перейдет в линейное уравнение второго порядка

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi}{\partial w} = 0. \quad (4.3)$$

Полученное уравнение отличается от одномерного волнового только последним слагаемым с первой производной и зависимостью скорости  $c$  от плотности. Но и этих небольших различий хватает, чтобы оно не решалось в общем виде. Рассмотрим частный случай политропного газа, где иногда удается выписать решение.

## 4.3 Политропный газ

Для важного случая политропного газа, где уравнение состояния степенное ( $p\rho^{-\gamma} = \text{const}$ ), энтальпия и скорость звука легко находится

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad w = \int \frac{c^2 d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \Rightarrow c^2 = (\gamma-1)w.$$

Оказывается, при дискретных значениях показателя

$$\gamma = \frac{2n+3}{2n+1} = 3, \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \dots,$$

где  $n$  — целое положительное число, можно выписать формулу для решения. При  $n = 1, 2$  реализуются важные для физики случаи одноатомного и двухатомного молекулярного газа. Мы выведем эти формулы по индукции, сначала для нефизического случая  $n = 0$ , а затем выполнив переход  $n \rightarrow n + 1$ .

При  $n = 0$  уравнение (4.3) записывается как

$$2w \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi_0}{\partial w} = 0,$$

где индекс буквы  $\chi$  обозначает  $n$ . Замена переменной  $\xi = \sqrt{2w}$  сводит уравнение к одномерному волновому

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial u^2} = 0,$$

общее решение (3.9) которого известно. Отсюда

$$\chi_0(w, u) = f(\sqrt{2w} - u) + g(\sqrt{2w} + u).$$

Переход к переменной  $\xi$  в данном уравнении — частный случай приведения линейного уравнения второго порядка к каноническому виду, которое будет рассмотрено в лекции 5.

Уравнение для  $\chi_n$  политропного газа

$$\frac{2w}{2n+1} \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial w^2} - \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial u^2} + \frac{\partial \chi_n}{\partial w} = 0$$

мы продифференцируем по  $w$ , приведем подобные и умножим на  $(2n+1)/(2n+3)$ :

$$\frac{2w}{2n+3} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial w^3} - \frac{2n+1}{2n+3} \frac{\partial^3 \chi_n}{\partial w \partial u^2} + \frac{\partial^2 \chi_n}{\partial w^2} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для первой производной потенциала  $\partial \chi_n / \partial w$  почти получилось  $(n+1)$ -е уравнение. Чтобы убрать лишний множитель во втором слагаемом и тем самым завершить второй шаг индукции, изменим масштаб переменной  $u \rightarrow u' = u \sqrt{(2n+3)/(2n+1)}$ . В итоге получаем рекуррентную формулу

$$\chi_{n+1} \left( \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} u, w \right) = \frac{\partial}{\partial w} \chi_n(u, w).$$

По известному  $\chi_0$  мы теперь можем построить решение для любых  $n$ .

# ЛЕКЦИЯ 5

## Канонический вид уравнений 2-го порядка

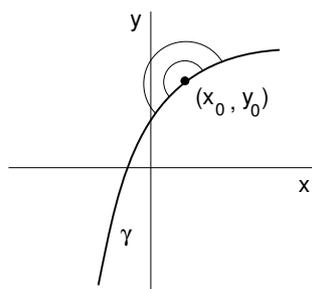
### 5.1 Случай двух переменных

Когда неизвестная функция  $u = u(x, y)$  зависит от  $n = 2$  переменных, линейное уравнение второго порядка записывается в виде

$$\hat{\mathcal{L}}u = f, \quad \hat{\mathcal{L}}u \equiv a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} \quad f = Au_x + Bu_y + Cu + f_0, \quad (5.1)$$

где  $a, b, c, A, B, C, D, f_0$  заданные функции  $x, y$ ,  $\hat{\mathcal{L}}u$  — слагаемые, содержащие вторые производные, которые мы записываем в левой части уравнения и назовем *главной дифференциальной частью*. Главная дифференциальная часть определяет тип уравнения.

Будем действовать по той же схеме, что и в теории систем уравнений, т.е. строить разложение решения в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , лежащей на начальной кривой



$\gamma$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(y - y_0)^2 + \dots$$

Вообще говоря, первые производные заданы начальными условиями, а вторые можно найти из уравнения и продолжить решение в окрестность начальной точки. Ту выделенную начальную кривую, с которой решение продолжить не удастся, назовем *характеристикой уравнения второго порядка*.

Чтобы найти такие кривые, перейдем к новым координатам на плоскости  $\alpha = \alpha(x, y), \beta = \beta(x, y)$ , считая прямое и обратное преобразования неособыми

$$J = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \infty.$$

Линии уровня функций  $\alpha(x, y), \beta(x, y)$  станут новыми координатными линиями, а операторы выразятся через новые переменные

$$\partial_x = \alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta, \quad \partial_y = \alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta,$$

где операторы дифференцирования для краткости обозначены

$$\partial_\xi \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Оператор главной дифференциальной части запишется как

$$\hat{\mathcal{L}} = a (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta)^2 + 2b (\alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta) (\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta) + c (\alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta)^2,$$

где квадрат оператора означает, что оператор надо применить к стоящей справа от него функции дважды. Если раскрыть все скобки, главная дифференциальная часть в новых координатах будет выглядеть как

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{a} \partial_\alpha^2 + 2\tilde{b} \partial_\alpha \partial_\beta + \tilde{c} \partial_\beta^2$$

с новыми преобразованными функциями  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ , которые выражаются через старые

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a \alpha_x^2 + 2b \alpha_x \alpha_y + c \alpha_y^2, \\ \tilde{b} &= a \alpha_x \beta_x + b (\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) + c \alpha_y \beta_y, \\ \tilde{c} &= a \beta_x^2 + 2b \beta_x \beta_y + c \beta_y^2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Если  $\tilde{a} = 0$ , то мы не сможем найти из уравнения вторую производную  $u_{\alpha\alpha}$ , а следовательно и продолжить решение в окрестность начальной точки. Поэтому уравнение характеристики будет

$$\tilde{a} = a \alpha_x^2 + 2b \alpha_x \alpha_y + c \alpha_y^2 = 0. \quad (5.3)$$

Чтобы характеристики существовали, необходима положительность дискриминанта квадратного уравнения  $D = b^2 - ac > 0$ . Рассмотрим последовательно три случая  $D > 0, D = 0, D < 0$  и постараемся каждый раз привести уравнения к наиболее простому виду — каноническому.

1°.  $D > 0$  — ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

Квадратное уравнение (5.3) имеет два корня

$$\alpha_x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{a} \alpha_y. \quad (5.4)$$

Имеется два семейства характеристик, соответствующих знакам  $\pm$ , поэтому можно одновременно обратить в нуль два коэффициента  $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$ . Если в качестве канонической переменной  $\xi$  выбрать решение уравнения (5.4) со знаком плюс, а

в качестве  $\eta$  — решение со знаком минус. Тогда легко найти оставшийся коэффициент  $\tilde{b} = -2D\alpha_y\beta_y/a$ . Уравнение сведется к виду  $2\tilde{b}u_{\xi\eta} = \tilde{f}$ . Здесь в  $\tilde{f}$  вошли все члены, не содержащие вторых производных. Остается разделить уравнение на  $2\tilde{b}$ , тогда получится *канонический вид уравнения гиперболического типа*

$$u_{\xi\eta} = \tilde{f}.$$

Здесь  $\tilde{f}$  — преобразованная правая часть, куда входят и первые производные. Иногда для гиперболических уравнений пользуются вторым каноническим видом, который получается из первого заменой  $\xi = \frac{1}{2}(\phi + \psi), \eta = \frac{1}{2}(\phi - \psi)$ ,

$$u_{\phi\phi} - u_{\psi\psi} = \tilde{f}.$$

В частности, одномерное волновое уравнение (3.12) имеет как раз такой вид, поэтому относится к гиперболическому типу.

2°.  $D = 0$  — ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП

В этом промежуточном случае квадратное уравнение (5.3) имеет одно решение  $\alpha_x = -b\alpha_y/a$ . Возьмем  $\alpha = \xi$  в качестве первой канонической переменной, а  $\eta$  выберем произвольно. В результате обратятся в нуль коэффициенты при  $u_{\xi\xi}$  и при перекрестной производной  $u_{\xi\eta}$ , получится

$$u_{\eta\eta} = \tilde{f},$$

канонический вид уравнения параболического типа, в который не вошла вторая производная по  $\xi$ . Примером может служить одномерное уравнение теплопроводности или диффузии (1.11):

$$u_t = u_{xx}. \tag{5.5}$$

В уравнение не входит вторая производная по времени, поэтому его относят к параболическим.

2°.  $D < 0$  — ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП

Формально можно выписать один из комплексных корней квадратного уравнения (5.3)

$$\alpha_x = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{a} \alpha_y, \quad \alpha = \xi + i\eta,$$

а в качестве канонических переменных выбрать вещественную и мнимую часть функции  $\alpha(x, y)$ . Разделяя вещественную и мнимую часть получим

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= a(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2b(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + c(\xi_y + i\eta_y)^2 = \\ &= a(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2b(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + c(\xi_y^2 - \eta_y^2) + 2i[a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y] = 0. \end{aligned}$$

Как видно из уравнений (5.2), получившаяся мнимая часть — это коэффициент  $\tilde{b}$ , который входит в главную дифференциальную часть при переходе к координатам  $\xi, \eta$ , а вещественная часть — это разность  $\tilde{a} - \tilde{c}$ . Равенство нулю мнимой

части обеспечивает  $\tilde{b} = 0$ , а вещественной дает  $\tilde{a} = \tilde{c}$ . Поэтому после деления на  $\tilde{a}$  получается

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \tilde{f},$$

канонический вид уравнений эллиптического типа. Примером эллиптического уравнения служит двумерное уравнение Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (5.6)$$

**Упражнение 5.1.** Покажите, что если уравнение второго порядка (5.1) свести к системе уравнений первого порядка, то классификация по типам сохранится.

## 5.2 Случай многих переменных

При  $n > 2$  линейное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \tilde{f}(x) = b_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u + f(x),$$

где по индексам  $i, j, k$  подразумевается суммирование от 1 до  $n$ , а в левой части уравнения оставлена только главная дифференциальная часть. Для классификации правая часть не важна, поэтому можно заменить уравнение на однородное

$$a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Гладкая невырожденная замена переменных

$$y = y(x), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

приводит главную часть к аналогичному виду

$$\tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = \tilde{f}, \quad \tilde{a}_{kl} = a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j},$$

где в  $\tilde{f}$  входят первые производные. Значит матрица коэффициентов главной дифференциальной части преобразуется в каждой точке как квадратичная форма  $Q = a_{ij} p_i p_j$ .

Теперь задача классификации систем свелась к классификации квадратичных форм. Последние, как известно [31], элементарными преобразованиями сводятся к следующему каноническому виду

$$Q = \sum_{k=1}^p q_k^2 - \sum_{k=p+1}^m q_k^2,$$

где  $m \leq n$  — ранг квадратичной формы, т.е. число ненулевых собственных значений матрицы  $a_{ij}$ , а  $p \leq m$  — индекс, т.е. количество ее положительных значений. Отсюда получается классификация уравнений по типам:

- 1°.  $p = n$  (все собственные значения отличны от нуля и одного знака) — *эллиптический тип*.
- 2°.  $m < n$  (имеются нулевые собственные числа) — *параболический тип*.
- 3°.  $m = n, p < n$  (матрица невырождена, но имеются собственные значения того и другого знака) — *гиперболический тип*.

**Замечание 5.1.** Преобразование многомерных систем к каноническому виду неоднозначно.

**Пример 5.1.** Трехмерное уравнение Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

инвариантно относительно ортогональных преобразований координат (вращений трехмерного пространства). Действительно, если за  $z$  выбрать ось вращения, то

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \Rightarrow \\ \partial_x &= \cos \varphi \partial_{x'} - \sin \varphi \partial_{y'}, & \partial_y &= \sin \varphi \partial_{x'} + \cos \varphi \partial_{y'} \Rightarrow \partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_{x'}^2 + \partial_{y'}^2. \end{aligned}$$

Мы показали, что оператор Лапласа инвариантен относительно вращений.

**Пример 5.2.** Трехмерное<sup>1</sup> волновое уравнение ( $c = 1$ )

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

инвариантно относительно преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} t' &= t \operatorname{ch} \beta + x \operatorname{sh} \beta, & x' &= t \operatorname{sh} \beta + x \operatorname{ch} \beta \Rightarrow \\ \partial_t &= \operatorname{ch} \beta \partial_{t'} + \operatorname{sh} \beta \partial_{x'}, & \partial_x &= \operatorname{sh} \beta \partial_{t'} + \operatorname{ch} \beta \partial_{x'} \Rightarrow \partial_t^2 - \partial_x^2 = \partial_{t'}^2 - \partial_{x'}^2. \end{aligned}$$

**Замечание 5.2.** Определение типа уравнения и канонического вида относится к точке, поэтому все пространство может делиться на области эллиптичности и гиперболичности. На границах областей уравнение будет параболично. Например, уравнение  $xu_{yy} - u_{xx} = 0$  гиперболично в правой полуплоскости и эллиплично в левой.

**Замечание 5.3.** Характеристики многомерного гиперболического уравнения — не кривые, а поверхности.

<sup>1</sup>В физике при определении размерности уравнения в частных производных обычно учитываются только пространственные переменные. С математической точки зрения данное уравнение — четырехмерное.

Подробнее сделаем вычисления для двумерного волнового уравнения

$$\hat{L}u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$$

при переходе к новым переменным  $\alpha = \alpha(t, x, y), \beta = \beta(t, x, y), \gamma = \gamma(t, x, y)$  получим следующие операторы в новых переменных

$$\partial_t = \alpha_t \partial_\alpha + \beta_t \partial_\beta + \gamma_t \partial_\gamma, \quad \partial_x = \alpha_x \partial_\alpha + \beta_x \partial_\beta + \gamma_x \partial_\gamma, \quad \partial_y = \alpha_y \partial_\alpha + \beta_y \partial_\beta + \gamma_y \partial_\gamma,$$

Подставляя последние в оператор  $\hat{L}$  и приводя подобные при производной  $\partial_\alpha^2$ , выпишем уравнение характеристики

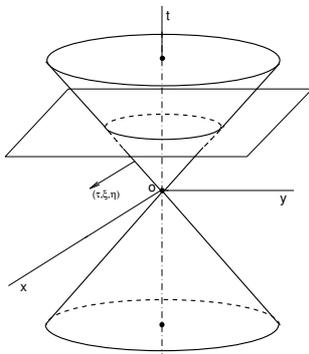
$$\tilde{a} = \alpha_t^2 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2 = 0.$$

Получилось уравнение первого порядка, Гамильтона — Якоби, которое в свою очередь можно решить методом характеристик и получится поверхность  $\alpha(t, x, y) = \text{const}$ .

Для данного уравнения можно также предложить геометрическое решение. Вектор градиента  $(\tau, \xi, \eta) = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$  ортогонален к поверхности и удовлетворяет уравнению конуса

$$\tau^2 - \xi^2 - \eta^2 = 0.$$

Значит и характеристическая поверхность — конус. Конус ограничивает верхней полостью область влияния вершины. Нижняя полость окружает область зависимости.



Сечение светового конуса плоскостью  $t = \text{const}$  пересекает характеристику, поверхность конуса, по окружности, которая является волновым фронтом. Проекция нормали на ту же плоскость — луч, указывающий направление распространения возмущения. В любом вертикальном сечении плоскостью, проходящей через ось  $t$ , характеристики — пара прямых, как и в случае одной пространственной переменной.

**Замечание 5.4.** В нелинейной системе вдоль характеристик распространяется малое возмущение линеаризованной системы. Например, в линеаризованной системе уравнений гидродинамики — уравнении акустики (1.6) — можно представить возмущение плотности в форме  $\rho_1 = \exp(iS)$ , где  $S$  — медленная фаза, получится

$$\frac{1}{c^2} (-S_t^2 + iS_{tt}) - i \Delta S - (\nabla S)^2 = 0.$$

Пренебрегая вторыми производными, найдем уравнение эйконала

$$\left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 = 0.$$

Получилось уравнение характеристик из примера волнового уравнения, значит характеристики в многомерном случае — это поверхности постоянной фазы (эйконала).

# ЛЕКЦИЯ 6

## Автомодельность и бегущие волны

### 6.1 Понятие автомодельности

**Определение 6.1.** *Автомодельность* — это симметрия задачи, позволяющая компенсировать масштабные преобразования независимых переменных соответствующим растяжением решения.

При  $n = 2$  автомодельность означает выбор нового масштаба координаты  $l(t)$  и решения  $u(t)$  таких, что в новых переменных решение является функцией одной переменной  $\xi$

$$u(x, t) = A(t)f(\xi), \quad \xi = \frac{x}{l(t)}. \quad (6.1)$$

Когда такое преобразование удастся найти, задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Иногда преобразование проще всего найти с помощью анализа размерности физических величин, входящих в уравнение. Часто удобнее прямо анализировать преобразования растяжения неизвестных функций и независимых переменных и искать, какую группу преобразований допускает уравнение, т.е. какие растяжения оставляют уравнения неизменными. Важным частным случаем является решение типа *бегущей волны*  $u(x, t) = A(t)g(x - Vt)$ , где  $g$  — функция одной переменной. В данной лекции мы рассмотрим четыре примера автомодельных решений. Подробности теории, особенно хорошо развитой в механике сплошных сред, физике плазмы и астрофизике, см. в литературе, посвященной методам размерности и подобию [32, 33].

### 6.2 Примеры

#### Линейное уравнение теплопроводности

Одномерное уравнение теплопроводности с точечным начальным условием запишем сразу в безразмерном виде

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \delta(x).$$

Анализ размерностей выполним, исследуя преобразование растяжения

$$t \longrightarrow \mu t, \quad x \longrightarrow \lambda x, \quad u \longrightarrow \nu u. \quad (6.2)$$

Чтобы уравнение было инвариантным относительно такого преобразования, необходимо выполнение соотношения  $\mu = \lambda^2$ . Начальное условие сохранит свой вид, когда  $\nu = \lambda^{-1}$  (размерность  $\delta$ -функции равна обратной размерности ее аргумента). Выразим все через  $\mu$ :  $\lambda = \mu^{1/2}$ ,  $\nu = \mu^{-1/2}$ , отсюда найдем автомодельную подстановку (6.1)

$$u(x, t) = t^{-1/2} f(\xi), \quad \xi = xt^{-1/2}.$$

Если теперь в таком виде подставить решение в уравнение теплопроводности, мы получим обыкновенное уравнение для функции  $f(\xi)$

$$f'' + \frac{1}{2}\xi f' + \frac{1}{2}f = 0. \quad (6.3)$$

При  $t \rightarrow +0$ ,  $x \neq 0$  решение должно исчезать, поэтому функция  $f$  должна обращаться в нуль при  $\xi \rightarrow \infty$  вместе со своей производной. Второе условие следует из нормировки  $\delta$ -функции

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi.$$

Уравнение (6.3) можно один раз проинтегрировать. Получится  $f' + \frac{1}{2}\xi f = 0$ , где постоянную интегрирования мы выбрали равной нулю в силу первого условия. Линейное однородное обыкновенное уравнение первого порядка всегда решается:  $\ln f = -\xi^2/4 + \text{const}$ , а константа находится из второго условия. Автомодельное решение

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

описывает диффузионное расплывание и изображено на рисунке 6.1. Характерная ширина решения растет как  $l(t) \sim t^{1/2}$ , максимальное значение уменьшается как  $A(t) \sim t^{-1/2}$ , а площадь под графиком сохраняется.

**Замечание 6.1.** Начальное условие в рассмотренном и следующем примере задано в виде дельта-функции. Если задать ненулевое начальное условие в области конечной ширины, например,  $u(x, 0) = Q \exp(-x^2/a^2)$ , в задаче появится второй масштаб  $a$ , и автомодельное решение уже перестанет быть точным решением задачи Коши, но останется верным асимптотически на больших временах, когда  $l(t) \gg a$ , и конечностью  $a$  в сравнении с характерной шириной решения можно пренебречь. Вместо граничного условия на бесконечности также может встретиться требование обращения решения в нуль на концах некоторого конечного интервала:  $u(\pm L, t) = 0$ . В задаче тоже появится второй масштаб, поэтому автомодельное решение перестанет удовлетворять граничным условиям. Однако автомодельное решение справедливо на малых временах до тех пор, пока  $l(t) \ll L$ .

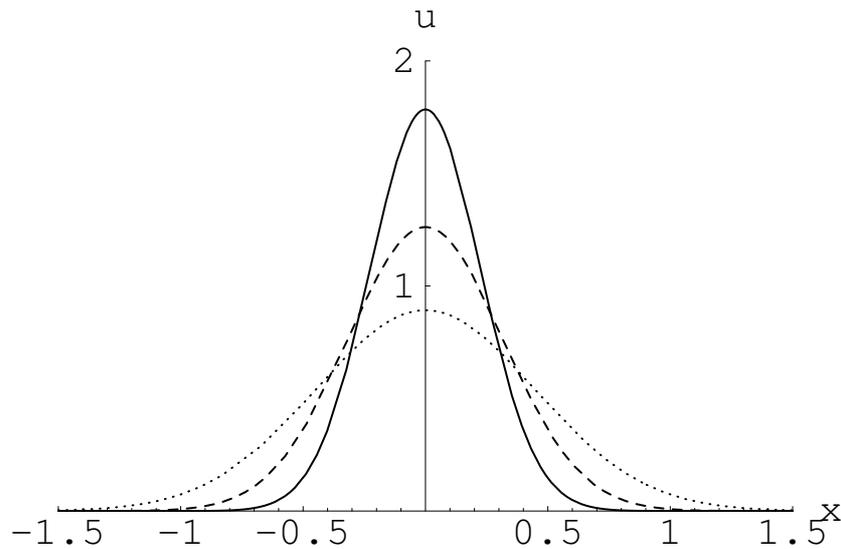


Рис. 6.1: Автомоделное решение линейного уравнения теплопроводности: сплошная линия —  $t = 0.025$ , пунктир —  $t = 0.05$ , точки —  $t = 0.1$ .

Таким образом, в задачах, где характерные масштабы начальных и граничных условий существенно различаются ( $a \ll L$ ), автомоделное решение представляет собой *промежуточную асимптотику* при  $a \ll l(t) \ll L$ .

## Нелинейное уравнение теплопроводности

Нелинейное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент температуропроводности зависит от температуры, попытаемся решить для простейшей линейной зависимости  $\chi \propto u$  с точечным начальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad u(x, 0) = \delta(x).$$

Растяжение переменных (6.2) оставляет уравнение инвариантным, когда  $\lambda = \mu^{1/3}$ , а начальное условие сохраняет вид при  $\nu = \mu^{-1/3}$ . Автомоделная подстановка

$$u(x, t) = t^{-1/3} f(xt^{-1/3})$$

сводит задачу к обыкновенному уравнению

$$(ff')' + \frac{1}{3}\xi f' + \frac{1}{3}f = 0.$$

Так же, как и в предыдущем примере, уравнение можно один раз проинтегрировать и выбрать нулевую константу:  $ff' + \frac{1}{3}\xi f = 0$ . Имеется два решения  $f = 0$ ,

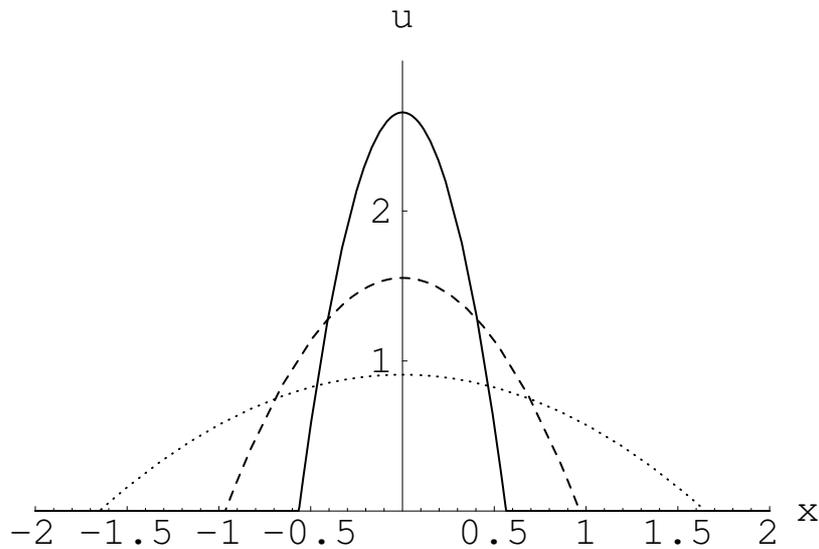


Рис. 6.2: Автомоделное решение нелинейного уравнения теплопроводности: сплошная линия —  $t = 0.02$ , пунктир —  $t = 0.1$ , точки —  $t = 0.5$ .

которое должно быть справедливо при больших по абсолютной величине  $\xi$ , и  $f = C - \xi^2/6$ . Решение склеивается из двух

$$f(\xi) = \begin{cases} C - \frac{\xi^2}{6}, & \xi^2 \leq 6C, \\ 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases}$$

Константу  $C$  можно найти из нормировки  $C = 6^{1/3}/4$ .

На рисунке 6.2 показано решение в три разных момента времени. В отличие от рисунка 6.1, решение имеет резкий край — фронт тепловой волны. Расширение нагретой области в данном случае происходит по закону  $l(t) \sim t^{1/3}$ . Площадь под графиком профиля температуры, как и в предыдущем примере, сохраняется.

## Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \mu u_{xx}$$

представляет собой простейшую модель одномерной гидродинамики с вязкостью  $\mu$ . Найдем решение в виде бегущей ступеньки (кинка)  $u(x, t) = f(\xi), \xi = x - Vt$ , где  $V$  — скорость волны, принимающее на бесконечности предельные значения

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0.$$

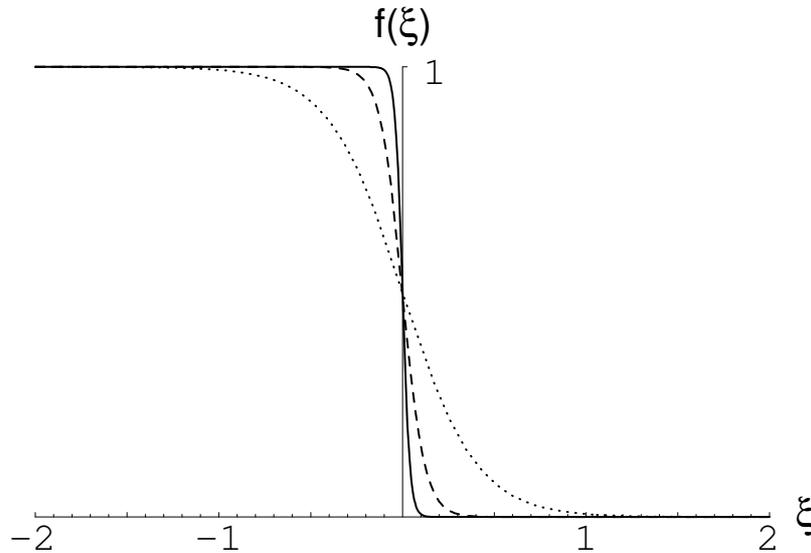


Рис. 6.3: Фронт ударной волны уравнения Бюргерса при разных значениях параметра  $\mu$ : сплошная линия —  $\mu = 0.01$ , пунктир —  $\mu = 0.03$ , точки —  $\mu = 0.1$ .

Подставляя  $f$  в уравнение Бюргерса, получим обыкновенное уравнение второго порядка  $\mu f'' - ff' + Vf' = 0$ , которое можно один раз проинтегрировать:  $\mu f' - f^2/2 + Vf = C_1$ . Постоянная  $C_1 = 0$  находится по граничному условию при  $x \rightarrow +\infty$ , где функция  $f$  и производная  $f'$  обращаются в нуль. Из второго условия находим постоянную  $V = 1/2$ . Уравнение  $2\mu f' = f(f-1)$  легко интегрируется  $\ln f - \ln(1-f) = \xi/2\mu$  или

$$f(\xi) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\xi}{2\mu}\right)}.$$

Решение как функция координаты  $\xi$  в сопутствующей системе отсчета изображено на рисунке 6.3, откуда видно, что при учете вязкости опрокидывания волны не происходит. Ширина фронта формирующейся ударной волны становится больше, если увеличить вязкость. Ширину фронта можно оценить и непосредственно из решения:  $\delta\xi \sim 2\mu$ .

## Уравнение Кортевега — де Фриза

Уравнение

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

описывает волны в плазме, на мелкой воде и во многих других ситуациях, где имеется простейшая нелинейность и слабая дисперсия. Ищем решение в виде уединенной бегущей волны  $u(x, t) = f(x - Vt)$ , которое обращается на бесконечности в нуль вместе со всеми производными. Получается обыкновенное уравне-

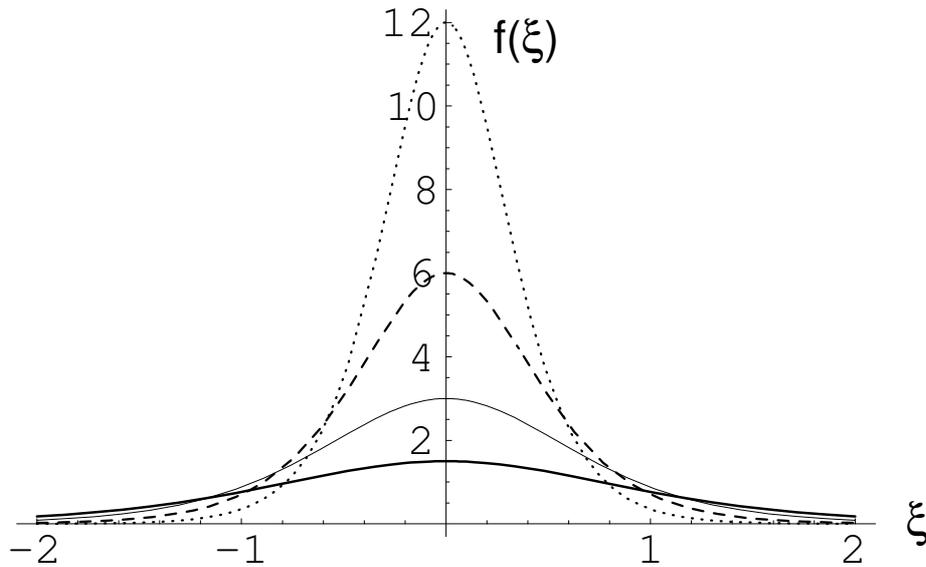


Рис. 6.4: Солитон уравнения Кортевега — де Фриза при разных значениях параметра  $V$ : толстая линия  $V = 3$ , тонкая —  $V = 6$ , пунктир —  $V = 12$ , точки —  $v = 24$ .

ние третьего порядка

$$f''' + 6ff' - Vf' = 0,$$

которое два раза интегрируется

$$f'' + 3f^2 - Vf + C_1 = 0, \quad \frac{1}{2}f'^2 + f^3 - \frac{1}{2}Vf^2 + C_1f + C_2 = 0.$$

Обе константы интегрирования  $C_1, C_2$  тоже надо выбрать равными нулю, чтобы решение было уединенной волной, т.е.  $f = f' = f'' = 0, \xi \rightarrow \pm\infty$ . В этом случае уравнение еще раз интегрируется совсем просто

$$\xi - C_3 = \frac{1}{\sqrt{V}} \ln \frac{\sqrt{V} + \sqrt{V - 2f}}{\sqrt{V} - \sqrt{V - 2f}}.$$

Третья константа  $C_3$  имеет смысл начала отсчета  $\xi$ . Если отсчитывать  $\xi$  от  $C_3$ , получится решение в виде

$$f(\xi) = \frac{V}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\sqrt{V}\xi}{2}}.$$

Решение называется *простым солитоном*, солитоном от английских слов solitary wave — уединенная волна, а простым потому, что ширина, амплитуда и скорость волны задаются одним параметром  $V$ . Из рис. 6.4 видно, как с ростом скорости  $V$  уединенная волна становится более узкой и высокой.

# ЛЕКЦИЯ 7

## Разделение переменных

### 7.1 Полное разделение переменных

Рассмотрим снова общее дифференциальное уравнение в частных производных (1.1). Будем искать его решение в виде произведения функции только одной переменной и функции всех остальных переменных

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi_1(x_1)\phi(x_2, \dots, x_n).$$

**Определение 7.1.** Если уравнение можно переписать в виде

$$\mathcal{F}_1\left(x_1, \phi_1, \frac{d\phi_1}{dx_1}, \frac{d^2\phi_1}{dx_1^2}, \dots\right) = \mathcal{F}_2\left(x_2, \dots, x_n; \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}; \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}, \dots\right),$$

где в левой части содержится переменная  $x_1$  и функции только от нее, то говорят, что произошло *разделение переменных*.

В этом случае обе части можно приравнять постоянной  $C$  (*константе разделения*), потому что они зависят от разных переменных, и получится обыкновенное дифференциальное уравнение  $\mathcal{F}_1 = C$ . Иногда удается, записав решение в виде произведения функции только от  $x_2$  и функции переменных  $x_3, \dots, x_n$ , снова отделить переменную  $x_2$ . Далее, так же отделяя  $x_3$  и т.д., можно прийти до переменной  $x_{n-1}$ . Тогда говорят, что произошло полное разделение переменных. В зависимости от симметрии исходного уравнения и граничных условий уравнение может допускать разделение переменных в той или иной системе координат.

В качестве примера рассмотрим атом водорода в постоянном электрическом поле  $\mathcal{E}$ , который описывается оператором Гамильтона

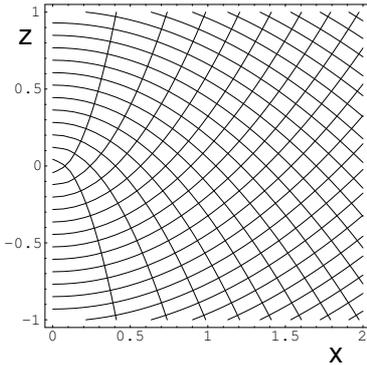
$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + e\mathcal{E}r.$$

Здесь  $m, e$  — масса электрона и абсолютная величина его заряда. Мы будем пользоваться атомной системой единиц, в которой они равны единице  $e = m = \hbar = 1$ .

Будем интересоваться связанными состояниями, поэтому стационарное уравнение Шредингера 1.10 следует решать при  $E < 0$ . Перейдем к новым переменным

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad (7.1)$$

где  $0 \leq \xi, \eta < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$  — параболические координаты.



В плоскости  $(x, z)$ , т.е. при  $\varphi = 0$ , координатные линии представляют собой два семейства парабол  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ , повернутых вершинами вверх и вниз. Если вращать рисунок вокруг оси  $z$ , параболы перейдут в параболоиды вращения — координатные поверхности  $\xi = \text{const}$  и  $\eta = \text{const}$ . Третье семейство поверхностей  $\varphi = \text{const}$  — это полуплоскости, проходящие через ось  $z$ . Параболические координаты точки указывают, на пересечении каких трех поверхностей находится точка.

Чтобы перейти от декартовой к новой ортогональной системе координат  $q_i = q_i(x, y, z)$ , надо вычислить коэффициенты Ламе

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}.$$

Как известно, оператор Лапласа в ортогональной системе записывается как

$$\Delta = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{h}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \right),$$

где коэффициент преобразования объема обозначен  $h = h_1 h_2 h_3$ . В нашем случае коэффициенты Ламе

$$h_\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi}}, \quad h_\eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\eta}}, \quad h_\varphi = \sqrt{\xi\eta}, \quad h = \frac{1}{4}(\xi + \eta),$$

отсюда

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Уравнение Шредингера запишется как

$$\left( \Delta + \frac{2}{r} - 2\mathcal{E}z \right) \psi = \varkappa^2 \psi, \quad \varkappa^2 = -2E.$$

Если искать решение в виде  $\psi(\xi, \eta, \varphi) = X(\xi)Y(\eta)\Phi(\varphi)$ , переменная  $\varphi$  сразу отделяется. Получается уравнение

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.2)$$

Таблица 7.1: Системы координат, в которых разделяются переменные в двумерном уравнении Гельмгольца.

№	Координаты	Преобразование
1	Декартовы	$x, y$
2	Полярные	$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$
3	Параболические	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), y = \xi\eta$
4	Эллиптические	$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$

где константа разделения  $m$  (магнитное квантовое число) принимает только целые значения, чтобы решение было  $2\pi$ -периодической функцией угла  $\varphi$ .

Если каждую декартову координату из (7.1) возвести в квадрат и все сложить, найдем  $r = (\xi + \eta)/2$ . Тогда переменные в оставшемся уравнении снова разделяются и получается два одностипных уравнения

$$\frac{(\xi X')'}{X} - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{\mathcal{E}\xi^2}{4} - \frac{\varkappa^2\xi}{4} + C_1 = 0, \quad \frac{(\eta Y')'}{Y} - \frac{m^2}{4\eta} + \frac{\mathcal{E}\eta^2}{4} - \frac{\varkappa^2\eta}{4} + C_2 = 0, \quad (7.3)$$

где  $C_1 + C_2 = 1$ . Решение этих уравнений при  $\mathcal{E} = 0$  выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию, которую мы изучим в лекции 11. Здесь же нам достаточно было показать, что происходит полное разделение переменных и задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как видно из примера, переменные удается разделить только в специальных симметричных случаях. В особенно симметричных системах переменные разделяются в нескольких системах координат. Так, в уравнении Шредингера для невозмущенного атома водорода  $\hat{H} = \hat{p}^2/2 - 1/r$  можно разделить переменные в сферических или параболических координатах, а в задаче о пространственном осцилляторе  $\hat{H} = \hat{p}^2/2 + r^2/2$  переменные разделяются в декартовых или сферических координатах [4].

Уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (7.4)$$

при постоянном  $k$  еще более симметрично, поэтому допускает полное разделение переменных более чем в двух координатных системах. Приведем только таблицы таких систем, отсылая читателя за доказательством к монографии Миллера [34]. Таблицы на стр. 44 и 45 содержат списки четырех координатных систем для двумерного и одиннадцати координатных систем для трехмерного пространства, соответственно. Первые четыре координатные системы в трехмерном пространстве получаются из двумерных добавлением оси  $z$ .

## 7.2 Метод Фурье

Разделение переменных в линейных уравнениях позволяет продвинуться намного дальше, чем в общем случае, а часто и решить задачу до конца. Для этого

Таблица 7.2: То же, что и в табл. 7.1, но для трехмерной геометрии.

№	Координаты	Преобразование
1	Декартовы	$x \quad y \quad z$
2	Цилиндрические	$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$
3	Параболического цилиндра	$x = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$ $y = \xi\eta$ $z = z$
4	Эллиптического цилиндра	$x = d \operatorname{ch} \alpha \cos \beta$ $y = d \operatorname{sh} \alpha \sin \beta$ $z = z$
5	Сферические	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
6	Вытянутого сфероида	$x = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{sh} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{ch} \eta \cos \alpha$
7	Сплюснутого сфероида	$x = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \cos \varphi$ $y = a \operatorname{ch} \eta \sin \alpha \sin \varphi$ $z = a \operatorname{sh} \eta \cos \alpha$
8	Параболические	$x = \xi\eta \cos \varphi$ $y = \xi\eta \sin \varphi$ $z = (\xi^2 - \eta^2)/2$
9	Параболоидальные	$x = 2c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta \operatorname{sh} \gamma$ $y = 2c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \gamma$ $z = \frac{c}{2}(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\beta - \operatorname{ch} 2\gamma)$
10	Эллипсоидальные	$x = \sqrt{\frac{(\mu-a)(\nu-a)(\rho-a)}{a(a-1)}}$ $y = \sqrt{\frac{(\mu-1)(\nu-1)(\rho-1)}{1-a}}$ $z = \sqrt{\frac{\mu\nu\rho}{a}}$
11	Конические	$x = r \sqrt{\frac{(b\mu-1)(b\nu-1)}{1-b}}$ $y = r \sqrt{\frac{b(\mu-1)(\nu-1)}{b-1}}$ $z = r \sqrt{b\mu\nu}$

надо уметь решать спектральную задачу для эллиптического оператора

$$\hat{L} = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c,$$

где  $a_{ij}, b_k, c$  — функции  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , квадратичная форма  $Q = a_{ij} p_i p_j$  положительно определена. Требуется знать собственные функции  $\psi_n(x)$  и собственные значения  $\lambda_n$  задачи в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$

$$\hat{L}\psi_n = \lambda_n \psi_n \quad (7.5)$$

с условиями на границе области  $\mathcal{S} = \partial\mathcal{D}$

$$\left[ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{x \in \mathcal{S}} = f, \quad (7.6)$$

где  $\partial/\partial n$  означает производную вдоль внутренней нормали к поверхности  $\mathcal{S}$ , а функция  $f(x)$  определена на поверхности  $\mathcal{S}$ . Обычно эти задачи называются

- $\alpha = 1, \beta = 0$     I краевая задача (или *задача Дирихле*)  
 $\alpha = 0, \beta = 1$     II краевая задача (или *задача Неймана*)  
 $\alpha\beta \neq 0$         III краевая задача.

Если краевая задача (7.6) содержит ноль в правой части  $f = 0$ , то она называется *однородной*. Рассматриваются также краевые задачи, в которых граничная поверхность делится на части  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_m$  и на каждой части ставится своя задача  $\alpha = \alpha_k, \beta = \beta_k, f = f_k; k = 1, \dots, m$ . Такую постановку называют *смешанной* краевой задачей.

Пусть спектр отрицательный, т.е. все  $\lambda_n < 0$ , а система собственных функций полна.<sup>1</sup> В этом случае можно найти решение линейного гиперболического уравнения с начальными условиями

$$u_{tt} = \hat{L}u, \quad u(x, 0) = \phi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \phi_1(x) \quad (7.7)$$

и с теми же граничными условиями (7.6). Продемонстрируем, как строится решение.

Ищем решение в виде  $u(x, t) = T(t)\psi(x)$ , тогда переменная  $t$  отделяется

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\hat{L}\psi}{\psi} = -\omega^2,$$

а константа разделения получается отрицательной в силу отрицательности собственных чисел оператора  $\hat{L}$ . Решение обыкновенного уравнения дается формулой  $T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ . Зная полную систему собственных функций, мы

<sup>1</sup>Для полноты системы собственных функций дифференциального оператора в бесконечномерном гильбертовом пространстве самосопряженности недостаточно. Необходимо еще, чтобы собственные значения были ограничены сверху и  $\lambda_n \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$ . Подробное изложение теории, не предполагающей ограниченности операторов, имеется в учебнике Михлина [19].

можем искать решение в виде разложения с коэффициентами, зависящими от  $t$ , и получить обыкновенные уравнения на коэффициенты, приравнявая выражения при одинаковых собственных функциях:

$$u(x, t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(x) \Rightarrow \ddot{c}_n = \lambda_n c_n. \quad (7.8)$$

Обозначим  $\lambda_n = -\omega_n^2$ , тогда  $c_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$ . Теперь при  $t = 0$  получается разложения в обобщенный ряд Фурье заданных начальных условий

$$\phi_0(x) = \sum_n A_n \psi_n(x), \quad \phi_1(x) = \sum_n \omega_n B_n \psi_n(x).$$

Теперь, пользуясь ортогональностью системы функций, мы можем найти все коэффициенты  $A_n, B_n$  и построить решение задачи Коши (7.7).

**Замечание 7.1.** Если надо решить не гиперболическое уравнение, а параболическое с одним начальным условием

$$u_t = \hat{L}u, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad (7.9)$$

то разлагая, как и в гиперболическом уравнении, по собственным функциям, получим обыкновенные уравнения на этот раз первого порядка

$$\dot{c}_n = \lambda_n c_n \Rightarrow c_n = A_n e^{-|\lambda_n|t}.$$

Тогда все коэффициенты  $A_n$  найдутся с помощью разложения начального условия

$$\phi(x) = \sum_n A_n \psi_n(x).$$

**Замечание 7.2.** Все формулы метода Фурье можно вывести также с помощью преобразования Лапласа по  $t$ . В частности, для параболического уравнения (7.9) проводя преобразование Лапласа

$$u_p(x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt,$$

получим уравнение  $pu_p = \hat{L}u_p + \phi(x)$ . Подставляя разложение образа решения  $u_p = \sum c_n \psi_n$  и начального условия  $\phi = \sum a_n \psi_n$ , найдем коэффициенты  $c_n = a_n / (p - \lambda_n)$ , откуда

$$u_p = \sum \frac{a_n}{p - \lambda_n} \psi_n \Rightarrow u(x, t) = \sum_n a_n \psi_n \oint_\gamma \frac{dp}{2\pi i} \frac{e^{pt}}{p - \lambda_n},$$

где контур  $\gamma$  для каждого конечного отрезка ряда замыкается полуокружностью большого радиуса  $R$  и охватывает полюсы подынтегрального выражения, которые лежат на левой действительной полуоси, рис. 7.1а. Вычисляя интеграл как предел суммы вычетов при  $R \rightarrow \infty$ , получим то же самое разложение решения параболического уравнения. Для гиперболического уравнения полюсы  $p = \pm i\omega_i = \pm i\sqrt{-\lambda_i}$  лежат на мнимой оси, как показано на рис. 7.1б.

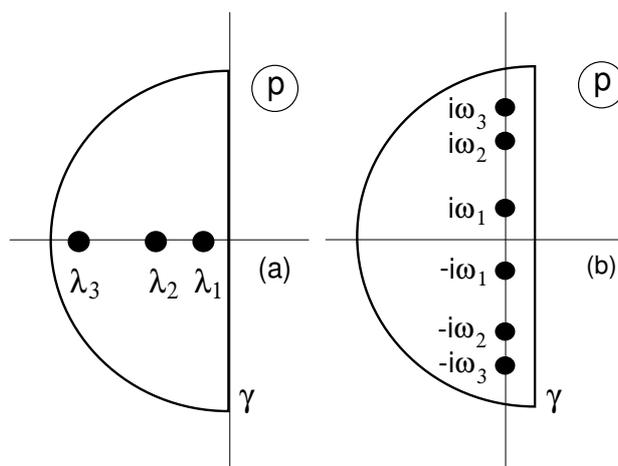


Рис. 7.1: Контур  $\gamma$  в  $p$ -плоскости: (a) — для параболического уравнения, (b) — для гиперболического.

*Замечание 7.3.* Если уравнение неоднородное, его можно решить, разлагая правую часть по системе функций  $\psi_n$ .

*Упражнение 7.1.* Методом преобразования Лапласа получите решение задачи Коши для неоднородных уравнений  $u_{tt} = \hat{L}u + f$  и  $u_t = \hat{L}u + f$ .

# ЛЕКЦИЯ 8

## Разделение переменных в цилиндрических координатах

### 8.1 Задача о круглой мембране

В данной лекции мы разделим переменные двумерного уравнения Гельмгольца в полярных координатах. Очевидно, что все формулы будут относиться и к трехмерному случаю, когда все величины не зависят от  $z$  и используется цилиндрическая система координат. Для определенности рассмотрим механическую задачу о малых колебаниях круглой мембраны радиуса  $a$  с закрепленным краем. Осцилляции мембраны описывается двумерным волновым уравнением

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_2 u = 0, \quad u(a, \varphi, t) = 0,$$

где  $c$  — скорость звука, а

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

— двумерный оператор Лапласа в полярных координатах. Если нас интересуют гармонические колебания, следует искать решение в виде  $u(r, \varphi, t) = U(r, \varphi)e^{-i\omega t}$ . Для функции  $U(r, \varphi)$  и частоты  $\omega$  получится спектральная задача, поставленная к уравнению Гельмгольца

$$\Delta_2 U = -k^2 U, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad U(a, \varphi) = 0. \quad (8.1)$$

Для разделения переменных ищем решение в виде  $U = R(r)\Phi(\varphi)$ , тогда

$$\frac{(rR)'}{rR} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -k^2,$$

а на функцию  $\Phi(\varphi)$  получается уравнение  $\Phi'' + m^2\Phi = 0$ , где  $m$  — параметр разделения, принимающий только целые значения, формула (7.2). На радиальную

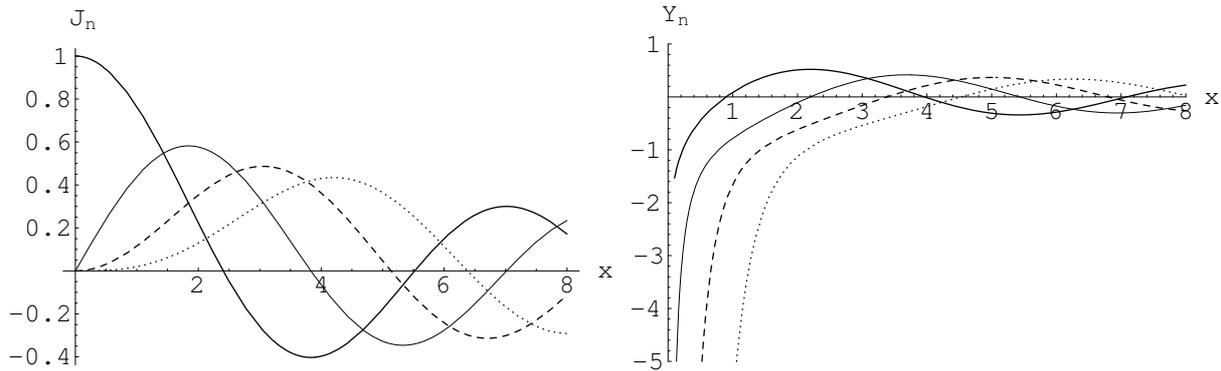


Рис. 8.1: Функции Бесселя  $J_n(x)$  и Неймана  $Y_n(x)$ : толстая линия —  $n = 0$ , тонкая —  $n = 1$ , пунктир —  $n = 2$ , точки —  $n = 3$ .

часть останется уравнение

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0.$$

Замена переменной  $x = kr$  приводит его к универсальному, не зависящему от  $k$  виду

$$R'' + \frac{1}{x}R' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)R = 0, \tag{8.2}$$

называемому *уравнением Бесселя*. Решением уравнения являются *функции Бесселя*  $J_m(x)$  и *функции Неймана*  $Y_m(x)$ ,<sup>1</sup> изображенные на рисунке 8.1. В нашей задаче о мембране надо искать решение, не имеющее особенностей при  $x = 0$ , поэтому оставляем только функции Бесселя.

Граничные условия соответствуют требованию  $J_m(ka) = 0$  и позволяют определить собственные значения  $k_{mn} = j_{mn}/a$ , где  $j_{mn}$  означает  $n$ -й нуль функции Бесселя порядка  $m$ . Значит решение задачи Коши для волнового уравнения можно записать в виде ряда Фурье

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{m,n} (A_{mn} \cos \omega_{mn}t + B_{mn} \sin \omega_{mn}t) J_m(k_{mn}r) e^{im\varphi},$$

а коэффициенты  $A_{mn}, B_{mn}$  найти из начальных условий. Мы решили задачу о мембране, а теперь перейдем к свойствам функции Бесселя, одной из *цилиндрических функций*, возникающих при разделении переменных уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Сводку формул и таблицы всех цилиндрических функций можно найти в справочниках [35, 36]. Там же содержатся таблицы других основных специальных функций. Теория цилиндрических функций с выводами соотношений приведена в книге [37].

<sup>1</sup>Иногда, особенно часто в физической литературе, их обозначают  $N_m$ .

## 8.2 Функции Бесселя

### Разложение в ряд

Сначала найдем, как ведет себя решение уравнения Бесселя в нуле, положив  $R \sim x^\sigma, x \rightarrow 0$ . Самой старшей степенью в уравнении (8.2) будет  $x^{\sigma-2}$ . Чтобы коэффициент при старшей степени обратился в нуль, должно выполниться условие  $\sigma^2 - m^2 = 0$ , откуда оставляем  $\sigma = +|m|$ , а второй корень отбросим, поскольку соответствующее решение имеет особенность при  $x \rightarrow 0$  и дается функцией Неймана  $Y_m(x)$ . Теперь выделим степенное поведение в начале координат явно  $R = x^m w(x)$ , считая, что  $m \geq 0$ , подставим в исходное уравнение и получим

$$w'' + \frac{2m+1}{x}w' + w = 0.$$

Ищем решение в виде разложения по степеням  $x$ :  $w = \sum c_n x^n$ , подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{array}{ll} x^{-1} : & c_1 = 0 \\ 1 : & 2c_2 + 2(2m+1)c_2 + c_0 = 0 \quad c_2 = -\frac{c_0}{4(m+1)} \\ x : & 6c_3 + 3(2m+1)c_3 + c_1 = 0 \\ x^2 : & 12c_4 + 4(2m+1)c_4 + c_2 = 0 \quad c_4 = -\frac{c_2}{8(m+2)} \end{array}$$

В левом столбце перед знаком двоеточия записана степень  $x$ , в среднем — уравнение, которое получается, когда мы приравниваем коэффициенты при данной степени, а в правом — получившаяся рекуррентная формула для коэффициента. Видно, что коэффициенты при нечетных степенях исчезают. По приведенному началу можно догадаться до общей формулы для коэффициента при четных степенях, но все они пропорциональны нормировочному коэффициенту  $c_0$ , который из уравнения найти нельзя. Его выбирают равным  $c_0 = 2^{-m}/m!$ , так, чтобы разложение функции Бесселя в ряд выглядело наиболее просто

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m} \frac{1}{n!(m+n)!}. \quad (8.3)$$

Заменяя факториалы на  $\Gamma$ -функцию Эйлера

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (8.4)$$

можно обобщить формулу (8.3) на дробные и комплексные индексы

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)}. \quad (8.5)$$

В частности, для отрицательного целого  $\nu = -m$  можно заменить индекс суммирования на  $n' = n - m = 0, 1, \dots$ . Суммирование начнется с  $n' = 0$ , потому что предыдущие слагаемые обратятся в нуль из-за бесконечной  $\Gamma$ -функции от целого отрицательного аргумента в знаменателе. Полученная сумма снова сводится к ряду (8.3), получается формула  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ .

### Рекуррентное соотношение

Рекуррентное соотношение выводится с помощью того же разложения (8.3)

$$\begin{aligned} J_{m-1} + J_{m+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m+1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n+1)!} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m-1} \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} \\ &+ \sum_{n'=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n'+m-1} \frac{(-1)^{n'-1}}{(n'-1)!(m+n')!} = \frac{2m}{x} J_m. \end{aligned}$$

Здесь мы в первой сумме выделили нулевое слагаемое, а во второй заменили индекс суммирования на  $n' = n + 1$ . В результате обе суммы объединились в одну. Получилась формула

$$J_{m-1} + J_{m+1} = \frac{2m}{x} J_m. \quad (8.6)$$

*Упражнение 8.1.* Получите тем же способом рекуррентное соотношение для разности

$$J_{m-1} - J_{m+1} = 2J'_m. \quad (8.7)$$

### Интегральные представления и производящие функции

Двумерное уравнение Гельмгольца (8.1) имеет частное решение  $U(r, \varphi) = e^{iky}$ , которое легко проверить в декартовых координатах. Его можно разложить по собственным функциям лапласиана в полярных координатах

$$e^{ikr \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\varphi} J_m(kr).$$

Коэффициенты этого ряда Фурье находятся, как обычно, интегрированием

$$c_m J_m(kr) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(ikr \sin \varphi - im\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

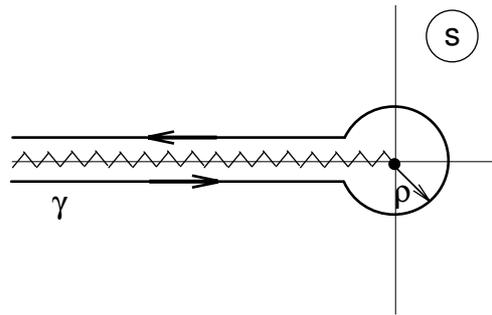


Рис. 8.2: Контур интегрирования в плоскости  $s$  для представления Ганкеля функции Эйлера.

Последнее соотношение справедливо при любых  $x = kr$ , поэтому можно устремить  $x \rightarrow 0$ , получится

$$c_m \frac{x^m}{2^m m!} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^n \frac{(ix)^n}{n!} \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

Самый большой член суммы, не обращающийся в нуль, появляется при  $n = m$  (именно в нем содержится экспонента  $e^{im\varphi}$ , которая сократится с  $e^{-im\varphi}$ ). Интеграл равен  $2\pi$ , поэтому все коэффициенты  $c_m = 1$ . Таким способом мы сразу получили интегральное представление и производящую функцию

$$J_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi}, \quad e^{ix \sin \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(x). \quad (8.8)$$

Такое представление обычно называют *представлением Бесселя*, оно справедливо для целых  $m$ .

Чтобы обобщить интегральное представление на произвольные  $\nu$ , сначала выведем две формулы. Начнем с *представления Ганкеля функции Эйлера* (8.4):

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^s s^{-z} ds, \quad (8.9)$$

где контур  $\gamma$  обходит отрицательную действительную полуось (вдоль которой идет разрез) в положительном направлении, рисунок 8.2. Контур интегрирования разбивается на две прямые и окружность  $c_\rho$  радиуса  $\rho \rightarrow 0$ , интеграл по окружности стремится к нулю, а по нижнему и верхнему берегам разреза сво-

дятся к одинаковому виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^s s^z dz &= \int_{-\infty}^{-\rho} + \int_{-\rho}^{-\infty} + \int_{c_{\rho}}^{\infty} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-t} \left[ (te^{+i\pi})^{-z} - (te^{-i\pi})^{-z} \right] dt = \\ &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-z} e^{-t} dt = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1 - z). \end{aligned}$$

Чтобы окончательно получить формулу (8.9), надо еще вывести соотношение между  $\Gamma$ -функциями

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (8.10)$$

Воспользуемся известным выражением для  $B$ -функции Эйлера

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} dt,$$

из которого получается

$$B(z, 1 - z) = \Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{-z} dt.$$

Заменой переменной  $t = e^{\xi} / (1 + e^{\xi})$  сводим его к интегралу в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{z\xi} d\xi}{1 + e^{\xi}},$$

который в свою очередь можно найти в таблице или вычислить методом Ватсона — Зоммерфельда как сумму вычетов в полюсах  $\xi = \pi i, 3\pi i, 5\pi i, \dots$ . Получится геометрическая прогрессия

$$2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z(2n+1)\pi i}}{e^{(2n+1)\pi i}} = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

что доказывает формулу (8.10), а следовательно и представление Ганкеля (8.9).

Вернемся к выводу интегрального представления функции Бесселя при произвольном  $\nu$ . Воспользуемся разложением (8.5), где в каждом слагаемом заменим функцию  $1/\Gamma(n + \nu + 1)$  ее интегральным представлением. Далее поменяем порядок суммирования и интегрирования и заменим переменную интегрирования  $s = xt/2$ . Тогда сумма соберется в экспоненту, а контурный интеграл останется:

$$J_{\nu}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \exp \left[ \frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (8.11)$$

Называют эту формулу интегральным представлением *Шлефли*. При целых  $\nu$  разрез на рис. 8.2 не нужен, контур  $\gamma$  можно замкнуть, тогда заменой  $z = e^{i\varphi}$  представление Шлефли переводится в представление Бесселя (8.8).

### Соотношение ортогональности

Соотношение ортогональности мы выведем из дифференциального уравнения Бесселя, записав его для двух значений  $k$ , удовлетворяющих нулевым граничным условиям  $J_m(k_1 a) = J_m(k_2 a) = 0$  :

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) J_m(k_1 r) = -k_1^2 J_m(k_1 r), \quad \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right) J_m(k_2 r) = -k_2^2 J_m(k_2 r).$$

Первое уравнение умножим на  $J_m(k_2 r)$ , второе — на  $J_m(k_1 r)$  вычтем друг из друга и проинтегрируем по  $r dr$  от 0 до  $a$ . Затем интегрируем по частям и находим

$$r \left[ J_m(k_2 r) \frac{dJ_m(k_1 r)}{dr} - J_m(k_1 r) \frac{dJ_m(k_2 r)}{dr} \right]_0^a = (k_2^2 - k_1^2) \int_0^a J_m(k_1 r) J_m(k_2 r) r dr.$$

Сразу видно, что решения с  $k_1 \neq k_2$  ортогональны. Для одинаковых  $k$  в левой и правой частях получается нуль и надо раскрыть неопределенность по правилу Лопиталья. Получится нормировочный множитель, а соотношение ортогональности запишется как

$$\int_0^a J_m\left(j_{mn_1} \frac{r}{a}\right) J_m\left(j_{mn_2} \frac{r}{a}\right) r dr = \frac{a^2}{2} [J'_m(j_{mn_1})]^2 \cdot \delta_{n_1 n_2}.$$

**Упражнение 8.2.** Выведите соотношение ортогональности и найдите нормировочный множитель для другого граничного условия  $J'_m(k_1 a) = J'_m(k_2 a) = 0$ .

# ЛЕКЦИЯ 9

## Разделение переменных в сферических координатах

### 9.1 Частица в центральном поле

Для определенности рассмотрим квантовомеханическую задачу о движении частицы в центральном поле, т.е. будем искать собственные функции гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r),$$

где потенциальная энергия  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до начала координат, и будем полагать  $\hbar = m = 1$ . В сферических координатах оператор Лапласа разбивается на радиальную и угловую часть  $\Delta_\Omega$ :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega, \quad \Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Переменные разделяются, если искать решение стационарного уравнения Шредингера (1.10) в виде  $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ :

$$-2(E - U(r)) = \frac{(r^2 R')'}{r^2 R} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} \right]. \quad (9.1)$$

Уравнение на  $\Phi(\varphi)$  снова получается вида  $\Phi'' + m^2 \Phi = 0$ . Его решение мы знаем:  $\Phi = e^{im\varphi}$ , где  $m$  — целое число. Теперь последовательно займемся уравнениями на  $\Theta(\theta)$  и  $R(r)$ .

### 9.2 Угловое уравнение. Функции Лежандра

Угловое уравнение получается, если приравнять ко второй константе разделения  $\lambda$  выражение в квадратных скобках предыдущего уравнения

$$\frac{(\sin \theta \Theta)'}{\sin \theta \Theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \lambda. \quad (9.2)$$

Заменой  $x = \cos \theta$  сводим его к уравнению с полиномиальными коэффициентами

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2}\Theta = \lambda\Theta.$$

Сначала надо исследовать поведение при  $x \rightarrow \pm 1$ . Для этого ищем решение в окрестности точки  $x = 1$  в виде  $\Theta \sim \xi^\sigma, x = 1 + \xi, \xi \rightarrow 0$ . Приравнявая к нулю коэффициенты при самой старшей степени  $\xi$ , получим  $-2\sigma^2 + m^2/2 = 0$ , откуда  $\sigma = \pm m/2$ . Считая  $m$  неотрицательным, выбираем корень со знаком  $+$ , чтобы решение не имело особенности при  $\xi \rightarrow 0$ . Аналогично поступим с точкой  $x = -1$ , “южным” полюсом сферической системы координат. Ищем решение в виде

$$\Theta = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}u(x)$$

и получаем уравнение для функции  $u$

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' - [m(m+1) + \lambda]u = 0. \quad (9.3)$$

Вместо этого достаточно сложного рассмотрим более простое уравнению Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' - \lambda y = 0, \quad (9.4)$$

последовательно дифференцируем последнее, получим

$$\begin{aligned} (1-x^2)y''' - 4xy'' - [2 + \lambda]y' &= 0 \\ (1-x^2)y^{IV} - 6xy''' - [2 + 4 + \lambda]y'' &= 0 \dots \\ (1-x^2)y^{(m+2)} - 2x(m+1)y^{(m+1)} - [m(m+1) + \lambda]y^{(m)} &= 0. \end{aligned}$$

В последней строчке выписано уравнение, которое получается после  $m$ -кратного дифференцирования и совпадает с (9.3) при  $u = y^{(m)}$ . Стало быть, решение (9.3) есть  $m$ -я производная решения уравнения Лежандра. Остается решить уравнение Лежандра.

Ищем решение в виде разложения в ряд  $y = \sum c_n x^n$ , подставляем в уравнение и выписываем рекуррентные соотношения на коэффициенты:

$$\begin{aligned} 1 : \quad & 2c_2 - \lambda c_0 = 0 \quad c_2 = \frac{\lambda}{2}c_0 \\ x : \quad & 2 \cdot 3c_3 - (2 + \lambda)c_1 = 0 \quad c_3 = \frac{\lambda+2}{2 \cdot 3}c_1 \\ x^2 : \quad & 3 \cdot 4c_4 - (2 + 4 + \lambda)c_2 = 0 \quad c_4 = \frac{\lambda+4+2}{3 \cdot 4}c_2 \end{aligned}$$

При произвольном фиксированном  $\lambda$  коэффициенты с большим номером будут одинаковыми, так как в числителе рекуррентного соотношения получается  $2+4+\dots+2m = m(m+1) \sim m^2, m \rightarrow \infty$ , а в знаменателе  $(m+1)(m+2) \sim m^2$ . Пусть  $c_0 \neq 0, c_1 = 0$ , тогда останутся только четные коэффициенты. Такой ряд будет сходиться при  $x^2 < 1$ , как геометрическая прогрессия  $1 + x^2 + x^4 + \dots = 1/(1-x^2)$ ,

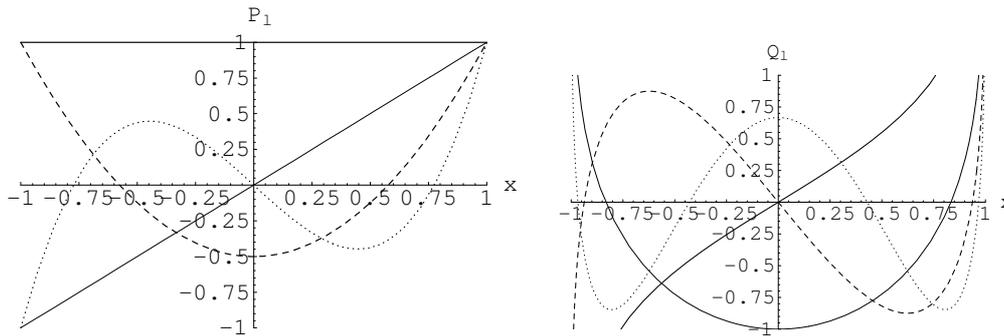


Рис. 9.1: Функции Лежандра первого рода  $P_l(x)$  и второго рода  $Q_l(x)$ : толстая линия —  $l = 0$ , тонкая —  $l = 1$ , пунктир —  $l = 2$ , точки —  $l = 3$ .

а значит имеет особенность при  $x \rightarrow \pm 1$ . То же самое происходит для нечетных решений, когда  $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ . Особенности не будет только при дискретных значениях  $\lambda$ , при которых ряд обрывается. Значит условие регулярности на полюсах позволяет найти не только решение, но и собственные значения  $\lambda = -l(l+1)$ . Решения уравнения Лежандра, не имеющие особенности при  $x^2 \rightarrow 1$ , содержат конечное число членов разложения. Эти многочлены называются *полиномами Лежандра*. Принятая нормировка дается *формулой Родрига*

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \tag{9.5}$$

Здесь  $l = 0, 1, 2, \dots$  — целое число, называемой орбитальным квантовым, которое показывает число нулей полинома Лежандра. Второе линейно независимое решение дается функциями  $Q_l(x)$ , которые имеют особенности в точках  $x = \pm 1$  и называются *функциями Лежандра второго рода*. Функции Лежандра называют также *сферическими функциями*, рис. 9.1.

Осталось показать, что (9.5) есть решение уравнения (9.4). Для этого введем вспомогательную функцию  $W_l(x) = (x^2 - 1)^l$ . Если ее продифференцировать, получим

$$(x^2 - 1)W_l' - 2lxW_l = 0.$$

Дифференцируем это соотношение  $l + 1$  раз:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)W_l'' + (2 - 2l)xW_l' - 2lW_l &= 0 \\ (x^2 - 1)W_l''' + (4 - 2l)xW_l'' + (2 - 4l)W_l' &= 0 \\ (x^2 - 1)W_l^{IV} + (6 - 2l)xW_l''' + (4 + 2 - 6l)W_l'' &= 0 \dots \\ (1 - x^2)W_l^{(l+2)} + 2xW_l^{(l+1)} - l(l+1)W_l^{(l)} &= 0. \end{aligned}$$

В последней строке получилось уравнение Лежандра, значит  $W_l^{(l)}$  удовлетворяет уравнению (9.4) и формула Родрига (9.5) доказана.

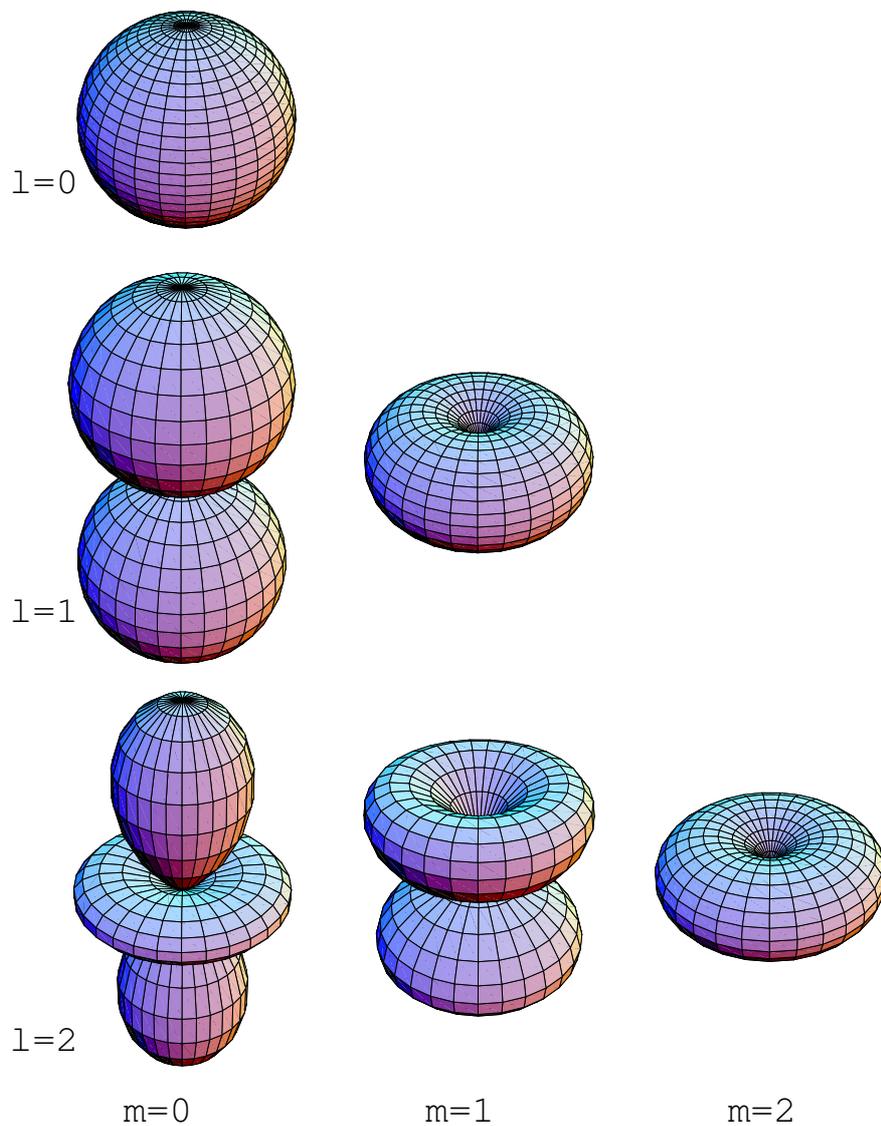


Рис. 9.2: Сферические гармоники  $|Y_{lm}(\theta, \varphi)|$  при  $l = 0, 1, 2, 0 \leq m \leq l$ .

Вернемся к уравнению (9.3), его решения — производные полиномов Лежандра — называются *присоединенными функциями Лежандра*

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad m \geq 0.$$

Полное решение угловой задачи, собственные функции оператора  $\Delta_\Omega$ ,

$$\Delta_\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

называются *сферическими гармониками*. Сферические гармоники просто выражаются через присоединенные функции Лежандра первого рода

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta),$$

где  $C_{ml}$  нормировочные коэффициенты, подобранные так, чтобы сферические гармоники стали ортонормированными на единичной сфере

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Для небольших значений орбитального квантового числа  $l \leq 2$  графики сферических гармоник как функций полярного и азимутального углов изображены на рисунке 9.2. При  $l = 0$  получилась сфера, по мере увеличения  $l$  поверхность становится все более изрезанной. Функции с максимальным числом  $m = l$  сосредоточены вблизи экватора. То, что мы изобразили абсолютную величину  $|Y_{lm}|$ , сделало картинку аксиально-симметричной, независимой от азимутального угла  $\varphi$ . Фактически на рисунке показаны присоединенные функции Лежандра. Теория сферических функций приведена в книге [38], включая обобщение на комплексный аргумент и дробные индексы.

*Упражнение 9.1.* Найдите коэффициенты  $C_{lm}$ .

### 9.3 Радиальное уравнение.

#### Сферические функции Бесселя

Вернемся к радиальному уравнению (9.1) и попробуем решить его для свободной частицы  $U = 0$ , когда оно сводится к уравнению Гельмгольца

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (9.6)$$

Введем переменную  $x = kr$  и новую неизвестную функцию  $\chi(r) = R(r)r$ . Получим уравнение без первой производной

$$\chi_l'' + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi_l = 0,$$

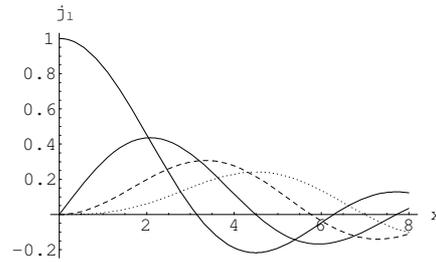


Рис. 9.3: Сферические функции Бесселя  $j_l(x)$ : толстая линия —  $l = 0$ , тонкая —  $l = 1$ , пунктир —  $l = 2$ , точки —  $l = 3$ .

где нижний индекс означает  $l = 0, 1, \dots$ . При  $l = 0$  уравнение легко решается:  $\chi_0 = \sin x$ , а второе решение  $R = \cos x/x$  мы вынуждены отбросить как имеющее особенность при  $x = 0$ .

Теперь выполним другую замену неизвестной функции  $R = u(x)/\sqrt{x}$  и получим

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left[1 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{x^2}\right]u = 0.$$

Получилось знакомое уравнение Бесселя (8.2), но для функций с полуцелым индексом  $u = J_{l+1/2}(x)$ . Сопоставив с предыдущим решением для  $l = 0$ , сразу найдем выражение  $J_{1/2}$  через элементарные функции

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \tag{9.7}$$

Нормировку мы нашли, после предельного перехода  $x \rightarrow 0$  в обеих частях.

Покажем теперь, что все функции Бесселя с полуцелым индексом  $l + 1/2$  выражаются через тригонометрические функции и степени  $x$ . Для этого воспользуемся рекуррентными соотношениями (8.6) и (8.7), вычитая которые друг из друга найдем

$$J_{\nu+1} = -x^\nu \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu).$$

Отсюда последовательно получим

$$J_{\frac{3}{2}} = -x^{1/2} \frac{d}{dx} x^{-1/2} J_{\frac{1}{2}}, J_{\frac{5}{2}} = x^{5/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^2 \frac{J_{\frac{1}{2}}}{x^{1/2}}, \dots$$

$$J_{l+\frac{1}{2}} = (-1)^l \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{l+1/2} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x}.$$

Иногда вводят *сферические функции Бесселя*, определенные с более удобной для данной задачи нормировкой. Для них формула становится короче

$$j_l = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}, \quad \dot{j}_l = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \frac{\sin x}{x}.$$

Графики этих функций показаны на рис. 9.3.

# ЛЕКЦИЯ 10

## Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Разделяя переменные в уравнении Гельмгольца в цилиндрических и сферических координатах, мы столкнулись с функциями Бесселя и Лежандра. Исторически так и были открыты цилиндрические, сферические, сфероидальные функции, функции параболического цилиндра и т.п. Нам однако понадобится и более поздний подход, где специальные функции делятся на классы, которые выражаются или не выражаются через гипергеометрическую функцию. Гипергеометрические функции имеют целый ряд замечательных свойств, в частности, интегральные представления, рекуррентные соотношения, производящие функции и т.д. Функции, более сложные, чем гипергеометрические, гораздо менее поддаются исследованию. Для них нет даже интегральных представлений.

Цилиндрические и сферические функции появились в нашем курсе как решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Перейдем к математической теории дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, рассматривая их в комплексной плоскости. Наша цель — по виду уравнения определить, сводится ли оно к гипергеометрическому.

### 10.1 Канонический вид

Однородное линейное уравнение второго порядка в комплексной плоскости с полиномиальными коэффициентами  $a(z)$ ,  $b(z)$ ,  $c(z)$

$$a(z)w'' + b(z)w' + c(z)w = 0$$

сразу разделим на полином, стоящий перед второй производной. Получится

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0, \tag{10.1}$$

где  $p(z)$  и  $q(z)$  — рациональные функции. Его можно преобразовать, если решение искать в виде произведения известной функции  $\phi$  на новую неизвестную функцию  $w(z) = \phi(z)u(z)$ . Назовем такой переход *преобразованием Лиувилля* и отметим, что после преобразования снова получится уравнение с рациональными коэффициентами

$$u'' + \left(2\frac{\phi'}{\phi} + p\right)u' + \left(\frac{\phi''}{\phi} + p\frac{\phi'}{\phi} + q\right)u = 0.$$

Особо выделяют такое преобразование, которое обращает в нуль коэффициент при первой производной. Как легко заметить, для этого надо взять  $\phi = \exp(-\frac{1}{2} \int p dz)$ . Вид получившегося уравнения

$$u'' + I(z)u = 0, \quad I(z) = q - \frac{p^2}{4} - \frac{p'}{2}$$

называется *каноническим*, а функция  $I(z)$  — *инвариантом*.

## 10.2 Разложение вблизи обыкновенной точки

**Определение 10.1.** Точка  $z = z_0$  называется *обыкновенной точкой* уравнения (10.1), если в ее окрестности функции  $p(z), q(z)$  аналитичны.

**Теорема 10.1.** Если  $z_0$  есть обыкновенная точка уравнения (10.1), то существует такая ее окрестность, в которой решение существует, единственно и аналитично.

Поясним только идею доказательства. Существование и аналитичность решения доказываются методом Пикара, как и в теории дифференциальных уравнений на действительной оси [26, 29, 39]. Для упрощения записи предположим, что  $z_0 = 0$  и сразу рассмотрим уравнение в каноническом виде

$$w'' + I(z)w = 0, \quad w(0) = c_0, \quad w'(0) = c_1. \quad (10.2)$$

Дважды проинтегрировав, и меняя порядок интегрирования, сведем задачу к интегральному уравнению

$$w = c_0 + c_1z + \int_0^z (z - z')I(z')w(z') dz'.$$

Интегральное уравнение превращается в итерационную схему

$$w_{n+1}(z) = c_0 + c_1z + \int_0^z (z - z')I(z')w_n(z') dz'.$$

Обозначив

$$M = \max_{|z| < R} I(z), \quad m = \max_{|z| < R} w_0(z),$$

где  $R$  — радиус круга, лежащего в области аналитичности инварианта  $I(z)$ , а за нулевое приближение принимаем  $w_0 = c_0 + c_1 z$ . Для разности соседних приближений находим

$$w_{n+1}(z) - w_n(z) = - \int_0^z (z - z') I(z') (w_n(z') - w_{n-1}(z')) dz'.$$

Теперь остается показать, что получилось сжатое отображение. Можно последовательно получить оценки абсолютных величин разностей и убедиться, что они быстро уменьшаются

$$|w_1 - w_0| \leq mM \left| \int_0^z \zeta d\zeta \right| \leq mM \int_0^\rho \rho' d\rho' = mM \frac{\rho^2}{2},$$

$$|w_2 - w_1| \leq mM^2 \frac{\rho^4}{2 \cdot 4}, \dots, |w_n - w_{n-1}| \leq mM^n \left( \frac{\rho^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!},$$

где  $\rho = |z| < R$ . Замечая, что  $w_n = w_0 + (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \dots + (w_n - w_{n-1})$ , мы сводим исследование сходимости итерационной процедуры к задаче о сходимости ряда. Можно убедиться, что ряд мажорируется абсолютно сходящимся рядом

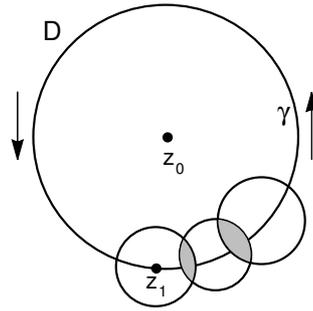
$$|w_n| \leq m \sum_{k=0}^n \left( \frac{M\rho^2}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \leq m \exp \frac{M\rho^2}{2}.$$

Значит ряд, частичная сумма которого равна  $w_n$ , сходится, поэтому сходится и итерационная схема Пикара, откуда следует, что решение интегрального уравнения существует. Ряд сходится равномерно, поэтому решение задачи (10.2) аналитично.

Чтобы доказать единственность, подставим в уравнение (10.2) ряды  $w = c_0 + c_1 z + \dots$ ,  $I(z) = a_0 + a_1 z + \dots$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем

$$\begin{aligned} 1 : \quad & 2c_2 + a_0 c_0 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{2} a_0 c_0 \\ z : \quad & 6c_3 + a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0 \quad c_3 = -\frac{1}{6} (a_0 c_1 + a_1 c_0) \\ z^2 : \quad & 12c_4 + a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = 0 \quad c_4 = -\frac{1}{12} (a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0) \end{aligned}$$

Каждый коэффициент выражается только через коэффициенты с меньшими номерами, а два первых нам известны, значит решение строится единственным образом.

Рис. 10.1: Контур  $\gamma$  для обхода особой точки и разреза.

### 10.3 Разложение вблизи особой точки

**Определение 10.2.** Точка  $z_0$  называется *особой точкой* уравнения (10.1), если при  $z = z_0$  расположен полюс хотя бы одной из функций функции  $p(z)$  или  $q(z)$ .

Если имеется полюс, область перестает быть односвязной и аналитическое продолжение уже не является однозначной функцией. Выберем такую окрестность  $D$  точки  $z_0$ , в которой нет других полюсов. Тогда решение из точки  $z_1 \in D$  можно продлить вдоль контура  $\gamma$  (рис. 10.1) в некоторую окрестность начальной точки как аналитическую функцию. В этой окрестности можно выбрать за центр следующую точку  $z_2 \in \gamma$  и из нее снова продолжить решение в новый круг с помощью разложения в ряд Тейлора. Продолжая эту процедуру мы доберемся до любой точки  $z \in \gamma$ . Если получится бесконечное число кругов, всегда можно выбрать конечное подпокрытие. На рисунке показаны три окрестности и их пересечения. Те же рассуждения справедливы и для второго независимого решения.

Можно показать, что продолжения двух линейно независимых решений  $w_1$  и  $w_2$  останутся линейно независимыми. Действительно, решения удовлетворяют уравнению (10.1)

$$w_1'' + pw_1' + qw_1 = 0, \quad w_2'' + pw_2' + qw_2 = 0.$$

Умножим первое уравнение на  $w_2$ , второе на  $w_1$  и вычтем друг из друга, получится уравнение первого порядка

$$\Delta' + p\Delta = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix}.$$

Определитель Вронского двух решений  $\Delta(z)$  дается экспонентой

$$\Delta(z) = \Delta(z_1) \exp \left( - \int_{z_1}^z p(z') dz' \right).$$

Отсюда следует, что  $\Delta(z) \neq 0$ , когда  $\Delta(z_1) \neq 0$ .

Когда  $\gamma$  — замкнутая кривая, показанная на рисунке, можно вернуться в исходную точку. Решения, полученные продолжением из  $w_{1,2}$  после одного обхода в положительном направлении обозначим  $w_{1,2}^+$ . Новые решения в окрестности начальной точки можно разложить по старым, образующим базис пространства решений

$$w_1^+ = a_{11}w_1 + a_{12}w_2, \quad w_2^+ = a_{21}w_1 + a_{22}w_2.$$

Формулы были бы еще проще, если бы удалось перейти к линейным комбинациям решений  $\tilde{w}_{1,2}$ , которые при обходе просто умножались бы на число

$$\tilde{w}_1^+ = a_{11}\tilde{w}_1 + a_{12}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_1, \quad \tilde{w}_2^+ = a_{21}\tilde{w}_1 + a_{22}\tilde{w}_2 = \lambda\tilde{w}_2.$$

отсюда видно, что  $\lambda$  суть собственные числа матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , а нужные нам линейные комбинации решений даются ее собственными векторами. Возможны два варианта: матрица  $A$  либо приводится к диагональному виду  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ , либо ее можно привести к жордановой клетке  $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Рассмотрим их последовательно.

1°. При обходе решения  $\tilde{w}_{1,2}$  просто умножаются на число  $\lambda_{1,2}$ . Есть такая эталонная функция  $f(z) = z^\rho$ , которая при обходе так же приобретает множитель:  $f^+ = f \cdot e^{2\pi i \rho}$ . Назовем *характеристическим показателем* показатель такой степенной функции, которая при обходе точки 0 приобретает тот же самый множитель, что решение при обходе полюса. Тогда характеристические показатели наших решений

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_{1,2}.$$

Для простоты записи снова предположим, что  $z_0 = 0$  (то есть сдвинем полюс в начало координат), тогда отношение решения к степенной функции с тем же характеристическим показателем уже однозначная функция при обходе и следовательно разлагается в ряд Лорана. Тогда мы можем написать общий вид разложения решений в окрестности начала координат

$$\tilde{w}_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(1,2)} z^n, \tag{10.3}$$

где  $c_n^{(1,2)}$  — наборы коэффициентов.

2°. Жорданова клетка отвечает преобразованию

$$\tilde{w}_1^+ = \lambda\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2, \quad \tilde{w}_2^+ = \lambda\tilde{w}_2.$$

Второе решение  $\tilde{w}_2$  просто умножается на число, поэтому имеет такой же вид (10.3) степенной функции, умноженной на ряд Лорана. Если разделить первое уравнение на второе, мы увидим, что отношение решений приобретает при обходе слагаемое

$$u^+ = u + \frac{1}{\lambda}, \quad u \equiv \frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2}.$$

Эталоном служит логарифмическая функция  $f(z) = \ln z$ ,  $f^+ = f + 2\pi i$ . Чтобы добавка при обходе имела правильную величину, надо поставить перед логарифмом коэффициент  $1/2\pi i\lambda$ , тогда разность  $u(z) - \ln z/2\pi i\lambda$  однозначная функция и разлагается в ряд Лорана. Отсюда найдем, что общий вид отношения решений  $u$  в логарифмическом случае

$$\frac{\tilde{w}_1}{\tilde{w}_2} = \frac{\ln z}{2\pi i\lambda} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \quad (10.4)$$

представляет собой сумму логарифма и ряда Лорана.

**Определение 10.3.** Если в ряде Лорана (10.3) или (10.4) содержится лишь конечное число слагаемых с отрицательными степенями, то особая точка  $z_0$  называется *регулярной* или *правильной* уравнения (10.1). Если имеется бесконечный набор членов с отрицательными показателями, особая точка  $z_0$  называется *иррегулярной* или *неправильной*.

## 10.4 Теорема Фукса

Возникает естественный вопрос: можно ли по виду коэффициентов уравнения определить, какая у него особая точка? Ответ на него дает следующая теорема.

**Теорема 10.2. Теорема Фукса.** Точка  $z_0$  — *регулярная особая точка уравнения (10.1) тогда и только тогда, когда  $p(z)$  имеет при  $z = z_0$  полюс не выше первого порядка, а  $q(z)$  — не выше второго порядка.*

Достаточность показывается выписыванием явного вида уравнения с полюсами в окрестности  $z_0 = 0$

$$w'' + \frac{p_0}{z} w' + \frac{q_0}{z^2} w = 0, \quad (10.5)$$

где  $p_0, q_0$  постоянные. Как и в примерах предыдущих двух лекций, ищем  $w(z)$  в окрестности в степенном виде  $w = z^\rho$  и получаем *определяющее уравнение*

$$\rho^2 + (p_0 - 1)\rho + q_0 = 0,$$

решение которого дает нам оба характеристических показателя. Теперь можно искать решение уравнения (10.5) в виде  $w = z^\rho u(z)$ , где  $u$  — новая неизвестная функция, а  $\rho = \rho_1$  или  $\rho_2$  — один из характеристических показателей. Можно показать, что  $u = \text{const}$  — решение, а следовательно  $z = 0$  — *регулярная особая точка*. Заметим, что характеристические показатели определены с точностью до целочисленного слагаемого, поэтому в регулярной особой точке вместо общего ряда Лорана всегда можно выписать разложение в ряд Тейлора. Если  $q_0 = 0$ , то один из характеристических показателей получается целым.

Необходимость можно продемонстрировать, записывая оба решения в виде произведения степенной функции на аналитическую  $w_{1,2} = z^{\rho_{1,2}} u_{1,2}(z)$ . Функцию  $p(z)$  мы найдем из вронскиана  $p = -(\ln \Delta)' = (\rho_1 + \rho_2 - 1)/z$  и убедимся, что она имеет полюс первого порядка. Функцию  $q(z)$  найдем из уравнения  $q = -w''/w - pw'/w$  и получится полюс будет второго порядка.

**Замечание 10.1.** Случай бесконечно удаленной особой точки надо рассмотреть отдельно. Замена независимой переменной  $t = 1/z$  переведет особую точку в  $t = 0$ . Остается применить теорему Фукса к задаче

$$\ddot{w} + \left( \frac{2}{t} - \frac{p(1/t)}{t^2} \right) \dot{w} + \frac{q(1/t)}{t^4} w = 0.$$

Таким образом, для регулярности точки  $z = \infty$  функция  $p(z)$  должна иметь на бесконечности нуль не ниже первого порядка, а функция  $q(z)$  — не ниже второго порядка.

## 10.5 Уравнения класса Фукса

Теперь мы знаем, как локально определить, какого типа особая точка и перейдем к глобальным свойствам уравнений на всей комплексной плоскости. Оказывается, регулярность особых точек (если их немного) накладывает сильные ограничения на уравнение.

**Определение 10.4.** Уравнение принадлежит к *классу Фукса*, если на всей расширенной комплексной плоскости оно имеет только регулярные особые точки.

Для уравнений класса Фукса, пользуясь теоремой 10.2 с полюсами в точках  $z = \alpha_k$  можно выписать функции  $p, q$ :

$$p(z) = \sum_k \frac{A_k}{z - \alpha_k}, \quad q(z) = \sum_k \left[ \frac{B_k}{(z - \alpha_k)^2} + \frac{C_k}{z - \alpha_k} \right]$$

с неопределенными коэффициентами  $A_k, B_k, C_k$ , а условие регулярности на бесконечности дает ограничение на коэффициенты  $C_k : \sum_k C_k = 0$ .

1. *Одна регулярная особая точка.* Переводим  $\alpha_1 \rightarrow \infty$  преобразованием  $z \rightarrow 1/(z - \alpha_1)$ , тогда  $A_1 = B_1 = C_1 = 0$  и уравнение сведется к виду  $w'' = 0$ . Решение — линейная функция  $w(z) = c_0 + c_1 z$ .
2. *Две регулярные особые точки.* Переводим  $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow \infty$  преобразованием  $z \rightarrow (z - \alpha_1)/(z - \alpha_2)$ , тогда  $C_0 = 0$  и получается уравнение Эйлера  $w'' + \frac{A_0}{z} w' + \frac{B_0}{z^2} w = 0$ . Уравнение оказалось однородным, поэтому заменой  $\zeta = \ln z$  сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

3. *Три регулярные особые точки.* Переводим особые точки в стандартные положения  $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow 1$ ,  $\alpha_3 \rightarrow \infty$ :  $z \rightarrow (z - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)/(z - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_1)$ . Уравнение сведется к *гипергеометрическому уравнению Гаусса*, которое мы выпишем в следующей лекции.
4. *Четыре регулярные особые точки и более.* Никакими дробно-линейными преобразованиями не удастся перевести особые точки в стандартные положения, поэтому каждое уравнение надо рассматривать отдельно и для таких специальных функций полная теория до сих пор не построена.

Цель, поставленная в начале лекции, достигнута. Исследование уравнения с полиномиальными коэффициентами сводится к подсчету числа полюсов и их порядка. Если в расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  имеется одна или две регулярные особые точки, решение уравнения — элементарная функция. Если регулярных особых точек три, решение находится в классе гипергеометрических функций, а если четыре или больше, то анализ кардинально усложняется.

# ЛЕКЦИЯ 11

## Гипергеометрические функции

### 11.1 Функция Гаусса

Гипергеометрическое уравнения Гаусса

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0. \quad (11.1)$$

имеет три регулярные особые точки  $z = 0, 1, \infty$ . На сфере Римана они расположены на полюсах и экваторе. Если искать решение в виде ряда, выбрать  $c_0 = 1$  и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях, то получится *гипергеометрический ряд* или *гипергеометрическая функция (Гаусса)*

$$w = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (11.2)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  — параметры, а  $z$  — переменная. Точка с запятой отделяет параметры в числителе, знаменателе и переменную. Нижний индекс слева указывает количество параметров в числителе, а справа — в знаменателе каждого слагаемого. Такие обозначения пришли из теории обобщенных гипергеометрических рядов, где индексы могут быть любыми натуральными числами. Индексы в литературе чаще всего не пишут, а функции отличают друг от друга по числу параметров.

Приведем несколько очевидных свойств гипергеометрической функции. Эти и многие другие свойства гипергеометрической функции выводятся в справочнике [38].

1. В единичном круге  $|z| < 1$  гипергеометрический ряд сходится абсолютно.
2. Параметры  $\alpha, \beta$  входят симметрично:  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; z)$ .
3. Если  $\alpha$  или  $\beta$  целое отрицательное число или нуль, то ряд обрывается и становится многочленом. Если  $\gamma = -n$  целое отрицательное число или нуль, то ряд (11.2) не определен и надо пользоваться другим решением

$$w = z^{n+1} {}_2F_1(\alpha + n + 1, \beta + n + 1; n + 2; z).$$

Это решение находится с помощью преобразования Лиувилля  $w(z) = z^\sigma u(z)$ , если подобрать  $\sigma$  так, чтобы уравнение оставалось гипергеометрическим.

## 11.2 Вырожденная гипергеометрическая функция

Особенно часто в задачах встречается предельный случай функции Гаусса — *вырожденная* (или конфлюэнтная) *гипергеометрическая функция*, которая дается рядом Куммера

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; \frac{z}{\beta}) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)z^2}{\gamma(\gamma+1)2!} + \dots \quad (11.3)$$

Дифференциальное уравнение получается из уравнения Гаусса (11.1) предельным переходом. Замена  $z \rightarrow z/\beta$  переводит вторую регулярную особую точку из  $z = 1$  в  $z = \beta$ . После предельного перехода  $\beta \rightarrow \infty$  вторая точка устремляется в бесконечность и сливается с третьей. Получается *вырожденное гипергеометрическое уравнение*

$$zw'' + (\gamma - z)w' - \alpha w = 0. \quad (11.4)$$

1. Вырожденный гипергеометрический ряд имеет бесконечный радиус сходимости. При целом отрицательном параметре  $\alpha$  ряд (11.3) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция становится полиномом.
2. Уравнение (11.4) имеет две особые точки: регулярную особую точку  $z = 0$  с характеристическими показателями  $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1 - \gamma$  и иррегулярную  $z = \infty$ . Последняя образовалась из-за слияния двух регулярных точек уравнения Гаусса. Поведение одного из решений на бесконечности экспоненциальное  $w \sim e^z$ .
3. Преобразование Лиувилля вида  $w(z) = e^z u(z)$  не меняет тип уравнения, если одновременно сменить знак  $z$ , откуда получается *преобразование Куммера*

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = e^z {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -z).$$

4. Если подобрать степенное преобразование Лиувилля  $w(z) = z^\sigma u(z)$  так, чтобы уравнение оставалось вырожденным гипергеометрическим, мы получим второе решение

$$w_2(z) = z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; z).$$

## 11.3 Примеры

### Уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' - \lambda u = 0$$

(9.4) имеет три особые точки  $x = \pm 1, \infty$ . Для  $x = \pm 1$   $p(z), q(z)$  имеет полюсы первого порядка, а при  $x = \infty$   $p(x)$  имеет нуль первого порядка, а  $q(x)$  — нуль второго порядка. Отсюда по теореме Фукса получаем, что все три особые точки регулярные, поэтому уравнение Лежандра сведется к гипергеометрическому. Перевести точки в стандартные положения можно линейным преобразованием  $z = (x + 1)/2$ , тогда уравнение сведется к виду  $z(z - 1)u'' + (2z - 1)u' + \lambda u = 0$ . Сравнивая с (11.1), находим корни  $\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$ , один из которых надо выбрать за  $\alpha$ , другой за  $\beta$ . Условие обрыва ряда из лекции 9 получим просто приравняв один из корней целому неположительному числу  $-l, l = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \lambda = -l(l + 1)$ .

### Уравнение Бесселя

Уравнение Бесселя запишем для произвольного индекса  $\nu$

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

При  $x = 0$  функция  $p(x)$  имеет полюс первого порядка, а  $q(x)$  — второго порядка. При  $x = \infty$   $p$  имеет нуль первого порядка, а  $q$  вообще не имеет нуля:  $q(x) \rightarrow 1, x \rightarrow \infty$ . Значит уравнение имеет на бесконечности иррегулярную особую точку. Асимптотика вблизи нуля найдется из определяющего уравнения. Если подставить  $y = x^\rho$ , получится  $\rho_{1,2} = \pm \nu$ . На бесконечности уравнение перейдет в  $y'' + y = 0$ , решения которого  $y_{1,2} = \exp(\pm ix)$ . Исключаем асимптотики подстановкой  $y = x^\nu \exp(ix)u(x)$ . Получится

$$xu'' + [(2\nu + 1) + 2ix]u' + i(2\nu + 1)u = 0,$$

а его можно свести к вырожденному гипергеометрическому заменой независимой переменной  $-2ix = z$ . Сравнивая с (11.4), найдем параметры  $\alpha = \nu + \frac{1}{2}, \gamma = 2\nu + 1$

$$J_\nu(x) = Cx^\nu e^{ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; -2ix\right).$$

Если  $\gamma = 2\alpha$ , то вырожденная гипергеометрическая функция сводится к цилиндрической.

**Линейный осциллятор**

Уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора с оператором Гамильтона  $\hat{H} = \hat{p}^2/2m + m\omega^2 x^2/2$

$$\psi'' - x^2\psi = -k^2\psi, \quad k^2 = 2E, \quad \hbar = m = \omega = 1 \quad (11.5)$$

в теории специальных функций называется уравнением Вебера. Такие уравнения возникают при разделении переменных в параболических цилиндрических координатах, поэтому весь класс функций называется функциями параболического цилиндра. Уравнение Вебера имеет одну иррегулярную особую точку  $x = \infty$ . Точка  $x = 0$  обыкновенная, характеристические показатели в обыкновенной точке  $\sigma = 0, 1$ . Оба показателя годятся, чтобы получить регулярное в нуле решение, поэтому будем их анализировать последовательно.

Решение на бесконечности ищем в виде  $\psi = \exp(\mu x^\sigma)$ , это общий вид для иррегулярной особой точки. Подставляя в (11.5), получим

$$\mu^2 \sigma^2 x^{2\sigma-2} + \mu \sigma (\sigma - 1) x^{\sigma-2} - x^2 = -k^2.$$

При  $x \rightarrow \infty$  правой частью можно пренебречь по сравнению с  $x^2$ , а вторым слагаемым — по сравнению с первым, когда  $\sigma > 0$ . Оставшееся равенство позволяет найти сразу и показатель  $\sigma = 2$ , и коэффициент  $\mu = \pm \frac{1}{2}$ . Нас интересует корень со знаком минус, чтобы решение было регулярным при  $x \rightarrow \infty$ .

1°. *Четные решения.* Замена  $\psi = \exp(-x^2/2)u(x)$  сводит уравнение к виду

$$u'' - 2xu' + (k^2 - 1)u = 0,$$

который пока не похож на гипергеометрические уравнения. Однако поведение при  $x \rightarrow \infty$  подсказывает, что нужна еще замена независимой переменной  $t = x^2$ . Получится

$$t\ddot{u} + \left(\frac{1}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2 - 1}{4}u = 0,$$

где точкой обозначена производная по  $t$ . Это вырожденное гипергеометрическое уравнение, решение которого  $u = {}_1F_1((1 - k^2)/4; 1/2; x^2)$  представляет собой ряд, который ведет себя при  $x \rightarrow \infty$  как  $\exp(x^2)$ . Даже с учетом множителя  $\exp(-x^2/2)$  получится особенность на бесконечности. Ряд обрывается при дискретных значениях  $k$ , когда параметр  $\alpha = -n$  равен нулю или целому отрицательному числу,  $k_n^2 = 4n + 1$ . Для энергии получается  $E_n = 2n + \frac{1}{2}$ .

2°. *Нечетные решения.* Преобразование Лиувилля  $\psi = x \exp(-x^2/2)u(x)$  после замены  $x^2 = t$  дает вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$t\ddot{u} + \left(\frac{3}{2} - t\right)\dot{u} + \frac{k^2 - 3}{4}u = 0,$$

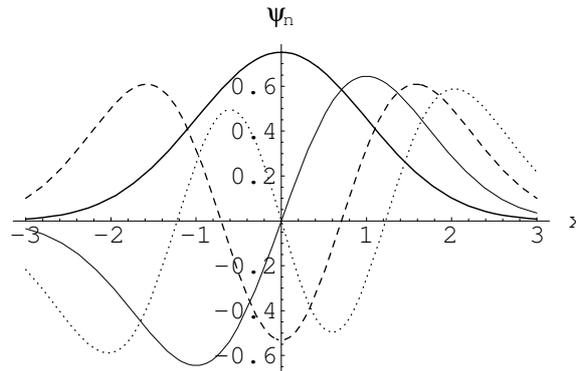


Рис. 11.1: Волновые функции осциллятора  $\psi_n(x)$ : толстая линия —  $n = 0$ , тонкая —  $n = 1$ , пунктир —  $n = 2$ , точки —  $n = 3$ .

откуда  $u = {}_1F_1((3 - k^2)/4; 3/2; x^2)$ . Чтобы обеспечить обрыв ряда, надо выбрать  $k_n^2 = 4n + 3$  ( $E_n = 2n + 1 + \frac{1}{2}$ ). Многочлены  ${}_1F_1(-n; \frac{1}{2}; x^2)$ ,  $x {}_1F_1(-n; \frac{3}{2}; x^2)$  называются *полиномами Эрмита*. Принятая нормировка дается формулой Родрига

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Волновые функции одномерного гармонического осциллятора показаны на рисунке 11.1. Номер функции соответствует количеству ее нулей.

### Атом водорода

Уравнение Шредингера для атома водорода в сферических координатах, где  $\hat{H} = \hat{p}^2/2 - 1/r$  (в атомных единицах, где  $e = \hbar = m = 1$ ). Переменные разделяются, потому что поле центральное:

$$\left( \Delta + \frac{2}{r} \right) \psi = \varkappa^2 \psi, \quad \psi = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Радиальное уравнение

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \left( \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \varkappa^2 \right) R = 0$$

сводим к (11.4), потому что особые точки две — регулярная и иррегулярная. При  $r \rightarrow 0$  уравнение имеет степенное решение  $R = r^\rho$ ,  $\rho_1 = l$ ,  $\rho_2 = -l - 1$ . Выбираем первый корень, чтобы решение не имело особенности. При больших  $r$  уравнение переходит в  $R'' - \varkappa^2 R = 0$ , из двух его решений оставляем убывающую экспоненту  $R = \exp(-\varkappa r)$ , чтобы избежать особенности на бесконечности. Действуя по стандартной схеме, заменяем неизвестную функцию  $R = r^l e^{-\varkappa r} u(r)$  и получаем

$$r u'' + 2(l + 1 - \varkappa r) u' - 2(\varkappa l - 1 + \varkappa) u = 0.$$

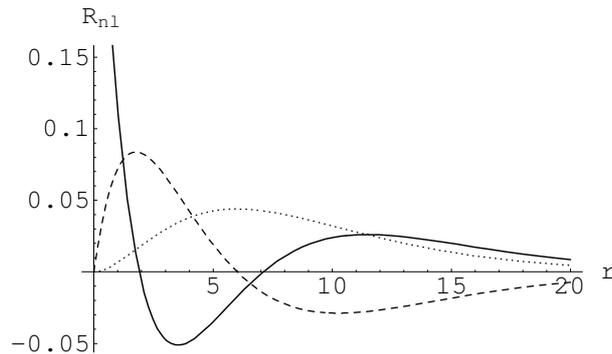


Рис. 11.2: Радиальные волновые функции водорода  $R_{nl}(r)$  при  $n = 3$ : сплошная линия —  $l = 0$ , пунктир —  $l = 1$ , точки —  $l = 2$ .

Уравнение сводится к вырожденному гипергеометрическому заменой независимой переменной  $z = 2\kappa r$

$$u = {}_1F_1\left(l + 1 - \frac{1}{\kappa}; 2l + 2; 2\kappa r\right).$$

Чтобы ряд обрывался, первый параметр надо приравнять  $-n_r, n_r = 0, 1, 2, \dots$ , откуда получается формула Бальмера  $E_n = -1/2n^2, n = n_r + l + 1$  называется главным квантовым числом, а  $n_r$  — радиальным квантовым числом.

Само вырожденное гипергеометрическое уравнение с целым отрицательным (или нулевым) параметром  $\alpha = -n, n = 0, 1, \dots$

$$xy'' + (\nu + 1 - x)y' + ny = 0 \tag{11.6}$$

называется *уравнением Лагерра*, а его решения  $y = L_n^\nu$  называются *обобщенными полиномами Лагерра*. При  $\nu = 0$  получаются обычные полиномы Лагерра. Радиальные волновые функции окончательно можно записать через полиномы Лагерра  $R_{nl}(r) = C_{nl}r^l e^{-\kappa r} L_{n-l-1}^{2l+1}(2\kappa r)$ , где  $0 \leq l < n$ , а нормировочный множитель  $C_{nl}$  вычислен, например, в [5]. Примеры радиальных волновых функций приведены на рис. 11.2.

*Упражнение 11.1.* Решить при  $\mathcal{E} = 0$  уравнения (7.3) для атома водорода, которые получились при разделении переменных в параболических координатах.

## 11.4 Полиномы Лагерра

Выведем несколько свойств полиномов Лагерра ( $\nu = 0$ ), пользуясь методом Лапласа. Чтобы получить лапласовский образ уравнения (11.6), надо заменить

$$\frac{d}{dx} \rightarrow p, \quad x \rightarrow -\frac{d}{dp},$$

сохраняя порядок операторов. Получится

$$-\frac{d}{dp}p^2w + pw + \frac{d}{dp}pw + nw = 0 \Rightarrow p(1-p)w' + (n+1-p)w = 0,$$

где  $w(p)$  — образ функции  $y(x)$ . Уравнение первого порядка можно решить, получится  $w = (1-p)^n/p^{n+1}$ . Остается выполнить обратное преобразование Лапласа

$$y(x) = \oint \frac{dp}{2\pi i} e^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \operatorname{Res}_{p=0} e^{px} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^n} [(1-p)^n e^{px}]_{p=0},$$

где интегрирование ведется по контуру, обходящему полюс  $p=0$  в положительном направлении. Для упрощения записи, обозначим  $q = px$ , а затем  $z = x - q$ :

$$y(x) = \frac{x^n}{n!} \frac{d^n}{dq^n} \left(1 - \frac{q}{x}\right)^n e^q \Big|_{q=0} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n e^{x-z} \Big|_{z=x}.$$

В новых обозначениях можно вынести  $\exp x$  за оператор дифференцирования, обозначить  $z$  и  $x$  одной буквой и получить формулу Родрига. Обычно ее пишут без множителя  $(-1)^n$ :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

**Упражнение 11.2.** Выведите производящую функцию

$$F(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n L_n(x) = \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}.$$

**Упражнение 11.3.** Покажите, что решение уравнения

$$x^2 y'' + (ax + b)y' + (Ax^2 + Bx + C)y = 0$$

сведется к вырожденному гипергеометрическому при произвольных константах  $a, b, A, B, C$ .

# ЛЕКЦИЯ 12

## Асимптотические методы

Мы столкнулись с тем фактом, что для немногих дифференциальных уравнений удастся получить ответ в виде формулы. Однако в приложениях часто и нет необходимости в точных формулах, потому что имеется малый или большой параметр. Цель асимптотических методов, с которыми мы познакомимся в следующих трех лекциях, — научиться использовать большой (или малый) параметр для решения уравнений. Начнем мы не с уравнений, а с асимптотик интегралов, а перед этим напомним, что такое асимптотическое разложение. Среди многочисленных книг, посвященных асимптотическим методам (см., например, [40–46]), можно рекомендовать сравнительно простое, но современное введение [47] в асимптотические методы вычисления интегралов.

### 12.1 Асимптотическое разложение

**Определение 12.1.** Ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

называется *асимптотическим разложением* функции  $f(z)$  при  $z \rightarrow z_0$ , если остаток ряда является величиной более высокого порядка малости

$$R_N = f(z) - \sum_{n=0}^N c_n (z - z_0)^n = O((z - z_0)^N)$$

или

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R_N}{(z - z_0)^N} = 0.$$

В тех же обозначениях обычная сходимость означает

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0,$$

а значит ряд может расходиться в обычном смысле, но быть асимптотическим разложением. В качестве асимптотического разложения в окрестности бесконечности можно взять разложение по степеням  $t = 1/z \rightarrow 0$ . Приведем несколько свойств асимптотического разложения.

1° Если асимптотическое разложение существует, то оно единственно. Действительно, если пределы существуют, можно найти последовательно все коэффициенты  $c_n$

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad c_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0}{z - z_0}, \quad c_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - c_0 - c_1(z - z_0)}{(z - z_0)^2}, \dots$$

2° Асимптотические разложения двух разных функций могут совпадать. Например,  $\exp(-1/z) \approx 0$  при  $z \rightarrow +0$  (знаком  $\approx$  мы обозначили асимптотическое равенство).<sup>1</sup> Действительно,  $c_n = \lim z^{-n} \exp(-1/z) = 0$ .

3° Асимптотические разложения можно складывать, умножать, интегрировать, но нельзя дифференцировать. Примером может служить функция  $f(x) = e^{-x} \sin e^x$ . Все коэффициенты ее асимптотического разложения при  $x \rightarrow +\infty$  равны нулю, как и в примере 2°, а первая производная  $f'(x) = -f(x) + \cos \exp x$  не имеет асимптотического разложения. Пределы из пункта 1° не существуют, нельзя даже найти коэффициента  $c_0$ .

## 12.2 Интеграл Лапласа

*Интегралом Лапласа* называют

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) e^{\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (12.1)$$

где  $A(t)$ ,  $S(t)$  действительные функции, которые мы будем называть амплитудной и фазовой, соответственно, а  $\lambda$  — большой действительный параметр. Если параметр велик, очевидно, что вклад в интеграл вносит небольшая окрестность точки максимума функции  $S(t)$ . Здесь возможны два случая

1° Если функция монотонна  $S'(t) \neq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , а максимум достигается в одной из конечных точек, например, при  $t = a$ , то вклад в интеграл вносит только окрестность точки  $a$ . Рис. 12.1 (а) показывает, что интеграл набирается в окрестности размером  $\sim 1/\lambda$ , поэтому и главный член разложения должен получиться того же порядка.

<sup>1</sup>Часто в литературе встречается знак  $\sim$ , а иногда пишут просто =.

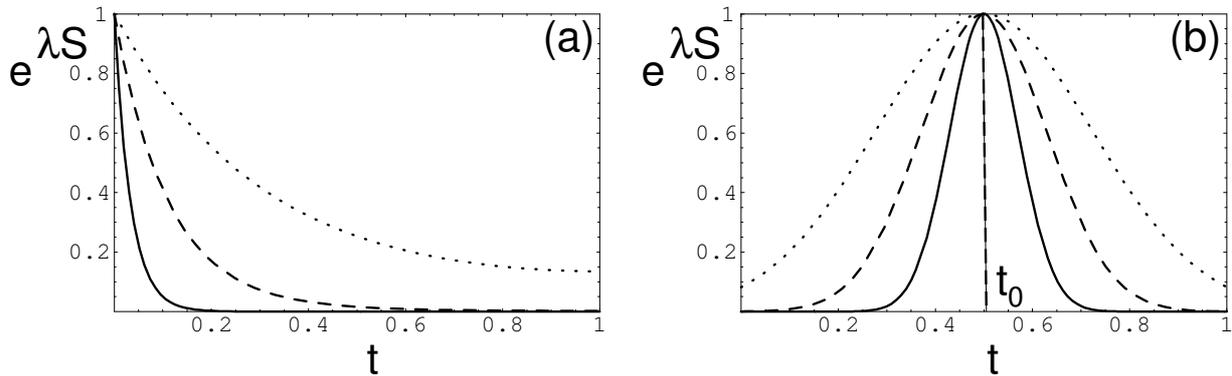


Рис. 12.1: (а) — случай 1°,  $S = -3t + t^3$ . При увеличении параметра  $\lambda = 1, 3, 10$  (точки, пунктир и сплошная линия, соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки  $a = 0$ . (б) — случай 2°,  $S = -(t - 1/2)^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 10, 30, 100$  вклад в интеграл дает все меньшая окрестность точки  $t_0 = 0.5$ .

2° Если функция достигает максимума в промежуточной точке  $S'(t_0) = 0, t_0 \in (a, b), S''(t_0) < 0$ , то из разложения фазовой функции в ряд до квадратичных членов

$$S(t) = S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)(t - t_0)^2 \tag{12.2}$$

видно, что интеграл в основном набирается при  $|t - t_0| \lesssim 1/\lambda^{1/2}$ . На рис. 12.1 (б) приведен пример, демонстрирующий, что с ростом параметра  $\lambda$  подынтегральная функция велика все в меньшей окрестности точки  $t_0$ .

В случае 1° формула для главной асимптотики выводится с помощью интегрирования по частям

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} = \frac{A(t)e^{\lambda S(t)}}{\lambda S'(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{A(t)}{\lambda S'(t)} \right)' e^{\lambda S(t)} dt.$$

Последовательное интегрирование по частям даст следующие члены разложения по степеням  $1/\lambda$ . Отсюда, когда  $S(a) > S(b), S'(t) \neq 0$ , получим оценку

$$F \approx -\frac{A(a)e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)}. \tag{12.3}$$

Получилась величина  $\sim 1/\lambda$ , что соответствует приведенным качественным рассуждениям.

Для случая 2° заменим функцию  $S(t)$  разложением (12.2), а амплитуду возьмем в точке  $t_0$ . Получится

$$F(\lambda) = A(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \lambda \left( S(t_0) + \frac{1}{2}S''(t_0)\tau^2 \right) d\tau,$$

где мы заменили обозначили  $t - t_0 = \tau$ , а пределы интегрирования по  $\tau$  распространили от  $-\infty$  до  $\infty$ . Так как  $S''(t_0) < 0$ , оценка свелась к известному интегралу Пуассона. Окончательно получим

$$F \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda S''(t_0)}} A(t_0) e^{\lambda S(t_0)}, \quad (12.4)$$

т.е. величину порядка  $1/\lambda^{1/2}$ , как и ожидали.

Пример 12.1. Интеграл

$$F(a) = \int_0^{\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{a}{x}\right) dx. \quad a \rightarrow +\infty$$

прямо не годится для применения полученных формул, потому что функция  $1/x$  стремится к бесконечности при  $x \rightarrow +0$ . Чтобы свести его к виду (12.1), изменим в  $\mu$  раз масштаб переменной  $x = \mu t$ ,  $dx = \mu dt$ . Тогда показатель экспоненты запишется как  $\lambda S = -\mu^2(t^2 + a/\mu^3 t)$ . Если выбрать  $\mu = (a/2)^{1/3}$  то выражение в круглой скобке станет фазовой функцией  $S(t) = -t^2 - 2/t$ , а  $\mu^2$  за скобкой — большим параметром  $\lambda = \mu^2$ . Остается лишь два раза продифференцировать  $S(t)$ , найти значения  $S(t)$  и ее второй производной в стационарной точке

$$S'(t) = -2t + \frac{2}{t^2} = 0 \Rightarrow t_0 = 1, \quad S(t_0) = -3, \quad S''(t_0) = -6$$

и получить из (12.4) оценку

$$F(a) \approx \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{-3\left(\frac{a}{2}\right)^{2/3}}.$$

Отметим, что даже при  $a = 0$ , когда интеграл равен  $F(0) = \sqrt{\pi}/2$ , асимптотическая формула дает приличную точность  $F(0) \approx \sqrt{\pi}/\sqrt{3}$ .

Пример 12.2. Гамма-функцию Эйлера

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} \xi^x e^{-\xi} d\xi, \quad x \rightarrow +\infty$$

можно свести к виду (12.1), если записать  $\xi^x = e^{x \ln \xi}$  и перейти к новой переменной  $\xi = xt$ . Тогда  $d\xi = x dt$ ,  $S(t) = -t + \ln t$ ,  $\lambda = x$ . Имеется одна стационарная точка  $t_0 = 1$ ,  $S(t_0) = S''(t_0) = -1$ . Из формулы (12.4) получаем асимптотику

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

которая при целых  $x$  известна как формула Стирлинга. Формула Стирлинга дает весьма точную оценку факториала  $n! = \Gamma(n+1)$ . Даже при  $x = 2$  получается  $2! \approx 1.919$ .

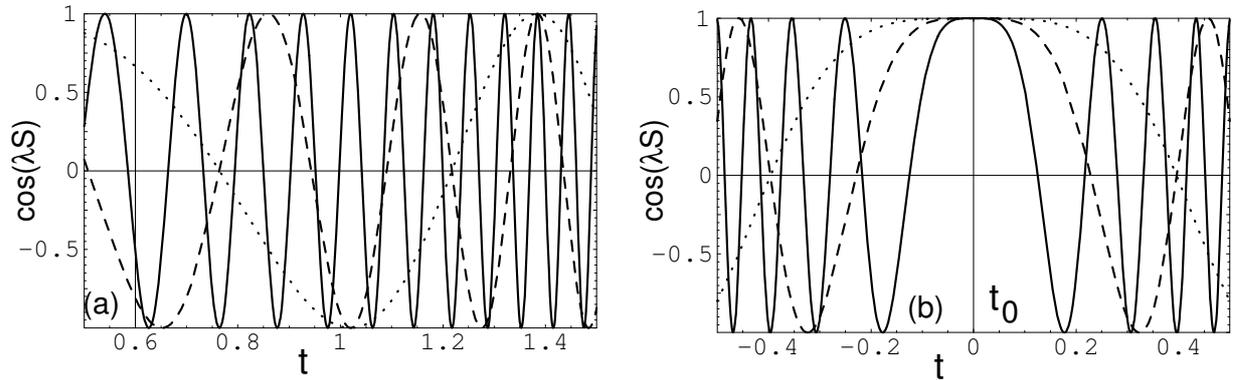


Рис. 12.2: (а) — случай 1°,  $S = t - 4t^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 1, 3, 10$  (точки, пунктир и сплошная линия, соответственно) вклад в интеграл дает все меньшая окрестность конечных точек  $a = 0.5, b = 1.5$ . При  $\lambda \rightarrow \infty$  остальные вклады взаимно компенсируются из-за осцилляций функции  $e^{i\lambda S(t)}$ . (б) — случай 2°,  $S = t^2$ . При увеличении параметра  $\lambda = 10, 30, 100$  вклад вносит все меньшая окрестность стационарной точки  $t_0 = 0$ . Остальные вклады знакопеременные и при  $\lambda \rightarrow \infty$  гасят друг друга.

### 12.3 Метод стационарной фазы

Асимптотика интеграла с чисто мнимой фазой

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t)e^{i\lambda S(t)} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (12.5)$$

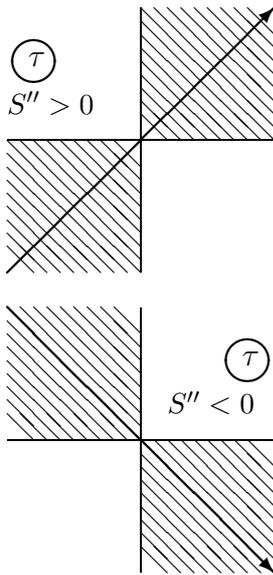
где  $A(t), S(t)$  снова действительные функции, также получается разной, в зависимости от наличия или отсутствия стационарной точки функции  $S(t)$  на интервале интегрирования  $(a, b)$ . Вещественная часть подынтегральной экспоненты для случаев 1° и 2° показана на рисунках 12.2. Аналогично предыдущему разделу, главный член асимптотического разложения получится в случае 1° порядка  $\lambda^{-1}$ , а в случае 2° —  $\lambda^{-1/2}$ .

В случае 1° оценку получим интегрированием по частям

$$F(\lambda) = \int_a^b A(t) \frac{de^{i\lambda S(t)}}{i\lambda S'(t)} \approx \frac{1}{i\lambda} \left[ \frac{A(b)e^{i\lambda S(b)}}{S'(b)} - \frac{A(a)e^{i\lambda S(a)}}{S'(a)} \right].$$

В случае 2° разлагаем в ряд (12.2) фазовую функцию, распространяем пределы интегрирования до бесконечности и сводим задачу к интегралу Френеля

$$F(\lambda) = A(t_0)e^{i\lambda S(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda S''(t_0)\tau^2/2} d\tau.$$



Сначала следует повернуть контур интегрирования заменой  $\tau = se^{i\phi}$ ,  $d\tau = e^{i\phi} ds$ , где  $\phi$  — угол поворота,  $s$  координата вдоль нового контура. Для сходимости при  $\lambda \rightarrow +\infty$  вещественная часть подынтегральной экспоненты  $e^{iS''\tau^2}$  должна убывать. Поэтому сектора сходимости, заштрихованные на рисунке, находятся в I и III четверти при  $S''(t_0) > 0$  или во II и IV четверти комплексной плоскости  $\tau$  при  $S''(t_0) < 0$ . Если повернуть контур на угол  $\phi = \pi/4$ ,  $S'' > 0$  или на угол  $\phi = -\pi/4$ ,  $S'' < 0$  (повернутый контур изображен на каждом рисунке стрелкой), то обратится в нуль мнимая часть экспоненты и вычисление сведется к интегралу Пуассона

$$\tau = se^{i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{i\pi/4},$$

$$\tau = se^{-i\pi/4} : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|S''|s^2/2} ds e^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''|}} e^{-i\pi/4}.$$

Оба случая можно записать единой формулой

$$F(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda|S''(t_0)|}} A(t_0) e^{i\lambda S(t_0) + i\frac{\pi}{4} \text{sgn} S''(t_0)}, \tag{12.6}$$

где  $\text{sgn} S''(t_0)$  означает знак второй производной в стационарной точке.

**Замечание 12.1.** Мы предполагали, что вторая производная отлична от нуля. Если она обращается в нуль, т.е.  $S''(t_0) = 0, S'''(t_0) = 0, \dots, S^{(n-1)}(t_0) = 0, S^{(n)}(t_0) \neq 0$ , то оценка делается аналогично. Интеграл не сводится к интегралу Пуассона, но выражается через  $\Gamma$ -функцию, а зависимость от параметра получается  $F \sim \lambda^{-1/n}$ . Если стационарных точек несколько и они не бесконечно близко друг от друга, асимптотика интеграла дается суммой по стационарным точкам.

**Пример 12.3 (Функция Бесселя).** Найдем асимптотику при  $x \rightarrow \infty$ , пользуясь интегральным представлением

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin \varphi - im\varphi} d\varphi.$$

Раз в условии не оговорено противное, считаем, что индекс  $m$  зафиксирован. Тогда фазовая функция —  $S(\varphi) = \sin \varphi$ . Отсюда

$$S' = \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad S(\pm\pi/2) = \pm 1, \quad S''(\pm\pi/2) = \mp 1.$$

Достаточно оценить методом стационарной фазы по формуле (12.6) вклад одной из точек, например,  $\varphi = +\pi/2$ , тогда вклад другой точки — комплексно сопряженная величина

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{ix - im\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4}} + \text{к.с.} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Пример 12.4 (Функция Эйри). Воспользуемся интегральным представлением

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 + xt)} dt, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Масштабным преобразованием  $t = \mu\tau$ ,  $dt = \mu d\tau$  «остановим» стационарную точку:  $\lambda S = \mu^3(\tau^3/3 - |x|\tau/\mu^2)$  будет содержать в скобке функцию  $\tau$ , не зависящую от параметра  $\mu$ , когда  $\mu = |x|^{1/2}$ . Отсюда  $S(\tau) = \tau^3/3 - \tau$ ,  $\lambda = \mu^3$ . Дифференцируя фазовую функцию, найдем  $S' = \tau^2 - 1 = 0 \Rightarrow \tau_{1,2} = \pm 1$ , откуда  $S(\pm 1) = \mp 2/3$ ,  $S''(\pm 1) = \pm 2$ . Вклад точек тоже оказывается комплексно сопряженными

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow -\infty.$$

Функция Эйри при  $x \rightarrow -\infty$  представляет собой волновую функцию частицы в однородном поле в классически доступной области. Поэтому естественно, что асимптотика получилась осциллирующей с уменьшающейся длиной волны де Бройля по мере увеличения  $|x|$ .

# ЛЕКЦИЯ 13

## Метод перевала

### 13.1 Седловая точка

Метод перевала (седловой точки, наискорейшего спуска) предназначен для получения асимптотики интеграла

$$F(\lambda) = \int_{\gamma} e^{\lambda S(z)} dz, \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (13.1)$$

где  $S$  — функция, аналитическая в окрестности кривой  $\gamma$ ,  $\lambda$  — большой вещественный параметр.

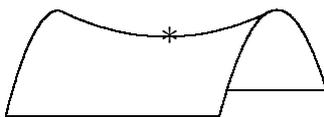
Основная идея метода заключается в такой деформации контура  $\gamma$ , чтобы подынтегральная функция была велика по абсолютной величине на как можно более коротком участке. Одновременно при перемещении по такому же контуру подынтегральная функция не испытывает осцилляций.

Действительно, разобьем фазовую функцию на действительную и мнимую части  $S(z) = u(z) + iv(z)$ ,  $z = x + iy$ . Поскольку  $S(z)$  — аналитическая функция, для  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  выполняются соотношения Коши — Римана

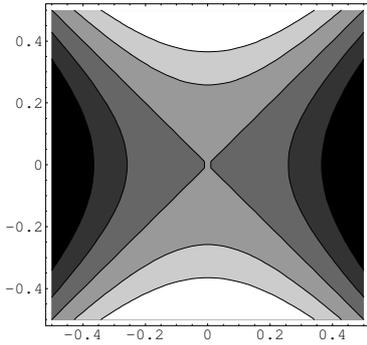
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$



В инвариантном виде это означает  $\Delta u = \Delta v = \nabla u \cdot \nabla v = 0$ . Отсюда получается два вывода. Во-первых, если в стационарной точке  $z_0$ , где  $S'(z_0) = 0$ , одна из вторых частных производных положительна, например,  $u_{xx} > 0$ , то вторая — отрицательна,  $u_{yy} < 0$ . Значит стационарная точка представляет собой *седло* или *точку перевала*, обозначенную здесь знаком \*.



На рисунке изображены линии уровня вещественной части  $u = u(x, y)$  в окрестности стационарной точки  $z_0 = 0$  для простейшего случая, когда разложение фазовой функции начинается с квадратичных членов

$$S(z) \approx S(z_0) + \frac{1}{2}S''(z_0)(z - z_0)^2. \quad (13.2)$$

Светлый тон означает более высокие точки, т.е. большие значения  $u$ , а темные области — «ямы». Тогда имеется два направления, в которых функция убывает, и два направления, в которых функция возрастает. Вещественная часть  $u(x, y)$  быстрее всего убывает вдоль *линии наискорейшего спуска*. Вдоль этой же линии мнимая часть  $v(x, y)$  постоянна, а значит подинтегральная функция не осциллирует. Это второй вывод из соотношений Коши — Римана, основанный на ортогональности градиентов функций  $v$  и  $u$ . На рисунке направления наискорейшего спуска проходят по действительным полуосям.

## 13.2 Топологический и аналитический этапы

Задача оценки интеграла (13.1) сводится к двум шагам.

- 1° **ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Деформация контура в проходящий через седловую точку в направлениях наискорейшего спуска.
- 2° **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Оценка интеграла по разложению фазовой функции в малой окрестности точки перевала.

*Топологическая часть* — самая сложная. Чтобы понять, что за контур нам нужен, оценим абсолютную величину функции  $F(\lambda)$ :

$$|e^{\lambda S}| = e^{\lambda u(z)} \leq \max_{z \in \gamma} e^{\lambda u(z)}, \quad (13.3)$$

где максимум берется по всем  $z$ , лежащим на кривой  $\gamma$ . Чтобы оценка была как можно точнее, станем варьировать контур  $\gamma$ , не выходя за множество  $\Gamma$  допустимых контуров. *Допустимыми (эквивалентными)* будем называть те контуры, на которых равны интегралы. Значит при деформации контура мы не должны выходить за область аналитичности функции  $S(z)$ , т.е. пересекать полюсы. Если контур не замкнутый, а его концы лежат в конечных точках, надо закрепить концы контура. Для несобственного интеграла бесконечно удаленные концы контура должны оставаться в секторах сходимости.

Будем менять форму контура, пока максимум в правой части (13.3) не перестанет уменьшаться. Самая точная оценка получится, если в качестве контура  $\gamma = \gamma^*$  выбрать тот, на котором достигается минимум

$$|\exp \lambda S| \leq \min_{\gamma \in \Gamma} \max_{z \in \gamma} \exp \lambda u(z). \quad (13.4)$$

Такой контур называется *минимаксным*. Возможность его выбора в общем случае не доказана. Однако, в простых задачах, например, при вычислении асимптотик многих специальных функций, найти минимаксный контур удается и полученные оценки интеграла оказываются весьма точными. В примерах, рассмотренных ниже, минимаксный контур состоит из *линий Стокса* — таких кривых, вдоль которых мнимая часть  $v$  функции  $S(z)$  постоянна, а следовательно, действительная часть  $u$  меняется быстрее всего. Совокупность линий Стокса, проходящих через критические точки фазовой функции, будем называть ее *графом Стокса*. Граф сделаем ориентированным, указывая на линиях Стокса стрелками направление убывания функции  $u$ .

*Аналитическая часть* предполагает локальное исследование функции, поэтому второй шаг сделать проще. Интеграл оценивают, сводя его к эталонному в малой окрестности стационарной точки. Выполним такую оценку в простейшем случае (13.2), когда вторая производная отлична от нуля. Для этого выделим модули и аргументы

$$S''(z_0) = \rho e^{i\theta}, \quad z - z_0 = s e^{i\phi}.$$

Отсюда

$$S(z) - S(z_0) = \frac{1}{2} \rho s^2 e^{i\theta + 2i\phi}.$$

Теперь найдем те направления, вдоль которых разность  $S(z) - S(z_0)$  быстрее всего убывает с увеличением  $s$ , т.е. равна  $-\rho s^2/2$ . Чтобы так получилось, комплексная экспонента должна обратиться в  $-1$ ,  $\cos(\theta + 2\phi) = -1$ , откуда

$$\phi_{1,2} = \frac{\pm\pi - \theta}{2}. \quad (13.5)$$

В этом же направлении мнимая часть обращается в нуль,  $\sin(\theta + 2\phi) = 0$ ,

$$\operatorname{Im}(S(z) - S(z_0)) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} S(z) = \operatorname{Im} S(z_0).$$

Поэтому при интегрировании исчезают осцилляции подынтегральной функции. Теперь интеграл сводится к типу Лапласа

$$F(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{\lambda S(z_0) + i\phi}. \quad (13.6)$$

В качестве  $\phi$  надо выбрать то из двух направлений  $\phi_{1,2}$  (13.5), вдоль которого мы интегрируем.

**Замечание 13.1.** В исходном интеграле (13.1) мы пропустили амплитудную функцию  $A(z)$ . Если такая функция имеется, оценка интеграла умножится на ее значение в стационарной точке  $z_0$ . Функция  $A(z)$  предполагается аналитической и при деформации контура надо следить, чтобы не выйти за область аналитичности амплитуды. Существенным может оказаться также вклад концов контура, которые вычисляются интегрированием по частям, как и в случаях I, рассмотренных в предыдущей лекции.

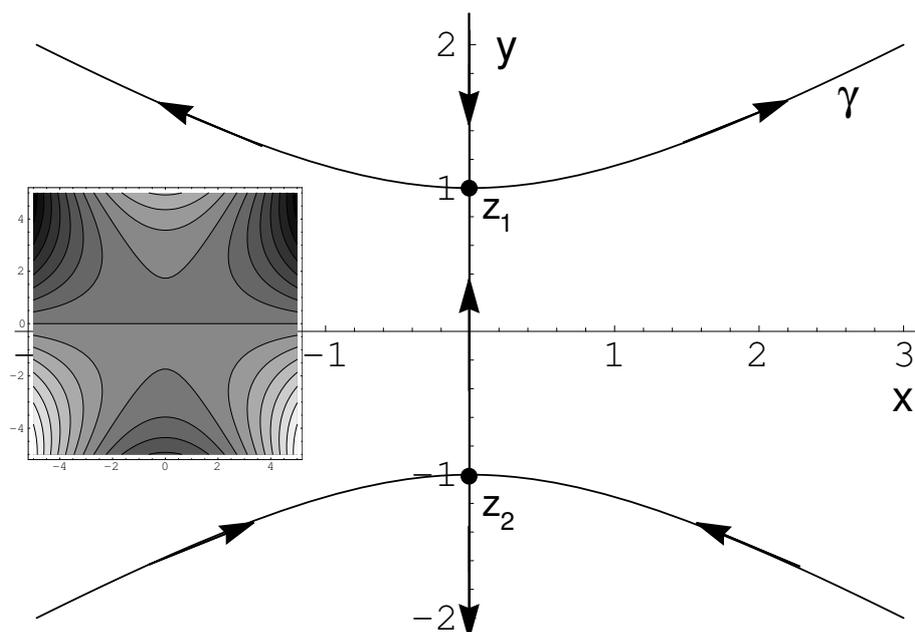


Рис. 13.1: Линии Стокса функции  $S = i(z^3/3 + z)$ . Стрелками показано направление уменьшения  $u(x, y)$ . На врезке показаны линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ . Высокие области светлее, низкие — темнее.

*Замечание 13.2.* Если в задаче несколько неподвижных изолированных стационарных точек, через которые проходит минимаксный контур, оценка интеграла получается из (13.6) суммированием по всем таким точкам.

*Замечание 13.3.* Если функция  $S$  зависит от дополнительного параметра  $\mu$ , при изменении которого стационарные точки сливаются, а нам необходима равномерная по  $\mu$  оценка, то интеграл сводится к другому более сложному эталонному. Подробности см. в справочнике [47], где приведены и другие особые случаи: слияние стационарной точки с полюсом, концом контура интегрирования, точкой ветвления.

### 13.3 Примеры

Пример 13.1 (Функция Эйри при  $p \rightarrow +\infty$ ). Найдём асимптотику функции Эйри в классически запрещенной области

$$\text{Ai}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3+pt)} dt, \quad p \rightarrow +\infty.$$

Сначала «остановим» стационарную точку

$$t = p^{1/2} z, \quad dt = p^{1/2} dz, \quad S = i(z^3/3 + z), \quad \lambda = p^{3/2}.$$

Дифференцируя фазовую функцию, найдем

$$S' = i(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm i, \quad S(\pm i) = \mp \frac{2}{3}, \quad S''(\pm i) = \mp 2.$$

Чтобы понять, через какую точку пройдет минимаксный контур, построим те линии Стокса, которые проходят через стационарные точки, т.е. в которых  $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_{1,2})$ :

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left( \frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} + x + iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + x = 0.$$

Получится гипербола  $x^2/3 - y^2 = -1$  с асимптотами, наклоненными под углами  $\pm\pi/6$ , и прямая  $x = 0$ , рис. 13.1.

Теперь найдем секторы абсолютной сходимости интеграла. Для этого надо взять  $z = Re^{i\alpha}$  при  $R \rightarrow \infty$  и посмотреть, когда вещественная часть фазы отрицательна. Получается  $\alpha \in (0, \pi/3) \cup (2\pi/3, \pi) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)$ . Значит мы можем деформировать контур  $\gamma$ , проходящий по действительной оси, так, чтобы он проходил через точку  $z_1 = i$ . Контур, проходящий через вторую стационарную точку, не относится к множеству допустимых, поскольку при деформации контура его концы не должны выходить за секторы сходимости. Можно непрерывно преобразовать контур  $\gamma$  в верхнюю ветвь гиперболы, не выходя за область аналитичности подынтегральной функции. Такой контур и допустимый, и минимаксный.

Асимптотическая оценка получается из формулы (13.6), если выбрать из  $\phi_{1,2} = 0, \pi$  направление  $\phi = 0$ , в котором ведется интегрирование

$$\text{Ai}(p) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}p^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}p^{1/4}}. \quad (13.7)$$

Асимптотика получилась экспоненциально затухающей, как и должно быть для волновой функции частицы в классически запрещенной области.

Пример 13.2 (Функция Эйри при  $p \rightarrow -\infty$ ). Найдем методом перевала асимптотику функции Эйри

$$\text{Ai}(-p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t^3/3 - pt)} dt, \quad p \rightarrow +\infty,$$

ту же, что и в примере 12.4. После замены переменной  $t = p^{1/2}z$  фазовая функция  $S(z) = i(z^3/3 - z)$  получится с другим знаком перед  $z$ . Асимптотические ее свойства при  $|z| \rightarrow \infty$  определяются кубическим членом, поэтому секторы сходимости останутся теми же, что и в предыдущем примере. Найдем стационарные точки

$$S' = i(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1, \quad S(\pm 1) = \mp \frac{2}{3}i, \quad S''(\pm 1) = \pm 2i.$$

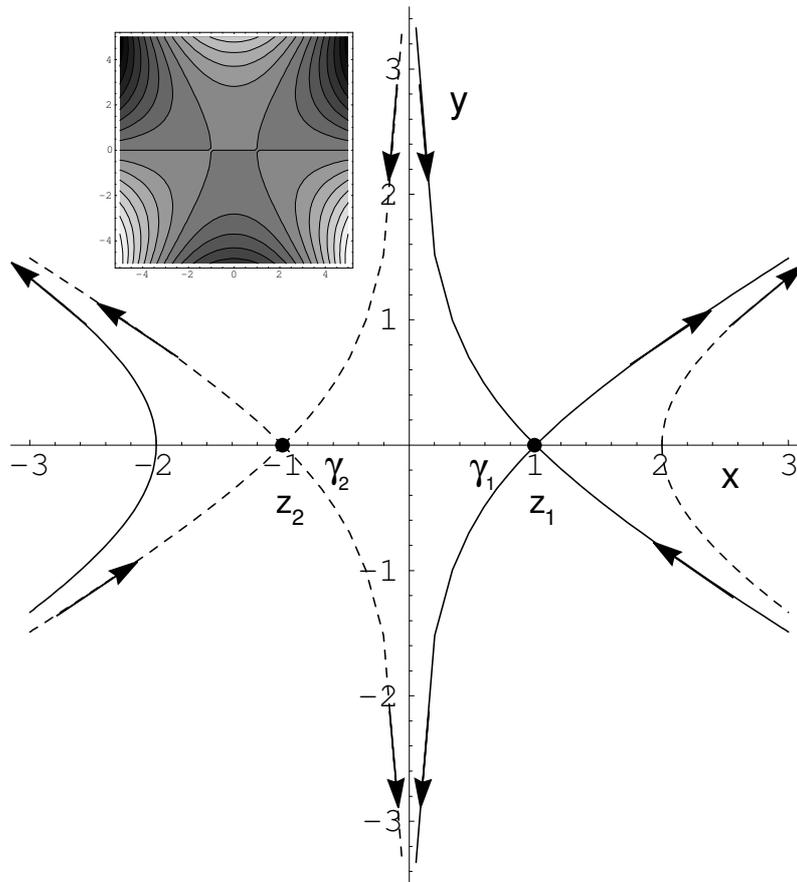


Рис. 13.2: Линии Стокса функции  $S = i(z^3/3 - z)$ :  $v(x, y) = -2/3$  (сплошные линии) или  $v(x, y) = +2/3$  (пунктир). Врезка — линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ . Чем светлее область, тем больше высота.

Построим граф Стокса  $\text{Im } S(z) = \text{Im } S(z_1)$  :

$$v(x, y) = \text{Im } S = \text{Im } i \left( \frac{x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3}{3} - x - iy \right) = \frac{x^3}{3} - xy^2 - x = -\frac{2}{3}.$$

Можно качественно построить кривые, если решить уравнение относительно

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3x} - 1 + \frac{x^2}{3}}.$$

На рисунке 13.2 изображены линии для  $v = \pm 2/3$ . Чтобы пройти по минимаксному контуру, надо серьезно деформировать исходный контур — действительную ось превратить в ветви  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ . Как и в методе стационарной фазы, точки перевала надо пройти под углами  $\phi = \pi/4$  при  $z_1 = 1$  и  $\phi = 3\pi/4$  при  $z_2 = -1$ . Получится та же осциллирующая асимптотика, что и в методе стационарной фазы:

$$\text{Ai}(-p) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi p^{1/4}}} \cos \left( \frac{2}{3} p^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (13.8)$$

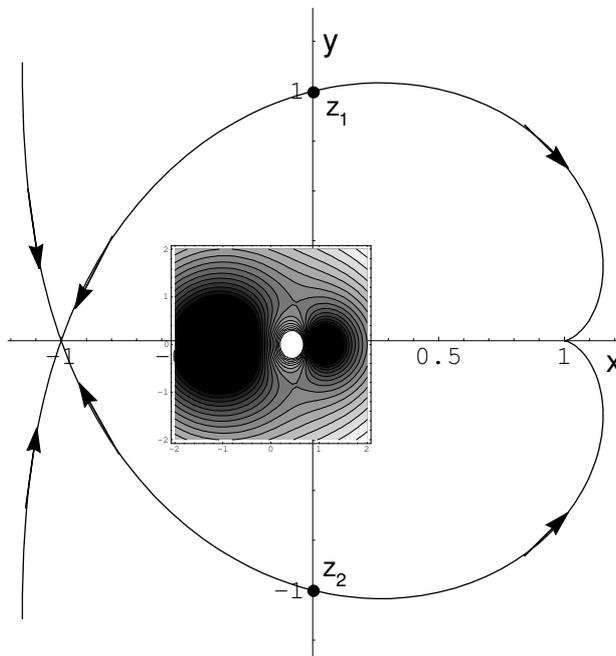


Рис. 13.3: Граф Стокса функции  $S = \ln(z^2 - 1) - \ln(z - \cos \theta)$ ,  $\theta = \pi/3$ . На врезке линии уровня  $u(x, y) = \text{const}$ .

Пример 13.3 (Полиномы Лежандра). Интегральное представление получим из формулы Родрига, сравнив ее с формулой для вычета в полюсе порядка  $l + 1$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{2^l} \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - \xi)^{l+1}}.$$

Контур  $\gamma$  обходит точку  $z = \xi \equiv \cos \theta$  в положительном направлении. Выберем амплитуду  $A(z) = (z - \xi)^{-1}$  и фазу

$$S(z) = \ln \frac{z^2 - 1}{z - \cos \theta}.$$

Пусть  $l \gg 1$  — большой параметр. Найдём стационарные точки

$$S' = \frac{2z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z - \cos \theta} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = e^{\pm i\theta},$$

$$S(e^{\pm i\theta}) = \ln 2e^{i\theta} = \ln 2 + i\theta, \quad S''(e^{\pm i\theta}) = \frac{e^{\mp i\theta}}{i \sin \theta}.$$

Значит значение аргумента  $\psi$  второй производной  $S''(z_1) = \rho e^{i\psi}$  равно  $\psi = -\theta - \pi/2$ . Отсюда  $\phi_1 = 3\pi/4 + \theta/2$ ,  $\phi_2 = -\pi/4 + \theta/2$ . Из графа Стокса на рис. 13.3 видно, что при интегрировании против часовой стрелки надо выбрать  $\phi_1$ . Получаем асимптотику

$$P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l |\sin \theta|}} \cos \left( l\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Нет никаких препятствий, мешающих деформировать исходный контур так, чтобы он прошел вдоль линий Стокса, потому что полюс  $z = \cos \theta$  остается внутри контура.

Найденная асимптотика справедлива при углах  $\theta$ , не слишком близких к  $0, \pi$ :

$$|\theta|, \left| \frac{\pi}{2} - \theta \right| \gg \frac{1}{l}.$$

Неравномерность разложения вблизи  $0$  и  $\pi$  связана с неприменимостью там предположений об изолированности критических точек и аналитичности амплитуды. При  $\theta \rightarrow 0$  или  $\pi$  точки  $z_{1,2} = e^{\pm i\theta}$  сближаются. Впрочем, особенность оказалась интегрируемой, если вычислять интеграл от квадрата полинома Лежандра по  $\sin \theta d\theta$ .

Для получения равномерного при  $\theta \rightarrow 0$  разложения можно воспользоваться угловым уравнением (9.2) при  $m = 0$ :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{du}{d\theta} = -l(l+1)u.$$

При малых углах заменяем  $\operatorname{ctg} \theta \approx \theta^{-1}$ , а  $l(l+1) \approx (l+1/2)^2$  при  $l \gg 1$ . Получается уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{1}{\theta} \frac{du}{d\theta} + \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 u = 0.$$

Решение дается функцией Бесселя нулевого порядка, которую при  $l\theta \gg 1$  можно заменить асимптотикой

$$u(\theta) = J_0((l+1/2)\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi l \theta}} \cos \left( (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4} \right).$$

В общей области применимости, при  $1/l \ll \theta \ll 1$ , обе асимптотики совпадают. Заметим, что сами предельные значения при  $\theta \rightarrow 0, \pi$  можно получить непосредственно из формулы Родрига:  $P_l(1) = 1$ ,  $P_l(-1) = (-1)^l$ .

# ЛЕКЦИЯ 14

## Метод усреднения

подавляющее большинство дифференциальных уравнений не допускают точного решения. Однако, если имеется малый параметр

$$\epsilon \ll 1,$$

а при  $\epsilon = 0$  уравнение решается, то можно найти приближенное решение в виде разложения по степеням параметра  $\epsilon$ . Методы построения таких разложений для различных задач называются *теорией возмущений*. Желательно, чтобы такое разложение было равномерным по параметру.

Обычный ряд Тейлора не всегда дает равномерное разложение, как видно из простейшего примера

$$\sin((1 + \epsilon)t) = \sin t + \epsilon t \cos t - \frac{(\epsilon t)^2}{2!} \sin t + \dots$$

Разложение хорошо работает на малых временах вплоть до  $t \sim 1$ , а при  $t \sim 1/\epsilon$  несколько первых членов разложения не дают даже приближенного представления о поведении функции. Одним из методов теории возмущений, который позволяет найти тенденцию изменения решения на больших временах, называется *методом усреднения*. Метод усреднения используется в небесной механике со времен Лагранжа и Лапласа для расчета эволюции планетных орбит. Однако до сих пор его обоснование нельзя считать законченным. Мы рассмотрим только простейшие случаи. Более общие результаты можно найти в книгах Арнольда [25, с.133], [48, с.365].

Пусть система *невозмущенных* уравнений  $\dot{x} = v(x)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  описывает финитное движение с характерным периодом  $T \sim 1$ . *Возмущенным* назовем уравнение

$$\dot{x} = v(x) + \epsilon v_1(x),$$

где  $\epsilon$  — малый параметр. Цель метода усреднения — найти разложение решения  $x(t)$ , справедливое на больших временах  $t \sim 1/\epsilon$

## 14.1 Усредненное уравнение

Перепишем невозмущенное уравнение в новых переменных  $I, \varphi$

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega(I). \quad (14.1)$$

Назовем  $I$  — *медленной* переменной, а  $\varphi$  — *угловой* переменной или фазой. Тогда возмущенное уравнение запишется как

$$\dot{I} = \epsilon g(I, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \varphi), \quad (14.2)$$

где функции  $f, g$  находятся по функции  $v_1(x)$ .

Вместо (14.2) рассмотрим *усредненное уравнение*

$$\dot{J} = \epsilon G(J), \quad G(J) = \frac{\int g(J, \varphi) d\varphi}{\int d\varphi}. \quad (14.3)$$

Метод усреднения предлагает рецепт — решить усредненное уравнение для функции  $J$  вместо возмущенных уравнений (14.2). Выигрыш очевиден, уравнений в системе (14.3) вдвое меньше, чем в исходной.

**Пример 14.1.** Пусть  $n = 1$ ,  $I, \varphi$  — скалярные функции,  $\omega$  — постоянная. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{I} = \epsilon(a + b \sin \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad I(0) = I_0, \quad \varphi(0) = 0.$$

Невозмущенное уравнение  $\dot{I} = 0, \dot{\varphi} = \omega$  дает  $I(t) = I_0, \varphi(t) = \omega t$ . В данном примере несложно найти и решение возмущенного уравнения

$$I(t) = \epsilon at + \epsilon b \int_0^t \sin(\omega t') dt' + I_0 = \epsilon at + \frac{\epsilon b}{\omega}(1 - \cos \omega t) + I_0.$$

**Усредненное уравнение**

$$\dot{J} = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + b \sin \varphi) d\varphi = \epsilon a$$

решается сразу. Его решение  $J(t) = I_0 + \epsilon at$  при тех же начальных условиях уходит от точного на величину порядка  $\epsilon$ , а значит правильно передает тенденцию на больших временах

$$|J(t) - I(t)| = \frac{\epsilon b}{\omega} |1 - \cos \omega t| \leq \text{const} \cdot \epsilon.$$

Проще всего вывести усредненное уравнение для одночастотной системы  $n = 1$ . При одинаковых начальных условиях изменение медленной переменной за период  $T = 2\pi/\omega$  равно

$$\Delta I = I(t) - I(0) = \epsilon T \cdot \frac{1}{T} \int_0^T g(I, \varphi(t)) dt = \epsilon T \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(I, \varphi) d\varphi = \epsilon T G(I).$$

Усреднение по времени заменяем усреднением по быстрой переменной  $\varphi : dt = d\varphi/\dot{\varphi} = d\varphi/\omega$  и переобозначим  $I \rightarrow J$ . Медленная эволюция  $J$  за много периодов описывается разностным уравнением

$$\frac{\Delta J}{\Delta t} = \epsilon G(J),$$

которое называется *стробоскопическим*. Приближенно заменяя отношение конечных разностей производной, получим усредненное дифференциальное уравнение (14.3).

Самое тонкое место здесь замена усреднения по времени усреднением по всем значениям угловой переменной  $\varphi$ . Наш вывод относится к одночастотной системе, в которой имеется всего  $n = 1$  угловая переменная  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При  $n > 1$  уравнения (14.1), (14.2), (14.3) пишутся так же, как в одночастотном случае, но под переменными  $I, \varphi$  понимаются векторы  $I = (I_1, \dots, I_n)$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . Частота и угловая переменная тоже векторы  $\omega = (\omega_1(I), \dots, \omega_n(I))$ ,  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . При  $n = 2$  движение в пространстве угловых переменных  $(\varphi_1, \varphi_2)$  происходит по поверхности тора

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_2(0), \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.$$

При рациональном отношении частот  $\omega_1/\omega_2 = p/q$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  «намотка» замыкается и траектория движения не замечает всю поверхность тора. Значит заменять на усреднение по поверхности тора незаконно, по крайней мере при небольших значениях чисел  $p, q$ . Такие случаи называются *резонансами*. При больших  $p, q$  даже замкнутая траектория проходит практически через всю поверхность тора и можно пользоваться методом усреднения как приближением.

На рисунке 14.1 изображен тор с замкнутой траекторией. В левом верхнем углу изображена прямоугольная выкройка тора, стрелки на сторонах показывают, с какой ориентацией стороны склеиваются. Траектория движения  $AA$  тоже показана стрелкой. Точка  $A$  на траектории попала на две противоположных стороны прямоугольника, которые склеены. Траектория замкнута, она соответствует резонансу  $\omega_1/\omega_2 = 0/1$ , когда метод усреднения заведомо не работает.

**Пример 14.2.** Рассмотрим один пример двухчастотной системы, чтобы познакомиться с еще одним явлением *прохождением через резонанс*. Если имеется

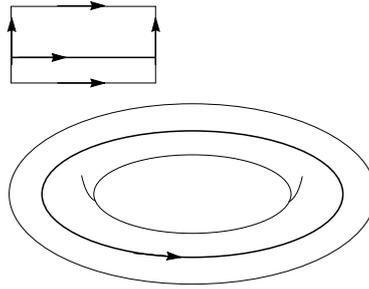


Рис. 14.1: Тор  $(\varphi_1, \varphi_2)$  с замкнутой намоткой: резонанс  $\omega_1/\omega_2 = 0/1$ .

малая нелинейность — зависимость частоты  $\omega$  от амплитуды  $I$ , то система за большое время  $t \sim 1/\epsilon$  выходит из резонанса.

$$\dot{\varphi}_1 = I_1, \quad \dot{\varphi}_2 = 1, \quad \dot{I}_1 = \epsilon, \quad \dot{I}_2 = \epsilon \cos \varphi_1.$$

Решение невозмущенного уравнения находится сразу

$$I_1 = I_1(0), \quad I_2 = I_2(0), \quad \varphi_1 = I_1(0)t + \varphi_1(0), \quad \varphi_2 = t + \varphi_2(0).$$

Отношение частот  $\omega_1/\omega_2 = I_1(0)$ , значит резонансы будут при начальных условиях  $I_1(0) = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Рассмотрим резонанс нулевого порядка  $I_1(0) = 0$  (изображенный на рисунке 14.1).

Усредненное уравнение

$$\dot{J}_1 = \epsilon, \quad \dot{J}_2 = 0$$

имеет решение  $J_1 = \epsilon t$ ,  $J_2 = \text{const}$ . Чтобы проверить, насколько велика ошибка решения усредненного уравнения, найдем точное решение и проверим, сохраняется ли величина  $I_2$ . Обращаясь к возмущенному уравнению, получим

$$\begin{aligned} I_1 = \epsilon t, \quad \varphi_1 = \epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) &\Rightarrow \Delta I_2 = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \epsilon \frac{t^2}{2} + \varphi_1(0) \right) dt = \\ &= \sqrt{\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( \frac{\xi^2}{2} + \varphi_1(0) \right) d\xi = \sqrt{\pi\epsilon} (\cos \varphi_1(0) - \sin \varphi_1(0)). \end{aligned}$$

Значит уход переменной  $I_2$  от значения  $J_2 = \text{const}$ , предсказанного методом усреднения, не так уж и велик

$$|J_2 - I_2| \leq \text{const} \cdot \sqrt{\epsilon}.$$

Оценка получилась не  $\sim \epsilon$ , как в одночастотной системе, но по крайней мере  $\epsilon^{1/2} \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . В многочастотном случае погрешность метода усреднения может увеличиться.

## 14.2 Метод Боголюбова — Крылова

Остался открытым вопрос, как найти переменные  $I, \varphi$  в конкретной задаче. Рассмотрим один из методов, приспособленный к задаче о слабо нелинейном осцилляторе

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon \omega_0^2 F(x, \dot{x}),$$

где  $F$  - функция, зависящая от координаты и скорости (возможно, еще и от времени как параметра), а  $\epsilon$  — малый параметр. Перейдем к безразмерному времени  $t \rightarrow \omega_0 t$ , получим безразмерное уравнение

$$\ddot{x} + x = \epsilon F(x, \dot{x}).$$

Введем также вспомогательную комплексную переменную  $z = x + i\dot{x}$ , положение невозмущенного осциллятора на фазовой плоскости, тогда

$$\dot{z} = \dot{x} + i\ddot{x} = \dot{x} + i(-x + \epsilon F) = -i(x + i\dot{x}) + i\epsilon F = -iz + i\epsilon F.$$

Если теперь перейти к аргументу и модулю  $z = Ie^{i\varphi}$  и разделить действительную и мнимую части, то уравнение осциллятора сводится к виду (14.2)

$$\dot{I} = \epsilon F \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = -1 + \epsilon \frac{F}{I} \cos \varphi. \quad (14.4)$$

Усредненное уравнение (14.3) получится с функцией  $G(J)$ , которая дается интегралом

$$\dot{J} = \epsilon G(J), \quad G(J) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(J \cos \varphi, J \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = \langle F(J \cos \varphi, J \sin \varphi) \sin \varphi \rangle, \quad (14.5)$$

где треугольные скобки означают усреднение по  $\varphi$ . В усредненное уравнение вошла фурье-компонента возмущающей силы на частоте невозмущенных колебаний.

## 14.3 Примеры

**Пример 14.3 (Резонанс).** Малая внешняя сила раскачивает осциллятор на его собственной частоте  $F(x, \dot{x}) = \cos t$ . Невозмущенная угловая переменная (фаза осциллятора) находится из уравнения (14.4):  $\varphi(t) = -t + \varphi_0$ , где  $\varphi_0$  — начальная фаза. Отсюда находим

$$G(J) = \langle \cos(\varphi_0 - \varphi) \sin \varphi \rangle = \langle (\cos \varphi_0 \cos \varphi + \sin \varphi_0 \sin \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} \sin \varphi_0.$$

Усредненное уравнение  $\dot{J} = \epsilon \sin \varphi_0 / 2$  решается:  $J(t) = J(0) + \epsilon t \sin \varphi_0 / 2$ . Медленная переменная  $J$ , амплитуда колебаний, линейно растет со временем, когда начальная фаза  $\varphi_0 \neq 0, \pi$ .

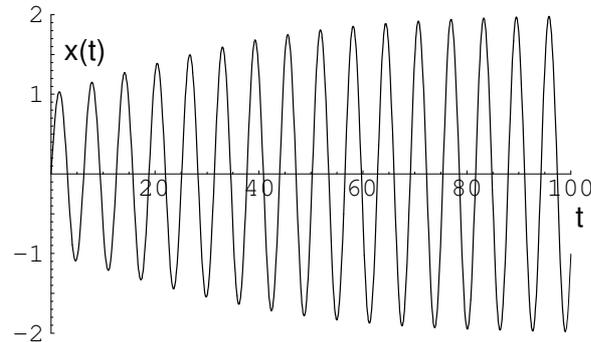


Рис. 14.2: Выход генератора Ван дер Поля на автоколебательный режим:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1, \epsilon = 0.05$ .

Пример 14.4 (*Параметрический резонанс*). Уравнение параметрического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + \epsilon \sin \Omega t) x = 0$$

при переходе к безразмерному быстрому времени дает  $F(x, \dot{x}) = x \sin \Omega t / \omega_0$ . Для примера рассмотрим резонанс на двойной частоте  $\Omega = 2\omega_0$ , тогда

$$\begin{aligned} G(J) &= \langle J \cos \varphi \sin 2(\varphi - \varphi_0) \sin \varphi \rangle = \\ &= J \langle \cos \varphi \sin \varphi (\sin 2\varphi_0 \cos 2\varphi - \cos 2\varphi_0 \sin 2\varphi) \rangle = -\frac{1}{4} J \cos 2\varphi_0; \\ \dot{J} &= \frac{\epsilon \cos 2\varphi_0}{4} J \Rightarrow J = J(0)e^{\nu t}, \quad \nu = \frac{\epsilon}{4} \cos 2\varphi_0. \end{aligned}$$

Если начальная фаза  $|\varphi_0| < \pi/4$ , то инкремент положителен  $\nu > 0$  и возникает параметрическая неустойчивость. Если включить в уравнение малое затухание  $\gamma \sim \epsilon$ ,  $F \rightarrow F - 2\gamma\dot{x}$ , усредненное уравнение тоже получится с затуханием  $\dot{J} = (\nu - \gamma)J$ . Учет трения приведет в появлению порога: параметрическая неустойчивость раскачивается при  $\nu > \gamma$ .

Пример 14.5 (*Уравнение Ван дер Поля*). Уравнение

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

описывает генератор — усилитель с положительной обратной связью, который может переходить в режим самовозбуждения. Соответствующая функция  $F = \dot{x}(1 - x^2)$ , тогда из (14.5) найдем

$$G(J) = \langle J \sin \varphi (1 - J^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} J - \frac{1}{8} J^3 \Rightarrow \dot{J} = \frac{\epsilon}{8} J(4 - J^2).$$

Усредненное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными решается, но для наших целей достаточно исследовать его на устойчивость, посмотрев изменение знака  $\dot{J}$  в стационарных точках. Получается, что  $J = 0$  —

неустойчивое решение, а  $J = 2$  — устойчивое (режим автоколебаний). В исходных переменных уравнение Ван дер Поля описывает предельный цикл электронного генератора или одночастотного лазера, или, другими словами, выход на автоколебательный режим, рис. 14.2.

# ЛЕКЦИЯ 15

## Явление Стокса

Рассмотрим еще одно применение асимптотических методов — квазиклассическое приближение. Если рассматривать его в комплексной плоскости, то построение равномерного разложения становится непростой задачей. Ниже рассмотрено несколько примеров, поясняющих, как строить равномерные разложения. Более подробное изложение правил обхода простой точки поворота и решения задачи о подбарьерном прохождении можно найти в конспекте [49]. Другие примеры из квантовой механики приведены в учебнике [50]. Общий математический подход с полной классификацией матриц перехода изложен в книге [51], примеры из теории специальных функций см. в [42].

### 15.1 Квазиклассическое приближение

Одномерное уравнение Шредингера

$$\psi'' + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) \quad (15.1)$$

для частицы с энергией  $E$  в потенциале  $U(x)$  чаще всего не решается точно, но можно построить асимптотическое разложение решения при  $k \rightarrow \infty$ . Вместо

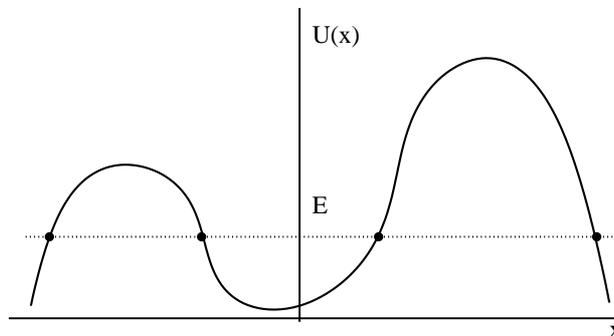


Рис. 15.1: Потенциальная энергия  $U$  как функция координаты  $x$ .

больших  $k$  можно формально также рассматривать малые  $\hbar \rightarrow 0$ , поэтому полученное разложение называется *квазиклассическим приближением*. Разложение, особенно его старшие порядки, удобнее всего строить, если ввести новую неизвестную функцию  $w(x) = \psi'/\psi$ . Дифференцируя  $w$ , получаем из (15.1) уравнение Рикатти

$$w' + k^2(x) + w^2 = 0. \quad (15.2)$$

Ищем теперь решение в виде ряда по степеням  $1/k$ :

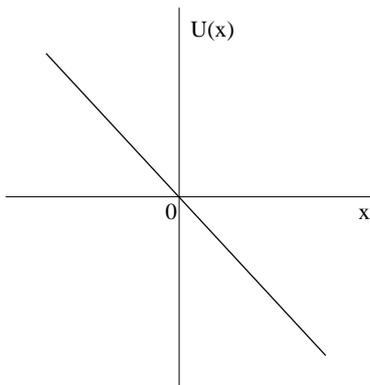
$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

где  $w_0 \sim k$ ,  $w_1 \sim 1$ ,  $w_2 \sim 1/k$ , и т.д. Подставляя ряд в (15.2) и приравнивая члены равного порядка, найдем последовательно  $w_0 = \pm ik$ ,  $w_1 = k'/2k$  и т.д. Остальными членами можно пренебречь, если  $k'/k \ll k$ , т.е. длина волны де Бройля  $\lambda = 2\pi/k$  медленно меняется с координатой  $d\lambda/dk \ll 1$ . Фундаментальная система решений получится интегрированием

$$\psi_{\pm} = \frac{e^{\pm iS}}{\sqrt{k}}, \quad S = \int k(x) dx. \quad (15.3)$$

Условие применимости нарушается в окрестности классических *точек поворота*, где  $k^2 = 0$ , т.е. потенциальная энергия равна полной. На рисунке 15.1 показан пример потенциальной кривой, а уровень энергии изображен точками. Всего в примере 4 классических точки поворота, три классически доступные ( $E > U$ ) и две классически запрещенные области ( $E < U$ ). Чтобы гладко сшить решения в разрешенных и запрещенных областях, точку поворота обходят в комплексной плоскости. Надо выбрать контур обхода достаточно далеко от точки поворота, чтобы выполнялось квазиклассическое приближение, но достаточно близко, чтобы можно было пользоваться линейным членом разложения потенциала в окрестности точки поворота [4]. Для обхода точки поворота пользуются методом эталонных уравнений, простейшее из которых мы сейчас рассмотрим.

## 15.2 Простая точка поворота



*Простой точкой поворота*  $x_0$  (или точкой поворота порядка  $q = 1$ ) называется такая, в которой  $k(x_0) = 0$ ,  $U'(x_0) \neq 0$ . Если разложить  $k^2(x) \approx -2mU'(x_0)(x - x_0)/\hbar^2$ , отсчитывать координату  $x$  от точки поворота, а вместо  $x$  писать комплексную переменную  $z$ , уравнение Шредингера в окрестности простой точки поворота сведется к эталонному уравнению

$$\psi'' + cz\psi = 0, \quad (15.4)$$

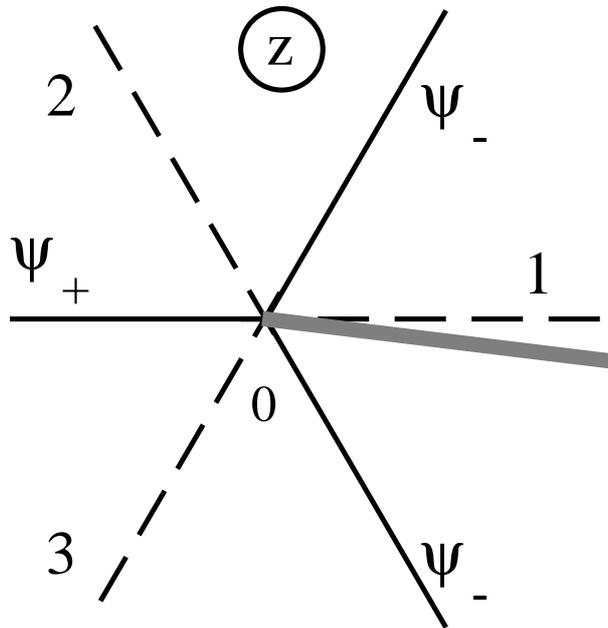


Рис. 15.2: Стоксовы (пунктир) и антистоксовы (сплошные) линии в окрестности простой точки поворота.

где  $c$  постоянная. Точное решение уравнения выражается через функцию Эйри. Нас, однако, интересует приближенное решение

$$\psi = A\psi_+ + B\psi_-, \quad \psi_{\pm} = z^{-1/4}e^{\pm iS}, \quad S = Cz^{3/2},$$

где  $C = 2\sqrt{c}/3$ ,  $A, B$  — постоянные. Обратим внимание, что в приближенном решении получились дробные степени  $z$ . Чтобы использовать приближение, надо разрезать комплексную плоскость по лучу  $(0, \infty)$ , тогда как точное решение является аналитической функцией. Разрез проведем для определенности чуть ниже положительной действительной полуоси и изобразим на рис. 15.2 серой полосой.

Нарисуем также линии, на которых обращается в нуль вещественная и мнимая части фазы  $S$ . Будем называть здесь *стоксовыми линиями* такие, на которых  $\text{Im } S = 0$ , и изображать их пунктиром. *Антистоксовыми линиями* назовем такие кривые, на которых  $\text{Re } S = 0$ , и изобразим их сплошными линиями. На стоксовых линиях оба решения  $\psi_{\pm}$  осциллируют, как в классически разрешенной области, и имеют один и тот же порядок величины. На антистоксовых линиях одно из решений растет при увеличении  $|z|$  (назовем его *доминантным*), а другое экспоненциально убывает (*субдоминантное*). Аналогично, решение состоит из двух действительных экспонент в классически запрещенной области, причем одной из них мы обязаны пренебречь, потому что учет экспоненциально малых членов в асимптотическом разложении был бы превышением точности.

Только на линиях Стокса мы должны учитывать оба решения.

В нашем случае, если обозначить  $\rho = |z|$ ,  $\theta = \arg z$ , получится

$$S = C\rho^{3/2}e^{3i\theta/2} = C\rho^{3/2} \left( \cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right).$$

Три стоксовы линии пройдут при  $\theta = 0, \pm 2\pi/3$ , а три антистоксовы — при  $\theta = \pm \pi/3, \pi$ . В общем случае из точки поворота порядка  $q$  ( $U' = U'' = \dots = 0, U^{(q)} \neq 0$ ) выходит  $q + 2$  линии Стокса, а углы между соседними линиями составляют  $2\pi/(q + 2)$ . Линии Стокса могут начинаться и кончаться только в точках поворота или на бесконечности. Совокупность всех точек поворота и линий Стокса назовем *графом Стокса*. Антистоксовы линии пройдут между стоксовыми. Если граф Стокса известен, антистоксовы линии всегда можно дорисовать.

В каждом секторе между линиями Стокса при  $\rho \rightarrow \infty$  доминирует свое решение: в секторе 1–2  $|\psi_-| \gg |\psi_+|$ , в секторе, наоборот, 2–3  $|\psi_+| \gg |\psi_-|$ , в секторе снова 3–1  $|\psi_-| \gg |\psi_+|$ . На рисунке 15.2 доминантное решение подписано в середине каждого сектора возле антистоксовых линий. Если мы поступим по правилам и отбросим субдоминантные решения, разложение получится неравномерным по аргументу  $\theta$ . Попробуем сделать иначе, удержим экспоненциально малое решение, которое не испортит асимптотического разложения в своем секторе. Зато при этом решение можно будет продолжить в соседний сектор, где субдоминантное решение становится доминантным. Впрочем, продолжить можно не далее, чем до ближайшей антистоксовой линии в середине следующего сектора, где оба решения одного порядка, удержанное решение перестанет быть малым и приведет к ошибке. Чтобы можно было продолжить решение дальше в смежный сектор, надо после пересечения линии Стокса выбрать другую линейную комбинацию фундаментальных решений. Коэффициенты разложения в различных секторах связаны линейным преобразованием.

Ищем решение в секторе 1–2 в виде  $\psi = A_1\psi_+ + B_1\psi_-$ , в секторе 2–3  $\psi = A_2\psi_+ + B_2\psi_-$ , а в секторе 3–1  $\psi = A_3\psi_+ + B_3\psi_-$ . При переходе из сектора в следующий сектор коэффициенты умножаются на *матрицу перехода*

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \Omega_{21} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \Omega_{32} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \Omega_{13} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

### Свойства матрицы перехода

1. Коэффициент при доминантном решении сохраняется.
2. Если бы доминантного решения не было, сохранялся бы коэффициент при субдоминантном.
3. К коэффициенту при субдоминантном решении добавляется коэффициент при доминантном, умноженный на константу.

Свойства 1, 2 непосредственно следуют из нашего рассмотрения, а свойство 3 из 1, 2. Из свойств можно получить вид матрицы перехода. В частности,  $B_2 = B_1$  (по свойству 1). Коэффициент  $A_2$  в секторе 2–3 дается линейной комбинацией  $A_2 = A_1 + \alpha B_1$ , потому что в первом секторе доминирует решение  $\psi_-$ , а значит коэффициент  $A_1$  при субдоминантном решении сохранялся бы при  $B_1 = 0$  (по свойству 2). Скачок коэффициентов на линиях Стокса называется *явлением Стокса*, а неопределенный пока коэффициент  $\alpha$  — *константой Стокса*.

В соответствии со свойствами матрицы перехода имеют вид

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{13} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15.5)$$

При полном обходе точки поворота мы пересечем разрез. Вычислим скачок на разрезе при переходе с нижнего берега на верхний. Вместо пересечения разреза можно изменить аргумент числа  $z \rightarrow ze^{-2\pi i}$ , тогда множитель перед экспонентами умножится на  $-i$ :  $z^{1/4} \rightarrow z^{1/4}e^{-\pi i/2}$ . Показатели экспонент сменяют знаки:  $z^{3/2} \rightarrow z^{3/2}e^{3\pi i} = -z^{3/2}$ . Тогда после полного обхода в положительном направлении решения перейдут друг в друга с точностью до множителя  $i$

$$\psi_+ \rightarrow i\psi_-, \quad \psi_- \rightarrow i\psi_+.$$

Значит произведение всех трех матриц перехода должно быть равно

$$\Omega_{13}\Omega_{32}\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

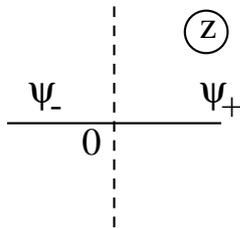
Перемножая матрицы (15.5), получим систему 4 уравнений на  $\alpha$ , из которой находится константа Стокса  $\alpha = i$ .

**Упражнение 15.1.** Показать, что в общем случае точки поворота порядка  $q$  константа Стокса равна

$$\alpha = 2i \cos \frac{\pi}{q+2}. \quad (15.6)$$

Рассмотрим два примера

1. Точка нулевого порядка ( $q = 0$ ):



$$\psi'' - \kappa^2 \psi = 0, \quad \kappa = \text{const} \neq 0.$$

Решения  $\psi_+ = e^{\kappa z}$ ,  $\psi_- = e^{-\kappa z}$ , линии Стокса — мнимая ось  $\text{Re } z = 0$ . Если оставлять только доминирующее решение, то в правой полуплоскости  $\psi \sim \psi_+$ , а в левой  $\psi \sim \psi_-$ .

Оба решения теряют применимость на мнимой оси. Для построения равномерного по  $\arg z$  решения надо найти константу Стокса. В левой полуплоскости обозначим  $\psi_1 = A_1\psi_+ + B_1\psi_-$ , в правой:  $\psi_2 = A_2\psi_+ + B_2\psi_-$ . Матрицы перехода

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

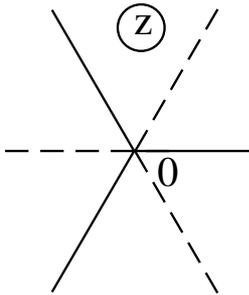
при перемножении должны давать единичную матрицу, откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 + \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0.$$

Из формулы (15.6) константа Стокса тоже получается нулевой.

2. Уравнение Эйри с точкой поворота первого порядка ( $q = 1$ ):

$$\psi'' - z\psi = 0.$$



Классически доступная область, где проходит линия Стокса, находится при  $z = x < 0$ , так что граф Стокса рис. 15.2 получится повернутым на  $180^\circ$ . Мы уже находили асимптотику функции Эйри (13.7) в классически запрещенной области

$$\text{Ai}(z) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}.$$

Вместо того, чтобы отдельно находить асимптотику в классически разрешенной области  $z = -|x| \rightarrow -\infty$ , мы теперь, зная константу Стокса, можем продолжить асимптотику (13.7) в соседний сектор

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2}e^{3\pi i/2}\right) + i\frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}e^{3\pi i/2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left[ \exp\left(\frac{2}{3}i|x|^{3/2}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}i|x|^{3/2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полученная асимптотика, естественно, совпадает с результатами метода перевала (13.8) и метода стационарной фазы из примера 12.4.

Отсюда следует правило перехода из классически запрещенной в разрешенную область: затухающая экспонента заменяется удвоенным косинусом

$$\frac{A}{2k^{1/2}} \exp\left(-\int k(x) dx\right) \longrightarrow \frac{A}{k^{1/2}} \cos\left(\int k(x) dx - \frac{\pi}{4}\right).$$

Когда ответ уже известен, можно сформулировать это правило и по-другому: следует обойти простую точку поворота сверху и снизу и сложить ответы. Действительно, при таких обходах  $z \rightarrow ze^{\pm i\pi}$ ,  $z^{3/2} \rightarrow z^{3/2}e^{\pm 3i\pi/2} = \mp iz^{3/2}$ , откуда

$$\text{Ai}(-x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left[ \exp\left(\frac{2}{3}i|x|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}i|x|^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

В квантовой механике встречаются задачи с различным числом точек поворота. Квазиклассическое приближение в комплексной плоскости строится, если сначала изобразить соответствующий граф Стокса. В следующем разделе мы рассмотрим две задачи с двумя точками поворота: о прохождении через барьер и об уровнях энергии в потенциальной яме.

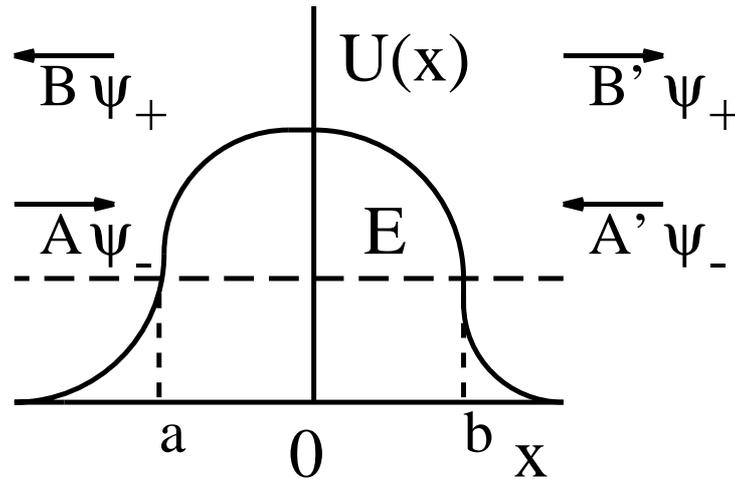


Рис. 15.3: Потенциальный барьер. Пунктирная горизонтальная линия обозначает полную энергию, стрелками показаны сходящаяся и расходящаяся волна.

### 15.3 Две простых точки поворота

1. В одномерной задаче рассеяния предполагается, что на бесконечности, где  $U \rightarrow 0$ . Фундаментальная система решений уравнения Шредингера

$$\psi_{\pm} = \frac{e^{\pm i \int k(x') dx'}}{\sqrt{k(x)}}$$

состоит из сходящейся волны  $\psi_{-} \rightarrow e^{-ik_0|x|}$  и расходящейся  $\psi_{+} \rightarrow e^{+ik_0|x|}$ ,  $k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ . На рисунке 15.3 показаны две точки поворота  $a, b$ . Слева от барьера  $\psi(x \rightarrow -\infty) = A\psi_{-} + B\psi_{+}$ , справа  $\psi(x \rightarrow +\infty) = A'\psi_{-} + B'\psi_{+}$ . Если волна падает слева, то  $A' = 0$ . Тогда коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $T$  определяются через отношение коэффициентов разложения волновой функции

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2, \quad T = \left| \frac{B'}{A} \right|^2.$$

Построение равномерного разложения начнем с графа Стокса. Для изображения качественной картины (рис. 15.1) достаточно симметричных соображений. Вблизи каждой точки поворота картина должна выглядеть, как при  $q = 1$ , т.е. три линии Стокса должны выходить под углом  $120^\circ$  друг к другу. Вдали, когда  $|z| \gg b - a$ , картина должна быть с четырьмя линиями Стокса под углом  $90^\circ$ , как от точки порядка  $q = 2$ . Базисные волновые функции для точки с  $q = 2$  имеют вид

$$\psi_{\pm} = z^{-1/2} e^{\pm iz^2}.$$

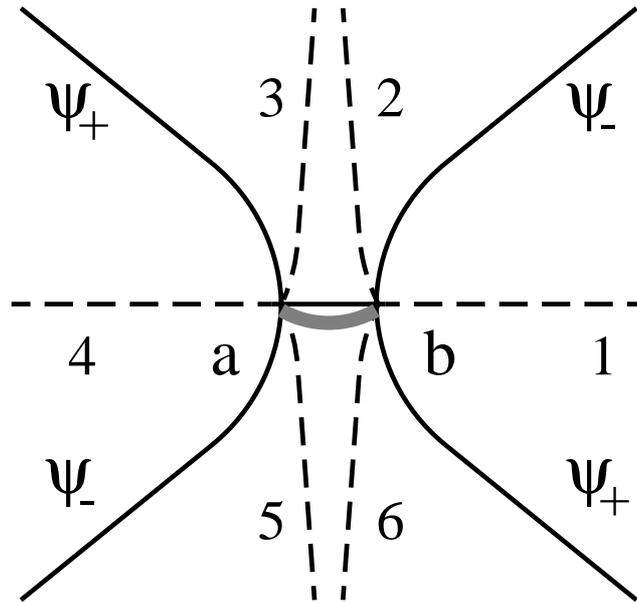


Рис. 15.4: Граф Стокса для задачи о прохождении через потенциальный барьер. Серой полосой обозначен разрез.

Стартуя с линии Стокса 1, обойдем разрез в положительном направлении. В секторе 1–2 доминирует решение  $\psi_-$ , поэтому

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В секторе 2–3 матрица перехода единичная, потому что, проходя этот сектор, мы не пересекаем антистоксову линию. Чтобы продолжить обход, надо сменить начало отсчета — перейти от точки  $b$  к точке  $a$ . Волновая функция умножится на экспоненту

$$\psi_{\pm} \rightarrow \psi_{\pm} \exp \left[ \pm i \int_b^a k(x') dx' \right] = \psi_{\pm} e^{\pm \Phi}, \quad \Phi = \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - E)} dx,$$

где  $\Phi$  — *фазовый интеграл*. Иногда и сам метод построения равномерной квазиклассической асимптотики называют методом фазовых интегралов. Значит, матрица перехода будет

$$\Omega_{32} = \begin{pmatrix} e^{\Phi} & 0 \\ 0 & e^{-\Phi} \end{pmatrix}.$$

В секторе 3–4 доминирует решение  $\psi_+$ . Поэтому матрица перехода

$$\Omega_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже обошли половину окружности и получили

$$\Omega_{41} = \Omega_{43}\Omega_{32}\Omega_{21} = \begin{pmatrix} e^\Phi & \alpha e^\Phi \\ \alpha e^\Phi & \alpha^2 e^\Phi + e^{-\Phi} \end{pmatrix}.$$

Чтобы замкнуть контур и вернуться на линию Стокса 1, надо возвести матрицу  $\Omega_{41}$  в квадрат. С другой стороны, предэкспонента при обходе изменит знак:  $z^{-1/2} \rightarrow z^{-1/2}e^{-i\pi}$ , значит

$$\Omega_{41}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

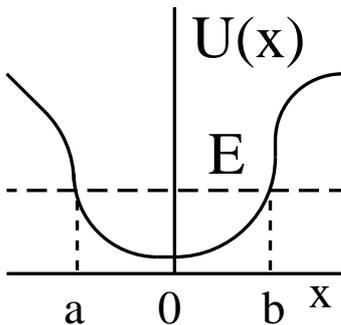
Из получившейся системы уравнений находим константу Стокса  $\alpha = i\sqrt{1 + e^{-2\Phi}}$ . Теперь мы знаем матрицу

$$\Omega_{41} = e^\Phi \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix},$$

которая осуществляет переход от волновой функции слева от барьера к волновой функции справа:  $A' = e^\Phi(A + \alpha B)$ ,  $B' = e^\Phi(\alpha A - B)$ . Из условия  $A' = 0$  найдем  $B/A = -1/\alpha$  и  $B'/A = e^\Phi(\alpha + 1/\alpha)$ , откуда получим известные квазиклассические формулы для коэффициентов отражения и прохождения

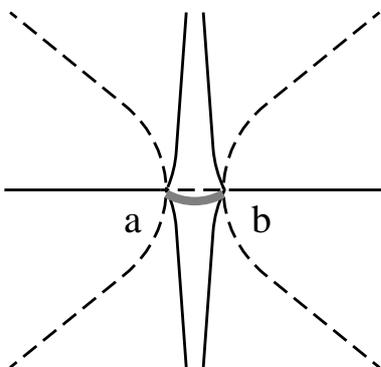
$$R = \frac{1}{1 + e^{-2\Phi}}, \quad T = \frac{1}{1 + e^{+2\Phi}}.$$

2. В задаче о частице в потенциальной яме, в отличие от барьера (рис. 15.3), классически разрешенная область находится внутри интервала  $[a, b]$ , поэтому стоксовы и антистоксовы линии графе Стокса 15.4 поменяются местами. При обходе по контуру  $\Gamma$  вокруг разреза базисные функции  $\psi_\pm$  умножатся на  $e^{\pm i\Psi}$ , где



$$\Psi = \oint_\Gamma k(z) dz = 2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))} dx.$$

У каждого решения должен измениться знак, поэтому  $\Psi = 2\pi n + \pi$ . Получается условие квантования Бора—Зоммерфельда.



Таким образом, задача о построении равномерного квазиклассического разложения в комплексной плоскости проводится в три этапа

- 1° ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. Построение графа Стокса.
- 2° АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. Нахождение константы Стокса методом эталонных уравнений.
- 3° АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ. Перемножение матриц перехода.

# Приложение А

## Сводка формул по специальным функциям

### А.1 Г - функция Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dz z^{x-1} e^{-z}, \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dt t^{-z} e^t,$$

контур  $\gamma$  для представления Ганкеля изображен на рис. А.1.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

### А.2 Гипергеометрические функции

#### Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1$

Дифференциальное уравнение для  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ :

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле  $x = 0$ :

$${}_2F_1(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Преобразование Эйлера:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{-b} {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{x}{x-1}\right).$$

Интегральное представление:

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}.$$

### Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1$

Дифференциальное уравнение для  ${}_1F_1(a; c; x)$ :

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле  $x = 0$ :

$${}_1F_1(a; c; x) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; x/b) = 1 + \frac{a x}{c 1!} + \frac{a(a+1) x^2}{c(c+1) 2!} + \dots$$

Второе решение:

$$y = x^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1; 2 - c; x).$$

Преобразование Куммера:

$${}_1F_1(a; c; x) = e^x {}_1F_1(c - a; c; -x).$$

Интегральное представление:

$${}_1F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt},$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$${}_1F_1(a; c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$${}_1F_1(a; c; x) \simeq \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-x)^{-a}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

## А.3 Цилиндрические функции

### Функции Бесселя $J_\nu$ и Неймана $Y_\nu$

Дифференциальное уравнение для  $J_\nu(x)$ :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле  $x = 0$ :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Выражение через гипергеометрическую функцию:

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-ix} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2ix\right).$$

Рекуррентное соотношение:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$2 \frac{d}{dx} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{d}{dx} (x^{\pm\nu} J_\nu(x)) = \pm x^{\pm\nu} J_{\nu\mp 1}(x).$$

Интегральные представления Шлефли и Пуассона:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z^{\nu+1}} \exp\left(\frac{x}{2} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{ix \sin \varphi - i\nu\varphi} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^\infty dt e^{-x \operatorname{sh} t - \nu t}.$$

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{2\nu}(\varphi) \cos(x \sin(\varphi))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^1 dt e^{ix t} (1 - t^2)^{\nu-1/2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}.$$

Интегрирование идет по контуру  $\gamma$ , рис. А.1, начинающемуся и заканчивающемуся в  $-\infty$ , обходящему точку  $z = 0$  в положительном направлении.

Второе решение:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu} [J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)].$$

Асимптотическое поведение:

$$J_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Случай полуцелого индекса:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

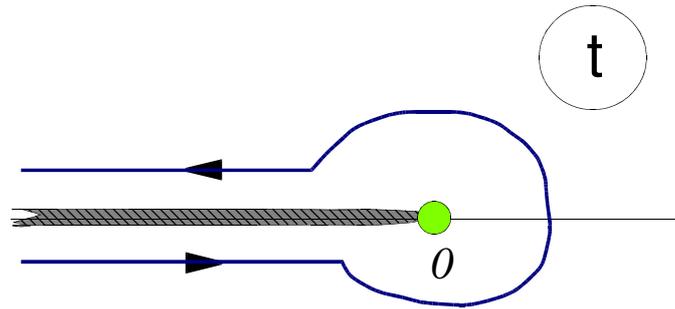


Рис. А.1: Контур интегрирования  $\gamma$ , обходящий разрез  $-\infty < t \leq 0$  в положительном направлении.

**Функции Бесселя целого порядка  $J_n$**

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Производящие функции:

$$e^{ix \sin \phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J_m(x),$$

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n J_n(x).$$

Соотношения ортогональности:

$$\int_0^1 dx x J_k(\gamma_n x) J_k(\gamma_m x) = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(\frac{dJ_k(\gamma_m)}{d\gamma_m}\right)^2, \quad J_k(\gamma_m) = 0,$$

$$\int_0^1 dx x J_k(\lambda_n x) J_k(\lambda_m x) = \frac{\delta_{nm}}{2} \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_m^2}\right) J_k^2(\lambda_m), \quad \frac{dJ_k(\lambda_m)}{d\lambda_m} = 0.$$

**Модифицированная функция Бесселя  $I_\nu$  и функция Макдональда  $K_\nu$**

Дифференциальное уравнение для  $I_\nu(x)$ ,  $K_\nu(x)$ :

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0.$$

Разложение в степенной ряд возле  $x = 0$ :

$$I_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}.$$

Выражение через обычные функции Бесселя:

$$I_\nu(x) = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ix).$$

Выражение для  $K_\nu$  через  $I_\nu, I_{-\nu}$ :

$$K_\nu(x) = \frac{\pi [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2 \sin \pi\nu}.$$

Интегральные представления:

$$I_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^1 dt e^{-xt} (1-t^2)^{\nu-1/2}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2,$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty dt e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch} \nu t, \quad \operatorname{Re} x > 0,$$

$$K_\nu(2\sqrt{pq}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu/2} \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-px-q/x} dx, \quad \operatorname{Re} p > 0, \operatorname{Re} q > 0.$$

Асимптотическое поведение:

$$I_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi x}{2}} e^x, \quad K_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$I_\nu(x) \simeq \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}, \quad K_0(x) \simeq -\ln x, \quad x \rightarrow +0;$$

$$K_\nu(x) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \quad x \rightarrow +0, \nu \neq 0.$$

## А.4 Ортогональные полиномы

**Полиномы Лежандра  $P_l$   
и присоединенные функции  
Лежандра  $P_l^m$**

Дифференциальное уравнение для  $P_l(x)$ :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$$

Дифференциальное уравнение для  $P_l^m(x)$ :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0.$$

Формулы Родрига:

$$P_l(x) \equiv P_l^0(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x).$$

Первые 3 полинома:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$x(2l+1)P_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x).$$

Формулы дифференцирования:

$$(2l+1)P_l(x) = \frac{d}{dx} P_{l+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x),$$

$$lP_l(x) = x \frac{d}{dx} P_l(x) - \frac{d}{dx} P_{l-1}(x).$$

Производящие функции:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), & r < 1; \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), & r > 1; \end{cases} \quad -1 < x < 1.$$

Интегральные представления:

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz z^{-l-1}}{\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^l.$$

Интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки  $t = 0$  в положительном направлении.

Асимптотическое поведение:

$$P_l(\cos \theta) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi l}} \frac{\sin \left[ \left( l + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \theta}}, \quad l |\sin \theta| \gg 1.$$

### Сферические гармоники $Y_{lm}$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta).$$

Дифференциальные уравнения для  $Y_{lm}$ :

$$\Delta_{\Omega} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}, \quad i \frac{d}{d\varphi} Y_{lm} = -mY_{lm},$$

где  $\Delta_{\Omega}$  - угловая часть трехмерного оператора Лапласа в сферических координатах.

Соотношение ортогональности:

$$\int \sin \theta d\theta d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Соотношение полноты:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}') = \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}').$$

### Полиномы Эрмита $H_n$

Дифференциальное уравнение для  $H_n(x)$ :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Формула Родрига:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Первые 3 полинома:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2.$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$\frac{e^{-(x^2+x'^2)/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(x')}{2^n n!} = \delta(x - x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Производящая функция:

$$\exp(2xz - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x).$$

Интегральные представления:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{2^{n+1} e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dz z^n e^{-z^2} \cos\left(2xz - \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x + it)^n e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

### Полиномы Лагерра $L_n^\nu$

Дифференциальное уравнение для  $L_n^\nu(x)$ :

$$x y'' + (\nu + 1 - x) y' + n y = 0.$$

Формула Родрига:

$$L_n^\nu(x) = \frac{x^{-\nu} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n+\nu}.$$

Первые 3 полинома:

$$\begin{aligned} L_0^\nu(x) &= 1, \quad L_1^\nu(x) = \nu + 1 - x, \\ L_2^\nu(x) &= \frac{1}{2}(\nu + 1)(\nu + 2) - (\nu + 2)x + \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Соотношение ортогональности:

$$\int_0^{\infty} dx e^{-x} x^\nu L_m^\nu(x) L_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n + \nu + 1)}{n!} \delta_{mn}.$$

Соотношение полноты:

$$(xx')^{\nu/2} e^{-(x+x')/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^\nu(x) L_n^\nu(x')}{\Gamma(n + \nu + 1)} = \delta(x - x').$$

Рекуррентное соотношение:

$$(n + 1)L_{n+1}^\nu(x) - (2n + \nu + 1 - x)L_n^\nu(x) + (n + \nu)L_{n-1}^\nu(x) = 0.$$

Формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= n L_n^\nu(x) - (n + \nu) L_{n-1}^\nu(x), \\ \frac{d}{dx} L_n^\nu(x) &= -L_{n-1}^{\nu+1}(x). \end{aligned}$$

Производящая функция:

$$(1 - z)^{-\nu-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n L_n^\nu(x).$$

Интегральное представление:

$$\begin{aligned} L_n^\nu(x) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(1 + \frac{x}{t}\right)^n e^{-t} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^\nu \frac{dt}{t} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint \frac{(1-t)^{n+\nu}}{t^n} e^{tx} \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Здесь интегрирование идет по замкнутому контуру вокруг точки  $t = 0$  в положительном направлении.

# Литература

- [1] Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, *Сборник задач по классической механике*, Наука, Москва, 1977.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1988.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1988.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1989.
- [5] И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов, А. И. Черных, Д. А. Шапиро, Е. Г. Шапиро, *Задачи по математическим методам физики*, Эдиториал УРСС, Москва, 2002.
- [6] Н. Н. Лебедев, И. П. Скальская, Я. С. Уфлянд, *Сборник задач по математической физике*, ГИТТЛ, Москва, 1955.
- [7] В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин, Х. Х. Каримова, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин, *Сборник задач по уравнениям математической физики*, Наука, Москва, 1974.
- [8] М. М. Смирнов, *Задачи по уравнениям математической физики*, Наука, Москва, 1976.
- [9] А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калинин, *Сборник задач по уравнениям математической физики*, Наука, Москва, 1977.
- [10] Б. М. Будаг, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, *Сборник задач по математической физике*, Наука, Москва, 1987.
- [11] А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов, *Задачи по математической физике*, Изд. Московского университета, Москва, 1998.
- [12] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1971.
- [13] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Гостехиздат, Москва, 1951.

- [14] Ф. Трикоми, *Лекции по уравнениям в частных производных*, ИЛ, Москва, 1957.
- [15] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики, Т.1*, ИЛ, Москва, 1958.
- [16] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва, 1964.
- [17] И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях в частных производных*, Наука, Москва, 1961.
- [18] С. Л. Соболев, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1966.
- [19] С. Г. Михлин, *Курс математической физики*, Наука, Москва, 1968.
- [20] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1972.
- [21] А. В. Бицадзе, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва, 1978.
- [22] Дж. Мэтьюз, Д. Уокер, *Математические методы в физике*, Атомиздат, Москва, 1972.
- [23] R. B. Guenter, J. W. Lee, *Partial differential equations of mathematical physics and integral equations*, Dover, New York, 1996.
- [24] Р. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики. Т.1*, Мир, Москва, 1982.
- [25] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1978.
- [26] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, 1984.
- [27] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва, 1977.
- [28] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1988.
- [29] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1964.
- [30] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика, Часть I, Изд. 3е*, Наука, Москва, 1978.
- [31] А. И. Мальцев, *Основы линейной алгебры*, Наука, Москва, 1970.
- [32] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Наука, Москва, 1966.

- [33] Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, Москва, 1967.
- [34] У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных*, Мир, Москва, 1981.
- [35] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы*, Наука, Москва, 1977.
- [36] М. Абрамовиц, И. Стиган, editors, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва, 1979.
- [37] Г. Бейтмен, А Эрдейи, *Высшие трансценентные функции. Т.II. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены*, СМБ, Наука, Москва, 1974.
- [38] Г. Бейтмен, А Эрдейи, *Высшие трансценентные функции. Т.I. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, СМБ, Наука, Москва, 1973.
- [39] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, Москва, 1976.
- [40] Н. Г. Де Брейн, *Асимптотические методы в анализе*, ИЛ, Москва, 1961.
- [41] А. Эрдейи, *Асимптотические разложения*, Физматгиз, Москва, 1962.
- [42] Дж. Хединг, *Введение в метод фазовых интегралов*, Мир, Москва, 1965.
- [43] Э. Копсон, *Асимптотические разложения*, Мир, Москва, 1966.
- [44] Дж. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, Москва, 1972.
- [45] А. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, Москва, 1976.
- [46] Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, Наука, Москва, 1990.
- [47] М. В. Федорюк, *Асимптотика. Интегралы и ряды*, СМБ, Наука, Москва, 1987.
- [48] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1989.
- [49] В. Г. Зелевинский, *Конспект лекций по квантовой механике, ч.II*, НГУ, Новосибирск, 1970.
- [50] П.В. Елютин, Д. В. Кривченко, *Квантовая механика (с задачами)*, Наука, Москва, 1976.
- [51] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1983.

# Предметный указатель

- автомодельность, 36
- бегущая волна, 36
- бета-функция Эйлера, 54
- бифуркация, 19
- гамма-функция Эйлера, 51, 53
- главная дифференциальная часть, 30
- граф Стокса, 86, 102
- задача
  - Дирихле, 46
  - Коши, 14
  - Неймана, 46
  - смешанная краевая, 46
- инвариант
  - Римана, 22
  - уравнения второго порядка, 63
- канонический вид
  - системы уравнений, 24
  - уравнения
    - гиперболического типа, 32
    - параболического типа, 32
    - эллиптического типа, 33
- квазиклассическое приближение, 100
- кинк, 39
- константа разделения, 42
- константа Стокса, 103
- линии
  - антистоксовы, 101
  - Стокса, 86
  - стоксовы, 101
- матрица перехода, 102
- метод
  - годографа, 27
  - Лапласа, 47
  - Фурье, 46
- минимаксный контур, 86
- начальная гиперповерхность, 14
- начальное условие, 14
- область
  - влияния, 25, 35
  - зависимости, 25, 35
- общее решение, 4, 12
- обыкновенная точка, 63
- опрокидывание, 18
- особая точка, 65
  - иррегулярная, 67
  - регулярная, 67
- переменная
  - медленная, 93
  - угловая, 93
- полиномы
  - Лагерра
    - обобщенные, 75
  - Лежандра, 58
  - Эрмита, 74
- порядок уравнения, 4
- представление
  - Ганкеля, 53
  - интегральное
    - Бесселя, 53
    - Шлефли, 55
- преобразование
  - Куммера, 71
  - Лапласа, 47

- Лиувилля, 63, 71
- преобразование Лежандра, 28
- производящая функция, 53
- промежуточная асимптотика, 38
- простая волна Римана, 23
- разделение переменных, 42
- расширенное пространство, 15
- решение
  - доминантное, 101
  - субдоминантное, 101
- солитон, 41
- соотношения на характеристиках, 22
- сферические гармоники, 60
- точка поворота, 100
  - простая, 100
- точка сборки, 19
- уравнение
  - Бесселя, 50, 72
  - Бюргерса, 39
  - Вебера, 73
  - в частных производных, 4
  - возмущенное, 93
  - волновое
    - неоднородное, 25
    - однородное, 7, 24
    - трехмерное, 7
  - Гамильтона — Якоби, 20
  - Гаусса, 70
  - Гельмгольца, 44
  - гипергеометрическое, 69, 70
    - вырожденное, 71
  - Кортевега — де Фриза, 40
  - класса Фукса, 68
  - Лагерра, 75
  - Лапласа, 9, 33
  - Лежандра, 57, 72
  - линейное, 4
    - однородное, 4
  - невозмущенное, 93
  - непрерывности, 6
  - определяющее, 67
  - первого порядка
    - квазилинейное, 16
    - нелинейное, 19
    - неоднородное, 14
    - однородное, 12
  - состояния, 6
  - телеграфное, 6
  - теплопроводности, 9
    - нелинейное, 39
    - одномерное, 36
  - Хопфа, 17
  - характеристик, 15
  - Шредингера, 8, 43, 99
    - в центральном поле, 56
    - для атома водорода, 43, 74
    - для осциллятора, 73
  - Эйлера, 6
- уравнения
  - гидродинамики, 6
  - Максвелла, 7
- фазовый интеграл, 106
- формула
  - Даламбера, 25
  - Родрига
    - для полиномов Лагерра, 76
    - для полиномов Лежандра, 58
    - для полиномов Эрмита, 74
- функции
  - Бесселя, 50
  - сферические, 61
  - гипергеометрические, 70
  - вырожденные, 71
  - Лежандра
    - второго рода, 58
    - присоединенные, 60
  - Неймана, 50
  - цилиндрические, 50
- характеристика
  - гиперболической системы, 22
  - квазилинейного уравнения, 16

линейного уравнения, 12  
нелинейного уравнения, 20  
уравнения 2-го порядка, 31, 34  
характеристический показатель, 66

частное решение, 5, 14

явление Стокса, 103