

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Լ. Ս. ԱՍԼԱՆՅԱՆ, Վ. Բ. ՊԱԽԱԼՈՎ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԼԱԲՈՐԱՏՈՐ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿԶՈՒԹՅՈՒՆ
2016

ՀՏԴ 530.182(07)

ԳՄԴ 22.3 ց7

Ա 742

*Հրատարակության է երաշխավորել
ԵՊՀ ֆիզիկայի ֆակուլտետի
գիտական խորհուրդը*

Գրախոսներ՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր **Վ. Բ. Առաքելյան**

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու, դոցենտ **Ա. Հ. Մակարյան**

Լ. Ս. Ասլանյան, Վ. Բ. Պախալով

Ա 742 Ոչ գծային ֆիզիկայի ներածություն: Լաբորատոր աշխատանքների ձեռնարկ/ Լ. Ս. Ասլանյան, Վ. Բ. Պախալով. - Եր., ԵՊՀ հրատ., 2016, 78 էջ:

Սիներգետիկան (կամ ոչ գծային ֆիզիկան, քառսի տեսությունը) պատկանում է վերջին մի քանի տասնամյակում բուռն զարգացող գիտական ուղղությունների թվին: Այն իր մեջ միավորում է տարբեր բնագավառների (ինչպես բնական, այնպես էլ հումանիտար և հասարակագիտական գիտությունների) ոչ գծային երևույթները: Սույն ձեռնարկի նպատակն է տարբեր բնագավառների խնդիրները դիտարկել մեկ միասնական՝ ոչ գծային ֆիզիկայի տեսանկյունից:

Սույն ձեռնարկի նախորդ հրատարակությունը լույս է տեսել 2011 թ.: Անցած տարիների ընթացքում որոշ աշխատանքներ կորցրել են իրենց արդիականությունը և դուրս մնացել դասընթացի ծրագրից: Ներկա հրատարակությունում այդ աշխատանքները փոխարինված են նորերով և ուղղված են նկատված վրիպակները:

Այն նախատեսված է «Ոչ գծային ֆիզիկա» դասընթացն ուսումնասիրողների գիտելիքների խորացման համար:

ՀՏԴ 530.182(07)

ԳՄԴ 22.3 ց7

ISBN 978-5-8084-2147-9

© ԵՊՀ հրատ., 2016

© Լ. Ս. Ասլանյան, Վ. Բ. Պախալով, 2016

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

XX դարի երկրորդ կեսը նշանավորվեց ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի (և ոչ միայն) համար լուրջ զարգացումներով: Այդ կտրուկ փոփոխություններն առնչվում էին ինչպես բնական, այնպես էլ հումանիտար գիտությունների բնագավառներին: Արդյունքում զարգացավ նոր ուղղություն, որն այսօր մի շարք անվանումներ ունի՝ ոչ գծային ֆիզիկա, ոչ գծային դինամիկա, սիներգետիկա և այլն: Այն ներառում է այնպիսի ուղղություններ, ինչպիսիք են՝ բիֆուրկացիաները, քաոսը, սովորական և տարօրինակ ատրակտորները, ֆրակտալները, պատկերների ձևավորումը, սոլիտոնները, կոմպլեքս համակարգերը և այլն:

Երևույթների այդ նոր և հսկայական բազմազանության ընկալման գործում անփոխարինելի է ուսումնական լաբորատոր աշխատանքների դերը: Ոչ գծային ֆիզիկայի ասպարեզում այդ լաբորատոր աշխատանքների իրականացումը առանձնանում է հատկապես այն հանգամանքով, որ այստեղ, բացի ավանդական փորձարարական աշխատանքներից, զգալի տեղ են զբաղեցնում համակարգչային մոդելավորման հետ կապված աշխատանքները:

Սակայն, առկա մեծաքանակ տեսական դասագրքերի պայմաններում, լաբորատոր աշխատանքների համակարգված շարադրումը պարունակող գրքերը բացակայում են: Սույն ձեռնարկի նպատակն է լրացնել այդ բացը:

Ձեռնարկում բերված լաբորատոր աշխատանքները կարելի է բաժանել երեք խմբի.

- Միայն համակարգչային մոդելավորման կիրառմամբ
- Զուտ փորձարարական
- Աշխատանքներ, որոնցում փորձարարական չափումները ուղեկցվում են համակարգչային մոդելավորմամբ:

Լաբորատոր աշխատանքներում անդրադարձ կա ոչ միայն ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի, այլ նաև քիմիայի, կենսաբանության և այլ բնագավառների հետ առնչվող հարցերին:

Ոչ գծային ֆիզիկայի բազմադիսցիպլինային բնույթն այն դարձնում է անհրաժեշտ դասընթաց ուսանողների մտահորիզոնը ընդարձակելու համար, ինչը խիստ կարևոր է հետագա մասնագիտական առաջընթացում:

Լաբորատոր աշխատանքների ձեռնարկի հիմքը Երևանի պետական համալսարանի ֆիզիկայի ֆակուլտետի «Ոչ գծային ֆիզիկա» դաս-

ընթացի համար հեղինակների կողմից մշակված փորձաքարական և համակարգչային լաբորատոր աշխատանքների ցիկլն է:

Սույն ձեռնարկի նախորդ հրատարակությունը լույս է տեսել 2011 թ.: Անցած տարիների ընթացքում որոշ աշխատանքներ կորցրել են իրենց արդիականությունը և դուրս են մնացել դասընթացի ծրագրից:

Ներկա հրատարակությունում որոշ աշխատանքներ փոխարինված են նորերով և ուղղված են նկատված վրիպակները:

Այն կարող է օգտակար լինել բակալավրիատի ու մագիստրատուրայի ուսանողների, ինչպես նաև բոլոր նրանց համար, ովքեր ցանկանում են ինքնակրթությամբ ստանալ ներածական գիտելիքներ ոչ գծային ֆիզիկայի մասին:

Բաժին I.

*Համակարգչային լարորատոր
աշխատանքներ*

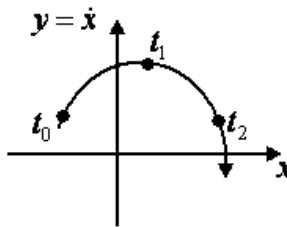
Աշխատանք 1 ՓՈՒՀԱՅԻՆ ԴԻՄԱՆԳԱՐ

Աշխատանքի նպատակն է պարզ օրինակներով ծանոթանալ դիֆերենցիալ համակարգի վարքի որակական նկարագրության մեթոդներին:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Շարժման մասին առավել ամբողջական տեղեկություն, իհարկե, կարելի է ստանալ համակարգի վարքը նկարագրող հավասարման լուծումից: Սակայն միշտ չէ, որ այդպիսի լուծում հնարավոր է գտնել: Ուստի և առաջնահերթ են դառնում որակական նկարագրման մեթոդները:

Տատանման պատկերման համար, բացի $x(t)$ կախվածությունից, կիրառում են **փուլային հարթության** մեթոդը: Համակարգի վիճակը նկարագրենք $(\dot{x}, x)$ առանցքներով հարթության վրա, որը կանվանենք փուլային (ազատության մեկից ավելի աստիճանների դեպքում ընդունված է անվանել փուլային տարածություն): Համակարգի վիճակը տվյալ պահին հարթության վրա նկարագրվում է կետով, որը ժամանակի ընթացքում տեղաշարժվում է՝ գծելով, այսպես կոչված, փուլային հետագիծ (նկ. 1):



Նկ. 1. Փուլային հետագծի տեսքը:

Հարկ է նշել, որ տվյալ դեպքում ժամանակը խաղում է պարամետրի դեր և փուլային հետագիծը տրվում է $y = y(x)$ կախվածությամբ:

Պարզության համար քննարկենք ազատության մեկ աստիճան ունեցող կոնսերվատիվ համակարգի՝ նյութական կետի, շարժումը կոորդինատից կախված ուժի ազդեցությամբ: Նյութական կետի դիրքն ամբողջությամբ նկարագրվում է մեկ x կոորդինատով, իսկ համակարգի մեխանիկական վիճակը՝ կետի դիրքով (x) և արագությամբ ($\dot{x} = y$): Պարզության համար ընդունենք, որ զանգվածը՝ $m = 1$: Այդպիսի համակարգի շարժումը կարելի է նկարագրել Նյուտոնի օրենքով

$$\ddot{x} = f(x) \quad (1)$$

կամ առաջին կարգի երկու հավասարումների օգնությամբ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x) \end{array} \right. : \quad (2)$$

Փուլային հարթության վրա պատկերող կետի վարքը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y} \quad (3a)$$

կամ

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y), \quad (3բ)$$

իսկ կետի շարժման արագությունը՝

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{y^2 + [f(x)]^2} : \quad (4)$$

Ընդգծենք, որ անհրաժեշտ է տարբերել նյութական կետի արագությունը և փուլային հարթության վրա պատկերող կետի շարժման արագությունը: Ինչպես երևում է (4) արտահայտությունից, պատկերող կետի արագությունը միշտ տարբեր է 0-ից, բացի հավասարակշռության դիրքից ($f(x) = 0$), որտեղ միաժամանակ

$$y = 0 : \quad (5)$$

Ուստի, բոլոր այդ կետերը համապատասխանում են հավասարակշռության վիճակներին (մասնիկն անշարժ է մնում) և ընկած են փուլային հարթության աբսցիսների առանցքի վրա: Կոնսերվատիվ համակարգի դեպքում (3) հավասարումն ինտեգրվում է, քանի որ փոփոխականներն անջատվում են

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = h, \quad (6)$$

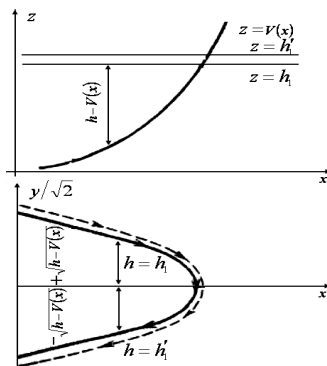
որտեղ

$$V(x) = -\int_0^x f(\xi) d\xi \quad \text{և} \quad V'(x) = -f(x),$$

իսկ h -ը՝ սկզբնական ($x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$) պայմաններից կախված, ինտեգրման հաստատունը (համեմատական է կուտակված լրիվ

մեխանիկական էներգիային): Տվյալ դեպքում (6)-ն արտահայտում է էներգիայի պահպանման օրենքը: Իսկապես, $y^2/2 = mx^2/2$ -ը համակարգի կինետիկ, իսկ $V(x)$ -ը՝ պոտենցիալ էներգիաներն են: Նկատենք հետևյալը. բոլոր այն արժեքներին՝ $x = \bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_i$ (հատուկ կետերի աբսցիսները), որտեղ $f(\bar{x}_i) = 0$ համապատասխանում են $V'(\bar{x}_i) = 0$: Հետևաբար, այդ արժեքները համապատասխանում են պոտենցիալ էներգիայի էքստրեմալ արժեքներին, այսինքն՝ կամ մինիմումին, կամ մաքսիմումին, կամ շրջման կետին: Կարելի է կատարել (6) հավասարման հատուկ կետերի դասակարգում՝ ելնելով այդ կետերում պոտենցիալ էներգիայի վարքից: Մինչ այդ հարցին անցնելը՝ նկատենք նաև հետևյալը: (6) հավասարումը չի փոխվում $y \rightarrow -y$ փոխարինման ժամանակ: Հետևաբար, բոլոր կորերը (փուլային հետագծերը) համաչափ են աբսցիսների առանցքի նկատմամբ:

Հատուկ ընդգծենք, եթե հայտնի է $V(x)$ ֆունկցիայի տեսքը, ապա կարելի է նշել փուլային դիմանկարը կառուցելու պարզ ճանապարհ: Օգտվենք այսպես կոչված «էներգիայի հաշվեկշռի հարթությունից» z, x -կոորդինատական առանցքներով, որի վրա կառուցենք $z = V(x)$ պոտենցիալ էներգիան (նկ. 2): Քանի որ $y^2/2 = h - V(x)$, ապա h -ը տրված լինելու դեպքում՝ կինետիկ էներգիան կպատկերվի $h - V(x)$ տարբերությամբ:



Նկ. 2. Փուլային դիմանկարի կառուցումը «էներգիայի հաշվեկշռի հարթության» օգնությամբ էներգիայի երկու տարբեր արժեքների դեպքում:

Ինչպես ասվել էր, այն տիրույթում, որտեղ կինետիկ էներգիան բացասական է, շարժումն արգելված է: Փուլային դիմանկարը ստանալու

համար բավական է արմատ հանել $h - V(x)$ մեծությունից և տեղադրել փուլային հարթության վրա (x -երի առանցքի նկատմամբ համաչափ): Նկատենք, որ $y/\sqrt{2} = \pm\sqrt{h - V(x)}$ կրկնակի նշանը մեծ նշանակություն ունի համակարգի վարքի համար: Դրանով է պայմանավորված պարբերական լուծումների առկայությունը: Շարժումը հետագծի այդ հատվածով կարելի է գտնել արդեն քննարկված դաստորությունների օգնությամբ: Փոփոխելով h -ը՝ կարելի է ստանալ այլ հետագծեր ևս:

Այժմ բերված մեթոդն օգտագործենք պարզ համակարգերի վարքը հավասարակշռության վիճակների շրջակայքում ուսումնասիրելու համար: Քննարկենք ներդաշնակ տատանումը նկարագրող

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7)$$

հավասարումը: Ինչպես հայտնի է, այս հավասարմամբ կարող է նկարագրվել թե՛ զսպանակին ամրացված բեռի, թե՛ մաթեմատիկական ճոճանակի, թե՛ տատանողական կոնտուրի տատանումները: Նման հավասարմամբ են նկարագրվում նաև մի շարք այլ համակարգեր, որոնց կանդրադառնանք հետագայում: Նշանակենք $y = \dot{x}$ և ներկայացնենք այն առաջին աստիճանի երկու հավասարումների համակարգի օգնությամբ

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega_0^2 x: \quad (7a)$$

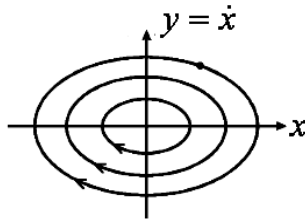
Արտաքսելով ժամանակը՝ կստանանք փուլային հետագծի հավասարումը

$$dy/dx = -\omega_0^2 x/y: \quad (8)$$

(8) հավասարման լուծումների բազմությունը կազմում են ինտեգրալ կորերի ընտանիք: Այն ինտեգրալ կորերը, որոնց վրա նշված է շարժման ուղղությունը, կոչվում են փուլային հետագծեր: (8) հավասարման ինտեգրումից հետո փուլային հետագծի համար ստանում ենք

$$\frac{x^2}{h} + \frac{y^2(x)}{h\omega_0^2} = 1: \quad (9)$$

h -հաստատունը որոշվում է սկզբնական պայմաններից և իրենից ներկայացնում է համակարգին հաղորդված էներգիայի մեծությունը (հաստատուն արտադրիչի ճշտությամբ): Ինչպես տեսնում ենք (նկ. 3), վերին կիսահարթությունում փուլային կետը կարող է շարժվել միայն ձախից աջ, քանի որ $\dot{x} > 0$ և x -ը կարող է միայն աճել: Նման ձևով ստորին կիսահարթությունում սլաքը պետք է ուղղված լինի աջից ձախ: Այստեղ նույնպես ճշգրիտ լուծումը կարելի է ստանալ ինտեգրմամբ:



Նկ. 3. Ներդաշնակ տատանման փուլային հետագիծը:

Եթե փուլային հետագծի տեսքը տրված է $\dot{x} = y(x)$, ապա, անջատելով փոփոխականները, կստանանք

$$dt = dx/y(x) \quad (10)$$

և ինտեգրելուց հետո

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y(x)}: \quad (11)$$

Տեղադրելով $y(x)$ -ը ներդաշնակ տատանակի փուլային հետագծի (9) հավասարումից՝ (11)-ից կստանանք

$$T = 2 \int_{-\sqrt{W}}^{\sqrt{W}} \frac{dx}{\omega_0 \sqrt{W - x^2}} = \frac{2}{\omega_0} \arcsin \frac{x}{\sqrt{W}} \Big|_{-\sqrt{W}}^{\sqrt{W}} = \frac{2\pi}{\omega_0}: \quad (12)$$

Այսպիսով, ներդաշնակ տատանակի տատանման պարբերությունը (կամ փուլային կետի մեկ լրիվ պտույտ կատարելու ժամանակը) կախված չէ նրա սկզբնական էներգիայից (W -մեծությունից): Այս հատկությունը կոչվում է սինքրոնություն:

Փուլային հետագծերի համախումբը միասին վերցրած կոչվում է փուլային դիմանկար: Փուլային դիմանկարը հնարավորություն է ընձեռում ստանալ մի շարք կարևոր տվյալներ դիմամիկ համակարգի շարժման վերաբերյալ: Փուլային դիմանկարի մեջ, իհարկե, պետք է մտցվի նաև $x = \dot{x} = 0$, այսինքն՝ տատանակի հավասարակշռության վիճակը նկարագրող կետը: Բնչպես տեսնում ենք, ներդաշնակ տատանակի դեպքում այդպիսի կետը առանձնացված է և կոչվում է **կենտրոն**: Եզրափակելով՝ նշենք, որ փուլային հարթության վրա փակ հետագծերի առկայությունը նշանակում է պարբերական շարժման գոյություն:

Վանող ուժով գծային համակարգի հավասարումը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$\ddot{x} - a^2 x = 0: \quad (13)$$

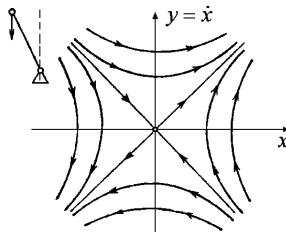
Այսպիսի հավասարմամբ, մասնավորապես, նկարագրվում է մաթեմատիկական ճոճանակի շարժումը վերին՝ անկայուն հավասարակշռության վիճակի շրջակայքում: Ինտեգրելով նախորդ դեպքի նման՝ ստանում ենք

$$y^2 - a^2 x^2 = C: \quad (14)$$

Սա հիպերբոլների ընտանիքի հավասարումն է (տե՛ս նկ. 4): $C = 0$ -ն համապատասխանում է այդ ընտանիքի ասիմպտոտներին

$$y = \pm ax, \quad (15)$$

որոնք անցնում են հավասարակշռության վիճակով: Հավասարակշռության վիճակը, որով անցնում են միայն երկու ինտեգրալ կորեր, կոչվում է **թամբ**: Ինչ հետևություն կարելի է անել այս փուլային դիմանկարից: Դիտելով պատկերող կետի շարժումը՝ կարելի է համոզվել, որ որտեղ էլ լինի այն (բացի հատուկ կետից և $y = -ax$ ասիմպտոտից), ի վերջո, կհեռանա հավասարակշռության վիճակից, ընդ որում, նրա շարժումը միշտ կլինի ոչ պարբերական: Պատկերող կետի արագությունը զրո է դառնում միայն հատուկ կետում: Այսպիսով, եթե անգամ պատկերող կետը շարժվում է որևէ ինտեգրալ կորով, սկզբնապես հատուկ կետի ուղղությամբ, ապա, ի վերջո, այն կհայտնվի հավասարակշռության վիճակից հեռու, բացի $y = -ax$ ասիմպտոտով շարժման դեպքից, այսինքն, նշված հավասարակշռության վիճակն անկայուն է:



Նկ. 4. Վանող ուժով գծային համակարգի փուլային դիմանկարը:

Իրական համակարգերում միշտ տեղի է ունենում էներգիայի կորուստ, որի հետևանքով տատանակը կորցնում է նախապես կուտակված էներգիան: Մեխանիկական համակարգերում առավել տարածված է «շփման ուժի» գծային կախվածությունը արագությունից (ընդունված է այն անվանել մածուցիկ շփում): Մածուցիկ շփման առկայությամբ գծային տատանակի ազատ տատանումները նկարագրվում են հետևյալ հավասարմամբ

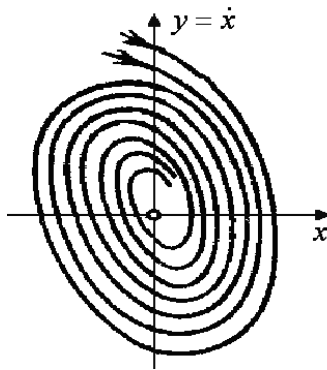
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (16)$$

որը համարժեք է հետևյալ երկու հավասարումների համակարգին

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma y - \omega_0^2 x \end{cases} : \quad (17)$$

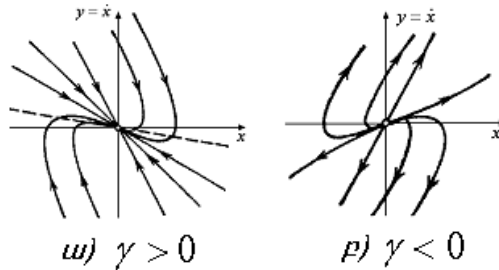
Ոչ բարդ, սակայն երկար ձևափոխությունների օգնությամբ կարելի է ցույց տալ, որ փոքր մարումների դեպքում ($\gamma^2 \ll \omega_0^2$) փուլային դիմանկարը հավաքվող պարույր է: Հավասարակշռության վիճակն այս դեպքում կոչվում է **կայուն կիզակետ** (տես նկ. 5): Այսպիսով, փուլային դիմանկարի տեսքից արդեն հետևում է, որ ցանկացած սկզբնական պայմանների դեպքում (բացի հավասարակշռության վիճակից) մեր դիսիպատիվ համակարգի շարժումը մարող տատանողական պրոցես է:

Փուլային հարթության վրա բոլոր պարույրներն ասիմպտոտիկորեն մոտենում են կոորդինատների սկզբնակետին, իսկ պատկերող կետի շառավիղ վեկտորն անընդհատ նվազում է: Եթե $\gamma^2 > \omega_0^2$, ապա գծային տատանակի շարժումը լինում է ոչ պարբերական մարող (տես նկ. 6):



Նկ. 5. Փոքր մարմամբ գծային տատանակի փուլային դիմանկարը: Հավասարակշռության վիճակը՝ կայուն կիզակետ:

Այստեղից ակնհայտ է, որ $\gamma < 0$ դեպքում համակարգի էներգիան ժամանակի ընթացքում աճում է: Դա հնարավոր է միայն, եթե համակարգում առկա է էներգիայի սեփական աղբյուր: Իհարկե, դա այլևս սովորական իմաստով շփում չէ, սակայն, քանի որ այն նկարագրվում է դիֆերենցիալ հավասարման նույն $\dot{x}$ պարունակող գումարելիով, ինչ որ սովորական շփումը, ընդունված է $\gamma < 0$ դեպքում օգտագործել «բացասական շփում» հասկացությունը:



Նկ. 6. Ոչ պարբերական տատանումներ կատարող գծային տատանակի փուլային դիմանկարը: Հավասարակշռության վիճակը՝ հանգույց: ա) կայուն, բ) անկայուն

Ամփոփենք՝ թվարկելով հավասարակշռության վիճակները.

1. **Կենտրոն**՝ $\gamma = 0$, այսինքն՝ մածուցիկ շփումը բացակայում է, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$:
2. **Կիզակետ**՝ $\omega_0 > \gamma > 0$, $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$: Կիզակետը կարող է լինել կայուն ($\gamma > 0$) և անկայուն ($\gamma < 0$) :
3. **Հանգույց**՝ $\omega_0 < \gamma$, $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$; $\gamma > 0$:
4. **Այլասերված հանգույց**՝ $\omega_0 = \gamma$, $\lambda_{1,2} = -\gamma$:
5. **Թափ**՝ $\omega_0 < |\gamma|$, $\lambda_{1,2} = |\gamma| \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$; $\gamma < 0$:

Թամբը հավասարակշռության խիստ կարևոր տեսակ է, որը հանգեցնում է սոլիտոնի և քառսի:

Անդրադառնանք փուլային հարթության վրա հանդիպող ևս մեկ՝ առանձնահատուկ, հավասարակշռության վիճակի:

Քննարկենք արտաքին պարբերական ուժի ազդեցությամբ տատանվող գծային տատանակի վարքը մածուցիկ շփման առկայությամբ

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 e^{i\omega t} : \quad (18)$$

Լուծումը (18) հավասարման մասնավոր և համապատասխան համասեռ հավասարման ընդհանուր լուծումների գումարն է

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi_0\right) + \rho \exp[i(\omega t - \vartheta)] : \quad (19)$$

Այստեղ x_0, φ_0 -ն սկզբնական պայմաններից որոշվող հաստատուններ են, իսկ

$$\rho = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} ; \quad \operatorname{tg} \theta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} :$$

Ինչպես երևում է (19) լուծումից, կայունացված տատանումները կհաստատվեն

$$\Delta t_{\text{կայ}} \sim \tau = \frac{1}{\gamma} \quad (19\text{ա})$$

Ժամանակ անց: Այդ ժամանակահատվածի ընթացքում հենց տատանակը էներգիա է կուտակում, քանի որ արտաքին ուժի աշխատանքը գերազանցում է շփման ուժերի դեմ կատարված աշխատանքին: Նկատենք, որ (19ա) արտահայտությունը սահմանում է միայն այդ ժամանակի կարգը: Կիրառությունների ժամանակ կայունացման (ինչպես նաև մարման) պրոցեսների նկարագրության համար օգտվում են

$$\Delta t_{\text{կայ}} \sim (3 \div 5)\tau$$

արժեքից:

Այժմ հաշվենք այն աշխատանքը, որ կատարում է արտաքին ուժը տատանակի նկատմամբ: Հաշվի առնելով, որ հզորությունը

$$P = F \frac{dx}{dt} = F\dot{x} = (\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x)\dot{x},$$

ինչպես նաև (19) լուծումը, կստանանք

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(\tau) d\tau = \gamma \rho^2 \omega^2 :$$

Սա նշանակում է, որ ստացիոնար դեպքում արտաքին ուժը միայն համակշռում է կորուստները:

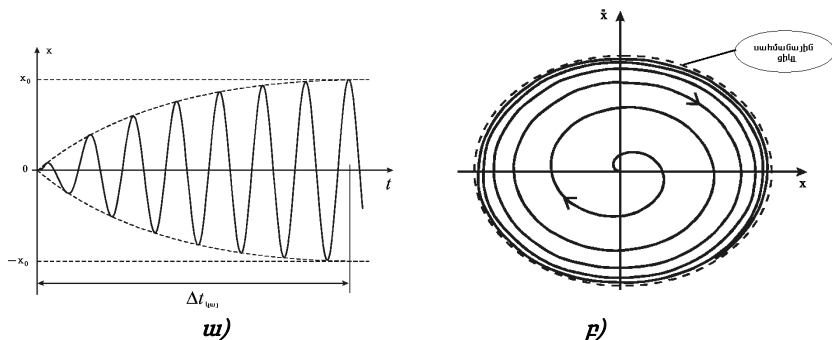
Անդրադառնալով ռեզոնանսի դեպքին, երբ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$: Սկզբնական $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$ պայմանների և $\gamma \ll \omega_0$ դեպքում (18) հավասարման լուծումն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$x(t) = x_0 \{1 - \exp(-\gamma t)\} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

քանի որ $\rho = x_0$, $\vartheta = -\varphi_0 = \pi/2$:

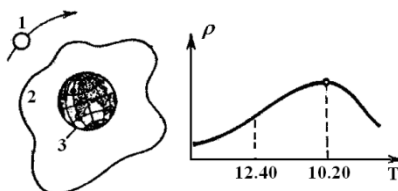
Նկ. 7-ում պատկերված է մարմամբ տատանակի ստիպողական տատանումների կայունացման պրոցեսը: Ինչպես երևում է նկարից, $\Delta t_{\text{կայ}}$ - ժամանակ անց համակարգը սկսում է տատանվել հաստատուն լայնությամբ: Փուլային հարթության վրա այս ռեժիմին համապատաս-

խանում է փակ կոր, որին ընդունված է անվանել **սահմանային ցիկլ** (Պուանկարե):



Նկ. 7. Մարմամբ տատանակի ստիպողական տատանումները (ա) և համապատասխան փուլային դիմանկարը (բ):

Ռեզոնանսի երևույթը բազմապիսի կիրառություններ ունի: Մասնավորապես, այն օգտագործվել է նույնիսկ գլոբալ չափումներ կատարելիս: Նրա օգնությամբ հաջողվել է չափել Երկիր-մթնոլորտ տատանակի պարամետրերը (նկ. 8): Եթե մթնոլորտը, որը մեր պատկերացմամբ գնդաձև է և շրջապատում է Երկրագունդը, Լուսնի ազդեցությամբ ձգվի մեկ ուղղությամբ, ապա այն կընդունի ձգված էլիպսոիդի տեսք: Այդպիսի մթնոլորտն ինքն իրեն թողնվելու դեպքում, կկատարի տատանումներ և կստացվի գլոբալ տատանակ: Այդ տատանումները դեկավարվում են Լուսնի կողմից, որը պտտվում է Երկրի շուրջը և օրվա ընթացքում երկու անգամ առաջացնում մակընթացություն, որի պարբերությունը 12 ժ. 40 ր. է: Այդպիսի գլոբալ տատանակի γ -ն և ω_0 -ն որոշելու համար անհրաժեշտ է ունենալ ρ -ն և θ -ն որևէ ω -ի դեպքում:



Նկ. 8. Երկիր-մթնոլորտ օսցիլյատորի պարամետրերի որոշումը.
 $T = 2\pi/\omega = 10 \text{ ժ. } 20 \text{ ր.}: 1\text{-Լուսին, } 2\text{-մթնոլորտ, } 3\text{-Երկիր:}$

Այդպես էլ արվել է: Չափելով մթնոլորտային մակընթացության մեծությունը և նրանց ուշացման ժամանակը՝ որոշվել է γ և ω_0 -ն, որոնց

օգնությամբ էլ կառուցվել է նկ. 8.-ում բերված $\rho = \rho(\omega)$ ռեզոնանսային կորը: Ստացված արդյունքի ճշտությունը հաջողվել է ստուգել փորձով: 1853 թ. Կրակատաու հրաբխի ժայթքման հետևանքով մթնոլորտ է արտանետվել կղզու կեսը: Պայթյունն այնքան հզոր էր, որ հաջողվել է չափել մթնոլորտի տատանման պարբերությունը: Այն կազմել է 10.5 ժամ: Այսպիսով, փորձնականորեն հաջողվել է հիմնավորել դատողությունների ճշմարտացիությունը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԸ

1. Հավաքել (17) մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող ծրագիր:
2. Կառուցել $x(t)$, $y(t)$ գրաֆիկները և $y(x)$ փուլային դիմանկարը:
3. Փոփոխելով առաջարկված պարամետրերը՝ ուսումնասիրել համապատասխան գրաֆիկների վարքը:
4. Ստանալ սահմանային ցիկլը ռեզոնանսային և ոչ ռեզոնանսային դեպքերում: Համեմատել նրանց պարամետրերը:
5. Պարզ էլեկտրոնային սխեմայի օգնությամբ ստանալ փուլային դիմանկարը օսցիլոգրաֆի վրա (տե՛ս աշխ. 6):

Աշխատանք 2

ԱԶԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԵԿ ԱՍՏԻՃԱՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել ազատության մեկ աստիճան ունեցող համակարգերի կայունությունն ըստ Լյապունովի: Որպես օրինակ կքննարկվի փակ արգելանոցում բնակեցվածության թվաքանակի դինամիկան ներտեսակային մրցակցության պրոցեսի հաշվառմամբ:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ազատության մեկ աստիճան ունեցող դինամիկ համակարգը նկարագրող դիֆերենցիալ հավասարումների որակական ուսումնասիրությունը սկսենք պարզագույն մոդելից

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1)$$

Դա նշանակում է, որ համակարգի վիճակը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին նկարագրվում է $x(t)$ մեծությամբ, $f(x, \mu)$ -ն վիճակի ֆունկցիա է, որը նկարագրում է համակարգի էվոլյուցիան, μ -ն՝ արտաքին դեկավարող պարամետր: Այժմ քննարկենք համակարգի հավասարակշռության վիճակը: Համապատասխան կոորդինատը նշանակենք $\bar{x}$ -ով (ստացիոնար կամ հատուկ կետ)

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\bar{x}} = f(\bar{x}, \mu) = 0 \quad (2)$$

Հավասարակշռության վիճակի կայունության հարցը կարելի է պարզել անալիտիկորեն: Ենթադրենք, համակարգը շեղել ենք հավասարակշռությունից

$$x = \bar{x} + \xi, \quad \xi \ll \bar{x} \quad (3)$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{x} + \xi)}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} \\ f(\bar{x} + \xi) &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\xi^2 + \dots \end{aligned}$$

քանի որ $f(\bar{x}) = 0$, ստանում ենք.

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi + \eta\xi^2, \quad (4)$$

որտեղ $\lambda = f'(x)$, $\eta = 0.5f''(x)$: Գծային մոտավորությամբ ստանում ենք

$$\xi(t) = Ce^{\lambda t},$$

որտեղից անմիջականորեն ստացվում է, որ $\lambda < 0$ դեպքում հավասարակշռության վիճակը կայուն է, քանի որ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0,$$

իսկ $\lambda > 0$ դեպքում՝ անկայուն: $\lambda = 0$ դեպքում գծայնացված մոտավորությունը հնարավորություն չի տալիս պարզել համակարգի հավասարակշռության վիճակի կայունության հարցը:

Որպես օրինակ ուսումնասիրենք փակ արգելանոցում բնակեցվածության թվաքանակի դինամիկայի մոդելը սննդի պաշարի սահմանափակության հաշվառմամբ: Այն առաջարկել է ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պ. Ֆ. Ֆերհյուլստը (1838-1845 թթ.): Մաթեմատիկական մոդելի հիմքը հետևյալ ենթադրություններն են.

- Բնակեցվածության աճը սահմանափակված է կերի վերջավոր քանակությամբ
- Բնական աճի, ինչպես նաև կերի համար մրցակցության պատճառով մահացման արագությունները համեմատական են ժամանակի տվյալ պահին բնակեցվածությանը
- Ֆիզիոլոգիական և բիոքիմիական պրոցեսները հաշվի չեն առնվում
- Այլ տեսակների հետ փոխազդեցությունը հաշվի չի առնվում:

Տվյալ կենսաբանական տեսակի աճի դանդաղումը նկարագրող կորը ընդունված է անվանել լոգիստական:

Լոգիստիկան նախապես օգտագործվել է զինվորական ծառայության մատակարարման համակարգում (865-912 թթ.): Հունարեն λογιστική բառը նշանակում է «հաշվման արվեստ»: Բյուզանդական կայսերական պալատում կային «լոգիստներ», որոնց պարտականությունն էր սննդի բաշխումը:

Զարգացած լոգիստական մեթոդներ կարելի է գտնել նաև տարբեր դարաշրջանների մշակույթում: Այսպես, օրինակ, XVI դարի իսպանացի իրավաբան Խուան Պոլո դե Օնդեգարդոյի գրառումներում կարելի է հայտնաբերել, որ դեռևս ինկերի կայսրությունում պալատական սննդի մանրակրկիտ հաշվարկ էր իրականացվում, ընդ որում հաշվի էին առնվում թե ուղարկման վայրը, թե մատակարարման ժամկետները, միգրացն նույնիսկ, հեռավորությունները:

Անցնենք մաթեմատիկական մոդելի կառուցմանը: Նշանակենք ժամանակի t պահին տվյալ տեսակի թվաքանակը փակ արգելանոցում

$N(t)$ -ով, տեսակարար աճի հաստատուն գործակիցը՝ r -ով (ընդունված է անվանել բիոտիկ պոտենցիալ): Ներտեսակային պայքարով պայմանավորված մահացածությունը տեսակարար աճի գործակիցը (բիոտիկ պոտենցիալը) նվազեցնում է թվաքանակին համեմատական (δ -գործակցով): Այժմ կարող ենք գրել թվաքանակի աճի դինամիկայի հավասարումը

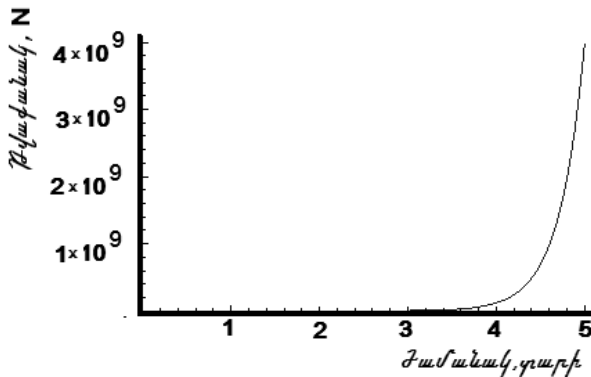
$$\frac{dN(t)}{dt} = (r - \delta \cdot N)N : \quad (5)$$

Այս հավասարումը կոչվում է «լոգիստական աճի» կամ «Ֆերհյուլստի» հավասարում:

Անդրադառնանք, նախ $\delta = 0$ դեպքին: (4) և (5) հավասարումներից հետևում է, որ $\lambda = f'(N) = r > 0$: Սա նշանակում է, որ հավասարակշռության $N = 0$ վիճակն անկայուն է: Իսկապես: Դժվար չէ գրել (5) հավասարման լուծումը $\delta = 0$ դեպքում

$$N(t) = N_0 \exp(rt) :$$

Այս կախվածությունը պատկերված է նկ.1-ում: Ինչպես երևում է նկարից, $\delta = 0$ դեպքում ճագարների թվաքանակը շատ արագ ձգտում է անվերջության:



Նկ. 1. Ճագարների թվաքանակի աճման դինամիկան ($\delta = 0$ դեպք):

$\delta \neq 0$ դեպքում (5) հավասարումը կարելի է լուծել փոփոխականների անջատման մեթոդով: Լուծման տեսքը հետևյալն է

$$N(t) = \frac{N_0 r}{(r - \delta \cdot N_0) \exp(-rt) + \delta \cdot N_0} : \quad (6)$$

Այստեղ $N(t=0)=N_0$: Նկատենք, (7) արտահայտության օգնությամբ կարելի է գտնել տվյալ սահմանափակ տարածքում առավելագույն բնակեցվածության մեծությունը

$$N_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{r}{\delta} : \quad (7)$$

Այս $N_{\max}$ մեծությունը կոչվում է տվյալ միջավայրի «կենսաբանական ծավալ»: Աղյուսակ 1-ում ներկայացված են կենդանական աշխարհի որոշ տեսակների աճի դինամիկան նկարագրող հաստատունները:

Աղյուսակ 1

	Տեսակը	r , միավոր./տարի	δ , միավոր./տարի
1	Ճագար	3.5	0,005
2	Փայտփորիկ	1,3	0,003
3	Եղջերու	0,36	0,001
4	Վագր	0,12	0,002
5	Գայլ	1.5	0,008
6	Սկյուռիկ	2	0,001
7	Աղվես	0.7	0,001
8	Արծիվ	0.7	0,004

Որպես օրինակ առանձնացված ներկայացնենք ճագարի համար հաշվարկը: Առանձնացնենք աղյուսակ 1-ից ճագարների աճը նկարագրող գործակիցները:

	Տեսակը	r , միավոր./տարի	δ , միավոր./տարի
	Ճագար	3.5	0,005

(7) հավասարման օգնությամբ կազմենք գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ հետևյալ աղյուսակը

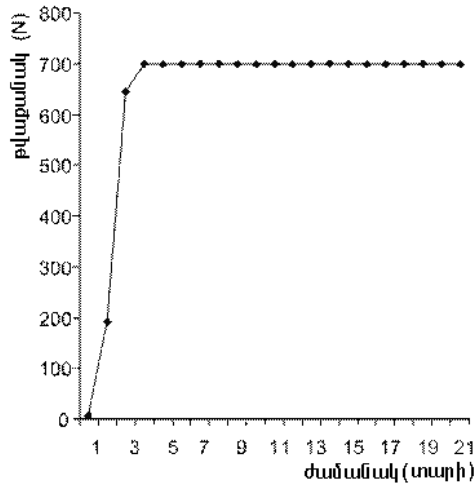
Աղյուսակ 2

t , տարի	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N , միավոր	190,5	646,5	698,2	699,9	700	700	700	700	700	700

Նկ. 2-ում պատկերված է ճագարների թվաքանակի աճը պատկերող գրաֆիկը՝ կառուցված (6) արտահայտության օգնությամբ:

Դժվար չէ նաև ճագարների համար գնահատել $N_{\max}$ -ի արժեքը,

$$N_{\max} = \frac{3.5}{0.005} = 700$$



Նկ. 2. Ճագարների թվաքանակի աճման դինամիկան ($\delta \neq 0$ դեպք):

Ինչպես երևում է գրաֆիկից, առաջին երեք տարիների ընթացքում ճագարների թվաքանակը կտրուկ աճում է, որից հետո այն սկսում է դանդաղել և 4.5 տարի անց հասնում է հնարավոր առավելագույն արժեքին:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԸ

1. Լուծել (1) հավասարումը փոփոխականների անջատման մեթոդով և ստանալ (2) լուծումը:
2. Գտնել (1) հավասարման ստացիոնար կետերը:
3. Ուսումնասիրել այդ կետերի կայունությունը Լյապունովի մեթոդով:
4. Կառուցել տվյալ տեսակի թվաքանակի դինամիկան կերի համար՝ ներտեսակային պայքարի բացակայությամբ:
5. Աղյուսակ 1-ի օգնությամբ կառուցել ներկայացված տեսակների լոգիստական գրաֆիկները:
6. Հաշվել $N_{\max}$ -ի արժեքը յուրաքանչյուր տեսակի համար:
7. Կառուցել $N(t)$ կախվածությունը $N_0 > N_{\max}$ դեպքում:

ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԱՌԱՋԱԴՐԱՆՔ

Աղյուսակ 3-ում ներկայացված են Երկրի բնակեցվածության մարդագրական (դեմքոգրաֆիական) տվյալները:

Աղյուսակ 3

<i>Տարի</i>	<i>Աշխարհի բնակեցվածությունը (մլն մարդ)</i>
1900	1630
1920	1811
1940	2295
1950	2527
1960	3060
1970	3727
1980	4430
1990	5294
1995	5779
2000	6228
2005	8472

1. Օգտվելով աղյուսակ 3-ից՝ հաշվել միջին բիոտիկ պոտենցիալը (r) և կառուցել մարդ բանականի (homo sapiens) էքսպոնենցիալ աճի գրաֆիկը:
2. Ընդունելով, որ մարդ տեսակի համար Երկրի էկոլոգիական տարողությունը կազմում է 6.5մլրդ՝ գտնել δ գործակիցը և կառուցել լոգիստական գրաֆիկը:

Աշխատանք 3

«ԳԻՇԱՏԻՉ-ՁՈՆ» ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈՂԵԼԱՎՈՐՈՒՄԸ

Աշխատանքի նպատակն է պարզագույն «Գիշատիչ-զոհ» համակարգի օրինակով ծանոթանալ մրցակցային հավասարումներին:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Ինչպես հայտնի է, կենդանի էակների փոփոխության հարցում ընտրության կարևորագույն գաղափարին Դարվինը հանգել է արհեստական ընտրության մեթոդների ուսումնասիրման ժամանակ: Բնության մեջ այդ ընտրության անալոգը նա գտել է Մալթուսի աշխատանքներին ծանոթանալուց հետո, ըստ որի բնական ընտրության պատճառ է մի կողմից կենդանի էակների թվի գերաճը, մյուս կողմից՝ անկատար էակների հսկայական չափերի հասնող կոտորածը: Մեզ համար առավել կարևոր է այն հանգամանքը, որ 1798 թ. Մալթուսն արդեն օգտվում էր պարզ մաթեմատիկական մոդելից

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N, \quad N = N_0 \exp(\varepsilon \cdot t), \quad (1)$$

որտեղ N -ը տվյալ տեսակի թվաքանակն է, ε -ը՝ աճի տեսակարար արագությունը, N_0 -ն՝ տեսակի թվաքանակը ժամանակի սկզբնական պահին:

Այս տեսության բնական զարգացումն էր 1928-1929 թթ. Վոլտերայի կողմից առաջարկված «Գոյության կռվի մաթեմատիկական տեսությունը», որի համար հիմք էին ծառայել միջերկրական ծովի շուկաներում գիշատիչ ձկների թվի տատանումները տարբեր տարիների ընթացքում: Ներկայումս այս մոդելը հիմք է հանդիսանում տեսական էկոլոգիայի և կյանքի էվոլյուցիայի տեսության համար:

Ենթադրենք, փակ արգելանոցում բնակվում են երկու տեսակներ՝ գիշատիչներ և զոհեր: Ձոհերը (օրինակ, նապաստակները, որոնց թիվը $N_1(t)$ է) սնվում են բուսական կերով, որի քանակն անսպառ է, իսկ գիշատիչները (օրինակ, աղվեսներ, որոնց քանակը $N_2(t)$ է) սնվում են բացառապես զոհերով: Եթե արգելանոցում բնակվում են միայն զոհեր, ապա նրանց քանակն աճում է

$$\dot{N}_1 = \varepsilon_1 N_1 : \quad (2)$$

$\varepsilon_1 > 0$ -ն աճի հաստատուն գործակիցն է: Արգելանոցում միայն գիշատիչների բնակվելու դեպքում նրանց քանակը նվազում է

$$\dot{N}_2 = -\varepsilon_2 N_2 : \quad (3)$$

$\varepsilon_2 > 0$ -ն նվազման հաստատուն գործակիցն է: Երկու տեսակների համատեղ գոյակցության պայմաններում գիշատիչների քանակը կաճի, իսկ զոհերինը՝ կնվազի այնքան ավելի արագ, որքան մեծ է նրանց հանդիպման հաճախությունը: Այսպիսով, տեսակների համատեղ գոյակցությունը կարելի է նկարագրել հավասարումների հետևյալ համակարգով

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2) \quad (4a)$$

$$\dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1) : \quad (4բ)$$

Նկատենք $\gamma_1 \neq \gamma_2$, քանի որ մեկ գիշատիչը կարող է ոչնչացնել մի քանի զոհի: Համակարգի դինամիկ հավասարակշռության վիճակին համապատասխանում է $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$, ուստի

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2} : \quad (5)$$

Ստացիոնար վիճակից փոքր շեղումների ($n_i \ll N_i, i = 1, 2$) դեպքում ներկայացնենք N_i -երը հետևյալ տեսքով

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \quad (6a)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t) : \quad (6բ)$$

Գծայնացնելուց (այսինքն, երկրորդ կարգի $n_1(t) \cdot n_2(t)$ գումարելին անտեսելուց) հետո ստանում ենք

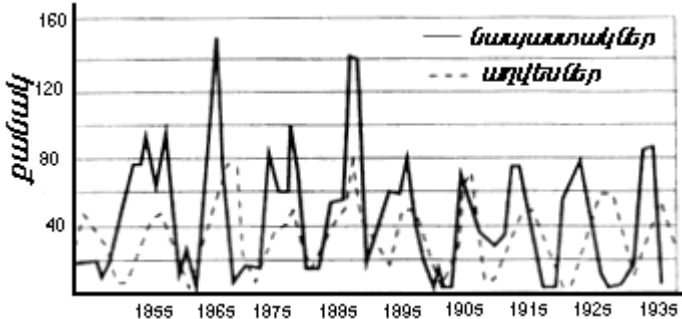
$$\dot{n}_1 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \varepsilon_2 n_2, \quad \dot{n}_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \varepsilon_1 n_1,$$

որտեղից, դիֆերենցելով առաջին հավասարումն ըստ t -ի և, օգտվելով երկրորդից, կարող ենք գրել

$$\ddot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0, \quad (7)$$

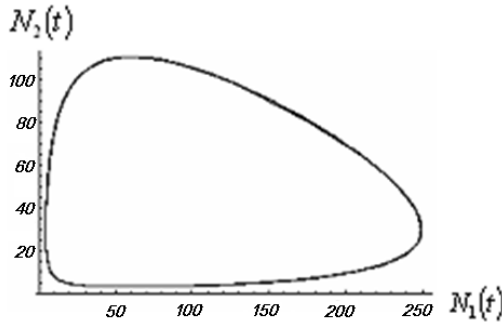
որտեղ $\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$: Ինչպես տեսնում ենք, գծայնացված դեպքում համակարգում տեղի են ունենում բնակեցվածությունների թվի հարմոնիկ տատանումներ:

Առավել ընդհանուր դեպքում տատանումները պահպանվում են, սակայն նրանց հարմոնիկ բնույթը խախտվում է: Ստորև բերված նկ. 1-ում պատկերված են աղվեսների և նապաստակների քանակի ժամանակային կախվածությունը (Կանադայի հյուսիսում կատարված դիտումների արդյունքները 1845-1935 թթ.):



Նկ. 1 Զիկլիկ տատանումները գիշատիչ-զոհ համակարգում:

Դժվար չէ կառուցել (4) համակարգի փուլային դիմանկարը՝ օգտվելով թվային մոդելավորումից: Նկ. 2-ում պատկերված է գիշատիչների և զոհերի ցիկլիկ փոփոխությունը պատկերող փուլային դիմանկարը, իսկ նկ. 3-ում՝ նրան համապատասխանող $N_1(t)$ և $N_2(t)$ կախվածությունները:

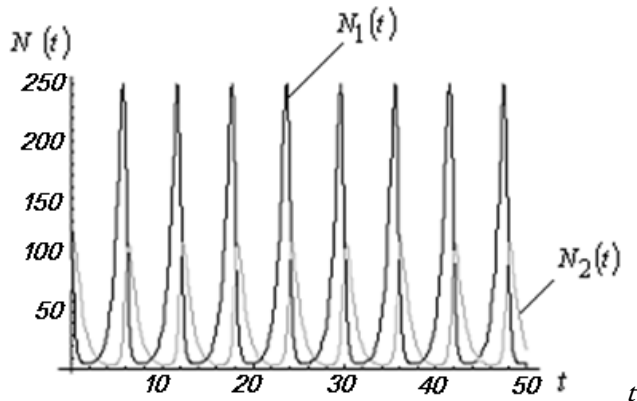


Նկ. 2 Գիշատիչ-զոհ համակարգի փուլային դիմանկարը:

Նման մոդելը, սակայն հաշվի չի առնում, որ անգամ գիշատիչների բացակայության դեպքում զոհերի թիվը սահմանափակ տարածքում չի կարող անսահման աճել: Երկու տեսակների աճի ինքնասահմանափակումը հաշվի առնող համակարգն ունի հետևյալ տեսքը

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= N_1(\varepsilon_1 - \gamma_{11}N_1 - \gamma_{12}N_2), \\ \dot{N}_2 &= -N_2(\varepsilon_2 + \gamma_{22}N_2 - \gamma_{21}N_1): \end{aligned} \quad (8)$$

Ավելացված $-\gamma_{11}N_1^2$ և $-\gamma_{22}N_2^2$ գումարելիները հենց արտահայտում են ինքնասահմանափակման պրոցեսները՝ պայմանավորված կերի համար ներտեսակային պայքարով (աշխ. 2, Ֆերիյուլսոի մոդել):



Նկ. 3. $N_1(t)$ և $N_2(t)$ մեծությունների ժամանակային կախվածությունները:

Քննարկված պարզագույն մոդելը կարելի է ընդհանրացնել տեսակների ավելի մեծ թվի համար: n -տեսակների առկայությամբ հավասարումների համակարգը կունենա հետևյալ տեսքը

$$\frac{dN_r}{dt} = \varepsilon_r N_r + \frac{1}{\beta_r} \sum_{s=1}^n \alpha_{sr} N_s N_r : \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

Այստեղ N_r -ը r -րդ տեսակի քանակն է: ε_r գործակիցները պայմանավորում են r -րդ տեսակի վարքը մյուս տեսակների բացակայության դեպքում: Հանդիպումների բացակայության դեպքում բոլոր տեսակները ժամանակի ընթացքում կամ անհետանում են ($\varepsilon_r < 0$), կամ նրանց թիվն անընդհատ աճում է ($\varepsilon_r > 0$): Երկրորդ գումարելին բնութագրում է տեսակների փոխազդեցությունը: Ըստ Վոլտերայի՝ $\alpha_{sr} = -\alpha_{rs}$: Եթե $\beta_r = 1$, ապա մի տեսակի կենսազանգվածի նվազումը ճշգրիտ կհամակշռվեր մյուսի աճով: $1/\beta_r$ դրական թիվը համարժեքության Վոլտերայի թիվն է, այնպես որ տեսակների միջև զույգ առ զույգ հանդիպումների դեպքում անհետացած (կամ ավելացած) s -րդ տեսակի քանակի հարաբերությունը r -րդ տեսակի ավելացածին (կամ կորցրածին) նույն ժամանակահատվածում հավասար է $\beta_s^{-1}/\beta_r^{-1}$: Երկու տեսակների առկայության դեպքում այս հավասարումը վերածվում է (8) համակարգին:

ՕՐԳԱՆԻԶՄԻ ԻՄՈՒՆԱՅԻՆ ՈՒԺԵՐԸ

Նախորդ քննարկումը տարածենք քաղցկեղածին բջիջների հետ օրգանիզմի իմունային համակարգի պայքարը նկարագրելու համար: Որպես փոփոխականներ հանդես են գալիս չարորակ բջիջների y («գոհ») և լիմֆոցիտների՝ x («գիշատիչ») թվերը: Հայտնի է, որ չարորակ նորագոյացությունների առկայությամբ լիմֆոցիտները սկզբնապես հայտնվում են մեծ քանակությամբ, իսկ ուռուցքի աճին զուգընթաց իմունային համակարգի ակտիվությունը նվազում է: Այդ դեպքում փոխազդեցության մոդելը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով

$$\frac{dx}{dt} = axy - bxy^2 - vx - \gamma xy + \chi, \quad (9a)$$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \gamma xy: \quad (9բ)$$

Այս մոդելի սահմաններում ընդունում են, որ

- լիմֆոցիտների բազմացման տեսակարար արագությունը

$$\mu = ay^2 - by$$

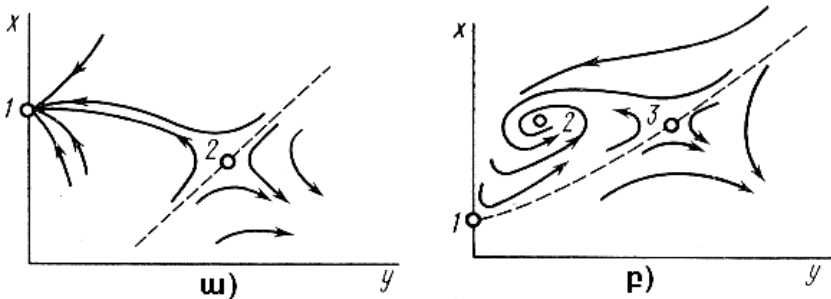
(փոքր y -երի դեպքում լիմֆոցիտների աճը խթանվում է ուռուցքի կողմից, մեծի դեպքում՝ արգելակվում):

- ուռուցքի բջիջների թիվն աճում է եքսպոնենցիալ օրենքով (α գործակցով),
- քաղցկեղային բջիջների և լիմֆոցիտների փոխազդեցության ժամանակ ոչնչանում են երկուսն էլ (γ գործակցով),
- Գոյություն ունի լիմֆոցիտների մշտական հոսք հաստատուն χ արագությամբ և նրանց բնական վախճան՝ $-vx$ արագությամբ:

Եթե χ հոսքը բավականաչափ մեծ է, ապա համակարգն ունի երկու հաստուկ կետ: Նրա փուլային դիմանկարը պատկերված է նկ. 4-ում:

Կախված սկզբնական պայմաններից՝ ինտեգրալ կորերը կամ գնում են կայուն 1 կետը, կամ հեռանում են անվերջություն ($x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$): Առաջին դեպքում մենք ունենք լրիվ առողջացում, երկրորդ դեպքում՝ ուռուցքի անսահման աճ և լիմֆոցիտների նվազում: Առողջացման և հիվանդության տիրույթները բաժանված են սեպարատրիսայով, որն անցնում է 2 կետով: Ըստ փուլային դիմանկարի, հասկանալի է, որ ուռուցքի ճնշման համար երբեմն բարերար ազդեցություն կարող է ունենալ իմունային համակարգի կողմնակի խթանումը, որը

սակայն արդյունավետ կարող է լինել միայն հիվանդության նախնական փուլում:



Նկ. 4 *Լիմֆոցիտների (x) և չարորակ բջիջների (y) փոխազդեցությունը նկարագրող փուլային դիագրամը: Ընդհատ գիծը համակարգի սեպարատրիսան է. ա) 1 - կայուն հանգույց, 2 - թամբ, բ) 1 և 3 - թամբ, 2 - կայուն կիզակետ:*

Պարամետրերի որոշ կոմբինացիաների դեպքում հնարավոր է այլ տարբերակ ևս՝ երբ հայտնվում է երրորդ հատուկ կետը, x առանցքի վրայի 1 կետը դառնում է անհավասարակշիռ և ինտեգրալ կորերը փաթթվում են կայուն 2 կետին, իսկ 3 կետով անցնում է սեպարատրիսան: Այս դեպքում լրիվ առողջացում չի դիտվում և մի շարք տատանումներից հետո օրգանիզմի իմունային ուժերի և չարորակ նորագոյացության միջև հաստատվում է հավասարակշիռ վիճակ:

Այսպիսով, նույնիսկ պարզագույն մոդելը հնարավորություն է տալիս լուսաբանել ուռուցքի հետ օրգանիզմի պայքարի մի շարք հարցեր: Իհարկե, այն չի առաջարկում պայքարի արդյունավետ մեթոդներ, սակայն մոդելավորումը խթանում է այդ բնագավառում էքսպերիմենտալ ուսումնասիրությունները: Այսպես, օրինակ, իմունային համակարգերի մոդելները հնարավորություն են տվել բացահայտել մի շարք սուբ վարակիչ հիվանդությունների ընթացքի առանձնահատկությունները (օրինակ, մալարիա, թոքախտ) ճշտվել են մի շարք դեղամիջոցների ներարկման հետ կապված խնդիրները:

Այսպիսով, կենսաբանական կինետիկան կարող է օգնել բժշկությանը հայտնաբերելու բուժման մեթոդների ռացիոնալ ստրատեգիան, քանի որ դեղի ազդեցությունը մաթեմատիկական լեզվով նշանակում է կենդանի օրգանիզմները բնութագրող պարամետրերի ղեկավարում:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԸ

1. Հավաքել (4) մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող ծրագիր:
2. Կառուցել $N_1(t), N_2(t)$ գրաֆիկները և $N_1(N_2)$ փուլային դիմանկարը:
3. Փոփոխելով առաջարկված պարամետրերը՝ ուսումնասիրել համապատասխան գրաֆիկների վարքը:
4. γ_{11}, γ_{22} գործակիցների տարբեր արժեքների դեպքում (8) համակարգի ուսումնասիրությամբ քննարկել համապատասխան գրաֆիկների փոփոխությունը սննդի պաշարի սահմանափակության հաշվառման պայմաններում:

Աշխատանք 4

ԼՈԳԻՍՏԻԿԱԿԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄ

Աշխատանքի նպատակն է ծանոթանալ դետերմինացված քառսի անցման պարբերության կրկնապատկման սցենարին:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Բազմաթիվ համակարգերի էվոլյուցիան կարող է նկարագրվել առաջին աստիճանի սովորական n դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով.

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \vec{F}(\vec{X}, t) \quad (1)$$

որտեղ $\vec{X}$ -ը n չափանի վեկտոր է R^n փուլային տարածությունում, իսկ $\vec{F}$ -ը՝ այդ տարածության վրա վեկտորական դաշտը: Հենց այդպիսի տեսք ունեն տարբեր օսցիլյատորների վարքը նկարագրող հավասարումները: Այն դեպքերում, երբ հավասարումն ավելի բարձր կարգի է, համապատասխան նշանակումով այն կարելի է հանգեցնել առաջին կարգի մի քանի հավասարումների համակարգի:

Նկատենք, որ դինամիկ համակարգի վարքի նկարագրությունը դիֆերենցիալ հավասարումների օգնությամբ միակ հնարավորը չէ: Մի շարք դեպքերում համակարգի դինամիկան նկարագրում են աճերով հավասարումների օգնությամբ

$$\vec{X}(t_{n+1}) = F(\vec{X}(t_n)) \quad (2)$$

կամ ավելի համառոտ՝ $\vec{X}_{n+1} = F(\vec{X}_n)$: Այսպիսի արտապատկերման օրինակ են հանդիսանում բազմաթիվ խաղեր, որտեղ անցումը n վիճակից $n+1$ -ին պայմանավորված է քայլով: Ուստի, (2) կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$\vec{X}(t_{n+1}) = F(\vec{X}(t_n, \mu)) : \quad (2a)$$

Նկատենք, նմանատիպ համակարգերը, այսինքն հետադարձ կապով համակարգերը, լայնորեն տարածված են ֆիզիկայում և մաթեմատիկայում: Այս դեպքում յուրաքանչյուր նախորդ քայլը հաջորդի համար ծառայում է որպես սկզբնական արժեք (տե՛ս նկ. 1):

Համառոտ հիշեցնենք, թե ինչպես մեկ դիֆերենցիալ հավասարումով նկարագրվող համակարգում կարող է առաջանալ արտապատկերումը կամ դիսկրետ ժամանակը:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը

$$\frac{dx}{dt} = f(x):$$

Ըստ սահմանման՝

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

ուստի և

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx \frac{dx}{dt} \cdot \Delta t,$$

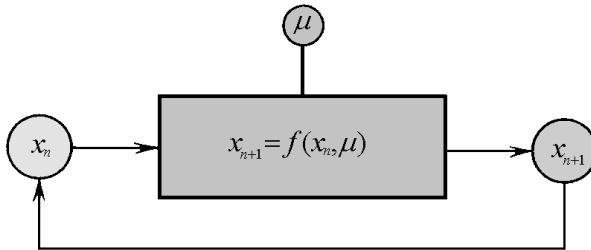
որտեղից էլ

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(x(t)) \cdot \Delta t$$

կամ

$$x_{k+1} \equiv f_1(x_k):$$

Այսպիսով, դիֆերենցիալ հավասարմամբ նկարագրվող հոսքը կարելի է հանգեցնել դիսկրետ ժամանակով ներկայացվող արտապատկերման:



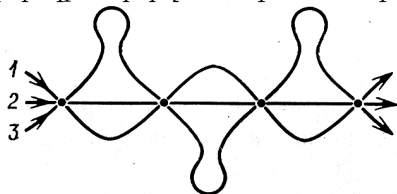
Նկ. 1. (2ա) հավասարման մեկնաբանությունը:

Եթե, դինամիկ համակարգը նախապես տրված է արտապատկերմամբ, ապա միշտ չէ, որ կարելի է գտնել նրան համարժեք դիֆերենցիալ հավասարումներ: Դա մասնավորապես պայմանավորված է հետևյալ հանգամանքով. եթե տրված կետերով կարելի է տանել մեկ կոր, ապա կարելի է տանել նաև անվերջ թվով այլ կորեր: Որպես օրինակ, նկ. 2-ում բերված են երեք տարբեր կորեր, որոնք անցնելով միևնույն կետերով, ներկայացվում են տարբեր հավասարումներով: Անցնելով նորմավորված մեծությունների՝ $x_n \rightarrow (r/s)x_n$, և վերանշանակելով $r = 4\mu$, ստանում ենք

$$x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n): \quad (3)$$

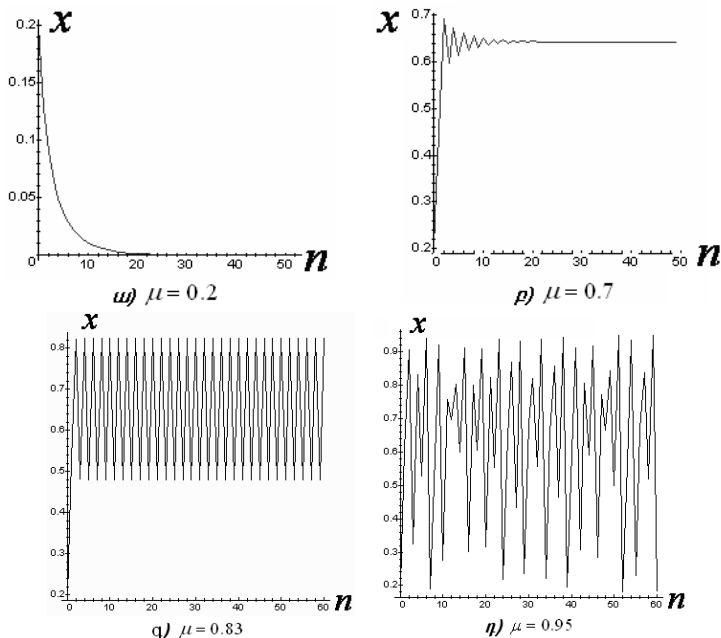
Այստեղ $0 \leq \mu \leq 1$: Այս հավասարումը կոչվում է լոգիստական (տե՛ս նաև աշխ.2): Այժմ խնդիրը այս հավասարման լուծման վարքի ուսում-

նասիրությունն է: Անդրադառնանք այդ լուծման կախվածությանը μ պարամետրից: (3) հավասարման թվային լուծումը μ պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում բերված է նկ. 3-ում: Ակնառության համար



Նկ. 2. 1,2,3 կորերը անցնելով նույն կետերով կարող են բավարարել տարբեր հավասարումների:

հաջորդական լուծումները միացված են ուղիղներով: Ինչպես երևում է նկարից, μ պարամետրի փոփոխման դեպքում համակարգի վարքն էապես փոխվում է՝ կայունացված լուծման զրոյական արժեքից սկսած (նկ. 3ա) մինչև քառասային վարք (նկ. 3դ): Մասնավորապես, նկ. 3բ-ում



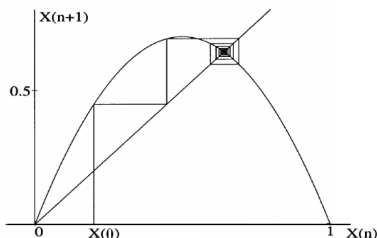
Նկ. 3. Լոգիստիկական արտապատկերման (3) հավասարման լուծումը $x_0 = 0.2$ սկզբնական պայմանի դեպքում

կարճ անցումային տիրույթից հետո բնակեցվածության թիվը հասնում է կայունացված արժեքի $x^* = 0.642857\dots$: Նկ. 3գ-ում այդ արժեքները երկուսն են՝ $x_1^* = 0.479427\dots$ և $x_2^* = 0.823603\dots$: Դա նշանակում է, որ բնակեցվածությունը կրկնվում է երկու ցիկլից հետո: Վերջին դեպքում, ինչպես տեսնում ենք, համակարգի վարքը դառնում է քառասյին:

Երկրաչափական մեկնաբանություն

(x_n, x_{n+1}) հարթության վրա միաչափ արտապատկերման ուսումնասիրման դասական միջոցը գրաֆիկական եղանակն է՝ $x_{n+1} = f(x_n)$ ֆունկցիայի և նույնական $x_{n+1} = x_n$ արտապատկերման գրաֆիկների միջոցով: Որպես այս մեթոդի ցուցադրման օրինակ քննարկենք ոչ գծային (3) արտապատկերումը (նկ. 4.):

Հարթության վրա նախ պատկերենք $y = 4\mu x(1-x)$ պարաբոլը, իսկ այնուհետև 45° ուղիղ գիծը, որը համապատասխանում է $x_{n+1} = x_n$ արտապատկերմանը: Սկսենք, օրինակ, $x_0 = 0.2$ արժեքից: Տեղադրենք այս արժեքը (3) հավասարման մեջ և որոշենք $x_1 = f(x_0)$ արժեքը:



Նկ. 4. Լոգիստիկական արտապատկերման երկրաչափական ներկայացումը. $\mu = 0.7$; $x_0 = 0.2$:

x_1 արժեքը երկրաչափորեն համապատասխանում է $x_0 = 0.2$ կետում կանգնեցված ուղղահայացի և պարաբոլի հատման կետին: Հատման կետից կառուցենք հորիզոնական ուղիղ մինչև 45° ուղղի հետ հատվելը: Ստացված արժեքը կլինի սկզբնական արժեք նոր ցիկլի համար և այսպես շարունակ: Նկ. 3-ում պատկերված դեպքի համար ստացվում է ֆիքսված կետ $x_1^* = 0.642857\dots$, որը համապատասխանում է $x_1^* = f(x_1^*)$ արտապատկերմանը: Տվյալ դեպքում կարելի է ասել, որ ունենք ատրակտոր մեկ պարբերությամբ: Ինչպիսին էլ լինի սկզբնական

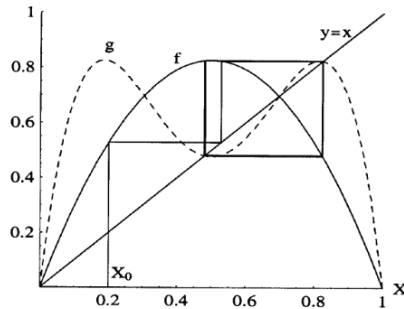
x_0 արժեքը, կստացվի միշտ նույն անշարժ x_1^* արժեքը: Նկ. 5-ում պատկերված է լոգիստիկական արտապատկերումը $\mu = 0.83$ դեպքում: Ինչպես երևում է նկարից, արտապատկերումը շատ արագ դուրս է գալիս երկպարբերական ռեժիմի (ուղղանկյան):

Այս իրավիճակը մաթեմատիկորեն ներկայացվում է հետևյալ տեսքի արտապատկերմամբ

$$x_2^* = f(x_1^*); x_1^* = f(x_2^*) \tag{4}$$

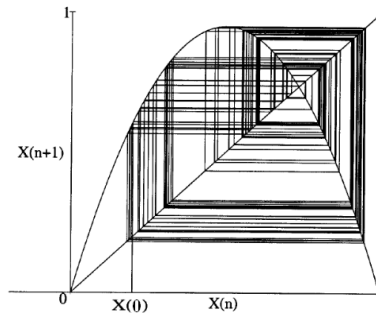
Հեշտ է տեսնել, որ x_1^*, x_2^* կետերը հանդիսանում են

$$g(x) = f(f(x)) = f^2(x) \tag{5}$$



Նկ. 5. Լոգիստիկական արտապատկերման երկրաչափական ներկայացումը. $\mu = 0.83; x_0 = 0.2$

արտապատկերման անշարժ կետեր: Այդ արտապատկերումը նույնպես ներկայացված է նկ. 4-ում ընդհատ գծով: Վերջապես, նկ. 6-ում պատկերված է լոգիստիկական արտապատկերումը $\mu = 0.95$ դեպքում:



Նկ.6. Լոգիստիկական արտապատկերման երկրաչափական ներկայացումը. $\mu = 0.95; x_0 = 0.2$

Ինչպես տեսնում ենք համակարգի վարքում չկան անշարժ կետեր և վարքը քառասային է:

Այժմ գտնենք μ պարամետրի այն արժեքները, որի դեպքում անշարժ կետերը կորցնում են իրենց կայունությունը: Նախ, անդրադառնանք միակ անշարժ կետին համապատասխանող արտապատկերմանը

$$x_1^* = 4\mu x_1^*(1 - x_1^*) :$$

Համապատասխան լուծումները երկուսն են. $x_1^* = 0$ և $x_1^* = 1 - 1/4\mu$: Պարզենք, թե այս լուծումներից յուրաքանչյուրը երբ է դադարում անշարժ կետ լինել: Դիտարկենք փոքր շեղում x_1^* անշարժ կետից

$$x_0 = x_1^* + \varepsilon$$

$x_1 = f(x_0)$ արտապատկերման համար: Վերածելով Թեյլորի շարքի՝ ստանում ենք

$$x_1 = f(x_1^*) + \varepsilon(\partial f / \partial x_0)_{x_1^*} :$$

Այստեղից

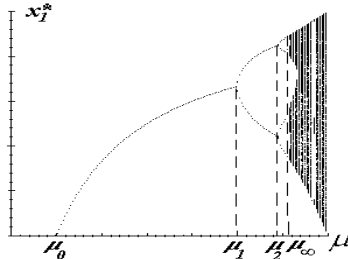
$$|x_1 - x_1^*| = |x_0 - x_1^*| \left| (\partial f / \partial x_0)_{x_1^*} \right| : \quad (6)$$

(6) արտահայտությունից հետևում է, որ, եթե $\left| (\partial f / \partial x_0)_{x_1^*} \right| < 1$, ապա $|x_1 - x_1^*| < |x_0 - x_1^*|$, ինչը նշանակում է, որ x_1^* -ը կայուն է: Դժվար չէ այս դատողություններով համոզվել, որ $x_1^* = 0$ անշարժ կետը կորցնում է կայունությունը, երբ $\mu_0 > 0,25$: Նույն ճանապարհով կարող ենք համոզվել, որ $x_1^* = 1 - 1/4\mu$ անշարժ կետը կորցնում է իր կայունությունը, երբ $\mu_1 > 0,75$: Նման ճանապարհով կարելի է վերլուծել նաև (5) և ավելի բարձր կարգի արտապատկերումների անշարժ կետերի կայունության հարցը: Կտանանք հետևյալ աղյուսակը.

Աղյուսակ 1

Ատրակտորի պարբերությունը	μ_i -ի արժեքը
$2^0 = 1$	$\mu_1 = 0,75$
$2^1 = 2$	$\mu_2 = 0,86237$
$2^2 = 4$	$\mu_3 = 0,88602$
$2^3 = 8$	$\mu_4 = 0,89218$
...	...
$2^\infty = \infty$	$\mu_\infty = 0,892486418...$

Նկ. 7-ում պատկերված է ստացիոնար լուծումների կախվածությունը μ պարամետրից:



Նկ. 7. Ստացիոնար լուծումների կախումը μ պարամետրից:

Քառսի անցման այս սցենարը կոչվում է պարբերության կրկնապատկման կամ Ֆեյզենբաումի սցենար: Կարելի է համոզվել, որ կրկնապատկման (կամ, ինչպես ընդունված է անվանել բիֆուրկացայի) կետերին համապատասխանող μ պարամետրի արժեքները բավարարում են հետևյալ առնչությանը

$$\delta = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} + \mu_i} = 4,6692016091029909....$$

Այս δ հաստատունը կոչվում է Ֆեյզենբաումի հաստատուն:

Միաշափ արտապատկերման անշարժ կետի գոյության ու կայունության վերաբերյալ այստեղ քննարկված արդյունքները ճշմարիտ են ոչ միայն ցուցադրման համար ընտրված քառակուսային ֆունկցիայի, այլ նաև ավելի ընդհանուր արտապատկերումների համար:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅՔԸ

1. Հավաքել (3) մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող ծրագիր:
2. Կառուցել $x(n)$ կախվածությունը μ պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:
3. Փոփոխելով առաջարկված պարամետրերը՝ ուսումնասիրել համապատասխան գրաֆիկների վարքը:
4. Կառուցել $x(n+1)$ կախվածությունը $x(n)$ -ից μ պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:
5. Կառուցել ստացիոնար լուծումների μ պարամետրից կախումը պատկերող դիագրամը:

Աշխատանք 5

ՇՐՋՎԱԾ ՕՍՑԻԼՅԱՏՈՐԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Աշխատանքի նպատակն է ծանոթանալ քառասային վարքի անցմանը պարզ մեխանիկական համակարգում:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Դինամիկ համակարգ ասելով հասկանում են ցանկացած բնության օբյեկտ, որի վարքը ժամանակի ընթացքում փոխվում է համաձայն որոշակի օրինաչափության, այսինքն՝ էվոլյուցիայի դետերմինացված օպերատորի ազդեցությամբ: Այսպիսով, **դետերմինացված** համակարգ հասկացությունը որոշակի իդեալականացման հետևանք է, երբ անտեսվում են իրական ֆիզիկական համակարգում մշտապես առկա **պատահական գործոնները**: Հետևաբար, դետերմինիստական մոտեցումը արդարացված է բոլոր այն դեպքերում, երբ պատահական ուժերի (ֆլուկտուացիաների) ազդեցությունն արհամարհելիորեն փոքր է, և նրանց վիճակագրական բնութագրերը էական դեր չեն խաղում համակարգի վարքի բնութագրման ժամանակ: Դինամիկ համակարգերի լայն դասում առանձնահատուկ դեր են զբաղեցնում այն համակարգերը, որոնցում հնարավոր են տատանումներ (ճոճանակի տատանումները, էլեկտրական տատանումները LC կոնտուրում, ակուստիկական տատանումները, բազմաբնույթ կենսառիթմերը և այլն):

Միաչափ համակարգի վարքի նկարագրությունը կարող ենք ստանալ՝ օգտվելով Լագրանժի հավասարումից

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}} \quad (1)$$

Այստեղ

$$L = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} - u(\theta) \quad (1a)$$

դինամիկ համակարգի Լագրանժի ֆունկցիան է, $R = 0.5 \Gamma \dot{\theta}^2$ դիսիպատիվ ֆունկցիան, որը հաշվի է առնում բոլոր հնարավոր կորուստները (Γ -ն մարման գործակիցն է): Համակարգի $\theta = 0$ հավասարակշռության վիճակից փոքր շեղումների դեպքում $u(\theta)$ պոտենցիալ էներգիան կարելի է վերածել Թեյլորի շարքի

$$u(\theta) = u(0) + \sum_{n=1} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} \theta^n : \quad (2)$$

Տեղադրենք (1) հավասարման մեջ: Հաշվի առնենք, որ հավասարակշռության դիրքում $u'(0) = 0$ և նշանակենք

$$\gamma = \frac{\Gamma}{ml^2} ; \quad \beta_n = \frac{1}{ml^2} \frac{u^{(n)}(0)}{(n-1)!} :$$

Տեղադրելով (2) վերլուծությունը (1) հավասարման մեջ՝ ստանում ենք

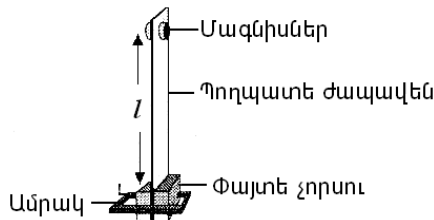
$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \beta_3 \theta^3 + \dots = 0 : \quad (3)$$

(3) հավասարման աջ մասում ավելացնելով նաև պարբերական արտաքին ազդեցությունը, ստանում ենք ոչ գծային ոչ ավտոնոմ դիսսիպատիվ համակարգի վարքը նկարագրող հավասարումը

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \beta_3 \theta^3 + \dots = F \cos \omega t : \quad (4)$$

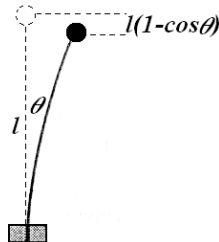
Առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում այն դեպքը, երբ ոչգծայնությունը խորանարդային կարգի է, այսինքն $\beta_n = 0$, երբ $n = 2$ և $n \geq 4$: Համապատասխան հավասարումն ընդունված է անվանել Դյուֆինգի հավասարում և այն շատ հաճախ է հանդիպում տարբեր ֆիզիկական պրոցեսներում: Ինչպես հայտնի է, $\beta_1 > 0$ դեպքը համապատասխանում է դրական նշանով վերադարձնող ուժին, իսկ $\beta_1 < 0$ ՝ բացասական: Վերջին դեպքը հատկապես աչքի է ընկնում, քանի որ արտաքին հարմոնիկ ուժի առկայությամբ նշված համակարգը դրսևորում է քաոսային վարք:

Բացասական վերադարձնող ուժով համակարգի օրինակ է շրջված ճոճանակը (Էյլերի սյուն), որը պատկերված է նկ. 1-ում:



Նկ. 1. Շրջված ճոճանակի պատկերը:

Փոխադրեցության պոտենցիալ էներգիայի գրոյական մակարդակ ընտրենք հավասարակշռության դիրքը և համակարգը հանենք հավասարակշռության վիճակից (նկ. 2): Քանի որ, բացի գրավիտացիոն պո-



Նկ. 2. Շրջված ճռճանակի տատանումները

տենցիալ էներգիայից, ճռճանակն ունի նաև պոդպատե ժապավենի առաձգական դեֆորմացիայով պայմանավորված պոտենցիալ էներգիա, կարող ենք գրել

$$V = \frac{k\theta^2}{2} - mgl(1 - \cos \theta): \quad (5)$$

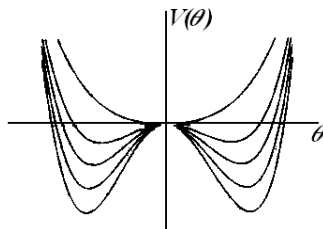
Այստեղ V -ն համակարգի լրիվ պոտենցիալ էներգիան է, իսկ k -ն՝ պոդպատե ժապավենի կոշտությունը: Համարելով θ -ն փոքր՝ վերածենք $\cos \theta$ -ն Թեյլորի շարքի

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}, \quad (6)$$

որտեղից պոտենցիալ էներգիայի համար կստանանք

$$V = \frac{1}{2}(k - mgl)\theta^2 + \frac{1}{24}mgl \cdot \theta^4: \quad (7)$$

Հեշտ է տեսնել, որ θ^2 -ու գործակիցը կարող է լինել ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական: l -ի մեծությունից կախված՝ պոտենցիալ էներգիայի տեսքը բերված է նկ. 3-ում: Ինչպես տեսնում ենք, $\theta = 0$ կետում



Նկ. 3. V -ի կախվածությունը θ -ից:

գոյություն ունի պոտենցիալ էներգիայի լոկալ մաքսիմում, որը համապատասխանում է «թամբ» հավասարակշռության վիճակին:

Այժմ կարելի է ստանալ այսպիսի ճոճանակի տատանման հավասարումը: Գրենք Լագրանժի ֆունկցիան

$$L = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{1}{2}(k - mgl)\theta^2 - \frac{mgl}{24}\theta^4, \quad (8)$$

և տեղադրենք այն Լագրանժի (1) հավասարման մեջ: Որոշակի գործողություններ կատարելուց հետո կստանանք

$$ml^2 \ddot{\theta} + \Gamma \dot{\theta} + (k - mgl)\theta + \frac{1}{6}mgl\theta^3 = F \cos \omega t : \quad (9)$$

Բաժանելով ml^2 -ու վրա, վերջնականորեն ստանում ենք.

$$\ddot{\theta} + \frac{\Gamma}{ml^2} \dot{\theta} + \left(\frac{k}{ml^2} - \frac{g}{l} \right) \theta + \frac{1}{6} \frac{g}{l} \theta^3 = f \cos \omega t : \quad (10)$$

Դժվար չէ այս հավասարումը ներկայացնել առաջին աստիճանի հավասարումների համակարգի տեսքով

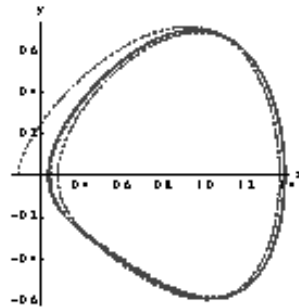
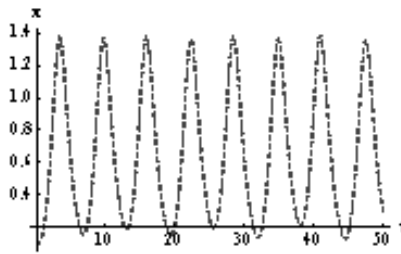
$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{\Gamma}{ml} y - \left(\frac{k}{ml^2} - \frac{g}{l} \right) \theta - \frac{1}{6} \frac{g}{l} \theta^3 + f \cos \Phi \\ \dot{\Phi} &= \omega \end{aligned} \right\} : \quad (11)$$

Համառոտության համար նշանակենք

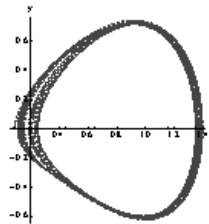
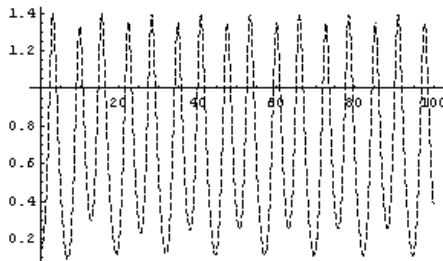
$$\alpha = \left(\frac{k}{ml^2} - \frac{g}{l} \right), \quad \gamma = \frac{\Gamma}{ml}, \quad \beta = \frac{1}{6} \frac{g}{l} :$$

Այսպիսով, անհրաժեշտ է ուսումնասիրել հավասարումների (11) համակարգի վարքը α, β, γ, f պարամետրերի տարբեր արժեքների դեպքում: Ուսումնասիրման համար վերցնենք հետևյալ թվային արժեքները՝ $\alpha = -1$; $\gamma = 0,25$; $\beta = 1$; $\omega = 1$ և հետևյալ սկզբնական պայմանները՝ $\theta(0) = 0,09$; $y(0) = 0$; $\Phi(0) = 0$

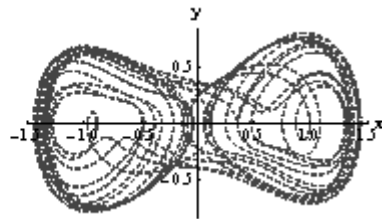
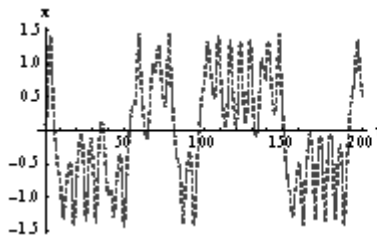
ա) $f = 0,32$ - սահմանային ցիկլ



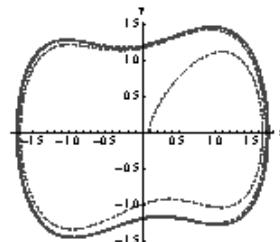
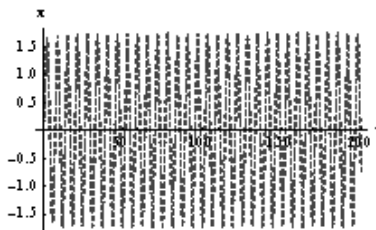
բ) $f = 0,34875$ - կրկնակի սահմանային ջրիկ



գ) $f = 0,42$ - քառու:



դ) $f = 0,85$ - անցում քառսային ռեժիմից կարգավորվածի



ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՑՔԸ

1. Հավաքել (11) մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող ծրագիր:
2. Կառուցել $x(t)$ կախվածությունը f պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:
3. Փոփոխելով առաջարկված պարամետրերը՝ ուսումնասիրել համապատասխան գրաֆիկների վարքը:
4. Մեկնաբանել ստացված արդյունքները:

Բաժին I I.
Փորձարարական լաբորատոր
աշխատանքներ

Աշխատանք 6

ՎԻՆԻ ԿԱՄՐՋԱԿ: ԿԱՅՈՒՆ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՑԻԿԼ

Աշխատանքի նպատակն է Վինի կամրջակն օգտագործել այնպիսի ազդանշանի հետազոտման համար, որը սկսվում է անկայուն կիզակետում և ավարտվում կայուն սահմանային ցիկլում (աշխ. 1): Ընդ որում, աշխատանքի ընթացքում ուսումնասիրվում են ազդանշանի թե՛ անցումային, թե՛ կայուն փուլերը:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Կայուն սահմանային ցիկլ ստանալու համար աշխատանքում որպես գեներատոր օգտագործվում է էլեկտրոնային շղթա՝ հիմնված Վինի կամրջակի վրա: Վինի կամրջակը հատուկ ուսումնասիրվում է տարրական էլեկտրոնիկայի դասընթացում, քանի որ այն ձևավորում է շատ ճշգրիտ և կայուն սինուսոիդալ տատանումներ: Վինի կամրջակի ստեղծած տատանումներն ավտոնոմ են, այսինքն՝ հարկադրող ուժը հաստատուն է: Ստացված պարբերական շարժումը կոչվում է սահմանային ցիկլ և այն հետևանք է համակարգի ավտոնոմության և կորուստների նշանափոխության: Վինի կամրջակում օգտագործվում է դրական և բացասական հակադարձ կապերի (ԴՀԿ և ԲՀԿ^{*)} հավասարակշռումը կայուն սինուսոիդալ ազդանշան ստանալու համար (հիշեք ուժեղացուցչում սուլոցի առաջացումը, երբ միկրոֆոնը մոտիկ է գտնվում բարձրախոսին): Երբ շղթան նոր է միացված սնման աղբյուրին, դրական հակադարձ կապն ուժեղ է, քան ոչ գծային բացասական հակադարձ կապը: Շղթայում միշտ առկա սկզբնական ցանկացած աղմուկ (լայն սպեկտրով) աճում է և համակարգը հեռանում է անկայուն կիզակետից: Քանի որ ԲՀԿ-ի ոչ գծային դիմադրությունում (շիկացման լամպ կամ թերմիստորներ) տատանման լայնույթը մեծանում է, հոսանքը նույնպես աճում է և, որպես հետևանք, ոչ գծային դիմադրությամբ վերահսկվող բացասական հակադարձ կապն աճում է մինչև դրական հակադարձ կապին համակշռելը: Երբ նրանք հավասարվում են, շղթան հասնում է սահմանային ցիկլի շեմին և սկսվում են պարբերական տատանումները:

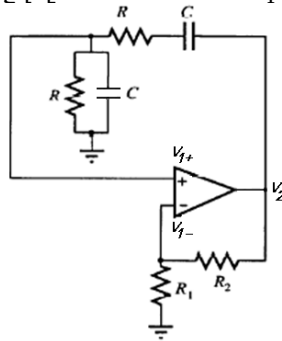
^{*)} ԴՀԿ-ն ելքային լարման որոշակի մասի վերադարձն է մուտք՝ առանց փուլի փոփոխության (համափուլ), իսկ ԲՀԿ-ն՝ նույնը, սակայն 180° փուլային շեղմամբ (հակափուլ):

Վիճի կամրջակի շղթան հիմնականում աշխատում է շեմի շրջակայքում, և, այդ դեպքում, գեներատորի ելքային լարումը գրեթե իդեալական սինուսոիդալ տատանում է: Մահմանային ցիկլի փուլային դիմանկարը շրջանագիծ է: Վիճի կամրջակի սխեմատիկ պատկերը ներկայացված է նկ. 1-ում: Նկարում եռանկյունով նշանակված է օպերացիոն ուժեղացուցիչը (ՕՈԻ), որն ունի երկու անկախ մուտքեր:

Ներկայացնենք իդեալական օպերացիոն ուժեղացուցչի աշխատանքի վերաբերյալ որոշ տեղեկություններ:

1. Օպերացիոն ուժեղացուցչի մուտքերը նշանակված են (+) և (-) նշաններով: ՕՈԻ-ի շրջող (ինվերտող) մուտքում բացասական (-) նշանը բևեռայնությունը չէ: Դա նշանակում է, որ մուտքային և ելքային ազդանշանները շեղված են 180° -ով (հակափուլ): (+) նշանը համապատասխանում է փուլային շեղման բացակայությանը (համափուլ):
2. Չշրջող և շրջվող մուտքերի մեջ կապ գոյություն չունի: Իդեալական ՕՈԻ-ն ունի անվերջ մեծ մուտքային դիմադրություն:
3. Հաստատուն լայնությամբ ելքային ազդանշան ստանալու համար չշրջող և շրջող մուտքերի լարումները պետք է լինեն հավասար:

ՕՈԻ-ի ելքային դիմադրությունը շատ փոքր է: Այդ կանոններից օգտվելով՝ կարելի է հաշվել ԲՀԿ և ԴՀԿ մեծությունը:



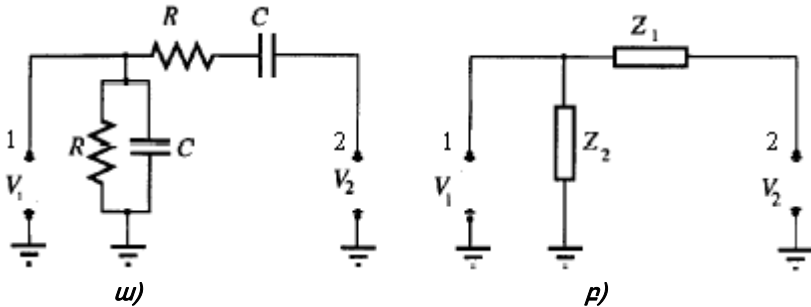
Նկ. 1. Վիճի կամրջակը որպես գեներատոր (ԴՀԿ և ԲՀԿ):

Ամբողջ շղթայի գործողությունը հասկանալի դարձնելու համար նախ քննարկենք դրական և բացասական հակադարձ կապերն առանձին-առանձին, այնուհետև միաժամանակյա աշխատանքի դեպքում:

Նկ. 1-ում դրական հակադարձ կապի (ԴՀԿ) առանձնացված տիրույթի համարժեք սխեման բերված է նկար 2-ում: Z_1 և Z_2 դիմադրու-

թյունների կոմպլեքս դիմադրությունները ներկայացված են ուղղանկյան տեսքով:

Որոշենք ՕՈԻ-ի V_2 ելքից փոփոխական ազդանշանի n° ր մասն է վերադառնում V_1 մուտք: Բոլոր ազդանշանների լարումները չափվում են հողանցման 0 կետի նկատմամբ: Օպերացիոն ուժեղացուցչի 2 և 0 կետերի միջև V_2 ելքային լարման առկայությամբ է պայմանավորված հոսանքը Z_1 և Z_2 կոմպլեքս դիմադրություններով:



Նկ. 2. Դրական հակադարձ կապը (ա) և նրա համարժեք սխեման (բ):

Հաջորդաբար միացված Z_1 և Z_2 կոմպլեքս դիմադրություններով հոսանքի մեծությունը

$$I = \frac{V_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (1)$$

որտեղ $Z_1 = R - jX$, $Z_2 = -jRX / (R - jX)$, ունակության ռեակտիվ դիմադրությունը $X = 1/\omega C = 1/2\pi\nu C$, $j = \sqrt{-1}$ կեղծ միավորն է, ν -ն՝ փոփոխական ազդանշանի հաճախությունը: Փոփոխական ազդանշանի լարումը հողակցման և 1 ելքի միջև $V_{1+} \equiv V_1$ է, այսինքն, $V_1 = IZ_2$ և, վերջնականորեն,

$$V_1 = V_2 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}: \quad (2)$$

R և X նշանակումները հաշվի առնելով՝ (2)-ը կգրենք հետևյալ տեսքով

$$V_1 = V_2 \frac{(-jRX)}{(R^2 - X^2) - j(3RX)}: \quad (3)$$

Հավասարումից անմիջապես երևում է, որ V_1 -ն իր առավելագույն արժեքին հասնում է $R = X$ դեպքում: Դրանում կարելի է համոզվել ա-

ծանցելով (3) հավասարումն ըստ X -ի և հավասարեցնելով ստացվածը զրոյի: Հետևաբար՝ առավելագույն լարումը

$$V_1 = V_2/3, \quad (4)$$

ինչը ապահովում է առավելագույն $\Gamma Z\Upsilon$: Γ -ն նշանակում է, որ էլքային լարման $1/3$ մասը տրվում է մուտքային սեղմակներին: Ներմուծենք $\Gamma Z\Upsilon$ -ի գործակիցը որպես V_2/V_{1+} հարաբերություն: Այդ դեպքում նախորդ քննարկումներից հետևում է, որ $V_2/V_{1+} = V_2/V_1 = 3$:

Նկ. 1-ում ցույց է տրված, թե ինչպես է դրական հակադարձ կապը ապահովված գործող օպերացիոն ուժեղացուցչում: Երբ $R = X$, ապա ազդանշանի մեկ երրորդ մասը վերադառնում է հետ՝ օպերացիոն ուժեղացուցչի չշրջող (+) մուտքին: $\Gamma Z\Upsilon$ -ի զրոյականից տարբերվելու հետևանքով, ցանկացած փոքր էլքային ազդանշանի առկայության դեպքում ՕՈԻ-ն արագ հասնում է հազեցման: Օրինակ, ենթադրենք էլքային ազդանշանն ունի միավոր արժեք: $\Gamma Z\Upsilon$ -ի հետևանքով առաջին անգամ ազդանշանն ուժեղացվում է մինչև $1+1/3$, այնուհետև՝ մինչև $1,33+1,33/3$, հետո $1,77+1,77/3$ և այսպես մինչև հազեցում: Հազեցումը տեղի ունի, քանի որ շղթան չի կարող լարումը բարձրացնել առավել քան օպերացիոն ուժեղացուցչի սնուցման լարման արժեքը:

Փորձում կարևոր է որոշել նաև դրական հակադարձ կապի մուտքի և էլքի միջև եղած **փուլային շեղումը**: Կարելի է ասել, որ մուտքում և էլքում փուլային շեղման առկայության դեպքում $\Gamma Z\Upsilon$ -ն առաջացնում է էլքային ազդանշանի դեստրուկտիվ ինտերֆերենցիա: Բազմապատկելով (3)-ի համարիչը և հայտարարը հայտարարի կոմպլեքս համալուծով, և առանձնացնելով իրական ու կեղծ մասերը՝ կստանանք Φ փուլային շեղումը

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{R^2 - X^2}{3RX} : \quad (5)$$

(5) հավասարումը ցույց է տալիս, որ երբ X -ը փոփոխվում է R -ի մերձակայքում, ապա V_2 և V_1 -ի միջև փուլային շեղումը փոքր է և այն կարելի է անտեսել (հակադարձ կապը դրական է): $\Gamma Z\Upsilon$ -ի գործակիցը մնում է $1/3$, ինչպես կար նախկինում: $R = X = 1/\omega C = 1/2\pi\nu C$ դեպքում ν հաճախության համար ունենք

$$\nu = \frac{1}{2\pi RC} : \quad (6)$$

Մնացած բոլոր հաճախությունները ստեղծում են փուլային շեղում: Շղթայում առկա աղմուկը կարող է ընդգրկել ռեզոնանսային հաճախություն: Այդ հաճախությունն արագորեն ուժեղացվում է մինչև հազեցման

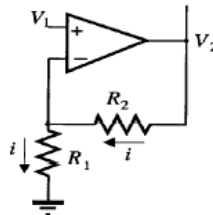
հասնելը: Ինչպես վերևում նշեցինք, միկրոֆոնային ուժեղացուցչում ակուստիկական համակարգը պատահականորեն ուժեղացնելով սեփական աղմուկը, հասնում է հագեցման և ստեղծում սաստիկ սուլոց: Դա տեղի ունի միկրոֆոնի և բարձրախոսի միջև ԴՀԿ-ի պատճառով, որը կարելի է դեկավարել փոփոխելով նրանց միջև եղած հեռավորությունը: Ինչ կարելի է անել, որպեսզի սահմանափակենք այդ «էլեկտրոնային աղետը»: ԴՀԿ-ն վերահսկելու համար Վինի գեներատորում կիրառվում է նաև բացասական հակադարձ կապ (ԲՀԿ): Կամրջակի ԲՀԿ-ի հատվածը ցույց է տրված նկ. 3-ում: Ինչպես երևում է, V_2 լարման համար կարող ենք գրել

$$V_2 = I(R_2 + R_1): \quad (7)$$

ՕՈԻ-ի (-) մուտքի լարումը ներկայացնենք

$$V_- = IR_1 \quad (8)$$

տեսքով:



Նկ. 3. Վինի կամրջակի բացասական հակադարձ կապի հատվածը:

Եթե $V_- = V_+ = V_1$, ապա ԲՀԿ-ի գործակիցը նշանակելով $B = V_2/V_{1-}$, կստանանք

$$B = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}: \quad (9)$$

Ցածր հաճախությունների համար հաճախ օգտագործվում է այնպիսի ՕՈԻ, որն ունի շատ մեծ (10^5 և ավելի) ուժեղացում: ԲՀԿ-ն, արտահայտված B-ով, փոքրացնում է լրիվ ուժեղացումը մինչև $V_{1-} = V_2/B$ արժեքը: Այժմ լրիվ ուժեղացման գործակիցը նշանակելով G տառով, կգրենք

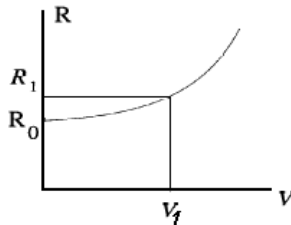
$$G = V_{1+}/V_{1-} = B/3 \quad (10)$$

Որպեսզի լրիվ շղթայի ուժեղացումը հավասար լինի մեկի (կայուն ռեժիմ), պետք է որ $B = 3$, իսկ (9) հավասարման մեջ $R_2 = 2R_1$, ($R_1 = 0,5R_2$): Եթե $R_2 > 2R_1$, ապա $B > 3$ և լրիվ ուժեղացումը մեծ է մե-

կից: Եթե $R_2 < 2R_1$, ապա $B < 3$, և V_2 -ում առկա ցանկացած մուտքային ազդանշան կձգտի գրոյի: Հետևաբար, ԲՀԿ-ի կրիտիկական արժեքը 3 է: Վիճի կամրջակի սխեման ստեղծում է կայուն սինուսոիդալ տատանումներ՝ պահպանելով ԲՀԿ-ի արժեքը: Եթե $B = 3$, ապա $G = 1$, ուրեմն համակարգը կայուն է:

Վիճի կամրջակը ոչ գծային շղթա է, քանի որ R_1 դիմադրությունն ունի ոչ գծային բնութագիր: Այսպիսի ոչ գծային դիմադրությունն այս աշխատանքում իրականացվում է շիկացման լամպի միջոցով: Լամպի դիմադրությունն աճում է պոտենցիալների տարբերության մեծացման ժամանակ, ինչպես ցույց է տրված նկ. 4-ում: Փոքր V լարման համար լամպի դիմադրությունը ներկայացվում է Թեյլորի շարքի տեսքով

$$R_1(V) = R_0 + R'(0)V + \frac{1}{2!}R''(0)V^2 + \dots : \quad (11)$$



Նկ. 4. Լամպի R_1 դիմադրության կախվածությունը V լարումից:

Քանի որ $V = 0$ շրջակայքում կորի թեքությունը հավասար է գրոյի, ուրեմն բավականին փոքր V -երի համար կարելի է գրել.

$$R_d = R_1 - R_0 = KV^2, \quad (12)$$

որտեղ $K = R''(0)/2!$, իսկ ավելի բարձր կարգի անդամները (11)-ում անտեսվել են: R_d -ն ներկայացնում է լամպի դինամիկ կամ դիֆերենցիալ դիմադրությունը: R_0 արժեքը լամպի դիմադրությունն է, երբ հոսանքը լամպում բացակայում է (չափվում է փորձը կատարելուց առաջ):

Մարման գործակցի որոշումը

R_d դինամիկ դիմադրության փոփոխության արագությունը դեկավարվում է երկու մրցակից մեխանիզմներով.

1. կիրառված լարման հետևանքով լամպի տաքացմամբ,
2. շրջապատի ազդեցության տակ լամպի սառեցմամբ (մինչև սենյակային ջերմաստիճան):

Ենթադրելով, որ R_d -ի փոփոխության արագությունը ժամանակի ընթացքում ուղիղ համեմատական է R_d -ին՝ կստանանք

$$\frac{dR_d}{dt} = -\frac{R_d}{\tau} + KV^2 : \quad (13)$$

Աջից առաջին անդամը համապատասխանում է սառեցմանը τ ռելաքսացիայի ժամանակի ընթացքում և ունի բացասական նշան: τ -ն սառեցման կամ ռելաքսացիայի ժամանակն է, այսինքն, այն ժամանակը, որի ընթացքում դիմադրությունը փոքրանում է որևէ արժեքից մինչև այդ արժեքի $1/e$ մասը: Սառեցման (օրինակ՝ շղթան անջատելիս կամ R_2 դիմադրությունը փոքրացնելիս) կամ տաքացման հետևանքով (13) բանաձևից հետևում է (միայն առաջին անդամի հաշվառմամբ)

$$R_d = R_1 e^{-\frac{t}{\tau}} = R_1 e^{-\gamma t}, \quad (14)$$

որտեղ $\gamma = 1/\tau$ -ն մարման գործակիցն է: Մարման առկայությամբ ելքային լարումը կներկայացվի հետևյալ տեսքով

$$V_2 = V_{2\max} e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi) : \quad (15)$$

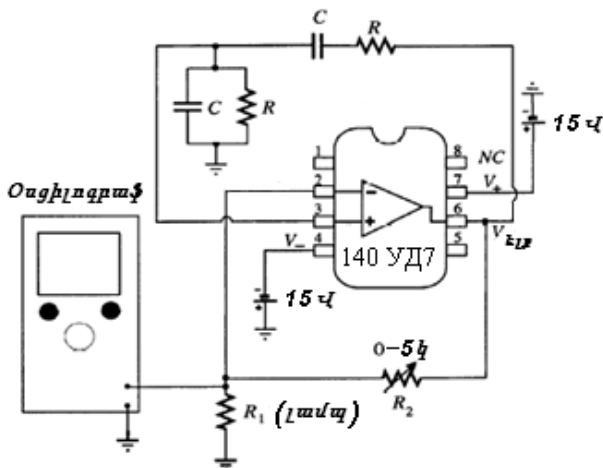
(13) բանաձևի աջ մասի երկրորդ անդամը գրգռման պայմանն է, որը հետևում է (12) բանաձևից: Որպեսզի Վինի կամրջակը միանա, լամպի դիմադրության R_0 արժեքը պետք է փոքր լինի $0.5R_2$ -ից (ինչպես հետևում է (9) բանաձևից): Այդ դեպքում $B > 3$ և, որպես հետևանք, լրիվ ուժեղացումը մեծ է մեկից ($G > 1$): Քանի որ լամպի հոսանքը մեծանում է, դիմադրությունն աճում է և B -ն հասնում է 3 արժեքին: Այդ կետում շղթան գնեերում է համարյա իդեալական սինուսոիդալ տատանումներ՝ հաստատուն լայնությամբ և հաճախությամբ: Եթե հոսանքը ինչ-որ պատահական պատճառով աճի, ապա լամպի դիմադրությունը (R_1) կմեծանա, B -ի արժեքը 3-ից կփոքրանա և ուժեղացումը կդառնա 1-ից փոքր, որի հետևանքով շղթան ինքնաբերաբար այնպես կշտկվի, որ կփոքրանա ելքային ազդանշանի արժեքը և B -ի արժեքը նորից կհասնի երեքի: Ընդհանրապես դիմադրության ջերմային ռելաքսացիայի ժամանակը ավելի մեծ է, քան ազատ տատանումների պարբերությունը: Եթե ռելաքսացիայի ժամանակը ավելի փոքր լիներ, քան պարբերությունը, ապա R_1 -ի ցանկացած փոփոխությունը կաղավաղեր ազդանշանը: Լամպի ռելաքսացիայի ժամանակը հիմնականում 0.2 – 2.0 վայրկյան տիրույթում է, այնպես որ աշխատանքում ստացված տատանման պարբերությունը մոտ տասն անգամ փոքր է այդ ռելաքսացիայի ժամանա-

կից: Դա նշանակում է, որ Վինի կամրջակը կարող է գրգռել հինգ հեր-ցից բարձր հաճախությամբ սինուսոիդալ տատանում:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԸ

Առաջադրանք 1. Ստանալ սինուսոիդալ տատանում (սահմանային ցիկլ): Շղթայում փոփոխություններ չմտցնել և գրանցել տվյալները, քանի որ դրանք օգտագործվելու են հաջորդ աշխատանքում:

1.1. Շղթայի ամբողջական սխեման պատկերված է նկ. 1.5-ում:



Նկ. 1.5 Վինի կամրջակի սխեման:

Որպես օպերացիոն ուժեղացուցիչ օգտագործվում է 140YD7: Մնման համար ցանկալի է օգտագործել +15 և -15Վ լարման երկու առանձին աղբյուրներ: Երկու դիմադրությունների և երկու ունակությունների արժեքները կրիտիկական չեն, բայց պետք է հավասար լինեն իրար: Փորձում ստացված հաճախությունը կլինի 5 Հց-ից բարձր: Օրինակ՝ կարելի է վերցնել $R = 47$ կՕմ և $C = 0,022$ մկՖ:

1.2. R_2 դիմադրության համար օգտագործում են դիմադրությունների արկղ, որի միջոցով կարելի է ընտրել R_2 դիմադրության ճշգրիտ արժեքը:

1.3. Թվային չափիչ սարքի միջոցով որոշել լամպի R_0 սկզբնական դիմադրությունը: R_1 դիմադրության դերում շատ լավ են աշխատում

փոքր շիկացման լամպերը (12Վ): Որոշել այն R_2 արժեքը, որի դեպքում գեներատորը կհեռանա իր շեմից (կիզակետից):

1.4. Օգտագործել (6) հավասարումը, շղթայի ռեզոնանսային հաճախության արժեքը հաշվելու համար:

1.5. Միացնել շղթան:

1.6. R_2 -ը ($R_2 \approx 2R_0$) կարգավորել այնպես, որ օսցիլոգրաֆի վրա դիտվի սինուսոիդալ տատանում: Համոզվել, որ սինուսոիդ ստացվելու դեպքում $2R_1 = R_2$:

1.7. Ինչպիսի՞ն է R_2 -ի կրիտիկական արժեքը: Հաշվել R_1 -ը: Ինչպիսի՞ն է R_d դինամիկ դիմադրությունը, որտեղ $R_d = R_1 - R_0$:

1.8. Օսցիլոգրաֆի կամ հաճախաչափիչի օգնությամբ չափել սահմանային ցիկլին համապատասխանող հաճախության արժեքը և համեմատել (6) հավասարումից ստացված տեսական արժեքի հետ:

1.9. Օսցիլոգրաֆի վրա սինուսոիդալ տատանում ստացվելուց հետո անջատել սնման աղբյուրը:

1.10. Միացնել սխեման և հետևել սահմանային ցիկլին ձգտող ազդանշանին:

1.11. Փորձել բացատրել անցումային պրոցեսը:

1.12. Կրկնել նույն քայլերը R_2 -ի մեծ արժեքների համար:

Առաջադրանք 2. Ռելաքսացիայի ժամանակի որոշումը:

2.1. Միացրել սխեման և միացման ընթացքում հետևել անցումային տատանմանը: Չափել սահմանային տատանման մոդուլացման պարբերությունը և հաճախությունը:

2.2. Չափել ռելաքսացիայի ժամանակը: Դա մոտավորապես այն ժամանակն է, որի ընթացքում մոդուլացիայի լայնույթը փոքրանում է սկզբնականի նկատմամբ e կամ ≈ 3 անգամ: Այս չափումները կարելի է կատարել միայն անցումային ռեժիմում:

2.3. Հարմարության համար օգտվել արտաքին իմպուլսային գեներատորից, կարգավորելով նրա հաճախությունը և շղթայի R_2 դիմադրությունն այնպես, որ շղթան գտնվի շեմից ներքև և արտաքին ազդանշանի ազդեցության տակ առաջանան տատանումներ: Օսցիլոգրաֆի օգնությամբ որոշել ռելաքսացիայի τ ժամանակը:

Առաջադրանք 3. Լամպի ոչգծայնության որոշումը.

- 3.1.** Շղթայից հանել լամպը:
- 3.2.** Այն հաջորդաբար միացնել հաստատուն սնուցման լարման աղբյուրի և ամպերմետրի հետ:
- 3.3.** Լամպին զուգահեռ միացնել վոլտմետրը:
- 3.4.** Գրանցել լամպով անցնող հոսանքի արժեքները սկսած 0,05-ից մինչև 1 Վոլտ պոտենցիալների տարբերությունը: Որոշել R_d արժեքը:
- 3.5.** Կառուցել R_d կախվածության գրաֆիկը V -ից:
- 3.6.** Հաշվի առնել, որ (12) հավասարումը նախատեսված է փոքր լարումների համար: Որոշել K -ի արժեքը: Պահպանվում է արդյոք այդ կապը բարձր լարումների համար:

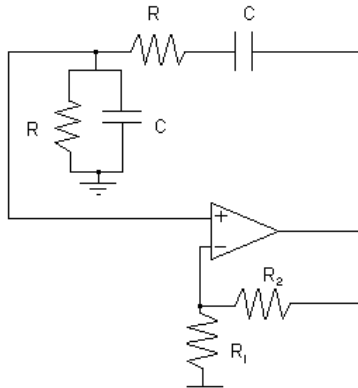
Աշխատանք 7

ՎԱՆ ԴԵՐ ՊՈԼԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՑԻԿԼ

Աշխատանքի նպատակն է ստանալ և ուսումնասիրել Վան դեր Պոլի (ՎԴՊ) հավասարմամբ նկարագրվող սահմանային ցիկլը:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Այս աշխատանքում օգտագործվում է Վինի նույն գեներատորը, որն օգտագործվել է աշխ. 6-ում: Հարմարության համար սխեման կրկին բերված է նկ. 1-ում:



Նկ. 1. Վինի կամրջակը որպես գեներատոր:

Ինչպես ցույց է տրված աշխ. 7-ում, կամրջակն առաջացնում է ինքնատատանումներ: Փուլային հարթության վրա փուլային կետն, այդ դեպքում, դուրս գալով ֆոկալ կետից հասնում է սահմանային ցիկլի, ինչը տվյալ դեպքում համապատասխանում է իդեալական սինուսոիդալ տատանման: Փորձի ընթացքում գրանցվող մեծությունը R_1 դիմադրության վրա V լարումն է (միջին քառակուսային արժեքները): Ինչպես հայտնի է, այդ լարման տատանումները նկարագրվում են հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարմամբ

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega^2 V = f(t), \quad (1)$$

որտեղ γ -ն մարման գործակիցն է, իսկ $f(t)$ -ն ներկայացնում է արտաքին աղմուկը: Հիշեցնենք, որ փոքր մարումների համար Q անչափ քանակական մեծությունը (բարորակությունը) սահմանվում է որպես կուտակված լրիվ էներգիայի և մեկ պարբերության ընթացքում էներգիայի

կորստի հարաբերություն և, հեշտ է ցույց տալ, որ այն տրվում է $Q = \omega/2\gamma$ հարաբերությամբ: Հարմարության համար նշանակենք $\Gamma = 1/Q$ և տեղադրենք (1) հավասարման մեջ

$$\ddot{V} + \Gamma \omega \dot{V} + \omega^2 V = f(t): \quad (2)$$

Վիսի կամրջակի նման շղթաների դեպքում սահմանային ցիկլին մոտ գտնվելու համար Γ գործակիցը պետք է լինի նշանափոխ (տես (2) հավասարման լուծումը (աշխատանք 6, բանաձև (15)): Որպեսզի հասկանանք, թե ինչպես կարող է դա տեղի ունենալ, հիշենք, որ նախորդ փորձում (աշխ. 7) Վիսի կամրջակի սխեմայի լրիվ ուժեղացումը

$$G = B/3, \quad (3)$$

որտեղ $FZ\gamma$ -ի B գործակիցը հավասար էր

$$B = \frac{R_1 + R_2}{R_1}: \quad (4)$$

Հիշենք նաև, որ փորձում B -ի արժեքը կախված էր շիկացման լամպի R_1 ոչ զծային դիմադրությունից: Տատանումները սկսվում են, երբ B -ի արժեքը մի փոքր մեծ է 3-ից: Հետևաբար $G > 1$: Այդ դեպքում $\gamma < 0$ -ից, $\Gamma < 0$ -ից և տատանումները կաճեն քանի դեռ բավարարված է այդ պայմանը: R_1 դիմադրությամբ հոսանքի աճմանը զուգընթաց B -ի արժեքը նվազում է: Արդյունքում G -ն նվազում է մինչև 1-ից փոքր արժեք: Այդ դեպքում տատանումները մարում են այնքան ժամանակ, քանի դեռ Γ գործակիցը դրական է: Երբ $\Gamma < 0$, տատանումներն աճում են: Որպեսզի հաշվի առնենք Γ -ի նշանափոխ լինելը՝ գրենք այն հետևյալ տեսքով

$$\Gamma = -\beta \left(1 - \frac{1}{G} \right) = -\beta \left(1 - \frac{3}{B} \right), \quad (5)$$

որտեղ β -ն որևէ դրական հաստատուն է: Միավորելով (2) և (5)-ը՝ կստանանք

$$\ddot{V} - \beta \omega \left(1 - \frac{3}{B} \right) \dot{V} + \omega^2 V = 0, \quad (6)$$

որտեղ արտաքին զրգրման անդամը բաց է թողնված ($f(t) = 0$), քանի որ այդ անդամն անհրաժեշտ է միայն տատանումներ առաջացնելու, այլ ոչ թե այն պահպանելու համար: Կարելի է ցույց տալ, որ (6) հավասարումը համարժեք է Վիսի կամրջակի (2) հավասարմանը՝ գրված հետևյալ տեսքով

$$\ddot{V} + 9\omega(\alpha - \alpha_c)\dot{V} + \omega^2 V = 0: \quad (7)$$

Որպեսզի ցույց տանք (6)-ի և (7)-ի համարժեքությունը, ընդունենք, որ

$$\alpha = 1/B, \quad \alpha_c = 1/3, \quad \beta = 3 :$$

Տեղադրելով (4)-ը (6)-ի մեջ և նկատելով, որ շիկացման լամպի R_d դիմադրությունը հավասարակշռության վիճակում ($dR_d/dt \approx 0$) որոշվում է աշխ. 7-ի (12) և (13) բանաձևերից որպես

$$R_1 = R_0 + \tau K V^2, \quad (8)$$

կստանանք

$$\ddot{V} - 3\omega \left(1 - \frac{3(R_0 + \tau K V^2)}{R_0 + R_2 + \tau K V^2} \right) \dot{V} + \omega^2 V = 0 \quad (9)$$

կամ

$$\ddot{V} - 3\omega \left(\frac{R_2 - 2R_0 - 2\tau K V^2}{R_0 + R_2 + \tau K V^2} \right) \dot{V} + \omega^2 V = 0 \quad (10)$$

Քանի որ $R_2 > R_1$, $R_0 + R_2 \gg \tau K V^2$, (10) հավասարումից կստանանք

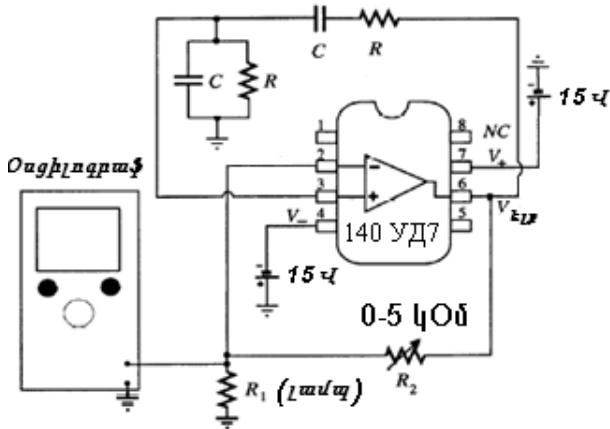
$$\ddot{V} - 3\omega \left(\frac{R_2 - 2R_0 - 2\tau K V^2}{R_0 + R_2} \right) \dot{V} + \omega^2 V = 0 : \quad (11)$$

(11) հավասարումը ՎդՊ-ի չնորմավորված հավասարումն է: Այս աշխատանքի նպատակն է փորձարարական ճանապարհով ուսումնասիրել ՎդՊ-ի հավասարումով նկարագրվող համակարգի վարքը:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅՔԸ

1. Աշխատանքում օգտագործվող սխեման պատկերված է նկ. 2-ում: Այն նույնն է, ինչ որ աշխատանք 6-ում: Համոզվեք, որ օգտագործվում է նույն շիկացման լամպը: Այն կազատի R_0 -ի, τ -ի և K -ի նոր չափումներից:
2. Օգտագործել $\nu = 1/2\pi RC$ բանաձևը շղթայի տատանման սեփական հաճախությունը որոշելու համար:
3. Միացնել սխեման:
4. Ընտրել $R_2 (R_2 \approx 2R_0)$ -ն այնպես, որ օսցիլոգրաֆի միջոցով գրանցվի սինուսոիդալ ազդանշան: Որոշել R_2 -ի կրիտիկական արժեքը:

5. Տեղադրել R_2 -ի արժեքը ճիշտ կրիտիկական արժեքին հավասար, օսցիլոգրաֆի միջոցով համոզվել սինուսոիդալ ազդանշանի ի հայտ գալու մեջ: Չափել հաճախությունը և համեմատել տեսական արժեքի հետ:
6. Սահմանային ցիկլի գրանցումից հետո չափել R_2 -ի և V լարման լայնության լայնությունը:
7. Մեծացնել R_2 -ի արժեքը և կրկնել նախորդ քայլերը:



Նկ. 2. Վիճի կամրջակի վրա հիմնված գեներատորի սկզբունքային սխեման:

Առաջադրանք 1. Փուլային դիմանկարի և անցումային պրոցեսի՝ ուսումնասիրությունը արտաքին ազդանշանի առկայությամբ:

1. Ունակության օգնությամբ արտաքին իմպուլսային գեներատորը միացնել սխեմայի 3 – մուտքին:
2. Անջատելով օսցիլոգրաֆի x փոման լարումը և փոխարինելով այն արտաքին իմպուլսային գեներատորի լարումով (3-րդ մուտք՝ ունակությունից հետո)՝ ստանալ փուլային դիմանկարը:
3. Ընտրել R_2 դիմադրության շեմայինից մեծ և փոքր արժեքները: Դիտել բացվող և փակվող պարույրները:
4. Չափել ռելաքսացիայի ժամանակները շեմից վերև և ներքև գտնվելու պահերին:

Առաջադրանք 2. Մաթեմատիկական մոդելավորման կիրառում:

Տեղադրել ստացված փորձարարական արժեքները թվային մոդելավորման ծրագրի մեջ և համեմատել ստացված փորձարարական արդյունքները (մարման τ ժամանակը, ν հաճախությունը) համակարգչային մոդելավորման արդյունքների հետ:

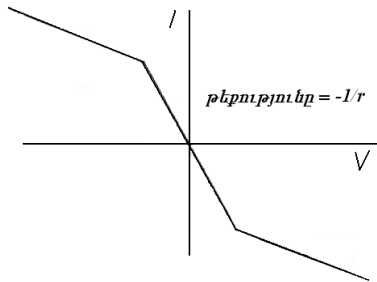
Աշխատանք 8

ԼՈՐԵՆՑԻ ԱՏՐԱԿՏՈՐ

Աշխատանքի նպատակն է ստանալ քառասային ռեժիմ, որի փուլային դիմանկարը կրկնակի պարույրով տարօրինակ ատրակտոր է (Լորենցի ատրակտորի տիպի): Աշխատանքի ընթացքում ցույց է տրվում, որ անցումը քառասային ռեժիմի իրականացվում է պարբերության կրկնապատկման կամ Ֆեյզենբաումի սցենարով:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

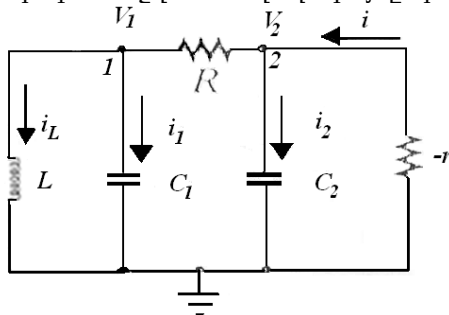
Այս աշխատանքում օպերացիոն ուժեղացուցչի շղթան (ՕՈԻ) օգտագործված է բացասական դիմադրություն ստանալու համար: Այլ աշխատանքների (օրինակ՝ թունելային դիոդի) համեմատ կա, սակայն, որոշակի տարբերություն: Բացասական դիմադրությունն այստեղ մասնակի գծային է և նրա վոլտ-ամպերային բնութագիծը բերված է նկ.1-ում:



Նկ. 1. Փորձում օգտագործվող օպերացիոն ուժեղացուցիչով շղթայի Վոլտ-Ամպերային բնութագիրը:

Շնորհիվ բացասական դիմադրության՝ տեղի ունի տատանողական պրոցես, իսկ մասնակի գծային բնույթը պայմանավորում է համակարգի վարքի քառասային դառնալը: Օգտագործվող շղթայի համարժեք սխեման բերված է նկ. 2-ում: Ստանանք համակարգի ժամանակային էվոյուցիան նկարագրող հավասարումների համակարգը: Էլեկտրոնային համակարգերում հիմնական փոփոխականներն են՝ ունակության լարումը և ինդուկտիվությամբ անցնող հոսանքը: Հավասարումները գրելիս օգտագործվում է Կիրիսեոֆի առաջին կանոնը հոսանքների համար: Շղթան ունի երեք գլխավոր անկախ կոնտուրներ: Հետևաբար, այն

ունի երեք ազատության աստիճան և հավասարումների համակարգը փակ լինելու համար պահանջվում է նվազագույնը երեք հավասարում:



Նկ. 2. Շղթայի համարժեք սխեման:

Որպես շղթայի փոփոխականներ ընտրված են V_1 (լարման անկումը C_1 կոնդենսատորի վրա), V_2 (անկումը C_2 -ի վրա) և i_L (L ինդուկտիվությամբ անցնող հոսանքը) մեծությունները: Համաձայն Կիրխոֆի առաջին կանոնի՝ երկրորդ հանգույց (կետ 2) մտնող i հոսանքը պետք է հավասար լինի դուրս եկող հոսանքների գումարին: Արդյունքում

$$i = C_2 \frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2 - V_1}{R} : \quad (1)$$

Ընդունելով, որ $-r$ բացասական դիմադրությամբ անցնող հոսանքը որոշակի ֆունկցիա է 2 հանգուցային կետի լարումից, և տեղադրելով այն (1) հավասարման մեջ, կունենանք

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{V_1 - V_2}{C_2 R} + \frac{f(V_2)}{C_2} : \quad (2)$$

Նույն ձևով՝ 1 հանգուցային կետի նկատմամբ կունենանք

$$\frac{V_2 - V_1}{R} = i_L + i_1 : \quad (3)$$

Քանի որ $q_1 = C_1 V_1$, $i_1 = C_1 dV_1/dt$, կարելի է գրել (3) հավասարումը հետևյալ կերպ

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{V_2 - V_1}{C_1 R} - \frac{i_L}{C_1} : \quad (4)$$

Շղթայի մյուս հավասարումը կոճի լարման և հոսանքի կապն է,

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{V_1}{L} , \quad (5)$$

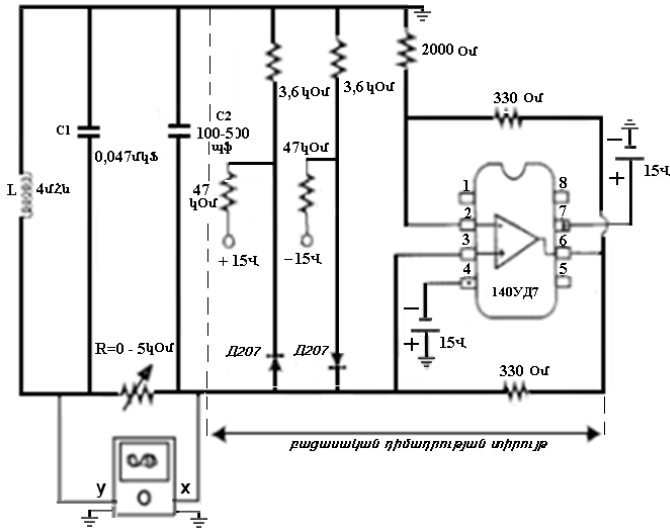
քանի որ $V_1 = -L di_L / dt$: Նշենք, որ հավասարումների համակարգը ամբողջական է, քանի որ ունենք երեք հավասարումներ՝ երեք անհայտներով: Ստացվում է կապված երեք ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ: Ինչպես հայտնի է ոչ գծային ֆիզիկայի դասընթացից, նման համակարգում պարամետրերի համապատասխան ընտրությամբ հնարավոր է ստանալ քառասային ռեժիմ:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԸ

Լորենցի ատրակտոր ստանալու սկզբունքային սխեման պատկերված է նկ. 3-ում: Շղթայում առկա երկու դիոդները ստեղծում են բացասական դիմադրության կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիան: Այդ դիոդները գործում են որպես անջատիչներ, որոնք բացվում են, երբ ուղիղ լարումը գերազանցում է ~ 0.5 Վ: Երբ դիոդները բաց են, 3.6 կՕմ և 2 կՕմ դիմադրությունները դառնում են բացասական դիմադրության մաս: Որպես ինդուկտիվություն օգտագործված է սոլենոիդը: Այն պետք է ունենա փոքր ակտիվ դիմադրություն և 4 մՀն ինդուկտիվություն: Որպես արտաքին R փոփոխական դիմադրություն օգտագործվում է 0 - 5 կՕմ դիմադրությունների արկղը: Ուսումնասիրվող ազդանշանը արտաքին փոփոխական դիմադրության երկու ծայրերում եղած լարումներն են և միացվում են օսցիլոգրաֆի x և y մուտքերին:

1. Միացնել արտաքին դիմադրությունը և սնման աղբյուրները սխեմային:
2. Փուլային դիմանկարում տարօրինակ ատրակտորի կրկնակի գալարը տեսնելու համար օսցիլոգրաֆի x և y մուտքերին միացնել R դիմադրության ծայրերը և անջատել օսցիլոգրաֆի սեփական փոման գեներատորը: Այդ մուտքերի լարումները հողակցման կետի նկատմամբ համապատասխանում են C_1 և C_2 կոնդենսատորների V_1 և V_2 լարումներին:
3. Դանդաղ փոփոխել R դիմադրության մեծությունը նրա առավելագույն արժեքից մինչև բացասական դիմադրության մոտ գտնվող կետը (մեր սխեմայում 2 կՕմ): Այդ տիրույթում փուլային դիմանկարը մեկ փակ գալարից վերածվում է կրկնակի, հետագա աճման դեպքում քառակի և այլն գալարների՝ մինչև քառասային ռեժիմի անցնելը: Այս շղթան շատ զգայուն է դիմադրության փոքր փոփոխությունների նկատմամբ: Այնպես որ պետք է զգույշ հետազոտել

կրիտիկական տիրույթը: Կրկնակի գալարի ի հայտ գալը հեշտ է դիտել R դիմադրության նույն փոփոխման միջոցով:



Նկ. 3. Լորենցի ատրակտոր ստանալու սկզբունքային սխեման:

4. Երբ գտնվում եք կրկնակի գալարի տիրույթում, անջատել օսցիլոգրաֆը $x - y$ ռեժիմից և միացնել միաճառագայթային ռեժիմին: Այս ժամանակային գրաֆիկները համապատասխանաբար նկարագրում են համակարգի քվադրատիկական և քառասային վարքը:
5. Որոշել հաճախականությունների և լարումների փոփոխման տիրույթները:
6. Եթե ազդանշանը գտնվում է ձայնային հաճախությունների տիրույթում, (100 - 15000 Հց), ուժեղացուցչի միջոցով միացնել ելքը բարձրախոսին և լսել քառասային ռեժիմին համապատասխանող աղմուկը:
7. Փորձել ստանալ նկ. 1-ի ասիմետրիկ մասնակի խզված ֆունկցիա՝ մեծացնելով կամ փոքրացնելով սնման աղբյուրների լարումներն առանձին-առանձին:
8. Էլեկտրոնային սպեկտրաանալիզատորի միջոցով ուսումնասիրել ելքային ազդանշանի սպեկտրը: Համոզվել, որ տեղի ունի քառասային անցման պարբերության կրկնապատկման սցենարը: Ստուգել քառասային ռեժիմում անընդհատ սպեկտրի առաջանալը:

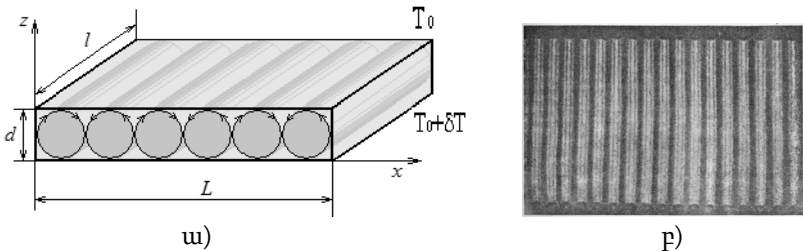
ԿՈՆՎԵԿՏԻՎ ՇԱՐԺՈՒՄՆԵՐԸ ՀԵՂՈՒԿՆԵՐՈՒՄ

Ձերմային ընդարձակման բավականաչափ մեծ գործակից ունեցող հեղուկում ջերմաստիճանների ցանկացած տարբերություն ծնում է խտությունների նկատելի տարբերություն: Եթե այդպիսի հեղուկը տեղադրվի գրավիտացիոն դաշտում, ապա վերջինս իր հերթին տարբեր ուժերով կազդի հեղուկի միևնույն ծավալ, սակայն տարբեր խտություններ ունեցող մասերի վրա՝ շարժման մեջ դնելով նրանց: Այս երևույթը կոչվում է ջերմային կոնվեկցիա: Հեղուկի հաստ շերտերում, երբ առկա է ջերմաստիճանի հորիզոնական հաստատուն գրադիենտ, ավելի տաք կողմի հեղուկը թեթև է, որը կբարձրանա, իսկ ավելի սառը կողմինը՝ ծանր, և այն կիջնի: Ուստի, անկախ այն բանից, թե որքան փոքր է ջերմաստիճանների տարբերությունը, կառաջանա պտտող մոմենտ, որը շարժման մեջ կդնի հեղուկը:

Վիճակն այլ է, եթե հորիզոնականի փոխարեն գոյություն ունի ջերմաստիճանի ուղղաձիգ գրադիենտ: Այս դեպքում հեղուկի վերին հորիզոնական շերտերն ավելի ծանր են, քան՝ ստորինները: Գրավիտացիոն դաշտում այդպիսի վիճակը խիստ անկայուն է: Ծանր հեղուկը ձգտում է իջնել ներքև: Սակայն ջերմաստիճանի հորիզոնական համասեռ բաշխման պայմաններում շարժման սկիզբն անորոշ է: Ամբողջ շերտը իջնել չի կարող: Հատկապես որտեղից սկսվելը որոշում են ջերմաստիճանի հորիզոնական ֆլուկտուացիոն փոփոխությունները: Եթե հորիզոնական հարթության վրա ֆլուկտուատիվ առաջանա ջերմաստիճանի գրադիենտ ինչ-որ բնութագրական օպտիմալ L հեռավորության վրա, ապա ավելի սառը մասի հեղուկը կսկսի իջնել: Այստեղ իրար հետ մրցակցում են երկու պրոցեսներ: Գրավիտացիոն դաշտը ձգտում է շարժել հեղուկը (ծանրության ուժը՝ իջեցնել, իսկ արքիմեդյանը՝ բարձրացնել), ջերմահաղորդականությունը ձգտում է չեզոքացնել ֆլուկտուատիվ առաջացած ջերմաստիճանների տարբերությունը: Եթե ջերմաստիճանի ուղղահայաց տարբերությունը մեծ է, ապա իջնող և բարձրացող հեղուկների արագություններն էլ բավականաչափ մեծ են: Այդ դեպքում ջերմահաղորդականությունը չի հասցնում չեզոքացնել ջերմաստիճանների ֆլուկտուատիվ տարբերությունը, քանի որ տաք և սառը հեղուկները կոնվեկցիայի արդյունքում հասնում են հակադիր թիթեղներ: Այսինքն՝ կոնվեկցիայի առաջացման համար անհրաժեշտ է, որ ջերմահա-

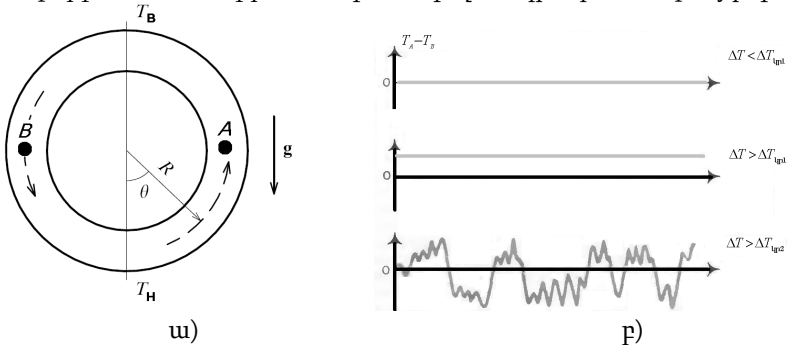
դորդականության ժամանակն ավելի մեծ լինի կոնվեկցիոն շարժման բնութագրական ժամանակից:

Նշված շեմից վերև կազմավորվում են կոնվեկտիվ բջիջներ, որոնք հեղուկի ուղղանկյուն շերտի դեպքում ունեն նրա լայնությանը զուգահեռ առանցքներով գլանների տեսք: Հարևան գլանները պտտվում են հակառակ ուղղություններով: Պտտման երկու ուղղություններն էլ համարժեք են: Այլ կերպ ասած, հեղուկի ցանկացած կետի արագությունը նույն հավանականությունով կարող է ունենալ այս կամ այն ուղղությունը (նկ. 1):



Նկ. 1. Հեղուկի շարժման կոնվեկտիվ գլանների կազմավորման սխեման (ա) (պատկերված է գլանների լայնական կտրվածքը) և փորձնական պատկերը (բ):

Այս և մի շարք այլ խնդիրների քննարկումը կարելի է հանգեցնել, ինչպես ներկայումս ընդունված է անվանել, Լորենցի համակարգին, որն առաջարկվել էր Էդվարդ Լորենցի կողմից 1963 թվականին՝ մթնոլորտային հոսքերի ուսումնասիրման նպատակով: Անդրադառնանք այդ պար-



Նկ. 2. Հեղուկ ճաճանակի քառասային տատանումները ա) Լորենցի մոդելը (1963 թ.), բ) A և B կետերի ջերմաստիճանների տարբերության ժամանակային կախվածությունը $\Delta T = T_H - T_B$ -ի երեք տարբեր արժեքների դեպքում:

զեցված մոդելին (տե՛ս նկ. 2ա): Քննարկենք հեղուկի կոնվեկցիան բարակ, օղակաձև խողովակում (կոնվեկտիվ օղակ): Օղակի լայնական հատությամբ հոսքերն այնքան փոքր են, որ կարելի է անտեսել: Վերևում քըննարկվածին համանման, օղակում հեղուկը կարող է պտտվել, եթե օղակի վերևի և ներքևի մասերի ջերմաստիճանների տարբերությունը գերազանցում է որոշակի շեմային արժեքը: Ինչպես ցույց են տալիս փորձերը, ջերմաստիճանների տարբերության մեծացմանը զուգընթաց համակարգի վարքը կարող է կրել նաև քառասային բնույթ (տե՛ս նկ. 2բ): Անդրադառնանք այս խնդրի քանակական քննարկմանը:

Ենթադրենք պատերի ջերմաստիճանը բաշխված է համաձայն

$$T_C = T_B + \frac{1}{2}(T_H - T_B)(1 + \cos \theta) \quad (1)$$

օրենքի: Այստեղ θ -ն անկյուն է, որը պատկերված է նկ. 1-ում: Այս դեպքում օղակի լայնական հատությամբ միջինացված $(T(\theta, t))$ ջերմաստիճանի համար կարող ենք գրել

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\gamma(T - T_C): \quad (2)$$

γ -ն օղակի պատերի հետ ջերմափոխանակության գործակիցն է: Կոնվեկտիվ շարժման v արագությունը կարելի է համարել θ անկյունից անկախ՝ հեղուկի փոքր անսեղմելիության ենթադրության պատճառով: Միջինացնենք (2) հավասարումը՝ ըստ θ անկյան և գտնենք ջերմաստիճանի, անկյունից անկախ մասի, ստացիոնար արժեքը (այսինքն՝ $\partial/\partial T = \partial/\partial \theta = 0$)

$$\langle T \rangle = \langle T_C \rangle + \frac{T_B + T_H}{2}: \quad (2a)$$

$T(\theta, t)$ լոկալ ջերմաստիճանի և $\langle T \rangle$ -ի տարբերությունը կհանգեցնի խտության փոփոխության $\delta\rho = \alpha \cdot \rho \cdot T$, որտեղ α -ն հեղուկի ջերմային ընդարձակման գործակիցն է: Հեղուկի խտության այս փոփոխությունը կհանգեցնի միավոր ծավալի վրա ազդող $\delta\rho \cdot \vec{g}$ ուժի առաջացման: Այս ուժի պրոյեկցիան ազիմուտալ ուղղության վրա կլինի

$$-\delta\rho g \sin \theta = -\alpha \cdot \rho \cdot T \cdot g \sin \theta:$$

Ըստ θ -ի միջինացումից հետո կստանանք միջին ուժի այն արժեքը, որն ազդում է հեղուկ օղակի վրա: Այստեղից կարող ենք գրել

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -g\rho\alpha\langle T \sin \theta \rangle - \eta v: \quad (3)$$

Այս հավասարման մեջ $\langle T \sin \theta \rangle$ -ը միջինացումն է ըստ θ անկյան, իսկ η - գործակցով վերջին գումարելին հաշվի է առնում հեղուկի արգելակումը պատերի հետ շփման պատճառով: (2) և (3) հավասարումների համակարգը հնարավորություն է ընձեռում ամբողջական ուսումնասիրել այս խնդիրը: Վերլուծենք $T(\theta, t)$ ջերմաստիճանը Ֆուրյեի շարքի

$$T(\theta, t) = \langle T \rangle - T_1 \sin \theta + T_2 \cos \theta \quad (4)$$

Տեղադրենք այս արտահայտությունը (2) հավասարման մեջ, կստանանք

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \sin \theta + \frac{\partial T_2}{\partial t} \cos \theta - \frac{\nu}{R} T_1 \cos \theta - \frac{\nu}{R} T_2 \sin \theta = \\ & = -\gamma \left[-T_1 \sin \theta + T_2 \cos \theta - \frac{T_H - T_B}{2} \cos \theta \right] \end{aligned}$$

Որպեսզի այն իրավացի լինի θ -ի ցանկացած արժեքների համար, անհրաժեշտ է, որ $\sin \theta$ և $\cos \theta$ ֆունկցիաների գործակիցներն առանձին-առանձին հավասարվեն զրոյի: Ուստիև

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\nu}{R} T_2 = -\gamma T_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} - \frac{\nu}{R} T_1 = -\gamma \left[T_2 - \frac{T_H - T_B}{2} \right]: \quad (6)$$

(3) հավասարումը ձևափոխելու համար նկատենք

$$\begin{aligned} \langle \delta T \sin \theta \rangle &= \langle -T_1 \sin^2 \theta + T_2 \sin \theta \cos \theta \rangle = \\ &= \left\langle -\frac{T_1}{2} + \frac{T_1}{2} \cos 2\theta - \frac{T_2}{2} \sin 2\theta \right\rangle = -\frac{T_1}{2}: \end{aligned}$$

Այդ դեպքում

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} g \rho \alpha T_1 - \eta v: \quad (7)$$

Անչափ մեծությունների անցնելուց հետո (5)-(7) համակարգն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y + rx - x \cdot z \\ \frac{dz}{d\tau} &= -bz + xy \end{aligned} \right\}: \quad (8)$$

Համառոտության համար այստեղ կատարված են հետևյալ նշանակումները

$$x = \frac{2\eta}{\rho g \alpha} v; \quad y = T_1; \quad z = \sqrt{b} \left(T_2 - \frac{T_H - T_B}{2} \right); \quad (8a)$$

$$\tau = \eta; \quad \sigma = \frac{\eta}{\gamma \rho}; \quad b = \left(\frac{\rho \alpha g}{2R\gamma\eta} \right)^2, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{b} (T_B - T_H): \quad (8բ)$$

Հավասարումների այս համակարգն առաջին անգամ ստացել է Էդվարդ Լորենցը 1963 թվականին: Սակայն, այս պարզ համակարգը տարօրինակ վարք էր դրսևորում: Մասնավորապես, ինչպես ցույց էր տալիս համակարգչային վերլուծությունը, սկզբնական պայմանների աննշան փոփոխությունն անգամ հանգեցնում էր անկանխատեսելի փոփոխությունների: Այս պնդումը հենց կազմում էր «թիթեռնիկի էֆեկտի» հիմքը:

Է. Լորենցի ձևակերպմամբ «թիթեռնիկի էֆեկտի» էությունը հետևյալն էր.

- Պետրում թիթեռնիկի թևի շարժումը անկանխատեսելի և փոխկապակցված պատահարների հաջորդականության արդյունքում կարող է ուժեղացնել օդի շարժումը և հանգեցնել մրրիկի Տեխասի նահանգում:

Ամբողջականության համար ընդգծենք, որ սկզբնական պայմանների տրման նկատմամբ զգայունությունը գրական ժանրում հրաշալի նկարագրված է Հ. Թումանյանի «Մի կաթիլ մեղրը» ստեղծագործությունում (այն իր հերթին Վարդան Այգեկցու «Կաթ մեղու պատճառ պատերազմի» առակի չափածո շարադրանքն է (XII-XIII դար)):

Նշենք նաև, որ Լորենցի համակարգին են հանգում բազմաթիվ այլ համակարգեր ֆիզիկայից և հարակից այլ բնագավառներից:

ՍՈՂԵԼԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Հավասարումների (8) համակարգն ունի անշարժ հեղուկին համապատասխանող պարզագույն լուծում

$$x = y = z = 0: \quad (9)$$

Նկատենք, սակայն, որ (8) համակարգն ունի ևս մեկ ստացիոնար լուծում: Իրոք

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau} = 0$$

պայմանից ունենք

$$x_0 = y_0 = \pm [b(r-1)]^{1/2}, \quad z_0 = r-1:$$

Այս լուծման գոյության համար անհրաժեշտ պայման է $r > 1$: Ինչպես երևում է նշանակումներից, $r > 1$ պայմանը նշանակում է, որ $v \neq 0$ ստացիոնար լուծում կարող է գոյություն ունենալ, եթե վերնի և ներքևի ջերմաստիճանների տարբերությունը գերազանցի որոշակի կրիտիկական արժեքը: Ընդ որում, եթե $v \sim x > 0$, պտույտը ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ է, եթե $v \sim x < 0$, ապա՝ հակառակ: Գծայնացնենք (8) համակարգը տրիվիալ հավասարակշռության վիճակի շուրջը

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \sigma(y-x) \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y + rx \\ \frac{dz}{d\tau} &= -bz \end{aligned} \right\} : \quad (10)$$

Ինչպես երևում է (10) հավասարումից, երրորդ հավասարումն անկախ է և նկարագրում է z փոփոխականի ($z \sim T_2$) մարումը: Առաջին երկու հավասարումների լուծումը փնտրենք

$$x = x_1 e^{\gamma t}, \quad y = y_1 e^{\gamma t} \quad (11)$$

տեսքով, որտեղ γ -ն փոքր խտորումների աճը նկարագրող ինկրիմենտն է: Տեղադրելով (11) տեսքն առաջին երկու հավասարումների մեջ և արտաքսելով x_1, y_1 , ստացված հանրահաշվական հավասարումների համակարգից, ստանում ենք

$$\gamma^2 + (\sigma+1)\gamma + \sigma(1-r) = 0: \quad (12)$$

$r < 1$ դեպքում γ -ի համար ստանում ենք

$$\gamma_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)^2 - \sigma(1-r)}: \quad (13)$$

Քանի որ երկու լուծումն էլ բացասական են, $\gamma_{1,2} < 0$, բոլոր խտորումները մարում են: Սակայն, ինչպես երևում է (13)-ից, $r > r_{\text{կր}} = 1$ դեպքում γ -ի մեկ արժեքը դառնում է դրական, այսինքն՝ համապատասխան խտորումը դառնում է անկայուն: $r-1$ կոչվում է վերկրիտիկականություն և կոնվեկցիայի արագությունը

$$v \sim x_0 \sim \sqrt{r-1}:$$

Եթե $r-1 \ll 1$, ապա, ինչպես երևում է (13)-ից, մոդերից մեկը ժամանակի ընթացքում դանդաղորեն աճում է: Այդպիսի մոդերն ընդուն-

ված է անվանել փափուկ մոդ: Այդպիսի մոդերի համար $(x-y)$ փոքր մեծություն է, ուստի և

$$y \approx x:$$

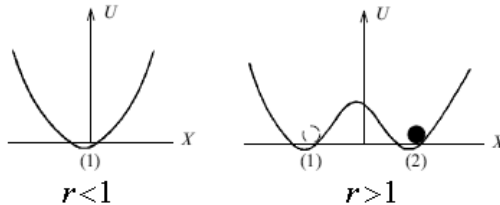
Այդ դեպքում (8) համակարգի երրորդ հավասարման մեջ վերցնելով $dz/dt = 0$ դեպքը՝ երկրորդ հավասարումը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով

$$F = -\frac{dx}{dt} + (r-1)x - \frac{x^3}{6} = -\frac{dx}{dt} - \frac{dU}{dx} = 0, \quad (14)$$

որտեղ

$$U = -\frac{(r-1)x^2}{2} + \frac{1}{4b}x^4 + const \quad (14a)$$

(14) հավասարումը կարելի է մեկնաբանել որպես զրոյական զանգվածով նյութական կետի շարժում U պոտենցիալային դաշտում



Նկ. 4. U պոտենցիալ էներգիայի կախվածությունը x մեծությունից պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:

Ինչպես տեսնում ենք, «մասնիկը» իջնում է պոտենցիալ հորի հատակը, որի տեսքը արմատապես տարբերվում է $r < 1$ և $r > 1$ դեպքերում: $r < 1$ դեպքում գոյություն ունի մեկ հավասարակշռության վիճակ՝ $x=0$: $r > 1$ դեպքում տեղի ունի բիֆուրկացիա՝ համակարգում հայտնվում են մեկ անկայուն և երկու կայուն վիճակներ:

ՍՈՐԵԼԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ինչպես երևում է Լորենցի (8) համակարգից, $r > 1$ դեպքում համակարգն ունի երեք հավասարակշռության վիճակ, որոնցից երկուսը կայուն են, մեկը՝ անկայուն: Վերլուծենք, թե ինչ կլինի (13) համակարգի հետ, եթե շարունակենք r -ը մեծացնել: Թվային վերլուծությամբ կարելի է համոզվել, որ $r > r_{կր2}$ արժեքի դեպքում դիտվում է երկրորդ բիֆուրկացիան: Ավելին, $r=28$, $\sigma=10$ և $b=8/3$ արժեքի դեպքում համակարգը քաոսային վարք է դրսևորում: Ինչպես մեկնաբանել նման «հե-

դուկ ճոճանակի» քառսային վարքը: Ենթադրենք ժամանակի տվյալ պահին հեղուկը շարժվում է ժամսլաքի ուղղությամբ: Մեծ r -երի (այսինքն՝ ջերմաստիճանի մեծ տարբերության) դեպքում Արքիմեդի ուժը դառնում է այնքան մեծ, որ օղակի վերնի մասում հեղուկը մեծ արագացման պատճառով արագ անցնում է տաք հիմքի մոտով՝ չհասցնելով տաքանալ: Հեղուկի այդ ծավալն այլևս չի կարող մինչև վերն բարձրանալ: Վերնից ներքև իջնող հեղուկն ավելի տաք է, ուստի՝ ավելի թեթև: Արգելակման հետևանքով հիմքի մոտ այն տաքանում է և սկսում վեր բարձրանալ՝ հակառակ ուղղությամբ, քանի որ ճնշումն աջից ավելի փոքր է, քան՝ ձախից: Արդյունքում հեղուկ օղակը սկսում է պտտվել հակառակ ուղղությամբ (ժամսլաքին հակառակ): Այնուհետև ամեն ինչ կրկնվում է: Քանի որ հեղուկի միավոր ծավալի տաքացման մեծությունը, օղակի պտտման արագությունը զգայուն են սկզբնական շարժման պարամետրերի նկատմամբ, ուստի վերնի և ներքնի ջերմաստիճանների մեծ տարբերության դեպքում պտտման ուղղությունը դառնում է քառսային:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԸ

Համակարգչային մաս

1. Հավաքել (8) մաթեմատիկական մոդելին համապատասխանող ծրագիր:
2. Կառուցել փուլային դիմանկարը $x(t), y(t), z(t)$ փուլային տարածությունում r պարամետրի տարբեր արժեքների դեպքում:
3. Մեկնաբանել ստացված արդյունքները:

Փորձարարական մաս

1. Ալյումինի փոշի խառնած հեղուկ պարունակող անոթում (TM-տիպի յուղ) ստեղծել ջերմաստիճանային ուղղաձիգ գրադիենտ:
2. Դիտել համակարգի վարքը ջերմաստիճանների տարբերության տարբեր արժեքների դիպքում:
3. Ֆիքսել ջերմաստիճանների այն տարբերությունը, որից սկսած առաջանում են կոնվեկտիվ գլաններ:
4. Հեղուկի հայտնի պարամետրերով գնահատել Ռեյլեի թիվը:
5. Գնահատել հեղուկի շրջապտույտի առավելագույն արագության հորիզոնական պրոյեկցիայի առավելագույն արժեքի կախումը հեղուկի շերտի հաստությունից և ջերմաստիճանի գրադիենտից:

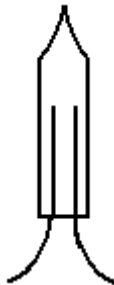
Աշխատանք 10

ՌԵԼԱՔՄԱՑԻՈՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄՏԱՑՈՒՄԸ ՆԵՈՆԱՅԻՆ ԼԱՄՊՈՎ

Աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել հաստատուն լարման աղբյուրից, նեոնային լամպից և կոնդենսատորից բաղկացած շղթայում առաջացող ռելաքսացիոն տատանումները: Աշխատանքում ռելաքսացիոն տատանումներ ստանալու համար օգտագործվում է նեոնային լամպի աշխատանքային որոշակի տիրույթում բացասական դիմադրության առաջացումը:

ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

Փուլային հարթության վրա կայուն պարբերական տատանումներին (որոնք առաջանում են ավտոնոմ (ժամանակից անկախ) ուժի ազդեցությամբ) համապատասխանող փուլային դիմանկարը կոչվում է սահմանային ցիկլ (աշխ. 1): Եթե համակարգը նկարագրող փոփոխականը ժամանակի որոշակի փոքր ինտերվալում (պարբերության համեմատ) արագ է փոխվում, ապա ասում են, որ տատանակը կատարում է ռելաքսացիոն տատանումներ:

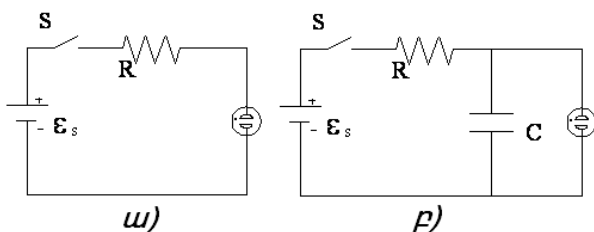


Նկ. 1. Նեոնային լամպ:

Նկ. 1-ում պատկերված է նեոնային լամպի պարզագույն մոդելը՝ ~ 1.0 սմ երկարությամբ լամպը պարունակում է 2 էլեկտրոդ, որոնք հեռացված են իրարից ~ 2 մմ-ով և լցված ցածր ճնշման նեոն գազով: Էլեկտրական դաշտն էլեկտրոդների միջև արագացնում է լամպում ինչ-ինչ պատճառով առկա էլեկտրոններին և նեոնի իոններին: Եթե էլեկտրական դաշտը բավականաչափ մեծ է, ապա էլեկտրոնները ազատ

վազքի երկարության վրա ձեռք են բերում արագություն, որը բավարար է ատոմների և էլեկտրոդների հետ բախման ժամանակ նոր էլեկտրոններ պոկելու համար: Շղթայական պրոցեսը շարունակվում է մինչև համակարգի հոսանքի հազեցման հասնելը: Այսպիսով՝ էլեկտրոդների միջև լարման որոշակի ցածր արժեքի դեպքում, երբ լամպը դեռ բռնկված չէ, լամպն ունենում է մեծ դիմադրություն: Բռնկման կրիտիկական լարման (V_p) արժեքի դեպքում, երկրորդային էլեկտրոնների առաջացման հաշվին լամպը դառնում է հաղորդիչ: Դա արտահայտվում է լամպի լուսարձակումով (մարմրող պարպում): Լուսարձակման ժամանակ, նրա լարումն ընկնում է ի հաշիվ հոսանքը սահմանափակող բեռի դիմադրության (նկ. 2ա), որը միացված է լամպին հաջորդաբար: Հոսանքը սահմանափակող դիմադրությունը միացվում է այնպես, որ նրա մեծությունն ապահովի լամպի մարմրող պարպումը: Եթե դիմադրությունը ճիշտ է ընտրված, ապա լամպն անընդհատ լուսարձակում է, եթե դիմադրությունը շատ մեծ է այն մարում է: Եթե R դիմադրությունը շատ փոքր է, իսկ $\mathcal{E}_s$ լարումը՝ մեծ, ապա հոսանքը կարող է աճել մինչև լամպի շարքից դուրս գալը:

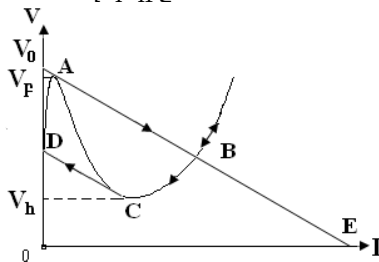
Աշխատանքում կիրառված նեոնային լամպով գեներատորի սխեման պատկերված է նկ. 2բ-ում: Շղթան առաջացնում է ռելքսացիոն տատանումներ:



Նկ. 2. Նեոնային լամպով շղթան՝ ա) առանց C կոնդենսատորի, բ) լամպին զուգահեռ միացված կոնդենսատորով:

Կոնդենսատորի դանդաղ լիցքավորման պատճառը մեծ R դիմադրությունն է: Կոնդենսատորի թիթեղների վրա լարումը մեծանում է, մինչև լարումը լամպի թիթեղների վրա հասնում է V_p բռնկման կրիտիկական լարմանը, և լամպը բացվում է: Այն պահից, երբ լամպը լուսարձակում է, նրա դիմադրությունը փոքրանում է, և կոնդենսատորը սկսում

է լամպով արագ լիցքաթափվել: Երբ կոնդենսատորը լիցքաթափվում է, լամպի վրա լարումը փոքրանում է մինչև V_h հանգչման լարումը, որը հավասարվում է այդ պահին կոնդենսատորի թիթեղների վրա եղած լարմանը: Այն պահից, երբ լամպը հանգչում է, նրա դիմադրությունը կտրուկ աճում է: Կոնդենսատորը սկսում է լիցքավորվել և այսպիսով՝ ստացվում է սահմանային ցիկլ (բնութագրի վրա հիսթերեզիս $ABCD$, ABE - բեռի գիծ): Նկ. 3-ում, երբ լարումը լամպում մեծանում է 0 կետից A , լամպով հոսանք համարյա չի անցնում: V_p (բռնկման) լարմանը հասնելիս լամպը բռնկվում է, և նրա դիմադրությունը՝ կտրուկ ընկնում, լամպը դառնում է հաղորդիչ:



Նկ. 3. Լամպի վոլտ ամպերային բնութագիծը և բեռի ABE գիծը: AC բացասական դիմադրության տիրույթն է:

Դիմադրության կտրուկ փոքրացումը բերում է լամպի հոսանքի կտրուկ աճի ($A \rightarrow B$): Այնուհետև, կոնդենսատորի լիցքաթափման պատճառով ($B \rightarrow C$) լարումը ընկնում է մինչև այն V_h արժեքը, որը բերում է հոսանքի փոքրացմանը: Լիցքաթափումը կատարվում է շատ արագ, քանի որ բռնկված լամպի դիմադրությունը շատ փոքր է համեմատած արտաքին դիմադրության հետ: Կոնդենսատորի լարումը V_h -ին հավասարվելիս՝ լամպը հանգչում է և հոսանքը՝ փոքրանում ($C \rightarrow D$): Այսպիսով, ցիկլն ավարտվում է: Այդ պրոցեսն էապես կախված է արտաքին R դիմադրությունից (նկ. 3. ABE բեռի գիծ^{*)}): Եթե R -ը փոքր է որոշակի կրիտիկական արժեքից, ապա տատանողական պրոցեսը դադարում է:

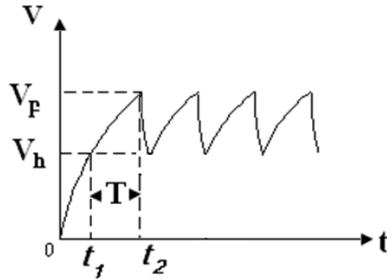
Նկ. 4-ում ցույց է տրված լարման կախումը ժամանակից:

^{*)} ABE բեռի գիծը որոշվում է $V_0 = V + IR$ հավասարումով (V_0 -ն սնման աղբյուրի լարումն է, $V(I)$ -ն լամպի $OACB$ վոլտ-ամպերային բնութագիծը նկարագրող կախվածությունը): Բեռի գծի և լամպի $V(I)$ բնութագրի հատման կետը կոչվում է աշխատանքային կետ:

Արտաքին դիմադրությունը ընտրված է այնպես, որ կոնդենսատորի լիցքավորման ժամանակը լինի շատ ավելի մեծ, քան լամպով լիցքաթափման ժամանակը: Լամպի V լարման կախումը ժամանակից կարելի է ներկայացնել հետևյալ արտահայտությամբ

$$V = V_0(1 - e^{-t/(RC)}): \quad (1)$$

(1) բանաձևում V_0 -ն աղբյուրի լարումն է: Այս բանաձևը կարող է օգտագործվել ռելաքսացիոն տատանման T պարբերությունը հաշվելիս:



Նկ. 4. Լամպի լարման կախումը ժամանակից:

Պարբերությունը՝ $T \approx t_2 - t_1$, հաշվվում է՝ լուծելով (1) հավասարումը V_h և V_F լարումների համար:

$$\exp\left(-\frac{t_1}{RC}\right) = \frac{V_0 - V_h}{V_0}: \quad (2)$$

Նկատենք, որ $\tau_1 = RC$ -ն կոնդենսատորի լիցքավորման ժամանակի հաստատունն է: Լոգարիթմելով երկու կողմերը՝ գտնում ենք t_1 -ի արժեքը.

$$t_1 = -RC \ln \left| \frac{V_0 - V_h}{V_0} \right|: \quad (3)$$

Նույն ձևով, t_2 -ի համար կստանանք՝

$$t_2 = -RC \ln \left| \frac{V_0 - V_F}{V_0} \right|: \quad (4)$$

Եթե ենթադրենք, որ կոնդենսատորի լիցքավորման τ_1 ժամանակը զգալիորեն մեծ է լիցքաթափման τ_2 ժամանակից, քանի որ լիցքավորումն իրականացվում է R դիմադրությամբ, իսկ լիցքաթափումը՝ շատ անգամ փոքր դիմադրություն ունեցող լամպով: Այդ պատճառով կարելի է համարել, որ $T \approx t_2 - t_1$: Ուստի, պարբերության համար ստանում ենք

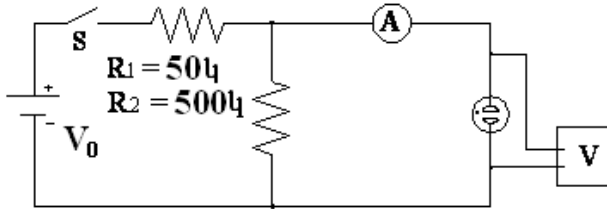
$$T = RC \ln \left| \frac{V_0 - V_h}{V_0 - V_p} \right|; \quad (5)$$

(5) արտահայտությունը ցույց է տալիս, որ ֆիքսված V_h և V_p լարումների դեպքում սնման աղբյուրի V_0 լարումը մեծացնելիս պարբերությունը փոքրանում է, իսկ հաճախությունը՝ աճում:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԸՆԹԱՅԲԸ

ա) V_h և V_p սահմանային լարումների որոշումը:

1. Հավաքել շղթան՝ ըստ նկ. 5-ի: Օգտագործվող նեոնային լամպերն ունեն տարբեր բոնկման լարումներ՝ ընկած 120-ից 170Վ սահմաններում և համապատասխան հանգման 50-ից 70 Վ: Հաստատուն հոսանքի աղբյուրը (V_0) տալիս է առավելագույն լարում՝ մինչև 200 Վ, դիմադրությունները 1 Վտ հզորությամբ:



Նկ. 5. Շղթա V_h և V_p -ի որոշման համար:

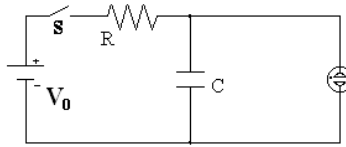
2. Դանդաղորեն մեծացնել աղբյուրի լարումը և չափել V_p պոտենցիալը նեոնային լամպի բոնկման պահին:
3. Բոնկվելուց հետո, դանդաղորեն փոքրացնել աղբյուրի լարումը: Որոշել V_h լարումն այն պահին, երբ լամպը հանգչում է: Կրկնել վերևի քայլերը 2 անգամ, ճշտության մեջ համոզվելու համար:

բ) Լարում-հոսանք կախվածության գրաֆիկի ստացումը:

1. Մեծացնել աղբյուրի լարումը մինչ լամպի բոնկվելը, նշել բոնկման V_p լարումը:
2. Մեծացնելով աղբյուրի լարումը՝ միաժամանակ գրանցել հոսանքն ու լարումը լամպում: Տրված լարումը չպետք է գերազանցի 200 Վ:
3. Դանդաղորեն փոքրացնելով աղբյուրի լարումը՝ որոշել V_h հանգչելու լարումը:
4. Կառուցել լարում-հոսանք կախվածության գրաֆիկը:

զ) Ռեկաքսացիոն տատանումներ:

1. Հավաքել շղթան՝ ըստ նկ. 6-ի, օգտագործելով $R = 0.5 \text{ ՄՕմ}$ և $C = 0.47$ մկՖ արժեքներով տարրեր և V_0 (0-200 Վ) լարմամբ սնման աղբյուր:

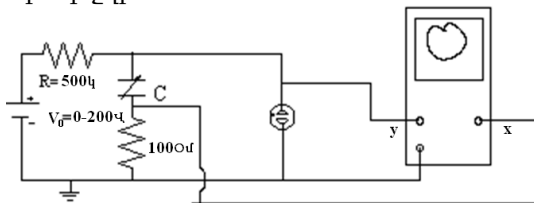


Նկ. 6. Ռեկաքսացիոն տատանումների գեներատորի սխեման:

2. Միացնել աղբյուրը և դանդաղորեն մեծացնել լարումը մինչև լամպի բոնկումը: Գրանցել հոսանքի աղբյուրի V_0 լարման արժեքը:
3. Վայրկենաչափի կամ օսցիլոգրաֆի օգնությամբ չափել բոնկման պարբերությունը: Դուք կարող եք ընտրել C -ի և R -ի արժեքներն այնպես, որ պարբերությունը լինի փոքր, որպեսզի հեշտանա վայրկենաչափի օգնությամբ չափելը: Բարձր հաճախությունների դեպքում օգտվել օսցիլոգրաֆից:
4. Օգտվելով (5) հավասարումից և իմանալով V_p , V_h ու V_0 արժեքները՝ հաշվել պարբերությունը և համեմատել փորձնական արդյունքների հետ:

դ) Դիտել ռեկաքսացիոն տատանումների փուլային դիմանկարը:

1. Հավաքել նկ. 7-ի շղթան.



Նկ. 7. Փուլային դիմանկարի ստացման սխեմա:

2. Մեծացնելով աղբյուրի V_0 լարումը մինչև լամպի բոնկումը՝ պարբերությունը հասցնել $T=0.2$ վ:
3. Միացնել օսցիլոգրաֆի $x-y$ մուտքերը արտաքին փոման ռեժիմում (ներքին փոման գեներատորի անջատված վիճակում) և դիտել փուլային դիմանկարը:

ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Լ. Ս. Ասլանյան, Ռ. Ս. Հակոբյան, Յու. Ս. Չիլինգարյան: Ոչ գծային ֆիզիկայի ներածություն: ԵՊՀ հրատարակչություն: Երևան, 2006:
2. Берже П., Помо И., Видаль К., Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
3. L. Lam. Introduction to nonlinear Physics. 1997.
4. R. H. Enns. It's Nonlinear Worlds. Springer. 2010.
5. R. H. Enns, G. C. Mc. Guine. Nonlinear Physics with mathematica for scientists and engineers. 2001.
6. H. D. I. Abarbanel, M. I. Rabinovich, M. M. Sushchik. Introduction to nonlinear dynamics for physicists. Singapore. 1993.
7. Заславский Г. М., Сагдеев Р. С., Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
8. В. С. Анищенко. Знакомство с нелинейной динамикой. М.: 2002.
9. В. С. Анищенко, Т. В. Вадивасова. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Изд.-во Саратовского университета, 1999.
10. В. С. Анищенко. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
11. М. И Рабинович, Д. И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 2003.
12. H. Goldstein, Ch. Poole, J. Safko. Classical mechanics. Third ed. Addition Wesley. Longman. 2002.
13. Е. Г. Пугачева, К. Н. Соловьевко. Самоорганизация социально-экономических систем. Иркутск, БГУЭП, 2003.
14. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко. Колебания, волны, структуры. М., Физматлит. 2003.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ներածություն	3
Բաժին I. Համակարգչային լաբորատոր աշխատանքներ	5
<i>Աշխատանք 1</i>	
Փուլային դիմանկար	6
<i>Աշխատանք 2</i>	
Ազատության մեկ աստիճան ունեցող համակարգերի կայունության ուսումնասիրությունը	17
<i>Աշխատանք 3</i>	
«Գիշատիչ-գոռ» համակարգի մաթեմատիկական մոդելավորումը	23
<i>Աշխատանք 4</i>	
Լոգիստական արտապատկերում	30
<i>Աշխատանք 5</i>	
Շրջված օսցիլյատորի ստիպողական տատանումները	37
Բաժին I I. Փորձարարական լաբորատոր աշխատանքներ	43
<i>Աշխատանք 6</i>	
Վինի կամրջակ: Կայուն սահմանային ցիկլ	44
<i>Աշխատանք 7</i>	
Վան դեր Պոլի սահմանային ցիկլ	54
<i>Աշխատանք 8</i>	
Լորենցի ատրակտոր	58
<i>Աշխատանք 9</i>	
Կոնվեկտիվ շարժումները հեղուկներում	62
<i>Աշխատանք 10</i>	
Ռելաքսացիոն տատանումների ստացումը նեոնային լամպով	70
Օգտագործված գրականության ցանկ	76

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ԼԵՎՈՆ ՍՈՒՐԵՆԻ ԱՍԼԱՆՅԱՆ
ՎԱԼԵՐԻ ԲՈՐԻՍԻ ՊԱԽԱԼՈՎ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

ԼԱԲՈՐԱՏՈՐ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ
ՈՒՍՈՒՄՆԱԿԱՆ ՁԵՌՆԱՐԿ

Համակարգչային աշխատանքները՝ Գ. Հ. Մարգարյանի
Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալոյանի
Հրատ. խմբագրումը՝ Վ. Դերձյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 30.11.2016:
Չափսը՝ 60x84 ¹/₁₆: Տպ. Մամուլը՝ 4.875:
Տպաքանակը՝ 100:

ԵՊՀ հրատարակչություն
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1
www.publishing.ysu.am